



UEPB

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA - UEPB
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA - PRPGP
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA - CCT
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA - PPGECEM
DOUTORADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA

JAIR DIAS DE ABREU

O USO DIDÁTICO DA CALCULADORA GRÁFICA DESMOS VIA
EXPLORAÇÃO-PROPOSIÇÃO-RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UMA
EXPERIÊNCIA NA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

CAMPINA GRANDE – PB
2024

JAIR DIAS DE ABREU

**O USO DIDÁTICO DA CALCULADORA GRÁFICA DESMOS VIA
EXPLORAÇÃO-PROPOSIÇÃO-RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UMA
EXPERIÊNCIA NA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

Texto apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, área de concentração *Educação Matemática*, na linha de pesquisa *Cultura Científica, Tecnologia, Informação e Comunicação*, como requisito para a obtenção do título de Doutor.

Orientador:

Prof. Dr. Silvanio de Andrade

CAMPINA GRANDE – PB
2024

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto em versão impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que, na reprodução, figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

A162u Abreu, Jair Dias de.

O uso didático da calculadora gráfica desmos via exploração-proposição-resolução de problemas [manuscrito] : uma experiência na licenciatura em matemática / Jair Dias de Abreu. - 2024.

259 f. : il. color.

Digitado.

Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2024.

"Orientação : Prof. Dr. SILVÂNIO DE ANDRADE, Departamento de Matemática - CCT".

1. Proposição de Problemas. 2. Tecnologias Digitais. 3. Coerência Didática. 4. Desmos. 5. Ensino de Matemática. I. Título

21. ed. CDD 371.33

JAIR DIAS DE ABREU

O USO DIDÁTICO DA CALCULADORA GRÁFICA DESMOS VIA EXPLORAÇÃO-
PROPOSIÇÃO-RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: UMA EXPERIÊNCIA NA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Tese apresentada à Coordenação do
Curso de Doutorado em Ensino de
Ciências e Educação Matemática da
Universidade Estadual da Paraíba,
como requisito parcial à obtenção do
título de Doutor em Ensino de Ciências
e Educação Matemática

Linha de Pesquisa: Cultura Científica,
Tecnologia, Informação e Comunicação.

Aprovada em: 04/11/2024.

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado eletronicamente por:

- **SILVANO DE ANDRADE** (***.076.315-**), em **13/12/2024 16:17:26** com chave **e363e6b4b98611efbf161a1c3150b54b**.
- **Flavia Fabiani Marcatto** (***.427.158-**), em **16/12/2024 09:27:49** com chave **29cabd3ebba911efbcad1a1c3150b54b**.
- **André Pereira da Costa** (***.424.954-**), em **13/12/2024 21:35:33** com chave **5483efdeb9b311efa8cf06adb0a3afce**.
- **Yuriko Yamamoto Baldin** (***.789.018-**), em **14/12/2024 10:26:11** com chave **fc2634d4ba1e11ef80c51a7cc27eb1f9**.
- **Rogéria Gaudencio do Rêgo** (***.116.134-**), em **14/12/2024 16:20:33** com chave **7d84f304ba5011efb1342618257239a1**.

Documento emitido pelo SUAP. Para comprovar sua autenticidade, faça a leitura do QRCode ao lado ou acesse https://suap.uepb.edu.br/comum/autenticar_documento/ e informe os dados a seguir.

Tipo de Documento: Folha de Aprovação do Projeto Final

Data da Emissão: 16/12/2024

Código de Autenticação: 394eab



Dedico esta tese a...

Aos meus pais,

Josefa Maria de Abreu Dias

José Dias da Silva

Ao meu irmão,

Jarismar Dias de Abreu

Ao meu sobrinho,

Jadson Dias de Sousa

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus, que sempre esteve comigo, mostrando que nunca estou só. Em seguida, estendo meus agradecimentos ao meu orientador, Prof. Dr. Silvanio de Andrade, pelo apoio, orientação, rigor, compromisso e paciência ao longo deste percurso. Sua dedicação, conhecimento e disponibilidade foram fundamentais para a conclusão deste trabalho.

À Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), especificamente ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática (PPGECEM), pela oportunidade de realizar este doutorado e pelo apoio institucional recebido, especialmente pelo edital de mobilidade internacional que me possibilitou uma experiência riquíssima na Universidade do Chile.

Agradeço também aos professores do PPGECEM pela excelência e compromisso com este programa de Pós-Graduação, do qual tenho muito orgulho de ter cursado o mestrado e doutorado. É um dos principais responsáveis pela formação acadêmica que tenho hoje.

Aos amigos que este itinerário do doutorado me proporcionou e que foram fundamentais nos diferentes momentos vivenciados durante esses quatro anos em Campina Grande: Adriano, Fabíola, Leonardo, Matheus, Maurício e Tiêgo.

Aos meus alunos da Educação Básica e do Ensino Superior, em especial à turma de Prática no Ensino de Matemática II do período 2022.2 da UEPB, que vivenciaram e contribuíram para o desenvolvimento da pesquisa.

À minha família, por todo o amor, compreensão e por terem me proporcionado a educação que foi a base de tudo o que conquistei.

Aos membros da banca examinadora deste trabalho, que contribuíram significativamente para a avaliação, especialmente pelos direcionamentos advindos do exame de qualificação e pelo olhar atento e cuidadoso ao meu trabalho.

Ao GEPEP.

À Secretaria de Estado de Educação e Cultura do Rio Grande do Norte, pela licença concedida para que eu pudesse me dedicar com mais tempo ao curso de doutorado.

Por fim, agradeço a todas as pessoas e instituições que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho, direta ou indiretamente. A cada um de vocês, o meu sincero agradecimento.

RESUMO

Esta tese aborda o uso didático da calculadora gráfica Desmos via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, a partir de uma experiência na licenciatura em Matemática. Nessa metodologia de sala de aula, tomamos a Proposição de Problemas como ponto de partida, considerada uma das mais desafiadoras de implementar no ensino. Observando como as Tecnologias Digitais podem ser incorporadas eficazmente a essa prática, a pesquisa também reflete sobre a pouca atenção dada à Proposição de Problemas com o uso de ferramentas tecnológicas. Assim, analisamos como essas abordagens metodológicas podem orientar o uso de recursos didáticos digitais. A pergunta central da pesquisa foi: *De que forma a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas qualifica o uso didático da calculadora gráfica Desmos?* O objetivo foi analisar como essa metodologia pode qualificar o uso didático da ferramenta. A pesquisa, de caráter qualitativo e pedagógico, foi desenvolvida na disciplina de Prática no Ensino de Matemática II, em um curso de licenciatura em Matemática, sob nossa orientação como professor-pesquisador. Participaram do estudo 13 licenciandos, e os dados foram coletados por meio de registros escritos das atividades, capturas de tela da Desmos, interações em grupos de WhatsApp, gravações em áudio das atividades em sala de aula e um diário de bordo. A análise dos dados foi realizada com base na Análise Temática. O estudo foi conduzido em dois momentos principais, totalizando 20 encontros. Na 1ª Travessia (10 encontros), os participantes foram introduzidos à metodologia de Ensino-Aprendizagem via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas e ao uso da calculadora gráfica Desmos, permitindo uma compreensão inicial e reflexiva voltada ao ensino da Matemática. Essa etapa foi essencial para o planejamento da 2ª Travessia, que se concentrou na realização de uma oficina, onde as atividades desenvolvidas com a Desmos tiveram como orientação didática a metodologia Exploração-Proposição-Resolução de Problemas. Os resultados indicam que o uso didático da calculadora gráfica Desmos pode aprofundar significativamente as atividades de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas. Ao mesmo tempo, evidenciou-se como a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas qualificou o uso didático da calculadora gráfica Desmos. Essa metodologia direcionou a aplicação didática da calculadora gráfica Desmos, facilitando a movimentação de gráficos, a ampliação do campo numérico dos inteiros para os reais, o reconhecimento de padrões, a formulação de conjecturas e o desenvolvimento de conceitos matemáticos. Esses aspectos, muitas vezes, são limitados em atividades tradicionais com lápis e papel. A pesquisa também identificou desafios enfrentados pelos licenciandos, especialmente em relação à Coerência Didática na Proposição de Problemas. Isso destaca a necessidade de um Framework Educacional que potencialize o uso didático da calculadora gráfica Desmos via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas. Essa abordagem pode impulsionar o ensino da Matemática, proporcionando um ambiente favorável à aprendizagem e à construção de conhecimentos matemáticos mais profundos.

PALAVRAS-CHAVE: proposição de problemas; tecnologias digitais; coerência didática; desmos; ensino da Matemática.

ABSTRACT

This thesis addresses the didactic use of the Desmos graphing calculator through the Problem Exploration-Posing-Solving approach, based on an experience in a Mathematics teaching degree program. In this classroom methodology, we take Problem Posing as the starting point, which is considered one of the most challenging aspects to implement in teaching. Observing how Digital Technologies can be effectively incorporated into this practice, the research also reflects on the limited attention given to Problem Posing when using technological tools. Thus, we analyze how these methodological approaches can guide the use of digital teaching resources. The central research question was: How does the Problem Exploration-Posing-Solving methodology enhance the didactic use of the Desmos graphing calculator? The objective was to analyze how this methodology can improve the educational use of the tool. The qualitative, pedagogical research was conducted in the Mathematics Teaching Practice II course, part of a Mathematics degree program, under the guidance of the researcher as professor-researcher. Thirteen teaching candidates participated in the study, with data collected through written activity records, Desmos screenshots, WhatsApp group interactions, classroom activity audio recordings, and a field journal. Data analysis was carried out using Thematic Analysis. The study unfolded over two main phases, totaling 20 sessions. During the first phase (10 sessions), participants were introduced to the Teaching-Learning methodology via Problem Exploration-Posing-Solving and the use of the Desmos graphing calculator, fostering an initial reflective understanding of Mathematics teaching. This phase was crucial for planning the second phase, which focused on conducting a workshop where activities developed using Desmos were guided by the Problem Exploration-Posing-Solving methodology. The results indicate that the didactic use of the Desmos graphing calculator can significantly enhance Problem Exploration-Posing-Solving activities. Simultaneously, it became evident how this methodology qualified the didactic use of the Desmos tool. This approach guided the educational application of the graphing calculator, facilitating graph manipulation, the expansion of the numerical field from integers to reals, pattern recognition, conjecture formulation, and the development of mathematical concepts—elements often constrained in traditional pencil-and-paper activities. The research also identified challenges faced by the teaching candidates, particularly regarding Didactic Coherence in Problem Posing. This highlights the need for an Educational Framework to optimize the didactic use of the Desmos graphing calculator via the Problem Exploration-Posing-Solving methodology. This approach has the potential to enhance Mathematics teaching, fostering a favorable environment for learning and deeper mathematical knowledge construction.

KEYWORDS: problem posing; digital Technologies; didactic coherence; desmos; Mathematics teaching.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 01 - Elemento mediador na ERPCDP.....	34
Figura 02 - A Exploração-Proposição-Resolução de Problemas como um conjunto de engrenagens.....	42
Figura 03 - A Coerência Didática e seus subconceitos.....	65
Figura 04 - Janela algébrica da CGD.....	73
Figura 05 - Interface do menu da CGD.....	74
Figura 06 - Configurações de gráfico da CGD.....	75
Figura 07 - Controle deslizante da CGD.....	76
Figura 08 - Relação entre os tipos de pesquisa e a metodologia de EPRP.....	88
Figura 09 - Percurso metodológico das atividades de pesquisa.....	95
Figura 10 - Gráfico construído na lousa em sala de aula.....	109
Figura 11 - Representação numérica e gráfica da função $f(x) = 2^x - 1$ no contexto do problema da Torre de Hanói.....	111
Figura 12 - Equívoco na representação gráfica em livro didático.....	112
Figura 13 - Representação gráfica de diferentes funções exponenciais apresentadas pelos licenciandos.....	114
Figura 14 - Explorando o controle deslizante na CGD.....	119
Figura 15 - Explorando a translação do gráfico da função exponencial na CGD.....	121
Figura 16 - Ponto de partida escolhido pelos licenciandos para a EPRP.....	159
Figura 17 - Representação algébrica e gráfica de $y = 21x$ e $y = 1.50x$	185
Figura 18 - Uso da tabela na CGD para desenvolver o cálculo aritmético.....	193
Figura 19 - Representação numérica e gráfica do terceiro serviço.....	194
Figura 20 - Construção de tabela com várias colunas na CGD.....	198
Figura 21 - Explorando graficamente os coeficientes da função afim.....	203
Figura 22 - Explorando o comportamento do gráfico da função a partir dos seus coeficientes.....	205
Figura 23 - Representação algébrica e gráfica dos serviços do Restaurante Abreu.....	208
Figura 24 - Funções com coeficientes angulares opostos.....	209
Figura 25 - Gráfico de funções crescente, decrescente e constante.....	210
Figura 26 - Exploração numérica do terceiro serviço na CGD.....	213
Figura 27 - Exploração numérica, algébrica e gráfica do terceiro serviço na CGD.....	214

Figura 28 - Explorando o domínio da função do terceiro serviço na CGD.....	215
Figura 29 - Exploração numérica, algébrica e gráfica do quarto serviço na CGD.....	216
Figura 30 - Usando a tabela da CGD para explorar problemas.....	220
Figura 31 - O zero da função no quarto serviço.....	221
Figura 32 - Identificando o zero das funções graficamente na CGD.....	221
Figura 33 - Exploração inicial do estudo do sinal da função na CGD.....	224
Figura 34 - Representação algébrica e gráfica de $f(x) = 0.015x + 2$ na CGD.....	225
Figura 35 - Representação algébrica e gráfica de $f(x) = -2x + 3$ na CGD.....	227
Figura 36 - Representação algébrica e gráfica de $f(x) = 0.021x$ e $f(x) = 15$ na CGD...	230
Figura 37 - Representação algébrica e gráfica dos primeiros serviços dos restaurantes na CGD.....	233
Figura 38 - Explorando ideias de inequações na CGD.....	233
Figura 39 - Representação algébrica e gráfica de inequações na CGD.....	234

LISTA DE TABELAS

Tabela 01 - Diferentes olhares para a Proposição de Problemas.....	44
Tabela 02 - Pesquisas Nacionais de mestrado com a Desmos.....	79
Tabela 03 - Quantidade mínima de movimentos dos discos na Torre de Hanói.....	103
Tabela 04 - Tabela contribuída coletivamente pelos licenciando como ponto de partida para a PP.....	123
Tabela 05 - Tabela do problema dos pimentões.....	133
Tabela 06 - Serviços oferecidos por um restaurante.....	231

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AT	Análise Temática
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CGD	Calculadora Gráfica Desmos
EP	Exploração de Problemas
EPRP	Exploração-Proposição-Resolução de Problemas
ERP	Exploração, Resolução e Proposição de Problemas
ERPCDP	Ensino-Aprendizagem de Matemática via Exploração, Resolução, Proposição, Codificação e Descodificação de Problemas
EUA	Estados Unidos da América
GEPEP	Grupo de Estudos e Pesquisa sobre Educação e Pós-Modernidade
GETERP	Grupo de Trabalhos e Estudos em Resolução de Problemas
NCTM	National Council of Teachers of Mathematics
PE	Produto Educacional
PP	Proposição de Problemas
PPGECM	Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática
P-T-RS-P	Problema-Trabalho-Reflexões e Síntese-Problema
P-T-RS-R	Problema-Trabalho-Reflexões e Sínteses-Resultados
RECDP	Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução, Exploração, Codificação e Descodificação de Problemas
RP	Resolução de Problemas
RS-T-P-T-RS-R	Reflexão e Síntese-Trabalho-Problema-Trabalho-Reflexões e Sínteses-Resultado
TD	Tecnologias Digitais
T-RS	Trabalho-Reflexões e Sínteses
UEPB	Universidade Estadual da Paraíba

SUMÁRIO

1	MOTIVAÇÕES E ENREDO DA PESQUISA.....	13
2	RESOLUÇÃO, PROPOSIÇÃO E EXPLORAÇÃO DE PROBLEMAS: DISCUSSÕES TEÓRICAS.....	22
2.1	Situando a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas.....	22
2.2	Pesquisas em Resolução de Problemas.....	36
2.3	Pesquisas em Proposição de Problemas.....	40
2.4	Pesquisas em Exploração de Problemas.....	53
3	TECNOLOGIAS DIGITAIS NA RESOLUÇÃO, PROPOSIÇÃO E EXPLORAÇÃO DE PROBLEMAS.....	57
3.1	Tecnologias Digitais e Coerência Didática.....	57
3.2	A calculadora gráfica Desmos.....	68
3.3	Pesquisas com a Desmos.....	77
4	O CAMINHAR METODOLÓGICO DA PESQUISA: PRESSUPOSTOS TEÓRICOS E A PRÁTICA.....	84
4.1	A Pesquisa Qualitativa e Pedagógica.....	84
4.2	Análise Temática.....	89
4.3	A dinâmica da pesquisa.....	91
4.4	O Produto Educacional.....	97
5	EXPLORAÇÃO-PROPOSIÇÃO-RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E A CALCULADORA GRÁFICA DESMOS: 1ª TRAVESSIA (AMBIENTAÇÃO)....	99
5.1	Apresentando e discutindo com os licenciandos a proposta de pesquisa.....	99
5.2	Explorando a Torre de Hanói.....	105
5.3	Explorando a Calculadora Gráfica Desmos.....	110
5.4	Explorando a função exponencial através da CGD.....	119
5.5	A Coerência Didática na Proposição de Problemas.....	124
5.6	Explorando o problema da plantação de pimentões.....	134
5.7	Discussões Teóricas sobre a Proposição de Problemas, as Tecnologias Digitais e a Coerência Didática.....	137
5.8	Retomando o problema da plantação de pimentões.....	141
5.9	Temas e Tendências que emergem da 1ª Travessia.....	152

6	A CALCULADORA GRÁFICA DESMOS VIA EXPLORAÇÃO- PROPOSIÇÃO-RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: 2ª TRAVESSIA (OFICINA)	158
6.1	O livro didático como ponto de partida da Proposição de Problemas.....	159
6.2	Proposição de Problemas e a função afim.....	167
6.3	Discutindo ideias de proporcionalidade.....	181
6.4	Explorando a função afim.....	191
6.5	Coeficientes e classificação da função afim.....	196
6.6	Função Afim.....	206
6.6.1	<i>Gráfico da função afim (E1)</i>	208
6.6.2	<i>Domínio e Imagem (E2)</i>	213
6.6.3	<i>Zero da função (E3)</i>	218
6.6.4	<i>Estudo do sinal da função (E4)</i>	224
6.6.5	<i>Inequação do 1º grau (E5)</i>	229
6.7	Ideias construídas a partir do desenvolvimento da pesquisa.....	236
7	O USO DIDÁTICO DA CGD VIA EPRP: CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	240
	REFERÊNCIAS.....	253

1 MOTIVAÇÕES E ENREDO DA PESQUISA

Quando pesquisamos não pesquisamos sozinhos, pois um contingente de outros pesquisadores já sinalizou o caminho a percorrer, mesmo que muitas vezes tenhamos que conviver com o sentimento de solidão durante alguns momentos da travessia. Pesquisar é uma arte, sua elaboração não é um exercício solo e nem uma apresentação em monólogo. (Conceição, 2018 p. 142).

Com esta reflexão, nos motivamos a descrever inicialmente o nosso itinerário enquanto ser humano, aluno, professor e pesquisador, que estão intrínsecos a esta pesquisa. Não se trata de um detalhamento específico de cada um, mas uma forma de expressar e perceber que a figura do pesquisador vai sendo construída e moldada ao longo da sua trajetória de vida, refletindo aspectos pessoais, profissionais e acadêmicos. Com o tempo, passamos a ter mais influência da academia, que também compreende a relação com outros pesquisadores/seres humanos. A vivência nos grupos de estudos e pesquisa releva que não estamos sozinhos quando pesquisamos e o quanto o olhar sensível de outros pesquisadores colabora com o caminhar de nossa pesquisa.

Diante desse contexto, a pesquisa e os resultados que apresentamos nesse processo de doutoramento surgem, inicialmente, de inquietações ao término das atividades de pesquisa desenvolvidas no mestrado e da admiração e aderência às discussões e pesquisas desenvolvidas junto ao Grupo de Estudos e Pesquisa sobre Educação e Pós-Modernidade (GEPEP), liderado pelo professor Dr. Silvanio de Andrade, da Universidade Estadual da Paraíba (UEPB). Em Abreu (2018), desenvolvemos uma pesquisa que tratava do uso de aplicativos móveis voltados ao ensino da Matemática, destacando, entre eles, a Calculadora Gráfica Desmos (CGD).

Foi no curso da disciplina “Resolução de Problemas e Construtivismo Social”, no mestrado, que tivemos um contato mais profundo com a temática, tendo em vista que na graduação não tivemos discussões dessa natureza. Naquele momento, passamos a ver a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas (EPRP) como um avanço das discussões em Resolução de Problemas (RP), desmitificando a ideia inicial que tínhamos, centrada na solução do problema. Após a conclusão do mestrado, com o exercício da docência na Educação Básica e no Ensino Superior, e com a participação nos encontros do GEPEP, começamos a nos aproximar cada vez mais das discussões em torno dessa metodologia de sala de aula. As pesquisas desenvolvidas por membros do GEPEP nos fizeram enxergar como poderíamos aprofundar a nossa experiência de pesquisa, refletindo sobre como a EPRP poderia contribuir para o planejamento e desenvolvimento de práticas em sala de aula utilizando a calculadora gráfica Desmos.

Passamos a desenvolver atividades em nossa prática pedagógica com o uso da CGD, com foco na Exploração de Problemas (EP). Em alguns momentos, tivemos a oportunidade de desenvolver atividades no GEPEP ou inserir o uso da CGD na EP proposta por outros colegas, o que nos permitiu vislumbrar outros horizontes a partir das discussões críticas e das reflexões que surgiam no grupo.

Ao longo dessas experiências, que moldaram a aderência e o direcionamento desta pesquisa, percebemos um maior envolvimento dos alunos ao trabalhar com a EPRP, resultando em um ganho significativo na compreensão dos conceitos. Essa abordagem permite explorar o conteúdo em diferentes níveis de complexidade. Em vez de o professor apresentar diretamente o conteúdo, a própria atividade funciona como uma justificativa para ele: o problema demanda a teoria, enquanto a teoria organiza a prática. Assim, o conhecimento da EPRP oferece uma base para pensar no uso didático da CGD.

Enquanto professor, essas experiências iniciais com a EPRP nos despertaram um novo olhar e uma nova maneira de pensar a Matemática, explorando os conceitos e ideias que já conhecíamos para que pudéssemos compreender o seu processo de construção e não apenas reproduzir. Essa abordagem metodológica nos permitiu desenvolver autonomia, dando-nos condições de partir da ideia matemática e explorar em direção à origem do problema, durante o planejamento pedagógico, e depois fazermos o caminho de volta, com argumentos mais substanciais para abordar o conteúdo em nossa sala de aula, partindo do problema em direção ao conceito e às ideias matemáticas.

Para exemplificar, destacamos uma atividade de EPRP realizada no GEPEP em que o domínio da função no problema era discreto. Quando esboçamos o gráfico na CGD, tivemos uma reta, que, a princípio, foi aceita como a solução do problema. A exploração do problema, no entanto, nos permitiu perceber que o gráfico esboçado não correspondia à solução, gerando uma discussão a respeito do domínio da função e da tendência de sempre construirmos gráficos de forma contínua, sem nos atentarmos ao contexto do problema. No mesmo momento, surgiu outro desafio, que consistiu em como restringir o domínio da função na CGD. Com isso, percebemos que um conceito ou ideia matemática, quando desenvolvido a partir da EPRP, é mais profundo, possibilitando uma maior conexão com outros conceitos. Além disso, exigiu repensarmos o uso da CGD e explorarmos mais as suas funcionalidades.

A Exploração de Problemas proporciona a sensação de estar construindo conhecimento matemático, em que o aluno tem uma tomada de consciência maior dos conceitos. Dessa forma, sinalizamos que essa abordagem parece indicar um resultado melhor para a aprendizagem do aluno e do professor.

Quando pensamos no projeto de pesquisa para o doutorado, a primeira ideia consistiu em agregar a nossa experiência com a CGD à metodologia de sala de aula de Ensino-Aprendizagem de Matemática via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas (1998; 2017). Porém, para que chegássemos até aqui, foi necessário um contato mais consistente com discussões teóricas, que foram moldando esta pesquisa, principalmente por meio das leituras e reflexões no GEPEP e durante o curso das disciplinas no doutorado.

A pesquisa envolvendo a CGD, em nível de Brasil, tem natureza internacional, pois percebemos que muitas pesquisas vêm sendo desenvolvidas com este recurso, voltadas ao ensino da Matemática (Liang, 2016; Maldonado, 2019; 2020a; 2020b; Ogando, 2020). O nosso diferencial é analisar as implicações da EPRP no seu uso didático.

Nossa ideia precisava de argumentos para compreender como as discussões nesse campo estavam avançando. Gostaríamos de destacar três leituras que foram feitas antes e durante o doutorado e que foram importantes para pensar criticamente o objeto de pesquisa.

Ainda durante a elaboração da proposta de pesquisa para a seleção do doutorado, lemos o texto “Um caminhar crítico reflexivo sobre Resolução, Exploração e Proposição de Problemas Matemáticos no Cotidiano da Sala de Aula”, de Andrade (2017, p. 388), no qual o pesquisador afirma que “temos notado que a Proposição de Problemas parece ser a ferramenta mais difícil de ser trabalhada e desenvolvida nos alunos”. Essa afirmação nos despertou o interesse em manter, durante a nossa pesquisa, o foco na Proposição de Problemas (PP) dentro da perspectiva da EPRP defendida pelo autor.

Já nos momentos de orientação no doutorado, com indicações de leituras que foram reforçadas e retomadas durante o curso das disciplinas, ao ler o texto “Problem Posing Research in Mathematics Education: Some Answered and Unanswered Questions” (Pesquisa em Proposição de Problemas em Educação Matemática: algumas questões respondidas e não respondidas), de Cai *et al.* (2015), destacamos que um dos questionamentos diz respeito a como a tecnologia pode ser usada em atividades de PP. Nesse momento, nos veio à mente o uso da CGD como recurso didático digital (RDD) na pesquisa em PP.

Com o aprofundamento das leituras em PP junto às Tecnologias Digitais (TD), nos deparamos com o texto de Abramovich e Cho (2015), intitulado “Using Digital Technology for Mathematical Problem Posing” (Usando Tecnologia Digital para a Proposição de Problemas Matemáticos), afirmando que, embora o interesse da pesquisa na área da Educação Matemática (EM) em PP esteja sendo ativo, pouca atenção tem sido dada ao papel das tecnologias na facilitação e avanço das habilidades na PP.

Quando confrontamos, de forma harmoniosa, essas três ideias da pesquisa no campo da EM, justificamos o desenvolvimento da nossa pesquisa, ao mesmo tempo em que percebemos o quanto ela pode contribuir para a área. Esse cenário nos deu um ânimo maior para o desenvolvimento da pesquisa, ao percebermos que as nossas inquietações já vinham sendo discutidas por outros pesquisadores, apontando a necessidade de se realizar investigações dessa natureza.

Com isso, unimos a nossa experiência com as TD, mais especificamente a CGD, com a admiração e aproximação com a metodologia de sala de aula de Ensino-Aprendizagem de Matemática via EPRP, com o olhar sensível à PP.

O estudo sobre a RP nos fez questionar a origem desses problemas, que, na maioria das realidades, fica refém do livro didático. Isso também nos levou a questionar quem propõe esses problemas. Em se tratando dos livros didáticos mais vendidos no país, cujos autores têm um resumo do currículo nas obras de sua autoria, observamos que eles possuem formação na área de Matemática, em sua maioria, licenciados. Com isso, refletimos sobre a importância de desenvolvermos a formação de professores para a PP no ensino da Matemática.

Divisamos que, na ótica da EPRP, trabalhar o foco na PP também exigirá a RP, não excluindo-a da proposta de pesquisa. À medida que alimentamos e embasamos teoricamente esta pesquisa, nos inquietávamos definir qual seria o seu *locus*. Em nossa experiência como professor, temos vivenciado a sala de aula de Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental, no Ensino Médio, na Educação de Jovens e Adultos (EJA), no Ensino Técnico e, mais recentemente, no Ensino Superior. Frente a isso, vislumbramos a sala de aula, em um curso de formação inicial de professores de Matemática como um ambiente fértil para que pudéssemos desenvolver nossas atividades de pesquisa. Este trabalho não traz uma discussão na formação de professores, porém, a experiência vivenciada é capaz de levar a pensar uma prática de formação de professores.

Enquanto aluno, durante a graduação, não tivemos a oportunidade de acessar essas discussões, o que nos deixou com a crença de que a Matemática era pronta e acabada, e que apenas deveríamos aprender a reproduzir o que nossos professores ensinavam. Com isso, a prática de resolver problemas, exercícios e tarefas tinha como fim a compreensão de um algoritmo, que consiste em um conjunto de instruções ou passos explicitamente definidos que, quando seguidos, levam à solução de um problema específico. Essa orientação só veio a ser gradualmente modificada com o ingresso na pós-graduação. Hoje, percebemos que muitos dos nossos alunos na licenciatura em Matemática comungam dessa mesma visão.

Quando questionamos o seu contato com a RP, eles ficam presos ao que os professores sugerem com base nos livros didáticos. No que se refere à PP, a maioria afirma nunca ter tido o estímulo e a experiência de propor um problema.

Para que essa prática chegue à sala de aula de Matemática na Educação Básica, é importante que os professores tenham domínio dessa abordagem. Acreditamos que isso só acontecerá efetivamente quando essa discussão fizer parte da formação inicial e/ou continuada dos professores de Matemática. Ciente desse contexto, e vítima dessa realidade quando éramos alunos, nos motivamos a trazer essa discussão para nosso ambiente de trabalho, estudo e pesquisa, provocando reflexões a partir da nossa prática enquanto formadores de professores de matemática.

Até aqui a literatura nos mostra o quanto a pesquisa em RP tem avançado nos últimos anos. As ideias apresentadas por Schroeder e Lester (1989) impulsionaram vários estudos, mostrando que nas últimas décadas esse campo de investigação tinha diferentes perspectivas. Consequentemente, o olhar crítico de vários professores e pesquisadores sobre a temática tem provocado aprofundamentos na pesquisa e dado origem a novas formas de abordar e entender a RP. Cai (2003) se mostra preocupado e reflete sobre como as crianças aprendem os conteúdos e como os professores aprendem a ensinar via RP.

Embora as pesquisas em RP não tenham avançado significativamente durante a década de 1990 e o início deste século, como observado por English, Lesh e Fennewald (2008), esses autores consideraram o desenvolvimento do currículo como um progresso nessa área. Eles enfatizam a necessidade de reavaliar as suposições sobre o que significa compreender os conceitos matemáticos e os processos de RP. Posteriormente, Lester e Cai (2016) sugerem que a RP não deve ser ensinada como um tópico separado no currículo de Matemática, mas integrada, como parte essencial da aprendizagem matemática.

Desse modo, a partir das pesquisas em RP, surge a metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática via resolução, exploração, codificação e decodificação de problemas e a multicontextualidade da sala de aula (RECDP), inicialmente defendida por Andrade, em 1998.

Essa metodologia visa trabalhar a RP em sala de aula, indo além da busca pela solução do problema. Leva-se em consideração todo o processo e desenvolvimento das ideias matemáticas em todo o itinerário, além da autonomia em propor problemas. Ao mesmo tempo, a Matemática não é vista com um fim em si própria, mas como uma forma de compreender questões de cunho sociopolítico e cultural, considerando a multicontextualidade da sala de aula. Nesta proposta, o problema é sempre o ponto de partida.

Em nossa pesquisa, buscamos enfatizar a PP. Em todo o texto que aqui apresentamos, sempre que usarmos o termo PP e RP, estaremos abordando-as na perspectiva da metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas (Andrade, 1998; 2017), exceto quando se tratar de discussões de cunho bibliográfico, baseadas nas proposições de outros pesquisadores.

Buscamos desenvolver a PP nos professores de Matemática em formação inicial, para que possam personalizar o seu ensino, indo além dos problemas propostos pelos livros didáticos e/ou sites de busca na internet, sendo capazes de adaptar o conteúdo às necessidades e interesses específicos de seus alunos, tornando a prática mais relevante e engajadora, aprofundando sua própria compreensão dos conceitos matemáticos.

Em se tratando da CGD imersa a outros RDD com funcionalidades semelhantes, apontamos algumas vantagens que nos chamaram atenção ao fazer uso deste recurso. Ao compararmos com o GeoGebra, percebemos que ambos possuem ferramentas valiosas para o ensino e a aprendizagem da Matemática, cada um com suas próprias vantagens e recursos. Porém, a Desmos é mais simples e interativa, com acesso offline, além de oferecer recursos que favorecem a colaboração e fácil compartilhamento. No entanto, destacamos que o GeoGebra também possui suas próprias vantagens, ficando a escolha entre a Desmos e o GeoGebra facultada às necessidades específicas de ensino, preferências pessoais e aos objetivos da atividade matemática em questão.

Para exemplificar de forma prática, ao explorar uma função matemática e visualizar seu gráfico em tempo real enquanto altera os coeficientes, ao usar a Desmos, o professor pode rapidamente digitar a função e ajustar os coeficientes diretamente na interface. A visualização do gráfico será atualizada à medida que os coeficientes forem alterados, permitindo que os alunos observem imediatamente o impacto das mudanças no comportamento do gráfico. No entanto, no GeoGebra, embora também seja possível realizar essa atividade, ela pode ser mais demorada, devido à necessidade de navegar por diferentes funcionalidades da ferramenta para criar a função e visualizar o gráfico. Nesse cenário específico, a CGD se destaca por sua rapidez e simplicidade, tornando-a uma escolha eficaz para atividades de exploração matemática em tempo real em sala de aula.

A participação em algumas atividades durante o doutoramento tem sido importante para o nosso olhar para esta pesquisa. Destacamos o projeto aprovado pelo CNPq, intitulado “Exploração, Proposição e Resolução de Problemas em Educação Matemática na formação do professor, do formador de professor e do pesquisador”, coordenado pelo nosso orientador, o Prof. Dr. Silvanio de Andrade, em parceria com o professor Jinfa Cai, da Universidade de

Delaware, nos Estados Unidos da América (EUA). A participação nesse projeto tem nos proporcionado um aprofundamento nas discussões teóricas e contato mais próximo com uma das principais referências em PP, o professor Jinfa Cai.

Além disso, vivenciamos, na Universidade de Chile, na cidade de Santiago, sob a supervisão do Prof. Dr. Patricio Felmer, um período de estudos proporcionado pelo edital de mobilidade internacional do PPGECEM. Na oportunidade, passamos a ter contato direto com professores e pesquisadores que trabalham com a RP, conhecendo suas perspectivas de trabalho neste campo e compartilhando um pouco da nossa experiência. Tudo isso enriqueceu o nosso conhecimento sobre a temática.

Todas essas motivações e o contexto inicial nos colocam diante do seguinte questionamento, que buscamos responder por meio de nossa pesquisa: *De que forma a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas qualifica o uso didático da calculadora gráfica Desmos?* Em um cenário de sala de aula real, nosso objetivo geral de pesquisa foi *analisar de que forma a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas qualifica o uso didático da calculadora gráfica Desmos.*

As discussões teóricas em torno da RP, PP e EP nos despertaram o interesse em compreender suas implicações para o uso didático da CGD, uma vez que, em Abreu (2018), nossa abordagem não teve essa preocupação, pois focamos apenas no que a ferramenta proporciona tecnicamente.

Devido à nossa concepção da EPRP, passamos a pensar em formas de aprimorar o uso didático da CGD. Isso influenciou diretamente as atividades desenvolvidas durante a pesquisa, que passaram a ter a EPRP como orientação didática.

Com base na motivação que surgiu a partir de nossa prática como professor de matemática, em que estamos atentos aos aspectos que influenciam direta e indiretamente a sala de aula, acreditamos que desenvolver uma investigação a partir desse ambiente tornaria mais fácil compreender os seus resultados. Dessa forma, poderíamos refletir sobre como nossa prática pedagógica pode estar contribuindo para o campo da EM. Ao mesmo tempo, consideramos que essa discussão na licenciatura em Matemática viabiliza o alcance dessa metodologia para a sala de aula de Matemática na educação básica e estende a sua aplicação para o uso didático de outros RDD.

Diante disso, optamos por realizar uma pesquisa de caráter qualitativo, buscando embasamento nos autores Bogdan e Biklen (1994) para compreender e detalhar como se deu o desenvolvimento dos momentos de travessia da pesquisa, explorando a complexidade e a riqueza dos dados, olhando para nosso problema de investigação. Valorizamos a compreensão

do contexto em que os fenômenos ocorrem, considerando a multicontextualidade da sala de aula de Matemática.

Diante de algumas características, de acordo com Bogdan e Biklen (1994), observamos que a pesquisa qualitativa é uma abordagem ampla e diversificada, e que suas características específicas podem variar, dependendo do contexto e dos objetivos da pesquisa. Assim, caracterizamos nossa abordagem como pedagógica, baseando-nos nas ideias de Lankshear e Knobel (2008).

Enquanto professor-pesquisador em uma pesquisa pedagógica, buscamos entender em profundidade, a partir da nossa experiência, refletindo sobre nossas necessidades profissionais e percepções cotidianas. Dessa forma, nos tornamos mais conscientes da complexidade do processo educacional e de que o mesmo não pode ser entendido à parte dos contextos sociais, históricos, filosóficos, culturais, econômicos, políticos e psicológicos que nos moldam, como destacam Lankshear e Knobel (2008). Todos esses aspectos são intrínsecos à multicontextualidade da sala de aula.

Junto ao desenvolvimento das atividades de pesquisa, foi sendo construído, pensado e refletido o nosso Produto Educacional (PE). Intitulado como *“Framework Educacional: possibilidades da prática docente com o uso didático da Calculadora Gráfica Desmos via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas”*, este produto traz direcionamentos, reflexões e instrumentos capazes de ajudar professores e pesquisadores a pensarem o seu planejamento pedagógico a partir dos resultados de nossa pesquisa. Não apresentamos uma proposta pronta, pois sabemos que o caminhar da EPRP é característico da multicontextualidade de cada sala de aula, mas buscamos, com o PE, oferecer suporte para a sua replicabilidade.

Até este ponto, apresentamos uma síntese da nossa pesquisa, fornecendo um enredo de forma objetiva que será detalhado ao longo de todo o texto deste trabalho.

No próximo Capítulo, situaremos a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas no âmbito das pesquisas em Resolução de Problemas, trazendo uma discussão cronológica, enfatizando como essa metodologia de sala de aula vem se desenvolvendo como um avanço das pesquisas em RP e seus pressupostos teóricos a partir de Andrade (1998; 2017). Fazemos um estudo teórico acerca das pesquisas em RP, PP e EP, situando-nos no campo para uma melhor compreensão dos temas e como a nossa pesquisa pode contribuir para o avanço dessas áreas de investigação.

Seguindo a mesma proposta teórica, no Capítulo três, voltamos nossa atenção para como as TD têm sido discutidas nas pesquisas em RP, PP e EP. Fazemos uma abordagem focada na

CGD, apresentando seus recursos, possibilidades no ensino e aprendizagem da Matemática e pesquisas que a têm investigado.

Em continuidade, no Capítulo quatro, discorreremos sobre o percurso metodológico adotado, o qual se baseia em uma abordagem qualitativa e pedagógica. Essas discussões ocorrerão em conjunto com a metodologia de sala de aula de EPRP utilizada durante o desenvolvimento das atividades de pesquisa, e com a técnica de análise dos dados da pesquisa, que consiste na AT. Apresentaremos o local de ação da pesquisa, os participantes, os objetos da pesquisa, os instrumentos de produção de dados e o detalhamento esquematizado de toda a dinâmica da pesquisa, bem como informações metodológicas do PE.

Chegando o momento de detalharmos as atividades de pesquisa, no Capítulo cinco, descreveremos, refletiremos e analisaremos as atividades de pesquisa desenvolvidas durante a 1ª Travessia. Destacaremos a importância dessas atividades de ambientação como um estudo-piloto capaz de aproximar os licenciandos dos objetos de estudo da pesquisa, de extrair ideias para o PE e de direcionarmos o planejamento das atividades da 2ª Travessia.

No Capítulo seis, descreveremos como ocorreu o desenvolvimento da Oficina, apresentando reflexões e análises dos resultados obtidos. O intenso trabalho realizado a partir da PP, na perspectiva da EPRP via CGD, será o enredo central deste capítulo, produzindo mais dados para o PE.

Por fim, no Capítulo sete, discutiremos as contribuições da pesquisa a partir dos resultados produzidos e sintetizadas pela AT. As considerações finais trazem evidências potenciais sobre o uso didático da CGD via EPRP. Com isso, trazemos reflexões que ampliam os recursos que podem ser abordados via EPRP. Assim, reflete sobre os desdobramentos de novas investigações a partir desta e como a comunidade científica da EM se beneficia dos dados aqui apresentados.

2 RESOLUÇÃO, PROPOSIÇÃO E EXPLORAÇÃO DE PROBLEMAS: DISCUSSÕES TEÓRICAS

Para uma melhor compressão do papel da Resolução de Problemas (RP) e da Proposição de Problemas (PP) na metodologia de Exploração-Proposição-Resolução de Problemas (EPRP) em sala de aula, passaremos a discutir o que dizem as pesquisas sobre essas abordagens, como tem se dado o avanço nesses campos de investigações e como tudo isso reflete na pesquisa que estamos aqui apresentando.

2.1 Situando a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas

Discutir problemas matemáticos nos dias de hoje exige uma aproximação do que vem sendo discutido, pesquisado e divulgado em torno dessa temática, principalmente no que tange aos processos de ensino e aprendizagem. Isso nos permite ir além da perspectiva de problemas apenas com foco na Matemática.

Com o surgimento da comunidade científica de Educação Matemática (EM), o problema deixa de ser algo restrito aos Matemáticos e passar a ser discutido numa perspectiva de Resolução de Problemas (RP). Embora existam registros de problemas matemáticos em diferentes civilizações e períodos históricos, foi apenas a partir do século XX que esses pesquisadores passaram a enfatizar a importância dessa abordagem para o desenvolvimento cognitivo da Matemática e sua inclusão no currículo.

A ênfase na RP reflete uma mudança na compreensão da Matemática, deixando de ser apenas uma disciplina baseada em cálculos e expressões, passando a envolver a compreensão profunda de conceitos e a capacidade de aplicá-los em situações vinculadas ao cotidiano. Com isso, almeja-se uma abordagem que promova o desenvolvimento do pensamento crítico, resolução de problemas autênticos e habilidades matemáticas mais duradouras e significativas.

Nesse contexto, situaremos algumas abordagens de estudo e ensino relacionadas à RP na EM. Destacaremos a metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas (EPRP), fundamentada em Andrade (1998; 2017), como um avanço das investigações nesse campo.

Para situar a RP como área de pesquisa e sua aplicação em nosso trabalho, examinaremos as discussões e estudos recentes sobre o tema, pontuando alguns momentos históricos. Aprofundaremos nossa análise na metodologia EPRP, fornecendo *insights* sobre seu desenvolvimento e sua importância, além de sua presença em diversas investigações.

O problema tem seu marco como objeto de pesquisa em EM a partir dos escritos de George Polya, em 1945, em seu livro *How to solve it*, traduzido para o português como *A arte de resolver problemas*. Polya apresentava uma sequência de quatro fases que considerava fundamentais para um solucionador de problemas durante a resolução de problemas de qualquer espécie: (1) compreender o problema; (2) estabelecer um plano; (3) executar o plano; e (4) examinar a solução obtida. No entanto, essas discussões ganharam maior alcance apenas nos anos 1960, nos Estados Unidos. Em nível mundial, “as investigações sistemáticas sobre resolução de problemas e suas implicações curriculares têm início aproximadamente na década de 70” (Andrade, 1998, p. 7).

As descobertas originais de Polya não foram suplantadas pelos avanços subsequentes nessa área. Elas continuam tendo o seu lugar de destaque e sendo fonte de motivação para as investigações contemporâneas. Os novos resultados das pesquisas não comprometem nem questionam os princípios iniciais propostos por Polya. Ao contrário, oferecem robustas confirmações dos vários estágios em que a RP tem prosperado ao longo do tempo.

Compreender a origem dessas ideias é fundamental para obter uma visão mais completa do papel que a RP desempenha atualmente no ensino e na aprendizagem da Matemática, assim como para discernir até que ponto ainda é possível e necessário avançar nesse campo.

As pesquisas devem acompanhar as mudanças que ocorrem na sociedade, principalmente as provocadas pelas tecnologias. Precisamos buscar melhorar a RP pelos estudantes e, para que isso aconteça, precisamos de professores que a desenvolvam em suas salas de aulas, não apenas na busca de estratégias direcionadas a sua solução.

Essa discussão se estende ao destacarmos a importância da Proposição de Problemas (PP) como uma prática que esteja diretamente relacionada à RP. Essas abordagens requerem ser contempladas na formação do professor de matemática. Se os professores não propõem problemas, dificilmente eles darão condições para que seus alunos o façam e não terão condições de mediar o processo e avaliar os problemas propostos.

Para compreendermos melhor o lugar da EPRP no âmbito das pesquisas em RP, passaremos a pontuar alguns fatos importantes que a antecede.

Por volta da década de 1950, já existiam algumas discussões tímidas sobre a RP. Entre as décadas de 1960 a 1980, Andrade (1998) descreve que,

Nesses períodos, de modo geral, os estudos de resolução de problemas preocuparam-se inicialmente (período anterior a 60) com o desempenho bem sucedido na obtenção da solução de problemas. Não há preocupações com o processo. Para desenvolver sua capacidade de resolução de problemas, a criança deveria exercitar-se exaustivamente na solução de uma grande quantidade de problemas do mesmo tipo. O ensino de

resolução de problemas limitava-se ao ensino de solução de problemas, tipo treino, num esquema cognitivo estímulo-resposta. Posteriormente (período 60-80), a preocupação era com o processo envolvido na resolução de problemas. Nessa ocasião, o ensino de resolução de problemas centra-se no ensino e no uso de estratégias. Nos fins dos anos 70, a Resolução de Problemas ganha espaço no mundo inteiro. Começa o movimento a favor do ensino de resolução de problemas. (Andrade, 1998, p. 9).

Na década de 1980, um marco para a área foi o documento “Uma Agenda para Ação – Recomendações para a Matemática Escolar para a década de 1980¹”, publicado pelo National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), que propôs colocar a RP como foco central do ensino da Matemática nas escolas.

As diferentes percepções em torno da RP no currículo escolar, no desenvolvimento de materiais para professores e alunos, desencadeando o desenvolvimento de diversas pesquisas, foram valiosas e uteis. Como consequência, hoje temos ciência de que essa abordagem desempenha um papel proeminente no currículo escolar.

“A década de 80 é considerada a idade de ouro da Resolução de Problemas” (Andrade, 1998, p. 9). Durante esse período, Schroeder e Lester (1989) apresentam três abordagens para lidar com o ensino de RP, sendo elas: (1) ensinar *sobre* resolução de problemas, (2) ensinar *para* resolver problemas e (3) ensinar *via* resolução de problemas. É provável que essa discussão já tenha aparecido e sido defendida há mais de uma década. Porém, os autores se destacam ao enfatizar essas três abordagens.

Esse cenário tem motivado diversos pesquisadores em diferentes partes do mundo. English, Lesh e Fennewald (2008) discutem as direções futuras e perspectivas no campo da RP. Ao revisitar os últimos 50 anos, os autores nos confrontam com questões que nos levam a refletir, sobretudo, sobre como diagnosticar o desenvolvimento cognitivo dos alunos durante essa abordagem. A observação necessária vai além do que é superficialmente percebido pelo professor durante a resolução de um problema. É essencial empregar estratégias que permitam compreender, documentar e avaliar a aprendizagem do aluno. Tanto o professor quanto o aluno devem desempenhar papéis ativos para garantir que a aprendizagem via RP esteja ocorrendo.

Silver (1994), ao examinar a literatura sobre RP, notou que a transferência de aprendizado foi inexpressiva, mesmo em estudos em que alguma aprendizagem bem-sucedida foi mencionada. Ele sugere que os avanços no desempenho dessa abordagem podem ser atribuídos simplesmente a aprendizagem de conceitos matemáticos relevantes pelos alunos, o que vai de encontro ao que geralmente é enfatizado, que é o ensino de estratégias, heurísticas ou processos de RP.

¹ An Agenda for Action – Recommendations for school mathematics of the 1980s.

Focado nos Estados Unidos da América (EUA), Schoenfeld (2007) ressalta a importância dessa temática como uma área significativa de estudo em EM entre os anos 1970 e 1980, sua subsequente diminuição de ênfase, porém, também a permanente influência dessas ideias em outras áreas de pesquisa e o contínuo desenvolvimento do campo.

Andrade (1998) destaca que, na década de 1980, ocorreu uma mudança substancial no enfoque da RP na pesquisa em EM. Ao invés de apenas buscar a solução, passou-se a dedicar uma atenção considerável ao processo de RP. Durante esse período, os pesquisadores começaram a questionar o ensino convencional da Matemática e a avaliar o emprego de estratégias e modelos na RP.

Como resultado, no final dos anos 1980, a RP começou a ser reconhecida como uma metodologia de ensino, vista como um ponto de partida e um método eficaz para o ensino da Matemática. Os problemas passaram a ser considerados como elementos capazes de iniciar e estimular a construção do conhecimento matemático. Nessa perspectiva, problemas eram propostos ou formulados para auxiliar na formação de conceitos matemáticos antes mesmo de sua formalização em linguagem matemática convencional. Andrade (1998) também destaca que o foco principal residia na ação por parte do aluno, encorajando uma participação ativa na construção do conhecimento.

O pluralismo das propostas metodológicas que surgem nacionalmente e internacionalmente busca atender aos diversos contextos e realidades em que a RP pode ser usada em prol do processo de aprendizagem dos alunos. Essas propostas metodológicas se somam umas às outras como forma de representar a heterogeneidade dos espaços de aprendizagem. É possível encontrarmos evidências científicas de potencialidades e limitações em cada uma delas, sem a percepção de uma substituição, mas reconhecendo a contribuição que cada pesquisa em RP deixa no itinerário do campo de investigação na EM.

Fortemente, essa abordagem atribuída à RP como metodologia de ensino passa a ser discutida e incorporada nas pesquisas dos anos 1990. Essa abordagem endossa, também, a RP como um objetivo ou como uma arte, em que o aluno tanto aprende matemática resolvendo problemas, como aprende Matemática para resolver problemas. O ensino de RP não é mais tratado como um processo isolado. Nesse período, a RP passa a receber atenção crescente por parte dos pesquisadores, bem como os aspectos sociopolíticos e culturais (Andrade, 1998).

Até então, percebemos que a RP estava sendo discutida como algo que chegava pronto às salas de aulas. Os professores não se atentavam ao fato de propor os problemas ou refletir sobre a origem deles. A RP, como parte das competências básicas de um professor de

Matemática e intrínseca à RP, começa a ganhar atenção em meio à comunidade científica durante a década de 1990.

Em se tratando das propostas de ensino que surgem na década de 1990 no Brasil, objetivando a RP como metodologia de ensino, temos a “Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas” apresentada pelo GTERP (Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas) coordenado pela professora Lourdes de la Rosa Onuchic.

Apesar dos avanços e das diversas abordagens metodológicas na pesquisa em RP, é fundamental uma reflexão crítica sobre como essas abordagens podem verdadeiramente contribuir para os processos de ensino e aprendizagem da Matemática. É essencial que os resultados dessas pesquisas sejam aplicados nas salas de aula e não fiquem apenas registrados em trabalhos acadêmicos ou revistas, não se encerrando após a obtenção dos resultados esperados inicialmente.

Andrade (1998) destaca que a maioria das pesquisas em RP foi conduzida em ambientes controlados, como laboratórios, que não refletem as complexidades do contexto real de sala de aula e que privilegiam locais com melhores condições de desempenho. Observa que poucos estudos consideram aspectos sociopolíticos e culturais em suas investigações. Muitas vezes, essas pesquisas se limitaram a questões cognitivas e não abordam uma perspectiva de educação progressista². Mesmo quando as questões socioculturais foram abordadas, elas não foram exploradas além de seus aspectos cognitivos.

Andrade (1998) aponta outra limitação em relação à abordagem da RP como metodologia de ensino. Ele destaca que essa estratégia, muitas vezes, se concentra apenas em conceitos e processos matemáticos, sem focar de forma abrangente a sala de aula de Matemática em todos os seus aspectos. Ainda argumenta que a RP como metodologia de ensino-aprendizagem deve ser pensada de maneira global, considerando a sala de aula em sua multicontextualidade. Isso significa que a RP na sala de aula deve ocorrer em diversos contextos, incluindo o contexto do aluno, o contexto do professor, o contexto da própria Matemática, o contexto da transdisciplinaridade³ e o contexto da sala de aula como um todo. Essa perspectiva mais abrangente e holística pode enriquecer a experiência de ensino-aprendizagem da Matemática.

² A educação progressista é uma abordagem educacional que enfatiza o desenvolvimento holístico dos alunos, dando ênfase à aprendizagem ativa, à participação dos estudantes no processo de ensino e à relevância do conteúdo para suas vidas e experiências.

³ A transdisciplinaridade é uma abordagem que busca integrar diferentes disciplinas e perspectivas para tratar problemas complexos de forma mais abrangente e holística.

Situando cronologicamente as pesquisas em RP, em 1998, o professor Silvanio de Andrade, atento a todas essas observações, defende a sua dissertação de mestrado em Educação Matemática (UNESP - Rio Claro) intitulada “Ensino-Aprendizagem de Matemática via resolução, exploração, codificação e decodificação de problemas e a multicontextualidade da sala de aula”.

A EPRP surgiu como uma metodologia que leva em consideração a complexidade da sala de aula de Matemática, incluindo o contexto do aluno, seu nível de domínio, diferentes estratégias dos alunos e recursos disponíveis. Nesse processo, os problemas são resolvidos e explorados para permitir que os alunos construam conhecimento matemático, tornando-se críticos e reflexivos por meio de discussões que envolvem contextos sociopolíticos e culturais.

A pesquisa em EPRP busca responder algumas limitações da pesquisa em RP até a década de 1990. Andrade (1998) teve um papel fundamental ao desenvolver essa metodologia, sensível às questões que envolviam a RP na época.

Surgida em meio a um período de desaceleração na pesquisa em RP durante a década de 1990, a pesquisa em EPRP começa a tomar forma a partir de um olhar crítico e reflexivo do pesquisador Silvanio de Andrade imbuído pelos seus estudos em torno da RP. As tímidas discussões em torno da PP e a ausência de discussões que envolvessem aspectos sociopolíticos e culturais foram pontos canalizadores da sua proposta de pesquisa.

No ano de 2008, como professor da Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), ele cria o Grupo de Estudos e Pesquisa sobre Educação e Pós-Modernidade (GEPEP), cadastrado no diretório de grupos do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), de onde surge as primeiras orientações a nível de mestrado junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática (PPGECM). Essas pesquisas vêm contribuindo para a compreensão do que é o ensino-aprendizagem da Matemática via EPRP.

Dentre as diferentes temáticas que são discutidas e pesquisadas no GEPEP, a EPRP vem sendo objeto de pesquisa da maior parte dos seus membros. Com diferentes olhares para a proposta metodológica na sala de aula de Matemática, seja na Educação Básica ou no Ensino Superior, essas pesquisas têm buscado avançar na percepção que se tem da RP, ampliando o seu olhar com a PP, diante de uma perspectiva de Exploração de Problemas (EP) que busca contemplar a multicontextualidade da sala de aula bem como os aspectos sociopolíticos e culturais.

Em 2013, temos as primeiras defesas de dissertações de mestrado envolvendo a Exploração de Problemas sob a orientação do Professor Doutor Silvanio de Andrade, resultado de sua orientação e discussões no GEPEP do PPGECM. A partir desse momento, a divulgação

e o alcance dos trabalhos envolvendo essa abordagem metodológica têm passado a ser discutidos e publicados em anais de eventos regionais, nacionais e internacionais, além de periódicos de alto impacto na Educação Matemática. Com isso, em 2024, temos as defesas das primeiras teses de doutorado, como forma de continuidade e aprofundamento do trabalho desenvolvido inicialmente por Andrade (1998).

A EPRP tem sido desenvolvida como uma importante atividade de pesquisa e prática pedagógica. As investigações do GEPEP têm ampliado esse campo, unido teoria e prática. Os pesquisadores atuam diretamente em sala de aula, o que permite integrar a percepção acadêmica com a prática pedagógica de forma contínua.

Inicialmente intitulada de “Ensino-Aprendizagem de Matemática via resolução, exploração, codificação e decodificação de problemas e a multicontextualidade da sala de aula” (RECDP), é possível perceber nos trabalhos que emergem dessa metodologia um mergulho intenso no cotidiano da sala de aula, sendo essa uma das características, segundo Andrade (2017), que tem tornado essa proposta até hoje forte e atual.

Entre os trabalhos que vêm sendo desenvolvidos desde Andrade (1998), os diferentes momentos, travessias e movimentos em torno dessa metodologia em todo o seu itinerário de pesquisa nos permite depararmos com as denominações: Exploração, Resolução e Proposição de Problemas (ERP); Ensino-Aprendizagem de Matemática via Exploração, Resolução, Proposição, Codificação e Decodificação de Problemas (ERPCDP); Resolução e Exploração de Problemas; ou, simplesmente, Exploração de Problemas (EP).

Em todos esses trabalhos destacados na Figura 01, tem-se como essência a EP como proposta metodológica de sala de aula. A linha de pesquisa continua sendo a RP. Porém, entre tantos desdobramentos da pesquisa em RP, de acordo com Andrade (2017), temos como carro chefe a EP.

Andrade (2017) destaca que, recentemente, tem havido um foco significativo no trabalho com a PP, utilizando a expressão “Exploração, Resolução e Proposição de Problemas” (ERP) ou, simplesmente, “Exploração de Problemas”. Em nosso trabalho, utilizamos o termo “Exploração-Proposição-Resolução de Problemas” (EPRP), pois tomamos a PP como ponto de partida na EP.

Na EP, a PP pode aparecer em diferentes momentos. Seja durante a RP, provocada pelas Reflexões e Sínteses feitas pelo resolvidor do problema, como também pela problematização, feita pelo professor como forma de mediar a prática de EP. É mais frequente vermos a PP ser trabalhada após a RP. Porém, é importante que ela tenha um momento definido dentro da prática, que dependerá da intencionalidade do professor.

Sobre isso, explanamos que a proposição de problemas ocorre **antes** do processo de resolução e exploração de problemas, quando o foco principal não é a solução, e sim a proposição de novos problemas, tomando como ponto de partida alguma situação que tenha ligado com a matemática ou com alguma experiência vivenciada pelo aluno, e posteriormente a resolução dos mesmos. Além disso, a proposição de problemas ocorre **durante** o processo de resolução e exploração de problemas, quando, a partir de um problema dado, são formulados e explorados novos problemas, tanto pelo professor como pelos alunos. Ao fim, podem-se fornecer *insights* ao solucionador, possibilitando a solução do problema inicial, como também potencializando e aprofundando o conceito que está sendo construído. Por fim, a proposição de problemas pode ocorrer **depois** do processo de resolução e exploração de problemas, quando a solução de um problema impulsiona um processo de reflexões e síntese, gerando novos problemas em nível mais avançado ou não, e provocando, assim, uma aprendizagem com compreensão. (Silveira; Andrade, 2022, p. 7-8, grifos do autor).

Ao destacarmos os possíveis espaços de ocupação da PP dentro da abordagem de EP, passamos a discutir e compreender um pouco mais sobre essa metodologia. De acordo com Andrade (2017, p. 367), a Exploração, a Resolução e a Proposição de Problemas

Se configuram e se reconfiguram no cotidiano da sala de aula, mas não é o de uma sala de aula sustentada com bases teóricas fechadas, mas no cotidiano de uma sala de aula que é percebida como uma aventura, uma viagem aberta. No cotidiano da sala de aula não é possível prescrever exatamente como podemos trabalhar com a exploração de problemas. O que temos são apenas ferramentas possíveis de serem ou não usadas na aventura da travessia de um rio ou de uma viagem qualquer. (Andrade, 2017, p. 367).

Levar em consideração, de forma livre e aberta, os aspectos do cotidiano da sala de aula faz da EPRP uma proposta metodológica livre de ataduras que sigam um único fluxo, uma única direção, uma única realidade, um único contexto. Não se discute etapas, mas momentos, travessias, durante o processo. Essas travessias podem ter como ponto de partida a RP, como também a PP, a depender da intencionalidade da proposta pedagógica.

Tanto a RP como a PP ocupam espaços igualmente importantes dentro da proposta metodológica de EPRP. O problema é base de todas elas. Compreendemos que não é possível propor um problema sem a sua exploração e resolução. Da mesma forma que a resolução do problema precisa compreender a sua exploração e potencializar a PP.

Na EPRP, o trabalho realizado não se limita apenas à busca da solução para a tarefa proposta. É possível ir muito além dela. A ideia de problema fundamenta-se como algo que não compreende apenas a resolução, mas sua exploração em toda a sua multicontextualidade. O trabalho de EPRP é inacabado (Andrade, 1998; 2017). Ainda conforme o autor,

A proposta de Exploração-Resolução-Proposição de Problemas precisa ser sempre percebida como uma proposta aberta, não fechada, embora não solta, para que possamos escutar/ver/olhar o que acontece nas tramas, nos encantos e desencantos, na transfiguração poética, no espaço-tempo, que o cotidiano da sala de aula nos proporciona. O final de uma experiência em Exploração de Problemas em sala de aula nunca é o final de uma história, mas o começo de muitas outras histórias. Trabalhar com Exploração de Problemas é colocar-se sempre em movimento, em aventura, é um

sair sempre para mergulhar reflexivamente e criticamente em si mesmo e além de si mesmo. (Andrade, 2017, p. 267).

A EPRP reconfigura a sala de aula de Matemática e todos os fatores que a influenciam de forma direta e indireta. O rigor matemático passa a dividir o mesmo espaço que os problemas dos alunos, perdendo a sua neutralidade, por meio de discussões que envolvem o social, o político e o cultural. É provável que o aluno se torne mais ativo e que o professor passe de transmissor a mediador do processo de ensino-aprendizagem, objetivando desenvolver no aluno a capacidade de construir conhecimento matemático por meio da EPRP. É uma atividade não linear, que dá voz e vez aos alunos, por meio de um aprofundamento cada vez mais satisfatório e significativo.

O trabalho com a EPRP não é capaz de compreender em sua completude o desenvolvimento de todos os conceitos e ideias matemáticos por meio da PP e RP que tenham em sua essência questões de cunho social, político e cultural. Porém, precisamos, sempre que possível, fazer uso dessa proposta metodológica para dar vida a uma Matemática que ainda é vista de forma tão abstrata e distante da realidade dos alunos. É preciso se preparar, enquanto professor, para planejar práticas que consigam extrair as potencialidades da metodologia de EPRP, consciente que a exploração de conceitos matemáticos junto aos contextos sociais também são necessários e fazem parte do currículo escolar.

Ainda precisamos desenvolver uma compreensão mais densa dessa proposta, do domínio da Matemática e das concepções pedagógicas voltadas ao ensino e à aprendizagem que a envolvem. A EPRP se apresenta como mais uma proposta metodológica voltada ao Ensino-Aprendizagem de Matemática, que precisa ser apreciada e colocada em prática mediante a intenção do professor.

O termo “Exploração” tem a responsabilidade de caracterizar, nessa proposta metodológica, o seu caráter investigativo, que coloca o aluno em ação, seja na resolução e/ou proposição de problemas, por meio de um intenso trabalho realizado sobre o problema. Toda essa exploração aberta, plural, intencional e mediada envolve diferentes momentos de reflexões, desenvolve a criticidade nos alunos e professores e o poder de síntese.

Uma experiência de EP é capaz de desenvolver nos alunos e professores habilidades que antes não vinham à tona quando se mantinha o foco apenas na solução do problema. Um novo olhar é desenvolvido em torno da Matemática, novas estruturas cognitivas são desenvolvidas e vai-se tecendo conhecimentos a cada momento da exploração. O problema começa a ocupar um novo espaço na sala de aula e a proporcionar diferentes experiências. A RP passa a dividir espaço com a PP por meio de um movimento constante de EP.

Nos trabalhos de RP, é comum que pesquisadores tentem definir a ideia que têm de problema em sua perspectiva de pesquisa. Na EPRP, não é diferente. Observamos que todas as definições estão preocupadas em ir do problema para a solução do problema. Porém, na EPRP, a preocupação volta-se para que o aluno realize algum trabalho frente ao problema. Esse trabalho será o ponto de partida que o professor trilhará com o aluno. Essa definição é vista em termos de aprendizagem. Se o aluno não resolveu o problema, mas começou a fazer alguma coisa, esse será o ponto de partida. Andrade (2017) assume o problema como um projeto, uma questão, uma tarefa, uma situação em que:

- a) *O aluno não tem ou não conhece nenhum processo que lhe permita encontrar de imediato a solução.* O problema deve exigir, da parte do aluno, a realização de um trabalho não-repetitivo, não rotineiro, precisa estabelecer conexão entre o que o aluno já sabe e aquilo que ele ainda não sabe, precisa ser um nó entre o que o aluno sabe e aquilo que ele não sabe.
- b) *O aluno deseja resolver, explorar ou realizar algum trabalho efetivo.* Esse projeto, essa questão posta, essa tarefa ou a situação dada deve despertar o interesse do aluno e quando isso não acontece cabe ao professor iniciar um trabalho de problematização que possa despertar o interesse do aluno pela situação.
- c) *Introduz-se e/ou se leva o aluno à realização de algum trabalho efetivo.* Nesse sentido, o essencial é que o trabalho seja feito com bastante esforço e dedicação por parte do aluno. Não importa se o aluno tenha conseguido resolver ou não resolver o problema, mas importa o seu trabalho, desde que haja o seu envolvimento efetivo, desde que ele se sinta engajado e o que se espera é que o aluno trabalhe o máximo possível. O que o aluno produziu nesse trabalho pode ser o ponto de partida do caminhar que o professor precisa trilhar com ele. Nesse caminhar, não há um ponto fixo de chegada. A missão do professor é levar o aluno e a turma até o ponto em que eles possam ir e ir cada vez mais. (Andrade, 2017, p. 364-365, grifos do autor).

O problema não é só algo que inicialmente o aluno não sabe resolver, ele precisa mantê-lo ativo, em processo de exploração, levando em consideração todo o seu itinerário. O professor precisa estar atento para manter o interesse do aluno em resolver o problema. Para isso, é preciso lançar mão de momentos de reflexão e problematização da situação, desencadeando no aluno um novo olhar para o problema, refletindo o seu erro como um degrau importante para essa travessia.

A mediação, que ora fica a cargo do professor, também precisa ser desenvolvida nos alunos, para que deem conta de sair de situações complexas, seja por meio de uma reflexão individual ou coletiva, de forma verbal e/ou escrita. Ao mesmo tempo, o professor deve ter cuidado para não fazer uso da mediação de forma a inibir o raciocínio do aluno, apresentando soluções diretas para o problema ou antecipando etapas importantes. A mediação é uma habilidade importante na EPRP, seja no momento da RP, como também no desencadeamento da PP.

Além dos desafios intrínsecos à RP, percebemos que, quando se trata da PP, o problema, seja por parte do aluno e/ou do professor, consiste em como propor um problema. Fica um

pouco redundante o uso da palavra problema para exemplificar essa ideia, mas o que queremos destacar são as dificuldades que alunos e professores têm em propor um problema, como sendo algo que, de imediato, eles não conseguem fazer, não sabem por onde começar, ou fracassam nas primeiras tentativas. Estamos tão acostumados a apenas resolver problemas que, quando nos deparamos com a necessidade de propor um problema, como um novo momento em meio à RP ou propor um problema como ponto de partida para a EPRP, é possível perceber uma dificuldade que expõe fragilidade no domínio matemático, contextual e pedagógico.

É possível que planejem uma prática pedagógica na perspectiva da EPRP em que o foco esteja apenas na RP, e não na PP. Porém, não conseguimos ver uma prática que tenha foco na PP na ausência da RP. Só é possível termos certeza da coerência didática de um problema que ora estamos propondo se resolvermos e explorarmos esse problema por meio de um trabalho intenso. Feito isso, podemos prever os diferentes caminhos que essa exploração pode seguir.

Durante o processo de EPRP, a PP pode ser exigida em diferentes momentos, deixando transparecer o domínio do conteúdo matemático, contextual e pedagógico que o propositor tem em torno do problema que está propondo. Uma vez proposto o problema, através de reflexões e sínteses, é possível que desperte o interesse em explorá-lo em diferentes perspectivas, suscitando a resolução e a proposição de novos problemas a partir dessa exploração inicial.

Nesse contexto da sala de aula de Matemática, tanto o professor quanto os alunos precisam desenvolver a PP. Ao mesmo tempo, esses problemas precisam dar conta de ir no sentido contrário a um ensino da Matemática que foque apenas na manipulação de termos e na construção de mais conhecimento matemático, ao contrário, deve levar em consideração a multicontextualidade da sala de aula como plano de fundo da EP, possibilitando uma compressão dos aspectos intrínsecos a ela, por meio da Matemática, e colocando-a em destaque.

O problema precisa dar conta de desmistificar a neutralidade da Matemática e estimular professores e alunos a propor e resolver problemas que façam sentido, não ficando submissos aos livros didáticos e sites de busca na internet.

Andrade (1998; 2017) chama atenção para alguns momentos importantes no processo de EPRP, por ser algo inacabado e que vai além da busca da solução do problema. Com um foco inicial na RP, toda experiência que envolve em sua essência a EPRP dá-se a partir do movimento Problema-Trabalho-Reflexões e Sínteses-Resultados (P-T-RS-R).

O Trabalho que é desenvolvido sobre o Problema vai desde a sua interpretação, organização das informações, tentativas de resolução, entre outros. Em seguida, é preciso que sejam realizadas Reflexões críticas junto ao Problema na tentativa de apresentar uma Síntese,

que levará a um Resultado, que é considerado como a solução do problema. Para a realização deste Trabalho, o autor considera como ferramentas essenciais ao processo a Codificação e a Descodificação.

De acordo com as ideias de Andrade (1998; 2017), Codificar um problema significa representá-lo de uma forma diferente, em outra linguagem ou código, de maneira mais simples e conveniente. Isso inclui a síntese do problema. É importante notar que o próprio problema dado já é uma forma de código. Enquanto Descodificar um problema é buscar seu significado, entender sua mensagem e realizar uma análise crítica dessa mensagem. Isso se refere principalmente à análise crítica feita sobre um problema, sua resolução ou qualquer Trabalho relacionado a ele.

A Codificação e a Descodificação são ferramentas importantíssimas na EPRP e que acontecem quase que concomitantemente em diversos momentos do Trabalho que se realiza junto ao problema, ficando difícil de destacar os diferentes momentos de atuação de cada uma. A Descodificação, com “s”, tem um sentido mais amplo, que vai além da ideia de codificação. Em sua proposta, Andrade (1998) discute a Descodificação com base nas ideias de Paulo de Freire, na Pedagogia da Pergunta, buscando uma descodificação que interprete o código por meio de uma leitura mais plural, crítica, que leve em consideração os aspectos sociopolíticos e culturais. É interpretar as mensagens do problema além da Matemática. Nesse sentido, a EPRP busca dialogar com aspectos da Educação Matemática Crítica.

Na relação P-T-RS-R, o R (resultado) pode resultar não só na solução do problema, mas também em um novo problema, reorganizando a relação em: Problema-Trabalho-Reflexão e Síntese-Problema (P-T-RS-P). Nesta discussão, vemos mais claramente a PP como parte da EPRP. Em todo o percurso apresentado por Andrade (1998), a PP fica implícita ao processo. Na exemplificação anterior, ela aparece como um Resultado de um processo de EPRP, tendo a RP como ponto de partida. Esse problema é capaz de promover uma nova exploração, resolução, exploração, proposição, resolução, exploração... Não se tem limites na EP, tem-se momentos com intencionalidades, que podem ser retomados sempre que se tenha um novo objetivo.

Isso representa um avanço significativo na valorização da PP. Nesse contexto, a atividade de EP é considerada a ferramenta mais essencial e abrangente, englobando tanto a RP quanto a PP (Andrade, 2017).

Na perspectiva da EPRP, a primeira ação ao utilizar a PP como ponto de partida é a Reflexão e Síntese (RS), seguida por um intenso Trabalho de Codificação e Descodificação, na tentativa de propor um problema. Durante a Reflexão inicial, o propositor ativa mentalmente a Codificação e a Descodificação, e a ordem em que esses processos ocorrem pode variar,

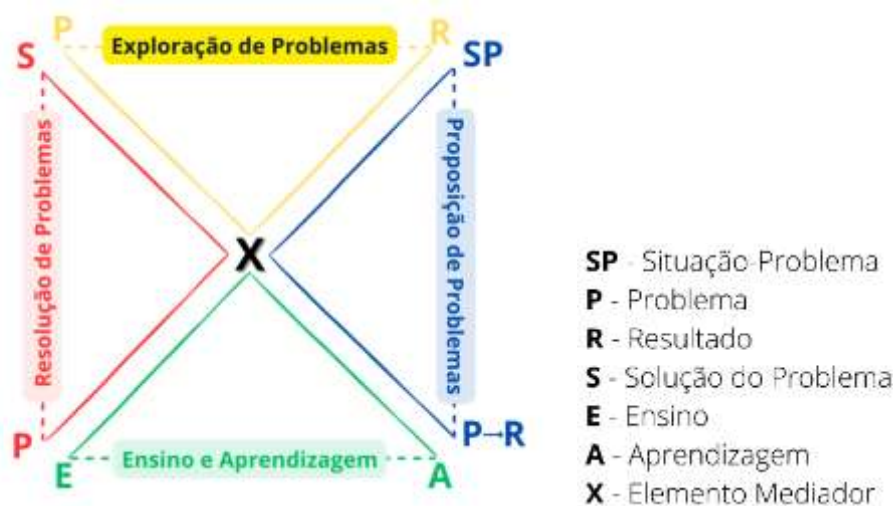
dependendo do conhecimento matemático e pedagógico do propositr. Essas ferramentas estão presentes durante todo o processo de EP e resultam não apenas na solução do problema, mas também na proposição do próprio problema, apontando a necessidade de resolvê-lo e explorá-lo.

Consideramos que Reflexão e Síntese – Trabalho – Problema – Trabalho – Reflexão e Síntese – Resultado (RS-T-P-T-RS-R) são momentos que acontecem ao tomarmos a PP como ponto de partida na EP. Nesse contexto, ela é potencializada e validada por meio da EP e da RP através de um novo Trabalho (T), Reflexões e Sínteses (RS), que terá como resultado o problema proposto. Caso o problema não apresente coerência didática, esses momentos voltarão a se repetir até que se alcance o resultado esperado. Dessa forma, evidencia-se a RP como um mecanismo intrínseco à PP, em uma proposta de EP.

Andrade (2017) destaca que tanto a RP quanto a PP, a EP e o ensino-aprendizagem deixam de ser movimentos diretos, através de um processo simples de estímulo-resposta, e passam a ser movimentos mediados e complexos. Ao percebermos que em todos os esquemas apresentados por Andrade (1998; 2017) o elemento mediador X fazia-se presente, buscamos adaptar todos eles em uma única representação (Figura 02), que dá conta de sintetizar todas as informações discutidas pelo autor.

Para uma melhor compreensão, precisamos analisar cada um dos triângulos representados separadamente pela cor, em que o elemento mediador X assume diferentes papéis para cada situação.

Figura 01 – Elemento mediador na ERPCDP



Fonte: Elaborado pelo autor com base em Andrade (1998; 2017), 2024.

Ao olharmos para a representação do triângulo que ilustra a Exploração de Problemas, partimos, segundo o autor, de um Problema na busca por um Resultado. Nesse esquema, fica

subentendida a PP, como ponto de partida na EP. Quanto aos resultados (R) gerados a partir dos momentos de exploração, podemos ter problema(s) gerado(s) a partir do problema inicial, solução(ões) do(s) problema(s), novos problemas etc. Em meio a todo o processo, temos o elemento mediador X, que faz referência ao Trabalho – Reflexões e Sínteses (T-RS). Destacamos a presença da RP como forma de potencializar a PP, que ora é tomada como ponto de partida, mas que pode ser retomada como resultado (R) da EP.

Na Resolução de Problemas, o ponto de partida (P) e o elemento mediado (X) são os mesmos que no triângulo/esquema da Exploração de Problemas. O diferencial está no que se objetiva em uma experiência de RP na perspectiva da EP, em que o autor destaca a solução do problema (S). Vale ressaltar que a exploração não necessariamente acaba ao encontrar a solução. É possível que novas problematizações surjam por meio do elemento mediador (X), motivando novas explorações.

Na PP, o ponto de partida é uma Situação-Problema (SP). Martins (2024, p. 18) diz que a SP “não é, necessariamente, uma pergunta ou questionamento a ser respondido, mas um contexto que desperta a curiosidade e o interesse do aluno, o que estimula a explorar, e, a partir daí, propor o seu problema.” No momento, o que temos são motivações, inquietações, Reflexões e Sínteses (RS) sobre essa SP, que também pode ser motivada por alguma problematização advinda de uma exploração anterior, como também de um contexto, imagem, gráfico, objeto matemático etc. Ao final da exploração, espera-se um Problema $\rightarrow$ Resultado ($P \rightarrow R$), que pode ser o próprio problema que se espera propor, a solução desse problema, novos problemas etc. O elemento mediador X é considerado o mesmo (T-RS).

Na representação do triângulo do Ensino-Aprendizagem, destaca-se a EPRP como elemento mediador X. Visualizando o Ensino (E) como ponto de partida, nesse contexto, esta abordagem metodológica é capaz de promover a Aprendizagem (A). Dessa forma, ficam implícitos os movimentos e submovimentos de Trabalho-Reflexão e Síntese (T-RS), codificação e decodificação.

A incorporação e a ênfase dada à PP na experiência de EPRP são compreendidas em seus diversos movimentos, submovimentos, aberturas e interações em que todos são mediados. De acordo com Andrade (2017, p. 374), “São elementos mediadores desses movimentos: o professor, os próprios alunos, a calculadora, o computador, etc. O próprio processo e todas as suas fases são, também, mediados”.

Além dos elementos mediadores, observamos que a EPRP é sempre motivada por algo, o que nos leva a realizar um trabalho inicial. O ponto de partida pode ser uma tabela, um gráfico, uma imagem, uma expressão matemática, um problema, um recurso didático físico ou digital,

uma informação verbal, uma situação do livro didático, uma sentença matemática, entre outras coisas. Porém, destacamos que ele é responsável por motivar e levar o caminhar da EPRP cada vez mais longe, por meio de processos de reflexões e sínteses, em que os resultados encontrados possam também ser interpretados como novos pontos de partida.

Em nossa pesquisa, fazemos da calculadora gráfica Desmos (CGD) um dos elementos mediadores da EPRP e que também assume o papel de ponto de partida, buscando compreender as implicações da sua inserção nessa prática. Temos muitas evidências de atividades de EPRP fazendo uso de lápis e papel, que têm contribuído cientificamente para as discussões e avanços, entre elas, algumas destacadas na Figura 01. Porém, inquieta-nos discutir como as Tecnologias Digitais (TD), junto à EPRP, podem proporcionar diferentes experiências.

Andrade, em 1998 já se demonstrava sensível a essa inquietação, trazendo discussões sobre a formação inicial dos professores de Matemática e a utilização da calculadora em sala de aula, bem como sobre suas relações com o ensino-aprendizagem da Matemática via RP.

A inserção de recursos de natureza digital na EPRP é mais um desafio para o professor, pois não se trata de um uso facilitador e motivador. Precisa ser pensado de modo que não seja capaz de inibir momentos importantes da atividade, antecipar etapas da aprendizagem e nem comprometer o desenvolvimento de habilidades cognitivas. Ao contrário, é desafiador pensar como recursos dessa natureza podem potencializar a EPRP, indo além do que seria possível usando apenas lápis e papel, proporcionando novas experiências de T-RS-R embasadas por novas formas de codificar e decodificar os problemas.

No que tange ao uso de TD, RP e PP, as pesquisas atestam uma carência maior desta última (Andrade, 2017; Cai *et al.*, 2015; Ellerton; Singer; Cai, 2015), bem como a necessidade de dar mais visibilidade à prática na PP.

A partir da discussão realizada até aqui, acreditamos ter apresentado informações e argumentos suficientes para a compreensão da EPRP como uma proposta de ensino-aprendizagem da Matemática que é discutida dentro da linha de pesquisa de RP. Tudo isso apresenta-se como uma evolução no desenvolvimento das pesquisas do campo.

2.2 Pesquisas em Resolução de Problemas

A EPRP, em meio às diferentes abordagens em RP que vamos aqui discutir, tem em consenso que o problema é o ponto de partida. Ela tem proximidade com a perspectiva de Schroeder e Lester (1989), ao discutir o Ensino *sobre/para/via* RP, especificamente no Ensino *via/através de* RP, trazendo o ensino da Matemática a partir do problema.

No Ensino *sobre* Resolução de Problemas, de acordo com os autores, destaca-se o modelo de RP de Polya (1995), levando em consideração o entendimento das quatro fases interdependentes no processo de RP.

Quando essas discussões foram endossadas, tinha-se como norte as ideias defendidas por Polya (1995). Ensinar, hoje, sobre RP nos coloca diante de um desafio mais plural, em que temos a responsabilidade de acompanhar o desenvolvimento das pesquisas em Educação Matemática (EM) e de discutir as diferentes perspectivas existentes sobre a temática na atualidade, inclusive como metodologia de ensino.

No Ensinar *para* Resolver Problemas identificado por Schroeder e Lester (1989), o foco está em como a Matemática ensinada pode ser aplicada na resolução de problemas rotineiros quanto não rotineiros. A ênfase não está apenas na aquisição do conhecimento matemático, mas também em saber como usá-lo. Os alunos aplicam os conceitos e estruturas matemáticas em problemas, e o professor se preocupa em capacitar os alunos a transferir o que aprenderam de um contexto de problema para outro.

Na proposta de Ensino *via ou através* (como usado por alguns autores) da RP apresentada por Schroeder e Lester (1989), os problemas são valorizados não apenas como uma situação-problema que incorpora os aspectos-chave do tópico estudado, mas como um meio viável para promover a aprendizagem. O problema é introduzido inicialmente, e, por meio dele, os aspectos-chave do tópico vão sendo explorados. Nessa configuração, as habilidades matemáticas vão sendo desenvolvidas como respostas aceitáveis para os problemas e a aprendizagem pode ser vista como um movimento do concreto para o abstrato.

Embora essas três abordagens de ensino sejam discutidas separadamente, na prática, elas se sobrepõem e ocorrem em diversas combinações e sequências. Dessa forma, não é coerente argumentar contra ou a favor da inserção de uma ou mais na mesma proposta pedagógica. É preciso ter ciência das limitações decorrentes da adesão exclusiva a cada uma das abordagens.

No Ensino *via* Resolução de Problemas, Schroeder e Lester (1989) apontam que, em vez de priorizar a RP no ensino da Matemática, professores, autores de livros didáticos, desenvolvedores de currículos e avaliadores devem centrar-se na compreensão como objetivo principal. Isso implica em mudar a visão restrita, de que a Matemática é apenas uma ferramenta para resolver problemas, para uma concepção mais ampla, de que a Matemática é uma forma de pensar e organizar experiências. Como resultado, a RP não perderá sua importância, mas seu papel no currículo mudará. Ela se tornará tanto um meio para adquirir novos conhecimentos matemáticos quanto um processo para aplicar o que foi aprendido anteriormente.

O desenvolvimento da habilidade de compreensão dos objetos, linguagem e representações matemáticas em um problema é fundamental para o sucesso na RP. Schroeder e Lester (1989) argumentam que a compreensão na RP amplia as representações disponíveis para os solucionadores, auxilia no monitoramento de procedimentos, ajuda na avaliação da razoabilidade dos resultados e facilita a transferência de conhecimento para problemas relacionados e sua aplicação em diferentes situações.

Além de compreender como os alunos aprendem por meio da RP, é crucial discutir como essa estratégia está sendo ensinada e qual é o domínio pedagógico e de conteúdo do professor para mediá-la. Lester e Cai (2016) questionam se a resolução de problemas matemáticos pode ser ensinada e observam que, apesar dos avanços significativos nas pesquisas sobre os aspectos cognitivos e metacognitivos, bem como no ensino dessa abordagem em sala de aula ao longo de 30 anos, ainda existem mais perguntas do que respostas sobre o assunto.

Quando o ensino em sala de aula é concebido como um sistema, a RP não deve ser isolada do currículo. A aprendizagem dos conteúdos matemáticos e o desenvolvimento das habilidades de RP devem ser integrados em todos os aspectos da EM. Para ajudar os alunos a se tornarem solucionadores de problemas bem-sucedidos, os professores precisam reconhecer que o desenvolvimento dessas habilidades geralmente é um processo gradual. Não apenas as habilidades de RP são parte integrante do aprendizado da Matemática em todas as áreas do conteúdo, mas também fazem parte do aprendizado matemático em geral (Lester; Cai, 2016).

English, Lesh e Fennewald (2008) discutem como a RP pode ser integrada como um componente essencial do currículo, em vez de ser tratada como um tópico separado, muitas vezes, negligenciado. Eles levantam questões importantes que nos levam a refletir sobre: a natureza da RP em várias áreas do mundo atual; perspectivas orientadas para o futuro no ensino e na aprendizagem da RP, incluindo o desenvolvimento de conteúdo matemático por meio dessa abordagem; contribuições dos estudos especializados em RP para o desenvolvimento de teorias que orientam o *design* de experiências de aprendizagem significativas; e abordagem baseada em modelos e modelagem como uma alternativa poderosa às visões tradicionais da RP.

Os pesquisadores Lester e Cai (2016) enfatizam a importância de expor os alunos a tarefas verdadeiramente desafiadoras para promover a construção de um entendimento matemático sólido, envolvendo uma compreensão mais profunda dos conceitos fundamentais, a capacidade de aplicar esses conceitos a uma variedade de situações e a habilidade de raciocinar de forma lógica e analítica. Segundo eles, muitos professores de Matemática tendem a evitar desafios nos problemas, enquanto outros proporcionam aos alunos a oportunidade de enfrentar as partes difíceis. Com isso, atestam que problemas matemáticos genuinamente

desafiadores, que envolvem Matemática significativa, têm o potencial de criar contextos intelectuais valiosos para o desenvolvimento dos alunos.

English, Lesh e Fennewald (2008) identificam algumas limitações na pesquisa em RP. Uma delas é a falta de explicitude sobre como o desenvolvimento de conceitos se relaciona com o desenvolvimento de heurísticas, crenças, disposições e processos relevantes para a RP. É importante compreender porque os alunos têm dificuldades em ampliar os conceitos e habilidades matemáticas que aprenderam na escola em situações do mundo real. Os tipos de problemas que os alunos encontram na sala de aula geralmente estão muito distantes da realidade. Precisamos corrigir esse estado de coisas ao considerarmos novas perspectivas sobre a RP no currículo (English; Lesh; Fennewald, 2008).

