UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I - CAMPINA GRANDE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
CURSO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

YARA DE FÁTIMA NASCIMENTO ANDRADE

PROFa. DRa. MARIA ALVES DE AZEREDO

EXPLORANDO O PENSAMENTO ALGÉBRICO NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL NA PERSPECTIVA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

PRODUTO EDUCACIONAL

CAMPINA GRANDE – PB
2023

YARA DE FÁTIMA NASCIMENTO ANDRADE

EXPLORANDO O PENSAMENTO ALGÉBRICO NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL NA PERSPECTIVA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Produto Educacional apresentado ao Programa de Pós- Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, na defesa da Dissertação como requisito parcial à obtenção do título de Mestra em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Maria Alves de Azeredo

CAMPINA GRANDE – PB
2023

A554e Andrade, Yara de Fátima Nascimento.

Explorando o pensamento algébrico nos anos iniciais do ensino fundamental na perspectiva da resolução de problemas[manuscrito] / Yara de Fátima Nascimento Andrade. - 2023.

32 p. : il. colorido.

Digitado.

Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2024.

"Orientação : Profa. Dra. Maria Alves de Azeredo, UFPB - Universidade Federal da Paraíba."

1. Resolução de problemas. 2. Álgebra . 3. Sequências repetitivas. 4. Ensino fundamental - anos iniciais. I. Título

21. ed. CDD 512

Elaborada por Ana V. de Q. M. Leite - CRB - 15/378 BC/UEPB

SUMÁRIO

1 APRESENTAÇÃO

Este trabalho é um Produto Educacional fruto da pesquisa de Mestrado Profissional do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba – PPGECEM/UEPB, intitulada *“Explorando o pensamento algébrico nos anos iniciais do ensino fundamental na perspectiva da resolução de problemas”.*

Acreditando que a metodologia de Resolução de Problemas pode ser utilizada para trabalhar inúmeros conteúdos de Matemática, decidimos trilhar um caminho que busca trazer contribuições pedagógicas para desenvolver o “pensamento algébrico” através dessa metodologia.

Esse material contém um **Proposta de Atividades** para ser desenvolvida em turmas de anos iniciais do Ensino Fundamental (4º e 5º anos). Para fundamentar a proposta destacamos: Onuchic e Allevato (2011), Branca (1997), Andrade (2017) e Van de Walle (2009), entre outros.

Apresentamos sugestões de atividades de resolução de situações-problema envolvendo o conteúdo de sequências repetitivas. A metodologia que direciona o trabalho é baseada no Roteiro de Andrade e Onuchic (2017) contendo 11 etapas. Entretanto, em nossa pesquisa só utilizamos 10 etapas, não contemplando a Proposição de novos problemas pelos estudantes (etapa 11).

2 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nesta seção traremos um breve histórico da resolução de problemas, concepções e abordagens dessa metodologia.

2.1 HISTÓRICO DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS, CONCEPÇÕES E ABORDAGENS

Por volta de 1945, George Polya coloca a resolução de problemas em evidência quando começa a destacar em suas palestras a importância de passos para resolver situações-problema. De acordo com Polya, para resolver um problema, devemos considerar a existência de quatro fases: compreender o problema, elaborar um plano, executar um plano e refletir sobre o trabalho realizado.

> Primeiro, temos de *compreender* o problema, temos de perceber claramente o que é necessário. Segundo, temos de ver como os diversos itens estão inter-relacionados, como a incógnita está ligada aos dados, para termos a ideia da resolução, para estabelecermos um *plano*. Terceiro, *executamos* nosso plano. Quarto, fazemos um *retrospecto* da resolução completa, revendo-a e discutindo-a (Polya, 1995, p. 03-04).

Essas fases são necessárias para o sucesso da resolução do problema, pois garantem que o indivíduo conheça o problema, realize conjecturas, estabeleça relações e seja capaz de solucionar usando os métodos mais apropriados.

Conforme Morais (2015) a Resolução de Problemas passa a ser considerada como uma teoria dentro do contexto do Movimento da Nova Matemática ou, Matemática Moderna que começou a vigorar nos Estados Unidos por volta dos anos 1950. Assim, as ideias de Polya ganharam alcance dentro da comunidade de professores de matemática e teve sua disseminação através da publicação do livro *How to solve it: a new aspect of mathematical method*, como um marco dessa teoria. No Brasil foi publicado em português, em 1975, com o título “A Arte de Resolver Problemas” (Morais, 2015).

A partir dos trabalhos realizados e publicados por Polya sobre resolução de problemas houve um engajamento por parte de educadores matemáticos que começaram a perceber a importância de trabalhar com problemas de modo que façam sentido na vida dos seus alunos e como consequência pudessem construir uma aprendizagem mais consistente (Morais, 2015).

Branca (1997) nos apresenta três concepções para a resolução de problemas. Segundo esse autor, a resolução de problemas pode ser vista como: *habilidade básica, processo e meta*.

A resolução de problemas como uma meta "independe de problemas específicos, de procedimentos ou métodos e do conteúdo" (p. 05), uma vez que, nessa concepção, a resolução de problemas é o principal objetivo do ensino de matemática. A resolução de problemas vista como um processo considera importante "os métodos, os procedimentos, as estratégias e as heurísticas que os alunos usam na resolução de problemas" (Branca, 1997, p. 05). E na resolução de problema como uma habilidade básica podemos destacar uma voltada para os aspectos necessários para avaliação e outra para os aspectos necessários para atuar na sociedade. Na primeira, há uma tendencia de considerar habilidade básica como algo "que pode ser facilmente avaliadas por testes escritos", mas a resolução de problema não se encaixa nessa visão (Branca, 1997, p. 07). A segunda perspectiva está relacionada a questão curricular. Assim, os currículos devem estar organizados para contribuir com a construção do conhecimento matemático que será utilizado na vida em sociedade.

Andrade e Onuchic (2017) destacam três abordagens para Resolução de Problemas. Segundo as autoras, temos o ensino *sobre* resolução de problemas, ensinar *a* resolver problemas e ensinar *através* da resolução de problemas. Tais abordagens merecem ser analisadas para que possamos compreender as diferenças existentes entre elas, principalmente, dentro da sala de aula.

A primeira abordagem remete ao modelo de resolução de problemas proposto por Polya, o qual descreveu fases necessárias para a solução do problema. "O professor que ensina sobre resolução de problemas procura ressaltar o modelo de resolução de problemas de Polya ou alguma variação dele" (Andrade; Onuchic, 2017, p .437).

