UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I - CAMPINA GRANDE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

GERIVALDO BEZERRA DA SILVA

TRAÇADOS GEOMÉTRICOS AUXILIARES EM TRIÂNGULOS: DESCRIÇÃO DE TÉCNICAS E PRODUÇÃO DE MATERIAL DE ENSINO E APRENDIZAGEM EM IMPRESSORA 3D

CAMPINA GRANDE
2024

GERIVALDO BEZERRA DA SILVA

TRAÇADOS GEOMÉTRICOS AUXILIARES EM TRIÂNGULOS: DESCRIÇÃO DE TÉCNICAS E PRODUÇÃO DE MATERIAL DE ENSINO E APRENDIZAGEM EM IMPRESSORA 3D

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática

Área de concentração: Ensino de Matemática

Orientador: Aldo Trajano Louredo.
Coorientador: Israel Burití Galvão.

CAMPINA GRANDE
2024

S586t Silva, Gerivaldo Bezerra da.

Traçados geométricos auxiliares em triângulos [manuscrito] : descrição de técnicas e produção de material de ensino e aprendizagem em impressora 3D / Gerivaldo Bezerra da Silva. - 2024.

180 p. : il. colorido.

Digitado.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2024.

"Orientação : Prof. Dr. Aldo Trajano Louredo, Departamento de Matemática - CCT. "

"Coorientação: Prof. Dr. Israel Burití Galvão , Departamento de Matemática - CCT. "

1. Traçados auxiliares. 2. Geometria. 3. Laboratório de matemática. 4. Impressão três D. I. Título

21. ed. CDD 510

Elaborada por Pfeyffemberg de M. Guimarães - CRB - 15/1020 BC/UEPB

GERIVALDO BEZERRA DA SILVA

TRAÇADOS GEOMÉTRICOS AUXILIARES EM TRIÂNGULOS: DESCRIÇÃO DE TÉCNICAS E PRODUÇÃO DE MATERIAL DE ENSINO E APRENDIZAGEM EM IMPRESSORA 3D

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Ensino de Matemática

Aprovada em: 21/06/2024.

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
ALDO TRAJANO LOUREDO
Data: 23/07/2024 11:35:04-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Aldo Trajano Louredo (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Documento assinado digitalmente
CARMEN VIEIRA MATHIAS
Data: 23/07/2024 12:37:07-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dra. Carmen Vieira Mathias (Membro externo)
Universidade Federal de Santa Maria (UFSM)

Documento assinado digitalmente
DANIEL CORDEIRO DE MORAIS FILHO
Data: 23/07/2024 15:12:40-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profa. Dr. Daniel Cordeiro de Morais Filho (Membro externo)
Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)

A Luzia Adélia Bezerra, minha tia avó (*in memoriam*). Matriarca que deu base a minha família, em especial a minha mãe.

AGRADECIMENTOS

Deus, a te agradeço pela materialização deste tão sonhado trabalho. Obrigado por me proporcionar o convívio com as pessoas e instituições que de alguma forma colaboraram nestes mais de dois anos de estudo e pesquisa. Pessoas e instituições de valor imensurável. A estes deixo os meus mais sinceros agradecimentos:

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e à Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) pela oportunidade de participar do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

À Universidade Estadual da Paraíba (UEPB) e todo corpo docente do PROFMAT. Pelos momentos de aprendizagem vivenciados nas aulas, encontros e congressos.

Ao professor Aldo Trajano Louredo (meu orientador) e Israel Burití Galvão (meu coorientador) pela imensa dedicação e contribuição durante a orientação da pesquisa e escrita deste trabalho. Este trabalho é fruto de nossas ideias e diálogos.

À professora Carmen Vieira Mathias (UFSM) e ao professor Daniel Cordeiro de Morais Filho (UFCG) por participarem da banca de defesa deste trabalho. Obrigado pelo tempo dedicado a ler, analisar, corrigir e sugerir ideias a este trabalho.

Aos amigos de turma do PROFMAT por vivenciamos momentos de estudo com dedicação e entusiasmo. Percebemos a importância do coletivo nos estudos; mas também em pausas para compartilhar histórias pessoais, descontrair e descarregar um pouco o peso de termos uma carga de estudos semanais somados à carga horária do magistério.

Aos meus familiares, especialmente meu pai (Genival Bezerra da Silva) e minha mãe (Maria das Graças Silva). É maravilhoso saber que uma simples visita à casa materna recarrega as energias, mesmo sem precisar trocar uma palavra; o amor familiar cura e afaga só pela presença.

Aos meus amigos por proporcionarem ajuda de toda forma possível, principalmente emocional. Em especial ao meu melhor amigo Josevandro Barros Nascimento. Que sempre possamos contar um com o outro nas felicidades e adversidades da vida.

Ao meu companheiro de vida, no amor e na luta cotidiana, José Neto de Oliveira. Que toda pessoa um dia encontre outra pessoa para chamar de seu: seu porto seguro pra somar e serem melhores juntos.

Ao meu local de trabalho, campus Floresta do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sertão Pernambucano (IFSertãoPE), em especial aos meus alunos. Em breve, retorno mestre, mais qualificado para atuar no ensino, pesquisa e extensão.

"Não existe uma estrada real para a Geometria".

(Euclides de Alexandria)

RESUMO

Este trabalho é fruto de pesquisas sobre traçados auxiliares em triângulos. O objetivo principal foi investigar literatura de ensino e aprendizagem de geometria para a Educação Básica sobre o tema; e como consequência foi produzido um kit a ser utilizado em laboratório de Matemática destinado ao ensino e aprendizagem de Geometria. Organizamos e apresentamos as técnicas de traçados auxiliares em triângulos descrevendo-as como proposições – criadas para este trabalho – e demonstrando-as em linguagem adequada para os discentes da Educação Básica. Dando sequência, apresentamos resolução de questões por meio destas técnicas. Escolhemos algumas questões para compor o kit desenvolvido durante esta pesquisa com ajuda do software de distribuição gratuita *Blender*, o qual nomeamos como *"Kit de Matemática em Impressora 3D: Problemas de Geometria com Traçados Auxiliares em Triângulos"*. Este kit educacional será disponibilizado gratuitamente em plataformas digitais de recursos educacionais visando fomentar o estudo de geometria e incentivar os professores na produção de material pedagógico como facilitador no processo de aprendizagem. O kit foi planejado para que o aluno resolva questões de geometria sem fazer uso de materiais convencionais como caderno e caneta, mas montando as peças que formam as figuras de cada problema e dialogando com o grupo as medidas de ângulos e congruências de segmentos e triângulos obtidas. Esperamos contribuir nas aulas de Matemática e incentivar a cultura *maker* no ambiente escolar para que os professores sejam produtores de materiais destinados a laboratórios de matemática nas escolas.

Palavras-chave: traçados auxiliares; geometria; laboratório de matemática; impressão 3D.

ABSTRACT

This work is the result of research on auxiliary constructions in triangles. The main objective was to investigate literature on teaching and learning geometry for Basic Education on this topic; as a consequence, a kit was produced for use in a Mathematics laboratory dedicated to teaching and learning Geometry. We organized and presented the techniques of auxiliary constructions in triangles, describing them as propositions – created specifically for this work – and demonstrating them in language suitable for Basic Education students. Furthermore, we provided solutions to problems using these techniques. We selected specific questions to compose the kit developed during this research, with the assistance of the freely distributed software *Blender*, which we named *"3D Printer Mathematics Kit: Geometry Problems with Auxiliary Constructions in Triangles"*. This educational kit will be made available for free on digital platforms for educational resources, aiming to promote the study of geometry and encourage teachers to create pedagogical materials that facilitate the learning process. The kit was designed so that students can solve geometry problems without relying on conventional materials such as notebooks and pens; instead, they assemble the pieces that form the figures for each problem and discuss angle measurements and congruences of segments and triangles within a group. We hope to contribute to Mathematics classes and foster a *maker culture* in the school environment, empowering teachers to create materials for mathematics laboratories in schools.

Keywords: auxiliary constructions; geometry; mathematics laboratory; 3D printing.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Em Matemática, especificamente na resolução de problemas em geometria plana, geralmente buscamos determinar medidas de ângulos ou segmentos em uma figura formada por polígonos. Para obter essas medidas, buscamos relações entre os elementos da figura, tais como: congruência, semelhança, paralelismo, perpendicularidade, etc; e usamos teoremas e propriedades, tais como: teorema do ângulo externo, soma dos ângulos internos de um triângulo, teorema da bissetriz, entre outros. Além disso, em alguns exemplos faz-se necessário construções geométricas básicas utilizando régua e compasso para obter estas relações, tais como: circunferências, ponto médio, bissetriz, mediana, mediatriz, simetria em relação a uma reta, etc. Estes conceitos estão presentes nas literaturas adotadas no Ensino Médio, como em Dante (2016) e Iezzi (2016), e nos cursos de Licenciatura em Matemática, como em Wagner (2007) e Neto (2013).

Há problemas de geometria cuja solução, por mais que busquemos usar os métodos descritos no parágrafo acima, não é possível de obter a solução. Que exigem "traçados auxiliares" para obter a solução: técnicas para adicionar elementos (não convencionais) à figura original modificando-a de modo a obtermos a solução. Estas técnicas denominadas de traçados auxiliares não estão presentes na literatura matemática que compõe as bibliografias dos currículos de Ensino Médio no Brasil, tão pouco na grade curricular da maioria dos cursos de graduação em Matemática.

As técnicas de traçados auxiliares, não só em triângulos[1], são comumente valorizadas em problemas de geometria nas olimpíadas de Matemática desde o Ensino Médio. Podemos dizer que uma questão-problema de traçados auxiliares contém a verdadeira essência da Geometria, pois leva o solucionador a pensar e construir o caminho para resolver o problema. Vai mais além do que aplicar o resultado de um teorema ou resolver um conjunto de equações. No Peru, traçados auxiliares faz parte do currículo de Matemática no Ensino Secundário (relativo ao Ensino Médio no Brasil). Barcena (2009), Bastidas (2017a) e Bastidas (2017b) são exemplos de literatura peruana que abordam especificamente traçados auxiliares em triângulos.

Barcena (2009) descreve e exemplifica sete técnicas de traçados auxiliares para resolver problemas geométricos envolvendo triângulos. A quinta técnica subdividi-se em quatro casos; já a sexta e sétima técnica subdivide-se em dois casos, cada. Assim, podemos considerar como um total de doze técnicas. Além disso, o autor sugere ao leitor uma lista de 110 questões a serem resolvidas por meio destas técnicas de traçados auxiliares.

No Brasil é quase inexistente a literatura e pesquisa voltada ao estudo de traçados auxi-

[1] Há também técnicas de traçados auxiliares em circunferências que exploram propriedades de polígonos inscritíveis e circunscritíveis. A caso de curiosidade, sugiro a referência Barcena (2007) e Junior (2023).

liares. Como bibliografia nacional específica em descrever técnicas de traçados auxiliares só temos o recente lançamento Junior (2023). Nesta obra, o autor organiza seus estudos e pesquisas sobre traçados auxiliares – principalmente em livros peruanos – descrevendo técnicas de traçados auxiliares em triângulos, quadriláteros e circunferências, organizando-as em três categorias: critérios de arranque; critérios de desenvolvimento e critérios de finalização.

Além disso, Junior (2023) apresenta soluções de questões e sugere uma lista de questões a serem resolvidas. Em nossa opinião, essa é uma obra com escritos fantásticos e pioneira no Brasil. Isso nos motivou a pesquisar e produzir material para o fortalecimento dos estudos de Geometria, em especial dos traçados auxiliares em triângulos, na Educação Básica. Pretende-se que os frutos desta pesquisa sejam uma introdução básica para alunos e professores que desejem se aventurar conosco no estudo de traçados auxiliares.

A ideia da pesquisa foi produzir literatura escrita sobre traçados auxiliares em triângulos e um objeto educacional do tipo material concreto para ser utilizado em sala de aula com a finalidade do aluno aprender algumas técnicas de traçados auxiliares ao mesmo tempo que estivesse revisando conceitos de geometria plana do currículo durante a manipulação do material concreto.

Compreendemos o uso de material concreto como ferramenta pedagógica que facilita bastante na compreensão de conceitos matemáticos, pois permite o aluno tocar e manipular representações de objetos abstratos. De acordo com Evangelista & Moura de Oliveira (2021) "a visualização sempre é um importante ingrediente para comunicar a Matemática, seja por meio de figuras ou modelos, é muito importante que exista uma forma de expressar as ideias mesmo antes da apresentação formal da Matemática".

A *cultura maker* tem como ideal que qualquer pessoa possa criar algo. Esta terminologia vem se consolidando desde os anos 2000 quando Dale Dougherty criou uma empresa baseada neste conceito. Seja para criar algo sozinho ou em grupo, para resolver uma problemática ou não, busca-se despertar o sentimento de criador nas pessoas. Geralmente trata-se de criar algum objeto concreto fazendo uso de ferramentas de modelagem, corte, solda, costura, impressão, pintura, robótica, etc. Mas também inclui produtos digitais com programação e modelagem.

A impressão 3D é uma das formas de expressão da *cultura maker*. Ela ganha cada vez mais adeptos pela curiosidade e prazer em modelar e materializar um objeto, e também por se tornar acessível financeiramente os modelos de impressora 3D que utilizam filamento plástico para confeccionar objetos pelo processo de extrusão.

Já há escolas que utilizam a *cultura maker* em sala de aula como ferramenta pedagógica: os alunos produzirem algo e desenvolverem habilidades, competências e atitudes neste processo de criação. As principais ferramentas neste caso são impressoras 3D junto com softwares de modelagem ou bibliotecas digitais com peças prontas para serem impressas, e kits de robótica.

Para Evangelista & Moura de Oliveira (2021) "uma escola com uma impressora 3D seria capaz de construir um repositório de modelos 3D cada vez maior, construído pelos próprios alunos e professores, de forma a constantemente oferecer mais ferramentas para o ensino".

Analisando este cenário, percebemos a vantagem de construir o produto educacional modelando peças que possam ser produzidas em impressora 3D, pois podemos disponibilizar os arquivos digitais para qualquer professor, aluno ou escola realizar o *download* em qualquer lugar e de forma gratuita. Além disso, incentivar que professores ou escolas possam prototipar materiais concretos para compor teu acervo de laboratório de Matemática e compartilhar com outros.

O objetivo geral deste pesquisa foi descrever e exemplificar técnicas de traçados auxiliares em triângulos numa linguagem adequada para alunos da Educação Básica e desenvolver um produto educacional com impressão 3D sobre traçados auxiliares em triângulos relacionado a conteúdos de Geometria na Educação Básica.

Para atingir o objetivo geral traçamos os seguintes objetivos específicos:

- Descrever, por meio de proposições, e demonstrar técnicas de traçados auxiliares em triângulos;
- Exemplificar resolução de questões usando as técnicas de traçados auxiliares em triângulos;
- Idealizar um kit de ensino e aprendizagem, voltado aos discentes da Educação Básica, sobre questões de traçados auxiliares em triângulos, com peças de encaixe confeccionadas em impressora 3D;
- Elaborar manuais com instruções para impressão das peças e aplicação do kit;
- Disponibilizar o kit (modelos das peças e manuais) na plataforma de objetos educacionais eduCAPES.

A metodologia usada na pesquisa foi revisão bibliográfica e prototipagem que seguiram as seguintes etapas:

- Pesquisa bibliográfica sobre traçados auxiliares;
- Elaboração das proposições (técnicas de traçados auxiliares) e resolução de questões;
- Seleção das questões para compor o kit de geometria;
- Modelagem das peças do kit em formato STL;
- Teste das peças do kit em impressora 3D para verificação e ajustes;
- Produção dos manuais do kit.

No capitulo 2, definimos e exemplificamos traçado auxiliar. Em seguida, tomamos como base Barcena (2009) e organizamos as sete técnicas de traçados auxiliares em triângulos por meio de quinze proposições que são enunciadas e demonstradas. Na construção de cada proposição, escrevemos hipótese e tese de modo a utilizar apenas conteúdos matemáticos presentes no currículo da Educação Básica, do mesmo modo na escrita da demonstração de cada proposição. Isso foi necessário e essencial na pesquisa, pois como traçados auxiliares em triângulos não faz parte do currículo da Educação Básica, a ideia é explorar estes conceitos como aplicações dos conteúdos de Geometria que fazem parte do currículo. Desta forma, estamos aumentando a aplicabilidade dos conteúdos de Geometria presentes na grade curricular da Educação Básica e possibilitando uma aprendizagem de Matemática Olímpica.

No capítulo 3, resolvemos questões com base nas proposições do capítulo 2 mantendo a linguagem e o uso de conteúdos de Geometria da Educação Básica. Estas questões foram selecionadas de Barcena (2009) tomando como critério de seleção o nível de complexidade adequado à Educação Básica e visando que este trabalho seja um material de introdução aos estudos de traçados auxiliares. Também tomemos como critério a análise das figuras associadas ao enunciado e resolução da questão: construindo (no *GeoGebra*) e verificando se as figuras não apresentavam medidas de ângulos e segmentos pequenas, e nem muitos elementos sobrepostos que dificultassem a visualização.

Já no capítulo 4, exploramos a resolução de duas questões de olimpíadas de Matemática por meio de traçados auxiliares alinhados com os conteúdos da Educação Básica.

Buscamos escrever de forma detalhada cada argumentação nas proposições, demonstrações, observações e questões dos capítulos 2, 3 e 4 fazendo uso de figuras para interligar a *mágica* que existe entre o concreto e o abstrato na Geometria.

Como objeto educacional voltado ao ensino e à aprendizagem de Matemática na Educação Básica, apresentamos no capítulo 5 a prototipagem – com o software de modelagem 3D *Blender* de distribuição gratuita e impressora 3D – de um kit de Geometria para uso em laboratório de Matemática. O kit trata-se de quatro questões sobre traçados auxiliares em triângulos e mais três manuais que serão disponibilizados futuramente na plataforma de objetos educacionais eduCAPES (https://educapes.capes.gov.br) pela curadoria do PROFMAT da UEPB. Nos manuais consta instruções com medidas para realizar a impressão das peças e sugestão de sequência didática para utilizar em sala de aula.

No capítulo 6, relatamos nossas considerações finais sobre a pesquisa e escrita deste trabalho, afirmando-o como uma ferramenta que poderá contribuir significativamente no ensino e aprendizagem de Matemática na Educação Básica.

2 TÉCNICAS DE TRAÇADOS AUXILIARES EM TRIÂNGULOS

Neste capítulo, inicialmente vamos compreender o que é um traçado auxiliar em Geometria por meio de uma definição e exemplificação. Em seguida, baseado nos escritos de Barcena (2009), descrevemos as técnicas de traçados auxiliares em triângulos por meio de quinze proposições que foram construídas ao longo de nossa pesquisa com conceitos de Geometria do currículo da Educação Básica. Em cada proposição a hipótese é composta por uma descrição de uma figura inicial (identifica características de lados e ângulos que a figura inicial deve ter para podermos aplicar a técnica) mais os traçados auxiliares que adicionaremos à figura inicial, e a tese trata-se de congruências e medidas que podemos obter usando os traçados auxiliares e a figura inicial.

A escrita do enunciado e da demonstração de cada proposição foi realizada com a finalidade de apresentar estas técnicas com mais clareza e adequação para o nível do Ensino Médio (adequando-se também aos anos finais do Ensino Fundamental). Desta forma, os enunciados e demonstrações fazem uso apenas dos seguintes conceitos básicos:

- bissetriz interna de um ângulo;
- mediatriz de um segmento;
- teorema do ângulo externo;
- soma dos ângulos internos de um triângulo;
- características de um triângulo isósceles;
- características de um triângulo equilátero;
- casos de congruência de triângulos (L.L.L, A.L.A e L.A.L);
- simétrico de um ponto em relação a uma reta;
- triângulo retângulo notável com ângulos de 30° e 60°.

Além disso, padronizamos as cores preto, vermelho e verde nas figuras de modo que em cada proposição:

- na cor preta temos pontos, segmentos de reta, ângulos e indicadores de congruências da figura inicial na hipótese da proposição;

- na cor vermelha temos pontos e segmentos de reta que são traçados auxiliares adicionados à figura inicial na hipótese da proposição;

- na cor verde temos ângulos e indicadores de congruência que obtemos na demonstração da tese da proposição após adicionados os traçados auxiliares.

Ao final de cada proposição escrevemos uma observação ilustrada por meio de uma figura que fornece todas as medidas, congruências e outras relações entre os objetos geométricos da proposição. A finalidade destas observações é facilitar a visualização e aplicação das proposições ao resolver questões-problemas.

Os nomes das sete técnicas foram elaborados relacionado com as características das proposições construídas. Mantemos a mesma nomenclatura presente em Barcena (2009) apenas nas técnicas 2.3 e 2.4.

2.1 Traçado auxiliar

Imaginemos resolvendo um problema de Geometria que só com os elementos presentes da figura relacionada ao enunciado do problema não conseguimos determinar tal solução. Por mais que usemos os teoremas e propriedades presentes no estudo em questão que relacione pontos, segmentos de reta e ângulos, ainda assim não obtemos tal solução. Para determinar a solução do problema é necessário adicionar elementos (pontos, segmentos de reta e ângulos) que não pertenciam ao enunciado do problema. Estes elementos adicionados são o que entendemos como traçados auxiliares.

Definição 2.1 (Traçado auxiliar)**.** Em um problema de Geometria, um traçado auxiliar trata-se de um elemento geométrico que deve ser adicionado à figura inicial do enunciado do problema de modo a contribuir significativamente na resolução.

Temos como traçados auxiliares convencionais: ponto médio, bissetriz, mediana, mediatriz, pontos notáveis de um triângulo (incentro, baricentro, circuncentro e ortocentro). Quando estudamos Geometria Euclidiana Plana, na Educação Básica ou em um curso de graduação, fazemos uso de alguns destes traçados auxiliares. Por exemplo, para provar que em um triângulo isósceles os ângulos da base são congruentes, podemos tomar o ponto médio da base e o segmento que parte dele até o terceiro vértice do triângulo como traçados auxiliares, conforme detalhamos a seguir.

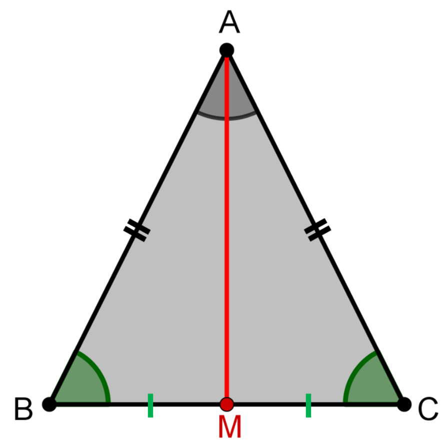
Definição 2.2 (Triângulo isósceles)**.** Seja um triângulo ABC de modo que $\overline{AB} = \overline{AC}$. Definimos tal triângulo como triângulo isósceles por ter dois lados iguais e denominamos o lado $\overline{BC}$ como base.

Proposição 2.1. *Se o triângulo ABC é um triângulo isósceles de base $\overline{BC}$ ($\overline{AB} = \overline{AC}$). Então, $A\widehat{B}C = A\widehat{C}B$.*

Demonstração.

Seja o triângulo ABC isósceles de base $\overline{BC}$ e tomemos M como sendo o ponto médio do lado $\overline{BC}$, conforme figura 2.1.

Figura 2.1 – Parte 1 da demonstração da proposição 2.1



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Podemos verificar que os triângulos ABM e ACM são congruentes pelo caso L.L.L. de congruência de triângulos:

$$\begin{cases} \overline{AB} = \overline{AC}, \text{ pois o triângulo } ABC \text{ é isósceles de base } \overline{BC} \\ \overline{AM} \text{ é lado comum de } ABM \text{ e } ACM \\ \overline{BM} = \overline{CM}, \text{ pois } M \text{ é ponto médio do lado } \overline{BC} \end{cases} \quad \overset{LLL}{\Longrightarrow} \quad ABM \equiv ACM$$

Pela congruência $ABM \equiv ACM$ segue que $A\widehat{B}M = A\widehat{C}M$.

■

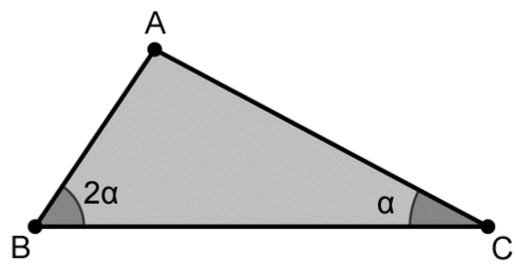
2.2 Técnica 1: Cevianas em triângulo com ângulos de razão de 1:2

A primeira técnica de traçados auxiliares em triângulos tem por objetivo construir triângulos isósceles se a figura inicial do problema for: um triângulo que tem dois ângulos internos na razão de 1:2. Para isso, esta técnica consiste em traçar uma ceviana interna (ou externa) partindo do vértice do terceiro ângulo do triângulo e com medida igual ao menor lado (ou maior lado) que forma este terceiro ângulo.

Proposição 2.2. *Seja o triângulo ABC que tem os ângulos internos agudos $A\widehat{B}C = 2\alpha$ e $A\widehat{C}B = \alpha$, como ilustra a figura 2.2. Se traçarmos a ceviana interna $\overline{AI}$ e a ceviana externa*

$\overline{AE}$ (estando E e I sobre a reta $\overleftrightarrow{BC}$) de modo que $A\widehat{I}B = 2\alpha$ e $A\widehat{E}B = \alpha$, então obteremos os triângulos isósceles ABI, AEC, AEB e ACI de base $\overline{BI}$, $\overline{EC}$, $\overline{AE}$ e $\overline{AC}$, respectivamente.

Figura 2.2 – Triângulo ABC referente à proposição 2.2

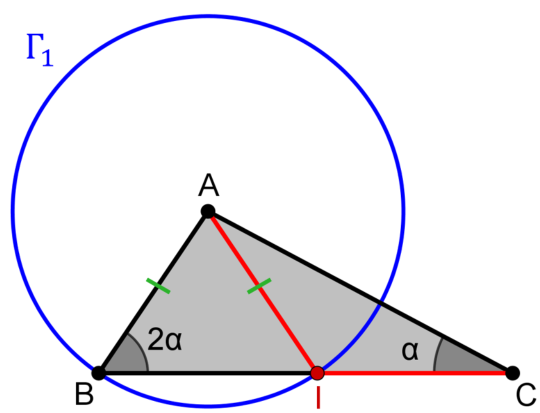


Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Demonstração.

Para construir a ceviana interna, de acordo com o enunciado da proposição 2.2, centramos o compasso em A e com raio $\overline{AB}$ traçamos o círculo Γ_1. Depois tomamos $I = \overline{BC} \cap \Gamma_1$, como ilustra a figura 2.3.

Figura 2.3 – Parte 1 da demonstração da proposição 2.2



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

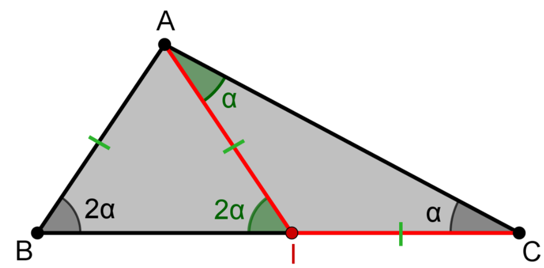
Desta construção temos $\overline{AI} = \overline{AB}$ já que são raios de Γ_1. Assim, segue que o triângulo ABI é isósceles de base $\overline{BI}$. Logo, $A\widehat{I}B = A\widehat{B}I = 2\alpha$.

Pelo teorema do ângulo externo, no triângulo AIC, a medida do ângulo externo $A\widehat{I}B$ é a soma das medidas dos ângulos internos $I\widehat{A}C$ e $I\widehat{C}A$, de modo que:

$$\begin{aligned} A\widehat{I}B &= I\widehat{A}C + I\widehat{C}A \\ 2\alpha &= I\widehat{A}C + \alpha \\ \alpha &= I\widehat{A}C \end{aligned}$$

Deste modo, provado que $I\widehat{A}C = I\widehat{C}A = \alpha$, concluímos que AIC é um triângulo isósceles de base $\overline{AC}$. E segue que $\overline{AI} = \overline{IC}$, como ilustra a figura 2.4.

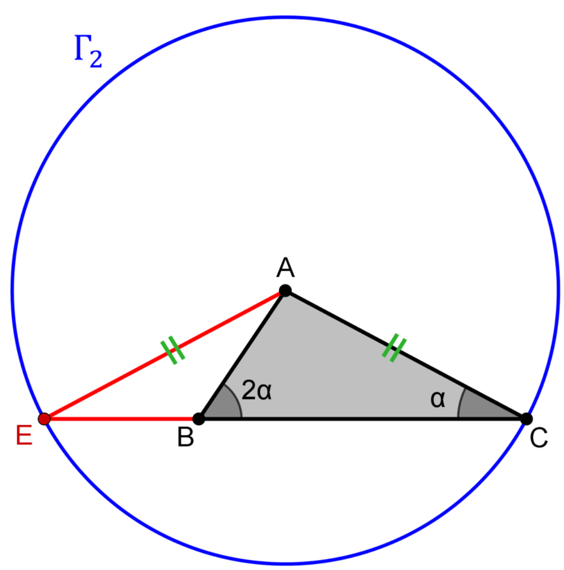
Figura 2.4 – Parte 2 da demonstração da proposição 2.2



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Para construir a ceviana externa, de acordo com o enunciado da proposição 2.2, centramos o compasso em A e com raio $\overline{AC}$ traçamos o círculo Γ_2. Depois tomamos $E = \overleftrightarrow{BC} \cap \Gamma_2$, conforme figura 2.5.

Figura 2.5 – Parte 3 da demonstração da proposição 2.2



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

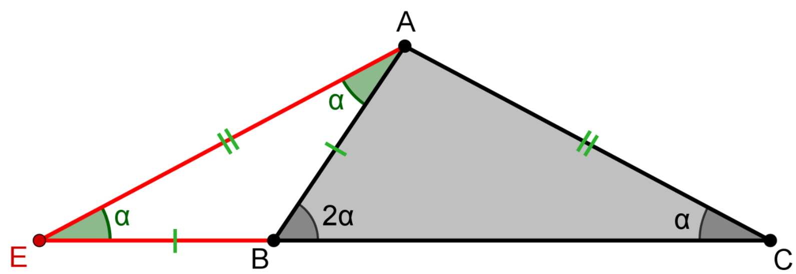
Desta construção temos $\overline{AE} = \overline{AC}$ já que são raios de Γ_2. Assim, segue que AEC é um triângulo isósceles de base $\overline{EC}$. Logo, $A\widehat{E}C = A\widehat{C}E = \alpha$.

Pelo teorema do ângulo externo, no triângulo ABE, a medida do ângulo externo $A\widehat{B}C$ é a soma das medidas dos ângulos internos $B\widehat{A}E$ e $B\widehat{E}A$, de modo que:

$$
\begin{aligned}
A\widehat{B}C &= B\widehat{A}E + B\widehat{E}A \\
2\alpha &= B\widehat{A}E + \alpha \\
\alpha &= B\widehat{A}E
\end{aligned}
$$

Deste modo, provado que $B\widehat{A}E = B\widehat{E}A = \alpha$, concluímos que ABE é um triângulo isósceles de base $\overline{AE}$ e segue que $\overline{BA} = \overline{BE}$, como ilustra a figura 2.6.

Figura 2.6 – Parte 4 da demonstração da proposição 2.2

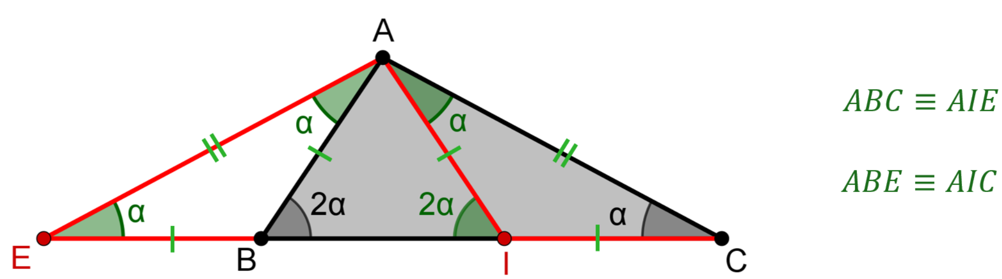


Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

■

Observação 2.1. *Em resumo, o enunciado e a demonstração da proposição 2.2 estabelece as congruências de ângulos, triângulos e segmentos expressas na figura 2.7 que podemos usar para resolver problemas propostos:*

Figura 2.7 – Elementos congruentes no triângulo ABC da proposição 2.2



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Na proposição 2.2 é exigido que os dois ângulos do triângulo ABC que estão na razão de 1:2 sejam agudos, ou seja, $A\widehat{B}C = 2\alpha < 90°$ e $A\widehat{C}B = \alpha < 90°$. Isso é necessário para podermos traçar a ceviana interna $\overline{AI}$ e implica que $\alpha < 45°$. Vamos provar isso usando a técnica de redução ao absurdo! Suponhamos que $\alpha \geqslant 45°$ e assim teríamos $A\widehat{B}C = 2\alpha \geqslant 90°$. Daí, como $A\widehat{B}C = A\widehat{I}B$, segue pela soma dos ângulos internos do triângulo ABI que:

$$\begin{aligned} \alpha &\geqslant 45° \\ 4\alpha &\geqslant 180° \\ 4\alpha &\geqslant B\widehat{A}I + A\widehat{B}I + A\widehat{I}B \\ 4\alpha &\geqslant B\widehat{A}I + \ 2\alpha \ + \ 2\alpha \\ 4\alpha - 4\alpha &\geqslant B\widehat{A}I \\ 0° &\geqslant B\widehat{A}I \end{aligned}$$

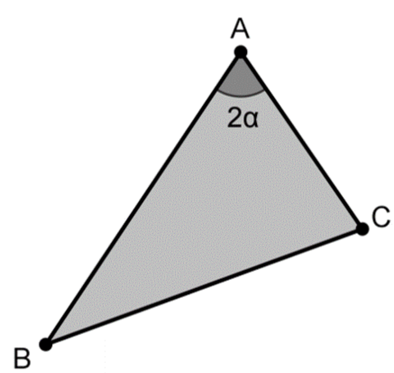
Mas $B\widehat{A}I \leqslant 0°$ é um absurdo já que $B\widehat{A}I$ é um ângulo do triângulo ABI.

2.3 Técnica 2: Completando um triângulo isósceles

A segunda técnica de traçados auxiliares em triângulos tem por objetivo construir um triângulo isósceles se a figura inicial do problema for: um triângulo qualquer. Para isso, dado os dois lados do triângulo, prolongamos o lado menor até obtermos um segmento de medida igual ao segundo lado.

Proposição 2.3. *Seja o triângulo ABC com $\overline{AC} < \overline{AB}$ e $B\widehat{A}C = 2\alpha$, como ilustra a figura 2.8. Se tomarmos o ponto D sobre a semirreta $\overrightarrow{AC}$ de modo que $\overline{AD} = \overline{AB}$, então obteremos o triângulo ABD isósceles de base $\overline{BD}$ e $ABM \equiv ADM$, onde M é ponto médio de $\overline{BD}$.*

Figura 2.8 – Triângulo ABC referente à proposição 2.3

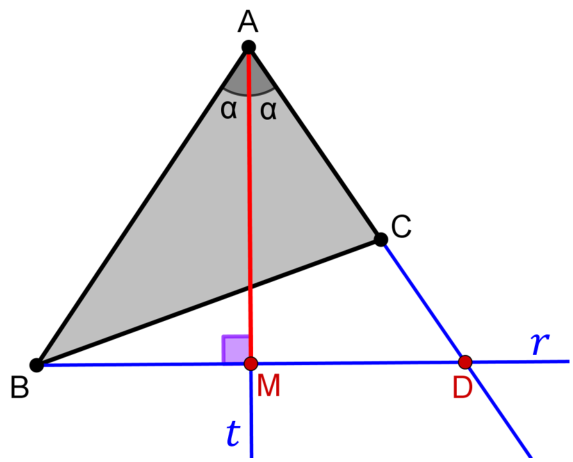


Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Demonstração.

Traçamos a reta t sendo a bissetriz interna de $B\widehat{A}C$. Traçamos também a reta r de modo que r contém o ponto B e $r \perp t$. Denotamos por M o ponto de interseção entre t e r. E prolongamos a semirreta $\overrightarrow{AC}$ de modo a obtermos o ponto D como interseção entre r e $\overrightarrow{AC}$, conforme a figura 2.9.

Figura 2.9 – Traçado de D e M referente à proposição 2.3



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Vamos agora mostrar que D e M são os pontos procurados para que o triângulo ABD seja isósceles de base $\overline{BD}$ e M ponto médio de $\overline{BD}$.

Notemos que os triângulos ABM e ADM são congruentes pelo caso A.L.A. de congruência de triângulos:

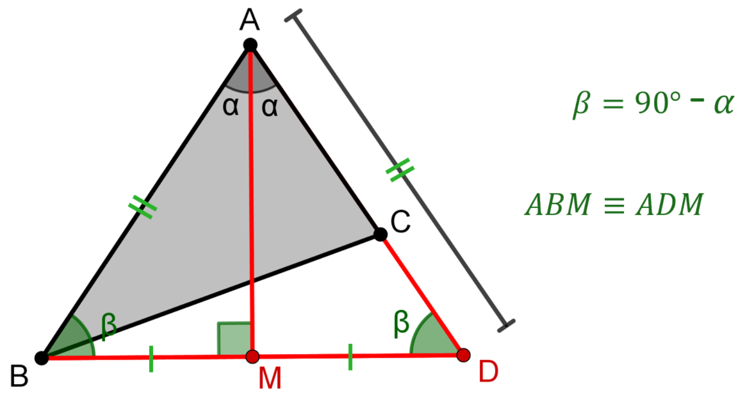
$$\begin{cases} B\widehat{A}M = \alpha = D\widehat{A}M, \text{ pois } \overline{AM} \text{ é bissetriz de } \widehat{A} \\ \overline{AM} \text{ é lado comum de } ABM \text{ e } ADM \\ B\widehat{M}A = 90^\circ = D\widehat{M}A, \text{ pois } t \perp r \text{ em } M \end{cases} \quad \overset{ALA}{\Longrightarrow} \quad ABM \equiv ADM$$

Desta congruência segue que $\overline{AB} = \overline{AD}$, e assim ABD é um triângulo isósceles de base $\overline{BD}$. E segue também que $\overline{BM} = \overline{DM}$, logo M é ponto médio de $\overline{BD}$.

$\blacksquare$

Observação 2.2. *Em resumo, o enunciado e a demonstração da proposição 2.3 estabelece as congruências de ângulos, triângulos e segmentos expressas na figura 2.10 que podemos usar para resolver problemas propostos:*

Figura 2.10 – Elementos congruentes no triângulo ABD da proposição 2.3



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

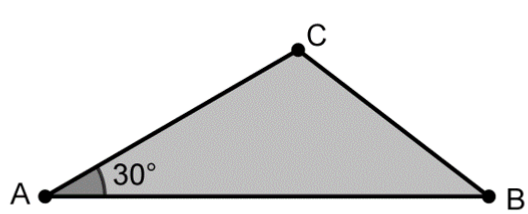
Em questões de geometria com traçados auxiliares é comum encontrarmos (ou termos que esboçar) triângulo isósceles do tipo visto na observação 2.2: com ângulos de medidas 2α e $90° - \alpha$. No caso I da técnica 6 de traçados auxiliares (descrito na seção 2.7) surge também este tipo de triângulo; dentro de outro triângulo isósceles com ângulos da base medindo 2α.

2.4 Técnica 3: Completando um triângulo equilátero

A terceira técnica de traçados auxiliares em triângulos tem por objetivo construir um triângulo equilátero se a figura inicial do problema for: um triângulo com um dos ângulos internos medindo 30°. Para isso, esta técnica consiste em tomar o simétrico de um dos pontos do triângulo que não é vértice do ângulo de 30° em relação à reta que contem o outro lado do triângulo adjacente ao ângulo de 30°, ou seja, um dos lados que forma o ângulo de 30° será a bissetriz de 60° e o outro lado será um dos lados do triângulo equilátero a ser formado.

Proposição 2.4. *Seja o triângulo ABC com $B\widehat{A}C = 30°$, conforme figura 2.11. Se tomarmos o ponto D como sendo o simétrico de B em relação a reta $\overleftrightarrow{AC}$, então o triângulo ABD é equilátero. Além disso, temos que o triângulo BCD é isósceles de base $\overline{BD}$ e $ABC \equiv ADC$.*

Figura 2.11 – Triângulo ABC referente à proposição 2.4

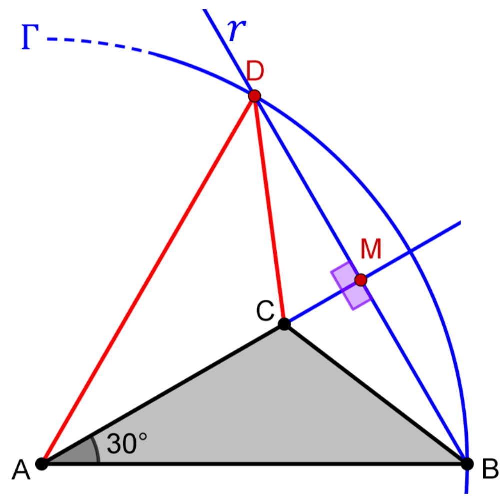


Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Demonstração.

Para esboçarmos o ponto D como simétrico de B em relação à reta $\overleftrightarrow{AC}$, tomamos a circunferência Γ de centro em A e raio $\overline{AB}$ e a reta r que contém o ponto B e é perpendicular à semirreta $\overrightarrow{AC}$, como ilustra a figura 2.12. Vamos provar que $\{D\} = r \cap \Gamma$ é o ponto procurado para que o triângulo ABD seja equilátero.

Figura 2.12 – Parte 1 da demonstração da proposição 2.4



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

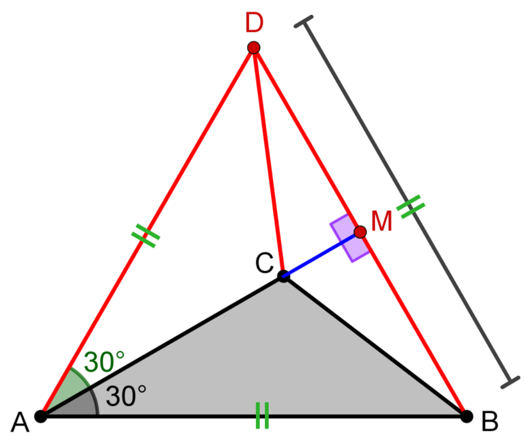
Como $r \perp \overleftrightarrow{AC}$ em M, então ABM é um triângulo retângulo e segue pela soma dos seus ângulos internos que:

$$\begin{aligned} A\widehat{B}M + B\widehat{A}M + A\widehat{M}B &= 180^\circ \\ A\widehat{B}M \ + \ 30^\circ \ + \ 90^\circ &= 180^\circ \\ A\widehat{B}M &= 60^\circ \end{aligned}$$

Notemos que $\overline{AD} = \overline{AB}$, pois são raios de Γ. Assim, o triângulo ABD é isósceles de base $\overline{BD}$ e isso implica em $A\widehat{D}B = A\widehat{B}D = A\widehat{B}M = 60^\circ$. Agora, pela soma dos ângulos internos do triângulo ABD concluímos que $B\widehat{A}D = 60^\circ$. Portanto, ABD possui os três ângulos medindo 60°, ou seja, é equilátero. Daí, segue que $D\widehat{A}C = B\widehat{A}C$, como ilustra a figura 2.13:

$$D\widehat{A}C = D\widehat{A}B - B\widehat{A}C = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ = B\widehat{A}C$$

Figura 2.13 – Parte 2 da demonstração da proposição 2.4



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Observamos que $ABC \equiv ADC$ pelo caso LAL de congruência de triângulos:

$$\begin{cases} \overline{AD} = \overline{AB} \\ C\widehat{A}D = 30^\circ = C\widehat{A}B \\ \overline{AC} \text{ é lado comum de } ABC \text{ e } ADC \end{cases} \quad \overset{LAL}{\Longrightarrow} \quad ABC \equiv ADC$$

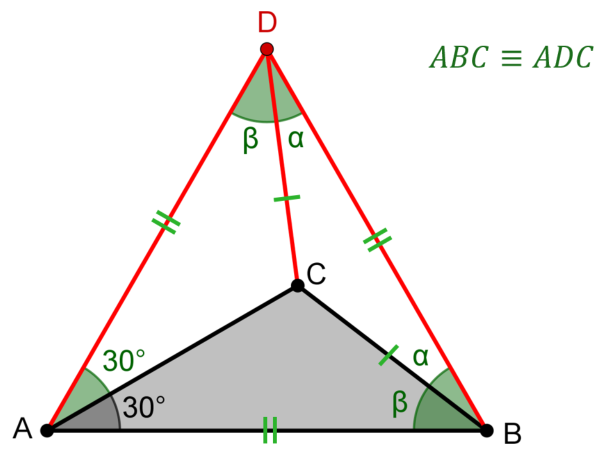
Desta congruência segue que $\overline{CB} = \overline{CD}$ e isso implica que o triângulo BCD é isósceles de base $\overline{BD}$. Consequentemente, $C\widehat{B}D = C\widehat{D}B$.

Decorre ainda desta congruência que $A\widehat{D}C = A\widehat{B}C$.

■

Observação 2.3. *Em resumo, o enunciado e a demonstração da proposição 2.4 estabelece as congruências de ângulos, triângulos e segmentos expressas na figura 2.14 que podemos usar para resolver problemas propostos:*

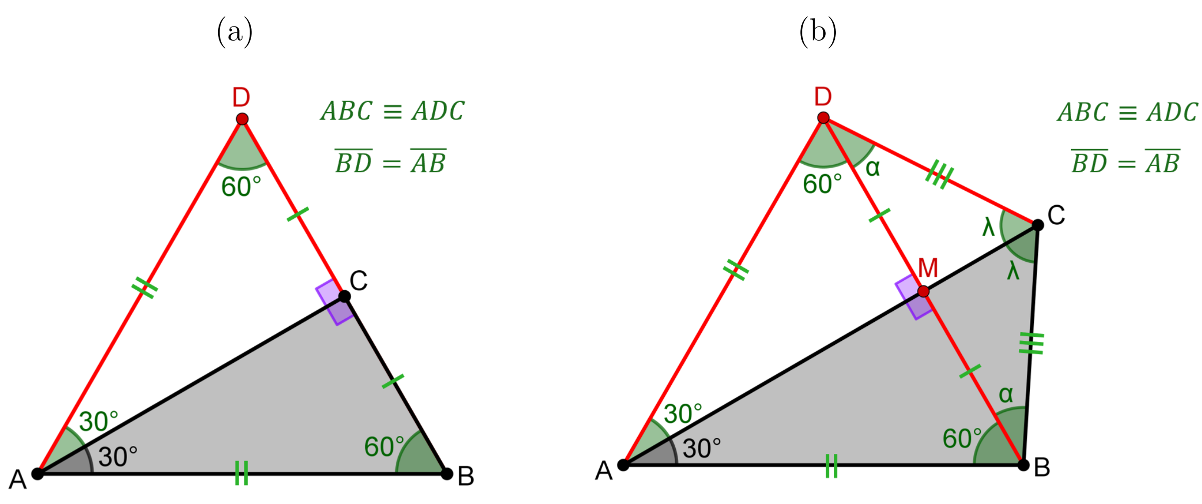
Figura 2.14 – Elementos congruentes no triângulo ABD da proposição 2.4



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Vale ressaltar que nas figuras 2.11, 2.12, 2.13 e 2.14 – referentes à proposição 2.4 – o ponto C está esboçado de modo que o ângulo $A\widehat{B}C$ seja menor do que 60°. No caso de $A\widehat{B}C = 60°$, temos que C e M coincidem, e assim não existiria o triângulo BCD, conforme ilustra a figura 2.15(a). Já no caso de $A\widehat{B}C > 60°$, temos que C se encontra no exterior do triângulo equilátero ABD, mas mesmo assim o triângulo BCD continua isósceles de base $\overline{BD}$, conforme ilustra a figura 2.15(b).

Figura 2.15 – Possibilidade de $A\widehat{B}C \geqslant 60$ na proposição 2.4



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

2.5 Técnica 4: Três triângulos retângulos congruentes em um quadrilátero

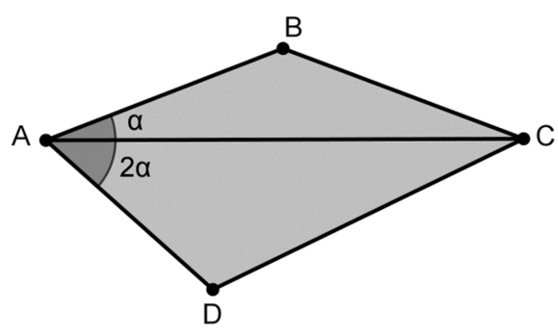
A quarta técnica de traçados auxiliares em triângulos tem por objetivo construir três triângulos retângulos congruentes se a figura inicial do problema for: um quadrilátero convexo em que uma de suas diagonais divide um dos ângulos em dois de razão 1:2. Para isso, esta técnica consiste em tomar a diagonal (que divide o ângulo em dois de medidas α e 2α) para ser a hipotenusa de dois dos triângulos retângulos justapostos a serem traçados, e tomar também a bissetriz interna do ângulo que mede 2α para ser um cateto do terceiro triângulo retângulo a ser traçado.

Proposição 2.5. *Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo, tal que sua diagonal $\overline{AC}$ divide o ângulo $B\widehat{A}D$ na razão $1:2$, assim consideremos $B\widehat{A}C = \alpha$ e $C\widehat{A}D = 2\alpha$, conforme a figura 2.16. Se tomarmos os pontos M, P e Q, tais que:*

- *$\{M\} = t \cap r$, onde t é a bissetriz interna de $C\widehat{A}D$, e $r \perp t$ com $C \in r$;*
- *$\{P\} = r \cap \overrightarrow{AD}$;*
- *$\{Q\} = s \cap \overrightarrow{AB}$, onde $s \perp \overrightarrow{AB}$ com $C \in s$.*

Então, APM, ACM e ACQ são triângulos retângulos congruentes.

Figura 2.16 – Quadrilátero $ABCD$ referente à proposição 2.5

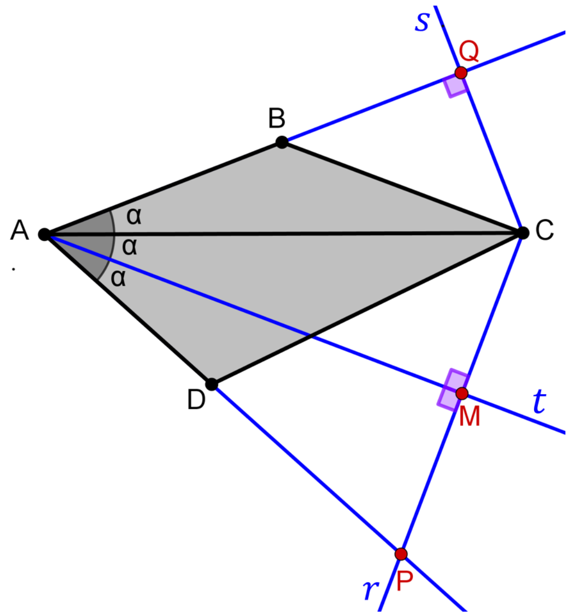


Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Demonstração.

Inicialmente, traçamos t, r, s, M, P e Q de acordo com o enunciado da proposição 2.5, como ilustra a figura 2.17.

Figura 2.17 – Traçado de P, Q e M referente à proposição 2.5



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Notemos que APM e ACM são congruentes pelo caso A.L.A. de congruência de triângulos:

$$\begin{cases} P\widehat{A}M = \alpha = C\widehat{A}M, \text{ pois } \overline{AM} \text{ é bissetriz de } P\widehat{A}C = 2\alpha \\ \overline{AM} \text{ é lado comum de } APM \text{ e } ACM \\ A\widehat{M}P = 90° = A\widehat{M}C, \text{ pois } \overline{AM} \perp \overline{PC} \end{cases} \quad \overset{ALA}{\Longrightarrow} \quad APM \equiv ACM$$

Os ângulos $A\widehat{C}M$ e $A\widehat{C}Q$ são congruentes, pois ambos são complementos de um ângulo de medida α em triângulos retângulos:

- $A\widehat{C}M$ e $C\widehat{A}M$ são ângulos complementares no triângulo retângulo ACM, logo:

$$\begin{aligned} A\widehat{C}M + C\widehat{A}M &= 90° \\ A\widehat{C}M + \alpha &= 90° \\ A\widehat{C}M &= 90° - \alpha \end{aligned}$$

- $A\widehat{C}Q$ e $C\widehat{A}Q$ são ângulos complementares no triângulo retângulo ACQ, logo:

$$\begin{aligned} A\widehat{C}Q + C\widehat{A}Q &= 90° \\ A\widehat{C}Q + \alpha &= 90° \\ A\widehat{C}Q &= 90° - \alpha \end{aligned}$$

Observemos que os triângulos ACM e ACQ também são congruentes pelo caso A.L.A. de congruência de triângulos:

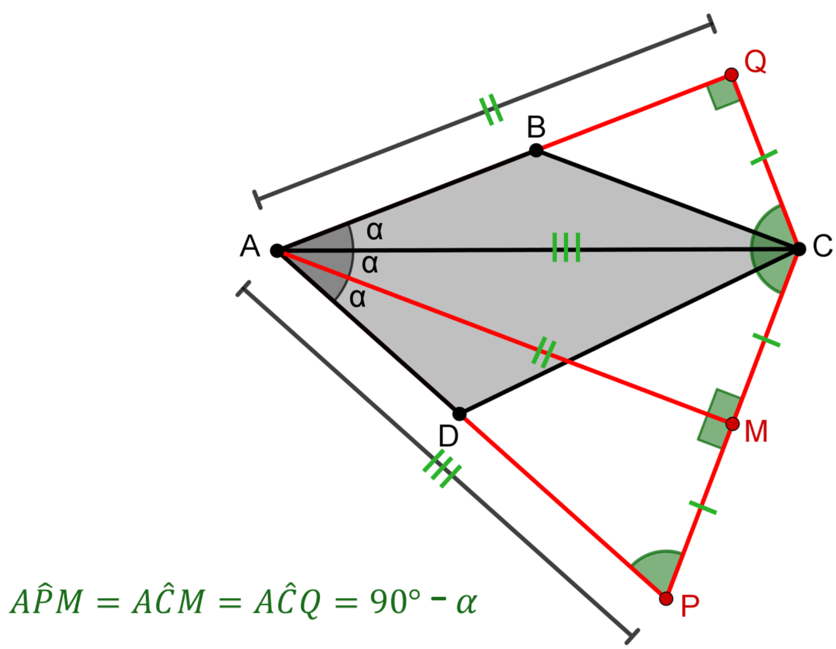
$$\begin{cases} C\widehat{A}M = \alpha = C\widehat{A}Q \\ \overline{AC} \text{ é lado comum de } ACM \text{ e } ACQ \\ A\widehat{C}M = 90^\circ - \alpha = A\widehat{C}Q \end{cases} \qquad \overset{ALA}{\Longrightarrow} \qquad ACM \equiv ACQ$$

Concluímos, por transitividade, que $APM \equiv ACM \equiv ACQ$. Estas congruências implicam em $\overline{PM} = \overline{CM} = \overline{CQ}$, $\overline{AP} = \overline{AC}$ e $\overline{AM} = \overline{AQ}$.

■

Observação 2.4. *Em resumo, o enunciado e a demonstração da proposição 2.5 estabelece as congruências de ângulos, triângulos e segmentos expressas na figura 2.18 que podemos usar para resolver problemas propostos:*

Figura 2.18 – Elementos congruentes nos triângulos APM, ACM e ACQ da proposição 2.5



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Ao usar a proposição 2.5 para resolver questões, geralmente estamos interessado nas medidas dos ângulos e segmentos dos triângulos BCQ e CDP.

2.6 Técnica 5: Traçados de triângulos congruentes

A quinta técnica de traçados auxiliares em triângulos tem como objetivo principal construir triângulos congruentes a partir de um triângulo inicial. Analisando Barcena (2009) verifica-se que tem quatro casos descritos no critério 5. Os casos I e II tratam de mostrar que o triângulo inicial de um problema é isósceles se ele possui uma ceviana interna que gera segmentos e ângulos com algumas características a serem observadas.

No caso III, a ideia é partir da mediatriz interna de um dos lados do triângulo inicial e obter nesta mediatriz um ponto D que além de formar com este lado um triângulo isósceles (o que ocorre pela característica de D pertencer a mediatriz), quando traçado o segmento de D ao terceiro vértice do triângulo inicial, este segmento divida este ângulo do triângulo inicial de modo que uma das partes tenha a mesma medida dos ângulos congruentes do triângulo isósceles. A partir daí, podemos obter um novo triângulo isósceles congruente ao anterior.

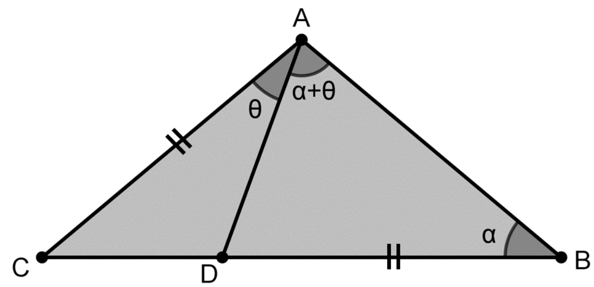
Já no caso IV, a ideia é partir de um triângulo retângulo e isósceles, e tomar um ponto D em seu interior com o objetivo de obter dois triângulos congruentes: um interno formado com um dos catetos e D, e outro externo formado pelo outro cateto e uma rotação de D em $90°$ em relação ao vértice do ângulo reto.

A ideia destes quatro casos de traçados auxiliares não é diretamente resolver questões usando-os. Mas aprender possibilidades de obter triângulos congruentes, como traçados auxiliares, partindo de cevianas que geram ângulos congruentes. Isso fica evidente ao tentarmos resolver questões que dificilmente se encaixam nos quatro casos desta técnica, mas que usam esta ideia de traçar cevianas internas para obter ângulos congruentes.

Descrevemos a seguir as ideias por trás destes quatro casos em cinco proposições que possam instigar a criatividade em obtermos triângulos congruentes ao resolver questões com traçados auxiliares quando as outras técnicas não se aplicam. Relembrando que não identificamos a aplicação direta destas proposições na resolução de questões, mas elas nos ajudam a ver possibilidades de obtermos triângulos congruentes por meio do traçado de cevianas.