A pesquisa sobre RP não tem acompanhado as rápidas mudanças na Matemática e na RP necessárias além da escola. Pesquisadores em EM geralmente evitam tarefas que envolvam o desenvolvimento de ferramentas críticas para seu próprio uso. Ao contrário de outras ciências, os Educadores Matemáticos desenvolveram poucas ferramentas para observar, documentar ou medir a maioria dos entendimentos e habilidades que se acredita contribuir em RP (English; Lesh; Fennewald, 2008).

Van de Walle (2009) enfatiza que os alunos devem resolver problemas não apenas para aplicar Matemática, mas, principalmente, para aprender novos conceitos matemáticos. Ao se envolverem em tarefas de RP bem escolhidas e focarem nos métodos de resolução, os alunos desenvolvem uma compreensão mais profunda da Matemática incorporada nessas tarefas. O pensamento reflexivo e a análise de padrões, relações e métodos de resolução são atividades essenciais durante esse processo de aprendizagem.

Cai (2003) discute o Ensino da Matemática através da RP, apoiando-se na proposta de Schroeder e Lester (1989) como uma abordagem eficaz para a aprendizagem dos alunos. Ele considera o contexto histórico de pesquisas sobre RP. Ao analisar as evidências científicas até então, Cai (2003) levanta quatro questões e preocupações relacionadas ao ensino através da RP: as crianças pequenas são realmente capazes de explorar problemas por conta própria e chegar a soluções sensatas? Como os professores podem aprender a ensinar por meio da resolução de problemas? Quais são as crenças dos alunos sobre o ensino através da resolução de problemas? Os alunos sacrificarão habilidades básicas se aprenderem Matemática através da resolução de problemas?

Esses questionamentos apresentados pelo professor e pesquisador Jinfa Cai são bem recorrentes em seus textos que discutem a pesquisa em RP (Cai, 2003) e mais profundamente na PP (Cai *et al.*, 2015; Cai; Hwang, 2020; Cai, 2022).

O termo “Explorar Problemas” presente no primeiro questionamento não tem relação direta com a proposta discutida por Andrade (1998; 2017), transparecendo mais o sentido de investigar matematicamente. Porém, podemos perceber que a palavra “Explorar” amplia a experiência com a RP. No contexto apresentado por Cai (2003), o problema é tomado como ponto de partida.

Cai (2003) traz várias evidências de pesquisa que lhe permitem compreender como as crianças são capazes de explorar problemas por conta própria e chegar a soluções sensatas. Chama nossa atenção, em suas análises, perceber que os alunos são capazes de desenvolver suas próprias estratégias de RP e, com isso, mostram que é possível usá-las para melhorar sua compreensão da Matemática. Outro fato importante é que eles são capazes de desenvolver estratégias de resolução antes mesmo de qualquer instrução em sala de aula.

Com relação às crenças que os alunos têm em torno da RP, Cai (2003) relata que eles acreditam que existe apenas uma maneira “certa” de abordar e resolver um problema. Essa crença é resultado do uso da RP em sala de aula, que busca apenas a compreensão do problema como a aplicação de um algoritmo matemático que precisa sempre atender ao rigor matemático de natureza algébrica, numérica ou geométrica.

Os diferentes olhares para a pesquisa em RP têm nos motivado a discutir o papel e a importância da PP como desdobramento dela.

2.3 Pesquisas em Proposição de Problemas

Em suas pesquisas e orientações, Andrade (2017, p. 388) tem “notado que a Proposição de Problemas parece ser a ferramenta mais difícil de ser trabalhada e desenvolvida pelos alunos”. O pesquisador acredita que essa realidade se dá devido às práticas de salas de aulas enfatizarem mais a RP.

Na maioria das salas de aula, é comum que os problemas sejam apresentados exclusivamente pelos professores, e não pelos alunos. Ressaltar que os professores apresentam esses problemas não significa que eles sejam os criadores/autores/propositores. Essa observação se refere ao papel do professor como responsável por trazer os problemas para o ambiente de aula, seja por meio de materiais como livros didáticos ou de fontes como sites da internet, e não necessariamente por serem eles que elaboram os problemas.

Na maioria das salas de aula, é comum que os problemas sejam apresentados exclusivamente pelos professores, e não pelos alunos. Ressaltar que os professores apresentam esses problemas não significa que eles sejam os criadores/propositores/autores. Essa

observação se refere ao papel do professor como responsável por trazer os problemas para o ambiente de aula, seja por meio de materiais como livros didáticos ou de fontes como sites da internet, e não necessariamente por serem eles que elaboraram//propõem os problemas.

Kilpatrick (1987) ressalta que a PP não deve ser apenas um objetivo de instrução, mas também um meio de instrução. Tanto professores quanto alunos frequentemente consideram problemas como desafios a serem superados, sem questionar suas origens ou possíveis formulações alternativas. No entanto, a habilidade de criar problemas matemáticos deveria ser uma parte integrante da educação de todos os alunos, mas, atualmente, é uma experiência rara, reservada apenas para estudantes avançados em Matemática.

A RP pode não exigir dos alunos, em um primeiro momento, a necessidade de propor problemas. Porém, a PP apontará mais incisivamente a RP. Na perspectiva da EPRP, essa ideia fica ainda mais evidente.

A proposição de problemas é percebida como uma ferramenta de problematização consciente que tanto impulsiona o problema ou situação-problema como avança o processo de resolução e de exploração. Nesse processo todo, a atividade de exploração de problemas é considerada a ferramenta mais importante e mais ampla de todas, ela compreende tanto a resolução como a proposição. É no processo de exploração de uma dada situação, por exemplo, que transformamos a situação dada em situação-problema, partindo então para o problema propriamente dito. (Andrade, 2017, p. 371-372).

Um avanço significativo presente na metodologia de EPRP diz respeito à igual atenção que se tem dado à RP e à PP. Inicialmente, a abordagem estava voltada mais para a RP, e, recentemente, temos as discussões em torno da PP. Porém, essas temáticas de pesquisa, em sua maioria, vêm acontecendo por meio de investigações separadas. Na EPRP (Andrade, 1998; 2017), podemos perceber que essa discussão não acontece dissociada.

Na proposição de problemas, a exploração de problemas é vista como uma caixa de ferramentas que possibilita e avança o trabalho de proposição de problemas. Por sua vez, a proposição de problemas é também uma caixa de ferramenta que operacionaliza e avança o trabalho com a exploração de problemas. Da mesma forma é a resolução de problemas no contexto deste trabalho. (Andrade, 2017, p. 389).

Vista como uma caixa de ferramentas, a EP é uma engrenagem que move simultaneamente a PP e a RP em suas diferentes intencionalidades na prática de sala de aula.

Na Figura 03, apresentamos uma esquematização de como essa caixa de ferramentas coloca em movimento a interação entre três engrenagens que denominamos de Proposição de Problemas, Exploração de Problemas e Resolução de Problemas.

Figura 02 – Exploração-Proposição-Resolução de Problemas como um conjunto de engrenagens



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Uma vez em movimento, a PP exige e potencializa a RP e ambas se movem no mesmo sentido. Ao tomarmos a PP como ponto de partida, a movimentação em torno da EP exige um trabalho inicial a partir de um ponto de partida e da presença de elementos mediadores, movendo as engrenagens por meio dos processos de Codificação, Decodificação, Reflexões e Sínteses. A depender da proposta pedagógica, os elementos mediadores podem ser: a interação realizada pelos próprios alunos; a mediação do professor; o uso de um recurso didático de natureza física ou digital. São essas as ferramentas que mantêm as engrenagens em constante movimento.

Ao girar cada uma delas, automaticamente, colocamos as demais em movimento e em sintonia. Isso representa, para nós, na perspectiva da EPRP, a conexão existente entre essas abordagens. A engrenagem da EP gira em sentido contrário às da PP e da RP. Porém, é esse movimento que potencializa ambas as propostas e as fazem girar no mesmo sentido. O problema sempre será o combustível que coloca a engrenagem em movimento e assim a mantém.

A engrenagem da EP permite trazer elementos da multicontextualidade da sala de aula para a PP e a RP, proporcionando diferentes perspectivas de reflexão, tornando o movimento da engrenagem dinâmico e contínuo.

Enquanto se propõe um problema, é preciso que esse problema seja explorado e resolvido para validar a sua Coerência Didática (CD). Durante a RP, é possível que novas problematizações surjam por meio da exploração, gerando novos problemas. Nesse sentido, percebemos que em uma perspectiva de EP, a PP e a RP estão interligadas por meio de um movimento contínuo que sempre será possível levar a uma nova situação, a um novo problema, a uma nova solução, a uma nova exploração, a depender da intencionalidade da prática pedagógica.

O que faz mover essa engrenagem são os diferentes momentos de Codificação e Descodificação, o intenso Trabalho realizado por meio dos elementos mediadores (professor, aluno, calculadora gráfica, entre outros) motivados pelo ponto de partida e as Reflexões realizadas em todo o processo, gerando Sínteses e Resultados. É possível colocarmos o conjunto de engrenagem em movimento (metodologia de sala de aula de EPRP) ativando qualquer uma delas inicialmente.

No caso da proposição de problemas, na/com a sala de aula, temos ainda observado que ela também impulsiona o trabalho com a resolução e exploração de problemas. Ela pode ocorrer tanto antes como durante e depois do processo e exploração de problemas. Mas o ideal é que ela seja sempre o ponto de partida de todo esse processo. E quando pensamos em exploração de problemas sempre pensamos a proposição de problemas como uma ferramenta presente em todo o processo. É necessária essa tomada de consciência. (Andrade, 2017, p. 389-390)

Cai *et al.* (2015) relatam que nas últimas décadas houve avanços significativos na compreensão do aspecto afetivo, cognitivo e metacognitivo na RP em Matemática e outras disciplinas. Quando comparada à PP, percebem que este é um empreendimento novo, mas que tem havido esforços para incorporá-lo na Matemática escolar, em diferentes níveis educacionais, em todo o mundo.

Kilpatrick (1987) enfatiza que a PP é uma companheira importante para a RP, tendo recebido pouca atenção explícita no currículo de Matemática. Trinta anos depois dessas observações, percebemos que essa realidade vem mudando um pouco, pois tanto a pesquisa em PP vem ganhando espaço como tem havido a inserção dessa abordagem no currículo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Observamos que 24 habilidades do Ensino Fundamental voltadas ao ensino da Matemática (Brasil, 2017) fazem referência à elaboração de problemas. A inserção no currículo não significa que esteja acontecendo em sala de aula, mas indica que é preciso prestar mais atenção a essa habilidade na formação inicial dos professores.

Ellerton, Singer e Cai (2015) dizem que a PP é considerada importante para o ensino da Matemática, mas, muitas vezes, é negligenciada nos documentos curriculares e nas discussões

sobre sua implementação na sala de aula. Ela é, simultaneamente, valorizada como um componente vital da Matemática, mas subestimada quando se trata de sua integração nas atividades regulares de ensino.

As discussões mais sólidas em torno da PP deram-se, inicialmente, com Kipatrick (1987) e Silver (1994). Andrade (1998) também já percebia em sua proposta de EP que a PP vinha se acentuando cada vez mais.

Por essa ótica, Singer, Ellerton e Cai (2013), mediante as explorações feitas no campo da PP, enfatizam que chegou a hora de análises mais sistemáticas que possam organizar a pesquisa e a sua teoria, bem como suas aplicações na prática de ensino. “Existe, portanto, a necessidade de estudar técnicas de proposição de problemas que já são praticadas em algumas salas de aula, a fim de analisar e ampliar as estratégias que se mostraram eficazes” (Singer; Ellerton; Cai, 2013, p. 3, tradução nossa⁴).

Além dos pontos de vista discutidos até aqui, muitos outros pesquisadores têm se dedicado à pesquisa sobre a PP em diferentes contextos e perspectivas. Singer, Ellerton e Cai (2013, p. 4, tradução nossa⁵) apontam que “atualmente, o campo da proposição de problemas ainda é muito diversificado e carece de definição e estrutura.” Mesmo diante da imparcialidade em ter uma definição mais sólida sobre essa nova tendência nas pesquisas em EM, percebemos que as investigações desenvolvidas vêm caminhando em direção a esse encontro. Essas tomadas nos direcionam para discutir as diferentes técnicas e olhares sensíveis relacionadas à PP, como podemos ver na Tabela 01.

Tabela 01 – Diferentes olhares para a Proposição de Problemas

Pesquisador(a/es)	Olhar para a Proposição de Problemas
Silver (1994, p. 19)	“proposição de problemas refere-se tanto a geração de novos problemas quanto à reformulação de problemas dados. Assim, a proposição pode ocorrer antes, durante ou depois da solução de um problema.” ⁶
Domite (2001, p. 2)	“[...] qualquer aprendizagem vinculada a problematização começa quando o processo de problematização é iniciado.” ⁷
Singer, Ellerton e Cai (2013, p. 2)	“Em sua essência, a proposição de problemas é baseada na investigação e, portanto, oferece contextos em que os alunos

⁴ There is therefore a need to study problem-posing techniques that are already practiced in some classrooms, in order to analyze and extend those strategies that proved to be effective. (Singer; Ellerton; Cai, 2013, p.3).

⁵ At present, the field of problem posing is still very diverse and lacks definition and structure. (Singer; Ellerton; Cai, 2013, p.4).

⁶ Problem posing refers to both the Generation of new problems and the re-formulation, of given problems. Thus, posing can occur before, during, or after the solution of a problem. (Silver, 1994, p. 19).

⁷ [...] any learning linked to problematization begins when the problematization process is initiated. (Domite, 2001, p. 2).

	podem discutir e avaliar uma variedade de abordagens que foram desenvolvidas e apresentadas pelos colegas. ⁸ ”
Jurado (2013, p. 130)	“[...] acreditamos que desenvolver a capacidade de proposição de problemas, para alunos e professores, é contribuir para desenvolver a capacidade de fazer perguntas e identificar problemas e, assim, estimulá-los à pesquisa. ⁹ ”
Crespo (2015, p. 494)	“A Proposição de Problemas talvez seja considerada uma das formas mais elevadas de conhecimento matemático e um caminho seguro para ganhar status no mundo da matemática. ¹⁰ ”
Cai e Hwang (2020, p. 2)	“Por Proposição de Problemas em Educação Matemática, nos referimos a vários tipos de atividades relacionadas que envolvem ou apoiam professores e alunos a formular (ou reformular) e expressar um problema ou tarefa com base em um contexto específico (que chamamos de contexto do problema ou situação-problema). ¹¹ ”

Fonte: Referenciais da pesquisa.

Embora existam diferentes perspectivas sobre a PP, é necessário avançarmos nessa área. Isso não significa dizer que ela é uma prática recente na Matemática. Singer, Ellerton e Cai (2013) enfatizam que

[...] a proposição de problemas é uma questão antiga. O que é novo é a consciência de que a proposição de problemas precisa permear os sistemas educacionais em todo o mundo, tanto como meio de instrução (destinado a envolver os alunos em atividades de aprendizagem genuínos que produzem uma compreensão profunda dos conceitos e procedimentos matemáticos) quanto como um objeto de instrução (focado no desenvolvimento da proficiência dos alunos na identificação e proposição de problemas de situações não estruturadas) com alvos importantes em situações da vida real. (Singer; Ellerton; Cai, 2013, p. 5, tradução nossa¹²).

O processo de PP envolve a resolução e a reformulação desse problema em momentos distintos, o que nos leva a perceber que, mesmo tomando-a como ponto de partida, ela faz parte

⁸ At its heart, problem posing is based on inquiry and thus affords contexts where students can discuss and evaluate a variety of approaches that have been developed and presented by classmates. (Singer; Ellerton; Cai, 2013, p. 2).

⁹ [...] consideramos que desarrollar la capacidad de crear problemas, para alumnos y profesores, es contribuir a desarrollar las capacidades de formular(se) preguntas e identificar problemas y, así, estimularlos a la investigación. (Jurado, 2013, p. 130).

¹⁰ Problem posing is perhaps considered one of the highest forms of mathematical knowing and a sure path to gain status in the world of mathematics. The Generation of new mathematical problems is a Much less defined practice within the discipline of mathematics, perhaps considered Much more as a creative act or na artistic endeavor, than a systematic practice. (Crespo, 2015, p. 494).

¹¹ By problem posing in mathematics education, we refer to several related types of activity that entail or support teachers and students formulating (or reformulating) and expressing a problem or task based on a particular contexto (which we ferer to as the problem contexto or problem situation). (Cai; Hwang, 2015, p. 2).

¹² [...] problem posing is na old issue. Wha tis new is the awareness that problem posing needs to pervade the education systems Around the world, both as a means of instruction (meant to engage students in genuine learning activities that produce deep understanding of mathematics concepts and procedures) and as na object of instruction (focused on developing students' profeciency in identifying and formulating problems from unstructured situations) with important targets in real-life situations. (Singer; Ellerton; Cai, 2013, p. 5).

de um movimento dinâmico dentro da EP. O processo exploratório intrínseco a essa prática precisa ser aberto e fornecer condições para discutir os elementos internalistas e externalistas da Matemática. A compreensão dos aspectos socioculturais como dados importantes na ação pedagógica é o que torna a visão externalista relevante na EP, enquanto os aspectos internalistas fazem referência às relações, expressões e conceitos da própria Matemática.

A Codificação, Descodificação, Reflexões e Sínteses, além do elemento mediador (professor, aluno, calculadora gráfica etc.) e do ponto de partida, são instrumentos que promovem movimentos problematizadores que catalisam a EPRP. Domite (2001) discute o papel da problematização como ponto importante na PP.

- O processo de problematização é um movimento produtivo de transformação social, o que significa que as atitudes do professor de matemática podem ampliar a concepção do aluno sobre sua vida real.
- O objeto de conhecimento pode ser mais ou menos internalizado pelo aluno de acordo com sua necessidade ou interesse. [...]
- O trabalho pedagógico produzido pelas situações que advêm da realidade social dos alunos é um possível direcionamento criativo que motiva a aprendizagem e o ensino de matemática. [...]
- Como professores de matemática, devemos ser capazes de pensar/argumentar sobre a produção do grupo – ou seja, devemos estar atentos ao processo do aluno ao invés de apenas ensinar um conteúdo matemático. (Domite, 2001, p. 3, tradução nossa¹³).

Esse processo de problematização torna a Matemática estudada na EPRP como um meio para se compreender diferentes fenômenos e não um fim em si mesma. Uma vez que a multicontextualidade da sala de aula é levada em consideração nos diferentes momentos de problematizações, abre-se um leque de possibilidades para ir, cada vez mais, dando autonomia ao aluno, fazendo-o sentir-se parte do problema. O professor passa a fazer parte dessa dinâmica como mediador responsável por boa parte desses momentos de problematização, por meio de um processo ativo, reflexivo e atento ao processo de exploração desenvolvido pelos alunos.

Para Domite (2001), a visão externalista potencializa a PP, desmitificando a ideia de neutralidade da Matemática já no momento da PP. Isso faz com que o professor esteja atento a propor problemas que deem conta de motivar os alunos e faça-os compreender o seu papel frente a diferentes questões sociais, políticas e culturais por meio da Matemática. Esse é um

¹³ - The problematization process is a movement towards social transformation, which means that the mathematics teacher's attitudes could expand the students' concept social life.

- The object of knowledge can be more or less internalized by the student according to his or her need or interest. [...]

- The pedagogical work produced by the situations that come from students' social reality is a possible creative Direction that motivates learning and teaching of mathematics. [...]

- As teachers of mathematics, we must be able to think/argue the group's production – in other words, we must be able to pay attention on the student's process instead of just teaching a mathematical content. (Domite, 2001, p. 3).

desafio para o professor de Matemática que ouse fazer uso dessa proposta metodológica em sua sala de aula.

Essa responsabilidade precisa ser estendida aos alunos, para que também desenvolvam a habilidade de propor problemas dessa natureza. Domite (2001, p. 6, tradução nossa¹⁴) evidencia “[...] que o interesse dos alunos aumenta quando a problematização e a proposição de problemas, a partir dos fatos da realidade social, tornam-se o cerne da instrução em uma sala de aula de matemática”.

Lester e Cai (2016) enfatizam a PP como uma atividade instrucional que envolve os alunos no ensino por meio de problemas. Solicitar aos alunos que proponham seus próprios problemas permite uma análise diferente do pensamento dos alunos. A PP é uma atividade que desafia os alunos e deve estar integrada às práticas de RP, potencializando ambas as abordagens.

De acordo com Cai *et al.* (2015), a pesquisa na PP busca determinar se os professores e alunos são capazes de propor problemas matemáticos significativos. Os pesquisadores normalmente projetam situações-problemas e pedem aos participantes que proponham problemas que possam ser resolvidos com base nas informações fornecidas. Essas situações podem variar em termos de complexidade e conteúdo.

Para que esses problemas possam ser propostos inicialmente por professores e alunos, é necessário um direcionamento, um norte, uma situação etc. Kilpatrick (1987) apresenta como possíveis fontes para a PP outras pessoas como fonte de problemas, outros problemas como fontes de problemas ou situações como fonte de problemas. Ainda discute que, se os alunos quiserem se tornar propositores autônomos de problemas, precisarão praticar a adoção de uma abordagem mais reflexiva para as situações-problemas. Observamos que esse posicionamento também se aplica para os professores, que precisam se desenvolver como propositores de problemas autônomos.

Silver (1994) apresenta várias perspectivas sobre a PP, incluindo a visão de que ela é uma característica da criatividade ou habilidade excepcional em Matemática, uma parte importante da instrução baseada na investigação, uma faceta proeminente da atividade matemática, um meio de melhorar a RP dos alunos, uma janela para entender a compreensão matemática dos alunos e uma maneira de melhorar a atitude dos alunos em relação à Matemática.

Após discutir cada uma dessas perspectivas, Silver (1994) ressalta que a pesquisa sobre PP tem várias dimensões importantes. Primeiro, ela permite aos pesquisadores observar o

¹⁴ [...] that interest increases when problematization and problem posing, coming from the facts of social reality, become the heart of instruction in a mathematics class. (Domite, 2001, p. 6).

pensamento matemático dos alunos e refletir sobre suas experiências matemáticas. Em segundo lugar, essas experiências podem ser uma área rica para explorar a interação entre aspectos cognitivos e afetivos da aprendizagem matemática dos alunos. Por fim, há a necessidade de uma pesquisa mais sistemática para entender o impacto das experiências de PP na RP dos alunos, na compreensão matemática e em sua atitude em relação à Matemática.

Concordamos com o autor e percebemos a necessidade de um direcionamento das pesquisas em PP que consiga responder a diferentes questionamentos que vêm surgindo à medida que a sociedade vai evoluindo e se reconfigurando. Nesse sentido, destacamos a forma como as Tecnologias Digitais (TD) vêm interferindo direta e indiretamente nas vivências das salas de aulas e como isso vem se relacionando com a RP e a PP. Essas experiências precisam ser cada vez mais alvo de pesquisas que busquem compreender como o desenvolvimento e a construção do conhecimento matemático tem-se dado por meio dessas propostas metodológicas.

Buscando compreender cada vez mais as dimensões da pesquisa em PP, nos deparamos com pesquisas desenvolvidas pelo professor e pesquisador Jinfa Cai, da Universidade de Delaware, nos Estados Unidos. Após as discussões inicialmente apresentadas por Kilpatrick (1987) e Silver (1994) sobre a temática, temos uma retomada e aprofundamento desse campo de investigação na última década. Por meio de trabalhos desenvolvidos junto a outros pesquisadores, Cai tem lançado mão de muitos questionamentos, que vêm impulsionando e direcionando a pesquisa em PP.

Cai (2003) inicia trazendo questionamentos sobre o ensino da Matemática através da RP. Anos depois, Cai *et al.* (2015) trazem algumas questões respondidas e não respondidas sobre a pesquisa em PP. Nesse trabalho, os autores sintetizam o estado atual do conhecimento na pesquisa em PP e sugerem direções para estudos futuros, por meio das seguintes inquietações.

1. Por que a proposição de problemas é importante na Matemática Escolar?
2. Os professores e alunos são capazes de propor problemas matemáticos importantes?
3. Os alunos e professores podem ser efetivamente preparados para propor problemas de alta qualidade?
4. O que sabemos sobre os processos cognitivos da proposição de problemas?
5. Como as habilidades de proposição de problemas se relacionam com as habilidades de resolução de problemas?
6. É possível usar a proposição de problemas para medir a criatividade e a aprendizagem matemática?
7. Como as atividades de proposição de problemas são incluídas nos currículos de Matemática?
8. O que caracteriza uma sala de aula quando os estudantes se engajam em atividades de proposição de problemas?
9. Como a tecnologia pode ser usada em atividades de proposição de problemas?

10. Que resultados sabemos sobre o impacto de engajar os estudantes em atividades de proposição de problemas? (Cai *et al.*, 2015, p. 5, grifo nosso, tradução nossa¹⁵)

Esses questionamentos motivaram, inclusive, esta pesquisa. Ao final, esperamos que nossas contribuições ajudem a responder à pergunta 9. Com esse mesmo foco, pesquisadores como Abramovich e Cho (2015) têm desenvolvido pesquisas fazendo uso de TD, especificamente planilhas eletrônicas, na PP. Nossa atenção tem sido direcionada pelo uso da Calculadora Gráfica Desmos (CGD) na EPRP.

Consoante às ideias de Cai *et al.* (2015), é perceptível o quanto os alunos são capazes de melhorar a amplitude e o nível de desafio dos problemas que propõem quando têm experiência em resolver tais problemas e são estimulados por contextos informais. Esse resultado da pesquisa em PP complementa a ideia já defendida por Silver (1994), de que a proposição de problemas tem valor potencial em tornar os alunos melhores resolvedores de problemas. Essa realidade é ricamente vivenciada na EP em ambas as perspectivas.

Mais recentemente, Cai (2022) disserta sobre o que a pesquisa diz sobre o ensino da Matemática através da PP. Para isso, ele mobiliza alguns questionamentos, tal qual tem feito em outros trabalhos. Ao mesmo tempo, o pesquisador apresenta uma proposta de Aprendizagem baseada na Proposição de Problemas (P-PBL). Assim como a pesquisa em RP tem desencadeado diferentes perspectivas e modelos metodológicos, o mesmo vem acontecendo com o caminhar da pesquisa em PP.

As diferentes pesquisas e atividades desenvolvidas em PP vêm sinalizando como precisa ser o ensino da Matemática por meio da PP. Por mais que não tenhamos uma receita pronta para apresentar, é possível encontrar evidências importantes que direcionam diferentes propostas metodológicas através da PP.

Cai (2022) também aponta os desafios que precisam ser enfrentados pelos professores para que aprendam a ensinar por meio da PP. O primeiro é a falta de tarefas de PP nos materiais curriculares. Outro desafio é a adesão dos professores ao ensino através da PP e a dificuldades de implementá-la nas salas de aulas, mesmo quando os professores já aderiram à abordagem.

¹⁵ 1. Why is problem posing important in school mathematics?
 2. Are teachers and students capable of posing important mathematical problems?
 3. Can students and teachers be effectively trained to pose high-quality problems?
 4. What do we know about the cognitive processes of problem posing?
 5. How are problem-posing skills related to problem-solving skills?
 6. Is it feasible to use problem posing as a measure of creativity and mathematical learning outcomes?
 7. How are problem-posing activities included in mathematics curricula?
 8. What does a classroom look like when students engage in problem-posing activities?
 9. How can technology be used in problem-posing activities?
 10. What do we know about the impact of engaging students in problem-posing activities on students outcomes? (Cai *et al.* 2015, p.5).

Anterior a essa discussão, Cai e Hwang (2020) já discutem como aprender a ensinar através da proposição de problemas matemáticos.

Mesmo não tendo respostas para todas os questionamentos (Cai *et al.* 2015; Cai, 2022), são essas e outras perguntas que vêm mobilizando a pesquisa em PP. O olhar de cada pesquisador para elas vai contribuindo para uma aglutinação. Só existe resolução de problemas se houver propositores de problemas. A pesquisa em RP cresceu sem levar em consideração, durante um bom tempo, o processo de propor os problemas e quem propõe esses problemas. Com isso, reproduziu-se a ideia de que, na sala de aula de Matemática, o objetivo é apenas resolver problemas. Fortalecendo essa reflexão, Kilpatrick (1987, p. 123) aponta que,

Problemas de matemática obviamente vêm de professores de matemática e livros didáticos, portanto, bons problemas de matemática devem vir de bons professores de matemática e bons livros de matemática. A ideia de que os próprios alunos podem ser a fonte de bons problemas matemáticos provavelmente não ocorreu a muitos alunos ou a muitos de seus professores. (Kilpatrick, 1987, p. 123, tradução nossa¹⁶).

Não podemos exigir dos alunos habilidades de resolver e propor problemas se os seus professores não tiveram contato com esse tipo de prática em sua formação inicial e/ou continuada. Ellerton, Singer e Cai (2015) discutem que, para envolver os alunos na PP, é fundamental que os professores se sintam à vontade para propor problemas. Ressaltam também que a falta de confiança dos professores em suas habilidades de PP pode prejudicar a vinculação dessa atividade em situações da vida real. Além disso, essa falta de confiança pode levar a implementações desajeitadas e pouco inspiradoras de atividades de PP em currículos educacionais.

É possível que muitos professores que estão nas salas de aula da Educação Básica tenham tido alguma experiência com a RP durante sua formação. No entanto, não podemos garantir o mesmo quando se trata da PP. É necessário que, em algum momento, essas propostas pedagógicas que incluam a RP e a PP cheguem até esses professores e que eles estejam receptivos a essa abordagem.

A lógica sugere que quanto mais cedo os professores ganharem experiência em propor problemas, ou em ver maneiras pelas quais eles podem usar a proposição de problemas com seus alunos, mais provável será que sintam que a proposição de problemas é um aspecto natural e fundamental de todo o processo de ensinar e aprender matemática. A partir dessa perspectiva, parece ser importante que a proposição de problemas seja

¹⁶ Mathematics problems obviously come from mathematics teachers and textbooks, so good mathematics problems must come from good mathematics teachers and good mathematics textbooks. The idea that students themselves can be the source of good mathematics problems has probably not occurred to many students or to many of their teachers. (Kilpatrick, 1987, p. 123).

um aspecto central da formação de professores. (Ellerton; Singer; Cai, 2015, p. 551, tradução nossa¹⁷).

Hoje dispomos de muitos recursos didáticos e abordagens metodológicas capazes de auxiliar nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática. Com o advento das TD, esses recursos e métodos têm ficado cada vez mais plurais. O ensino e a aprendizagem da Matemática, atualmente, precisam ser pensados junto ao uso desses recursos. Não estamos discutindo isso como uma regra, mas como uma forma de aproximar cada vez mais o contexto da sala de aula do contexto digital em que estão imersos os nossos alunos. Inicialmente, esse pode ser um desafio a mais para os professores, que pode ser facilmente superado.

Abramovich e Cho (2008; 2012; 2013; 2015) destacam a importância do uso dos recursos digitais na PP e RP que sejam motivadores e adequados às realidades dos alunos.

Mâcedo, Brandão e Nunes (2019), ao considerarem a importância do livro didático nos processos de ensino e de aprendizagem, ressaltam algumas polêmicas que giram em torno desse instrumento no processo de construção do conhecimento, dentre elas, o distanciamento da realidade na qual os alunos estão inseridos. Esse fato atinge os problemas que estão presentes no livro didático.

Os professores prendem-se ao livro didático e não se motivam a relacionar a Matemática com o contexto do aluno. Os exercícios/tarefas ocupam mais espaços do que as situações-problemas na aula de Matemática. Tudo parece já vir pronto e acabado, para o aluno apenas tentar encontrar uma solução/resultado. Em certas realidades, o uso das TD aparece para reproduzir o conhecimento matemático por meio de um recurso novo, porém, fazendo uso de hábitos antigos. Esse é um contexto hodierno que assola a maioria das salas de aula de Matemática.

Frente a isso, destacamos a importância e a necessidade de o professor propor problemas, pois

Tarefas de proposição de problemas bem projetadas para os alunos também exigem professores qualificados que possam lidar com as complexidades de tais contextos. Além disso, professores de matemática em exercício e futuros professores devem ter oportunidades de propor seus próprios problemas. (Singer; Ellerton; Cai, 2013, p. 3, tradução nossa¹⁸).

¹⁷ Logic would suggest that the earlier the teachers gain experience with posing problems, or with seeing ways in which they can use problem posing with their students, the more likely they will be to feel that problem posing is a natural and fundamental aspect of the whole process of teaching and learning mathematics. From that perspective, it would seem to be important that problem posing be a central aspect of mathematics teacher education. (Ellerton; Singer; Cai, 2015, p. 551).

¹⁸ Well-designed problem-posing tasks for students also require skilled teachers who can manage the complexities of such contexts. Moreover, in-service and prospective mathematics teachers should be offered opportunities to pose their own problems. (Singer; Ellerton; Cai, 2013).

Para um efetivo domínio da PP, o professor precisa ter acesso aos espaços que o tornem capaz. Quando o professor já está em exercício na sala de aula de Matemática e não teve experiências de PP durante a sua formação, essa lacuna precisa ser superada por iniciativa do professor. Essas são realidades bem mais preocupantes, mas que precisam ser atingidas.

Nas escolas, a RP tem ocupado um lugar muito mais proeminente do que a PP (Cai; Hwang, 2020). Mesmo hoje, tendo documentos oficiais como a BNCC (Brasil, 2018), de 2017, que apontam a necessidade de elaborar e resolver problemas, ainda percebemos a necessidade de nos atentarmos mais à PP, seja ela por alunos ou por professores.

Não é possível idealizar qualquer mudança no contexto educacional sem colocar em evidência a figura do professor, pois ele é o centro de toda e qualquer implementação inovadora ou melhoria educacional. Com esse foco, Cai e Hwang (2020) destacam a necessidade crítica de investigar como os professores aprendem a usar a PP para ensinar Matemática na sala de aula.

Se estamos preocupados em oferecer um ensino da Matemática eficaz e que seja capaz de estimular os nossos alunos a aprender e aplicar a Matemática no seu cotidiano, precisamos nos colocar, enquanto professores, como protagonistas de nossa prática pedagógica. Ao assumirmos tal postura, teremos mais condições de contribuir para um ensino da Matemática de padrão elevado.

Cai e Hwang (2020) defendem que a PP é fundamental para o ensino da Matemática de alta qualidade. Os professores precisam ser capazes de propor problemas que valham a pena para seus alunos, consequentemente, esses problemas podem moldar o aprendizado matemático em suas aulas. Ao mesmo tempo, os professores podem usar tarefas de PP para ter uma melhor compreensão do conhecimento matemático de seus alunos.

Ressaltando a importância da PP na formação do professor de Matemática, Cai e Hwang (2020) potencializam como grande mérito ajudar os professores a aprender a usar a PP de forma eficaz. No entanto, muito permanece desconhecido sobre o ensino por meio da proposição de problemas matemáticos e como os professores podem aprender a fazer isso de forma mais eficaz.

Em pesquisas e experiências com a PP envolvendo futuros professores de Matemática, Crespo (2015) tem usado o método de selecionar, analisar e adaptar problemas matemáticos de livros didáticos. Essa tarefa tem sido desenvolvida com o objetivo de ajudar os futuros professores a reconhecerem diferenças no contexto, conteúdo e qualidade das tarefas matemáticas. A autora enfatiza que, se é verdade que a qualidade do ensino e da aprendizagem

depende da qualidade dos problemas matemáticos, então os futuros professores precisam de experiência inicial com a PP.

Para Crespo (2015), a educação em PP envolve os alunos como co-criadores e participantes ativos na construção de suas experiências de aprendizado. Os alunos são incentivados a propor problemas e questões, não apenas o professor ou o livro didático. Essa abordagem promove questões pessoais e socialmente relevantes, em contraste com os problemas matemáticos muitas vezes descontextualizados em livros didáticos tradicionais. Ela capacita a se tornarem produtores de conhecimento, usando a Matemática para explorar perguntas profundas e socialmente significativas.

A perspectiva de PP defendida pela pesquisadora, além de discutir a importância desse trato na formação inicial do professor de Matemática, levanta bandeira para as questões pessoais e sociais dos alunos. Essa é uma relação com a EPRP (Andrade 1998, 2017) em que a multicontextualidade da sala de aula, por meio de seus aspectos sociopolíticos e culturais, aflora durante a PP, RP e EP.

Os estudos apresentados por Crespo (2015) sugerem que os futuros professores: precisam aprender a avaliar a qualidade das tarefas matemáticas antes de serem testadas nos alunos; podem aprender critérios para julgar a qualidade instrucional dos problemas matemáticos; aprendem a usar esses critérios para identificar tarefas matemáticas altas/baixas e reformular problemas de maneira a aumentar sua qualidade instrucional. Ao final, enfatiza que proporcionar aos futuros professores oportunidades para explorar e discutir o potencial matemático dos problemas e avaliar seu interesse matemático e pedagógico pode ser um passo positivo para preparar professores que projetarão oportunidades matemáticas ricas, mas também empoderadas, para seus alunos.

2.4 Pesquisas em Exploração de Problemas

Além de olhar para a pesquisa em Resolução e Proposição de Problemas, gostaríamos de destacar alguns trabalhos em Exploração de Problemas.

A partir do trabalho inicial de Andrade (1998), a pesquisa em EP passou a ter vários desdobramentos e um alcance cada vez maior nas salas de aula de Matemática em diferentes níveis. Além dos trabalhos oriundos de suas orientações no PPGECEM, essa discussão tem chegado em diferentes ambientes científicos, como congressos regionais, nacionais e internacionais, bem como em periódicos de alto impacto. Essas pesquisas têm aprofundado o olhar sobre essa metodologia, com um foco na multicontextualidade da sala de aula, tratando-

a não como um laboratório, mas sim considerando todos os aspectos que envolvem uma sala de aula real.

Silva e Andrade (2016a) discutem a resolução de problemas como um processo que vai além da resolução e solução do problema, num processo “inacabado” de contínua problematização, que denominam Exploração de Problemas, proporcionando o desenvolvimento de processos alternativos que facilitem a aquisição de conhecimentos matemáticos pelos alunos, tendo no uso de recursos tecnológicos uma ferramenta que favorece esse processo. Essa experiência desenvolveu o potencial matemático do aluno e do professor, observando-se que a EP possibilita um ato de reflexão da prática pedagógica do professor, oferecendo uma maior possibilidade de engajamento na mudança da práxis.

Silva e Andrade (2016b) evidenciam compreensões de ideias essenciais de funções por alunos do ensino médio e analisam as contribuições da metodologia de Ensino-Aprendizagem de Funções via Resolução, Proposição e Resolução de Problemas, desenvolvida na perspectiva de Andrade (1998), aliadas ao uso de representações múltiplas. Destacam que o uso dessa metodologia favorece o desenvolvimento de compreensões essenciais de funções e extensões contextuais mais amplas na promoção do conhecimento matemático e da cidadania.

Silveira e Andrade (2020) analisam como uma abordagem em sala de aula, via Exploração, Resolução e Proposição de Problemas, pode potencializar o ensino-aprendizagem de Análise Combinatória. Essa abordagem metodológica permitiu ao aluno um aprendizado com mais compreensão e profundidade, potencializando-o para resolver problemas de Análise Combinatória com foco não apenas na busca pela resolução e solução do problema, mas indo muito além, como na realização de um trabalho de exploração e proposição de problemas em perspectivas múltiplas.

Santos e Andrade (2020) investigam as contribuições da Resolução, Exploração e Proposição de Problemas para o processo de ensino-aprendizagem da Combinatória nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Com essa experiência, constataram que as problematizações provocadas durante o processo de Resolução, Exploração e Proposição de Problemas potencializaram o trabalho de reflexão sobre os invariantes dos problemas combinatórios, favorecendo o desenvolvimento do raciocínio combinatório, generalizante e lógico dos alunos, além de possibilitar a exploração de diferentes dimensões dos problemas propostos.

Silva e Andrade (2021) discutem dados parciais de uma pesquisa, apontando como a Exploração, Resolução e Proposição de Problemas vêm possibilitando aos participantes uma prática para o desenvolvimento do Ensino-Aprendizagem da Álgebra, na atividade Algébrica Global, com enfoque na construção dos significados da Igualdade através de problemas.

Silva (2021) analisa as contribuições da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas ao ensino de função afim com o uso do Aplicativo Desmos, visando a construção desse conceito matemático e sua relação com o cotidiano em um cenário de atividades remotas devido à pandemia da Covid-19. Com isso, constatou que o uso dessa metodologia ofereceu aos alunos a capacidade de se comprometerem mais com as atividades e se sentirem motivados a estudar o conteúdo de função.

Queiroz e Andrade (2021) discutem o processo de Ensino-Aprendizagem de Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, aliado ao Letramento Matemático, destacando que a consideração dos elementos constituintes da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas pode ser decisiva para a mudança de paradigmas quanto ao desenvolvimento da aprendizagem Matemática.

Silveira e Andrade (2022) discutem um episódio no qual analisam como uma abordagem em sala de aula, via Exploração, Resolução e Proposição de Problemas, pode contribuir para o Ensino-Aprendizagem de Análise Combinatória. Ao fim, concluem que a resolução de um problema gerava novos problemas, que exigia do aluno a responsabilidade de contribuir com novos trabalhos, novas reflexões e novas sínteses, promovendo uma aprendizagem com compreensão das ideias essenciais de Análise Combinatória.

Martins e Andrade (2022a; 2022b) discutem as implicações da Exploração, Proposição e Resolução de Problemas no ensino-aprendizagem de Sistemas Lineares, além das contribuições dessa metodologia de ensino, por meio das concepções e vivências dos licenciandos em Matemática. Ao final, concluíram que as atividades possibilitaram reflexões sobre o ensino de Sistemas Lineares, como a importância de promover a transição entre as representações e utilizá-las como aliadas ao ensino, contribuindo assim para uma nova postura frente ao ensino de Sistemas Lineares. Concluem que a metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Exploração, Proposição e Resolução de Problemas contribui para a construção de uma nova postura frente ao ensino de Sistemas Lineares.

Silveira, Abreu e Andrade (2022) descrevem e analisam uma oficina desenvolvida a partir do tema “Mídias Sociais” através da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas, discutindo temas que estão diretamente relacionados com a transição da modernidade sólida para a modernidade líquida. Os resultados evidenciaram que os problemas propostos pelos participantes possibilitaram refletir sobre a proposta da atividade sob diferentes perspectivas, pois não apenas contemplavam um olhar sobre a natureza dos conceitos matemáticos, mas também ressaltavam algumas preocupações sobre temas advindos da modernidade líquida, que, ao serem compreendidos, explicam os interesses e o funcionamento da sociedade.

Abreu, Martins e Rodrigues (2023) discutem as possibilidades de uso das tecnologias digitais na Exploração, Proposição e Resolução de Problemas. Através da realização de uma oficina, evidenciam que o uso das tecnologias digitais proporcionou um espaço mais interativo entre os participantes, podendo o professor coordenar em tempo real o desenvolvimento e a participação dos alunos via plataforma Desmos. Além disso, utilizaram diversas ferramentas que permitiram múltiplas representações durante a exploração do problema e a fluidez da transição entre elas. Com isso, concluem que as tecnologias digitais potencializam a Exploração, Proposição e Resolução de Problemas, colaborando com o ensino e a aprendizagem da Matemática.

Silveira, Nascimento e Andrade (2023) apresentam a proposta de Ensino-Aprendizagem de Matemática via Exploração, Proposição e Resolução de Problemas, na perspectiva da justiça social, trazendo assim uma discussão sobre a Exploração, Proposição e Resolução de Problemas, tanto em seus aspectos cognitivos como na sua dimensão sócio-cultural-política. Dentre os principais resultados, observam que os alunos desenvolveram múltiplos caminhos, justificativas, engajamentos e processos no trabalho de Exploração, Proposição e Resolução de Problemas.

Martins e Andrade (2023) apontam as contribuições da metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Exploração, Proposição e Resolução de Problemas, aliada às Representações Múltiplas de Álgebra, no ensino de Sistemas Lineares na licenciatura. Os dados apontam que as Representações Múltiplas e a transição entre elas, aliadas à Exploração, Resolução e Proposição de Problemas, favorecem uma aprendizagem com mais compreensão e colaboram na construção de uma nova postura do licenciando frente ao ensino de Sistemas Lineares.

Sousa, Araújo e Andrade (2023) analisam uma atividade de exploração de problemas desenvolvida em uma experiência de estágio de docência, no contexto da formação inicial de professores de Matemática. Essa pesquisa indicou a dificuldade dos alunos de licenciatura em Matemática em lidar com a resolução, exploração e proposição de problemas e a necessidade de desenvolver debates sobre gênero e sexualidade na formação de professores de Matemática.

O conjunto de ideias apresentadas aqui em torno da pesquisa em RP, PP e EP nos permite compreender os principais avanços na área e o papel dessas abordagens na metodologia de sala de aula de EPRP.

3 TECNOLOGIAS DIGITAIS NA RESOLUÇÃO, PROPOSIÇÃO E EXPLORAÇÃO DE PROBLEMAS

Neste Capítulo, voltamos nossa atenção para como as Tecnologias Digitais (TD) têm sido discutidas nas pesquisas em Resolução de Problemas (RP), Proposição de Problemas (PP) e Exploração de Problemas (EP). Além disso, voltaremos nossa atenção para a Coerência Didática (CD) na Proposição de Problema. Em seguida, trazemos a calculadora gráfica Desmos (CGD) como foco, apresentando seus recursos, possibilidades no ensino e aprendizagem da Matemática e pesquisas que a têm investigado.

3.1 Tecnologias Digitais e Coerência Didática

As diferentes perspectivas da pesquisa em Resolução de Problemas (RP), Proposição de Problemas (PP) e Exploração de Problemas (EP) já discutem a necessidade da inserção das Tecnologias Digitais (TD) junto às propostas pedagógicas. Esse fato se dá mediante a necessidade de um acompanhamento das mudanças que esses recursos vêm proporcionando nos diferentes espaços de aprendizagem. É importante refletir e explorar como essas abordagens metodológicas ajudam a pensar o uso didática dessas TD nas práticas pedagógicas.

A inserção das TD nas práticas de sala de aula de Matemática tem sido investigada com o propósito de identificar como esses recursos podem proporcionar novas formas de aprendizagem e de construção do conhecimento matemático. Temos observado, a partir da nossa experiência de pesquisa, que a motivação inicial proporcionada pelo uso das TD por si só não garante novas possibilidades de aprendizagem. É necessário um amadurecimento e planejamento da prática pedagógica que ressignifique a forma como os alunos as veem e passem a investigar as suas potencialidades frente aos processos de ensino-aprendizagem, em especial nas atividades de sala de aula que envolvam a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas (EPRP).

Carreira *et al.* (2016) relatam que, nesta Era Digital, a pesquisa em RP precisa ser atualizada devido às características dos jovens de hoje, que são usuários frequentes de novas tecnologias e têm experiências extensas em jogos e redes sociais. Essas características mudam as premissas da pesquisa e exigem uma nova perspectiva.

Frente a todas as mudanças que as TD vêm provocando na sociedade, nos inquieta discutir como esse fato tem afetado os ambientes escolares. Noss (2001) destaca que o impacto das TD na educação é sentido principalmente nas formas de representação do conhecimento.

Sinaliza que a capacidade de lidar com essas novas formas de representação, relacionadas à própria natureza do conhecimento matemático, inclui análise e habilidades críticas, que são necessárias para lidar criticamente com representações digitais ou para desenvolver modelagem matemática de diferentes situações do dia a dia.

Tendo em vista o reconhecimento do papel cada vez mais significativo que a Matemática desempenha na sociedade, Noss (2001), ao relacionar esse fato com as TD, diz ter aumentado a preocupação com o desenvolvimento de ferramentas tecnológicas que se revelam por mascarar ou ocultar o acesso direto ao conhecimento matemático. Para ele, um dos efeitos dessa revolução é o fato de a tecnologia estar cada vez menos aberta à inspeção e compreensão, já que não é mais possível saber como funciona um relógio digital apenas abrindo-o. Tecnologias que outrora poderiam ser facilmente analisadas por crianças curiosas, são hoje, de certa forma, inacessíveis a elas. Em se tratando da calculadora, podemos estender a mesma observação, tendo em vista a grande tipologia que temos, que vai desde a calculadora básica às gráficas.

O uso de tecnologia tem sido amplamente recomendado por vários anos no ensino e aprendizagem da matemática, mas sua integração na sala de aula de matemática ainda não foi realizada de forma adequada. Apesar dos muitos esforços e recomendações, parece haver uma forte resistência ao uso de tecnologia no ensino e aprendizagem de matemática, independente do mundo ser mais e mais dependendo do uso de diversos recursos tecnológicos. (Carreira *et al.*, 2016, p. 74-75, tradução nossa¹⁹).

Inicialmente, com a chegada dos computadores e, posteriormente, das demais TD que vêm sendo desenvolvidas, percebemos o quanto precisamos nos aproximar desses recursos para fins educacionais. Kilpatrick (1987) já enfatizava a importância dos computadores junto à exploração de situações-problemas. Apesar de, nessa época, o acesso à tecnologia ser ainda tímido nos ambientes escolares, o pesquisador lança seu ponto de vista, de forma promissora, para as contribuições na RP e PP.

O computador é uma ferramenta valiosa para explorar situações problemas. Deve estar disponível na sala de aula de matemática junto com uma variedade de outros materiais para exploração. Os alunos podem usar o computador para variar os dados em um problema e ver como essas variações afetam a solução. Com o computador, eles podem gerar padrões numéricos que podem produzir conjecturas que podem testar e tentar provar. Eles podem usar inibições gráficas para sugerir teoremas plausíveis em geometria. Eles podem facilmente criar novos problemas variando a sintaxe de uma declaração de problema e estudando a dificuldade que seus colegas

¹⁹ The use of technology has been widely recommended for several Years in the teaching and learning of mathematics, but its integration into the mathematics classroom has not been yet adequately accomplished. Despite the many efforts and recommendations, there seems to be a Strong resistance to the use of technology in the teaching and learning of mathematics, regardless of the resto f the world being more and more dependente on the use of various technological resources. (Carreira *et al.*, 2016, p. 74-75).

têm com os problemas revisados. O computador suporta uma ampla gama de atividades exploratórias. (Kilpatrick, 1987, p. 139-140, tradução nossa²⁰).

As possibilidades apresentadas por Kilpatrick (1987), quanto ao uso dos computadores na RP e PP, têm passado por diversas mudanças nesse curto intervalo de tempo de sua fala até os dias atuais devido ao grande avanço que as TD vêm tendo. Os computadores se modernizaram e hoje os alunos fazem uso de suas funcionalidades por meio de *smartphones* na palma de suas mãos. Os *softwares* foram facilmente compactados em aplicativos. Hoje temos um novo cenário com novas ferramentas. A Calculadora Gráfica Desmos (CGD) é um exemplo de um recurso dessa natureza, que pode ser acessada facilmente por meio de um aplicativo em *smartphone* e com funcionalidades potenciais para a EPRP.

Allevato (2005), ao voltar-se para várias pesquisas já realizadas na EM quanto ao uso de computadores, percebe que a maneira de o utilizar vem sendo gradualmente modificada. Aponta, ainda, que o comportamento dos alunos que usam TD parece diferentes dos demais, referindo-se aos que não têm contato com ela.

Em linhas gerais, essas pesquisas trazem evidências de que a utilização dos computadores nos ambientes de ensino de Matemática conduz os estudantes a modos de pensar e de construir conhecimento que são típicos do ambiente informatizado e, por vezes, favoráveis à aprendizagem de conteúdos ou à compreensão de conceitos matemáticos. Tais pesquisas destacam aspectos como o uso regular de representações múltiplas, a construção do conhecimento como rede de significados, as discussões desses significados com os colegas e com o professor, entre outros. (Allevato, 2005, p. 73).

Esse cenário digital amplia as possibilidades de usos desses recursos junto à EPRP. O olhar de Kilpatrick (1987) para os computadores já é capaz de nos apontar diferentes potencialidades. Hoje, com as calculadoras gráficas, os *softwares* e os aplicativos, os ambientes virtuais de aprendizagem (AVA) e os simuladores, é preciso buscarmos compreender o que podemos vislumbrar nesse meio, além dos apontamentos feitos pelo pesquisador.

Carreira *et al.* (2016) apresentam resultados de um estudo que busca compreender como os jovens de hoje lidam e resolvem problemas matemáticos moderadamente desafiadores ao usar as ferramentas digitais de sua escolha. Ao fim, a pesquisa não foi capaz de dizer em detalhes exatamente que diferença o uso da tecnologia pode fazer na aprendizagem efetiva.

²⁰ The computer is a valuable tool for exploring problematic situations. It should be available in the mathematics classroom along with a variety of other materials for exploration. Students can use the computer to vary the data in a problem and see how those variations affect the solution. With the computer they can generate number patterns that may yield conjectures they can test and try to prove. They can use graphical displays to suggest plausible theorems in geometry. They can easily create new problems by varying the syntax of a problem statement and study the difficulties their peers have with the revised problems. The computer supports a wide range of exploratory activities. (Kilpatrick, 1987, p. 139-40).

Porém, há resultados que sugerem que é mais importante como a tecnologia é usada do que qual tecnologia é usada.

Carreira *et al.* (2016) ressaltam a importância de explorar como a experiência dos jovens com as TD pode enriquecer nossa compreensão da relação produtiva entre essas tecnologias e a bem-sucedida resolução de problemas matemáticos.

É perceptível o quanto os jovens aprendem com o uso frequente das TD. Essas experiências têm ocorrido além do ambiente escolar. Nas diferentes atividades que desenvolvem no seu dia a dia, os alunos estão em constante contato com essas tecnologias. Porém, em se tratando de atividades escolares, mais especificamente voltadas à Matemática, Carreira *et al.* (2016) discutem que é menos claro como os jovens encontram formas eficazes e produtivas de pensar os problemas matemáticos e como eles chegam à solução e a comunicam usando os recursos digitais que eles têm em mãos.

Temos aí um novo desafio, que vai além da necessidade de compreendermos o processo de RP e PP realizado pelos alunos. Nesse novo cenário, é importante promover estratégias que nos permitam entender como os alunos pensam a Matemática, resolvem, propõem e exploram problemas fazendo uso dessas tecnologias. O uso de lápis e papel para o desenvolvimento de atividades dessa natureza na sala de aula de Matemática é ampliado quando o aluno faz uso de ferramentas digitais. Os *softwares*, aplicativos e simuladores proporcionam novas experiências e reconfiguram a forma de pensar e representar o conhecimento matemático por parte dos alunos.

Quanto à RP, Carreira *et al.* (2016) evidenciam que o uso de TD, principalmente computadores, muda a natureza da atividade. Eles ainda apontam, como um impacto explícito, o fato de que uma questão matemática pode não ser mais um problema se o resolvidor tiver uma ferramenta de computador relevante disponível. Com isso, fica evidente que ainda há muito a ser discutido e aprendido sobre o uso das tecnologias e do processo de resolução de problemas matemáticos. “Ao empreender atividades de ensino com os computadores, é preciso tentar compreender o papel desses recursos nos ambientes em que se insere e qual é sua relação com a atividade humana” (Allevato, 2005, p. 74).

A EPRP via CGD amplia o nível do problema para patamares que dificilmente seriam alcançados na sala de aula fazendo uso apenas de lápis e papel. Alguns problemas iniciais, como a construção de gráficos, passam a dar lugar a problemas tais como interpretar todas as informações presentes no gráfico.

Carreira *et al.* (2016) propõem direcionamentos para pesquisas que envolvem o uso de TD na RP. Esses direcionamentos incluem investigar as abordagens de RP viabilizadas pelas

TD, como visualização, experimentação e simulação, bem como explorar as diversas representações matemáticas disponíveis por meio dessas tecnologias. A adaptação dos jovens às TD e suas abordagens únicas para aprender a aplicar Matemática destacam a relevância de estudos sobre como essa geração lida com problemas matemáticos.

Acho que a tecnologia nos coloca na posição de poder testar nossas conjecturas muito mais rápido do que antes, porque uma máquina fará alguns cálculos rápidos para nós e nos dará uma saída que podemos examinar. Podemos deixar que os parâmetros do problema mudem de maneira sistemática, ver quais são os resultados resultantes e obter um nível mais alto de compreensão matemática. Essa é uma nova possibilidade criada pelo uso do computador como ferramenta. (Kilpatrick, 1987, p. 144, tradução nossa²¹).

As funcionalidades do computador, presentes em uma calculadora gráfica, permitem ao explorador, à medida que vai dominando os recursos das ferramentas, gerar novos problemas e novas explorações. A visualização gráfica simultânea de várias funções, os controles deslizantes, o trânsito entre as múltiplas representações algébricas, dentre outros, vão possibilitando um caminhar cada vez mais longe, mais intenso, mais interessante... Ao mesmo tempo, vai se desenvolvendo no aluno a sensação de estar construindo conhecimento matemático.

Em relação às calculadoras, esse recurso ainda sofre resistência quanto ao seu uso na sala de aula de Matemática. Esse fato tem se dado devido à falta de compreensão de como esse artefato precisa ser pedagogicamente usado. Muitos professores se limitam a vê-las como forma de os alunos saltarem diretamente para os resultados das operações matemáticas sem raciocinar, o que é possível de acontecer. Porém, não podemos nos prender a esse fato. Hoje, temos calculadoras que vêm sendo desenvolvidas com diversas finalidades matemáticas, por exemplo, as calculadoras gráficas. Essa ferramenta tecnológica vem ganhando a atenção de pesquisadores em EM, que os tem levado a saírem em defesa do seu uso na sala de aula de Matemática. Mas precisamos avançar mais nessa direção.

Defendemos, também, que a calculadora deve ser usada ao longo de todo o currículo escolar de todos os níveis de ensino e em todas as atividades de sala de aula mas, o processo ensino-aprendizagem da matemática tem que ser pensado, de modo crítico, a partir de como o mundo está hoje, em particular o mundo da tecnologia. A tecnologia, com os computadores e as calculadoras, vem alterando o mundo-vida das pessoas. A tecnologia tem um impacto sobre o modo de fazer matemática. Fazer cálculo, com lápis e papel, *não é tão importante*. As calculadoras e os computadores desempenham essa tarefa com muito mais eficácia, mas, a **compreensão crítica**

²¹ I think that the technology puts us in the position of being able to test our conjectures Much faster than before because a machine will do some quick calculating for us and give us an output we can examine. We can let the parameters of the problem change in a systematic way, see what the resulting outputs are, and gain a higher level of mathematical understanding. That's a new possibility created by the use of the compute rus a tool. (Kilpatrick, 1987, p. 144)

daquilo que se está fazendo é muito importante. A calculadora tem que ser pensada como uma ferramenta auxiliar, mediadora, de um processo de ensino-aprendizagem que valoriza a compreensão crítica e o fazer matemático como um todo. As atividades propostas aos alunos têm que valorizar um “fazer” matemático vivo, dinâmico e os alunos devem usar a calculadora para a exploração de idéias, conceitos e processos matemáticos... (Andrade, 1998, p. 19, grifos do autor).

É preciso dar espaço para os alunos utilizarem essas ferramentas tecnológicas em experiências de EPRP. Carreira *et al.* (2016) atestaram, por meio de suas experiências, que a engenhosidade dos alunos em atividades de RP surpreendia a organização, seus professores e suas famílias. O mesmo resultado é possível perceber em atividades de PP. Com isso, o aluno está desenvolvendo habilidades relacionadas ao uso das TD no seu processo de aprendizagem, ao mesmo tempo em que desenvolve suas habilidades matemáticas de diferentes naturezas, como a argumentação, a expressão do seu pensamento matemático, a representação dos objetos matemáticos, entre outras.

O que temos percebido hoje é que o trabalho com problemas na sala de aula de Matemática ainda está fortemente vinculado aos problemas que são propostos pelos livros didáticos. “A maioria dos problemas em livros didáticos são problemas de palavras, fechados e rotineiros, como a maioria dos problemas apresentados aos alunos em sala de aula” (Carreira *et al.*, 2016, p. 68, tradução nossa²²). Já temos, na atualidade, diferentes perspectivas que vão nos colocar frente a um novo trabalho com os problemas na sala de aula de Matemática, por exemplo, a EPRP (Andrade, 1998; 2017). Nesses novos cenários, tem-se uma abertura junto à PP, sensíveis às questões sociopolíticas e culturais, como também para o uso de TD.

A PP é capaz de descentralizar do livro didático o trabalho com problemas na sala de aula de Matemática. Aliada às TD, é capaz de revelar o nível de criatividade dos professores e alunos e desenvolver um trabalho significativo, por meio de uma proposta pedagógica autoral e além do livro didático.

Cai *et al.* (2015) apontam que o uso da tecnologia nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática tem sido um tema de interesse para pesquisadores em EM. Nessa discussão, enfatizam o olhar que tem se dado à flexibilidade das tecnologias baseadas em computador para facilitar a exploração e a experimentação junto à PP e indagam como a tecnologia pode ser usada nessas atividades.

Abramovich e Cho (2015) observam que, apesar do interesse e da pesquisa contínuos em EM relacionados à PP, houve uma falta de foco na investigação do papel da tecnologia na promoção e aprimoramento das habilidades de PP. Além disso, os estudos publicados sobre

²² The majority of the problems in textbooks are word problems, closed and routine, like most of the problems presented to students in the classroom. (Carreira *et al.*, 2016, p. 68).

problemas propostos com o uso de tecnologia têm sido limitados em quantidade, abrangência e nível de série educacional.

Abramovich e Cho (2008; 2012; 2015) têm pesquisado o potencial didático da PP por meio de planilhas eletrônicas e sistemas algébricos com professores de Matemática em formação. Porém, atestam que essas pesquisas não têm sido estudadas em detalhes até recentemente. Abreu, Martins e Rodrigues (2023) desenvolveram um trabalho investigando possibilidades de uso das tecnologias digitais junto à EPRP, buscando compreender como a CGD, enquanto ferramenta pedagógica, pode potencializar essa metodologia em sala de aula.

Com a atualização rápida dos recursos tecnológicos, cada dia surgem mais ferramentas e as antigas são aprimoradas. Com isso, precisamos buscar compreender como a PP pode avançar a partir das TD, pois temos muitos problemas tradicionais que podem ser facilmente resolvidos por meio desses recursos. Para validar sua eficiência, esses problemas podem ser facilmente reformulados, apontando em sua essência o uso de TD, de modo que o resolvidor não encontre a solução apenas utilizando os métodos antigos, e proporcione novas explorações e novas soluções.

Abramovich e Cho (2013) veem a tecnologia como um meio para propor e resolver problemas. Os autores questionam como se pode utilizar a tecnologia para mediar problemas tradicionalmente desafiadores e solucionáveis com o clique de um botão, e como podem ser utilizados para motivar o aluno a fazer o que a tecnologia não é capaz de fazer.

Abramovich (2016b) destaca que a introdução de programas de computadores avançados na educação contemporânea, capazes de realizar cálculos simbólicos complexos, tornou muitos problemas matemáticos tradicionais obsoletos, já que esses problemas podem ser resolvidos facilmente com o uso de *software*.

Abramovich e Cho (2013) sugerem diversas abordagens para o uso da tecnologia na proposição de problemas matemáticos desafiadores. Em primeiro lugar, destacam a importância desses problemas serem intrinsecamente desafiadores, independentemente do uso de tecnologias, especialmente para alunos talentosos em Matemática. Em contrapartida, a segunda via sugere aproveitar a tecnologia como uma ferramenta educacional inclusiva, permitindo a proposição de problemas desafiadores que sejam acessíveis a todos os alunos.

Uma terceira abordagem envolve a modificação de problemas de rotina, muitas vezes, bem conhecidos, adicionando um componente de extremidade aberta oculto, tornando-os desafiadores e estimulando a criatividade dos alunos. Por outro lado, a quarta via sugere o uso de problemas tradicionais destinados a alunos avançados, mas que podem ser resolvidos com a ajuda da tecnologia, tornando-os, de certa forma, imunes a essa mesma tecnologia.

Por fim, a quinta abordagem propõe a utilização da tecnologia da computação como meio tanto para resolver problemas através de experimentação computacional quanto para propor novos problemas, visando a eficiência computacional. Essas diferentes estratégias permitem explorar a tecnologia de maneira eficaz no ensino da Matemática, atendendo às diversas necessidades dos alunos e promovendo o desenvolvimento de habilidades matemáticas e da criatividade.

Abramovich e Cho (2013, p. 18, tradução nossa²³) destacam que “o uso de tecnologia na educação matemática tem sido mais relacionado à resolução de problemas do que à proposição de problemas”. Porém, a “[...] proposição e a resolução de problemas estão inerentemente ligadas uma à outra através do uso da tecnologia” (Abramovich; Cho, 2008, p. 3, tradução nossa²⁴). “Observou-se que a Proposição de Problemas e a Resolução de problemas são dois lados da mesma moeda que os professores usam para ensinar e os alunos usam para aprender matemática” (Abramovich, 2019, p. 50, tradução nossa²⁵).

Outro ponto importante na pesquisa com a PP destacado por Abramovich e Cho (2012) diz respeito à formação de professores de Matemática. Os pesquisadores atestam que, por mais que esse tópico tenha sido alvo de muitos estudos, relativamente menos atenção tem sido dada ao uso da tecnologia na PP por professores. Nesse sentido, os autores defendem a importância da experiência com a PP para a aprendizagem da Matemática com computadores e a necessidade de mais pesquisas na área.

A PP, em sua natureza, é uma tarefa difícil. Quando atrelada ao uso de TD, surgem novos desafios. A necessidade de desenvolver a PP é uma lacuna presente na formação inicial e continuada de muitos professores. Precisamos que ela possa ser fortemente discutida na formação inicial de professores de Matemática, juntamente com o uso das TD. “Familiarizar os professores em formação inicial com essas armadilhas ocultas de propor problemas em um paradigma tecnológico eleva suas competências matemáticas e pedagógicas a um nível superior” (Abramovich; Cho, 2015, p. 79, tradução nossa²⁶).

Ao trabalhar com professores em formação, Abramovich e Cho (2015) apresentam quatro perspectivas para o trabalho com a Proposição de Problemas: PP através das lentes da

²³ The use of technology in mathematics education has mostly been related to solving problems Rather than posing problems. (Abramovich; Cho, 2013, p. 18).

²⁴ [...] problem posing and problem solving are inherently linked to each other through the use of technology. (Abramovich; Cho, 2008, p. 3).

²⁵ A point was made that problem posing and problem solving are two sides of the same coin that teachers use to teach and students use to learn mathematics. (Abramovich, 2019, p. 50).

²⁶ Familiarizing preservice teachers with these Hidden pitfalls of posing problems in a technological paradigm elevates their mathematical and pedagogical competences to a higher level. (Abramovich; Cho, 2015, p. 79).

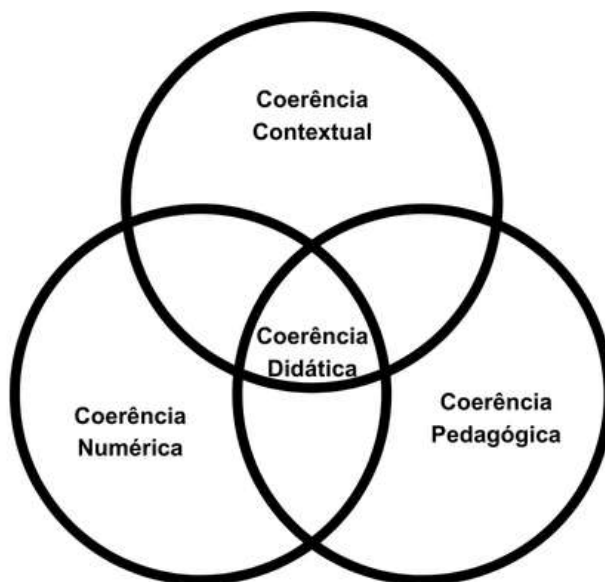
Coerência Didática (CD); PP através das lentes da estrutura ACA (Agente-Consumidor-Amplificador); PP Recíproca; PP como uma experiência de descoberta.

Dentre essas perspectivas, buscaremos descrever e compreender melhor a PP através das lentes da Coerência Didática. Aproximando-nos dessa proposta, percebemos o quanto ela poderia estar contribuindo para o desenvolvimento das nossas atividades de pesquisa. A abordagem apresentada por Abramovich e Cho (2008; 2015) acerca da CD na PP tem sido desenvolvida junto ao uso de TD. Porém, a CD é aplicável para a PP, com ou sem o uso de ferramentas tecnológicas.

De acordo com Abramovich e Cho (2008; 2015), a CD de um problema consiste na capacidade de resolução formal do problema, no nível de classificação adequado e em outras características pedagógicas, bem como na relevância sociocultural. Essa proposta aberta de PP tem relação com a EPRP (Andrade, 1998; 2017).

Para que um problema atinja a CD, é necessário o domínio das inter-relações, dos seguintes subconceitos: coerência numérica; coerência contextual; coerência pedagógica. Os autores representam a coerência didática por meio do diagrama de Venn (Figura 04).

Figura 03 – A Coerência Didática e seus subconceitos



Fonte: Abramovich e Cho (2015).

A coerência numérica de um problema refere-se à sua solubilidade formal dentro de um determinado sistema numérico. Dito de outra forma, se um problema tem uma solução expressa por um número (ou um conjunto de números), ele é numericamente coerente. O conceito de coerência numérica forma uma ligação robusta entre a PP e a RP. No entanto, os professores,

muitas vezes, não reconhecem que a PP é uma plataforma a partir da qual o desenvolvimento continua (Abramovich; Cho, 2008; 2015).

A coerência contextual de um problema significa sua consistência com o contexto sociocultural histórico de um grupo heterogêneo de alunos. A mudança de contexto pode, inadvertidamente, gerar soluções estranhas, mostrar não apenas a complexidade de propor problemas ao usar tecnologia, mas também a importância de interpretação precisa dos dados de modelagem por um propositor de problemas. A coerência contextual de um problema entra em jogo quando sua solução precisa ser interpretada em termos de um contexto dentro do qual ocorre a PP. Além da necessidade de entender o contexto declarado em um problema, a coerência contextual requer a apreciação de suposições ocultas fundamentadas na experiência da vida real e na formação cultural. De modo geral, a coerência contextual de um problema é um atributo variável (Abramovich; Cho, 2008; 2015).

Um problema pedagogicamente coerente é aquele que considera o nível de desenvolvimento, os interesses, as capacidades e os pontos fortes individuais e de grupos dos alunos, que podem despertar o interesse deles, facilitar o comportamento na tarefa, promover o raciocínio sistemático e estimular seu desenvolvimento cognitivo. Os professores precisam reconhecer a diferença entre as questões que têm e não têm respostas fáceis. Precisamos notar que a coerência pedagógica de um problema depende do método de solução esperado. Ela inclui, mas não se limita a: atenção ao comportamento dos alunos na tarefa, ausência (ou minimização) de dados estranhos, nível de complexidade sintática e adequação das notas. Em outras palavras, um problema precisa ser projetado tendo o aluno em mente (Abramovich; Cho, 2008; 2015).

A tecnologia desempenha um papel crucial na adaptação de problemas matemáticos, tornando-os coerentes tanto em contexto como em pedagogia. Problemas que hoje são coerentes podem não ser assim daqui a dez anos, e o que é pedagogicamente coerente para alunos do ensino médio pode não ser para os do ensino fundamental. A tecnologia oferece a capacidade de reformular problemas para mantê-los contextualmente, pedagogicamente e numericamente coerentes ao longo do tempo, proporcionando flexibilidade no ensino e na aprendizagem (Abramovich; Cho, 2015).

Ao trabalhar as três coerências descritas acima, a CD na PP é alcançada. Os professores, ao aprender a usar as informações expressas no diagrama de Venn como uma ferramenta que informa a CD na PP, desenvolvem habilidades de pensamento e raciocínio de ordem superior e ganham experiências valiosas de pesquisa na preparação de seus próprios materiais curriculares (Abramovich; Cho, 2008).

O uso da tecnologia no trabalho com alunos de matemática (incluindo futuros professores) não é uma questão simples, pois seu papel não é tornar a matemática mais fácil do que antes. Em geral, o uso adequado da tecnologia na educação matemática pode ser conceituado como um processo que maximiza as possibilidades positivas e minimiza as negativas de um ambiente computacional de aprendizagem. Uma maneira de estimular adequadamente a criatividade e a percepção matemática dos alunos na era digital é apresentá-los com problemas que, por um lado, são imunes ao uso direto de cálculos simbólicos como método de resolução de problemas e, por outro, motivam e, mais importante, habilitam o pensamento criativo enquanto resolve problemas. (Abramovich, 2016a, p. 46, tradução nossa²⁷).

Abreu (2018), ao explorar diferentes aplicativos que abordam conteúdos matemáticos, reflete quanto à importância de um planejamento pedagógico que busque explorar as potencialidades e limitações desses recursos antes de inseri-los na sala de aula de Matemática. Essa atitude diminui as chances de submetermos os alunos a práticas pedagógicas que sejam comprometidas pelo uso ineficaz das ferramentas tecnológicas.

Em um trabalho com a EPRP, o planejamento pedagógico em si precisa ser desenvolvido por meio de um trabalho intenso sobre o problema e sobre o recurso tecnológico que será utilizado. Tal postura permitirá maximizar as possibilidades positivas e minimizar as negativas ainda durante o planejamento pedagógico, possibilitando uma EP mais eficiente.

Por fim, passamos a perceber o quanto as TD tornam a RP e a PP ligadas uma à outra e como isso reflete na EPRP. Desse modo, essas discussões embasam o trabalho aqui desenvolvido, mirando novas reflexões que venham contribuir com o avanço dessas discussões e o desdobramento de novas investigações na área.

3.2 A Calculadora Gráfica Desmos

Em matemática, por exemplo, o debate não deve mais ser sobre usar calculadoras e computadores – eles fazem parte do mundo dos Nativos Digitais – mas como usá-los para incutir as coisas que são úteis para serem internalizadas, desde habilidades e conceitos para tabuada. Devemos nos concentrar na “matemática do futuro” – aproximação, estatística, pensamento binário. (Prensky, 2001, p. 5, tradução nossa²⁸).

²⁷ [...] the use of technology in work with students of mathematics (including prospective teachers) is not a simple matter for its role is not to make doing mathematics just easier than before. In general, the appropriate use of technology in mathematics education can be conceptualized as a process that maximizes positive and minimizes negative affordances of a computational learning environment. One way to appropriately foster learners' mathematical creativity and insight in the digital era is to present them with problems that, on one hand, are immune from the straightforward use of symbolic computations as a problem-solving method and, on the other hand, motivate and, most importantly, enable one's creative thinking while solving problems. (Abramovich, 2016a, p. 46).

²⁸ In math, for example, the debate must no longer be about *whether* to use calculators and computers – they are a part of the Digital Natives' world – but Rather *how* to use them to instill the things that are useful to have internalized, from key skills and concepts to the multiplication tables. We should be focusing on “future math” – approximation, statistics, binary thinking.

A partir desse contexto, iremos discutir de forma mais intencional e exploratória a Calculadora Gráfica Desmos (CGD), que inicialmente chegou até nós em forma de aplicativo, podendo ser utilizada facilmente em qualquer *smartphone*. Hoje, contamos com uma plataforma que, além da calculadora gráfica, dispõe de outras calculadoras e recursos que têm pluralizado cada vez mais suas ferramentas e possibilidades de uso, voltadas ao ensino e à aprendizagem da Matemática.

Conhecer e se apropriar dessas ferramentas é o primeiro passo para que possamos nos aproximar cada vez mais dos nossos alunos, considerados “Nativos Digitais” (Prensky, 2011), por meio desses recursos. Porém, chamamos atenção para que esse contato se dê de forma crítica e reflexiva, embasado por discussões pedagógicas e propostas metodológicas, como, por exemplo, a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas (EPRP).

Nesse sentido, discutiremos as funcionalidades da CGD, permitindo-nos justificar o seu uso, explorar suas potencialidades e reconhecer suas limitações, levando-nos a refletir sobre sua integração junto à metodologia de sala de aula de EPRP.

Apresentaremos algumas pesquisas desenvolvidas em nível de mestrado envolvendo a CGD, para que possamos compreender como esse recurso didático digital (RDD) vem sendo investigado em torno do ensino e da aprendizagem da Matemática. Desde o nosso contato inicial com a CGD, em 2016, tínhamos a curiosidade de conhecer um pouco mais sobre as origens desse projeto. Algumas informações técnicas e históricas eram facilmente encontradas em sites, porém, desejávamos obter informações sobre a escolha do nome, a relação do seu fundador com esses RDD e como tudo isso se relacionava com a sua formação e vivência.

Sabemos que a criação desses RDD, em muitos casos, está relacionada a uma visão mercadológica, em que nem sempre há a preocupação em promover novas possibilidades de construir o conhecimento, o que exige discussões pedagógicas em sua gênese. À medida que fomos utilizando a CGD em nossa sala de aula de Matemática, percebemos o quanto a plataforma ia se atualizando e disponibilizando novas ferramentas.

Para compreender melhor como se deu o surgimento da CGD, nos deparamos com uma entrevista concedida por Eli Luberooff, o criador da Desmos, ao portal Make Math Moments, no ano de 2020. Essa entrevista²⁹ foi registrada em seu site como um Podcast, Episódio 95, intitulado “The Vast Majority of Ed-Tech Is Garbage: an interview with Eli Luberooff (A maioria

²⁹ A entrevista pode ser acessada na íntegra, em áudio e transcrita por meio do endereço eletrônico <https://makemathmoments.com/episode95/>.

da Ed-Tech³⁰ é lixo: uma entrevista com Eli Luberoff)”. Na oportunidade, Luberoff (2020) compartilha sua opinião sobre a consideração da maioria dos *softwares* educacionais como lixo, trazendo uma visão significativa que aproxima a Desmos da Educação Matemática.

Pontuaremos alguns fatos que nos chamaram atenção e nos ajudaram a compreender algumas ideias em torno da criação da Desmos. Eli Luberoff, formado em Matemática e Física, começou a criar a Desmos com a preocupação sobre a desigualdade no acesso a recursos educacionais, especialmente calculadoras gráficas. Ele percebeu que muitas famílias não podiam pagar pelo alto custo dessas calculadoras. Com isso, procurou aproveitar o poder dos computadores para criar uma alternativa melhor, considerando o avanço tecnológico, oferecendo uma interface mais rica e flexível para explorar a Matemática. O projeto começou como um experimento técnico e cresceu ao longo dos anos. Hoje, quase 50 milhões de pessoas em todo o mundo utilizam a Desmos em suas atividades educacionais (Luberoff, 2020).

Eli Luberoff compartilha duas memórias marcantes de sua experiência na escola, que são resgatas como motivações para a criação da CGD. Inicia falando da primeira série, quando ele dividiu um retângulo em quatro partes iguais usando diagonais, mas sua professora considerou sua abordagem errada, causando um profundo sentimento de injustiça. Essa experiência destaca a importância de reconhecer o pensamento e a criatividade dos alunos (Luberoff, 2020).

A segunda memória é da quinta série, com uma professora que o deixou explorar livremente a circunferência da Terra, usando métodos antigos. Ela não forneceu respostas prontas, incentivando os alunos a pensar por si mesmos. Essa experiência foi fundamental para ele, pois destacou a importância de serem produtores de Matemática em vez de apenas receberem conhecimento (Luberoff, 2020).

Com relação à origem do nome Desmos, Luberoff (2020) traz duas histórias diferentes, mas a verdadeira história é que inicialmente a empresa era chamada de Tutor Trove, inadequado para uma empresa de tutoria. Ele realizou um concurso para encontrar um novo nome e recebeu centenas de respostas, a maioria irrelevantes. No entanto, um amigo encontrou a palavra “Desmologia” na *Wikipédia*, que se refere ao estudo dos ligamentos humanos e tem origem na palavra grega “Desmos”, significando ligação ou conexão. Esse nome se encaixava bem para a empresa, pois era versátil, acadêmico e estava disponível. Assim, escolheram o nome Desmos, refletindo suas aspirações de serem mais do que apenas uma calculadora e crescer junto com a empresa.

³⁰ O termo contempla a combinação das palavras education (educação) e technology (tecnologia), referindo-se às *startups* que oferecem soluções tecnológicas para o mercado educacional.

Em sua opinião crítica sobre a maioria das EdTech, Eli Luberoff acredita que muitas abordagens estão focadas em monitorar o comportamento do aluno, sem ajudá-los a pensar mais eficazmente. Ele compartilha a visão de que a tecnologia deve aumentar o pensamento e ampliar a capacidade humana. Para ele, a tecnologia é valiosa quando: facilita a comunicação eficaz, especialmente em ambientes de ensino, onde a interação entre professores e alunos é essencial; oferece poderosas capacidades de simulação, permitindo a conexão entre diferentes representações de conceitos; e permite a exploração eficiente de espaços de ideias, acelerando o processo de aprendizado e levando a epifanias mais rápidas.

Luberoff se entusiasma com tecnologias que atendam a essas necessidades, mas critica aquelas que se concentram em monitoramento, vigilância ou classificação, que, infelizmente, constituem a maior parte das tecnologias educacionais. Destaca a importância de usar a tecnologia de maneira que ela amplie a capacidade de aprendizado e o pensamento dos alunos, em vez de simplesmente controlá-los.

Criada com base nessas observações, a CGD ganha destaque em relação aos demais *softwares*, como o GeoGebra, pela facilidade no uso de suas ferramentas. Na CGD, podemos ver uma preocupação em tornar o acesso cada vez mais simplificado, pois, ao informar uma equação, o aluno consegue visualizar imediatamente sua representação gráfica. Diferentemente de outros *softwares*, que exigem o domínio de outros comandos, na CGD, ao informarmos algebricamente $f(x) = x^2 + 2x - 1$, conseguimos facilmente a visualização gráfica dessa função. Enquanto isso, no Geogebra e em outros, é necessário informar $f(x) = 2^x + 2 * x - 1$. Os comandos vão ficando um pouco mais complicados ao precisar informar a raiz quadrada, entre outros recursos operacionais da Matemática.

A Desmos diferencia-se de muitos outros *softwares* de EdTech por ser não apenas amigável aos professores, mas também aos estudantes. Eli Luberoff destaca que o objetivo é criar uma experiência de usuário verdadeiramente perfeita, semelhante àquelas proporcionadas por empresas de tecnologia como Snapchat, Facebook, Twitter, YouTube e Netflix. Ele enfatiza a importância de manter a mesma qualidade de experiência do usuário na área de educação, o que impulsiona o *design* da Desmos.

Além disso, concentra-se em questões de acesso e equidade, tornando seu *software* gratuito e acessível em todos os dispositivos, incluindo dispositivos de baixa potência. A empresa acredita que todos os alunos devem ter a oportunidade de se ajudar mutuamente, aprender Matemática e desenvolver interesse pela aprendizagem da Matemática. A equidade e a acessibilidade são princípios fundamentais em sua missão.

O olhar técnico para as ferramentas desenvolvidas na Desmos deixa transparecer também um olhar pedagógico para elas. A comunicação, a simulação e as representações conectadas são elementos importantes em comparação com as outras Ed-Tech. Muitos recursos digitais que se dizem didáticos não permitem a comunicação entre o professor, o aluno e a tecnologia, servindo apenas como um mecanismo de entrada e saída de informações.

Em uma proposta de EPRP, essa comunicação é muito importante, assim como a simulação, em que o aluno pode desenvolver seu raciocínio a partir das construções realizadas. Seguindo esse mesmo ideário, as diversas funcionalidades fortalecem ainda mais o potencial da CGD, permitindo um trânsito fluido entre as múltiplas representações algébricas, possibilitando melhores experiências com a EPRP.

A Desmos não para de crescer desde a sua idealização, em 2007, e como calculadora gráfica, em 2011, na conferência de Disrupt em Nova York. Essa ferramenta digital voltada para os processos de ensino e aprendizagem da Matemática vem conquistando cada vez mais espaço e se aperfeiçoando no intuito de proporcionar melhores experiências. O que inicialmente era apenas uma calculadora gráfica que podia ser baixada gratuitamente como aplicativo ou acessada por meio de qualquer navegador na internet, hoje se tornou um AVA com ferramentas capazes de proporcionar experiências incríveis no ensino e na aprendizagem da Matemática.

A plataforma fornece um ambiente e oferece diversas ferramentas de exploração que tiram proveito dessa natureza social das interações *online* para promover uma investigação matemática significativa onde cada ator assume o seu papel de maneira bem definida, sendo esse, seguramente, um dos pontos que diferenciam Desmos de outras plataformas *online* de matemática. Além disso, a plataforma consegue capturar os pensamentos e suas interações que acontecem em uma sala de aula cheia de estudantes, permitindo que o professor tire o melhor proveito disso para favorecer o processo de aprendizagem da turma. (Antunes; Cambrinha, 2020, p. 5).

As calculadoras também têm se desenvolvido frente ao avanço tecnológico. Se antes eram utilizadas apenas para realizar as operações básicas, hoje temos calculadoras capazes de representar algebricamente e graficamente as funções matemáticas. Isso traz uma enorme contribuição para os processos de ensino e aprendizagem da Matemática. Porém, para fazer uso dessas potencialidades, é preciso que sua inserção na prática seja embasada por reflexões críticas em um planejamento pedagógico que leve em consideração todas as mudanças no papel do professor e do aluno na sala de aula.

É preciso pensar no uso pedagógico desses recursos, pois nem todos eles são capazes de atender a propostas inovadoras de ensino e aprendizagem à luz do que é discutido por Educadores Matemáticos. No entanto, tratando especificamente das calculadoras gráficas, em

meio ao universo de TD existentes, voltadas ao ensino da Matemática, temos evidências de que seu uso pedagógico é capaz de potencializar a prática pedagógica do professor de Matemática.

Durante muito tempo, as calculadoras eram aparelhos eletrônicos independentes. Aos poucos, a calculadora comum e a científica foram incorporadas aos celulares. As calculadoras gráficas tinham um custo mais elevado em relação às demais, e o seu acesso, nos ambientes escolares, por parte de alunos e professores, sempre foi tímido. Com o avanço tecnológico, essas calculadoras passaram a ser projetadas de forma gratuita e acessível, por meio de um aplicativo em *smartphone*, como é o caso da CGD.

O uso das calculadoras gráficas deve ser compreendido pelos professores e alunos como um recurso que vai além da capacidade de esboçar o gráfico de uma função de forma imediata, pois essa função é capaz de ser explorada por meio de outros recursos.

Um estudante que faça uso proficiente de uma calculadora não precisa da ajuda de um professor para decidir se uma conta que ele realizou mentalmente ou no papel está correta, uma vez que ele tem à mão um instrumento que o auxilia nos processos mecânicos. Ele pode, assim, se ocupar com as grandes ideias e os conceitos envolvidos, como a ordem de grandeza dos números que compõem o cálculo ou em que ordem devem ser realizadas as operações. Da mesma forma, acreditamos que o uso proficiente de uma calculadora gráfica (especialmente uma que esteja à mão em um aplicativo de *smartphone*, por exemplo) pode empoderar os estudantes, que deixam de precisar do professor para validar os procedimentos mecânicos e podem estar mais atentos aos conceitos e ao pensamento matemático envolvido. Além disso, com uma calculadora gráfica à disposição é possível focar em problemas mais interessantes e de natureza investigativa em que o aluno possa diversificar as estratégias de resolução de problemas, fazer conjecturas, experimentar, verificar e formular novas hipóteses. (Antunes; Cambrainha, 2020, p. 11).