A segunda abordagem diz respeito ao ensino de resolução de problemas. Aqui, o foco do professor está no modo como a matemática é ensinada e o que poderá ser utilizado para resolver problemas. "Ao ensinar a resolver problemas, o professor se concentra na maneira como a matemática é ensinada e o que dela pode ser aplicado na resolução de problemas rotineiros ou não rotineiros" (Andrade; Onuchic, 2017, p. 437). De acordo com as autoras, nessa abordagem, o professor preocupa-se em repassar para seus alunos muitos exemplos de conceitos e estruturas matemáticas com o objetivo de que os alunos possam utilizar esse conhecimento na resolução de problemas.

A terceira abordagem é a que deveria ser utilizada nas salas de aula, visto que segue as recomendações do NCTM e dos PCNs. Para Andrade e Onuchic (2017) o ensino através da resolução de problemas é capaz de contribuir com o desenvolvimento de processos cognitivos de alto nível.

De acordo com Onuchic *et al.* (2017) a Resolução de Problemas é uma metodologia alternativa ao ensino tradicional, pois é nessa perspectiva que a Resolução de Problemas passa a ser vista como uma metodologia importante para o desenvolvimento das habilidades e capacidades cognitivas dos educandos, os levando a aprendizagem de conteúdos, mas, sobretudo, os fazendo pensar.

2.2 METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Com o intuito de ajudar a professores desenvolver o trabalho através da resolução de problemas, com a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas, Onuchic (1999) criou um Roteiro de Atividades. Nesse primeiro roteiro, foram destacadas as seguintes fases:

(1) Formar grupos e entregar uma atividade – Considerando que a aprendizagem pode ser um processo compartilhado e que os estudantes possam cooperar entre si, sugerimos a formação de pequenos grupos;

(2) O papel do professor – Passa de comunicador do conhecimento para o de observador, organizador, consultor, mediador, inventor, controlador e incentivador da aprendizagem;

(3) Registrar os resultados na lousa –Todos os resultados são validados nessa etapa e anotados na lousa pelo professor para posterior análise;

(4) Realizar uma plenária – Nesse momento, todos os estudantes devem defender seus pontos de vista;

(5) Analisar os resultados – Durante a análise dos resultados, as dificuldades dos estudantes são vistas e surgem problemas secundários que devem ser solucionados para não atrapalhar as próximas etapas e a aprendizagem;

(6) Buscar um consenso – Após a análise, os estudantes devem ser orientados para que cheguem a um consenso sobre os resultados e estratégias que alcançaram com o problema;

(7) Fazer a formalização – Na etapa de formalização o professor deve orientar os estudantes e realizar em conjunto uma síntese do que foi aprendido com o problema. Aqui é possível utilizar materiais didáticos, calculadoras, jogos, e etc., com o objetivo de auxiliar na sistematização das aprendizagens. Nessa fase, os estudantes devem ter contato com as definições, conceitos e propriedades que foram identificadas durante o processo de resolução de problemas.

Após a aplicação deste roteiro de atividades foi possível perceber que ainda existiam dificuldades para o trabalho com resolução de problemas, e assim, um segundo roteiro foi proposto. De acordo com Onuchic e Allevato (2011) as etapas do novo roteiro foram embasadas nos resultados obtidos por meio das experiências com formação de professores. Assim, as novas etapas foram:

(1) Formar grupos.

(2) Preparação do problema – A seleção de um problema deve levar em consideração à construção da aprendizagem de algum “conceito, princípio ou procedimento” (Onuchic; Andrade, 2017, p. 439), sendo este problema denominado de problema gerador.

(3) Leitura individual – A leitura deve ser realizada por cada aluno em primeiro momento.

(4) Leitura em conjunto – A leitura em conjunto pode gerar dificuldades, mas o professor pode intervir e ajudar aos alunos a chegarem na interpretação do texto matemático. Além disso, podem surgir problemas secundários, mediante ao desconhecimento de uma palavra ou expressão, gerando novas demandas. O professor pode também propor o uso do dicionário.

(5) Resolução do problema – Após sanar as dúvidas relacionadas ao enunciado do problema, os alunos devem resolver o problema de modo cooperativo e colaborativo. O problema gerador será o fio condutor para o processo de aprendizagem através da resolução de problemas.

(6) Observar e incentivar – O professor assume um papel de observação e incentivador da construção do conhecimento dos alunos. Através da mediação, o professor conduz seus alunos a pensar sobre o problema, acolhendo as dificuldades, valorizando os conhecimentos prévios e incentivando as diversas estratégias de resolução.

(7) Registro das resoluções na lousa – Os registros são uma etapa importante e devem ser valorizados, sem exceção. Os alunos devem ser encorajados a registrar suas resoluções para que seja realizada a discussão.

(8) Plenária – Os alunos discutem as estratégias que foram registradas na lousa, defendendo suas ideias e tirando dúvidas de seus colegas. O professor terá o papel de mediar as discussões.

(9) Busca do consenso – Nessa etapa, os alunos devem chegar a um consenso sobre qual ou quais estratégias estão corretas.

(10) Formalização do conteúdo – Cabe ao professor realizar o registro formal na lousa.

Atualmente, o roteiro proposto por Onuchic e Allevato (2011) teve a adição de mais uma etapa:

(11) Proposição de problemas – Essa etapa é essencial para o ensino e aprendizagem matemática. Para os professores a proposição de problemas é fundamental para aprendizagem dos alunos. Já para os alunos, a proposição irá aprofundar e ampliar as habilidades referentes a resolução de problemas (Onuchic; Andrade, 2017).

Onuchic e Allevato (2011, p. 82) destacam que "não há formas rígidas de se trabalhar através da resolução de problemas em sala de aula Matemática", porém o Roteiro de Atividades ajuda o professor a compreender a metodologia e consequentemente, auxiliar os alunos no processo de construção do conhecimento matemático.

Atualmente, a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (2017) aponta a Resolução de Problemas como metodologia importante para o desenvolvimento de habilidades matemáticas necessárias ao letramento matemático. A proposta da BNCC é trabalhar a metodologia de Resolução de Problemas articulando as unidades temáticas de Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e Probabilidade e Estatística.

3 ÁLGEBRA

Nesta seção traremos um breve histórico sobre Álgebra e suas conceções de ensino, assim como, a necessidade de trabalhar conteúdos que explorem e desenvolvam o pensamento algébrico.