Proposição 2.6. *Seja ABC um triângulo e D um ponto sobre o lado $\overline{BC}$, tal que $\overline{AC} = \overline{BD}$, $A\widehat{B}C = \alpha$, $C\widehat{A}D = \theta$ e $B\widehat{A}D = \alpha + \theta$, conforme figura 2.19. Se tomarmos o ponto P sobre o lado $\overline{AB}$ de modo que $B\widehat{D}P = \theta$, então $ACD \equiv DBP$ e o triângulo ABC é isósceles de base $\overline{BC}$.*

Figura 2.19 – Triângulo ABC referente à proposição 2.6



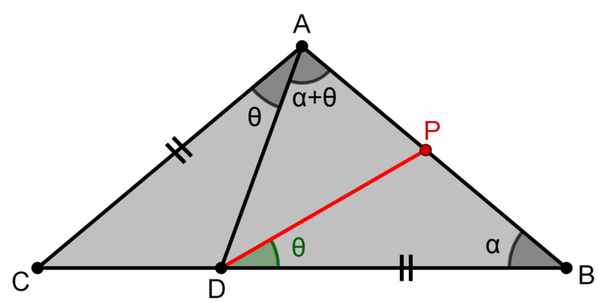
Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Demonstração.

Traçamos P e o segmento $\overline{DP}$ de acordo com o enunciado da proposição 2.6 para termos o ângulo $B\widehat{D}P = \theta$, como ilustra a figura 2.20. Notemos que realmente é possível realizar tal traçado, pois pelo teorema do ângulo externo, no triângulo ACD, temos que, $B\widehat{D}A > \theta$:

$$
\begin{aligned}
B\widehat{D}A &= D\widehat{A}C + D\widehat{C}A \\
B\widehat{D}A &= \theta \ + D\widehat{C}A \\
B\widehat{D}A &> \theta
\end{aligned}
$$

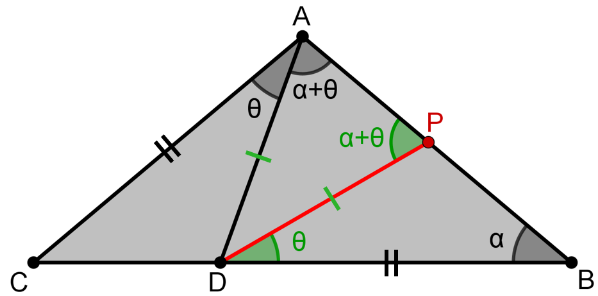
Figura 2.20 – Parte 1 da demonstração da proposição 2.6



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Pelo teorema do ângulo externo no triângulo BDP, temos $A\widehat{P}D = P\widehat{B}D + P\widehat{D}B = \alpha + \theta$. Assim, concluímos que $A\widehat{P}D = \alpha + \theta = P\widehat{A}D$ e segue que o triângulo ADP é isósceles de base $\overline{AP}$. Consequentemente ocorre que $\overline{AD} = \overline{PD}$, como ilustra a figura 2.21.

Figura 2.21 – Parte 2 da demonstração da proposição 2.6



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Agora podemos verificar que os triângulos ACD e DBP são congruentes pelo caso L.A.L. de congruência de triângulos:

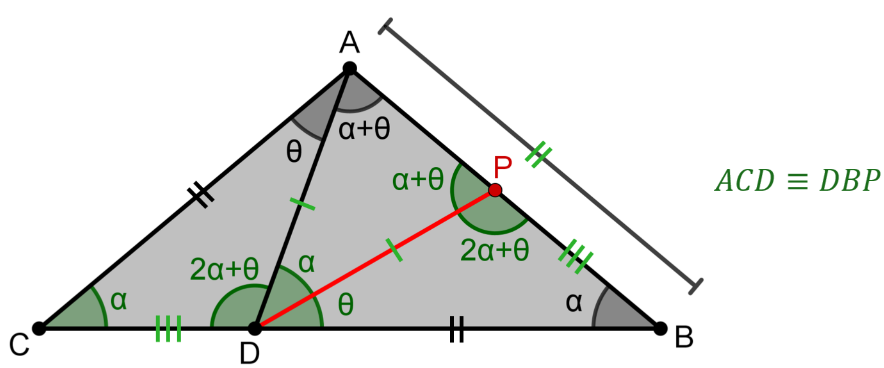
$$\begin{cases} \overline{AC} = \overline{DB} \\ C\widehat{A}D = \theta = B\widehat{D}P \\ \overline{AD} = \overline{DP} \end{cases} \qquad \overset{LAL}{\Longrightarrow} \qquad ACD \equiv DBP$$

Desta congruência de triângulos segue que $A\widehat{C}B = A\widehat{C}D = D\widehat{B}P = A\widehat{B}C$. Portanto, o triângulo ABC é isósceles de base $\overline{BC}$.

■

Observação 2.5. *Em resumo, o enunciado e a demonstração da proposição 2.6 estabelece as congruências de ângulos, triângulos e segmentos expressas na figura 2.22 que podemos usar para resolver problemas propostos:*

Figura 2.22 – Elementos congruentes no triângulo ABC da proposição 2.6

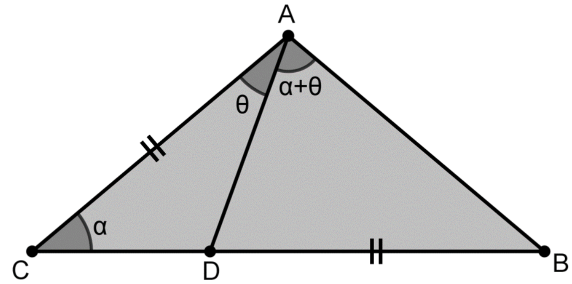


Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Podemos reescrever a proposição 2.6 trocando apenas na hipótese a condição do ângulo $A\widehat{B}C = \alpha$ pelo ângulo $A\widehat{C}B = \alpha$. Vamos enunciar isso e provar na proposição 2.7 a seguir.

Proposição 2.7. *Seja ABC um triângulo e D um ponto sobre o lado $\overline{BC}$ tal que $\overline{AC} = \overline{BD}$, $A\widehat{C}B = \alpha$, $C\widehat{A}D = \theta$ e $B\widehat{A}D = \alpha + \theta$, conforme a figura 2.23. Se tomarmos o ponto P sobre o lado $\overline{AB}$ de modo que $B\widehat{D}P = \theta$, então $ACD \equiv DBP$ e ABC é isósceles de base $\overline{BC}$.*

Figura 2.23 – Triângulo ABC referente à proposição 2.7



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

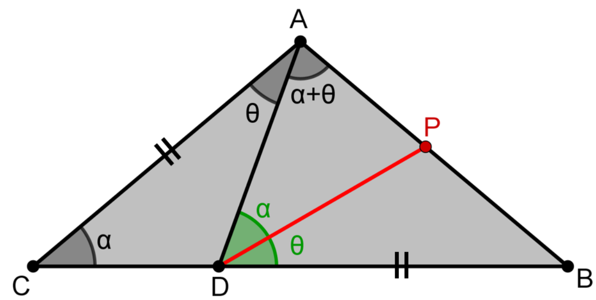
Demonstração.

Traçamos o ponto P e o segmento $\overline{DP}$ de acordo com o enunciado da proposição 2.6 para que o ângulo $B\widehat{D}P = \theta$, como ilustra a figura 2.24. Note que realmente é possível realizar tal traçado, pois pelo teorema do ângulo externo no triângulo ACD temos $B\widehat{D}A > \theta$:

$$\begin{aligned} B\widehat{D}A &= D\widehat{C}A + D\widehat{A}C \\ B\widehat{D}A &= \alpha + \theta \\ B\widehat{D}A &> \theta \end{aligned}$$

Além disso, $A\widehat{D}P = B\widehat{D}A - B\widehat{D}P = (\alpha + \theta) - \theta = \alpha$.

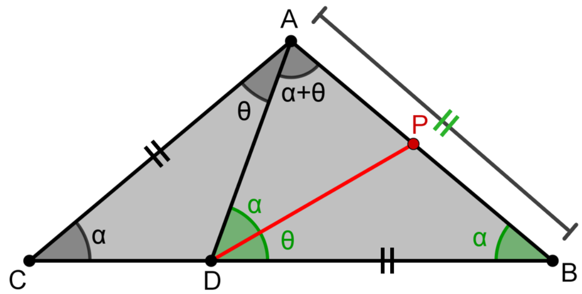
Figura 2.24 – Parte 1 da demonstração da proposição 2.7



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Pelo exposto acima temos que $B\widehat{D}A = \alpha + \theta = B\widehat{A}D$, então o triângulo BAD é isósceles de base $\overline{AD}$; o que implica em $\overline{AB} = \overline{BD} = \overline{AC}$. Mas sendo $\overline{AB} = \overline{AC}$, então o triângulo ABC é isósceles de base $\overline{BC}$ e segue que $A\widehat{B}C = A\widehat{C}B = \alpha$, como ilustra a figura 2.25.

Figura 2.25 – Parte 2 da demonstração da proposição 2.7



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Agora podemos verificar que os triângulos ACD e DBP são congruentes pelo caso A.L.A. de congruência de triângulos:

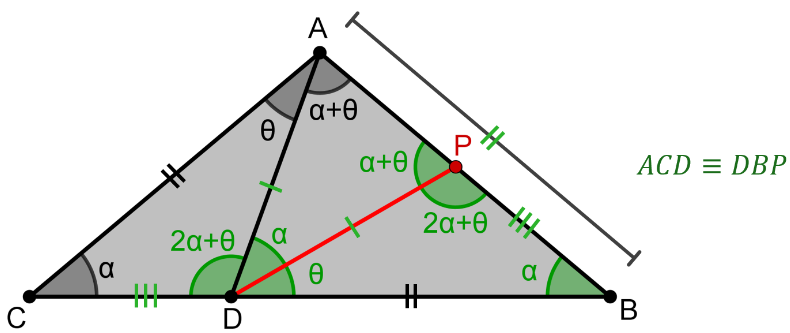
$$\begin{cases} A\widehat{C}D = \alpha = D\widehat{B}P \\ \overline{AC} = \overline{DB} \\ C\widehat{A}D = \theta = B\widehat{D}P \end{cases} \qquad \overset{ALA}{\Longrightarrow} \qquad ACD \equiv DBP$$

Desta congruência segue que $\overline{AD} = \overline{DP}$, assim o triângulo ADP é isósceles de base $\overline{AP}$.

■

Observação 2.6. *Em resumo, o enunciado e a demonstração da proposição 2.7 estabelece as congruências de ângulos, triângulos e segmentos expressas na figura 2.26 que podemos usar para resolver problemas propostos:*

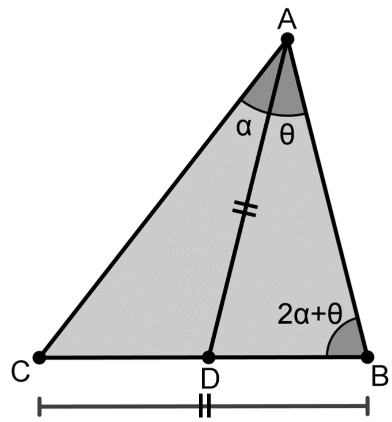
Figura 2.26 – Elementos congruentes no triângulo ABC da proposição 2.7



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Proposição 2.8. *Seja ABC um triângulo e D um ponto sobre $\overline{BC}$, tal que $\overline{AD} = \overline{BC}$, $C\widehat{A}D = \alpha$, $B\widehat{A}D = \theta$, $A\widehat{B}C = 2\alpha + \theta$, conforme a figura 2.27. Se tomarmos P sobre o lado $\overline{AB}$ de modo que $A\widehat{C}P = \alpha$. Então, $ACD \equiv CAP$, e os triângulos ABC e ABD são isósceles de base $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$.*

Figura 2.27 – Triângulo ABC referente à proposição 2.8



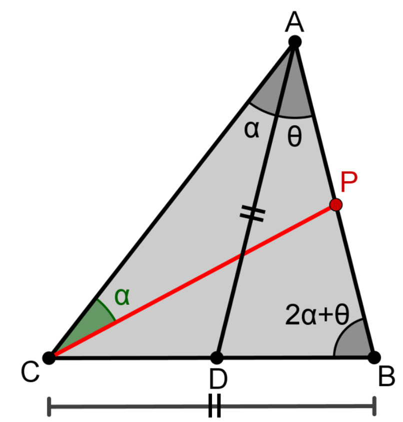
Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Demonstração.

Traçamos o ponto P e o segmento $\overline{CP}$ de acordo com o enunciado da proposição 2.8 de modo que o ângulo $A\widehat{C}P = \alpha$, como ilustra a figura 2.28. Note que realmente é possível realizar tal traçado se $A\widehat{C}B > \alpha$. De fato isso ocorre, pois no triângulo ACD temos $\overline{AD} = \overline{BC} > \overline{CD}$ e como o maior lado de um triângulo é oposto ao maior ângulo deste triângulo (analogamente para o menor lado e menor ângulo), ocorre que:

$$\overline{AD} > \overline{CD} \implies A\widehat{C}D > C\widehat{A}D = \alpha$$

Figura 2.28 – Parte 1 da demonstração da proposição 2.8



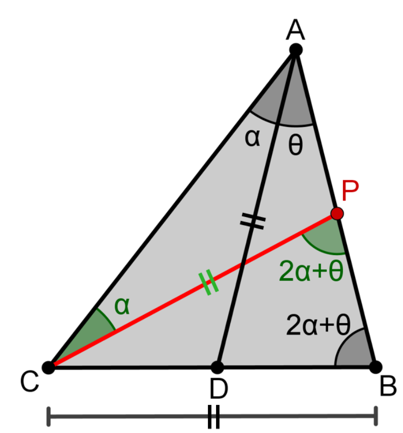
Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Aplicando o teorema do ângulo externo no triângulo ACP, temos:

$$\begin{aligned} B\widehat{P}C &= P\widehat{A}C + P\widehat{C}A \\ B\widehat{P}C &= (\alpha + \theta) + \alpha \\ B\widehat{P}C &= 2\alpha + \theta \end{aligned}$$

Daí, como $B\widehat{P}C = 2\alpha + \theta = P\widehat{B}C$, então o triângulo BCP é isósceles de base $\overline{BP}$ e isso implica em $\overline{CP} = \overline{CB}$, como ilustra a figura 2.29.

Figura 2.29 – Parte 2 da demonstração da proposição 2.8



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Agora verificamos que os triângulos ACD e CAP são congruentes pelo caso caso L.A.L. de congruência de triângulos:

$$\begin{cases} \overline{AC} \text{ é lado comum de } ACD \text{ e } CAP \\ C\widehat{A}D = \alpha = A\widehat{C}P \\ \overline{AD} = \overline{CP} \end{cases} \quad \overset{LAL}{\Longrightarrow} \quad ACD \equiv CAP$$

Desta congruência de triângulos temos $A\widehat{C}D = C\widehat{A}P$ e daí obtemos que:

$$\begin{aligned} A\widehat{C}D &= C\widehat{A}P \\ A\widehat{C}P + P\widehat{C}B &= C\widehat{A}D + D\widehat{A}B \\ \alpha + P\widehat{C}B &= \alpha + \theta \\ P\widehat{C}B &= \theta \end{aligned}$$

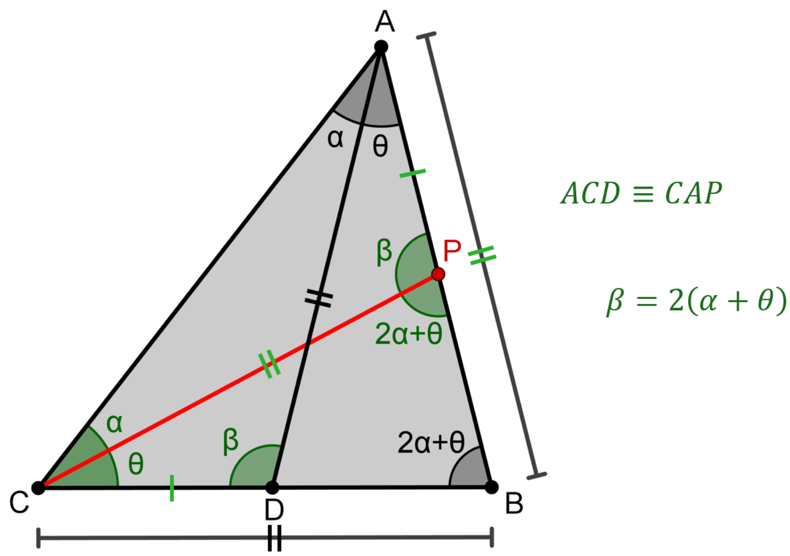
Aplicando o teorema do ângulo externo no triângulo ACD, temos:

$$\begin{aligned} B\widehat{D}A &= D\widehat{C}A + D\widehat{A}C \\ B\widehat{D}A &= \left(B\widehat{C}P + P\widehat{C}A\right) + D\widehat{A}C \\ B\widehat{D}A &= (\theta + \alpha) + \alpha \\ B\widehat{D}A &= 2\alpha + \theta \end{aligned}$$

Assim, temos $B\widehat{D}A = 2\alpha + \theta = D\widehat{B}A$ e isso implica que o triângulo ABD é isósceles de base $\overline{BD}$. Daí, ocorre que $\overline{AB} = \overline{AD} = \overline{CB}$ e consequentemente que o triângulo ABC é isósceles de base $\overline{AC}$. ∎

Observação 2.7. *Em resumo, o enunciado e a demonstração da proposição 2.8 estabelece as congruências de ângulos, triângulos e segmentos expressas na figura 2.30 que podemos usar para resolver problemas propostos:*

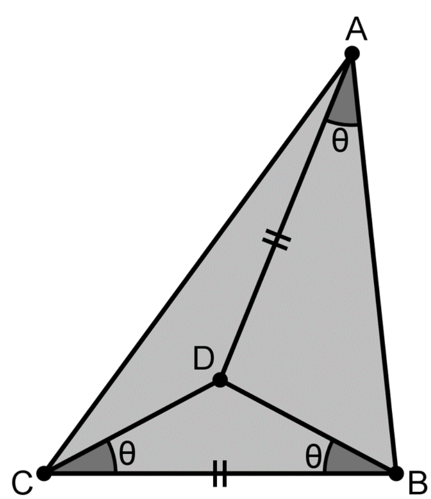
Figura 2.30 – Elementos congruentes no ΔABC da proposição 2.8



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Proposição 2.9. *Seja ABC um triângulo e D um ponto em seu interior tal que $\overline{AD} = \overline{BC}$ e $B\widehat{C}D = C\widehat{B}D = B\widehat{A}D = \theta$, como ilustra a figura 2.31. Se tomarmos $P \in \overline{AB}$ tal que $A\widehat{D}P = \theta$. Então, os triângulos ADP e BPD são isósceles de base $\overline{AD}$ e $\overline{BP}$, e $ADP \equiv BCD$.*

Figura 2.31 – Triângulo ABC referente à proposição 2.9

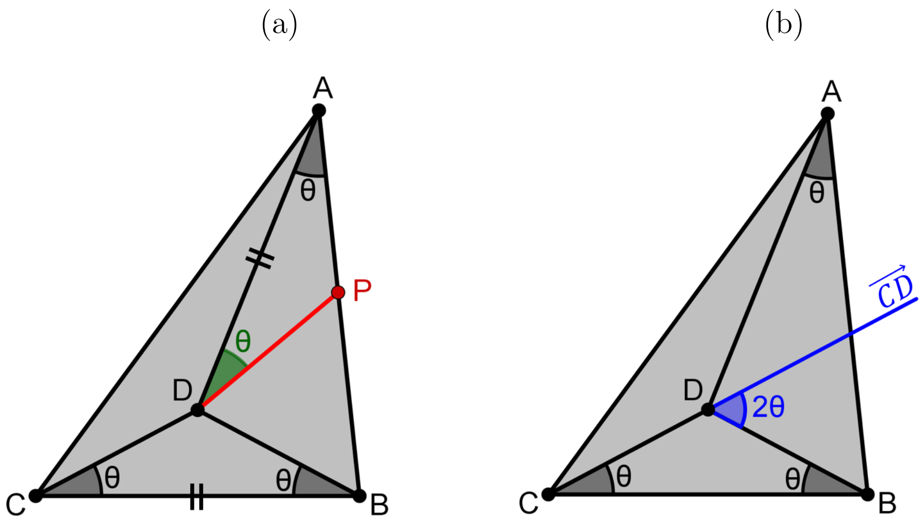


Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Demonstração.

Traçamos o ponto P e o segmento $\overline{PD}$ de acordo com o enunciado da proposição 2.9 de modo que o ângulo $A\widehat{D}P = \theta$ (conforme a figura 2.32(a)). Este traçado é possível porque $A\widehat{D}B > \theta$. Para verificarmos isso basta prolongarmos a semirreta $\overrightarrow{CD}$ para obtermos um ângulo externo do triângulo BCD (conforme a figura 2.32(b)). Então, observamos que como D é um ponto interior do triângulo ABC, ocorre que A e B estão de lados opostos da semirreta $\overrightarrow{CD}$, logo o ângulo $A\widehat{D}B$ é maior que o ângulo externo do triângulo BCD, em D, que mede 2θ ($D\widehat{C}B + D\widehat{B}C = \theta + \theta = 2\theta$).

Figura 2.32 – Parte 1 da demonstração da proposição 2.9



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

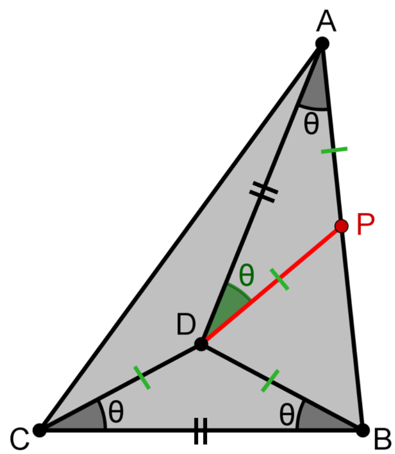
Notemos que como $D\widehat{B}C = \theta = D\widehat{C}B$, então o triângulo BCD é isósceles de base $\overline{BC}$. Assim, ocorre que $\overline{BD} = \overline{CD}$.

Os triângulos BCD e ADP são triângulos isósceles congruentes pelo caso ALA de congruência de triângulos:

$$\begin{cases} C\widehat{B}D = \ \theta \ = D\widehat{A}P \\ \overline{BC} = \overline{AD} \\ B\widehat{C}D = \ \theta \ = A\widehat{D}P \end{cases} \qquad \overset{ALA}{\Longrightarrow} \qquad BCD \equiv ADP$$

Desta congruência segue que $\overline{BD} = \overline{CD} = \overline{AP} = \overline{DP}$, como ilustra a figura 2.33.

Figura 2.33 – Parte 2 da demonstração da proposição 2.9



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

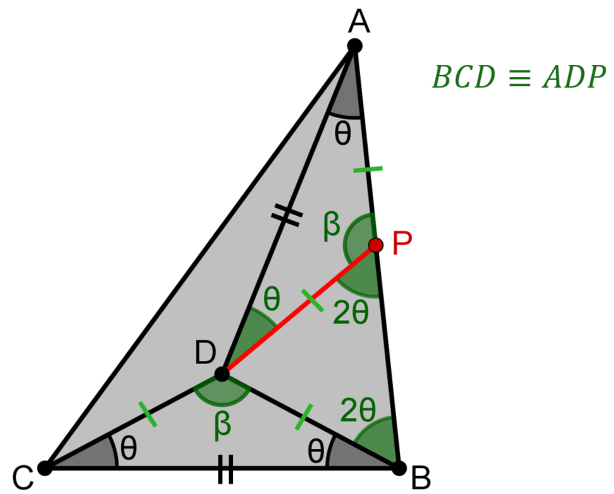
Como $\overline{BD} = \overline{PD}$, então o triângulo BDP é isósceles de base $\overline{BP}$. Daí, segue que $D\widehat{B}P = D\widehat{P}B$. E podemos determinar a medida destes dois ângulos aplicando o teorema do ângulo externo no triângulo ADP:

$$
\begin{aligned}
D\widehat{B}P &= D\widehat{P}B \\
D\widehat{B}P &= P\widehat{A}D + P\widehat{D}A \\
D\widehat{B}P &= = \theta \ + \ \theta \\
D\widehat{B}P &= 2\theta
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

Observação 2.8. *Em resumo, o enunciado e a demonstração da proposição 2.9 estabelece as congruências de ângulos, triângulos e segmentos expressas na figura 2.34 que podemos usar para resolver problemas propostos:*

Figura 2.34 – Elementos congruentes no triângulo ABC da proposição 2.9

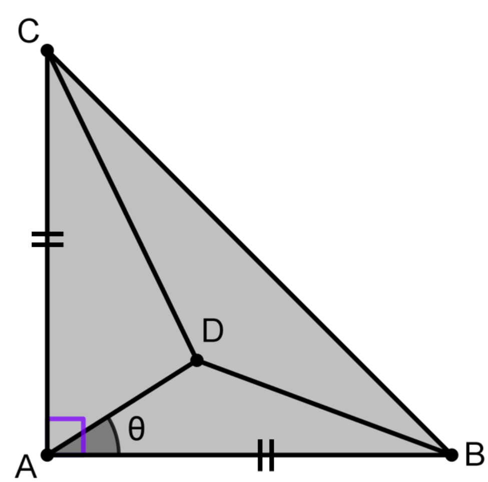


Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Se observarmos a figura 2.34, verificamos que no triângulo ABD se cumpre a primeira técnica de traçados auxiliares (conforme a proposição 2.2) com o segmento $\overline{PD}$ sendo a ceviana interna de ABD e $A\widehat{B}D = 2\theta = 2 \cdot B\widehat{A}D$.

Proposição 2.10. *Seja ABC um triângulo isósceles retângulo em A, e D um ponto qualquer em seu interior com $B\widehat{A}D = \theta$, conforme a figura 2.35.. Se tomarmos o ponto P no semiplano definido pela reta $\overleftrightarrow{AB}$ que não contém o triângulo ABC, de modo que $\overline{AP} = \overline{AD}$ e $B\widehat{A}P = 90° - \theta$, então $ACD \equiv ABP$.*

Figura 2.35 – Triângulo ABC referente à proposição 2.10

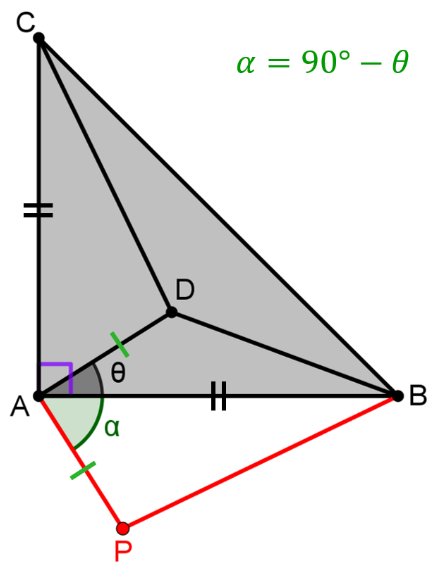


Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Demonstração.

Traçamos o ponto P e o segmento de reta $\overline{AP}$ de acordo com o enunciado da proposição 2.10. E traçamos também o segmento $\overline{PB}$, como ilustra a figura 2.36.

Figura 2.36 – Traçado de P no triângulo ABC referente à proposição 2.10



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Notemos que $C\widehat{A}D = B\widehat{A}P$:

$$\begin{aligned} B\widehat{A}C &= B\widehat{A}D + C\widehat{A}D \\ 90° &= \theta + C\widehat{A}D \\ 90° - \theta &= C\widehat{A}D \\ B\widehat{A}P &= C\widehat{A}D \end{aligned}$$

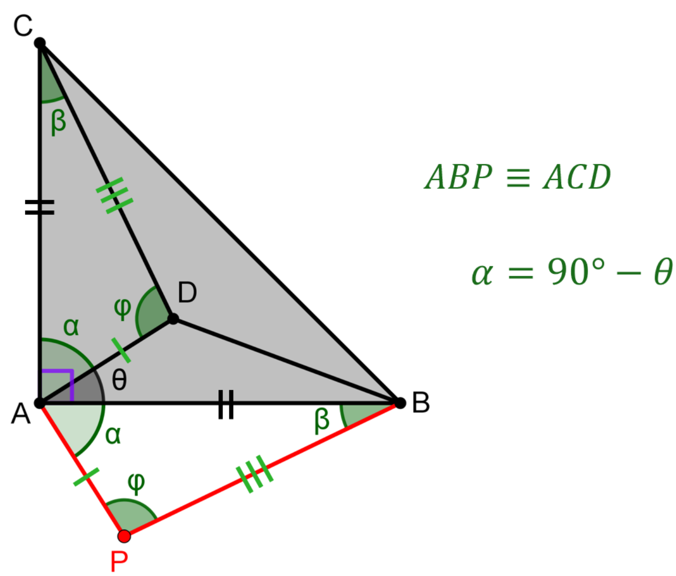
Verificamos que os triângulos ACD e ABP são congruentes pelo caso L.A.L. de congruência de triângulos:

$$\begin{cases} \overline{AD} = \overline{AP} \\ C\widehat{A}D = 90° - \theta = B\widehat{A}P \\ \overline{AC} = \overline{AB} \end{cases} \quad \xRightarrow{LAL} \quad ACD \equiv ABP$$

Desta congruência segue que $\overline{CD} = \overline{BP}$. ■

Observação 2.9. *Em resumo, o enunciado e a demonstração da proposição 2.10 estabelece as congruências de ângulos, triângulos e segmentos expressas na figura 2.37 que podemos* *usar para resolver problemas propostos:*

Figura 2.37 – Elementos congruentes no triângulo ABC da proposição 2.10



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

2.7 Técnica 6: Traçado de ângulo simétrico para obter dois triângulos isósceles

A sexta técnica de traçados auxiliares em triângulos dividi-se em dois casos. Em ambos, a ideia é partir de um ângulo e construir seu simétrico para assim obtermos dois triângulos isósceles.

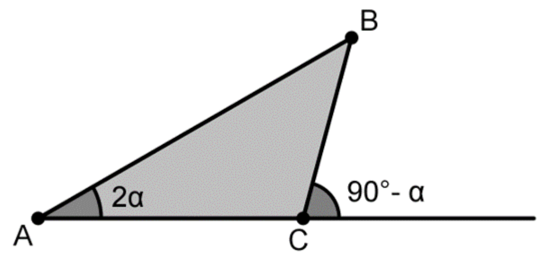
No caso I, a figura inicial deve ser um triângulo que possui um ângulo interno de medida 2α e um ângulo externo de medida $90° - \alpha$, não adjacentes. Daí, construímos o simétrico ao ângulo de medida 2α para obter os dois triângulos isósceles.

No caso II, a figura inicial deve ser um quadrilátero não convexo com dois lados congruentes formando um ângulo com medida $120° - 2\alpha$ e outro dos ângulos com medida α. Daí, construímos o simétrico do ângulo α e obtemos dois triângulos isósceles, sendo um deles equilátero.

2.7.1 Caso I: Triângulo com ângulo interno 2α *e ângulo externo* $90° - \alpha$

Proposição 2.11. *Seja ABC um triângulo com $B\widehat{A}C = 2\alpha$ e ângulo externo em C, $\beta = 90° - \alpha$, conforme a figura 2.38. Se tomarmos o ponto $\{P\} = \overrightarrow{AC} \cap \Gamma$, onde Γ é a circunferência de centro em B e raio $\overline{AB}$, então os triângulos ABP e PBC são isósceles de base $\overline{AP}$ e $\overline{BC}$.*

Figura 2.38 – Triângulo ABC referente à proposição 2.11

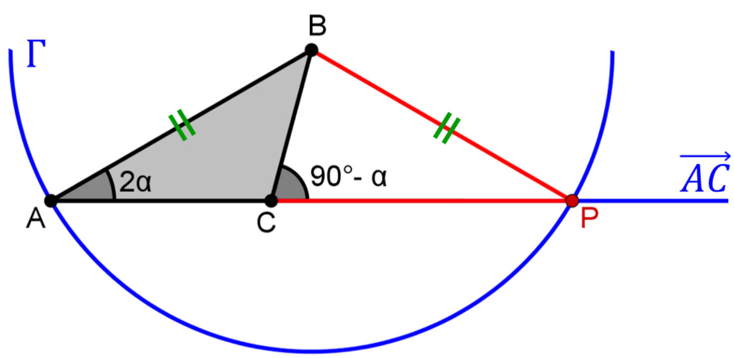


Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Demonstração.

Marcamos o ponto P conforme indicado na proposição 2.11, temos que $\overline{AB} = \overline{BP}$ já que são raios de Γ, como ilustra a figura 2.39.

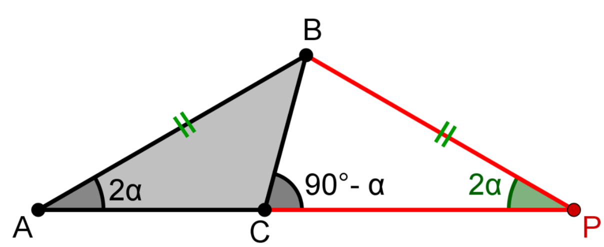
Figura 2.39 – Parte 1 da demonstração da proposição 2.11



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Como $\overline{AB} = \overline{BP}$, então ABP é isósceles de base $\overline{AP}$. Isso implica em $B\widehat{P}A = B\widehat{A}P = 2\alpha$, como ilustra a figura 2.40.

Figura 2.40 – Parte 2 da demonstração da proposição 2.11



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Pela soma dos ângulos internos do triângulo PBC, temos:

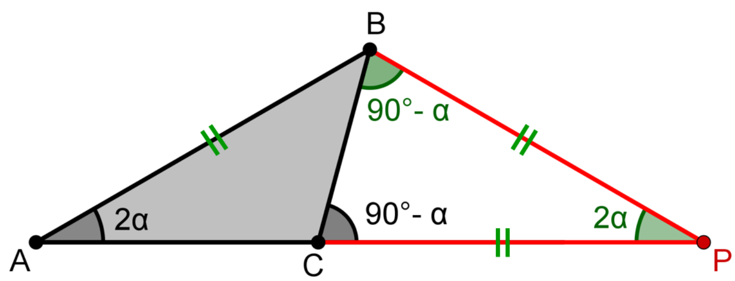
$$\begin{aligned} P\widehat{B}C + P\widehat{C}B + B\widehat{P}C &= 180^\circ \\ P\widehat{B}C + (90^\circ - \alpha) \ + \ 2\alpha &= 180^\circ \\ P\widehat{B}C = 90^\circ - \alpha & \\ P\widehat{B}C = 90^\circ - \alpha & \end{aligned}$$

Assim, $P\widehat{B}C = 90^\circ - \alpha = P\widehat{C}B$. Isso implica que o triângulo PBC é isósceles de base $\overline{BC}$. Daí, obtemos que $\overline{PB} = \overline{PC} = \overline{AB}$.

■

Observação 2.10. *Em resumo, o enunciado e a demonstração da proposição 2.11 estabelece as congruências de ângulos e segmentos expressas na figura 2.41 que podemos usar para resolver problemas propostos:*

Figura 2.41 – Elementos congruentes no triângulo ABP da proposição 2.11

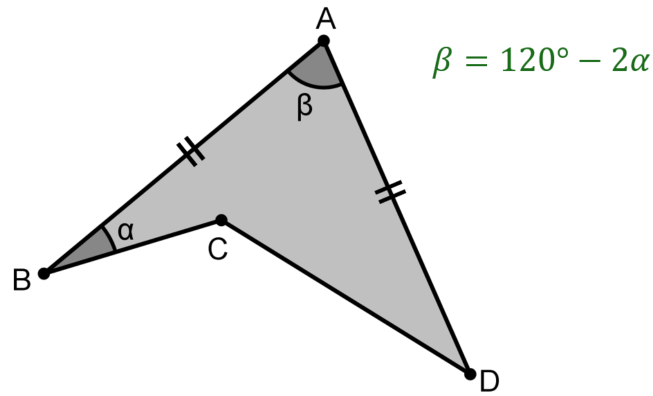


Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

2.7.2 Caso II: Quadrilátero não convexo com ângulos internos α *e* $120^\circ - 2\alpha$

Proposição 2.12. *Seja $ABCD$ um quadrilátero não convexo em C, com $\overline{AB} = \overline{AD}$, $A\widehat{B}C = \alpha$ e $B\widehat{A}D = 120^\circ - 2\alpha$, conforme a figura 2.42. Se tomarmos o ponto $\{P\} = \overrightarrow{BC} \cap \Gamma$, onde Γ é a circunferência de centro em A e raio $\overline{AB}$, então o triângulo ABP é isósceles de base $\overline{BP}$ e ADP é equilátero.*

Figura 2.42 – Quadrilátero $ABCD$ referente à proposição 2.12

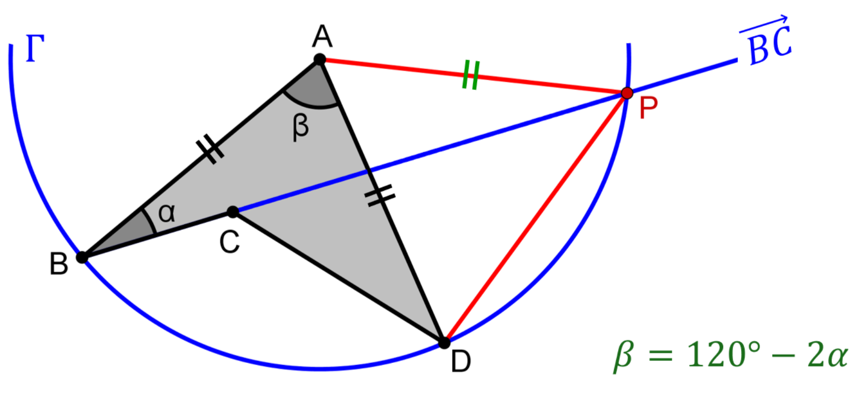


Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Demonstração.

Marcamos o ponto P conforme indicado na proposição 2.12 e daí temos que $\overline{AP} = \overline{AB}$ já que são raios da circunferência Γ, como ilustra a figura 2.43.

Figura 2.43 – Parte 1 da demonstração da proposição 2.12

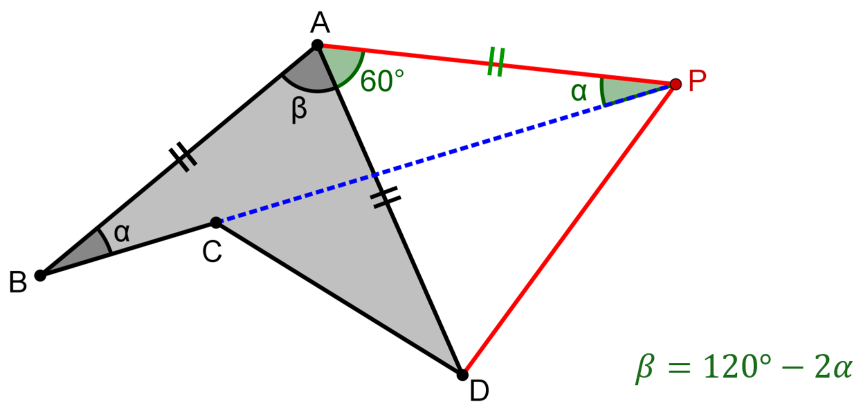


Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Como $\overline{AP} = \overline{AB}$, então o triângulo ABP é isósceles de base $\overline{BP}$, como ilustra a figura 2.44. Assim, $A\widehat{P}B = A\widehat{B}P = \alpha$. Daí, pela soma dos ângulos internos do triângulo ABP, obtemos a medida do ângulo $D\widehat{A}P$:

$$\begin{aligned}
A\widehat{B}P + A\widehat{P}B + B\widehat{A}P &= 180^\circ \\
\alpha + \alpha + \left(B\widehat{A}D + D\widehat{A}P\right) &= 180^\circ \\
2\alpha + (120^\circ - 2\alpha) + D\widehat{A}P &= 180^\circ \\
120^\circ + D\widehat{A}P &= 180^\circ \\
D\widehat{A}P &= 60^\circ
\end{aligned}$$

Figura 2.44 – Parte 2 da demonstração da proposição 2.12



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

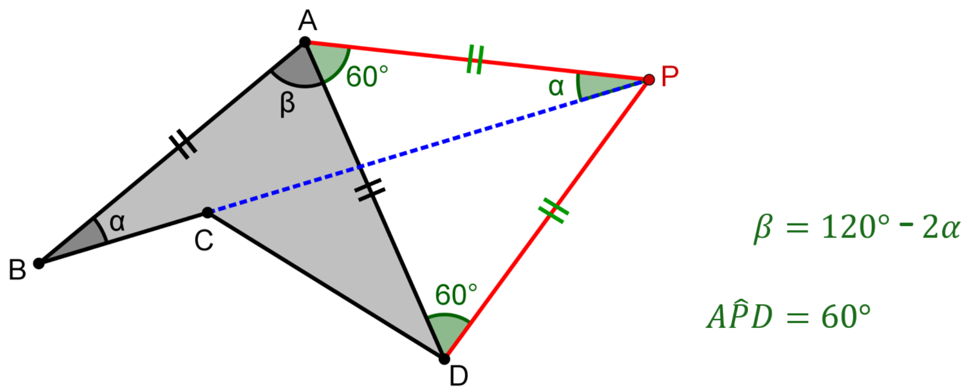
O triângulo ADP é isósceles de base $\overline{DP}$, pois $\overline{AD} = \overline{AP}$. Assim, $A\widehat{D}P = A\widehat{P}D$ e pela soma dos ângulos internos de ADP, temos:

$$\begin{aligned}
A\widehat{D}P + A\widehat{P}D + D\widehat{A}P &= 180^\circ \\
A\widehat{D}P + A\widehat{D}P + 60^\circ &= 180^\circ \\
2 \cdot A\widehat{D}P &= 180^\circ - 60^\circ \\
A\widehat{D}P &= 60^\circ
\end{aligned}$$

Como $A\widehat{D}P = A\widehat{P}D = D\widehat{A}P = 60^\circ$, então o triângulo ADP é equilátero. E obtemos que $\overline{PD} = \overline{AB}$. ■

Observação 2.11. *Em resumo, o enunciado e a demonstração da proposição 2.12 estabelece as congruências de ângulos e segmentos expressas na figura 2.45 que podemos usar para resolver problemas propostos:*

Figura 2.45 – Elementos congruentes em $ABCDP$ da proposição 2.12



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

2.8 Técnica 7: Triângulos retângulos congruentes em quadriláteros não convexos

A sétima técnica de traçados auxiliares em triângulos dividi-se em dois casos. Em ambos, a figura inicial é um quadrilátero que possui um ângulo interno não convexo cujos lados deste ângulo são adjacentes a outros dois ângulos internos do quadrilátero de medidas α e 2α. Além disso, três lados deste quadrilátero são congruentes, dois deles formando o ângulo de medida 2α.

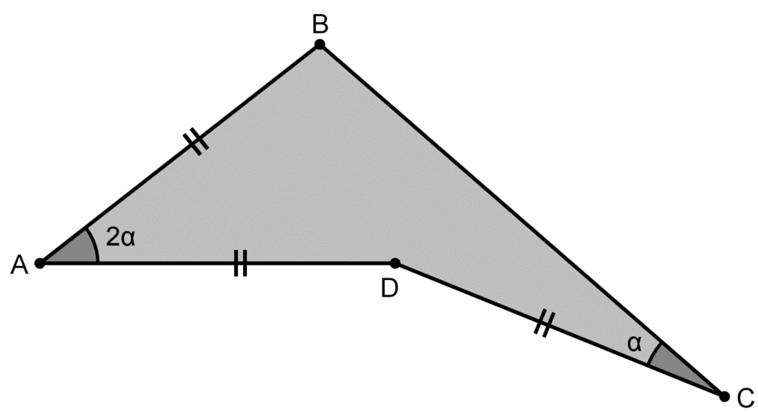
No caso I, dois dos lados congruentes formam o ângulo não convexo. Partindo da figura inicial, realizamos três traçados auxiliares: a diagonal do quadrilátero que tem como um dos vértices o vértice do ângulo não convexo, a perpendicular ao lado não congruente do quadrilátero e passando pelo vértice do ângulo não convexo, e a bissetriz do ângulo 2α. Com estes traçados, dividimos o quadrilátero em quatro triângulos: três triângulos retângulos congruentes e um triângulo retângulo com a hipotenusa medindo o dobro de um dos catetos, ou seja, de ângulos agudos com medidas 30° e 60°.

Já no caso II, o ângulo não convexo não tem lados congruentes. Os três traçados auxiliares são: a bissetriz do ângulo 2α, o prolongamento do lado não congruente do quadrilátero em direção ao interior da figura, e uma perpendicular a este segmento prolongado passando pelo quarto ponto do quadrilátero (que não possui os ângulos α, 2α e o não convexo). Com estes traçados, dividimos o quadrilátero em três triângulos retângulos congruentes, com um deles tendo uma parte sobreposta aos outros dois. Esta parte sobreposta é um triângulo retângulo com ângulos agudos de medidas 30° e 60°.

2.8.1 Caso I: Quadrilátero com três lados congruentes onde dois deles formam um ângulo não convexo

Proposição 2.13. *Seja $ABCD$ um quadrilátero com ângulo não convexo em D, $B\widehat{A}D = 2\alpha$, $B\widehat{C}D = \alpha$ e $\overline{AB} = \overline{AD} = \overline{CD}$, conforme a figura 2.46. Se tomarmos o ponto $\{P\} = \overline{BC} \cap r$, onde r é a reta que contém D e $r \perp \overline{BC}$, e sendo M o ponto médio de $\overline{BD}$. Então, ABM, ADM e CDP são triângulos retângulos congruentes, BDP é um triângulo retângulo com $P\widehat{B}D = 30°$ e $P\widehat{D}B = 60°$, e $A\widehat{B}C = 120° - \alpha$.*

Figura 2.46 – Quadrilátero $ABCD$ referente à proposição 2.13

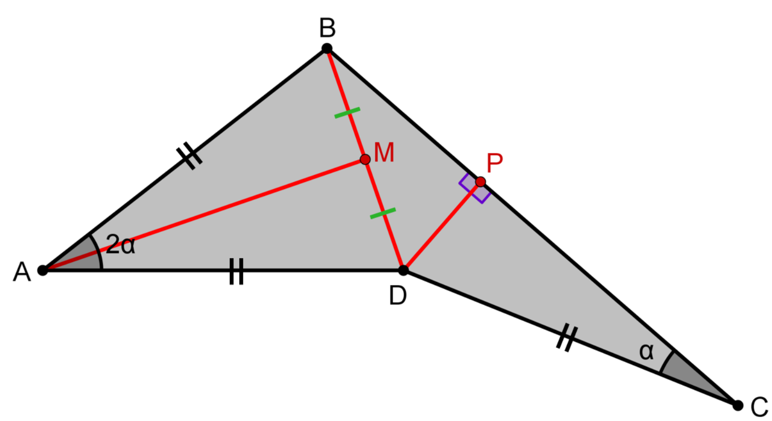


Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Demonstração.

Inicialmente, marcamos os pontos P e M conforme indicado na proposição 2.13 e os segmentos $\overline{BD}$, $\overline{PD}$ e $\overline{AM}$, como ilustra a figura 2.47.

Figura 2.47 – Parte 1 da demonstração da proposição 2.13



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Os triângulos ABM e ADM são congruentes pelo caso L.L.L. de congruência de triângulos:

$$\begin{cases} \overline{AB} = \overline{AD} \\ \overline{AM} \text{ é lado comum de ambos} \\ \overline{BM} = \overline{DM} \end{cases} \quad \overset{LLL}{\Longrightarrow} \quad ABM \equiv ADM$$

Desta congruência segue que $B\widehat{M}A = D\widehat{M}A$. E como B, M e D são colineares, obtemos:

$$\begin{aligned} B\widehat{M}A + D\widehat{M}A &= 180^\circ \\ B\widehat{M}A + B\widehat{M}A &= 180^\circ \\ 2 \cdot B\widehat{M}A &= 180^\circ \\ B\widehat{M}A &= 90^\circ \end{aligned}$$

Assim, $B\widehat{M}A = D\widehat{M}A = 90^\circ$, e segue que ABM e ADM são triângulos retângulos em M. Ainda de $ABM \equiv ADM$, temos $B\widehat{A}M = D\widehat{A}M$. E como $B\widehat{A}D = 2\alpha$, então obtemos:

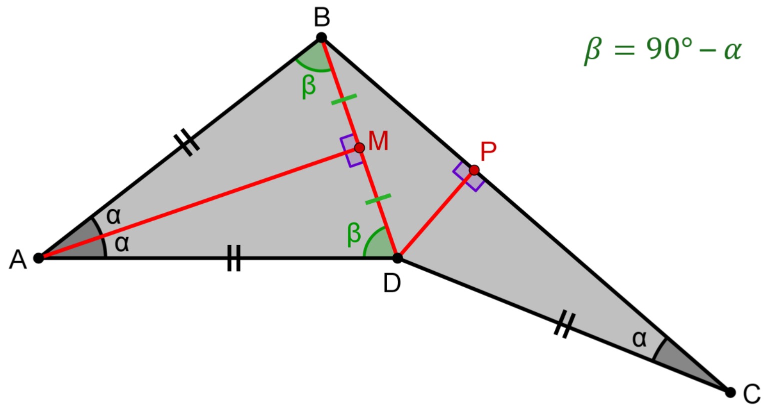
$$\begin{aligned} B\widehat{A}D &= 2\alpha \\ B\widehat{A}M + D\widehat{A}M &= 2\alpha \\ B\widehat{A}M + B\widehat{A}M &= 2\alpha \\ B\widehat{A}M &= \alpha \end{aligned}$$

Como $B\widehat{A}M$ e $A\widehat{B}M$ são ângulos complementares do triângulo retângulo ABM, temos:

$$\begin{aligned} A\widehat{B}M + B\widehat{A}M &= 90^\circ \\ A\widehat{B}M + \alpha &= 90^\circ \\ A\widehat{B}M &= 90^\circ - \alpha \end{aligned}$$

Em suma, obtemos que $B\widehat{A}M = D\widehat{A}M = D\widehat{C}P = \alpha$ e $A\widehat{B}M = A\widehat{D}M = 90^\circ - \alpha$, como ilustra a figura 2.48.

Figura 2.48 – Parte 2 da demonstração da proposição 2.13



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Pela soma dos ângulos internos do triângulo CDP,temos:

$$\begin{aligned}
C\widehat{D}P + D\widehat{P}C + P\widehat{C}D &= 180^\circ \\
C\widehat{D}P + 90^\circ + \alpha &= 180^\circ \\
C\widehat{D}P &= 90^\circ - \alpha \\
C\widehat{D}P &= A\widehat{B}M.
\end{aligned}$$

Podemos verificar que os triângulos ABM e CDP são congruentes pelo caso A.L.A. de congruência de triângulos:

$$\begin{cases} B\widehat{A}M = \alpha = D\widehat{C}P \\ \overline{AB} = \overline{CD} \\ A\widehat{B}M = 90^\circ - \alpha = C\widehat{D}P \end{cases} \quad \overset{ALA}{\Longrightarrow} \quad ABM \equiv CDP.$$

Por transitividade, $ABM \equiv ADM \equiv CDP$.

Agora, de $ABM \equiv CDP$, segue que $\overline{BM} = \overline{DP}$. Daí, observamos que BDP é um triângulo retângulo notável de ângulos 30°, 60°, pois o cateto $\overline{DP}$ mede metade da hipotenusa $\overline{BD}$:

$$\begin{aligned}
\overline{BD} &= \overline{BM} + \overline{DM} \\
\overline{BD} &= \overline{DP} + \overline{DP} \\
\overline{BD} &= 2 \cdot \overline{DP}
\end{aligned}$$

Sendo $D\widehat{B}P$ o ângulo oposto ao cateto $\overline{DP}$, então $D\widehat{B}P = 30^\circ$. E consequentemente $B\widehat{D}P = 60^\circ$.

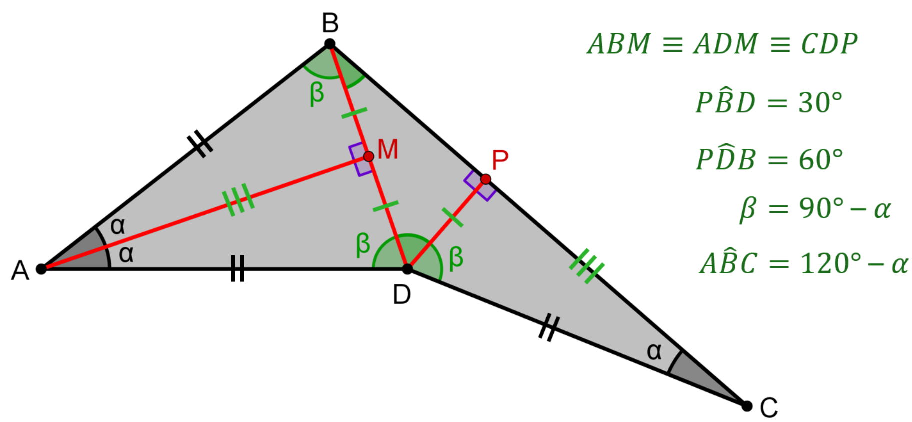
Por fim, temos que:

$$\begin{aligned} A\widehat{B}C &= A\widehat{B}D + C\widehat{B}D \\ A\widehat{B}C &= (90° - \alpha) + \ 30° \\ A\widehat{B}C &= 120° - \alpha \end{aligned}$$

■

Observação 2.12. *Em resumo, o enunciado e a demonstração da proposição 2.13 estabelece as congruências de ângulos, triângulos e segmentos expressas na figura 2.49, que podemos usar para resolver problemas propostos:*

Figura 2.49 – Elementos congruentes no quadrilátero $ABCD$ da proposição 2.13

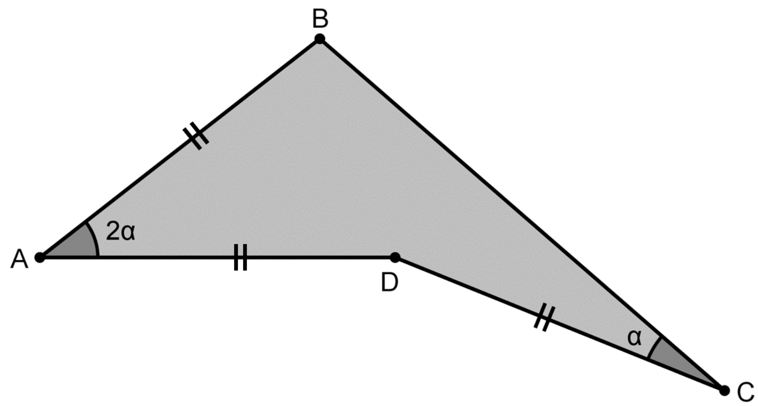


Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Ao resolvermos questões usando a proposição 2.13 é possível que não seja necessário os quatro triângulos retângulos (ABM, ADM, CDP e BDP) no processo de resolução. Ao invés disso, há possibilidade de fazermos uso apenas do ângulo $A\widehat{B}C = 120° - \alpha$. Além disso, observamos que a proposição 2.13 possui excesso de informação. Deste modo, vamos escrever uma nova proposição com a mesma hipótese da proposição 2.13, mas que a tese seja apenas o resultado do ângulo $A\widehat{B}C$.

Proposição 2.14. *Seja $ABCD$ um quadrilátero com ângulo não convexo em D. Se $B\widehat{A}D = 2\alpha$, $B\widehat{C}D = \alpha$ e $\overline{AB} = \overline{AD} = \overline{CD}$, conforme a figura 2.50. Então, $A\widehat{B}C = 120° - \alpha$.*

Figura 2.50 – Quadrilátero $ABCD$ referente à proposição 2.14



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Demonstração.

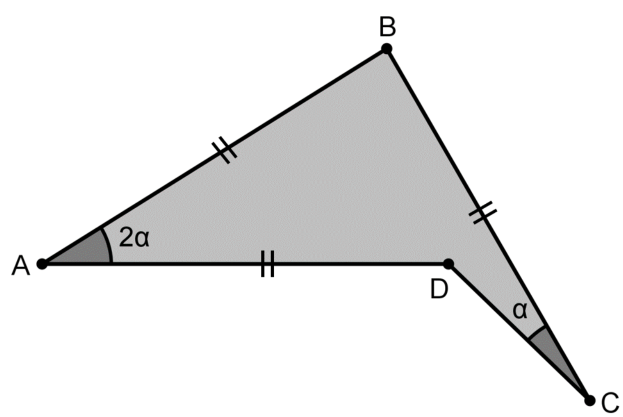
O quadrilátero $ABCD$ satisfaz as condições da proposição 2.13, pois $\overline{AB} = \overline{AD} = \overline{CD}$ e $B\widehat{A}D = 2 \cdot B\widehat{C}D$. Portanto, segue pela proposição 2.13 que $A\widehat{B}C = 120° - B\widehat{C}D = 120° - \alpha$.

■

2.8.2 Caso II: Quadrilátero com três lados congruentes onde dois lados diferentes formam um ângulo não convexo

Proposição 2.15. *Seja $ABCD$ um quadrilátero com ângulo não convexo em D, $B\widehat{A}D = 2\alpha$, $B\widehat{C}D = \alpha$ e $\overline{AB} = \overline{AD} = \overline{BC}$, conforme a figura 2.51. Se tomarmos o ponto $\{P\} = \overrightarrow{CD} \cap r$, onde r é a reta que contém B e $r \perp \overrightarrow{CD}$, e sendo M o ponto médio de $\overline{BD}$. Então, ABM, ADM e CBP são triângulos retângulos congruentes, BDP é um triângulo retângulo com $P\widehat{B}D = 60°$ e $P\widehat{D}B = 30°$, e $A\widehat{B}C = 120° - 2\alpha$.*

Figura 2.51 – Quadrilátero $ABCD$ referente à proposição 2.15

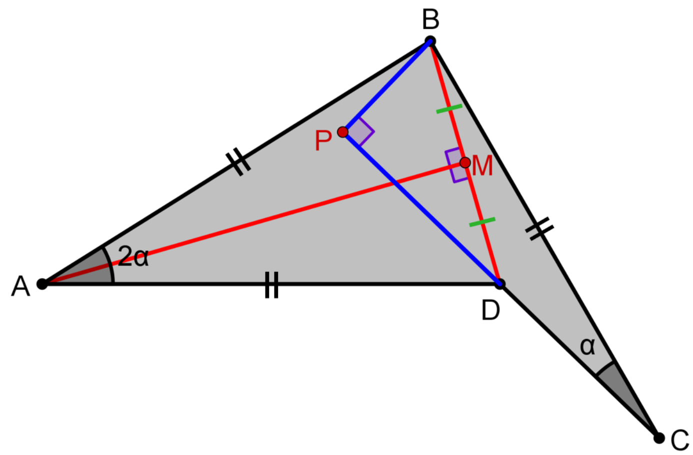


Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Demonstração.