As ferramentas à disposição do aluno e do professor na CGD são capazes de proporcionar, juntamente com a EPRP, uma investigação mais profunda, suscitando a proposição e a resolução de problemas por meio da visualização dos objetos matemáticos, bem como a identificação de padrões e conjecturas. Sem o uso de um recurso dessa natureza, uma prática de EPRP fica limitada à excessiva manipulação algébrica e à exaustiva construção de gráficos sem tamanha precisão em seus dados.

A CGD pode ser baixada facilmente em qualquer loja de *download* de aplicativos (Android ou iOS) sem nenhum custo adicional. Uma vez hospedada no *smartphone*, ela pode ser utilizada *offline*. Além disso, a calculadora também pode ser acessada facilmente, diretamente pelo navegador, no endereço www.desmos.com/calculator.

Os elementos da interface da CGD não diferem entre a apresentada no aplicativo e no navegador, contando com a janela algébrica, a janela gráfica e o teclado. Por meio de um *login*, o usuário pode salvar todas as suas atividades desenvolvidas. Mesmo sem o *login*, é possível fazer uso de todas as ferramentas disponíveis sem salvá-las. Inicialmente, identificamos em sua

interface a janela algébrica. É nessa janela em que serão informados todos os comandos algébricos, numéricos e verbais (Figura 05).

Figura 04 – Janela algébrica da CGD



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

A CGD oferece a capacidade de traduzir dados inseridos na janela algébrica em representações gráficas instantaneamente. Isso permite explorar várias funções, tabelas, notas e imagens simultaneamente. A representação gráfica pode ser gerenciada na janela algébrica, permitindo ocultar gráficos de funções específicas, quando necessário. Além disso, a calculadora disponibiliza diversos gráficos pré-configurados com simulações para ajudar os alunos a explorarem e construírem conjecturas sobre conceitos matemáticos, sendo uma ferramenta útil para desenvolver as primeiras experiências com a calculadora.

A CGD oferece a opção de criar “notas”, permitindo tanto aos professores quanto aos alunos usar linguagem verbal para propor problemas, explicar raciocínios, registrar dúvidas e apresentar respostas verbalmente. Isso expandi significativamente a quantidade de informações que podem ser inseridas e comunicadas através da calculadora, diferenciando-a de outras calculadoras gráficas que se limitam à entrada de informações numéricas e algébricas.

Esse recurso torna fácil inserir expressões sem a necessidade de dominar comandos especiais, pois seu teclado oferece representações de símbolos comuns, como raiz quadrada, expoente,

integrais, entre outros. Essas funcionalidades aumentam a quantidade de conteúdos matemáticos que são viabilizados de forma rápida, prática e com prévia demonstração na CGD. Além disso, a calculadora é compatível com alguns comandos utilizados em outras plataformas matemáticas, como LaTeX e Geogebra.

Ao inserir uma expressão algébrica, os usuários podem criar tabelas para apresentar dados numéricos relacionados a funções ou simplesmente para organizar informações. Essa funcionalidade é útil para desenvolver habilidades de criação manual de gráficos de funções e promove a exploração da linguagem numérica em conjunto com a linguagem algébrica e gráfica. Os dados inseridos na tabela são traduzidos instantaneamente na janela gráfica, oferecendo uma experiência integrada e flexível.

A CGD, que antes estava disponível apenas em inglês, agora oferece seus recursos também em português, tornando a navegação e a compreensão das funcionalidades mais acessíveis aos usuários brasileiros. No canto superior direito, como mostra a Figura 06, existem botões que direcionam a outras funcionalidades da CGD, oferecendo recursos para salvar, compartilhar e incorporar gráficos em páginas da web. As atividades podem ser compartilhadas por meio de links, permitindo que os alunos acessem e interajam com elas, fazendo modificações que podem ser salvas e encaminhadas para os professores. Isso possibilita que os professores acompanhem o progresso individual dos alunos, forneçam *feedbacks* personalizados e avaliem o trabalho desenvolvido.

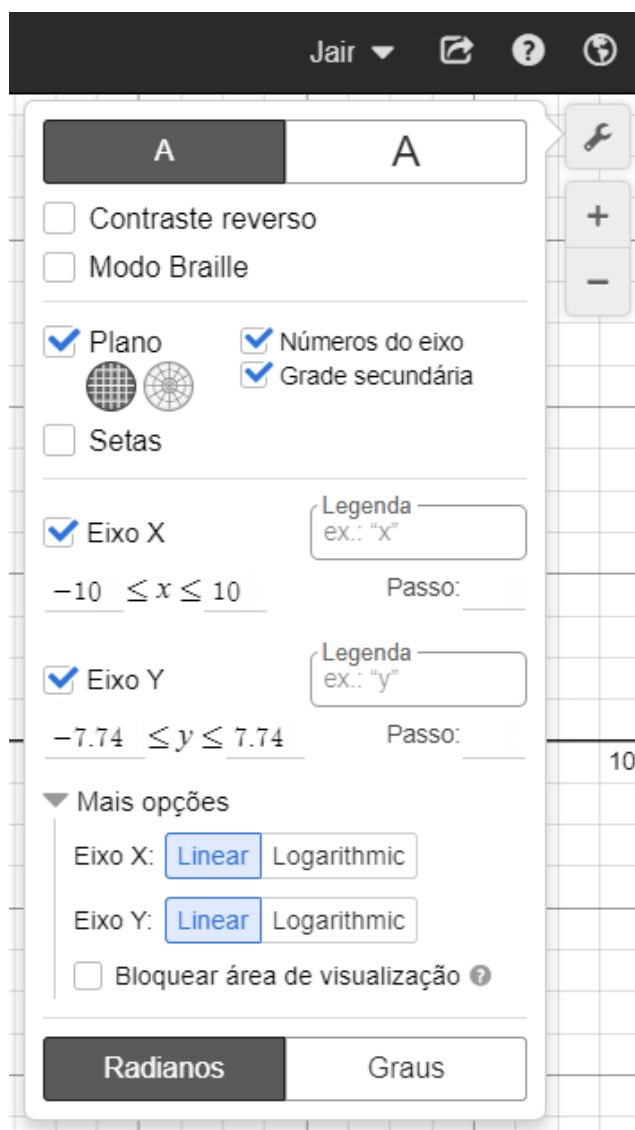
Figura 05 – Interface do menu da CGD



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

A CGD oferece várias opções de configuração para melhorar a experiência do usuário e garantir acessibilidade para pessoas com deficiência. O ícone de “configurações de gráfico”, como mostra a Figura 07, permite aumentar a visualização nas janelas algébrica e gráfica, bem como oferece recursos como contraste reverso e modo Braille para pessoas com deficiência visual.

Figura 06 – Configurações de gráfico da CGD



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

No modo Braille, a Desmos fornece exemplos e orientações sobre como ler e escrever Matemática em Braille, incluindo os códigos matemáticos Nemeth e Unified English Braille (UEB).

As configurações para o plano cartesiano incluem a capacidade de ocultar os eixos, números nos eixos, adicionar uma grade secundária e modificar a representação dos eixos com

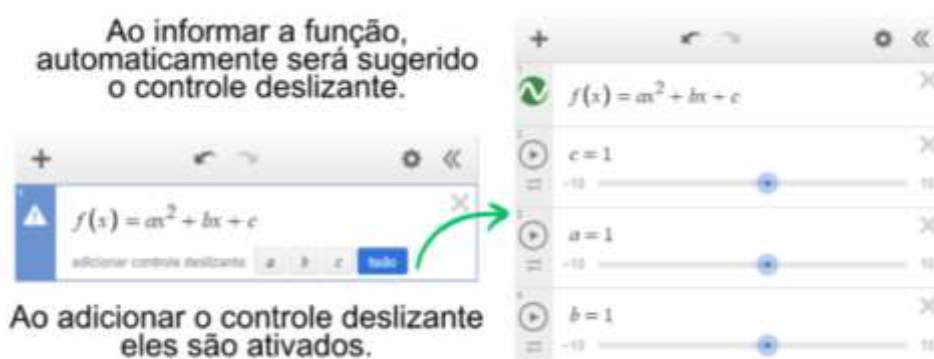
setas. O usuário também pode adicionar legendas para os eixos e ajustar a margem de visualização.

Há a opção de representar os eixos em formato linear ou logarítmico, bem como bloquear a área de visualização para evitar movimentações indesejadas na janela gráfica. O usuário pode escolher entre medir ângulos em radianos ou graus, com a configuração inicial sendo em radianos.

Além das informações presentes nas Figuras 05, 06 e 07, a CGD dispõe de uma “visita guiada”, que enriquece a experiência de quem deseja explorar suas ferramentas. Essa função torna o contato com a calculadora mais convidativo, incentivando os usuários a explorar e aprender mais sobre suas funcionalidades, dependendo de sua curiosidade.

A CGD diferencia-se de outras calculadoras gráficas também pela facilidade de uso e acesso a funcionalidades, como animações, alterações simultâneas e controles deslizantes. Essas opções são acessíveis ao digitar coeficientes na expressão, tornando a experiência do usuário mais direta em comparação com outras calculadoras. Para melhor compreensão, os professores podem orientar os alunos a observarem visualmente como as alterações numéricas afetam o comportamento gráfico da função, incentivando a exploração e conjecturas. Além disso, a calculadora permite a criação de animações dinâmicas, por meio de controles deslizantes, como podemos ver na Figura 08, para visualizar o comportamento do gráfico com base nas alterações dos valores dos coeficientes em um intervalo específico.

Figura 07 – Controle deslizante da CGD



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Ao longo dessa apresentação, podemos perceber vantagens em fazer uso da CGD, mesmo sabendo da existência de outros recursos de natureza similar. Ao observarmos o GeoGebra, percebemos que ambas as ferramentas são valiosas para os processos de ensino e aprendizagem da Matemática, cada uma com suas próprias vantagens e recursos. A

simplicidade e intuitividade, acesso *online* instantâneo e *offline*, ferramentas de compartilhamento e colaboração, simplicidade para atividades rápidas, que elencamos até aqui, são algumas vantagens da Desmos em comparação com o GeoGebra.

No entanto, é importante ressaltar que o Geogebra também possui suas próprias vantagens, como sua capacidade de trabalhar com várias representações matemáticas, como gráficos, álgebra, geometria e cálculo, além de oferecer um ambiente mais abrangente para explorar conceitos matemáticos em várias disciplinas. A escolha entre a Desmos e o Geogebra dependerá das necessidades específicas de ensino, preferências pessoais e dos objetivos da atividade matemática em questão. Os professores também podem optar por usar ambas as ferramentas para aproveitar o melhor de cada uma.

3.3 Pesquisas com a Desmos

A nossa pesquisa com a CGD é oriunda do Brasil, porém de natureza internacional, tendo em vista contribuir com as discussões já existentes envolvendo esse recurso didático digital nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática. O diferencial em nosso trabalho consiste em direcionar o foco para a metodologia de EPRP.

A partir de seus estudos com a Desmos, Maldonado (2020a) faz uma análise da percepção dos professores quanto ao uso de tecnologias na Matemática. Eles reconhecem que grande parte do conteúdo desenvolvido a partir da tecnologia tem a ver com a criatividade do professor aliada ao conhecimento da plataforma digital. Além disso, descobriu que poucos professores utilizam softwares especializados em suas salas de aula. Dentre as principais plataformas apresentadas aos professores durante a pesquisa, temos o Desmos, em que 62,5% expressaram que seu uso pode levar à interpretação prática do que é ensinado em sala de aula.

Maldonado (2019; 2020b) e Liang (2016) desenvolvem pesquisas por meio de intervenções didáticas em aulas de cálculo diferencial. As atividades descritas permitiram aos alunos compreender os conceitos fundamentais do cálculo através da Desmos, pois simplifica o cálculo e o rastreamento de funções, indicando os pontos de descontinuidade que poderiam ser operacionalmente negligenciados, além da interpretação dos resultados. Liang (2016), ao evidenciar as vantagens do uso da CGD, destaca que o emprego da tecnologia não substitui a lógica e o raciocínio matemático. Em vez disso, a tecnologia é uma abordagem auxiliar para a aprendizagem da Matemática dos alunos.

Além das pesquisas que visam à aplicação direta da Desmos na sala de aula, temos estudos que buscam apresentar e explorar suas ferramentas. Nesse sentido, Ogando (2020) faz

uma apresentação das possibilidades que a Desmos oferece e como o professor pode manipulá-la para criar atividades úteis no trabalho com funções e gráficos. Ele destaca como a Desmos permite produzir um estímulo que contribui para melhorar a precisão na transição entre as formas de representação das funções e entre os diferentes tipos de funções. Em termos mais práticos, a Desmos ajuda na gestão da sala de aula, ao reduzir o tempo que tanto professores como alunos gastam desenhando à mão livre diferentes representações gráficas, o que permite dedicar esse tempo à resolução de dúvidas e/ou problemas.

Destacamos a importância de os alunos dedicarem tempo à elaboração de gráficos feitos à mão, promovendo discussões sobre aspectos como a definição de cada eixo, a escolha e posicionamento das variáveis, as escalas (que nas calculadoras gráficas são ajustadas automaticamente), a representação dos cortes nos eixos e a localização de pontos no plano cartesiano. O uso de recursos gráficos digitais se mostra mais eficaz quando os alunos já possuem essas habilidades desenvolvidas e/ou em contextos que ampliem as possibilidades de aprofundamento e consolidação da aprendizagem.

Em 2021, nos unimos à comunidade internacional de educadores de Matemática para compartilhar os resultados de nossa pesquisa e experiência com a CGD no 14th International Congress on Mathematical Education (ICME-14). Na sessão 2, foram abordados elementos-chave relevantes para o uso de tecnologias digitais sob uma perspectiva científica – conhecimento do assunto, autoeficácia, uso de tecnologias digitais fora da sala de aula e aspectos pedagógicos do uso dessas tecnologias. Na ocasião, apresentamos o trabalho *Desmos App in the mathematics classroom: limitations and potentialities* (Abreu; Andrade, 2021).

As pesquisas envolvendo a Desmos têm ocupado cada vez mais os espaços de divulgação científica na Educação Matemática. No NCTM (2023), observamos nas discussões de Olarte e Roberts (2023), Cullen e Hertel (2023) e McCulloch et al. (2023) que, ao discutir tecnologias digitais voltadas ao ensino da Matemática, a Desmos tem se destacado entre outros recursos.

Cullen e Hertel (2023) refletem que, à medida que a tecnologia evolui e muda, é fácil ser atraído por um pensamento tecnocêntrico e focar nos recursos de uma ferramenta específica, em vez de como ela poderia ser usada na sala de aula. Por exemplo, comparar os recursos da Desmos e do GeoGebra tem valor, no entanto, é importante reconhecer que qualquer uma delas pode ser usada. De acordo com eles, o uso dessas ferramentas permite identificar e examinar como diferentes tecnologias podem ser utilizadas de maneira semelhante, bem como como a mesma tecnologia pode ser usada de formas distintas.

Juntamente a este cenário, a CGD tem experimentado um aumento significativo em seu uso por professores e alunos no Brasil, seguindo a tendência de sua popularidade nos Estados Unidos. Desde 2016, foram registradas pesquisa de mestrado, estudos científicos e relatos de experiências em eventos nacionais e internacionais relacionados ao uso da CGD na Educação Matemática no Brasil. Para compreender as várias possibilidades de uso desse RDD, foi realizada uma busca na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) usando a palavra-chave “Desmos”, com os resultados presentes na Tabela 02.

Tabela 02 – Pesquisas Nacionais de mestrado com a Desmos

Autor	Título do trabalho	Conteúdo Matemático
Abreu (2018)	Aprendizagem Móvel: explorando a Matemática por meio de aplicativos educacionais em <i>smartphones</i>	- Função Afim; - Função Quadrática.
Euzébio (2018)	Proposta de Ensino de Geometria Analítica utilizando o Desmos	- Geometria Analítica.
Scremin (2019)	O que $f'(x)$ nos diz sobre $f(x)$: uma abordagem com uso de tecnologia computacional	- Derivada.
Amplatz (2020)	O estudo da Função Afim a partir da interpretação global de propriedades figurais: uma investigação com estudantes do Ensino Médio	- Função Afim.
Teixeira (2020)	<i>Mobile Learning</i> : contribuições para o estudo de Funções na formação do professor de Matemática	- Funções.
Souza (2021)	Letramento Financeiro dos professores do Ensino Fundamental da rede municipal de Niterói e proposta de atividades de ensino	- Letramento Financeiro.
Silva (2021)	Ensino Aprendizagem de Função Afim via Exploração, Resolução e Proposição de Problemas com o uso do aplicativo Desmos em Contexto Remoto	- Função Afim.
Costa (2021)	Uma proposta para o ensino de função polinomial do 1º grau utilizando a plataforma do app Inventor 2 e o software Desmos	- Função Afim.
França (2022)	Proposta para o ensino de funções usando a ferramenta digital Desmos	- Funções.
Oliveira (2023)	A Aprendizagem da função afim por meio de uma abordagem qualitativa e global com uso da plataforma Desmos	- Função Afim

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Na Tabela 02, podemos ver as pesquisas desenvolvidas no Brasil que foram encontradas em nível de mestrado e estão em ordem cronológica. O quantitativo segue uma média de duas pesquisas defendidas por ano, com exceção do ano de 2019 e, recentemente, em 2022. Não foi identificada nenhuma pesquisa em nível de doutorado envolvendo esse recurso. Acreditamos que este trabalho seja o primeiro a ampliar essa discussão em nível de doutorado. Também constatamos que o nosso trabalho, Abreu (2018), é a primeira dissertação defendida no Brasil envolvendo a CGD.

Em Abreu (2018), fazemos inicialmente uma discussão ampla sobre aplicativos educacionais móveis que abordam conteúdos matemáticos, discutindo a perspectiva da Aprendizagem Móvel. Buscamos identificar os limites e as potencialidades dos aplicativos educacionais móveis em *smartphones* voltados aos processos de ensino e aprendizagem da Matemática em sala de aula. Entre todos os aplicativos investigados na pesquisa, a CGD teve destaque. Ao final, percebemos que esse RDD potencializou a condução das aulas, através da sua mobilidade, interatividade e pluralidade de ferramentas, promovendo um espaço favorável à aquisição de conhecimentos, em que os alunos foram capazes de desenvolver ideias matemáticas, tornando-se protagonistas de sua própria aprendizagem.

As atividades que trabalhamos durante a pesquisa de mestrado envolvendo a CGD exploraram os conteúdos de funções afim e quadrática. Percebemos o quanto esse RDD poderia potencializar tais atividades junto à metodologia de sala de aula de Ensino-Aprendizagem de Matemática via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas (Andrade, 1998; 2017). A partir dessa inquietação, nos aproximamos de forma teórica e prática dessa nova proposta por meio de nossa prática pedagógica em sala de aula de Matemática na Educação Básica e no Ensino Superior.

Euzébio (2018) investiga a possibilidade dos processos de ensino e aprendizagem de alguns conteúdos de Geometria Analítica com o uso do *software* Desmos. Foi desenvolvida uma sequência de atividades interativas abrangendo vários tópicos de Geometria Analítica para o Ensino Médio. O autor relata que o *software* poderia ter mais recursos, como um botão para ligar dois pontos por um segmento de reta, ou ainda deixar o rastro de um ponto em movimento. O autor evidencia o comentário da professora titular da turma em que realizou a pesquisa, que a utilização do *software* propiciou aos alunos novos desafios na resolução de problemas que envolvem a Geometria Analítica.

Scremin (2019) apresenta um estudo alicerçado na importância do uso de tecnologias computacionais em processos de ensino e aprendizagem da Matemática e de Cálculo, objetivando elaborar uma intervenção pedagógica para o ensino de derivadas através de

atividades desenvolvidas com apoio do *software* Desmos, a fim de verificar as possíveis potencialidades do uso dessa ferramenta para as diferentes abordagens da Derivada. A intervenção foi desenvolvida em forma de Oficina Pedagógica para um grupo de alunos do curso de Licenciatura em Matemática de uma Instituição de Ensino da rede particular do Estado do Rio Grande do Sul. Como potencialidades identificadas a partir dos resultados da pesquisa, a autora destaca a visualização e a experimentação proporcionadas pelo *software* Desmos, através da manipulação dos gráficos, construção de tabelas, marcação e seleção de pontos, que foram mediados pelas atividades propostas e possibilitaram a compreensão da derivada de modo mais enriquecedor, principalmente em seus aspectos geométrico e gráfico.

Amplatz (2020) analisou a aprendizagem de estudantes sobre a função afim a partir de uma sequência didática relacionada à interpretação global de propriedades figurais. Essa investigação foi embasada pela Teoria das Situações Didáticas nos moldes da Engenharia Didática. A sequência contemplou a realização de um experimento, a resolução de problemas, aspectos da investigação matemática e o uso dos aplicativos Desmos e Geogebra para *smartphones*. A pesquisa foi desenvolvida com alunos do 1º Ano do curso de Formação Docente, de um colégio público no interior do Paraná.

A autora considera que a utilização dos aplicativos, como ferramentas auxiliares para o estudo da interpretação global da função afim, contribuiu para a aprendizagem dos estudantes sobre o conceito de função afim, tendo em vista que foi possível a visualização imediata no trânsito entre os registros de representação gráfica e simbólico algébrico do referido conceito. Ainda enfatiza que o fato de terem usado os aplicativos, ao invés de lápis e papel para as construções gráficas, permitiu explorar mais exemplos e, conseqüentemente, gerou mais discussões entre os estudantes no mesmo intervalo de tempo que dispunham para a realização da pesquisa.

Teixeira (2020) analisa as contribuições do *Mobile Learning* na formação de professores de Matemática, considerando o conteúdo de funções nas produções acadêmicas (dissertações) publicadas no período de 2014 a 2018, no banco de dados da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). A Desmos torna-se objeto de investigação nesta pesquisa por meio da identificação do trabalho de Abreu (2018), ao discutir a *Mobile Learning* com vários aplicativos, destacando o Desmos na abordagem do conteúdo de função. Entre os trabalhos analisados na perspectiva da *Mobile Learning*, este foi o único trabalho que fez uso da Desmos.

Souza (2021) desenvolve uma pesquisa envolvendo professores de Matemática que atuam do 6º ao 9º Ano do Ensino Fundamental na cidade do Rio de Janeiro/Niterói. O trabalho

discute a inclusão do tema Educação Financeira na BNCC (Brasil, 2018) por meio de uma proposta de atividade que aborda o letramento financeiro dos professores, capacitando-os para explorar a Educação Financeira de maneira que vá além de ensinar o cálculo de porcentagens, juros e fórmulas. A proposta de atividade é desenvolvida no ambiente de sala da Desmos. O trabalho não busca refletir as contribuições da Desmos na proposta de ensino, o foco volta-se para o Letramento Financeiro.

Silva (2021) analisa as contribuições da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas para o ensino de função afim com o uso do aplicativo Desmos, visando a construção desse conceito matemático e sua relação com o cotidiano. A pesquisa foi realizada, de forma remota, durante o período de pandemia. O autor destaca que a Exploração, Resolução e Proposição de Problemas fez com que os alunos conseguissem enxergar mais detalhes no conceito de função afim, dando-lhes a oportunidade de um entendimento mais consistente. A visualização oferecida pela Desmos fez com que os alunos vissem detalhes mais genuínos do gráfico da função afim.

Costa (2021) apresenta uma proposta de ensino de Função Polinomial do 1º Grau para o Ensino Médio, por meio da plataforma do App Inventor 2 e da Desmos. O autor propõe um livreto digital com atividades, utilizando o uso de TD, tendo sido motivado pelos percalços encontrados nas experiências vivenciadas em sua caminhada docente no que tange às dificuldades encontradas pelos professores para ensinar Função Polinomial do 1º grau.

França (2022) desenvolve uma pesquisa e, consoante a mesma, apresenta dois produtos educacionais. Seu trabalho foi desenvolvido com o objetivo de criar uma sequência didática utilizando as ferramentas da Desmos, de forma a possibilitar ao aluno adquirir uma compreensão ampla e profunda de funções, tornando-se capaz de modelar situações-problema, interpretar funções em diferentes contextos, traduzir as diferentes representações de funções e materializar o conceito de funções como objeto matemático.

Os produtos educacionais desenvolvido por França (2022) foram um guia de utilização dos recursos disponibilizados pela Desmos (a calculadora gráfica e o ambiente de Atividades para Sala de Aula) e uma sequência didática para o ensino de funções direcionada a alunos do Ensino Médio. Chama-nos atenção, em seu trabalho, a exploração que a pesquisadora faz das ferramentas da Desmos, que permitem a criação de atividades que incorporam a calculadora gráfica a outras ferramentas no Ambiente de Sala de Aula.

Oliveira (2023) teve como objeto de estudo a aprendizagem da função afim, mediada pela plataforma Desmos, subsidiada pelos principais aspectos da aprendizagem de Álgebra, segundo a teoria dos Registros Semióticos, de Raymond Duval. Os resultados apontam que o

uso da Desmos se mostrou positivo por ser um recurso acessível e de fácil interação, e que favoreceu a visualização e a exploração das unidades simbólicas significativas da expressão algébrica e das variáveis visuais da representação gráfica. Com isso, conclui que esse recurso potencializa a exploração das transformações por conversão entre as representações gráfica e algébrica da função afim, nos dois sentidos, proporcionando compreensão e aprendizagem desse objeto matemático de forma global e qualitativa.

Diferentes são as formas de abordagem das funcionalidades da Desmos nas pesquisas apresentadas: *software*, aplicativo e ambiente de sala de aula. Nem todas as pesquisas trazem reflexões críticas sobre o uso da CGD nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática. Em alguns casos, a Desmos é usada como recurso para trabalhar determinado conteúdo. Chamamos atenção o trabalho de Silva (2021), ao trazer abordagens que se aproximam da nossa pesquisa, fazendo uso da Desmos junto à EPRP.

Percebemos que as pesquisas envolvendo o pluralismo de recursos da Desmos ainda são tímidas no Brasil. Mesmo que tenhamos muitos usuários, é necessário fazer com que essas experiências sejam compartilhadas e investigadas cientificamente para termos mais respaldo quanto ao uso dessas TD no Ensino da Matemática. Aqui trazemos evidências de suas limitações e potencialidades junto à EPRP, mas é possível que a sua abordagem aconteça sob a ótica de diferentes tendências da Educação Matemática.

4 O CAMINHAR METODOLÓGICO DA PESQUISA: PRESSUPOSTOS TEÓRICOS E A PRÁTICA

Neste capítulo, discorreremos sobre o percurso metodológico da nossa pesquisa. Inicialmente, justificaremos a escolha do tipo de pesquisa, qualitativa e pedagógica. Essas discussões ocorrerão em conjunto com a metodologia de sala de aula utilizada durante o desenvolvimento das atividades de pesquisa. Em seguida, apresentaremos o local de ação da pesquisa, os participantes, os objetos da pesquisa e os instrumentos de produção de dados. Os aspectos metodológicos do Produto Educacional (PE) também serão descritos. Detalhamos e esquematizamos toda a dinâmica da pesquisa, bem como os métodos de análise dos dados que se fundamentarão na Análise Temática (AT).

4.1 A Pesquisa Qualitativa e Pedagógica

Definir os aspectos metodológicos de uma pesquisa requer do pesquisador uma identificação dos elementos que caracterizam determinado tipo de pesquisa, o que não se faz de forma imediata. O fato de optarmos pela pesquisa qualitativa nos coloca em um ambiente amplo de possibilidades que requer especificar os diferentes tipos de pesquisa dessa natureza. Hissa (2013, p. 125-126) nos diz que “cada pesquisa corresponde um conjunto de alternativas metodológicas” e que “a metodologia é algo a ser construído enquanto o sujeito se aventura” (Hissa, 2013, p. 126).

É possível que os aspectos metodológicos, os instrumentos de coleta de dados e as diferentes formas de compreender e analisar possam ser modificados à medida que o itinerário de pesquisa vá sendo desenvolvido. Isso não a descaracteriza ou a desqualifica. Ao contrário, reflete o domínio que o pesquisador tem sobre o tipo de pesquisa que está desenvolvendo.

“Considerando a Educação Matemática (EM) uma prática social, o trabalho de campo torna-se uma opção importante, pois fornece elementos que nos permitem compreendê-la e, então transformá-la” (Fiorentini; Lorenzato, 2012). Esse pensamento reflete alguns dos aspectos qualitativos desenvolvidos em nossa pesquisa, ao mesmo tempo em que traz características da metodologia de sala de aula desenvolvida de forma empírica nas atividades.

Nesse contexto, fundamentamo-la em Bogdan e Biklen (1994), para destacar o seu caráter qualitativo; em Lankshear e Knobel (2008), classificando-a como pedagógica; e em Andrade (1998; 2017), direcionando e fundamentando a metodologia de sala de aula utilizada

nas atividades de pesquisa intitulada “Ensino-Aprendizagem de Matemática via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas (EPRP)”.

A pesquisa qualitativa chama nossa atenção por permitir imprimir nossas ideias e percepções sobre o inquérito investigativo. O tratamento das informações ocorre por meio de uma reflexão crítica e criteriosa, com argumentos fundamentados e preestabelecidos que norteiam o itinerário da pesquisa. Nesse contexto, o professor e pesquisador se manteve presente em todo o desenvolvimento da pesquisa, explorando o próprio campo de trabalho e sendo motivado pela necessidade de investigar as implicações do uso didático da Calculadora Gráfica Desmos (CGD) na EPRP. Para caracterizar esta pesquisa, apoiamo-nos nas ideias de Lankshear e Knobel (2008), que a consideram uma pesquisa pedagógica.

De acordo com Bogdan e Biklen (1994), a pesquisa qualitativa ocorre em ambientes do mundo real, e os pesquisadores são os principais instrumentos de coleta de dados. Eles observam e interagem com o contexto em estudo. Em vez de números ou estatísticas, a pesquisa qualitativa se concentra em descrever e compreender profundamente fenômenos, priorizando a complexidade das experiências humanas. Os pesquisadores valorizam o processo de pesquisa, focando nas interações e relações entre elementos em estudo, além dos resultados, e não partem de hipóteses predefinidas, mas permitem que teorias e padrões surjam organicamente dos dados levantados. Com isso, a pesquisa qualitativa se concentra em capturar o significado atribuído pelas pessoas às suas ações, interações e contextos, explorando suas perspectivas e experiências.

Essas características, descritas acima, estão presentes em todo o nosso caminhar metodológico, desde a escolha dos participantes e local de pesquisa, tendo o professor como pesquisador e produto desse meio, até a descrição efetiva das atividades desenvolvidas, com foco em todo o processo e não apenas nos resultados.

Os investigadores qualitativos frequentam os locais de estudo porque se preocupam com o contexto. Entendem que as ações podem ser melhor compreendidas quando são observadas no seu ambiente habitual de ocorrência. Os locais têm de ser entendidos no contexto da história das instituições a que pertencem. Quando os dados em causa são produzidos por sujeitos, como no caso de registros oficiais, os investigadores querem saber como e em que circunstâncias é que eles foram elaborados. Quais as circunstâncias históricas e movimentos de que fazem parte? Para o investigador qualitativo divorciar o acto, a palavra ou o gesto do seu contexto é perder de vista o significado. (Bogdan; Biklen, 1994, p. 48).

Essa é uma característica importante da pesquisa qualitativa, que dialoga fortemente com a pesquisa pedagógica (Lankshear; Knobel, 2008) e com a metodologia de sala de aula de Ensino-Aprendizagem de Matemática via EPRP (Andrade, 1998; 2017), pois a multicontextualidade da sala de aula é levada em consideração nessas abordagens de pesquisa

e metodológica. As questões sociopolíticas e culturais intrínsecas à multicontextualidade da sala de aula de Matemática são mais bem compreendidas quando o sujeito é produto desse meio e faz uso disso para uma compreensão dos dados. O tripé que se fortalece com a pesquisa qualitativa e pedagógica através da EPRP nos coloca diante de um cenário fértil para a compressão de todo o itinerário de pesquisa, com bases sólidas, focado no processo.

O fato de termos um Professor-Pesquisador investigando a sua própria prática pedagógica em um ambiente em que será levado em consideração a multicontextualidade da sala de aula de Matemática nos aproxima de uma pesquisa que reflita em profundidade seus resultados. Bogdan e Biklen (1994, p. 49) enfatizam que a pesquisa qualitativa “exige que o mundo seja examinado com a ideia de que nada é trivial, que tudo tem potencial para construir uma pista que nos permita estabelecer uma compreensão mais esclarecedora do nosso objecto de estudo”. Diante disso, é possível que o Professor-Pesquisador reflita sobre os diferentes aspectos do local e participantes da pesquisa, através de questionamentos que sejam posteriormente impressos em seu trabalho, por meio da análise e síntese dos resultados.

Essas reflexões dentro da pesquisa qualitativa se tornam ainda mais significativas quando estamos em um contexto de pesquisa pedagógica. De acordo com Lankshear e Knobel (2008, p. 13), “há um amplo consenso em relação à pesquisa pedagógica envolver profissionais pesquisando suas próprias salas de aula – com ou sem a colaboração de outros professores”. Os autores ainda destacam que a pesquisa pedagógica está confinada à investigação direta ou imediata das salas de aula, tendo como principal pesquisador o professor, cuja sala de aula está sob investigação.

Muitos professores que estão desenvolvendo pesquisas não conseguem perceber a importância de realizá-la em sua própria sala de aula. Acabam investigando no espaço de outros professores. Em alguns casos, isso se dá pelo desconhecimento da pesquisa pedagógica e o quanto ela é capaz de potencializar os resultados da pesquisa. Outro cenário paralelo a essa realidade é que muitas investigações, quando finalizadas, não têm uma continuidade e um retorno para o local e a comunidade em geral onde foram desenvolvidas.

Quando a pesquisa pedagógica é realizada, de acordo com Lankshear e Knobel (2008), há melhora na conscientização do papel e da identidade profissional dos professores, contribuindo para um ensino e uma aprendizagem de melhor qualidade nas salas de aula, despertando um sentimento de dignidade e a autovalorização, por defender sua competência para fazer julgamentos profissionais criteriosos.

Nesta pesquisa, percebemos que o seu teor pedagógico tem provocado imediatamente diversas reflexões sobre o nosso papel enquanto professor frente a EPRP. São contribuições

mútuas que vão sendo endossadas à medida que os movimentos da investigação vão avançando e são refletidas no ensino e na aprendizagem no momento do desenvolvimento das atividades, moldando o futuro desse cenário para alunos e para o professor. Em cenário diferente, quando o professor estivesse fazendo uma intervenção pedagógica na sala de aula de outros professores, alguns desses aportes ficariam inibidos, não tendo a mesma riqueza de detalhes como no cenário da pesquisa pedagógica, na qual o professor pesquisador está em constante análise e reflexão.

A pesquisa de professores é vista como um importante recurso, por meio do qual os professores podem desenvolver sua competência para fazer autêntico tipo de julgamento autônomo e decisões adequadas a seu *status* como profissionais. [...] a pesquisa pedagógica é aquela que pode contribuir, de forma demonstrável, para melhorar o ensino ou a formação dos alunos. (Lankshear; Knobel, 2008, p. 14).

Muitas pesquisas desenvolvidas por professores acabam sendo invisibilizadas. A sala de aula, como um rico laboratório, só é considerada como tal quando o pesquisador é um ser externo a esse ambiente. Trabalhos desenvolvidos no chão das escolas pelos seus respectivos professores não são vistos cientificamente, principalmente os desenvolvidos na Educação Básica. Fica a ideia de que a pesquisa está vinculada apenas à Universidade. Nesse sentido, o caráter pedagógico quebra alguns desses paradigmas e coloca o professor, em qualquer modalidade e nível de ensino, como pesquisador em sua própria sala de aula.

A partir da nossa experiência e das discussões de Lankshear e Knobel (2008), percebemos vantagens significativas na pesquisa pedagógica, tanto para os professores quanto para o sistema educacional como um todo. Ela proporciona um melhoramento na prática pedagógica, promove inovação e o desenvolvimento de novas abordagens curriculares. Como consequência, temos um aprimoramento da aprendizagem dos alunos.

A pesquisa pedagógica promove a evidência baseada na prática, em vez de depender apenas de intuições ou tradições, e incentiva o desenvolvimento profissional contínuo dos professores. Ela também pode ser usada para identificar e abordar problemas específicos no sistema educacional, contribuindo para o desenvolvimento do conhecimento na área da educação. Os professores desenvolvem a capacidade de avaliar intervenções educacionais e a tomada de decisões políticas informadas, incentivando os professores a refletirem criticamente sobre sua prática, suas crenças e seu impacto na aprendizagem dos alunos.

As estratégias metodológicas que podem estar atreladas à pesquisa qualitativa e pedagógica são intrínsecas à prática pedagógica do professor. Isso pode ocorrer tanto pelo fato de ele já fazer uso dessas estratégias e buscar apresentar dados científicos, como também pelo interesse em inserir determinada metodologia em sua prática pedagógica. Nesse sentido,

destacamos aqui a metodologia de sala de aula de Ensino-Aprendizagem de Matemática via EPRP (Andrade, 1998; 2017).

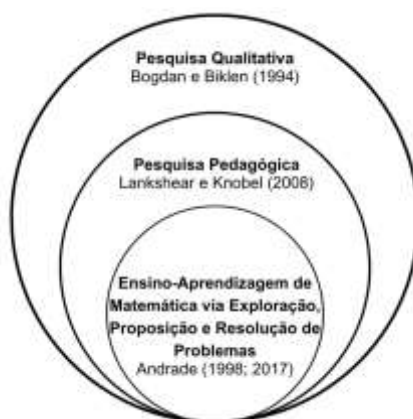
Enquanto Professor-Pesquisador, o contato com essa proposta metodológica nos motivou ao desenvolvimento desta pesquisa por meio da sua inserção em nossa prática pedagógica, ao mesmo tempo em que observamos suas relações com a pesquisa qualitativa e pedagógica.

Os trabalhos que temos desenvolvido na temática da Exploração, Resolução, e Proposição de Problemas apontam evidências de que o trabalho de Exploração, Resolução, Proposição, Codificação e Descodificação de Problemas (ERPCDP) na Sala de Aula e na Formação do Professor, não é um trabalho para aventureiros e seu processo como um todo não é uma atividade simples, mas complexa, multicontextual, que compreende múltiplas dimensões e contextos, que depende de vários fatores, como o contexto do aluno real que temos e não o aluno idealizado, sonhado, imaginado; o contexto da matemática; o contexto da escola e da sala de aula que temos como um todo, os contextos de nós professores, dentre outros. O que pontua, então, que tal proposta, a todo instante, precisa ser construída e reconstruída, pensada como foco central de ação a sala de aula de matemática, pensada em toda sua multicontextualidade. (Andrade, 2017, p. 390-391).

Essa metodologia de sala de aula utilizada em nossa pesquisa é potencializada pelas relações com a pesquisa qualitativa pedagógica. A sua essência e aplicação exige o desenvolvimento de uma investigação desta natureza, devido à sua familiaridade e por proporcionar uma melhor compreensão do objeto de estudo. A preocupação com o social, a multicontextualidade do local da pesquisa (que se refere à sala de aula de Matemática) e o intenso trabalho realizado, que precisa ser vivenciado, são características comuns e que fortalecem teoricamente a nossa proposta de pesquisa.

Na Figura 09, podemos representar a relação entre a pesquisa qualitativa (Bogdan; Biklen, 1994), a pesquisa pedagógica (Lankshear; Knobel, 2008) e a metodologia de sala de aula de Ensino-Aprendizagem de Matemática via EPRP (Andrade, 1998; 2017).

Figura 08 – Relação entre os tipos de pesquisa e a metodologia de EPRP



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Não se trata de um engessamento envolvendo esses tipos de pesquisa e metodologia de sala de aula, mas de uma forma de melhor representar as relações exercidas por cada uma delas dentro da nossa pesquisa.

A sala de aula de Matemática precisa ser vista não apenas como um ambiente voltado ao desenvolvimento de práticas pedagógicas objetivando a aprendizagem de determinado conteúdo. É importante que a pesquisa também esteja presente. Ao fazermos uso da EPRP, nos colocamos diante de uma prática que tem em sua essência o caráter investigativo e que exige de professores e alunos o exercício de um intenso Trabalho seguido de Reflexões críticas e Sínteses, apresentando os Resultados nos diferentes momentos em que a prática acontece.

Nesse sentido, ao trabalharmos essa metodologia de sala de aula, o seu teor pedagógico e qualitativo é fortemente compreendido. É possível que outros pesquisadores possam e venham a desenvolver pesquisas envolvendo o Ensino-Aprendizagem de Matemática via EPRP em diferentes tipos de pesquisa qualitativa. Porém, a forma como vemos essa metodologia e nos aproximamos dela, por meio de nossa prática pedagógica e discussões teóricas, nos permite enxergá-la diante da perspectiva qualitativa e pedagógica.

Nisso tudo é necessário que o ambiente da sala de aula de matemática seja didaticamente pensado como um ambiente de pesquisa e o professor de matemática, portanto, como um *professor-pesquisador/intelectual crítico/pós-crítico*, capaz de problematizar e de produzir conhecimentos sobre suas práticas, considerando as condições sociais, culturais, históricas e políticas do contexto onde eles estão inseridos, capazes ainda de lutarem e resistirem a quaisquer tipos de dominação e formas de colonialismo. (Andrade, 1998, p. 392, grifos do autor).

Não se trata de apenas resolver ou propor um problema na sala de aula de matemática, essa proposta metodológica reconfigura automaticamente o papel do professor em seu ambiente de trabalho, colocando-o na posição de pesquisador. Ainda, além da figura do professor, será utilizada como elemento mediador a CGD.

4.2 Análise Temática

Para uma melhor compreensão dos dados e síntese dos resultados desta pesquisa, entre as diversas técnicas de análise para a pesquisa qualitativa, optamos pela AT fundamentada nas pesquisadoras Braun e Clarke (2006). De acordo com elas, este é um método qualitativo pouco demarcado e raramente reconhecido, mas que tem sido amplamente utilizado em diferentes áreas. É um método fundamental na pesquisa qualitativa, usado para identificar padrões e temas nos dados. Ela organiza e descreve os dados de forma detalhada, facilitando a compreensão,

tornando-se uma habilidade básica para pesquisadores e podendo ser considerada um método completo em si mesmo.

Segundo Braun e Clarke (2006), um dos benefícios da AT é a sua flexibilidade, sendo essa a característica que mais nos chamou atenção no momento da escolha da técnica de análise de dados em nossa pesquisa. As autoras pensam não existir um quadro teórico ideal ou mesmo um método ideal para as investigações qualitativas, defendendo a importância de o quadro teórico e os métodos corresponderem ao que o investigador quer saber e que façam escolhas conscientes.

[...] a análise temática não está ligada a nenhum quadro teórico pré-existente e, portanto, pode ser usada dentro de diferentes quadros teóricos (embora não todos) e pode ser usada para fazer coisas diferentes dentro deles. A análise temática pode ser um método essencialista ou realista, que relata experiências, significados e a realidade dos participantes, ou pode ser um método construcionista, que examina as maneiras pelas quais eventos, realidades, significados, experiências e assim por diante são os efeitos de uma gama de discursos que operam na sociedade. (Braun; Clarke, 2006, p. 9, tradução nossa³¹).

Nesse contexto, dentro da pesquisa qualitativa pedagógica na EPRP, sentimos a multicontextualidade da sala de aula sendo contemplada como um elemento importante, capaz de elucidar resultados significados junto à vivência e ao olhar reflexivo e crítico do Professor-Pesquisador, por meio de temas que serão capturados a partir de um contato profundo com os dados da pesquisa.

De acordo com Braun e Clarke (2006), esses temas deverão ter relação com a questão de pesquisa e representar algum nível de resposta padronizada ou significativa dentro do conjunto de dados. Um grupo de ideias organizadas em tema permitirá aos pesquisadores responder ao problema de pesquisa. Um tema não é necessariamente algo que muitos itens de dados enfatizam, podendo variar em destaque. O julgamento do pesquisador é essencial para identificar temas, e, nesse sentido, regras rígidas não são eficazes, exigindo flexibilidade na abordagem.

Braun e Clarke (2006) discutem que a AT pode ser realizada de duas maneiras: através de uma abordagem semântica, que identifica temas nos significados explícitos dos dados, e por uma abordagem latente, que vai além dos significados superficiais, explorando ideias subjacentes e conceitualizações. Na perspectiva latente, interpreta-se os temas, tornando-a uma

³¹ [...] thematic analysis is not wed to any pre-existing theoretical framework, and so it can be used within different theoretical frameworks (although not all), and can be used to do different things within them. Thematic analysis can be an essentialist or realist method, which reports experiences, meanings and the reality of participants, or it can be a constructionist method, which examines the ways in which events, realities, meanings, experiences and so on are the effects of a range of discourses operating within society. (Braun; Clarke, 2006, p. 9)

análise teorizada. Isso pode ocorrer por meio de uma abordagem essencialista/realista, na qual as motivações e significados são teorizados diretamente, ou na perspectiva construcionista, na qual os significados são socialmente produzidos, não focando nas psicologias individuais, mas nas narrativas individuais produzidas.

A AT “latente” geralmente se alinha com a visão construcionista, mas nem toda ela o é. Em nosso contexto de pesquisa, a leitura dos temas se dará por meio de uma abordagem latente e construcionista.

Mesmo diante da flexibilidade da AT, as pesquisadoras Braun e Clarke (2016) apresentam um guia sistemático para a análise de dados qualitativos, ajudando os pesquisadores a extrair significado e padrões dos dados e a comunicar suas descobertas de forma clara e coerente. As fases são: (Fase 1) familiarização com os dados; (Fase 2) geração de códigos; (Fase 3) procura de temas iniciais; (Fase 4) revisão de temas; (Fase 5) definição e nomeação de temas; (Fase 6) produção do relatório. Essas fases são interativas, o que significa que os pesquisadores podem voltar atrás e revisar etapas anteriores à medida que avançam no processo de análise.

A seguir, descreveremos como se deu a AT dos dados de nossa pesquisa à medida que fomos apresentando os sujeitos, o local de pesquisa, os objetos de pesquisa, a dinâmica da pesquisa, o PE e a construção dos dados.

4.3 A Dinâmica da Pesquisa

Atuamos na condição de Professor-Pesquisador e os participantes da pesquisa foram licenciandos em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), *campus I* - Campina Grande. A investigação ocorreu na disciplina de Prática no Ensino de Matemática II³², da qual fomos o professor titular da turma no período letivo 2022.2.

A disciplina de Prática no Ensino de Matemática II é regularmente ofertada no 5º período do curso de Licenciatura em Matemática, com suas atividades voltadas para a prática do professor de Matemática no Ensino Médio. Inicialmente contamos com 17 licenciandos matriculados, dos quais 13 frequentaram e participaram assiduamente das atividades desenvolvidas durante a pesquisa. Os participantes da pesquisa são os licenciandos anteriormente citados e quantificados, assim como também o Professor-Pesquisador, por ter

³² **Ementa:** Reflexões sobre a importância, o ensino e a aprendizagem da Matemática no ensino médio. Metodologia de ensino de Matemática. Resolução de problemas. Explorar os principais conceitos abordados no ensino médio, dentre eles, Funções, Progressões Aritméticas e Geométricas, Trigonometria, Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares. Refletir sobre a seleção de conteúdo. Análise de Livro didático.

uma participação direta no planejamento, mediação e reflexão crítica do processo e resultados da pesquisa.

Para preservar a identidade dos sujeitos da pesquisa, seus nomes foram substituídos por códigos alfanuméricos: participação individual (L1, L2, L3, ..., L13) e em equipe (E1, E2, ..., E5). Para se referir ao Professor-pesquisador, usaremos Pp. Durante a descrição das atividades de pesquisa, também usaremos os destaques *Exploração de (L1, L2, ..., L13)* para nos referirmos a uma síntese da fala do participante durante a atividade de EPRP.

O termo *Professor-Pesquisador* aparecerá no texto para expressar nossas reflexões críticas durante a atividade de EPRP. Os *Comentários Temáticos* apresentará os temas que serão capturados a cada encontro da pesquisa. Esses temas serão apresentados em forma de texto, que buscará extrair as principais ideias de cada encontro, e sua identificação será compilada na produção de um relatório ao final de cada travessia da pesquisa. Como consequência, esses relatórios nos permitirão responder ao nosso questionamento de pesquisa nas considerações finais. Esse momento constitui a sexta fase da AT, e, na concepção de Braun e Clarke (2016), espera-se que esse texto seja capaz de convencer o leitor do mérito e da validade de sua análise.

O período de realização das atividades de pesquisa aconteceu entre 01 de setembro de 2022 a 09 de dezembro de 2022. A disciplina possuía uma carga horária semanal de quatro aulas, concentrando duas aulas a cada encontro, com cada aula tendo uma duração de uma hora. Nesse contexto, as nossas aulas aconteciam em tempo previsto de 2 horas seguidas. Ao final do desenvolvimento das atividades de pesquisa, contabilizamos um total de 40 horas-aulas, organizadas em 20 encontros de 2 horas-aula cada.

Os instrumentos de pesquisa aqui elencados e descritos foram utilizados para o melhor desenvolvimento das atividades de pesquisa e captura das informações e dados que foram sendo desenvolvidos concomitantemente. Por se tratar de uma pesquisa qualitativa pedagógica, em que os dados precisam ser compreendidos em sua dinamicidade, levando em consideração a multicontextualidade do local e dos sujeitos da pesquisa, bem como o intenso trabalho exigido pela EPRP, fez-se necessários o uso de instrumentos de produção de dados de diferentes naturezas, tais como: grupo de WhatsApp (aplicativo de mensagens instantâneas), o *smartphone* e a CGD, registros escritos dos alunos, registros de tela das construções realizadas na CGD, diário de bordo, gravação em áudio e questionários escritos e via Google Formulários.

Inicialmente, foi criado um grupo no WhatsApp para a socialização de informações, compartilhamento e arquivamento de documentos gerados pelo desenvolvimento das atividades de pesquisa. Outra finalidade do uso didático desse aplicativo foi permitir a continuação da EPRP realizada com a pesquisa em diferentes momentos, além da aula presencial.

A CGD, além de ser considerada objeto de estudo na pesquisa e elemento mediador na EPRP, foi um instrumento de trabalho importante. Suas funcionalidades geraram diversos registros por meio de *prints* nos *smartphones* dos licenciandos e na tela do notebook do Professor-Pesquisador, permitindo descrever o processo de EPRP, registrar os dados, realizar uma leitura crítica e reflexiva e, posteriormente, sintetizar os resultados da pesquisa. Esse recurso foi amplamente utilizado em grande parte das atividades de pesquisa. Para isso, os participantes fizeram o *download* gratuito do aplicativo Desmos em seus *smartphones*. Durante a EPRP, o Professor-Pesquisador utilizou a CGD por meio do navegador na internet, acessando www.desmos.com, e compartilhando a tela com toda a turma por meio de projetor multimídia.

Os licenciandos precisaram fazer registros dos problemas propostos, da resolução dos problemas e da exploração do problema em diversos momentos. Para isso, foram entregues folhas em branco para que, ao realizarem esse trabalho, pudessemos ter acessos aos registros feitos por eles. Em outras atividades, fizeram uso de *software* de digitação e enviaram seus registros via arquivos em formato PDF. Sempre que necessário, esses arquivos também eram compartilhados por meio do grupo do WhatsApp.

Além da produção desse material, nos primeiros encontros de desenvolvimento das atividades de pesquisa, fizemos uso de um diário de bordo, que era alimentado em momentos pontuais durante a aula e retomado novamente após o final da aula para fazer o registro dos principais acontecimentos que nos chamaram atenção enquanto professor-pesquisador.

À medida que as atividades de EPRP iam avançando com a pesquisa, sentimos a necessidade de fazer uso de outro recurso que produzisse esses dados, permitindo-nos ficar mais à vontade durante a mediação das atividades de pesquisa, sem nos preocuparmos com registros imediatos. Nesse momento, começamos a fazer uso de gravação em áudio de toda a aula, capturando os diálogos envolvendo Professor-Pesquisador e os licenciandos durante a EPRP. Ao final das aulas, essas gravações em áudio foram transcritas e estão presentes na descrição das atividades de pesquisa.

Para um bom desenvolvimento das atividades de pesquisa, é necessária uma boa compreensão do tipo de pesquisa a qual está sendo desenvolvida, suas técnicas, métodos e instrumentos. O domínio desses recursos é o que vai viabilizar o alcance de resultados capazes de responder ao questionamento de pesquisa que motiva todo o itinerário. A escolha do tipo de pesquisa reflete características que o pesquisador vem desenvolvendo no tocante à sua identidade profissional. Hissa (2013, p. 127) faz uma reflexão quanto a isso, ao afirmar que “Tu não usas uma metodologia. Tu és a metodologia que usas. [...] A pesquisa diz a vida do sujeito.

A metodologia anuncia o sujeito e a sua compreensão de mundo; a sua inserção no mundo. A obra é o sujeito”. Coadunando esse pensamento, Minayo (2012) pontua que

Fazer ciência é trabalhar simultaneamente com teoria, métodos e técnicas, numa perspectiva em que esse tripé se condicione mutuamente: o modo de fazer depende do que o objeto demanda e a resposta ao objeto na coleta de dados. A triologia acrescento sempre que a qualidade de uma análise depende também da arte, da experiência e da capacidade de aprofundamento do investigador que dá o tom e o tempero do trabalho que elabora. (p. 622).

Diante dessas discussões, a dinâmica da nossa pesquisa abrange dois momentos importantes e bem definidos no desenvolvimento das atividades. Com dez encontros cada, a 1ª Travessia caracterizou-se como um período de “Ambientação” com a EPRP e a CGD. Já na 2ª Travessia, tivemos uma “Oficina”, que se configurou como o desenvolvimento de uma atividade de EPRP com o uso didático da CGD. Como consequência desses momentos de Travessia, temos a construção de uma Framework Pedagógico destacando elementos que foram identificados a partir das atividades de pesquisa e que nos ajudam a pensar a EPRP e sua integração com a CGD, resultando no PE.

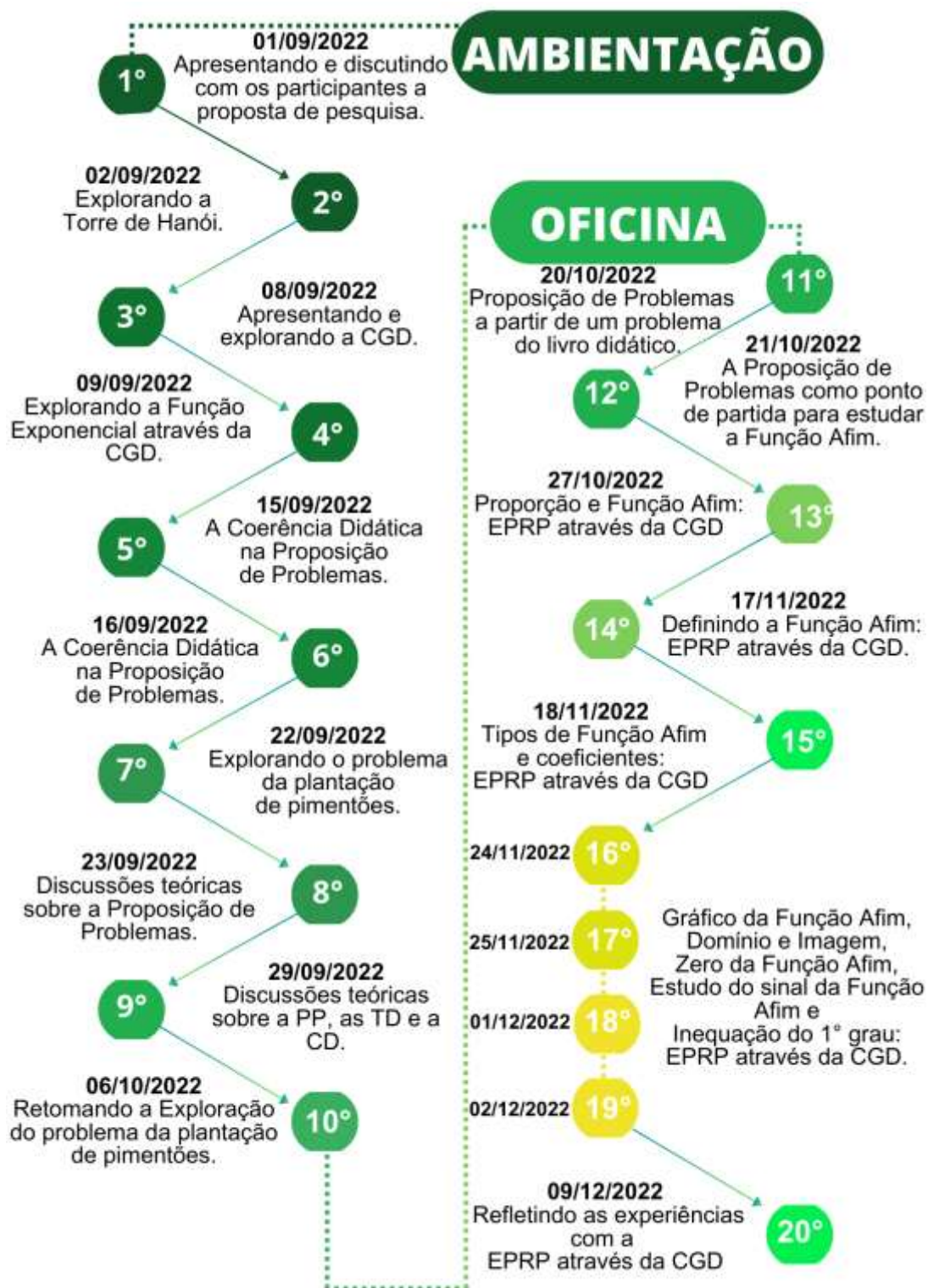
Na 1ª Travessia, foram realizadas discussões teóricas que permitiram aos participantes embasarem-se teoricamente sobre o que vem sendo pesquisado e discutido no campo da Educação Matemática, envolvendo as temáticas da pesquisa.

Na 2ª Travessia, foi desenvolvida a Oficina visando uma prática pedagógica em que a CGD estivesse diretamente atrelada à EPRP. *A priori*, esse trabalho se deu com a Função Afim, mas esperamos que os resultados obtidos possam ser generalizados e ampliados para as demais Funções a partir do PE.

O grupo no WhatsApp foi utilizado para produzir dados e promover interação, permitindo aos participantes momentos de EPRP fora da sala de aula. Entre o 16º encontro e o 19º encontro, os participantes foram organizados em grupos para continuar a EPRP através da CGD com temas diferentes. Eles propuseram, exploraram e resolveram problemas entre si, compartilhando suas descobertas no grupo do WhatsApp para orientação e contribuições no desenvolvimento da atividade.

O percurso metodológico está esquematizado na Figura 10.

Figura 09 – Percurso metodológico das atividades de pesquisa



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Apesar de todos os momentos de análise, reflexão e síntese realizados durante o desenvolvimento das atividades de pesquisa, faz-se necessário um novo tratamento dos dados, desta vez, com uma análise mais precisa, buscando, por meio da AT (Braun; Clarke, 2006),

conexões entre os diferentes momentos da pesquisa e a forma como eles nos permitem alcançar os objetivos do estudo, seguindo os preceitos da pesquisa qualitativa (Bogdan; Biklen, 1994) e pedagógica (Lankshear; Knobel, 2008), bem como da EPRP (Andrade, 1998; 2017).

O tratarmos dos dados à luz da AT (Braun; Clarke, 2006), o diário de bordo e as gravações foram os principais instrumentos de produção de dados que nos possibilitaram uma familiarização maior com os dados (Fase 1). As anotações no diário de bordo e as transcrições dos áudios nos permitiram identificar temas que estavam mais dirigidos aos dados, enquanto outros estavam mais dirigidos à teoria (Fase 2) e como eles poderiam nos ajudar a responder ao nosso problema de pesquisa. Desse modo, fomos capturando esses temas (Fase 3) e revendo-os (Fase 4), fazendo releitura a todo momento para ver a relação entre eles e sua contribuição para a análise. Assim, ficamos mais à vontade para nomear os temas (Fase 5).

Para uma melhor análise dos dados nos diferentes momentos da pesquisa, as principais estratégias para apresentar os resultados foram: a descrição dos problemas propostos pelos alunos, registros da tela da CGD e descrição dos diálogos realizados durante as atividades de EPRP.

A descrição densa possibilita ao leitor uma compreensão completa do processo em sua totalidade. Houve um cuidado em elaborar uma descrição rica e detalhada para evidenciar o movimento do processo vivenciado em sala de aula. Essa abordagem busca captar a essência do que ocorreu, permitindo ao leitor entender plenamente a experiência. A compreensão surge a partir dessa descrição, funcionando de maneira similar à leitura de uma história: a narrativa descritiva oferece os elementos necessários para que, ao lê-la, o leitor alcance a compreensão desejada.

No período de ambientação, os critérios de análise para captura dos temas voltavam-se para a PP, as TD e a Coerência Didática (CD). Já durante a oficina, mantivemos esses critérios, porém com um olhar mais atencioso, para capturar os avanços apresentados pelos participantes e as influências da CGD na EPRP.

Os temas foram sendo anotados, relidos, refletidos e sintetizados por meio de nosso diário de bordo, sempre que mantínhamos contatos com os dados produzidos na pesquisa. Eles foram compilados e traduzidos em nosso trabalho por meio de *Comentário Temático* feito durante e, mais precisamente, ao final de cada encontro.

As análises são expostas por meio de comentários e sínteses reflexivas descritas sobre os diferentes momentos e dados da pesquisa. Ao final de cada travessia, fizemos um relato (Fase 6) sistematizando os principais resultados observados por meio da AT. Esses dados foram

novamente sujeitos a uma AT, resultando nas considerações finais deste trabalho, discutindo-os como resposta ao nosso problema de pesquisa.

4.4 O Produto Educacional

Mediante todo o desenvolvimento metodológico apresentado, também foi se estruturando o nosso PE. Levando em consideração que a EPRP é uma metodologia aberta, mas não solta, que não se constitui de etapas, mas de diferentes momentos, na qual uma atividade pode assumir diferentes pontos de partida e que a sua exploração está relacionada com a multicontextualidade da sala de aula, não consideramos interessante apresentar algo como pronto e acabado.

Sendo assim, o nosso PE se constitui em um *Framework Educacional: possibilidades da prática docente com o uso didático da Calculadora Gráfica Desmos via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas*. Esse material foi sendo elaborado desde a Ambientação e mais fortemente com a Oficina. Inicialmente, pensamos em apresentar o problema proposto ao final da Oficina como uma atividade de EPRP. Porém, as nossas reflexões e todo o aprendizado proporcionado com a pesquisa nos fizeram perceber que mais significativo do que apresentar algo pronto seria direcionar elementos importantes que foram identificados a partir da pesquisa e que ajudarão outros professores e alunos a pensarem e planejarem a sua própria prática de EPRP com a CGD.

Um *Framework* Educacional consiste em uma ferramenta valiosa na organização de práticas de ensino, garantindo a aplicação eficaz e consistente de metodologias pedagógicas. Em sua essência, busca descrever um conjunto estruturado de diretrizes/ideias/conceitos/elementos que auxiliam os professores. É uma estrutura que define princípios, objetivos e estratégias para a criação e o desenvolvimento de práticas pedagógicas amparada por alguma teoria/recurso didático/metodologia, oferecendo conhecimento teórico e direcionamentos práticos, constituindo uma base sólida para o planejamento curricular, podendo ser aplicado em diferentes contextos.

O PE está embasado pelas discussões de Freitas (2011) e tem como objetivo apresentar elementos teóricos e práticos resultantes da nossa pesquisa que levem os professores a compreender melhor a EPRP enquanto metodologia de sala de aula, integrando o uso didático da CGD, refletindo sobre como essas travessias podem ser vivenciadas e adaptadas para seus ambientes multicontextuais. Esperamos que a produção desse material sirva de subsídio para

que os professores possam pensar a sua prática pedagógica e vivenciar novas experiências a partir dos dados destacados.

O PE está organizado em quatro tópicos. No primeiro, fazemos uma apresentação do itinerário formativo, o objetivo e as ideias que constituem o PE. Em seguida, trazemos elementos teórico-práticos que compreendem a metodologia de sala de Ensino-Aprendizagem de Matemática via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas, com foco na Proposição de Problemas e no ponto de partida. No terceiro tópico, discutimos a Coerência Didática e seus subconceitos, com uma atividade prática construída a partir dos problemas propostos pelos licenciandos. Por fim, voltamos nossa atenção para a CGD, suas funcionalidades, formas de compartilhamento e um conjunto de problemas que foram propostos pelos licenciandos, integrando a CGD à EPRP. Em cada problema, temos um link que direciona para o desenvolvimento da atividade na CGD.

A produção do PE será feita com o uso das ferramentas de *design* gráfico do Canva. Esperamos que o contato com o PE estimule a produção de outros materiais didáticos dessa natureza.

5 EXPLORAÇÃO-PROPOSIÇÃO-RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E A CALCULADORA GRÁFICA DESMOS: 1ª TRAVESSIA (AMBIENTAÇÃO)

Neste Capítulo, descrevemos e analisamos os dados da 1ª Travessia de nossa pesquisa. Este momento configura-se como um período de ambientação, no qual iremos familiarizar os licenciandos com nossos objetos de pesquisa: a metodologia de sala de aula em Exploração-Proposição-Resolução de Problemas (EPRP) e a Calculadora Gráfica Desmos (CGD). Desenvolvido durante dez encontros, o primeiro contato em sala de aula foi marcado por um momento de apresentação e discussão da nossa proposta. O início das atividades deu-se a partir da EPRP, tomando como ponto de partida a Torre de Hanói e o uso didático da CGD. Após esse momento, introduzimos a prática de Proposição de Problemas (PP) com um olhar para a Coerência Didática (CD). Dentre os problemas propostos, realizamos um trabalho mais intenso em um deles na perspectiva da EPRP. Durante esse período, também foram realizadas discussões teóricas sobre o uso didático das Tecnologias Digitais (TD) na sala de aula de Matemática e a CD na PP. Os resultados dessa Travessia serão apresentados por meio da Análise Temática (Braun; Clarke, 2006) que será feita ao final de cada encontro e sintetizada ao final deste Capítulo.

5.1 Apresentando e discutindo com os licenciandos a proposta de pesquisa

1º Encontro – 2 aulas Data: 01/09/2022
--

Este dia marca a primeira aula da disciplina e de contato com os licenciandos. Por já termos idealizado esse ambiente como o *locus* da pesquisa, não perdemos tempo em apresentar nossa proposta mediante as exigências da disciplina “Prática no Ensino de Matemática II”. O desafio inicial consistia em como administrar o tempo das aulas em uma proposta de EPRP com foco na PP fazendo uso didático da CGD. Além disso, esperávamos que a experiência proporcionada durante essa Travessia despertasse o olhar para pensar o uso da CGD via EPRP.

Muitos eram os conhecimentos pedagógicos, matemáticos e técnicos que deveríamos trabalhar inicialmente nos licenciandos para que pudessemos alcançar nosso objetivo com a pesquisa. Consideramos conhecimentos pedagógicos os referentes à prática de sala de aula, à didática, aos recursos didáticos digitais, aos procedimentos metodológicos, à avaliação, e, especialmente, à EPRP. Os conhecimentos matemáticos estão relacionados com o próprio domínio do conteúdo que se pretende ensinar, tendo em vista que os licenciandos estão em um

processo de formação inicial e acreditamos existir algumas lacunas oriundas da Educação Básica e/ou do período de aulas remotas. No que tange aos conhecimentos técnicos, destacamos o domínio das ferramentas e funcionalidades da CGD.

Não sabíamos inicialmente qual o nível de domínio deles com relação a esses conhecimentos (pedagógicos, matemáticos e técnicos). Por esse motivo, decidimos realizar um período de ambientação (1ª Travessia) em que pudéssemos nos aproximar do que já conheciam e traçar metas para que pudessem evoluir com as atividades da nossa pesquisa. Acreditávamos que duas semanas seriam suficientes para o desenvolvimento deste estudo piloto, o que não aconteceu de fato.

Tomando como base parte da ementa da disciplina “Prática no Ensino de Matemática II”, dialogamos com os alunos que todo o trabalho desenvolvido teria como plano de fundo duas temáticas importantes: a EPRP; as TD. Essas temáticas foram registradas de forma escrita na lousa e, a partir disso, começamos a discutir sobre o impacto que cada uma pode vir a ter na prática pedagógica do professor de Matemática.

Inicialmente, os licenciandos demonstraram desconhecimento do termo “Exploração-Proposição-Resolução de Problemas”. Já esperávamos esse posicionamento, tendo em vista um contato incipiente, por parte dos licenciandos, apenas com a Resolução de Problemas (RP). Para isso, começamos a discutir o que seria a EPRP, tomando como base as discussões de Andrade (1998; 2017). Destacamos a importância de o professor protagonizar a sua prática pedagógica a partir da PP. Os licenciandos adentraram a discussão relatando sempre resolverem problemas prontos do livro didático e da internet sem ter um posicionamento reflexivo ou crítico quanto a isso.

Discutindo o uso didático e a importância das TD na prática pedagógica do professor de Matemática, apoiamo-nos nas discussões realizadas em Abreu (2018) com o uso didático da CGD para enfatizar a importância que esse e outros recursos desempenham dentro e fora da sala de aula de Matemática. Os licenciandos demonstraram não ter conhecimento da CGD, o que se tornava para nós um desafio a mais nesse ambiente de pesquisa. Porém, muitos deles afirmaram conhecer a importância das TD e, ao falarmos da CGD, trouxeram à tona algumas experiências que tiveram com o Geogebra.

Justificamos a importância da PP aliada ao uso didático das TD na sociedade que temos hoje. Nesse momento, entra em pauta, por meio da participação efetiva dos licenciandos, como as tecnologias têm moldado a nossa sociedade nos dias atuais. Com base nesses apontamentos, discutimos a influência que esses recursos digitais têm no comportamento e na forma como os alunos aprendem, e suas principais características enquanto Nativos Digitais (Prensky, 2010).

Os licenciandos passaram a refletir sobre como eles estão cada vez mais próximos das TD e como podem usar esses recursos enquanto alunos e futuros professores. Na fala de muitos, as experiências vivenciadas durante o período de aulas remotas provocadas pela pandemia da Covid-19 vinham à tona.

Percebemos que eles se sentiam cada vez mais à vontade para falar sobre as TD do que sobre a EPRP. Com isso, direcionamos a discussão para cada um dos termos separadamente (Exploração, Proposição e Resolução de Problemas), ficando evidente, ao final, que não seria possível trabalhar com nenhum deles de forma isolada, destacando todo esse movimento como Exploração de Problemas (EP). Em todos os momentos da pesquisa, a PP e/ou RP foi discutida na perspectiva da EP.

A ideia de RP que eles tinham nesse momento inicial da pesquisa estava muito limitada à busca por uma resposta final, sem perspectivas críticas, reflexivas e que lhes impulsionasse a ir além. Essa abordagem estava diretamente ligada à manipulação algébrica e numérica durante o processo de resolução. O problema era sempre considerado como algo que teria uma única solução correta e sempre teria solução, tendo em vista que não faria sentido para os alunos resolver problemas sem solução. Enquanto licenciandos, eles não conseguiam refletir a origem dos problemas e a necessidade de aprender a propô-los. Em seus discursos, fica impressa a ideia de que sempre teriam problemas prontos para trabalhar em sala de aula e que propor problemas não seria um problema/responsabilidade deles.

Esse ainda não era o momento para discutirmos nossa proposta metodológica com base em pressupostos teóricos. Interessávamos inicialmente provocar essa discussão tendo como resposta as principais ideias a respeito das temáticas, para que pudéssemos ir moldando a nossa proposta de pesquisa.

Continuando a exposição dialogada, pautamos a PP. Nesse aspecto, tudo parecia muito distante da realidade dos licenciandos. Não fazia sentido para eles a necessidade de propor problemas. Aos poucos, fomos discutindo a importância da PP, principalmente, durante o seu itinerário formativo enquanto futuro professor de Matemática. Os licenciandos foram se apropriando da ideia e relacionando-a com a importância de trabalhar problemas que façam sentido para os alunos e que estejam relacionados ao seu contexto.

Assim, começamos a discutir a importância de os problemas serem propostos com base no contexto dos alunos, direcionando essa discussão para a forma como os problemas se apresentam no livro didático. Os problemas propostos nos livros didáticos não conseguem contemplar a multicontextualidade da sala de aula nas diferentes regiões do país. Com isso,

passamos a discutir a necessidade de desenvolver a habilidade de propor problemas para que possam reformular/adaptar os problemas à realidade da sua sala de aula.

A PP não consiste em sempre começar um problema do zero, essa proposição pode partir de um problema já existente, também sendo considerado um ponto de partida.

Aos poucos, os licenciandos iam demonstrando uma apropriação da importância da PP e que seria algo interessante de colocar em prática, não dando conta dos desafios que possivelmente enfrentariam ao iniciarmos essa prática na perspectiva da EPRP. Isso porque, para eles, a PP tinha fim com a redação do problema e a resolução ficaria a cargo de quem o fosse resolver, não necessariamente a pessoa que o propôs.

Ainda não estava clara para os licenciandos a ideia de EPRP, uma vez que, em sua compreensão, a RP e a PP aconteciam e eram discutidas de forma isolada. Nesse sentido, começamos a dialogar sobre a EPRP com foco na PP, deixando claro aos alunos que o problema proposto precisa ser resolvido pelo próprio proponente, para verificar a sua Coerência Didática (CD).

Em uma atividade de EPRP, analisamos o contexto do problema, os valores numéricos, o público-alvo, entre outros elementos, inferindo momentos de reflexão crítica sobre o que está sendo explorado. Desse modo, percebemos a necessidade de alterar alguns dados, reformulando esse problema, resolvendo-o novamente e dando continuidade à exploração. São múltiplos os olhares que devemos ter durante essa abordagem em seus diversos momentos.

Passamos a discutir como as TD, especificamente a CGD, poderiam potencializar a EPRP na prática pedagógica do professor de Matemática. Percebemos certa curiosidade por parte dos licenciandos junto a um receio de como isso deveria acontecer durante as aulas. Para direcionar esse momento inicial de EPRP, tomamos como ponto de partida a Torre de Hanói. Com o objetivo de analisar os impactos do uso didático da CGD na EPRP, seria interessante que a atividade inicial incluísse discussões algébricas, identificação de padrões, generalizações, expressões algébricas e a transição entre múltiplas representações algébricas, possibilitada pelo uso de um recurso gráfico digital.

Nessa perspectiva, visualizamos na Torre de Hanói uma oportunidade para desenvolver esses aspectos e familiarizar os licenciandos com a EPRP e com o uso didático da CGD, explorando ideias da Função exponencial.

Passamos a desenvolver as primeiras experiências de EPRP partindo inicialmente dos comandos de manipulação dos discos da Torre de Hanói. Para essa atividade, objetivamos: reconhecer padrões na quantidade de movimentos mínimos dos discos; generalizar os padrões por meio de uma expressão matemática; perceber como a Torre de Hanói pode ser utilizada para

trabalhar o conteúdo de Função exponencial; propor problemas a partir das ideias construídas; explorar o problema por meio da CGD.

Dividimos os licenciandos em quatro equipes, cada um com uma Torre de Hanói. Discutimos com eles que usáramos esse recurso para introduzir um conteúdo matemático, sem especificar qual seria. Poucos demonstraram já ter conhecimento da Torre de Hanói, porém não lembravam como se dava o seu funcionamento. Nesse momento, pedimos que eles se comportassem ora como alunos ora como professores, buscando refletir sobre a importância da EPRP no ensino e na aprendizagem da Matemática.

Com as equipes formadas, passamos a apresentar a Torre de Hanói e discutir como se dava a movimentação dos discos. A Torre de Hanói consiste em um quebra-cabeça com três pinos, em que os discos são dispostos em ordem decrescente de diâmetro. Movimentamos um disco em cada jogada, nunca sobrepondo um disco maior sobre um menor. Colocando o(s) disco(s) no primeiro pino, obedecendo às regras, devemos transferir o(s) disco(s) para o terceiro pino e observar a quantidade mínima de movimentos.

Começamos com apenas um disco, para que os alunos anotassem a quantidade mínima de movimentos. À medida que íamos aumentando a quantidade de discos, mais tempo demoravam e as dificuldades iam surgindo. Usando um disco, perceberam facilmente a necessidade de apenas um movimento. Com dois discos, todas as equipes facilmente sinalizaram que a quantidade mínima de movimentos seria três. Ao passarmos para a fase da movimentação com três discos, os resultados apresentados pelas equipes começaram a divergir. Algumas delas tiveram que realizar mais de uma vez a movimentação dos discos para compararem os valores e concluírem que a quantidade mínima de movimentos seria sete. À medida que aumentávamos a quantidade de discos, os licenciandos demoravam mais tempo.

Optamos por usar a lousa para desenhar uma tabela, informando os valores obtidos na quantidade mínima de movimentos, de acordo com a quantidade de discos. Ao construirmos a tabela, iniciamos com a quantidade zero de discos e, conseqüentemente, zero movimentos. Fizemos isso para ajudar os alunos no reconhecimento dos padrões envolvidos na atividade de EPRP. A tabela foi preenchida até a quantidade de cinco discos.

Tabela 03 – Quantidade mínima de movimentos dos discos na Torre de Hanói

Nº de discos	Quantidade mínima de movimentos
0	0
1	1

2	3
3	7
4	15
5	31
⋮	⋮
X	...

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

À medida que avançávamos na quantidade de discos, estimulávamos os licenciandos a irem observando padrões, como forma de desenvolver o pensamento algébrico. Alguns licenciandos já começaram a prever qual seria a quantidade mínima de movimentos da próxima jogada, porém não conseguiam chegar a uma conjectura. Após a movimentação com cinco discos, traçamos vários questionamentos quanto ao conteúdo que poderíamos estar trabalhando a partir dessa atividade com a Torre de Hanói.

Os licenciandos apresentaram dificuldades em representar matematicamente as ideias presentes na atividade. Insistimos com problematizações que os levassem a refletir sobre os dados informados na tabela, entre eles: como encontrar a quantidade mínima de movimentos para uma quantidade x de discos? Algumas equipes começaram a rascunhar e formular alguma conclusão. Na maioria das situações, eles relacionavam sempre com o dobro do número e, de repente, percebiam que não se aplicava para todos os números referente à quantidade de discos. Outra equipe concluiu que seria sempre o dobro da quantidade anterior mais um, porém não conseguiam relacionar esse valor com a quantidade de discos.

Sempre que apresentavam ter concluído algo, íamos ao quadro discutir coletivamente o raciocínio apresentado. Muitas foram as tentativas individuais e coletivas. Essa discussão exploratória durou até o final da aula, sem chegar a nenhuma conclusão. Com isso, lhes estimulamos a continuar pensando sobre o problema. Discutimos a importância de não fazerem busca na internet para descobrir a resposta correta, pois isso estaria sabotando o raciocínio que eles vinham desenvolvendo durante toda a aula. Sendo assim, seria preferível que chegassem na próxima aula sem nenhuma conclusão ao invés de chegar com a resposta correta oriunda de pesquisas na internet. Desse modo, encerramos o nosso primeiro dia de aula e pesquisa.

Comentário Temático: Este primeiro encontro nos deixa como desafio avançar as discussões em RP a partir da nossa proposta de atividade em EPRP, pois os alunos apresentam uma ideia muito limitada da importância da RP na sala de aula de Matemática. Nos inquieta ainda mais o fato de não perceberem a importância da PP e não terem vivenciado isso na prática. Quanto ao trabalho com a CGD, percebemos uma certa

motivação por parte deles, mas também precisamos mostrar que só isso não é suficiente para o trabalho com as TD. Ao iniciarmos a EPRP com a Torre de Hanói, percebemos a dificuldade dos licenciandos com a generalização das ideias matemáticas, refletindo dificuldades no desenvolvimento do pensamento algébrico. O tempo da aula acabou e eles não foram capazes de generalizar algebricamente os dados informados na tabela, nos deixando o desafio de criar condições para que desenvolvam o pensamento algébrico por meio das atividades de EP. Em muitas tentativas apresentadas pelos licenciandos, conseguíamos perceber uma coerência na representação numérica e uma dificuldade maior na representação algébrica. Com isso, percebemos que o domínio da representação numérica precede a representação algébrica, neste cenário de EP.

5.2 Explorando a Torre de Hanói

2º Encontro - 2 aulas

Data: 02/09/2022

Iniciamos a aula otimistas de que os licenciandos iriam apresentar a solução para o problema que estávamos explorando. Para nossa surpresa, continuavam com a mesma dificuldade em visualizar uma conjectura que representasse algebricamente o problema. O ponto positivo nessa situação é que não fizeram pesquisa na internet, assim como tínhamos orientado. Ao mesmo tempo, nos preocupa a dificuldade em raciocinar (pensamento algébrico) que os licenciandos ora apresentavam.

Retomamos a discussão e reescrevemos na lousa a tabela com os dados anotados na aula anterior (Tabela 03). As tentativas continuavam as mesmas: o dobro da quantidade mínima de movimentos anterior mais um; tentativas sempre usando a ideia de dobro. Alguns chegaram a deduzir a quantidade mínima de movimentos para valores maiores de quantidade de discos por meio dessas observações, mas não conseguiam representar algebricamente. Estavam muito focados na quantidade mínima de movimentos e esquecendo de relacionar com a de discos.

Com isso, passamos a reforçar a ideia de que para eles encontrarem a quantidade mínima de movimentos deveriam relacionar com a quantidade de discos. Nesse momento, relembramos a ideia de variável dependente e variável independente. Fizemos essa discussão com base nos dados do problema que estava sendo explorado. Alguns licenciandos apresentavam dificuldade em compreender o conceito, mas, por meio de uma discussão coletiva, chegamos à conclusão de que a quantidade de discos seria a variável independente e que a quantidade mínima de movimentos seria a variável dependente.

Comentário Temático: Por mais que a organização dos dados em tabela seja algo comum ao se trabalhar com funções, os licenciandos não conseguiam visualizar a relação entre as grandezas. Fez-se necessário cogitar a ideia de estarmos trabalhando o conteúdo de função, sem especificar o seu tipo. Em seguida, trabalhamos as ideias de variável dependente e independente. Toda essa situação nos fez perceber dificuldades nos licenciandos em

resolver o problema por meio de uma representação algébrica, como também os conceitos matemáticos referentes ao conteúdo de função. Por estarmos trabalhando na perspectiva da EP, os alunos ainda se demonstravam preocupados em encontrar uma resposta final sem se atentar aos demais elementos que estavam envolvidos ao problema. Esse comportamento é reflexo de suas ideias iniciais sobre o que seria a RP na sala de aula de Matemática.

O próximo passo foi apontar que um dos conteúdos que poderiam ser explorados a partir da atividade de EP seria a Função exponencial. Essa informação foi dada não no sentido de acelerar a aula, ou de sabotar o raciocínio que os licenciandos vinham desenvolvendo, mas devido à identificação de certa dificuldade por parte deles em organizar as ideias acerca do conteúdo de função. Assim, passaram a olhar mais para os dados da primeira coluna da tabela e tentar visualizar não mais a ideia apenas do dobro, mas de potenciação. Essa ideia foi construída a partir de problematizações, tais como: *se você está relacionando com o quadrado de um número, significa que você está multiplicando esse número por ele mesmo, de que outra forma você pode representar isso?* Foi quando eles concluíram que podia ser representado por uma potência.

Essas informações foram de extrema importância para redirecionar o pensamento algébrico dos licenciandos. Aparentemente, eles já estavam fadados a não conseguir avançar. Nesse momento, alguns relataram ficar ainda mais complicado por terem dúvidas com a potenciação e a Função exponencial, algo que já prevíamos. Porém, todos continuavam pensando e tentando chegar a alguma conclusão. Dessa forma, percebemos que a maioria dos licenciandos estava ali como alunos na busca pelo conhecimento algébrico em estudo.

Em todos esses momentos foi respeitado o tempo dos licenciandos. Momentos de silêncio tomaram conta da aula diversas vezes. Enquanto professor, ficávamos sempre atentos a possíveis questionamentos e sempre íamos até eles discutir. Dependendo do questionamento, essa discussão acontecia de forma coletiva, com toda a turma.

Estávamos um pouco desestimulados com o rendimento da turma até o momento. Passamos a nos questionar se conseguiríamos avançar com nossa pesquisa, mas estávamos conscientes das dificuldades dos licenciandos e que, mesmo de forma lenta, essa seria uma oportunidade de desenvolver essas habilidades com eles.

Aos poucos, foram surgindo as primeiras ideias que se aproximavam da representação algébrica para o problema. Nesse momento, a compreensão do uso didático da Torre de Hanói não era mais o foco, mas, sim, interpretar toda a Matemática que estava ali presente. Com isso, percebemos a importância do material manipulável como recurso didático para motivar a exploração e direcionar a construção de conceitos e ideias matemáticas.

A essa altura, os licenciandos começaram a perceber que se tratava de uma potência de base dois, mas ainda não conseguiam generalizar. Demos um certo tempo para que explorassem um pouco mais essas problematizações. Entre momentos de silêncio e inquietações, alguns licenciandos sinalizaram que o que estavam procurando relacionava-se com 2^x . Passamos a discutir coletivamente essa ideia e verificá-la de acordo com os valores da tabela.

Alguns licenciandos não lembravam das propriedades de potenciação. Ao substituirmos inicialmente o x por zero, tivemos um breve silêncio seguido de algumas respostas tímidas de que o resultado seria um. Nesse momento, passamos a revisar algumas ideias básicas de potenciação que foram sendo apresentadas pelos próprios alunos. À medida que íamos substituindo os valores de x (quantidade de discos) de acordo com a tabela, os alunos perceberam que estavam sempre precisando diminuir um para encontrar o valor referente à quantidade mínima de movimentos. Concluíram que a expressão algébrica correta seria $y = 2^x - 1$.

Esse momento foi de muita alegria por parte dos licenciandos, ao mesmo tempo em que passaram a refletir sobre suas dificuldades e a importância de uma prática pedagógica que atue ativamente na construção do conhecimento. Os licenciandos expressaram preocupações sobre o tempo necessário para implementar essa prática na sala de aula da Educação Básica, destacando que nem sempre há disponibilidade suficiente. No entanto, consideramos prematuro abordar essa questão nesse momento, já que a literatura especializada oferece reflexões sobre o tema (que serão discutidas em aulas futuras). Nosso objetivo era permitir que eles chegassem a suas próprias conclusões à medida que avançassem com a EPRP.

Lançamos mão de algumas reflexões aos licenciandos: é mais interessante iniciar uma aula já apresentando a definição de um conteúdo ou levar os alunos a construírem o conhecimento? Enquanto alunos, como vocês têm observado isso durante as aulas? Vocês já tinham experienciado algo desse tipo? Como vocês avaliam essa proposta pedagógica? Essas reflexões geraram um bom debate entre todos os envolvidos, ficando nítida a aceitação dos licenciandos quanto a essa proposta pedagógica, destacando o novo papel que o professor e o aluno passam a ocupar na sala de aula.

Vencida essa etapa, surgia um novo desafio dentro da exploração do problema para os licenciandos: como introduzir o conteúdo de Função exponencial por meio das ideias já construídas com base na Torre de Hanói? Para isso, voltamos nossa atenção para a expressão $y = 2^x - 1$ e solicitamos a proposição de um problema envolvendo essa expressão algébrica. Para refletirem, demos um certo tempo. Dessa vez não tivemos êxito algum. Os licenciandos não conseguiram propor nenhum problema.