3.1 BREVE HISTÓRICO E CONCEPÇÕES DE ÁLGEBRA

Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) destacam que a história da Álgebra passa por uma ruptura na forma como se compreende o conhecimento algébrico por volta da primeira metade do século XIX. Segundo esses autores, duas concepções de Álgebra se evidenciavam nessa época. De um lado, temos uma tendência mais tradicional, a qual via a Álgebra como uma Aritmética Generalizada e de outro lado, uma visão mais moderna, que percebia a Álgebra como "um sistema simbólico cujos símbolos e regras operatórias sobre eles são de natureza essencialmente arbitrária" (p. 79).

No desenvolvimento da história da Álgebra, os autores chamam atenção para uma segunda leitura desse momento. De acordo com os autores, a Álgebra teve contribuições culturais de vários povos, podendo citar a existência de uma "álgebra egípcia, de uma álgebra babilônica, de uma álgebra grega pré-diofantina, de uma álgebra diofantina, de uma álgebra chinesa, de uma álgebra hindu, de uma álgebra arábica, de uma álgebra da cultura europeia renascentista" (Fiorentini, Miorim, Miguel, 1993, p.79).

Em uma terceira leitura desse desenvolvimento histórico, a mais apresentada por diversas pesquisas, destaca que houve um desenvolvimento da linguagem algébrica: linguagem retórica ou verbal, a sincopada e a simbólica.

De acordo com Almeida (2017), a história da Álgebra, especificamente, da linguagem algébrica, se desenrola a partir de três grandes estágios: **retórico, sincopado e simbólico.**

Segundo Almeida (2017) o primeiro estágio nomeado de "retórico" tem por característica a expressão do pensamento algébrico através da linguagem natural, ou seja, neste estágio, utilizava-se apenas palavras. Fiorentini, Miorim e Miguel (1993, p.80) complementam essa descrição destacando que está teria sido a Álgebra "dos egípcios, babilônicos e gregos pré-diofantinos".

Para Almeida (2017) segundo estágio chamado de “sincopado” avança na sua forma de expressão do pensamento algébrico, já que agora são incorporadas abreviações e letras para representar algebricamente.

Segundo Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) essa fase sincopada teria surgido com Diofanto, pois foi o primeiro a usar um símbolo para representar uma incógnita, a letra “sigma” do alfabeto grego. Mais tarde, os hindus desenvolveram uma álgebra similar a forma de Diofanto. Os autores ressaltam ainda que, os árabes não utilizaram essa forma de expressa, porém sua contribuição foi no que se refere ao vocabulário, que teria o termo “al-gabr” introduzido por al-Khwarizmi. Os italianos, por sua vez, utilizaram esse estilo sincopado até o século XVI.

O terceiro estágio conhecido como “simbólico” são utilizadas vogais e consoantes para representar termos desconhecidos (Almeida, 2017). A fase simbólica, segundo Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) foi quando o uso de palavras deu lugar a representação apenas por símbolos. Apesar de Viète ainda fazer uso do estilo sincopado, foi o principal responsável por introduzir a representação simbólica algébrica.

Uma quarta leitura aponta para uma relevante compreensão dos aspectos relativos a linguagem algébrica, “isto é, no seu maior e menor grau de concisão, mas na significação que é atribuída aos símbolos desta linguagem” (Fiorentini, Miorim, Miguel, 1993, p. 80).

Segundo Almeida (2017) no Brasil o ensino de Álgebra tem três momentos distintos em sua trajetória. Podemos relacionar esses momentos às concepções de ensino da Álgebra escolar. O primeiro momento da Álgebra foi antes do Movimento da Matemática Moderna (MMM), o qual tinha uma concepção “linguístico-pragmática”. Nesse período a organização do ensino de Matemática era dividida por campos de conhecimento, diferente do que temos atualmente.

> Essa forma de se trabalhar a matemática na escola prevalece durante muito tempo, pois, mesmo com a Reforma Francisco Campos, em 1931, a qual assume pela primeira vez a denominação “matemática” para designar o ensino de aritmética, álgebra, geometria e trigonometria, o ensino da matemática permanecia em compartimentos estanques, nos quais se trabalhavam os campos da matemática de forma isolada (Almeida, 2017, p. 8).

A concepção “linguístico-pragmática” enfatiza o ensino da Álgebra através de técnicas, considerando que a aquisição de tais técnicas seria suficiente para que os alunos pudessem adquirir a capacidade de resolver problemas.

No segundo momento, ocorrido durante o Movimento da Matemática Moderna, desenvolvia-se a concepção “fundamentalista-estrutural”. Durante esse período, o ensino de

Álgebra dá ênfase aos aspectos “lógico-estruturais dos conteúdos e a precisão da linguagem”, como destaca Almeida (2017, p. 9).

De acordo com Almeida (2017, p. 9), a principal mudança entre a primeira e segunda fase está no fato de que esta última perde seu caráter pragmático, ou seja, deixa de ser “útil para resolver problemas, passando a ter como foco a resolução de equações e a simplificação de expressões algébricas”.

Já o terceiro momento foi após o Movimento da Matemática Moderna, cuja concepção adotada foi a “fundamentalista-cronológica”. Almeida (2017) destaca que esse momento foi marcado pelo declínio do MMM e pelo esforço em conciliar o aspecto instrumental da álgebra, mas não deixar de lado o caráter fundamentalista. Essa concepção de ensino da Álgebra agrega o uso de materiais concretos para trabalhar as transformações algébricas.

Mesmo com a utilização de materiais concretos deixando o ensino mais didático, enfatizando mais o aspecto visual como ferramenta que auxilie na compreensão,

> essa ideia não deixaria de lado a abordagem simbólico-formal das outras concepções, acreditava-se simplesmente que essa etapa, geométrico-visual, poderia compor um estágio intermediário e/ou paralelo à abordagem simbólico-formal (Almeida, 2017, p. 10).

Percebemos que a evolução da Álgebra passou por mudanças relacionadas a linguagem, mas também às suas concepções. Apesar disso, as três concepções ainda estavam muito focadas em desenvolver a linguagem simbólica, o transformismo algébrico em situações descontextualizadas (Almeida, 2017).

Foi a partir da década de 1990 que uma nova visão sobre a forma de ensinar Álgebra começa a ser investigada. Estudos de autores como Kieran (1992) e Fiorentini, Miorin e Miguel (1993) passam a se preocupar com “a construção do significado para os objetos algébricos estudados por meio do desenvolvimento do pensamento algébrico” (Almeida, 2017, p. 10).