Inicialmente marcamos os pontos P e M, conforme indicado na proposição 2.15, e os segmentos $\overline{BD}$, $\overline{PD}$, $\overline{PB}$ e $\overline{AM}$, como ilustra a figura 2.52.

Figura 2.52 – Parte 1 da demonstração da proposição 2.15



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Os triângulos ABM e ADM são congruentes pelo caso L.L.L. de congruência de triângulos:

$$\begin{cases} \overline{AB} = \overline{AD} \\ \overline{AM} \text{ é lado comum de ambos} \\ \overline{BM} = \overline{DM} \end{cases} \quad \overset{LLL}{\Longrightarrow} \quad ABM \equiv ADM.$$

Desta congruência temos $B\widehat{M}A = D\widehat{M}A$. E como B, M e D são colineares, então obtemos:

$$\begin{aligned} B\widehat{M}A + D\widehat{M}A &= 180^\circ \\ B\widehat{M}A + B\widehat{M}A &= 180^\circ \\ B\widehat{M}A &= 90^\circ. \end{aligned}$$

Assim, como $B\widehat{M}A = D\widehat{M}A = 90^\circ$, então ABM e ADM são triângulos retângulos em M. Ainda de $ABM \equiv ADM$, temos $B\widehat{A}M = D\widehat{A}M$. E como $B\widehat{A}D = 2\alpha$, então obtemos:

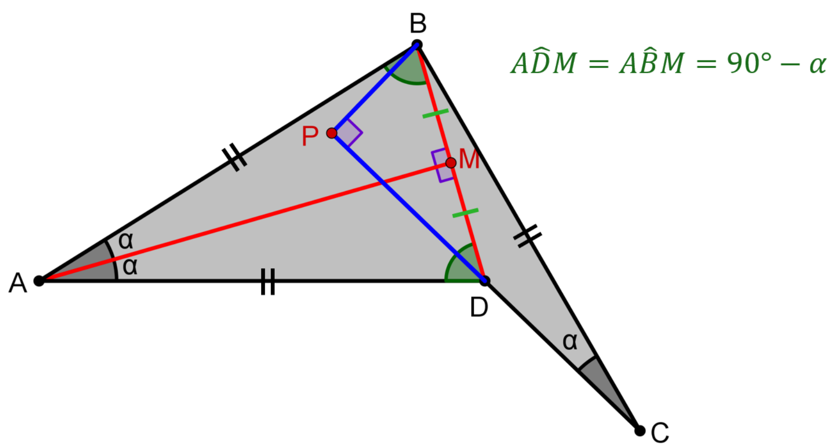
$$\begin{aligned} B\widehat{A}D &= 2\alpha \\ B\widehat{A}M + D\widehat{A}M &= 2\alpha \\ B\widehat{A}M + B\widehat{A}M &= 2\alpha \\ B\widehat{A}M &= \alpha. \end{aligned}$$

Como $B\widehat{A}M$ e $A\widehat{B}M$ são ângulos complementares do triângulo retângulo ABM, temos:

$$\begin{aligned} A\widehat{B}M \;+\; B\widehat{A}M &= 90° \\ A\widehat{B}M \;+\; \alpha &= 90° \\ A\widehat{B}M &= 90° - \alpha \end{aligned}$$

Em suma, obtemos que $B\widehat{A}M = D\widehat{A}M = D\widehat{C}B = \alpha$ e $A\widehat{B}M = A\widehat{D}M = 90° - \alpha$, como ilustra a figura 2.53.

Figura 2.53 – Parte 2 da demonstração da proposição 2.15



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Pela soma dos ângulos internos do triângulo CBP, temos:

$$\begin{aligned} C\widehat{B}P + B\widehat{P}C + P\widehat{C}B &= 180° \\ C\widehat{B}P + 90° + \alpha &= 180° \\ C\widehat{B}P &= 90° - \alpha \\ C\widehat{B}P &= A\widehat{B}M. \end{aligned}$$

Os triângulos ABM e CBP são congruentes pelo caso A.L.A. de congruência de triângulos:

$$\begin{cases} B\widehat{A}M = \;\alpha\; = B\widehat{C}P \\ \overline{AB} = \overline{CB} \\ A\widehat{B}M = 90° - \alpha = C\widehat{B}P \end{cases} \quad \overset{ALA}{\Longrightarrow} \quad ABM \equiv CBP.$$

Por transitividade segue que $ABM \equiv ADM \equiv CBP$.

Agora, de $ABM \equiv CBP$ segue que $\overline{BM} = \overline{BP}$. Daí, vejamos que BDP é um triângulo retângulo notável de ângulos 30° e 60°, pois o cateto $\overline{BP}$ mede metade da hipotenusa $\overline{BD}$:

$$\begin{aligned} \overline{BD} &= \overline{BM} + \overline{DM} \\ \overline{BD} &= \overline{BP} + \overline{BP} \\ \overline{BD} &= 2 \cdot \overline{BP}. \end{aligned}$$

Sendo $B\widehat{D}P$ o ângulo oposto ao cateto $\overline{BP}$, então $B\widehat{D}P = 30°$. E consequentemente $D\widehat{B}P = 60°$.

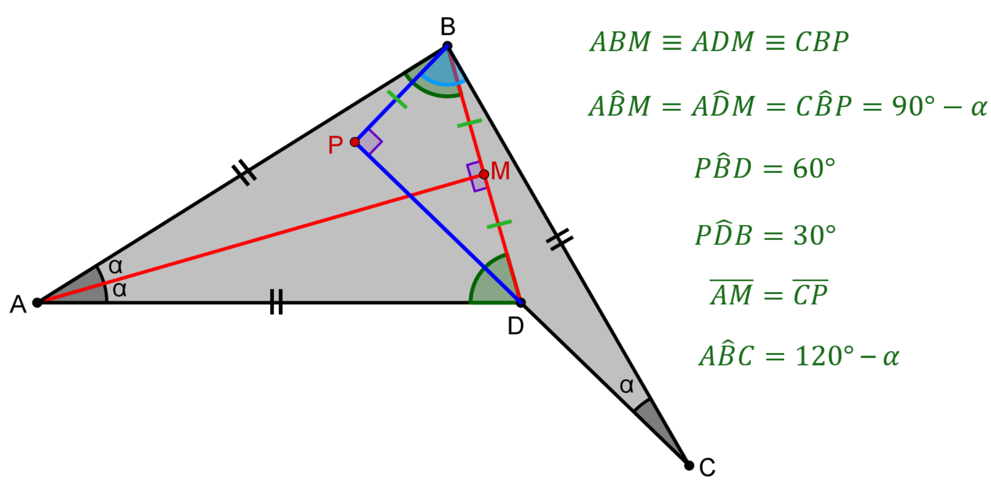
Por fim, concluímos que:

$$\begin{aligned} A\widehat{B}C &= A\widehat{B}D + C\widehat{B}D \\ A\widehat{B}C &= (90° - \alpha) + \left(C\widehat{B}P - P\widehat{B}D\right) \\ A\widehat{B}C &= (90° - \alpha) + \left((90° - \alpha) - 60°\right) \\ A\widehat{B}C &= 120° - 2\alpha. \end{aligned}$$

■

Observação 2.13. *Em resumo, o enunciado e a demonstração da proposição 2.15 estabelece as congruências de ângulos, triângulos e segmentos expressas na figura 2.54 que podemos usar para resolver problemas propostos:*

Figura 2.54 – Elementos congruentes em $ABCD$ da proposição 2.15

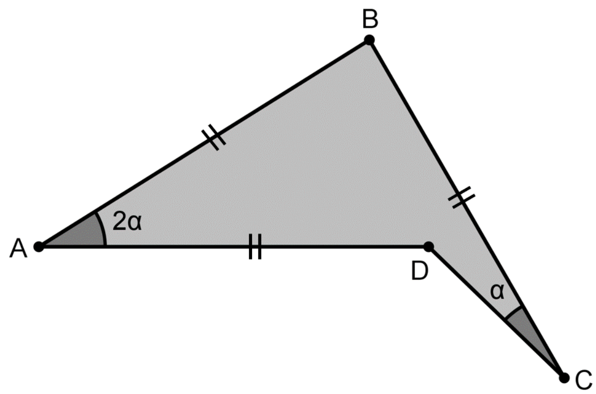


Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Analogamente como fizemos com a proposição 2.13, vamos sintetizar a proposição 2.15 com o foco apenas na medida do ângulo $A\widehat{B}C$.

Proposição 2.16. *Seja $ABCD$ um quadrilátero com ângulo não convexo em D. Se $B\widehat{A}D = 2\alpha$, $B\widehat{C}D = \alpha$ e $\overline{AB} = \overline{AD} = \overline{BC}$, conforme a figura 2.55. Então, $A\widehat{B}C = 120° - 2\alpha$.*

Figura 2.55 – Quadrilátero $ABCD$ referente à proposição 2.16



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Demonstração.

O quadrilátero $ABCD$ satisfaz as condições da proposição 2.15, pois $\overline{AB} = \overline{AD} = \overline{BC}$ e $B\widehat{A}D = 2 \cdot B\widehat{C}D$. Portanto, segue pela proposição 2.15 que:

$$A\widehat{B}C = 120° - 2 \cdot B\widehat{C}D = 120° - 2\alpha$$

■

3 RESOLUÇÃO DE QUESTÕES

Neste capítulo apresentamos a resolução de algumas questões por meio das técnicas de traçados auxiliares em triângulos que descrevemos como proposições no capítulo 2. Estas questões foram selecionadas de Barcena (2009) que apresenta duas listas de questões: uma com 80 questões respondidas e outra com 110 questões propostas. Com exceção da questão 14, todas as questões aqui apresentadas pertencem a lista de questões propostas.

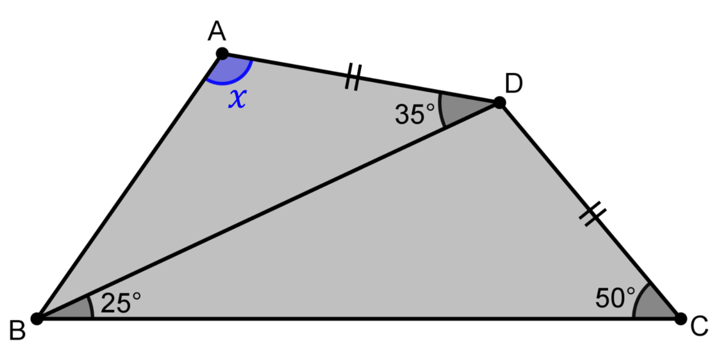
Padronizamos as cores preto, vermelho e verde nas figuras de modo que em cada questão:

- na cor preta temos pontos, segmentos de reta, ângulos e indicadores de congruência da figura inicial relacionada ao enunciado da questão;
- na cor azul temos o ângulo do qual buscamos determinar sua medida de acordo com o enunciado da questão;
- na cor vermelha temos pontos e segmentos de reta que são os traçados auxiliares adicionados à figura inicial da questão para contribuir na resolução;
- na cor verde temos ângulos e indicadores de congruência que vamos descobrindo durante a resolução da questão após adicionados os traçados auxiliares.

3.1 Questões referentes à técnica 1

Questão 1. Seja o quadrilátero convexo $ABCD$ com $\overline{AD} = \overline{CD}$, $C\widehat{B}D = 25°$, $B\widehat{C}D = 50°$ e $A\widehat{D}B = 35°$, conforme a figura 3.1. Determine o valor de $x = B\widehat{A}D$.

Figura 3.1 – Enunciado da questão 1

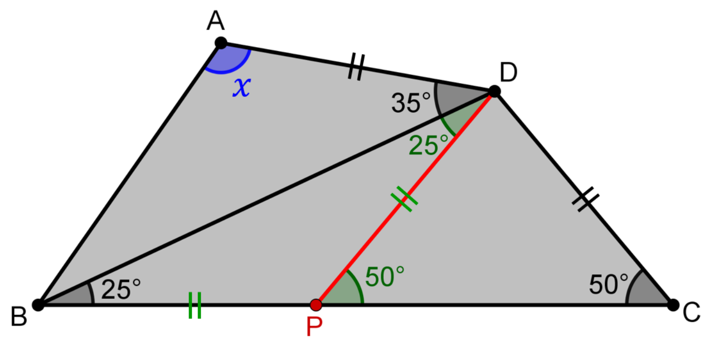


Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Solução:

O triângulo DBC tem ângulos na proporção $1:2$ $\left(D\widehat{B}C = 25° \text{ e } D\widehat{C}B = 50°\right)$. *Assim,* *aplicamos o resultado da proposição 2.2 para realizar o traçado auxiliar da ceviana interna no triângulo* DBC*: o segmento* $\overline{DP}$ *com* $P \in \overline{BC}$ *e* $C\widehat{P}D = 50°$*. Deste traçado auxiliar segue, pelo resultado da proposição 2.2,* $\overline{DP} = \overline{PB} = \overline{DC}$ *e* $B\widehat{D}P = D\widehat{B}P = 25°$*, como ilustra a figura 3.2.*

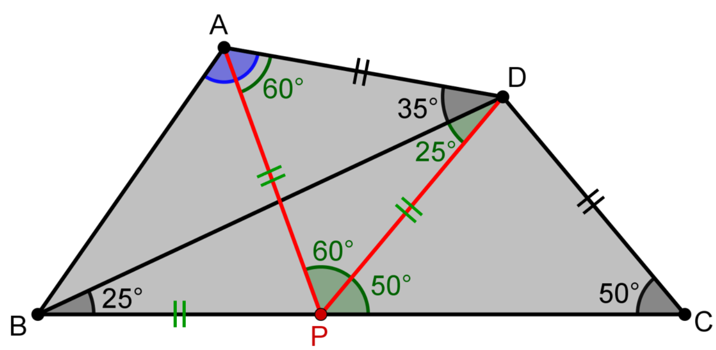
Figura 3.2 – Parte 1 da solução da questão 1



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Como $\overline{AD} = \overline{DP}$*, então o triângulo* ADP *é isósceles de base* $\overline{AP}$*. Além disso, como* $A\widehat{D}P = A\widehat{D}B + B\widehat{D}P = 35° + 25° = 60°$*, então* ADP *é equilátero. Daí,* $A\widehat{P}D = P\widehat{A}D = 60°$ *e* $\overline{AP} = \overline{PD} = \overline{BP}$*, como ilustra a figura 3.3.*

Figura 3.3 – Parte 2 da solução da questão 1



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Podemos calcular o valor de $A\widehat{P}B$*:*

$$A\widehat{P}B = 180° - A\widehat{P}C = 180° - \left(A\widehat{P}D + D\widehat{P}C\right) = 180° - (60° + 50°) = 70°.$$

Notemos que o triângulo PAB *é isósceles de base* $\overline{AB}$*, pois* $\overline{AP} = \overline{BP}$*. Assim, segue que*

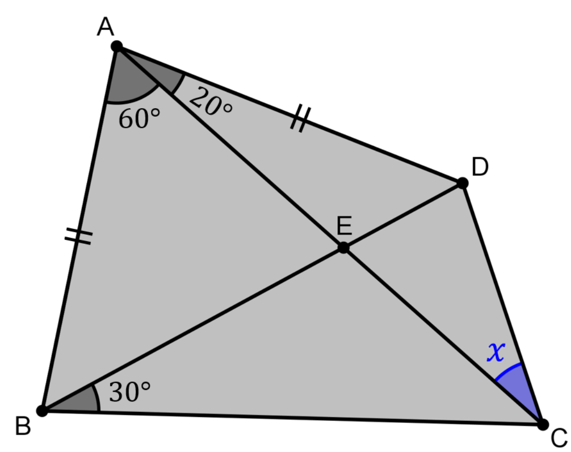
$P\widehat{A}B = P\widehat{B}A$ e pela soma dos ângulos internos de PAB, temos:

$$\begin{aligned} P\widehat{A}B + P\widehat{B}A + A\widehat{P}B &= 180^\circ \\ P\widehat{A}B + P\widehat{A}B + 70^\circ &= 180^\circ \\ 2 \cdot P\widehat{A}B &= 110^\circ \\ P\widehat{A}B &= 55^\circ \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que $x = B\widehat{A}D = P\widehat{A}B + P\widehat{A}D = 55^\circ + 60^\circ = 115^\circ$.

Questão 2. Seja o quadrilátero convexo $ABCD$, tal que E é o ponto de interseção entre suas diagonais ($\overline{AC}$ e $\overline{BD}$), $\overline{AB} = \overline{AD}$ e ângulos: $C\widehat{A}B = 60^\circ$, $C\widehat{A}D = 20^\circ$ e $C\widehat{B}D = 30^\circ$, conforme a figura 3.4. Determine o valor de $x = A\widehat{C}D$:

Figura 3.4 – Enunciado da questão 2



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Solução:

Como $\overline{AB} = \overline{AD}$, então o triângulo ABD é isósceles de base $\overline{BD}$. Assim, $A\widehat{B}D = A\widehat{D}B$. Pela soma dos ângulos internos de ABD, temos:

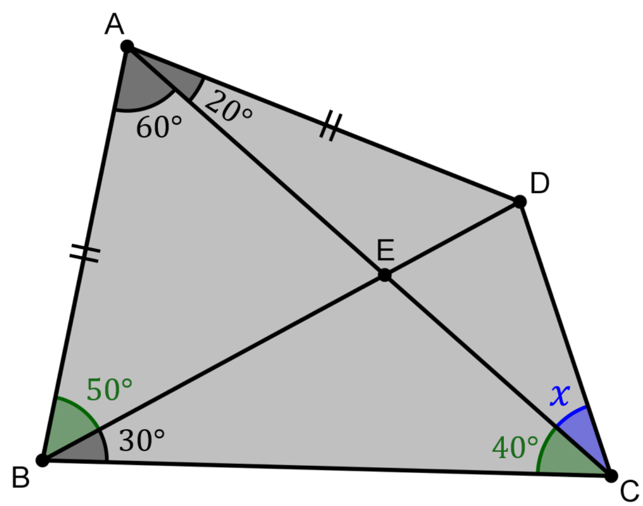
$$\begin{aligned} A\widehat{B}D + A\widehat{D}B + B\widehat{A}D &= 180^\circ \\ A\widehat{B}D + A\widehat{B}D + \left(B\widehat{A}E + E\widehat{A}D\right) &= 180^\circ \\ 2 \cdot A\widehat{B}D + (60^\circ + 20^\circ) &= 180^\circ \\ 2 \cdot A\widehat{B}D &= 180^\circ - 80^\circ \\ A\widehat{B}D &= 50^\circ \end{aligned}$$

Pela soma dos ângulos internos do triângulo ABC, temos:

$$\begin{aligned} A\widehat{C}B + A\widehat{B}C + B\widehat{A}C &= 180^\circ \\ A\widehat{C}B + \left(A\widehat{B}D + D\widehat{B}C\right) + B\widehat{A}C &= 180^\circ \\ A\widehat{C}B + (50^\circ \;+\; 30^\circ) \;+\; 60^\circ &= 180^\circ \\ A\widehat{C}B &= 40^\circ. \end{aligned}$$

Determinamos a medida dos ângulos $A\widehat{B}D$ e $A\widehat{C}B$, como ilustra a figura 3.5.

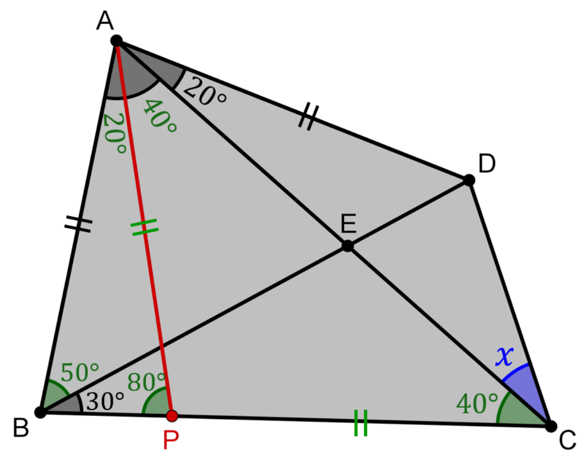
Figura 3.5 – Parte 1 da solução da questão 2



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Note que o triângulo ABC tem ângulos na proporção $1:2$ $\left(A\widehat{B}C = 80^\circ\right.$ e $\left.A\widehat{C}B = 40^\circ\right)$. Assim, aplicamos o resultado da proposição 2.2 para realizar o traçado auxiliar da ceviana interna no triângulo ABC que é o segmento $\overline{AP}$ com $P \in \overline{BC}$ e $A\widehat{P}B = 80^\circ$. Deste traçado auxiliar segue, pelo resultado da proposição 2.2, que $\overline{AP} = \overline{PC} = \overline{AB}$, $B\widehat{A}P = 20^\circ$ e $P\widehat{A}C = P\widehat{C}A = 40^\circ$, como ilustra a figura 3.6.

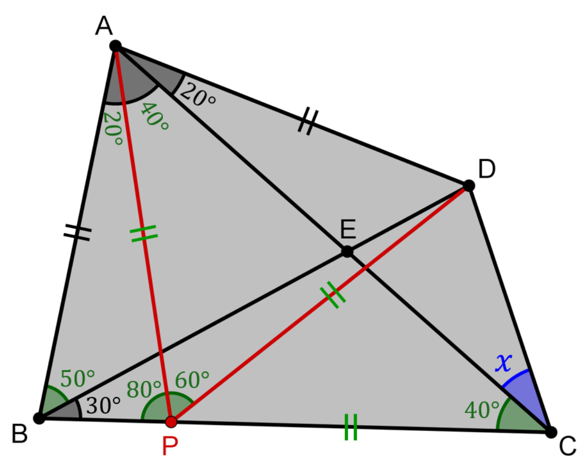
Figura 3.6 – Parte 2 da solução da questão 2



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Traçando o segmento $\overline{PD}$, *note que o triângulo* APD *é isósceles de base* $\overline{PD}$ *com* $P\widehat{A}D = 20° + 40° = 60°$. *Assim,* APD *é equilátero. Logo,* $A\widehat{P}D = 60°$ *e* $\overline{PD} = \overline{AP} = \overline{PC}$. *Mas sendo* $\overline{PD} = \overline{PC}$, *isso significa que o triângulo* PCD *é isósceles de base* $\overline{CD}$, *logo* $P\widehat{C}D = P\widehat{D}C$, *como ilustra a figura 3.7.*

Figura 3.7 – Parte 3 da solução da questão 2



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

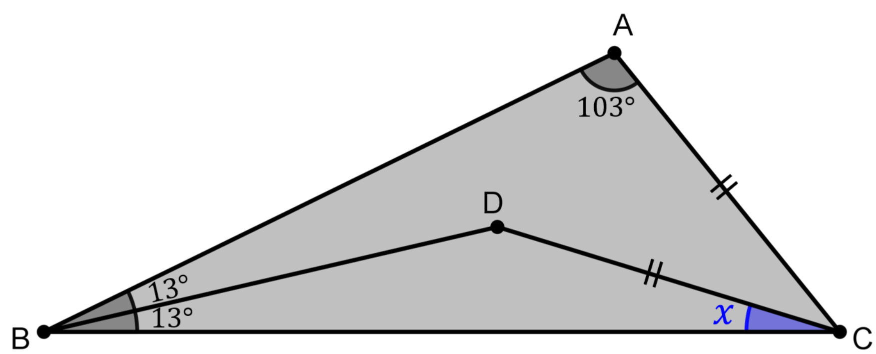
Mostrado que PCD *é isósceles de base* $\overline{CD}$ *e sendo* $B\widehat{P}D$ *um de seus ângulos externos* *em P, determinamos x pelo teorema do ângulo externo:*

$$\begin{aligned} B\widehat{P}D &= P\widehat{C}D + P\widehat{D}C \\ B\widehat{P}A + A\widehat{P}D &= P\widehat{C}D + P\widehat{C}D \\ 80^\circ + 60^\circ &= (x + 40^\circ) + (x + 40^\circ) \\ 140^\circ &= 2x + 80^\circ \\ x &= 30^\circ. \end{aligned}$$

3.2 Questões referentes à técnica 2

Questão 3. Considere um triângulo ABC e D um ponto de seu interior de modo que $\overline{AC} = \overline{CD}$, $A\widehat{B}D = C\widehat{B}D = 13^\circ$ e $B\widehat{A}C = 103^\circ$, conforme figura 3.8. Determine o valor de $x = B\widehat{C}D$.

Figura 3.8 – Enunciado da questão 3

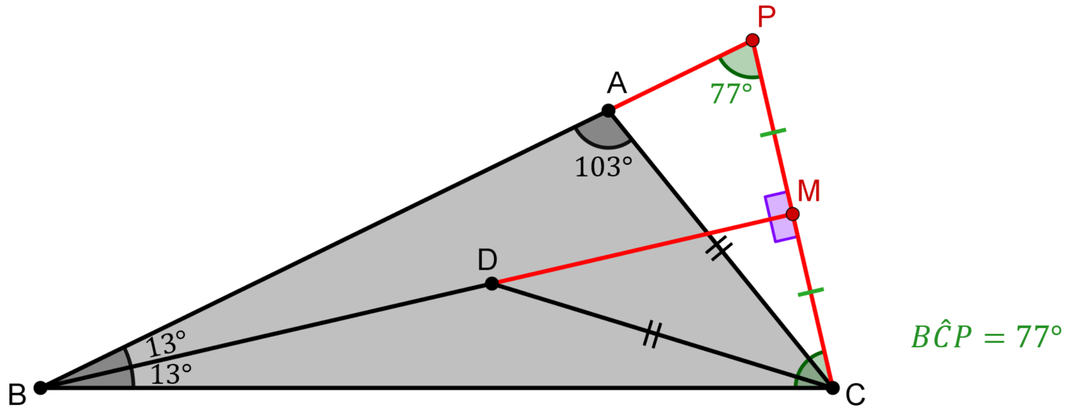


Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Solução:

Observamos que $\overrightarrow{BD}$ é bissetriz de $A\widehat{B}C$. Além disso, $\overline{BC} > \overline{AB}$, já que o ângulo oposto a $\overline{BC}$ é o maior ângulo do triângulo ABC. Prolongando $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BD}$, de acordo com a proposição 2.3, obteremos os pontos P e M, respectivamente, na interseção com a reta que passa por C e é perpendicular a $\overrightarrow{BD}$. Ou seja, completando o triângulo BCP isósceles de base $\overline{CP}$ com M ponto médio de $\overline{CP}$ e $B\widehat{P}C = B\widehat{C}P = 90^\circ - 13^\circ = 77^\circ$, como ilustra a figura 3.9.

Figura 3.9 – Parte 1 da solução da questão 3



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

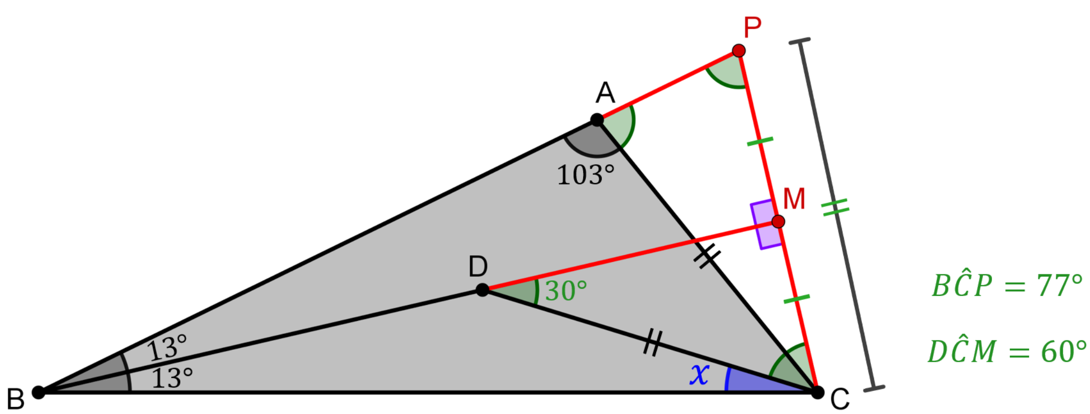
Note que o triângulo CAP é isósceles de base $\overline{AP}$, pois P, A e B são colineares e temos:

$$P\widehat{A}C + B\widehat{A}C = 180° \implies P\widehat{A}C + 103° = 180° \implies P\widehat{A}C = 77° \implies P\widehat{A}C = A\widehat{P}C$$

Daí, segue que $\overline{PC} = \overline{AC} = \overline{CD}$.

Como $\overline{CD} = \overline{PC} = 2 \cdot \overline{CM}$ e $C\widehat{M}D = 90°$. Então, CDM é um triângulo retângulo em que o cateto $(\overline{CM})$ vale metade da hipotenusa $(\overline{CD})$. Deste modo, o ângulo oposto a este cateto mede $30°$ e o outro ângulo agudo mede $60°$, isto é: $C\widehat{D}M = 30°$ e $D\widehat{C}M = 60°$, como ilustra a figura 3.10.

Figura 3.10 – Parte 2 da solução da questão 3

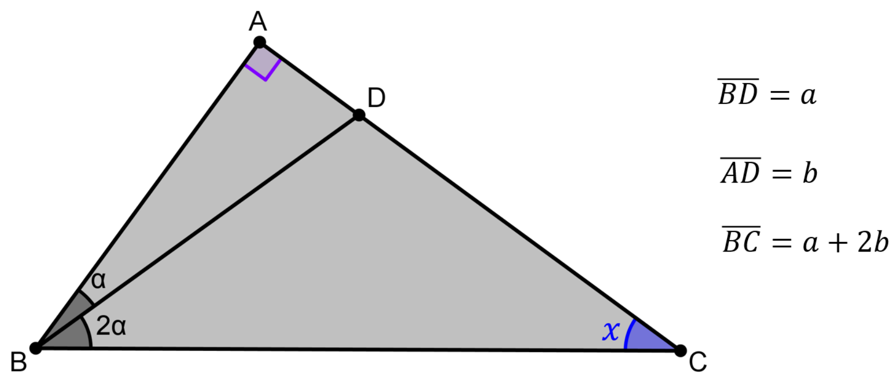


Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Portanto, concluímos que $x = B\widehat{C}D = B\widehat{C}P - D\widehat{C}M = 77° - 60° = 17°$.

Questão 4. Seja um triângulo ABC retângulo em A, e D um ponto de $\overline{AC}$, tal que $A\widehat{B}D = \alpha$, $D\widehat{B}C = 2\alpha$, $\overline{BD} = a$, $\overline{AD} = b$ e $\overline{BC} = a+2b$, conforme figura 3.11. Determine o valor do ângulo $x = A\widehat{C}B$.

Figura 3.11 – Enunciado da questão 4

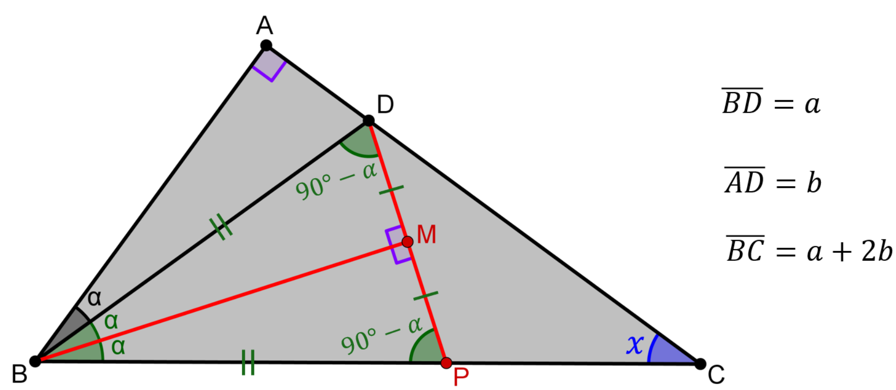


Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Solução:

Como $\overline{BC} > \overline{BD}$ $(\overline{BC} = a + 2b$ *e* $\overline{BD} = a)$ *e* $D\widehat{B}C = 2\alpha$, *então aplicamos a proposição 2.3 de modo a obtermos o triângulo* ADP *isósceles de base* $\overline{DP}$, *com* P *pertencente a* $\overline{BC}$. *Por este traçado auxiliar tomamos* M *como ponto médio de* $\overline{DP}$ *e temos:* $\overline{DM} = \overline{PM}$, $\overline{BD} = \overline{BP} = a$, $D\widehat{B}M = P\widehat{B}M = \alpha$ *e* $B\widehat{D}M = B\widehat{P}M = 90° - \alpha$, *como ilustra a figura 3.12.*

Figura 3.12 – Parte 1 da solução da questão 4



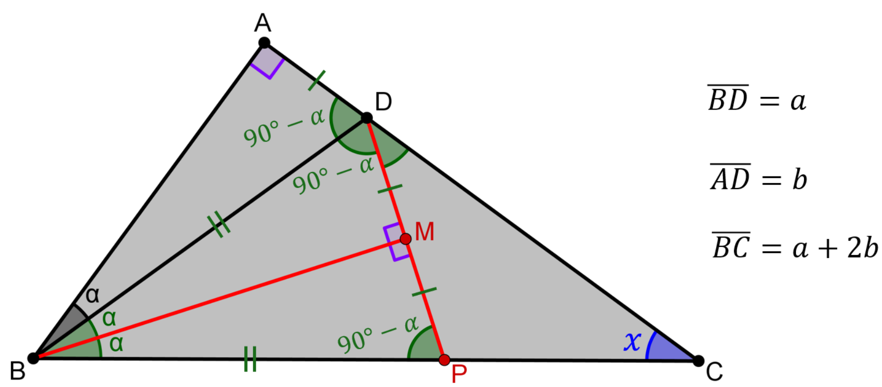
Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Notemos que os triângulos ABD *e* MBD *são congruentes pelo caso A.L.A de congruência de triângulos:*

$$\begin{cases} A\widehat{B}D = \alpha = M\widehat{B}D \\ \overline{BD} \text{ é lado comum de } ABD \text{ e } MBD \\ A\widehat{D}B = 90^\circ - \alpha = M\widehat{D}B \end{cases} \xRightarrow{ALA} \quad ABD \equiv MBD.$$

Desta congruência segue que $\overline{AD} = \overline{MD} = \overline{PM} = b$, *como ilustra a figura 3.13.*

Figura 3.13 – Parte 2 da solução da questão 4



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Assim, concluímos que o triângulo CDP *é isósceles de base* $\overline{CD}$, *pois:*

$$\begin{aligned} \overline{CP} &= \overline{BC} - \overline{BP} \\ \overline{CP} &= (a + 2b) - a \\ \overline{CP} &= 2b \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \overline{DP} &= \overline{DM} + \overline{MP} \\ \overline{DP} &= b + b \\ \overline{DP} &= 2b \end{aligned}$$

Daí, sendo o triângulo CDP *isósceles de base* $\overline{CD}$, *então* $C\widehat{D}P = D\widehat{C}P = x$. *E pelo teorema do ângulo externo, segue que:*

$$\begin{aligned} B\widehat{P}D &= P\widehat{C}D + P\widehat{D}C \\ 90^\circ - \alpha &= x + x \\ \alpha &= 90^\circ - 2x. \end{aligned}$$

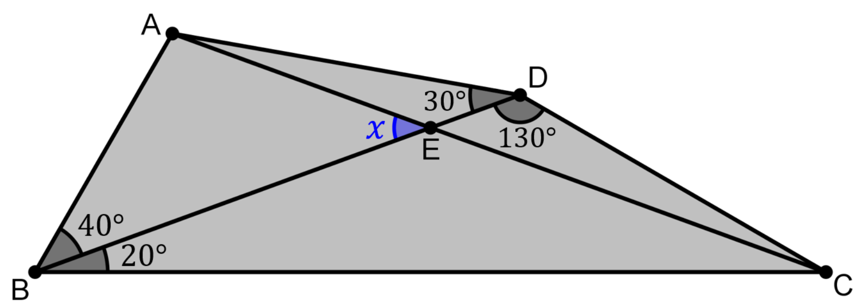
Concluindo, pela soma dos ângulos internos do triângulo ABC, temos:

$$\begin{aligned} A\widehat{B}C + B\widehat{C}A + C\widehat{A}B &= 180^\circ \\ 3\alpha + x + 90^\circ &= 180^\circ \\ 3 \cdot (90^\circ - 2x) + x + 90^\circ &= 180^\circ \\ 270^\circ - 6x + x + 90^\circ &= 180^\circ \\ -5x &= -180^\circ \\ x &= 36^\circ. \end{aligned}$$

3.3 Questões referentes à técnica 3

Questão 5. Seja um quadrilátero $ABCD$ e E o ponto de interseção entre suas diagonais $\left(\overline{AC} \text{ e } \overline{BD}\right)$. Se $A\widehat{B}D = 40^\circ$, $A\widehat{D}B = 30^\circ$, $B\widehat{D}C = 130^\circ$ e $C\widehat{B}D = 20^\circ$, conforme a figura 3.14. Determine a medida do ângulo $x = A\widehat{E}B$.

Figura 3.14 – Enunciado da questão 5



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Solução:

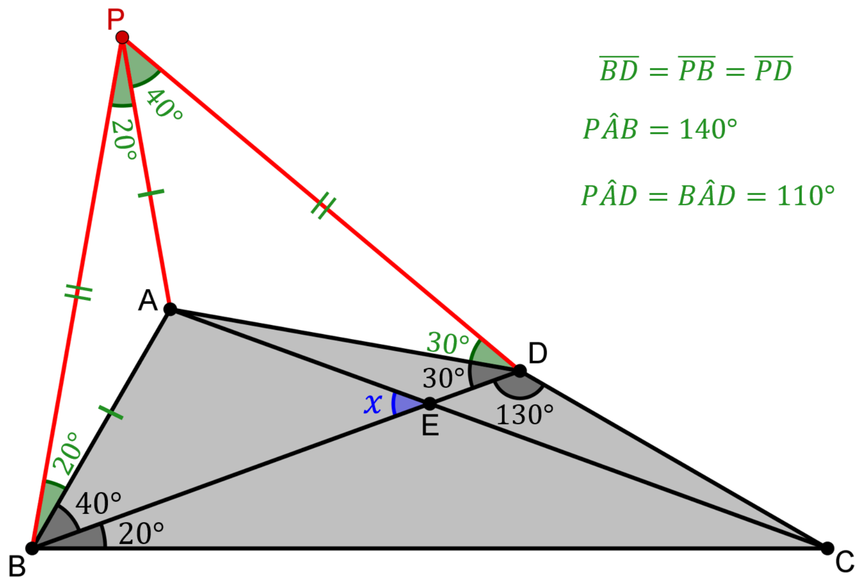
Inicialmente, pela soma dos ângulos internos do triângulo ABD, temos:

$$\begin{aligned} B\widehat{A}D + A\widehat{B}D + A\widehat{D}B &= 180^\circ \\ B\widehat{A}D \ + \ 40^\circ \ + \ 30^\circ &= 180^\circ \\ B\widehat{A}D &= 110^\circ \end{aligned}$$

No triângulo ABD, $A\widehat{D}B = 30^\circ$. Assim, podemos aplicar o resultado da proposição 2.4 que consiste obter como traçado auxiliar o triângulo equilátero BDP, sendo P o simétrico de B em relação à reta $\overleftrightarrow{AD}$. Além disso, o resultado da proposição 2.4 nos dá $PAD \equiv BAD$ e PAB isósceles de base $\overline{PB}$. Note que como $B\widehat{A}D$ é obtusângulo, então o ponto A está situado no interior do triângulo BDP de modo a termos: $\overline{BD} = \overline{DP} = \overline{BP}$, $\overline{AB} = \overline{AP}$,

$B\widehat{P}A = P\widehat{B}A = 20°$, $B\widehat{A}D = P\widehat{A}D = 110°$, $A\widehat{D}P = A\widehat{D}B = 30°$ *e* $P\widehat{A}B = 140°$, *como ilustra a figura 3.15.*

Figura 3.15 – Parte 1 da solução da questão 5



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

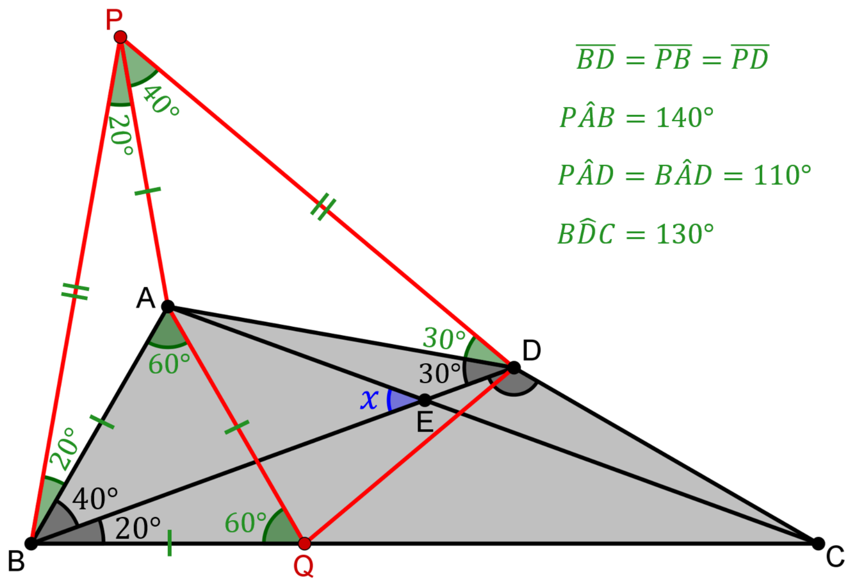
Observamos que $A\widehat{B}C = 60°$. *Então, tomamos um ponto* Q *sobre o segmento* $\overline{BC}$ *de modo que* $\overline{BQ} = \overline{AB}$ *e, consequentemente, o triângulo* ABQ *será equilátero. Notemos que realmente existe este ponto* Q*, pois* $\overline{BC} > \overline{AB}$:

- *No triângulo* BCD, $B\widehat{D}C = 130° > 30° = B\widehat{C}D$, *logo* $\overline{BC} > \overline{BD}$;
- *No triângulo* ABD, $B\widehat{A}D = 110° > 30° = A\widehat{D}B$, *logo* $\overline{BD} > \overline{AB}$;

por transitividade temos $\overline{BC} > \overline{BD} > \overline{AB}$.

Por este novo traçado auxiliar temos $\overline{AB} = \overline{AP} = \overline{BQ} = \overline{AQ}$ *e* $B\widehat{A}Q = B\widehat{Q}A = 60°$, *como ilustra a figura 3.16. Adicionaremos também como traçado auxiliar o segmento* $\overline{DQ}$.

Figura 3.16 – Parte 2 da solução da questão 5



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Os triângulos BPA e BDQ são congruentes pelo caso L.A.L de congruência de triângulos:

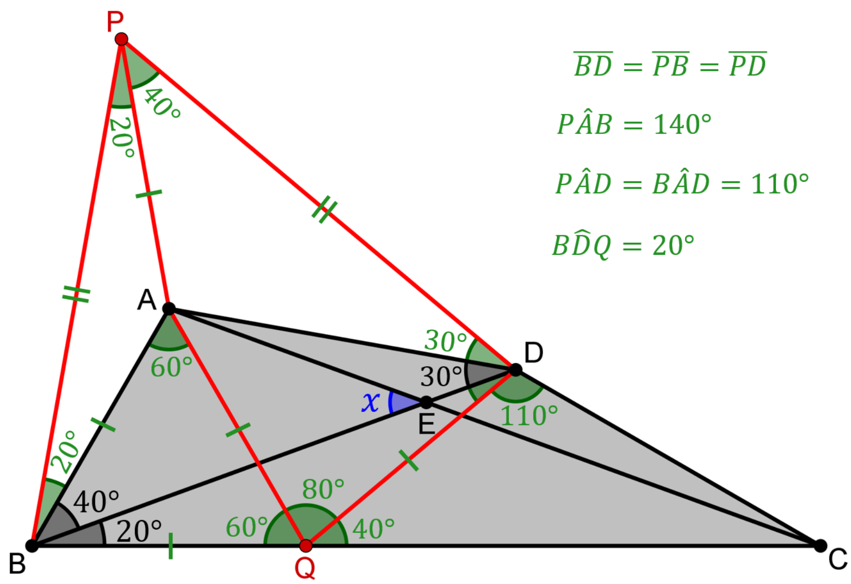
$$\begin{cases} \overline{BP} = \overline{BD} \\ P\widehat{B}A = 20^\circ = D\widehat{B}Q \\ \overline{BA} = \overline{BQ} \end{cases} \quad \overset{LAL}{\Longrightarrow} \quad BPA \equiv BDQ$$

Desta congruência, segue que BDQ é isósceles de base $\overline{BD}$, assim $\overline{DQ} = \overline{BQ}$, $B\widehat{D}Q = 20^\circ$ e $B\widehat{Q}D = 140^\circ$. Daí, obtemos as medidas dos ângulos $C\widehat{D}Q$ e $C\widehat{Q}D$:

$$\begin{aligned} C\widehat{D}Q &= B\widehat{D}C - B\widehat{D}Q \\ C\widehat{D}Q &= 130^\circ - 20^\circ \\ C\widehat{D}Q &= 110^\circ \end{aligned} \qquad \begin{aligned} C\widehat{Q}D &= 180^\circ - B\widehat{Q}D \\ C\widehat{Q}D &= 180^\circ - 140^\circ \\ C\widehat{Q}D &= 40^\circ \end{aligned}$$

A figura 3.17 ilustra as medidas dos ângulos $C\widehat{D}Q$ e $C\widehat{Q}D$ obtidas.

Figura 3.17 – Parte 3 da solução da questão 5



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Agora, vejamos que os triângulos PAD e QDC são congruentes pelo caso A.L.A de congruência de triângulos:

$$\begin{cases} A\widehat{P}D = 40^\circ = D\widehat{Q}C \\ \overline{PA} = \overline{QD} \\ P\widehat{A}D = 110^\circ = Q\widehat{D}C \end{cases} \qquad \overset{ALL}{\Longrightarrow} \qquad PAD \equiv QDC.$$

Desta congruência segue que $\overline{AD} = \overline{DC}$. Isso acarreta que DAC é isósceles de base $\overline{AC}$, assim $D\widehat{A}C = D\widehat{C}A$. E pela soma dos ângulos internos de DAC, temos:

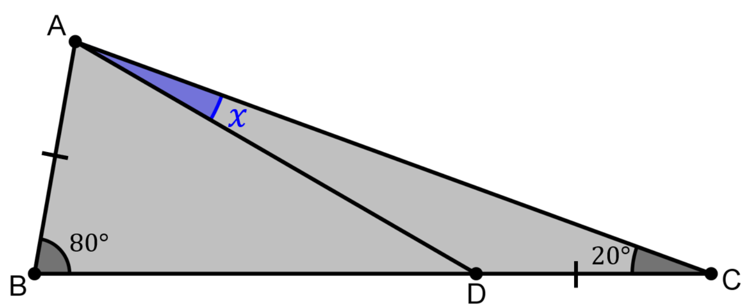
$$\begin{aligned} D\widehat{A}C + D\widehat{C}A + A\widehat{D}C &= 180^\circ \\ D\widehat{A}C + D\widehat{A}C + \left(A\widehat{D}B + B\widehat{D}C\right) &= 180^\circ \\ 2 \cdot D\widehat{A}C + (30^\circ + 130^\circ) &= 180^\circ \\ 2 \cdot D\widehat{A}C &= 180^\circ - 160^\circ \\ D\widehat{A}C &= 10^\circ. \end{aligned}$$

Concluindo, pelo teorema do ângulo externo no triângulo ADE, temos:

$$\begin{aligned} B\widehat{E}A &= E\widehat{A}D + E\widehat{D}A \\ x &= 10° \ + \ 30° \\ x &= 40°. \end{aligned}$$

Questão 6. Seja um triângulo ABC e D um ponto de $\overline{BC}$, tal que $\overline{AB} = \overline{CD}$. Se $A\widehat{B}C = 80°$ e $A\widehat{C}B = 20°$, conforme a figura 3.18. Determine a medida do ângulo $x = C\widehat{A}D$.

Figura 3.18 – Enunciado da questão 6



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Solução:

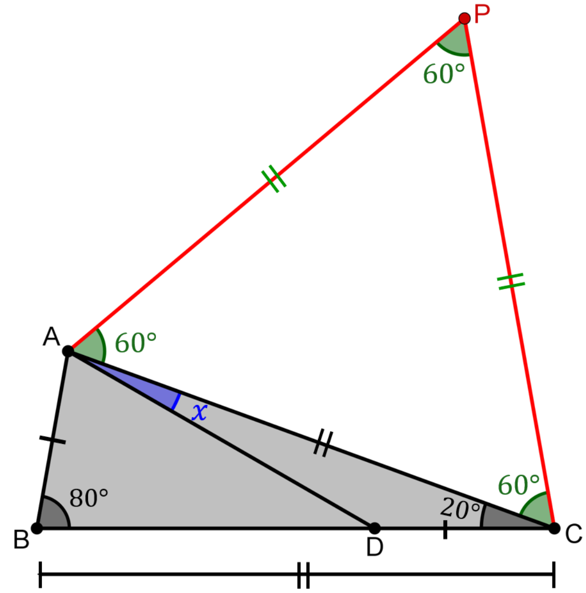
Notemos inicialmente que o triângulo ABC é isósceles de base $\overline{AB}$, pois pela soma dos ângulos internos do triângulo ABC temos:

$$\begin{aligned} C\widehat{A}B + C\widehat{B}A + A\widehat{C}B &= 180° \\ C\widehat{A}B + 80° + 20° &= 180° \\ C\widehat{A}B &= 80° \\ C\widehat{A}B &= C\widehat{B}A. \end{aligned}$$

Assim, $\overline{AC} = \overline{BC}$.

Agora aplicamos a ideia da Proposição 2.4 que é obter um triângulo equilátero. Neste caso, não partiremos de um ângulo de 30°, e sim traçando o triângulo equilátero ACP adjacente a ABC (sendo $\overline{AC}$ como um dos seus lados). Deste modo, teremos $\overline{AC} = \overline{CP} = \overline{AP}$, como ilustra a figura 3.19.

Figura 3.19 – Parte 1 da solução da questão 6



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

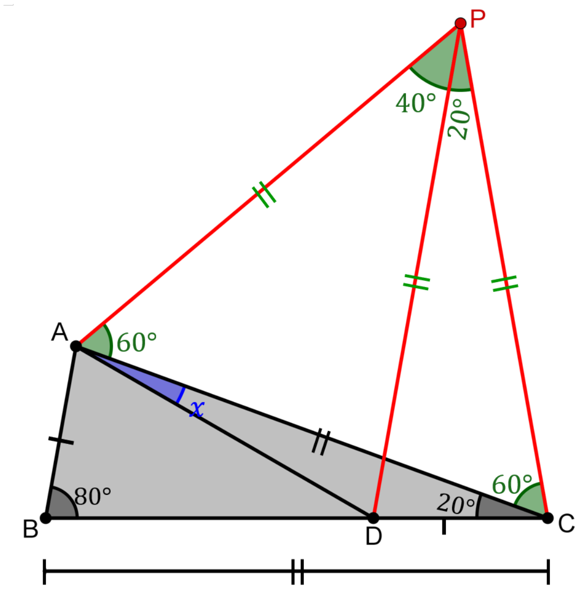
Traçamos o segmento $\overline{PD}$ *e mostramos que os triângulos* PCD *e* CBA *são congruentes pelo caso L.A.L. de congruência de triângulos:*

$$\begin{cases} \overline{CP} = \overline{BC} \\ P\widehat{C}D = P\widehat{C}A + A\widehat{C}D = 60^\circ + 20^\circ = 80^\circ = C\widehat{B}A \\ \overline{CD} = \overline{BA} \end{cases} \quad \overset{LAL}{\Longrightarrow} \quad PCD \equiv CBA.$$

Por esta congruência concluímos que o triângulo PCD *é isósceles de base* $\overline{CD}$*. Assim,* $\overline{DP} = \overline{CP}$, $C\widehat{D}P = D\widehat{C}P = 80^\circ$ *e* $C\widehat{P}D = 20^\circ$, *como ilustra a figura 3.20. Obtemos, como consequência, o valor de* $A\widehat{P}D$*:*

$$A\widehat{P}D = A\widehat{P}C - D\widehat{P}C = 60^\circ - 20^\circ = 40^\circ.$$

Figura 3.20 – Parte 2 da solução da questão 6



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

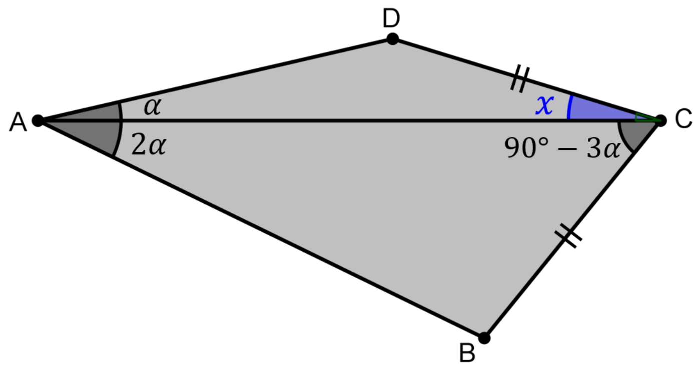
Como $\overline{PA} = \overline{PD}$, temos que o triângulo APD é isósceles de base $\overline{AD}$ com ângulos da base $P\widehat{D}A = P\widehat{A}D = P\widehat{A}C + C\widehat{A}D = 60° + x$. E pela soma dos ângulos internos do triângulo PAD, temos:

$$\begin{aligned} P\widehat{A}D + P\widehat{D}A + A\widehat{P}D &= 180° \\ (60° + x) \ + \ (60° + x) \ + \ 40° &= 180° \\ 2x &= 180° - 160° \\ x &= 10°. \end{aligned}$$

3.4 Questões referentes à técnica 4

Questão 7. Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo tal que $\overline{BC} = \overline{CD}$, $B\widehat{A}C = 2\alpha$, $C\widehat{A}D = \alpha$ e $A\widehat{C}B = 90° - 3\alpha$, conforme a figura 3.21. Determine a medida de $x = A\widehat{C}D$ em função de α:

Figura 3.21 – Enunciado da questão 7

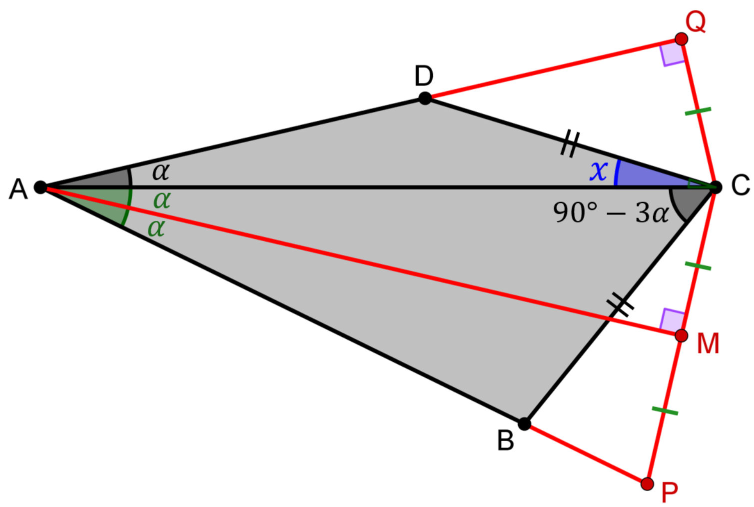


Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Solução:

Note que a diagonal $\overline{AC}$ *do quadrilátero* $ABCD$ *divide o ângulo* $B\widehat{A}D$ *na proporção* 1:2. *Assim, aplicamos o resultado da proposição 2.5 para obtermos os traçados auxiliares, conforme a figura 3.22, onde:* $AMP \equiv AMC \equiv AQC$, *em que* M *é o ponto médio de* $\overline{CP}$ *e* $\overline{AM}$ *a bissetriz de* $C\widehat{A}B$.

Figura 3.22 – Parte 1 da solução da questão 7



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

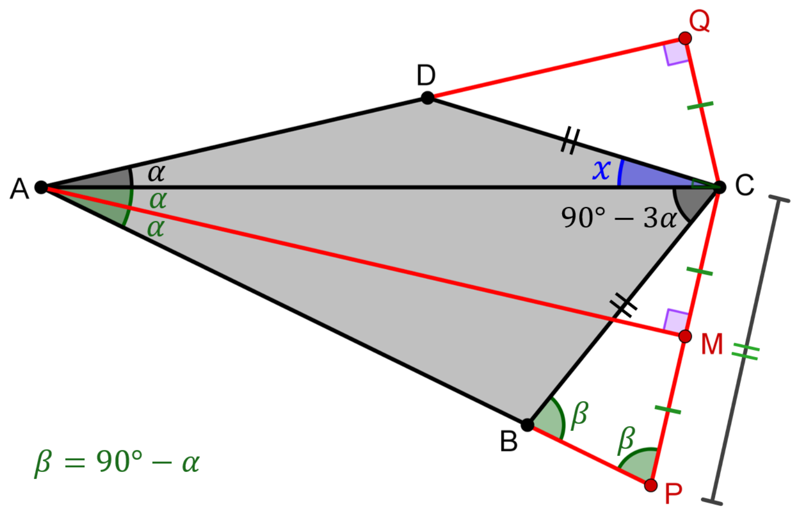
Afirmamos que o triângulo CBP *é isósceles de base* $\overline{BP}$, *pois é possível verificar que* $C\widehat{B}P = C\widehat{P}B$. *De fato, no triângulo retângulo* AMP, *os ângulos* $P\widehat{A}M = \alpha$ *e* $A\widehat{P}M$ *são complementares, logo* $C\widehat{P}B = A\widehat{P}M = 90° - P\widehat{A}M = 90° - \alpha$. *Já pelo teorema do ângulo externo, no triângulo* ABC, *temos* $C\widehat{B}P = B\widehat{A}C + B\widehat{C}A = 2\alpha + (90° - 3\alpha) = 90° - \alpha$.