Comentário Temático: Sabemos da inexperiência dos licenciandos com a PP, porém acreditamos que o insucesso neste momento tenha se dado por termos usado uma função exponencial como ponto de partida para a PP. Os alunos têm mais facilidades de propor problemas quando conseguem visualizar alguma relação da Matemática com o seu cotidiano, o que não aconteceu de forma imediata nessa problematização. As ideias relacionadas ao crescimento exponencial de situações do cotidiano nem sempre são exploradas na sala de aula relacionando com o conteúdo.

Começamos a questioná-los sobre como levar seus futuros alunos a concluir que essa expressão algébrica é característica de uma função exponencial. Mas, para isso, precisávamos compreender se os licenciandos também dominavam esse conhecimento e, assim, problematizamos: por que essa função é exponencial? Como resposta tivemos mais um breve momento de silêncio.

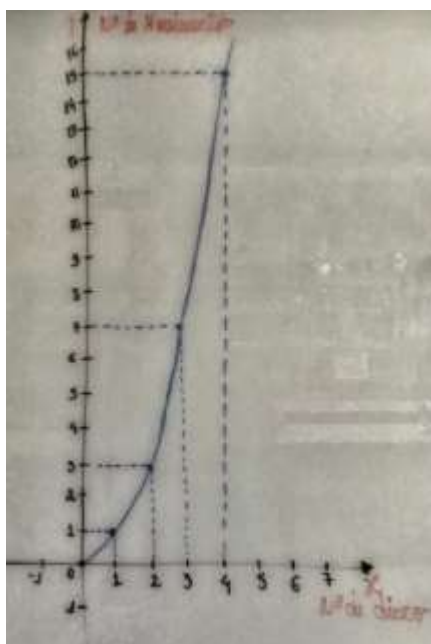
Dando continuidade, colocamos na lousa as seguintes expressões de funções: $f(x) = x + 1$; $g(x) = x^2 + 2x - 3$; $h(x) = x^3$. E problematizamos: por que a função $f(x)$ é chamada de função afim ou do primeiro grau? Por que a função $g(x)$ é chamada de função quadrática ou função do 2º grau? Por que a função $h(x)$ é chamada de função do 3º grau? O objetivo dessa problematização foi levá-los a perceber que em todos os exemplos a variável x estava na base, sendo todas funções polinomiais e sua classificação se dava de acordo com o expoente de maior valor, enquanto em $y = 2^x - 1$ a variável x está no expoente, o que caracteriza esse tipo de função como exponencial. Porém, a sua definição vai além dessa característica.

Essa exploração vai em sentido contrário ao que os licenciandos estavam acostumados a vivenciar. Na maioria dos livros didáticos, apresenta-se a função e já a caracteriza como exponencial pelo fato de agora o x estar no expoente. Esse tipo de abordagem continua centrada no professor, mantendo o aluno passivo na sala de aula. À medida que levamos os alunos a construir essa ideia, eles protagonizam a sua aprendizagem de uma forma mais consistente.

Precisávamos explorar a definição da função exponencial, indo além das características já evidenciadas. Lançamos aos licenciandos o desafio de explorarmos o problema de modo que chegássemos à definição da função exponencial. Esse seria um novo momento de PP com incentivo a introduzir o uso didático da CGD.

Passamos a construir o gráfico da função $f(x) = 2^x - 1$ na lousa juntamente com os licenciandos. Fizemos uso dos dados da Tabela 03 para a construção do gráfico, limitando a curva para os valores de $x \geq 0$. A forma como a curva foi esboçada manualmente (Figura 11) gerou nos licenciandos uma certa dificuldade em compreender o comportamento total do gráfico da função exponencial. Toda a discussão em torno da construção do gráfico deu-se levando em consideração o contexto da Torre de Hanói.

Figura 10 – Gráfico construído na lousa em sala de aula



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Optamos por não fazer o prolongamento total da curva na lousa para levá-los a refletir como se daria tal feito. A forma como o gráfico foi construído, na Figura 11, levou os licenciandos a relacionar o gráfico da função exponencial com o gráfico da função quadrática, tendo em vista que o gráfico projetado dentro do domínio informado se assemelha com a alça crescente de uma parábola.

Trabalhar a construção do gráfico da função exponencial inicialmente apenas no domínio informado, de acordo com os dados da Tabela 03, pode levar os alunos a pseudogeneralizações. Assim, propusemos outras problematizações para explorar o problema levando-os a desmitificar algumas dessas ideias: *como se dará o comportamento do gráfico antes de passar pela origem do plano cartesiano? O gráfico esboçado corresponde ao problema da Torre de Hanói?*

As equipes ficaram inquietas com as problematizações feitas, principalmente com a relação do gráfico construído e o problema da Torre de Hanói. O questionamento provocou neles inquietação referente aos pontos plotados, se estavam no local certo e/ou se tinham feito as contas corretamente. Mesmo já tendo feito essas discussões e atestado que estava correto, o fato de questionarmos novamente deixou-os inseguros. O objetivo agora estava voltado ao domínio do gráfico da função e sua relação com o problema da Torre de Hanói.

Por atingirmos o tempo máximo da aula, deixamos as inquietações para que pudéssemos dar continuidade na próxima aula, contando com o auxílio da CGD. Para isso, instruímos a fazerem o download da CGD e finalizamos a aula.

5.3 Explorando a Calculadora Gráfica Desmos

3º Encontro - 2 aulas
Data: 08/09/2022

O início da aula foi marcado pela retomada das ideias discutidas até o final da aula anterior. À medida que retomávamos a discussão, íamos colocando na lousa as informações já consolidadas. Alguns licenciandos esboçaram manualmente em seus cadernos o gráfico da função $f(x) = 2^x - 1$ para tentar compreender melhor seu comportamento. As principais dificuldades se deram em torno da escala. Por se tratar de números que representam valores grandes, e, ao mesmo tempo, números que representam valores pequenos, as informações ficavam um pouco distorcidas, com um emaranhado de números muito próximos, o que dificultava a distinção. A construção do gráfico se deu além do contexto e dos valores da Tabela 03.

Com isso, as equipes perceberam que o comportamento do gráfico em nada se assemelha com uma parábola e passaram a identificar algumas informações ainda tímidas, tais como: *o gráfico vem do infinito e vai para o infinito; o gráfico toca a origem do plano cartesiano.*

A partir dessas constatações, passamos a problematizar se o gráfico esboçado correspondia ao contexto do problema da Torre de Hanói, representado algebricamente por $f(x) = 2^x - 1$. Tal questionamento levou-os a conflitarem suas ideias, ficando inquietos por não conseguirem visualizar nenhum erro na construção do gráfico. Ao interpretarem o gráfico por meio do contexto, eles sempre focavam nos pontos oriundos da tabela construída, não se atentando aos infinitos pontos presentes em toda a curva esboçada.

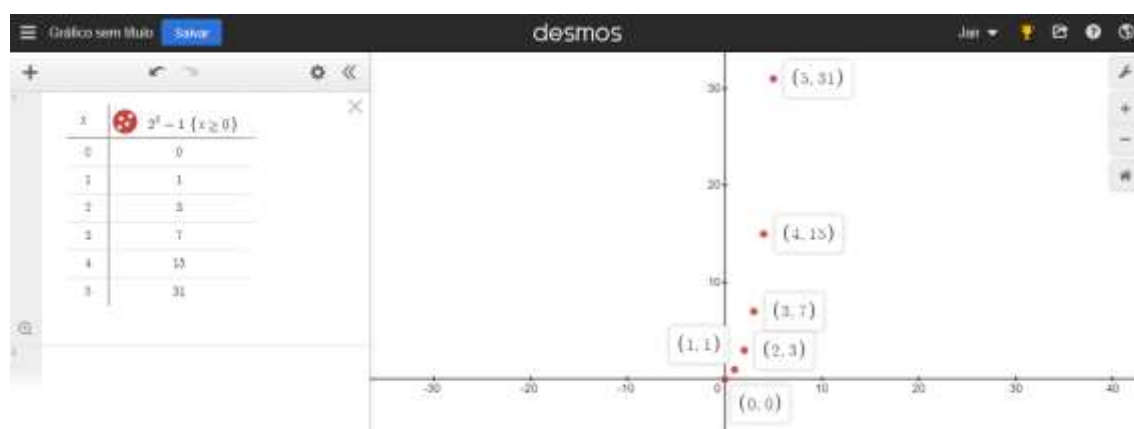
Para direcionar a exploração do problema, fizemos a seguinte problematização: *se pegarmos qualquer ponto do gráfico, ele irá satisfazer ao contexto da Torre de Hanói?* Após um instante de silêncio e reflexão, os licenciandos passaram a apresentar suas observações: *se pegarmos um valor de x negativo, não pode, pois não existe quantidade negativa de discos; se pegamos um número decimal ou em fração também não vai corresponder à quantidade de discos.*

Por meio dessas observações e problematizações, passamos a organizar todas essas informações e direcioná-los para chegarem a conclusões sobre o problema. Todas essas considerações feitas pelos licenciandos estavam corretas, porém precisávamos fazer com que elas os levassem a concluir como seria o comportamento gráfico, de acordo com o contexto da Torre de Hanói. Para a construção desse conhecimento, estão envolvidas as ideias de domínio e imagem da função. Direcionamos o foco da discussão para esse sentido.

As equipes reconheceram que os valores de x representavam o domínio, formado por números naturais. Com isso, discutimos que qualquer valor intermediário entre dois pontos não faria sentido no contexto explorado. Contudo, o que nos intrigava era perceber a dificuldade deles em abandonar a ideia de que o gráfico de uma função deveria ser sempre uma curva ou reta contínua. Apesar de identificarem que a solução se limitava a pontos isolados, ainda resistiam em aceitar essa interpretação.

Fizemos uso didático da CGD para melhor explorar o gráfico da função. Na oportunidade, ensinávamos os licenciandos a representarem o gráfico limitando o domínio no CGD. Feito isso, o gráfico da função ficou representado de acordo com a Figura 11.

Figura 11 – Representação numérica e gráfica da função $f(x) = 2^x - 1$ no contexto do problema da Torre de Hanói



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Os licenciandos expressaram que jamais tinham parado para pensar que o gráfico seria apenas os pontos. Essa discussão trouxe à tona a forma como os livros didáticos apresentam os gráficos das funções, em sua maioria, como retas e/ou curvas contínuas e sem estarem associadas a contextos, trazendo apenas a representação algébrica e gráfica de forma internalista, com fim em si mesma.

Para ilustrar essa situação, apresentamos um problema extraído do livro didático Dante e Viana (2022), voltado para o 6º Ano do Ensino Fundamental, no qual a representação gráfica

apresenta um equívoco. O problema trabalha com variáveis discretas x , mas as representa utilizando gráficos de linha, como demonstrado na Figura 13.

Figura 12 – Equívoco na representação gráfica em livro didático

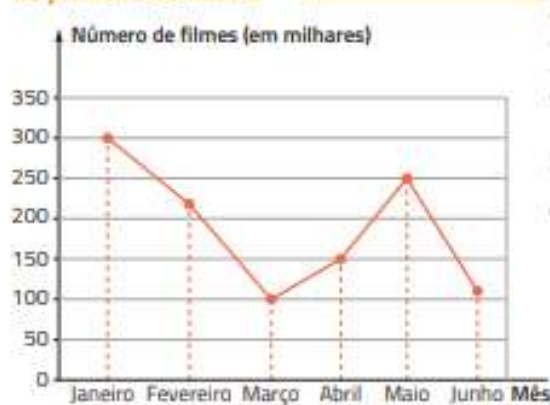
- 16** ▶ Uma empresa de *streaming* de filmes *on-line* registrou o número aproximado de visualizações em cada mês do primeiro semestre de um ano. Os dados foram organizados em uma tabela e em um gráfico de segmentos ou gráfico de linha.

Visualizações de filmes no primeiro semestre

Mês	Número de filmes
Janeiro	300 000
Fevereiro	220 000
Março	100 000
Abril	150 000
Maio	250 000
Junho	110 000

Tabela elaborada para fins didáticos.

Visualizações de filmes no primeiro semestre



- a) Em qual mês houve maior número de filmes vistos? **Janeiro.**

Fonte: Dante e Viana (2022, p. 307) livro do 6º Ano.

Ao discutirmos a importância de identificarmos o domínio e a imagem da função dentro do contexto explorado, desencadearam-se as ideias de variáveis contínuas e discretas. Ao trazermos essa problematização, tivemos novamente como forma de interação o silêncio. Para

muitos, esses termos estavam se apresentando pela primeira vez. Resistimos a informar inicialmente do que se tratava, induzindo-os a chegarem a conclusões à medida que íamos apresentando alguns exemplos. Chegamos a informar que, no caso da Torre de Hanói, estávamos trabalhando com variáveis discretas, para estimular o raciocínio, sem apresentar a definição.

Alguns licenciandos pesquisaram na internet o que significava cada um dos termos e tentaram relacionar com o que estávamos explorando. Ainda apresentando certa dificuldade na compreensão dos conceitos, pedimos para que apresentassem exemplos para cada um dos tipos de variáveis. Por meio dos exemplos, ficou mais fácil a compreensão por parte de todos do que se tratavam as variáveis contínuas e as variáveis discretas, a sua relação com o domínio, a imagem e o gráfico da função.

Comentário Temático: Essa foi uma discussão viabilizada pela EPRP a partir do gráfico da função $f(x) = 2^x - 1$. Trabalhamos conceitos que até então eram desconhecidos por parte dos licenciandos. Discutimos a importância dos recursos digitais, a exemplo da CGD, na interpretação e exploração das ideias matemáticas e como tudo isso tem sido diferente da forma de ensino a que eles foram submetidos na educação básica e até esse momento em sua formação inicial. Essas são impressões iniciais, que têm mudado a rotina da nossa sala de aula, que podem provocar novas percepções de ensino e de aprendizagem. Diante desse contexto, destacamos como a EPRP é capaz de possibilitar momentos em que as dúvidas dos alunos afloram e são sanadas nos diferentes momentos do intenso trabalho realizado em torno do problema, sendo elas diretamente ou indiretamente relacionadas com o conteúdo explorado no problema.

Após essas conclusões e reflexões, direcionamos a atividade para a definição da função exponencial, tendo em vista que a função $f(x) = 2^x - 1$ apresenta termos além dos presentes na forma canônica $f(x) = a^x$. Com essa observação, acreditamos ser mais interessante problematizar em direção à construção da definição para, em seguida, explorar os diferentes comportamentos da função e de seu gráfico.

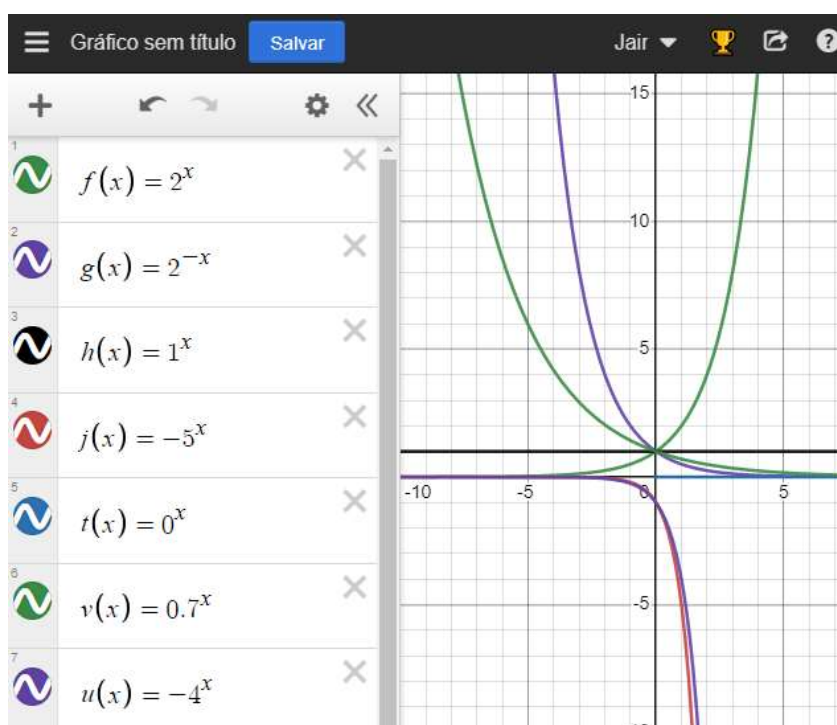
Na aula anterior, já tínhamos concluído que a principal característica da Função Exponencial está relacionada ao fato de a incógnita x estar no expoente e não mais na base, como nas funções polinomiais. A partir da retomada dessa ideia, passamos a discutir como estaria definida no livro didático a função exponencial e como trabalhar essa definição sem verbalizá-la no primeiro momento.

Comentário Temático: Observamos que a dificuldade dos licenciandos em definir ou apresentar características da função exponencial estava associada a uma tímida compressão do conceito de função. Dessa forma, não podíamos esperar que eles apresentassem ideias sólidas sobre a função exponencial. A EPRP nos permitiu identificar essas limitações, pois, à medida que a atividade ia avançando, eles ficavam mais à vontade para se expressar sem medo de errar ou de contrariar as ideias do professor.

Continuamos a exploração fazendo uso didático da CGD através do projetor multimídia, a vista de todos. Para introduzir a problematização acerca da definição da função exponencial, informamos a sua forma canônica $f(x) = a^x$, sem discutir que $0 < a \neq 1$, objetivando que esse conhecimento fosse construído a partir da EP.

Pedimos aos licenciandos que apresentassem diferentes exemplos de funções exponenciais na forma $f(x) = a^x$. À medida que informavam verbalmente, íamos representando algebricamente na CGD e, conseqüentemente, tínhamos a sua representação gráfica. Após uma quantidade significativa de funções informadas, selecionamos algumas, observando características incomuns e importantes, conforme a Figura 13.

Figura 13 – Representação gráfica de diferentes funções exponenciais apresentados pelos licenciandos



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Ficamos diante de um ambiente rico em informações para que pudéssemos explorar várias ideias matemáticas que direcionariam a definição da função exponencial. Os licenciandos perceberam comportamentos diferentes dos esperados, entre eles: a presença de uma reta; alguns gráficos que mudaram a direção e o sentido.

Pedimos que focassem nos gráficos das funções $f(x)$, $g(x)$ e $v(x)$ (Figura 13). Após discussões coletivas e reflexões, concluíram que o gráfico dessas funções sempre tocava no ponto $(0,1)$ o que gerou da nossa parte uma nova problematização: *por que isso sempre acontece? O que isso quer dizer algebricamente?*

A partir de alguns debates e reflexões, trouxeram à tona a propriedade de potenciação em que todo número elevado a zero tem como resultado o número um, para justificar sua conclusão. Sendo essa um dos primeiros padrões observados no comportamento do gráfico da função exponencial.

Em seguida, observando o comportamento desses mesmos gráficos $f(x)$, $g(x)$ e $v(x)$, os alunos perceberam que uma parte dos seus gráficos ficavam “coladinhos” com o eixo x . Nesse momento, fizemos uso da ferramenta zoom da CGD para mostrar que, por mais que se aumentasse a visualização, a curva do gráfico nunca tocaria o eixo x . Essa foi uma observação importante, pois nos deu margem para discutir a importância de gráficos dessa natureza no estudo do Cálculo Diferencial e Integral, especificamente no estudo dos Limites. Discutimos alguns exemplos de limites, fazendo uso dos gráficos esboçados, e destacamos a importância de sempre trabalhar a representação gráfica juntamente com a algébrica e como a CGD possibilita, de forma precisa, essa exploração.

Comentário Temático: Não buscamos aprofundar essa temática, pois a atividade de EP tinha outro objetivo. No entanto, por estarmos com licenciandos, consideramos importante evidenciar, de forma breve, essa problematização. Percebemos que, para muitos, o cálculo de limites se dá apenas de forma algébrica e chegamos a calcular alguns limites apenas observando o gráfico nesse momento da atividade. Mesmo que essas ideias não sejam ainda discutidas por meio dos livros didáticos na educação básica, é de extrema importância que o professor tenha domínio dessa informação e discuta com os alunos, por meio da linguagem matemática, a ideia de limite presente no gráfico da função exponencial. Dessa forma, desconstrói um pouco a ideia de que tais conteúdos só podem ser discutidos no nível superior de ensino. Com isso, a EPRP, por se tratar de um espaço aberto e intencional a partir da mediação do professor, torna possível fazer links entre o conteúdo que está sendo explorado e suas diversas formas de aprofundamento e de se relacionar com outros conteúdos matemáticos. Ainda nesse momento, já podemos perceber as contribuições da CGD na EPRP ao possibilitar o desenvolvimento de conjecturas algébricas a partir da visualização gráfica.

Os licenciandos destacaram não ter inicialmente essa noção acerca da relação do gráfico da função exponencial com a ideia de limite, mesmo já tendo cursado disciplinas de Matemática básica e Cálculo Diferencial e Integral. No entanto, acreditam ser interessante fazer essa abordagem inicial na Educação Básica com as ideias de limites presentes no comportamento do gráfico da função exponencial, sem necessariamente cobrar o cálculo de limites. Junto a essas ideias, foram discutidas as questões de mais infinito e menos infinito.

Em continuidade à EP, a partir de características mais específicas nos gráficos informados na CGD (Figura 13), voltamos nossa atenção para a forma algébrica da função $h(x) = 1^x$ e, conseqüentemente, sua representação gráfica. O intuito, nesse momento, era conduzi-los a explorar concomitantemente as representações algébricas e gráficas de $h(x)$,

chegando a conjecturas matemáticas. O que lhes chamou atenção inicialmente nesta função foi o fato de o gráfico se comportar como uma reta.

Só a representação algébrica da função $h(x)$ não foi suficiente para chamar atenção dos licenciandos durante a EPRP, uma vez que, ao visualizar graficamente, se incomodaram com a representação gráfica em forma de uma reta. Nesse ponto, podemos identificar que a representação gráfica os inquietou mais que a representação algébrica. Com isso, destacamos a importância da exploração algébrica concomitantemente à representação gráfica viabilizada por meio de recursos gráficos como a CGD.

Verbalmente, os licenciandos passaram a informar os cálculos que estavam fazendo mentalmente, levando-os a perceber que 1 (um) elevado a qualquer potência sempre terá como resultado 1 (um). Essa foi uma exploração motivada da representação gráfica para a algébrica. O trânsito entre essas duas representações foi fundamental para que eles avançassem na EP. Desta feita, de forma coletiva, chegaram à conclusão de que o gráfico de $h(x) = 1^x$ se comportava como uma reta paralela ao eixo x , por se tratar de uma função constante. Consequentemente, concluíram que, para a função ser exponencial, o valor da base a não poderá ser igual a 1 (um).

Comentário Temático: Nesse momento da EPRP, percebemos a exigência de um trânsito fluido entre as múltiplas representações algébricas que são possibilitadas pelo uso didático da CGD. Essa experiência ajuda os alunos a desmistificarem algumas ideias matemáticas que ficam limitadas ao fazermos uso de apenas uma dessas representações. Na maioria das realidades de sala de aula e dos livros didáticos, tem-se uma tendência ao uso mais frequente da representação algébrica. O uso didático da CGD permite um trânsito entre as múltiplas representações algébricas durante uma EPRP que não teria tanta eficiência ao fazemos uso apenas do lápis e papel. Desta feita, isso contribui para a construção de um conhecimento mais sólido, em que a exploração de uma representação potencializa a compreensão de outra representação e o trânsito entre elas permite o avanço em várias direções.

Dando continuidade à EP, problematizamos a função $t(x) = 0^x$. Desmarcamos as demais funções esboçadas na CGD, de modo que na janela gráfica ficasse apenas informações referentes ao gráfico de $t(x)$. Perceberam, inicialmente, que o gráfico estava totalmente diferente dos analisados anteriormente, sendo este uma reta que correspondia à parte positiva do eixo x e o ponto $(0, 1)$ no eixo y .

Quando estavam apresentando os exemplos de funções exponenciais para que pudessemos esboçar na CGD, alguns licenciandos não queriam colocar o exemplo com a base 0, surgindo comentários de que não existia essa função. Mesmo assim, fizemos questão de mantê-lo para que os alunos pudessem ter argumentos para justificar.

Diante dessa problematização, os licenciandos apresentaram os seguintes argumentos: *zero elevado a qualquer número vai ser sempre zero*. Nesse momento, problematizamos o porquê de aparecer os pontos $(0, 0)$ e $(0, 1)$ e de a reta estar apenas na parte positiva do eixo x . Com relação aos pontos, após um certo momento de discussões críticas, concluíram que o ponto $(0, 0)$ não faz parte do gráfico, por isso aparece em destaque o ponto $(0, 1)$, que é quando temos o zero elevado a zero, tendo como resultado 1 (um). Aproveitamos a oportunidade para relembrar a representação dos intervalos, em que teríamos uma bolinha fechada no ponto $(0, 1)$ e uma bolinha aberta no ponto $(0, 0)$.

Os licenciandos passaram a discutir algebricamente o que acontecia com a função quando o expoente fosse negativo, recaindo nas propriedades de potenciação, concluindo o porquê de o gráfico de $t(x) = 0^x$ não estar definido para os valores negativos de x .

Demos continuidade à EPRP discutindo a questão dos valores negativos, desta vez, observando a base e não mais o expoente, como no caso anterior. Essa discussão com o expoente será retomada mais adiante para observar outra característica no comportamento do gráfico da função exponencial. Para isso, focamos nas funções $j(x) = -5^x$ e $u(x) = -4^x$ (Figura 11). De imediato, os licenciandos perceberam que o sentido da curva tinha mudado. Essa era a informação mais óbvia ao comparar com o gráfico das demais funções, que tinham na base um valor positivo.

Problematizamos a situação pedindo-lhes que analisassem algebricamente os valores em cada uma das funções e os pontos encontrados. Depois de um tempo, começaram a perceber que os pontos não condiziam com os do gráfico esboçado na CGD. Em seguida, problematizamos: *o que tem de errado na representação algébrica e/ou gráfica?*

Passamos a discutir algebricamente alguns exemplos na lousa. Percebemos que, quando a base é negativa e o expoente é par, o resultado é sempre positivo, enquanto, quando a base é negativa e o expoente é ímpar, o resultado é sempre negativo. Alguns licenciandos também relacionaram essa constatação ao fato de não existir raiz quadrada de número real negativo. Porém, mesmo com essa informação, eles não conseguiam identificar se realmente existia algum erro nos gráficos de $j(x)$ e $u(x)$ esboçados na CGD. Para orientar a problematização, indagamos: *Quem é a base? Quem está sendo elevado ao expoente x ?* O objetivo era levar os licenciandos a compreender que o sinal de negativo não fazia parte da base da função representada na CGD.

Voltamos a atenção para a CGD ao informamos as funções $b(x) = (-5)^x$ e $c(x) = (-4)^x$, com destaque para a presença dos parênteses. Os licenciandos perceberam que não

houve muita alteração na janela gráfica além da presença do ponto $(0, 1)$, não aparecendo nenhuma curva. Nesse momento, passaram a refletir sobre o papel dos parênteses na representação algébrica das funções. Após um breve momento de discussão coletiva, relembramos as propriedades de potenciação e como a ausência de parênteses pode induzir ao erro, pois altera a forma como a CGD faz a interpretação os dados informados. Ao final desse momento da EP, os alunos concluíram que o sinal de negativo não faz parte da base da potência quando há ausência de parênteses.

A construção dessas ideias por meio da exploração numérica, algébrica, verbal e gráfica consolidou a importância da compreensão da linguagem matemática, evidenciando algumas lacunas existentes no itinerário formativo dos licenciandos. Nesse momento da EP, chegávamos a mais uma conclusão importante referente à função exponencial, pois passamos a evidenciar que a base não poderia ser negativa, atrelando essa informação às já consolidadas anteriormente. Fizemos uma breve revisão, com o intuito de fortalecer essas ideias e demos continuidade à EP, com a seguinte problematização: *como compreender as funções $j(x)$ e $u(x)$ que não apresentam os parênteses na base?*

Os licenciandos concluíram que a ausência de parênteses corresponde à multiplicação da base por -1 , ou seja, $j(x) = -5^x$ equivale a $j(x) = -1 \cdot 5^x$. Juntamente a essa conjectura, observaram que a multiplicação da base por um valor negativo muda o sentido do gráfico da função exponencial, espelhando-o para baixo.

Retomamos as ideias já consolidadas: *o valor da base a não pode ser zero; o valor da base a não pode ser um; o gráfico toca o eixo y no ponto $(0, 1)$; o valor da base a não pode ser negativo*. Refletindo criticamente acerca dessas informações, temos dados importantes que nos aproximam da definição presente nos livros didáticos, em que ao apresentar a forma canônica da Função Exponencial como $f(x) = a^x$, complementa com a informação, usando a linguagem matemática, de que $0 < a \neq 1$.

Mesmo já tendo construído conhecimentos suficientes que pudessem generalizar que $0 < a \neq 1$, os licenciandos apresentaram dificuldades para organizar as ideias e usar a notação matemática.

Chegando a esse momento da atividade de EP, os licenciandos puderam perceber a riqueza de informações que foram sendo construídas até esse ponto, estimulando-os a ir mais além. Perceberam que trabalhar o conteúdo dessa forma ajuda a fixá-lo melhor, passando a fazer parte da aula de forma ativa. Esse foi um momento da EPRP em que paramos para refletir como ela está sendo interpretada pelos licenciandos, tendo essa discussão sido motivada por eles.

Comentário Temático: Refletimos neste momento o quanto a EPRP possibilitou a construção de ideias matemáticas que costumeiramente chegam prontas e são aceitas pelos alunos como verdades, não os levando a questionar ou compreender a origem dessas informações. Com isso, vemos que a EPRP, aliada ao uso didático da CGD, contempla uma proposta metodológica que rompe os padrões da maioria das salas de aula de Matemática, em que o professor inicia a explicação do conteúdo apresentando as definições, expressões matemáticas e exercícios para a fixação do conteúdo. A EPRP coloca o aluno no centro da atividade e o professor como mediador da prática pedagógica, fazendo com que o conteúdo matemático seja trabalhado à medida que a EPRP vai avançando, com um caráter mais significativo para o aluno.

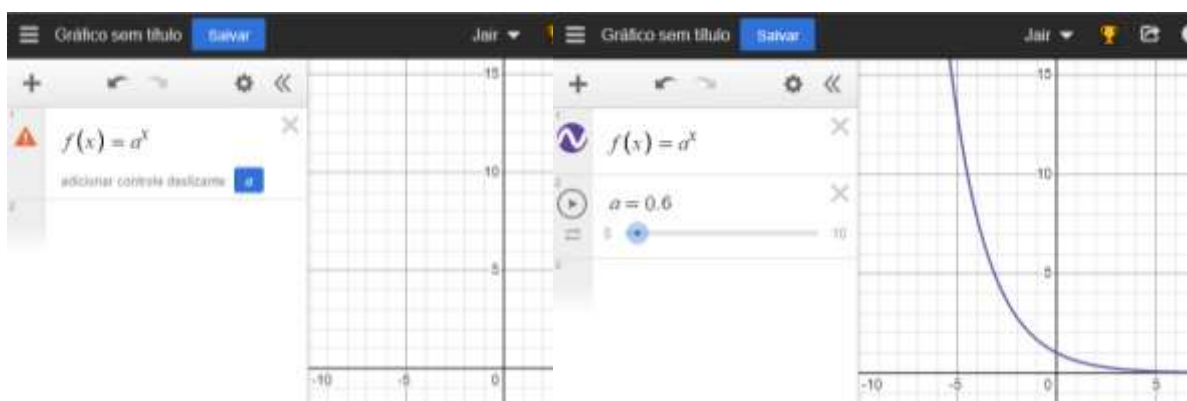
Como já estávamos nos aproximando do tempo final da aula, optamos por fazer uma pausa na EP e apontar alguns direcionamentos para a continuidade da atividade na próxima aula. Na oportunidade, pedimos que continuassem a atividade em casa e trouxessem novos questionamentos e problematizações que se relacionassem com a ideia inicial da Torre de Hanói. Eles destacaram o quanto aprenderam em uma única aula sobre a função exponencial, enfatizando a importância do uso da representação gráfica juntamente com a algébrica possibilitada pela CGD.

5.4 Explorando a função exponencial através da CGD

4º Encontro - 2 aulas
Data: 09/09/2022

Retomamos as funções exploradas na aula anterior (Figura 13) para que pudessem observar a existência ou não de mais algum padrão. Desta feita, além de terem observado que alguns gráficos eram espelhados em torno do eixo x , perceberam também gráficos crescentes e decrescentes. Nesse momento, apagamos todos os gráficos da CGD e informamos apenas a sua forma canônica $f(x) = a^x$, ativando o controle deslizante para a (Figura 14).

Figura 14 – Explorando o controle deslizante na CGD



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Ao ativar o controle deslizante, automaticamente é atribuído o valor $a = 1$, sendo representado na janela gráfica uma reta. Essa informação corrobora o que já foi discutido anteriormente, em que o valor da base $a \neq 1$. Em seguida, começamos a alterar o valor do coeficiente a , por meio da barra deslizante. Os licenciandos acompanharam o comportamento do gráfico de forma crítica e coletiva. O intervalo na barra de controle deslizante estava inicialmente em $-10 \geq a \geq 10$. Eles perceberam que para valores de $a < 0$ a curva do gráfico desaparecia, conforme já discutido anteriormente.

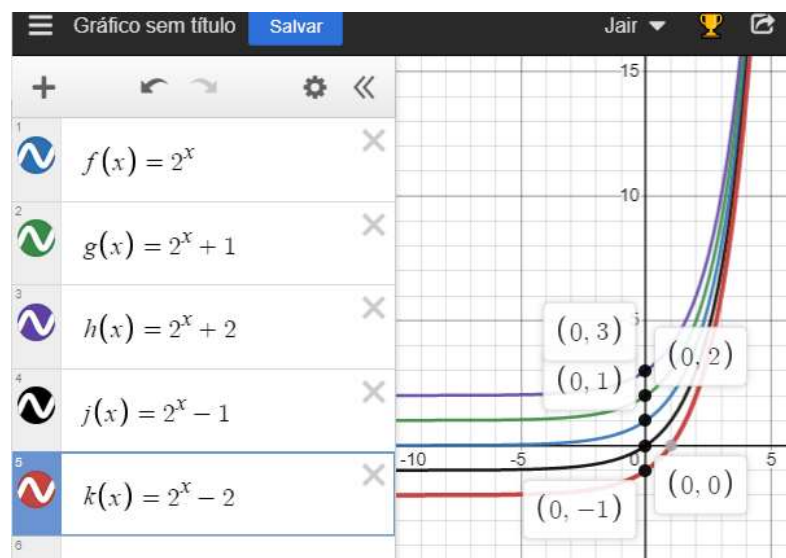
O objetivo desse momento era fazer com que eles percebessem o que estava causando o crescimento e o decrescimento do gráfico. Para isso, limitamos o intervalo da barra deslizante referente aos valores da base a . Como já tínhamos formalizado que os valores da base não poderiam ser negativos, informamos no controle deslizante o intervalo $0 \leq a \leq 10$. Após discussão coletiva, concluíram que o gráfico da função exponencial tem comportamento decrescente no intervalo $0 < a < 1$, enquanto tem comportamento crescente no intervalo $a > 1$.

Para fortalecer a conclusão dessa ideia matemática, resgatamos os gráficos das funções $h(x) = 2^{-x}$ e $v(x) = 0.7^x$ (Figura 11) que se comportam de forma decrescente. O objetivo nesse momento da EP consistiu em levá-los a perceber que na função $h(x)$ a base inicialmente não está no intervalo $0 < a < 1$, porém, ao resolver algebricamente a função, fazendo o uso das propriedades de potenciação, inverte-se o valor da base, ficando $\frac{1}{2}$.

Antes de concluirmos essa EP, um dos licenciandos nos chamou atenção pelo fato de termos concluído que o gráfico da função exponencial sempre toca o ponto $(0, 1)$, sendo que, ao observar e retomar o gráfico da função $f(x) = 2^x - 1$, percebeu que o mesmo toca os eixos em sua origem no ponto $(0, 0)$. Percebemos que além de ter levado os licenciandos a construir o conhecimento matemático de forma ativa durante os diferentes momentos da EPRP, entendemos que colaboramos para o desenvolvimento da habilidade investigativa, da capacidade crítica e reflexiva e da autoconfiança para apresentar seus questionamentos.

A EPRP não acaba quando acreditamos que acabou. Ela sempre suscita outras inquietações. E foi exatamente o que aconteceu neste momento da aula. Para atender à problematização feita, retomamos a EPRP e, de posse da CGD, fomos explorar o problema de forma que chegassem à resposta para o questionamento feito. Para isso, informamos na CGD as seguintes funções, conforme Figura 15.

Figura 15 – Explorando a translação do gráfico da função exponencial na CGD



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Destacamos que a informação de que o gráfico sempre toca o ponto $(0, 1)$ está relacionada à função exponencial na forma $f(x) = a^x$. Desta feita, o que temos no exemplo da função da Torre de Hanói é a adição de um termo à potência. Com isso, passamos a observar graficamente o comportamento dos gráficos (Figura 15).

Ao identificar cada um dos pontos em que o gráfico tocava o eixo y (Figura 15), perceberam que à medida que se adicionava valores negativos ou positivos à função exponencial, o gráfico é transladado para cima ou para baixo, de acordo com o valor correspondente que foi adicionado. Essas conclusões não foram construídas imediatamente. Inicialmente, tivemos um breve silêncio e, em seguida, eles foram direcionando coletivamente a discussão até chegarem a essas conclusões.

Além dessas ideias matemáticas, alguns licenciandos perceberam que existia algum padrão entre a função e o ponto que tocava o eixo y. Tentaram concluir algo por meio de tentativa e erro, sem muito êxito. Em seguida, problematizamos para que tentassem resolver algebricamente e ver se conseguiam propor alguma conjectura. Após um intervalo de tempo, argumentaram que quando o gráfico toca o eixo y a coordenada x é sempre zero, com isso, tem-se que o resultado da potência será sempre um, e para saber onde a coordenada y do ponto toca o eixo y, será sempre o valor adicionado à função mais um. Por exemplo, na função $g(x) = 2^x + 1$, temos $g(0) = 2^0 + 1 = 1 + 1 = 2$, que corresponde ao ponto $(0, 2)$. Essa observação se estendeu às demais funções.

A partir da visualização proporcionada pela CGD, os licenciandos perceberam que os gráficos sempre vinham do infinito, tendendo a um valor que nunca era alcançado. Mediante essa observação, retomamos novamente a ideia de limite, já discutida na aula anterior, e acrescentamos a ideia de assíntota. Em todos os casos de função exponencial, o gráfico da função sempre tende a se aproximar de um valor, gerando a visualização de uma reta que chamamos de assíntota.

Os licenciandos lembraram ter estudado isso em Cálculo Diferencial e Integral I no conteúdo de Limites. Aproveitamos a oportunidade para problematizar a situação de modo que conseguissem perceber a relação existente entre o valor que a função tende em direção à assíntota e o valor que é adicionado à função exponencial.

Não demorou muito para que compreendessem que o valor adicionado à função $f(x) = a^x$ corresponde ao valor que a função tende ao infinito pela esquerda. Esse momento foi além do que tínhamos planejado inicialmente. Como resultado, tivemos o envolvimento dos licenciandos na EPRP e um avanço significativo na construção das ideias matemáticas através da CGD.

Comentário Temático: Percebemos que nos diferentes momentos da EPRP algumas formas de representar as ideias matemáticas se destacam por serem capazes de possibilitar melhores condições para a construção do conhecimento que se objetiva. Podemos evidenciar esse fato ao retomarmos o momento em que os licenciandos se viram na necessidade de fazer uso da manipulação algébrica para confirmarem a ideia de que o termo adicionado a $f(x) = a^x$ corresponde à translação do gráfico e que a coordenada y do ponto em que o gráfico intercepta o eixo y é o termo adicionado à função mais um $(x, x + 1)$. A representação algébrica foi fundamental para que confirmassem o que estava sendo sinalizado pela visualização gráfica.

Optamos por não interromper os diferentes momentos da EPRP por percebermos um bom envolvimento dos licenciandos. Porém, devido ao tempo, não podíamos mais avançar na exploração desse problema.

Esse foi um momento em que passamos a refletir juntos a diferença entre apresentar um conceito ou ideia matemática como algo pronto e acabado, conforme o livro didático, e levá-lo a construir esse conhecimento por meio de uma atividade de EPRP, mediação do professor e o uso de recursos didáticos como a CGD.

Comentário Temático: A PP, nesta atividade de EPRP, surgiu verbalmente, por meio de problematizações que os licenciandos iam compartilhando com toda a turma, em diferentes momentos da exploração e da RP. A exploração e resolução coletiva dos problemas possibilitou diversos momentos de reflexão frente ao intenso trabalho que estava sendo desenvolvido sobre o problema, tendo como síntese e resultado a proposição de novos problemas, que foram direcionando e impulsionando a EPRP. A PP também foi surgindo nos diferentes momentos da atividade, à medida que o trabalho desenvolvido pelos

licenciandos em todo problema ia gerando reflexões e sínteses que resultavam em novas curiosidades/problemas, fortalecendo o caminhar da EPRP. Em se tratando da CGD, é notória a forma como possibilitou aos licenciandos uma exploração mais profunda do problema e a formulação de conjecturas importantes, que foram resultando do trânsito entre a manipulação algébrica e gráfica, suscitando diferentes momentos de PP.

A partir dessas reflexões e com base no planejamento das atividades de pesquisas, iniciamos uma nova discussão, direcionando para o próximo momento da 1ª Travessia. Destacamos que a próxima atividade iniciaria com a PP.

Discutimos que, assim como a Torre de Hanói, muitos podem ser os pontos de partida da EPRP. Seja ele uma imagem, uma história, um gráfico, uma equação, uma tabela, um jogo, entre outros. A partir das opções apresentadas, passamos a discutir qual seria o melhor para este momento da atividade de PP. Entre as diferentes opiniões, chegaram ao consenso que tomaríamos dados de uma tabela.

Orientamos que a PP iniciaria com a construção da tabela e a informação dos seus dados pelos próprios licenciandos, sendo que alguns deles sugeriram que essa tabela fosse construída de forma coletiva, inicialmente, e, em seguida, cada um daria continuidade com a PP. Em comum acordo, começaram a sugerir propostas de tabelas, grandezas e valores. Essas informações foram sendo sintetizadas na lousa, chegando ao resultado apresentado na Tabela 04.

Tabela 04 – Tabela contribuída coletivamente pelos licenciandos como ponto de partida para a PP

2018	2019	2020	2021
11670	11715	11500	11612

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Mesmo com a construção da Tabela 04, alguns licenciandos passaram a questionar a abertura para alteração dos dados da tabela na PP, pois estavam pensando em contextos em que os dados numéricos não apresentavam um certo padrão e/ou não condiziam com a realidade. Diante desse argumento, e tendo como foco a PP a partir da construção dos dados de uma tabela, os deixamos à vontade quanto à alteração dos dados.

Os licenciandos apresentaram muita dificuldade em iniciar a PP. Após construirmos a tabela, tínhamos trinta minutos até o final da aula. Eles fizeram uso de todo esse tempo para realizarem a atividade. Para muitos, essa era a primeira experiência em propor um problema. A medida em que iam propondo o problema, alguns questionavam não imaginar que seria tão

difícil. Solicitamos que os problemas fossem propostos em uma folha separada, para que pudéssemos recolher como dados para esta pesquisa.

Ao final da aula, recolhemos todos os problemas propostos. Realizamos uma análise prévia desses problemas para nos familiarizarmos com as principais ideias contempladas, de forma a colaborar com o planejamento da atividade de EPRP da próxima aula.

Os problemas propostos serão expostos no tópico relativo à aula seguinte, junto à descrição e discussão, tendo em vista que tentamos explorar de forma coletiva as principais ideias e informações presentes em cada um dos problemas propostos à luz da Coerência Didática (Abramovich; Cho, 2008; 2015).

5.5 A Coerência Didática na Proposição de Problemas

5º Encontro - 2 aulas

Data: 15/09/2022

6º Encontro - 2 aulas

Data: 16/09/2022

De posse dos problemas propostos na última aula, durante a semana, passamos a analisá-los e percebemos lacunas relativas a conceitos matemáticos explorados nos contextos dos problemas, que eram plurais. Conforme íamos lendo, percebíamos que um encontro não seria suficiente para que pudéssemos explorar as principais ideias e as dificuldades apresentadas.

Ao iniciarmos a aula, fomos tomados pelos comentários dos licenciandos, ressaltando novamente a dificuldade em propor problemas. Ao devolvermos os problemas propostos, iniciaram o processo de EP identificando alguns erros e comentando-os coletivamente. Para melhor organização, pedimos que cada um lesse individualmente o seu problema para, em seguida, os explorarmos. Os objetivos desta atividade de EPRP consistiram em: *identificar as principais dificuldades e/ou habilidades dos licenciandos ao proporem problemas; analisar as implicações da Coerência Didática (CD) na EPRP.*

Para essas aulas, planejamos uma exploração geral das principais ideias presentes em cada problema e, em seguida, escolher um deles para aprofundar na perspectiva da EPRP sob a ótica da CD. Esse momento das atividades da 1ª Travessia não exigia necessariamente o uso didático da CGD.

Para uma melhor compreensão, as informações referentes ao problema proposto por cada um estão concentradas e organizadas sequencialmente, mesmo que algumas dessas observações tenham surgido em diferentes momentos das aulas.

Ao tratar da CD do problema, as discussões foram realizadas à luz de Abramovich e Cho (2008; 2015). Fizemos apontamentos iniciais sobre o que seria a Coerência Numérica, a Coerência Contextual e a Coerência Pedagógica de um problema e a necessidade de atingir as três para que o problema seja didaticamente coerente. A discussão dessa temática por meio de texto científico acontecerá posteriormente, em outra aula, pois planejamos colocá-los diante da atividade prática para, em seguida, discutir a teoria.

A seguir, apresentaremos os problemas propostos a partir do ponto de partida, Tabela 04, e as principais discussões e reflexões críticas feita pelos licenciandos e pelo professor-pesquisador (Pp).

L10 – Sabemos que no Brasil há um considerável aumento no índice de crianças diagnosticadas com autismo nos últimos anos. De acordo com os dados coletados pelo Ministério da Saúde, em 2018, 2019, 2020 e 2022 foram diagnosticados, respectivamente, 8090, 9340, 10590, 11840 e 13090 crianças com autismo. De acordo com os dados apresentados, podemos estimar quantas crianças seriam diagnosticadas no ano de 2030? Se sim, quantas seriam e qual o padrão de aumento de diagnósticos a cada ano?

Exploração de L10: Analisando o problema proposto em relação à CD, observamos que, no que tange à coerência numérica, o problema atende às características de coesão entre os números citados, pois seguem um padrão de aumento de 1250 diagnósticos a cada ano, de acordo com o contexto. Já sobre a coerência contextual, percebe-se que traz um assunto de cunho social da realidade brasileira atual. Por fim, percebe-se que há coerência pedagógica, pois o problema proposto deverá ser aplicado em turmas do 7º ano do ensino fundamental para o estudo de operações básicas com números inteiros e a detecção de padrões através da RP, fazendo com que os alunos analisem os dados e percebam o padrão que existe a cada ano para, a partir daí, fazer operações de somas consecutivas e encontrar o que se pede na pergunta do problema. Com isso, espera-se que observem e percebam o padrão de aumento de 1250 por ano e façam a adição de 1250 a partir dos dados do ano de 2022, obtendo os seguintes dados: em 2023, 14340 diagnósticos; em 2024, 15590 diagnósticos; em 2025, 16840 diagnósticos; em 2026, 18090 diagnósticos; em 2027, 19340 diagnósticos; em 2028, 20590 diagnósticos; em 2029, 21840 diagnósticos; enfim, em 2030, 23090 diagnósticos; Logo, resolvendo desta forma, encontrarão o resultado correto e alcançarão os objetivos de percepção de padrão e a execução da soma de forma consecutiva. O problema proposto seria aplicado no início da aula para instigar a exploração dos alunos.

Pp: O problema proposto apresenta em seu contexto uma temática relevante para os dias atuais, ao discutir o índice de crianças diagnosticadas com Autismo no Brasil. Os dados inicialmente da tabela foram alterados e discutidos ao longo da descrição do problema. Chamamos atenção inicialmente ao fato de citar que os dados foram coletados pelo Ministério da Saúde, o que não é verídico. Percebemos que os valores informados para cada ano estão distribuídos em uma progressão aritmética, o que dificilmente isso irá acontecer na realidade. Analisando o contexto matemático, o problema envolve o conteúdo de sequências, mais especificamente, de Progressão Aritmética (PA),

necessitando de uma relação mais próxima dos termos do contexto com a linguagem matemática, por exemplo, padrão de aumento e razão da PA. A licencianda não consegue perceber inicialmente a incoerência contextual presente no problema ao relacionar com os dados numéricos. Ao tratar do contexto pedagógico, ela discute apresentar uma proposta para os anos finais do ensino fundamental, o que consideramos coerente, ao mesmo tempo em que o problema pode ser explorado em níveis superiores, como no ensino médio.

L9 –

Tabela

2018	2019	2020	2021
11670	11715	11500	11612

Referente aos dados da tabela acima, responda:

Qual o percentual (%) de crescimento populacional da cidade de Lagoa Seca no período anual abaixo?

a) 2018 a 2019?

b) 2019 a 2020?

c) 2020 a 2021?

Exploração de L9: O problema deverá ser aplicado no 8º ano do ensino fundamental. Percebemos que os questionamentos das alternativas estão muito diretos e sugerimos acrescentar ao texto do problema a utilização da regra de três para informar aos alunos o método que queremos que usem para resolver o problema. Na solução apresentada para as alternativas *a, b e c*, fazemos uso de aproximações.

Pp: Os dados informados inicialmente foram mantidos e o problema proposto apresenta, de uma forma bem direta, um contexto sobre crescimento populacional, abordando o conteúdo de porcentagem. Os questionamentos apresentados nas alternativas seguem o mesmo raciocínio, em que discutimos coletivamente a oportunidade de trazer outros problemas e explorar mais o contexto, mesmo que o foco fosse apenas a porcentagem. A partir dessas observações, a licencianda passou a discutir/refletir um pouco mais o problema, observando a sua coerência pedagógica. Após a proposta de reformulação do problema, percebemos que o contexto ainda se encontra isolado, não dialogando de forma coerente com os demais elementos do problema, não levando o aluno a refletir sobre o crescimento populacional da cidade mencionada. Por se tratar de uma cidade do conhecimento dos licenciandos, uma vez que o problema seja explorado levando em consideração a realidade dessa cidade, os dados numéricos não condizem com a realidade. Dessa forma, percebemos uma tendência em utilizar contextos nos problemas que não levam os alunos a refletir através dos dados numéricos.

L1 – Em uma pesquisa realizada, foi detectado que, em uma cidade, foram encontrados os respectivos dados de pessoas infectadas com o vírus da dengue: 2018 – 3000 pessoas, 2019 – 4200 pessoas, 2020 – 5400 pessoas, 2021 – 6600 pessoas. Com base nessas informações, é possível determinar quantas pessoas serão infectadas com o vírus da dengue no ano de 2022?

Pp: No problema proposto, podemos perceber que houve uma alteração nos dados iniciais da tabela que vieram informados na redação do problema. O contexto apresentado discute um tema importante, que é a Dengue. Ao iniciarmos a exploração do problema, podemos perceber algumas incoerências ao confrontar o contexto com os dados numéricos. Mais uma vez, percebemos a alteração dos dados numéricos da tabela para formar uma sequência que permita abordar o conteúdo de Progressão Aritmética. Alguns licenciandos chamaram atenção para o fato de que no ano de 2020, com a pandemia, os números de casos de dengue diminuiriam. Ao mesmo tempo em que observamos que se a contaminação continuar dessa forma, em alguns anos, todas as pessoas serão contaminadas no mesmo ano, porém não é possível saber quando, pois o problema não informa a quantidade total de habitantes da cidade. O problema proposto pretende determinar quantas pessoas serão infectadas pelo vírus da Dengue no ano de 2022. A partir da exploração do problema coletivamente, percebemos que, mesmo reconhecendo padrão entre os dados numéricos e calculando esse valor para o ano de 2022, esses dados não condizem com a realidade, pois é pouco provável a existência dessa regularidade nos casos de dengue. Estamos diante de um problema que apresenta uma incoerência contextual. O licenciando não chegou a discutir a coerência pedagógica do seu problema, tendo em vista a percepção do problema não ter coerência didática diante dos argumentos que afloraram com a exploração do problema.

L6 – A produtora de um evento geek registrou a quantidade de pessoas que compareceram ao evento ao passar dos anos, sendo eles, 11670 em 2018, 12500 em 2019, 7500 em 2020 e 11700 em 2021, a fim de um controle e possível crescimento.

Sabendo-se que no ano de 2020 passamos por uma pandemia, analise a tabela e monte um gráfico, após isso, analise o gráfico e diga se é possível determinar a linha de crescimento com apenas esses dados fornecidos.

Exploração dos licenciandos: O problema proposto expõe em seu contexto questões culturais como o evento geek. *A priori*, este era um termo desconhecido por alguns licenciandos. Aproveitamos a oportunidade para solicitar que o propositador do problema explicasse o que seria um evento geek. Observamos que os dados iniciais informados na tabela foram alterados e, dentro do contexto apresentado, o propositador se atentou a informar um dado relativamente baixo no ano de 2020, levando em consideração a pandemia. Mesmo assim, no ano de 2021, esse número volta a subir, o que nos intrigou, por não sabermos em qual período do ano e localização esse evento aconteceu, tendo em vista que os eventos com muitas pessoas ainda estavam proibidos devido à pandemia.

Pp: No contexto numérico, observamos um direcionamento para a construção de uma tabela, organização de dados e, em seguida, a construção de um gráfico e linha de crescimento. Não fica evidente no problema qual o tipo de gráfico que o aluno deve construir. Sentimos a falta de mais elementos matemáticos no contexto do problema para que direcione o aluno para uma melhor exploração. Não é possível ver uma relação coerente entre os dados numéricos e o contexto cultural do problema, com dados para se trabalhar o tratamento das informações. Porém, fica a impressão de que se desejava abordar algo relacionado ao conteúdo de estatística, por meio de tabelas e gráficos. Mediante essas

observações, o licenciando reflete sobre a reformulação do problema, objetivando a coerência didática.

Exploração de L6: Após essas observações, reformularemos o problema, realizando uma correção numérica e alteração no contexto para um melhor entendimento. Mudamos de evento geek para um evento destinado a jogos. Reformularemos a problematização final na tentativa de não gerar dúvidas para os alunos na hora da exploração do problema. Com isso, o problema seria aplicável ao 6º e 7º ano do ensino fundamental após a explicação do conteúdo.

L13 – De acordo com os dados apresentados na tabela a seguir, sobre o número de habitantes de uma determinada cidade X, faça um comparativo entre a taxa de nascidos-vivos e a taxa de mortalidade desta localidade, ano após ano, iniciando no ano de 2018 e indo até 2021. Em seguida, construa o gráfico.

Tabela - população da cidade X

2018	2019	2020	2021
11670	11715	11500	11612

Após discussão em sala de aula, para complementar a questão acima, será adicionada a seguinte informação:

Sabendo que a cada ano morre pelo menos um cidadão desta cidade.

Pp: Após a leitura do problema, gerou-se uma discussão em torno do contexto envolvendo taxa de nascidos-vivos e a taxa de mortalidade. Alguns licenciandos ficaram intrigados com o termo, questionando se era possível “nascer morto”. Os dados iniciais não foram alterados. Ao propor um comparativo entre as taxas, não são informados os seus respectivos valores. Após comparar as taxas de nascidos-vivos e de mortalidade, o problema pede para construir um gráfico, finalizando o problema com a informação de que a cada ano morre pelo menos um cidadão desta cidade. Diante desse cenário, a incoerência contextual e numérica no problema é fortemente identificada por todos. A informação ao final fica solta, sem nenhuma aplicação matemática, e em um contexto que não se aplica à realidade, pois é improvável que durante um ano só morra um cidadão desta cidade. A exploração do problema nos levou a percebermos juntamente com o propositos um desafio inicial em organizar as informações e sintetizá-las de forma escrita, resultando na reformulação do problema.

L4 – Um grupo de biólogos resolveu estudar uma criação de peixes de uma determinada cidade da Paraíba, no ano de 2018, e, através de estudos, eles registraram 11670 peixes, percebendo que durante o estudo, depois de um ano, a população de peixes aumentou, com 45 peixes a mais, no ano seguinte diminuiu 215, e, entre os anos de 2020 e 2021, aumentou 112, demonstre em uma tabela a quantidade de peixes durante os anos estudados.

Exploração dos licenciandos: Ao relatar um estudo feito por biólogos referente a uma criação de peixes, os licenciandos discutiram ser interessante informar se a análise estaria sendo feita em uma determinada espécie de peixes ou diferentes espécies, levando em consideração o quantitativo informado de 11670 peixes. Esse questionamento surge ao observar o número de aumento no primeiro ano referente a 45 peixes, pois se existir diferentes espécies, não dá para saber se houve reprodução em todas elas. Novamente, o contexto da

pandemia é levado em consideração durante a EP, em que não se viam no momento da discussão justificativas que levassem à redução na população de peixes.

Pp: Podemos perceber inicialmente que o propositor do problema se apropriou dos dados da tabela para trazer problematizações que levassem o aluno a construir a tabela de acordo com os dados informados inicialmente. Numericamente, os dados estão coerentes, estimulando o uso das operações básicas de adição e subtração para a organização dos dados em uma tabela. Ao observar o quantitativo de peixes que cresce e decresce a cada ano, sentimos a necessidade de abordar no contexto algo que o justificasse, seja um fenômeno natural ou algo provocado pelo ser humano. Dessa forma, identificamos algumas lacunas no contexto do problema. Chama nossa atenção a organização numérica dos dados no problema a partir da tabela. Pedagogicamente, esse é um problema que pode ser trabalhado desde os anos iniciais do ensino fundamental.

L3 – Uma dada empresa de calçados teve as seguintes quantidades de vendas:

2018	2019	2020	2021	2022
1100	1180	1340	1420	1580

Descreva a lógica de crescimento dessa empresa, formule o gráfico para esse crescimento e mostre quanto será a venda no ano de 2023.

Pp: O problema altera os valores iniciais da tabela por números que atendem a um padrão pensado pelo propositor do problema. Ao analisarmos o cenário, a empresa de calçados é utilizada apenas para justificar a presença de um contexto que leve o estudante a solucionar o problema. Questionamos se o padrão presente nos dados do problema é algo comum de acontecer no setor de vendas, levando em consideração os fatores que influenciam o mercado anualmente. Analisamos a necessidade de um melhor uso dos termos “lógica” e “padrão” na redação do problema. Ao solicitar aos alunos que se construa um gráfico de crescimento, há a antecipação da informação do comportamento do gráfico. A linguagem verbal e matemática não foi um ponto forte no problema. A coerência pedagógica não chegou a ser discutida pelo propositor do problema. Percebemos um contexto raso e questionamentos vagos na redação, o que fez gerar esses questionamentos para que o propositor e os demais licenciandos pudessem refletir sobre esse processo inicial de PP e sua CD. O licenciando argumenta não imaginar que seria tão difícil propor um problema.

L7 – Pela tabela dada em sala, responda: sabendo que Saulo obtém uma determinada renda anual líquida diferente a cada ano. Identifique na tabela a variação ocorrida ano após ano. Feito isso, construa um gráfico com os dados da tabela e, por fim, descubra qual a média salarial que Saulo obteve entre os anos de 2018 e 2021.

Pp: É importante que todas as informações necessárias para que o aluno resolva o problema estejam presentes em sua redação, tendo observado no problema proposto a ausência da tabela com os dados. O contexto do problema aborda a renda anual líquida, sem nenhuma discussão além

dessa informação. Ao fazermos esse questionamento, a propositora do problema afirma que, ao iniciar a exploração, fica fácil identificar a ausência de dados e informações mais específicas sobre o que está sendo explorado no problema. A partir disso, ela reconhece a importância da inserção da tabela no problema, nomeando suas colunas com o ano e o salário líquido.

Exploração de L7: Começamos a argumentar sobre uma possível reformulação do problema com o intuito de atingir a CD. Sugerimos reescrever a problematização em três questionamentos separados: a) Analise a variação do salário ocorrida entre os anos de 2018 e 2021, em seguida, justifique o que você observa; b) com os dados da tabela, construa um gráfico com os dados em ordem crescente e justifique o que você observou; c) Qual a média salarial entre os anos de 2018 e 2022? Através da exploração, apresentamos a resolução dos três problemas. Com relação à coerência pedagógica, destacamos a análise de dados em tabela, construção de gráfico e estatística como os conteúdos explorados no problema. A partir disso, direcionamos a aplicação do problema em turmas do 7º ano do ensino fundamental, após a apresentação do conteúdo, como exercício de fixação da aprendizagem.

Pp: Podemos observar uma melhor organização do problema a partir da sua reformulação oriunda da EP. Com isso, concordamos com a propositora, ao afirmar que o seu problema não apresenta incoerência numérica. Porém, retomando o contexto, o salário líquido anual informado na tabela não faz referência à ocupação trabalhista de Saulo, nos fazendo refletir que ele recebe menos de um salário-mínimo mensalmente. Essa observação gerou outras discussões dentro da EP, entre elas, as possíveis profissões que Saulo poderia estar ocupando levando em consideração o salário informado no problema, o contexto atual do Brasil e as profissões menos valorizadas.

Explorados dos licenciandos: Consideraram importante colocar na redação dos problemas informações referentes ao salário e à profissão de Saulo, tornando mais harmoniosa a relação entre o contexto e os valores numéricos, além de ser uma oportunidade para levar os alunos a refletirem sobre essa temática salarial.

Pp: Mediante todos os direcionamentos e explorações feitas a partir do problema inicial, percebemos que ele não atingiu a coerência didática, mas é possível identificar potencialidades para isso, uma vez que os questionamentos feitos sejam levados em consideração na reformulação do problema.

L5 – Uma empresa de calçados fabrica anualmente determinada quantidade de calçados. O dono da empresa, para ter um controle de produção e não perder os pares de sapatos, realizou a seguinte tabela:

2018	2019	2020	2021
11670	11715	11500	11612

Qual a média de produção dessa empresa?

Pp: O problema incorpora e mantém os dados da tabela em um contexto de produção anual de calçados por uma empresa. Assim como em outros problemas, percebemos uma preocupação dos propositores em

identificar os dados numéricos e, em seguida, a solução do problema, dando menos importância ao contexto do problema e como esses elementos do problema conversam entre si. Explorando o contexto, não sabemos qual o fluxo de produção de calçados da fábrica, nem o tipo de calçado. A ausência dessas informações em meio a questionamentos objetivos não estimula os alunos a refletirem sobre o contexto. Numericamente, o problema apresenta coerência em meio a um contexto superficial. A partir dessas observações iniciais, o propositos argumenta algumas mudanças propostas no seu problema na busca de atingir a CD.

Exploração de L5: Primeiramente, apresentaremos um novo contexto, informando novos dados e modificando o conteúdo matemático no problema. Justificamos a tentativa de tentar atingir a CD e seus sub conceitos a partir das discussões feitas com o problema anterior.

L5 - Para ajudar em casa, André resolveu vender alguns doces no seu colégio. Primeiramente, ele montou uma tabela com os doces que iria vender e os preços de cada um. Veja a seguir:

Doces	<i>Brigadeiro</i>	<i>Trufas</i>	<i>Beijinhos</i>
Preços	R\$ 1,50	R\$ 2,50	R\$ 2,00

No primeiro mês de vendas, em abril, André produziu: 25 brigadeiros, 15 trufas e 15 beijinhos. No mês seguinte, ele produziu: 50 brigadeiros, 30 trufas e 20 beijinhos. Por fim, no último mês, a produção foi de: 55 brigadeiros, 35 trufas e 25 beijinhos.

Qual a média ponderada de cada mês?

Exploração de L5: Relembramos que no problema anterior existia coerência numérica. Porém, preferimos mudar para termos uma melhor relação entre a coerência numérica e a contextual. Sabemos que muitos alunos procuram uma renda extra para ajudar em casa, diferentemente de trabalhar com a produção de calçados. Com isso, percebemos uma preocupação não só com a proposição do problema matemático, mas também com o contexto e como a Matemática pode ajudar a pensar sobre essa temática. Optamos por trazer um problema que esteja mais próximo do nosso contexto e dos demais alunos, desencadeando novas discussões acerca do trabalho autônomo, do desemprego, do valor dos doces em face da inflação dos preços nos supermercados, entre outros. Com relação à coerência pedagógica do problema, sugerimos a sua exploração com alunos do 8º ano do ensino fundamental, junto à exploração do conteúdo de média ponderada, logo após a sua abordagem inicial.

Pp: Fizemos uma observação ao perceber que no primeiro problema o licenciando estimula apenas o cálculo da média de produção da empresa, enquanto no segundo problema ele traz a média ponderada de cada mês. Refletimos qual seria o objetivo da obtenção da média ponderada e o que esse resultado dialogaria com o contexto do problema. Chamamos atenção à ausência de informações referente ao que o aluno estaria calculando ao encontrar a média ponderada. Essa informação pode estar nítida para o propositos, mas para o aluno é interessante um direcionamento com a inserção dessa informação na redação final do problema. De modo geral, pudemos perceber em L5 uma boa compreensão da ideia de CD de um problema. À medida que as discussões dos problemas de toda a turma iam avançando, ele já foi pensando em como reformular o seu problema, apresentando boas

justificativas, principalmente no quesito contextual. Nesse momento, acreditamos que a EPRP coletiva está levando os licenciandos a refletirem melhor sobre a PP.

L8 – Em dados feitos por uma pesquisa do IBGE sobre o percentual do índice de fome no Nordeste. Em anos eleitorais, o índice de fome tende a ter uma baixa no percentual. É possível determinar o percentual de fome no ano de 2022, levando em consideração os dados dos anos anteriores?

2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
29%	46%	40%	34%	27%	45%	39%	33%	?

Pp: Ao fazermos a leitura do problema, o contexto apresentado chamou atenção de todos. Percebemos a criação de uma nova tabela com os dados que melhor se aproximassem do contexto do problema. Questionamos se esses dados realmente eram do IBGE e o propositor afirmou que não. Novamente conseguimos identificar esse tipo de atitude na proposição dos problemas, pois, ao referenciar uma determinada instituição, os dados precisam ser verídicos. Não podemos alterar os valores numéricos apenas para atender à coerência numérica do problema. Destacamos a importância de estarmos atento a isso na PP para não estarmos produzindo informações falsas (“fake News”) ou provocando discussões equivocadas na EPRP. Ao discutirmos o contexto, percebemos o quanto é rico em discussões sociais. Ao trazer dados da fome no Nordeste, percebemos que a fome no Brasil está sempre associada ao povo nordestino, e questionamos: *será que só existe fome no Nordeste? Não será essa uma construção cultural? E nas demais regiões do país, como está a fome diante das consequências do governo atual?* Outra discussão interessante ao confrontar o contexto do problema com os dados numéricos foi a informação de que em anos eleitorais esse percentual tende a ter uma baixa. Isso gerou muitos posicionamentos referentes à forma como os governos tratam a temática da fome e maquiavam os dados, principalmente em anos eleitorais, como proposta eleitoreira para reeleição, trazendo à tona discussões atuais como a fila para compra de ossos e pelancas, o Auxílio Brasil, a má distribuição de renda no Brasil, a inflação, entre outros assuntos. Notadamente, este foi um problema em que a Matemática despertou nos licenciandos fortes reflexões, levando-os não só a pensar matematicamente como também socialmente, de forma crítica e reflexiva, fazendo uso da Matemática para entender melhor o contexto. Numericamente, o problema precisa ter uma coerência no que tange à veracidade dos dados apresentados e vinculados ao IBGE. Percebemos que o problema não apresenta dados suficientes para a solução, pois não é possível determinar com precisão qual será o percentual de fome no Nordeste no ano de 2022. Seria mais viável o propositor questionar uma previsão de qual seria a taxa levando em consideração os dados anteriores da tabela, chamando atenção por 2022 ser ano eleitoral. Não chegamos a discutir a coerência pedagógica, tendo em vista as fortes motivações discutidas no contexto do problema e já termos elementos que justificassem a ausência de CD. Destacamos a importância do contexto apresentado no problema e a importância de fazermos uso da Matemática para dialogar com as questões sociais por meio da EPRP em sala de aula.

L2 –

2018	2019	2020	2021
11670	11715	11500	?

Devemos observar que no ano de 2020 houve uma grande mudança na taxa de crescimento populacional devido à COVID-19. De acordo com os dados mostrados na tabela, seria possível saber qual seria os dados populacional de 2021, com base nos dados anteriores?

Pp: Ao final da proposição deste problema, a propositora percebeu algumas incoerências, motivando-se a apresentar um novo problema. Ao analisar esse problema inicial, percebemos que o contexto tenta discutir uma relação entre a taxa de crescimento populacional e a pandemia da Covid-19. Traz dados números que não correspondem à realidade, tendo mantido os dados informados inicialmente na tabela. O problema espera que o aluno chegue à solução com base nos dados anteriores, nos levando a considerar esse problema sem solução diante das informações apresentadas em sua redação. Este problema não foi discutido coletivamente.

L2 – Um agricultor plantou, no ano de 2018, 80 pés de pimentões e lucrou R\$ 150 reais, no ano seguinte, 2019, plantou 100 pés de pimentões e teve um lucro de R\$ 200 reais, em 2020 plantou 130 pés de pimentões e teve um lucro de R\$ 286 reais. Porém, no ano de 2021 ele teve uma perda de plantação devido a uma praga em sua lavoura, onde havia plantado 170 pés de pimentões, mas perdeu 50% de sua plantação. Qual foi o lucro no ano de 2021? E com base nos anos anteriores, qual será seu lucro em 2022?

Pp: o problema apresenta uma quantidade significativa de dados, para isso, sentimos a necessidade de manter o ponto de partida em apresentar uma tabela. Com isso, construímos juntos uma tabela na lousa para compreender melhor o problema e assim explorá-lo. A tabela construída contendo os dados deste problema foi a seguinte:

Tabela 05 - Tabela do problema dos pimentões

	2018	2019	2020	2021	2022
Pés de pimentões	80	100	130	170-50%	?
Lucro em R\$	150,00	200,00	286,00	?	?
Valor do pimentão	1,875	2,00	2,20		

Fonte: Elaborado por L2.

A 3ª linha da tabela referente ao valor da unidade de pimentão foi motivada no momento da sua construção, em que os licenciandos perceberam a necessidade de determinar esse valor. O quantitativo de informações numéricas e contextuais neste problema compreendeu um tempo maior em sua exploração. Desta feita, optamos por fazer uso desse problema de uma forma mais intensa, tendo em vista que nos problemas anteriores a nossa atenção foi mais objetiva em discutir a CD. Ao continuarmos a exploração do problema proposto, a atenção se voltou para os dados que estavam informados na tabela construída. Passamos a observar os valores numéricos para identificarmos se existia ou não coerência. Inicialmente, os licenciandos não conseguiram perceber nenhum padrão que os levasse a concluir qual seria o lucro no ano de 2021. Foi essa dificuldade inicial que os motivou a calcular o valor do pimentão, criando a terceira linha da tabela. Porém, ainda não

foram capazes de reconhecer padrões relacionados ao ano de 2021, consequentemente, não teríamos condições de responder nada referente ao ano de 2022. Observamos que a ideia de lucro presente na tabela apresenta-se de forma equivocada inicialmente, ao não ser levado em consideração os gastos gerados com toda a plantação e venda, sendo esse valor mais bem caracterizado como receita.

Esses e outros questionamentos foram apontados até o final dessa aula, porém, devido ao tempo, não foi possível continuarmos, ficando como encaminhamento para a próxima aula. Nesse momento, destacamos termos alcançado os objetivos desses dois últimos encontros ao identificarmos as principais dificuldades dos licenciandos com a PP sob a ótica da CD.

Como acordado inicialmente, de todos os problemas propostos, iríamos escolher um deles para aprofundar a exploração, sendo em comum acordo que continuaríamos explorando o problema que traz em seu contexto a plantação de pimentões, proposto por *L2*.

Comentário Temático: Durante esta travessia, em que os licenciandos propuseram os problemas e o exploramos sob a ótica da CD, destacamos algumas observações importantes que nos fazem refletir a importância dessa prática na formação inicial e continuada de professores de Matemática. Ao proporem problemas, os licenciandos não se atentam à veracidade dos dados, principalmente quando mencionam em seu contexto a origem dessa informação, ficando evidente durante a EPRP a necessidade de valores numéricos reais. Muitos contextos aparecem nos problemas sem nenhum pretexto, não dialogando com os dados numéricos. Nesse sentido, destacamos que a presença de um contexto em um problema, por si só, não justifica a sua coerência. É necessário que a coerência numérica potencialize o contexto, permitindo uma leitura e compreensão da situação, justificando a necessidade do contexto do problema. Entre os problemas que foram propostos durante as aulas, percebemos que o contexto reflete muito a realidade dos licenciandos trazendo temáticas que estavam diretamente relacionadas com a sua realidade de vida, dentre elas, destacamos: autismo; crescimento populacional; dengue; cultura geek; jogos eletrônicos; psicultura; agricultura; empresa de calçados; salário; renda extra; fome; eleições. Durante a EPRP, os licenciandos sempre destacavam que não imaginavam o quão difícil é propor problemas. À medida que a atividade ia avançando, eles iam sendo capazes de identificar as incoerências presentes em seus problemas, mediante as observações que iam sendo feitas, levando-os a refletir sobre o seu problema. Destacamos as dificuldades com a linguagem verbal e matemática durante a redação da proposição de um problema. Nenhum dos problemas propostos apresentava CD, salvo o problema proposto por *L5*. Consideramos este problema o que mais se aproxima de uma proposta de CD. Destacamos também que, entre os problemas propostos, o que mais aflorou discussões sociais foi o proposto por *L8*, com a temática da fome. Os conteúdos matemáticos que se fizeram presentes nos problemas propostos foram: sequência; progressões aritméticas; porcentagem; regra de três; construção de gráfico; estatística; operações básicas; média aritmética; média ponderada. Observamos que esses são conteúdos matemáticos que mais têm aplicabilidade no cotidiano, podendo ser essa a justificativa por terem sido abordados na PP. Esses são os principais resultados que afloraram dessa prática, configurando informações que potencializam o desenvolvimento e resultados de nossa pesquisa.

5.6 Explorando o problema da plantação de pimentões

7º Encontro - 2 aulas

Data: 22/09/2022

Nesta aula, daremos continuidade à exploração do problema da plantação de pimentões proposto por L2. O objetivo dessa prática foi proporcionar aos licenciandos uma experiência mais profunda com a EPRP sob a ótica da CD. Iniciamos resgatando as informações da aula anterior, a Tabela 05 e todo o contexto do problema envolvendo a plantação de pimentões. Ao retomarmos a atividade, observamos que os dados numéricos não eram suficientes para que chegássemos à solução do problema. Esse cenário motivou os licenciandos a avançarem com a EPRP por meio de novos questionamentos que suscitavam a reformulação do problema de forma coletiva.

Exploração de L2: Argumentamos que, inicialmente, tivemos a ideia de que os dados numéricos apresentados atendessem a algum padrão de progressão aritmética, dando condições para que os alunos chegassem à solução do problema. Ao percebermos a incoerência dos dados numéricos, nos atentamos em alterá-los de forma que fosse possível encontrar o valor do pimentão a cada ano e, consequentemente, um aumento padrão nos outros anos. Juntamente com os demais licenciandos, esses valores começaram a ser testados, calculados e alterados na tabela.

Comentário Temático: Esse processo exploratório contou com a participação coletiva dos licenciandos e compreendeu boa parte do tempo da aula. Com relação ao tempo, avaliamos bem, pois percebemos que, no processo inicial de EPRP, a liberdade de tempo por parte dos envolvidos é um fator que devemos valorizar como sendo um momento fértil para o desenvolvimento cognitivo, crítico e reflexivo dos alunos em torno do problema.

A EPRP levou os licenciandos a informarem dados que os permitiram concluir um aumento padrão no valor do pimentão a cada ano e responder ao questionamento feito inicialmente pela propositora do problema. Esses dados desencadearam reflexões quanto à importância da relação dos dados numéricos com o contexto do problema.

Exploração dos licenciandos: Discutimos o valor do pimentão na feira; se esse valor supria os gastos com a plantação; se aquela era uma quantidade significativa de produção por ano; se a partir dos valores poderíamos considerar o agricultor como um produtor de pequeno, médio ou grande porte; entre outros questionamentos.

Quando os licenciandos já tinham realizado vários cálculos e alterado várias vezes os dados da tabela, acreditando estarem cada vez mais próximo de finalizar a PP com CD, surge uma nova problematização por parte deles, trazendo novos direcionamentos para o itinerário de EPRP.

Exploração dos licenciandos: Se observamos os dados informados na tabela, estamos considerando, na terceira linha, que esse é o valor unitário do pimentão, ou seja, estamos considerando que cada pé de pimentão só produz um único pimentão.

Até o momento, ninguém tinha ficado atento a esse fato que deixava o problema incoerente contextualmente. Percebemos o quanto eles estavam se envolvendo na atividade de EPRP e desenvolvendo capacidades reflexivas e críticas. Alguns licenciandos que têm contato com a plantação de pimentões começaram a argumentar sobre esse quantitativo e os fatores que influenciavam a sua produção. Após algumas discussões, e levando em consideração os diferentes contextos apresentados, optamos por padronizar e considerar que cada pé de pimentão produzia três pimentões a cada colheita. Esses dados numéricos e contextuais foram incorporados ao problema, proporcionando um novo momento de EPRP.

Comentário Temático: Alguns licenciandos se sentiram desmotivados neste momento da EPRP, por acreditarem que já tinham concluído o problema e que, após essa problematização, eles teriam que realizar toda a resolução e análise do problema novamente. Ao mesmo tempo, passaram a refletir a complexidade da PP e a importância de dominá-la enquanto futuros professores de Matemática, evidenciando a importância de não só resolver os problemas como também de propô-los. Esse fato mostra uma mudança na concepção que eles tinham inicialmente, voltada apenas para a RP. A EPRP coletivamente permitiu identificar limitações no domínio dos conteúdos matemáticos por parte de alguns licenciandos, raciocínio lógico, capacidade de criticidade e reflexão, de forma que o compartilhamento dessas informações ia contribuindo com o desenvolvimento e participação individual de cada um deles.

A coerência numérica e a contextual estavam sempre entrando em conflito a cada dado alterado ou informação que era introduzida no problema.

Diante das diferentes perspectivas de exploração que eles estavam expondo verbalmente e coletivamente, para uma melhor organização e registro de suas ideias, tomamos a decisão de que deveríamos ter um momento de reflexão individual sobre o problema, traduzindo na proposição de um novo problema, considerando as ideias já construídas sobre o problema até o momento.

Para isso, entregamos uma folha em branco para que fizessem o registro do novo problema até o tempo final da aula, quando recolhemos os problemas propostos e informamos que a continuidade da EPRP se daria em aulas seguintes, não necessariamente na próxima aula, pois iríamos iniciar discussões teóricas sobre as temáticas envolvidas na nossa proposta de pesquisa para que compreendessem melhor a teoria a partir da prática que temos vivenciado com a EPRP e a CGD. Em seguida, retomaremos a EPRP objetivando um novo olhar dos licenciandos para ela, bem como para o uso didático de TD.

Comentário Temático: Durante essa aula, percebemos que os licenciandos começaram a se tornar mais autônomos durante a EPRP, se sentindo à vontade para expressar as suas

reflexões e problematizações sobre o problema. Consideramos, nessa atividade, sua familiarização com a EPRP. Destacamos também a importância da liberdade de tempo sempre que iniciamos a EPRP, principalmente quando estão desenvolvendo as suas primeiras experiências com essa abordagem metodológica. Durante a EPRP, eles deixaram transparecer a importância da relação entre a coerência numérica e a coerência contextual. À medida que a exploração chegava a uma incoerência didática, os licenciandos se sentiam desestimulados diante de todo o trabalho que já vinham desenvolvendo em torno do problema, porém, a motivação em continuar era maior. Destacamos a mudança de concepção que eles demonstraram, passando a enxergar a importância da PP e não só da RP. A EP tem nos permitido perceber as limitações com os conteúdos matemáticos, com o raciocínio lógico, a dificuldade de refletir e se expressar criticamente, ao mesmo tempo em que vem contribuindo para a superação desses obstáculos.

5.7 Discussões Teóricas sobre a Proposição de Problemas, as Tecnologias Digitais e a Coerência Didática

8º Encontro - 2 aulas

Data: 23/09/2022

9º Encontro - 2 aulas

Data: 29/09/2022

Para essas aulas, planejamos tecer discussões teóricas acerca da PP, das TD e da CD do Problema. Para isso, fizemos uso do tempo de quatro aulas. As descrições referentes a esses dois encontros estão descritas neste tópico como forma de organização das ideias que emergiram durante essas aulas.

Observamos que os licenciandos já vinham construindo uma ideia acerca da PP, do que seria um problema e das contribuições para a sua formação inicial e o seu exercício futuro da docência. Na tentativa de estimular essa reflexão e extrair suas percepções, antes de iniciarmos as discussões teóricas, fizemos alguns questionamentos objetivando um *feedback* das atividades até aqui desenvolvidas, ao mesmo tempo nos proporcionando uma autoavaliação.

Os questionamentos foram verbalizados junto à turma. Em seguida, os licenciandos começaram a apresentar suas opiniões. Diante das informações que ora surgiam, solicitamos que também expressassem de forma escrita, para que pudéssemos analisar posteriormente como fonte de dados deste trabalho. A seguir, apresentaremos os questionamentos, as respostas e posterior análise crítica. Apenas no Questionamento 1 descreveremos as respostas de cada licenciando. Nos demais, sintetizamos por meio de um “comentário temático” que busca compreender os principais temas contemplados.

Questionamento 1 - O que é um problema?

Pp: Acharmos necessário saber qual a ideia que os licenciandos apresentavam sobre problema. Ao analisar as respostas, separamos-las em grupos que apresentavam ideias próximas.

L12 – Problema é algo ou alguém que incomoda.

L2 - É algo que faz você pensar e intrigar o raciocínio, também é algo difícil.

L8 – Problema é tudo aquilo que nos faz pensar para assim buscar a sua resolução.

L7 – Um problema é algo complexo de se resolver e que precisa de todo um detalhamento de como poderia ser resolvido, de modo que não fique nenhuma dúvida que este foi sanado.

Comentário Temático: Percebemos neste grupo de resposta uma relação da ideia de problema relacionada à resolução do problema na busca de sua solução. Esta é uma ideia limitada de problema e que precisa ser desconstruída. O problema é o ponto de partida da RP em que o processo leva à solução. Durante a experiência com a EPRP que tiveram antes de responder a esse questionamento, perceberam que até chegar à solução do problema, muitos outros problemas iam surgindo, principalmente no que tange à PP, em que toda a travessia até chegar à solução ia sendo levada em consideração. Frequentemente, os alunos enxergam a solução de um problema apenas como um valor numérico, deixando de perceber outras possíveis formas de solução. Nesses casos, relacionam a ideia de problema como algo que os inquietam, como uma situação complexa de ser resolvida e que os fazem pensar e desenvolver o raciocínio. Essas ideias estão relacionadas ao que venha ser um problema na Matemática, principalmente a inquietação provocada inicialmente, pois, caso isso não ocorra, eles não estarão diante de um problema. Chamamos atenção para o foco que é dado à solução do problema na fala dos licenciandos, em especial, a necessidade do detalhamento de como o problema poderia ser resolvido, destacado por **L7**. Essa observação pode ter sido motivada a partir de todo o detalhamento que temos realizado durante a EPRP, levando-nos a duas interpretações. Primeiro, a importância de os alunos descreverem o seu raciocínio durante a RP para que possamos compreender o seu desenvolvimento cognitivo. Segundo, nos faz refletir sobre a importância de discutir que um problema pode ter diversos caminhos que levarão à solução, a depender do contexto, ao mesmo tempo em que um problema pode ter mais de uma solução.

L5 – O problema pode ser visto como uma situação ou inquietação que exige um processo cognitivo para ser solucionado, ou seja, é uma situação espontânea ou criada que busca solução a partir do exercício mental.

L6 – É algo proposto e que necessita de uma solução, muitas vezes seguindo roteiro lógico.

L9 – São questionamentos elaborados para se obter solução de tal.

Comentário Temático: Nesse grupo de respostas, percebemos que os licenciandos não refletem sobre o processo que envolve a RP e sobre ir além da solução.

L13 – É uma questão que aborda determinado conteúdo a ser ensinado em um certo aspecto, seja social, cultural do cotidiano entre outros.

Comentário Temático: Percebemos a ideia de problema com vistas além dos dados numéricos, indo além da Matemática pela Matemática. Mesmo que os licenciandos ainda não tenham noção dessa dimensão, destacamos a importância desse ponto de vista em que o problema é explorado através de contextos sociais, políticos e culturais, refletindo e

solucionando não só o problema matemático como também os aspectos sociopolíticos e culturais envolvidos. Acreditamos que a experiência vivenciada com a EPRP despertou a ideia de problema para além de uma visão internalista da Matemática.

L4 – Problema é algo que ainda não sabemos responder, onde pode-se refletir e identificar formas de como resolver.

L1 – É algo que faz você ficar inquieto, ou melhor, é quando você não consegue encontrar uma solução para aquilo que está causando uma “confusão”.

L3 – Problema pode ser entendido como um objeto de manipulação matemática a qual não se há uma resposta lógica e definitiva inicialmente, podendo tomar vários caminhos experimentais para a resolução do mesmo.

Comentário Temático: Nesse último grupo de resposta, percebemos uma relação mais próxima do que seja um problema matemático. “É algo que não sabemos responder, nos fazendo ficar inquietos por não termos uma resposta lógica e definitiva imediatamente.” Essa é uma oração formada a partir das ideias dos licenciandos sobre o que consideram ser um problema e que demonstra uma aproximação com o que alguns pesquisadores definem ser um problema. Nesses discursos, percebemos apenas menção à RP, ficando a PP à margem da ideia de problema. Ao analisarmos o que foi dissertado por **L3**, podemos perceber uma aproximação com a EP, quando ele diz “... podendo tomar vários caminhos experimentais para a resolução do mesmo”. Dentro desses diversos caminhos, podem surgir a necessidade da PP, mesmo que não tenha sido evidenciado em seus escritos. Não tivemos uma resposta capaz de dar conta da complexidade do que é um problema. Porém, as respostas nos trazem fragmentos e termos que caracterizam o que venha ser um problema. Quando analisadas coletivamente, percebemos que algumas respostas foram construídas a partir da prática que temos realizado com a EPRP.

Questionamento 2 - Diante da Experiência que tivemos com a EPRP, tomando como ponto de partida a Proposição de Problemas, você teve alguma dificuldade? Comente.