3.2 PENSAMENTO ALGÉBRICO E O CURRÍCULO EDUCACIONAL

De acordo com Ponte, Branco e Matos (2009, p.10), o grande objetivo do estudo da álgebra é “desenvolver o pensamento algébrico nos alunos”. Essa visão fortalece nossa compreensão acerca da importância de ensinar álgebra como forma de pensar, explorando situações e conceitos e, consequentemente, através desse processo de ensino, contribuir para que os alunos possam chegar ao domínio de regras e técnicas operatórias envolvidas em problemas.

Segundo Coelho e Aguiar (2018, p.177) o pensamento algébrico não aparece apenas na Matemática ou na Álgebra, ou seja, "é algo que nos auxilia no desenvolvimento do ato de raciocinar e, por não ser uma característica inerente ao ser humano, ele pode ser desenvolvido com o meio social em que vivemos". Dessa forma, o papel da escola é extremamente importante e nos convida e refletir que tipo de ensino (educação) estamos oferecendo aos nossos alunos, visto que, é nesse lugar privilegiado que o incentivo ao desenvolvimento do pensamento abstrato deve ocorrer. Algumas questões como o currículo e a formação de professores perpassam pela discussão do ensino da álgebra e devem ser analisadas e consideradas.

Diante disso, o que seria o pensamento algébrico? Coelho e Aguiar (2018) afirmam que não existe um consenso a respeito do que significa o pensamento algébrico. Mas, destacaremos a visão de alguns autores acerca do tema com o intuito de facilitar nosso entendimento.

Em Álgebra, existe uma prevalência dos aspectos simbólicos para expressar as ideias e generalizações. No entanto, o pensamento algébrico amplia esse domínio, pois envolve não só símbolos, mas faz uso de outros artefatos para expressar a generalização, como por exemplo, admite-se o uso de diagramas, tabelas, expressões numéricas, gráficos (Canavarro, 2007).

Para Van de Walle (2009) o pensamento algébrico tem que ser desenvolvido para que seja ferramenta útil na vida cotidiana dos alunos. Desta forma,

> O pensamento algébrico ou raciocínio algébrico envolve formar generalização a partir de experiências com números e operações, formalizar essas ideias com o uso de um sistema de símbolos significativos e explorar os conceitos de padrão e de função. Longe de ser um tópico de pouco uso no mundo real, o pensamento algébrico penetra toda matemática e é essencial para torná-la útil na vida cotidiana" (Van de Walle, 2009, p. 287).

De acordo com Blanton e Kaput (2005) o pensamento algébrico é

> um processo no qual os alunos generalizam ideias matemáticas de um conjunto particular de exemplos, estabelecem generalizações por meio do discurso de argumentação, e expressam-nas, cada vez mais, em caminhos formais e apropriados à sua idade (Blanton e Kaput, 2005, p. 413).

Por iniciativa do Governo Federal, no ano de 2012, através do Programa de Alfabetização na Idade Certa – PNAIC, as discussões envolvendo a inserção da álgebra no currículo de matemática dos anos iniciais já se faziam presentes no documento *"Elementos Conceituais e Metodológicos para definição dos Direitos de Aprendizagem e Desenvolvimento* *do Ciclo (1º, 2º e 3º anos) do Ensino Fundamental"* (Brasil, 2012). O documento orientava que fossem trabalhadas.

> A compreensão e reconhecimento dos padrões – em sequências numéricas, de imagens e de sons ou em sequências numéricas simples, – o estabelecimento de critérios para agrupar, classificar e ordenar objetos, considerando diferentes atributos e a produção de padrões, fazem parte de todos os eixos estruturantes. (Brasil, 2012, p. 76).

Com essa orientação, o currículo de matemática no Brasil entra em consonância com o movimento internacional *Early Algebra* que se preocupa em inserir a álgebra já nos anos iniciais, considerando que as habilidades desenvolvidas por meio da exploração do pensar algebricamente podem contribuir para o desenvolvimento de sujeitos capazes de generalizar.

O currículo educacional brasileiro teve grande avanço com a discussão e homologação da Base Nacional Comum Curricular – BNCC, que traz de forma incisiva a inclusão da Álgebra já nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Nessa fase de escolaridade, a preocupação deve ser "o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento – o pensamento algébrico" (Brasil, p.270). O ensino deve proporcionar aos alunos situações para que possam construir ideias de regularidade, generalização de padrões e propriedades da igualdade.

Autores como Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), Canavarro (2007), Kieran et al. (2016), Mason (2018) e Lins e Gimenez (2001) destacam a importância de trabalhar a álgebra desde os primeiros anos de escolaridade, considerando que os estudantes terão mais facilidade para desenvolver habilidades matemáticas a partir do desenvolvimento do pensamento algébrico.

De acordo com Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) as noções de álgebra devem ser iniciadas nos primeiros anos de escolaridade, pois é neste momento que os alunos começam a identificar regularidades e estabelecer generalizações a partir de situações-problemas.

SEQUÊNCIAS

Aqui, neste documento, iremos apresentar sugestões de atividades com **padrões** que podem e devem ser desenvolvidas nas salas de aula dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

4 PROPOSTA DE ATIVIDADES

TEMÁTICA: Pensamento Algébrico - Sequências

OBJETIVOS DA PROPOSTA DE ATIVIDADES:

- Identificar padrões presentes em sequências repetitivas e recursivas;
- Descrever e comentar sobre os padrões das sequências;
- Completar sequências repetitivas com elementos faltantes;
- Construir novas sequências considerando padrões repetitivos;
- Analisar as sequências observando a regularidade dos elementos;
- Resolver situações-problema envolvendo sequências repetitivas;
- Desenvolver o pensamento algébrico.

OBJETO DO CONHECIMENTO:

- Construção de sequências repetitivas e de sequências recursivas;
- Identificação de regularidade de sequências e determinação de elementos ausentes na sequência;
- Sequência numérica recursiva formada por múltiplos de um número natural.