Como o triângulo CBP *é isósceles de base* $\overline{BP}$, *segue que* $\overline{CB} = \overline{CP}$. *Consequentemente,*

$\overline{CD} = \overline{CP}$ *por transitividade. Além disso, obtemos que* $\overline{CD} = 2 \cdot \overline{CQ}$*, como ilustra a figura 3.23:*

$$\overline{CD} = \overline{CP} = \overline{CM} + \overline{MP} = \overline{CQ} + \overline{CQ} = 2 \cdot \overline{CQ}$$

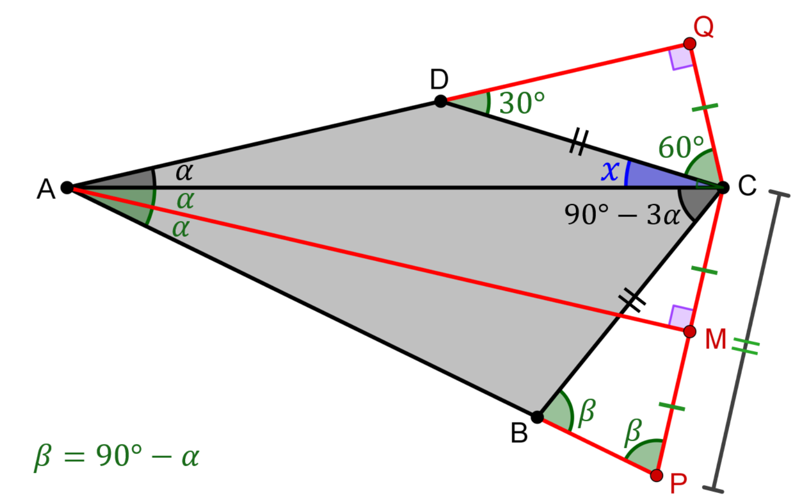
Figura 3.23 – Parte 2 da solução da questão 7



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Como CDQ *é um triângulo retângulo com o cateto* $\overline{CQ}$ *medindo a metade da hipotenusa* $\overline{CD}$*, temos que* CDQ *é um triângulo retângulo notável de ângulos* $30°$ *e* $60°$*. Desta forma, temos* $C\widehat{D}Q = 30°$ *e* $D\widehat{C}Q = 60°$*, como ilustra a figura 3.24.*

Figura 3.24 – Parte 3 da solução da questão 7



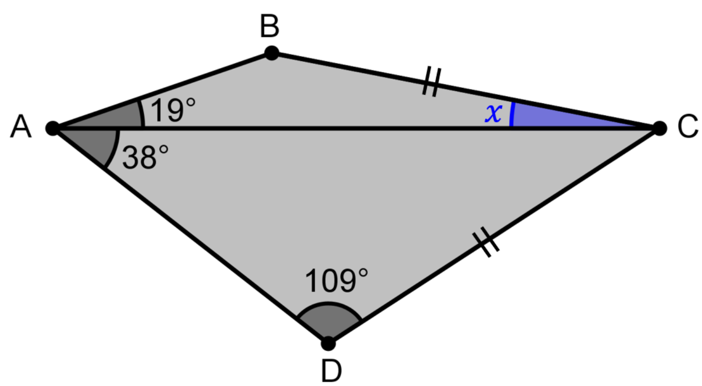
Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Determinamos então o valor do ângulo x, em função de α, por meio do ângulo $C\widehat{D}Q$ que é um dos ângulos externos do triângulo ACD:

$$\begin{aligned} C\widehat{D}Q &= D\widehat{A}C + D\widehat{C}A \\ 30^\circ &= \alpha \ + \ x \\ 30^\circ - \alpha &= x. \end{aligned}$$

Questão 8. Seja o quadrilátero convexo $ABCD$ tal que $\overline{BC} = \overline{CD}$, $B\widehat{A}C = 19^\circ$, $C\widehat{A}D = 38^\circ$ e $A\widehat{D}C = 109^\circ$, conforme a figura 3.25. Determine a medida do ângulo $x = A\widehat{C}B$:

Figura 3.25 – Enunciado da questão 8

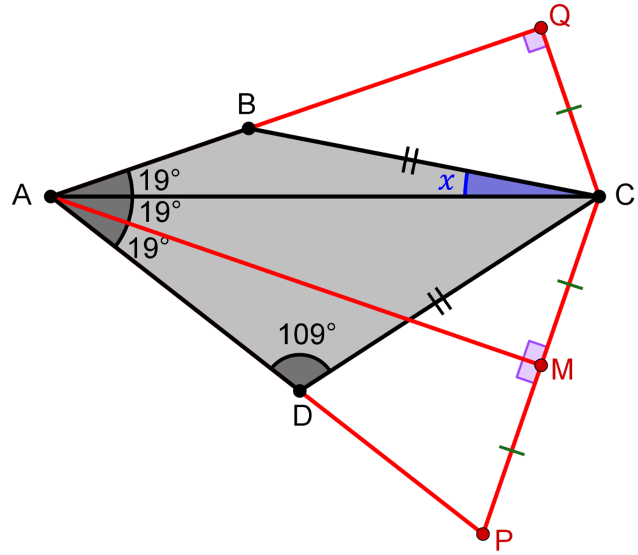


Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Solução:

Note que a diagonal $\overline{AC}$ do quadrilátero $ABCD$ divide o ângulo $B\widehat{A}D$ na proporção $1:2$ $\big(B\widehat{A}C = 19^\circ$ e $C\widehat{A}D = 38^\circ$. Assim, aplicamos o resultado da proposição 2.5 para obtermos os traçados auxiliares, conforme figura 3.26, em que $AMP \equiv AMC \equiv AQC$, M é ponto médio de $\overline{CP}$ e $\overrightarrow{AM}$ é a bissetriz de $C\widehat{A}D$.

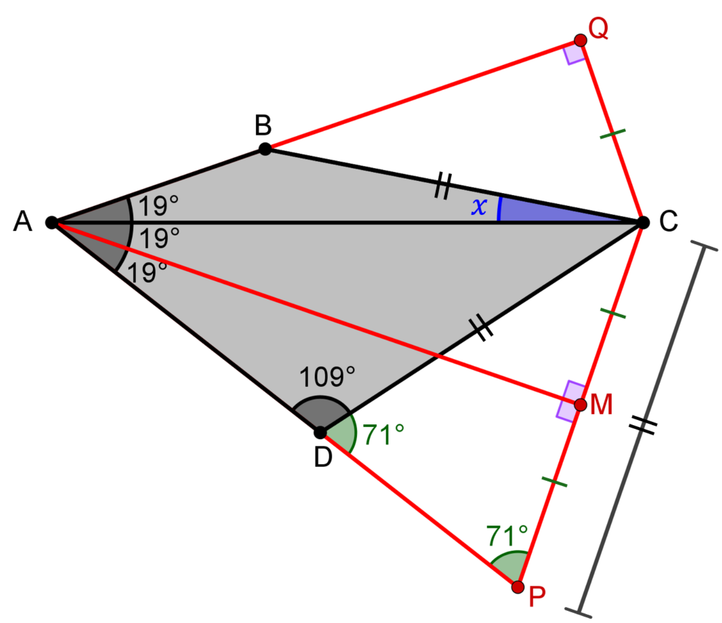
Figura 3.26 – Parte 1 da solução da questão 8



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Como A, D e P são colineares, temos $P\widehat{D}C = 180° - A\widehat{D}C = 180° - 109° = 71°$*. E como* AMP *é um triângulo retângulo em* M*, então* $A\widehat{P}M$ *e* $P\widehat{A}M$ *são ângulos complementares, logo* $D\widehat{P}C = A\widehat{P}M = 90° - P\widehat{A}M = 90° - 19° = 71°$*. Assim* $P\widehat{D}C = D\widehat{P}C = 71°$ *e concluímos que* CDP *é isósceles de base* $\overline{DP}$*. Segue daí que* $\overline{CP} = \overline{CD}$*, como ilustrado na figura 3.27.*

Figura 3.27 – Parte 2 da solução da questão 8



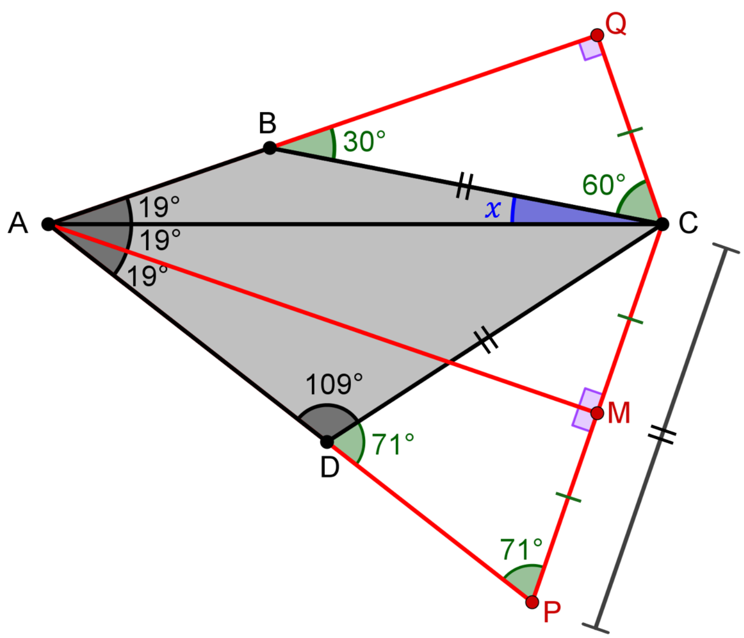
Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Notemos que o triângulo retângulo BCQ é um triângulo retângulo notável de ângulos $30°$ *e* $60°$*, pois o cateto* $\overline{CQ}$ *mede metade da hipotenusa* $\overline{BC}$*:*

$$\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{CP} = \overline{CM} + \overline{MP} = \overline{CQ} + \overline{CQ} = 2 \cdot \overline{CQ}$$

deste modo, temos $B\widehat{C}Q = 60°$ *e* $C\widehat{B}Q = 30°$*, como ilustrado na figura 3.28.*

Figura 3.28 – Parte 3 da solução da questão 8



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

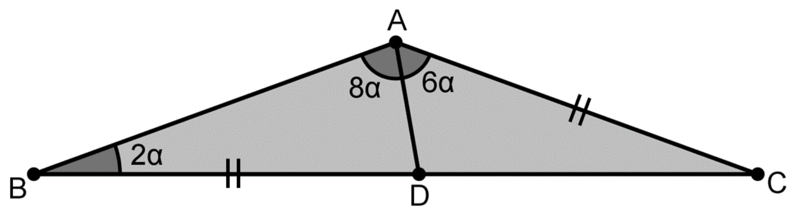
De $AMP \equiv AQC$ *segue* $A\widehat{C}Q = A\widehat{P}M = 71°$*. Daí, podemos determinar a medida do ângulo de* $x = A\widehat{C}B$*:*

$$\begin{aligned} A\widehat{C}Q &= A\widehat{C}B + B\widehat{C}Q \\ A\widehat{P}M &= A\widehat{C}B + B\widehat{C}Q \\ 71° &= x + 60° \\ x &= 11°. \end{aligned}$$

3.5 Questões referentes à técnica 5

Questão 9. Considere um triângulo ABC com ceviana interna $\overline{AD}$ de modo que $\overline{AC} = \overline{BD}$, $A\widehat{B}D = 2\alpha$, $B\widehat{A}D = 8\alpha$ e $C\widehat{A}D = 6\alpha$, conforme a figura 3.29. Calcule o valor de α.

Figura 3.29 – Enunciado da questão 9



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

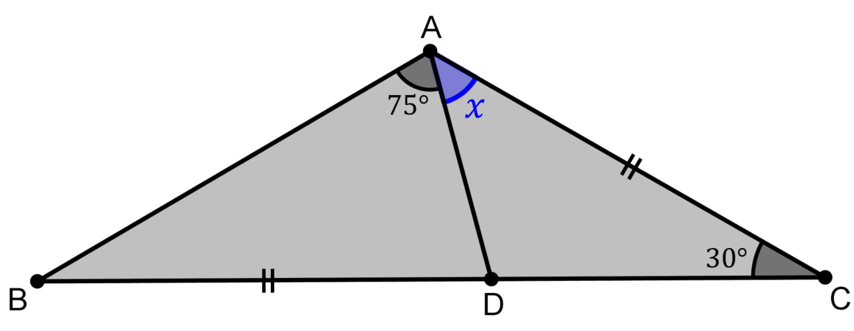
Solução:

Notemos que ABC satisfaz as condições suficientes para aplicarmos a proposição 2.6, pois tomando $\alpha_1 = 2\alpha$ e $\theta_1 = 6\alpha$, temos $B\widehat{A}D = \alpha_1 + \theta_1$ e $\overline{AC} = \overline{BD}$. Assim, segue pela proposição 2.6 que ABC é isósceles de base $\overline{BC}$. Isso significa que $A\widehat{C}B = A\widehat{B}C = 2\alpha$. Portanto, somando os ângulos internos de ABC, temos:

$$\begin{aligned} A\widehat{B}C + A\widehat{C}B + B\widehat{A}C &= 180^\circ \\ 2\alpha + 2\alpha + (8\alpha + 6\alpha) &= 180^\circ \\ 18\alpha &= 180^\circ \\ \alpha &= 18^\circ. \end{aligned}$$

Questão 10. Seja um triângulo ABC e D um ponto de $\overline{BC}$ tal que $\overline{AC} = \overline{BD}$. Se $A\widehat{C}B = 30^\circ$ e $B\widehat{A}D = 75^\circ$, conforme a figura 3.30, determine o valor do ângulo $x = C\widehat{A}D$.

Figura 3.30 – Enunciado da questão 10

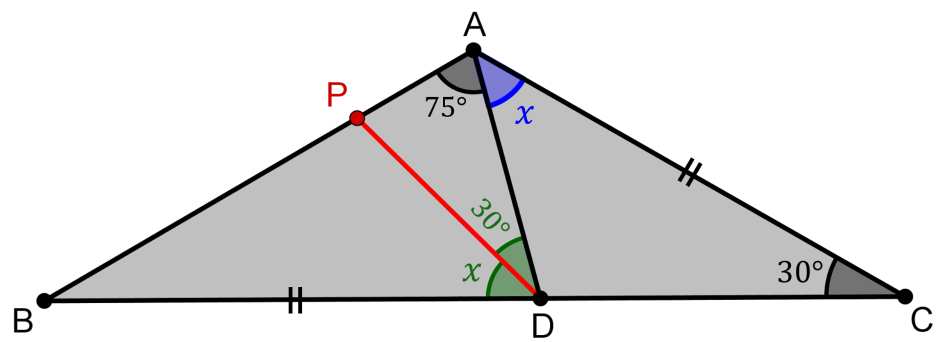


Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Solução:

Pelo teorema do ângulo externo no triângulo ACD, temos que $A\widehat{D}B = D\widehat{C}A + D\widehat{A}C = 30^\circ + x$. Assim, faremos o traçado auxiliar que consiste no segmento $\overline{DP}$, sendo $P \in \overline{AB}$ tal que $A\widehat{D}P = 30^\circ$ e, consequentemente, $P\widehat{D}B = x$, como ilustrado na figura 3.31.

Figura 3.31 – Parte 1 da solução da questão 10



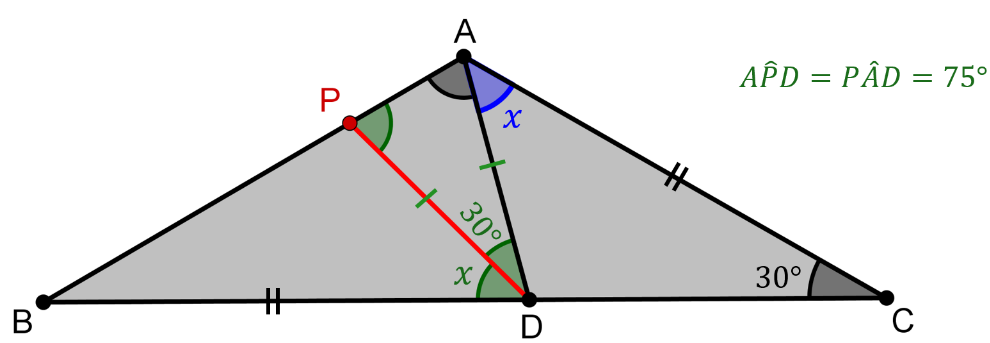
Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Com este traçado auxiliar, notemos que o triângulo ADP é isósceles de base $\overline{AP}$, visto que pela soma dos ângulos internos temos $A\widehat{P}D = P\widehat{A}D$:

$$\begin{aligned} A\widehat{P}D + P\widehat{A}D + A\widehat{D}P &= 180^\circ \\ A\widehat{P}D \ + \ 75^\circ \ + \ 30^\circ &= 180^\circ \\ A\widehat{P}D &= 75^\circ. \end{aligned}$$

Sendo ADP isósceles de base $\overline{AP}$, segue que $\overline{AD} = \overline{PD}$, como ilustra a figura 3.32.

Figura 3.32 – Parte 2 da solução da questão 10



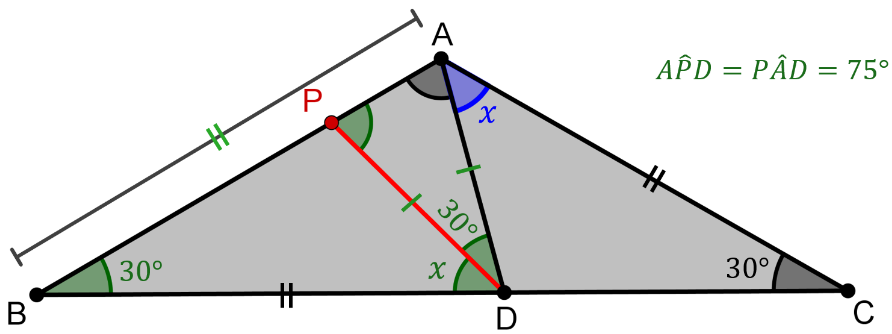
Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Observamos que os triângulos CAD e BDP são congruentes pelo caso L.A.L. de congruência de triângulos:

$$\begin{cases} \overline{CA} = \overline{BD} \\ C\widehat{A}D = \ x \ = B\widehat{D}P \\ \overline{AD} = \overline{DP} \end{cases} \qquad \overset{LAL}{\Longrightarrow} \qquad CAD \equiv BDP.$$

Desta congruência segue que $D\widehat{B}P = A\widehat{C}D = 30°$. *O que implica que o triângulo* ABC *é isósceles de base* $\overline{BC}$, *como ilustrado na figura 3.33.*

Figura 3.33 – Parte 3 da solução da questão 10



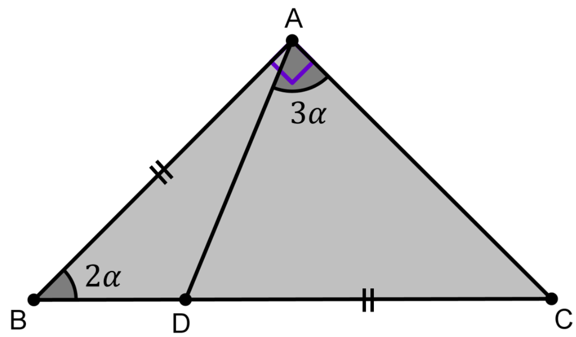
Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Pela soma dos ângulos internos do triângulo ABC, *determinamos a medida do ângulo* x:

$$\begin{aligned} A\widehat{B}C + A\widehat{C}B + B\widehat{A}C &= 180° \\ 30° \ + \ 30° \ + \ (75° \ + \ x) &= 180° \\ x &= 45°. \end{aligned}$$

Questão 11. Seja ABC um triângulo retângulo em A, e D um ponto de $\overline{BC}$ tal que $\overline{AB} = \overline{CD}$. Se $A\widehat{B}D = 2\alpha$ e $C\widehat{A}D = 3\alpha$, conforme a figura 3.34, determine o valor de α.

Figura 3.34 – Enunciado da questão 11



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

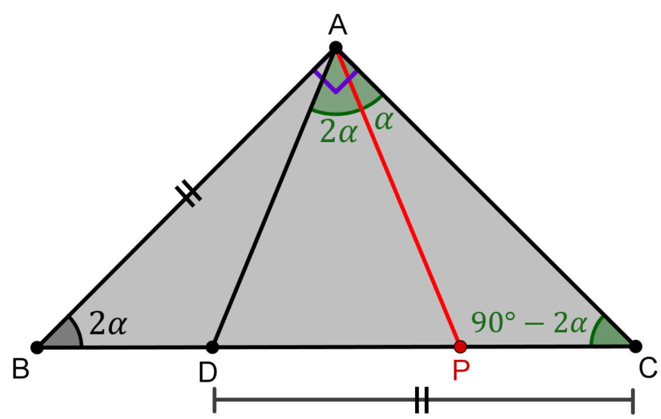
Solução:

Inicialmente, como ABC é um triângulo retângulo em A, notemos que $A\widehat{B}C$ e $A\widehat{C}B$ são complementares e segue que:

$$A\widehat{C}B + A\widehat{B}C = 90^\circ \implies A\widehat{C}B + 2\alpha = 90^\circ \implies A\widehat{C}B = 90^\circ - 2\alpha.$$

Tomemos o segmento $\overline{AP}$ como traçado auxiliar, $P \in \overline{CD}$, de modo que $D\widehat{A}P = 2\alpha$ e, consequentemente, $C\widehat{A}P = \alpha$, como ilustra a figura 3.35.

Figura 3.35 – Parte 1 da solução da questão 11



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Pela teorema do ângulo externo no triângulo ACP, temos:

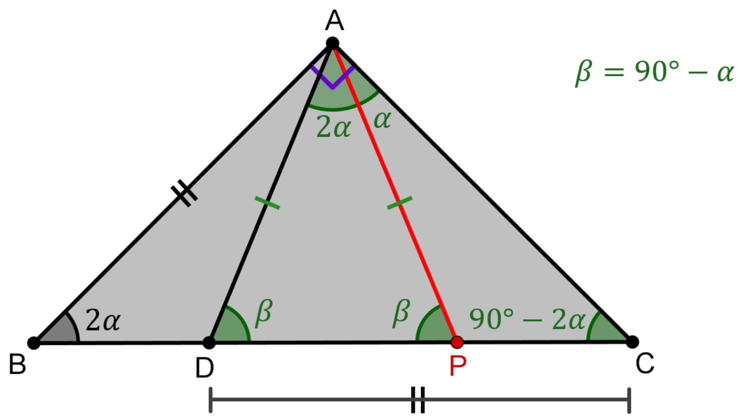
$$\begin{aligned} A\widehat{P}D &= P\widehat{A}C + P\widehat{C}A \\ A\widehat{P}D &= \alpha + (90^\circ - 2\alpha) \\ A\widehat{P}D &= 90^\circ - \alpha. \end{aligned}$$

Agora, pela soma dos ângulos do triângulo ADP, temos:

$$\begin{aligned} A\widehat{D}P + A\widehat{P}D + D\widehat{A}P &= 180^\circ \\ A\widehat{D}P + (90^\circ - \alpha) + 2\alpha &= 180^\circ \\ A\widehat{D}P &= 90^\circ - \alpha. \end{aligned}$$

Ou seja, mostramos que $A\widehat{D}P = A\widehat{P}D = 90^\circ - \alpha$ e concluímos que o triângulo ADP é isósceles de base $\overline{DP}$. Daí, segue que $\overline{AD} = \overline{AP}$, como ilustra a figura 3.36.

Figura 3.36 – Parte 2 da solução da questão 11



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Notemos que os triângulos BAP e CDA são congruentes pelo caso L.A.L. de congruência de triângulos:

$$\begin{cases} \overline{BA} = \overline{CD} \\ B\widehat{A}P = B\widehat{A}C - C\widehat{A}P = 90^\circ - \alpha = C\widehat{D}A \\ \overline{AP} = \overline{DA} \end{cases} \qquad \overset{LAL}{\Longrightarrow} \qquad BAP \equiv CDA.$$

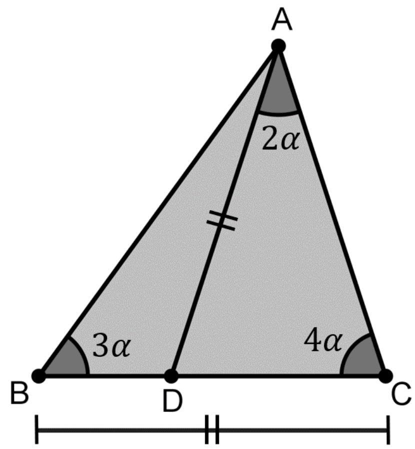
Desta congruência segue que $A\widehat{B}P = D\widehat{C}A$, ou seja:

$$\begin{aligned} A\widehat{B}P &= D\widehat{C}A \\ 2\alpha &= 90^\circ - 2\alpha \\ \alpha &= 22,5^\circ. \end{aligned}$$

Pelos fatos provados acima, observamos que o triângulo ABC é isósceles de base $\overline{BC}$ e $B\widehat{A}D = \alpha$.

Questão 12. Seja um triângulo ABC e D um ponto pertencente ao segmento $\overline{BC}$ de modo que $\overline{AD} = \overline{BC}$, $A\widehat{B}C = 3\alpha$, $A\widehat{C}B = 4\alpha$ e $C\widehat{A}D = 2\alpha$, conforme a figura 3.37. Determine o valor de α.

Figura 3.37 – Enunciado da questão 12



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

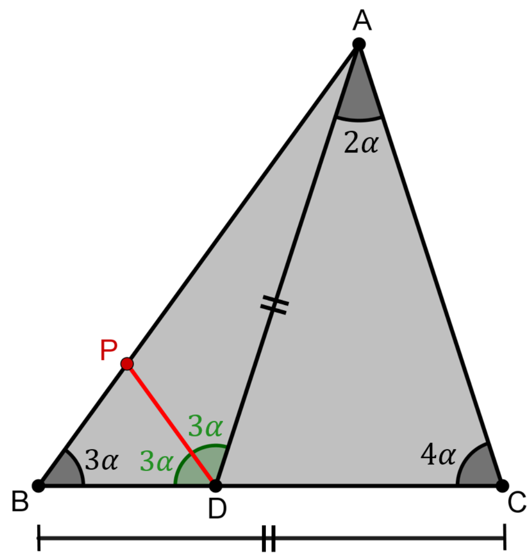
Solução:

Pelo teorema do ângulo externo, no triângulo ACD, temos:

$$A\widehat{D}B = D\widehat{A}C + D\widehat{C}A \quad \Longrightarrow \quad A\widehat{D}B = 2\alpha \ + \ 4\alpha \quad \Longrightarrow \quad A\widehat{D}B = 6\alpha.$$

Traçamos $\overline{DP}$ no triângulo ABD como sendo a bissetriz do ângulo $A\widehat{D}B$. Com isso obtemos $A\widehat{D}P = P\widehat{D}B = 3\alpha$, como ilustra a figura 3.38.

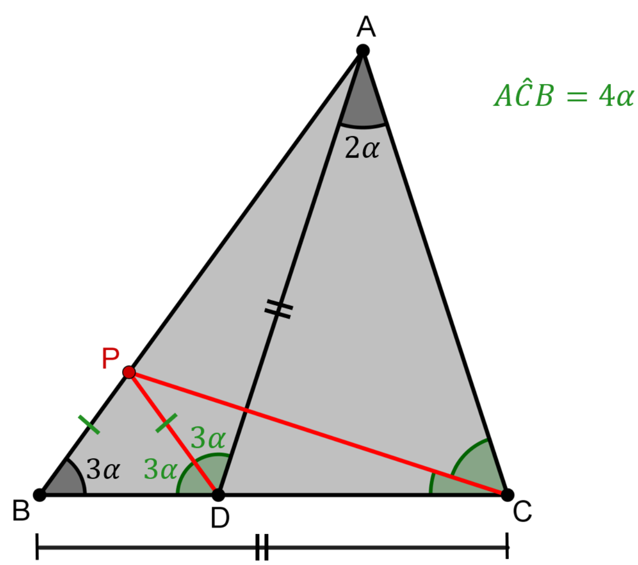
Figura 3.38 – Parte 1 da solução da questão 12



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Deste traçado obtemos o triângulo PBD isósceles de base $\overline{BD}$, pois $P\widehat{B}D = 3\alpha = P\widehat{D}B$. Assim, temos que $\overline{PB} = \overline{PD}$. Tracemos agora o segmento $\overline{PC}$, como ilustrado na figura 3.39.

Figura 3.39 – Parte 2 da solução da questão 12



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

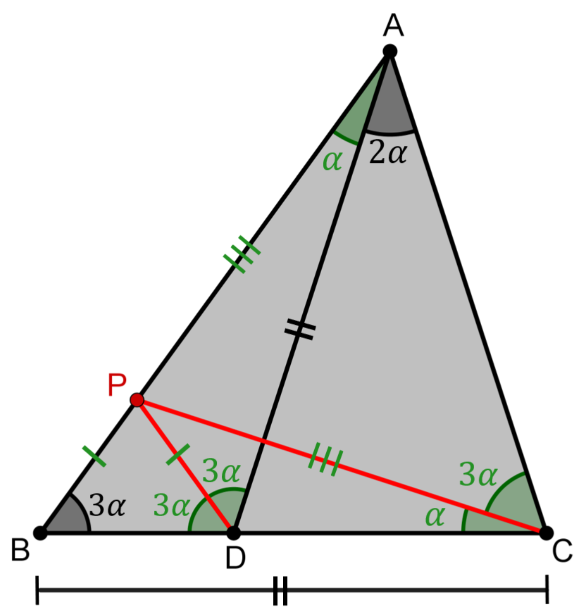
Verificaremos que os triângulos ADP e CBP são congruentes pelo caso L.A.L. de congruência de triângulos.

$$\begin{cases} \overline{AD} = \overline{CB} \\ A\widehat{D}P = 3\alpha = C\widehat{B}P \\ \overline{DP} = \overline{BP} \end{cases} \qquad \overset{LAL}{\Longrightarrow} \qquad ADP \equiv CBP.$$

Desta congruência de triângulos segue que $\overline{PA} = \overline{PC}$. *O que implica que o triângulo* PAC *é isósceles de base* $\overline{AC}$ *e deste modo* $P\widehat{A}C = P\widehat{C}A$. *Segue também desta congruência* $P\widehat{A}D = P\widehat{C}B$. *Assim, podemos expressar* $P\widehat{A}D$ *em função de* α, *como ilustra a figura 3.40:*

$$\begin{aligned} P\widehat{A}C &= P\widehat{C}A \\ P\widehat{A}D + D\widehat{A}C &= A\widehat{C}B - P\widehat{C}B \\ P\widehat{A}D + 2\alpha &= 4\alpha - P\widehat{A}D \\ 2 \cdot P\widehat{A}D &= 4\alpha - 2\alpha \\ P\widehat{A}D &= \alpha. \end{aligned}$$

Figura 3.40 – Parte 3 da solução da questão 12



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Assim, concluímos que o triângulo ABC é isósceles de base $\overline{AB}$, pois:

$$\begin{aligned} B\widehat{A}C &= B\widehat{A}D + D\widehat{A}C \\ B\widehat{A}C &= \alpha + 2\alpha \\ B\widehat{A}C &= 3\alpha \\ B\widehat{A}C &= A\widehat{B}C. \end{aligned}$$

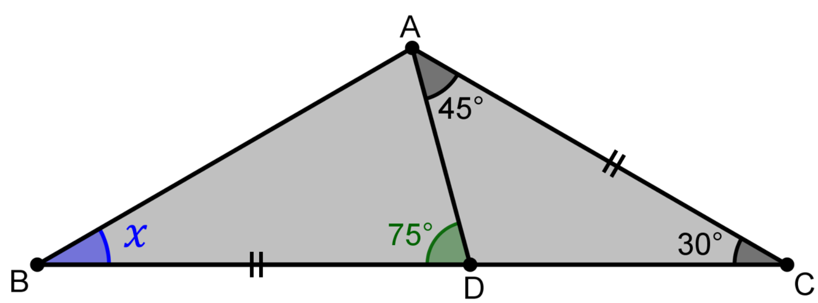
Pela soma dos ângulos internos de ABC determinamos o valor de α:

$$\begin{aligned} A\widehat{B}C + B\widehat{A}C + A\widehat{C}B &= 180° \\ 3\alpha + 3\alpha + 4\alpha &= 180° \\ 10\alpha &= 180° \\ \alpha &= 18°. \end{aligned}$$

3.6 Questões referentes à técnica 6

Questão 13. Seja ABC um triângulo e D um ponto de $\overline{BC}$ tal que $\overline{AC} = \overline{BD}$. Se $A\widehat{C}B = 30°$ e $C\widehat{A}D = 45°$, conforme a figura 3.41, determine a medida do ângulo $x = A\widehat{B}C$.

Figura 3.41 – Enunciado da questão 13



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Solução:

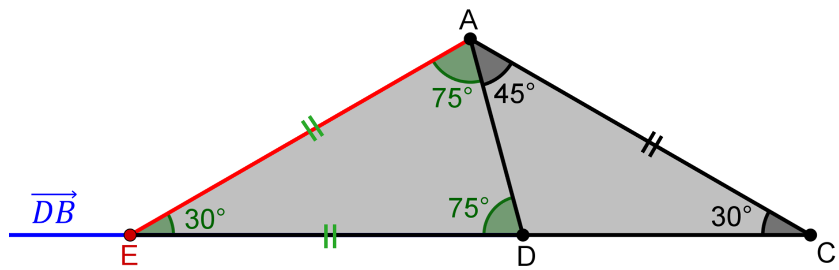
Pelo teorema do ângulo externo no triângulo ACD, em D, temos:

$$\begin{aligned} B\widehat{D}A &= D\widehat{A}C + D\widehat{C}A \\ B\widehat{D}A &= 45° + 30° \\ B\widehat{D}A &= 75°. \end{aligned}$$

Notemos que é possível aplicar a proposição 2.11 no triângulo ACD, pois $A\widehat{C}D$ e $B\widehat{D}A$ apresentam as condições necessárias. De fato, tomando $\alpha = 15°$, verificamos que $A\widehat{C}D =$

$30° = 2\alpha$ *e* $B\widehat{D}A = 75° = 90° - \alpha$. *Portanto, pela proposição 2.11 tomamos o ponto* E *sobre a semirreta* $\overrightarrow{DB}$ *de modo que os triângulos* ACE *e* ADE *sejam isósceles de base* $\overline{CE}$ *e* $\overline{AD}$ *com* $\overline{AE} = \overline{DE} = \overline{AC}$, $A\widehat{E}D = A\widehat{C}D = 30°$ *e* $E\widehat{A}D = E\widehat{D}A = 75°$ *(conforme a figura 3.42).*

Figura 3.42 – Parte 1 da solução da questão 13



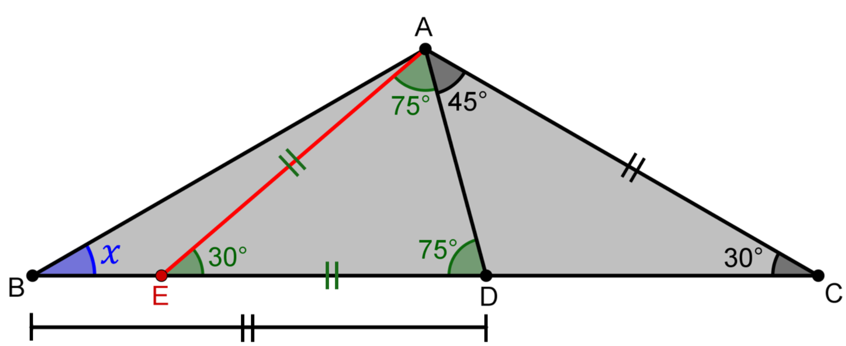
Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Agora, notemos que $\overline{BD} = \overline{AC} = \overline{ED}$. *Usando deste fato, mostraremos que o ponto* E *coincide com* B. *Para isso, lembramos que* E *é um ponto sobre a semirreta* $\overrightarrow{DB}$, *mas distinto do ponto* D, *pois determina o triângulo* ADE *pela proposição 2.11.*

- *Se* E *pertence ao segmento* $\overline{BD}$ *(como ilustra a figura 3.43), temos:*

$$\overline{BD} = \overline{BE} + \overline{ED} \quad \Longrightarrow \quad \overline{BE} = 0 \quad \Longrightarrow \quad E \text{ coincide com } B$$

Figura 3.43 – Parte 2 da solução da questão 13

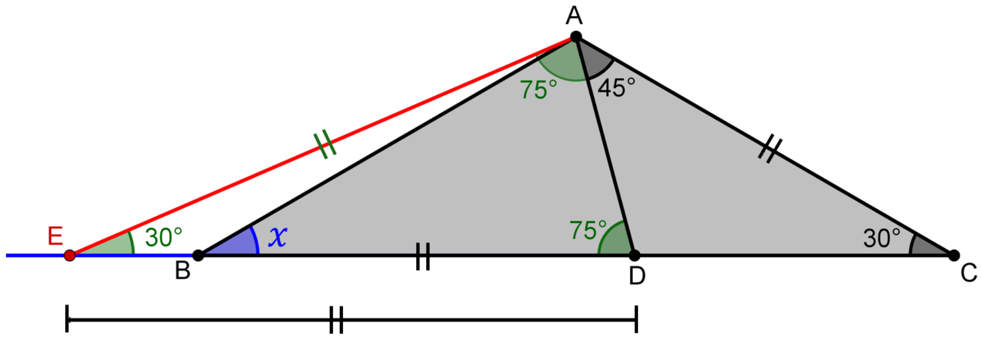


Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

- *Se* E *pertence à semirreta oposta a* $\overrightarrow{BD}$ *(como ilustra a figura 3.44), temos:*

$$\overline{ED} = \overline{EB} + \overline{BD} \quad \Longrightarrow \quad \overline{EB} = 0 \quad \Longrightarrow \quad E \text{ coincide com } B$$

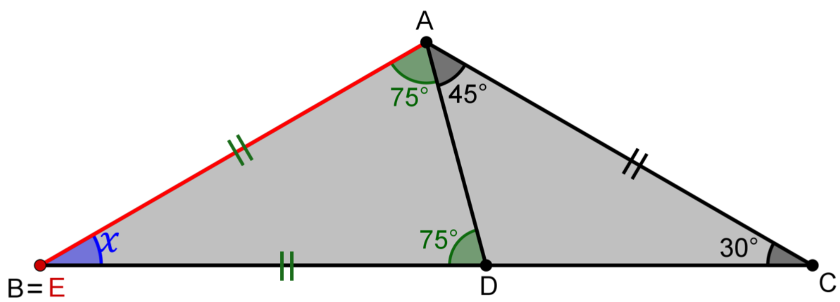
Figura 3.44 – Parte 3 da solução da questão 13



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Portanto, concluímos que a única possibilidade que resta é que o ponto E coincide com B (como ilustra a figura 3.45). Assim, o triângulo ABC é isósceles de base $\overline{BC}$. Logo, $x = A\widehat{B}C = A\widehat{C}B = 30°$.

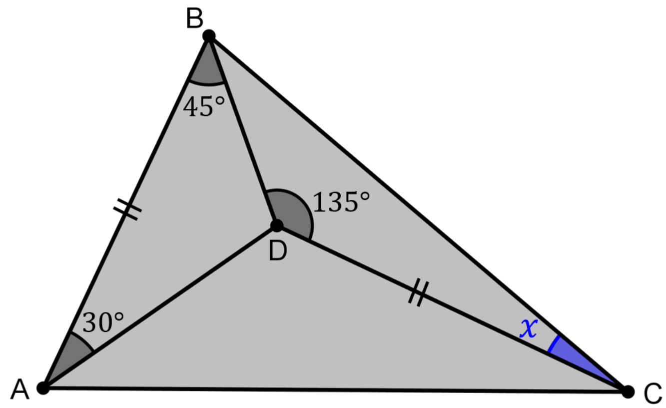
Figura 3.45 – Parte 4 da solução da questão 13



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Questão 14. Seja um triângulo ABC com D um ponto em seu interior de modo que $\overline{AB} = \overline{CD}$ e temos as medidas dos ângulos: $B\widehat{A}D = 30°$, $A\widehat{B}D = 45°$ e $B\widehat{D}C = 135°$, conforme a figura 3.46. Determine a medida do ângulo $x = B\widehat{C}D$:

Figura 3.46 – Enunciado da questão 14

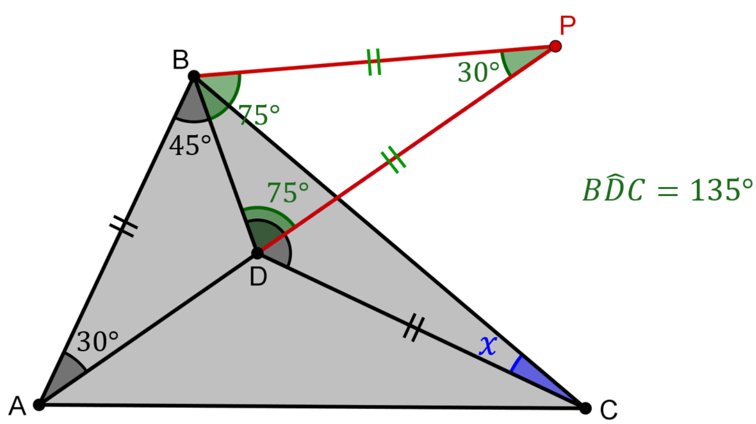


Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Solução:

Denotemos o ângulo externo do triângulo ABD, em D, por β e temos que esse ângulo mede $75°$ ($\beta = D\widehat{A}B + D\widehat{B}A = 30° + 45°$). A partir daí, notemos que o triângulo ABD satisfaz as condições da proposição 2.11: fazendo $\alpha = 15°$, tem-se $B\widehat{A}D = 30° = 2\alpha$ e $\beta = 75° = 90° - \alpha$. Portanto, aplicamos o resultado da proposição 2.11 para traçar o ponto P sobre a semirreta $\overrightarrow{AD}$ e obtemos os triângulos isósceles ABP e PBD de bases $\overline{AP}$ e $\overline{BD}$ de modo que $\overline{AB} = \overline{BP} = \overline{PD}$, $B\widehat{A}D = B\widehat{P}D = 30°$ e $P\widehat{B}D = P\widehat{D}B = 75°$ (como ilustra a figura 3.47).

Figura 3.47 – Parte 1 da solução da questão 14



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

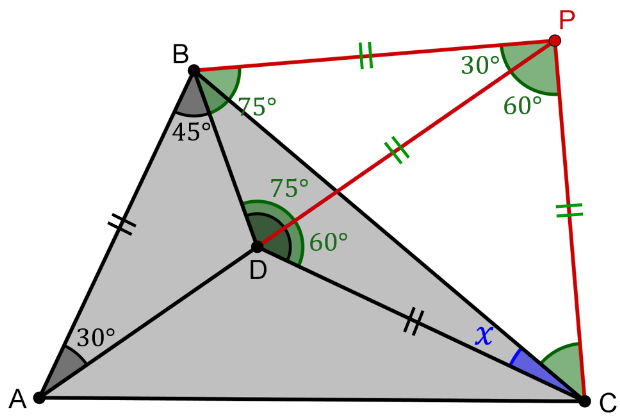
Notemos que $C\widehat{D}P = B\widehat{D}C - P\widehat{D}B = 135° - 75° = 60°$.

O triângulo PCD *é isósceles de base* $\overline{PC}$*, pois* $\overline{PD} = \overline{CD}$*. Isso implica em* $C\widehat{P}D = P\widehat{C}D$*. Daí, pela soma dos ângulos internos de* PCD*, temos:*

$$\begin{aligned} P\widehat{C}D + C\widehat{P}D + C\widehat{D}P &= 180^\circ \\ P\widehat{C}D + P\widehat{C}D + 60^\circ &= 180^\circ \\ 2 \cdot P\widehat{C}D &= 120^\circ \\ P\widehat{C}D &= 60^\circ. \end{aligned}$$

Assim, concluímos que o triângulo PCD *é equilátero, pois* $P\widehat{C}D = C\widehat{P}D = C\widehat{D}P = 60^\circ$*, como ilustra a figura 3.48.*

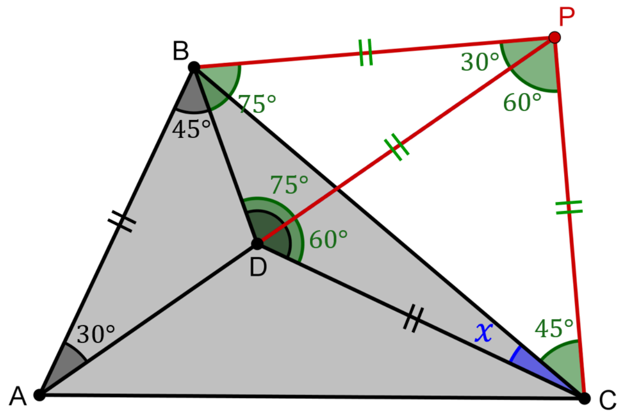
Figura 3.48 – Parte 2 da solução da questão 14



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Agora, observamos que o triângulo BPC *é retângulo e isósceles. Como* $\overline{PB} = \overline{PC}$*, isso justifica* BPC *ser isósceles de base* $\overline{BC}$*. E* BPC *é retângulo porque* $B\widehat{P}C$ *é um ângulo reto:* $B\widehat{P}C = B\widehat{P}D + D\widehat{P}C = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$*. Deste modo, obtemos* $P\widehat{B}C = P\widehat{C}B = 45^\circ$*, como ilustra a figura 3.49.*

Figura 3.49 – Parte 3 da solução da questão 14



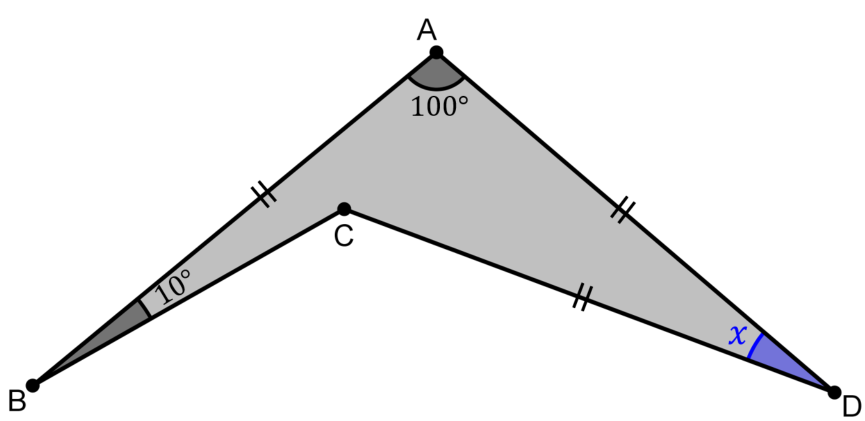
Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Usando agora as medidas de $P\widehat{C}D$ e $P\widehat{C}B$ determinamos a medida do ângulo $x = B\widehat{C}D$:

$$
\begin{aligned}
P\widehat{C}D &= P\widehat{C}B + B\widehat{C}D \\
60^\circ &= 45^\circ + x \\
15^\circ &= x
\end{aligned}
$$

Questão 15. Considere um quadrilátero $ABCD$ não convexo em C tal que $A\widehat{B}C = 10^\circ$, $B\widehat{A}D = 100^\circ$ e $\overline{AB} = \overline{AD} = \overline{CD}$, conforme a figura 3.50. Calcule a medida do ângulo $x = A\widehat{D}C$.

Figura 3.50 – Enunciado da questão 15

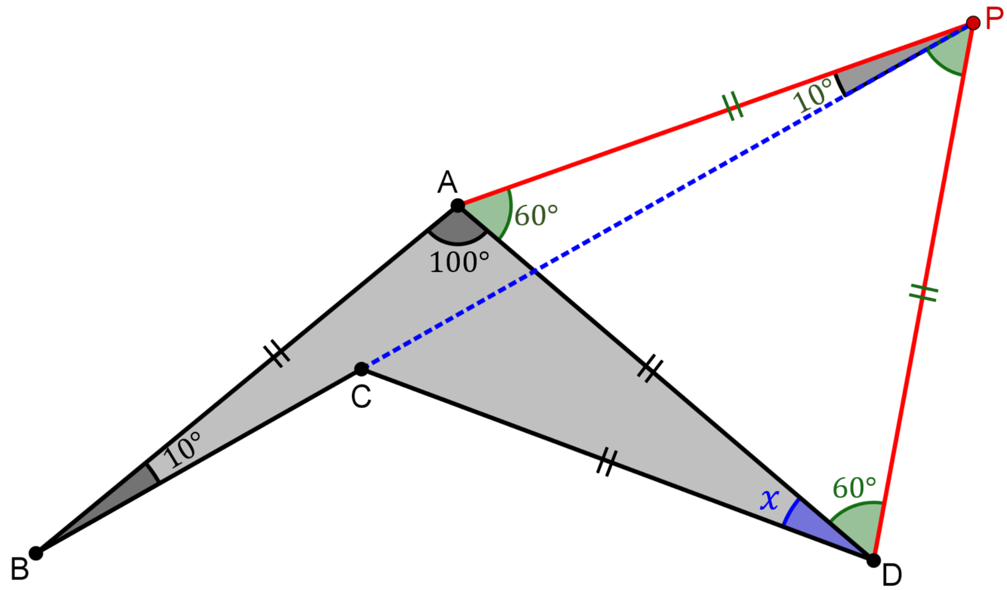


Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Solução:

Notemos que o quadrilátero $ABCD$ satisfaz as condições suficientes para aplicarmos a proposição 2.12, pois $\overline{AB} = \overline{AD}$ *e* $B\widehat{A}D = 120° - 2 \cdot A\widehat{B}C$. *Marcamos o ponto* P *pela proposição 2.12 de modo que o triângulo* ABP *seja isósceles de base* $\overline{BP}$ *e o triângulo* ADP *equilátero. Destacamos que deste traçado temos* $\overline{AP} = \overline{AD} = \overline{PD} = \overline{AB} = \overline{CD}$ *e* $A\widehat{P}B = A\widehat{B}P = 10°$, *como ilustra a figura 3.51.*

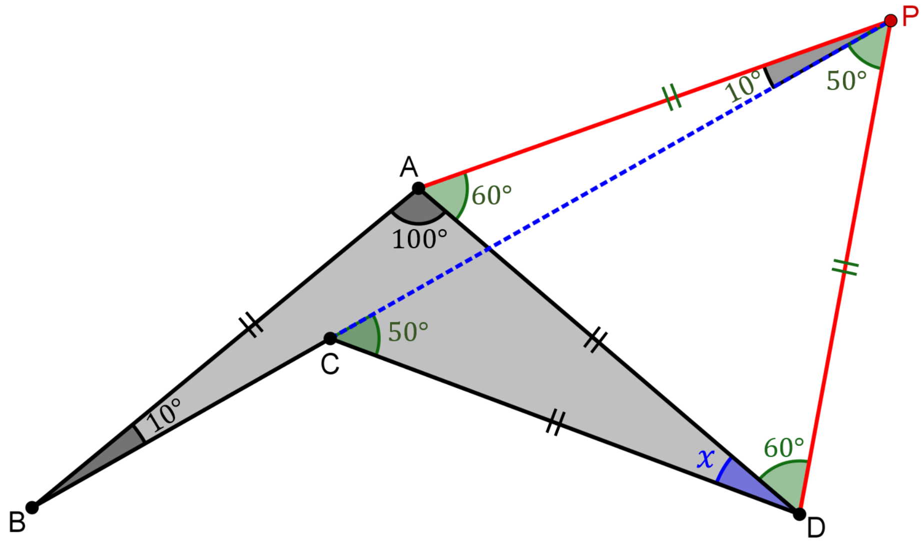
Figura 3.51 – Parte 1 da solução da questão 15



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Notemos que $C\widehat{P}D = A\widehat{P}D - A\widehat{P}B = 60° - 10° = 50°$. *E o triângulo* CDP *é isósceles de base* $\overline{CP}$, *pois* $\overline{CD} = \overline{DP}$. *Assim, obtemos* $P\widehat{C}D = C\widehat{P}D = 50°$, *como ilustra a figura 3.52.*

Figura 3.52 – Parte 2 da solução da questão 15



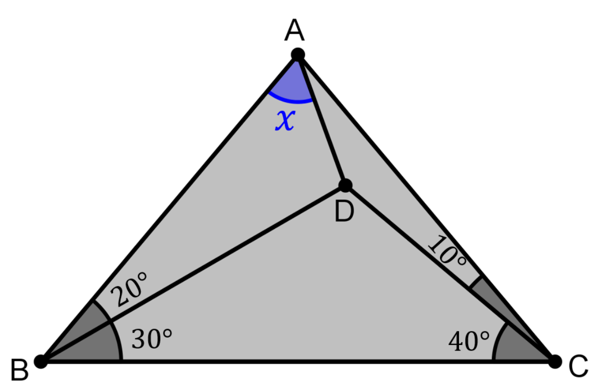
Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Pela soma dos ângulos internos do triângulo CDP, obtemos a medida do ângulo $x = A\widehat{D}C$:

$$\begin{aligned} C\widehat{D}P + P\widehat{C}D + C\widehat{P}D &= 180^\circ \\ \left(A\widehat{D}C + A\widehat{D}P\right) + 50^\circ + 50^\circ &= 180^\circ \\ x + 60^\circ &= 180^\circ - 100^\circ \\ x &= 20^\circ. \end{aligned}$$

Questão 16. Considere um triângulo ABC e D um ponto em seu interior de modo que $A\widehat{B}D = 20^\circ$, $D\widehat{B}C = 30^\circ$, $A\widehat{C}D = 10^\circ$ e $D\widehat{C}B = 40^\circ$, conforme a figura 3.53. Determine a medida do ângulo $x = B\widehat{A}D$.

Figura 3.53 – Enunciado da questão 16



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Solução:

Inicialmente, notemos que o triângulo ABC é isósceles de base $\overline{BC}$, pois $A\widehat{B}C = A\widehat{C}B$:

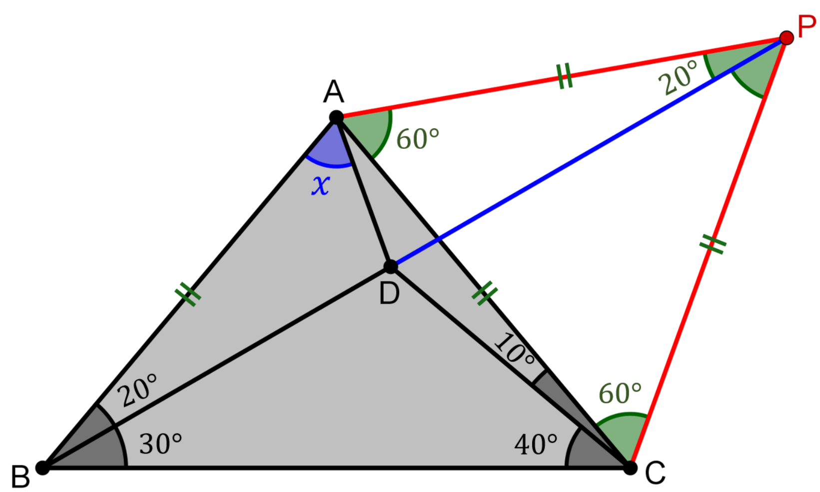
$$\begin{cases} A\widehat{B}C = A\widehat{B}D + D\widehat{B}C = 20° + 30° = 50° \\ A\widehat{C}B = A\widehat{C}D + D\widehat{C}B = 10° + 40° = 50° \end{cases}$$

Assim, $\overline{AB} = \overline{AC}$ e podemos determinar o valor de $B\widehat{A}C$:

$$\begin{aligned} B\widehat{A}C + A\widehat{B}C + A\widehat{C}B &= 180° \\ B\widehat{A}C + 50° + 50° &= 180° \\ B\widehat{A}C &= 80°. \end{aligned}$$

Também, como o quadrilátero não convexo ABDC satisfaz as condições para aplicarmos a proposição 2.12, visto que $\overline{AB} = \overline{AC}$ e $B\widehat{A}C = 120° - 2 \cdot A\widehat{B}D$. Temos, de acordo com a proposição 2.12, que é possível marcarmos o ponto P para obtermos o triângulo ABP isósceles de base $\overline{BP}$ e o triângulo ACP equilátero. Destacamos que por este traçado obtemos $\overline{AC} = \overline{AP} = \overline{PC} = \overline{AB}$ e $A\widehat{P}B = A\widehat{B}P = 20°$ (conforme a figura 3.54).

Figura 3.54 – Parte 1 da solução da questão 16



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Pelo teorema do ângulo externo, no triângulo BCD, temos:

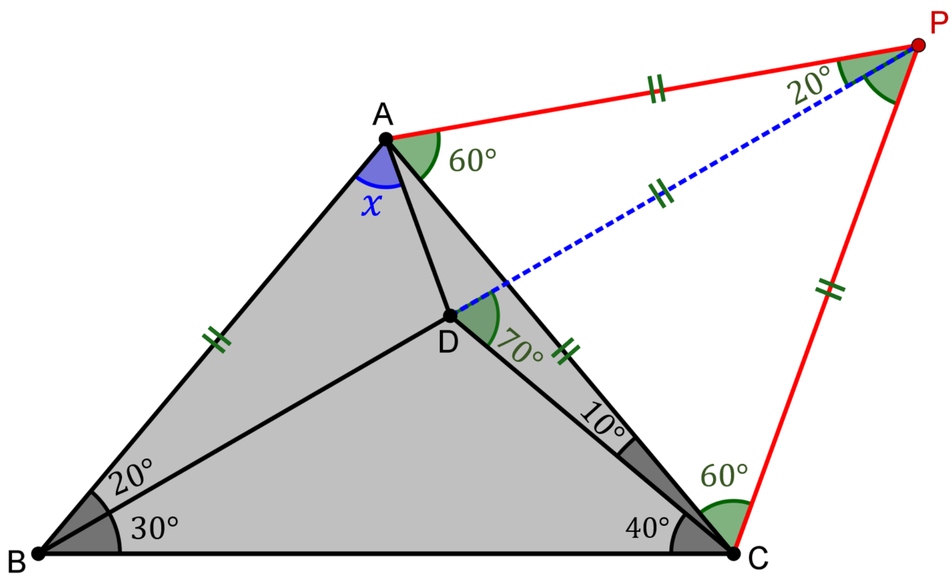
$$\begin{aligned} P\widehat{D}C &= D\widehat{B}C + D\widehat{C}B \\ P\widehat{D}C &= 30° + 40° \\ P\widehat{D}C &= 70°. \end{aligned}$$

Concluímos que o triângulo PCD é isósceles de base $\overline{CD}$, pois $P\widehat{D}C = P\widehat{C}D$:

$$\begin{aligned} P\widehat{C}D &= P\widehat{C}A + A\widehat{C}D \\ P\widehat{C}D &= 60° + 10° \\ P\widehat{C}D &= 70° \\ P\widehat{C}D &= P\widehat{D}C. \end{aligned}$$

Como o triângulo PCD é isósceles de base $\overline{CD}$, então segue que $\overline{PC} = \overline{PD}$, como ilustra a figura 3.55.