Comentário Temático: Conseguimos nessas respostas um retorno das informações já externadas por eles durante as aulas quanto às suas dificuldades com a PP. Unanimemente confirmam essa dificuldade e alguns conseguem trazer evidências que a justificam. Uma delas diz respeito à dificuldade de manter a CD entre os dados do problema. Destaca-se também a importância de o problema proposto levar o proponente a refletir criticamente os dados e envolver questões socioculturais. O tempo também foi apontado como um fator que promove dificuldades nesse momento inicial de experiência com a EPRP. **L1** e **L2** atribuem a dificuldade em propor problemas ao fato de estarem sempre acostumados a resolverem problemas que já vinham prontos, refletindo sobre mudanças na prática pedagógica que não estejam mais presas ao pensamento de apenas reproduzir o que já foi feito. Ao tentarem propor inicialmente um problema, acreditam ser essa uma tarefa fácil e acabam se frustrando no momento que começam a EPRP. Esse fato é fruto da ideia de que estudar Matemática é apenas resolver problemas em que a PP fica a cargo dos autores dos livros didáticos ou de outros professores e pesquisadores. Percebemos que os licenciandos não tinham refletido que, enquanto futuros professores, precisariam propor problemas. Inicialmente, essa reflexão causou um forte impacto frente às dificuldades encontradas ao proporem os primeiros problemas. Essa reflexão foi possível por termos trabalhado na perspectiva da EPRP.

Questionamento 3 - Você já propôs problemas matemáticos antes? Como você avalia a abordagem de Proposição de Problemas na sua formação inicial enquanto futuro professor de Matemática?

Comentário Temático: Apesar de alguns licenciandos já terem proposto problemas, a maioria não teve essa experiência antes. Alguns deles conseguem externar justificativas que credibilizam a importância da abordagem da PP durante o processo de formação inicial dos professores de Matemática. Destacam a importância da PP no estímulo ao pensamento lógico, crítico e reflexivo da Matemática, indo além das expressões, rompendo com o ensino mecanizado por meio de atividades repetitivas e exaustivas. Apontam a PP como um meio para trabalhar a aplicabilidade da Matemática no cotidiano dos alunos, enfatizando os problemas sociais. No tocante à formação do professor de Matemática, destacam que a PP proporciona um melhor entendimento do que está sendo ensinado, proporcionando melhores condições para a aprendizagem dos alunos. Uma vez trabalhada, os professores saíram da zona de conforto de sempre utilizar problemas prontos. A PP também é vista como forma de proporcionar uma melhor interação com a turma. Essa característica fica ainda mais evidente quando o trabalho é desenvolvido na perspectiva da EPRP. Nos chama atenção o que disserta *L13*, ao afirmar já ter trabalhado com a PP e, logo em seguida, atesta que esses problemas foram oriundos dos livros didáticos. Acreditamos que o mesmo não experienciou propor um problema, mas interpretou o questionamento “propor” como levar um problema para os alunos resolverem em sala de aula. Outro ponto importante destacado é que os problemas propostos pelos livros didáticos, em sua maioria, não se aplicam ao contexto dos alunos. Esse é um apontamento bastante importante e que nos faz perceber a importância de o professor dominar a PP para que possa trabalhar uma Matemática cada vez mais próxima da realidade dos alunos. Ao final destas reflexões, sentimos a necessidade de proporcionarmos experiências mais intensas que os levem a aprender a ensinar através da EPRP e das TD, tomando como ponto de partida a PP.

Depois de motivar os questionamos anteriores, passamos a discutir dois textos importantes que estão intimamente relacionados com a prática pedagógica que estamos vivenciando. Com isso, esperávamos fortalecer e consolidar a experiência (prática) por meio das discussões teóricas. Em seguida, retomamos a EPRP envolvendo o contexto dos pés de pimentões, inicialmente proposta por *L2*.

A discussão iniciou-se com base no texto “Learning to teach through mathematical problem posing: Theoretical considerations, methodology, and directions for future research (Aprendendo a ensinar através da proposição de problemas matemáticos: considerações teóricas, metodologia e direções para pesquisas futuras)” de Cai e Hwang (2020). Em seguida, a discussão foi embasada no texto “Using Digital Technology for Mathematical Problem Posing (Usando a Tecnologia Digital para a Proposição de Problemas Matemáticos)” de Abramovich e Cho (2015).

Com relação às implicações do uso didático das TD na EPRP, nesse momento inicial, consideramos tímida, tendo em vista uma preocupação maior dos licenciandos em dominarem a EPRP para, em seguida, verificarmos como a CGD pode estar potencializando essa prática.

Muito permanece desconhecido sobre o ensino através da PP e como os professores podem aprender a fazer isso de forma eficaz. Essa discussão é aprofundada com Abramovich e Cho (2008; 2015).

Comentário Temático: Os questionamentos provocados inicialmente foram importantes para que pudéssemos adentrar as discussões teóricas com base nos textos destacados. Foi possível perceber como os licenciandos compreendem a ideia de problema, levando-nos a refletir sobre como proporcionar experiências que os levem a ampliar esse conceito corretamente. Quando externam as suas dificuldades em propor problemas, percebemos que esse fato decorre da falta de experiências em propor problemas na sala de aula de Matemática. Também nos chama atenção a forma como eles passam a ver a PP, elencando vários pontos positivos para a prática pedagógica enquanto alunos e futuros professores. Toda essa motivação inicial vai sendo retomada à medida que as discussões vão adentrando os textos, desenvolvendo neles um novo olhar e um amadurecimento sobre o tema.

Passamos a apresentar algumas definições e questionamentos acerca da PP presentes no texto de Cai e Hwang (2020), tais como: como a proposição de problemas matemáticos pode ajudar professores a entender o pensamento dos alunos? Os professores são capazes de propor problemas matemáticos importantes e valiosos? Como os professores podem ser apoiados para propor problemas matemáticos importantes e valiosos?

Alguns licenciandos se sentiram à vontade para apresentar suas reflexões sobre os questionamentos, enquanto a maioria refletiu em silêncio. Após esse momento, começamos a discutir a importância das TD, especificamente, a CGD na PP e a CD na PP à luz de Abramovich e Cho (2015). Ao abordarmos a CD e seus subconceitos (Coerência Numérica, Coerência Contextual e Coerência Pedagógica), eles iam trazendo exemplos da experiência com a EPRP. Ao final, compreenderam a complexidade em atingir a CD na PP.

Concluindo as atividades de mais um encontro, relembramos que na próxima aula retomaremos a exploração do problema dos pimentões a partir dos novos problemas por eles propostos. Desta vez, os licenciandos farão o exercício de analisar os problemas individualmente, com base nos pressupostos teóricos da CD, de Abramovich e Cho (2008; 2015).

Comentário Temático: Além dos desafios com a PP, os licenciandos passaram a enxergar sua importância para o aluno e para o professor, a partir das discussões teóricas, ampliando seus horizontes. Os exemplos que iam trazendo à tona durante a abordagem teórica nos faziam perceber a compreensão que estavam tendo entre a prática e a teoria.

5.8 Retomando o problema da plantação de pimentões

10º Encontro - 2 aulas
Data: 06/10/2022

Na aula do dia 22 de setembro (7º Encontro), estávamos aprofundando a exploração do problema da plantação de pimentões. Em um dado momento da EPRP, sugerimos aos licenciandos que dessem continuidade à atividade individualmente, reformulando o problema, tendo em vista os conflitos entre a coerência contextual e numérica com os quais vínhamos nos deparando, para nesta retomada explorarem, analisarem e refletirem à luz da CD, discutida por Abramovich e Cho (2015).

Entregamos os problemas de cada licenciando. Orientamos para que a análise fosse feita de forma escrita, destacando a coerência numérica, a coerência contextual e a coerência pedagógica. Essa atividade foi desenvolvida individualmente.

A maioria dos licenciandos não apresentou consistência nos argumentos para justificar as coerências e incoerências em seus problemas. Aos que estavam presentes, conseguimos promover algumas reflexões sobre as suas análises. Aos faltosos, fizemos uma análise a partir do nosso olhar de pesquisador (Pp). A seguir, descreveremos todos os problemas, seguidos das observações e reflexões.

L7 – Um agricultor plantou, no ano de 2018, 80 pés de pimentões e obteve R\$ 150,00 na venda destes. No ano seguinte, plantou 100 pés de pimentões e obteve R\$ 200,00 ao vendê-los. Em 2020, plantou 130 pés de pimentões e obteve R\$ 286,00 na venda destes. Porém, no ano de 2021, ele teve uma perda de 50% da plantação devido a uma praga em sua lavoura, onde havia 170 pés de pimentões. Sabendo que o valor por unidade em 2018 foi de 1,80, e que a cada ano esse valor recebeu um aumento de 0,20 centavos, qual o valor obtido após a venda dos pimentões no ano de 2021? E, com base nos padrões dos anos anteriores, qual será o valor obtido após a venda destes no ano de 2022?

L6 – Um agricultor fez uma colheita de 80 unidades de pimentão em 2018 e recebeu um valor de R\$ 150,00 por essa colheita, no ano seguinte (2019) a colheita foi de 100 unidades de pimentão e recebeu um valor de R\$ 200,00 por ela, em 2020 a colheita foi de 130 unidades de pimentão e recebeu um valor de R\$ 286,00 por ela, porém, no ano de 2021, o agricultor fez uma colheita de 170 unidades, mas perdeu 50% de sua plantação. Qual foi o valor recebido de 2021? Considerando a unidade no ano inicial de 1,80 e aumenta o valor em R\$ 0,20 por ano, qual seria o valor recebido pelo agricultor em 2022, desconsiderando a praga do ano de 2021?

Exploração de L7 – Percebemos a incoerência numérica em nosso problema pela insuficiência de dados para a resolução.

Pp: Os problemas acima propostos mantiveram as informações e o contexto do problema anterior, apresentando algumas mudanças de termos que remetem ao mesmo sentido, tais como: plantação, colheita e vendas. Ao final da redação do contexto do problema, o questionamento apresentado pelos propositores é o mesmo. Nos chama atenção L7 e L6 informarem no problema que o valor da unidade de

pimentão no ano de 2018 é de R\$ 1,80. Esse é um dado informado a partir de um arredondamento, pois se pegarmos o valor de R\$ 150,00 referente às vendas de pimentões no ano de 2018 e dividirmos pelos 80 pés de pimentões, teremos como resultado a unidade de pimentão custando R\$ 1,875. Ainda no problema, informam que há um aumento de R\$ 0,20 a cada ano, em que consideramos interessante levar o aluno a perceber esse padrão sem informar claramente. Nenhum dos problemas sugere a criação de uma tabela para organização dos dados. Esse é um recurso que pode auxiliar os alunos a reconhecerem padrões entre os valores numéricos. Além das informações analíticas já apresentadas sobre os problemas, destacamos pouca evolução na EPRP de *L7* e *L6*. Ao manterem o contexto do problema, não foram capazes de incorporar informações discutidas anteriormente na EPRP, como a quantidade de pimentões produzidos em cada pé de pimentão. No que tange à coerência pedagógica, não apresentaram apontamentos.

L2 – Um agricultor plantou, no ano de 2018, 80 pés de pimentões e recebeu 150 R\$ pela sua plantação, no ano seguinte, em 2019, plantou 100 pés de pimentões e obteve o valor de 200 R\$, em 2020, plantou 130 pés e recebeu 286 R\$. Porém, no ano de 2021, teve uma praga em sua lavoura, onde havia plantado 170 pés de pimentões, mas perdeu 50% de sua plantação. Qual será o valor que o agricultor irá receber pela plantação de 2021? Desconsiderando o ano de 2021, qual será o valor de 2022 (considere os anos 2018, 2019 e 2020)?

Exploração de L2 – Quanto à coerência numérica, é possível perceber uma Progressão Geométrica (PG) no quantitativo de pés de pimentões com o passar dos anos: 80; 100; 130; 170. Essa mesma coerência é perceptível com o aumento no valor da unidade de pimentão a cada ano, que corresponde a R\$ 0,20. Ao informar o quantitativo de pimentões colhidos em cada pé de pimentão, acreditamos que contribuímos para a coerência contextual. Levando em consideração a coerência pedagógica, consideramos que o problema pode ser trabalhado na 1ª série do ensino médio, em que percebemos a compatibilidade com os conteúdos abordados nesse nível e a fácil compreensão por parte dos alunos.

Pp - Diferente dos problemas analisados anteriormente, este traz observações com informações referentes ao contexto e aos dados numéricos do problema. Refletindo as análises de *L2*, percebemos que matematicamente não estamos diante de uma PG, mas de uma sequência, na qual podemos perceber um padrão de crescimento correspondente a 20, 30 e 40, levando o aluno a perceber que os próximos valores seriam 50, 60 e, assim, sucessivamente. Esse ponto não compromete a coerência numérica do problema, mas deixa transparecer uma dificuldade da propositora em classificar os tipos de sequências numéricas. A mesma coerência numérica afirma ter com o aumento no valor da unidade de pimentão a cada ano, correspondente a R\$ 0,20. Esse padrão é incoerente numericamente pelos mesmos argumentados apresentados na análise dos problemas de *L7* e *L6*. Na coerência contextual, em suas análises, *L2* afirma ter informado a quantidade de pimentões colhidos em cada pé de pimentão, informação essa que não consta na redação do problema. Já na coerência Pedagógica, não discordamos de a proposta ser para a 1ª série do ensino médio, porém nos chama atenção o equívoco cometido pela propositora do problema ao mencionar o conteúdo de PG. O problema pode, sim,

ser usado neste nível, mas para trabalhar a ideia de sequências numéricas e padrões matemáticos. Essas são habilidades que devem ser trabalhadas desde o ensino fundamental. Aachamos necessária a presença de mais argumentos que justifiquem a coerência pedagógica do problema proposto.

LI – Um agricultor plantou, no ano de 2018, 80 pés de pimentões, onde cada pé deu 5 pimentões e conseguiu com as vendas destes pimentões R\$ 150,00. Em 2019, plantou 100 pés e conseguiu R\$ 200,00. Em 2020, plantou 120 e conseguiu R\$ 250,00. No ano de 2021, ele plantou 200 pés, porém houve uma peste em sua plantação, onde ele perdeu 10 pés de pimentões. Quanto em R\$ ele conseguirá com os pimentões que sobram?

Exploração de LI – O problema apresenta coerência numérica, pois trabalha com números naturais. A coerência contextual é clara, pois introduz o leitor no contexto social da agropecuária. Em nossas análises, observamos que o problema pode ser aplicado na 1ª série do ensino médio, onde o aluno já tem o conhecimento de proporcionalidade e das quatro operações matemáticas de forma bem avançada.

Pp - O propositr do problema teve a preocupação em alterar os dados inicialmente informados. Também destacamos a inclusão de uma informação importante em seu contexto, ao relatar que cada pé de pimentão produziu 5 pimentões. Frente a sua justificativa de coerência numérica, ao explorarmos o problema, percebemos que algumas informações compreendem outros conjuntos numéricos, por exemplo, ao calcular o valor da unidade de pimentões no ano de 2018, esse valor é de R\$ 0,375 pertencente ao conjunto dos números racionais. Ao problematizar “quanto em R\$ ele conseguirá com os pimentões que sobram?”, referente ao ano de 2021, percebemos que os dados numéricos são insuficientes para chegar à solução do problema. Aparentemente, nos dá a ideia de que o propositr do problema alterou os valores numéricos deixando-os em uma progressão aritmética, porém, ao informar os dados do ano de 2021, esse padrão não é mais reconhecido. Na coerência contextual, percebemos uma visão limitada ao analisar apenas as informações temáticas sem confrontá-las com os dados numéricos e com as reflexões que o problema pode suscitar sobre o contexto. Fica a impressão da utilização de um contexto apenas para justificar os dados numéricos. Não é possível discutirmos a coerência pedagógica do problema, uma vez que ele não apresenta coerência numérica e, conseqüentemente, não terá solução. Diante desta análise, percebemos uma tentativa de PP que não teve o cuidado em explorá-lo de forma efetiva, por meio de sua resolução e reflexão crítica dos dados.

L9 – Um agricultor plantou 5 pés de pimentões, colhendo, no ano de 2018, 80 pimentões e lucrou R\$ 150,00. No ano seguinte (2019), colheu 100 pimentões e teve um lucro de R\$ 200,00, em 2020, colheu 130 pimentões e teve um lucro de R\$ 286,00, porém, no ano de 2021, ele teve uma perda da plantação devido a uma praga em sua lavoura onde havia colhido 170 pimentões, mas perdeu 50% de seu cultivo.

Qual foi o lucro no ano de 2021?

E, com base nos anos anteriores, qual será seu lucro em 2022?

Ano	2018	2019	2020	2021	2022
-----	------	------	------	------	------

Quant	80	100	130	170	220
Valor	150	200	286	204	?
Valor unitário	1,80	2,00	2,20	2,40	2,60

Pp – Inicialmente, a propositora do problema inclui a informação que “*um agricultor plantou 5 pés de pimentões*”, com o intuito de fortalecer a coerência numérica e contextual do problema. Porém, percebemos que essa informação compromete totalmente a CD do problema, uma vez que, diante do contexto, esses mesmos cinco pés de pimentões continuariam a produzir nos demais anos e com um quantitativo cada vez maior. Com isso, buscamos conhecer melhor a realidade de uma plantação de pimentões. Pesquisando na internet, nos deparamos com a informação de que o pé de pimentão tem pouco tempo de vida. Quando bem cuidados, entre 120 e 130 dias após o plantio das sementes estarão prontos para a colheita, que dura entre 90 e 120 dias. O contexto apresentado no problema gera um conflito de ideias, levando os licenciandos a questionar tais informações. Em continuidade à análise do problema, percebemos que os dados numéricos foram mantidos do problema inicial. Ao problematizar qual foi o lucro no ano de 2021 e, em seguida, em 2022, a resolução do problema fica condicionada a calcular o valor unitário do pimentão em cada pé de pimentão e reconhecer algum padrão que o leve a concluir o valor da unidade nos anos de 2021 e 2022, para, em seguida, calcular o lucro. Ao multiplicar o valor unitário pelas quantidades correspondentes, obtém-se o valor da receita, que difere da ideia de lucro, desconsiderando os gastos gerados com toda a plantação e com a venda. A incoerência desses dados já foi discutida nos problemas anteriores. Não é discutida a coerência pedagógica do problema, porém acreditamos que, pelas ideias que conseguimos extrair, esteja direcionado ao ensino fundamental. De modo geral, percebemos a incoerência didática do problema sem apresentar uma exploração mais profunda com base no problema inicial.

L8 – Em uma plantação de pimentão, no ano de 2020, um agricultor plantou 50 pés de pimentão, que deu o equivalente a 5 caixas, com 10 pimentões cada, com um lucro de R\$ 100,00. No ano seguinte, o agricultor plantou o dobro de pés e teve um lucro de R\$ 200,00. Considerando esses dados, no ano de 2022, qual será o lucro desse agricultor?

Ano	2020	2021	2022
Pimentão	50		
Caixas	5		
Lucro	R\$ 100		

Pp - No problema proposto, os dados numéricos são simplificados e introduzidas outras grandezas, como a quantidade de caixas de pimentões e, em seguida, apresenta uma tabela. Percebemos uma incoerência entre os dados numéricos e o contexto. Observamos que foram plantados 50 pés de pimentões e colhidos 50 pimentões, acomodados em 5 caixas, com 10 pimentões cada. Já havíamos discutido esse contexto na exploração do problema coletivamente. É possível perceber que alguns licenciandos não conseguiram incorporar essa informação já discutida no problema. Ao explorarmos o problema

preenchendo a tabela com os dados presentes no enunciado do problema, esperamos que facilmente o aluno chegue à solução do problema utilizando seus conhecimentos de proporção. Com isso, o propositor espera que obtenham como resposta o lucro do agricultor no ano de 2022, considerando os dados apresentados no problema. Em síntese, o problema apresenta um baixo grau de dificuldade, não sendo discutida a sua coerência pedagógica. Em meio às incoerências identificadas, percebemos que a inserção de novas informações contextuais e numéricas no problema fez com que o propositor não conseguisse externar suas ideias de forma nítida. Mais uma vez, percebemos que a proposição do problema não foi feita mediante a EPRP.

L12 – Um agricultor, no ano de 2018, plantou 80 pés de pimentões e lucrou R\$ 150 reais, no ano seguinte (2019), plantou 100 pés de pimentões e teve um lucro de R\$ 200, em 2020, plantou 130 pés de pimentões e teve um lucro de R\$ 286, porém, no ano de 2021, ele teve uma perda de plantação devido a uma praga em sua lavoura, onde havia plantado 170 pés de pimentões, mas perdeu 50% de sua plantação. Qual foi o lucro no ano de 2021? E, com base nos anos anteriores, qual será seu lucro em 2022? Sabendo que ele vende os pimentões em pacotes de 10 pimentões, e que cada pé produz exatamente 10 pimentões.

Ano	2018	2019	2020	2021	2022
Quant. de pés	80	100	130	170	220
Quant. de pacotes	8	10	13	17	? (22)
Valor da unidade	1,8 \$	2,0 \$	2,2 \$	(2,4 \$)	? (2,6)
Bruto	150 \$	200 \$	286 \$	(240 \$)	?
Valor do pacote	18 \$	20 \$	22 \$	24 \$	26 \$

Pp - O propositor do problema mantém as informações e questionamentos do problema inicial, porém acrescenta algumas informações numéricas e contextuais que, em seguida, vêm organizadas em uma tabela. Ao analisar a informação de que *“ele vende os pimentões em pacotes de 10 pimentões, e que cada pé produz exatamente 10 pimentões”*, percebemos uma possível incoerência gerada pelo termo “exatamente” em um contexto em que essa garantia é duvidável. Voltando nossa atenção para a tabela, é possível identificar novamente que o valor da unidade de pimentão no ano de 2018 é arredondado para R\$ 1,80. A tabela ganha mais linhas referentes às informações da quantidade de pacotes e do valor do pacote de pimentões. Explorando os dados apresentados na tabela por meio da resolução do problema, identificamos que os valores numéricos apresentados estão errados. Tomando como exemplo o ano de 2018, ao ter plantado 80 pés que produzem 10 pimentões, chegamos a um total de 800 pimentões no respectivo ano. Ao dividirmos o valor bruto R\$ 150,00 pela quantidade de 800 pimentões, temos que o valor da unidade do pimentão é de R\$ 0,1875. Este valor é diferente do informado na tabela, interferindo no valor do pacote de pimentão, que, ao conter 10 unidades, deve custar R\$ 1,875. O mesmo raciocínio foi utilizado para preencher as demais colunas da tabela. Chama nossa atenção no contexto do problema o fato de o propositor ter usado o termo “Bruto” referente ao valor obtido com a venda dos pimentões. Ao compararmos com a redação dos demais problemas, sempre aparece o termo “lucro”, porém, a ideia de lucro está condicionada a um valor líquido após

desconsiderar os gastos. Percebemos que, no contexto presente em todos os problemas, a discussão envolvendo o valor bruto soa mais coerente, sendo equivalente à receita. Destacamos a inserção dos dados presentes no problema como positiva, mesmo gerando incoerência, mas essa postura nos faz perceber um avanço na PP, pois o licenciando se preocupou em resolver o problema para o seu preenchimento, mesmo não tendo se atentado às informações adicionadas, que foram desconsideradas ao realizar os cálculos. Na EPRP, a PP caminha lado a lado com a RP, na direção da CD do Problema.

L4 - Um agricultor plantou, no ano de 2018, 80 pés de pimentões e obteve o valor de R\$ 150,00 reais na sua venda, no ano seguinte (2019), plantou 100 pés de pimentões e conseguiu o valor de R\$ 200,00 reais, em 2020, plantou 120 pés e conseguiu o valor de 250,00 reais, seguindo essa ordem, os números de pés por ano são 80, 100, 120 e a ordem dos números de valor obtido são: 150, 200, 250. Percebe-se que cada uma das categorias segue uma lógica, então, construa uma tabela utilizando os dados, e levando em consideração que nos próximos anos (2021 e 2022) os números seguem a mesma lógica, complete a tabela com dados e demonstre as 2 P.A. que as categorias podem representar: categorias, números de pés e valor obtido.

Exploração de L4 - Ao resolvermos o problema e reler o enunciado, percebemos que havia uma incoerência contextual em “*um agricultor plantou, no ano de 2018, 80 pés de pimentões e obteve o valor de R\$ 150,00 na sua venda*”. Essa afirmação é referente aos pés de pimentões, não fazendo sentido vender os pés de pimentões, mas, sim, os pimentões que foram colhidos. Pedagogicamente, consideramos o problema apropriado para ser abordado no ensino médio, pois avançamos com o nível do problema envolvendo a PA. O problema poderá ser aplicado após a explicação do conteúdo.

Pp – Inicialmente, o propositor faz algumas alterações numéricas no problema objetivando uma sequência numérica característica de uma Progressão Aritmética (PA). Os dados numéricos apresentam coerência, porém, novamente, não é informada no enunciado do problema a quantidade de pimentões produzidos por cada pé de pimentão, o que nos leva a questionar a CD do problema. Na redação do problema, o propositor já identifica os padrões observados e os destaca. Consideramos que essa deve ser uma ideia construída pelo aluno a partir do tratamento dos dados do problema. O problema deve estimular o raciocínio dos alunos ao invés de suprimir esses processos que devem ser realizados na EP. O problema destaca o conteúdo trabalhado como sendo uma PA, solicitando que demonstrem as categorias: números de pés de pimentões e valor obtido. Contextualmente, identificamos algumas incoerências, não só no que envolve os pés de pimentões, como também na organização das ideias durante a redação do problema. Os padrões já identificados e a delimitação do conteúdo PA são informações que podem ser problematizadas, levando o aluno a construir essas ideias e dando margem para que o problema possa ser pedagogicamente explorado em diferentes níveis de ensino. Ao fazer alguns apontamentos referentes ao problema proposto, na tentativa de evoluir com a EP, o propositor apresenta uma nova redação para o problema. Feito isso, percebemos que a problematização foi mantida, tendo alterado apenas alguns termos no enunciado do problema. Não

houve correção de nenhuma das incoerências identificadas por nós anteriormente. Sugere, no final do enunciado, a informação da expressão algébrica do termo geral da PA $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$. Consideramos que a inserção dessa informação diminui o grau de dificuldade do problema, deixando até de ser considerado um problema para alguns alunos que já detenham esse conhecimento. Em seus escritos, o propositor apresenta a resolução do problema, o que consideramos extremamente importante nesse processo de EPRP. Pedagogicamente, não o consideramos a partir dos argumentos apresentados. Apesar de demonstrar preocupação na organização e desenvolvimento das ideias na PP, percebemos, no propositor, uma certa dificuldade em organizar as informações presentes no problema de modo a levar o aluno a interpretar os dados e chegar às suas próprias conclusões.

L3 –

Ano	2018	2019	2020	2021	2022	2023
Quantidade	80	100	130	170	220	270
Valor	500	700	1007,50	1445	2035	1322,75
Valor por pé plantado	6,25	7,00	7,75	8,50	9,25	?

Um agricultor tem em seu sítio plantações de pimentões. Ele trabalha da seguinte forma: a safra da quantidade de pés é vendida a um valor inicial de 80 pés por 500, ele assim obteve a quantidade de R\$ 6,25 por pé. A venda seguiu contínua pelos anos seguintes, como discutido na tabela. Mas, em 2023, pela variação do mercado, ele teve uma perda de 30% no valor que ele iria receber pela sua safra. Levando em consideração os anos anteriores, calcule quanto o agricultor recebeu no ano de 2023 com o valor integral e com a perda de 30%.

Exploração de L3 - O problema leva em consideração os assuntos de PA e de porcentagem, podendo ser aplicado na 1ª série do ensino médio. Para a RP, primeiro temos que identificar as variáveis presentes. Em seguida, devemos perceber a variação no aumento da quantidade de pés de pimentões plantados, originando a sequência: 20; 30; 40; 50; 60. Na tabela inicial do problema, informamos o valor de 270 pés de pimentões para o ano de 2023, e só percebemos que o valor estava errado no momento em que fomos explorar o problema. Esse valor deverá ser corrigido na redação do problema. Partindo para o cálculo do valor por pé de pimentão, nos deparamos com uma PA com variação de R\$ 0,75 positivo a cada ano. Sendo assim, somando esse valor a cada ano, iremos obter, no ano de 2023, o valor de R\$ 10,00. Ainda na EPRP, percebemos a necessidade de reescrever uma frase para tornar o problema mais coeso e coerente. Onde temos “a safra de quantidade de pés é vendida a um valor inicial de 80 pés por 500”, reescreveremos “a plantação dos 80 pés plantados em 2018 foi vendida por R\$ 500,00”. No que tange à coerência pedagógica, reforçamos a ideia de explorar o problema na 1ª série do ensino médio, utilizando-o para introduzir o conteúdo.

Pp - O propositor do problema mantém o contexto dos pés de pimentões, trazendo informações que contribuem para uma CD do problema. Sítio de plantações de pimentões, safra, venda do pé de pimentão são alguns termos que surgem nesse problema, enriquecendo o contexto. Com isso, diminuem as lacunas de incoerência contextual e numérica, deixando transparecer amadurecimento da ideia inicial do

problema pelo propositor. Observamos a presença de uma tabela com os dados que estão descritos no problema. Fica notório que os dados numéricos também foram alterados quantitativamente, atendendo a um padrão de crescimento que corresponde a uma PA. Numericamente, os dados estão coerentes e dão condições para que o aluno resolva o problema. Seguindo o seu raciocínio, o propositor discute corretamente o cálculo para o ano de 2023, com e sem a perda dos 30%, deixando transparecer um bom domínio do conteúdo matemático à medida que identificamos coerência numérica e contextual no problema. Diferentemente dos demais contextos presentes nos problemas já discutidos, em seu enunciado, temos a venda de toda a plantação de pimentões e não mais dos pimentões. Esse tipo de situação é bastante comum e é conhecida como “arrendar a plantação”. Com base nessas informações, percebemos que o problema tem condições de ser explorado inicialmente para introduzir o conteúdo de PA. Consideramos que este problema tem potencial para atingir a CD a partir da forma como o propositor apresenta os dados numéricos mediante o contexto, trazendo discussões sobre a sua resolução, a identificação de alguns erros numéricos e apontando para correções. A forma como o problema foi proposto e explorado nos faz perceber a intenção do propositor em trabalhar o conteúdo de PA a partir de um problema. Isso chama atenção em percebemos elementos discutidos teoricamente sendo incorporados nos problemas propostos e na análise realizada. Efetivamente, percebemos que o licenciando fez uso da PP e da RP na perspectiva da EP.

L13 – Tabela:

Ano	2018	2019	2020	2021	2022
Quant.	80	100	130	170	?
Valor	150	200	286	?	?

Um agricultor plantou, no ano de 2018, 80 pés de pimentões e lucrou R\$ 150 reais, no ano seguinte (2019), plantou 100 pés de pimentões e lucrou R\$ 200 reais, em 2020, plantou 130 pés de pimentão e teve lucro de R\$ 286 reais, porém, no ano de 2021, ele teve uma perda de plantação devido a uma praga em sua lavoura, onde havia plantado 170 pés de pimentão e perdeu 50% de sua plantação. Sabendo que cada pé de pimentão dá, em média, 2 pimentões. Com base nestas informações, informe o valor do ano de 2021. Em seguida, desconsiderando o ano de 2021, que houve uma eventualidade, e considerando que se manteve o padrão de crescimento dos outros anos, informe o número de pés plantados e o valor do ano de 2022.

Exploração de L13 - Observando o problema, foi visto que há uma incoerência acerca da quantidade de pimentões que cada pé daria e, consequentemente, o valor do lucro. Desta forma, resolvemos reescrever adicionando a informação que os pés de pimentões eram modificados geneticamente para que produzissem pimentões maiores e, dessa forma, apenas dois pimentões por pé. E, ao invés de utilizar a parte de que cada pé de pimentão produz em média dois pimentões, vamos reescrever informando que ele colheu em média dois pimentões. Tivemos também que alterar o valor do lucro em 2018, para seguir um padrão no valor do pimentão. O problema foi proposto para o 6º ano do ensino fundamental, para trabalhar os conteúdos de soma e multiplicação.

Pp – Identificamos características importantes na análise feita pelo propositor do problema referente à EPRP, dentre elas, a capacidade de reflexão acerca dos dados presentes no problema. O licenciando traz uma nova discussão dentro do contexto dos pés de pimentões envolvendo a mudança genética, propondo uma nova redação para o problema. Outro ponto que merece destaque é a percepção de que, para atender a um padrão no crescimento do valor da unidade de pimentão, é necessário alterar o valor no ano de 2018, algo que não foi levado em consideração em nenhum dos problemas propostos anteriormente. Acreditamos que a identificação desse erro numérico só foi possível pelo propositor por meio da resolução do problema. Esse fato evidencia a importância da RP na PP. Mediante essas reflexões, foi possível reformular o seu problema.

L13 - Um agricultor plantou, no ano de 2018, 80 pés de pimentões e lucrou R\$ 144 reais, no ano seguinte (2019), plantou 100 pés de pimentões e lucrou R\$ 200 reais, em 2020, plantou 130 pés de pimentões e teve lucro de R\$ 286 reais, porém, no ano de 2021, ele teve uma perda de plantação devido uma praga em sua lavoura, onde havia plantado 170 pés e perdeu 50% de sua plantação. Sabendo que estes pés de pimentões foram geneticamente modificados a fim de produzirem pimentões maiores e que, em suas colheitas anteriores, devido ao uso dessa técnica de mudança de genética, ele colheu pimentões maiores e de alta qualidade, porém com uma média de apenas dois pimentões por pé. Observando a tabela e verificando o aumento que vinha sofrendo anualmente, informe o valor obtido no ano de 2021. Em seguida, desconsiderando o ano de 2021, em que houve uma eventualidade, e considerando que se manteve o crescimento neste padrão, inclusive no aumento do valor da unidade do pimentão, informe o número de pés plantados em 2022 e o valor obtido.

Pp - Com a alteração numérica do valor do lucro no ano de 2018 para R\$ 144,00, o problema atinge uma coerência numérica não identificada nos demais problemas, que mantiveram o contexto e os dados numéricos. Em seguida, o propositor inclui na redação do problema o contexto de que os pimentões foram geneticamente modificados, colhendo 2 pimentões a cada colheita. Porém, não foi informado quantas colheitas são realizadas por ano, nos deixando a ideia de que, por serem geneticamente modificados, teria apenas uma colheita anual. Ao problematizar o cálculo do valor obtido com a colheita de pimentões no ano de 2021, o propositor orienta os alunos a observarem os dados da tabela. Desta forma, fica mais fácil perceber algum padrão e avançar com o problema. A tabela não foi reescrita no segundo problema, mesmo sendo mencionada na problematização. Uma sugestão é solicitar que os alunos construam a tabela. A segunda problematização é bem objetiva, ao solicitar que desconsiderem a eventualidade acontecida no ano de 2021, levando em consideração o padrão identificado para resolver o problema referente ao ano de 2022. Concordamos ser uma proposta pedagogicamente coerente para o 6º ano do ensino fundamental, ao mesmo tempo em que acreditamos que o problema pode ser aplicado em níveis mais elevados, objetivando explorar conteúdos como PA. Destacamos que um problema pode ser trabalhado em diferentes níveis, a depender da intencionalidade da prática pedagógica do professor. Em síntese, percebemos que o problema tem condições de atingir a CD, uma vez que incorpore em sua

redação os apontamentos feitos anteriormente. O propositor conseguiu externar a sua evolução na PP por meio de reflexões, resolução do problema e a reformulação do problema almejando a CD. A redação do problema precisa de uma melhor coesão, porém é capaz de dar condições para o aluno refletir sobre o problema, extrair os dados, analisá-los e resolver o problema.

Comentário Temático: Inicialmente, os problemas descritos e analisados apresentavam pouca modificação nos dados do problema. Os dados numéricos, o contexto e a problematização eram mantidos no problema, modificando apenas a sua redação. Com isso, percebemos que alguns licenciandos tiveram dificuldades em realizar a EPRP individualmente e em justificar a incoerência numérica. Esses licenciandos pouco avançaram na EPRP. As incoerências presentes nos problemas revelaram dificuldades em identificar o conteúdo matemático a ser abordado por meio do erro de cálculos envolvendo as operações básicas da Matemática. Outros não conseguiram apresentar justificativas para os seus problemas e argumentaram sem muita consistência, enquanto alguns apresentaram bom domínio da Matemática presente no problema que propôs, com argumentos sólidos embasados por reflexões críticas acerca do seu problema e a CD. Na maioria das análises feitas, percebemos que os licenciandos não resolviam os problemas. Como consequência, não conseguiam identificar as incoerências presentes. Os que realizaram a RP e EP conseguiram alcançar a coerência didática na PP. Nesse sentido, temos uma evidência de como a RP potencializa a PP na EPRP. Chama nossa atenção o fato de um licenciando ter proposto um problema justificando que o mesmo deveria ser utilizado no início da aula, como ponto de partida para a abordagem de um conteúdo matemático.

Concluída esta atividade de descrição, análise e reflexão da EPRP, demos continuidade à aula discutindo e apresentando um pouco mais da CGD, à medida que fazíamos alguns questionamentos aos licenciandos. Após debates e reflexões durante a aula, direcionamos um questionário (com as mesmas perguntas) via Google Forms para que pudéssemos coletar esses dados.

Para uma melhor organização e sínteses dos resultados obtidos, apresentaremos os dados do questionário por meio da pergunta, seguida de um “comentário temático”, como forma de sintetizar e contemplar, de forma objetiva, os temas que emergiram das respostas dos licenciandos.

Questionamento 1 – Como você avalia o uso didático das Tecnologias Digitais, especificamente a CGD, na prática pedagógica do professor de Matemática?

Comentário Temático: Os licenciandos compartilham visões satisfatórias sobre o uso didático das TD, particularmente a CGD, no ensino da Matemática. Eles destacam os benefícios da Desmos para a prática pedagógica e a aprendizagem dos alunos, enfatizando a facilidade de uso e a interatividade que a ferramenta oferece. Acreditam que a integração da tecnologia nas aulas é crucial devido à crescente influência das TD na sociedade contemporânea. Muitos enfatizaram que a tecnologia não apenas economiza tempo e torna as aulas mais atrativas, mas também facilita a compreensão de conceitos matemáticos complexos. Apontam que a abordagem tradicional de ensino, que se baseia apenas na lousa e no pincel, está sendo substituída por métodos mais dinâmicos e participativos, nos quais a tecnologia desempenha um papel fundamental. Eles veem a tecnologia como uma ferramenta que não apenas ensina conteúdo, mas também prepara os alunos para um mundo

cada vez mais digital e conectado. Além disso, reconhecem os desafios que podem surgir ao introduzir a tecnologia na sala de aula, especialmente quando lidando com professores de gerações anteriores, que podem resistir à mudança. No entanto, ressaltam a importância de os educadores se adaptarem e enriquecerem suas práticas pedagógicas, incorporando as TD de maneira versátil e criativa. Em suma, concordam que a utilização adequada da tecnologia, como a CGD, tem o potencial de transformar a maneira como a Matemática é ensinada, tornando as aulas mais envolventes, participativas e eficazes no desenvolvimento de habilidades matemáticas e pensamento crítico dos alunos.

Questionamento 2 – Quais potencialidades e/ou limitações você observa ao fazer uso didático da Calculadora Gráfica Desmos (CGD)?

Comentário Temático: Os licenciandos apresentam uma visão variada sobre o uso didático da CGD no ensino da Matemática. Muitos apreciam sua facilidade de uso e potencial para tornar as aulas mais envolventes, interativas e práticas. A capacidade da Desmos de criar gráficos dinâmicos e permitir a exploração de diferentes valores é vista como uma vantagem significativa em comparação com métodos tradicionais. A acessibilidade do aplicativo em smartphones, tanto *offline* quanto via navegador, é valorizada por sua conveniência. No entanto, apontam que a dependência da tecnologia pode ser uma preocupação, pois os alunos podem perder a habilidade de resolver problemas manualmente. Isso nos faz refletir sobre a importância da intencionalidade da prática pedagógica do professor ao fazer uso didático das TD, não dando abertura para tais interpretações. Além disso, a disponibilidade de dispositivos eletrônicos para todos os alunos é uma preocupação mencionada, levando em consideração a disparidade de acesso.

Questionamento 3 – Como você analisa o uso didático da CGD na EPRP?

Comentário Temático: Os licenciandos enfatizam que a ferramenta tem um impacto positivo no desempenho dos alunos, aprimorando seu raciocínio, habilidades e interesse pela disciplina. A CGD é considerada uma ferramenta de fácil utilização, capaz de enriquecer o ensino de várias maneiras. Ela oferece a oportunidade de explorar uma ampla variedade de assuntos matemáticos e sociais em diferentes contextos, incentivando a reflexão sobre temas atuais sob a ótica da EPRP. Além disso, sua capacidade de representar visualmente funções de forma rápida e eficaz é destacada, comparada à alternativa mais demorada de escrever e desenhar à mão. A ferramenta é vista como uma aliada no desenvolvimento de atividades de EPRP, estimulando a participação ativa dos alunos. A interatividade por ela proporcionada é apontada como uma forma prática e envolvente de ensinar Matemática. Ela desperta a atenção e a capacidade de explorar, propor e resolver problemas, promovendo um aprendizado prático e divertido. A possibilidade de explorar problemas e conceitos de maneira única e inovadora também é destacada. Além disso, ela é vista como uma ferramenta abrangente, que permite uma interação mais profunda com o conteúdo e com os colegas. Facilita a exploração, proposição e resolução de problemas, promovendo a visualização do processo e envolvendo os alunos em uma abordagem prática e autônoma do conhecimento.

5.9 Temas e Tendências que emergem da 1ª Travessia

Ao final desta 1ª Travessia, buscamos compreender como os temas analisados sinalizam as primeiras experiências dos licenciandos com a EPRP e a CGD. Sabemos da importância de refletirmos esse momento da pesquisa e a importância de sua continuidade para que tenhamos

argumentos, que nos permitam responder ao nosso questionamento de pesquisa. Diante do que foi produzido de dados a partir da Análise Temática (Braun; Clarke, 2006), organizamos este relato tomando três temas centrais: a EPRP; a CD dos problemas propostos na 1ª Travessia; as TD na sala de aula de Matemática.

A EPRP na sala de aula de Matemática tem se mostrado fundamental para o desenvolvimento dos licenciandos. No entanto, ao iniciarmos a pesquisa, percebemos que eles tinham uma ideia limitada sobre a importância dessa prática. Muitos nunca haviam tido experiência com a PP, e a maioria estava focada em encontrar a solução do problema, sem considerar os diversos elementos envolvidos no processo de RP. Isso nos faz refletir sobre a importância desse momento para que os licenciandos tenham condições de pensar no uso didático da CGD via EPRP.

A PP na perspectiva da EPRP se mostrou desafiadora e extremamente enriquecedora. Ficou evidente que os licenciandos tinham mais facilidade em propor problemas quando conseguiam relacionar a Matemática ao seu cotidiano, o que ressalta a importância de contextualizar os problemas matemáticos.

A EPRP é um espaço aberto e intencional, que sinalizou a necessidade de uma liberdade de tempo inicialmente. Com isso, abriu espaço para discussões profundas e permitiu que trabalhássemos conceitos que eram desconhecidos pelos licenciandos. Isso mudou a rotina da sala de aula, proporcionando novas percepções de ensino e aprendizagem. Durante a EPRP, as dúvidas surgiram naturalmente e foram sanadas ao longo do intenso trabalho de EP.

À medida que avançamos na EPRP, os licenciandos se sentiam mais à vontade para se expressar, sem medo de errar ou de contrariar as ideias do professor. Isso desconstruiu a ideia de que certos conteúdos só podem ser discutidos no ensino superior, como a ideia de Limite, ao explorar a função exponencial. Nesse contexto, o aluno é colocado no centro da atividade e o professor como mediador.

Uma das vantagens da EPRP foi a possibilidade de fazer conexões entre os conteúdos matemáticos explorados e suas diversas formas de aprofundamento, além de mostrar como diferentes representações matemáticas podem enriquecer a compreensão. A EPRP também os ajudou a compreenderem conceitos matemáticos que, muitas vezes, ficam restritos a uma única representação.

A PP foi um dos pontos-chave da EPRP, e eles começaram a compreender a importância dessa abordagem, tanto para sua própria formação como futuros professores de Matemática quanto para o desenvolvimento de habilidades cognitivas. Eles perceberam que um problema pode ter várias soluções e que o processo de resolução é tão importante quanto a resposta final.

Além disso, a EPRP ampliou a visão dos licenciandos sobre o que é um problema. A abordagem permitiu que explorassem questões sociopolíticas e culturais, conectando a Matemática ao seu contexto real, porém, essa discussão não partiu deles em um primeiro momento.

No entanto, a EPRP também revelou algumas dificuldades dos licenciandos, como a falta de experiência com a PP e dificuldades em generalizar conceitos matemáticos relacionados, em sua maioria, ao pensamento algébrico. Muitos licenciandos tinham dificuldades na transição entre as múltiplas representações algébricas. Além disso, percebemos que a representação numérica precedia a representação algébrica. A experiência com a EPRP possibilitou avançar nessa direção, desenvolvendo o trânsito entre as múltiplas representações algébricas.

A EPRP transforma a sala de aula em um espaço de descoberta, reflexão e aprendizagem, colocando o aluno no centro do processo e preparando-o para enfrentar desafios matemáticos de forma mais autônoma e crítica. É uma ferramenta que promove o raciocínio lógico, crítico e reflexivo, tornando o ensino da Matemática mais envolvente e aplicável à vida real. Portanto, sua implementação e valorização são fundamentais no processo de formação dos alunos e futuros professores de Matemática.

A prática da PP na sala de aula de Matemática revelou uma série de desafios e aprendizagens importantes para os licenciandos. Um dos principais obstáculos encontrados foi a falta de atenção à veracidade dos dados ao proporem problemas. Muitas vezes, os contextos eram inseridos nos problemas sem um propósito evidente, o que dificultava a criação de um diálogo significativo com os dados numéricos. Essa prática evidencia a necessidade de uma coerência numérica que valorize o contexto, tornando-o fundamental para a compreensão da situação apresentada.

No entanto, é fundamental destacar que a presença do contexto por si só não é suficiente para justificar sua inclusão no problema. O contexto deve refletir a realidade dos alunos, trazendo temáticas diretamente relacionadas com seu cotidiano. Isso torna a Matemática mais relevante e aplicável, conectando-a às experiências de vida dos alunos.

Percebemos que eles enfrentam desafios significativos ao propor problemas matemáticos. Destacaram a dificuldade dessa tarefa, especialmente ao considerar a necessidade de manter a coerência numérica e contextual. Conforme a EP avançava, começaram a identificar as incoerências presentes em suas proposições, demonstrando um amadurecimento gradual nesse processo.

As dificuldades com a linguagem verbal e matemática durante a redação dos problemas também foram observadas. Os conteúdos abordados nos problemas propostos, como sequências, progressões aritméticas, porcentagem, regra de três, construção de gráfico, estatística, operações básicas, média aritmética e média ponderada, são relevantes para o cotidiano dos alunos. Isso evidencia a escolha desses conteúdos e a importância de relacionar a Matemática às situações reais.

Durante a análise dos problemas propostos, notou-se que muitos deles apresentavam poucas modificações nos dados do problema inicial. Isso indica a necessidade de incentivar a criatividade na PP, de modo que os alunos explorem uma variedade de cenários matemáticos.

Alguns licenciandos encontraram dificuldades em explorar o problema individualmente e justificar as coerências numéricas, contextual e pedagógica, o que limitou seu progresso na EPRP. No entanto, aqueles que se dedicaram à resolução e exploração do problema conseguiram alcançar a CD. Essas limitações dão origem a novos pontos de partida na EPRP exigindo a realização de um novo trabalho.

É importante destacar como a RP potencializa a PP. À medida que iam se envolvendo na RP, eles desenvolviam uma compreensão mais profunda dos conceitos, o que, por sua vez, os capacita a propor problemas mais complexos e coerentes.

Durante esta Travessia, a experiência de propor problemas na perspectiva da EPRP tem revelado uma série de desafios, mas também oportunidades de aprendizado significativas. A CD se mostrou um aspecto crucial na PP relevantes. À medida que os alunos vão compreendendo a CD, eles se apropriam cada vez mais da EPRP e se tornam mais capazes de propor problemas matemáticos envolventes e desafiadores.

No que tange à inserção das TD no ambiente de ensino, é importante ressaltar que a motivação por si só não é suficiente para que o trabalho com essas ferramentas seja eficaz. É preciso compreender que os recursos digitais, como a CGD, podem impactar positivamente a interpretação e exploração das ideias matemáticas, bem como a EPRP pode se beneficiar dessa integração.

A EPRP, aliada ao uso didático da CGD, representa uma proposta metodológica que quebra os padrões tradicionais das salas de aula de Matemática. Os alunos têm demonstrado uma visão positiva sobre o uso didático dessa TD, destacando a facilidade de uso e a interatividade que essas ferramentas oferecem. Essa integração da tecnologia nas aulas se torna crucial, considerando a crescente influência das TD na sociedade atual.

A partir dessa experiência (1ª Travessia), é possível perceber alguns impactos do uso didático das TD na Educação Matemática. Elas não apenas otimizam tempo e tornam as aulas

mais atrativas, mas também facilitam a compreensão de conceitos matemáticos complexos. Isso tem levado à substituição gradual da abordagem tradicional de ensino por métodos mais dinâmicos e participativos, nos quais a tecnologia desempenha um papel fundamental. Neste cenário, a EPRP tem sido a responsável por moldar esse pensamento frente ao uso da CGD.

Os licenciandos são conscientes dos desafios que podem surgir ao introduzir a tecnologia na sala de aula, especialmente quando se lida com professores de gerações anteriores, que podem resistir à mudança. Portanto, enfatizam a importância de os professores se adaptarem e enriquecerem suas práticas pedagógicas, incorporando as TD de maneira versátil e criativa.

A CGD tem o potencial de transformar a maneira como a Matemática é ensinada. Da mesma forma, uma abordagem metodológica é capaz de potencializar o uso didático da CGD, como podemos vislumbrar com a EPRP. Sua facilidade de uso e capacidade de criar gráficos e explorar diferentes valores são vistas como vantagens significativas em comparação com métodos tradicionais. Além disso, a acessibilidade do aplicativo em smartphones, tanto *offline* quanto via navegador, é valorizada por sua conveniência.

É provável que muitos professores e alunos utilizem a CGD para verificar respostas por meio da construção de tabelas e gráficos. Contudo, na EPRP, apenas isso não faz sentido. Passamos a considerar a CGD como uma ferramenta para aprofundar os problemas, conduzir os alunos na construção de conceitos e ideias matemáticas, indo além do que o uso do lápis e papel pode proporcionar. Assim, a CGD possibilita levar o aluno a pensar e compreender os conceitos matemáticos de maneira mais profunda, aproveitando os recursos que essa tecnologia oferece.

No entanto, também reconhecem a importância de não se tornarem excessivamente dependentes da tecnologia, a fim de manter a capacidade de resolver problemas manualmente. Além disso, é necessário levar em consideração a disparidade de acesso à tecnologia, garantindo que todos os alunos tenham oportunidades iguais de utilização.

A CGD se destaca por sua capacidade de representar visualmente funções de forma rápida e eficaz, tornando-se uma aliada no desenvolvimento de atividades de EPRP. Sua linguagem não verbal de fácil compreensão facilita a EPRP, estimulando a participação dos alunos. A interatividade é uma forma prática e envolvente de ensinar Matemática, despertando a atenção e a capacidade de explorar, propor e resolver problemas. Ela oferece a possibilidade de explorar problemas e conceitos de maneira única e inovadora, tornando-a uma ferramenta abrangente, que permite uma interação mais profunda com o conteúdo e com os colegas, e enriquece o ensino em todos os níveis.

Toda essa discussão em torno desses temas/tendências que surgem a partir da 1ª Travessia nos fez refletir o problema de pesquisa e pensar na organização da 2ª Travessia. Os dados produzidos até aqui são extremamente importantes para que possamos dar continuidade a este trabalho, utilizando-os como ponto de partida para pensar a Oficina (2ª Travessia) e o Produto Educacional.

6 A CALCULADORA GRÁFICA DESMOS VIA EXPLORAÇÃO-PROPOSIÇÃO-RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Levando em consideração o que foi experienciado, refletido, analisado e apresentado como resultados durante a 1ª Travessia, passamos a planejar a continuidade das atividades de pesquisa. Nesta 2ª Travessia, temos a realização de uma oficina desenvolvida à luz da metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas (EPRP) integrada ao uso didático da Calculadora Gráfica Desmos (CGD). Organizamos um total de dez encontros, cada um composto por duas aulas.

Ao fim da 1ª Travessia, percebemos que os licenciandos ainda apresentam dificuldades em dar os primeiros passos com a PP. Diante desse contexto, selecionamos como ponto de partida da EPRP um problema do livro didático para que eles iniciassem a PP a partir de sua reformulação. Essa escolha se justifica pela necessidade de não ficarmos presos aos contextos e dados dos problemas do livro didático, que, muitas vezes, não refletem a realidade da sala de aula de Matemática e sua multicontextualidade, algo já questionando pelos licenciandos durante a 1ª Travessia.

A oficina foi desenvolvida seguindo a mesma organização e público da 1ª Travessia. As aulas aconteceram presencialmente, porém, algumas discussões foram estendidas para além do horário da aula através da interação dos licenciandos. Como recurso para produção dos dados, fizemos uso de um grupo do WhatsApp para enviar arquivos, compartilhar os problemas propostos, as resoluções dos problemas, as ideias durante a exploração dos problemas e arquivar todos esses registros.

Nos cinco primeiros encontros, utilizamos como pontos de partida os conteúdos de proporção, a definição da função afim, os tipos de função afim e a análise de seus coeficientes. Nos quatro encontros seguintes, os licenciandos se organizaram em equipes e realizaram a EPRP do gráfico da função afim, domínio e imagem, zero da função, estudo do sinal da função afim e inequação do 1º grau. No último encontro, fizemos uma discussão coletiva apresentando e discutindo todo o material que tinha sido produzido com a oficina.

Em cada encontro, realizamos a Análise Temática, resultando, ao final deste capítulo, em um relato que busca dialogar com os temas/tendências identificados durante a 1ª Travessia. A análise crítica e reflexiva desses dados tem almejado responder ao nosso problema de pesquisa. Ao mesmo, tem impulsionado a construção do PE com a identificação de elementos importantes para se pensar o uso didático da CGD na EPRP.

6.1 O livro didático como ponto de partida da Proposição de Problemas

11º Encontro - 2 aulas

Data: 20/10/2022

Ao traçarmos as discussões iniciais acerca da proposta da oficina, apresentamos aos licenciandos o livro didático (Iezzy *et al.*, 2018) e o compartilhamos em formato PDF, por meio do grupo do WhatsApp. Em seguida, direcionamos a escolha de um problema no capítulo que aborda a Função Afim. Após um intervalo médio de dez minutos, chegaram à conclusão de que iriam explorar o seguinte problema:

Figura 16 – Ponto de partida escolhido pelos licenciandos para a EPRP

EXEMPLO 3

Restaurantes *self-service* podem ser encontrados em todas as regiões do Brasil. Em um deles, cobra-se R\$ 3,80 por cada 100 g de comida. Dois amigos serviram-se, nesse restaurante, de 620 g e 410 g. Vamos calcular quanto cada um pagou.

Inicialmente, observe que R\$ 3,80 por 100 g equivale a R\$ 38,00 por quilo-grama. Assim, podemos calcular quanto cada amigo pagou. Quem se serviu de 620 g = 0,62 kg, pagou $0,62 \cdot 38 = 23,56$ reais; o outro amigo pagou $0,41 \cdot 38 = 15,58$ reais.

O valor (y) pago, em reais, varia de acordo com a quantidade de comida (x), em quilogramas. A lei que relaciona y e x , nesse caso, é: $y = 38 \cdot x$, que é outro exemplo de função polinomial do 1º grau.



Fonte: Iezzy *et al.* (2018, p. 71).

Nas discussões da 1ª Travessia, os licenciandos deixaram transparecer em seu itinerário estudantil (Educação Básica e Ensino Superior) passividade frente à Matemática, marcada por sempre resolverem exercícios/tarefas/problemas que chegavam prontos para eles. Na maioria dos casos, esses exercícios/tarefas/problemas eram oriundos dos livros didáticos. Os professores não tinham a preocupação de propor problemas novos, de reformular o problema, tampouco de estimular a PP por parte dos alunos.

Refletimos sobre a importância e a influência que o livro didático exerce nos problemas matemáticos que são trabalhados em sala de aula. Os autores desses livros são responsáveis pela PP, enquanto os professores que o recebem em suas salas de aulas realizam apenas a RP.

Não é nosso objetivo refletir sobre o livro didático nesta pesquisa, porém, essas reflexões afloram a partir dos resultados que vamos construindo com o desenvolvimento desta pesquisa.

Na perspectiva da EPRP, não tomamos os problemas do livro didático como algo pronto e acabado, mas que podem ser reformulados, explorados, resolvidos e dar origem a novos problemas, capazes de atender à multicontextualidade da sala de aula de Matemática. Enxergamos na PP um grande potencial para desenvolver a capacidade de fazer Matemática e ressignificar o processo de ensino e de aprendizagem da Matemática.

Após a escolha do problema, cada licenciando foi convidado a explorá-lo e, como resultado, propor um novo problema, tomando como ponto de partida o problema e o uso didático da CGD, compartilhando com toda a turma por meio do grupo do WhatsApp. Em seguida, deveriam analisar todos os problemas propostos e discutir sua Coerência Didática (CD). Feito isso, em um processo de exploração coletiva dos problemas, escolher as melhores informações e características, para chegarmos a um problema que subsidiaria a proposta pedagógica da oficina e extrair elementos importantes para compor o Produto Educacional (PE).

Os licenciandos começaram a explorar os problemas no sentido de modificá-los, analisando, inicialmente, a coerência contextual, tendo em vista que a maioria dos problemas propostos nos livros didáticos contemplam exemplos de diferentes regiões do país. Muitas vezes, o contexto pode expressar uma coerência numérica que não faz tanto sentido para alunos de outra região. Nesse sentido, destacamos a importância de a coerência numérica sempre dialogar com a coerência contextual. Como se trata de um exemplo envolvendo alimentação e dinheiro, ficamos diante de temáticas que têm sofrido fortes alterações nos últimos anos devido à inflação.

Nesta aula estavam presentes dez dos 13 licenciandos da turma. Ao iniciarem a exploração das informações do problema, começaram a discutir elementos que poderiam ser alterados no problema.

L3 – Contexto social. Praça de alimentação.

L11 – Prato Feito (PF) pronto sem balança.

L9 – Taxa única para PF.

L2 – Self-service sem balança.

L11 – Um copo de suco grátis.

L1 – 2 proteínas no prato.

L3 – Adicional de carne. A cada pedaço acrescenta 2 reais.

L3 – Reformulando, 5 contos.

L9 – Até 200 gramas, valor único.

L13 – 2 reais da embalagem, caso seja para levar.

L11 – Podemos pensar em duas realidades. A de uma classe baixa e a de uma classe alta. Para a classe baixa, colocamos R\$ 1,99, resultando em R\$ 19,99 o quilo. Não necessariamente você comerá um quilo. Essa seria a realidade de uma pessoa que tem menos condições. Na realidade da classe alta, aumenta-se o valor. Nesse caso, eu não sei para quanto, pois não é a minha realidade.

PP – No restaurante da classe baixa, o prato e as opções serão as mesmas da classe alta?

L11 – Não!

PP – Então, pode-se pensar em detalhar quais serão os pratos.

As sugestões apresentadas pelos licenciandos relevam envolvimento inicial e identificação com o contexto do problema. As discussões tratam de mudanças que afetam o contexto e os dados numéricos do problema. Mesmo que essas mudanças sejam tímidas, levam-nos a refletirem sobre questões sociopolíticas e culturais, como o comentário apresentado por L11. Os valores numéricos permanecem dentro do conjunto dos números reais, mais especificamente, dos números racionais, o que fortaleceu a nossa proposta de EPRP, tendo em vista que faremos uso didático da CGD para gerar discussões mais profundas.

Após o diálogo apresentado, a atividade tomou outra via, a partir do momento em que L3 questionou se todos os pratos teriam o mesmo peso, apresentando a ideia de dois restaurantes com taxa de desperdício de R\$ 2,00. Isso motivou L10 a fazer uma pesquisa na internet que traduzisse o custo médio de uma refeição, compartilhando a notícia no grupo do WhatsApp. Ao mesmo tempo, alguns licenciandos iam apresentando propostas de reformulação do problema.

L8 – Classe média baixa, 100g ----- 1,99. Classe média alta, 100g ----- 3,80.

L9 – PF até 200g, com frango, valor único 8,00. PF até 200g, com carne vermelha, valor único 10,00. Acima de 200 gramas, a cada 10 gramas aumenta-se 10%.

L10 – O custo médio da refeição self-service na balança saltou de R\$ 57,12 para R\$ 70,69. Segundo o Procon-SP, os sucessivos aumentos dos preços provavelmente relacionados à alta da demanda, gerada pelo controle da pandemia e a retirada das restrições, principalmente, pela volta do trabalho presencial. Os reflexos das elevações do gás, dos produtos de alimentação, energia elétrica também interferem diretamente no preço final do consumidor. Região Sudeste, mais precisamente em SP. (informações colocadas no grupo do WhatsApp por meio de um *printscreen* de uma página na internet).

L2 – Se retirar a balança, o self-service cobraria 15,00 reais, com dois pedaços de carne.

L2 – Dois restaurantes, um de culinária Nordestina, tinha o valor de R\$ 2,50 por cada 100g de comida, e em um restaurante japonês, custava R\$ 4,50 por cada 100g de comida.

L1 – Dois estabelecimentos de self-service distintos, um no Nordeste e um no Sudeste. Um, a cada 200g de comida, cobra R\$ 2,90. Outro, a cada 200g, cobra R\$ 3,40. Direito a duas proteínas e R\$ 4,50 adicionais.

L11 – A realidade de dois restaurantes/regiões. Um casal foi almoçar no restaurante de comida chinesa, que custava 1,99 a cada 100g. O homem comeu 850g e a mulher 540g. Qual valor cada um pagou?

Trabalhar na perspectiva da EPRP deixa o aluno livre para buscar outras fontes de informação que venham contribuir com a exploração do problema. Isso se revela como um fato

importante em uma sala de aula de EPRP. O cenário de exploração começa a se ampliar à medida que os licenciandos começam a apresentar a possibilidade de comparação entre dois restaurantes. Ficamos com a impressão de que o contexto dos restaurantes foi levemente influenciado pela notícia compartilhada por L10 ao trazer informações do Sudeste do país.

Um bom tempo da aula foi ocupado com discussões sobre o contexto e os valores numéricos do problema. Mesmo os licenciandos que não participaram oralmente da discussão, estavam observando e atrelando as ideias ao seu problema. Alguns propuseram o problema em menos tempo e o compartilharam no grupo do WhatsApp. Porém, o tempo da aula não foi suficiente para que todos concluíssem a atividade.

O processo de exploração do problema não finalizou com o fim da aula presencial em sala de aula. Informamos que poderiam concluir seus raciocínios sobre o problema e quando terminassem poderiam postar no grupo do WhatsApp. Durante o restante de todo o dia, recebemos os problemas propostos pelos licenciandos, respeitando o tempo de cada um deles.

À medida que os problemas propostos iam sendo compartilhados, os licenciandos ficaram na responsabilidade de explorar todas as contribuições, comparando os problemas e identificando as principais informações, para que na aula seguinte, de forma presencial, pudessemos propor um único problema levando em consideração as contribuições de todos.

Após verificar que todos já tinham enviado os seus problemas, digitamos e compartilhamos o arquivo na aula seguinte. Os problemas propostos, descritos a seguir, apresentam diversas informações que foram discutidas coletivamente durante os encontros.

L1 – Hera e Vênus estavam viajando conhecendo os estados do Brasil. Eles sempre optaram por jantar em restaurante que tenham a modalidade Self-service. Como Vênus comia muito, para ele era mais interessante Self-service no peso. A média que ele pagava em quase todos os estados ficava entre R\$ 28,90 e R\$ 35,00. Já Hera optava pelo Self-service com preço fixo, pois comia bem menos que Vênus e a média que ela pagava na maioria dos estados era entre R\$ 15,00 e R\$ 25,00. Mas, em sua última viagem para SP, em que eles já tinham ido anteriormente, Vênus pagou R\$ 32,50 o quilo e Hera R\$ 18,00 o PF. Só que dessa vez, nesse retorno, depois de 1 ano, Vênus pagou R\$ 48,90 e Hera R\$ 30,00 no PF. Tem como sabermos de quanto foi essa variação no preço em 1 ano?

L2 – Abriu dois restaurantes self-service em Campina Grande, um de comidas típicas Nordestinas e outro de culinária japonesa, e um casal resolveu ir em um desses dois restaurantes para comemorar seu aniversário de casamento, porém estavam indecisos em qual ir, pois, no restaurante de comida típicas nordestinas, 100g de comida vale 2,50 R\$, porém o suco é grátis, já no de culinária japonesa, 100g vale 4,50 R\$, e a sobremesa é grátis. Em qual desses restaurantes self-service o casal deve ir, levando em conta que ambos comem cerca de 320g e eles querem economizar?

Obs.: No restaurante self-service de culinária nordestina, o suco é grátis com a refeição, porém, se for à parte, o mesmo copo de suco de 250 ml custa 8,00 R\$ e a sobremesa de 220g custa 4,50. Já no restaurante self-service de culinária japonesa, o copo de suco de 250 ml é 07,00 R\$ e a sobremesa grátis com a refeição, porém, à parte, a sobremesa de 220g custa 05,00 R\$.

L3 – Em uma cidade existem dois restaurantes que trabalham com peso na balança. O primeiro restaurante trabalha com 100g – R\$ 1,90 e o segundo a 100g – R\$ 2,85. Em um certo dia, um rapaz pediu almoço no primeiro restaurante e jantar no segundo restaurante. O peso do prato do seu almoço foi 655g e o da janta 450g. Quanto ele pagou nas duas refeições?

L4 – O Governo da Paraíba desenvolveu um projeto durante o ano de 2019 para a população mais pobre chamado de “Tá na mesa”, através do qual, em todas as cidades da Paraíba, foram criados restaurantes self-service pensando na segurança alimentar da população paraibana. Foi atribuído um valor para quem é de baixa renda e outro valor para quem não sofre com insegurança alimentar. Os valores são atribuídos a cada 100 gramas, para que não ocorra desperdício de comida. A cada 100g, para uma pessoa de baixa renda, cobra-se 1 real, e 10 por quilograma. Já para uma pessoa de renda média, é 3,50 e equivale a R\$ 35,00 por quilograma. Sabendo que 1 família de baixa renda, da cidade de Olivedos, de 3 pessoas, foi se alimentar em um restaurante do projeto “Tá na mesa”, e somando o peso dos 3 pratos, se obteve 590g, qual será o valor a ser pago por essa família? Como também uma família de renda média, com 4 pessoas, foram se alimentar nesse mesmo restaurante, onde os 4 pratos pesaram 1,20 kg, qual será o valor a ser pago por essa família?

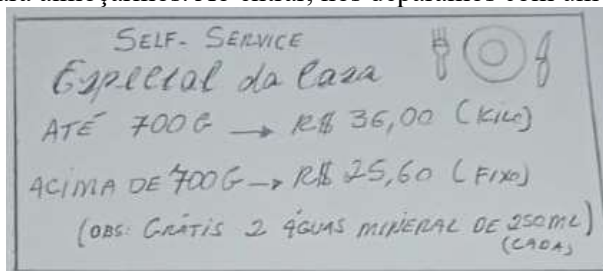
L5 – Dois amigos, Pedro e Carol, costumam ir no horário de almoço ao Restaurante Abreu. O restaurante oferece três opções de serviços, são elas: self-service sem balança; self-service com balança; e self-service com balança mais um copo de suco e uma sobremesa. O primeiro serviço, self-service sem balança, tem um preço único de R\$ 15,00 e que independe da quantia posta. Já no segundo serviço, é cobrado R\$ 2,10 por cada 100g de comida. Por fim, no último serviço, cobra-se R\$ 1,50 por cada 100g de comida, mais R\$ 2,00 do suco e R\$ 7,00 da sobremesa. Nos três primeiros dias da semana, Carol escolheu sempre o mesmo serviço, self-service com balança, e seus pratos pesaram, respectivamente: 425g, 735g e 920g. Pedro alertou sua amiga dizendo que ela deveria escolher melhor suas opções, caso queira economizar.

De acordo com a situação de Carol, resolva o que se pede:

- Como podemos expressar cada um dos serviços?
- Que opção melhor se encaixava em cada dia?

L8 – Restaurantes self-service podem ser encontrados em todas as regiões do Brasil. Em um deles, na região do Nordeste, cobra-se R\$ 1,99 por cada 100g de comida, já em outro restaurante, na região Sul do Brasil, cobra-se R\$ 3,80 por cada 100g de comida. Em uma viagem de trabalho para o Nordeste, dois amigos serviram-se em um restaurante, um deles consumiu 540g e o outro 660g. Já em outra viagem de trabalho para a região Sul, os dois amigos comeram a mesma quantidade que comeram no restaurante do Nordeste. Qual valor que cada um pagou por região?

L9 – Semana passada, eu e meu digníssimo esposo formos ao restaurante Self-Service “Le Chateaubriand”, para almoçarmos. Ao entrar, nos deparamos com um anúncio:



Então decidimos provar o tal prato especial, que, por sinal, estava maravilhoso, lembrando que, a balança já dava o desconto automaticamente do peso do prato, no valor do prato vinha grátis 2 águas de 250 ml cada, e se a pessoa optasse pelo suco, o valor da jarra de suco de qualquer tipo de fruta custava R\$ 8,00, com 600 ml. Tinha também várias opções de sobremesas, cada uma mais gostosa que a outra, só de ver, porém, como estou acima do

peso (massa), eu não quis nem saber o valor, para não cair em tentação. Sendo assim, o meu esposo, que é bom de garfo, consumiu 730 gramas e tomou um copo de água de 250ml, e eu consumi 200 gramas e também tomei um copo de água de 250ml.

Baseado nas informações acima, quanto meu esposo pagou em reais pelo consumo, e eu?

L10 – Em restaurantes situados no estado de São Paulo, região Sudeste do Brasil, são servidas as refeições através de self-service com balança. Em 2020, cobrava-se por cada grama de comida, aproximadamente, 0,088 centavos. Já em 2021, o valor cobrado por cada grama era 0,11 centavos.

De acordo com o enunciado, responda os seguintes itens:

- Supondo que a média de peso de uma refeição será 650g, quais seriam os valores finais a serem pagos, aproximadamente, por cada refeição nos dois anos, 2020 e 2021?
- Considerando Y como o valor final da refeição e X o valor do peso da refeição, determine as funções correspondentes às informações dadas no enunciado referentes aos anos 2020 e 2021.
- Utilizando como base as funções determinadas no item anterior (c), construa os gráficos das duas funções, onde x varia de acordo com o peso da refeição, ou seja, para $x=650g$ e $x=730g$. Após a construção dos gráficos, descreva qual a diferença entre eles. (Obs.: fazer a construção utilizando a calculadora gráfica).

L11 – Um grupo de 4 amigos resolveu almoçar juntos após a aula. Ao decidir o local, foi levado em consideração o valor do quilograma. A primeira opção custava 3,49 a cada 100g, o segundo custava 2,39 a cada 100g, já a última opção custava 1,99. Ambos davam direito a duas carnes, e apenas no segundo, a um copo de suco gratuito. Qual o local com o melhor custo-benefício? Após a escolha do local, quanto custou a conta final, levando em consideração que o amigo 1 comeu 380g, o segundo 650g, o terceiro 495g e o quarto 412 g?

L13 – Em uma determinada cidade da Paraíba, abriu-se um restaurante self-service, onde o preço a ser pago está relacionado com o peso da comida, de forma que a cada 100g de comida o cliente pagará R\$ 5,90 reais. Neste restaurante, também é cobrada uma taxa de serviços, caso o cliente deseje realizar a refeição no local, esta taxa é de 1,27 reais por pessoa. Caso o cliente opte por levar a refeição para realizar em outro lugar, deverá ser pago uma taxa de 1,49 reais pela embalagem. Desta forma, sabendo que um casal foi a este restaurante e que, após se servirem, o peso dos pratos foi de 410g e 730g da mulher e do homem, respectivamente, e que, após se alimentarem no local, montaram uma refeição para levar ao seu filho, que após esta montada pesou 390g. Ao final, quanto o casal pagou neste restaurante?

Neste momento, a análise feita dos problemas propostos não tem o objetivo de aprofundar os elementos identificados, mas proporcionar uma visão geral dos aspectos numéricos, contextuais e pedagógicos dos problemas à luz da Coerência Didática (Abramovich; Cho, 2015), e como a exploração do problema pode ser facilitada pelo uso didático da CGD.

Inicialmente, observamos que todos os problemas apresentam dados numéricos dentro do campo dos números racionais, o que nos faz perceber a necessidade do uso didático da CGD para um melhor aprofundamento da exploração do problema.

A exploração de problemas dessa natureza nos coloca diante dos desafios que muitos alunos têm em realizar operações básicas com números racionais na forma decimal. Outro apontamento importante é referente aos tipos de variável (contínua e discreta), que

desencadeiam questionamentos importantes sobre o domínio e a imagem da função, acentuando ainda mais a necessidade do uso didático de uma CGD para que possamos ir além das limitações do lápis e papel na transição entre a representação algébrica e gráfica das funções.

Os problemas propostos por L1, L2, L3, L8 e L10 sofreram influência da informação pesquisada e compartilhada por L10, ao trazer dados de outras regiões do país, provocando uma modificação no contexto do ponto de partida.

De modo geral, todos os problemas necessitam de uma nova redação para atender a critérios da língua materna e da linguagem matemática. Ao analisarmos os problemas propostos por L1, L2, L3, L5, L8 e L10, os dados numéricos e o contexto apresentam coerência. Em L1, o problema propõe uma solução numérica, porém, seus dados têm potencial para explorações capazes de adentrar a discussões algébricas e gráficas. Em L2, chamamos atenção para o excesso de dados presentes na redação do problema, que são desnecessários para resolver o que se pede, porém instiga novas explorações do problema.

O problema proposto por L5 nos coloca diante de dados numéricos plurais, fruto da ampliação do contexto do ponto de partida, e que dialogam de forma harmônica. Já em L10, destacamos o fato de, ao manter o contexto do preço de comida em restaurantes, apresentar os valores por grama de comida e não a cada 100g, como os demais problemas.

Apesar de os problemas propostos por L4, L9 e L11 trazerem um contexto interessante, não conseguem dialogar com os dados numéricos apresentados. É possível que, em um primeiro momento, os propositores desses problemas não tenham identificado a incoerência didática. Porém, a nossa análise é feita a partir da exploração e resolução do problema, dando-nos condições de identificar essas limitações.

L4 traz um contexto interessante. Porém, por se tratar de um Programa Social existente, deveria ter usado dados que correspondessem à realidade. Ao citar uma situação hipotética, ficamos intrigados ao observar que a soma de três refeições de uma família com insegurança alimentar pese apenas 590g, bem como as demais informações do problema.

Ao explorarmos algebricamente e graficamente o problema proposto por L9, percebemos que os intervalos utilizados para relacionar o valor a pagar com a quantidade de gramas consumidas não são vantajosos para um restaurante, tendo em vista que se alguém consumir mais de 700g irá pagar menos do que quem come entre 500g e 700g, sendo necessário uma exploração do problema para um ajuste no intervalo apresentado.

A justificativa para a incoerência didática de L11 é identificada inicialmente pela ausência de dados verbais para uma melhor compreensão e exploração do problema.

Ao direcionarmos nossa atenção para a coerência pedagógica dos problemas, com vistas à abordagem do conteúdo de função afim em nível médio, observamos que os problemas propostos por L2, L3, L4, L5, L8, L9, L10 e L11 apresentam dados numéricos que induzem, no primeiro momento, à resolução por meio de regra de três, envolvendo conceitos básicos de proporcionalidade. Observamos durante a 1ª Travessia que esse conteúdo aparece com frequência nos problemas propostos, sendo justificado pela aplicação e relação com o cotidiano dos alunos.

Dentre os últimos problemas destacados, mesmo alguns não apresentando CD, ao olharmos apenas para os dados numéricos, é possível pensar em uma solução ao representar algebricamente o problema por meio de uma função afim linear. Para se chegar a essa abordagem de nível médio, esses problemas precisam trazer questionamentos que levem os alunos a pensar algebricamente e graficamente, não buscando apenas a solução aritmeticamente por meio da regra de três e/ou ideias de proporcionalidade, atingindo uma coerência pedagógica para nível médio. Ao representarmos algebricamente e graficamente todos esses problemas, podemos levar os alunos a construir ideias mais sólidas da relação entre a proporcionalidade e a função afim.

Destacam-se, entre os problemas propostos, os de L5 e L10. Em L10, o problema apresenta uma organização sequencial que começa com as ideias de proporcionalidade, segue com sua representação algébrica e gráfica, e sugere o uso didático da calculadora gráfica na exploração do problema. Por essa abordagem, percebemos uma coerência pedagógica de nível médio.

Em contrapartida, o problema de L5 traz uma riqueza maior de dados e detalhes em seu contexto. Os dados numéricos e o contexto dialogam com uma proposta de problema para alunos de nível médio, em que a exploração do problema estimula o estudo da função afim desde o primeiro momento. Ao solicitar a representação algébrica dos serviços presentes no contexto do problema, observamos um campo fértil para explorarmos a função afim mais profundamente, já colocando o aluno diante de uma função do tipo $f(x) = b$, $f(x) = ax$, $f(x) = ax + b$.

Além das características já destacadas juntos aos demais problemas e que são contempladas por L5, acreditamos que a exploração dos serviços apresentados no problema pode levar os alunos a abordar ainda mais a proposição de problemas, tendo como ponto de partida o contexto já apresentado, fórmulas matemáticas, representações gráficas, entre outros.

Ressaltamos que essa análise preliminar dos problemas é exclusivamente nossa, enquanto Pp, sem sofrer interferência da opinião dos licenciandos. Consideramos pertinente

esse momento para nos apropriarmos das ideias presente nos problemas e argumentar junto a eles durante a EPRP.

Comentário temático: Neste primeiro encontro da 2ª Travessia, destacamos a influência que uma informação externa pode provocar na exploração de um ponto de partida. Os problemas avançaram em direção a CD, apresentando, em sua maioria, uma carência na coerência pedagógica, pois a forma como esses problemas foram propostos estão em nível fundamental, necessitando uma melhor exploração para que atinjam o nível médio e permitam um avanço das ideias de proporcionalidade para linguagem algébrica e gráfica. Segundo o nosso olhar, destacamos os problemas de L5 e L10 frente aos demais para que possamos utilizá-los como ponto de partida para avançar com a EPRP. Os problemas propostos apontam a necessidade do uso didático da CGD para que possamos aprofundar suas ideias, por meio de uma precisão dos dados e um trânsito entre as representações algébricas e gráficas das funções. A não inserção desse recurso pode limitar a EPRP e exigir mais tempo de execução das atividades durante as aulas.

6.2 Proposição de Problemas e a Função Afim

12º Encontro - 2 aulas

Data: 21/10/2022

Iniciamos a aula compartilhando com os licenciandos todos os problemas propostos em arquivo PDF, por meio do grupo do WhatsApp, para leitura individual e posterior discussão coletiva.

Inicialmente, chamaram a atenção dos licenciandos os problemas propostos por L4, L5, L8, L9 e L10. L4, por envolver em seu contexto o programa do governo “Tá na mesa”, algo que faz parte da realidade de alguns licenciandos. L5, por apresentar diferentes opções de serviços oferecidos pelo restaurante, consequentemente, mais dados podem ser explorados. L8, pelo contexto em diferentes regiões do Brasil, especificamente Nordeste e Sul. L9, por usar da criatividade para apresentar um cartaz com informações do self-service. L10, por trazer em seu problema dados numéricos para cada grama de comida, diferente dos demais problemas, ao mesmo tempo em que faz vários questionamentos envolvendo a ideia de função e o uso didático da CGD. A partir disso, percebemos que o contexto sobressai os dados numéricos na análise dos problemas pelos licenciandos.

Diante do tempo, não tínhamos como fazer a exploração e resolução de todos os problemas, havendo a necessidade de escolhermos um problema para aprofundar a EPRP junto ao uso didático da CGD.

A continuidade da oficina não dependeria apenas da escolha de um dos problemas. Os licenciandos poderiam selecionar ideias relevantes de alguns problemas e propor um novo. Destacamos a importância da nossa análise antecipada dos problemas, pois já tínhamos ideia

de quais problemas tinham potencialidades de contribuir com esse momento da pesquisa, conduzindo a exploração dos problemas com mais propriedade.

Diante da leitura e exploração dos problemas, optamos por concentrar a atividade de EPRP no problema proposto por L5, passando a ser um novo ponto de partida. Tal escolha não significa que o problema estava pronto e acabado para ser explorado em sala de aula. O principal motivo que levou os licenciandos à escolha foram as opções de serviços que o restaurante oferece, com valores no conjunto dos números reais, ampliando as diferentes formas de abordar a função afim algebricamente e graficamente, estimulando o uso didático da CGD. Frete a isso, questionamos os licenciandos se seria possível abordar todo o conteúdo de função afim a partir da EPRP do problema proposto por L5.

Com isso, percebemos que os diferentes serviços seriam representados por funções do tipo $f(x) = b$, $f(x) = ax$ e $f(x) = ax + b$, chamando atenção para a abordagem dos diferentes tipos de função afim a partir dos seus coeficientes. Consequentemente, visualizamos como a CGD poderia estar potencializando a exploração desse problema, tendo em vista a presença de variáveis contínuas e discretas. É possível perceber em L5 um bom domínio do conteúdo matemático no momento da proposição do problema.

Junto com os licenciandos, destacamos essas informações para que mantivessem o foco na abordagem do conteúdo de função afim a partir do problema de L5 (ponto de partida), tais como a definição da Função Afim, comportamento do gráfico da Função Afim, crescimento e decréscimo, coeficiente angular, zero da função e estudo do sinal. Essas temáticas foram elencadas pelos licenciandos como temáticas que não poderiam faltar, à medida que fossemos avançando com a EPRP através da CGD.

Questionamos os licenciandos sobre como poderíamos iniciar a exploração do problema, levando-nos a abordar a definição da função afim em sua forma algébrica $f(x) = ax + b$.

Os licenciandos começaram a travar diálogos sobre o contexto do problema. Muitas eram as opiniões na tentativa de atingir uma coerência contextual cada vez mais significativa e que estivesse diretamente relacionada à realidade de todos. À medida que as discussões iam aumentando, percebemos que não tínhamos como tratar a coerência contextual separada da coerência numérica.

Analisando os serviços apresentados pelo restaurante, todos foram de acordo em manter, até o momento, os dados apresentados nos dois primeiros serviços: *“O primeiro serviço, self-service sem balança, tem um preço único de R\$ 15,00 e que independe da quantia posta. Já o segundo serviço, é cobrado R\$ 2,10 por cada 100g de comida.”* Até chegar a esse consenso,

muitos questionamentos foram levantados. De acordo com eles, os valores numéricos que estão presentes no problema fazem referência ao contexto de um restaurante popular de bairro onde o valor é acessível a todos.

Ao fazemos a releitura do texto do primeiro serviço, os licenciandos sentiram a necessidade de mudar a escrita: *“O primeiro serviço, self-service sem balança, tem um preço único de R\$ 15,00 independentemente da quantidade de comida”*. Dessa forma, entende-se que o texto fica mais coeso e coerente. Esses momentos de reescrita do problema foram presentes em toda a EPRP. Consideramos não ser necessário evidenciar todos esses momentos de reescrita do problema, ficando implícito o avanço à medida que formos descrevendo a EPRP.

Passamos a discutir qual seria o serviço mais vantajoso, a discussão ficou centrada nos dois primeiros serviços. Lembrando que, no primeiro serviço, é cobrado um preço único de R\$ 15,00 com self-service sem balança, e, no segundo serviço, cobra-se R\$ 2,10 a cada 100g de comida.

PP - Vamos analisar se os valores do segundo serviço estão coerentes?

L3 – Está muito baixo, não acham?

L13 – Está! Um quilo sai a R\$ 21,00.

L11 – Se em um serviço você só paga R\$ 15,00, como é o mesmo restaurante, tem que ter um equilíbrio financeiro.

L13 – Vamos supor que quem escolhe o serviço com o valor fixo coma muito. Se ele colocar mais ou menos um quilo, pagará em média R\$ 15,00. Se R\$ 15,00 é um quilo, 100 gramas dão R\$ 1,50.

L2 – Está bom!

PP – Nesse caso, será pago R\$ 21,00 por um quilograma de comida, mas em média quanto você paga? Quantos gramas vocês comem?

L11 – Eu acho que é de 500 a 800 gramas.

PP – Eu acho que a média é de 400 a 500 gramas. Vamos imaginar, se eu optar pelo serviço com balança?

L13 – Essa média tem que ser analisada. Os 100 gramas para chegar em um quilograma tem que dar um valor maior que R\$ 15,00, pois geralmente é para as pessoas que comem menos pagar um pouco mais.

PP – Será se quando vão analisar esse valor é observado a média de consumo de comida. Seria interessante a gente pesquisar?

L11 – Aumenta! Geralmente dá trinta e pouco o quilograma.

Aproveitamos para refletir o raciocínio apresentado por L13, ao argumentar a necessidade de analisar previamente os valores dos serviços, de modo que o restaurante tenha lucros. Durante a descrição e análises desses dados, percebemos o quanto a fala de L13 poderia ter sido mais explorada durante a atividade, pois essa reflexão gera dados importantes para a CD da atividade.

Ao explorarmos aritmeticamente esse contexto, percebemos que, para quantidades de comida inferiores a 714g, você sempre pagará menos que R\$ 15,00. Essa informação instiga a pesquisa sobre a média de consumo de comida nas principais refeições (almoço e jantar). Ao mesmo tempo, destacamos o quanto a representação algébrica e gráfica proporcionada pela CGD poderia ter potencializado esse momento da EPRP, nos deixando notar, em mais um momento, que o pensamento aritmético antecede o pensamento algébrico dos licenciandos.

Durante a atividade, realizamos uma breve pesquisa para tratar coerentemente o contexto e os dados numéricos do problema. Como resultado, temos que, para almoço e jantar, é considerado 300 a 400 gramas de alimento por adultos e de 150 a 250 gramas por criança. De posse dessas informações, os licenciandos continuaram com a exploração do problema.

L11 – Olhe, professor, só um pedaço de carne já dá em média 100 gramas.

PP – Então vamos colocar 500 gramas, imaginando que em média comemos meio quilo. Seria interessante optar pelo segundo serviço, pois pagará a metade de R\$ 21,00 que corresponde a R\$ 10,50.

L5 – No exemplo *b*, pede para analisar a mesma situação. Se deixar os mesmos valores em cada um dos serviços, veremos que, às vezes, o primeiro serviço é a melhor opção, depois o segundo, e assim por diante. Você precisa fazer a comparação.

L9 – Comparação com o contexto.

L2 – Suponhamos que seja um casal. Eles optariam pelos R\$ 15,00, já a criança optaria pela balança.

L11 – Meu marido sempre faz isso.

PP – Então, é mais vantajoso eu ir para o self-service sem balança e pagar R\$ 15,00 ou optar pela balança, já que eu sei que consumo em média de 400g a 500g?

L11 – O senhor ia para o peso.

L3 – Nesse caso, entra a questão da construção do problema. Por quê? Analisando o problema acima, tem que saber construir. Ele pensa na cabeça dele, tudo está vendendo. Porque o que atrai quando você está pensando na questão do peso você pensa logo: vou comer pouco e pagar muito. Então eu vou para o preço fixo. Ao fazer essa análise, você irá observar que, em meio quilo, você irá pagar R\$ 15,00, e se optar pela balança, pagará R\$ 10,50.