HABILIDADES

(EF02MA09) Construir sequências de números naturais em ordem crescente ou decrescente a partir de um número qualquer, utilizando uma regularidade estabelecida;
(EF02MA10) Descrever um padrão (ou regularidade) de sequências repetitivas e de sequências recursivas, por meio de palavras, símbolos ou desenhos;
(EF02MA11) Descrever os elementos ausentes em sequências repetitivas e em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras;
(EF04MA11) Identificar regularidades em sequências numéricas compostas por múltiplos de um número natural.
TURMA: 5º ano
RECURSOS: Slides em PowerPoint, atividades impressas, figuras geométricas impressas, pedacinhos de cartolina guache colorida, cola, papel ofício, bola, gravador (celular).
TEMPO ESTIMADO: 7 aulas
AVALIAÇÃO: A avaliação ocorrerá durante todo o processo de ensino, por meio das observações e reflexões.

1º Momento: Acolhida e Dinâmica – Sequência "Viva"

Acolhida: Apresentação da pesquisa de forma geral para os estudantes e professora da turma, explicando a importância de cada um nesse estudo. Após essa aproximação inicial, os estudantes serão convidados a participar de uma dinâmica.

- Dinâmica: Sequência "Viva"

Será proposto que os estudantes participem da "investigação" de uma Sequência "Viva". Nessa dinâmica, alguns estudantes farão parte da Sequência "Viva" e os demais tentarão descobrir qual o segredo da sequência.

A pesquisadora irá organizar os estudantes em determinadas sequências e solicitar que os demais estudantes *descubram* o segredo da sequência, *descrevam* o padrão/regularidade dos elementos na sequência e *continuem* a sequência. As ações "descobrir", "descrever" e "continuar" serão solicitadas a cada nova sequência proposta pela pesquisadora.

1ª Situação da Sequência "Viva"

Organizar os estudantes na seguinte distribuição: 1 menino, 2 meninas, 1 menino, 2 meninas,...

2ª Situação da Sequência "Viva"

Organizar os estudantes na seguinte distribuição: 2 meninas em pé, 1 menino sentado, 2 meninas em pé, 1 menino sentado,...

3ª Situação da Sequência "Viva"

Organizar os estudantes na seguinte distribuição: 1 menino de frente, 1 menina de costas, 2 cadeiras vazias, 1 menino de frente, 1 menina de costas, 2 cadeiras vazias, ...

Em cada rodada de investigação das Sequências "Vivas", serão feitas perguntas para que os estudantes possam identificar padrões/regularidades nas situações, além de solicitado que os investigadores falem suas conclusões.

Nosso objetivo com essa dinâmica é propor uma atividade de investigação a partir de uma situação concreta e lúdica, assim como, perceber possíveis dificuldades na identificação dos padrões/regularidades. Com essa dinâmica podemos realizar uma diagnose inicial da turma.

2º Momento: Atividade prática – Construindo sequências coloridas

A turma será organizada em pequenos grupos de 4 estudantes que posteriormente serão divididos em duplas. No primeiro momento, os grupos irão receber material concreto (pacotinhos com pedaços pequenos de cartolina guache) e 1 folha A4 para registrar suas construções. A pesquisadora irá solicitar que os grupos construam uma sequência repetitiva, usando o material que receberam e, em seguida, transcrevam na folha como fizeram suas sequências.

Exemplo:

Grupo 1 – Sequência com bolinhas amarelas e vermelhas
Grupo 2 – Sequência com bolinhas azuis e laranjas
Grupo 3 – Sequência com quadrados verdes e rosas
Grupo 4 – Sequência com quadrados azuis e amarelos
Grupo 5 – Sequência com triângulos laranjas e verdes

Grupo 6 – Sequência com triângulos rosas e amarelos

Grupo 7 – Sequência com retângulos vermelhos e verdes

Grupo 8 – Sequência com retângulos azuis e rosas

Grupo 9 – Sequência com corações vermelhos e azuis

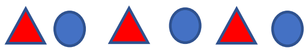
Grupo 10 – Sequência com corações amarelos e verdes.

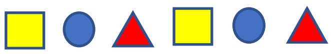
A pesquisadora irá observar as construções dos grupos e pedirá que os estudantes possam criar diferentes sequências usando o material que lhes foi entregue. Com essa atividade, nossa intenção é fazer com que os grupos (estudantes) percebam as diversas possibilidades na construção das sequências.

Após os grupos realizarem o registro de suas sequências na folha A4, pedir que algumas duplas possam apresentar para turma o seu trabalho final.

3º Momento: Apresentação de slides e Atividade – Faça você mesmo

A pesquisadora irá apresentar um slide com exemplos de sequências repetitivas usando elementos geométricos e solicitar a participação dos estudantes para identificar os elementos, descobrir o padrão/regularidade e continuar a sequência.

Exemplo 1: 

Exemplo 2: 

Exemplo 3: 

Após a exploração do slide, os estudantes irão construir sequências repetitivas com elementos geométricos em uma folha A4. As duplas receberão envelopes contendo os círculos, quadrados, triângulos e retângulos para montar sequências repetitivas de acordo com as orientações dadas pela pesquisadora.

Sequência 1: Construir sequência repetitiva com dois elementos.

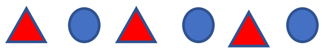
Sequência 2: Construir sequência repetitiva com três elementos.

Sequência 3; Construir sequência repetitiva com quatro elementos.

4º Momento: Atividade – Minhas descobertas

Retomar a atividade anterior em que as duplas construíram sequências repetitivas na folha A4 e apresentar algumas das construções em um slide. As sequências irão aparecer no slide com alguns espaços vazios e então os estudantes serão questionados sobre quais elementos estão ausentes.

Após essa atividade, utilizar o slide com um exemplo de sequência repetitiva com dois elementos e levantar o seguinte questionamento:

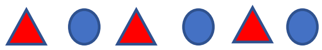
Exemplo 1: 

- É possível dizer qual seria a figura na posição 8ª?
- E na posição 16ª?

É possível que alguns estudantes precisem continuar a sequência desenhando os elementos para responder. Em seguida, perguntar uma posição maior, como por exemplo, a 32ª posição.

- E se quisermos saber a figura da posição 32ª? É possível descobrir sem precisar continuar desenhando?

Caso os estudantes não consigam responder qual seria a figura da posição 32ª, pedir que numerem a sequência e observem os números abaixo de cada figura.

Exemplo 1:  **... ?**

1 2 3 4 5 6 ... 32

Realizar alguns questionamentos:

- O que nós podemos observar nessa sequência? (Números e figuras: triângulos e círculos).
- Vamos observar os triângulos e os números que estão abaixo dessa figura? (1, 3, 5...).
- Agora vamos prestar atenção nos círculos. Quais os números estão abaixo dos círculos? (2, 4, 6 ...).
- O que nós podemos dizer sobre esses números? (Eles são pares e ímpares).
- Os números dos triângulos são pares ou ímpares?
- E os números dos círculos?
- Agora respondam: qual posição da figura 20? Como vocês descobriram?