Figura 3.55 – Parte 2 da solução da questão 16



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Portanto, o triângulo PAD é isósceles de base $\overline{AD}$ já que obtemos $\overline{PA} = \overline{PD}$. Daí, segue que $P\widehat{A}D = P\widehat{D}A$ e pela soma dos ângulos internos do triângulo PAD, temos:

$$\begin{aligned} P\widehat{D}A + P\widehat{A}D + A\widehat{P}D &= 180° \\ P\widehat{D}A + P\widehat{D}A + \ 20° &= 180° \\ 2 \cdot P\widehat{D}A &= 180° - 20° \\ P\widehat{D}A &= 80°. \end{aligned}$$

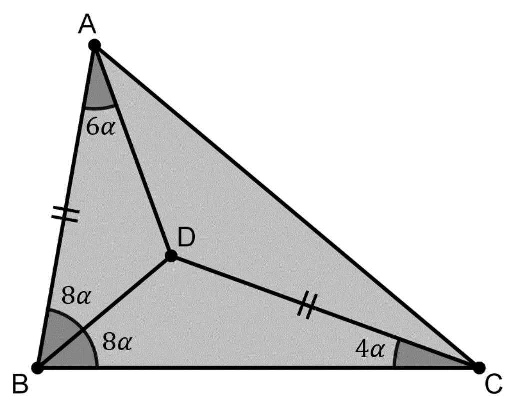
Logo, pelo teorema do ângulo externo no triângulo ABD, determinamos a media do ângulo $x = B\widehat{A}D$:

$$\begin{aligned} P\widehat{D}A &= D\widehat{B}A + D\widehat{A}B \\ 80° &= 20° + x \\ x &= 60°. \end{aligned}$$

3.7 Questões referentes à técnica 7

Questão 17. Considere um triângulo ABC e D um ponto em seu interior de modo que $\overline{AB} = \overline{CD}$, $A\widehat{B}D = D\widehat{B}C = 8\alpha$, $B\widehat{C}D = 4\alpha$ e $B\widehat{A}D = 6\alpha$, conforme a figura 3.56. Determine o valor de α.

Figura 3.56 – Enunciado da questão 17

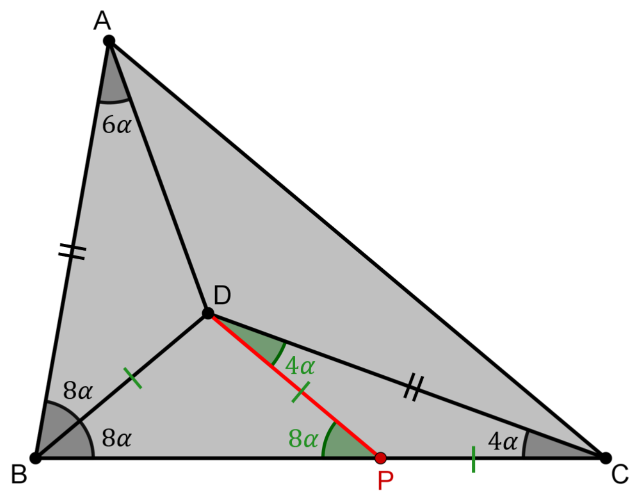


Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Solução:

Inicialmente, notemos que o triângulo BCD satisfaz as condições da proposição 2.2, pois possui ângulos na razão de 1:2 ($C\widehat{B}D = 2 \cdot B\widehat{C}D$). Então, podemos aplicar o resultado da proposição 2.2 para realizar o traçado auxiliar da ceviana interna $\overline{DP}$, com $P \in \overline{BC}$, tal que $\overline{BD} = \overline{DP} = \overline{PC}$, $D\widehat{B}P = D\widehat{P}B = 8\alpha$ e $C\widehat{D}P = D\widehat{C}P = 4\alpha$, como ilustra a figura 3.57.

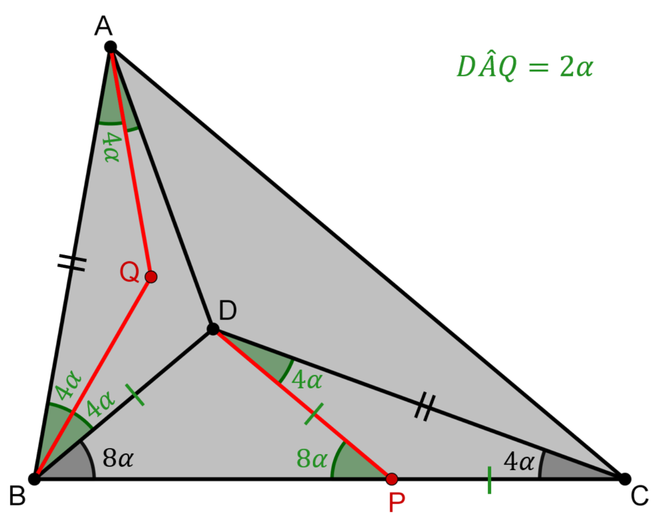
Figura 3.57 – Parte 1 da solução da questão 17



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Agora realizamos como traçado auxiliar o ponto Q no interior do triângulo ABD para criarmos o triângulo isósceles ABQ, de base $\overline{AB}$ e com $A\widehat{B}Q = B\widehat{A}Q = 4\alpha$. Consequentemente, obtemos $D\widehat{A}Q = 2\alpha$ e $D\widehat{B}Q = 4\alpha$, como ilustra a figura 3.58.

Figura 3.58 – Parte 2 da solução da questão 17



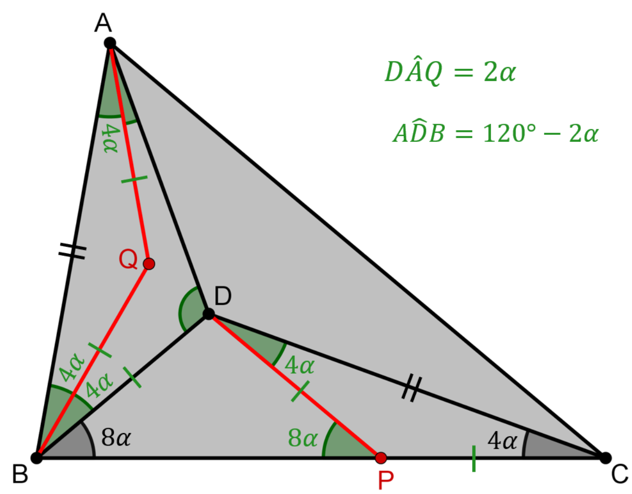
Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Por estes dois traçados auxiliares obtemos os triângulos congruentes ABQ e CDP que podemos provar pelo caso A.L.A. de congruência de triângulos:

$$\begin{cases} A\widehat{B}Q = 4\alpha = C\widehat{D}P \\ \overline{AB} = \overline{CD} \\ B\widehat{A}Q = 4\alpha = D\widehat{C}P \end{cases} \xrightarrow{ALA} \quad ABQ \equiv CDP.$$

Desta congruência de triângulos, segue que $\overline{AQ} = \overline{BQ} = \overline{CP} = \overline{DP} = \overline{BD}$, *como ilustra a figura 3.59.*

Figura 3.59 – Parte 3 da solução da questão 17



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Formamos o quadrilátero não convexo $ADBQ$ *que satisfaz as condições da proposição 2.14:* $\overline{AQ} = \overline{QB} = \overline{BD}$ *e* $D\widehat{B}Q = 2 \cdot D\widehat{A}Q$. *Portanto, segue pela proposição 2.14 que:*

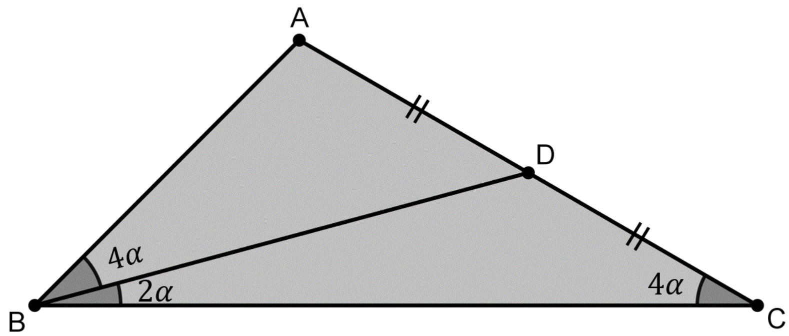
$$A\widehat{D}B = 120° - D\widehat{A}Q = 120° - 2\alpha.$$

Concluindo, obtemos o valor de α *pela soma dos ângulos internos do triângulo* ABD*:*

$$\begin{aligned} A\widehat{B}D + B\widehat{A}D + A\widehat{D}B &= 180° \\ 8\alpha \ + \ 6\alpha \ + \ (120° - 2\alpha) &= 180° \\ 12\alpha &= 180° - 120° \\ \alpha &= 5°. \end{aligned}$$

Questão 18. Seja ABC um triângulo e D o ponto médio do segmento $\overline{AC}$, conforme a figura 3.60. Se $A\widehat{B}D = B\widehat{C}D = 4\alpha$ e $C\widehat{B}D = 2\alpha$, determine o valor de α.

Figura 3.60 – Enunciado da questão 18



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

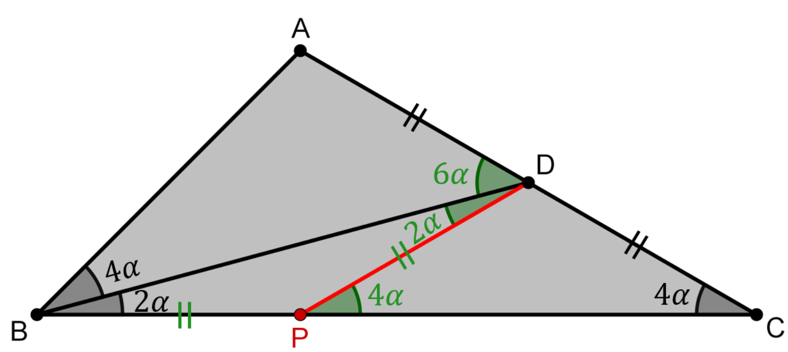
Solução:

Pelo teorema do ângulo externo, no triângulo BCD, temos:

$$A\widehat{D}B = D\widehat{B}C + D\widehat{C}B \quad \Longrightarrow \quad A\widehat{D}B = 2\alpha + 4\alpha \quad \Longrightarrow \quad A\widehat{D}B = 6\alpha.$$

Notemos que o triângulo BCD satisfaz as condições da proposição 2.2, pois possui ângulos na razão 1:2 ($B\widehat{C}D = 2 \cdot C\widehat{B}D$). Então, podemos aplicar o resultado da proposição 2.2 para realizar o traçado auxiliar da ceviana interna $\overline{DP}$, com $P \in \overline{BC}$, tal que $\overline{CD} = \overline{DP} = \overline{PB}$, $P\widehat{B}D = P\widehat{D}B = 2\alpha$ e $C\widehat{P}D = P\widehat{C}D = 4\alpha$, como ilustra a figura 3.61.

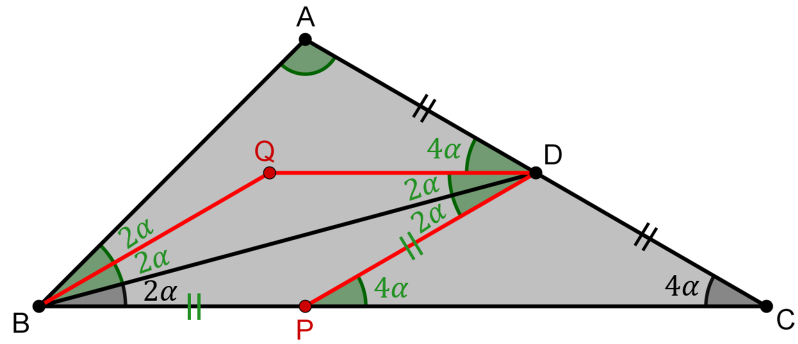
Figura 3.61 – Parte 1 da solução da questão 18



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Agora realizamos como traçado auxiliar o ponto Q no interior do triângulo ABD a fim *de criarmos o triângulo isósceles BDQ de base $\overline{BD}$ e com $B\widehat{D}Q = D\widehat{B}Q = 2\alpha$. Consequentemente, obtemos $A\widehat{B}Q = 2\alpha$ e $A\widehat{D}Q = 4\alpha$, como ilustra a figura 3.62.*

Figura 3.62 – Parte 2 da solução da questão 18



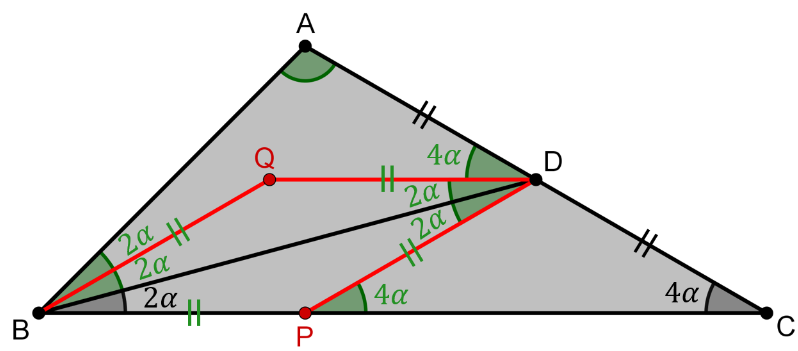
Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Notemos que por estes dois traçados auxiliares concluímos que os triângulos BDQ e BDP são congruentes, pelo caso A.L.A. de congruência de triângulos:

$$\begin{cases} B\widehat{D}Q = 2\alpha = B\widehat{D}P \\ \overline{BD} \text{ é lado comum de ambos triângulos} \\ D\widehat{B}Q = 2\alpha = D\widehat{B}P \end{cases} \qquad \overset{ALA}{\Longrightarrow} \qquad BDQ \equiv BDP.$$

Desta congruência de triângulos segue que $\overline{BQ} = \overline{DQ} = \overline{DP} = \overline{BP} = \overline{AD}$, como ilustra a figura 3.63.

Figura 3.63 – Parte 3 da solução da questão 18



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Assim, formamos o quadrilátero não convexo $ADQB$ que satisfaz as condições da proposição 2.14: $\overline{AD} = \overline{DQ} = \overline{QB}$ e $A\widehat{D}Q = 2 \cdot A\widehat{B}Q$. Portanto, segue do resultado da proposição 2.14 que:

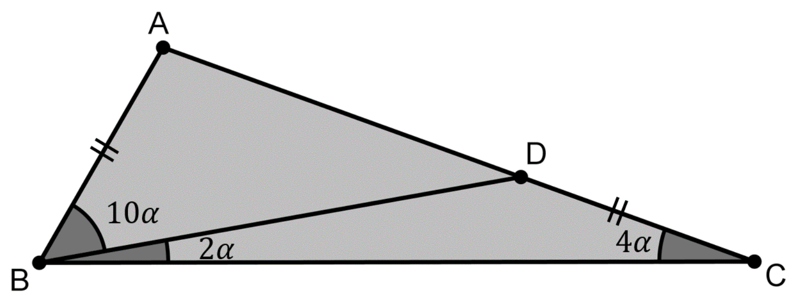
$$B\widehat{A}D = 120° - A\widehat{B}Q = 120° - 2\alpha.$$

Obtemos o valor de α pela soma dos ângulos internos do triângulo ABD:

$$\begin{aligned} A\widehat{B}D + A\widehat{D}B + B\widehat{A}D &= 180^\circ \\ 4\alpha \;+\; 6\alpha \;+\; (120^\circ - 2\alpha) &= 180^\circ \\ 8\alpha &= 180^\circ - 120^\circ \\ \alpha &= 7,5^\circ. \end{aligned}$$

Questão 19. Considere um triângulo ABC e D um ponto sobre o segmento $\overline{AC}$ de modo que $\overline{AB} = \overline{CD}$, $A\widehat{B}D = 10\alpha$, $C\widehat{B}D = 2\alpha$ e $B\widehat{C}D = 4\alpha$, conforme a figura 3.64. Determine o valor de α.

Figura 3.64 – Enunciado da questão 19



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

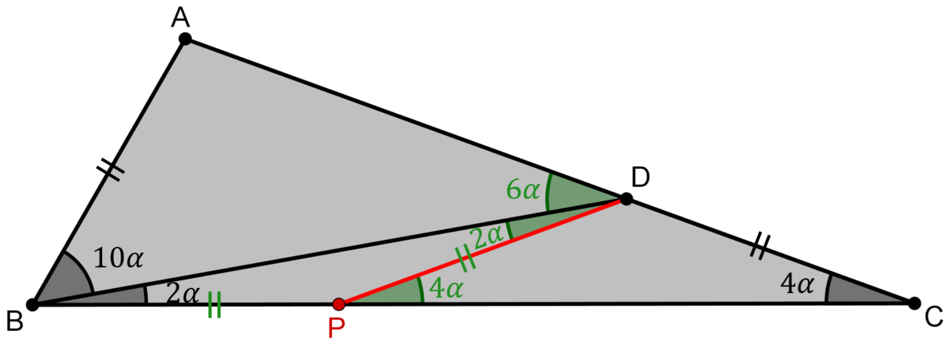
Solução:

Pelo teorema do ângulo externo, no triângulo BCD, temos:

$$A\widehat{D}B = D\widehat{B}C + D\widehat{C}B \quad \Longrightarrow \quad A\widehat{D}B = 2\alpha + 4\alpha \quad \Longrightarrow \quad A\widehat{D}B = 6\alpha.$$

Notemos que o triângulo BCD satisfaz as condições da proposição 2.2, pois possui ângulos na razão $1:2$ ($B\widehat{C}D = 2 \cdot C\widehat{B}D$). Então, podemos aplicar o resultado da proposição 2.2 para realizar o traçado auxiliar da ceviana interna $\overline{DP}$, com $P \in \overline{BC}$, tal que $\overline{CD} = \overline{DP} = \overline{PB}$, $P\widehat{B}D = P\widehat{D}B = 2\alpha$ e $C\widehat{P}D = P\widehat{C}D = 4\alpha$, como ilustra a figura 3.65.

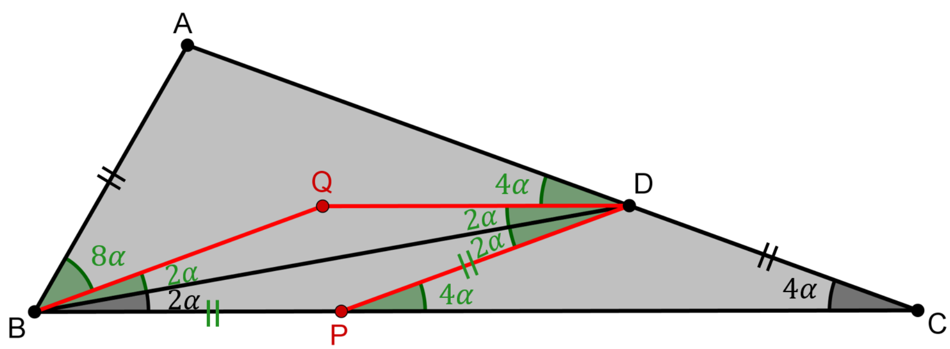
Figura 3.65 – Parte 1 da solução da questão 19



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Agora realizamos como traçado auxiliar o ponto Q no interior do triângulo ABD a fim de criarmos o triângulo isósceles BDQ, de base $\overline{BD}$ e com $B\widehat{D}Q = D\widehat{B}Q = 2\alpha$. Consequentemente, obtemos $A\widehat{B}Q = 8\alpha$ e $A\widehat{D}Q = 4\alpha$, como ilustra a figura 3.66 .

Figura 3.66 – Parte 2 da solução da questão 19



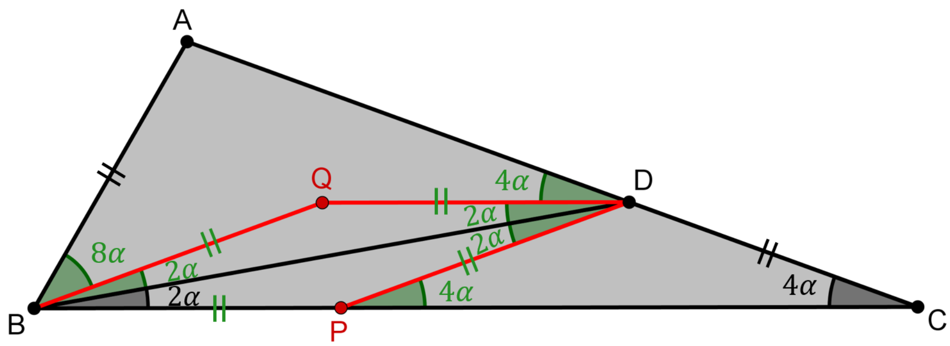
Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Notemos que por estes dois traçados auxiliares concluímos que os triângulos BDQ e BDP são congruentes, pelo caso A.L.A. de congruência de triângulos:

$$\begin{cases} B\widehat{D}Q = 2\alpha = B\widehat{D}P \\ \overline{BD} \text{ é lado comum de ambos triângulos} \\ D\widehat{B}Q = 2\alpha = D\widehat{B}P \end{cases} \xRightarrow{ALA} \quad BDQ \equiv BDP.$$

Desta congruência de triângulos segue que $\overline{BQ} = \overline{DQ} = \overline{DP} = \overline{BP} = \overline{AB}$, como ilustra a figura 3.67.

Figura 3.67 – Parte 3 da solução da questão 19



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Assim, construímos o quadrilátero não convexo $ABQD$ que satisfaz as condições da proposição 2.14: $\overline{AB} = \overline{BQ} = \overline{QD}$ e $A\widehat{B}Q = 2 \cdot A\widehat{D}Q$. Portanto, segue pelo resultado da proposição 2.14 que:

$$B\widehat{A}D = 120^\circ - A\widehat{D}Q = 120^\circ - 4\alpha.$$

E obtemos o valor de α pela soma dos ângulos internos do triângulo ABD:

$$\begin{aligned} A\widehat{B}D + A\widehat{D}B + B\widehat{A}D &= 180^\circ \\ 10\alpha \;+\; 6\alpha \;+\; (120^\circ - 4\alpha) &= 180^\circ \\ 12\alpha &= 180^\circ - 120^\circ \\ \alpha &= 5^\circ. \end{aligned}$$

4 QUESTÕES DE OLIMPÍADAS DE MATEMÁTICA

As duas questões apresentadas e solucionadas neste capítulo foram selecionadas por meio de uma pesquisa em provas de Olimpíadas de Matemática disponibilizadas na internet. Foram analisadas questões das seguintes olimpíadas:

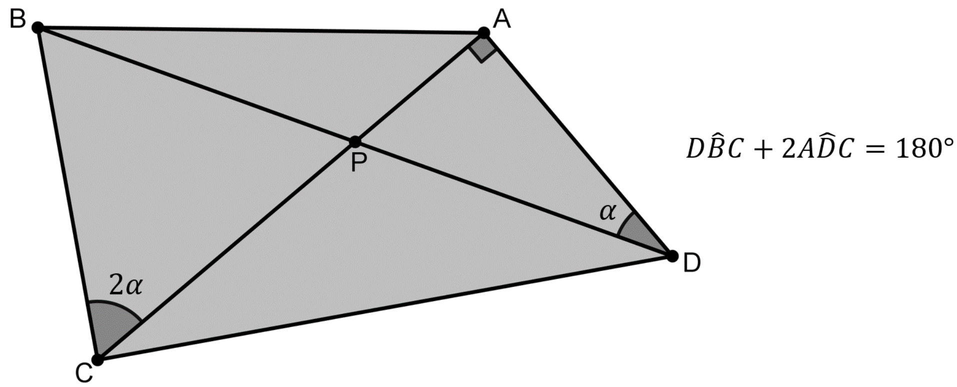
- OBMEP - Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas;
- OBM - Olimpíada Brasileira de Matemática;
- IMO - Olimpíada Internacional de Matemática;
- OIM - Olimpíada Ibero-americana de Matemática;
- IGO - Olimpíada Iraniana de Geometria;
- OMCPLP - Olimpíada de Matemática da Comunidade de Países de Língua Portuguesa;
- CONE SUL - Olimpíada de Matemática do Cone Sul.

Orientamos nossa pesquisa com a ideia de relacionar estritamente a resolução das questões com as técnicas descritas no capítulo 2 buscando uma simples introdução ao estudo de traçados auxiliares em triângulos. Assim, excluímos de nossa seleção questões que explorassem outras técnicas mais elaboradas: semelhança de triângulos, tangência de retas e circunferências, arco capaz, incentro, circuncentro, ex-incentro, potência de pontos, etc. Questões com estas outras técnicas são as que mais figuram nas Olimpíadas de Matemática (percebemos isso durante a análise das provas), mas como esse não é o foco deste trabalho, ficam como sugestão para trabalhos futuros. Por isso, apresentamos aqui duas questões de Geometria presentes em Olimpíadas de Matemática resolvidas por meio de congruências de triângulos. A primeira questão se encontra em IGO (2019) e faz parte do nível intermediário da 5ª Olimpíada Iraniana de Geometria, realizada no ano de 2018. A segunda questão se encontra em Cone Sul (2007) e faz parte do segundo dia de exames da seleção de estudantes da Argentina para a 18ª Olimpíada de Matemática do Cone Sul, realizada em 2007.

Questão 20. [IGO - 2018]: Em um quadrilátero convexo $ABCD$, os diâmetros $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ se encontram no ponto P. Sabe-se que $D\widehat{A}C = 90°$ e que $A\widehat{C}B = 2 \cdot A\widehat{D}B$. Se $D\widehat{B}C + 2 \cdot A\widehat{D}C = 180°$ prove que $\overline{BP} = 2 \cdot \overline{AP}$.

A figura 4.1 ilustra as condições da hipóteses do enunciado da questão 20.

Figura 4.1 – Enunciado da questão 20



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Solução:

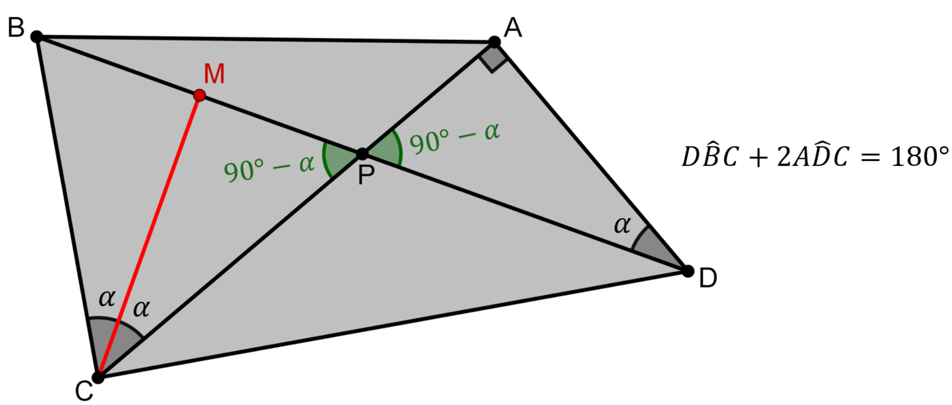
Pela soma dos ângulos internos do triângulo APD, temos:

$$\begin{aligned} A\widehat{P}D + P\widehat{A}D + A\widehat{D}P &= 180° \\ A\widehat{P}D + 90° + \alpha &= 180° \\ A\widehat{P}D &= 90° - \alpha \end{aligned}$$

Como $A\widehat{P}D$ e $B\widehat{P}C$ são ângulos opostos pelo vértice, então $B\widehat{P}C = A\widehat{P}D = 90° - \alpha$.

Tomemos agora no triângulo PBC, como traçado auxiliar, a ceviana $\overline{CM}$ que corresponde a bissetriz interna de $B\widehat{C}P$. Note que temos M sobre o lado $\overline{BP}$, como ilustra a figura 4.2.

Figura 4.2 – Parte 1 da solução da questão 20



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Note que $\overline{CM} \perp \overline{BP}$*, pois pela soma dos ângulos internos do triângulo* PMC *verifica-se que* $P\widehat{M}C = 90°$*:*

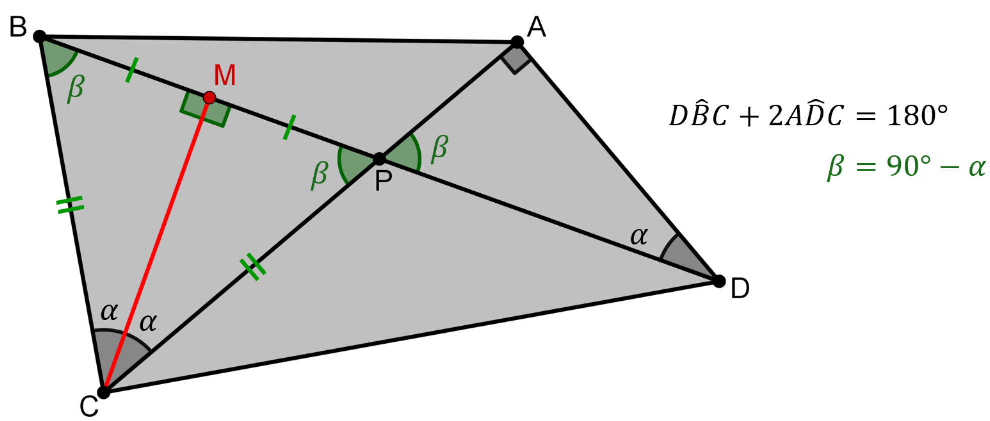
$$\begin{aligned} P\widehat{M}C + M\widehat{P}C + P\widehat{C}M &= 180° \\ P\widehat{M}C + (90° - \alpha) + \alpha &= 180° \\ P\widehat{M}C &= 90° \end{aligned}$$

Daí, segue que $B\widehat{M}C = P\widehat{M}C = 90°$*. E podemos afirmar que os triângulos* PMC *e* BMC *são congruentes pelo caso A.L.A. de congruências de triângulos:*

$$\begin{cases} P\widehat{M}C = 90° = B\widehat{M}C \\ \overline{CM} \text{ é lado comum de ambos triângulos} \\ P\widehat{C}M = \alpha = B\widehat{C}M \end{cases} \quad \overset{ALA}{\Longrightarrow} \quad PMC \equiv BMC$$

Desta congruência temos $\overline{PM} = \overline{BM}$*. Isso implica que* M *é o ponto médio do segmento* $\overline{PB}$*, como ilustra a figura 4.3.*

Figura 4.3 – Parte 2 da solução da questão 20



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Usando a informação de que $D\widehat{B}C + 2 \cdot A\widehat{D}C = 180°$*, do enunciado do problema, podemos determinar* $P\widehat{D}C$ *em função de* α*:*

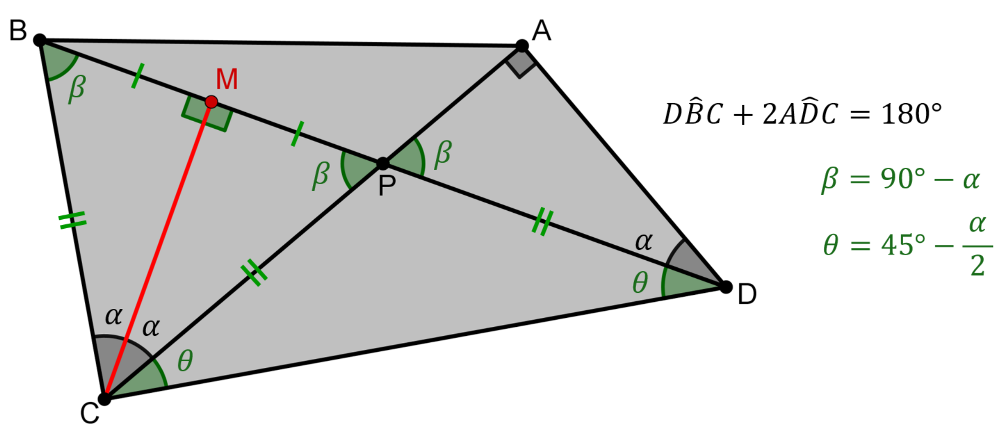
$$
\begin{aligned}
D\widehat{B}C \;+\; 2\cdot A\widehat{D}C &= 180^\circ\\
M\widehat{B}C \;+\; 2\cdot\left(A\widehat{D}P + P\widehat{D}C\right) &= 180^\circ\\
(90^\circ-\alpha) \;+\; 2\cdot\left(\alpha + P\widehat{D}C\right) &= 180^\circ\\
2\cdot P\widehat{D}C &= 180^\circ - 90^\circ - \alpha\\
P\widehat{D}C &= 45^\circ - \frac{\alpha}{2}
\end{aligned}
$$

Usando a soma dos ângulos internos do triângulo ACD, podemos determinar $P\widehat{C}D$ em função de α:

$$
\begin{aligned}
A\widehat{C}D \;+\; C\widehat{A}D \;+\; A\widehat{D}C &= 180^\circ\\
P\widehat{C}D \;+\; P\widehat{A}D \;+\; \left(A\widehat{D}P + P\widehat{D}C\right) &= 180^\circ\\
P\widehat{C}D \;+\; 90^\circ \;+\; \left(\alpha + 45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) &= 180^\circ\\
P\widehat{C}D &= 180^\circ - 90^\circ \;-\; \alpha \;-\; 45^\circ \;+\; \frac{\alpha}{2}\\
P\widehat{C}D &= 45^\circ - \frac{\alpha}{2}
\end{aligned}
$$

Como $P\widehat{C}D = 45^\circ - \frac{\alpha}{2} = P\widehat{D}C$, então o triângulo PCD é isósceles de base $\overline{CD}$. E segue assim que $\overline{PC} = \overline{PD}$, como ilustra a figura 4.4.

Figura 4.4 – Parte 3 da solução da questão 20



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Observamos que os triângulos PMC e PAD são congruentes pelo caso A.L.A. de congruência de triângulos:

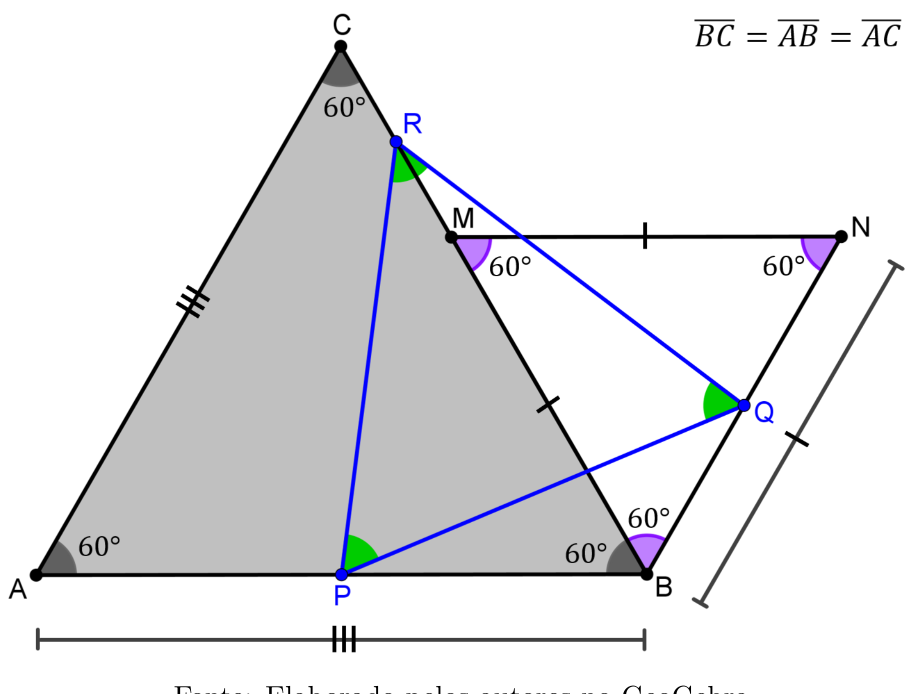
$$\begin{cases} M\widehat{P}C = 90° - \alpha = A\widehat{P}D \\ \overline{PC} = \overline{PD} \\ P\widehat{C}M = \alpha = P\widehat{D}A \end{cases} \qquad \overset{ALA}{\Longrightarrow} \qquad PMC \equiv PAD$$

Desta congruência segue que $\overline{AP} = \overline{MP}$. *E concluímos que:*

$$\overline{BP} = \overline{BM} + \overline{MP} = 2 \cdot \overline{MP} = 2 \cdot \overline{AP}$$

Questão 21. [Cone Sul-2007]: Dado um triângulo equilátero ABC e M um ponto pertencente a $\overline{BC}$, com $M \notin \{B, C\}$. Considere um ponto N tal que o triângulo BMN seja equilátero, com A e N em semiplanos opostos definidos pela semirreta $\overrightarrow{BC}$. Sejam P, Q e R pontos médios de $\overline{AB}$, $\overline{BN}$ e $\overline{CM}$, respectivamente, conforme a figura 4.5. Prove que o triângulo PQR é equilátero.

Figura 4.5 – Enunciado da questão 21

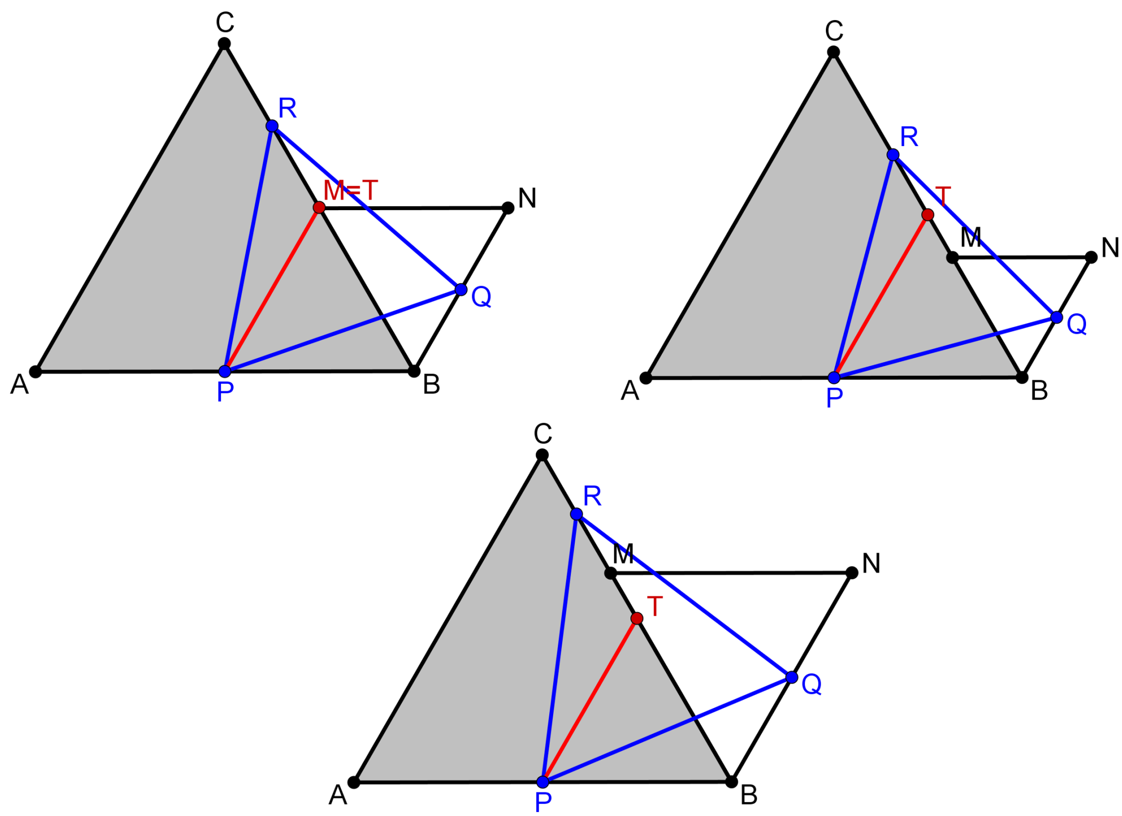


Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Solução:

A solução desta questão será organizada pelo seguinte raciocínio: tomemos como traçado auxiliar o segmento de reta $\overline{PT}$*, sendo* T *o ponto médio de* $\overline{BC}$*. E o objetivo é mostrar que os triângulos* PTR *e* PBQ *são congruentes. Essa congruência implicará que o triângulo* PQR *é isósceles de base* $\overline{QR}$*, com ângulo em* P *medindo* $60°$*, concluindo assim que* PQR *é equilátero. Porém, notemos que de acordo com a posição do ponto* M *tomado sobre o lado* $\overline{BC}$ *(*M *como ponto médio de* $\overline{BC}$*,* M *mais próximo de* B *do que de* C *ou* M *mais próximo de* C *do que de* B*) alternamos a ordem dos pontos* M *e* T *(*$B - M = T - C$*,* $B - M - T - C$ *ou* $B - T - M - C$*, respectivamente), como ilustra a figura 4.6.*

Figura 4.6 – Possibilidades da posição do ponto M.



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Provaremos o caso em que M *está mais próximo de* C *do que de* B*. Os outros dois casos são análogos.*

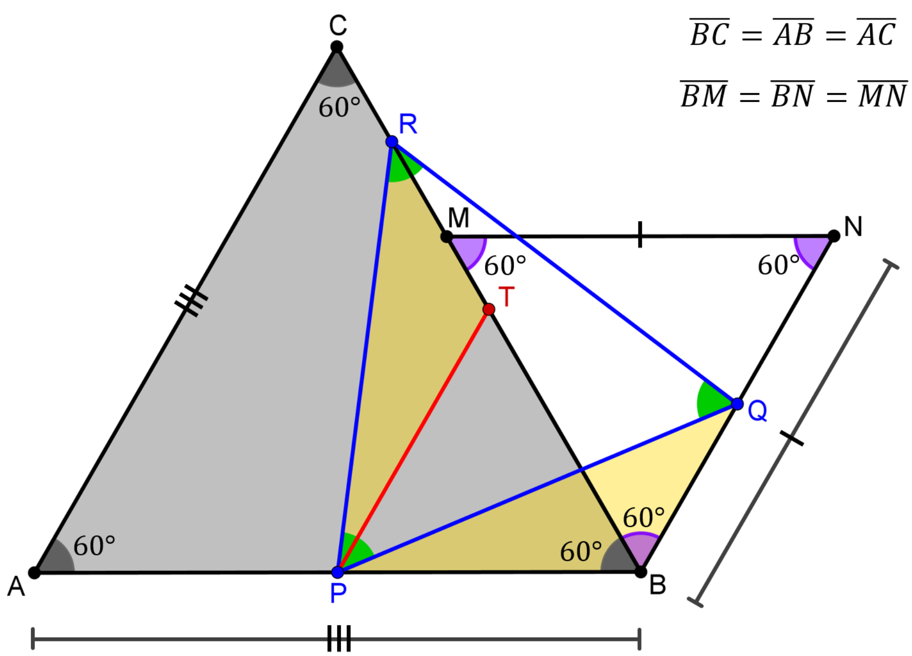
Inicialmente, denotemos a medida do lado do triângulo equilátero BMN *por* $2a$ *e a medida de* $\overline{CM}$ *por* $2b$*. Assim, podemos denotar o lado do triângulo equilátero* ABC *por* $2a + 2b$*, e escrevemos* $\overline{RM} = b$*,* $\overline{BQ} = a$ *e* $\overline{PB} = a + b$*:*

- $\overline{BC} = \overline{BM} + \overline{CM} = 2a + 2b$.

- *Como R é ponto médio de $\overline{CM}$, então $\overline{RM} = \overline{CM}/2 = 2b/2 = b$.*
- *Como Q é ponto médio de $\overline{BN}$, então $\overline{BQ} = \overline{BN}/2 = 2a/2 = a$.*
- *Como P é ponto médio de $\overline{AB}$, então $\overline{PB} = \overline{AB}/2 = (2a + 2b)/2 = a + b$.*

Tomemos o segmento de reta $\overline{PT}$, sendo T o ponto médio do segmento $\overline{BC}$, como ilustra a figura 4.7.

Figura 4.7 – Parte 1 da solução da questão 21



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Como P e T são pontos médios dos lados do triângulo equilátero ABC, então $\overline{PB} = a + b = \overline{TB}$. Logo, o triângulo PTB é isósceles de base $\overline{PT}$. Além de ser isósceles, ocorre que o triângulo PTB tem um ângulo medindo $60°$ ($P\widehat{B}T$), portanto o triângulo PTB é equilátero.

Pelo fato de ser o triângulo PTB equilátero, temos $\overline{PT} = \overline{PB} = \overline{TB} = a + b$. Além disso, $P\widehat{T}B = 60°$ e, consequentemente, $P\widehat{T}R = 180° - P\widehat{T}B = 180° - 60° = 120°$.

Note que $\overline{TR} = \overline{BQ}$. De fato, no lado $\overline{BC}$ do triângulo ABC, temos:

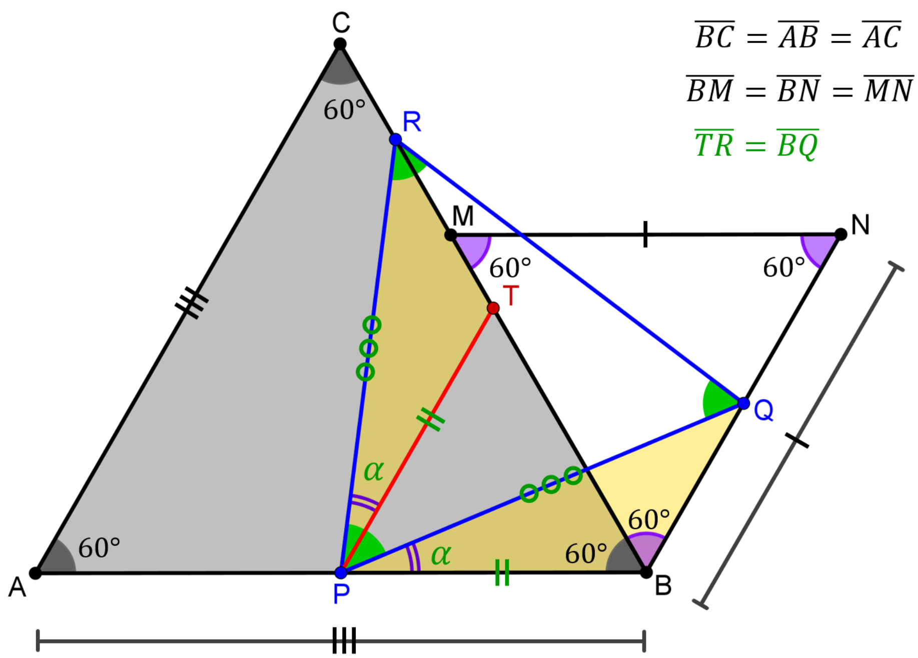
$$
\begin{aligned}
\overline{BC} &= \overline{BT} + \overline{TR} + \overline{RC} \\
(2a + 2b) &= (a + b) + \overline{TR} + b \\
a &= \overline{TR} \\
\overline{BQ} &= \overline{TR}
\end{aligned}
$$

Pelo exposto nos três parágrafos acima, verificamos que os triângulos PTR e PBQ são congruentes pelo caso L.A.L. de congruência de triângulos:

$$\begin{cases} \overline{PT} = a + b = \overline{PB} \\ P\widehat{T}R = 120^\circ = P\widehat{B}Q \\ \overline{TR} = a = \overline{BQ} \end{cases} \qquad \overset{LAL}{\Longrightarrow} \qquad PTR \equiv PBQ$$

Esta congruência implica que $\overline{PR} = \overline{PQ}$, assim o triângulo PQR é isósceles de base $\overline{QR}$. Essa congruência também implica que $R\widehat{P}T = Q\widehat{P}B$ (denotaremos a medida destes ângulos por α), como ilustra a figura 4.8.

Figura 4.8 – Parte 2 da solução da questão 21



Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

Vamos determinar a medida do ângulo $R\widehat{P}Q$:

$$\begin{aligned} R\widehat{P}Q &= R\widehat{P}T + T\widehat{P}Q \\ R\widehat{P}Q &= R\widehat{P}T + \left(T\widehat{P}B - Q\widehat{P}B\right) \\ R\widehat{P}Q &= \alpha + (60^\circ - \alpha) \\ R\widehat{P}Q &= 60^\circ \end{aligned}$$

Concluímos que o triângulo PQR é isósceles com um dos ângulos medindo 60° ($R\widehat{P}Q$). Portanto, PQR é um triângulo equilátero.

5 KIT DE GEOMETRIA EM IMPRESSORA 3D

Os conceitos, proposições e questões abordados nos capítulos 2 e 3 deste trabalho já constituem um rico material para orientar professores e alunos da Educação Básica no ensino e aprendizagem de Geometria, fazendo uso de conceitos do currículo de Matemática do Ensino Fundamental e Médio, além das técnicas de traçados auxiliares em triângulos. Porém, outra parte da pesquisa foi idealizar um objeto educacional que forneça uma forma lúdica e interativa de estudar e aprender Geometria, tendo em vista a complexidade de abstração e visualização que este ramo da Matemática exige dos discentes.

Pensamos, planejamos e materializamos um kit do tipo material concreto em que os alunos possam explorar quatro técnicas de traçados auxiliares em triângulos (vistos no capítulo 2) resolvendo quatro problemas (discutidos no capítulo 3) sem utilizar materiais convencionais como caderno e caneta. Cada um dos quatro problemas é composto por um conjunto de peças que representam pontos, ângulos, segmentos de reta e indicadores de congruências do enunciado do problema e dos traçados auxiliares a serem montados. A ideia é que os alunos, em grupo, encaixem as partes da figura do problema dialogando sobre suas percepções dos conceitos geométricos que justificam cada passo para obter as medidas de ângulos e congruências de segmentos e triângulos, até descobrir a medida do ângulo incógnito da questão.

Além dos quatro conjuntos de peças dos problemas, o kit contém também três manuais, em PDF: manual do professor, manual do aluno e manual de gabarito.

5.1 Modelagem e teste das peças que compõem o kit

Pensando na "*cultura maker*" que cada dia ganha mais adeptos, princialmente no campo educacional, as peças dos problemas do kit foram modeladas na versão 4.0 do software de distribuição gratuita *Blender*[1] e salvas no formato STL para serem impressas em impressora 3D. Justificando esta escolha:

- A aquisição de uma impressora 3D tornou-se acessível financeiramente. Inclusive nos ambientes escolares;
- Os arquivos das peças para impressão 3D, junto com os manuais, serão disponibilizados gratuitamente na plataforma de objetos educacionais eduCAPES, disponível em: https://educapes.capes.gov.br;
- Os meios digitais possibilitam mais abrangência de divulgação do kit para outros professores e alunos fazerem uso;

[1]Software de distribuição gratuita disponível para *download* em https://www.blender.org/.

- Pretendemos incentivar os professores da Educação Básica a construírem laboratórios de Matemática nas suas escolas. Enxergamos a impressão 3D como uma valiosa ferramenta para materializar esta ideia, de modo que os professores possam criar recursos de ensino e aprendizagem modelando peças e imprimindo, além da possibilidade de compartilhar suas criações com todos professores de Matemática do Brasil.

Nossa pesquisa para idealização e produção do kit iniciou na seleção das técnicas de traçados auxiliares em triângulos e dos problemas que se adequassem à Educação Básica, tanto no Ensino Fundamental como no Ensino Médio. Além disso, levamos em consideração a estética que estas técnicas e problemas apresentariam quando se transformassem em peças (pontos, segmento e ângulos), excluindo as que possuíssem ângulos e segmentos com medidas pequenas.

Para modelar as peças do kit, pesquisamos *softwares* livres ou de distribuição gratuita. Nesta etapa foi escolhido o *software* de distribuição gratuita *Blender* que apresenta muitas ferramentas para inserir características físicas às peças. Em seguida, iniciamos o processo de aprender algumas ferramentas do *Blender* e realizar a prototipagem das peças.

Concomitante ao processo de modelagem das peças, realizamos os testes de impressão em impressora 3D para verificar as dimensões e formatos das peças e realizar alterações no protótipo. Esta etapa, além de exigir bastante criatividade, demandou um imenso tempo para elaborarmos os formatos dos pontos, segmentos e ângulos; pois, a cada modificação no design das peças, necessitava realizar novas impressões para verificar medidas, estética e encaixes. Neste processo foram utilizadas duas impressoras 3D:

- a impressora *GTMax3D Core AB 400*, pertencente ao Departamento de Matemática da UEPB, Centro de Ciência e Tecnologia, campus Campina Grande-PB. Junto com a versão gratuita 5.6.0 do *software UltiMaker Cura* para fatiar as peças e enviar para impressão (foto da impressora na figura 5.1(a));

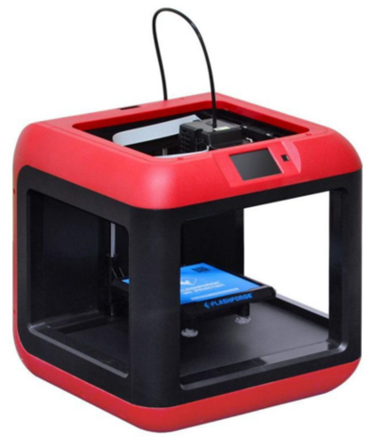
- a impressora *Flash Forge - Finder*, pertencente ao Laboratório Maker do Instituto Federal do Sertão Pernambucano, campus Floresta-PE. Junto com a versão 5 do *software FlashPrint*, disponibilizado gratuitamente pela própria empresa que produz a impressora, para fatiar as peças e enviar para impressão (foto da impressora na figura 5.1(b)).

Figura 5.1 – Impressoras 3D utilizadas na prototipagem das peças do kit.

(a)

Fonte: Só 3D. Disponível em: https://so3d.com.br/loja3d/impressora-3d-pro-gtmax3d-core-ab400. Acesso em: 10 de jul. de 2024.

(b)

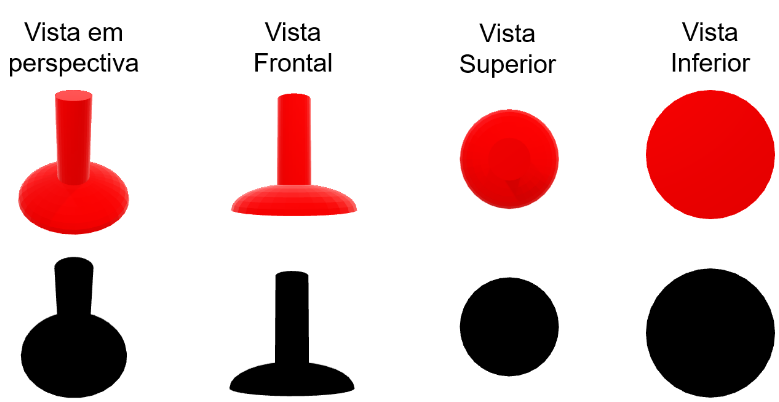


Fonte: Kabum. Disponível em: https://www.kabum.com.br/produto/173020/impressora-3d-finder-flashforge. Acesso em: 10 de jul. de 2024.

No processo de modelagem e teste de impressão, as peças do kit foram idealizadas para serem representações simbólicas de pontos, ângulos, segmentos de reta e indicadores de congruências. Com a conclusão deste processo, padronizamos o formato das peças do kit do seguinte modo:

- Os pontos são representados como ilustrado nas figuras 5.2 e 5.3. Contendo na figura 5.2 a representação da base do ponto e na figura 5.3 a representação do topo do ponto (que inclui a nomenclatura do ponto).

Figura 5.2 – Padronização da representação de ponto do kit.



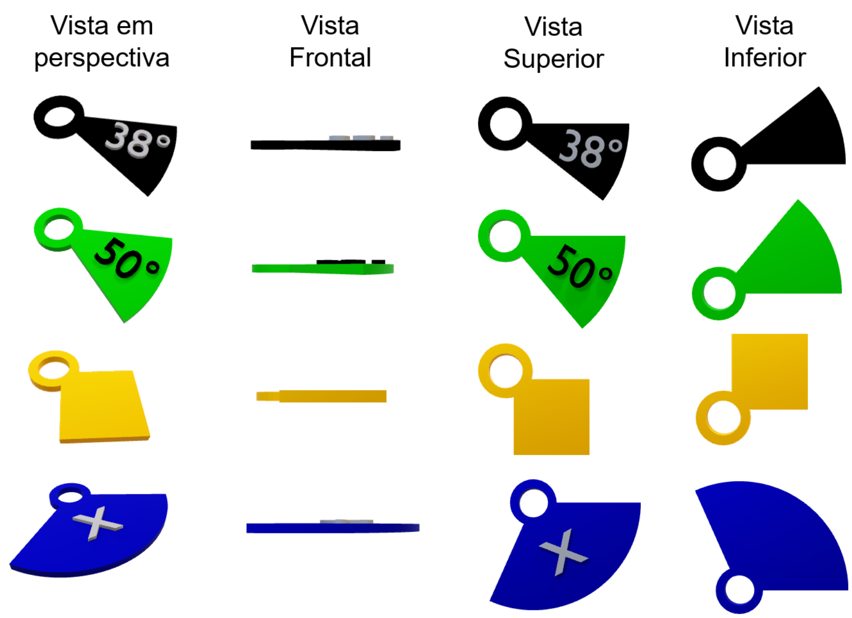
Fonte: Elaborado pelos autores no Blender e PowerPoint.

Figura 5.3 – Padronização da representação de nomenclatura de ponto do kit.

Fonte: Elaborado pelos autores no Blender e PowerPoint.

- Os ângulos são representados como ilustrado na figura 5.4.

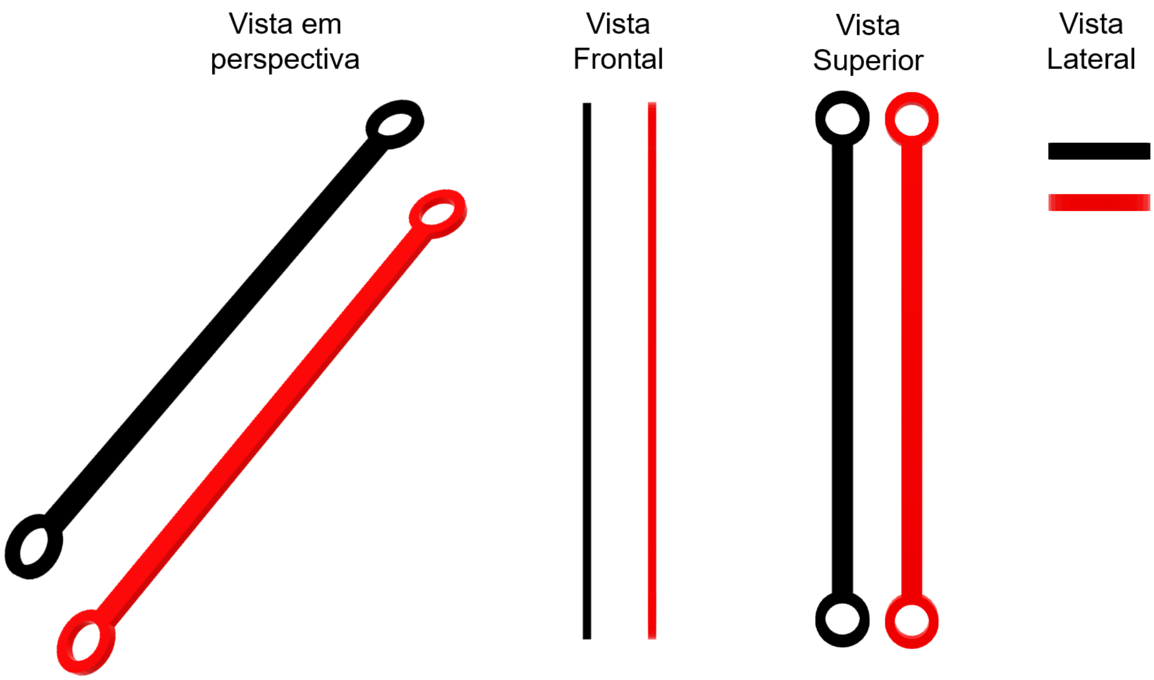
Figura 5.4 – Padronização da representação de ângulo do kit.



