UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I - CAMPINA GRANDE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
CURSO DE MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ANTONIO CARLOS BELARMINO SEGUNDO

SEMELHANÇA MATEMÁTICA: SIGNIFICADOS A PARTIR DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

CAMPINA GRANDE-PB
2023

ANTONIO CARLOS BELARMINO SEGUNDO

SEMELHANÇA MATEMÁTICA: SIGNIFICADOS A PARTIR DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Mestrado Profissional, da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Área de concentração: Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Linha de pesquisa: Metodologia, Didática e Formação do Professor no Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Maria Alves de Azerêdo.

CAMPINA GRANDE-PB
2023

B425s Belarmino Segundo, Antonio Carlos.

Semelhança matemática [manuscrito] : significados a partir dos registros de representações semióticas / Antonio Carlos Belarmino Segundo. - 2023.

100 p. : il. colorido.

Digitado.

Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2023.

"Orientação : Profa. Dra. Maria Alves de Azerêdo, Especialização em Educação Matemática. "

1. Semelhança matemática. 2. Geometria. 3. Ensino da matemática. I. Título

21. ed. CDD 510.7

Elaborada por Geovani S. de Oliveira - CRB - 15/1009

Biblioteca Central BC/UEPB

ANTONIO CARLOS BELARMINO SEGUNDO

SEMELHANÇA MATEMÁTICA: SIGNIFICADOS A PARTIR DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Mestrado Profissional, da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Área de concentração: Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Linha de pesquisa: Metodologia, Didática e Formação do Professor no Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Aprovada em: 01/11/2023.

BANCA EXAMINADORA

Maria Alves de Azerêdo

Profª. Drª. Maria Alves de Azerêdo – UEPB
Orientadora

Eduardo Onofre

Profº. Drº. Eduardo Gomes Onofre – UEPB
Examinador interno

Profº. Drº. Arlandson Matheus Silva Oliveira – UEPB
Examinador externo

Aos meus familiares, pela dedicação, companheirismo e amizade, DEDICO.

AGRADECIMENTOS

A Silvanio de Andrade e José Joelson Pimentel de Almeida, que fazem a coordenação do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática (PPGECM), por seu empenho.

À professora orientadora Maria Alves de Azerêdo e ao professor Arlandson Matheus Silva Oliveira, pela compreensão, pela dedicação e pelas leituras sugeridas ao longo dessa orientação.

Ao meu pai, Antonio Carlos Belarmino, a minha mãe, Maria Aparecida de Medeiros, a minha esposa, Emanuelle Kaatharine dos Santos Souza, às minhas irmãs, Karlla Karen Medeiros Belarmino e Priscyla Maria Medeiros Belarmino, ao meu sobrinho Luís Gustavo Belarmino Diniz, pela compreensão por minha ausência nos momentos familiares.

Aos professores do PPGECEM, em especial Eduardo Gomes Onofre, que contribuíram ao longo de 30 meses, por meio das disciplinas e debates, para o desenvolvimento desta pesquisa.

Aos funcionários da UEPB, pela presteza e atendimento quando nos foi necessário.

“Se a educação sozinha não transforma a sociedade, sem ela tampouco a sociedade muda”.

Paulo Freire

RESUMO

O Ensino de Geometria é imprescindível à formação dos estudantes, sendo debatido no campo da Educação Matemática porque pode promover o aprimoramento de competências e habilidades relacionadas à visualização, observação, medição, comparação e abstração sobre figuras e o espaço num contexto de investigação e exploração de resolução das questões. Sendo assim, a presente dissertação tem como objetivo analisar a compreensão de Semelhança Matemática demonstrada por alunos da 1ª série do Ensino Médio, tendo como base a Teoria dos Registros de Representações Semióticas (TRRS). Apresenta breves considerações sobre o ensino e aprendizagem de Geometria na Educação Básica, a partir de autores como Pavanello (1996), Smole et al. (2000), Fonseca (2001), Huete e Bravo (2006), Eves (2011), Iezzi et al. (2015), Monteiro (2015), entre outros. A pesquisa se caracteriza como qualitativa numa modalidade diagnóstica, operacionalizada com alunos de quatro (04) turmas de 1ª série do Ensino Médio, da cidade de Santa Luzia, interior da Paraíba. Os dados foram coletados num único encontro, onde foi aplicado o instrumento da pesquisa. Esse instrumento conteve onze (11) questões e considerou as múltiplas maneiras pelas quais os alunos podem abordar e entender o conceito de Semelhança, promovendo uma compreensão mais profunda de Matemática. A análise dos dados teve como fundamento a TRRS. As respostas dos estudantes foram organizadas e analisadas considerando as três atividades cognitivas ligadas à semiose: a formação de uma representação identificável, o tratamento e a conversão. Após a análise dos dados, foi elaborada uma sequência didática à luz da TRRS, que permite representar o conceito de Semelhança Matemática de várias maneiras, buscando contribuir para melhor apreensão do conceito trabalhado.

Palavras-Chave: semelhança matemática; teoria dos registros das representações semióticas; produção de significados.