Nesse momento, os estudantes podem ter percebido que existe um padrão e os triângulos se repetem a cada número ímpar, assim como, os círculos se repetem nos números pares. Caso os estudantes consigam responder que a 20ª posição está ocupada por um círculo, questiona-los sobre como chegaram a essa conclusão.

Os estudantes podem dizer que 20 é um número par e na sequência os números pares aparecem com os triângulos. Questionar qual seria a figura da posição 27.

- Então, a figura da posição 27 é um ... (triângulo).
- Como vocês descobriram? (Os estudantes podem dizer que os números pares são terminados por 1, 3, 5, 7 e 9. Já os ímpares são terminados em 0, 2, 4, 6 e 8. Sendo assim possível dizer que a posição 27 é um número ímpar e portanto seria um triângulo.

E agora? Conseguem dizer qual a figura da posição 32? Como podemos concluir isso?

Exemplo 2: 

No exemplo 2, mostrar uma sequência repetitiva formada por três elementos e fazer alguns questionamentos as duplas.

- Quais as figuras podemos observar nessa sequência?
- Podemos descobrir qual seria o 10 elemento dessa sequência? De que forma?
- E qual seria a figura da 15ª posição?
- E da 22ª posição?

Nessa sequência, os estudantes devem perceber que o padrão é formado pelos múltiplos do número 3. Através de questionamentos as duplas deverão perceber essa regularidade. Caso os estudantes não identifiquem essa regularidade, solicitar que numerem a sequência de figuras como na atividade anterior.

Exemplo 2: 

1 2 3 4 5 6

- Vamos observar os números que aparecem nessa sequência.
- O que esses números podem nos indicar? (A cada 3 elementos, a figura se repete).
- É possível dizer qual a figura da posição 22ª?

Pode ser que os estudantes recorram ao desenho para descobrir a figura da posição 22. Então, questionar se existe outra forma de descobrir sem ser por desenhos.

- Quais são os números dos quadrados? (1, 5...)
- Quais os números dos triângulos? (3, 6...)
- E os números dos círculos? (4, 7...)

Continuar questionando como podemos descobrir qual figura está na posição 22. Essas perguntas irão levar os estudantes a perceber que o padrão se repete de 3 em 3, ou seja, a ideia de múltiplo. Nesse caso, irão perceber que de 3 em 3 a figura que aparece é um triângulo. Assim, o próximo elemento, será um quadrado na 22ª posição.

5º Momento: Resolução de problemas

Resolução de problema envolvendo Sequências repetitivas numéricas, seguindo os passos sugeridos pelo roteiro de Onuchic e Allevato (2011). Vale salientar que, essas etapas não são engessadas e podem ser adaptadas de acordo com a necessidade do trabalho a ser desenvolvido. Essa atividade será desenvolvida com as duplas já estabelecidas anteriormente.

ETAPA 1: Formar grupos - Formar duplas. Optamos pelo trabalho em duplas para que seja possível os estudantes se engajarem no processo de resolução da situação-problema.

ETAPA 2: Proposição do problema – Será proposta para as duplas a atividade de resolução de situação-problema envolvendo sequências).

O problema:

O prefeito da cidade “Alegria”, construiu algumas casas populares para vender por um preço acessível à população carente de sua cidade. Para melhor localizá-las, numerou-as, como mostra a imagem abaixo:

Fonte: Nova Escola, 2022

RESPONDA:

a) Você consegue identificar quantas sequências foram utilizadas na numeração das casas?
b) Qual o padrão de formação utilizado para numerar as casas rosas? E as casas azuis?
c) Os funcionários esqueceram de numerar algumas casas, ajude-os numerando-as.

ETAPA 3: Leitura individual - As duplas farão a leitura da situação-problema;

ETAPA 4: Leitura em conjunto - Será realizada uma leitura coletiva da situação-problema;

ETAPA 5: As duplas irão resolver a situação-problema;

ETAPA 6: A pesquisadora irá observar as duplas e incentivar que resolvam a situação-problema. Nesse momento, as duplas podem ter dúvidas e a pesquisadora poderá ajudar na compreensão da situação-problema através de leitura e mesmo perguntas.

ETAPA 7: Com a situação-problema resolvida, é hora de expor os resultados encontrados na lousa. Com o objetivo de otimizar tempo, utilizaremos um slide com uma tabela contendo nome das duplas e preencheremos os resultados obtidos por cada dupla.

Dupla	Resultado		
Estudante A e Estudante B	A)	B)	C)

ETAPA 8: Solicitar que todas as duplas digam como resolveram a situação-problema, expondo seus pontos de vista.

ETAPA 9: Os estudantes devem chegar a um consenso sobre qual ou quais estratégias estão mais adequadas para resolver a situação-problema. Nesse momento, a pesquisadora irá questionar as duplas para que digam qual foi a estratégia mais adequada.

ETAPA 10: Considerando que as duplas chegaram a um consenso, a formalização do conteúdo será através do registro formal da estratégia na lousa, tendo como escriba, a pesquisadora.

6º Momento: Resolução de problemas

ETAPA 1: Formar duplas. Optamos pelo trabalho em duplas para que seja possível os estudantes se engajarem no processo de resolução da situação-problema.

ETAPA 2: Proposição do problema (Será proposta para as duplas a atividade de resolução de situação-problema envolvendo múltiplos de um número);

O problema:

A linha de ônibus "1002" que faz o transporte de passageiros de Camutanga à Itambé tem embarque a cada 3 horas. Considerando que o primeiro ônibus sai às 6 da manhã e o último sai à meia-noite, responda:

Camutanga → **Itambé**

- 1º ônibus às 06:00 h
- Último ônibus às 00:00 h

RESPONDA:

a) Construa uma sequência numérica com os horários do embarque do ônibus.
b) Se o primeiro ônibus saí as 06:00 h da manhã e o último à meia noite, quantos ônibus saem por dia?
c) Considerando o número de embarques que o ônibus faz por dia, é possível dizer quantos embarques são feitos em 1 semana?