Fonte: Elaborado pelos autores no Blender e PowerPoint.

- Os segmentos de reta são representados como ilustrado na figura 5.5.

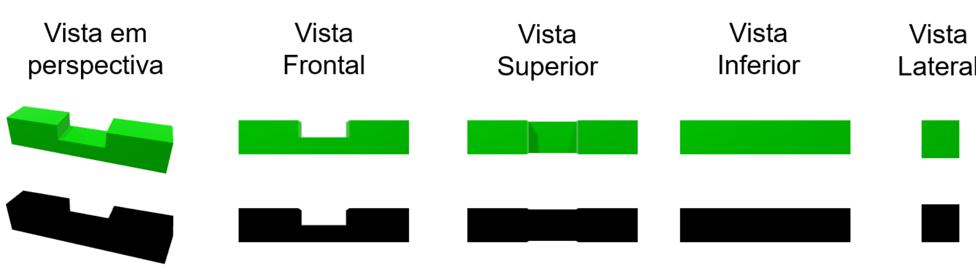
Figura 5.5 – Padronização da representação de segmentos de reta do kit.



Fonte: Elaborado pelos autores no Blender e PowerPoint.

- Os indicadores de congruências de segmentos de reta são representados como ilustrado na figura 5.6.

Figura 5.6 – Padronização da representação de indicadores de segmentos congruentes do kit.



Fonte: Elaborado pelos autores no Blender e PowerPoint.

Foi estabelecido uma padronização nas cores das peças para orientar e facilitar a aplicação do material didático na sala de aula. As peças foram idealizadas nas cores preto, vermelho, verde, azul e amarelo e são descritas a seguir:

- Preto - Objetos iniciais da figura que corresponde ao enunciado do problema (pontos, ângulos, segmentos de reta e indicadores de segmentos congruentes);
- Azul - Ângulo incógnito do problema. É o ângulo que precisamos descobrir sua medida como solução do problema;
- Vermelho - Objetos referentes aos traçados auxiliares (pontos e segmentos de reta);
- Amarelo - Ângulos retos;
- Verde - Objetos (ângulos e indicadores de segmentos de retas congruentes) para serem encaixados ao longo da resolução do problema, precisam de uma justificativa envolvendo conceitos de Geometria para poder encaixar corretamente estes objetos.

5.2 Apresentação do kit de geometria

Finalizada a produção do kit, atribuímos como título: *"Kit de Matemática em Impressora 3D: Problemas de Geometria com Traçados Auxiliares em Triângulos"*.

As técnicas de traçados auxiliares selecionadas para compor o kit foram as técnicas 1, 2, 4 e 6.1 presentes no capítulo 2.

No kit, as proposições referentes a estas técnicas foram modificadas. Isso foi realizado para facilitar a leitura, tendo em vista que a intenção no kit não é demonstrar as proposições do capítulo 2, mas usar seus resultados para auxiliar na montagem das peças referentes aos traçados auxiliares. Todavia, no kit cada proposição contém três figuras que não são a demonstração da proposição em si, mas que possibilita aos alunos conjecturarem sobre a ideia da demonstração.

As questões selecionadas para compor o kit, relacionadas com as técnicas escolhidas, foram as questões 1, 3, 8 e 14 que se encontram resolvidas no capítulo 3.

O manual do professor contém todas as informações sobre o kit: detalhes das peças, enunciados das proposições, enunciados das questões, resolução guiada das questões e sugestão de sequência didática para uso do kit em sala de aula. Além disso, as medidas de cada peça (comprimento, largura e altura) para orientar na impressão 3D.

O manual do aluno e o manual de gabarito são recortes do manual do professor. O manual do aluno é a cartilha que serve para o aluno resolver cada problema inicialmente montando as peças; neste manual contém as proposições, informações sobre as peças, enunciados dos problemas e orientações de como buscar resolver os problemas encaixando as peças. Já o manual de gabarito, contém as proposições, informações sobre as peças, enunciados dos problemas e resolução guiada de cada problema. A ideia do manual de gabarito não é fornecer a resposta direta e acabada ao aluno, mas sim orientá-lo em como resolver cada problema, passo a passo encaixando as peças, caso ele não consiga resolver utilizando apenas o manual do aluno. Neste processo de resolução guiada há perguntas e ilustrações com a finalidade de instigar os alunos a conjecturarem – a partir da manipulação das peças – sobre conteúdos de Geometria da Educação Básica que justificam as descobertas de medidas de ângulos e congruências de segmentos até descobrir a medida do ângulo x do problema.

O kit ficou composto pelos sete elementos:

– Manual do professor (disponível no apêndice A em tamanho ideal para impressão);

– Manual do aluno (disponível no apêndice B em tamanho reduzido);

– Manual de gabarito (disponível no apêndice C em tamanho reduzido);;

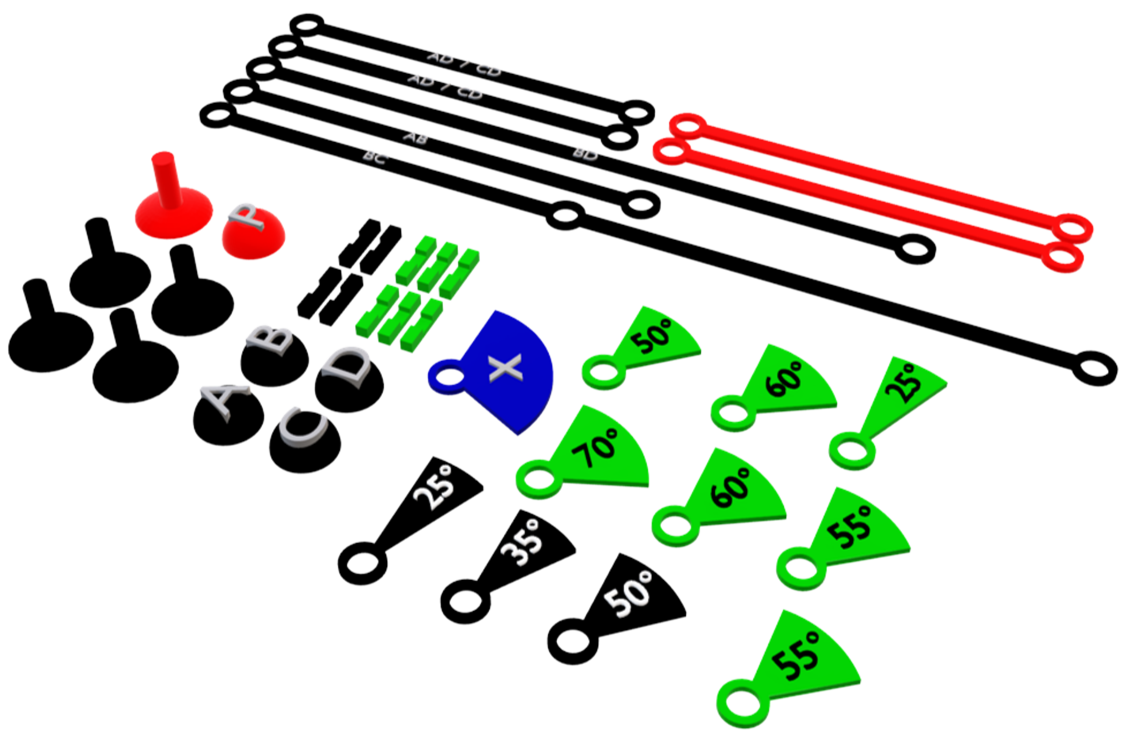
– Conjunto de peças do problema 01: 38 peças montáveis (ilustrado na figura 5.7).

– Conjunto de peças do problema 02: 46 peças montáveis (ilustrado na figura 5.8).

– Conjunto de peças do problema 03: 41 peças montáveis (ilustrado na figura 5.9).

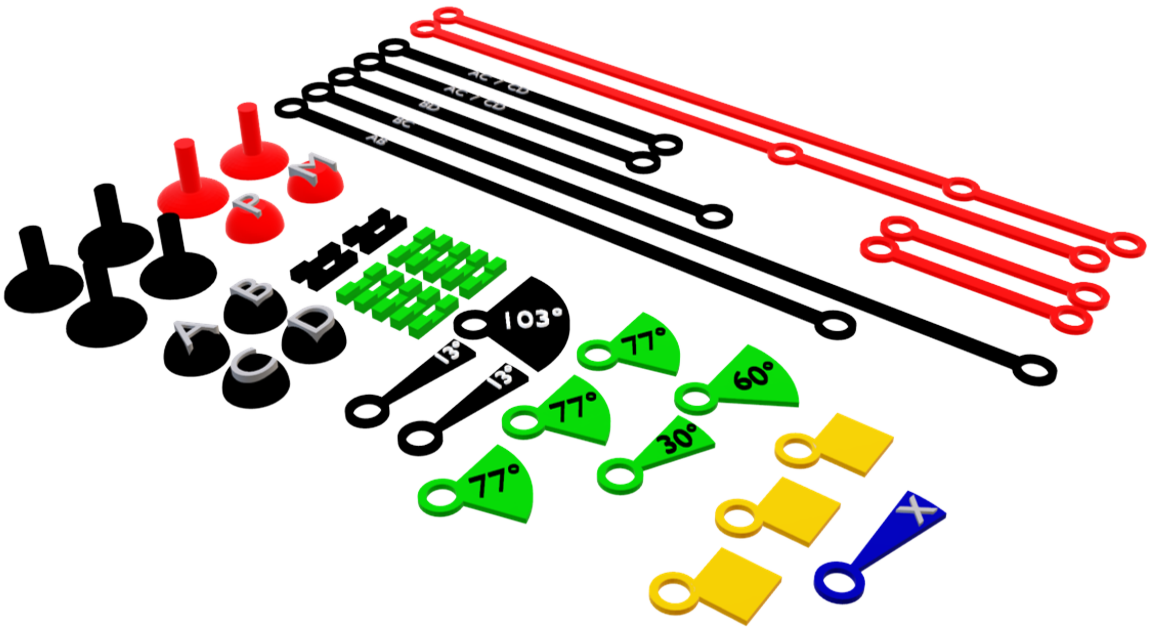
– Conjunto de peças do problema 04: 63 peças montáveis (ilustrado na figura 5.10).

Figura 5.7 – Representação das peças do problema 01



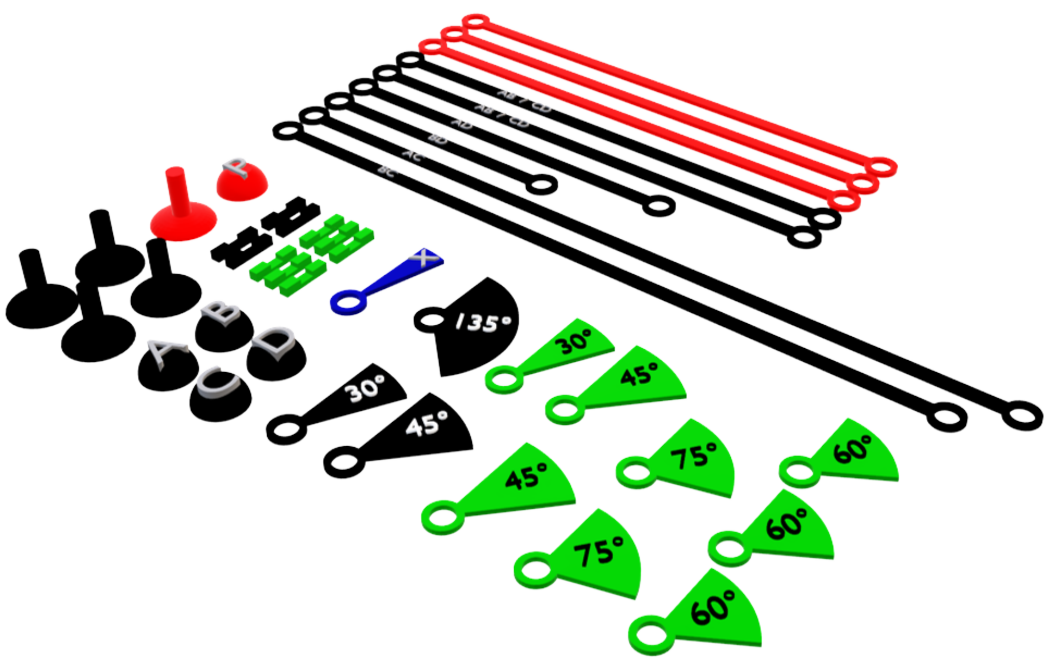
Fonte: Elaborado pelos autores no Blender e PowerPoint.

Figura 5.8 – Representação das peças do problema 02



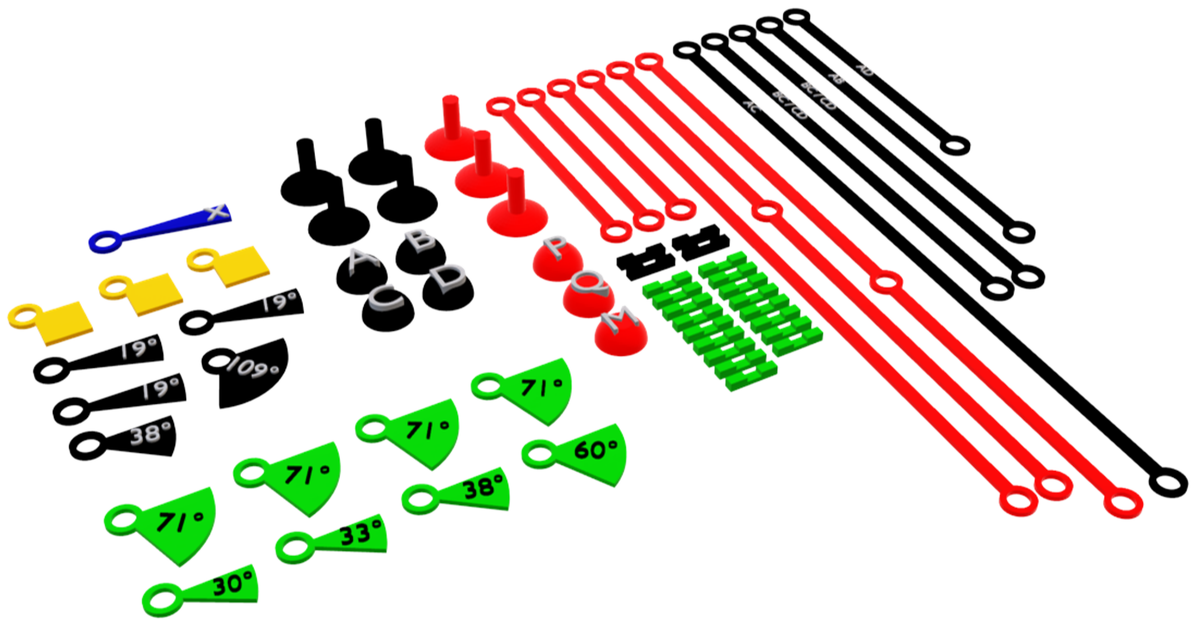
Fonte: Elaborado pelos autores no Blender e PowerPoint.

Figura 5.9 – Representação das peças do problema 03



Fonte: Elaborado pelos autores no Blender e PowerPoint.

Figura 5.10 – Representação das peças do problema 04



Fonte: Elaborado pelos autores no Blender e PowerPoint.

5.3 Resolução guiada do problema 01 do kit

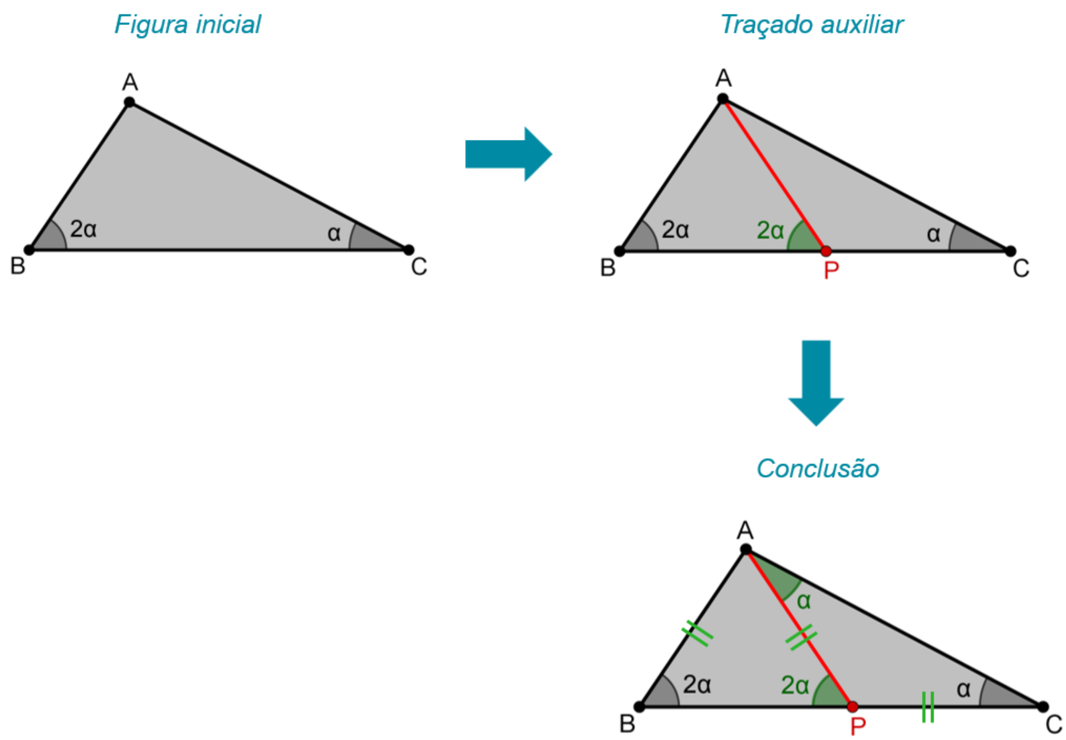
Nesta seção, apresentaremos e mostraremos a resolução guiada do problema 01 do kit usando fotos das peças impressas e o roteiro que consta no manual do professor.

5.3.1 Proposição relacionada ao problema 01 do kit

Propriedade 01: Seja ABC um triângulo que possui um dos ângulos internos medindo o dobro de outro ângulo interno (consideremos $A\widehat{C}B = \alpha$ e $A\widehat{B}C = 2\alpha$). Se realizarmos como traçado auxiliar a ceviana interna $\overline{AP}$, com P sobre $\overline{BC}$, de modo que $A\widehat{P}B = 2\alpha$, então obteremos ABP e PAC isósceles de base $\overline{BP}$ e $\overline{AC}$.

A figura 5.11 ilustra a propriedade 01 por meio de três partes: figura inicial, traçado auxiliar e conclusão.

Figura 5.11 – Representação geométrica da propriedade 01.

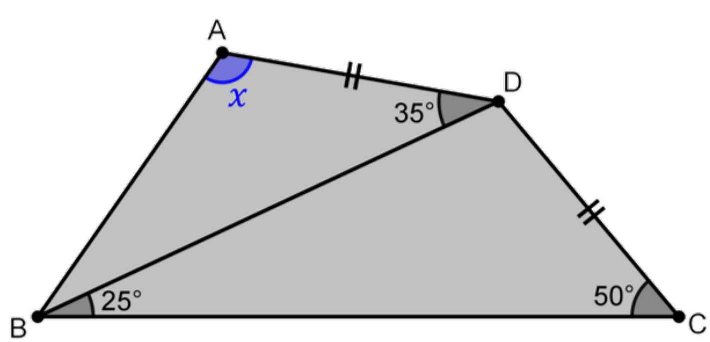


Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

5.3.2 Apresentação do problema 01 do kit

Problema 01: Seja o quadrilátero convexo $ABCD$ tal que $\overline{AD} = \overline{CD}$, $C\widehat{B}D = 25°$, $B\widehat{C}D = 50°$ e $A\widehat{D}B = 35°$, como ilustra a figura 5.12. Determine o valor de $x = B\widehat{A}D$.

Figura 5.12 – Enunciado do problema 01.

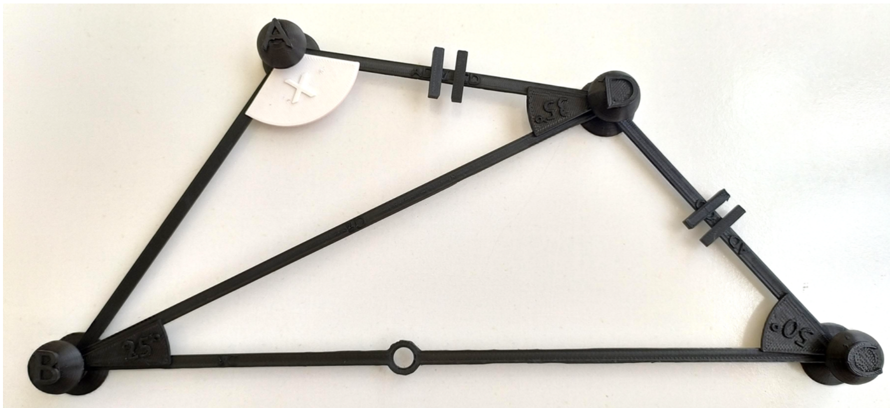


Fonte: Elaborado pelos autores no GeoGebra.

5.3.3 *Resolução passo a passo montando as peças*

Passo 1: Usando as peças correspondentes, monte a figura inicial do enunciado do problema 01 para ela ficar conforme a figura 5.13.

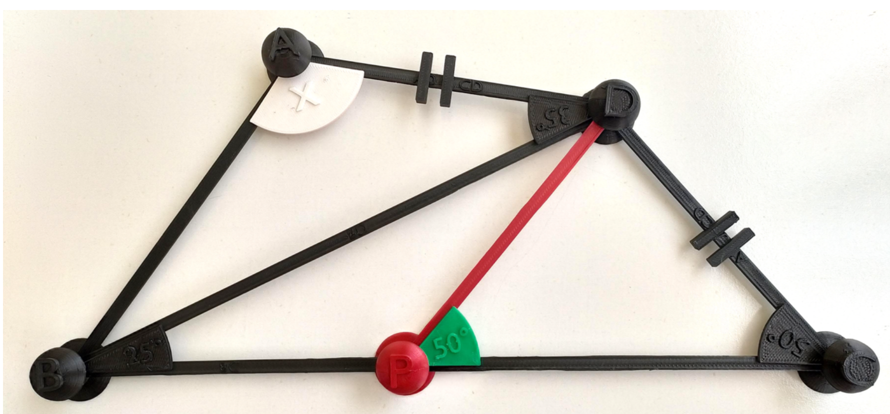
Figura 5.13 – Parte 1 da solução do problema 01.



Fonte: Fotografia de material dos autores.

Pergunta 1: Qual das propriedades podemos aplicar para resolver este problema? Por quê? Dialogue no grupo sobre esta escolha.
Passo 2: Complete a figura do passo 1 adicionando as peças que representam os elementos dos traçados auxiliares para ela ficar conforme a figura 5.14.

Figura 5.14 – Parte 2 da solução do problema 01.



Fonte: Fotografia de material dos autores.

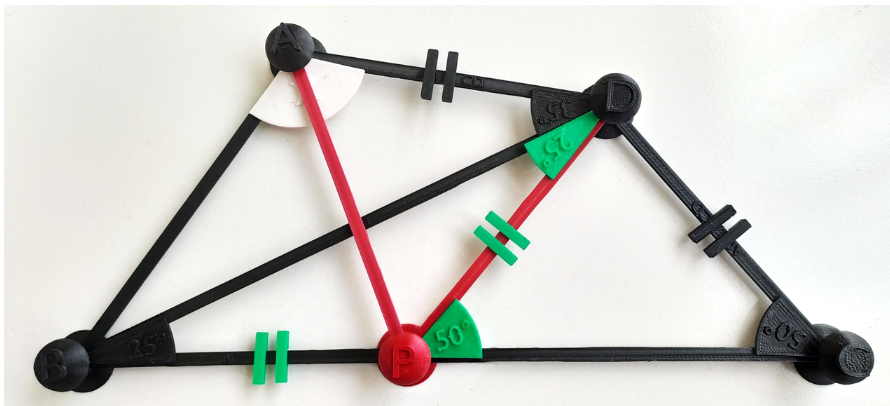
Pergunta 2: Por que o triângulo PCD é isósceles de base $\overline{PC}$? Qual a relação que isto fornece sobre os lados $\overline{PD}$ e $\overline{CD}$?

Pergunta 3: Qual a medida do ângulo $B\widehat{D}P$? Use o teorema do ângulo externo no ponto P do triângulo PBD para determinar esta medida.

Pergunta 4: Por que o triângulo PBD é isósceles de base $\overline{BD}$? Qual a relação que isto fornece sobre os lados $\overline{PD}$ e $\overline{PB}$?

Passo 3: Complete a figura do passo 2 adicionando as peças que representam os elementos discutidos nas perguntas 2, 3 e 4, e o segmento $\overline{AP}$ para ela ficar conforme a figura 5.15.

Figura 5.15 – Parte 3 da solução do problema 01.



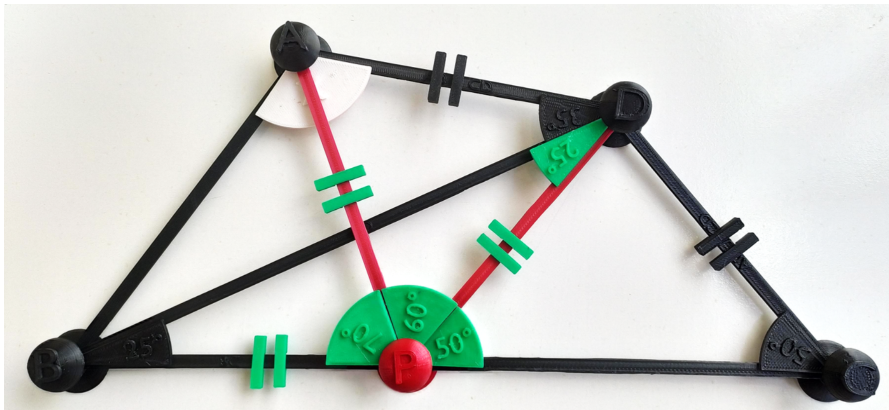
Fonte: Fotografia de material dos autores.

Pergunta 5: Por que o triângulo PAD é equilátero? Qual informação isso nos fornece sobre o lado $\overline{AP}$ e sobre os ângulos $P\widehat{A}D$ e $A\widehat{P}D$?

Pergunta 6: Qual a medida do ângulo $A\widehat{P}B$? Use os ângulos $A\widehat{P}D$ e $C\widehat{P}D$ para determinar esta medida.

Passo 4: Complete a figura do passo 3 adicionando as peças que representam os elementos discutidos nas perguntas 5 e 6 para ela ficar conforme a figura 5.16.

Figura 5.16 – Parte 4 da solução do problema 01.



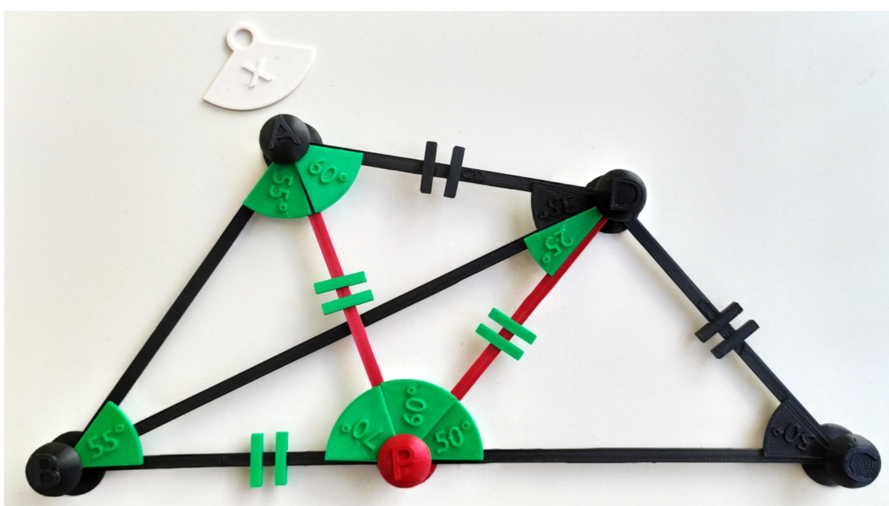
Fonte: Fotografia de material dos autores.

Pergunta 7: Por que o triângulo PAB é isósceles? Qual informação isso nos fornece sobre os ângulos $P\widehat{A}B$ e $P\widehat{B}A$?

Pergunta 8: Qual a medida do ângulo x? Use as medidas dos ângulos $P\widehat{A}B$ e $P\widehat{A}D$ para determinar x.

Após as perguntas 7 e 8, o aluno deve concluir, conforme a figura 5.17, que a medida do ângulo procurada é $x = B\widehat{A}D = P\widehat{A}B \ + \ P\widehat{A}D = 55° + 60° = 115°$.

Figura 5.17 – Parte 5 da solução do problema 01.



Fonte: Fotografia de material dos autores.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nós, professores de Matemática, sabemos da complexidade e aversão que os alunos apresentam no processo de ensinar e aprender Matemática. Quando se trata de Geometria, soma-se as dificuldades de percepções de espaço, grandezas e medidas. Qualquer conceito que se deseja estudar em Matemática, da Educação Básica ao nível superior, torna-se um acumulado sequencial de definições, propriedades, algoritmos e fórmulas. Grande parte dos estudante veem este caminho como longo, difícil e com pouco tempo para percorrer. Essa é uma característica intrínseca do estudar Matemática que não podemos modificar. Neste contexto, pode-se propor métodos para ensinar e aprender Matemática com a função de envolver os alunos no processo de aprendizagem, tornando-os agentes mais participativos na construção do conhecimento. Geralmente busca-se criar atividades e ambientes em que os alunos sejam colaboradores e fazendo Matemática de forma concreta.

Reconhecemos bem a importância de um professor mesclar suas ações de ensinar Matemática com aulas expositivas e com formas de investigar e instigar o fazer Matemática. As aulas expositivas cumprem bem seu papel de ir diretamente aos conceitos matemáticos (visto que o tempo de aula é um fator crucial no processo de ensino a se cumprir ementa) que se deseja assimilar por meio de leitura, demonstrações e exercícios de fixação. Mas sabemos que são poucos os alunos que despertam um gosto por estudar Matemática e que progridem satisfatoriamente com este método de ensino. As aulas planejadas com tendências metodológicas de ensino de Matemática buscam trazer a grande maioria dos outros discentes para o processo de aprendizagem. Além disso, exploram os conceitos matemáticos de formas distintas que podem facilitar o processo de aprendizagem de alunos que não assimilaram pelo método de aula expositiva.

Este trabalho vem a ser uma sugestão de apoio educacional com a perspectiva de contribuir no ensino de Matemática da Educação Básica. Esperamos que as técnicas de traçados auxiliares aqui apresentadas possam contribuir na formação docente. E que o *"Kit de Matemática em Impressora 3D: Problemas de Geometria com Traçados Auxiliares em Triângulos"* possam auxiliar os professores no ensino de Geometria e envolver os alunos na resolução dos problemas.

Entendemos que o kit desenvolvido junta características de uma aula expositiva com ideias diferenciadas de ensino de Matemática. Podemos categorizá-lo como um experimento de laboratório que possui a função de verificar, relembrar e fixar conceitos de geometria.

Infelizmente, pelo grande número de imagens que o trabalho apresenta (que demandam tempo para construção), o curto tempo para realizar a pesquisa no mestrado (se notarmos que pesquisas em traçados auxiliares ainda é uma área carente no Brasil) e outros fatores relacionados ao estudo de modelagem e impressão 3D, não foi possível aplicar o kit em salas de aula. Isso seria de grande valia para analisarmos suas potencialidades no processo de ensino, efetuarmos possíveis alterações e ter uma análise qualiquantitativa da participação e aprendizagem dos alunos. Porém, almejamos cumprir estes testes, em breve, e posteriormente escrever os resultados obtidos; pois esta pesquisa seguirá com o foco em criação de novos kits de laboratório de Matemática para escolas públicas, especialmente na produção física destes objetos.

Esperamos contribuir no que é denominado como *cultura maker*. Direcionando este ensejo de criar e inovar com as tecnologias para as práticas docentes. O que esperamos com isso? Incentivar os professores a se tornarem produtores de kits de laboratório de Matemática de qualidade fazendo uso da impressão 3D e outras ferramentas. Sabemos bem que qualquer atividade inovadora que fuja da aula expositiva demanda muito tempo para planejamento e aplicação, fato que se opõe à carga horaria exaustiva que muitos colegas de profissão possuem. Isso reflete a relevância de compartilhar os recursos e as práticas metodológicas de ensino em plataformas educacionais na internet.

REFERÊNCIAS

BARCENA, J.L.M. **Construcciones en la Circunferencia: Empleando cuadriláteros inscriptibles y puntos notables**. Lima - PERU: Impecus, 2007.

BARCENA, J.L.M. **Construcciones en Triángulos: Técnicas y criterios para realizar trazos auxiliares**. 2. ed. Lima - PERU: Impecus, 2009.

BASTIDAS, J.O. **Geometria 2: Triángulos - Teoría - Demostraciones - Trazos Auxiliares**. 1. ed. Lima - PERU: Editorial Cuscano, 2017.

BASTIDAS, J.O. **Geometria 3: Congruencia de Triángulos - Teoría - Demostraciones - Trazos Auxiliares**. 1. ed. Lima - PERU: Editorial Cuscano, 2017.

DANTE, L.R. **Matemática: contexto & aplicações**. Coleção Ensino Médio. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016.

EVANGELISTA, F.L.; MOURA DE OLIVEIRA, L. Estudo das consequências da aplicação de impressoras 3D no ambiente escolar. **Physicae Organum - Revista Dos Estudantes De Física Da UnB**, [*S. l.*], v. 7, n. 1, p. 39–58, 2021. Disponível em: https://periodicos.unb.br/index.php/physicae/article/view/35946. Acesso em: 25 jul. 2024.

IEZZI, J. *et al.* **Matemática: ciência e aplicações**. Coleção Ensino Médio. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

JUNIOR, A. **O livro negro dos traçados auxiliares**. 6. ed. Rio de Janeiro: AZIMUTE, 2023.

NETO, A.C.M. **Geometria, Coleção PROFMAT**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

WAGNER, E. **Construções Geométricas, Coleção do professor de Matemática**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

5ª Olimpíada Iraniana de Geometria (IGO-2018). **Provas e Gabaritos: Banco de Provas - Iranian Geometry Olympiad**. Disponível em: https://www.obm.org.br/como-se-preparar/provas-e-gabaritos/. Acesso em: 29 de jun. de 2024.

18ª Olimpíada de Matemática do Cone Sul (Cone Sul-2007). **18ª Olimpíada Matemática del Cono Sur - Prueba de Selección**. Disponível em: https://www.oma.org.ar/enunciados/con18sel.htm. Acesso em: 10 de jul. de 2024.

APÊNDICE A - MANUAL DO PROFESSOR

Universidade Estadual da Paraíba
Campus Campina Grande
Centro de Ciência e Tecnologia
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

Kit de Matemática em Impressora 3D

Problemas de Geometria com Traçados Auxiliares em Triângulos

[Manual do Professor]

Organizadores:

Gerivaldo Bezerra da Silva
Aldo Trajano Louredo
Israel Burití Galvão

Campina Grande – PB

2024

UEPB PROFMAT

Sumário:

UEPB PROFMAT

Apresentação:

❖ **Qual a finalidade deste kit?**

Este kit de ensino e aprendizagem de Geometria, mais especificamente sobre traçados auxiliares em triângulos, foi desenvolvido como produto da dissertação do mestrando Gerivaldo Bezerra da Silva, do programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), sobre orientação dos professores Aldo Trajano Louredo e Israel Buriti Galvão.

O kit é composto por quatro problemas envolvendo conceitos de Geometria da Educação Básica. Cada problema consiste em determinar a medida de um ângulo X, mas só pode ser resolvido por meio de uma "*técnica de traçados auxiliares*". Estas técnicas são descritas nas páginas 4, 5, 6 e 7 como proposições, e suas demonstrações foram suprimidas neste manual. Porém, as demonstrações podem ser encontradas em Silva (2024).

As técnicas de traçados auxiliares aqui usadas consistem em adicionar pontos e segmentos à figura inicial do problema de modo a obtermos medidas de ângulos e congruências de ângulos e segmentos que nos levem a solucionar o problema.

O objetivo deste kit é fomentar a construção de conjecturas por meio da resolução de cada um dos quatro problemas de forma interativa, sem realizar cálculos no caderno. Como um quebra-cabeça: encaixando peças que simbolizam pontos, segmentos de retas, ângulos e indicadores de congruências, de modo que os alunos possam:

- Durante a montagem das figuras do problema, analisar o que se obtém de medidas e congruências a cada nova peça adicionada;
- Calcular, mentalmente, medidas de ângulos usando o teorema do ângulo externo e a soma dos ângulos internos de um triângulo;
- Identificar triângulos isósceles, equiláteros e retângulos (inclusive o notável triângulo com ângulos de 30°, 60° e 90°), e utilizar suas propriedades envolvendo relações entre os lados e os ângulos;
- Identificar congruências de triângulos pelos casos LLL, LAL ou ALA.

Este kit pode ser aplicado tanto nas turmas do Ensino Médio como nas do Ensino Fundamental, pois os conteúdos explorados aqui fazem parte do currículo de Matemática de ambos.

As peças de cada um dos problemas deste kit estão disponíveis, no formato STL, para confecção em impressora 3D, na plataforma de objetos educacionais eduCAPES: https://educapes.capes.gov.br. A ideia é incentivar os professores a desenvolver material pedagógico para laboratórios de Matemática com uso da impressão 3D. Fomentando assim a *cultura maker* educacional.

Neste manual do professor, na descrição das peças, contém informações das medidas de cada peça do kit (comprimento, largura e altura) para auxiliar na impressão 3D. Além disso, as peças pretas que representam segmentos são marcadas com a nomenclatura dos seus pontos extremos para auxiliar na hora da montagem.

Esperamos que este material seja bem utilizado, aprimorado, adaptado e retificado por nós professores da Educação Básica. E que sirva de inspiração para desenvolvimento de novos materiais educativos em impressão 3D.

Dúvidas e sugestões podem ser enviadas para o e-mail gerivaldo_sjpb@hotmail.com.

UEPB

PROFMAT

❖ **Composição do kit:**

Este kit é composto por sete elementos:

- **Manual do professor**: É este arquivo que estamos lendo agora! Este manual é para orientar o professor sobre o kit e aplicação dele em sala de aula;
- **Manual do aluno**: Trata-se de um recorte do manual do professor. Nele foi excluído esta apresentação, algumas informações sobre as peças dos problemas e as resoluções guiadas dos problemas.
- **Manual de gabarito**: Trata-se das resoluções guiadas dos problemas.
- **Conjunto de peças do problema 01**: 38 peças montáveis.
- **Conjunto de peças do problema 02**: 46 peças montáveis.
- **Conjunto de peças do problema 03**: 41 peças montáveis.
- **Conjunto de peças do problema 04**: 63 peças montáveis.

❖ **Como o professor pode utilizar este kit?**

O ideal é que cada problema deste kit seja resolvido em grupo de cinco alunos para gerar discussão e troca de ideias entre os discentes. Além disso, sugerimos explorar um problema por vez. É necessário que os alunos já tenham estudado os conceitos de geometria plana: ângulos opostos pelo vértice, ponto médio de um segmento, bissetriz de um ângulo, teorema do ângulo externo, ângulos suplementares, soma dos ângulos internos de um triângulo, triângulo isósceles, triângulo equilátero, triângulo retângulo, triângulos congruentes por um dos casos de congruência (LLL, LAL ou ALA) e a propriedade de que num triângulo retângulo, com ângulos de 30° e 60°, o cateto oposto ao ângulo de 30° mede metade da hipotenusa.

O papel do professor é mediar a montagem da resolução de cada problema, observando o passo a passo tomado por cada grupo e questionando-o sobre o que justifica as congruências (de triângulos, segmentos e ângulos) e medidas calculadas (de ângulos) em cada passo da montagem.

Como sequência didática, idealizamos que o professor organize a aplicação desta atividade na ordem a seguir:

Etapa 1 – Escolher qual problema a ser resolvido durante a aula;

Etapa 2 – Montar grupos com cinco alunos cada;

Etapa 3 – A cada grupo, entregar o manual do aluno e as peças do problema;

Etapa 4 – Apresentar as proposições do manual;

Etapa 5 – Explicar o significado das peças do kit aos alunos;

Etapa 6 – Solicitar para os grupo iniciarem a resolução do problema usando as peças e as orientações que constam no manual do aluno;

Etapa 7 – Solicitar para um dos grupos que conseguiu resolver o problema socializar a solução com a turma;

Etapa 8 – Caso os grupos não consigam resolver o problema, entregar aos grupos o manual de gabarito (que contém as resoluções guiadas dos problemas) e orientá-los na resolução.

UEPB PROFMAT

Observações sobre as etapas da sequência didática:

- A etapa 4 (apresentação das proposições) pode ser realizada como uma simples leitura pelos alunos do grupo ou o professor pode apresentar em sala de aula e discutir sobre suas demonstrações verbalmente, de forma simplificada, explicando as três figuras de cada proposição (figura inicial, traçado auxiliar, conclusão);
- A etapa 5 consiste no aluno manipular as peças montáveis do problema e compreender o que cada peça representa (ponto, ângulo, segmento de reta e indicador de congruência) e sobre as cores das peças:
  - Peças pretas e azul são usadas para montar a figura inicial conforme o enunciado do problema;
  - Peças vermelhas são usadas, em seguida, para adicionar o traçado auxiliar à figura inicial, conforme a proposição escolhida corretamente;
  - Peças verdes são adicionadas em seguida, aos poucos, para compor a conclusão da proposição e outras conclusões. Elas representam as descobertas que o grupo poderá fazer durante a resolução do problema (medidas de ângulos calculadas e congruências de segmentos observadas). Observação: as peças verdes devem ser adicionadas baseadas em alguma conclusão lógica observada pelo grupo: ângulos opostos pelo vértice, ponto médio de um segmento, bissetriz de um ângulo, teorema do ângulo externo, ângulos suplementares, soma dos ângulos internos de um triângulo, triângulo isósceles, triângulo equilátero, triângulo retângulo (em especial o triângulo retângulo com ângulos de 30° e 60°), triângulos congruentes por um dos casos de congruência (LLL, LAL ou ALA).
- Na etapa 8 há perguntas durante a resolução guiada, no manual de gabarito. Estas perguntas servem para direcionar as deduções dos alunos. O professor pode explorar estas e outras perguntas com os grupos, orientando-os na resolução do problema.

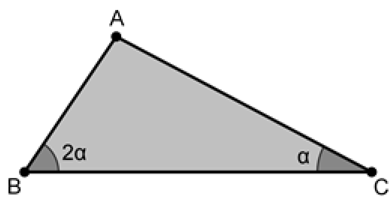
O manual de gabarito foi idealizado para não conter a “solução” do problema, mas sim a “resolução” do problema. Qual a diferença? É que a finalidade não é o aluno simplesmente consultar a resposta, mas sim construí-la passo a passo, identificando os conceitos de geometria plana que justificam as medidas de ângulos e congruência de segmentos obtidas.

Estimamos que a sequência didática, para cada problema, exige um tempo aproximado de 1h e 30min para aplicação.

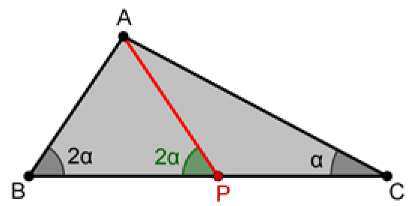
Proposições a serem usadas na resolução dos problemas:

Proposição 01: Seja ABC um triângulo que possui um dos ângulos internos medindo o dobro de outro ângulo interno (consideremos $A\hat{C}B = \alpha$ e $A\hat{B}C = 2\alpha$). Se realizarmos como traçado auxiliar a ceviana interna $\overline{AP}$, com P sobre $\overline{BC}$, de modo que $A\hat{P}B = 2\alpha$, então obteremos ABP e PAC isósceles de base $\overline{BP}$ e $\overline{AC}$.

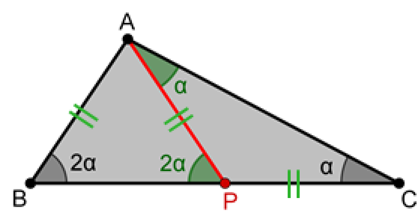
Figura inicial



Traçado auxiliar



Conclusão

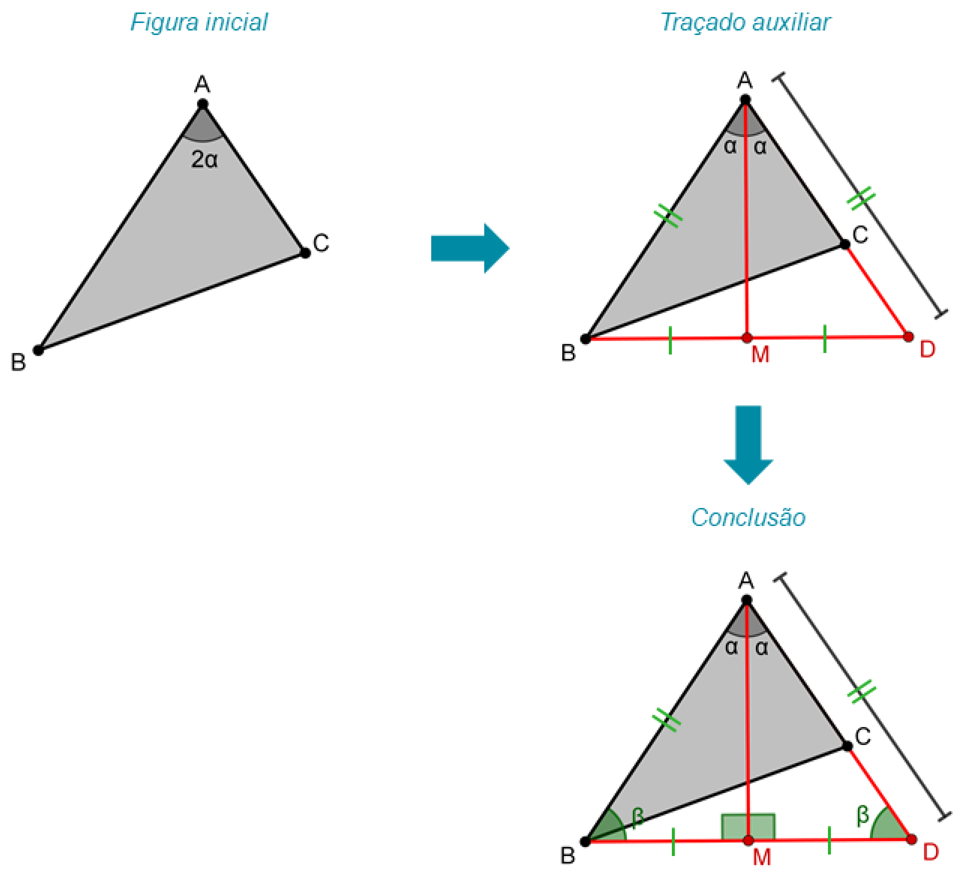


Observe que este traçado auxiliar nos dá as congruências abaixo que podemos utilizar para resolver problema de geometria:

- $\overline{AB} = \overline{AP} = \overline{PC}$
- $A\hat{B}P = A\hat{P}B = 2\alpha$
- $P\hat{A}C = P\hat{C}A = \alpha$

UEPB PROFMAT

Proposição 02: Seja ABC um triângulo com $B\hat{A}C = 2\alpha$ e $\overline{AC} < \overline{AB}$. Se realizarmos como traçado auxiliar os pontos D e M, tal que D está sobre a semirreta $\overrightarrow{AC}$, com $\overline{AD} = \overline{AB}$, e M é ponto médio de $\overline{BD}$, então obteremos o triângulo ABD isósceles de base $\overline{BD}$ e os triângulos retângulos congruentes ABM e ADM.



$$\beta = 90° - \alpha$$

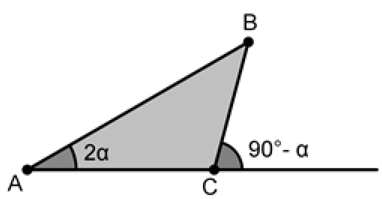
Observe que este traçado auxiliar nos dá as congruências abaixo que podemos utilizar para resolver problema de geometria:

- $\overline{AB} = \overline{AD}$
- $\overline{BM} = \overline{DM}$
- $B\hat{A}M = D\hat{A}M = \alpha$
- $B\widehat{M}A = D\widehat{M}A = 90°$
- $A\hat{B}M = A\hat{D}M = 90° - \alpha$

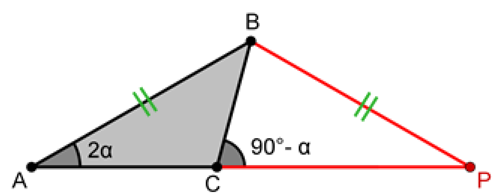
UEPB PROFMAT

Proposição 03: Seja ABC um triângulo com $B\hat{A}C = 2\alpha$ e ângulo externo, em C, de medida $90° - \alpha$. Se realizarmos como traçado auxiliar o ponto P sobre a semirreta $\overrightarrow{AC}$ de modo que $\overline{AB} = \overline{BP}$, então obteremos os triângulos ABP e PBC isósceles de base $\overline{AP}$ e $\overline{BC}$.

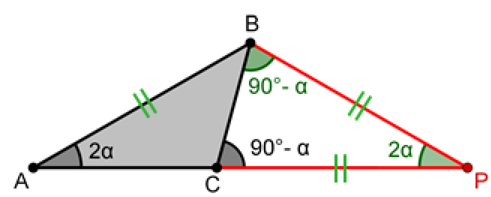
Figura inicial



Traçado auxiliar



Conclusão



Observe que este traçado auxiliar nos dá as congruências abaixo que podemos utilizar para resolver problema de geometria:

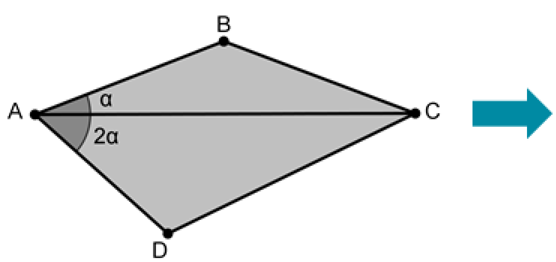
- $\overline{AB} = \overline{BP} = \overline{CP}$
- $B\hat{A}C = B\hat{P}C = 2\alpha$
- $P\hat{B}C = P\hat{C}B = 90° - \alpha$

Proposição 04: Seja ABCD um quadrilátero convexo, tal que sua diagonal $\overline{AC}$ divide o ângulo $B\hat{A}D$ na proporção de 1:2 (denotemos como $B\hat{A}C = \alpha$ e $C\hat{A}D = 2\alpha$). Se realizarmos como traçado auxiliar os pontos P, M e Q, tais que:

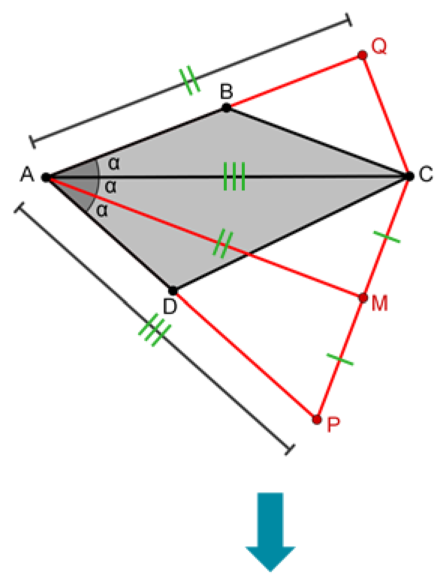
- P está sobre a semirreta $\overrightarrow{AD}$ com $\overline{AP} = \overline{AC}$;
- M é ponto médio do segmento $\overline{PC}$;
- Q está sobre a semirreta $\overrightarrow{AB}$ com $\overline{AQ} = \overline{AM}$;

então obteremos os triângulos retângulos APM, ACM e ACQ congruentes.

Figura inicial



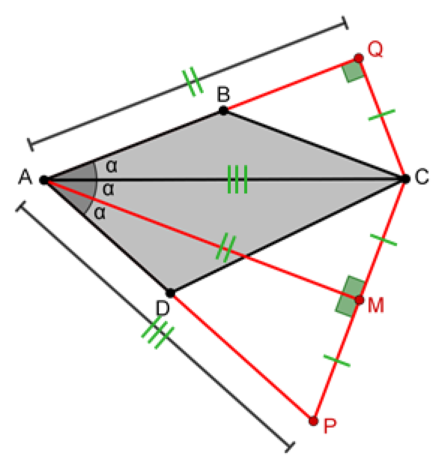
Traçado auxiliar



Conclusão

Observe que este traçado auxiliar nos dá as congruências abaixo que podemos utilizar para resolver problema de geometria:

- $\overline{AQ} = \overline{AM}$ e $\overline{AC} = \overline{AP}$
- $\overline{PM} = \overline{CM} = \overline{CQ}$
- $P\hat{A}M = C\hat{A}M = C\hat{A}Q = \alpha$
- $P\widehat{M}A = C\widehat{M}A = C\hat{Q}A = 90°$
- $A\hat{P}M = A\hat{C}M = A\hat{C}Q = 90° - \alpha$

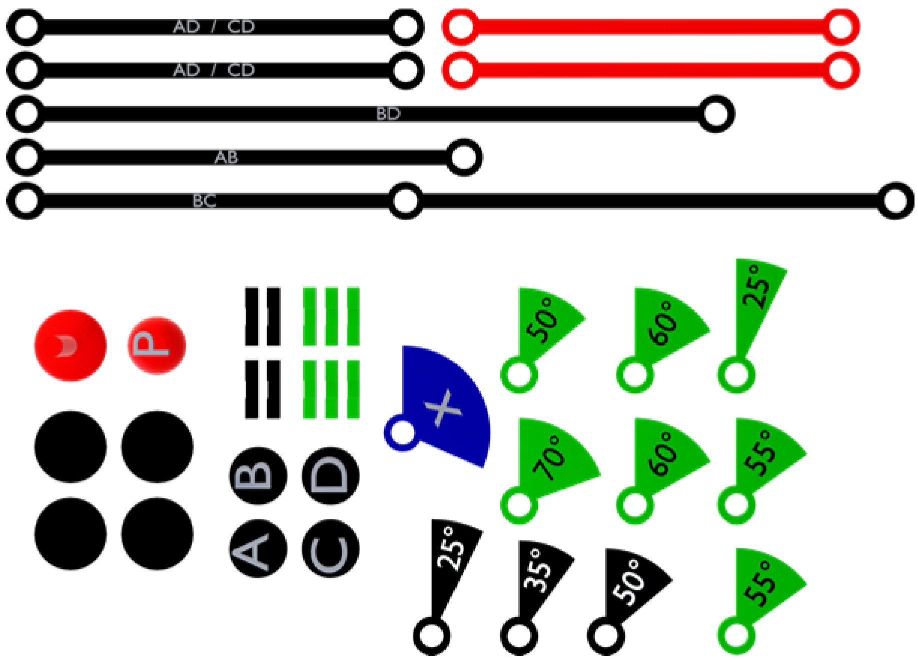


UEPB

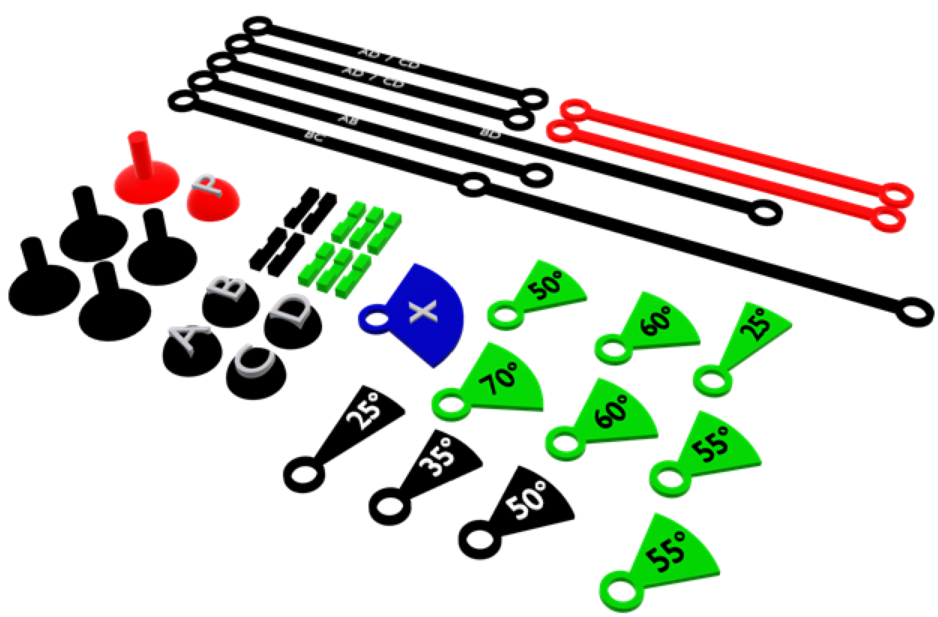
PROFMAT

Conhecendo as peças de cada problema do kit:

Peças do problema 01: Vista Superior.

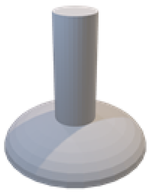


Peças do problema 01: Vista em perspectiva.



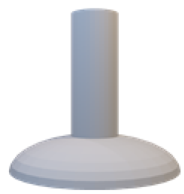
Peças do problema 01: Representação das peças a serem impressas.

1. Pino da base de ponto..

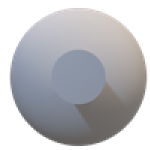


QP-01-01

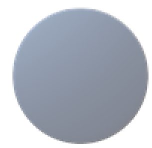
Perspectiva (Superior)



Lateral



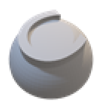
Superior



Inferior

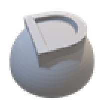
2. Topo de ponto...