L11 – A pessoa não associa.

L3 – A pessoa não associa. Eu vou pagar para o meu filho aquele preço que dá muito pouco e eu vou pagar o preço fixo.

L11 – Mas, realmente, quando é no peso, é bem mais caro. Ali no Sudoeste tem um restaurante. O preço do self-service lá é 26 e pouco, eu acho. Você come à vontade, tem opção de tudo. Mas, no quilo, você paga quase R\$ 50,00. Normalmente, a diferença é bem grande. Ai o que é que eles fazem? Eles colocam esse de R\$ 50,00 para atrair as pessoas para o self-service, que é R\$ 26,00 e pouco, e eu ainda acho caro.

L9 – Mas eu estou entendendo o que A5 está querendo dizer. Realmente, se a gente for fazer a conta no contexto de cada um, como ele está propondo no problema, vai ter coerência. Se a gente modificar, não vai ter mais.

PP – Estou entendendo. A5 coloca esse questionamento mais à frente.

L5 – Pegando 425g e considerando o primeiro serviço, você pagará R\$ 15,00 independentemente. Mas, se você escolher o segundo serviço, pagará R\$ 8,92. Nesse caso, você optará pelo segundo serviço.

L9 – Se a gente pensar separadamente o que Pedro e Carol fizeram, cada um dará um resultado.

Quando se compara os valores dos serviços, fica a impressão que sempre será mais vantajoso escolher o primeiro serviço de self-service. À medida que a EPRP vai avançando, outros dados vão surgindo e gerando novas reflexões. Porém, em comum acordo, os licenciandos advogaram que a segunda opção de serviço procura atender as pessoas que comem abaixo da média. Para chegar a essa conclusão, se fundamentaram nos resultados apresentados pela pesquisa do consumo médio de comida no almoço e jantar. Mediante o relato, optaram por manter os dados no primeiro e segundo serviço.

Comentário temático: A análise que fazemos neste momento da atividade é que os licenciandos tentaram apresentar valores que sejam coerentes com a sua realidade, se colocando como cliente, não como proprietário do restaurante. Muitos deles acreditam comer além da média pesquisada (400g a 500g). Os valores numéricos e o contexto preservado até esse momento da atividade trazem consigo reflexos dos aspectos socioeconômicos deles e que não nos permite invalidar a coerência numérica e contextual do problema.

Em continuidade à EPRP, os licenciandos voltaram-se para o terceiro serviço apresentado por L5 em seu problema, que diz: *o último serviço, cobra-se R\$ 1,50 por cada 100g de comida, mais R\$ 2,00 do suco e R\$ 7,00 da sobremesa.*

L5 – Acho que agora fica interessante mudar o valor de R\$ 1,50.

PP – Aqui, a gente vai perceber que haverá um pouco de incoerência numérica e contextual também. Neste caso, observamos que, se ele comer um quilo, vai pagar apenas R\$ 15,00 mais R\$ 2,00 do suco, totalizando R\$ 17,00.

L11 – Fica a mesma coisa do primeiro.

PP – É. Então, nesse terceiro serviço, o que alteraríamos? Deixaria o mesmo valor e só acrescentaria o suco?

L13 – Aumentaria. Ia para R\$ 2,30, para adicionar 20 centavos a cada 100 gramas a mais do que o exemplo anterior, o segundo, para compensar o suco. Ah, não! O suco já é pago. Dá certo não...

PP – O que vocês dizem a respeito desse terceiro serviço?

L12 – E se eu não quiser tomar suco?

PP – Se você não quiser tomar suco, pode pegar o serviço dois.

L11 – Ou o 1.

PP – Isso!

L6 – Essa parte dos R\$ 1,50 poderia ser a parte vegana, não é? Já que é mais barato: vegana e o suco. Para manter o valor, seria só com o suco. Para ser mais caro, ele teria que oferecer algo a mais do que o de cima. E já que o valor é menor, pode ser apenas a parte vegana com o suco natural.

PP – Então, no caso aqui, a gente pode mencionar esse terceiro serviço como um self-service vegano com balança, além do suco.

L4 – Mas se não me engano, comida vegana é mais cara, não é?

PP – É?

L2 – É bem mais cara!

L3 – É mais caro.

L11 – Aí o valor muda.

PP – Então muda o valor.

L11 – Eu acho que poderia colocar o suco tanto no primeiro como no segundo.

PP – Pode colocar. Mas o interessante é que, nesse segundo caso, não tendo o suco, fica uma função linear. E nesse outro, ao adicionar o suco, tanto o coeficiente a como o coeficiente b aparecem, está entendendo? No primeiro serviço, só aparece o a e não b . Devemos pensar em utilizar esse exemplo para explorar o máximo possível o conteúdo de Função Afim. Então, é preciso pensar em representação gráfica e construção de tabelas, que são recursos disponíveis na CGD. No final, tudo isso resultará no PE, que consiste em uma proposta didática de como trabalhar a Função Afim a partir desse problema, utilizando os recursos tecnológicos, como a CGD, e tudo mais.

PP – O serviço vegano é mais caro. Então, o terceiro serviço cobra...

L11 e L13 – R\$ 2,50.

PP – Só 2,50?

L3 – R\$ 3,50.

PP – Vamos pesquisar na internet para saber a diferença de preço entre um self-service vegano e um normal.

L3 – A2 já está pesquisando.

PP – Quanto custa um prato de comida vegana? No almoço, varia de R\$ 7,00 a R\$ 10,00.

L12 – Mais barato!

L11 – Sim, no entanto, vale ressaltar que essa informação é de 2018.

PP – Mas, então, vamos analisar a média. Vamos pesquisar: é barato ser vegano? Em última análise, podemos concluir que ser vegano é econômico. No entanto, nunca se trata apenas de preço, mas sim da satisfação em adotar um estilo de vida que se opõe à crueldade e exploração animal.

L13 – Às vezes, confundimos comida vegana com comida, é... aquele pessoal que só come comida...

L9 – Vegetariano.

L13 – Sim, sem produtos químicos, agrotóxicos e afins, completamente natural.

PP – Exatamente, há diferença entre a pessoa vegana e a pessoa vegetariana...

L11 – Eu acho que deveria adicionar “self-service sem proteína”, para não precisar alterar o contexto das perguntas. Não seria melhor assim?

L11 – Sem a proteína. Mas poderia manter o valor, por exemplo.

L12 – Acho que poderia adicionar um pedaço de carne, pois até agora não foi mencionado nada sobre manter as porções. Não vi nenhuma menção a carne na questão.

L11 – Tem que observar o contexto das perguntas.

L12 – É limitado o pedaço de carne.

PP – Existe esse contexto sendo apresentado aqui. Por exemplo, geralmente são oferecidos tantos pedaços de carne. Se for escolhido um adicional, há uma taxa. Então, poderíamos

pegar o conceito do segundo self-service com balança e expandir aqui, incluindo a opção de duas proteínas.

L12 – Isso!

PP – E no terceiro serviço, a gente colocaria self-service com balança...

L7 – Mais dois reais que poderia ser o valor da taxa...

L3 – Sim, professor! E onde fica a taxa de desperdício? Em vez de ser uma cobrança adicional, poderia ser considerada uma taxa de desperdício, já que se trata de um self-service.

L12 – E o prato feito?

L7 - Mas para incluir o preço do prato feito, seria necessário oferecer outro serviço.

L2 – Mas deveríamos perguntar a A5 o que ele está achando dessas mudanças no problema dele.

L11 – Pode deixar esse terceiro self-service; ele poderia ficar mais caro, tendo a opção de colocar mais carne, por exemplo. Só isso! Deixar mais caro com quatro carnes, três carnes... Entendeu? É melhor!

PP – Manteríamos o preço anterior, só que colocaria um adicional de quanto?

L11 – No caso, não seria um adicional. Colocaria já um valor extra. É melhor!

PP – Então, podemos colocar assim: um self-service com balança e proteínas livres.

L1 – Pronto! Melhor!

L2 – Isso! Sem determinar a quantidade.

L11 – É mais considerável aumentar o valor dessa forma.

PP – Então colocaria assim: o terceiro serviço seria um self-service com balança e quantidade livre de proteínas.

L12 – Isso! Olha aí como ficou bom.

PP – Como é que a gente coloca aqui? Já o terceiro serviço, cobra o mesmo valor do anterior...

L11 – A cada 100 gramas, seriam R\$ 3,50, por exemplo.

L1 – Mas eu posso pedir para fazer o prato só de carne!

PP – Sim!

L11 – Você tem a opção de colocar só carne.

L13 – Mas eu colocaria um pouco mais caro, tipo R\$ 5,50, porque tem gente que logo olha o preço da carne.

L11 – R\$ 4,50 por exemplo, porque lá no restaurante que frequento é assim mesmo.

PP – Mas observem! Quando você representar essa função, que tipo de função ela será? Aparecem os coeficientes a e b ?

L1 – Mas não haverá suco?

A13 – Deixa o suco. Coloca R\$ 5,40 para cada 100 gramas e mais R\$ 2,00 pelo suco.

PP – Mas estou pensando nos questionamentos que A5 fez lá na frente.

L2 – Modificamos só um pouquinho.

I13 – O que deixa desinteressante é que, se deixar o suco aí, não há uma opção para quem desejar fazer apenas com pratos. Essa terceira opção sem o suco resolve isso.

L1 – Aí já inclui o suco. Se quiser algo diferente, converse com o gerente por fora.

L11 - Coloca assim: para mais serviços, fazer orçamento.

Até o momento da EPRP, os licenciandos não conseguiram chegar a um consenso entre os dados numéricos e o contexto presente no terceiro serviço. Percebemos que a EPRP não avança muito nesse sentido, porém, ao trazer novas informações para o problema, eles são capazes de refletir sobre a sua pertinência. Os momentos de reflexões e sínteses são extremamente importantes na EPRP, desenvolvendo nos alunos essas capacidades que, na maioria das vezes, ficam alheias às aulas de Matemática e fazem parte do desenvolvimento cognitivo.

Esse caminhar exploratório vai aflorando assuntos que tangenciam a discussão, tais como a diferença entre comida vegana e vegetariana. Essas temáticas passam a ser melhor compreendidas pelos licenciandos a partir da exploração do problema, nos fazendo destacar essa característica que tem a EPRP, que consiste em usar a Matemática como um meio para compreender fenômenos de outras naturezas.

PP – Como é que a gente fecha esse terceiro serviço? Está complicado esse terceiro serviço. No problema, A5 tinha colocado cobrando R\$ 1,50 por cada 100 gramas de comida, mais R\$ 2,00 de suco. Não poderia deixar o serviço vegano?

L2 – Pode!

PP – Porque a pessoa vegana é diferente da vegetariana, ela não come nada de origem animal.

L1 – Isso!

L9 – O vegetariano come ovo, peixe...

L11 – Mas aí o vegetariano também entraria. Porque aí você colocaria o que queria comer.

L2 – Vegano é o que não come...

L1 – Carne de peixe.

L2 – E não utiliza nada de animal.

L6 – Tem derivados que são os laticínios, iogurtes...

L2 – Esse aí são ovolactos ou vegetarianos. É o que come ovo e laticínios.

L11 – Esse eu conheço, pois come frango.

L1 – E o que come frango, menos carnes vermelhas?

PP – Olha! Vegetariano é uma pessoa que segue o vegetarianismo estrito, abrindo mão de todo e qualquer tipo de produto de origem animal em sua alimentação. Portanto, além da carne, não comem ovos, laticínios e mel.

L2 – O vegano é o radical.

L11 – Não comem ovos e nem peixe?

L9 – Eu também achava que o vegetariano comesse peixe.

PP – Não comem mel porque o mel vem da abelha. O ovo vem da galinha. O leite vem da vaca.

L2 – Coloca ovolacta ou vegetariano. É quando come ovo e tem laticínio.

PP – Eu acho interessante incluirmos nesta questão vegano ou vegetariano, porque podemos, em algum momento da atividade, estimular os alunos a pesquisarem ou discutirem isso. Pois vejam, estamos com muita dificuldade para entender a diferença entre vegano e vegetariano.

L9 – Eu mesma não sabia disso.

PP – Então, no caso aqui, a gente deixa um self-service vegetariano com balança e o suco. Aí vamos manter o preço. Esse cobra R\$ 1,50 por 100 gramas de comida vegetariana...

L9 – Mais R\$ 2,00 do suco.

PP – Agora, o quarto serviço será um self-service de sorvete como sobremesa. Como a gente coloca isso aqui? O quarto serviço...

L11 – Uma bola de sorvete equivale a R\$ 1,00.

PP – Colocar assim: é cobrado R\$ 1,00 por cada bola de sorvete. Certo?

Todo esse trabalho realizado em torno do problema trouxe poucas modificações e avanços aos dados numéricos. As reflexões e sínteses estavam mais preocupadas em manter uma coerência do contexto com os dados numéricos apresentados inicialmente. Nesse sentido, destacamos a importância desses momentos de discussões, reflexões, análises, resoluções, proposições e pesquisas que afloram do trabalho com a EP para o desenvolvimento cognitivo do aluno na Matemática, rompendo a ideia de uma ciência neutra e centrada apenas em conceitos internos. O aluno passa a pensar a Matemática a partir de outras temáticas, à medida que também vai aprendendo outras temáticas a partir dela.

Contribuindo com o caminhar da EPRP, L5 tece comentários, sugestões e reflexões sobre o problema proposto por ele inicialmente. Na tentativa de apresentar um resultado (R) a partir do T-RS, L5 sugere um novo serviço, chamando nossa atenção à forma como se coloca e os argumentos que utiliza para se justificar.

L5 – E se fizéssemos um self-service só de carne isolado? Daria uma função identidade.

PP – 100 gramas de carne, você pagaria quanto?

L9 – Um quilo de carne está uns R\$ 60,00 hoje em dia. Coloca R\$ 6,00.

L11 – Que carne cara é essa?

L9 – Coloca R\$ 50,00. 100 gramas por R\$ 5,00.

L11 – Lula ainda ganhou para estar comendo picanha.

A exploração desse contexto nos levou a perceber a ausência de CD, uma vez que não existe uma relação de identidade com a quantidade de carne consumida e o valor a pagar. Porém, o erro de conceito apresentado por L5 nos fez refletir sobre a importância de abordarmos esse conceito no problema, ao mesmo tempo em que desencadeou um novo ponto de partida.

Ao discutimos a classificação das funções que vínhamos construindo e explorando até o momento, percebemos que em todas que possuíam coeficiente a , ele estava positivo. A exploração do problema passou a ter como ponto de partida a proposição de um problema em que a função afim apresente o coeficiente a negativo ($-a$) para que pudéssemos abordar o comportamento do gráfico da função à medida que a EPRP fosse avançando.

PP – Em todas essas funções, como será o gráfico?

L3 e L2 – Crescente.

PP – Não seria interessante colocarmos o gráfico decrescente em um deles?

L2, L3 e L13 – Como?

L9 – $f(x) = x - b$

PP – Nesse caso aqui, quem é que vai determinar se a função é crescente ou decrescente?

L9 – A incógnita, né?

PP – É o a ! Então, pensaremos em um valor a aqui. Podemos pensar neste exemplo ou em outro. Por exemplo, o que é que dá a ideia de decrescimento? Perca? E vocês já falaram isso. Podemos mudar a questão...

L9 – Desperdício.

L11 – Então, como é que a gente vai colocar se vai somar dinheiro? Se desperdiçar aumenta dinheiro e não diminui.

L6 – O desperdício não seria o b ? Seria o valor a pagar, as gramas e o valor da taxa de desperdício.

L13 – Não, a é o valor.

L11 – Mas, normalmente, o desperdício sai bem mais caro que o quilo. As pessoas dizem que é para evitar que o público desperdice comida.

L9 – A cada 10 gramas de desperdício, cobra-se uma taxa de tanto.

L11 – Não, uma taxa fixa, certo?

PP – O interessante dessa informação sobre o desperdício é criar uma função onde a seja negativo. Assim, teremos um gráfico decrescente. Mais adiante, na exploração do conteúdo, podemos introduzir comparações e induzir o aluno a chegar à ideia de quem é responsável pelo crescimento ou decrescimento do gráfico. Portanto, devemos estar pensando em situações em que levaremos o aluno a refletir sobre o conteúdo.

L9 – Então, inclua o desperdício, pois quanto mais você desperdiça, mais você paga.

L13 – Eu acho que para tornar isso negativo, tem que ter algo antes da questão, como dar um desconto, que seria subtraído desse desperdício.

PP – Pode-se pensar nisso!

L4 – Ou também poderia mudar nas gramas. Porque não será em relação a essas gramas aqui que Carol comerá. Aí, começaria com ela desperdiçando mais e diminuindo ali o custo.

L11 – Sim, pessoal, se for para o PROCON³³, tudo vai ficar complicado nessa questão. Porque se você já está pagando, vai ter que pagar de novo. Se eu já paguei pelas gramas, posso desperdiçar o tanto que eu quiser.

PP – Justamente!

L11 – Eu metia logo um processo se viesse!

PP – É, tem isso também! A13 como foi que tu disseste?

L13 – Eu falei que deveríamos colocar alguma coisa ali com desconto, certamente a partir de um certo ponto ter um desconto no valor correspondente, com um valor final. Aí, se houvesse algum desperdício, esse desperdício seria subtraído do desconto.

L9 – Perde o desconto!

L13 – Daria o desconto, por exemplo, a partir de certo peso, no caso. Você ter um desconto de tanto. Entendeu? Aí, se houvesse desperdício, veria que faria uma relação com o desperdício e subtrairia.

L3 – Ou poderia ser assim: se passasse de um quilo, poderia, sei lá, se você pegasse um quilo e meio, por exemplo, teria um desconto ou abatimento no peso do seu prato de

³³ Departamento Estadual de Proteção e Defesa do Consumidor.

comida. Ou, se você passasse uma semana consumindo no mesmo restaurante, na próxima semana teria um certo desconto.

L11 – Cartão Fidelidade.

L3 – Cartão Fidelidade! Vou anotar aqui.

PP – Como poderíamos montar uma função com esse cartão fidelidade?

L3 – No começo, colocaria x e, no caso, seria mais $-bx$. Porque x representa a quantidade de gramas, certo? O a seria o preço que ele estaria pagando e b seria o preço do desconto.

PP – É? No caso, como ficaria aí o que você está dizendo?

L3 – $ax - bx$.

PP – $-bx$?

L3 – É!

L3 – Não! Seria $ax - bx$. Porque ax seria o valor que você estaria pagando pelas gramas e $-bx$ porque b seria o preço que estaria pagando pelo desconto do cartão fidelidade e pelas gramas.

PP – É. Mas, x e x não dará certo.

L13 – O gráfico tem que ficar decrescente e só fica decrescente no a .

L6 – Essa questão do cartão fidelidade eu não estou entendendo muito bem como é que ficaria o a negativo.

L3 – A questão é como esse a vai ficar negativo?

L13 – Como analisar?

L11 – Professor, já estamos com a mente cansada!

Ao trazermos o enfoque desse momento da EPRP a partir do ponto de partida, o coeficiente a negativo da função afim, percebemos que os licenciandos não dominavam o conceito matemático por traz dessa ideia. Inicialmente, eles apresentaram insegurança em afirmar qual seria o coeficiente responsável por determinar o comportamento do gráfico, além de confundirem com a variável x . Em seguida, afirmamos que o coeficiente a caracteriza o comportamento crescente ou decrescente.

A nossa postura, enquanto Pp, neste momento da EPRP, compromete o desenvolvimento do raciocínio do aluno, tendo em vista que não demos espaço para pensarem ou se expressarem um pouco mais a respeito do conceito matemático em discussão. Na EPRP, a autonomia do aluno e a liberdade de tempo para que ele possa realizar o T-RS precisam ser amparados pela mediação do professor. Porém, essa mediação não deve antecipar resultados e as respostas devem vir com novas provocações que levem os alunos a desenvolver o seu raciocínio a respeito do que se está estudando.

Ao apresentarem um contexto que fosse traduzido em um valor numérico negativo, percebemos uma tentativa de utilizá-lo como pretexto para justificar os números. Essa postura desencadeia a incoerência didática do problema.

Durante a EPRP, é importante que os próprios alunos consigam perceber essas incoerências a partir da exploração do problema. Nesse cenário, L11 chama atenção para o

contexto que os licenciandos estavam moldando para o ponto de partida, trazendo a informação crítica de uma possível violação dos direitos do consumidor, embasada em dados do PROCON. Tal postura nos faz ver a riqueza dos momentos de EPRP, em que o aluno se encontra em um ambiente aberto a outras discussões.

A partir do comentário de L11, percebemos que os licenciandos estavam tentando criar um contexto que não condizia com a realidade, usando informações apenas para justificar os dados numéricos. Ao prosseguir a EPRP, observaram que não estavam tendo êxito com a exploração do problema neste momento da atividade e preferiram dar continuidade em outro momento. As dificuldades dos licenciandos giravam em torno tanto do contexto como da interpretação de quem seriam os valores numéricos e a variável na função afim. Por se aproximar do final aula, acatamos a sugestão e demos uma pausa na EPRP.

Diante das inúmeras dificuldades apresentadas pelos licenciandos neste momento inicial da EPRP, também as percebemos com o uso didático da CGD. A ausência de contato com recursos dessa natureza nas aulas de Matemática reflete tímida inserção durante a EP e a dificuldade de pensar a partir das funcionalidades possibilitadas por ela.

Para finalizar a aula, reforçamos alguns encaminhamentos da atividade EPRP, ressaltando a importância de a atividade ser mediada pela CGD. Em seguida, motivamos os licenciandos a pensarem como iniciar a atividade, abordando a ideia de função afim.

PP – Mas, imaginem que vamos fazer uso didático da calculadora gráfica. Uma coisa que quero apresentar a vocês é, por exemplo, se formos trabalhar manualmente esse exemplo com os alunos da Educação Básica... Observem que estamos utilizando dois vírgula dez (2,10) e um vírgula cinquenta (1,50). Estamos utilizando números na representação decimal. Seria interessante, para um primeiro momento, trabalhar esses números sem o uso didático da calculadora gráfica?

L13 – Eu acredito que, como se trata de dinheiro, eles teriam mais facilidade.

PP – E na representação do gráfico?

L11 – Oh professor, sobre essa calculadora! Eu ainda não sei muito porque cheguei ontem. Mas, se ela enquadra na realidade?

PP – Se enquadra, já usamos.

L11 – Em uma escola pública?

PP – Sim! É um aplicativo.

L11 – Mas pode ser pelo celular? É isso que estou dizendo. Acho que em toda escola não.

PP – Não, não tem! Mas isso a gente já discutiu. Por exemplo, nem todo mundo tem, mas não podemos utilizar isso como um fator limitante, porque, querendo ou não, a maioria dos alunos hoje possui. E mesmo que todos não tenham, podemos adaptar para que eles façam em grupos ou com quem tem, certo? Alguma coisa desse tipo. E tanto pode ser utilizado no smartphone como também no computador, no navegador. Pode-se pensar em fazer no laboratório. Então, há várias formas de utilizar essa calculadora gráfica.

L2 – E não precisa de internet.

PP – Então, continuando... Com esse problema inicial, essas questões aí desses quatro exemplo. Como é que poderíamos inicialmente questionar e levar o aluno à ideia de função? Então, vejam, quais recursos temos lá na calculadora gráfica? Temos a opção de criar uma tabela, ao mesmo tempo que construirmos a tabela, irá aparecendo o gráfico. O que poderíamos pedir primeiramente para eles fazerem nesse sentido para chegarmos à ideia de uma função afim?

L9 – Representar graficamente o problema?

PP – Primeiramente, já seria interessante começar pedindo para representar graficamente?

L2 – Não, teríamos que resolver primeiro, né?

L9 – Iríamos colocar cada um dos serviços separados. Colocaria o serviço de Carol e o de Pedro, porque ele colocou cada um dos serviços. Nesse primeiro serviço, cobra R\$ 15,00, e o outro tem R\$ 15,00 a balança preço único. Aí iríamos trabalhar com gramas. Teríamos que usar a unidade de medida em gramas, nesse caso. O valor total colocaria o valor e as gramas de cada um... Aí, não sei, deixa eu ver... Aí já desses 420 gramas... porque deveríamos deixar uma unidade de medida só, ou quilo ou gramas, e não só em gramas para dar certo esse resultado, né isso? Aí, depois que colocasse a unidade de medida, aí multiplicaria pelo valor, aí encontraria o valor de cada um. Depois que encontrasse o valor de cada um, vamos representar esse valor graficamente.

PP – Certo! Aí seriam dois gráficos ou um único gráfico?

L9 – Poderia colocar apenas um gráfico representando...

PP – Porque escolheram o mesmo serviço. Não é porque tem o Pedro e a Carol que serão gráficos separadas para o Pedro e a Carol. Será um gráfico para cada serviço.

L5 – Se pudermos, a partir da sua pergunta, abordar a questão, então seria interessante um gráfico para cada um. Por exemplo, o que está variando ali, a questão do peso...

L9 – Então, seriam dois gráficos?!

L5 – Não, mas para introduzir, identificar o que seria cada termo que vai compor a função, assim, o que vai ser $ax + b$?

L9 – Entendi.

L5 – Então, o que vai variar?

L9 – O que seria x e o que seria y .

L5 – Isso!

PP – Aí para pegar, por exemplo, temos quatro serviços, para introduzir essa ideia seria mais interessante começar por qual serviço?

L13 – O primeiro.

L9 – O fixo, né? Aí faz...

PP – É?

L11 – Como?

PP – Para definir a função afim da forma $f(x) = ax + b$.

L9 – Não, para definir a função seria no dela, o da Carol.

L1 – Eu acho que é o que a incógnita vai variar, acho que a segunda função que vai dar a linear.

L9 – O da Carol, dá para representar a função afim no dela.

L3 – ax .

PP – Então, mas é qual serviço? O primeiro, o segundo, o terceiro ou o quarto?

L1 – Eu acho o segundo.

L9 – O Segundo.

L13 – Eu acho o terceiro.

PP – O Terceiro, A13?

L13 – Porque o terceiro tem a forma $ax + b$.

L1 – Mas é a forma do segundo.

L9 – O segundo serviço já daria a forma.

PP – Sim, é verdade! L13 está correto. É o terceiro que tem $f(x) = ax + b$. Não é?

L13 – Aí depois ele continua com os outros.

Ao destacarmos esse diálogo ao final deste encontro, observamos uma discussão em torno do uso, adaptação e acessibilidade da CGD. Ao destacarmos anteriormente a importância do uso didático da CGD para explorar funções no domínio dos reais, L13 acredita que, por estarmos utilizando um contexto monetário, eles teriam mais facilidade.

Em se tratando da CGD, destacamos a importância de adaptar o ensino para diferentes situações, considerando a disponibilidade de recursos dessa natureza. Esse momento foi fortemente induzido pelos questionamentos apresentados por L11. Com isso, deixamos claro a possibilidade de adaptar atividades para grupos de alunos, mesmo que nem todos tenham acesso à mesma tecnologia.

Todo esse cenário levou os licenciandos a discutir se é mais apropriado começar representando graficamente ou resolvendo o problema manualmente antes de recorrer à representação gráfica. São reflexões dessa natureza que vão nos ajudando a compreender o lugar da CGD na EPRP, ao mesmo tempo em que observamos qual representação (verbal, numérica, algébrica ou gráfica) traz melhor contribuição para determinado momento da exploração do problema.

Comentário temático: Durante o processo de escolha de um problema para realizar a EPRP, percebemos que o contexto sobressai aos dados numéricos na análise realizadas pelos alunos. Ressaltamos a importância da exploração prévia dos problemas pelo professor, proporcionando uma melhor mediação da EPRP; mesmo assim, algumas informações importantes ainda acabam passando despercebidas. O acesso à internet qualifica a atividade de EPRP, tendo em vista a necessidade de buscar e validar informações que colaborem com a CD do problema. Percebemos que não é possível tratar a coerência contextual separada da coerência numérica. A escolha do problema de L5 nos fez perceber um bom domínio dos conceitos matemáticos de sua parte, diferentemente da maioria dos licenciandos. Mesmo diante das dificuldades apresentadas pelos licenciandos durante a EPRP, não é interessante antecipar resultados ou apresentar respostas prontas, é necessário ter liberdade de tempo para que o aluno possa desenvolver seu raciocínio e aprender com seus próprios erros. Diante do cenário contextual e numérico presente no problema, podem advogar por uma incoerência. No entanto, ressaltamos que os dados mantidos pelos licenciandos fazem referência à sua realidade social. Além do mais, percebemos que, ao explorarem o problema, estavam se colocando mais como clientes do que como donos dos restaurantes. À medida que a EPRP avança, outras temáticas vão surgindo e passam a ser discutidas e mais bem compreendidas a partir da Matemática, sendo essa uma característica importante desta metodologia de sala de aula. Da mesma forma, vão surgindo novos pontos de partida, que vão moldando o caminhar da EPRP, refletindo as limitações dos

licenciandos frente às ideias e conceitos matemáticos. As diferentes representações proporcionadas pela CGD levam os licenciandos a refletir sobre qual delas melhor qualifica determinando momento da EPRP, ao mesmo tempo em que faz um paralelo com a exploração sem o uso didático desse recurso.

6.3 Discutindo ideias de proporcionalidade

13º Encontro - 2 aulas

Data: 27/10/2022

Na aula anterior, já tínhamos discutido que o terceiro serviço deveria ser explorado inicialmente para abordar a ideia de função afim. A partir desse resgate, demos continuidade à EPRP.

PP – Por que o terceiro?

L2 – Porque ele tem todas as variáveis.

L1 – Por conta de a função estar completa.

PP – No caso, os coeficientes, né? Os coeficientes a e b são diferentes de zero.

L2 – Isso!

L3 – É uma função completa.

Retomamos o problema de Carol, que escolheu o mesmo serviço nos três primeiros dias, e Pedro a aconselhou a fazer escolhas mais econômicas. O enunciado do problema de L5 que estamos explorando, apresenta duas questões: A) como expressar cada serviço? B) Qual opção é mais adequada para cada dia? Sugerimos a introdução do uso didático da CGD, explorando recursos como a construção de tabelas, representação algébrica e gráfica. A discussão se concentrou na importância de explorar a parte algébrica antes da gráfica, identificando os coeficientes da função afim. Os licenciandos propuseram questionamentos, incluindo a expressão algébrica e a visualização gráfica na CGD para enriquecer a análise do problema.

L3 – Eu acho que, por exemplo, poderia ter uma letra “c” pedindo para ele identificar qual o tipo de função representa cada um dos quatro serviços.

PP – No caso, por exemplo, na letra “a” ele já pede isso “como podemos expressar cada serviço?”

L3 – Mas dessa forma aí fica muito aberto.

L1 – Algebricamente.

PP – É, fica muito aberto. Então, expressar algebricamente. Muito bem! Porque aí ele pode utilizar qualquer tipo de representação.

L2 – Isso.

PP – Aí é interessante, como podemos expressar algebricamente cada um dos serviços?

L3 – Isso! Cada tipo de serviço.

PP – Então, poderíamos manter essa letra “a” como sendo: como podemos expressar algebricamente cada um dos serviços?

L2 – Sim!

L9 – Colocaríamos até algebricamente e geometricamente, os dois.

L11 – Aí já seria outra letra, não L9?

PP – É, mas será que não seria interessante explorar logo essa parte algébrica para depois ir para a gráfica?

L1 – É porque geometricamente teria a calculadora que vai mostrar o gráfico.

PP – É!

L1 – Mostrar a função.

L9 – Não está perguntando aí para mostrar na calculadora?

PP – Isso.

L9 – Aí a forma geométrica também será visualizada na calculadora, ou então colocava como a letra "c".

PP – Isso, pode vir como uma letra "c". Mas, por exemplo, antes de chegar no gráfico da função afim, o que é interessante o aluno saber da função afim?

L3 – Calculá-la.

L1 – O que é cada coisa. O que é cada coeficiente. O que é o "a", o que é o "b".

L11 – A definição.

PP – Exatamente.

L1 – O que varia e o que não varia.

L3 – A construção dela.

PP – É. Então, antes de chegar na parte gráfica, talvez seja interessante explorarmos mais a algébrica, para definir e identificar os coeficientes e tudo mais, e partirmos para a gráfica. O que é que vocês acham?

L1 – É interessante.

L3 – Concordo.

Comentário temático: A última fala do Pp destacada acima, nos traz uma reflexão *a posteriori*. Será que muitas das denominações algébricas não foram construídas a partir da visualização gráfica? Por que sempre partir do algébrico para o gráfico? Talvez essa fala/atitude ainda sofra forte influência da manipulação algébrica em sala de aula, que sempre antecede a visualização gráfica. À medida que a EPRP vai avançando, conseguimos perceber uma mudança nessa postura, a partir do uso didático da CGD.

Em seguida, o Pp questiona a respeito da redação do contexto do problema. Já fazendo reflexões sobre o contexto e os serviços que vêm sendo oferecidos pelo restaurante, L12 sugere mudanças de modo a deixar mais clara a coerência do problema, incluindo a ideia sugerida para o quarto serviço.

L12 – Tem que mudar algo; nesse quarto serviço está falando só de R\$ 1,00 por bola de sorvete, não menciona gramas de comida e nada assim. Como está perguntando qual opção é melhor para cada dia, eu eliminaria a última. Acho desnecessário ali no quarto serviço.

L2 – Outra coisa: ali só está cobrando R\$ 1,00 por cada bola, mas, e se for na casquinha? A casquinha também é cobrada à parte. Normalmente, você toma o sorvete com casquinha.

L12 – É.

L2 – Dependendo do local.

L12 – Tem que fazer um que tenha também.

L2 – Tem que especificar que era tipo no potinho.

PP – É. Coloca aí que é no potinho e deixa claro que esse quarto serviço é de sobremesa. Porque aí ainda não está.

L11 – Isso!

L12 – Mas ali não rola, tipo assim, se ela tomou alguma coisa ou comeu alguma sobremesa, só fala o prato de comida que ela comeu.

L2 – Fala que ela só almoçou em um dos serviços ali embaixo.

L12 – É!

L1 – Ah, agora eu entendi.

L7 – No caso, poderia acrescentar ou na parte da comida ou acrescentar mais alguma coisa no quarto serviço, porque, como A12 falou, só está falando da parte da comida. Então, poderia especificar que ela poderia ter comido uma sobremesa.

L1 – Isso! Eu iria falar exatamente isso.

PP – Então, talvez precisemos voltar até no contexto lá de cima, que só fala em self-service... oferece quatro opções de serviços, são elas: self-service sem balança, self-service com balança, self-service vegetariano com balança e suco e self-service... ah, mas aqui em cima tem self-service de sorvete como sobremesa. Falta melhorarmos aqui. Porque foi colocado que, pelo serviço, é cobrado R\$ 1,00 por cada bola de sorvete. Ou já fica claro depois que a pessoa ler lá em cima, o que é que vocês acham?

L11 e L3 – Fica claro.

PP – Fica claro, né! Que a pessoa vê lá em cima, self-service de sorvete como sobremesa, aí vem no quarto serviço e tem que é cobrado R\$ 1,00 por cada bola de sorvete.

L12 – Não era por cada grama de sorvete não?

L7 – Eu também acho melhor porque self-service de sorvete geralmente a gente vai por gramas.

L1 – Mas ainda dá errado.

PP – Faz sentido!

L6 – Mas como é uma identidade, para fazer em um grama não vai bater o valor.

L1 – Não vai bater.

PP – É, exatamente. Mas aí o que A7 falou faz sentido porque self-service por bola...

L11 – É porque nem toda bola vai ser o mesmo peso, né?

PP – É, porque assim... quando você coloca self-service é porque você vai colocar à vontade e pagar um preço único.

L1 – Isso!

PP – Então, mudaríamos o quarto serviço. Não seria self-service. Seria só sobremesa.

L12 – Sobremesa? É!

PP – Seria um serviço de sobremesa! Sem ser self-service. Então a gente mudaria na redação do problema.

PP – Conseguem perceber como sempre identificamos alguma coisa? Como é complexo essa parte de propor problemas, por que é provável que algo passe despercebido? Isso aqui a gente não tinha percebido na semana passada.

É provável que algum leitor já tenha percebido a incoerência contextual e numérica desde o momento em que o quarto serviço se apresentou na atividade de EPRP. Para L12, essa inquietação saltou aos olhos inicialmente pela incoerência contextual que apresentava, levando-

nos a uma exploração mais profunda e fazendo-nos perceber uma incoerência que atingia os conceitos e ideias matemáticas que esperávamos abordar a partir desse serviço.

Como fruto do caminhar dessa EPRP, temos a identificação dessa incoerência por parte dos licenciandos, se desprendendo da timidez e apresentando seu ponto de vista. Em se tratando da abordagem da função identidade, esse momento da atividade de EPRP deixa transparecer um avanço no domínio das ideias matemáticas em torno dessa função, pois sem esse entendimento, eles não teriam percebido a incoerência numérica frente à incoerência contextual.

Em seguida, discutimos a necessidade de ajustes na redação e descrição do problema proposto. L9 sugeriu a exclusão de parte do texto, considerando que não influenciava na resolução do problema. Concordamos e mencionamos a possibilidade de remover as pesagens específicas presentes no texto do problema. L2 sugeriu retirar a letra b da atividade, considerando que não estava diretamente relacionada ao contexto geral. L3 propôs manter a situação de Carol e Pedro, mas adaptar para incluir almoço e jantar, explorando diferentes serviços e comparando escolhas. Já L1, sugeriu uma abordagem prática, experimentando diferentes serviços em dias consecutivos.

Em meio a essas discussões, questionamos se seria mais eficiente analisar os preços antecipadamente, levando à discussão sobre variação nos preços dos serviços, apresentando a ideia de organizá-los em uma tabela. Nesse momento, L5 se posicionou.

A5 - Quando eu pensei na questão, é... primeiro que assim... dá para observar os valores em uma tabela... entre um valor e outro de comida ser baseado para escolher determinado serviço. Abaixo disso, desse valor, já seria outro método. Então, por isso que eu coloquei mais ou menos assim. A tabela que o senhor está dizendo é analisar antes, faz mais sentido mesmo, porque se você for atribuindo alguns valores aí, você vai ter noção de quanto vai ficar.

L3 concordou, sugerindo questionamentos específicos sobre a melhor opção para diferentes intervalos de peso. Em conjunto, consideramos a necessidade de construir tabelas e utilizarmos a CGD para otimizar o processo de EPRP. Nesse momento, destacamos a importância de expressar aritmeticamente, algebricamente e graficamente cada serviço na CGD.

Dando continuidade à atividade de EPRP, convidamos um dos licenciandos para ir até a lousa registrar a representação algébrica de cada um dos serviços. Inicialmente, a função constante foi identificada como $y = 15$, representando o preço fixo de R\$ 15,00 no primeiro serviço self-service sem balança. Em seguida, o segundo serviço foi expresso como $y = 21x$, onde o preço era de R\$ 2,10 para cada 100 gramas de comida. Foi ressaltada a importância de

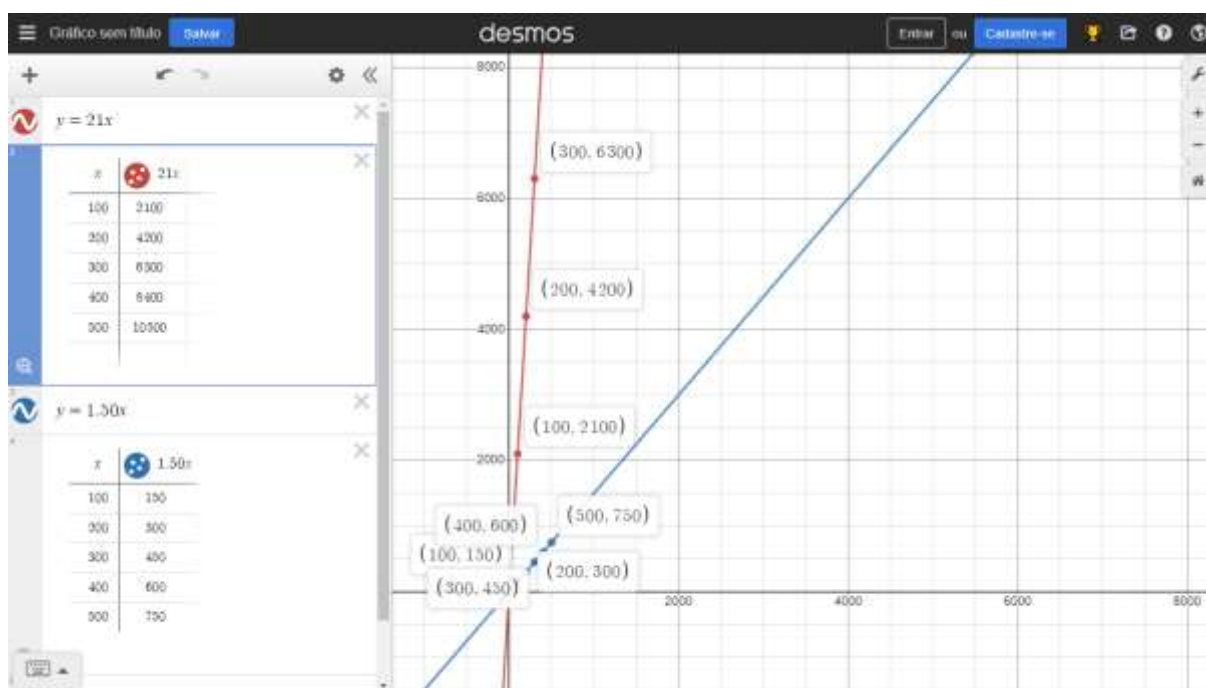
realizar a transformação de unidades para garantir que o aluno compreenda que o valor de x representa a quantidade de gramas variáveis.

L5 – Nesse caso, eu já realizei a transformação e coloquei $21x$, evitando que o aluno precise efetuar a transformação posteriormente. Eu já efetuei a conversão previamente.

Mesmo os licenciandos se atentando à necessidade de fazer a transformação de unidades, não apresentaram a representação algébrica de forma correta. Isso reflete uma dificuldade de compreensão das ideias de proporcionalidade exigidas neste momento da atividade de EPRP.

Ao seguir para o terceiro serviço, a função foi definida como $y = 1.50x$, indicando um custo de R\$ 1,50 por cada 100 gramas de comida, deixando passar despercebido o adicional do valor do suco. Na Figura 17, podemos acompanhar esse momento da exploração.

Figura 17 – Representação algébrica e gráfico de $y = 21x$ e $y = 1.50x$



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

A incoerência entre a representação algébrica e o contexto dos problemas ficou mais clara para os licenciandos ao observarmos a representação gráfica de cada um dos serviços que estavam sendo representados algebricamente através da CGD.

Destacamos a importância da visualização gráfica neste momento da EPRP, pois a mesma foi fundamental para que os licenciandos percebessem a incoerência nos dados a partir da leitura dos dados da tabela e da identificação dos pontos no gráfico da função. Sem essa visualização proporcionada pela CGD, é provável que eles teriam levado mais tempo para

identificar o erro e refletir sobre ele, tendo em vista uma tendência de sempre partir do algébrico.

A partir disso, os licenciandos passaram a realizar um novo trabalho (T), seguido por momentos de reflexão e síntese (RS). As funcionalidades da CGD proporcionaram aos licenciandos a oportunidade de reavaliar a representação algébrica, conferindo-lhes condições necessárias para desenvolver o pensamento algébrico corretamente, em consonância com o contexto do problema.

A partir disso, iniciaram uma nova discussão, mediada pelo Pp, trabalhando na representação algébrica do segundo serviço, que se trata de um self-service com balança, cobrando R\$ 2,10 por cada 100 gramas de comida. Inicialmente, houve uma confusão quanto à interpretação do x , variável que representa a quantidade de comida. Esclarecemos que o x estava variando de 100 em 100 gramas, sendo 1 quilograma (kg) equivalente a R\$ 21,00.

A necessidade de definir claramente quem é a variável dependente (y) e quem é a variável independente (x) surgiu durante a EPRP, levando à decisão de expressar x como a quantidade de comida em quilogramas e y o valor a pagar pelo consumo da comida.

O segundo serviço foi detalhadamente analisado, com ênfase na formulação da função para expressar o valor a ser pago em relação à quantidade de comida. Até se chegar à representação correta, os licenciandos apresentaram muitos equívocos.

L3 – Poderia colocar o "x" como se fosse porcentagem, ou assim, o "a" vai ser dividido por um número e o "x"...

L9 – Em decimais, você está querendo dizer, por 100 pode ser?

L4 – No caso, ficaria $\frac{x}{1000}$.

L3 – No caso, ficaria assim: $21 \cdot 0,1 = 2,10$

PP – Ficaria $2,10 \cdot x$?

L3 – Mas não já tinha colocado esse valor aqui?

PP – Sim, mas "x" não é a quantidade de comida que eu vou colocar?

L3 – Sim, mas, no caso, eu estou dizendo aqui que eu estou colocando 100 gramas de comida sobre 1000. No caso, esse valor aqui seria referente a 1 quilo de comida. Só que eu estou pegando só 100.

L1 – Então, no lugar disso aí vai colocar o "x", não é ele que varia? A quantidade de comida?

L2 – Isso!

L3 – Nesse primeiro, a gente vai depender da quantidade de comida.

L1 – Pronto, é o "x". Tem que colocar $\frac{x}{1000}$.

L9 – Fica $21 \cdot x$.

PP – Isso é a mesma coisa que o que?

L6 – É a mesma coisa que dividir o 2,10 por 100 gramas.

PP – É. Ou então 21... É a mesma coisa que você pensou. Que dá a mesma coisa que dividir 21 por 1000. Porque aí dividindo 2,10 por 100 gramas eu vou ter um resultado que equivale a...

L9 – 1 grama.

PP – Então, como representar a função?

L6 – Coloco dividido já?

PP – Sim.

L6 – 0,021

PP – $y = 0,021 \cdot x$

É possível perceber um certo grau de dificuldade no trânsito entre a linguagem verbal e a linguagem algébrica por parte dos licenciandos. São dificuldades de interpretação que, muitas vezes, constituem a primeira barreira que o aluno encontra na EPRP. No problema em exploração, os licenciandos não discutem ideias de proporcionalidade, o que poderia ser uma abordagem para solucionar as dificuldades encontradas.

Ao final deste momento, os licenciandos concordaram com a representação $y = 0.021 \cdot x$ para o segundo serviço, enfatizando que ela se aplica a qualquer quantidade em gramas. Ao realizarem a representação na CGD, perceberam que a leitura do gráfico condizia com a realidade do contexto que estava sendo explorado, deixando-os mais confiantes na representação algébrica.

Em continuidade, tivemos um diálogo entre PP, L9, L2, L3 e L1 acerca do terceiro serviço. Introduzimos o problema explicando que o terceiro serviço cobra R\$ 1,50 por cada 100 gramas de comida vegetariana, além de R\$ 2,00 pelo suco obrigatório. A discussão começou com L9 sugerindo que a equação seria $y = 1,50x + 2,00$. L2 e L9 concordaram, enfatizando a necessidade de transformar a taxa percentual em decimal e considerar os 100 gramas.

L1 questionou se o suco era obrigatório, sugerindo que os R\$ 2,00 representassem o termo constante b na equação. L2 confirmou, e questionamos se o coeficiente " a " seria realmente 1,50. L9 respondeu que 1,50 era para 100 gramas, e se alguém comprasse 200 gramas, seria R\$ 3,00. Neste momento, destacamos a necessidade de transformar os gramas, como visto no serviço anterior.

A EPRP continuou abordando casos específicos, como comprar 112 gramas. L9 esclareceu que a variável x representa a quantidade de comida em gramas. Os demais concordaram que a segue a mesma lógica do segundo serviço. L9 propôs a equação $y = 15 \cdot \left(\frac{x}{1000}\right)$. Ao questionarmos o motivo do valor 15, L9 justificou o raciocínio.

L9 – Por que 1,50 não são 100 gramas? Aí não vai ser 1 quilo? Então, por isso, precisamos transformar no valor de 1 quilo. Assim, ficará 0,015.

L3 - Mais "b", só que no caso, aí o "b" é dois.

PP- Ok.

Na representação algébrica apresentada por L9, vemos que o parêntese destaca a divisão da quantidade de comida em gramas por mil. Essa representação é retomada mais à frente.

Em seguida, a EPRP foi direcionada para o quarto serviço. O PP, L1, L2, L3, A5 e L9 abordaram as variáveis envolvidas e a representação das funções. Iniciamos questionando quais variáveis estavam relacionadas no quarto serviço. L1 levantou a questão do x e L9 concordou, sugerindo que só havia uma variável x . Entretanto, corrigimos, esclarecendo que o x representava a quantidade de bolas de sorvete e teríamos outra variável correspondente ao preço de cada bola.

A EPRP continuou sobre o significado de y . L5 afirmou que era em reais, e reforçamos que y representa o valor a pagar. Propusemos a ideias de usar notações diferentes para cada função, como $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ e $s(x)$, para diferenciar cada serviço. L2 concordou, mencionando que já havia sugerido essa abordagem desde o início. Explicamos que essa diferenciação ajudaria os alunos a não se confundirem e não propagar a ideia de que uma função é sempre representada por $f(x)$.

Em seguida, a exploração passou a girar em torno da expressão algébrica dos quatro serviços distintos e como utilizar a CGD para explorar essas funções. Contextualizamos a situação, sugerindo que os licenciandos imaginassem estar na 1ª série ensino médio e tivessem que expressar as funções algébricas para cada um dos serviços. Eles, inicialmente, expressaram dúvidas e afirmaram que não conseguiriam realizar essa tarefa sem uma tabela para organizar os dados.

Destacamos a importância da tabela para chegar a generalizações e perguntamos se seria interessante pedir diretamente a expressão algébrica ou começar pela construção da tabela. Os alunos concordaram com a ideia de construir a tabela primeiro, e L1 sugeriu que a letra A) do problema fosse substituída pela B), para facilitar o entendimento.

Comentário temático: A necessidade de iniciar a exploração a partir do uso da tabela justifica o fato de os alunos recorrerem inicialmente à representação numérica antes da algébrica, ao mesmo tempo em que revela uma imaturidade do pensamento algébrico dos alunos. Uma vez que eles já tenham domínio aritmético, destacamos o uso e a importância da representação numérica na CGD, neste momento da EPRP, como um degrau importante para reconhecimento de padrões, generalizações e posterior consolidação do pensamento algébrico.

Propusemos o uso didático da CGD e os incentivamos a construírem tabelas usando-a. L9 propõe a construção de uma tabela relacionando os quatro serviços com suas respectivas

funções. Incentivamos cada licenciando a fazer isso individualmente e a pensar em como usar uma tabela para entender as generalizações.

L1 expressa dúvidas sobre como chegar a uma fórmula geral, e destacamos que, embora inicialmente pareça fácil, os licenciandos ainda apresentam dificuldades com os números na representação decimal. L3 concorda que é complicado, e L9 sugere usar a tabela da CGD para facilitar.

Os licenciandos começam a usar a CGD, mas L9 expressa dificuldades em construir a tabela. L3 sugere fazer a tabela no quadro, e concordamos. L9 questiona se a tabela será única, e explicamos que serão tabelas distintas para cada serviço. L1 destaca que as variações são diferentes para cada serviço. Porém, à medida que a EPRP vai avançando, percebemos que em uma mesma tabela construída na CGD é possível representar mais de um serviço.

Continuamos a EPRP questionando sobre como calcular o custo para diferentes quantidades de gramas de comida, começando com 100 gramas por R\$ 2,10. L12 sugeriu considerar 200 ou 400 gramas, e L9 completou a tabela até 400 gramas. Questionamos como seria para uma quantidade qualquer, e L11 mencionou que a ordem não seria a mesma. Os licenciandos passaram a analisar os dados na tabela construída na CGD.

Uma discussão se iniciou sobre a interpretação correta da relação entre o valor de x (quantidade de comida) e y (custo em reais). Novamente, a visualização dos dados na tabela fez com que os licenciandos enxergassem a incoerência dos dados e a forma errada que continuavam a expressar algebricamente o serviço. L3 sugeriu que o valor correto deveria seguir o mesmo raciocínio de $x \cdot 0.015$, e L12 concordou. Questionamos como representar isso, e L9 explicou que seria $\frac{21}{1000}$. L3 esclareceu que o 1000 representa o total de gramas, e L9 adicionou que o cálculo deve ser feito para cada grama.

L1 e L6 enfatizaram a complexidade de entender a relação $\frac{21}{1000}$ e sugeriram que isso poderia ser mais difícil para os alunos. L3 sugeriu introduzir a discussão sobre a transformação para quilo (1000 gramas) e depois para grama. L5 destacou que, de qualquer forma, seria uma multiplicação.

Concordamos com a abordagem de L3 e L5 e destacamos a importância de fazer o aluno perceber que a transformação para grama é essencial. L11 propôs iniciar com um exemplo, como calcular o custo para 620 gramas, transformando isso para quilogramas e, em seguida, para gramas.

L1 sugeriu que a transformação já fosse fixada no enunciado, enquanto L11 propôs fazer um exemplo antes para que os alunos associassem a importância da transformação. L3 concordou e enfatizou a necessidade de deixar claro que o cálculo é feito para cada grama.

Acatando as sugestões dos licenciandos, propusemos aplicar a abordagem no próximo exemplo, destacando a importância de fornecer uma explicação inicial e exemplos práticos para que os alunos possam associar e compreender a transformação necessária.

A tentativa de simplificar cada vez mais o problema reflete a dificuldade que os licenciandos vão identificando e deixando transparecer em relação ao domínio do conteúdo matemático. Pode-se imaginar que o problema esteja se tornando trivial, com muitos passos detalhados. No entanto, é dessa forma que os licenciandos acreditam que teriam melhores condições de interpretar, explorar e resolver o problema.

Conduzimos uma discussão sobre a abordagem do conteúdo de função afim, destacando a necessidade de integrar conceitos como transformação de grandezas e regra de três na atividade. Propusemos um questionamento inicial, sugerindo que personagens como Carol ou Pedro estivessem em dúvida sobre o valor a ser pago por cada grama ao optarem pelo segundo serviço. A ideia era fazer com que os licenciandos refletissem sobre a clareza do problema em relação ao valor por quilo e por grama, em oposição a cada 100 gramas.

Os licenciandos concordaram com a proposta, e L4 mencionou sua experiência em sala de aula, observando que os livros didáticos geralmente abordam proporções e grandezas antes de funções. Sugeriu, então, começar trabalhando com proporções e grandezas, utilizando o exemplo de identificar que 100 gramas custam R\$ 2,10 e, a partir disso, aplicar a regra de três para descobrir o valor de um grama.

Concordamos com a sugestão, acrescentando que, nos capítulos de função afim, frequentemente há uma seção sobre proporção. Propusemos um exemplo prático: suponhamos que Carol tenha optado pelo segundo serviço, mas está em dúvida sobre o valor a ser pago em um quilograma e o valor por cada grama.

A discussão seguiu com a explicação de que o aluno faria a regra de três, chegando a R\$ 21,00 para um quilograma. O próximo passo seria calcular o valor por grama, chegando a R\$ 0,021. A ideia era provocar esse raciocínio, lembrando a parte de proporção e facilitando a construção da tabela para alcançar a generalização.

Ao discutirmos a estratégia, os licenciandos destacaram a importância de começar pelo questionamento sobre proporção, utilizando a tabela com o valor de 0,021 e, finalmente, chegar à generalização da função. O debate se estendeu sobre a clareza do enunciado e como conduzir o aluno por um caminho didático para uma compreensão mais fácil.

A EPRP abordou a sugestão de iniciar com a pergunta direta sobre os valores que o aluno pagaria por um grama e um quilograma, considerando o contexto do enunciado.

No final, resumimos a proposta, propondo o seguinte problema, para a letra A): Carol e Pedro estão querendo optar pelo segundo serviço e observaram que no anúncio só tem informação para cada 100 gramas. Carol ficou curiosa para saber quanto pagaria por 1 quilograma de comida, enquanto Pedro questionou quanto pagaria por cada grama. Como resolver esse problema?

À medida que esse problema foi sendo proposto, resolvido e explorado, percebemos a importância do conteúdo de proporcionalidade para uma melhor compressão dos dados do problema e sua posterior representação algébrica. Neste momento, faz-se necessário enfatizar a importância e a relação entre esses conteúdos evidenciando o momento em que a proporcionalidade se torna uma função afim. A aula finalizou com os licenciandos sugerindo como conduzir o raciocínio do aluno até chegar à generalização da função.

Comentário temático: Durante todo esse momento de EPRP, percebemos que os licenciandos conseguiram identificar incoerências não previstas anteriormente, como no caso do sorvete. Isso demonstra um avanço tanto nos aspectos metodológicos da EPRP quanto nos conceitos matemáticos envolvidos na atividade. Destacamos que a interpretação pode ser a primeira dificuldade enfrentada pelos alunos na EPRP, especialmente na transição entre a linguagem verbal e a algébrica. Para superar essa dificuldade nesta atividade, os licenciandos optam por usar uma tabela para organizar os dados, facilitando a chegada a generalizações matemáticas e, conseqüentemente, ao conceito de função. Ao ressaltarmos a importância do uso da tabela na CGD, percebemos que, antes da representação algébrica, os alunos sentem a necessidade de recorrer à numérica, como uma ponte entre a linguagem verbal e a algébrica. Ao utilizar a CGD, os licenciandos conseguem identificar erros e equívocos na representação algébrica, nos fazendo enxergar a representação gráfica como um mecanismo de (re)avaliação da representação algébrica. Podemos perceber em diferentes momentos da EPRP qual representação/visualização proporcionada pela CGD pode ser mais eficaz, como foi o caso da representação gráfica para identificar incoerências algébricas e do uso da tabela para desenvolver o raciocínio e o pensamento algébrico. Como novo ponto de partida, os licenciandos sugerem a inserção de um novo problema juntamente ao que vem sendo construído, como forma de preparar um caminho mais didático para que o aluno domine o conteúdo, começando com a proporcionalidade. Embora já tenham julgado o fator decimal como fácil, percebe-se que tem gerado algumas dificuldades de interpretação e resolução, sendo notável a complexidade em entender a transformação para um grama. Todas essas observações mostram o quanto a EPRP vem avançando como metodologia, como a CGD contribui para tal feito e como os licenciandos estão se desenvolvendo diante dessa proposta.

6.4 Explorando a função afim

14º Encontro - 2 aulas
Data: 17/11/2022

A continuidade da atividade de EPRP ocorreu duas semanas após o nosso último encontro, devido às datas de nossas aulas coincidirem com feriados nacionais, período eleitoral e programações internas da instituição de ensino. Diante dessa realidade, fizemos uma retomada inicial das principais informações referentes à atividade de pesquisa.

Orientamos os licenciandos a utilizarem a CGD, para explorar o terceiro serviço e abordar a definição da função afim. Em um tempo médio de cinco minutos, exploraram individualmente e apresentaram suas observações, entre elas, dúvidas sobre como atribuir valores ao coeficiente a da função e como utilizar a CGD.

L2 – Vai ser cobrado R\$ 1,50 a cada 100 gramas.

L9 – O a é R\$ 1,50.

L2 – Não, o x é R\$ 1,50, e o b é R\$ 2,00. Aí é o a que vamos achar.

L9 – Não, vamos achar o x , o “ $ax + b$ ”.

L2 – Eu coloquei o x como R\$ 1,50.

L9 – Não, eu acho que é o a que é R\$ 1,50.

PP – Aí é aquele mesmo questionamento: o a vai ser R\$ 1,50?

L2 – Eu botei o x .

L9 – Eu acho que vai ser o a com R\$ 1,50.

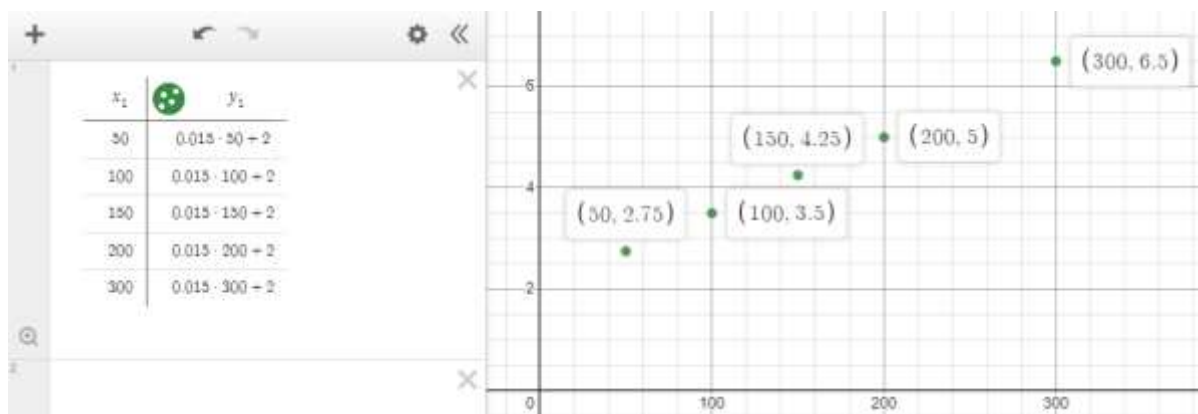
Esclarecemos novamente a ideia de proporcionalidade envolvida nesse momento da atividade, além de perceber a confusão que alguns licenciandos fazem com os coeficientes a e b e a variável x .

Sugerimos que utilizassem a CGD para explorar este terceiro serviço, atribuindo valores aleatórios de gramas e descrevendo aritmeticamente os cálculos para determinar o custo. O objetivo foi levá-los a compreenderem as principais características da função afim a partir da discriminação do seu raciocínio aritmético.

Ao desenvolverem essa atividade na CGD, como podemos observar na Figura 18, os licenciandos passaram a refletir e sintetizar os valores que permanecem fixos e os que variam ao calcularem o valor a ser pago a partir do consumo de comida em gramas.

O uso didático da CGD para explorar esse momento da atividade de EPRP colocou o licenciando diante da representação numérica, algébrica e gráfica concomitantemente. À medida que apresentava o desenvolvimento do cálculo aritmético, também desenvolvia o pensamento algébrico e visualizava pontos que eram plotados na janela gráfica. A exploração desses elementos os levou a perceber a relação entre as diferentes representações, entendendo o significado dos pontos na janela gráfica a partir dos dados da tabela, ao mesmo tempo em que percebiam padrões e generalizações com os dados da tabela, contribuindo com o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Figura 18 – Uso da tabela na CGD para desenvolver o cálculo aritmético



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Após a construção colaborativa dos dados do terceiro serviço na CGD, orientamos a proporem o problema de maneira clara e direcionada, enfatizando a importância de especificar o serviço e utilizando a função tabela.

A discussão inicia com a proposta de L3, sugerindo o uso da CGD para atribuir valores à função e descrever seu comportamento. No entanto, L11 aponta a necessidade de especificar o serviço na formulação do problema.

Há uma preocupação em simplificar a linguagem verbal e tornar as instruções acessíveis aos alunos da 1ª série do ensino médio. Com isso, surge o debate sobre a utilização dos termos “incógnita”, “variáveis” e “grandezas”, e a necessidade de explicar de forma mais clara. Os licenciandos sugerem alternativas, como atribuir uma incógnita a cada grandeza sem especificar um valor numérico.

L11 – Pode colocar assim: sabendo que x equivale a isso e y isso.

L8 – Após identificar as grandezas sabemos que x é tal coisa e y é tal coisa.

L8 – Tem que colocar de uma forma mais fácil.

L11 – De uma forma mais popular.

A discussão avança para identificação das variáveis no problema. Destacamos a importância de eles reconhecerem as grandezas relacionadas e propusemos a atribuição de uma letra a cada uma delas. Apesar de algumas dúvidas levantadas pelos licenciandos, reforçamos a importância de esclarecer para os alunos a diferença entre incógnita e variável.

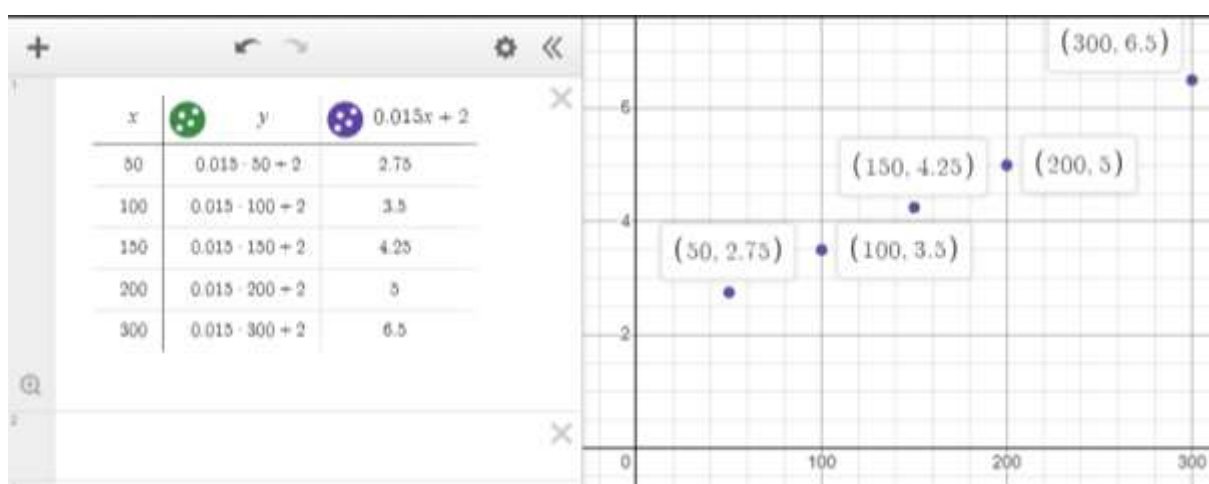
Instruímos para construção de uma tabela utilizando a CGD, com ênfase na colocação dos valores dos gramas na primeira coluna. A discussão continua com a letra A) do problema em construção, onde o valor 0,015 é analisado em relação a cada grama de comida. Destacamos que a ideia é fazer os alunos calcularem o valor a pagar para cada grama. Na conversa, L11

sugere incluir algo relacionado ao suco na análise. Reforçamos que a informação na segunda coluna deve ser discriminada, conforme a Figura 18.

Na análise da segunda coluna da tabela, os licenciandos são incentivados a observar padrões aritmeticamente. A preocupação com a compreensão da variação na quantidade de comida é ressaltada, preparando o terreno para a generalização da função.

A exploração continua com a observação dos pontos na janela gráfica e a busca pela generalização de ideias. Para isso, sugerimos a criação da terceira coluna na tabela a partir de questionamentos para orientá-los com a representação algébrica da função, conforme Figura 19.

Figura 19 – Representação numérica e gráfica do terceiro serviço



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

O objetivo da tabela na CGD, nesta atividade, é conduzir o aluno à representação algébrica da função afim através do raciocínio aritmético representado na segunda coluna. Ao perceber o que está variando e o que é constante, os licenciandos tiveram melhores condições de chegar à representação de uma função afim que represente o problema em exploração. O reconhecimento de padrões e a generalização são características importantes do pensamento algébrico. Ao criar a terceira coluna com a representação algébrica, automaticamente ela foi preenchida com os valores correspondentes ao cálculo aritmético realizado na segunda coluna, levando o aluno a validar a construção do seu pensamento algébrico e à ideia de função afim, observando também a representação gráfica.

Passamos a nos preocupar com a redação do problema, discutindo como propor o problema de forma clara e objetiva. Durante a exploração, L1 sugere uma abordagem analítica, enquanto L11 destaca a importância de enxergar a mudança na quantidade de comida.

A utilização de palavras como “considerando” e “observando” ressalta a importância de uma abordagem crítica por parte dos licenciandos. Há uma preocupação em não fornecer respostas prontas, mas guiar os estudantes na descoberta, pois o processo de questionamento leva os alunos a refletir sobre a natureza da função antes de chegar à sua representação algébrica.

Neste momento da EPRP, os licenciandos se angustiam com tudo que estão buscando envolver no problema.

L2 – Estou achando coisa demais nessa B), eu não vou mentir!

L11 – Um negócio desse cair em uma prova, os meninos não vão fazer.

L2 – Um negócio desse, eu olho e já fico desesperada.

L11 – É porque estamos no costume de quando estudávamos que as perguntas eram: o que é? Hoje em dia não é assim mais não.

L9 – Não é assim para a gente. Vai colocar para os meninos do 7º ano, quando colocamos A) e B), eles fazem: professora no vai ter C) não né?

L11 – É, só que hoje é bem mais complexo as questões.

L9 – É sério, só vai ter essas duas, no coloque a C) não, A) e B) já está muito.

PP – Vamos lá!

Entendemos essas expressões dos licenciandos munidos do fato de suas experiências como receptores de uma Matemática que chega pronta em sala de aula, apenas com a missão de resolver atividades/tarefas/problemas a partir da explicação do professor.

Comentário temático: Em algumas aulas de EPRP, temos avançado pouco na proposição de um novo problema, mas todas as idas e vindas fazem parte desse processo de EPRP. Levando em consideração a participação efetiva dos licenciandos, isso é reflexo das dificuldades por eles apresentadas, que vão sendo estimuladas à medida que tentamos aprofundar a exploração do problema.

Essa aula de EPRP termina após várias tentativas de redação do problema que contemple o que se espera que o aluno desenvolva. Dessa forma, a partir dos licenciandos, concluímos:

Pp – Como é que a gente colocaria isso?

L11 – Como eu consigo descrever a função caso seja para um valor qualquer, porque aí ele não já observou o padrão. Então aí em baixo ele descreve a função para um valor qualquer, para qualquer quantidade de comida no caso. Ou para um valor “x” porque o “x” já identifica...

L11 – Por que se eu for consumir uma quantidade de comida eu vou pagar qual valor? Ou que função eu vou utilizar dependendo da quantidade de comida?

L4 – Poderia colocar também algebricamente. Descrever a função algebricamente para qualquer quantidade de comida.

Pp – Podemos colocar: como representar algebricamente uma função que permita calcular o valor a ser pago por qualquer quantidade em gramas de comida consumida.

[aplausos]

Pp – Aí tem mais coisas aqui, essa parte gráfica que a gente não explorou, o que é que a gente conclui.

L11 – Vamos fechar a B professor e amanhã a gente continua.

A EPRP até aqui desenvolvida revela uma abordagem pedagógica centrada na construção ativa do conhecimento, incentivando os licenciandos a observar padrões, analisar dados e, por fim, generalizar uma função afim. As conversas aleatórias entre eles demonstram a complexidade da tarefa de EPRP, com algumas sugestões para simplificar o processo. Concluimos este dia com os encaminhamentos para a aula seguinte.

Comentário temático: Com a retomada da atividade de EPRP, temos percebido um incentivo e uso maior da CGD. Destacamos a construção colaborativa dos dados na CGD, orientando os licenciandos na proposição clara e direcionada do problema, além da ênfase na criação de uma sequência didática progressiva. Percebemos a importância do uso didático da CGD para explorar o pensamento aritmético, algébrico e gráfico, permitindo aos alunos observarem padrões e compreenderem a relação entre diferentes representações. Incluímos as discussões entre os licenciandos sobre a complexidade do problema, sugestões para simplificar a linguagem, preocupação com a compreensão dos coeficientes e a atribuição de valores na função afim. Há uma ênfase na construção ativa do conhecimento, afastando-se da abordagem tradicional para um método mais participativo, incentivando os licenciandos a refletir sobre a natureza da função antes de chegar à sua representação algébrica. A CGD vem contribuindo significativamente em vários aspectos, enriquecendo a abordagem pedagógica e promovendo uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos. Dentre as principais contribuições, destacamos: exploração dinâmica de funções; visualização gráfica; integração de múltiplas representações; análise numérica e algébrica; construção colaborativa; validação do pensamento algébrico; proposição e exploração do problema. Na proposição do problema, a CGD vem desempenhando um papel vital. Os licenciandos podem usar a calculadora gráfica para apresentar, de forma clara e direcionada, o problema, incluindo tabelas e gráficos, o que tem facilitado a compreensão.

6.5 Coeficientes e classificação da função afim através da EPRP

15º Encontro - 2 aulas
Data: 18/11/2022

Retomamos a atividade de EPRP a partir da função que representa o terceiro serviço, o qual cobra R\$ 1,50 por cada 100 gramas de comida vegetariana, além de R\$ 2,00 pelo suco.

Os licenciandos discutiram sobre a melhor forma de inserir essa função na terceira coluna da tabela, apresentamos algumas sugestões, como “A3 – Escolhendo os valores de x e y , escreva uma função...”. Enfatizamos que os alunos já conhecem a função e propusemos algo como “crie uma terceira coluna para a tabela e informe a função correspondente...”.

Ao darmos continuidade enfocando a construção do gráfico da função $f(x) = 0.015 \cdot x + 2$, L1 discute a importância de observar os zeros da função antes de prosseguir para a elaboração do gráfico. Essa discussão envolve inicialmente o terceiro serviço, mas que deve se estender para os demais serviços.

Ao chegar à definição da função afim a partir da exploração do terceiro serviço com a tabela da CGD (Figura 19), sugerimos destacar na atividade a definição de função afim. L11 questionou que, se o aluno lesse antes o material da atividade, ele já iria saber a resposta. Isso traria uma antecipação dos resultados e advogamos que a ideia é que o aluno vá explorando a atividade por partes.

Depois de trabalharmos a função afim definida na forma $f(x) = ax + b$, questionamos os licenciandos se avançaríamos para o gráfico ou pediríamos para repetirem o mesmo procedimento para os demais serviços. Eles concordaram em realizar o mesmo procedimento. Em seguida, L3 faz uma observação interessante.

A3 – É, por exemplo, ao observar que o a não pode ser zero. Por que não pode ser zero? Aí, no caso, vai ser a função constante, que é um tipo de função que poderia ter outra definição.

Pp – Que, no caso, é o primeiro serviço. Então, como tem os outros serviços, é interessante pedirmos para eles representarem os outros serviços, porque essa informação nos permitirá concluir, por exemplo, se ele escolher o primeiro serviço, né? Por que ali ele já vai sentir falta de quem? Do coeficiente a , porque o a será zero, o x não vai aparecer, vai ficar só o b . Quando ele fizer o segundo serviço, o b é que será zero, e quando ele fizer o quarto serviço, que é a função identidade, o a será igual a um e o b zero. Então, chegamos a essas conclusões através desses serviços, e é por isso que criamos esses serviços. Então, para onde devemos ir agora? Nesse caso, aqui, colocamos o seguinte: “Utilizando a calculadora gráfica, vamos explorar o terceiro serviço”.

Essa observação referente aos coeficientes foi um dos motivos que nos fez escolher o problema proposto inicialmente por L5, pois, ao observamos os serviços apresentados, percebemos a abordagem de diferentes representações de funções afim, a partir dos seus coeficientes. A retomada dessa informação fez-se necessária como forma de reforçar essas ideias e a amplitude deste problema.

Os licenciandos já tinham concordado em estender a aplicação para os demais serviços quando L13 sugere mudar, deixando a questão aberta para que surjam as dúvidas dos alunos referentes aos demais serviços. A proposta de L13 traz uma característica importante da metodologia de EPRP, por se tratar de atividade aberta, mas não solta, livre, porém intencionada. Com isso, passamos a explorar quais as possíveis dúvidas que poderiam surgir nesse momento da atividade, levando os licenciandos a refletirem e sintetizarem o seu trabalho de exploração.

Pp – Quais seriam essas dúvidas?

L3 – Como é que se constrói o gráfico de uma função que não tem o “ a ”? Com certeza, eles vão perguntar.

Pp – O que mais? Vamos ver se surgem mais outras dúvidas.

L3 – Não vai ter as funções, a completa, a constante... né isso? Aí coloca: dada a definição da função afim, existem essas funções: a função completa, a função constante e tal e tal. A

partir disso, tudo que for aplicado no 3º serviço, aplica nos demais serviços, no 1º, no 2º e no 4º, e defina qual é a função completa, a função constante... a partir dos conhecimentos prévios.

Pp – No caso, você está dando a definição para eles aplicarem no exercício.

L3 – Isso!

Pp – Vamos fazer o contrário. Vamos pedir para eles identificarem primeiro os coeficientes, para depois chegar à definição dos tipos de função afim.

L3 – Pode ser também.

Pp – Certo! Pois aí é mais interessante. O aluno vai pensar um pouco mais, vai refletir para chegar à definição.

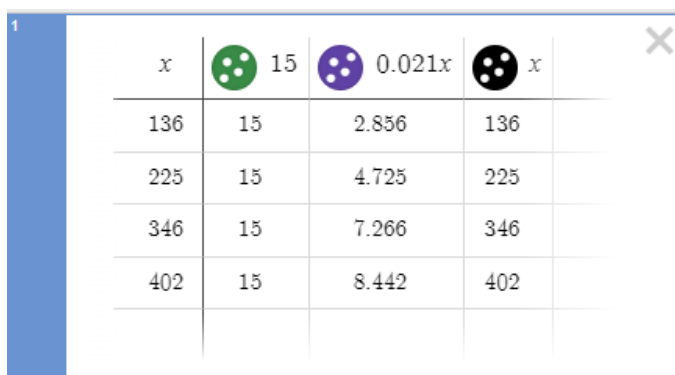
L11 – Verdade.

Pp – Então, o que podemos abordar aqui? Vamos colocar aqui letra “c”. Na letra “b”, o objetivo era definir a função afim; na letra “c”, o propósito agora será o quê? Identificar os coeficientes e classificar os tipos de função afim. De forma que, no final, apresentemos a definição. Vejam, no final da letra “b”, é quando apresentamos a definição. Geralmente, o que acontece? Vem a definição com a aplicação. Agora, estamos indo no caminho inverso, explorando o problema, levando o aluno a pensar para chegar à definição.

Comentário temático: Uma característica importante da EPRP é a possibilidade de levar o aluno a construir ideias e conceitos matemáticos a partir da exploração do problema. Nesse sentido, deixamos claro a importância de seguirmos no caminho contrário ao que os alunos têm sido submetidos na maioria das salas de aula. É assumir a EPRP como uma ferramenta importante para o fazer Matemática, levando-o a trilhar caminhos próximos ao que matemáticos têm feito para se chegar à construção de determinado conteúdo.

Em continuidade à exploração das ideias que vinham surgindo em torno da temática do problema, sugerimos a criação de uma única tabela da CGD, observando a viabilidade de representarmos todos os serviços, como mostra a Figura 20.

Figura 20 – Construção de tabela com várias colunas na CGD



x	15	$0.021x$	x
136	15	2.856	136
225	15	4.725	225
346	15	7.266	346
402	15	8.442	402

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Por já termos explorado na letra B) o terceiro serviço, nos atemos nesta tabela (Figura 20) aos demais serviços. Atentos à CD do problema, questionamos os licenciandos se existia alguma incoerência ao fazermos a leitura de todos os dados informados na CGD.

L7 – Matematicamente falando, não. Só que a das bolas de sorvete...

L3 – 200 bolas de sorvete...

Pp – Exatamente. Recai na incoerência numérica. Porque o valor numérico, ele deve estar de acordo com a realidade. Então, nesse caso aqui, não seria interessante construir, utilizar na mesma tabela o serviço do sorvete. Mas o primeiro e o segundo serviço dariam certo na mesma tabela?

Licenciandos – Sim!

Como o quarto serviço trata-se de sobremesas com bolas de sorvete, ao representar na mesma tabela, o x não poderia representar consumo de comida em gramas e quantidade de bolas de sorvete ao mesmo tempo. Com isso, sugerimos que a exploração do quarto serviço fosse realizado em uma outra tabela.

Retiramos a quarta coluna da tabela e demos continuidade à exploração do problema. Indagamos os licenciandos sobre quais questionamentos poderíamos fazer para dar continuidade à exploração do problema.

L13 – Quando irão pagar o mesmo valor?

Pp – Então, esses podem ser questionamentos futuros, pois nosso objetivo aqui é trabalhar na identificação dos coeficientes e na classificação das funções. Nesse caso, seria necessário criar uma tabela separada para a questão do sorvete, onde representaríamos isso por x .

A visualização gráfica proporcionada pela CGD despertou em A6 um questionamento interessante, instigando a exploração do problema nessa direção.

L6 – Se eu considerasse os números negativos, haveria algum problema?

Pp – Sim.

L6 – Porque não podemos incluir os números negativos dele.

Pp – Exatamente. Essa parte é extremamente importante. Teríamos que ter cuidado para determinar em qual momento abordaremos essa questão.

L13 – Os números reais positivos.

Pp – Se eu representar essa função apenas dessa maneira, ela corresponde ao 3º serviço? O que devo fazer?

L9 – Não corresponderá porque o “ x ” não pode ser um número negativo, então precisamos excluir esses valores negativos.

Pp – Para excluir esses números negativos, a que conceito estamos nos referindo?

L3 – Conjuntos Numéricos. Positivos. Naturais Positivos.

Pp – E isso é uma...?

L3 – Definição.

Pp – E a que se relaciona? Quando falo em valores de “ x ”, estou me referindo ao...

L3 – Domínio da função.

Pp – Então, precisamos restringir o domínio. O “ x ” deve pertencer aos números reais, tal que “ x ” seja maior ou igual a zero. O zero está incluso nisso?

L13 – Sim, professor!

L1 – Sim, ele inclui apenas o suco nesse caso.

Pp – Muito bem. Nesse caso, o domínio da função é definido assim. De que outra forma eu poderia representar esse domínio? Poderia mencionar apenas os números reais?

Licenciandos – Positivos.

Pp – Não negativos.

Licenciandos – É. Exatamente.

A observação de L6 a respeito do domínio da função foi relevante, sendo fruto do trabalho que desenvolvemos durante a 1ª Travessia desta pesquisa. O trabalho com o domínio não foi foco da atividade neste momento, mas desencadeou situações importantes. L1 questiona se na CGD é possível restringir o domínio, e informamos que sim. No momento oportuno, detalharemos melhor essa função.

Logo em seguida, passamos a refletir a exploração já feita anteriormente na letra B) do problema referente à função $f(x) = 0.015 \cdot x + 2$. Ao visualizarmos graficamente essa função na CGD, não nos atentamos à restrição do seu domínio. Discutimos com os licenciandos que pedir para esboçar o gráfico da função $f(x) = 0.015 \cdot x + 2$ é diferente quando a mesma envolve um contexto como o do terceiro serviço. Os gráficos têm representações distintas e devemos ter cuidado para não induzirmos os alunos ao erro não nos atentando a essas questões.

Chamamos atenção para inicialmente identificar se as variáveis envolvidas no contexto dos problemas são discretas ou contínuas e, a partir disso, definir o domínio e seguir para a construção e análise do gráfico. O uso didático da CGD em uma atividade desta natureza nos faz perceber a sua importância para que os alunos tenham diferentes caminhos para identificar a incoerência na interpretação algébrica e/ou gráfica do problema.

Essa discussão se complementa ao envolver o quarto serviço, apontando se tratar de uma variável discreta, em que os licenciandos informam que o gráfico não será uma linha contínua, mas, sim, pontos.

Observamos que, na maioria dos casos, o que acontece quando se pede para construir o gráfico de uma função é que sempre esboçam por meio de uma linha contínua. A partir dessas observações, questionamos os licenciandos como poderíamos redigir o problema.

L3 – Oh, professor, para simplificar, não poderia fazer o gráfico normal primeiro e depois partir para a análise em relação ao domínio? Tipo, para não ficar muito extenso para eles no início. Eu faria apenas o gráfico, da mesma forma que está fazendo para essa função. Criaria o gráfico e, a partir daí, começaria a análise. Abordaria o mesmo questionamento que você está apresentando para nós. Será que esse gráfico representa completamente a função? Não. Então, vamos avaliar o domínio. O domínio vai dos números reais, a partir do zero. Então, há uma parte negativa que será incluída. Partiria disso.

Pp – É! E tem um detalhe. Estamos pedindo para eles construírem o gráfico na calculadora, mas não estamos solicitando mais nada além disso. Independente de eles construírem corretamente ou não, podemos retornar e abordar essas questões mais adiante.

L3 – Exatamente! Dessa forma, eles teriam a noção do que é uma função, como é o gráfico, e quais são os pontos que devam ser considerados na função antes de entrar nessa parte mais específica do domínio.

Pp – Então, podemos solicitar assim: construa na calculadora gráfica o gráfico da função que corresponde ao 3º serviço e faça suas observações. Porque aqui, mais tarde, poderemos retomar essas observações quando estivermos explorando o gráfico. Concordam?

Licenciandos – Sim!

A capacidade de propor e argumentar, demonstrada por L3, nos faz perceber uma aproximação da metodologia de EPRP. É possível que outros licenciandos estejam se desenvolvendo dessa forma. No entanto, neste momento, destacamos essa fala de L3. Retomamos a ideia central da letra C) do problema, que consistia em identificar os coeficientes e classificar as funções afins. Os licenciandos afirmaram que não seria mais necessário fazer uso da tabela para representar algebricamente a função referente a cada serviço.

Em alguns momentos da atividade de EPRP, foi possível perceber os licenciandos se angustiarem com o tamanho do problema e com as dúvidas que surgiam. Não relatamos isso a todo momento no texto. Porém, um comentário em sentido contrário é feito por L13 nesse momento da exploração: “**L13** – Professor, deveríamos terminar a disciplina levando esse problema para aplicar em uma turma de 1º Ano”.

Os licenciandos começaram a enxergar o potencial da EPRP e sentiram a necessidade de levá-la até a sala de aula. Mesmo não sendo o objetivo desta pesquisa aplicar essa atividade, mas ao se tornar um PE, essa atividade ficará disponível para ser aplicada e replicada em diferentes salas de aula.

Continuamos pensando a melhor redação para o problema da letra C). Após representarem algebricamente cada um dos serviços, os alunos deveriam identificar os coeficientes a e b , e classificar as funções em completas e incompletas. No caso das funções incompletas, a classificação continuaria em linear e identidade, e a função constante.

Inicialmente, tínhamos discutido que faríamos o caminho inverso, partiríamos da exploração do problema para a definição dos tipos de função afim. Ao observarmos a forma como a atividade foi conduzida e construída neste momento, percebemos que esse objetivo não foi alcançado por completo, pois fez-se necessário apresentar a definição para posterior classificação.

Discutimos com os licenciandos que, após identificarem os coeficientes, colocaríamos na questão uma breve explicação sobre os tipos de função para, em seguida, os alunos realizarem a classificação. Mas, antes disso, ao identificarem os coeficientes, sugerimos que a atividade pedisse que os alunos fizessem comentários e observações a partir da identificação dos coeficientes. Dessa forma, estaríamos estimulando o raciocínio dos alunos, e, ao confrontarem suas ideias com a definição apresentada, iriam refletir sobre possíveis

aproximações e divergências. A atividade envolveu a classificação das funções dos quatro serviços.

Após concluir essa parte da atividade de EPRP, perguntamos aos licenciandos qual seria o próximo tópico a ser abordado. Ao fazer isso, lembramos que, em se tratando dos coeficientes, ainda faltava abordar uma informação importante.

Pp – Ah, está faltando coisa aí!

L1 – Tipos de função.

Pp – Como é que se chama o coeficiente a e b ?

L1 – Angular e Linear.

L3 – Angular e Linear.

Pp – Temos que colocar aqui. Essa informação viria no informativo?

L1 – Eu acho que sim!

L3 – É, professor! Como é que o menino vai dizer que é angular e linear? Não tem como não.

L1 – Essa informação tem que vir antes de identificar os coeficientes. Tem que falar antes. Que o a é o angular e o outro é o linear.

L3 – Não, mas ele pode perguntar assim: por que angular e por que linear?