ETAPA 3: As duplas farão a leitura da situação-problema;
ETAPA 4: Será realizada uma leitura coletiva da situação-problema;

ETAPA 5: As duplas irão resolver a situação-problema;

ETAPA 6: A pesquisadora irá observar as duplas e incentivar que resolvam a situação-problema. Nesse momento, as duplas podem ter dúvidas e a pesquisadora poderá ajudar na compreensão da situação-problema através de leitura e mesmo perguntas.

ETAPA 7: Com a situação-problema resolvida, é hora de expor os resultados encontrados na lousa. Com o objetivo de otimizar tempo, utilizaremos um cartaz com os nomes das duplas registrados previamente para preencher os resultados.

Dupla	Resultado		
Estudante A e Estudante B	A)	B)	C)

ETAPA 8: Solicitar que todas as duplas digam como resolveram a situação-problema, expondo seus pontos de vista.

ETAPA 9: Os estudantes devem chegar a um consenso sobre qual ou quais estratégias estão mais adequadas para resolver a situação-problema. Nesse momento, a pesquisadora irá questionar as duplas para que digam qual foi a estratégia mais adequada.

ETAPA 10: Considerando que as duplas chegaram a um consenso, a formalização do conteúdo será através do registro formal da estratégia na lousa, tendo como escriba, a pesquisadora.

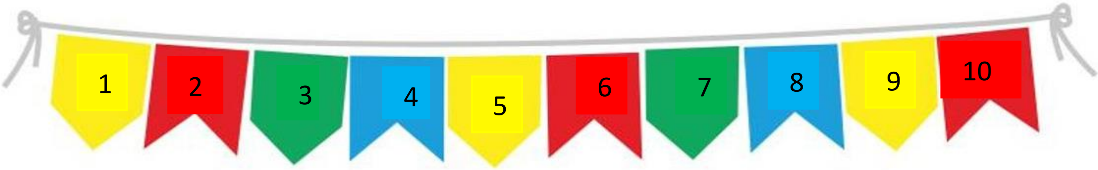
7º Momento: Resolução de problemas

ETAPA 1: Formar duplas. Optamos pelo trabalho em duplas para que seja possível os estudantes se engajarem no processo de resolução da situação-problema.

ETAPA 2: Proposição do problema (Será proposta para as duplas a atividade de resolução de situação-problema envolvendo múltiplos de um número);

O problema:

> A turma do bairro de José estava enfeitando a rua para os festejos juninos. As bandeirinhas são coloridas. José observou que as cores se repetem: amarelo, vermelho, verde e azul.
> Considerando as cores das bandeirinhas, responda:



a) A sequência de números azuis tem o que em comum?

b) Entre o número 8 e o número 24 quais são os números azuis?

c) Qual é a cor da bandeirinha 17?

ETAPA 3: As duplas farão a leitura da situação-problema;

ETAPA 4: Será realizada uma leitura coletiva da situação-problema;

ETAPA 5: As duplas irão resolver a situação-problema;

ETAPA 6: A pesquisadora irá observar as duplas e incentivar que resolvam a situação-problema. Nesse momento, as duplas podem ter dúvidas e a pesquisadora poderá ajudar na compreensão da situação-problema através de leitura e mesmo perguntas.

ETAPA 7: Com a situação-problema resolvida, é hora de expor os resultados encontrados na lousa. Com o objetivo de otimizar tempo, utilizaremos um cartaz com os nomes das duplas registrados previamente para preencher os resultados.

Dupla	Resultado		
Estudante A e Estudante B	A)	B)	C)

ETAPA 8: Solicitar que todas as duplas digam como resolveram a situação-problema, expondo seus pontos de vista.

ETAPA 9: Os estudantes devem chegar a um consenso sobre qual ou quais estratégias estão mais adequadas para resolver a situação-problema. Nesse momento, a pesquisadora irá questionar as duplas para que digam qual foi a estratégia mais adequada.

ETAPA 10: Considerando que as duplas chegaram a um consenso, a formalização do conteúdo será através do registro formal da estratégia na lousa, tendo como escriba, a pesquisadora.

8º Momento: Resolução de problemas

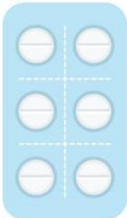
ETAPA 1: Formar grupos - Formar duplas. Optamos pelo trabalho em duplas para que seja possível os estudantes se engajarem no processo de resolução da situação-problema.

ETAPA 2: Proposição do problema – Será proposta para as duplas a atividade de resolução de situação-problema envolvendo sequências).

O problema:

Melina está doente e precisa tomar comprimidos de antibiótico a cada 6 horas. Considerando que o 1º comprimido foi ingerido às 06:00h da manhã e o último às 00:00h :

a) Construa uma sequência numérica com os horários da medicação de Melina.
b) Quantos comprimidos Melina tomará por dia?
c) Considerando o número de comprimidos que Melina toma por dia, quantos comprimidos tomará em 5 dias?



ETAPA 3: As duplas farão a leitura da situação-problema;

ETAPA 4: Será realizada uma leitura coletiva da situação-problema;

ETAPA 5 : As duplas irão resolver a situação-problema;

ETAPA 6: A pesquisadora irá observar as duplas e incentivar que resolvam a situação-problema. Nesse momento, as duplas podem ter dúvidas e a pesquisadora poderá ajudar na compreensão da situação-problema através de leitura e mesmo perguntas.

Dupla	Resultado		
Estudante A e Estudante B	A)	B)	C)

ETAPA 7: Com a situação-problema resolvida, é hora de expor os resultados encontrados na lousa. Com o objetivo de otimizar tempo, utilizaremos um cartaz com os nomes das duplas registrados previamente para preencher os resultados.

ETAPA 8: Solicitar que todas as duplas digam como resolveram a situação-problema, expondo seus pontos de vista.

ETAPA 9: Os estudantes devem chegar a um consenso sobre qual ou quais estratégias estão mais adequadas para resolver a situação-problema. Nesse momento, a pesquisadora irá questionar as duplas para que digam qual foi a estratégia mais adequada.

ETAPA 10: Considerando que as duplas chegaram a um consenso, a formalização do conteúdo será através do registro formal da estratégia na lousa, tendo como escriba, a pesquisadora.

9º Momento: Investigando padrões

Investigar padrões é uma atividade necessária ao processo de generalização. Sendo assim, convidaremos os estudantes a investigar padrões em sequências repetitivas, resolvendo a situação-problema conforme as etapas do Roteiro.

ETAPA 1: Formar duplas. Optamos pelo trabalho em duplas para que seja possível os estudantes se engajarem no processo de resolução da situação-problema.