QP-01-02

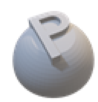


QP-01-04

QP-01-03



QP-01-05

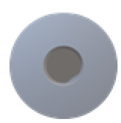


QP-01-14

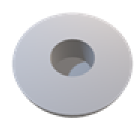
Perspectiva (Superior)

Lateral

Superior



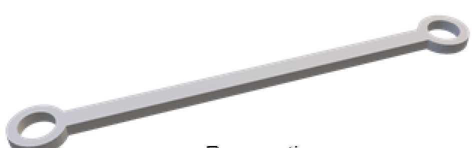
Inferior



Perspectiva (Inferior)

3. Segmentos de reta...

QP-01-06 QP-01-07 QP-01-08 QP-01-09



Perspectiva

Superior/Inferior

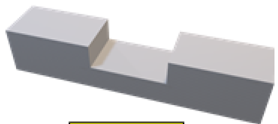
Frontal

Lateral

UEPB

PROFMAT

4. Indicador de Congruência ....



QP-01-13

Perspectiva (Superior)

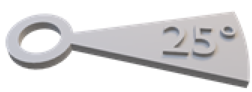
Frontal

Lateral

Superior

Inferior

5. Ângulo com medida escrita..



QP-01-10

Perspectiva (Superior)

Superior

Lateral

QP-01-11

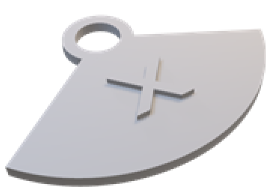
QP-01-12

QP-01-15

QP-01-16

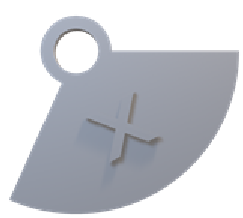
QP-01-17

6. Ângulo para ser descoberto a medida...



QP-01-18

Perspectiva (Superior)



Superior

Lateral

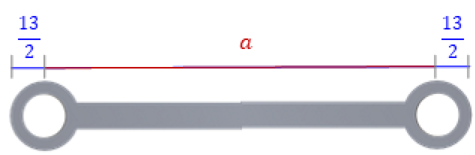
UEPB PROFMAT

Peças do problema 01: Descrição das peças: 38 peças (18/38 peças são diferentes).

Código da Peça	Dimensões (Em mm)			Cor	Número de Cópias	Descrição da Peça
	Eixo x (Comp.)	Eixo y (Larg.)	Eixo z (Altura)			
QP-01-01	25	25	23	Preto	4	Pino da base de ponto
QP-01-02	20	20	10	Preto	1	Topo de ponto escrito "A"
QP-01-03	20	20	10	Preto	1	Topo de ponto escrito "B"
QP-01-04	20	20	10	Preto	1	Topo de ponto escrito "C"
QP-01-05	20	20	10	Preto	1	Topo de ponto escrito "D"
QP-01-06	$\frac{151+13}{164}$	13	2,75	Preto	1	Segmento AB
QP-01-07	$\frac{300+13}{313}$	13	2,75	Preto	1	Segmento BC
QP-01-08	$\frac{131+13}{144}$	13	2,75	Preto	2	Segmentos CD e AD
QP-01-09	$\frac{238+13}{251}$	13	2,75	Preto	1	Segmento BD
QP-01-10	46,50	24,03	3	Preto	1	Ângulo escrito "25°"
QP-01-11	39,22	25,69	3	Preto	1	Ângulo escrito "35°"
QP-01-12	36,50	29,48	3	Preto	1	Ângulo escrito "50°"
QP-01-13	20	4	4	Preto	4	Indicador de congruência
QP-01-01	25	25	23	Vermelho	1	Pino da base de ponto
QP-01-14	20	20	10	Vermelho	1	Topo de ponto escrito "P"
QP-01-08	$\frac{131+13}{144}$	13	2	Vermelho	2	Segmentos PA e PD
QP-01-10	46,50	24,03	3	Verde	1	Ângulo escrito "25°"
QP-01-12	36,50	29,48	3	Verde	1	Ângulo escrito "50°"
QP-01-15	36,50	32,48	3	Verde	2	Ângulo escrito "60°"
QP-01-16	36,50	30,77	3	Verde	2	Ângulo escrito "55°"
QP-01-17	36,50	34,69	3	Verde	1	Ângulo escrito "70°"
QP-01-13	20	4	4	Verde	6	Indicador de congruência
QP-01-18	42,2	36,5	3	Azul	1	Ângulo escrito "x"

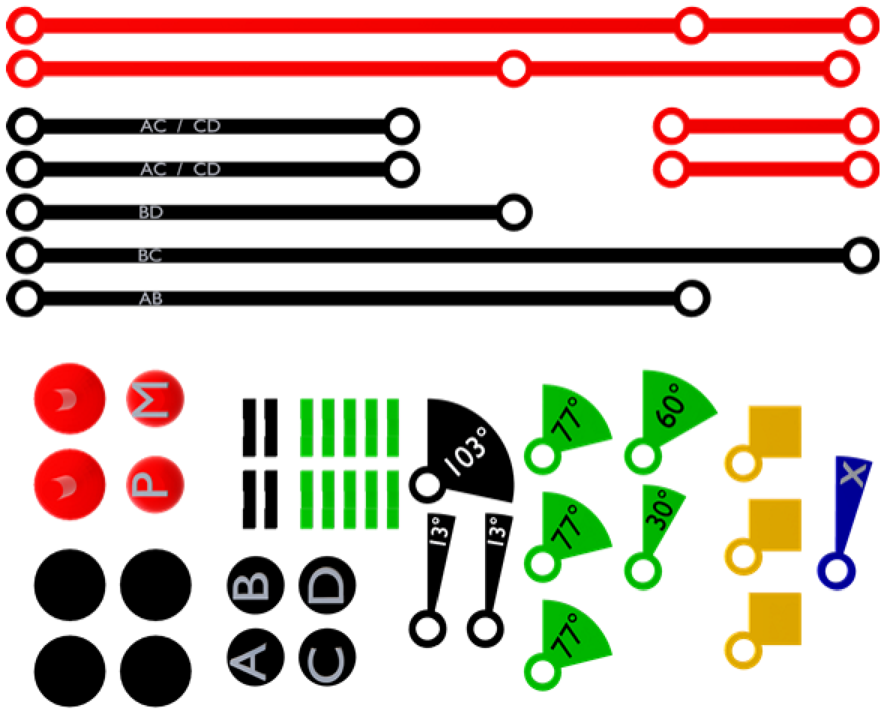
Observação: No comprimento de cada segmento de reta está escrito $\frac{a+13}{b}$:

- a é a distância entre os centros dos orifícios circulares nas extremidades da peça;
- 13 é o diâmetro externo do orifício circular nas extremidades da peça;
- b é o comprimento total da peça ($b = a + 13$).

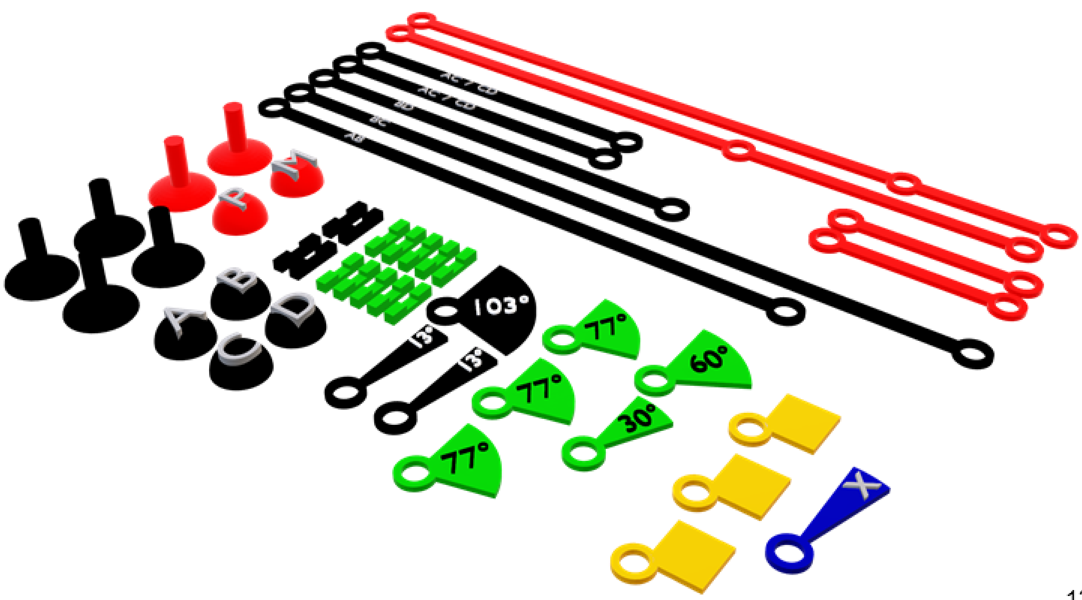


UEPB PROFMAT

Peças do problema 02: Vista Superior



Peças do problema 02: Vista em perspectiva.

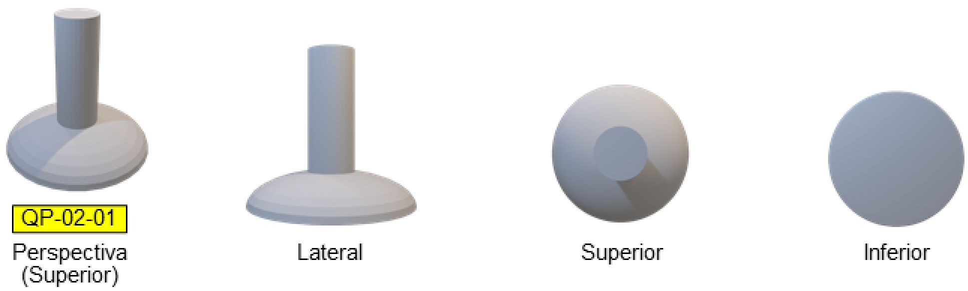


UEPB

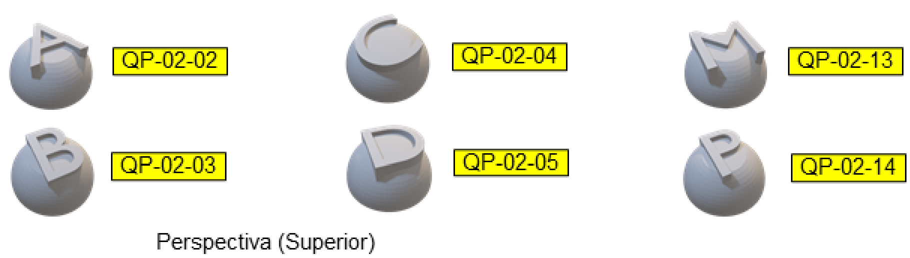
PROFMAT

Peças do problema 02: Representação das peças a serem impressas..

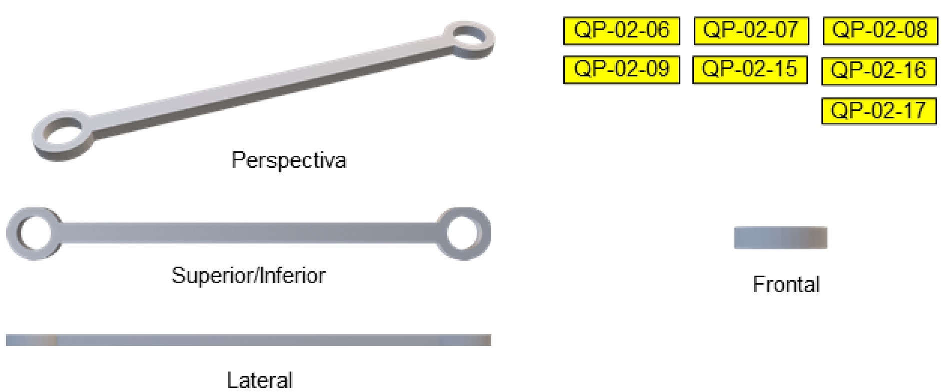
1. Pino da base de ponto..



2. Topo de ponto..



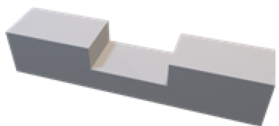
3. Segmentos de reta...



UEPB

PROFMAT

4. Indicador de Congruência ....



QP-02-12

Perspectiva (Superior)

Frontal

Lateral

Superior

Inferior

5. Ângulo reto...

QP-02-18

Perspectiva (Superior)

Superior

Lateral

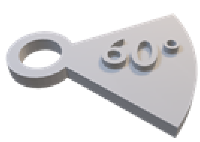
6. Ângulo com medida escrita..

QP-02-19

Perspectiva (Superior)

Superior

Lateral



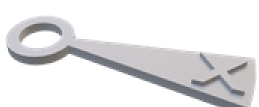
QP-02-20

QP-02-21

QP-02-11

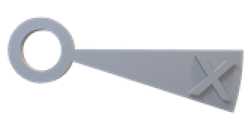
QP-02-10

7. Ângulo para ser descoberto a medida..



QP-02-22

Perspectiva (Superior)



Superior

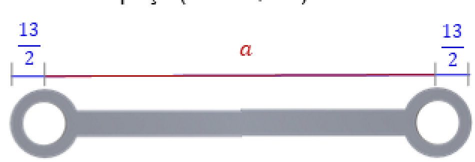
Lateral

Peças do problema 02: Descrição das peças: 46 peças (22/46 peças são diferentes).

Código da Peça	Dimensões (Em mm)			Cor	Número de Cópias	Descrição da Peça
	Eixo x (Comp.)	Eixo y (Larg.)	Eixo z (Altura)			
QP-02-01	25	25	23	Preto	4	Pino da base de ponto
QP-02-02	20	20	10	Preto	1	Topo de ponto escrito "A"
QP-02-03	20	20	10	Preto	1	Topo de ponto escrito "B"
QP-02-04	20	20	10	Preto	1	Topo de ponto escrito "C"
QP-02-05	20	20	10	Preto	1	Topo de ponto escrito "D"
QP-02-06	232 + 13 245	13	2,75	Preto	1	Segmento AB
QP-02-07	291 + 13 304	13	2,75	Preto	1	Segmento BC
QP-02-08	131 + 13 144	13	2,75	Preto	2	Segmentos CD e AC
QP-02-09	170 + 13 183	13	2,75	Preto	1	Segmento BD
QP-02-10	46,50	16,18	3	Preto	2	Ângulo escrito "13°"
QP-02-11	36,5	36,5	3	Preto	1	Ângulo escrito "103°"
QP-02-12	20	4	4	Preto	4	Indicador de congruência
QP-02-01	25	25	23	Vermelho	2	Pino da base de ponto
QP-02-13	20	20	10	Vermelho	1	Topo de ponto escrito "M"
QP-02-14	20	20	10	Vermelho	1	Topo de ponto escrito "P"
QP-02-15	66 + 13 79	13	2	Preto	2	Segmentos PM e CM
QP-02-16	284 + 13 297	13	2	Preto	1	Segmento BM
QP-02-17	291 + 13 304	13	2	Preto	1	Segmento BP
QP-02-18	26,5	26,5	2	Amarelo	2	Ângulo reto
QP-02-19	36,5	21,5	3	Verde	1	Ângulo escrito "30°"
QP-02-20	36,50	32,48	3	Verde	1	Ângulo escrito "60°"
QP-02-21	31,50	30,76	3	Verde	3	Ângulo escrito "77°"
QP-02-12	20	4	4	Verde	10	Indicador de congruência
QP-02-22	46,50	18,86	3	Azul	1	Ângulo escrito "x"

Observação: No comprimento de cada segmento de reta está escrito $\frac{a+13}{b}$:

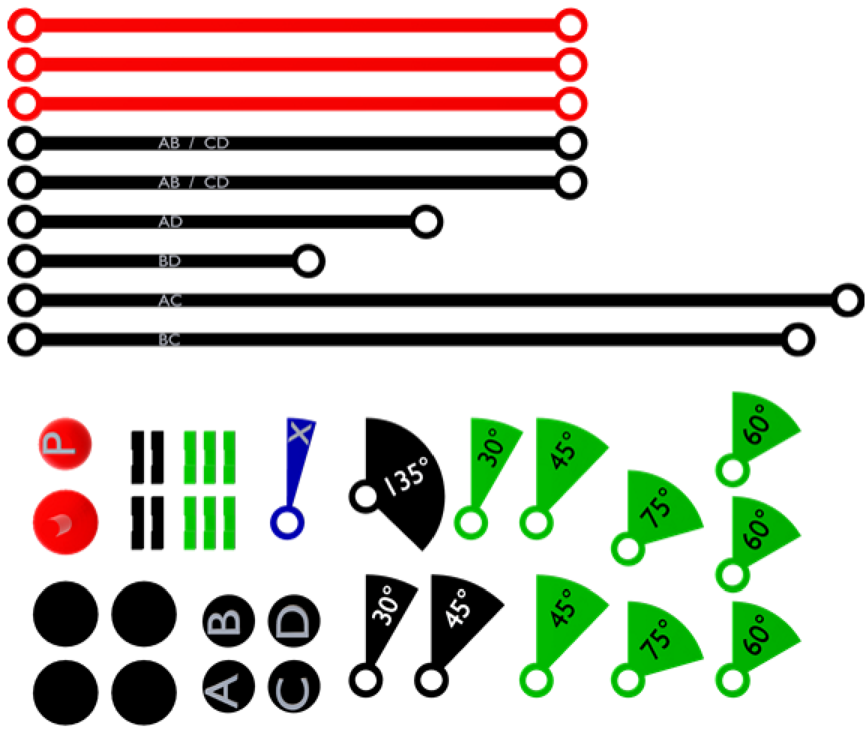
- a é a distância entre os centros dos orifícios circulares nas extremidades da peça;
- 13 é o diâmetro externo do orifício circular nas extremidades da peça;
- b é o comprimento total da peça ($b = a + 13$).



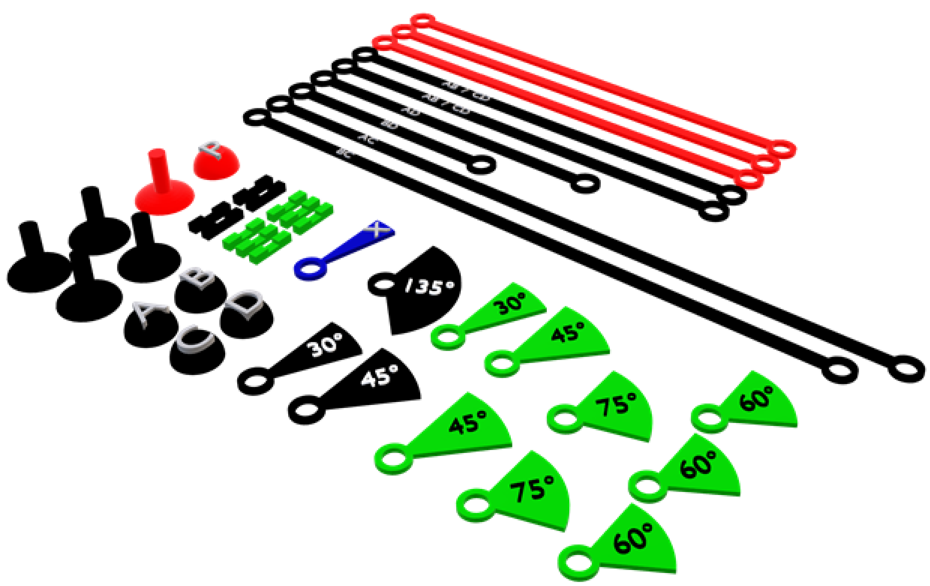
UEPB

PROFMAT

Peças do problema 03: Vista Superior



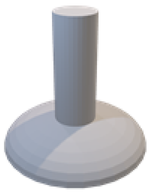
Peças do problema 03: Vista em perspectiva.



UEPB PROFMAT

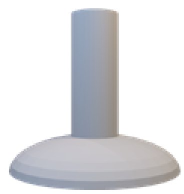
Peças do problema 03: Representação das peças a serem impressas.

1. Pino da base de ponto..

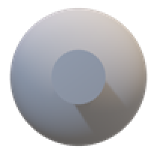


QP-03-01

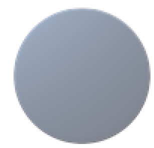
Perspectiva (Superior)



Lateral



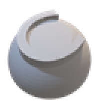
Superior



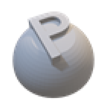
Inferior

2. Topo de ponto..

QP-03-02

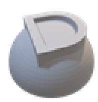


QP-03-04



QP-03-15

QP-03-03

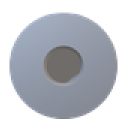


QP-03-05

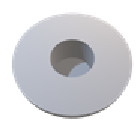
Perspectiva (Superior)

Lateral

Superior



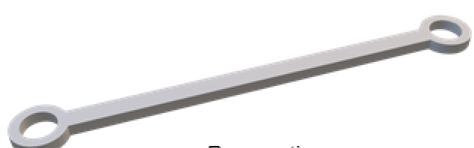
Inferior



Perspectiva (Inferior)

3. Segmentos de reta..

QP-03-06 QP-03-07 QP-03-08 QP-03-09 QP-03-10



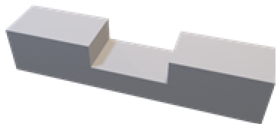
Perspectiva

Superior/Inferior

Frontal

Lateral

4. Indicador de Congruência ....



QP-03-14

Perspectiva (Superior)

Frontal

Lateral

Superior

Inferior

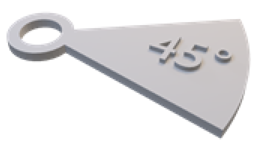
5. Ângulo com medida escrita..

QP-03-11

Perspectiva (Superior)

Superior

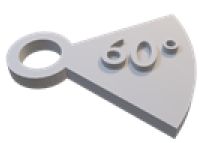
Lateral



QP-03-12

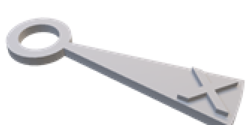
QP-03-17

QP-03-13



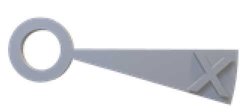
QP-03-16

6. Ângulo para ser descoberto a medida..



QP-03-18

Perspectiva (Superior)



Superior

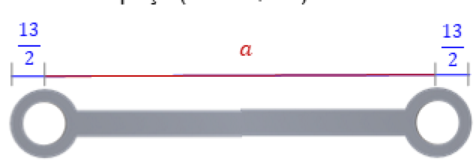
Lateral

Peças do problema 03: Descrição das peças: 41 peças (18/41 peças são diferentes).

Código da Peça	Dimensões (Em mm)			Cor	Número de Cópias	Descrição da Peça
	Eixo x (Comp.)	Eixo y (Larg.)	Eixo z (Altura)			
QP-03-01	25	25	23	Preto	4	Pino da base de ponto
QP-03-02	20	20	10	Preto	1	Topo de ponto escrito “A”
QP-03-03	20	20	10	Preto	1	Topo de ponto escrito “B”
QP-03-04	20	20	10	Preto	1	Topo de ponto escrito “C”
QP-03-05	20	20	10	Preto	1	Topo de ponto escrito “D”
QP-03-06	$\frac{208+13}{221}$	13	2,75	Preto	2	Segmentos AB e CD
QP-03-07	$\frac{295+13}{308}$	13	2,75	Preto	1	Segmento BC
QP-03-08	$\frac{314+13}{327}$	13	2,75	Preto	1	Segmento AC
QP-03-09	$\frac{153+13}{166}$	13	2,75	Preto	1	Segmento AD
QP-03-10	$\frac{108+13}{121}$	13	2,75	Preto	1	Segmento BD
QP-03-11	46,5	26,5	3	Preto	1	Ângulo escrito “30°”
QP-03-12	46,40	34,29	3	Preto	1	Ângulo escrito “45°”
QP-03-13	50,48	36,50	3	Preto	1	Ângulo escrito “135°”
QP-03-14	20	4	4	Preto	4	Indicador de congruência
QP-03-01	25	25	23	Vermelho	1	Pino da base de ponto
QP-03-15	20	20	10	Vermelho	1	Topo de ponto escrito “P”
QP-03-06	$\frac{208+13}{221}$	13	2	Preto	3	Segmentos PB, PC e PD
QP-03-11	46,5	26,5	3	Verde	1	Ângulo escrito “30°”
QP-03-12	46,5	34,29	3	Verde	2	Ângulo escrito “45°”
QP-03-16	36,5	32,48	3	Verde	3	Ângulo escrito “60°”
QP-03-17	36,5	35,34	3	Verde	2	Ângulo escrito “75°”
QP-03-14	20	4	4	Verde	6	Indicador de congruência
QP-03-18	46,50	17,53	3	Azul	1	Ângulo escrito “x”

Observação: No comprimento de cada segmento de reta está escrito $\frac{a+13}{b}$:

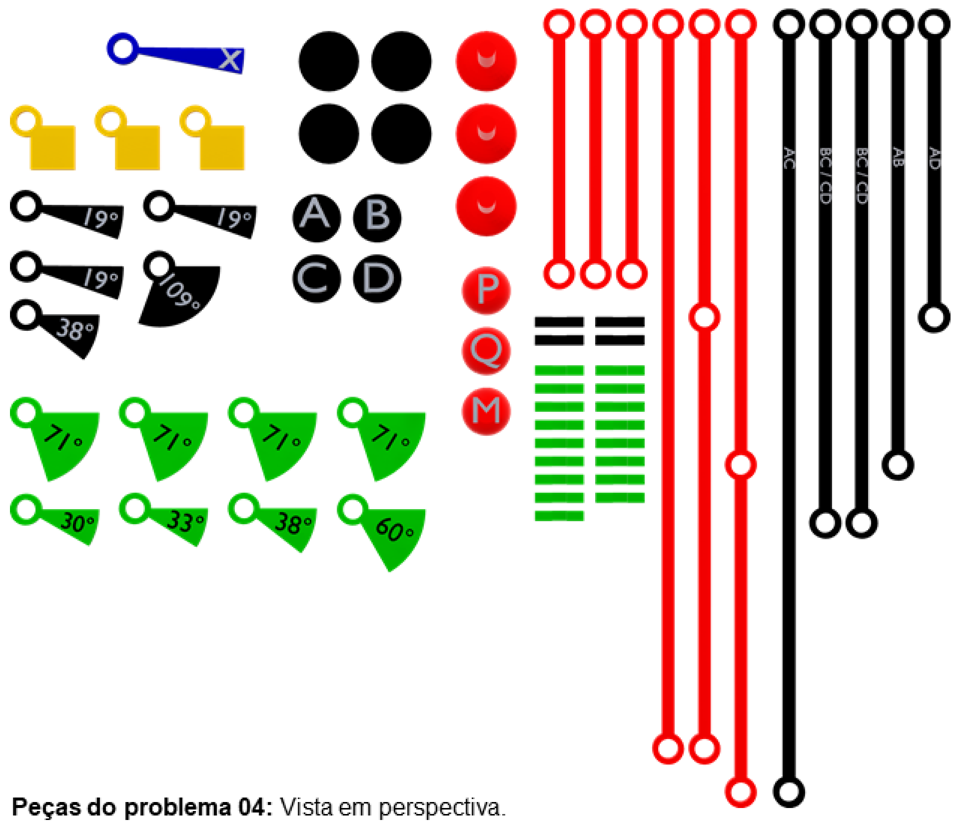
- a é a distância entre os centros dos orifícios circulares nas extremidades da peça;
- 13 é o diâmetro externo do orifício circular nas extremidades da peça;
- b é o comprimento total da peça ($b = a + 13$).



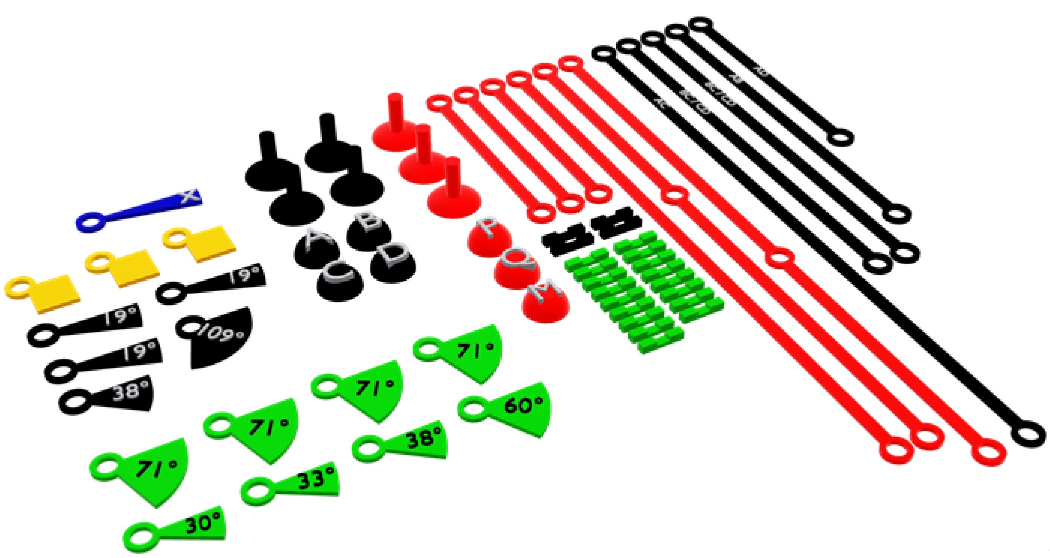
UEPB

PROFMAT

Peças do problema 04: Vista Superior



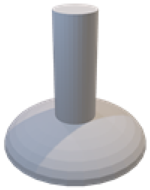
Peças do problema 04: Vista em perspectiva.

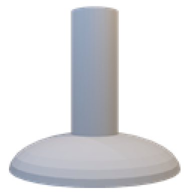


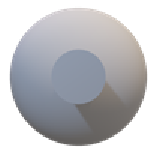
UEPB PROFMAT

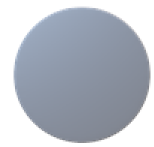
Peças do problema 04: Representação das peças a serem impressas.

1. Pino da base de ponto


QP-04-01
Perspectiva (Superior)

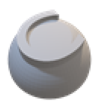

Lateral

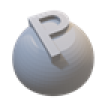

Superior


Inferior

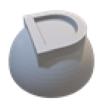
2. Topo de ponto

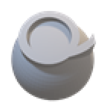

QP-04-02


QP-04-04


QP-04-14


QP-04-03


QP-04-05

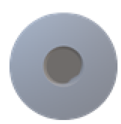

QP-04-15

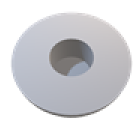
Perspectiva (Superior)


QP-04-16


Lateral

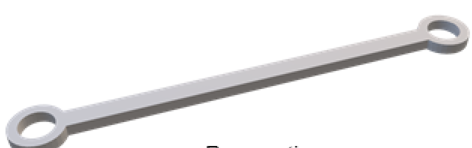

Superior


Inferior


Perspectiva (Inferior)

3. Segmentos de reta

QP-04-06 QP-04-07 QP-04-08
QP-04-09 QP-04-17 QP-04-18
QP-04-19 QP-04-20


Perspectiva


Superior/Inferior

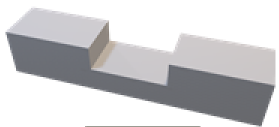

Frontal

Lateral

UEPB

PROFMAT

4. Indicador de Congruência


QP-04-13
Perspectiva (Superior)


Frontal


Lateral


Superior


Inferior

5. Ângulo reto


QP-04-21
Perspectiva (Superior)


Superior

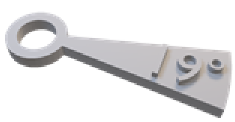

Lateral

6. Ângulo com medida escrita

QP-04-22
Perspectiva (Superior)

Superior

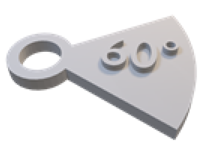

Lateral



QP-04-10

QP-04-11

QP-04-23

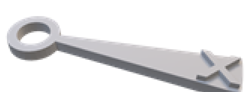


QP-04-24

QP-04-25

QP-04-12

7. Ângulo para ser descoberto a medida



QP-04-26
Perspectiva (Superior)

Superior


Lateral

Peças do problema 04: Descrição das peças: 63 peças (26/63 peças são diferentes).

Código da Peça	Dimensões (Em mm)			Cor	Número de Cópias	Descrição da Peça
	Eixo x (Comp.)	Eixo y (Larg.)	Eixo z (Altura)			
QP-04-01	25	25	23	Preto	4	Pino da base de ponto
QP-04-02	20	20	10	Preto	1	Topo de ponto escrito "A"
QP-04-03	20	20	10	Preto	1	Topo de ponto escrito "B"
QP-04-04	20	20	10	Preto	1	Topo de ponto escrito "C"
QP-04-05	20	20	10	Preto	1	Topo de ponto escrito "D"
QP-04-06	121+13 134	13	2,75	Preto	1	Segmento AD
QP-04-07	206 + 13 219	13	2,75	Preto	2	Segmentos BC e CD
QP-04-08	182 + 13 195	13	2,75	Preto	1	Segmento AB
QP-04-09	317 + 13 330	13	2,75	Preto	1	Segmento AC
QP-04-10	46,50	20,18	3	Preto	3	Ângulo escrito "19°"
QP-04-11	36,50	24,97	3	Preto	1	Ângulo escrito "38°"
QP-04-12	33,55	31,50	3	Preto	1	Ângulo escrito "109°"
QP-04-13	20	4	4	Preto	4	Indicador de congruência
QP-04-01	25	25	23	Vermelho	3	Pino da base de ponto
QP-04-14	20	20	10	Vermelho	1	Topo de ponto escrito "P"
QP-04-15	20	20	10	Vermelho	1	Topo de ponto escrito "Q"
QP-04-16	20	20	10	Vermelho	1	Topo de ponto escrito "M"
QP-04-17	103 + 13 116	13	2	Vermelho	3	Segmentos CQ, CM e PM
QP-04-18	299 + 13 312	13	2,75	Vermelho	1	Segmento AM
QP-04-19	299 + 13 312	13	2,75	Vermelho	1	Segmento AQ
QP-04-20	317 + 13 330	13	2,75	Vermelho	1	Segmento AP
QP-04-21	26,5	26,5	2	Amarelo	3	Ângulo reto
QP-04-22	36,5	21,5	3	Verde	1	Ângulo escrito "30°"
QP-04-23	36,5	22,4	3	Verde	1	Ângulo escrito "33°"
QP-04-11	36,50	24,97	3	Verde	1	Ângulo escrito "38°"
QP-04-24	36,50	32,48	3	Verde	1	Ângulo escrito "60°"
QP-04-25	36,5	35,03	3	Verde	4	Ângulo escrito "71°"
QP-04-13	20	4	4	Verde	17	Indicador de congruência
QP-04-26	56,5	16,9	3	Azul	1	Ângulo escrito "x"

Observação: No comprimento de cada segmento de reta está escrito $\frac{a+13}{b}$:

- a é a distância entre os centros dos orifícios circulares nas extremidades da peça;
- 13 é o diâmetro externo do orifício circular nas extremidades da peça;
- b é o comprimento total da peça ($b = a + 13$).

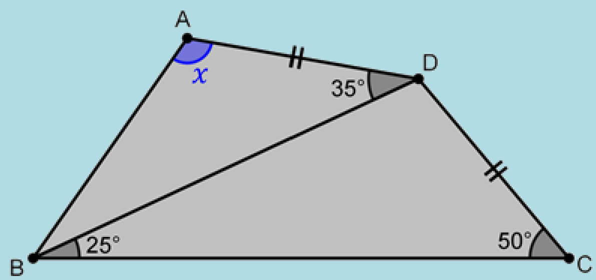
UEPB

PROFMAT

Problemas propostos: Problema 01

❖ **Enunciado e desenho do problema:**

Seja o quadrilátero convexo $ABCD$, tal que $\overline{AD} = \overline{CD}$, $C\hat{B}D = 25°$, $B\hat{C}D = 50°$ e $A\hat{D}B = 35°$. Determine o valor de $x = B\hat{A}D$.



❖ **Vamos resolver o problema?**

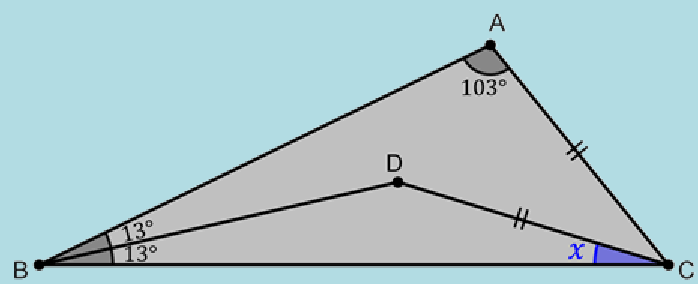
- **Passo 1:** Use as peças de cor preta e azul para montar a figura acima em um superfície plana (observe que os segmentos de reta possuem uma indicação em um dos lados, por exemplo: SEGMENTO AB).
- **Passo 2:** Analise as características dos lados e ângulos da figura montada e descubra qual das proposições (nas páginas 4, 5, 6 e 7) podemos usar para nos auxiliar na descoberta do ângulo X.
- **Passo 3:** Adicione as peças de cor vermelha à figura do passo 1 de acordo com a proposição correta analisada no passo 2.
- **Passo 4:** Agora, compartilhado a ideia de cada um dos membros do grupo, vá descobrindo as medidas de ângulos e congruência de segmentos. A cada nova descoberta, identifique-a adicionando elementos de cor verde na montagem da figura do passo 3.
- Você vai realizar estas descobertas identificando na figura montada alguns destes conceitos geométricos:
  - ângulos opostos pelo vértice;
  - ponto médio de um segmento;
  - bissetriz de um ângulo;
  - teorema do ângulo externo;
  - ângulos suplementares;
  - soma dos ângulos internos de um triângulo;
  - triângulo isósceles;
  - triângulo equilátero;
  - triângulo retângulo (em especial, o com ângulos de 30° e 60°);
  - triângulos congruentes por um dos casos: LLL, LAL ou ALA.
- Continue realizando as descobertas até determinar o valor do ângulo X.

UEPB PROFMAT

Problemas propostos: Problema 02

❖ **Enunciado e desenho do problema:**

Seja um triângulo ABC e D um ponto em seu interior, tal que $\overline{AC} = \overline{CD}$, $B\hat{A}C = 103°$ e $A\hat{B}D = C\hat{B}D = 13°$. Determine o valor de $x = B\hat{C}D$.



❖ **Vamos resolver o problema?**

- **Passo 1:** Use as peças de cor preta e azul para montar a figura acima em um superfície plana (observe que os segmentos de reta possuem uma indicação em um dos lados, por exemplo: SEGMENTO AB).

- **Passo 2:** Analise as características dos lados e ângulos da figura montada e descubra qual das proposições (nas páginas 4, 5, 6 e 7) podemos usar para nos auxiliar na descoberta do ângulo X.

- **Passo 3:** Adicione as peças de cor vermelha à figura do passo 1 de acordo com a proposição correta analisada no passo 2.

- **Passo 4:** Agora, compartilhado a ideia de cada um dos membros do grupo, vá descobrindo as medidas de ângulos e congruência de segmentos. A cada nova descoberta, identifique-a adicionando elementos de cor verde na montagem da figura do passo 3.

- Você vai realizar estas descobertas identificando na figura montada alguns destes conceitos geométricos:
  - ângulos opostos pelo vértice;
  - ponto médio de um segmento;
  - bissetriz de um ângulo;
  - teorema do ângulo externo;
  - ângulos suplementares;
  - soma dos ângulos internos de um triângulo;
  - triângulo isósceles;
  - triângulo equilátero;
  - triângulo retângulo (em especial, o com ângulos de 30° e 60°);
  - triângulos congruentes por um dos casos: LLL, LAL ou ALA.

- Continue realizando as descobertas até determinar o valor do ângulo X.

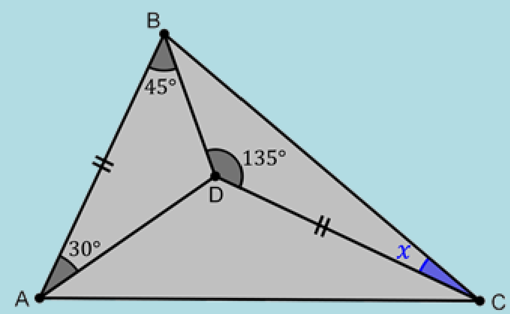
UEPB

PROFMAT

Problemas propostos: Problema 03

❖ **Enunciado e desenho do problema:**

Seja um triângulo ABC e D um ponto em seu interior, tal que $\overline{AB} = \overline{CD}$, $A\hat{B}D = 45°$, $B\hat{A}D = 30°$ e $B\hat{D}C = 135°$. Determine o valor de $x = B\hat{C}$D.



❖ **Vamos resolver o problema?**

- **Passo 1:** Use as peças de cor preta e azul para montar a figura acima em um superfície plana (observe que os segmentos de reta possuem uma indicação em um dos lados, por exemplo: SEGMENTO AB).

- **Passo 2:** Analise as características dos lados e ângulos da figura montada e descubra qual das proposições (nas páginas 4, 5, 6 e 7) podemos usar para nos auxiliar na descoberta do ângulo X.

- **Passo 3:** Adicione as peças de cor vermelha à figura do passo 1 de acordo com a proposição correta analisada no passo 2.

- **Passo 4:** Agora, compartilhado a ideia de cada um dos membros do grupo, vá descobrindo as medidas de ângulos e congruência de segmentos. A cada nova descoberta, identifique-a adicionando elementos de cor verde na montagem da figura do passo 3.

- Você vai realizar estas descobertas identificando na figura montada alguns destes conceitos geométricos:
  - ângulos opostos pelo vértice;
  - ponto médio de um segmento;
  - bissetriz de um ângulo;
  - teorema do ângulo externo;
  - ângulos suplementares;
  - soma dos ângulos internos de um triângulo;
  - triângulo isósceles;
  - triângulo equilátero;
  - triângulo retângulo (em especial, o com ângulos de 30° e 60°);
  - triângulos congruentes por um dos casos: LLL, LAL ou ALA.

- Continue realizando as descobertas até determinar o valor do ângulo X.

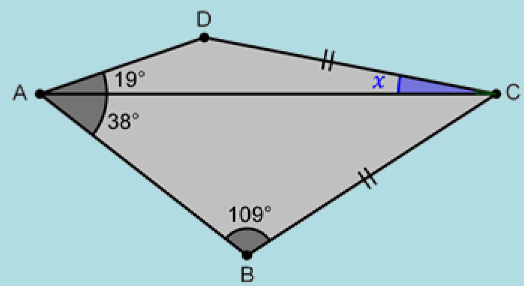
UEPB

PROFMAT

Problemas propostos: Problema 04

❖ **Enunciado e desenho do problema:**

Seja o quadrilátero convexo $ABCD$, tal que $\overline{BC} = \overline{CD}$, $B\hat{A}C = 38°$, $C\hat{A}D = 19°$ e $A\hat{B}C = 109°$. Determine o valor de $x = A\hat{C}D$.



❖ **Vamos resolver o problema?**

- **Passo 1:** Use as peças de cor preta e azul para montar a figura acima em um superfície plana (observe que os segmentos de reta possuem uma indicação em um dos lados, por exemplo: SEGMENTO AB).

- **Passo 2:** Analise as características dos lados e ângulos da figura montada e descubra qual das proposições (nas páginas 4, 5, 6 e 7) podemos usar para nos auxiliar na descoberta do ângulo X.

- **Passo 3:** Adicione as peças de cor vermelha à figura do passo 1 de acordo com a proposição correta analisada no passo 2.

- **Passo 4:** Agora, compartilhado a ideia de cada um dos membros do grupo, vá descobrindo as medidas de ângulos e congruência de segmentos. A cada nova descoberta, identifique-a adicionando elementos de cor verde na montagem da figura do passo 3.

- Você vai realizar estas descobertas identificando na figura montada alguns destes conceitos geométricos:
  - ângulos opostos pelo vértice;
  - ponto médio de um segmento;
  - bissetriz de um ângulo;
  - teorema do ângulo externo;
  - ângulos suplementares;
  - soma dos ângulos internos de um triângulo;
  - triângulo isósceles;
  - triângulo equilátero;
  - triângulo retângulo (em especial, o com ângulos de 30° e 60°);
  - triângulos congruentes por um dos casos: LLL, LAL ou ALA.

- Continue realizando as descobertas até determinar o valor do ângulo X.

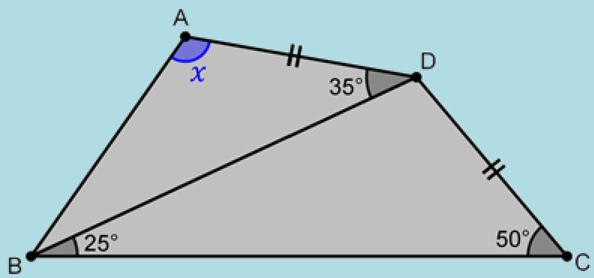
UEPB

PROFMAT

Gabarito: resolução guiada do Problema 01

❖ **Enunciado e desenho do problema:**

Seja o quadrilátero convexo $ABCD$ tal que $\overline{AD} = \overline{CD}$, $C\hat{B}D = 25°$, $B\hat{C}D = 50°$ e $A\hat{D}B = 35°$. Determine o valor de $x = B\hat{A}D$.

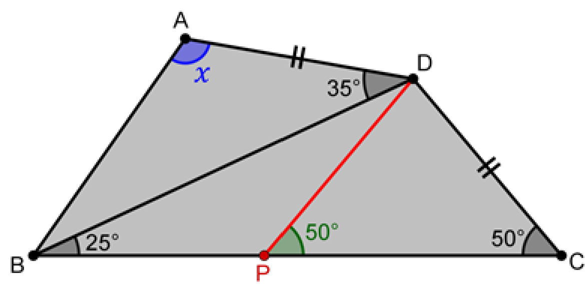


❖ **Resolução passo a passo montando as peças:**

Passo 1: Usando as peças correspondentes, monte a figura inicial conforme o enunciado do problema acima.

Pergunta 1: Qual das proposições podemos aplicar para resolver este problema? Por quê? Dialogue no grupo sobre esta escolha.

Passo 2: Complete a figura do passo 1 adicionando as peças que representam os elementos dos traçados auxiliares para ela ficar conforme a figura abaixo.



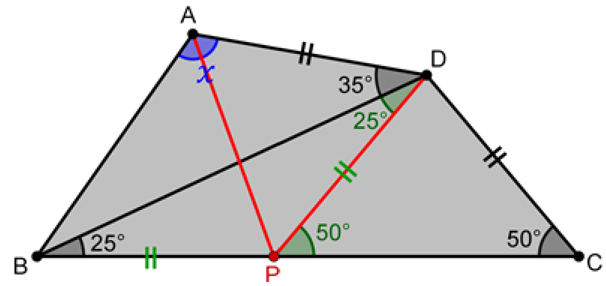
Pergunta 2: Por que o triângulo PCD é isósceles de base $\overline{PC}$? Qual a relação que isto fornece sobre os lados $\overline{PD}$ e $\overline{CD}$?

Pergunta 3: Qual a medida do ângulo $B\hat{D}P$? Use o teorema do ângulo externo no ponto P do triângulo PBD para determinar esta medida.

Pergunta 4: Por que o triângulo PBD é isósceles de base $\overline{BD}$? Qual a relação que isto fornece sobre os lados $\overline{PD}$ e $\overline{PB}$?

UEPB PROFMAT

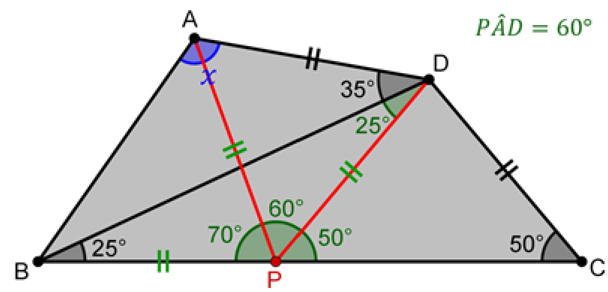
Passo 3: Complete a figura do passo 2 adicionando as peças que representam os elementos discutidos nas perguntas 2, 3 e 4, e o segmento $\overline{AP}$, para ela ficar conforme a figura abaixo.



Pergunta 5: Por que o triângulo PAD é equilátero? Qual informação isso nos fornece sobre o lado $\overline{AP}$ e sobre os ângulos $P\hat{A}D$ e $A\hat{P}D$?

Pergunta 6: Qual a medida do ângulo $A\hat{P}B$? Use os ângulos $A\hat{P}D$ e $C\hat{P}D$ para determinar esta medida.

Passo 4: Complete a figura do passo 3 adicionando as peças que representam os elementos discutidos nas perguntas 5 e 6 para ela ficar conforme a figura abaixo.



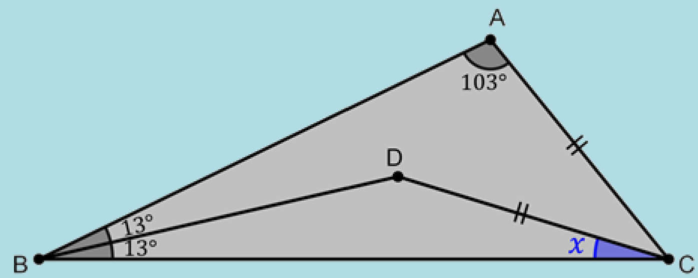
Pergunta 7: Por que o triângulo PAB é isósceles? Qual informação isso nos fornece sobre os ângulos $P\hat{A}B$ e $P\hat{B}A$?

Pergunta 8: Qual a medida do ângulo x? Use as medidas dos ângulos $P\hat{A}B$ e $P\hat{A}D$ para determinar x.

Gabarito: resolução guiada do Problema 02

❖ **Enunciado e desenho do problema:**

Seja um triângulo ABC e D um ponto em seu interior tal que $\overline{AC} = \overline{CD}$, $B\hat{A}C = 103°$ e $A\hat{B}D = C\hat{B}D = 13°$. Determine o valor de $x = B\hat{C}D$.

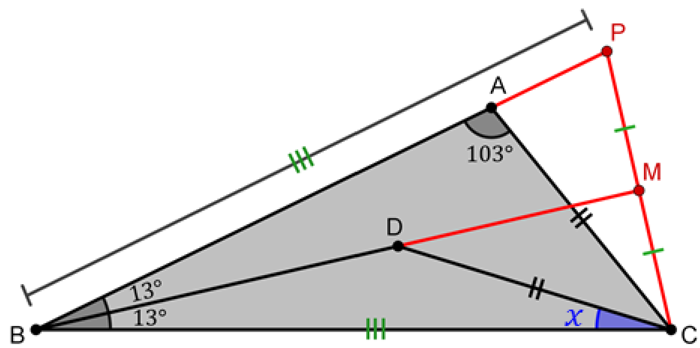


❖ **Resolução passo a passo montando as peças:**

Passo 1: Usando as peças correspondentes, monte a figura inicial conforme o enunciado do problema acima.

Pergunta 1: Qual das proposições podemos aplicar para resolver este problema? Por quê? Dialogue no grupo sobre esta escolha.

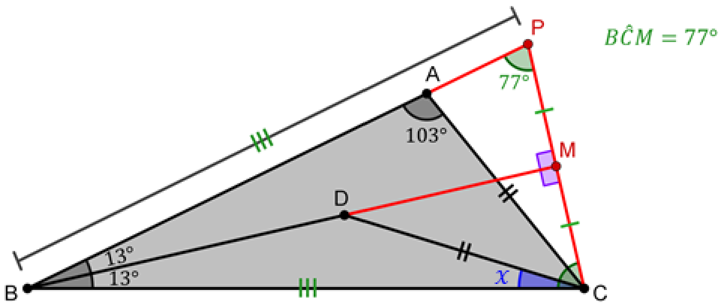
Passo 2: Complete a figura do passo 1 adicionando as peças que representam os elementos dos traçados auxiliares para ela ficar conforme a figura abaixo



Pergunta 2: Identifique que os triângulos PMB e CMB são congruentes. Por meio de qual dos casos de congruência de triângulos (LLL, ALA ou LAL) podemos perceber esta congruência?

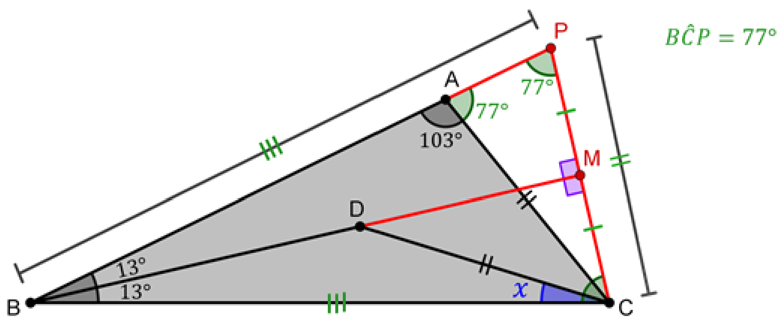
Pergunta 3: Como PMB e CMB são congruentes, qual a medida dos ângulos $P\hat{M}B, C\hat{M}B$, $B\hat{P}M$ e $B\hat{C}M$?

Passo 3: Complete a figura do passo 2 adicionando as peças que representam os elementos discutidos nas perguntas 2 e 3 para ela ficar conforme a figura abaixo



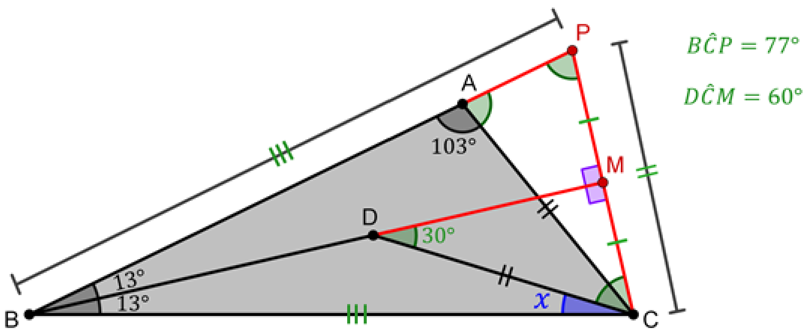
Pergunta 4: Qual a medida do ângulo $P\hat{A}C$? Usando esta medida, o que podemos afirmar sobre o triângulo PAC e seus lados $\overline{PC}$ e $\overline{AC}$?

Passo 4: Complete a figura do passo 3 adicionando as peças que representam os elementos discutidos na pergunta 4 para ela ficar conforme figura abaixo.



Pergunta 5: Qual a relação entre a hipotenusa $\overline{CD}$ e o cateto $\overline{CM}$ no triângulo retângulo CDM? Por esta relação podemos determinar as medidas dos ângulos $C\hat{D}M$ e $D\hat{C}M$, quais as medidas destes ângulos?

Passo 5: Complete a figura do passo 4 adicionando as peças que representam os elementos discutidos na pergunta 5 para ela ficar conforme figura abaixo.



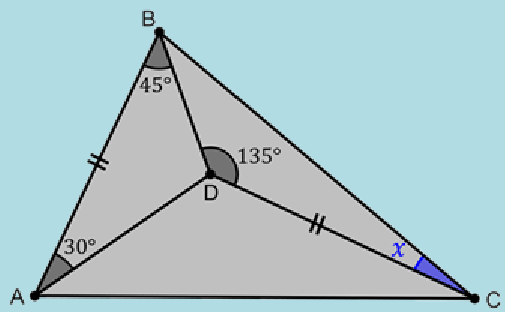
Pergunta 6: Qual a medida do ângulo x? Use as medidas dos ângulos $B\hat{C}M$ e $D\hat{C}M$ para determinar x.

UEPB PROFMAT

Gabarito: resolução guiada do Problema 03

❖ **Enunciado e desenho do problema:**

Seja um triângulo ABC e D um ponto em seu interior tal que $\overline{AB} = \overline{CD}$, $A\hat{B}D = 45°$, $B\hat{A}D = 30°$ e $B\hat{D}C = 135°$. Determine o valor de $x = B\hat{C}D$.

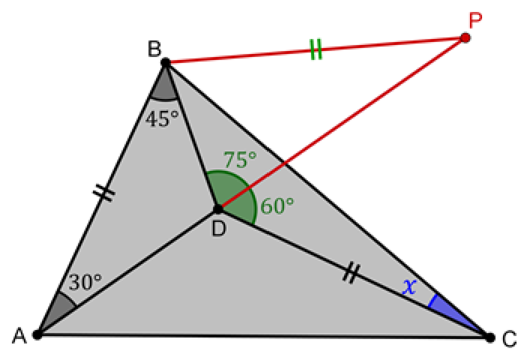


❖ **Resolução passo a passo montando as peças:**

Passo 1: Usando as peças correspondentes, monte a figura inicial conforme o enunciado do problema acima.

Pergunta 1: Qual das proposições podemos aplicar para resolver este problema? Por quê? Dialogue no grupo sobre esta escolha.

Passo 2: Complete a figura do passo 1 adicionando as peças que representam os elementos dos traçados auxiliares para ela ficar conforme a figura abaixo.

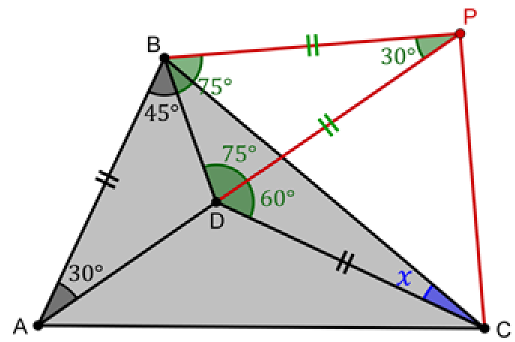


Pergunta 2: Por que o triângulo BAP é isósceles? Qual a medida do ângulo $B\hat{P}A$?

Pergunta 3: Qual a medida do ângulo $P\hat{B}D$? Usando esta medida, o que podemos afirmar sobre o triângulo PBD e seus lados $\overline{PB}$ e $\overline{PD}$?

UEPB PROFMAT

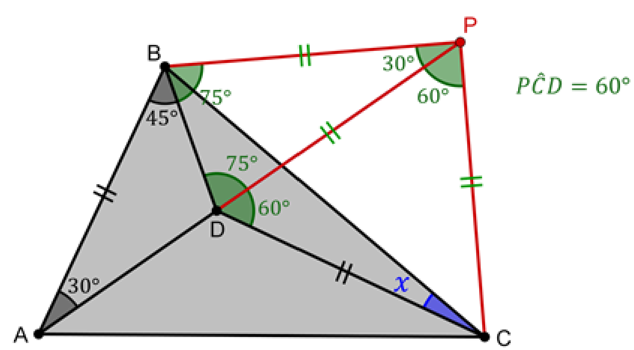
Passo 3: Complete a figura do passo 2 adicionando as peças que representam os elementos discutidos nas perguntas 2 e 3, e o segmento $\overline{PC}$ para ela ficar conforme figura abaixo



Pergunta 4: Por quê o triângulo PCD é equilátero? O que isso implica sobre a medida do lado $\overline{PC}$ e o ângulo $C\hat{P}D$?