Pp – É, aí vocês sabem por quê?

L2 – Não!

L3 – Eu só coloquei.

Pp – Não, aí tem que saber. Então, vocês pensem agora e do jeito que vocês pensarem, vão formular como é que o aluno faria para pensar nisso.

L3 – Pesquise.

Pp – Não! Não é só colocar porque o coeficiente é isso.

L1 – Eu passava um trabalho para casa.

Percebemos que nem mesmo os licenciandos sabem o porquê dos nomes atribuídos a esses coeficientes. Com isso, vimos o momento ideal para conduzi-los na construção dessas ideias matemáticas e, em seguida, propor um problema.

Para isso, pedimos aos licenciandos vários exemplos de funções afim.

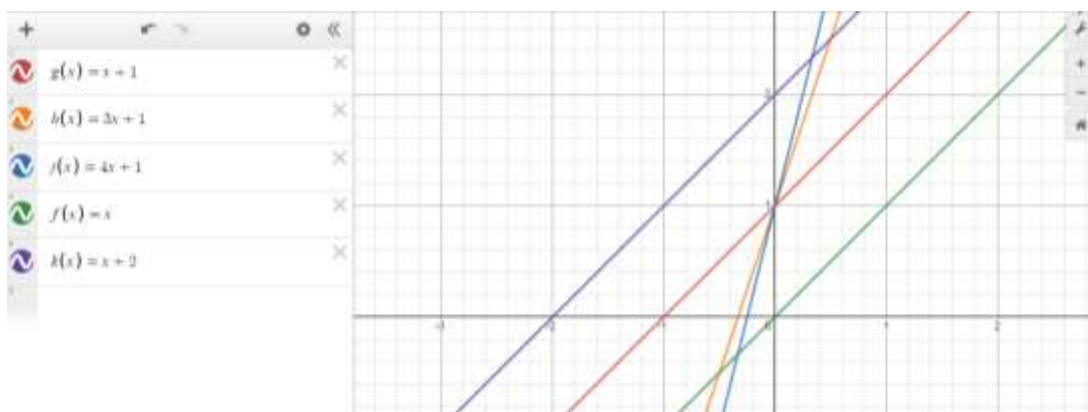
L3 – $f(x) = x + 1$

L1 – $g(x) = 3x + 5$

L3 – $h(x) = -0.5x + 2$

Observando a necessidade de um padrão nas funções informadas para que pudéssemos conduzi-los ao objetivo da exploração, passamos a fazer uso da CGD informando algebricamente funções afins e visualizando a sua representação gráfica, conforme Figura 21.

Figura 21 – Explorando graficamente os coeficientes da função afim



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Inicialmente, informamos apenas as funções $g(x)$, $h(x)$ e $j(x)$ para que os licenciandos fizessem suas observações. Em seguida, informamos as funções $f(x)$ e $k(x)$. O objetivo foi dar condições para que os alunos transitassem entre a representação algébrica e gráfica de cada uma das funções, reconhecendo padrões que os levassem a concluir o porquê dos nomes atribuídos aos coeficientes da função afim.

L3 – No caso aí, o coeficiente a dirá quanto mais próximo ou distante ele estará do eixo y .

Pp – É uma conclusão. Quem conclui de outra forma?

L3 – Bora, L1, diz aí a tua.

Pp – Se você observar aqui, as funções $f(x)$, $g(x)$ e $k(x)$, elas têm o mesmo o quê?

L13 – Coeficiente Angular.

Pp – Vejam, elas têm o mesmo coeficiente a . Consequentemente, a reta que elas formam são o quê?

L3 – Retas paralelas.

Pp – Elas formam o mesmo...

L1 – Ângulo.

Pp – Ângulo com o eixo x . Certo?

L13 – Com x e com y .

Pp – É, consequentemente, com y também. Então, por que na função afim o coeficiente a é chamado de coeficiente angular?

L1 – Por conta do ângulo.

L9 – Porque ele determina a inclinação da reta.

Desse modo, percebemos o quanto a representação algébrica e gráfica proporcionada pela CGD através da EPRP foi capaz de conduzir os licenciandos a compreenderem o sentido do nome coeficiente angular.

Relacionamos essa abordagem na função afim com o que é estudado em Geometria Analítica. Ao observarmos algebricamente que as retas têm o mesmo coeficiente angular, dizemos que elas são paralelas. Nem sempre essa abordagem é desenvolvida fazendo uso das

representações algébrica e gráfica ao mesmo tempo, da mesma forma que nem sempre relacionam o conteúdo de Geometria Analítica na 3ª série do ensino médio com o que foi estudando em função afim na 1ª série. Fizemos uma breve discussão sobre essa abordagem e a importância do uso didático da CGD no estudo da Geometria Analítica.

Pp – Agora, por que o “b” é coeficiente linear?

L9 – Porque ele estará sempre na mesma constante, né? Sempre em uma linha reta.

L3 – Pensei besteira aqui agora.

Pp – Diga, pode dizer!

L3 – Porque ele age como parâmetros da função.

Pp – O coeficiente linear?

L3 – Sim! No 1º quadrante, ele tem um valor a partir do um, por exemplo, nessa primeira função aí $f(x) = x + 1$, o primeiro quadrante parte do um, e o 2º quadrante vai até o um. A divisão.

L9 – Mas é porque o coeficiente linear ele fornece os valores para o eixo u , para as ordenadas e não para as abscissas.

Pp – Pronto, está chegando. Prestem atenção. Qual o sentido da palavra “linear”?

Licenciandos – Linha!

Pp – De linha, não é? De uma coisa reta.

L2 – Linha direta.

Pp – Então, o coeficiente linear é?

L6 – Por que todos os valores dele estão em uma linha? Todos os valores que ele pode assumir. Seria o eixo “y”.

Pp – O coeficiente linear corresponde ao valor em que a reta toca o eixo y no gráfico de uma função afim.

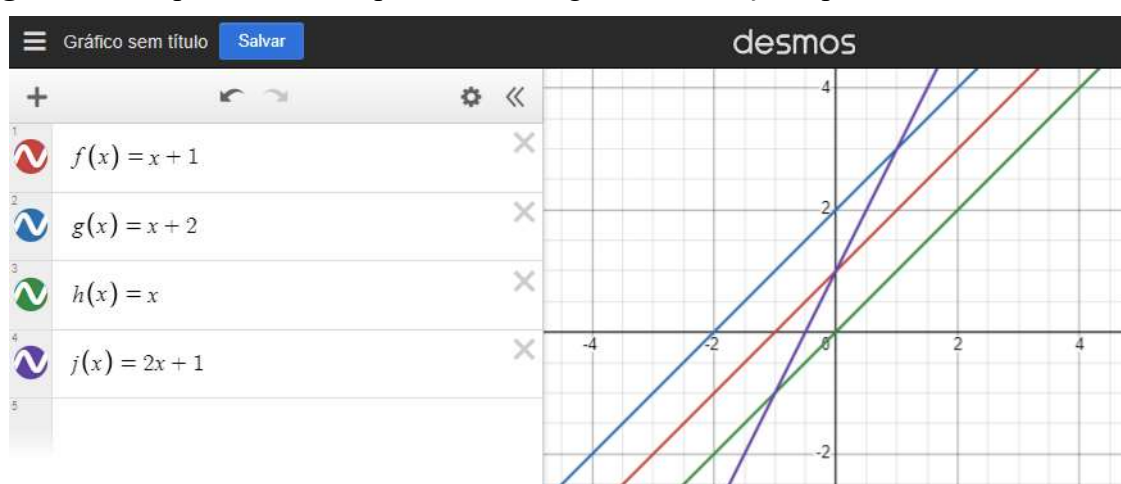
Observamos a importância da mediação na EPRP conduzindo o aluno, com questionamentos que o façam perceber relações entre os elementos observados e traduza por meio conjecturas e/ou ideias. Na exploração do coeficiente b , os licenciandos apresentam observações interessantes a partir do que se observa algebricamente e graficamente na CGD. Porém, percebemos que, ao final, antecipamos uma observação importante, que consistia em identificar que o ponto que a reta toca o eixo y corresponde sempre ao coeficiente b . Esse tipo de comportamento não é interessante na EPRP por parte do mediador da proposta. É provável que alguns licenciandos já estivessem construindo essa ideia que foi antecipada.

Observamos que, nesse momento da atividade de EPRP, as funções dos serviços do restaurante que vínhamos explorando deram lugar a outras funções. Não significa que o problema foi descaracterizado ou tomou um rumo inesperado. Ao buscarmos explorar a ideia de coeficiente angular e linear a partir da EPRP dentro do contexto dos serviços do restaurante, sentimos a necessidade de trabalhar com outras funções que melhor conduzissem os licenciandos à construção dessas ideias matemáticas.

Feito isso, eles teriam condições de retomar o contexto do problema de posse desses conceitos e interpretar o que cada um desses coeficiente determina na exploração das funções do contexto inicial do problema.

Com base nessa exploração e construção desses conceitos, passamos à redação da proposição do problema. L3 sugeriu explorar a função $f(x) = x + 1$. Acrescentamos a função $g(x) = x + 2$ e L3 completou com $h(x) = x$, lembrando ser a função que corresponde ao quarto serviço do problema inicial. Ao explorarmos, perceberam que as retas seriam paralelas, havendo a necessidade de apresentar outras funções com coeficientes diferentes. Nesta direção, sugerimos acrescentar a função $j(x) = 2x + 1$ e passamos a explorar na CGD (Figura 22).

Figura 22 – Explorando o comportamento do gráfico da função a partir dos seus coeficientes



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

L11 – O que você consegue identificar a partir dessas funções no gráfico?

Pp – Pronto! Eu posso já comparar as 4 ou logo as 3 primeiras?

L1 – É melhor as 3 primeiras.

L9 – Você pode colocar para comparar as três primeiras e depois pede para eles verem o que as três primeiras tem de diferente da quarta.

L1 – Não, o que é que a outra tem de diferente das três.

Pp – Certo! Analisando os gráficos das funções $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$, o que você consegue identificar algebricamente?

L3 – Porque não colocar analisar, observar, ver?

L11 – Você consegue observar algum padrão?

L3 – Isso!

L3 – Ou visualizar.

Pp – Aí depois?

L1 – Aí depois ele vai ver as três e comparar com a $j(x)$.

L11 – Comparando as 3 primeiras funções com a última, o que você consegue observar? É a mesma coisa, né!

L1 – É! Pode colocar uma função dessas $j(x)$ ele vai ver que o que mudou foi o coeficiente angular, quando ele estiver comparando. Porque as três estão no mesmo ângulo e ali está diferente.

L9 – E ele vai perceber.

L3 – E $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ em comparação com $j(x)$ qual foi a mudança que teve e o que isso resultou?

L9 – É porque as três primeiras são paralelos, mas a quarta não é paralela.

L3 – Qual a mudança que teve das três primeiras para a quarta?

L3 – Coloca aí: descreva com suas palavras o que é coeficiente angular e coeficiente linear de acordo com as funções.

Pp – Mas eles ainda não sabem! Tem que ter alguma coisa para eles especificarem tanto o coeficiente a como o coeficiente b .

L3 – Pronto! O que define o coeficiente a e o que define o coeficiente b ?

Pp – O que caracteriza, né?

L3 – Justamente! Dá a mesma coisa.

Os licenciandos estavam cada vez mais envolvidos na EPRP, expondo os seus raciocínios e ideias. Percebemos que, à medida que eles estavam preocupados em propor o problema, eles também estavam explorando e trazendo respostas para o problema proposto, mesmo já tendo feito toda a exploração anteriormente e chegado às conclusões esperadas com a proposição desse problema.

Ao final desta aula, os licenciandos comemoraram os avanços conquistados, o fim de mais uma etapa da atividade e, com isso, surgiram novos pontos de partida para a próxima aula: por que o coeficiente “a” não pode ser zero? Quem determina o crescimento e o decréscimo do gráfico da função afim?

Comentário temático: Estar diante das informações visuais presentes na CGD e a fácil alteração e manipulação desses dados tem proporcionado um caminhar exploratório mais eficiente, trazendo mais segurança e motivação para os licenciandos. O que antes era visto mais incisivamente de forma algébrica e/ou verbal está sendo explorado juntamente com a representação gráfica e, em alguns momentos, a partir da representação gráfica. A EPRP através da CDG vem proporcionando um espaço fértil para a busca de sentido e compreensão de muitas ideias matemáticas que antes os alunos aceitavam como prontas e não eram incentivados a entender a sua essência. Entre as diferentes representações algébricas, na exploração dos coeficientes associados ao comportamento do gráfico da função, a representação gráfica proporcionada pela CGD foi o ponto de partida e essencial para que se construíssem os conhecimentos necessários. A CGD possibilitou o sentido aos nomes atribuídos aos coeficientes da função afim, ampliando o conhecimento dos licenciandos e gerando mais recursos para a EPRP.

6.6 Função Afim: EPRP através da CGD

16º, 17º, 18º e 19º Encontro - 8 aulas

Datas: 24/11/2022; 25/11/2022; 01/12/2022; 02/12/2022

O tempo foi um dos fatores que moldaram a nossa pesquisa, tendo em vista a sua intencionalidade com a EPRP. Em alguns momentos, muito se discute e pouco se avança, ao mesmo tempo em que é possível perceber largos passos em determinados momentos da EPRP. Muitos desses entraves é reflexo das inexperiências dos licenciandos, especialmente, com a PP.

Neste momento da atividade de EPRP, avaliamos que não teríamos tempo suficiente para abordar todo o conteúdo previamente almejado de função afim, se seguissemos a mesma dinâmica. Frente a isso, optamos por dividir a turma em equipes, proporcionando uma experiência em que a interação maior fosse entre os integrantes de cada equipe, um caminhar mais autônomo.

Para cada equipe foi atribuído um ponto de partida. Os licenciandos foram divididos em cinco equipes, distribuídos da seguinte forma:

- **E1: Gráfico da função afim** – A6 e A7;
- **E2: Domínio e imagem da função afim** – A1, A2 e A11;
- **E3: Zero da função afim** – A8, A9 e A12;
- **E4: Estudo do sinal da função afim** – A3, A10 e A13;
- **E5: Inequação do 1º grau** – A4 e A5.

Justificamos que os licenciandos já tinham condições de trabalhar a EPRP em equipes menores e que essa decisão se fazia necessária para que pudessemos fazer uma avaliação do desenvolvimento deles e gerar mais dados para o PE.

Essa atividade se estendeu para os períodos além dos encontros presenciais. A EPRP foi iniciada em sala de aula e os licenciandos deram continuidade após esse momento. O grupo do WhatsApp ficou à disposição para que eles compartilhassem seus avanços e pudessemos colaborar com a mediação.

No 16º, 17º, 18º e 19º encontro presencial, discutimos coletivamente a construção que cada grupo vinha desenvolvendo. Solicitamos aos licenciandos que descrevessem o raciocínio da equipe para que pudessemos acompanhar e produzir dados para a pesquisa. Mesmo sendo sugeridas alterações por nós e por outros colegas durante a apresentação e exploração em sala de aula, os licenciandos deveriam manter os registros das informações anteriores.

Para uma melhor organização e compreensão das atividades desenvolvidas durante esse período, descreveremos e apresentaremos as análises por ponto de partida, em tópicos separados, a seguir.

6.6.1 Gráfico da Função Afim (E1)

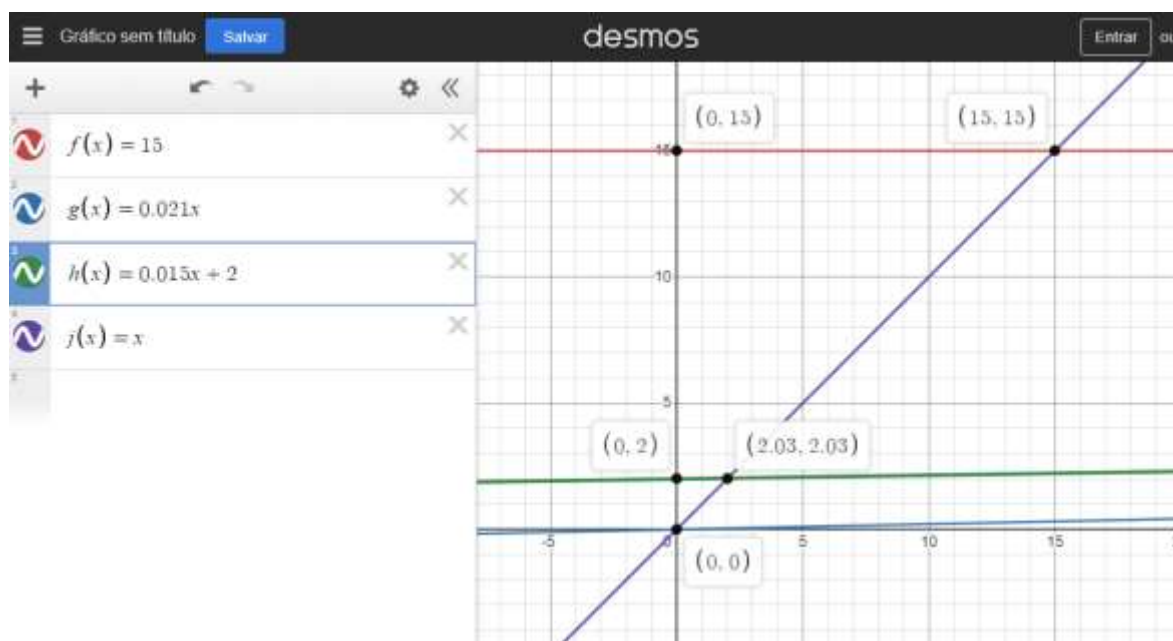
Tomando como ponto de partida o gráfico da função afim através da CGD, à medida que as ideias foram sendo apresentadas, fomos colaborando com a EPRP. Durante a exploração e resolução do problema E1 foi percebendo as incoerências, exigindo a realização de um novo trabalho.

E1 – No primeiro momento, nós não queríamos nos afastar do ponto onde toda a questão foi formulada, então partimos das funções já trabalhadas. Em seguida, propomos o seguinte questionamento.

4 – Utilizando a CGD, esboce os gráficos das funções que foram identificadas nos resultados da questão anterior.

4.1 – Analise a construção dos gráficos das funções obtidas em cada um dos serviços. Quais deles são crescentes?

Figura 23 – Representação algébrica e gráfica dos serviços do Restaurante Abreu



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

E1 – Notamos que, nos serviços, o aspecto mais enfatizado era a parte crescente dos gráficos. Assim, para permitir que o aluno fixasse melhor a distinção entre eles, criamos um serviço que possibilitasse identificar com mais clareza as funções constantes.

E1 – Resposta esperada: o segundo, o terceiro e o quarto serviço são crescentes.

Ao propor o problema, os licenciandos exploraram e o resolveram, a partir da representação algébrica e gráfica da CGD, o que possibilitou a apresentação de uma possível resposta.

A partir dessa EPRP inicial, eles sentiram a necessidade de ir além do contexto presente no problema inicial para que conseguissem explorar melhor o comportamento do gráfico da função afim, tentando dar uma atenção inicial ao gráfico da função constante.

E1 – Notamos que nos serviços, o aspecto enfatizado era a parte crescente dos gráficos. Assim, para permitir que o aluno fixasse melhor a distinção entre eles, criamos um serviço que possibilitasse identificar com mais clareza as funções constantes.

4.2 – Visando oferecer um atendimento aprimorado aos seus clientes, o restaurante Abreu decide abrir um estacionamento privativo com segurança e lavagem por R\$ 20,00 por veículo. Represente os coeficientes da equação e esboce o gráfico correspondente. Ao compará-lo com o primeiro ponto, identifique a quais gráficos este novo serviço se assemelha e por quê.

E1 – Resposta esperada: $f(x) = ax + b$; $a = 0$; $b = 20$. Este gráfico se assemelha com o do primeiro serviço, pois ambos são constantes e não possuem o coeficiente angular.

Ao explorarem o problema na CGD, os licenciandos apresentaram como solução a representação algébrica $f(x) = 20$, resultando em uma representação gráfica de uma função constante. Com isso, passamos a contribuir com a mediação da EPRP.

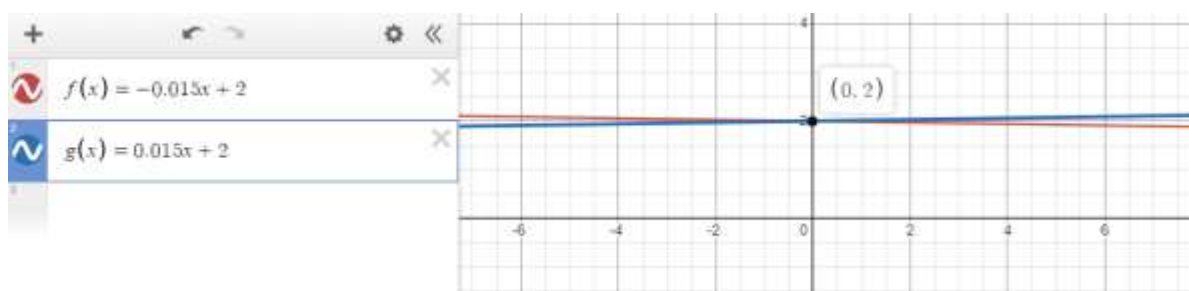
Pp – Neste contexto, a representação correta da função para o estacionamento seria $f(x) = 20x$. Vocês estão levando em consideração a variação da quantidade de veículos “x”. Mesmo que cada pessoa vá com o seu veículo ao restaurante, a função representa o valor que a pessoa irá pagar pelo estacionamento do seu veículo. Esse valor será sempre R\$ 20,00. Se formos analisar a realidade, temos uma incoerência contextual, pois uma mesma pessoa não tem como ir com dois ou mais carros ao mesmo tempo. Desta forma, a função não se caracteriza como constante. É preciso ajustar.

Após perceberem a incoerência numérica e contextual a partir de nossas observações e visualização na CGD, os licenciandos passaram a realizar um novo Trabalho sobre o problema. Em seguida, passaram a explorar o crescimento e decrescimento do gráfico da função afim.

E1 – Como todos os gráficos para os serviços eram crescentes ou constante, pedimos aos licenciandos que criassem uma função com gráfico decrescente e a comparassem com a função dos serviços, observando o que representaria um gráfico decrescente.

4.3 – Se, porventura, o coeficiente angular dos serviços citados assumisse um valor negativo, como se comportaria o gráfico?

Figura 24 – Funções com coeficientes angulares opostos



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

E1 – Como podemos ver, as linhas se cruzam, tornando a função crescente e decrescente. Neste caso, o gráfico se comporta na forma decrescente.

Nessa proposta, ao apresentarem o problema 4.3, E1 chamou a atenção dos licenciandos para observarem apenas o comportamento do gráfico, não levando em consideração o contexto da função que vinha sendo explorada quanto aos serviços do restaurante. Isso se mostra como um argumento interessante na PP frente à CD. Com isso, E1 gerou uma nova discussão em torno do comportamento do gráfico da função afim, por meio de uma alteração apenas no coeficiente “a”.

A resposta apresentada, de que as linhas se cruzam e, por isso, temos uma função crescente e outra decrescente, não é argumento suficiente para justificar o decrescimento da função. Funções crescentes se cruzam, caso não sejam paralelas, da mesma forma que as funções decrescentes. Mesmo assim, observamos que essa foi uma conclusão fruto da visualização imediata proporcionada pela CGD, mas que fica a observação da necessidade de sempre explorar mais o problema para se chegar a alguma generalização.

E1 – Em seguida, para que possamos fixar melhor o conceito de crescente, decrescente e constante, pedimos que ele construa, na calculadora, todas as funções a seguir.

4.4 – Com a prática da CGD das questões anteriores, esboce as seguintes funções e comente sobre o comportamento de cada uma delas:

$$f(x) = 2x + 2$$

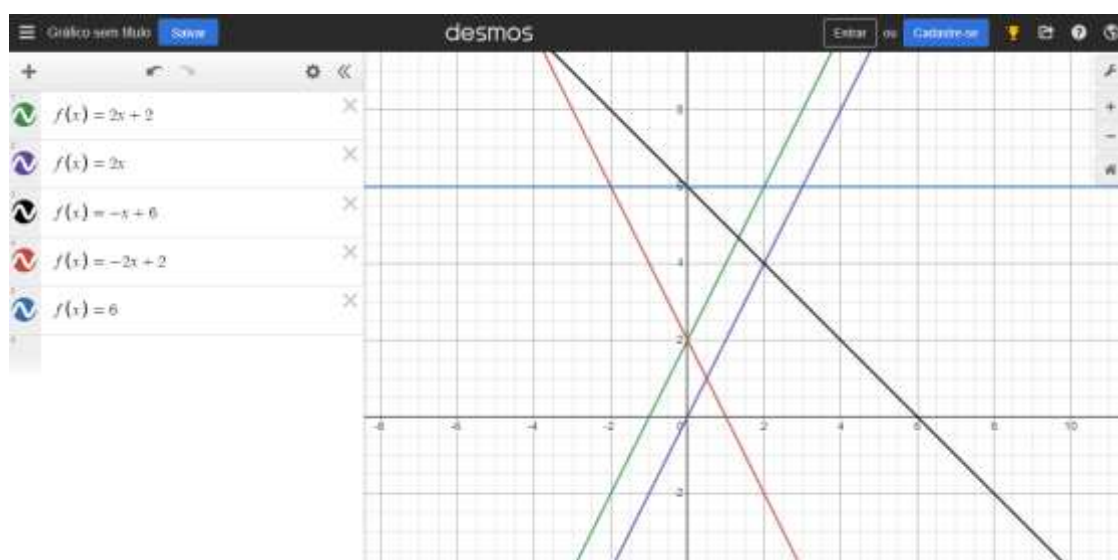
$$f(x) = 2x$$

$$f(x) = -x + 6$$

$$f(x) = -2x + 2$$

$$f(x) = 6$$

Figura 25 – Gráfico de funções crescente, decrescente e constante



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

E1 – Após a análise das funções do ponto anterior e tratando dos serviços oferecidos pelo restaurante, a variável pode assumir um valor negativo em algum deles? Comente.

E1 – Resposta esperada: Não, pois as variáveis que podem assumir são em gramas e, por definição, os gramas são positivos.

Pp – Neste momento, é interessante destacar a qual variável vocês estão se referindo no problema, pois temos o “y”, que corresponde ao valor que irá pagar, e o “x”, que equivale ao consumo de comida em gramas. Desta forma, o problema terá melhores condições de atingir a CD.

Neste momento da EPRP, os licenciandos resgataram novamente as ideias dentro do contexto que vinha sendo trabalhado. Consideramos esse posicionamento interessante, pois os licenciandos foram capazes de perceber a necessidade de fazer uso de outras funções para analisar o comportamento do seu gráfico quanto ao crescimento e decrescimento. Uma vez construída essa ideia, eles retomaram as funções dos serviços do restaurante para fazer essa discussão dentro do contexto.

4.5 – Com a análise dos gráficos, o que o gráfico do serviço destinado ao sorvete tem de diferente dos demais? Ele pode assumir valores fracionados? Comente.

E1 – Resposta esperada: O tipo de gráfico do sorvete consiste em uma função do tipo discreta, ao contrário dos demais, que são contínuos. Neste caso, a representação do gráfico é feita apenas por pontos, impossibilitando assumir valores fracionados. Essa discrepância resultaria em uma incoerência numérica, especialmente considerando o serviço ofertado.

Esperávamos que os licenciandos abordassem a partir desse ponto de partida o crescimento e decrescimento do gráfico, mas percebemos que explorar o problema também traz questionamento que os levaram a discutir o domínio da função. A partir do que os licenciandos apresentaram, tecemos alguns comentários e observações para que se encaminhassem melhor para a versão final do problema.

Pp – É interessante aprofundar essa ideia, pois muitos dos alunos podem não ter compreendido completamente a distinção entre variável contínua e discreta, bem como a representação gráfica através de pontos em vez de uma reta. Vocês podem elaborar mais perguntas sobre a interpretação das informações nos serviços, permitindo que os alunos respondam com base exclusivamente na análise dos gráficos. Isso contribuirá para o desenvolvimento da habilidade interpretativa dos alunos. Sugerimos fazer as alterações necessárias, mantendo todo esse texto e apresentando as justificativas necessárias.

Após a exploração descrita, os licenciandos continuaram o Trabalho em torno do EPRP apresentando o seguinte problema para explorar o gráfico da função afim.

GRÁFICO DA FUNÇÃO AFIM

4 – Com o uso didático da CGD, esboce os gráficos das funções que você encontrou para cada um dos serviços.

4.1 – Analisando os gráficos das funções referentes a cada serviço, quais deles são crescentes?

4.2 – Visando oferecer um melhor atendimento para seus clientes, o restaurante Abreu decide abrir um estacionamento privativo com segurança e lavagem a R\$ 20,00 por veículo. Represente algebricamente e graficamente a função, identificando seus coeficientes. Comparando com os gráficos esboçados em 4.1, com qual gráfico este novo serviço se assemelha e por quê?

4.3 – Se, porventura, o coeficiente angular das funções referentes aos serviços assumisse um valor negativo, como se comportaria o gráfico?

4.4 – Utilizando a CGD, esboce os gráficos das seguintes funções e comente o comportamento de cada uma delas:

$$f(x) = 2x + 2$$

$$g(x) = 2x$$

$$h(x) = -x + 6$$

$$t(x) = -2x + 2$$

$$v(x) = 6$$

4.5 – Após a análise das funções acima e comparando com as funções que representam os serviços oferecidos pelo restaurante, a variável pode assumir um valor negativo? Comente.

4.6 – Analisando os gráficos de acordo com o contexto dos serviços, o que o gráfico do serviço destinado ao sorvete tem de diferente dos demais? Ele pode assumir valores fracionados? Comente.

Ao analisarmos a versão final do problema proposto pelos licenciandos, percebemos que algumas explorações realizadas anteriormente não foram contempladas, como os tópicos 4.2 e 4.5 do problema. Em 4.1, os licenciandos solicitaram o esboço do gráfico das funções referentes aos serviços, mas na Figura 23 não se atentaram ao domínio, ficando a representação gráfica no conjunto dos números Reais.

Destacamos a capacidade dos licenciandos de enxergarem que as funções do contexto do problema limitavam a exploração do comportamento do gráfico da função. Apresentaram, assim, outras funções para sua exploração de forma algébrica e gráfica, a fim de analisar o comportamento do gráfico, sem relacionar com o contexto do problema.

No item 4.6, o problema trazia uma discussão que envolvia a representação do gráfico, assim como o domínio da função. Quando os licenciandos questionaram se a função pode assumir valor negativo, isso poderia se configurar como uma antecipação das respostas. Seria interessante um questionamento mais aberto, levando o aluno a construir essa ideia e até descobrir outras informações.

O problema proposto por E1 passaria por uma nova exploração antes de compor o PE, evidenciando os elementos importantes para o desenvolvimento de uma prática de EPRP.

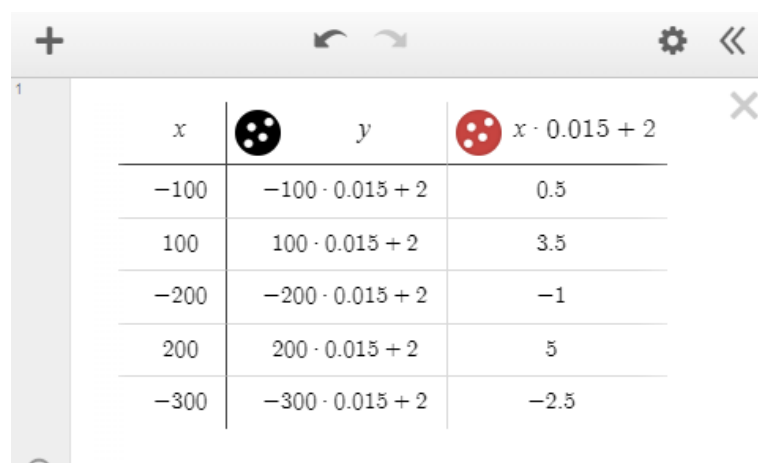
Comentário temático: Percebemos um bom desenvolvimento da proposta de problema, mesmo aparecendo algumas incoerências que comprometem a exploração geral do problema. É perceptível o quanto a CGD direciona o desenvolvimento desta EPRP. Por se tratar da exploração do gráfico da função afim, já se esperava uma contribuição mais potencial do uso didático da CGD, tendo em vista a integralização instantânea entre a representação algébrica e gráfica da função. Essa funcionalidade contribuiu para o desenvolvimento cognitivo dos alunos, despertando a curiosidade em abordar informações que foram além do crescimento e decrescimento do gráfico da função afim. Chamamos atenção para a não realização de generalizações/conclusões a partir da primeira visualização gráfica. Essa precipitação pode levar à construção de ideias erradas, em que se exige uma exploração mais profunda.

6.6.2 Domínio e Imagem da Função Afim (E2)

Tomando como ponto de partida o domínio e a imagem da função afim, E2 optou inicialmente por explorar o terceiro serviço, para realizar o seu primeiro Trabalho.

5.1 – Sabendo que não é possível pedir uma quantidade negativa de comida, observe a tabela abaixo:

Figura 26 – Exploração numérica do terceiro serviço na CGD



x	y	$x \cdot 0.015 + 2$
-100	$-100 \cdot 0.015 + 2$	0.5
100	$100 \cdot 0.015 + 2$	3.5
-200	$-200 \cdot 0.015 + 2$	-1
200	$200 \cdot 0.015 + 2$	5
-300	$-300 \cdot 0.015 + 2$	-2.5

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

E2 – Foi analisando que essa metodologia não era suficiente e que não seria válido já deixar claro para o aluno que não se pede uma quantidade negativa de comida. Seria mais interessante o aluno chegar a essa conclusão por meio da construção da tabela na CGD.

5.1 – (2º pensamento) Utilizando a função “tabela” da CGD, atribua valores positivos e negativos na função do 3º serviço.

a) O que você observa?

E2 – Esperamos que o aluno observe o comportamento do gráfico ao atribuir valores positivos e negativos para a variável “x”. Se tomarmos $x = -100$, como mostra na tabela (Figura 26), chegaremos à conclusão que o valor a ser pago será R\$ 0,50.

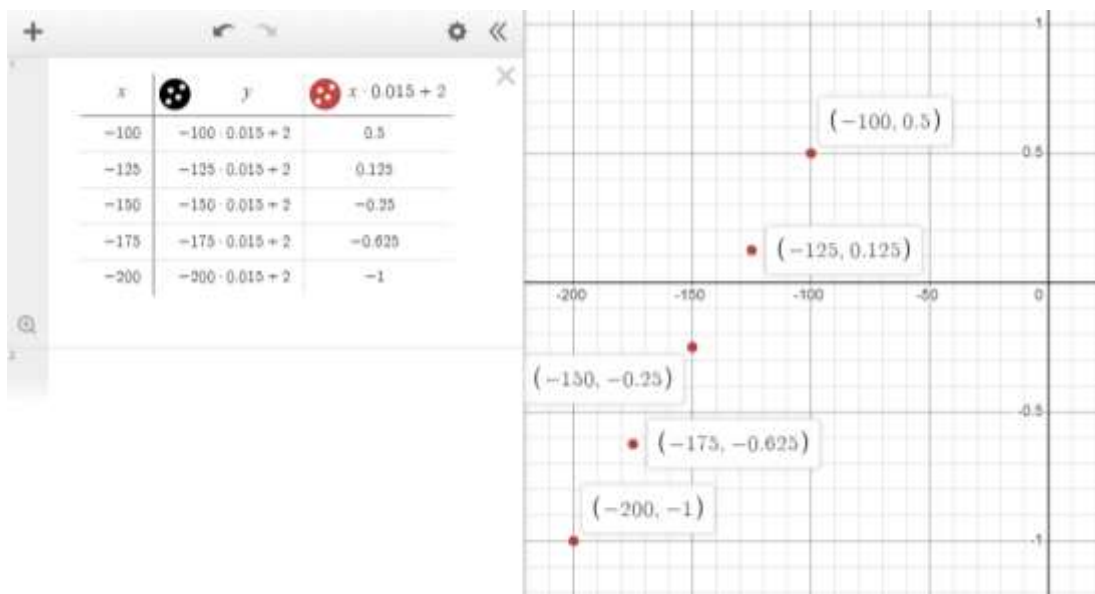
E2 – (Expectativa de resposta do aluno) porque se o -100 está multiplicando o 0,015 chegamos em algo do tipo -1,5. Somando este valor negativo com o R\$ 2,00 do suco, chegamos em R\$ 0,50 que seria o valor a ser pago. Sendo assim, não é coerente, trazendo para um contexto da realidade.

E2 – Percebemos que não seria interessante deixar claro para os alunos que não se pede alimentos negativos. Pedimos que atribuam valores positivos e negativos à variável “x” e que observem o gráfico da função. Notamos que, ao colocar valores positivos e negativos, haverá um momento em que o valor y a ser pago será positivo, mesmo “x” sendo negativo, como mostramos no exemplo acima. Pensando que os alunos pudessem ficar confusos em relação ao valor a ser pago, decidimos pedir para o aluno aplicar apenas valores negativos à variável “x”, e assim chegamos no 3º pensamento.

5.1 – (3º pensamento) Observe a seguir a tabela que foi criada na CGD para o 3º serviço. No primeiro pensamento, deixamos claro que não se pode pedir uma quantidade negativa

de comida. Já neste terceiro pensamento, vamos pedir para o aluno atribuir valores negativos à variável “x” e observar na janela gráfica da CGD o comportamento.

Figura 27 – Exploração numérica, algébrica e gráfica do terceiro serviço na CGD



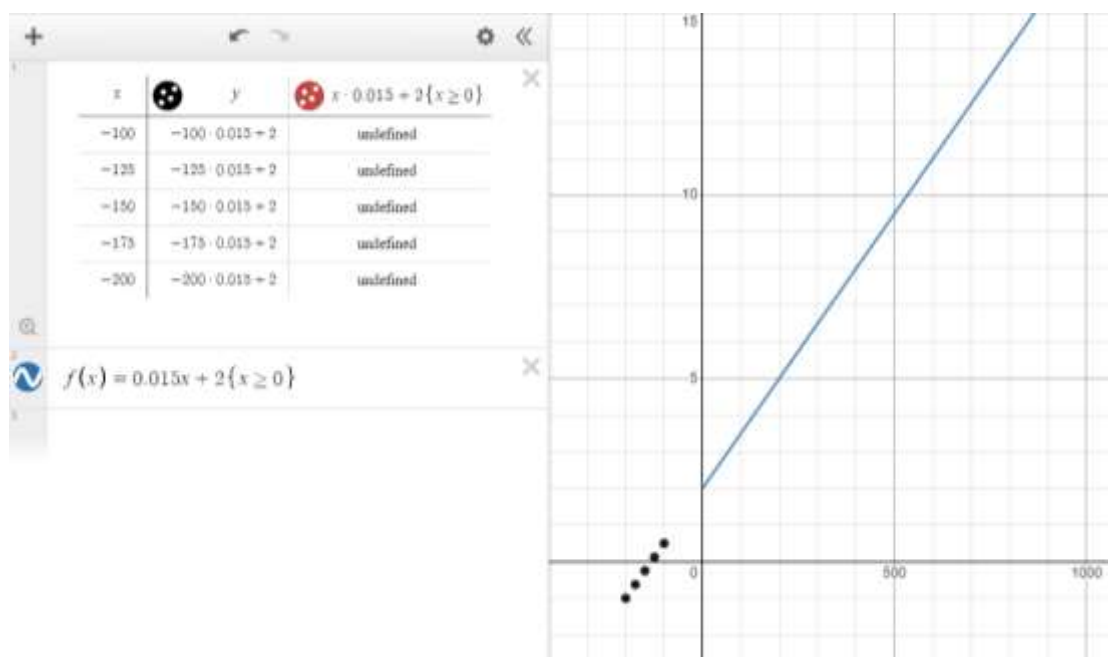
Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

E2 – (*Expectativa de resposta do aluno*) – Esperamos que nesse momento o aluno observe que o gráfico ficou com uma parte decrescente e que chegue à conclusão de que não é possível pedir uma quantidade negativa de comida, pois, trazendo para realidade, não se pede para pesar quantidade negativa de algo. Neste momento, o aluno perceberá a necessidade de restringir os valores no gráfico.

E2 – Ao atribuir valores positivos e negativos, o aluno pode ficar confuso, pois, no exemplo da Figura 27, mesmo que ele atribua valores negativos à variável “x”, o valor a ser pago pode ser positivo. Para evitar essa dúvida no aluno, decidimos trabalhar apenas com os valores negativos. Agora é o momento em que o aluno perceberá a necessidade de restringir os valores no gráfico. Faremos essa explicação para os alunos.

Na Figura 28, o grupo avança no Trabalho realizado na Figura 27, restringindo o domínio da função na terceira coluna da tabela. Como consequência, ela foi preenchida com “undefined”, informando que a função não estava definida para o valor de “x” informado na primeira coluna. Graficamente, os pontos pretos que aparecem plotados são consequências da segunda coluna da tabela, em que não há restrição de domínio.

Em seguida, E2 explorou o gráfico da função $f(x) = 0.015 \cdot x + 2$, restringindo o domínio no conjunto dos números reais em $x \geq 0$. O gráfico é o que visualizamos em azul na janela algébrica da Figura 28.

Figura 28 – Explorando o domínio da função do terceiro serviço na CGD

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Um fator que chamou nossa atenção na exploração do problema da Figura 28 foi a escala que os licenciandos utilizaram para representar o gráfico, tornando mais visível a inclinação da reta, ampliando a visualização no eixo “x” e reduzindo no eixo “y”. Essa foi uma dificuldade identificada durante as primeiras explorações usando a CGD.

Ainda considerando o gráfico da Figura 28, o grupo passou a explorar as ideias de Imagem da função afim.

E2 – Como foi deixado claro desde o início, que “y” seria o valor a ser pago pela quantidade de comida consumida, e os alunos já sabem a definição de imagem, espera-se que eles associem, para cada quantidade “x” de comida consumida, o quanto irá pagar em um valor “y”. Onde esse “y” seria justamente a imagem da função, ou seja, para cada valor atribuído a “x”, temos um valor $y \geq 2$.

A discussão que E2 apresentou sobre a imagem da função foi construída a partir da visualização proporcionada pela CGD. A ideia de Imagem da função foi explorada a partir do contexto do problema e deu condições para que o aluno construísse esse conceito a partir de sua exploração.

Pp – Como ficará a questão pronta, levando em consideração todas essas discussões que vocês fizeram? Vejo que não colocaram todas as observações que fizemos ontem durante a aula, que são importantíssimas para o entendimento do domínio e imagem da função, inclusive a sugestão de explorar o serviço quatro também. Avancem!

E2 – (*4º Pensamento*) agora vamos trabalhar o 4º serviço, que consiste em cobrar 1 real por cada bola de sorvete. Sabemos que a bola de sorvete só se pede em quantidade inteira, como, por exemplo: uma, duas, três e assim sucessivamente. Vimos a necessidade de restringir seu domínio da mesma forma que aconteceu com o 3º pensamento.

E2 – (*Expectativa de resposta do aluno*) o aluno veria a necessidade de restringir seu domínio da mesma forma que aconteceu com o 3º pensamento, ou seja, o gráfico ficou com uma parte decrescente, sendo assim, não é possível pedir uma quantidade negativa de bolas de sorvete. Logo, o aluno irá perceber a necessidade de restringir os valores no gráfico.

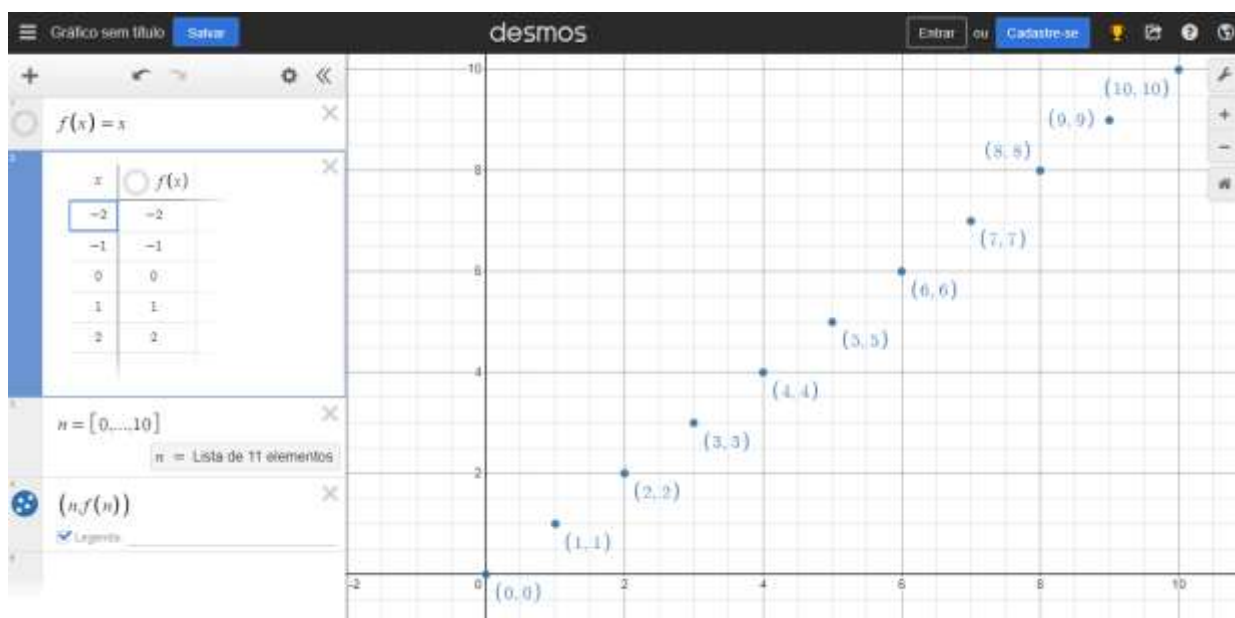
E2 – Mesmo que ele atribua valores negativos à variável “x”, o valor “y” a ser pago será um valor negativo. Portanto, o aluno perceberá que não é possível tomar quantidades negativas de sorvete, pois o valor a ser pago também será negativo, o que não é condizente com a realidade, pois ninguém pede, por exemplo, -2 bolas de sorvetes ou $\frac{1}{2}$ de uma bola de sorvete. Então, para não gerar dúvidas e manter o problema coerente com a realidade, decidimos trabalhar apenas com os valores positivos.

O argumento apresentado por E2 para justificar a restrição do domínio no 4º serviço baseado no 3º pensamento não tem a mesma aplicação, pois, antes, tínhamos uma variável contínua no campo dos números reais, e agora estávamos explorando uma função discreta, com domínio no campo dos números naturais. É importante que essas informações sejam exploradas e fiquem claras para os alunos. A sugestão de utilizar apenas números positivos também não é bem-vista na perspectiva da EPRP, pois o aluno deve também usar os números negativos e, a partir da visualização gráfica, chegar às suas próprias conclusões.

Na expectativa de resposta apresentada para o 4º pensamento, o grupo justificou que o gráfico ficaria decrescente ao atribuir valores negativos a x , o que não aconteceu. Neste momento, sentimos a ausência da exploração gráfica para que chegassem a conclusões corretas.

E2 – Depois da tabela construída com as possíveis quantidades de sorvetes, precisamos delimitar em qual conjunto estamos trabalhando. Nesse caso, é no conjunto dos números naturais. Sendo assim, $x \in \mathbb{N}$. Na CGD, escreva uma variável qualquer “n” e coloque entre colchetes o intervalo que você quer trabalhar. Agora, escreva uma função do tipo $(n, f(n))$. Teremos uma construção e visualização de acordo com Figura 29.

Figura 29 – Exploração numérica, algébrica e gráfica do quarto serviço na CGD



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

E2 – Observe que no gráfico plotado não temos a reta tocando os pontos, mas, sim, apenas os pontos. Como estamos nos conjuntos dos naturais, não iremos trabalhar com números quebrados, sendo assim, temos só pontos. Usamos como exemplo uma pessoa que pode consumir de 0 a 10 bolas de sorvete. Então restringimos esse intervalo para $[0, \dots, 10]$, e esse intervalo pode variar, sendo $x \geq 0, x \in \mathbb{N}$.

A restrição do domínio para funções de variável discreta e contínua proporcionada pela CGD permite um melhor aprofundamento na EPRP. Ao transitar entre o contexto do problema (linguagem verbal), a representação algébrica e a gráfica, os alunos são capazes de perceber a necessidade de restringir e/ou limitar determinada região do gráfico, de forma a atender ao seu contexto.

Quando essas funções são exploradas fora de um contexto, o que se espera é uma representação contínua do gráfico da função. Porém, na perspectiva da EPRP, é interessante trazer elementos que permitam ao aluno visualizar as diferentes formas de representar um contexto por meio de uma função, construindo ideias e conceitos matemáticos a partir de um problema que faça sentido para o aluno e com ferramentas que lhe permitam representar e visualizar de forma dinâmica e instantânea os objetos matemáticos.

Pp – Vocês precisam fragmentar mais os questionamentos, de forma que o aluno vá construindo as ideias. Acima, vocês fazem muito bem isso, porém aqui ficou muito direto. Vocês exploram muitas informações importantes acima. É preciso saber como problematizar isso de forma que o aluno vá construindo o seu conhecimento sobre o domínio e imagem da função de forma rica, diante dos recursos que temos. Podem fazer quantas perguntas acharem necessárias, seguindo uma sequência lógica e didática.

Após a EPRP discutida até aquele momento, E2 apresentou a versão final do seu problema, que também passaria por uma nova exploração para o PE.

DOMÍNIO E IMAGEM DA FUNÇÃO AFIM

5 – Utilize a função tabela da CGD para o 3º serviço e atribua valores negativos à variável “x” e observe o comportamento do seu gráfico.

5.1 – Comente suas observações.

5.2 – Encontre o Domínio e Imagem da Função.

5.3 – A partir do que foi estudado até agora, encontre o domínio das funções dos demais serviços algebricamente e graficamente com o auxílio da CGD.

Por mais que esse grupo tenha apresentado uma exploração ampla do problema, percebemos que, ao final, as ideias envolvidas na proposta encontravam-se de forma muito direta. Mesmo assim, isso não inviabilizou o desenvolvimento da atividade e as contribuições do uso didático da CGD durante a EPRP.

Comentário temático: Os licenciandos envolvidos nessa EPRP conseguiram deixar claro o desenvolvimento do seu raciocínio durante a atividade. Com isso, percebemos o quanto as

funcionalidades da CGD têm sido importantes para o desenvolvimento das ideias envolvidas no problema. A percepção dos licenciandos referente à escala para uma melhor visualização do gráfico nos chama atenção, pois essa atitude requer conhecimento das ideias de escala e proporção, sendo essa uma dificuldade que os alunos apresentam ao fazer uso de lápis e papel. Ao avançar para as ideias de domínio e imagem, percebemos que a CGD permite a restrição do domínio e imagem tanto para variáveis contínuas como discretas. Percebemos também que grande parte da exploração apresentada pelos licenciandos foi viabilizada pelo trânsito entre a representação algébrica e gráfica das funções proporcionadas pela CGD. Diante do que foi apresentado, os licenciandos se desenvolveram bem na exploração e resolução do problema, apresentando uma certa timidez na redação da proposição do problema final.

6.6.3 Zero da Função Afim (E3)

Tomando o zero da função como ponto de partida, o grupo propôs inicialmente um problema a partir do uso da tabela na CGD.

6.1 – Construa uma tabela através da CGD atribuindo os seguintes valores de “x” para a função $f(x) = 2x - 4$.

a) $x = 0$

b) $x = 1$

c) $x = 2$

E3 – Em seguida, o professor deve perguntar: o que vocês podem observar no exemplo “c”?

Como forma de justificar a exploração do problema por meio da sua resolução, E3 apresentou o desenvolvimento do cálculo aritmético, aliando o uso didático da CGD para explorar a representação gráfica.

$$\text{E3} - \text{a) } 2x - 4 = 2 \cdot 0 - 4 = -4$$

$$\text{b) } 2x - 4 = 2 \cdot 1 - 4 = -2$$

$$\text{c) } 2x - 4 = 2 \cdot 2 - 4 = 0$$

E3 – (*Expectativa de resposta do aluno*) O aluno pode responder que, quando $x = 2$, $y = 0$. Em seguida, o professor diz: Então, podemos concluir com o exemplo “c” que o 2 é onde a reta corta o eixo “x”. Logo, encontramos assim o “zero da função”, que é basicamente igualar a função $f(x) = 0$ ou $y = 0$. Com este exemplo acima, vamos encontrar agora o zero da função no problema que estamos estudando, com relação ao terceiro serviço do Restaurante Abreu.

O grupo apresentou uma proposta correta de problema inicialmente, embora tenhamos observado que os questionamentos foram muito diretos. No entanto, na EPRP, os licenciandos conseguiram desenvolver um raciocínio adequado para chegar à ideia de zero da função.

Dando continuidade à EPRP, E3 propôs um novo contexto, a partir de uma história, para explorar a ideia de zero da função.

6.2 – Na quarta-feira passada, dia 23 de novembro, Joana levou sua amiga Fernanda, sua tia Margareth, seus irmãos Carlos e Beatriz, para almoçar no restaurante Abreu. Sua amiga consumiu 200g de comida e tomou um suco; sua irmã Beatriz consumiu a mesma quantidade de comida da amiga dela, porém não quis o suco. Sua tia Margareth consumiu 600 gramas de comida mais um suco. Seu irmão Carlos consumiu 800 gramas de comida mais um suco, e Joana consumiu 400 gramas de comida mais 1 suco.

a) Encontre o zero da função construindo uma tabela juntamente com o gráfico, atribuindo valores através da CGD referente ao terceiro serviço do restaurante Abreu, sabendo que todas as quartas-feiras o restaurante dá um desconto de R\$ 2,00 automaticamente para cada pessoa a mais que o cliente levar.

Os licenciandos exploraram o problema, iniciando com a representação algébrica de uma função que correspondesse ao contexto apresentado na história. Em seguida, fizeram uso da CGD para organizar os dados em tabela e visualizá-los graficamente.

E3 – $f(x) = ax + b$ ----- zero da função $y = ax + b - (\text{desconto})$?

Cálculo auxiliar:

Amiga Fernanda	$0,015 \cdot 200 + 2,00 - 0$	$\rightarrow 3 + 2 = 5$
Irmã Beatriz	$0,015 \cdot 200 + 0 - 0$	$\rightarrow 3 = 3$
Tia Margareth	$0,015 \cdot 600 + 2,00 - 0$	$\rightarrow 9 + 2 = 11$
Irmão Carlos	$0,015 \cdot 800 + 2,00 - 0$	$\rightarrow 12 + 2 = 14$
Joana	$0,015 \cdot 400 + 2,00 - \text{desconto}$	$\rightarrow 6 + 2 - 8 = 0$

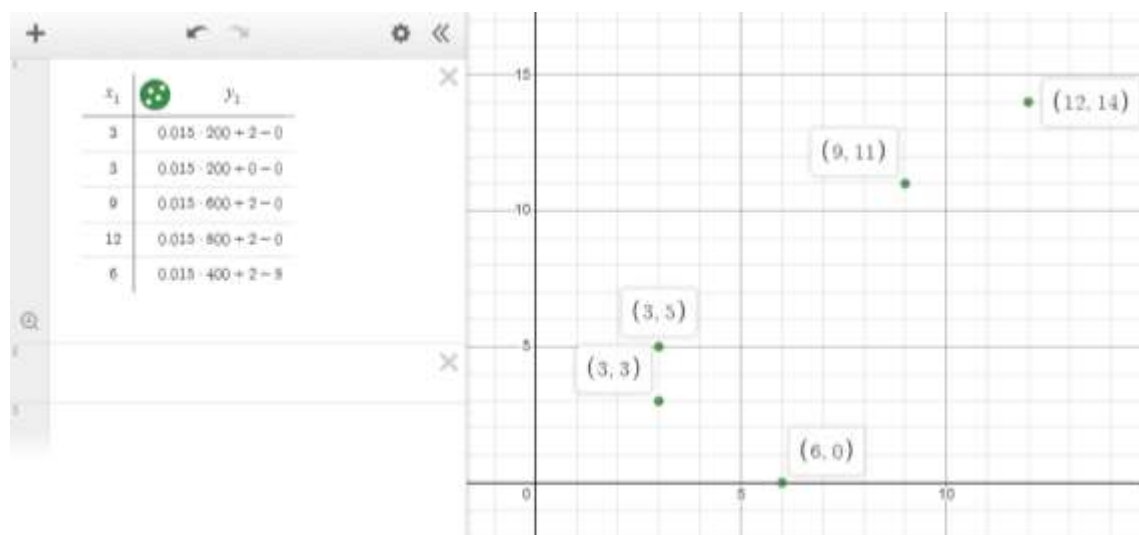
Com isso, encontramos o zero da função no consumo de Joana.

O detalhamento da exploração apresentada pelo grupo a partir da história criada e do problema proposto foram fundamentais para que pudéssemos auxiliá-los, compreender o seu raciocínio e identificar a incoerência numérica do problema. Os licenciandos estavam convictos de que havia CD e que o par ordenado $(6, 0)$ caracterizava o zero da função.

Ao discutirmos algebricamente o problema, percebemos que o grupo estava adicionando o desconto de R\$ 2,00 para cada pessoa a mais que o cliente levasse, sem perceber que se tratava de uma terceira variável. Isso resultou na dificuldade em compreender essa ideia, a ponto de ficarem chateados com a nossa argumentação, acreditando que não estávamos entendendo o raciocínio deles.

Na tabela construída na CGD (Figura 30), os licenciandos não representaram algebricamente a função. Eles apresentaram o cálculo aritmético para chegar ao valor que iriam pagar, já incluindo o valor do desconto. Também não se atentaram à representação gráfica, em que os pontos não estão alinhados, descaracterizando uma função afim.

Figura 30 – Usando a tabela da CGD para explorar problemas



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Observamos que, quando eles descrevem a função, não atribuem variável para o desconto, apenas colocam $f(x) = ax + b - (\text{desconto})$. A forma correta de representar seria atribuir uma nova variável ao desconto, ficando $f(x, z) = ax + b + z$. Por se tratar de uma função de três variáveis (x, y, z) , não seria possível representar no plano cartesiano. No entanto, a CGD sugere o uso de um parâmetro por meio de um controle deslizante para que consigamos visualizar o comportamento do gráfico, fixando um valor para “z” e variando apenas o “x” e o “y”.

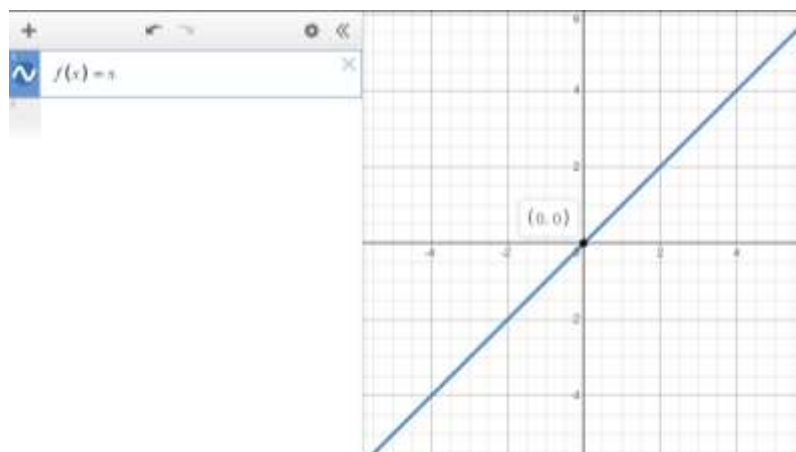
E3 – Ao analisarmos criteriosamente o exemplo acima, identificamos alguns possíveis erros ao explorar mais a atividade, como, por exemplo, só é válido para esse exemplo específico, onde Joana consome 400g e recebe 2 reais de desconto de cada amigo que levou, que, no caso, foram 4. Logo, iremos iniciar um novo raciocínio para elaborar a atividade.

Consideramos este um momento importante na EPRP, no qual os licenciandos defenderam seus argumentos, aprofundaram a exploração e foram capazes de perceber a incoerência didática no problema. A partir disso, passaram a realizar um novo Trabalho em torno do ponto de partida.

6.1 – Partindo do quarto serviço, utilize a função tabela da Calculadora Desmos e construa o gráfico da função.

6.2 – Para o 3º serviço, atribua valores negativos à variável “x” e observe o comportamento do seu gráfico. Comente.

E3 – Tomando o 4º serviço, temos $f(x) = x$.

Figura 31 – O zero da função no quarto serviço

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Após esboçar na CGD essa função, faremos a seguinte pergunta aos alunos: o que representa o ponto $(0, 0)$? A partir daí, esperamos as seguintes respostas: é quando o gráfico toca o eixo “x” na origem; quando você não consome, não paga nada.

Observamos que os licenciandos não se atentaram em restringir o domínio da função na Figura 31. Com isso, a exploração que estava sendo feita não condizia com o contexto do problema. Para ter uma coerência a partir do gráfico apresentado, a análise deveria ser feita desconsiderando o contexto do 4º serviço.

6.3 – Construa o gráfico das seguintes funções na CGD:

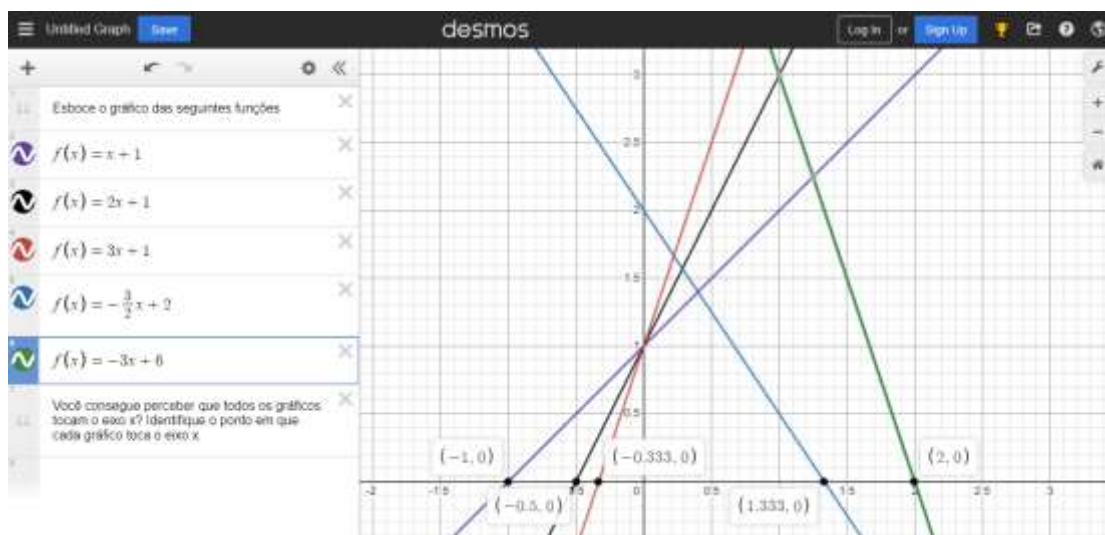
$$f(x) = x + 1$$

$$f(x) = 2x + 1$$

$$f(x) = 3x + 1$$

$$f(x) = -\left(\frac{3}{2}\right)x + 2$$

$$f(x) = -3x + 6$$

Figura 32 – Identificando o zero das funções graficamente na CGD

Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

6.4 – Conseguem perceber que todos os gráficos tocam o eixo “x”? Identifique o ponto em que cada gráfico toca o eixo “x”.

E3 – (*Expectativa de resposta dos alunos*) Sempre que o gráfico toca o eixo “x”, a coordenada “y” é igual a 0.

E3 – Enunciar que isso corresponde ao que chamamos de zero da função. Observamos que para achar o zero da função, temos que igualar $f(x)$ a 0, tendo em vista que o aluno conseguiu compreender que o zero da função é sempre quando a função toca o eixo “x”, e o “y” é zero.

6.5 – Calcule algebricamente o zero da função em cada um dos serviços e, em seguida, analise o resultado com base no gráfico da função.

E3 –

$f(x) = x - 1$ $0 = x - 1$ $x = 1$	$f(x) = 2x + 1$ $0 = 2x + 1$ $-1 = 2x$ $x = -\frac{1}{2}$ $x = -0,5$	$f(x) = 3x + 1$ $0 = 3x + 1$ $-1 = 3x$ $x = -\frac{1}{3}$ $x = -0,333$	$f(x) = -\frac{3}{2}x + 2$ $0 = -\frac{3}{2}x + 2$ $0 = -3x + 4$ $3x = 4$ $x = \frac{4}{3}$ $x = 1,333$	$f(x) = -3x + 6$ $0 = -3x + 6$ $3x = 6$ $x = 2$
--	--	--	--	--

PP – Aqui vocês falam em serviço, mas, a seguir, apresentam os cálculos das funções que foram exploradas anteriormente. No entanto, consideramos importante explorar o zero das funções do contexto inicial do problema.

E3 – Verifique no gráfico se os pontos correspondem aos valores encontrados algebricamente. Se sim, marque os pontos nos gráficos. Após analisar o gráfico das funções dadas anteriormente através da CGD, marque os pontos correspondentes ao zero da função. Verifique se há equivalência entre a representação algébrica e a gráfica do zero da função.

Nesta etapa final da EPRP, os licenciandos conseguiram explorar o zero da função partindo da representação gráfica para a algébrica, com o auxílio da CGD, diferindo do que geralmente acontece nas salas de aulas de Matemática.

Quando é esboçado o gráfico de diferentes funções e os alunos percebem que todos eles tocam o eixo “x”, estamos conduzindo os alunos em direção à ideia do zero da função. Ao identificar os pontos na CGD, é provável que percebam que, em todos, a coordenada “y” é igual a zero, justificando o porquê de quando se calcula algebricamente o zero da função inicialmente se iguala a função a zero ($f(x) = 0$).

Em continuidade à exploração do problema, foi proposto o cálculo algébrico dos zeros das funções, comparando o resultado encontrado com os pontos identificados e visualizados na CGD, levando o aluno a concluir, o conceito de zero da função.

Ao final da EPRP apresentada, o grupo propôs o problema a seguir.

ZERO DA FUNÇÃO AFIM

6 – Partindo do quarto serviço, utilize a função tabela da CGD e construa o gráfico da função.

6.1 – O que representa o ponto (0, 0)?

6.2 – Esboce na CGD os gráficos das funções abaixo:

$$f(x) = x + 1$$

$$g(x) = 2x + 1$$

$$h(x) = 3x + 1$$

$$t(x) = -\frac{3}{2}x + 2$$

$$v(x) = -3x + 6$$

6.3 – Conseguem perceber que todos os gráficos tocam o eixo “x”? Identifiquem o ponto em que cada gráfico toca o eixo “x”. O que esses pontos têm em comum?

6.4 – Calcule algebricamente o zero de cada uma das funções de 6.2 e, em seguida, analise o resultado com base no gráfico da função.

Ao tomar ciência do problema proposto ao final da EPRP, sentimos a necessidade de essa exploração se estender para a análise do zero das funções dos serviços do restaurante, proporcionando uma compreensão dentro do contexto que vinha sendo explorado e que fazia parte da realidade dos licenciandos.

Comentário temático: Na exploração do zero da função afim, percebemos licenciandos criativos, buscando ir além do contexto inicialmente apresentado para que pudessem ter dados suficientes para abordar o zero da função. Em alguns casos, vimos os licenciandos, desde o início, fazendo uso de outros dados para explorar o problema, tendo em vista que o contexto do restaurante Abreu limitava o desenvolvimento da compreensão inicial de zero da função. Mesmo não obtendo êxito na tentativa inicial, é louvável a proposta apresentada pelos licenciandos, que argumentaram e proporcionaram um aprofundamento da EPRP. Ao conseguirem sinterizar suas ideias em um problema que possibilitasse a construção da ideia do zero da função, chama-nos atenção a exploração a partir da visualização gráfica proporcionada pela CGD. A equipe percebeu que partir da visualização gráfica seria um caminho mais eficiente. Além de esboçar todos os gráficos propostos no mesmo plano, a CGD permitiu identificar cada um desses pontos, destacando as suas coordenadas e facilitando a interpretação dos dados. Além de concluir o que seria o zero da função afim a partir da visualização gráfica, os licenciandos também se sentiram na necessidade de fortalecer ainda mais esse conceito, propondo o cálculo algébrico do zero da função, confrontando as informações com as disponíveis na CGD, para consolidar o que estava sendo estudado. Com isso, temos mais evidências de como a CGD auxilia os alunos em uma atividade de EPRP.

6.6.4 Estudo do Sinal da Função Afim (E4)

O ponto de partida foi trabalhado inicialmente pelo grupo através de funções sem atribuições numéricas aos coeficientes a e b . Ao tomarmos conhecimento, sugerimos a atribuição de valores aos coeficientes, mantendo o contexto do restaurante.

E4 – Sejam as funções trabalhadas nesta atividade as seguintes:

- Para o serviço 1: $h(x) = b$;

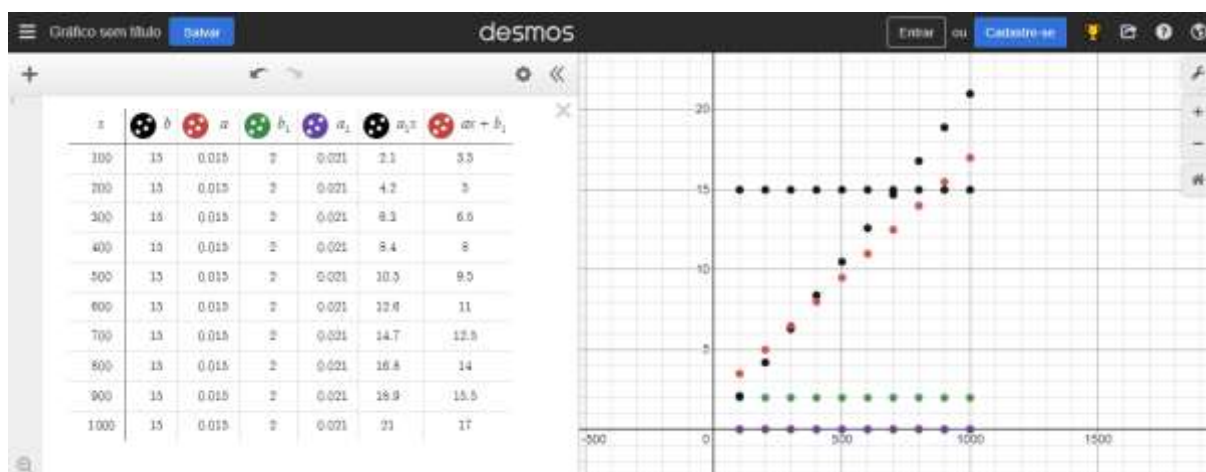
- Para o serviço 2: $g(x) = 0.021x$;

- Para o serviço 3: $f(x) = 0.015x + 2$;

- Para o serviço 4: $j(x) = x$.

Assim sendo, vamos inicialmente fazer os gráficos das funções acima para cada serviço.

Figura 33 – Exploração inicial do estudo do sinal da função na CGD



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

A partir dos gráficos do problema dado, temos a seguinte análise:

- Para a função $h(x) = b$, temos que, para seu estudo do sinal, por ser uma função contínua, não existe alteração de valores. Sendo assim, o sinal da função não varia;

- Para as funções $g(x) = ax$ e $j(x) = x$, temos que seu ponto inicial, em ambas, parte do ponto $(0, 0)$. Ao ser traçado o gráfico, nota-se que, a partir do ponto citado $(0, 0)$, as funções são crescentes e positivas, não admitindo valores negativos;

- Para a função $f(x) = ax + b$, acontece algo semelhante, pois parte do ponto $(0, 2)$, e seu gráfico também é crescente e positivo.

Pp – Vocês devem deixar claro aqui, para o aluno, que ele explorará a função sem levar em consideração o contexto do problema.

Chamou nossa atenção a criatividade do grupo ao construir a tabela desta forma, especificando, nas colunas: o valor de x , os coeficientes das funções, e as funções. No entanto, ao preencher a coluna dos coeficientes com o seu respectivo valor, a CGD interpretava essa informação como sendo uma função constante, gerando os pontos na janela gráfica, tornando-a poluída de informações desnecessárias para o estudo da função. Para superar essa dificuldade, os alunos poderiam ocultar a representação gráfica das colunas dos coeficientes, destacando apenas a representação gráfica das funções da 2ª, 6ª e 7ª coluna.

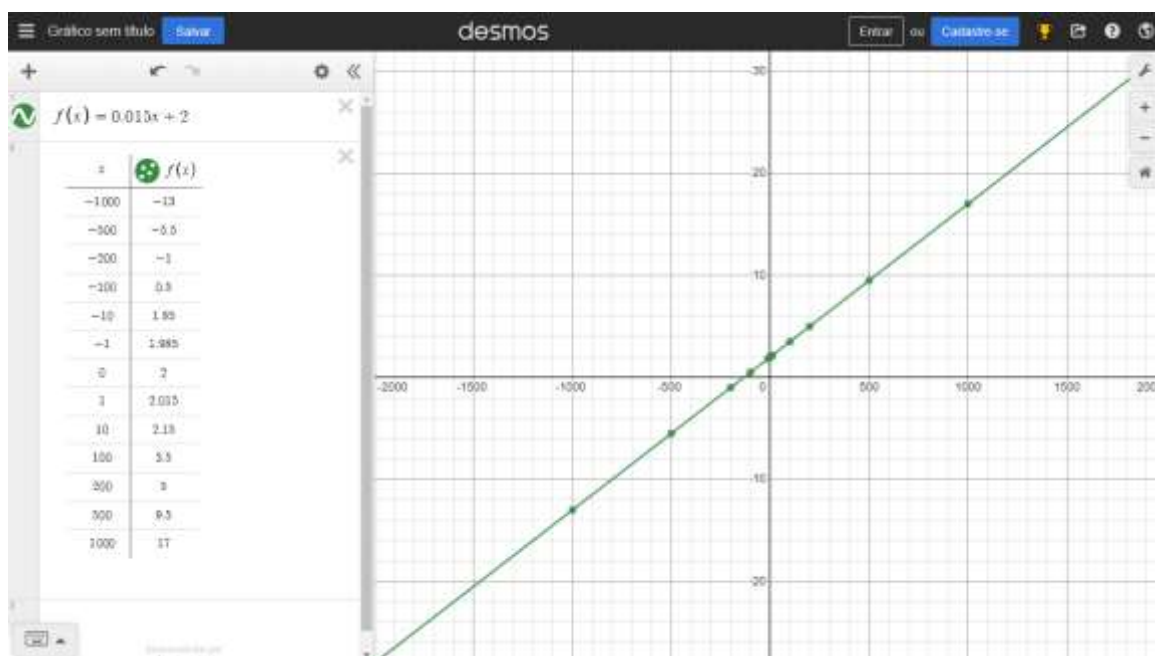
O grupo discutiu em suas análises que “a partir do ponto citado $(0, 0)$, as funções são crescentes e positivas”. Com isso, ficava a impressão de que, antes desse ponto, o gráfico da função assume um comportamento decrescente, levando a uma interpretação errônea.

Durante a exposição dos argumentos que justificam o estudo do sinal das funções, percebemos a necessidade de um domínio maior da linguagem matemática, tornando a

interpretação mais clara e científica. E4 realizou o estudo do sinal das funções já levando em consideração a restrição do domínio, necessitando esclarecer em todos os momentos da EPRP.

E4 – Para pensar: Vamos escolher um dos serviços acima para fazer o estudo do sinal da função. Escolhendo o serviço três para trabalhar, para que possamos ter resultados concretos, vamos desconsiderar que não podemos ter quantidades negativas de comida, ou seja, iremos atribuir valores negativos e positivos para construir o gráfico na CGD e, a partir desta visualização, realizarmos o estudo do sinal, veja:

Figura 34 – Representação algébrica e gráfica de $f(x) = 0.015x + 2$ na CGD



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Primeiro passo, temos que encontrar o zero da função, que nada mais é que o ponto onde as coordenadas para os valores de “y” no gráfico são zero, que, para essa função, corresponde ao ponto $P = (-133.333, 0)$. A partir desse ponto, podemos determinar os seguintes fatores para estudarmos o sinal dessa função.

A partir do gráfico do serviço escolhido, neste caso o serviço 3, temos a seguinte análise: para a função $y = 0.015x + 2$, seu estudo do sinal, por ser uma função contínua, não existe alteração de valores. Sendo assim, o sinal da função não varia. Como já identificamos o zero desta função, podemos verificar para quais valores esta é positiva e para quais valores será negativa. Estamos descartando a existência de comida com peso negativo, iremos realizar o seguinte estudo.

Pp – Como assim? Nesse caso aqui, vocês estão se referindo à função. Deixem claro que fazer o estudo da função está se referindo aos valores de $f(x)$, que corresponde a “y”. Reformulem essa ideia.

E4 já se apropriara da necessidade de identificar o zero da função para realizar o estudo do sinal. Para isso, eles não o encontraram de forma algébrica, mas a partir da visualização gráfica proporcionada pela CGD, que possibilitou a identificação das coordenadas deste ponto.

Durante a análise, o grupo ainda destacou o serviço 3, sendo interessante desconsiderar esse contexto e enfatizar que o estudo realizado está sendo da função. Ao afirmarem que “não existe alteração de valores” e “o sinal da função não varia” no estudo do sinal da função $f(x) = 0.015x + 2$, os licenciandos se limitaram ao contexto do problema novamente, ficando confusa a análise que eles apresentaram.

E4 – A partir do ponto P encontrado, que chamamos de zero da função, observamos que a partir desse ponto o gráfico “cresce”, ou seja, ele é crescente a partir desse ponto, e como ele está acima do eixo x das coordenadas, os pontos obtidos a partir desse ponto serão da parte positiva do estudo do sinal. Os demais pontos que vêm antes do ponto P são os pontos negativos da parte do estudo da função desta situação do serviço 3 que estamos trabalhando.

Pp – Quer dizer que antes do ponto, decresce? A ideia aqui é que os valores de $f(x)$ a partir desse ponto são positivos. Descreva corretamente o que está analisando no estudo do sinal. É crescente em toda a reta?

E4 – A partir do gráfico do serviço escolhido, neste caso o serviço 3, temos a seguinte análise: para a função $y = 0.015x + 2$, sabemos por conteúdos anteriores que se trata de uma função contínua. Para termos uma visão melhor, sempre devemos identificar o zero da função, como já foi feito, que é o nosso ponto P . A partir dele, iremos verificar para quais valores a função é positiva e para quais valores a função é negativa.

E4 – Agora, considerando que, caso os valores obtidos sejam positivos, você que irá pagar ao restaurante. Caso sejam negativos, o restaurante que irá te “pagar”, e caso sejam iguais a zero, nem você nem o restaurante deverão pagar nada.

Pp – Rever essa ideia tal qual discutimos em momento anterior: ter cuidado para deixar isso o mais claro possível para o aluno. Se achar necessário, proponha um novo problema para explorar a ideia que vocês discutem abaixo e que está totalmente relacionada com o zero da função.

E4 – Qual o peso da comida que você deveria colocar para que não precisasse pagar nada ao restaurante?

E4 – (*Resposta esperada*) -133.333 kg.

Pp – Estimulem que essa exploração seja feita de forma algébrica, como também de forma gráfica, explorando ao máximo as funcionalidades da CGD.

E4 – Mostre um exemplo de peso que, após seu prato de comida pesado, você deverá pagar algum valor ao restaurante, e, se possível, generalize sua resposta.

E4 – (*Resposta esperada*) qualquer peso acima de $-133.333kg$, e $x > -133.333kg$.

E4 – Agora, a partir do uso da CGD, construa o gráfico de cada função dos demais serviços e identifique, nos casos que seja possível, os zeros dessas funções.

Pp – Reescrever melhor essa questão, mas manter a mesma ideia.

Mesmo apresentando incoerências em suas ideias, é possível perceber um avanço das ideias apresentadas pelo grupo durante a EPRP. A dissociação do contexto do restaurante Abreu com o estudo do sinal da função que o representa foi fundamental para que alcançassem a CD neste momento da atividade.

Ao apresentarem como resposta esperada “qualquer peso acima de $-133.333kg$ ”, temos uma incoerência, pois, ao analisarmos graficamente, percebemos que o intervalo $-133.33 < x \leq 0$ não estava definido para o domínio da função do terceiro serviço, pois não

temos como assumir quantidade negativa de consumo de gramas de comida. Essa análise ficaria correta se o grupo estivesse fazendo o estudo do sinal da função, desconsiderando o contexto do serviço.

O estudo do sinal da função resgata conceitos e ideias anteriores como: zero da função, domínio e imagem, crescimento e decrescimento do gráfico, coeficientes, entre outros. Este estudo do sinal é passível de realização a partir da visualização gráfica da função, da apropriação desses conceitos e ideias, resultando em generalizações que demonstram a consolidação dos conteúdos que vêm sendo estudados.

E4 – A partir disso, iniciaremos nosso estudo da função escolhida propondo o seguinte exercício para os alunos:

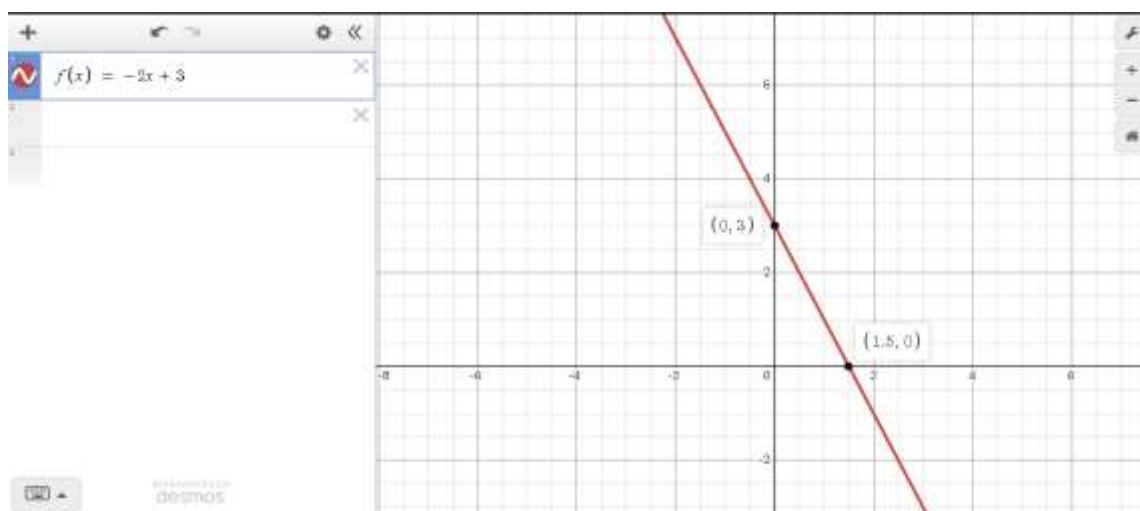
Responda os seguintes questionamentos de forma algébrica, criando a tabela de valores e mostrando a representação gráfica na CGD:

- 1 – Qual o sinal da função que podemos associar à função no ponto P trabalhado?
- 2 – Porque o ponto P é dito zero da função que estamos trabalhando?
- 3 – Quais os valores que podemos adquirir para que a função tenha valores positivos? A partir de que ponto isso acontece? Mostre na CGD.
- 4 – Quais os valores que podemos verificar que a função assume valores negativos? Mostre na CGD.
- 5 - De acordo com o que já foi estudado, essa função pode ser classificada como crescente ou decrescente? Justifique sua resposta.

Agora que já fizemos o estudo da função do serviço 3 do problema que estamos trabalhando, iremos estudar a seguinte função: $f(x) = -2x + 3$.

Da mesma forma que atribuímos valores para a função anterior, vamos atribuir para esta também como expresso no gráfico abaixo:

Figura 35 – Representação algébrica e gráfica de $f(x) = -2x + 3$ na CGD



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Percebemos que:

Se $f(x) > 0$, temos, $x < \frac{3}{2}$;

Se $f(x) < 0$, temos, $x > \frac{3}{2}$; e, por fim,

Se $f(x) = 0$, temos, $x = \frac{3}{2}$.

Percebemos que: se $x = \frac{3}{2}$ obtemos $y = 0$; se $x > \frac{3}{2}$ obtemos $y < 0$; se $x < \frac{3}{2}$ obtemos $y > 0$.

Pp – Para este caso, temos duas sugestões: 1º) vocês podem apresentar a função e pedir para eles fazerem o estudo do sinal, tendo como proposta uma função decrescente ou 2º) vocês podem pedir aos alunos para propor um problema que consiste em uma função afim com os critérios que vocês estabeleceram abaixo e, em seguida, pedir para eles realizarem o estudo do sinal dessa função.

E4 – De acordo com o que já foi estudado sobre função afim nos problemas propostos anteriormente, proponha e resolva outro problema com domínio no conjunto dos números reais e que seja possível trabalhar com valores negativos. Na resolução, deve conter o estudo do zero da função, construção do gráfico e estudo do sinal. A partir do gráfico dado, faça o estudo do sinal desta função, fazendo todas as representações na CGD.

Como resultado do Trabalho realizado pelo grupo, foi apresentado o seguinte problema, a partir do ponto de partida (estudo do sinal da função afim).

ESTUDO DO SINAL DA FUNÇÃO AFIM

7 – Para realizar o estudo do sinal da função afim, vamos fazer uso da função que está associada ao 3º serviço, sem levar em consideração o contexto envolvido.

7.1 – Identifique graficamente o zero desta função e chame esse ponto de P.

7.2 – Qual o sinal da função que podemos associar à função no ponto P?

7.3 – Por que o ponto P é dito zero da função em que estamos trabalhando?

7.4 – Quais valores podemos adquirir para que a função tenha valores positivos? A partir de que ponto isso acontece? Observe graficamente na CGD.

7.5 – Quais valores podemos verificar que a função assume valores negativos? Observe graficamente na CGD.

7.6 – De acordo com o que já foi estudado, essa função pode ser classificada como crescente ou decrescente? Justifique sua resposta.

7.7 – Agora que já fizemos o estudo da função do 3º serviço do problema, iremos estudar a seguinte função $f(x) = -2x + 3$. Represente-a algebricamente e graficamente na CGD.

7.8 – Realize o estudo do sinal da função $f(x) = -2x + 3$.

Comentário temático: Ao realizarem o estudo do sinal da função, percebemos o quanto a visualização gráfica proporcionada pela CGD foi fundamental para a EPRP. Na realidade dos licenciandos, o estudo do sinal ficava limitado, na maioria das vezes, à manipulação algébrica, com representações limitadas com uso de lápis e papel, não permitindo uma compreensão e relação com outros elementos e o comportamento do gráfico da função. À medida que avançavam na EPRP, conseguiram perceber todas essas relações graficamente e incorporar temáticas anteriores, como o zero da função da função, o crescimento e decréscimo do gráfico e o domínio da função. Mesmo apresentando dificuldades em dissociar o estudo do sinal com o contexto do restaurante para atingir a CD durante a EPRP, na PP final, conseguiram deixar isso claro. Percebemos um avanço no domínio da linguagem matemática. O problema proposto apresenta uma sequência didática levando o aluno a explorar o estudo do sinal de forma progressiva a partir da CGD. A sugestão da proposição de um novo problema não foi incorporada, não descaracterizando o potencial do problema proposto por eles. Diante disso, percebemos uma proposta de estudo do sinal a partir da visualização gráfica, sem desconsiderar a importância do domínio algébrico.