ETAPA 2: Proposição do problema (Será proposta para as duplas a atividade de resolução de situação-problema envolvendo múltiplos de um número);

1 - Observe as sequências, identifique o padrão e complete com o elemento faltante.

Sequência 1

0	8	16		32		48		64	

a) Qual padrão dessa sequência?
b) Complete com os números faltantes.

Sequência 2

3	11			35	43			67	

a) Qual padrão dessa sequência?
b) Complete com os números faltantes.

Sequência 3

2	5				14		20		26

a) Qual padrão dessa sequência?
b) Complete com os números faltantes.

ETAPA 3: As duplas farão a leitura da situação-problema;

ETAPA 4: Será realizada uma leitura coletiva da situação-problema;

ETAPA 5 : As duplas irão resolver a situação-problema;

ETAPA 6: A pesquisadora irá observar as duplas e incentivar que resolvam a situação-problema. Nesse momento, as duplas podem ter dúvidas e a pesquisadora poderá ajudar na compreensão da situação-problema através de leitura e mesmo perguntas.

ETAPA 7: Com a situação-problema resolvida, é hora de expor os resultados encontrados na lousa. Com o objetivo de otimizar tempo, utilizaremos um cartaz com os nomes das duplas registrados previamente para preencher os resultados.

ETAPA 8: Solicitar que todas as duplas digam como resolveram a situação-problema, expondo seus pontos de vista.

ETAPA 9: Os estudantes devem chegar a um consenso sobre qual ou quais estratégias estão mais adequadas para resolver a situação-problema. Nesse momento, a pesquisadora irá questionar as duplas para que digam qual foi a estratégia mais adequada.

ETAPA 10: Considerando que as duplas chegaram a um consenso, a formalização do conteúdo será através do registro formal da estratégia na lousa, tendo como escriba, a pesquisadora.

10º Momento: Roda de Conversa

Com os estudantes distribuídos em círculo, sentados no chão, realizaremos uma Roda de Conversa para que possam expor suas impressões sobre as aulas vivenciadas durante a pesquisa. Utilizando uma bola, iremos cantar até que a música acabe e o estudante que estiver com a bola possa dizer o que aprendeu em relação às atividades. Algumas perguntas serão feitas para auxiliar na nossa avaliação

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A metodologia de RP pode ser utilizada em sala de aula para potencializar as aprendizagens dos estudantes no contexto investigativo, de descobertas e construção de conceitos de modo que os próprios estudantes sejam autônomos e ativos.

A necessidade de trabalhar com padrões nos anos iniciais surge mediante a compreensão de que eles são fundamentais para desenvolver capacidades matemáticas, como estabelecimento de relações, inferência, abstração e generalização.

De acordo com Vale *et al.,* (2006) o estudo de padrões é uma poderosa estratégia para resolução de problemas, visto que, a atividade de resolução de problemas permite a investigação, contribuindo para a exploração e análise de padrões.

O estudo realizado, possibilitou a produção deste material que tem por objetivo contribuir com a prática pedagógica de professores e professoras que ensinam matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, sobretudo, aos do 5º ano.

Esperamos que este material seja utilizado por professores e professoras contribuindo para a exploração e desenvolvimento do pensamento algébrico através da metodologia de resolução de problemas.

6 REFERÊNCIAS

ALMEIDA, J. R. Álgebra Escolar na Contemporaneidade: uma discussão necessária. **Revista de Educação Matemática e Tecnologia Iberoamericana** – EM TEIA. Vol. 8 – n 1, 2017.

ANDRADE, C.P; ONUCHIC, L. R. **Perspectivas para Resolução de Problemas no GTERP**. *In*: Perspectivas para Resolução de Problemas. Org. Onuchic, Leal Júnior e Pironel. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017.

BRANCA, Nicholas A. **Resolução de problemas como meta, processos e habilidade básica**. *In*: KRULIK, Stephen; REYS, Robert E. A resolução de problemas na matemática escolar. Tradução: Hygino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2017.

______. Elementos Conceituais e Metodológicos para definição dos direitos de aprendizagem e desenvolvimento do ciclo de alfabetização (1º, 2º e 3º anos) do Ensino Fundamental. Brasília: MEC/SEB, 2012.

CANAVARRO, A. P. **O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos**. Quadrante, v. XVI, n. 2, p. 81-118 (2007).

COELHO, F.U; AGUIAR, M. **A história da álgebra e o pensamento algébrico**: correlações com o ensino. Estudos Avançados 32 (94), 2018.

FIORENTINI, D.; MIGUEL, A.; MIORIM, M.A. Contribuição para um Repensar a Educação Algébrica Elementar. Pro-Posições, **Revista Quadrimestral da Faculdade de Educação** – Unicamp. Campinas, v.4, n. 1[10], p.78-91, 1993.

KIERAN, C. **The Learning and Teaching of school Algebra**. *In*: GROWS, D.A. (ed.) Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. New York: Macmillan, 1992.

______.*et al*. **Early Algebra: Research into its nature, its learning, its teaching**. Hamburg: Springer Open, 2016.

LINS, R.C; GIMENES, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI**. Campinas, SP, Papirus, 1997.
MASON, J. **How early is too early for thinking algebraically?** *In* C. Kieran (Ed.). Teaching and learning algebraic thinking with 5-to 12 year-olds. Hamburg: Springer International Publishing, p. 329-350. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_14, 2018.

MORAIS, R. S. **O processo constitutivo da Resolução de Problemas como uma temática da pesquisa em Educação Matemática** – um inventário a partir de documentos dos ICMEs. Tese de doutorado. Universidade Estadual Paulista – UNESP, Rio Claro, 2015.

ONUCHIC, L.R; ALLEVATO, N.S.G. **Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas**. *In* Bolema, v. 25, n. 41, p.73-98. Rio Claro: 2011.

______; LEAL JÚNIOR, L.C; PIRONEL, M. (Orgs) **Perspectivas para Resolução de Problemas**. São Paulo: Editora Livraria da Física,2017.

POLYA, G. **A Arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático. Tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo. – 2. Reimpr. – Rio de Janeiro: interciência, 1995, p. 196.

PONTE, J.; BRANCO, N.; MATOS, A. **Álgebra no Ensino Básico. Ministério da Educação, Portugal**. Direção Geral de Integração e de Desenvolvimento Curricular (DGIDC). Portugal, 2009.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. 6. Ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.