Pergunta 5: Qual a medida do ângulo $B\hat{P}C$?

Passo 4: Complete a figura do passo 3 adicionando as peças que representam os elementos discutidos nas perguntas 4 e 5 para ela ficar conforme figura abaixo.



Pergunta 6: Por que o triângulo PBC é isósceles?

Pergunta 7: Qual a medida dos ângulos $P\hat{C}B$ e $P\hat{B}C$?

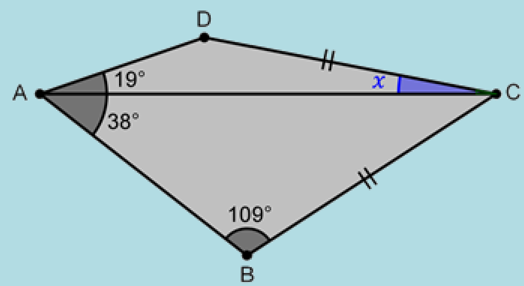
Pergunta 8: Qual a medida do ângulo x? Use as medidas dos ângulos $P\hat{C}D$ e $P\hat{C}B$ para determinar x.

UEPB PROFMAT

Gabarito: resolução guiada do Problema 04

❖ **Enunciado e desenho do problema:**

Seja o quadrilátero convexo $ABCD$ tal que $\overline{BC} = \overline{CD}$, $B\hat{A}C = 38°$, $C\hat{A}D = 19°$ e $A\hat{B}C = 109°$. Determine o valor de $x = A\hat{C}D$.

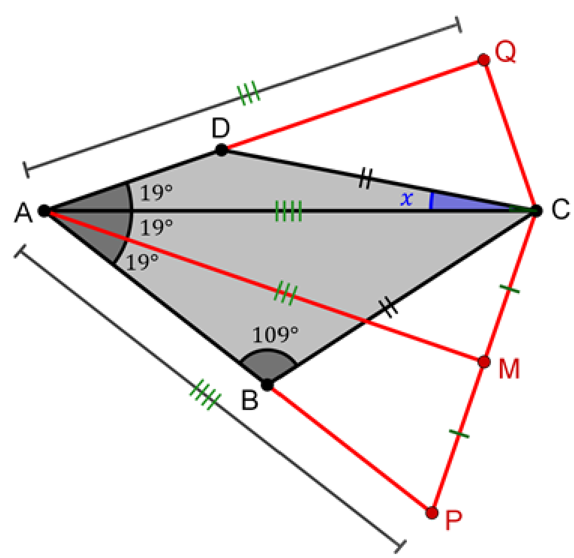


❖ **Resolução passo a passo montando as peças:**

Passo 1: Usando as peças correspondentes, monte a figura inicial conforme o enunciado do problema acima.

Pergunta 1: Qual das proposições podemos aplicar para resolver este problema? Por quê? Dialogue no grupo sobre esta escolha.

Passo 2: Complete a figura do passo 1 adicionando as peças que representam os elementos dos traçados auxiliares para ela ficar conforme a figura abaixo



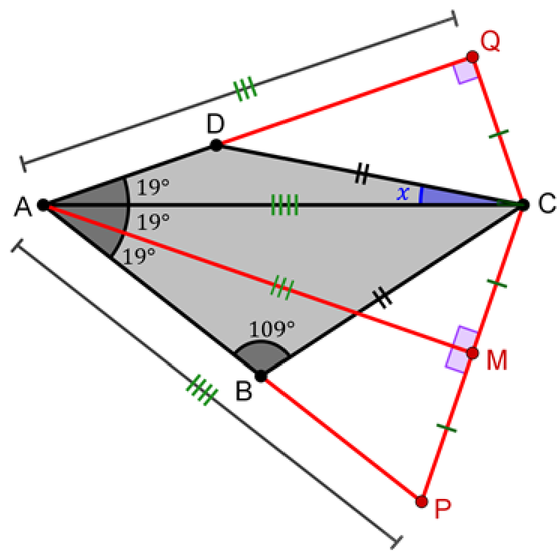
UEPB

PROFMAT

Pergunta 2: Identifique que os triângulos APM, ACM e ACQ são congruentes. Por meio de qual dos casos de congruência de triângulos (LLL, ALA ou LAL) podemos perceber estas congruências?

Pergunta 3: Como os triângulos APM, ACM e ACQ são congruentes, qual a medida dos ângulos $P\widehat{M}A, C\widehat{M}A$ e $C\widehat{Q}A$?

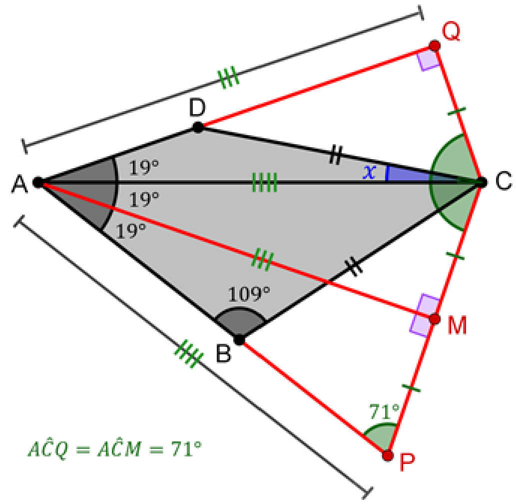
Passo 3: Complete a figura do passo 2 adicionando as peças que representam os elementos discutidos nas perguntas 2 e 3 para ela ficar conforme figura abaixo.



Pergunta 4: Como os triângulos APM, ACM e ACQ são congruentes, qual a medida dos ângulos $M\hat{P}A, M\hat{C}A$ e $Q\hat{C}A$?

Passo 4: Complete a figura do passo 3 adicionando as peças que representam os elementos discutidos na pergunta 4 para ela ficar conforme figura abaixo.

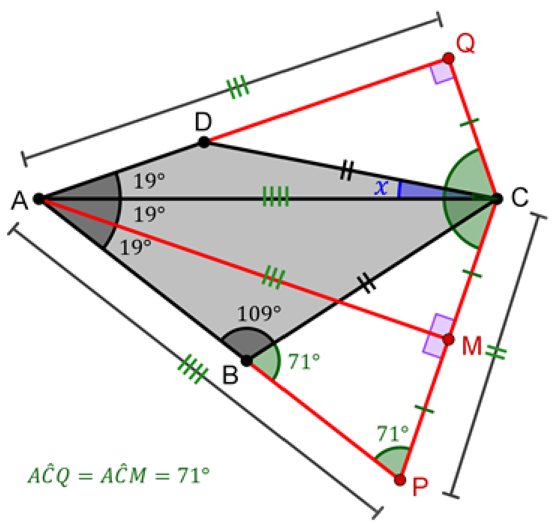
(Observação: Na montagem note que as peças dos ângulos $Q\hat{C}A$ e $M\hat{C}A$ ficarão sobrepostas a outras peças. Talvez seja interessante visualmente mudar a ordem de sobreposição destas peças).



Pergunta 5: Qual a medida do ângulo $P\hat{B}C$? Determine esta medida usando o teorema do ângulo externo no triângulo ABC ou o suplemento do ângulo $A\hat{B}C$.

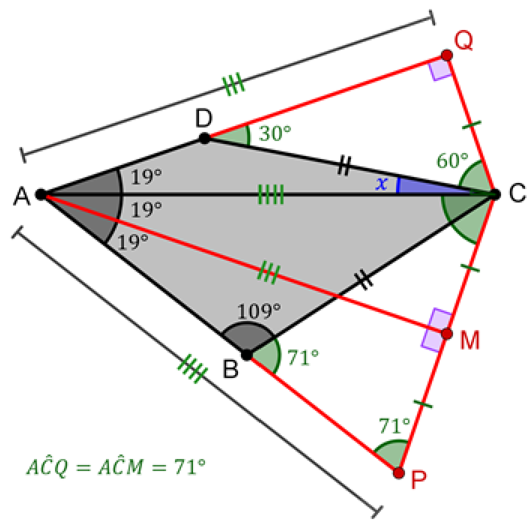
Pergunta 6: Por que o triângulo CBP é isósceles?

Passo 5: Complete a figura do passo 4 adicionando as peças que representam os elementos discutidos nas perguntas 5 e 6 para ela ficar conforme figura abaixo.



Pergunta 7: Qual a relação entre a hipotenusa $\overline{CD}$ e o cateto $\overline{CQ}$ no triângulo retângulo CDQ? Por esta relação, podemos determinar as medidas dos ângulos $C\hat{D}Q$ e $D\hat{C}Q$. Quais as medidas destes ângulos?

Passo 6: Complete a figura do passo 5 adicionando as peças que representam os elementos discutidos na pergunta 7 para ela ficar conforme figura abaixo.



Pergunta 8: Qual a medida do ângulo x? Use as medidas dos ângulos $A\hat{C}Q$ e $D\hat{C}Q$ para determinar o valor de x.

APÊNDICE B - MANUAL DO ALUNO

Universidade Estadual da Paraíba
Campus Campina Grande
Centro de Ciência e Tecnologia
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

Kit de Matemática em Impressora 3D

Problemas de Geometria com Traçados Auxiliares em Triângulos

[Manual do Aluno]

Organizadores:

Gerivaldo Bezerra da Silva
Aldo Trajano Louredo
Israel Buriti Galvão

Campina Grande – PB

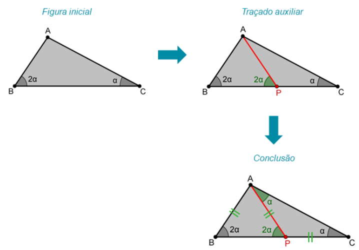
2024

Sumário:

UEPB PROFMAT

Proposições a serem usadas na resolução dos problemas:

Proposição 01: Seja ABC um triângulo que possui um dos ângulos internos medindo o dobro de outro ângulo interno (consideremos $A\hat{C}B = \alpha$ e $A\hat{B}C = 2\alpha$). Se realizarmos como traçado auxiliar a ceviana interna $\overline{AP}$, com P sobre $\overline{BC}$, de modo que $A\hat{P}B = 2\alpha$, então obteremos ABP e PAC isósceles de base $\overline{BP}$ e $\overline{AC}$.



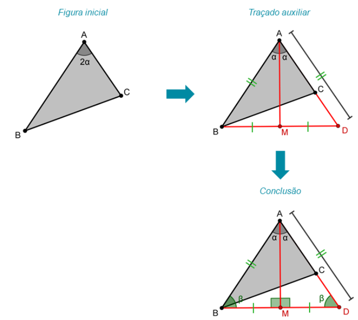
Observe que este traçado auxiliar nos dá as congruências abaixo que podemos utilizar para resolver problema de geometria:

- $\overline{AB} = \overline{AP} = \overline{PC}$
- $A\hat{B}P = A\hat{P}B = 2\alpha$
- $P\hat{A}C = P\hat{C}A = \alpha$

01

UEPB PROFMAT

Proposição 02: Seja ABC um triângulo com $B\hat{A}C = 2\alpha$ e $\overline{AC} < \overline{AB}$. Se realizarmos como traçado auxiliar os pontos D e M, tal que D está sobre a semirreta $\overrightarrow{AC}$, com $\overline{AD} = \overline{AB}$, e M é ponto médio de $\overline{BD}$, então obteremos o triângulo ABD isósceles de base $\overline{BD}$ e os triângulos retângulos congruentes ABM e ADM.



$\beta = 90° - \alpha$

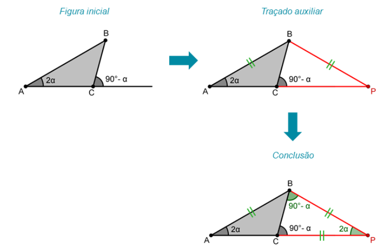
Observe que este traçado auxiliar nos dá as congruências abaixo que podemos utilizar para resolver problema de geometria:

- $\overline{AB} = \overline{AD}$
- $\overline{BM} = \overline{DM}$
- $B\hat{A}M = D\hat{A}M = \alpha$
- $B\hat{M}A = D\hat{M}A = 90°$
- $A\hat{B}M = A\hat{D}M = 90° - \alpha$

02

UEPB PROFMAT

Proposição 03: Seja ABC um triângulo com $B\hat{A}C = 2\alpha$ e ângulo externo, em C, de medida $90° - \alpha$. Se realizarmos como traçado auxiliar o ponto P sobre a semirreta $\overrightarrow{AC}$ de modo que $\overline{AB} = \overline{BP}$, então obteremos os triângulos ABP e PBC isósceles de base $\overline{AP}$ e $\overline{BC}$.



Observe que este traçado auxiliar nos dá as congruências abaixo que podemos utilizar para resolver problema de geometria:

- $\overline{AB} = \overline{BP} = \overline{CP}$
- $B\hat{A}C = B\hat{P}C = 2\alpha$
- $P\hat{B}C = P\hat{C}B = 90° - \alpha$

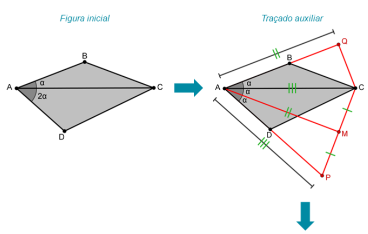
03

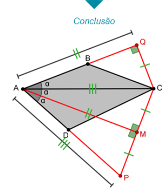
UEPB PROFMAT

Proposição 04: Seja ABCD um quadrilátero convexo, tal que sua diagonal $\overline{AC}$ divide o ângulo $B\hat{A}D$ na proporção de 1:2 (denotemos como $B\hat{A}C = \alpha$ e $C\hat{A}D = 2\alpha$). Se realizarmos como traçado auxiliar os pontos P, M e Q, tais que:

- P está sobre a semirreta $\overrightarrow{AD}$ com $\overline{AP} = \overline{AC}$;
- M é ponto médio do segmento $\overline{PC}$;
- Q está sobre a semirreta $\overrightarrow{AB}$ com $\overline{AQ} = \overline{AM}$;

então obteremos os triângulos retângulos APM, ACM e ACQ congruentes.





Observe que este traçado auxiliar nos dá as congruências abaixo que podemos utilizar para resolver problema de geometria:

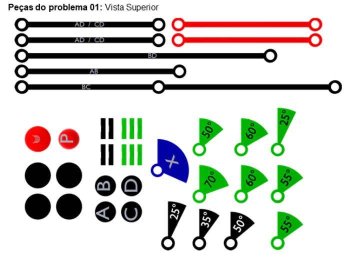
- $\overline{AQ} = \overline{AM}$ e $\overline{AC} = \overline{AP}$
- $\overline{PM} = \overline{CM} = \overline{CQ}$
- $P\hat{A}M = C\hat{A}M = C\hat{A}Q = \alpha$
- $P\hat{M}A = C\hat{M}A = C\hat{Q}A = 90°$
- $A\hat{P}M = A\hat{C}M = A\hat{C}Q = 90° - \alpha$

04

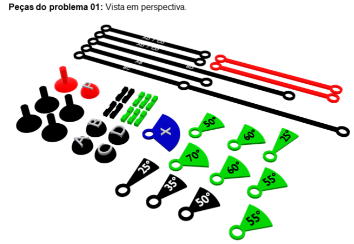
UEPB PROFMAT

Conhecendo as peças de cada problema do kit:

Peças do problema 01: Vista Superior



Peças do problema 01: Vista em perspectiva.

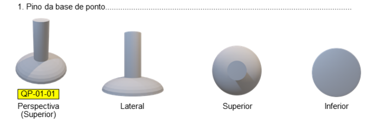


05

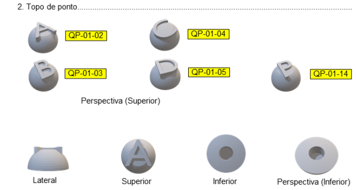
UEPB PROFMAT

Peças do problema 01: Representação das peças a serem impressas.

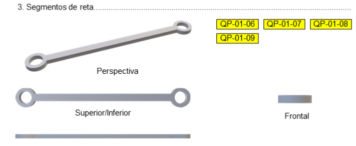
1. Pino da base de ponto



2. Topo de ponto

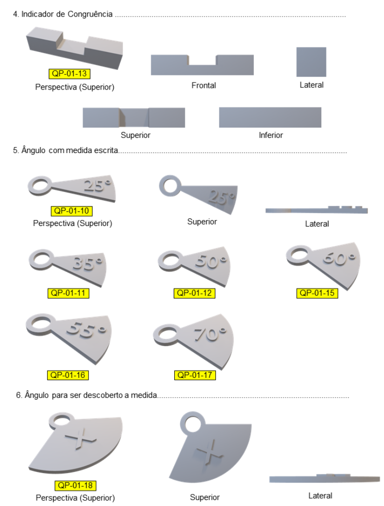


3. Segmentos de reta



06

UEPB PROFMAT



07

UEPB PROFMAT

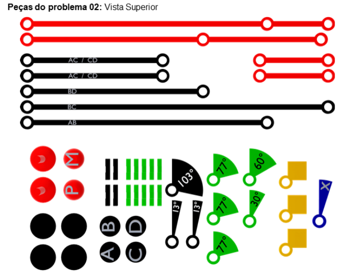
Peças do problema 01: Descrição das peças: 38 peças (18/38 peças são diferentes).

Código da Peça	Cor	Número de Cópias	Descrição da Peça
QP-01-01	Preto	4	Pino da base de ponto
QP-01-02	Preto	1	Topo de ponto escrito “A”
QP-01-03	Preto	1	Topo de ponto escrito “B”
QP-01-04	Preto	1	Topo de ponto escrito “C”
QP-01-05	Preto	1	Topo de ponto escrito “D”
QP-01-06	Preto	1	Segmento de reta
QP-01-07	Preto	1	Segmento de reta
QP-01-08	Preto	2	Segmento de reta
QP-01-09	Preto	1	Segmento de reta
QP-01-10	Preto	1	Ângulo escrito “25°”
QP-01-11	Preto	1	Ângulo escrito “35°”
QP-01-12	Preto	1	Ângulo escrito “50°”
QP-01-13	Preto	4	Indicador de congruência
QP-01-01	Vermelho	1	Pino da base de ponto
QP-01-14	Vermelho	1	Topo de ponto escrito “P”
QP-01-08	Vermelho	2	Segmento de reta
QP-01-10	Verde	1	Ângulo escrito “25°”
QP-01-12	Verde	1	Ângulo escrito “50°”
QP-01-15	Verde	2	Ângulo escrito “60°”
QP-01-16	Verde	2	Ângulo escrito “55°”
QP-01-17	Verde	1	Ângulo escrito “70°”
QP-01-13	Verde	6	Indicador de congruência
QP-01-18	Azul	1	Ângulo escrito “x”

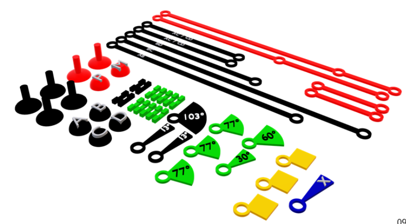
08

UEPB PROFMAT

Peças do problema 02: Vista Superior



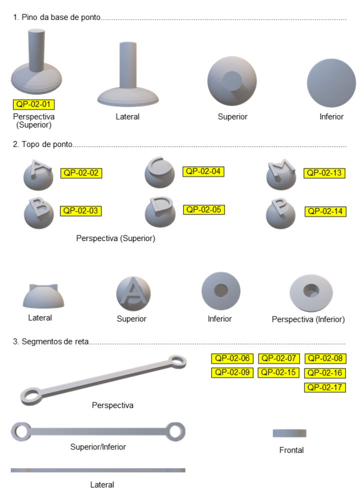
Peças do problema 02: Vista em perspectiva.



09

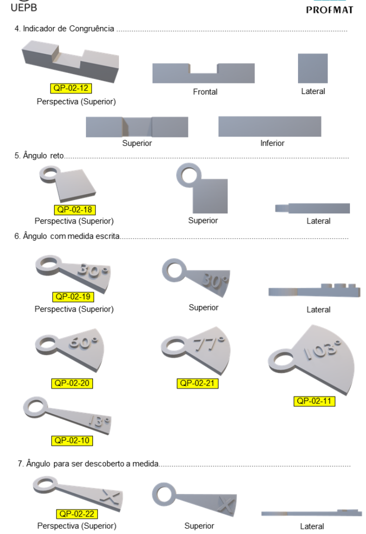
UEPB PROFMAT

Peças do problema 02: Representação das peças a serem impressas.



10

UEPB PROFMAT



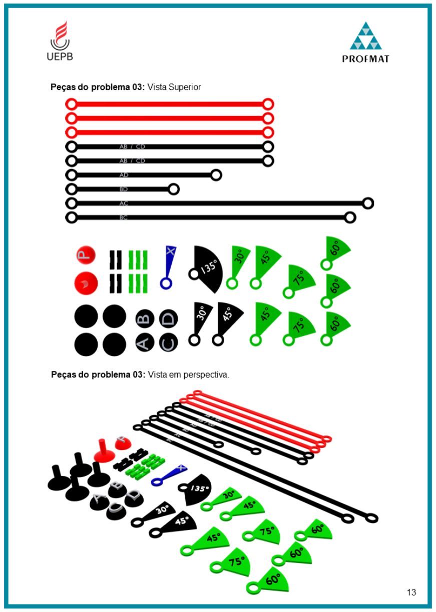
11

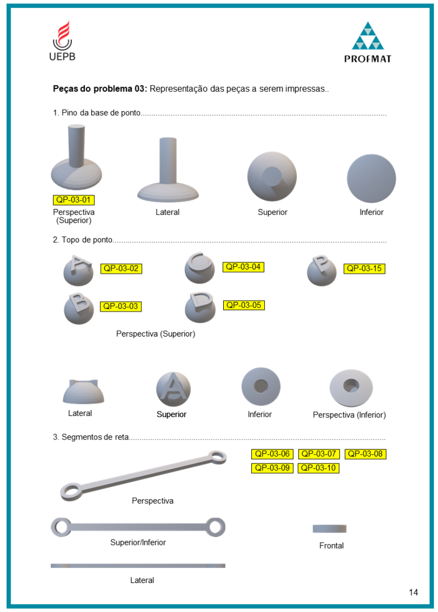
UEPB PROFMAT

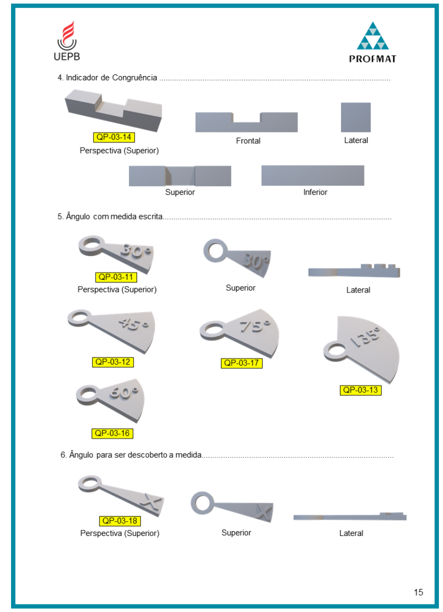
Peças do problema 02: Descrição das peças: 46 peças (22/46 peças são diferentes).

Código da Peça	Cor	Número de Cópias	Descrição da Peça
QP-02-01	Preto	4	Pino da base de ponto
QP-02-02	Preto	1	Topo de ponto escrito “A”
QP-02-03	Preto	1	Topo de ponto escrito “B”
QP-02-04	Preto	1	Topo de ponto escrito “C”
QP-02-05	Preto	1	Topo de ponto escrito “D”
QP-02-06	Preto	1	Segmento de reta
QP-02-07	Preto	1	Segmento de reta
QP-02-08	Preto	2	Segmento de reta
QP-02-09	Preto	1	Segmento de reta
QP-02-10	Preto	2	Ângulo escrito “13°”
QP-02-11	Preto	1	Ângulo escrito “103°”
QP-02-12	Preto	4	Indicador de congruência
QP-02-01	Vermelho	2	Pino da base de ponto
QP-02-13	Vermelho	1	Topo de ponto escrito “M”
QP-02-14	Vermelho	1	Topo de ponto escrito “P”
QP-02-15	Preto	2	Segmento de reta
QP-02-16	Preto	1	Segmento de reta
QP-02-17	Preto	1	Segmento de reta
QP-02-18	Amarelo	2	Ângulo reto
QP-02-19	Verde	1	Ângulo escrito “30°”
QP-02-20	Verde	1	Ângulo escrito “60°”
QP-02-21	Verde	3	Ângulo escrito “77°”
QP-02-12	Verde	10	Indicador de congruência
QP-02-22	Azul	1	Ângulo escrito “x”

12







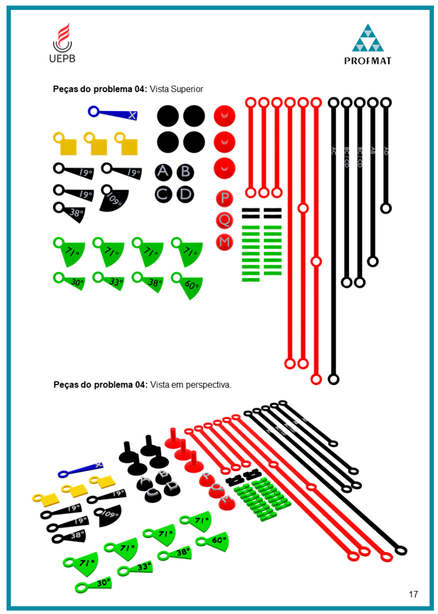
UEPB

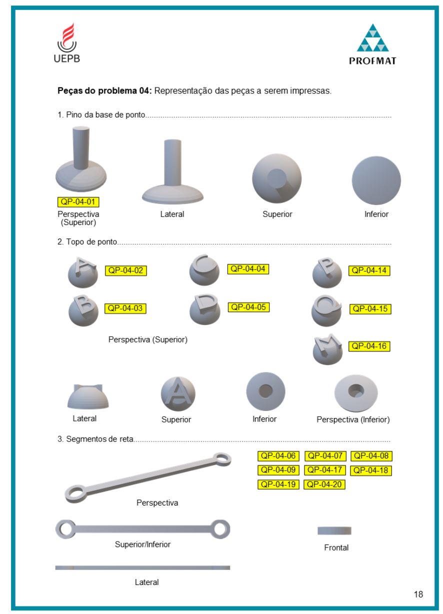
PROFMAT

Peças do problema 03: Descrição das peças: 41 peças (18/41 peças são diferentes).

Código da Peça	Cor	Número de Cópias	Descrição da Peça
QP-03-01	Preto	4	Pino da base de ponto
QP-03-02	Preto	1	Topo de ponto escrito "A"
QP-03-03	Preto	1	Topo de ponto escrito "B"
QP-03-04	Preto	1	Topo de ponto escrito "C"
QP-03-05	Preto	1	Topo de ponto escrito "D"
QP-03-06	Preto	2	Segmento de reta
QP-03-07	Preto	1	Segmento de reta
QP-03-08	Preto	1	Segmento de reta
QP-03-09	Preto	1	Segmento de reta
QP-03-10	Preto	1	Segmento de reta
QP-03-11	Preto	1	Ângulo escrito "30°"
QP-03-12	Preto	1	Ângulo escrito "45°"
QP-03-13	Preto	1	Ângulo escrito "135°"
QP-03-14	Preto	4	Indicador de congruência
QP-03-01	Vermelho	1	Pino da base de ponto
QP-03-15	Vermelho	1	Topo de ponto escrito "P"
QP-03-06	Preto	3	Segmento de reta
QP-03-11	Verde	1	Ângulo escrito "30°"
QP-03-12	Verde	2	Ângulo escrito "45°"
QP-03-16	Verde	3	Ângulo escrito "60°"
QP-03-17	Verde	2	Ângulo escrito "75°"
QP-03-14	Verde	6	Indicador de congruência
QP-03-18	Azul	1	Ângulo escrito "x"

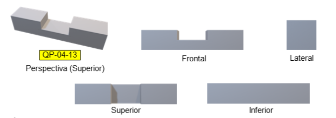
16



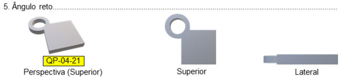


UEPB PROFMAT

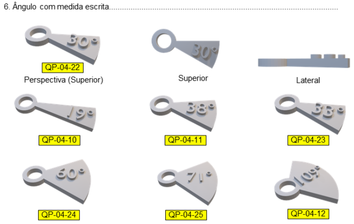
4. Indicador de Congruência



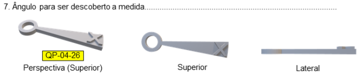
5. Ângulo reto



6. Ângulo com medida escrita



7. Ângulo para ser descoberto a medida



UEPB PROFMAT

Peças do problema 04: Descrição das peças: 63 peças (26/63 peças são diferentes).

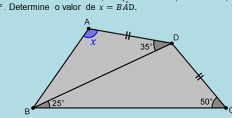
Código da Peça	Cor	Número de Cópias	Descrição da Peça
QP-04-01	Preto	4	Pino da base de ponto
QP-04-02	Preto	1	Topo de ponto escrito "A"
QP-04-03	Preto	1	Topo de ponto escrito "B"
QP-04-04	Preto	1	Topo de ponto escrito "C"
QP-04-05	Preto	1	Topo de ponto escrito "D"
QP-04-06	Preto	1	Segmento de reta
QP-04-07	Preto	2	Segmento de reta
QP-04-08	Preto	1	Segmento de reta
QP-04-09	Preto	1	Segmento de reta
QP-04-10	Preto	3	Ângulo escrito "19°"
QP-04-11	Preto	1	Ângulo escrito "38°"
QP-04-12	Preto	1	Ângulo escrito "109°"
QP-04-13	Preto	4	Indicador de congruência
QP-04-01	Vermelho	3	Pino da base de ponto
QP-04-14	Vermelho	1	Topo de ponto escrito "P"
QP-04-15	Vermelho	1	Topo de ponto escrito "Q"
QP-04-16	Vermelho	1	Topo de ponto escrito "M"
QP-04-17	Vermelho	3	Segmento de reta
QP-04-18	Vermelho	1	Segmento de reta
QP-04-19	Vermelho	1	Segmento de reta
QP-04-20	Vermelho	1	Segmento de reta
QP-04-21	Amarelo	3	Ângulo reto
QP-04-22	Verde	1	Ângulo escrito "30°"
QP-04-23	Verde	1	Ângulo escrito "33°"
QP-04-11	Verde	1	Ângulo escrito "38°"
QP-04-24	Verde	1	Ângulo escrito "60°"
QP-04-25	Verde	4	Ângulo escrito "71°"
QP-04-13	Verde	17	Indicador de congruência
QP-04-26	Azul	1	Ângulo escrito "x"

UEPB PROFMAT

Problemas propostos: Problema 01

❖ **Enunciado e desenho do problema:**

Seja o quadrilátero convexo $ABCD$, tal que $\overline{AD} = \overline{CD}$, $C\hat{B}D = 25°$, $B\hat{C}D = 50°$ e $A\hat{D}B = 35°$. Determine o valor de $x = B\hat{A}D$.



❖ **Vamos resolver o problema?**

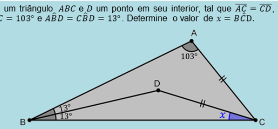
- **Passo 1:** Use as peças de cor preta e azul para montar a figura acima em um superfície plana (observe que os segmentos de reta possuem uma indicação em um dos lados, por exemplo: SEGMENTO AB).
- **Passo 2:** Analise as características dos lados e ângulos da figura montada e descubra qual das proposições (nas páginas 4, 5, 6 e 7) podemos usar para nos auxiliar na descoberta do ângulo X.
- **Passo 3:** Adicione as peças de cor vermelha à figura do passo 1 de acordo com a proposição correta analisada no passo 2.
- **Passo 4:** Agora, compartilhado a ideia de cada um dos membros do grupo, vá descobrindo as medidas de ângulos e congruência de segmentos. A cada nova descoberta, identifique-a adicionando elementos de cor verde na montagem da figura do passo 3.
- Você vai realizar estas descobertas identificando na figura montada alguns destes conceitos geométricos:
  - ângulos opostos pelo vértice;
  - ponto médio de um segmento;
  - bissetriz de um ângulo;
  - teorema do ângulo externo;
  - ângulos suplementares;
  - soma dos ângulos internos de um triângulo;
  - triângulo isósceles;
  - triângulo equilátero;
  - triângulo retângulo (em especial, o com ângulos de 30° e 60°);
  - triângulos congruentes por um dos casos: LLL, LAL ou ALA.
- Continue realizando as descobertas até determinar o valor do ângulo X.

UEPB PROFMAT

Problemas propostos: Problema 02

❖ **Enunciado e desenho do problema:**

Seja um triângulo ABC e D um ponto em seu interior, tal que $\overline{AC} = \overline{CD}$, $B\hat{A}C = 103°$ e $A\hat{B}D = C\hat{B}D = 13°$. Determine o valor de $x = B\hat{C}D$.



❖ **Vamos resolver o problema?**

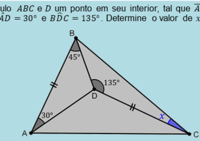
- **Passo 1:** Use as peças de cor preta e azul para montar a figura acima em um superfície plana (observe que os segmentos de reta possuem uma indicação em um dos lados, por exemplo: SEGMENTO AB).
- **Passo 2:** Analise as características dos lados e ângulos da figura montada e descubra qual das proposições (nas páginas 4, 5, 6 e 7) podemos usar para nos auxiliar na descoberta do ângulo X.
- **Passo 3:** Adicione as peças de cor vermelha à figura do passo 1 de acordo com a proposição correta analisada no passo 2.
- **Passo 4:** Agora, compartilhado a ideia de cada um dos membros do grupo, vá descobrindo as medidas de ângulos e congruência de segmentos. A cada nova descoberta, identifique-a adicionando elementos de cor verde na montagem da figura do passo 3.
- Você vai realizar estas descobertas identificando na figura montada alguns destes conceitos geométricos:
  - ângulos opostos pelo vértice;
  - ponto médio de um segmento;
  - bissetriz de um ângulo;
  - teorema do ângulo externo;
  - ângulos suplementares;
  - soma dos ângulos internos de um triângulo;
  - triângulo isósceles;
  - triângulo equilátero;
  - triângulo retângulo (em especial, o com ângulos de 30° e 60°);
  - triângulos congruentes por um dos casos: LLL, LAL ou ALA.
- Continue realizando as descobertas até determinar o valor do ângulo X.

UEPB PROFMAT

Problemas propostos: Problema 03

❖ **Enunciado e desenho do problema:**

Seja um triângulo ABC e D um ponto em seu interior, tal que $\overline{AB} = \overline{CD}$, $A\hat{B}D = 45°$, $B\hat{A}D = 30°$ e $B\hat{D}C = 135°$. Determine o valor de $x = B\hat{C}D$.



❖ **Vamos resolver o problema?**

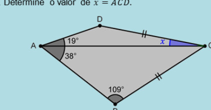
- **Passo 1:** Use as peças de cor preta e azul para montar a figura acima em um superfície plana (observe que os segmentos de reta possuem uma indicação em um dos lados, por exemplo: SEGMENTO AB).
- **Passo 2:** Analise as características dos lados e ângulos da figura montada e descubra qual das proposições (nas páginas 4, 5, 6 e 7) podemos usar para nos auxiliar na descoberta do ângulo X.
- **Passo 3:** Adicione as peças de cor vermelha à figura do passo 1 de acordo com a proposição correta analisada no passo 2.
- **Passo 4:** Agora, compartilhado a ideia de cada um dos membros do grupo, vá descobrindo as medidas de ângulos e congruência de segmentos. A cada nova descoberta, identifique-a adicionando elementos de cor verde na montagem da figura do passo 3.
- Você vai realizar estas descobertas identificando na figura montada alguns destes conceitos geométricos:
  - ângulos opostos pelo vértice;
  - ponto médio de um segmento;
  - bissetriz de um ângulo;
  - teorema do ângulo externo;
  - ângulos suplementares;
  - soma dos ângulos internos de um triângulo;
  - triângulo isósceles;
  - triângulo equilátero;
  - triângulo retângulo (em especial, o com ângulos de 30° e 60°);
  - triângulos congruentes por um dos casos: LLL, LAL ou ALA.
- Continue realizando as descobertas até determinar o valor do ângulo X.

UEPB PROFMAT

Problemas propostos: Problema 04

❖ **Enunciado e desenho do problema:**

Seja o quadrilátero convexo $ABCD$, tal que $\overline{BC} = \overline{CD}$, $B\hat{A}C = 38°$, $C\hat{A}D = 19°$ e $A\hat{B}C = 109°$. Determine o valor de $x = A\hat{C}D$.



❖ **Vamos resolver o problema?**

- **Passo 1:** Use as peças de cor preta e azul para montar a figura acima em um superfície plana (observe que os segmentos de reta possuem uma indicação em um dos lados, por exemplo: SEGMENTO AB).
- **Passo 2:** Analise as características dos lados e ângulos da figura montada e descubra qual das proposições (nas páginas 4, 5, 6 e 7) podemos usar para nos auxiliar na descoberta do ângulo X.
- **Passo 3:** Adicione as peças de cor vermelha à figura do passo 1 de acordo com a proposição correta analisada no passo 2.
- **Passo 4:** Agora, compartilhado a ideia de cada um dos membros do grupo, vá descobrindo as medidas de ângulos e congruência de segmentos. A cada nova descoberta, identifique-a adicionando elementos de cor verde na montagem da figura do passo 3.
- Você vai realizar estas descobertas identificando na figura montada alguns destes conceitos geométricos:
  - ângulos opostos pelo vértice;
  - ponto médio de um segmento;
  - bissetriz de um ângulo;
  - teorema do ângulo externo;
  - ângulos suplementares;
  - soma dos ângulos internos de um triângulo;
  - triângulo isósceles;
  - triângulo equilátero;
  - triângulo retângulo (em especial, o com ângulos de 30° e 60°);
  - triângulos congruentes por um dos casos: LLL, LAL ou ALA.
- Continue realizando as descobertas até determinar o valor do ângulo X.

APÊNDICE C - MANUAL DE GABARITO

UEPB
Universidade Estadual da Paraíba
Campus Campina Grande
Centro de Ciência e Tecnologia
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

PROFMAT

Kit de Matemática em Impressora 3D

Problemas de Geometria com Traçados Auxiliares em Triângulos

[Manual de Gabarito]

Organizadores:
Gerivaldo Bezerra da Silva
Aldo Trajano Louredo
Israel Burití Galvão

Campina Grande – PB

2024

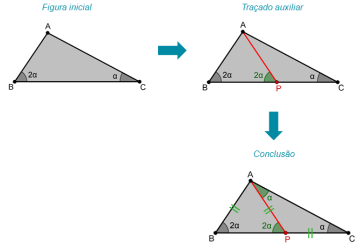
UEPB PROFMAT

Sumário:

UEPB PROFMAT

Proposições a serem usadas na resolução dos problemas:

Proposição 01: Seja ABC um triângulo que possui um dos ângulos internos medindo o dobro de outro ângulo interno (consideremos $A\hat{C}B = \alpha$ e $A\hat{B}C = 2\alpha$). Se realizarmos como traçado auxiliar a ceviana interna $\overline{AP}$, com P sobre $\overline{BC}$, de modo que $A\hat{P}B = 2\alpha$, então obteremos ABP e PAC isósceles de base $\overline{BP}$ e $\overline{AC}$.



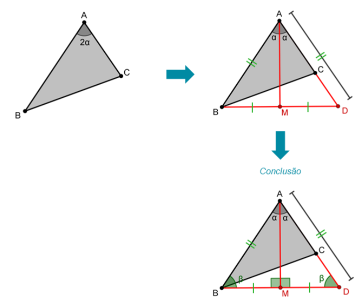
Observe que este traçado auxiliar nos dá as congruências abaixo que podemos utilizar para resolver problema de geometria:

- $\overline{AB} = \overline{AP} = \overline{PC}$
- $A\hat{B}P = A\hat{P}B = 2\alpha$
- $P\hat{A}C = P\hat{C}A = \alpha$

01

UEPB PROFMAT

Proposição 02: Seja ABC um triângulo com $B\hat{A}C = 2\alpha$ e $\overline{AC} < \overline{AB}$. Se realizarmos como traçado auxiliar os pontos D e M, tal que D está sobre a semirreta $\overrightarrow{AC}$, com $\overline{AD} = \overline{AB}$, e M é ponto médio de $\overline{BD}$, então obteremos o triângulo ABD isósceles de base $\overline{BD}$ e os triângulos retângulos congruentes ABM e ADM.



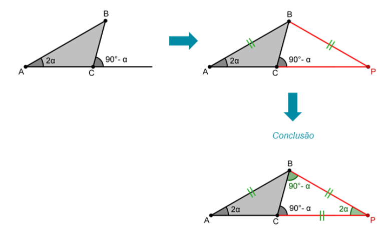
Observe que este traçado auxiliar nos dá as congruências abaixo que podemos utilizar para resolver problema de geometria:

- $\overline{AB} = \overline{AD}$
- $\overline{BM} = \overline{DM}$
- $B\hat{A}M = D\hat{A}M = \alpha$
- $B\hat{M}A = D\hat{M}A = 90°$
- $A\hat{B}M = A\hat{D}M = 90° - \alpha$

02

UEPB PROFMAT

Proposição 03: Seja ABC um triângulo com $B\hat{A}C = 2\alpha$ e ângulo externo, em C, de medida $90° - \alpha$. Se realizarmos como traçado auxiliar o ponto P sobre a semirreta $\overrightarrow{AC}$ de modo que $\overline{AB} = \overline{BP}$, então obteremos os triângulos ABP e PBC isósceles de base $\overline{AP}$ e $\overline{BC}$.



Observe que este traçado auxiliar nos dá as congruências abaixo que podemos utilizar para resolver problema de geometria:

- $\overline{AB} = \overline{BP} = \overline{CP}$
- $B\hat{A}C = B\hat{P}C = 2\alpha$
- $P\hat{B}C = P\hat{C}B = 90° - \alpha$

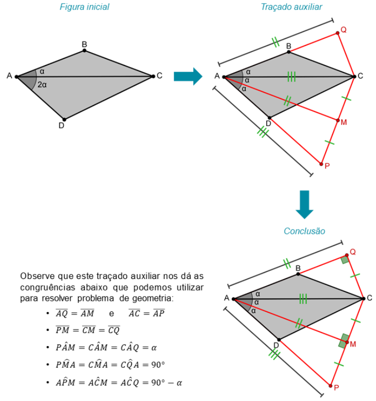
03

UEPB PROFMAT

Proposição 04: Seja ABCD um quadrilátero convexo, tal que sua diagonal $\overline{AC}$ divide o ângulo $B\hat{A}D$ na proporção de 1:2 (denotemos como $B\hat{A}C = \alpha$ e $C\hat{A}D = 2\alpha$). Se realizarmos como traçado auxiliar os pontos P, M e Q, tais que:

- P está sobre a semirreta $\overrightarrow{AD}$ com $\overline{AP} = \overline{AC}$;
- M é ponto médio do segmento $\overline{PC}$;
- Q está sobre a semirreta $\overrightarrow{AB}$ com $\overline{AQ} = \overline{AM}$;

então obteremos os triângulos retângulos APM, ACM e ACQ congruentes.



Observe que este traçado auxiliar nos dá as congruências abaixo que podemos utilizar para resolver problema de geometria:

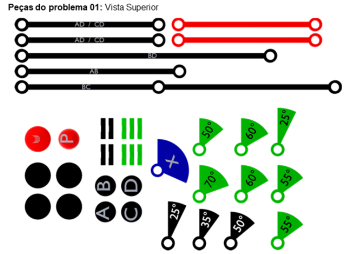
- $\overline{AQ} = \overline{AM}$ e $\overline{AC} = \overline{AP}$
- $\overline{PM} = \overline{CM} = \overline{CQ}$
- $P\hat{A}M = C\hat{A}M = C\hat{A}Q = \alpha$
- $P\hat{M}A = C\hat{M}A = C\hat{Q}A = 90°$
- $A\hat{P}M = A\hat{C}M = A\hat{C}Q = 90° - \alpha$

04

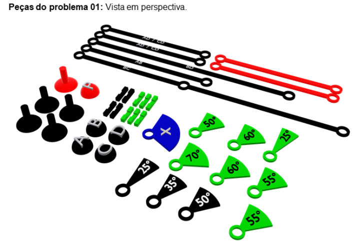
UEPB PROFMAT

Conhecendo as peças de cada problema do kit:

Peças do problema 01: Vista Superior



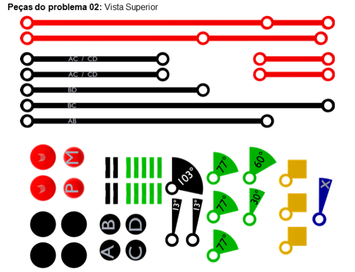
Peças do problema 01: Vista em perspectiva.



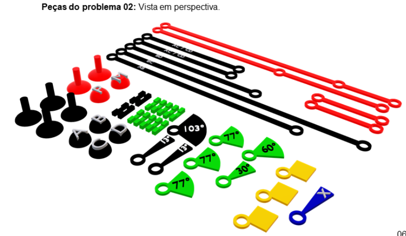
05

UEPB PROFMAT

Peças do problema 02: Vista Superior



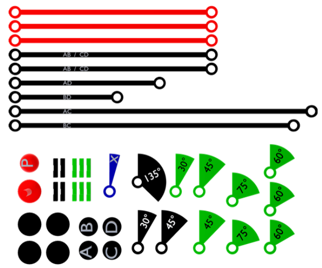
Peças do problema 02: Vista em perspectiva.



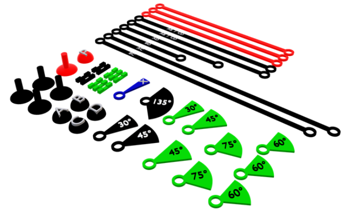
06

UEPB PROFMAT

Peças do problema 03: Vista Superior

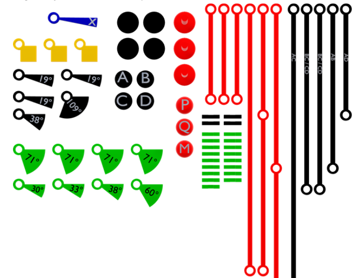


Peças do problema 03: Vista em perspectiva.

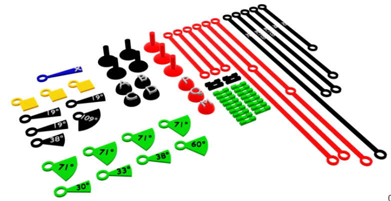


UEPB PROFMAT

Peças do problema 04: Vista Superior



Peças do problema 04: Vista em perspectiva.

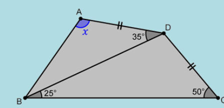


UEPB PROFMAT

Gabarito: resolução guiada do Problema 01

❖ **Enunciado e desenho do problema:**

Seja o quadrilátero convexo $ABCD$ tal que $\overline{AD} = \overline{CD}$, $C\hat{B}D = 25°$, $B\hat{C}D = 50°$ e $A\hat{D}B = 35°$. Determine o valor de $x = B\hat{A}D$.

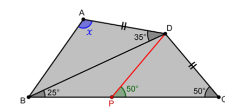


❖ **Resolução passo a passo montando as peças:**

Passo 1: Usando as peças correspondentes, monte a figura inicial conforme o enunciado do problema acima.

Pergunta 1: Qual das proposições podemos aplicar para resolver este problema? Por quê? Dialogue no grupo sobre esta escolha.

Passo 2: Complete a figura do passo 1 adicionando as peças que representam os elementos dos traçados auxiliares para ela ficar conforme a figura abaixo.



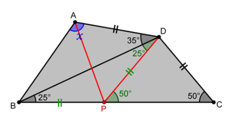
Pergunta 2: Por que o triângulo PCD é isósceles de base $\overline{PC}$? Qual a relação que isto fornece sobre os lados $\overline{PD}$ e $\overline{CD}$?

Pergunta 3: Qual a medida do ângulo $B\hat{D}P$? Use o teorema do ângulo externo no ponto P do triângulo PBD para determinar esta medida.

Pergunta 4: Por que o triângulo PBD é isósceles de base $\overline{BD}$? Qual a relação que isto fornece sobre os lados $\overline{PD}$ e $\overline{PB}$?

UEPB PROFMAT

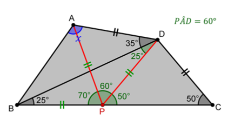
Passo 3: Complete a figura do passo 2 adicionando as peças que representam os elementos discutidos nas perguntas 2, 3 e 4, e o segmento $\overline{AP}$, para ela ficar conforme a figura abaixo.



Pergunta 5: Por que o triângulo PAD é equilátero? Qual informação isso nos fornece sobre o lado $\overline{AP}$ e sobre os ângulos $P\hat{A}D$ e $A\hat{P}D$?

Pergunta 6: Qual a medida do ângulo $A\hat{P}B$? Use os ângulos $A\hat{P}D$ e $C\hat{P}D$ para determinar esta medida.

Passo 4: Complete a figura do passo 3 adicionando as peças que representam os elementos discutidos nas perguntas 5 e 6 para ela ficar conforme a figura abaixo.



Pergunta 7: Por que o triângulo PAB é isósceles? Qual informação isso nos fornece sobre os ângulos $P\hat{A}B$ e $P\hat{B}A$?

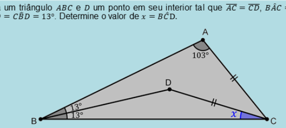
Pergunta 8: Qual a medida do ângulo x? Use as medidas dos ângulos $P\hat{A}B$ e $P\hat{A}D$ para determinar x.

UEPB PROFMAT

Gabarito: resolução guiada do Problema 02

❖ **Enunciado e desenho do problema:**

Seja um triângulo ABC e D um ponto em seu interior tal que $\overline{AC} = \overline{CD}$, $B\hat{A}C = 103°$ e $A\hat{B}D = C\hat{B}D = 13°$. Determine o valor de $x = B\hat{C}D$.

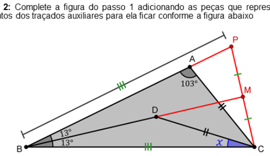


❖ **Resolução passo a passo montando as peças:**

Passo 1: Usando as peças correspondentes, monte a figura inicial conforme o enunciado do problema acima.

Pergunta 1: Qual das proposições podemos aplicar para resolver este problema? Por quê? Dialogue no grupo sobre esta escolha.

Passo 2: Complete a figura do passo 1 adicionando as peças que representam os elementos dos traçados auxiliares para ela ficar conforme a figura abaixo

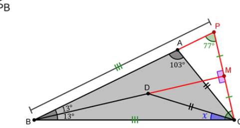


Pergunta 2: Identifique que os triângulos PMB e CMB são congruentes. Por meio de qual dos casos de congruência de triângulos (LLL, ALA ou LAL) podemos perceber esta congruência?

Pergunta 3: Como PMB e CMB são congruentes, qual a medida dos ângulos $P\hat{M}B, C\hat{M}B$, $B\hat{P}M$ e $B\hat{C}M$?

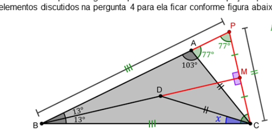
Passo 3: Complete a figura do passo 2 adicionando as peças que representam os elementos discutidos nas perguntas 2 e 3 para ela ficar conforme a figura abaixo

UEPB PROFMAT



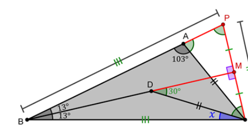
Pergunta 4: Qual a medida do ângulo $P\hat{A}C$? Usando esta medida, o que podemos afirmar sobre o triângulo PAC e seus lados $\overline{PC}$ e $\overline{AC}$?

Passo 4: Complete a figura do passo 3 adicionando as peças que representam os elementos discutidos na pergunta 4 para ela ficar conforme figura abaixo.



Pergunta 5: Qual a relação entre a hipotenusa $\overline{CD}$ e o cateto $\overline{CM}$ no triângulo retângulo CDM? Por esta relação podemos determinar as medidas dos ângulos $C\hat{D}M$ e $D\hat{C}M$, quais as medidas destes ângulos?

Passo 5: Complete a figura do passo 4 adicionando as peças que representam os elementos discutidos na pergunta 5 para ela ficar conforme figura abaixo.



Pergunta 6: Qual a medida do ângulo x? Use as medidas dos ângulos $B\hat{C}M$ e $D\hat{C}M$ para determinar x.

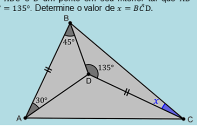
UEPB

PROFMAT

Gabarito: resolução guiada do Problema 03

❖ **Enunciado e desenho do problema:**

Seja um triângulo ABC e D um ponto em seu interior tal que $\overline{AB} = \overline{CD}$, $A\hat{B}D = 45°$, $B\hat{A}D = 30°$ e $B\hat{D}C = 135°$. Determine o valor de $x = B\hat{C}D$.

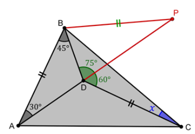


❖ **Resolução passo a passo montando as peças:**

Passo 1: Usando as peças correspondentes, monte a figura inicial conforme o enunciado do problema acima.

Pergunta 1: Qual das proposições podemos aplicar para resolver este problema? Por quê? Dialogue no grupo sobre esta escolha.

Passo 2: Complete a figura do passo 1 adicionando as peças que representam os elementos dos traçados auxiliares para ela ficar conforme a figura abaixo.



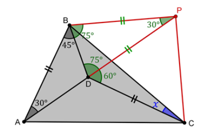
Pergunta 2: Por que o triângulo BAP é isósceles? Qual a medida do ângulo $B\hat{P}A$?

Pergunta 3: Qual a medida do ângulo $P\hat{B}D$? Usando esta medida, o que podemos afirmar sobre o triângulo PBD e seus lados $\overline{PB}$ e $\overline{PD}$?

UEPB

PROFMAT

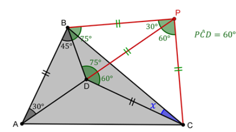
Passo 3: Complete a figura do passo 2 adicionando as peças que representam os elementos discutidos nas perguntas 2 e 3, e o segmento $\overline{PC}$ para ela ficar conforme figura abaixo



Pergunta 4: Por quê o triângulo PCD é equilátero? O que isso implica sobre a medida do lado $\overline{PC}$ e o ângulo $C\hat{P}D$?

Pergunta 5: Qual a medida do ângulo $B\hat{P}C$?

Passo 4: Complete a figura do passo 3 adicionando as peças que representam os elementos discutidos nas perguntas 4 e 5 para ela ficar conforme figura abaixo.



Pergunta 6: Por que o triângulo PBC é isósceles?

Pergunta 7: Qual a medida dos ângulos $P\hat{C}B$ e $P\hat{B}C$?

Pergunta 8: Qual a medida do ângulo x? Use as medidas dos ângulos $P\hat{C}D$ e $P\hat{C}B$ para determinar x.

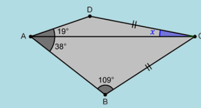
UEPB

PROFMAT

Gabarito: resolução guiada do Problema 04

❖ **Enunciado e desenho do problema:**

Seja o quadrilátero convexo $ABCD$ tal que $\overline{BC} = \overline{CD}$, $B\hat{A}C = 38°$, $C\hat{A}D = 19°$ e $A\hat{B}C = 109°$. Determine o valor de $x = A\hat{C}D$.

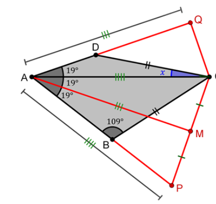


❖ **Resolução passo a passo montando as peças:**

Passo 1: Usando as peças correspondentes, monte a figura inicial conforme o enunciado do problema acima.

Pergunta 1: Qual das proposições podemos aplicar para resolver este problema? Por quê? Dialogue no grupo sobre esta escolha.

Passo 2: Complete a figura do passo 1 adicionando as peças que representam os elementos dos traçados auxiliares para ela ficar conforme a figura abaixo



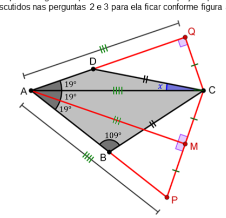
UEPB

PROFMAT

Pergunta 2: Identifique que os triângulos APM, ACM e ACQ são congruentes. Por meio de qual dos casos de congruência de triângulos (LLL, ALA ou LAL) podemos perceber estas congruências?

Pergunta 3: Como os triângulos APM, ACM e ACQ são congruentes, qual a medida dos ângulos $P\hat{M}A$, $C\hat{M}A$ e $C\hat{Q}A$?

Passo 3: Complete a figura do passo 2 adicionando as peças que representam os elementos discutidos nas perguntas 2 e 3 para ela ficar conforme figura abaixo.



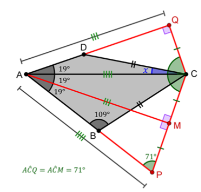
Pergunta 4: Como os triângulos APM, ACM e ACQ são congruentes, qual a medida dos ângulos $M\hat{P}A$, $M\hat{C}A$ e $Q\hat{C}A$?

Passo 4: Complete a figura do passo 3 adicionando as peças que representam os elementos discutidos na pergunta 4 para ela ficar conforme figura abaixo.

(Observação: Na montagem note que as peças dos ângulos $Q\hat{C}A$ e $M\hat{C}A$ ficarão sobrepostas a outras peças. Talvez seja interessante visualmente mudar a ordem de sobreposição destas peças).

UEPB

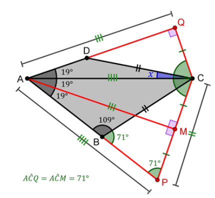
PROFMAT



Pergunta 5: Qual a medida do ângulo $P\hat{B}C$? Determine esta medida usando o teorema do ângulo externo no triângulo ABC ou o suplemento do ângulo $A\hat{B}C$.

Pergunta 6: Por que o triângulo CBP é isósceles?

Passo 5: Complete a figura do passo 4 adicionando as peças que representam os elementos discutidos nas perguntas 5 e 6 para ela ficar conforme figura abaixo.

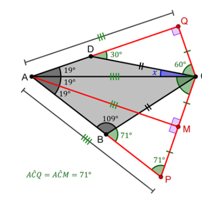


Pergunta 7: Qual a relação entre a hipotenusa $\overline{CD}$ e o cateto $\overline{CQ}$ no triângulo retângulo CDQ? Por esta relação, podemos determinar as medidas dos ângulos $C\hat{D}Q$ e $D\hat{C}Q$. Quais as medidas destes ângulos?

UEPB

PROFMAT

Passo 6: Complete a figura do passo 5 adicionando as peças que representam os elementos discutidos na pergunta 7 para ela ficar conforme figura abaixo.



Pergunta 8: Qual a medida do ângulo x? Use as medidas dos ângulos $A\hat{C}Q$ e $D\hat{C}Q$ para determinar o valor de x.