6.6.5 Inequação do 1º Grau (E5)

A1 e A4 – (*1º Pensamento*) primeiramente, pensamos em utilizar o problema do Restaurante Abreu, de modo que as inequações fossem observadas a partir dos serviços oferecidos. Para isso, reformulamos o problema, de maneira que João não tivesse interesse no serviço do sorvete.

8.1 – Durante o intervalo do trabalho, Pedro e Carol indicaram ao seu amigo João o Restaurante Abreu e seus serviços oferecidos. Por sua vez, João analisou qual seria o melhor serviço com o melhor custo-benefício. Quais as considerações que João encontrou?

Pp – Aqui é interessante que se tenha uma condição inicial para João, como a quantidade de comida que ele costuma consumir no almoço, para que ele comece a fazer as comparações.

8.1 – Durante o intervalo do trabalho, Pedro e Carol indicaram ao seu amigo João o Restaurante Abreu e seus serviços oferecidos. Agora, João está tentando decidir qual dos serviços tem o melhor custo-benefício. Sabe-se que João descartou a escolha do 4º serviço, por ser diabético, e o 3º serviço, por não ser adepto ao vegetarianismo. Assim, qual o melhor serviço que João pode escolher?

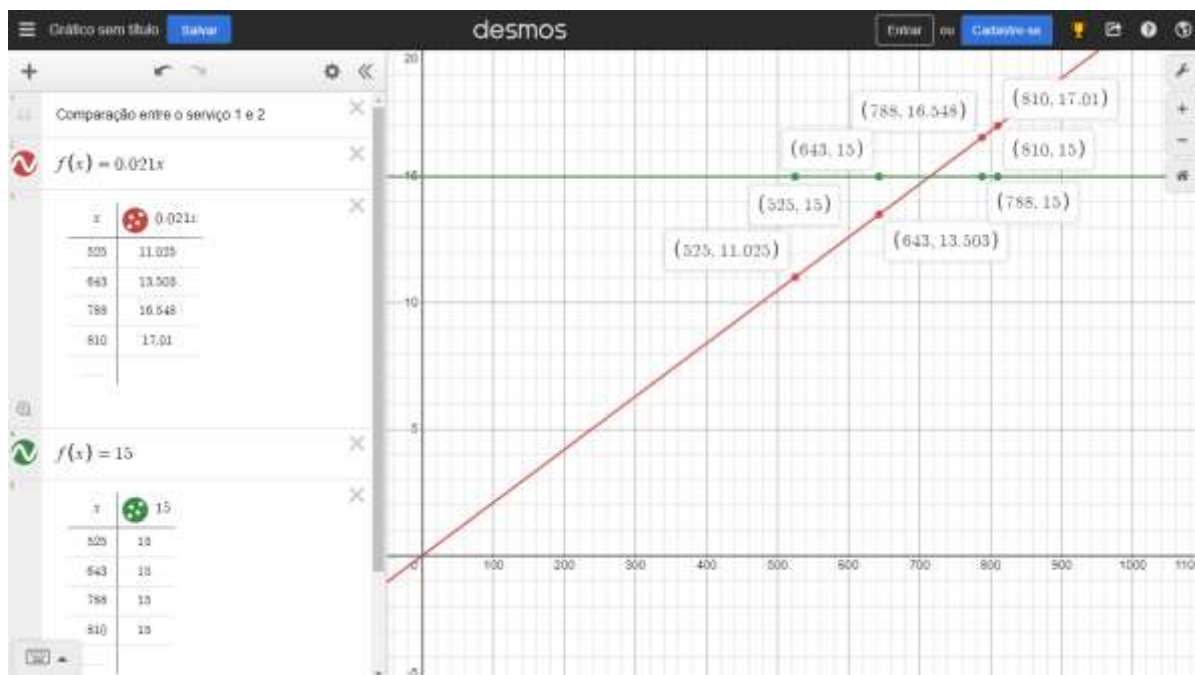
E5 – Esperamos que o aluno analise qual serviço melhor se adequa a cada situação, a partir da observação gráfica entre os pontos de intersecção das retas e, em seguida, represente algebricamente através das inequações. Retiramos o 4º serviço devido à sua incoerência com a questão que abordaria o assunto de inequações.

Pp – Ok. Neste caso, é bom colocar no enunciado do problema que vocês reformularam para essa abordagem de inequações e que João não tem interesse no quarto serviço de sobremesa.

Durante as análises dessa atividade de EPRP, passamos a refletir sobre o tipo de incoerência que E5 usou para justificar a não inserção do 4º serviço no contexto do problema. Acreditamos que essa postura tenha se dado por se tratar de uma variável discreta, gerando a má interpretação de que o estudo das inequações só seria possível a partir de variáveis contínuas. Diante de comportamentos como esse, é interessante que o professor retome o conceito de inequação, para que os alunos possam ampliar o seu campo de exploração. É possível que algumas dessas colocações passassem despercebidas por alunos e professores durante a EPRP.

E5 (*Expectativa de resposta do aluno*) – Se pegarmos os serviços 1 e 2, para sabermos quando o serviço 2 será mais viável, basta realizarmos o seguinte cálculo: $0.021x < 15 \Rightarrow x < \frac{15}{0.021} \Rightarrow x < 714.286$. Porque se eu quero saber quando o 2º serviço é mais barato, entre ele e o 1º serviço, basta eu saber a partir de quantas gramas fica mais barato. Ou seja, qualquer quantidade de comida que seja inferior a aproximadamente 714.286g, o 2º serviço será sempre mais barato e, conseqüentemente, a quantidade de gramas acima desse valor torna o 1º serviço com o melhor custo-benefício. Ao colocarmos os serviços 1 e 2 na CGD, podemos observar graficamente o seguinte, utilizando a função “Tabela” da CGD e atribuindo alguns valores para “x”, obtemos o seguinte:

Figura 36 – Representação algébrica e gráfica das funções $f(x) = 0.021x$ e $f(x) = 15$ na CGD



Fonte: Elaborado pelo autor, 2024.

Assim, para sabermos quando o valor do serviço 2 será igual ao do serviço 1, basta realizarmos o seguinte cálculo: $0.021x = 15 \Rightarrow x = \frac{15}{0.021} \Rightarrow x = 714.285714286$. Dessa maneira, sabendo qual a quantidade de gramas na qual o preço dos serviços 1 e 2 seriam iguais, podemos compreender que qualquer quantidade de comida que seja inferior a aproximadamente 714.285g, o 2º serviço será sempre mais barato e, consequentemente, a quantidade de gramas acima desse valor torna o 1º serviço com o melhor custo-benefício.

E5 (Pensamento nosso) – Observamos que essa estratégia era insuficiente e que era necessário trazer outras abordagens para direcionar o assunto. Percebemos que, da maneira que a questão estava explicitada, não ficava claro qual a intenção do assunto que deveria ser trabalhado. O que poderia dar brechas para que os alunos utilizassem outros meios e estratégias matemáticas para resolver o problema, como a substituição, tentativa e erro, entre outros. Sentimos, também, a necessidade de colocar alguma condição inicial, como, por exemplo, a quantidade média de comida que João costuma consumir no almoço. Dessa maneira, ao colocarmos uma condição, os alunos podem trabalhar o assunto de inequações e chegar na representação algébrica.

A partir desse primeiro pensamento apresentado por E5, conseguimos perceber uma capacidade de refletir e avançar com a EPRP através de um Trabalho que vinha considerando a integração da CGD desde o início e estava alinhado com o ponto de partida. Apesar de algumas incoerências identificadas, a forma como os licenciandos vinham desenvolvendo a atividade possibilitou que construíssem ideias através do trânsito entre a representação gráfica e algébrica proporcionada pela CGD. Em continuidade ao trabalho de EPRP, E5 apresentou um novo pensamento.

E5 (2º Pensamento) – Observamos que seria mais interessante a proposta de criarmos um restaurante, onde teríamos novos serviços e seria analisado qual situação cada serviço teria

o melhor custo-benefício. Dessa maneira, a primeira etapa foi construir uma tabela que se aproximasse do Restaurante Abreu, como podemos ver a seguir:

Tabela 06 – Serviços oferecidos por um restaurante

Serviço	Valor de cada serviço
Self-Service sem balança (por pessoa)	R\$ 14,50 e R\$ 16,00
Self-Service com balança (por Kg)	R\$ 19,50
Self-Service com balança e um suco	R\$ 20,00 e R\$ 1,50

Fonte: Elaborado por E5.

Dessa maneira, teríamos os seguintes serviços:

- **Self-Service sem balança (por pessoa)** - o valor pago é independente da quantidade de comida. Durante a semana, o valor fixo é de R\$ 14,50 e, nos finais de semana, o valor é de R\$ 16,00.

- **Self-Service com balança (por kg)** – o valor pago por 1 quilograma é equivalente a R\$ 19,50. Assim, a cada 100 g de comida paga-se R\$ 1,95.

- **Self-Service com balança e suco** – a cada 1000g de comida, paga-se um valor de R\$ 20,00 e além de pagar o acréscimo de R\$ 1,50 do copo de suco.

Nesse viés, ao colocarmos outro restaurante com um preço similar, além de trazer essa rivalidade no comércio (muito presente no cotidiano), possibilita aos alunos terem mais cuidado com as propagandas, controle de gastos e a percepção Matemática. É muito comum nos depararmos com o mesmo produto ou serviço sendo oferecido por mais de um estabelecimento, na maioria das vezes, com preços próximos. Mas, infelizmente, algumas dessas situações podem ser ciladas, isto é, há situações em que achamos que estamos pagando barato por algo, mas na verdade não estamos.

A partir disso, acreditamos que seria mais viável trabalharmos os dois restaurantes em um único questionamento, para que as comparações abrissem margem para discussões. Assim, dessas situações levantadas, podemos proporcionar um ensino e aprendizagem baseada em questionamentos e, a partir disso, compor um conhecimento fundamental no desenvolvimento do saber crítico do aluno, vista a necessidade de desenvolvermos cidadãos conscientes daquilo que consomem.

Diante disso, através destas discussões, será mais fácil a visualização das inequações pelos alunos, pois, ao comparar um serviço de um restaurante com outro restaurante, o aluno irá relacionar em qual situação tem maior preço, qual tem menor e em qual terá o mesmo preço, onde se espera que ele chegue a uma expressão algébrica, formando assim inequações. Com ajuda da CGD, o aluno conseguirá observar essas situações de forma mais clara, podendo gerar mais discussões.

O segundo pensamento apresentado por E5 chamou atenção pela proposição de um novo problema a partir do contexto anterior e as justificativas apresentadas foram embasadas em questões sociopolíticas e culturais. Esses são elementos importantes na metodologia de EPRP.

Percebemos que, na nova PP, os licenciandos apresentaram dados numéricos e um contexto coerente. Esse fato ficou ainda mais evidente quando passaram a justificar, de forma consciente e com argumentos plausíveis, que partia da sua realidade. Essa discussão nos leva a refletir sobre aspectos de uma Educação Financeira, a partir da conscientização que os licenciandos buscaram proporcionar através da exploração do problema proposto.

Evidencia-se a importância da discussão Matemática a partir do contexto dos alunos e de questões sociopolíticas e culturais sob a ótica da metodologia de EPRP. A PP tem o objetivo de levar o aluno a estudar inequações, mas, nesse itinerário, também desenvolverá sua capacidade cognitiva e crítica, rompendo com o ensino tradicionalista e com a ideia de uma Matemática neutra.

E5 (3º Pensamento) –

Dois amigos, Pedro e Carol, costumam ir no horário de almoço ao Restaurante Abreu. O restaurante oferece quatro opções de serviços: self-service sem balança; self-service com balança; self-service vegetariano com balança e suco.

- **O primeiro serviço**, self-service sem balança, tem um preço único de R\$ 15,00 independentemente da quantidade de comida.

- **Já o segundo serviço**, é cobrado R\$ 2,10 por cada 100g de comida.

- **O terceiro serviço** cobra R\$ 1,50 por cada 100g de comida vegetariana mais R\$ 2,00 do suco.

Já o seu amigo João costuma ir em um outro restaurante próximo do trabalho, o Restaurante Dias, que oferece os seguintes serviços:

- **Self-Service sem balança (por pessoa)** – o valor pago é independente da quantidade de comida. Durante a semana, o valor fixo é de R\$ 14,50 e nos finais de semana o valor é de R\$ 16,00.

- **Self-Service com balança (por kg)** – o valor pago por 1 quilograma é equivalente a R\$ 19,50. Assim, a cada 100g de comida paga-se R\$ 1,95.

- **Self-Service com balança e um suco** – a cada 100g de comida paga-se um valor de R\$ 2,00 e além de pagar o acréscimo de R\$ 1,50 do copo de suco.

Durante o expediente, João, em uma conversa com seus amigos, comentou que estava em dúvida em qual dos restaurantes, Abreu ou Dias, ele iria almoçar nesse dia.

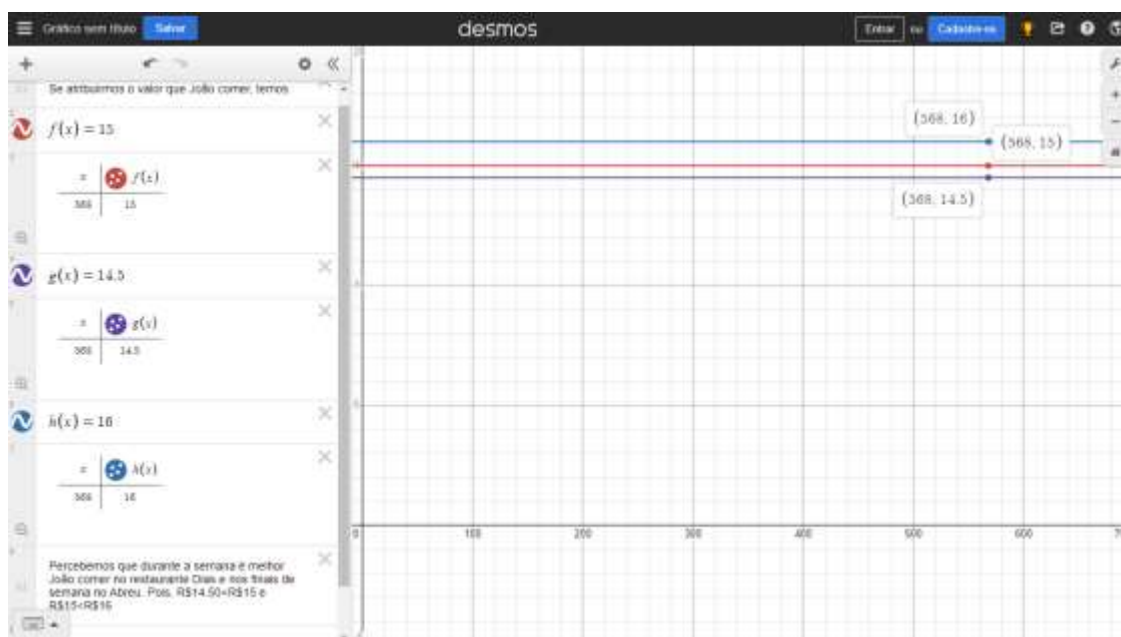
a) Dada a situação de João, quando cada serviço de cada restaurante tem o melhor custo-benefício?

Pp – É mais interessante fragmentar essa pergunta em várias outras, dessa forma, fica muita informação para o aluno dar conta em um único questionamento.

a) Utilizando a função “tabela” da CGD, vamos explorar o problema dos amigos Pedro, Carol e João, com os restaurantes Abreu e Dias.

- Tomando apenas o primeiro serviço de cada restaurante e sabendo que João costuma comer uma média de 568g de comida no almoço, qual o serviço mostra ter o melhor custo-benefício dada a situação de João? Justifique sua resposta e represente algebricamente. (Considere João almoçando durante a semana e no final de semana).

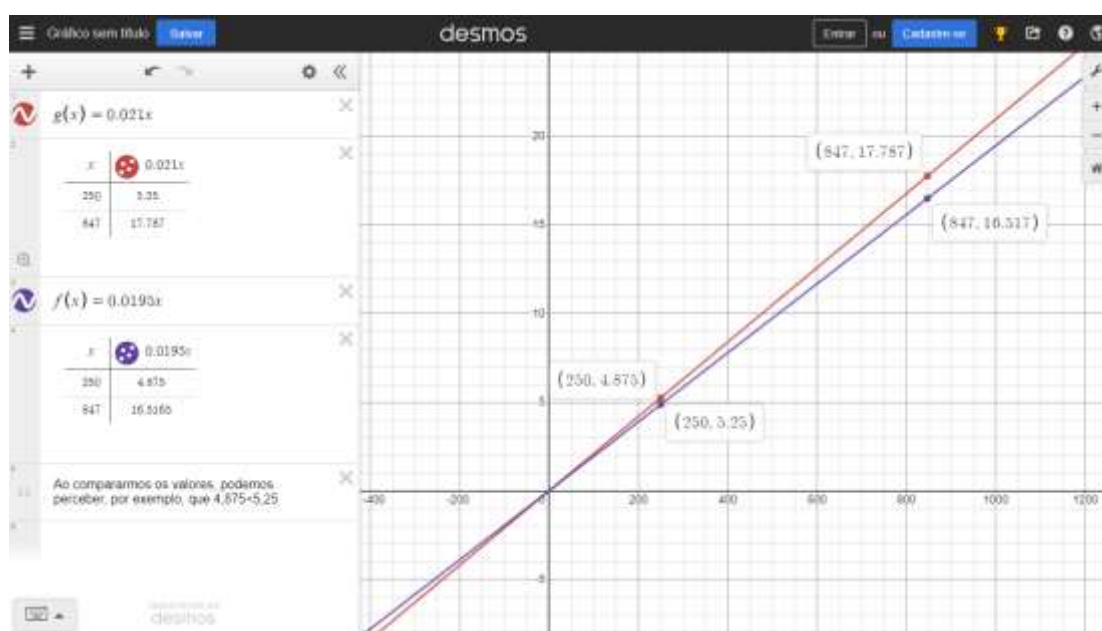
Figura 37 – Representação algébrica e gráfica dos 1º serviços dos restaurantes na CGD



Fonte: Elaborado por E5.

E5 – Agora, vamos considerar que Carol sempre opta pelo segundo serviço do restaurante. Caso ela queira escolher entre o segundo serviço de um dos restaurantes, qual restaurante ela deve escolher para gastar menos? Represente algébricamente a partir do gráfico.

Figura 38 – Explorando ideias de inequações na CGD



Fonte: Elaborado por E5.

Por apresentar a exploração do problema a partir da CGD, reconhecemos que o enunciado do problema deveria solicitar a representação gráfica a partir da algébrica, e não o contrário, tendo em vista que a CGD trabalha nessa direção, tornando o problema mais coerente

com os recursos disponíveis. Quanto às ideias de inequações presentes na exploração do problema, percebemos que os licenciandos as concluíram a partir do cruzamento das informações expressas algébrica e graficamente e fizeram uso da linguagem verbal e do símbolo de desigualdade “ $\leq$ ” para apresentar o resultado.

E5 – Em uma das idas ao restaurante Abreu, Pedro esqueceu sua carteira no trabalho. Para que não perdesse tempo do horário de almoço, ele decidiu não ir buscá-la. Assim, ele acabou pedindo dinheiro emprestado a João, que lhe emprestou um total de R\$ 14,00. Sabendo que Pedro costuma comer muito, em qual serviço ele poderá gastar os R\$ 14,00 ou menos, porém comendo mais?

Figura 39 – Representação algébrica e gráfica de inequações na CGD



Fonte: Elaborado por E5.

- b) Ao analisarmos o 3º serviço de cada restaurante, de que modo o preço pode ficar menor ou igual a um serviço do outro?
- c) Agora é com você! Crie um restaurante que comporte 3 (três) serviços, semelhantes ao anterior, e compare os preços com um de seus colegas. Em seguida, faça um levantamento com suas considerações.

Na Figura 39, temos a forma como a CGD representa graficamente as inequações, com o sombreamento do intervalo que corresponde à solução. Dessa forma, percebemos o quanto essa representação gráfica é capaz de proporcionar uma melhor compreensão pelos alunos, contribuindo para a exploração e aprofundamento do problema.

E5, na PP, apresentou, na representação verbal, um cuidado com a linguagem matemática, ao usar o termo “menor ou igual”, remetendo à ideia de inequação e, consequentemente, ao uso do símbolo da desigualdade. Na CGD, fez uso da função “notas” para descrever o seu raciocínio e representou algebricamente as inequações que correspondiam ao problema proposto. Dessa forma, a visualização gráfica proporcionada pela CGD permitiu ao aluno chegar ao resultado do problema.

Esse tipo de exploração de problema não compromete tampouco suprime a resolução algébrica da inequação, que, por sua vez, também deve ser estimulada para que os alunos possam relacionar os dados e fortalecer a solução. Com isso, é possível que os alunos cheguem a outras conclusões ou se sintam motivados a propor outros problemas a partir do que se consegue visualizar na CGD.

Por fim, E5 sugeriu a PP como uma abordagem importante para o desenvolvimento do raciocínio matemático e a construção de conceitos e ideias matemáticas. Também, interpretamos a proposta apresentada como sendo um avanço e consequência do trabalho desenvolvido com a metodologia de EPRP e o uso didático da CGD.

Consolidando suas ideias, E5 apresentou o seguinte problema:

INEQUAÇÃO DO 1º GRAU

8 – O seu amigo João costuma ir em outro restaurante próximo do trabalho, o Restaurante Dias. Onde seus serviços são:

- **Self-Service sem balança (por pessoa)** – o valor pago é independente da quantidade de comida. Durante a semana, o valor fixo é de R\$ 14,50, e nos finais de semana, o valor é de R\$ 16,00.

- **Self-Service com balança (por kg)** – o valor pago por 1 quilograma é equivalente a R\$ 19,50. Assim, a cada 100g de comida, paga-se R\$ 1,95.

- **Self-Service com balança e suco** – a cada 100g de comida, paga-se um valor de R\$ 2,00, além de pagar o acréscimo de R\$ 1,50 do copo de suco.

Durante o expediente, João, em conversa com seus amigos, comentou que estava em dúvida em qual dos restaurantes, Abreu ou Dias, ele iria almoçar nesse dia.

8.1 – Utilizando a função “tabela” da CGD, vamos explorar o problema dos amigos Pedro, Carol e João, com os restaurantes Abreu e Dias.

8.2 – Tomando apenas o primeiro serviço de cada restaurante e sabendo que João costuma comer, em média, 568g de comida no almoço, qual serviço mostra-se ter o melhor custo-benefício dada a situação de João? Justifique sua resposta e represente algebricamente. (Considere João almoçando durante a semana e no final de semana).

8.3 – Agora vamos considerar que Carol sempre opta pelo segundo serviço do restaurante. Caso ela queira escolher entre o segundo serviço de um dos restaurantes, qual restaurante ela deve escolher para pagar menos? Represente algebricamente a partir do gráfico.

8.4 – Em uma das idas ao restaurante Abreu, Pedro esqueceu sua carteira no trabalho. Para que não perdesse tempo do horário de almoço, ele decidiu não ir buscá-la. Assim, ele acabou pedindo dinheiro emprestado a João, que lhe emprestou um total de R\$ 14,00. Sabendo que Pedro costuma comer muito, qual serviço ele poderá gastar os R\$ 14,00 ou menos, porém comendo mais?

8.5 – Agora é com você! Crie um restaurante que comporte 3 (três) serviços, semelhantes ao anterior, e compare os preços com um de seus colegas. Em seguida, faça um levantamento com suas considerações.

Comentário temático: A PP de problemas se faz presente desde o primeiro momento em que os licenciandos começam a pensar o ponto de partida. A criação de um novo contexto para relacionar com as ideias iniciais do restaurante Abreu enriquece ainda mais o ambiente de exploração. Ao refletirem e sintetizarem o Trabalho realizado, é perceptível o domínio de conteúdo que os licenciandos têm em torno das inequações do 1º grau. Ao mesmo

tempo, percebemos como as ferramentas da CGD possibilitam uma melhor exploração do problema. A todo momento, a RP está potencializando a PP, levando-os a perceberem incoerências e avançarem com a EPRP. Sob a mesma ótica, o trânsito entre a manipulação algébrica e a representação gráfica das inequações impulsiona o caminhar da EPRP, consolidando ideias e conceitos matemáticos. Percebemos o quanto os licenciandos se apropriam da PP, compreendendo a necessidade de reformulação e criação de novos contextos em diferentes momentos da atividade. Com isso, surgem discussões importantes para a EPRP, como o afloramento de discussões sociopolíticas e culturais. Junto ao domínio de conteúdo, percebemos um avanço no uso da linguagem e de símbolos matemáticos que caracterizam o estudo de inequações. Neste cenário, a CGD tem uma representação específica para a solução das inequações, o que contribui para a EPRP, apresentado graficamente a solução das inequações, indo além da solução algébrica, priorizada na maioria das aulas de Matemática.

6.7 Ideias construídas a partir do desenvolvimento da pesquisa

20º Encontro - 2 aulas

Data: 09/12/2022

Chegado o último dia de pesquisa, buscamos fazer uma avaliação geral da atividade de pesquisa desenvolvida. Iniciamos apresentando a atividade de EPRP, abordando o conteúdo de Função Afim através da CGD desenvolvida até a última aula. Tendo em vista que a etapa final da atividade de EPRP foi desenvolvida em grupos, eles ainda não tinham acessado a atividade por completo.

A exposição e a leitura do problema deixaram os licenciandos envaidecidos por terem desenvolvido todo o trabalho, pois eles não conseguiam visualizar o alcance de suas ações nos primeiros encontros da pesquisa. Em seguida, passamos a direcionar alguns questionamentos para que os licenciandos expusessem sua opinião acerca de todo o trabalho que foi desenvolvido com a pesquisa. De forma espontânea e oral, foram apresentando suas ideias. Em continuidade, liberamos o link de um Google Forms para que pudessem sintetizar suas ideias e estas ficassem registradas, para que pudéssemos expor e analisar neste momento da pesquisa.

O debate em sala e o formulário tiveram como foco cinco questionamentos. À medida que fomos apresentando os questionamentos, iremos destacando as principais ideias/temas apresentados pelos licenciandos, que foram analisados à luz da Análise Temática (Braun; Clarke, 2006). Dessa forma, os dados aqui apresentados refletem um panorama geral da 2ª Travessia desta pesquisa.

1 - Durante as aulas trabalhadas, o que você considera ter desenvolvido em termo de Ideias Pedagógicas essenciais na prática de um/a professor/ de Matemática?

Comentário temático: Os licenciandos, ao serem desafiados a propor problemas, experimentaram uma nova abordagem no pensamento matemático, resultando em aprendizado mais profundo e consideração do aluno ao aprender o conteúdo. Também adquiriram uma visão ampliada do ensino, buscando alternativas e motivando os colegas a resolverem problemas práticos relacionados ao aprendizado. Destaca-se a importância de preparar aulas dinâmicas, refletindo sobre a PP e tornando o ensino mais instigantes. A troca de informações em sala enriqueceu as aulas, tornando o aprendizado mais dinâmico e proveitoso. Destaca-se a importância de conectar a Matemática ao cotidiano dos alunos, promovendo uma abordagem mais realista e crítica aos conceitos apresentados, com ênfase na PP vinculados ao cotidiano, explorando o conteúdo de maneira dinâmica, com recursos manuais e tecnológicos. Enfatiza-se a importância da tecnologia, com destaque para a CGD, como uma ferramenta que amplia significativamente as opções de ensino em sala de aula. A utilidade da Desmos foi ressaltada, proporcionando aos licenciandos uma abordagem interativa, permitindo a construção autônoma de gráficos e a autoria de seus próprios problemas. Destaca-se o desenvolvimento do lado crítico dos licenciandos em relação à PP, promovendo uma análise mais profunda dos conceitos.

2 - Durante as aulas trabalhadas, o que você considera ter desenvolvido em termos de Ideias Matemáticas essenciais na prática de um/a professor/a de Matemática?

Comentário temático: A conexão entre Ideias Matemáticas e Ideias Pedagógicas, enfatiza a importância de trabalhar assuntos matemáticos de maneira além da tradicional, fazendo o aluno se sentir construindo seu próprio saber. A reflexão sobre a melhoria da didática através da EPRP destaca o estímulo ao pensamento lógico e coerente dos alunos. A abordagem de EPRP é enfatizada como crucial para investigar e compreender conteúdos matemáticos, propondo problemas a partir de situações do cotidiano. Considera-se essencial o desenvolvimento de uma didática que transcenda o convencional, rompendo com a transmissão passiva de informações dos livros. A importância de uma abordagem inovadora no ensino da Matemática destaca a utilização de tecnologia para incentivar os alunos, considerando sua imersão nesse contexto atual. O foco está no desenvolvimento de ideias matemáticas, especialmente em relação a funções, utilizando a CGD como uma ferramenta para facilitar a compreensão por meio de representações algébricas e gráficas. A necessidade de incorporar materiais didáticos e recursos tecnológicos é ressaltada para aprimorar o entendimento da Matemática, superando as abordagens tradicionais com lousa, pincel e fórmulas, proporcionando uma visualização mais clara e uma apresentação de conceitos mais eficaz. Destaca-se a relevância de propor problemas como uma estratégia pedagógica, reconhecendo os desafios, mas enfatizando seu potencial na sala de aula. A importância de propor problemas matemáticos e explorar ideias em grupo surge como estratégia para aprofundar a compreensão do conteúdo. Houve aprimoramento na proposição de problemas mais complexos em Matemática, com análise mais aprofundada tanto do problema quanto da resolução.

3 - Quais ideias foram desenvolvidas relacionadas à Exploração-Proposição-Resolução de Problemas para a prática pedagógica do professor de Matemática? Em qual momento da exploração você teve mais dificuldade?

Comentário temático: A ideia central é a busca por um olhar mais rico e humano em relação à Matemática, visando tornar o ensino mais atrativo para os alunos. Destacamos a necessidade de uma forma didática e prática de ensinar, com a dificuldade inicial de propor problemas e a posterior reflexão sobre as deficiências pessoais nesse aspecto, desenvolvendo uma ideia matemática rica em termos da relação entre professor e aluno. Salientamos que a EPRP é desafiadora, mas, gradualmente, os alunos evoluem e abrem

suas mentes para novas possibilidades, destacando a importância desse processo na formação. A responsabilidade na PP ganha destaque, ressaltando a importância de contextualizá-los de acordo com a vivência dos alunos, promovendo uma aprendizagem mais significativa. O desenvolvimento de ideias, nesse sentido, permite enxergar diversas possibilidades de conteúdos a serem estudados, estabelecendo um ponto entre a teoria e a prática em diferentes situações, de forma leve e criativa. A PP considera não apenas a CD, mas também o ponto de vista de quem irá resolvê-los, proporcionando uma experiência mais envolvente e relevante para os alunos e uma compreensão mais profunda e aplicada dos conceitos. Apesar de ser uma tarefa que pode ser cansativa e estressante, a conclusão desse processo se revela recompensadora, aproximando-se do esclarecimento conceitual. A turma, inicialmente, enfrenta obstáculos ao propor problemas que atendam à coerência didática. Essa etapa inicial destaca a complexidade da PP, demandando domínio de conteúdos, coerência e uma reflexão cuidadosa para evitar equívocos. A busca por uma linguagem acessível, sem perder a profundidade conceitual, representa um equilíbrio desafiador. Outro ponto de desafio é a identificação dos conteúdos que podem ser abordados com a EPRP. O desafio adicional reside na necessidade de imaginar como o aluno irá pensar ao resolver os problemas, exigindo uma abordagem pedagógica que considere a perspectiva dele. As dificuldades surgem da necessidade de evitar duplos sentidos e tornar os problemas contextualmente relevantes, reforçando a importância de uma prática pedagógica que se alinhe à realidade dos estudantes. Apesar das dificuldades iniciais, o enfrentamento desses desafios resulta em uma prática pedagógica mais enriquecedora e eficaz, contribuindo para o desenvolvimento cognitivo e crítico dos estudantes.

4 - Quais ideias foram desenvolvidas ao fazer uso didático da Calculadora Gráfica Desmos via Exploração de Problemas e na construção de conhecimento matemático na prática pedagógica do professor de Matemática? Justifique suas ideias.

Comentário temático: O uso didático da Calculadora Gráfica Desmos (CGD) na EPRP e construção do conhecimento matemático proporcionou diversas ideias e benefícios na prática pedagógica dos licenciandos em Matemática. A CGD foi elogiada por sua interatividade e facilidade de uso. Os licenciandos ressaltaram que ela oferece diversas possibilidades para trabalhar com representações algebricamente e graficamente, explorando conceitos como função afim, zero da função, domínio e imagem. A ferramenta foi considerada um meio extremamente eficaz e prático para apresentar conteúdos, oferecendo várias formas de trabalho. Sua linguagem simples e de fácil entendimento a torna adequada para diversos ambientes escolares. Destacamos que a CGD simplifica e agiliza a apresentação de gráficos e cálculos de funções, comparativamente a métodos mais tradicionais, resultando em uma economia significativa de tempo nas aulas. Os licenciandos perceberam a versatilidade da Desmos, não limitando seu uso apenas a funções, mas explorando áreas, polígonos, vetores, entre outros assuntos, através de outras ferramentas disponíveis. Isso amplia as possibilidades de ensino e aprendizagem em sala de aula. Destacamos que a CGD é um recurso tecnológico atual, fácil de usar e disponível para diversos dispositivos, incluindo *smartphones*. Isso a torna uma aliada valiosa na prática pedagógica, proporcionando maior interação dos alunos com as aulas. Os licenciandos destacaram a oportunidade de explorar problemas, propondo desafios únicos, que exploram várias possibilidades da função afim. Isso promoveu um aprendizado interativo, envolvendo os alunos em atividades exploratórias e criativas. A CGD foi percebida como um recurso atrativo que estimula a exploração, curiosidade e criatividade dos alunos. Sua introdução inovadora no ensino da Matemática pode promover um ambiente de aprendizagem mais dinâmico e participativo.

5 - Cite 10 ideias que considera ter aprendido/desenvolvido na disciplina para ser um/a professor/a de Matemática.

Comentário temático: Ao longo do desenvolvimento das atividades de EPRP, experimentamos um significativo crescimento pessoal. Sair da zona de conforto e nos tornar alunos pensantes não apenas desafiou nossas habilidades de ensino, mas também nos permitiu desenvolver um lado mais humano na interação com os demais alunos. A aceitação de críticas construtivas e a constante busca por aprimoramento na prática pedagógica são elementos-chave que contribuíram para a nossa evolução profissional. Além disso, compreender a importância da socialização entre os alunos e professor evidenciou a colaboração como um fator crucial para o refinamento das explorações, proposições e resoluções de problemas. A construção de uma abordagem sólida e eficaz revelou-se como um aspecto essencial na nossa futura jornada como professores e professoras de Matemática. Ter paciência na transmissão de conceitos, interpretar e explicar questões de maneira coerente, e seguir um planejamento bem estruturado são práticas fundamentais que adotaremos. O entendimento da necessidade de inclusão do conteúdo no cotidiano dos alunos, aliado ao acompanhamento gradativo do desenvolvimento deles, solidificou nossa conscientização acerca da abordagem pedagógica. Conhecer a história da Matemática também se revelou valioso para contextualizar o ensino. A integração das TD em nossa experiência trouxe benefícios notáveis. A utilização da CGD não apenas facilitou visualmente o entendimento dos licenciandos, mas também otimizou o tempo da aula. Proporcionar o uso de recursos tecnológicos, como plataformas online e aplicativos específicos, alinhou o ensino à realidade cotidiana dos estudantes. A compreensão de que a tecnologia é uma aliada valiosa no processo educacional transformou a maneira como abordamos o ensino da Matemática. A abordagem metodológica de EPRP passa a ser um componente central no nosso ensino da Matemática, com destaque para a PP. Pensar criticamente, inovar nas aulas, instigar o aluno a propor problemas e trabalhar em grupo são práticas que buscaremos incorporar diariamente. O uso do erro como um ponto de partida para o aprendizado e a proposição de problemas desafiantes têm se mostrado eficazes na estimulação do pensamento crítico dos alunos. Cada aprendizado proporcionado pela EPRP, instigando a curiosidade e a participação ativa dos alunos, reflete não apenas uma evolução profissional, mas também um comprometimento com o desenvolvimento integral dos alunos. A busca incessante por aprimoramento e a adaptação constante às necessidades dos alunos consolidam a nossa missão como professoras e professores de Matemática.

7 O USO DIDÁTICO DA CGD VIA EPRP: CONSIDERAÇÕES FINAIS

Após um intenso trabalho desenvolvido com a pesquisa, seguido de diversos momentos de reflexões e sínteses, teceremos observações que nos permitem discutir as implicações do uso didático da Calculadora Gráfica Desmos (CGD) via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas (EPRP) a partir de nossa experiência na licenciatura em Matemática, e, graças às Travessias vivenciadas, pudemos identificar temas e tendências que afloravam das nossas observações e nos ajudaram a compreender melhor o nosso tema de pesquisa.

Resultados desta pesquisa também podem ser observados na síntese que realizamos ao final de cada Travessia. Esses dados nos deram condições de perceber avanços na apropriação da EPRP e, conseqüentemente, na forma como a CGD potencializou a prática vivenciada pelos licenciandos.

Desde o início, percebemos que não seria possível alcançar o objetivo de nossa pesquisa sem que antes os licenciandos tivessem contato com a EPRP e a CGD. Essa realidade nos permitiu desenvolver dados importantes para a pesquisa em EPRP, que foram, posteriormente, ampliados com reflexões em torno da inserção da CGD nesta metodologia de sala de aula.

As descrições densas das atividades de EPRP durante as Travessias foram importantes para uma melhor compreensão do processo em sua totalidade, evidenciando o que foi vivenciado em sala de aula.

Apesar de nossa pesquisa ter sido desenvolvida na formação inicial de professores de Matemática, ela não aborda diretamente essa tendência na Educação Matemática. No entanto, leva-nos a refletir sobre a prática docente nesse contexto, destacando que o uso das TD deve ser pensado de forma didática e clara, evitando o emprego da tecnologia pela tecnologia. Esse cuidado com o uso didático da CGD foi promovido pela EPRP, que, como construto teórico, forneceu a base necessária para qualificar essa aplicação.

Tendo assumido a Proposição de Problemas (PP) como ponto de partida da prática de EPRP, percebemos ao final da pesquisa uma evolução, ampliação e apropriação das ideias envolvidas nessa metodologia, que inicialmente estavam limitadas à Resolução de Problemas (RP). O contato com a PP levou os licenciandos a perceberem a importância dessa prática sob a ótica da EPRP para a formação do professor de Matemática, destacando a necessidade de sua abordagem em diferentes componentes curriculares, promovendo mudanças na forma de pensar a Matemática e seu ensino. Com isso, evidenciaram a importância de não só resolver problemas como também propô-los.

Além disso, a EPRP foi revelando algumas dificuldades pedagógicas e matemáticas dos licenciandos, nos levando a refletir como a CGD poderia contribuir para o desenvolvimento cognitivo e a superação dessas limitações. Dentre elas, destacamos: dificuldades com a generalização das ideias matemáticas; incoerência numérica e dificuldades algébricas; dificuldade em visualizar a relação entre grandezas; dificuldades em resolver problemas através da representação algébrica; preocupação maior com a solução do problema; falta de atenção na coerência dos dados usados no contexto dos problemas; dificuldades com a linguagem verbal e matemática durante a proposição dos problemas; domínio limitado de conteúdos matemáticos; dificuldade de refletir e se expressar criticamente; dificuldade em manter a Coerência Didática (CD) dos problemas.

A mudança de concepção dos licenciandos em torno da EPRP nos permitiu destacar elementos positivos à medida que a sua abordagem foi sendo integrada ao uso didático da CGD. Os licenciandos consideraram ter mais facilidade em propor problemas quando eles apresentavam relações da Matemática com o cotidiano, ampliando sua autonomia dos alunos na sala de aula, dando liberdade para exporem suas dúvidas, que, por sua vez, puderam ser sanadas pela própria exploração do problema, em especial, nos momentos em que fizeram uso das funcionalidades da CGD.

A EPRP, por ser um espaço aberto que possui contorno, mas que não é fechado, é ilimitada e intencional, mediada pelo professor. Em seu contorno estão os aspectos que ajudam a pensar e aprofundar a EPRP, como, por exemplo, a CD, o uso didático da CGD, entre outros. Ela permite a criação de links entre diferentes conteúdos, proporcionando um aprofundamento da temática. Vai-se aprendendo com o desenvolvimento da atividade a partir do trabalho realizado, que pode partir, inclusive, do erro do aluno. Assim, pode ser considerada uma metodologia que possibilita discussões além da interdisciplinaridade.

Observamos que, na EPRP, a PP foi surgindo timidamente, por meio de problematizações verbais durante a exploração dos problemas e, posteriormente, foram sendo codificadas e decodificadas de forma escrita. Inicialmente, a exploração do problema provocava poucas modificações nos dados dos problemas propostos, porém, à medida que a experiência com essa metodologia se aprofundava, foram trazendo novas formas de propor problemas, dentre elas, partindo da visualização gráfica proporcionada pela CGD.

Apontamos a PP como um meio para trabalhar a aplicabilidade da Matemática no cotidiano, com ênfase em questões sociopolíticas e culturais. Essa é uma condição intrínseca às discussões iniciais da EPRP (Andrade, 1998; 2017). Propor problemas a partir de contextos trouxe dificuldades iniciais nos licenciandos, dentre elas, a dificuldade de manter a CD do

problema. Com isso, destacamos a importância de a PP levar o propositor a refletir criticamente os dados e o contexto. Quando analisamos o contexto, percebemos que eles refletem situações reais do cotidiano dos alunos, oportunizando momentos de discussões e aprofundamento de temáticas relevantes, a partir de uma leitura e desenvolvimento críticos possibilitados pela Matemática.

Em se tratando da CD na PP, percebemos que o contexto sobressai aos dados numéricos, observando que muitos contextos são utilizados sem relação com os dados numéricos. Além disso, é necessário que haja um diálogo entre esses elementos da CD discutida por Abramovich e Cho (2008; 2015). Endossamos essa teoria ao percebermos que a ausência de coerência contextual inviabiliza a leitura do problema e descredibiliza a coerência numérica, destacando a necessidade de as duas serem pensadas juntas durante a PP.

Na relação entre o contexto e os dados numéricos, percebemos que a realidade socioeconômica dos alunos influencia a coerência contextual dos problemas propostos. Em contrapartida, a CGD ajuda a validar e ajustar esses contextos com dados precisos, mantendo a relevância e a conexão com suas realidades.

Todo o cenário de EPRP experienciando durante a pesquisa dá ênfase a uma construção ativa do conhecimento, afastando-se da abordagem tradicional e avançando para um método mais participativo, reorganizando o papel do professor e do aluno na sala de aula, levando-os a refletirem sobre a natureza do conteúdo matemático que está sendo explorado e a integração de recursos didáticos digitais (RDD) que venham proporcionar diferentes possibilidades de consolidação de ideias e conceitos matemáticos.

A EPRP despertou a visão externalista da Matemática. A partir da exploração dos problemas, os licenciandos passaram a perceber diferentes formas de ler e interpretar situações do cotidiano a partir da Matemática, vislumbrando um ensino não apenas preocupado com a Matemática pela Matemática. Mesmo quando os pontos de partida da EPRP apresentavam apenas dados numéricos, a maioria dos problemas foram propostos a partir de um contexto real, desencadeando diversos momentos de reflexão e leitura crítica desses dados.

Mesmo não sendo foco da nossa pesquisa aprofundar a discussão em torno do contexto dos problemas e das questões sociopolíticas e culturais que surgiram naturalmente com a EPRP, enfatizamos esse ponto a partir da importância de considerar a multicontextualidade da sala de aula, podendo esses dados estimular pesquisas futuras sobre o que tratam os contextos dos problemas propostos pelos alunos.

A EPRP passa a desenvolver um novo olhar sobre a Matemática, mais rico e humano e potencializando o uso didático de TD. Sendo uma estratégia pedagógica desafiadora, a evolução

gradual dos alunos abre suas mentes para novas possibilidades e uma relação mais próxima com o professor. O desenvolvimento das ideias permite enxergar diversas possibilidades de conteúdos a serem estudados, estabelecendo conexões entre a teoria e a prática.

Desse modo, a EPRP promove a PP em sala de aula, refletindo a realidade dos alunos e tornando o ensino da Matemática mais significativo e relevante. Isso não só facilita a compreensão dos conceitos matemáticos, mas também conecta o conhecimento acadêmico com a vida cotidiana dos alunos. Essa abordagem tem um impacto direto na formação de cidadãos críticos e reflexivos, pois, quando os alunos veem a Matemática aplicada a problemas reais e contextuais, eles desenvolvem habilidades para analisar e compreender melhor as questões que os cercam.

Além de aprenderem Matemática, eles passam a utilizar esse conhecimento como uma ferramenta para entender e questionar o mundo ao seu redor. Dessa forma, a Matemática deixa de ser apenas uma disciplina abstrata e se transforma em um meio para promover a cidadania, incentivando os alunos a participarem ativamente de debates sociais e a tomarem decisões informadas. A EPRP visa, portanto, não apenas a transmissão de conhecimento técnicos, mas também a formação integral dos alunos, capacitando-os para atuarem de forma crítica e consciente na sociedade.

A integração entre as ideias matemáticas, sociopolíticas, culturais e pedagógicas caracteriza a EPRP e enfatiza a importância de abordar conteúdos matemáticos de maneira não tradicional, fazendo uso de recursos como a CGD e possibilitando ao aluno a autonomia sobre seu próprio conhecimento.

O uso didático da CGD nesses contextos foi ampliado pela exploração e interpretação dos dados, tendo em vista que os dados numéricos de situações reais nem sempre estão condicionados dentro do conjunto dos números inteiros e a representação gráfica desses dados proporciona uma visão do geral para o específico e vice-versa, bem como o reconhecimento de padrões, generalizações e formulação de conjecturas matemáticas.

Todos esses enfoques nos levam a destacar a importância da EPRP na formação de professores de Matemática como estratégia de melhoramento didático, através do estímulo ao pensamento lógico e coerente dos alunos, levando-os a perceber a importância da PP, por exigir em seu desenvolvimento a Resolução de Problemas (RP), transcendendo o convencional e rompendo com a exploração passiva dos problemas dos livros didáticos.

Os diferentes momentos em que os licenciandos demonstravam dificuldades com a PP nos fizeram refletir sobre a importância emergente dessa abordagem nas salas de aulas de Matemática. Apesar dos desafios enfrentados pela PP no ensino, que vão desde o domínio da

CD até a consideração da perspectiva do aluno, temos como resultado uma prática pedagógica mais enriquecedora e eficaz, contribuindo para o desenvolvimento cognitivo e crítico dos alunos.

Na EPRP, é importante considerar a liberdade de tempo inicial, para que os alunos possam se familiarizar com essa metodologia de sala de aula, considerando os diferentes tempos de aprendizagem. Porém, é necessário que essa prática seja intencionada pelo professor, e mediador, reconhecendo os limites de tempo para os diferentes momentos da EPRP.

Esses apontamentos em torno da EPRP, validados pelas nossas pesquisas, nos ajudam a dialogar e compreender como se deu a construção dos dados em direção ao nosso problema de pesquisa. Pensar a integração da CGD na EPRP foi um trabalho contínuo e dinâmico que inúmeras vezes nos fez repensar os diferentes caminhos que pudessem nos trazer até essa discussão.

Pensar em EPRP tem seus desafios e pressupostos teóricos e práticos. Seus contributos para a pesquisa em RP e em PP também são fomentados pelas discussões que aqui apresentamos. Passamos a considerar a EPRP como abordagem metodológica que reconfigura e fortalece a prática de sala de aula e traz avanços significativos para esse campo de pesquisa e na forma de pensar o uso didático das TD. A partir desta pesquisa, também passamos a pensar a PP como um instrumento de avaliação importante, tanto para professores como para alunos.

A PP torna os professores mais ativos/preparados, revelando seu domínio de conteúdos matemáticos, seu conhecimento de mundo e suas habilidades pedagógicas. Proporciona uma autoavaliação desses aspectos e um refletir sobre o seu pensar/fazer a partir dos erros e dificuldades identificadas. Desenvolve a consciência de um ensino da Matemática centrado na PP e não mais apenas na RP, fazendo os professores perceberem que essa também é uma tarefa sua. Essa observação também se estende para os alunos. Pensar a PP como um mecanismo de avaliação é mais uma das inquietações que surgem a partir da nossa experiência com a pesquisa em EPRP.

Voltando nossa atenção mais especificamente para as reflexões proporcionadas pelo uso didático da CGD via EPRP, percebemos uma ampliação nos recursos que podem ser tomados como pontos de partida. Esse RDD é capaz de mediar a prática de EPRP através de suas funcionalidades, interatividade e mobilidade, proporcionando aos alunos uma experiência ativa e metacognitiva, em que a visualização dos objetos matemáticos dá sentido e impulsiona o ir cada vez mais da EPRP.

Muita gente utiliza as TD para verificar respostas, o que não faz sentido na EPRP. À medida que a CGD possibilitou uma exploração mais aprofundada dos problemas, percebemos

que isso só foi possível graças à metodologia da EPRP. É como uma via de mão dupla: enquanto a CGD aprofunda o trabalho da EPRP, é a metodologia que viabiliza essa exploração com a CGD.

A EPRP nos deu um direcionamento para o uso da CGD. As atividades desenvolvidas, os problemas escolhidos e a forma de trabalhá-los tomaram a EPRP como referência didática. Estudar a EPRP nos permitiu reorganizar as atividades com o uso da CGD de maneira mais estruturada e eficiente.

Nos dias de hoje, não podemos pensar a EPRP apenas com o uso de lápis e papel. Os avanços tecnológicos que assolam cada vez as salas de aulas fazem com que os alunos não se sintam mais atraídos apenas pelo uso de recursos analógicos. Por mais que se tenha uma dificuldade inicial para integrar o uso desses recursos à prática pedagógica, é possível ter resultados antes do esperado. Destacamos a importância do contato com esses RDD mais incisivamente na formação inicial de professores de Matemática.

É provável que cheguemos a um ponto em que o ensino sem o uso didático de TD se torne inviável. À medida que as tecnologias avançam e se integram cada vez mais nas práticas educacionais, elas ampliam o acesso à informação, diversificam as metodologias de ensino e potencializam a aprendizagem. O uso didático de TD oferece novas formas de interação, permitindo que alunos e professores explorem conteúdos de maneira mais dinâmica e personalizada. Em um futuro próximo, será difícil imaginar um ambiente de ensino que não faça uso dessas ferramentas, uma vez que elas não apenas facilitam o processo educacional, mas também o tornam mais atrativo e eficaz. Nesse sentido, o papel do professor também evolui, deixando de ser um mero transmissor de conhecimento para se tornar um mediador, capaz de guiar os alunos por esse vasto universo digital de maneira crítica e consciente.

Quando analisamos os problemas propostos pelos licenciandos na 2ª Travessia, observamos que sua exploração pode ser cada vez mais aprofundada pelo uso didático da CGD, além de dar condições para que os licenciandos superassem algumas das suas dificuldades com a EPRP identificadas na 1ª Travessia. Sem o conhecimento da EPRP o uso didático da CGD, não teria seguido o mesmo caminho, tampouco avançado na mesma proporção.

O uso didático da CGD via EPRP desperta nos alunos maior interesse em participar da atividade, ativa mecanismos cognitivos viabilizados pelo trânsito entre as múltiplas representações matemáticas, amplia o campo numérico dos inteiros para os reais, desenvolve a linguagem matemática, contempla um aprofundamento maior do problema em determinado intervalo de tempo, direciona o foco para generalizações e conjecturas sem a necessidade de tanta manipulação numérica e algébrica, condiciona o aluno a partir do visual/gráfico para o

algébrico, possibilita o surgimento de novos caminhos durante a resolução e exploração do problema e a redação do problema pode ser codificada e decodificada não só com elementos da linguagem verbal.

Pudemos perceber que o pensamento numérico tende a preceder o pensamento algébrico nos diferentes momentos da EPRP. A CGD via EPRP facilita a superação dessas dificuldades com a funcionalidade tabela, em que os alunos têm a oportunidade de discriminar aritmeticamente os seus cálculos e, a partir disso, reconhecer padrões, generalizar e criar conjecturas de natureza algébrica que ajudam na consolidação de ideias matemáticas que serão exploradas através da PP. Além disso, a organização dos dados na tabela colabora na percepção da relação entre as grandezas. A visualização gráfica de uma função e o trânsito com a representação numérica contribuem para o desenvolve o pensamento algébrico.

São múltiplos os momentos de aprendizagem matemática proporcionados pela CGD via EPRP. Não se trata de um caminhar com foco em um resultado, mas de diversas oportunidades de consolidação de ideias matemáticas que vão sendo proporcionadas nesse itinerário através de representações digitais dos objetos que rompem com parte da abstração matemática.

Construir uma tabela com lápis e papel, realizar todos os cálculos aritméticos e esboçar gráficos de funções quando os alunos já dominam essas atividades pode ser considerado um trabalho exaustivo por parte deles e que compromete boa parte do tempo da aula. Quando se tem o foco na interpretação das informações, na demonstração e na exploração mais precisa e profunda dos dados é que vislumbramos o potencial de RDD como a CGD.

É preciso saber o momento certo para fazer uso desses recursos de forma a não inibir o desenvolvimento de habilidades importantes por parte dos alunos, como, por exemplo, determinar pontos no plano cartesiano e esboçar o gráfico de funções.

Destacamos que na PP nem sempre o contexto explorado dá conta de abranger todos os conceitos e ideias que se almeja com uma atividade. Em situações como essa, o uso de pontos de partida algébricos faz-se necessário para o desenvolvimento dessas ideias, que, uma vez construídas, são retomadas e aplicadas dentro do contexto do problema. Como exemplo, podemos frisar o momento em que os licenciandos representaram algebricamente diversas funções na CGD, obtendo a representação gráfica, para compreender o comportamento do gráfico a partir dos valores dos coeficientes.

Desse modo, o uso didático da CGD via EPRP possibilitou o envolvimento cada vez maior da representação algébrica, timidamente utilizada inicialmente. Isso foi proporcionando um melhor desenvolvimento da linguagem verbal e matemática e ampliando o domínio do

conteúdo matemático, proporcionando momentos cada vez mais frequentes de reflexões e sínteses, avançando em direção à CD dos problemas.

Além dos conteúdos de função explorados com a CGD durante as atividades de pesquisa, é possível trabalhar com vários outros conteúdos algébricos. Esperamos que as reflexões que aqui trazemos possam motivar outras experiências com outros conteúdos, bem como com outros RDD via EPRP.

Outro ponto forte que devemos destacar na CGD via EPRP são as suas múltiplas representações matemáticas. A CGD permite a inserção de informações verbais, numéricas, algébricas e gráficas, com interações concomitantes. De forma interativa, essas funcionalidades na EPRP proporcionaram um trânsito fluido entre elas.

Os problemas passaram a ser propostos tendo como ponto de partida ora o uso de tabela, ora a representação gráfica, que eram viabilizados pela informação algébrica inserida na CGD. O processo de codificação e decodificação não estava mais limitado à linguagem verbal, mas foi ampliado com a interação e visualização proporcionada pela CGD, levando os licenciandos a questionar e compreender suas inquietações. Com isso, percebemos um rompimento dos padrões da maioria das salas de aula de Matemática, regidos por definição, expressões matemáticas e exercícios de fixação da aprendizagem, ficando o problema como um mecanismo de aplicação do conteúdo estudado.

Entre as múltiplas representações proporcionadas pela CGD, é importante analisar qual delas será mais útil para determinado momento da EPRP. Essa é uma característica importante que surge a partir das nossas observações de pesquisa, nos levando a refletir sobre qual a melhor representação para resolver ou propor determinado problema. É importante refletir sobre qual delas melhor qualifica determinado momento da EPRP, ao mesmo tempo em que podemos fazer um paralelo com a exploração sem o uso desse recurso.

Nesses resultados, o olhar dos licenciandos foi fundamental para que pudéssemos refletir a importância dessa prática na formação de professores e como tudo isso tem possibilitado uma visão diferente para o ensino da Matemática. Enfatizaram a facilidade de uso e a interatividade, observando que não teriam avançado tanto se não fosse o uso didático da CGD, que ajudou não só a economizar tempo, mas tornou a aula mais atrativa e auxiliou a compreensão de conceitos matemáticos complexos.

Com essa experiência, passaram a ver a CGD não só como uma RDD para ensinar o conteúdo, mas que também prepara os alunos para um mundo cada vez mais digital, ressaltando a importância de os educadores se adaptarem e enriquecerem suas práticas pedagógicas. Além

disso, a capacidade da CGD de criar gráficos dinâmicos, permitindo a exploração de diferentes valores, é vista como uma vantagem significativa em comparação com métodos tradicionais.

A discussão que aqui trazemos em torno do uso didático da CGD via EPRP não coloca em prova o desenvolvimento dessa metodologia de sala de aula fazendo uso de recursos como lápis e papel. Cada uma tem suas vantagens, a depender da intencionalidade da prática do professor, porém, refletimos, a partir de uma preocupação dos licenciandos, sobre a dependência excessiva das Tecnologias Digitais (TD) desencadeando um ambiente em que os alunos percam a habilidade de EPRP manualmente.

O uso didático da CGD via EPRP promove motivação e engajamento, facilitação do pensamento algébrico, desenvolvimento de conjectura e explorações dinâmicas, envolvimento e reflexão crítica, integração de contextos reais e multidisciplinares, desafios e superações, autonomia na resolução e proposição de problemas, validação e correção, progresso da EPRP, avanço na linguagem matemática, visualização gráfica, integração de múltiplas representações, análise numérica e algébrica, e construção colaborativa. Na PP, graças ao uso didático da CGD, os licenciandos dispõem de funcionalidades para apresentar de forma clara e direcionada o problema, incluindo tabelas e gráficos, o que pode facilitar a compreensão.

Os problemas propostos na 2ª Travessia apontaram a necessidade de uso didático da CGD para que pudessem aprofundar as ideias, por meio da precisão dos dados e trânsito entre as representações matemáticas.

Ao passarem a identificar incoerências durante a EPRP, os licenciando demonstraram um avanço tanto nos aspectos metodológicos da EPRP quanto nos conceitos matemáticos envolvidos, sendo a interpretação uma das dificuldades enfrentadas, especialmente na transição da linguagem verbal para a algébrica. No contexto dessa pesquisa, como forma de superação proporcionada pelo uso didático da CGD, observamos que, antes de recorrer à representação algébrica, os licenciandos utilizam a representação numérica, por meio da tabela, como uma ponte entre a linguagem verbal e a algébrica. Passam a enxergar na visualização gráfica um mecanismo de (re)avaliar a representação algébrica. Desse modo, percebemos que a representação/visualização gráfica pode ser mais eficaz, como foi o caso da representação gráfica para identificar incoerências algébricas e o uso da tabela para desenvolver o raciocínio e o pensamento algébrico.

As informações visuais oferecidas pela CGD, juntamente com a interação e manipulação desses dados, possibilitam uma exploração eficiente, proporcionando maior segurança e motivação. Isso cria um ambiente propício para a busca de sentido e compreensão

de conceitos matemáticos que, anteriormente, os licenciandos aceitavam como dados prontos, se serem incentivados a refletir sobre eles.

Como exemplo, destacamos a forma como a CGD possibilitou a compreensão dos nomes atribuídos aos coeficientes da função afim, ampliando o conhecimento e gerando mais recursos para a EPRP. Tudo isso contribui para o desenvolvimento cognitivo dos alunos, despertando a curiosidade em abordar informações que foram além do coeficiente angular e linear, crescimento e decrescimento, zero da função afim, entre outros.

Quando estavam mais focados em propor problemas, 2ª Travessia, conseguimos perceber o desenvolvimento dos licenciandos. Inicialmente, o ponto de partida foi o problema do livro didático, em outros momentos, passou a ser um conceito da função afim, depois, uma representação algébrica, bem como a visualização gráfica proporcionada pela CGD. Todo esse trabalho e movimentação em torno da EPRP se deu pelo reconhecimento de diferentes caminhos possibilitados pela CGD em direção à PP.

Mesmo quando o ponto de partida era o conteúdo de função afim, a EPRP levou os licenciandos a perceberem a necessidade de abordar outros conteúdos, a exemplo de proporção, como um caminho mais viável para o desenvolvimento de ideias de função. Também perceberam a importância da escala para uma melhor visualização do gráfico, ajustando esses valores na CGD, sendo essa uma dificuldade que temos ao esboçar gráficos de funções fazendo uso de lápis e papel, que crescem ou decrescem muito rápido em alguns intervalos.

Além disso, conseguem avançar para ideias de domínio e imagem da função, em que a CGD permite sua representação tanto para variáveis contínuas como discretas. Esse foi um momento de discussão riquíssimo, tanto na 1ª como na 2ª Travessia, possibilitado pela CGD, desmitificando a ideia de os gráficos serem sempre contínuos, sem uma atenção para a natureza das variáveis e o domínio da função, proporcionando uma leitura e representação correta dos dados quando envolvidos em um contexto.

Ainda destacando a influência da representação gráfica da CGD via EPRP, a experiência que os licenciandos tinham com o estudo do sinal da função estava limitada pela manipulação algébrica e o uso de lápis e papel, não permitindo uma compreensão e relação com outros elementos e o comportamento do gráfico da função. A partir desta experiência, passaram a perceber essas relações graficamente e a compreender o estudo do sinal da função a partir do zero da função, crescimento e decrescimento e domínio da função.

Durante a PP da 2ª Travessia, a depender do ponto de partida, os licenciandos se sentiam limitados quanto aos dados que estavam associados ao contexto do problema, sentido a necessidade de incorporar outros dados aos problemas, na maioria das vezes, oriundos da

visualização gráfica da CGD. Como exemplos, destacamos o ponto de partida zero da função afim. A equipe percebeu que a visualização gráfica seria um caminho mais eficiente, possibilitando a identificação do ponto em que cada função tocava o eixo x , destacando as coordenadas e facilitando a interpretação dos dados. Ao concluírem o que seria o zero da função, também instigaram o cálculo algébrico.

Além de estimular fortemente o uso da representação gráfica nos problemas propostos na 2ª Travessia, percebemos que os problemas foram sendo propostos de forma progressiva a partir da CGD via EPRP. Com isso, houve uma apropriação da PP, em que os licenciandos percebem a necessidade de reformulação e criação de novos contextos em diferentes momentos da atividade, surgindo discussões importantes para a EPRP, como o afloramento de discussões sociopolíticas e culturais.

Enfatizamos que, nos problemas propostos, a PP também passou a fazer parte da atividade. Nesse sentido, destacamos a proposta apresentada pela E5 ao explorar inequações do 1º grau. Isso revela o reconhecimento da importância da PP não só por professores, como também pelos alunos.

O uso didático da CGD via EPRP tem um impacto positivo significativo na aprendizagem matemática. Ela não só aumenta a motivação e o engajamento dos alunos, mas também facilita a compressão de conceitos algébricos complexos, promove a reflexão crítica e integra contextos reais na PP. No entanto, é necessário um planejamento pedagógico cuidadoso para superar os desafios e maximizar os benefícios da tecnologia.

Essas conclusões, mas que provocam novas reflexões, são essenciais para se pensar elementos importante para o desenvolvimento de práticas pedagógicas que integrem o uso didático da CGD via EPRP. Mesmo que tenham seguido um itinerário previamente planejado e com resultados plausíveis, não é característica da EPRP apresentar uma atividade pronta, pois devemos levar em consideração a multicontextualidade da sala de aula. É nesse sentido, que apresentamos um PE que extrai ideias/aspectos/elementos/situações/problemas/orientações para se pensar e planejar o uso didático da CGD via EPRP.

Na integração da CGD via EPRP, temos um envolvimento ativo dos alunos. Isso ocorre porque, ao enfrentar problemas reais ou contextuais, os estudantes veem imediatamente a relevância do que estão aprendendo. Esse tipo de envolvimento é essencial para manter o interesse e a motivação dos alunos, pois eles se sentem parte ativa do processo de descoberta e construção do conhecimento.

As diferentes funcionalidades da CGD, especialmente as múltiplas representações matemáticas, proporcionam um ganho significativo no entendimento dos conceitos durante a

EPRP. Quando os alunos são desafiados a PP e RP antes mesmo de conhecerem a teoria, eles desenvolvem uma compreensão mais profunda e duradoura. Isso acontece porque a necessidade de aprender a teoria surge naturalmente do desejo de propor e resolver o problema. Esse processo gera aprendizagem, pois os conceitos não são mais vistos como informações abstratas, mas como ferramentas essenciais para a exploração de situações concretas.

Além disso, a CGD potencializa a capacidade da EPRP no trabalho com um conteúdo em diferentes níveis de complexidade. Isso significa que, a partir de um único problema, é possível explorar conceitos básicos e avançados, adaptando o nível de desafio às capacidades e necessidades dos diferentes alunos. Essa flexibilidade é crucial para atender à multicontextualidade da sala de aula, permitindo a todos os alunos, independente do seu nível inicial de conhecimento, progredir de maneira significativa.

Ao resgatar as ideias iniciais que motivaram esta pesquisa, Andrade (2017) observou que a PP é a etapa mais difícil de ser desenvolvida nos alunos, e aqui também estendemos essa realidade para os professores. A nossa pesquisa nos permite trazer alguns aspectos que ajudam a justificar esse fato, tais como: a formação dos professores; a pressão do currículo; a diversidade de níveis de conhecimento; a resistência dos alunos; a avaliação tradicional; a necessidade de criatividade e inovação; a falta de recursos e suporte.

Em se tratando da PP, muitos professores não recebem formação específica para desenvolver e aplicar essa metodologia, o que os deixa inseguros ao tentar utilizá-la. Além disso, a pressão para cobrir um currículo extenso em tempo limitado desincentiva o uso de abordagens que demandam mais tempo, como a EPRP. Outro desafio significativo é a diversidade de níveis de conhecimento entre os alunos, o que torna difícil propor problemas que sejam desafiadores e acessíveis para todos. A resistência dos próprios alunos, acostumados a um ensino tradicional e menos exigente em termos de autonomia, também dificulta a adoção dessa prática.

Os sistemas de avaliação frequentemente não estão alinhados com a abordagem de PP, priorizando questões que testam a aplicação direta de fórmulas, o que desencoraja os professores a investir tempo nessa metodologia. Além disso, a necessidade de criatividade para propor problemas relevantes e desafiadores é intimidadora para muitos alunos e professores, especialmente sem recursos e apoio adequados. Essa falta de colaboração e suporte entre os professores impede a troca de experiências e o desenvolvimento de práticas eficazes, tornando a PP um desafio ainda maior na EM.

Cai *et al.* (2015), ao questionar como as TD podem ser usadas em atividade de PP, nos fazem voltar a nossa atenção especificamente para a CGD e seu uso na PP na perspectiva da

EPRP, pois observamos o quanto ela facilitou a exploração dos conceitos e ideias matemáticas, incentivou o pensamento crítico e desenvolveu autonomia nos alunos. Tornou o aprendizado mais visual, interativo e exploratório, permitindo visualizarem imediatamente as consequências de suas ações e testarem suas hipóteses, o que é fundamental para desenvolver o pensamento crítico e independente.

Com a CGD, podemos explorar como diferentes funções se comportam ao alterar parâmetros. Na PP da função afim e exponencial, os licenciandos puderam ajustar os coeficientes e observarem como o gráfico muda. Isso ajudou a compreender a relação entre a forma algébrica e a representação gráfica, permitindo que experimentem e descubram propriedades de funções por si só e proponham problemas cada vez mais avançados.

Além das funções exploradas durante a pesquisa, é possível que esse trabalho possa ser desenvolvido abordando vários outros conteúdos que também são viabilizados pela CGD, como geometria analítica, estatística, entre outros. Além disso, ela pode ser usada para criar simulações que modelam situações reais. A interface intuitiva da CGD encoraja a criatividade dos alunos ao explorarem problemas matemáticos.

Toda essa experiência com a CGD e a EPRP capacita professores e alunos a irem além dos problemas propostos nos livros didáticos. Eles são incentivados a reformular esses problemas, adaptando-os à realidade dos alunos e aprofundarem sua exploração com o uso didático da CGD. Isso permite uma aprendizagem mais contextualizada e significativa, em que os problemas são mais relevantes e conectados ao cotidiano dos alunos.

Tendo em vista que Abramovich e Cho (2015) observaram que o papel das TD no desenvolvimento de habilidades em PP tem recebido pouca atenção, acreditamos que nossa dá um passo a mais em direção a esse contexto. Ao mesmo tempo em que estimula o desenvolvimento de novas pesquisas que venham contribuir para o fortalecimento desse campo de pesquisa. Apesar dos resultados e reflexões aqui apresentados, acreditamos que surgem ainda mais inquietações para um novo caminhar, não sendo esse considerado um fim.

REFERÊNCIAS

- ABRAMOVICH, S. Do computers enable mathematical problem solving or just make it “easy”? **Computer Tools in Education**, v. 2, n. 2, p. 45-54, 2016a.
- ABRAMOVICH, S. **Integrating computers and problem posing in mathematics teachers education**. Singapore: World Scientific, 2016b.
- ABRAMOVICH, S.; CHO, E. L. Using Digital Technology for Mathematical Problem Posing. In: SINGER, F. M.; ELERTON, N. F.; CAI, J. (Orgs.). **Mathematical Problem Posing: from Research to Effective Practice**. New York: Springer, 2015. p. 71-102.
- ABRAMOVICH, S.; CHO, E. On Mathematical Problem Posing by Elementary Pre-teachers: The Case of Spreadsheets. **Spreadsheets in Education**, v. 3, n. 1, p. 1-19, 2008.
- ABRAMOVICH, S.; CHO, E. Technology and the creation of challenging problems. **Mathematics Competitions**, v. 26, n. 2, p. 10-20, 2013.
- ABRAMOVICH, S.; CHO, E. Technology-Enabled Mathematical Problem Posing as Modeling. **Journal of Mathematical Modelling and Application**, v. 1, n. 6, p. 22-32, 2012.
- ABREU, J. D. **Aprendizagem móvel: explorando a matemática por meio de aplicativos educacionais em smartphones**. 2018. 233 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2018.
- ABREU, J. D.; ANDRADE, S. **Desmos App in the mathematics classroom: limitations and potentialities**. In: International Congress on Mathematical Education, 14., 2021, Changhai, China. Apresentado como comunicação oral.
- ABREU, J. D.; MARTINS, F. C.; RODRIGUES, U. F. **Possibilidades de uso das tecnologias digitais na Exploração, Proposição e Resolução de Problemas: o problema dos três marinheiros**. In: Ana Lucia Manrique; Claudia Lisete Oliveira Groenwald.. (Org.). **Anais do IX CIBEM Congresso Iberoamericano de Educação Matemática**. 1ed.São Paulo: Editora Akademy, 2023, v. 1, p. 3052-3063.
- ABREU, J. D.; MARTINS, F. C.; RODRIGUES, U. F. Possibilidades de uso das tecnologias digitais na Exploração, Proposição e Resolução de Problemas: o problema dos três marinheiros. In: MANRIQUE, A. L.; GROENWALD, C. L. O. (Orgs.). **Anais do IX CIBEM Congresso Iberoamericano de Educação Matemática**. 1. ed. São Paulo: Editora Akademy, 2023. v. 1, p. 3052-3063.
- ALLEVATO, N. S. G. **Associando o computador à resolução de problemas fechados: análise de uma experiência**. 2005. 370 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, São Paulo, 2005.
- AMPLATZ, L. C. **O estudo da função afim a partir da interpretação global de propriedades figurais: uma investigação com estudantes do ensino médio**. 2020. 207 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, 2020.
- ANDRADE, S. **Ensino-aprendizagem de matemática via resolução, exploração, codificação e decodificação de problemas e a multicontextualidade da sala de aula**. 1998. 325 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, SP, 1998.

ANDRADE, S. **Um caminhar crítico reflexivo sobre Resolução, Exploração e Proposição de Problemas Matemáticos no Cotidiano da Sala de Aula**. In: ONUCHIC, L. R.; JUNIOR, L. C. L.; PIRONEL, M. (Orgs.). *Perspectivas para Resolução de Problemas*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017. p. 355-396.

ANTUNES, G.; CAMBRAINHA, M. Modelos de exploração matemática na plataforma Desmos: ensinar e aprender em um ambiente virtual de aprendizagem. In: **IV Simpósio Nacional da Formação do Professor de Matemática**. ANPMat, 2020.

ARAÚJO, A. L.; SOUSA, J. J.; ANDRADE, S. **“Menino veste azul e menina veste rosa”?: uma discussão sobre gênero na formação inicial de professores de matemática a partir da Exploração de Problemas**. In: Anais do XII Encontro Paraibano de Educação Matemática. Anais...João Pessoa (PB) SBEM-PB, 2023.

ARAÚJO, J. A. **As operações aritméticas fundamentais na perspectiva da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas**. 2021. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2021.

ARAÚJO, J. J. A. **Um estudo sobre o endividamento no contexto da educação matemática financeira**. 2023. 93 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática - PPGECEM) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2023.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto: Porto Editora, 1994. Tradução de: Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular: Educação é a base**. Brasília, DF: MEC, 2017. Disponível em: <https://www.gov.br/bncc>. Acesso em: 20 nov. 2023.

BRAUN, V.; CLARK, V. Using thematic analysis in psychology. **Qualitative Research**, v. 3, n. 2, p. 77-101, 2006.

CAI, J. et al. Problem-Posing Research in Mathematics Education: Some Answered and Unanswered Questions. In: SINGER, F. M.; ELLERTON, N. F.; CAI, J. (Orgs.). **Mathematical Problem Posing: from Research to Effective Practice**. New York: Springer, 2015. p. 3-34.

CAI, J. What Research Says About Teaching Mathematics Through Problem Posing. **Éducation & didactique**, 2022/3, v. 16, p. 31-50. DOI: <https://doi.org/10.4000/educationdidactique.10642>. Disponível em: https://shs.cairn.info/article/EDDI_163_0031?lang=fr. Acesso em: 27 ago. 2024.

CAI, J. What research tells us about teaching mathematics through problem solving. In: LESTER, F. (Org.). **Research and Issues in Teaching Mathematics through Problem Solving**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2003. p. 1-24.

CAI, J.; HWANG, S. Learning to teach through mathematical problem posing: Theoretical considerations, and directions for future research. **International Journal of Educational Research**, v. 102, p. 1-8, 2020.

CARREIRA et al. Youngsters Solving Mathematical Problems with Technology: The Results and Implications of the Problem@Web Project. **Mathematics Education in the Digital Era**, v. 5. New York: Springer, 2016.

CONCEIÇÃO, D. M. Uma tese para tessitura da tese. **Tessituras**, Pelotas, v. 6, n. 1, p. 139-147, jan./jun. 2018.

COSTA, B. S. R. **Uma proposta para o ensino de função polinomial do 1º grau utilizando a plataforma do app Inventor 2 e o software Desmos**. 2021. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Docência em Educação em Ciências e Matemáticas, Belém, 2021.

CRESPO, S. A Collection of Problem-Posing Experiences for Prospective Mathematics Teachers that Make a Difference. In: SINGER, F. M.; ELLERTON, N. F.; CAI, J. (Orgs.). **Mathematical Problem Posing: from Research to Effective Practice**. New York: Springer, 2015. p. 493-512.

CULLEN, C. J.; HERTEL, J. T. **Improving Our Criticism of Technology in Mathematics Education**. Mathematics Teacher: Learning & Teaching PK-12 (NCTM 2023), Delaware, v. 116, n. 5, p. 314-321, May. 2023.

DANTE, L. R.; VIANA, F. Teláris Essencial: **Matemática: 6º ano**. 1. ed. São Paulo: Ática, 2022.

DOMITE, M. C. S. Problem Posing and Problematization. In: **Education for Everyone. Worldwide. Lifelong**. v. 57, p. 1-7, 2001.

ELLERTON, N. F.; SINGER, F. M.; CAI, J. Problem Posing in Mathematics: Reflecting on the Past, Energizing the Present, and Foreshadowing the Future. In: SINGER, F. M.; ELLERTON, N. F.; CAI, J. (Orgs.). **Mathematical Problem Posing: from Research to Effective Practice**. New York: Springer, 2015. p. 547-556.

ENGLISH, L. D.; LESH, R.; FENNEWALD, T. Future directions and perspectives for problem solving research and curriculum development. In: **11th International Congress on Mathematical Education**, 6-13 July 2008, Monterrey, Mexico.

EUZÉBIO, J. S. **Proposta de ensino de geometria analítica utilizando o Desmos**. 2018. 120 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Federal do Paraná, Pato Branco, 2018.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos**. Campinas: Autores Associados, 2012.

FRANÇA, J. A. **Proposta para o ensino de funções usando a ferramenta digital Desmos**. 2022. 168 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2022.

FREITAS, R. Produtos educacionais na Área de Ensino da Capes: o que há além da forma? **Educação Profissional e Tecnológica em Revista**, v. 5, n. 2, 2021.

HISSA, C. E. V. **Entrenotas: compreensões de pesquisa**. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2013.

IEZZI, G. et al. **Matemática: ciência e aplicações**. v. 1, 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

JURADO, U. M. La creación de problemas de matemáticas en la formación de profesores. In: **7º Congreso Iberoamericano de Educación Matemática**. Montivideo-Uruguai: SEMUR, 2013, p. 129-140.

- KILPATRICK, J. Problem formulating: Where do good problems come from? In: SCHOENFELD, A. H. (Org.). **Cognitive Science and Mathematics Education**. Hillsdale, New Jersey: Erlbaum, 1987. p. 123-147.
- LANKSHEAR, C.; KNOBEL, M. **Pesquisa pedagógica: do projeto à implementação**. Porto Alegre: Artmed, 2008. Tradução de: Magda França Lopes.
- LESTER, F.; CAI, J. Can Mathematical Problem Solving Be Taught? Preliminary Answers from 30 Years of Research. In: FELMER, P.; PEHKONEN, E.; KILPATRICK, J. **Posing and Solving Mathematical Problems: Advances and New Perspectives**. Springer, 2016, p. 117-136.
- LIANG, S. **Teaching the concept of limit by using conceptual conflict strategy and Desmos graphing calculator**. In: International Journal of Research in Education and Science (IJRES), v. 2, n. 1, p. 35-48, 2016.
- LUBEROFF, E. The Vast Majority of Ed-Tech Is Garbage: An Interview with Eli Luberoff. [Entrevista cedida a] John Orr e Kyle Pearce. **Make Math Moments**. Toronto-Canadá. Episódio 95. set. 2020. Disponível em: <https://makemathmoments.com/episode95/>. Acesso em: 27 mai. 2022.
- MACÊDO, J.; BRANDÃO, D.; NUNES, D. Limites e possibilidades do uso do livro didático de Matemática nos processos de ensino e de aprendizagem. **Educação Matemática Debate**, Montes Claros, v. 3, n. 7, p. 68–86, 2019. DOI: 10.24116/emd.v3n7a04. Disponível em: <https://www.periodicos.unimontes.br/index.php/emd/article/view/79>. Acesso em: 27 ago. 2024.
- MALDONADO, E. R. R.. **Análisis de la percepción de los profesores em activo referente al uso de la tecnología em la Matemática**. In: Revista de Educación Inclusiva – Chile, vol. 4, n. 2, p. 159-188, 2020a.
- MALDONADO, E. R. R.. **Diseño de estratégia de abertura para la interpretación gráfica-analítica a través de Desmos como preparación para el aprendizaje del cálculo diferencial**. In: Revista Iberoamericana para la investigación y el Desarrollo Educativo, v. 10, n. 19, 2019.
- MALDONADO, E. R. R.. **La comprensión de conceptos fundamentales del cálculo mediante Desmos. Una intervención**. In: Revista Iberoamericana para la investigación y el Desarrollo Educativo, v. 10, n. 20, 2020b.
- MARTINS, F. C. **Exploração-Proposição-Resolução de problemas na licenciatura em matemática: implicações para a sala de aula**. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2024. 248 p.
- MARTINS, F. C.; ANDRADE, S. Ensino de Sistemas Lineares: uma Proposta Metodológica Utilizando a Exploração, Proposição e Resolução de Problemas. **Educação Matemática Em Revista**, 27(77), 166-179. 2022a.
- MARTINS, F. C.; ANDRADE, S. Ensino-aprendizagem de Sistemas Lineares na licenciatura através da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas. **Revista de Educação Matemática**, [s. l.], v. 20, n. 01, p. e023005, 2023.
- MARTINS, F. C.; ANDRADE, S. **Exploração, Proposição e Resolução de Problemas na licenciatura em matemática: concepções e vivências dos licenciandos**. In: Anais do Encontro Nacional de Educação Matemática. Anais...Brasília (DF) On-line, 2022b.

McCULLOCH, A. W. *et al.*. **Positioning Studentes to Explore Math with Techonology.** Mathematics Teacher: Learning & Teaching PK-12 (NCTM 2023), Delaware, v. 114, n. 10, p. 738-749, Mar. 2023.

MINAYO, M. C. S. Análise qualitativa: teoria, passos e fidedignidade. **Ciência & Saúde Coletiva**, v. 17, n. 3, p. 621–626, 2012. DOI: <https://doi.org/10.1590/S1413-81232012000300007>.

NOSS, Richard. For a learnable mathematics in the digital culture. **Educational Studies in Mathematics**, v. 48, n. 1, p. 21-46, 2001.

OGANDO, P. G.. **Desmos: uma herramienta didáctica para trabajar com funciones y gráficas.** In: Revista de Didáctica de las Matemáticas, vol. 104, p. 9-28, 2020.

OLARTE, T. R.; ROBERTS, S. A. **Enacting Co-Craft Questions Using Flexible Teaching Platforms.** Mathematics Teacher: Learning & Teaching PK-12 (NCTM 2023), Delaware, v. 116, n. 3, p. 192-201, Mar. 2023.

OLIVEIRA, E. G. **A aprendizagem da função afim por meio de uma abordagem qualitativa e global com uso da plataforma Desmos.** 2023. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2023.

POLYA, G. **A arte de Resolver Problemas:** um novo aspecto do método matemático. 2. reimp. Tradução e adaptação: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PRENSKY, M. Digital Natives, Digital Immigrants. **On the Horizon**, v. 9, n. 5, 2001.

QUEIROZ, K. J. **A exploração, resolução e proposição de problemas e o letramento matemático como potencializadores do ensino e aprendizagem de multiplicação e divisão.** 2023. 278 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática - PPGECEM) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2023.

QUEIROZ, K. J.; ANDRADE, S. **A perspectiva da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas nos anos iniciais do ensino fundamental.** In: Anais do XI Encontro Paraibano de Educação Matemática. Anais...Campina Grande (PB) SBEM-PB, 2021.

SANTOS, E. V.; ANDRADE, S. Resolução, Exploração e Proposição de Problemas nos anos iniciais do ensino fundamental: contribuições para o ensino e aprendizagem da combinatória. **Revista de Educação Matemática**, [s. l.], v. 17, p. e020030, 2020.

SANTOS, R. O. **Educação fiscal nas aulas de matemática, cenários para investigação e exploração de problemas.** 2019. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2019.

SCHOENFELD, A. H. Problem solving in the United States, 1970-2008: research and theory, practice and politics. **ZDM Mathematics Education**, v. 39, Springer, p. 537-551, 2007.

SCHROEDER, T. L.; LESTER, F. K. Developing understanding in mathematics via problem solving. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Eds.). **New Directions for Elementary School Mathematics.** Reston: NCTM, 1989.

SCREMIN, G. **O que $f'(x)$ nos diz sobre $f(x)$: uma abordagem com uso de tecnologia computacional.** 2019. 133 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas) – Universidade do Vale do Taquari, Lajeado, 2019.

SILVA, C. F. **A metodologia da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas no ensino de função afim.** In: Anais do XI Encontro Paraibano de Educação Matemática. Anais...Campina Grande (PB) SBEM-PB, 2021.

SILVA, C. F. **Ensino aprendizagem de função afim via Exploração, Resolução e Proposição de problemas com o uso do aplicativo Desmos em contexto remoto.** 2021. 149 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2021.

SILVA, L. M. **Compreensão de ideias essenciais ao ensino-aprendizagem de funções via resolução, proposição e exploração de problemas.** 2013. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2013.

SILVA, L. M.; ANDRADE, S. Compreensão de ideias essenciais ao Ensino-Aprendizagem de Funções via Resolução, Proposição e Exploração de Problemas. **Caminhos da Educação Matemática em Revista**, Aracajú, v. 9, n. 1, p. 57-69, 2016b.

SILVA, R. T. M. **A atividade algébrica e o significado da igualdade através da exploração e proposição de problemas e o tecer de uma investigação na formação inicial.** 2023. 98 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática - PPGECEM) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2023.

SILVA, R. T. M.; ANDRADE, S. **A Atividade Algébrica Global, na compreensão da igualdade através da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas.** In: Anais do XI Encontro Paraibano de Educação Matemática. Anais...Campina Grande (PB) SBEM-PB, 2021.

SILVA, V. S.; ANDRADE, S. Resolução e Exploração de Problemas com o uso das tecnologias nas aulas de matemática. **Caminhos da Educação Matemática em Revista**, Aracajú, v. 9, n. 1, p. 22-33, 2016a.

SILVEIRA, A. A.; ABREU, J. D.; ANDRADE, S. **Exploração, Resolução e Proposição de Problemas: um olhar crítico para anúncios de ovos de Páscoa.** In: Anais do Encontro Nacional de Educação Matemática. Anais...Brasília (DF) On-line, 2022.

SILVEIRA, A. A.; ANDRADE, S. Análise Combinatória no ensino médio: episódio de sala de aula via Exploração, Resolução e Proposição de Problemas. **Educação Matemática Em Revista - RS**, 2(23). v.2.n.23.2022.

SILVEIRA, A. A.; ANDRADE, S. Ensino-Aprendizagem de Análise Combinatória via Exploração, Resolução e Proposição de Problemas no Ensino Médio. **Revista de Educação Matemática**, [s. l.], v. 17, p. e020017, 2020.

SILVEIRA, A. A.; ANDRADE, S. Proposição de Problemas de Análise Combinatória como ponto de partida: episódios de sala de aula. **Revista de Educação Matemática**, v. 19, p. e022019-23, 2022.

SILVEIRA, A. A.; NASCIMENTO, M. A.; ANDRADE, S. Análise Combinatória via Exploração-Proposição-Resolução de Problemas e Justiça Social. In: PANOSSIAN, M. L.; AMARAL-SCHIO, R. B.; SÁ, L. C. **Perspectivas plurais na Educação Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio.** Vitória - ES: Edifes, 2023. p. 131-153.

SILVER, E. A. On Mathematical Problem Posing. **For the Learning of Mathematics**, v. 14, n. 1, FLM Publishing Association, Vancouver, British Columbia, Canada, p. 19-28, 1994.

SINGER, F. M.; ELLERTON, N.; CAI, J. Problem-posing research in mathematics education: new questions and directions. **Educational Studies in Mathematics: An International Journal**, v. 82, n. 3, Springer, 2013.

SOUZA, V. N. **Letramento financeiro dos professores do ensino fundamental da rede municipal da cidade de Niterói e proposta de atividades de ensino**. 2021. 147 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, 2021.

TEIXEIRA, E. S. **Mobile Learning**: contribuições para o estudo de funções na formação do professor de matemática. 2020. 199 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2020.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental**: formação de professores em sala de aula. Tradução de Paulo Henrique Colonese. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.