ABSTRACT

The teaching of Geometry is essential for students' education and is a subject of debate in the field of Mathematics Education, as it can enhance competencies and skills related to visualization, observation, measurement, comparison, and abstraction of shapes and space within a context of inquiry and problem-solving exploration. Thus, this dissertation aims to analyze the understanding of Mathematical Similarity demonstrated by first-year high school students, based on the Theory of Registers of Semiotic Representations (TRRS). It provides brief considerations on the teaching and learning of Geometry in Basic Education, drawing from authors such as Pavanello (1996), Smole et al. (2000), Fonseca (2001), Huete and Bravo (2006), Eves (2011), Iezzi et al. (2015), Monteiro (2015), among others. The research is qualitative in a diagnostic modality, conducted with students from four (04) first-year high school classes in the city of Santa Luzia, in the interior of Paraíba. Data were collected in a single meeting, during which the research instrument was administered. This instrument included eleven (11) questions and considered the multiple ways in which students can approach and understand the concept of Similarity, aiming to promote a deeper understanding of Mathematics. The data analysis was grounded in TRRS. The students' responses were organized and analyzed, taking into account the three cognitive activities related to semiosis: the formation of an identifiable representation, processing, and conversion. After the data analysis, a didactic sequence was developed in light of TRRS, allowing for various representations of the concept of Mathematical Similarity, with the goal of contributing to a better grasp of the concept under study.

Keywords: mathematical similarity; theory of registers of semiotic representations; meaning production.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BDTD	Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
MEC	Ministério da Educação
MMM	Movimento da Matemática Moderna
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica
TRRS	Teoria dos Registros de Representações Semióticas

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A educação formal, por ser um processo dinâmico, complexo e contínuo, enfrenta desafios permanentemente, pois as habilidades e a forma de aprender mudam, emergindo, dessa forma, uma nova geração de aprendizagem.

No contexto escolar, mais especificamente na sala de aula, alunos e professores, com os seus saberes e conhecimentos, interagem para que a aprendizagem possa se efetivar. Essa interação entre alunos e professores cria um ambiente dinâmico de troca de ideias e perspectivas. O professor, como facilitador do conhecimento, utiliza sua expertise para guiar e estimular o pensamento crítico dos alunos, enquanto estes, por sua vez, trazem suas experiências e questionamentos, enriquecendo o processo de aprendizagem coletiva. Essa colaboração em sala de aula não é apenas canal de transmissão de informações, mas também promove o desenvolvimento de habilidades sociais e cognitivas essenciais para o crescimento acadêmico e pessoal de cada indivíduo.

Diante do exposto, é importante ressaltar o papel que a Geometria exerce na compreensão de conteúdos matemáticos e na formação do estudante. Explorar de maneira significativa essa área faz repensar a forma como ela é trabalhada em sala de aula. De acordo com a Proposta Curricular do Ensino Médio da Paraíba, área de Matemática e Suas Tecnologias, é pertinente um ensino por meio da investigação, exploração e a interação do aluno de forma ativa durante a resolução das questões para que possam promover o aprimoramento de competências e habilidades relacionadas à visualização, observação, medição, comparação e abstração.

Neste contexto, busca-se neste estudo que os discentes construam e atribuam significados ao conceito de Semelhança Matemática, sob a égide da Teoria dos Registros das Representações Semióticas, utilizando-se da sua criatividade, escrita e interpretação, bem como dos seus conhecimentos acumulados.

Para tanto, realizou-se uma pesquisa de abordagem qualitativa numa modalidade diagnóstica, que teve como instrumento uma atividade composta de questões envolvendo a Semelhança Matemática aplicada em turmas da 1ª série do Ensino Médio de uma Escola Pública da cidade de Santa Luzia, Paraíba. A partir da análise dos resultados desse instrumento, propusemos uma sequência didática para o ensino do referido conteúdo.

Debruçar-se sobre o conceito de Semelhança Matemática, apresentados por alunos da primeira série do Ensino Médio, possibilita-nos a seguinte reflexão: o referido conceito, se aprendido de forma compreensiva, contribui para formação de um pensamento geométrico, o qual não se restringe ao plano, mas relaciona espaço e plano, simultaneamente. A escolha pela 1ª série do Ensino Médio, deu-se a partir de pensamentos nossos acerca da aprendizagem desses conceitos na série anterior, a qual foi cursada em Ensino Remoto Emergencial, devido ao período pandêmico. Com isso, enxergou-se, a partir desse estudo, uma possibilidade de contribuir na apreensão desses conceitos, construindo situações didáticas a partir das lacunas apresentadas pelos discentes.

No contexto do Ensino de Geometria, mais especificamente de Semelhança Matemática para o desenvolvimento do pensamento geométrico, surge a seguinte problemática: Qual a contribuição da Teoria dos Registros de Representações Semióticas para compreensão de Semelhança Matemática?

No que se refere ao interesse em estudar o conceito de Semelhança Matemática, esse surge a partir de reflexões sobre nossa prática pedagógica na rede pública de ensino. Uma das preocupações mais frequentes é avaliar a percepção que os alunos têm dos conceitos ensinados nas aulas de Geometria, pois um bom conhecimento dela, e de como ela se desenvolve, promove práticas mais consistentes. De acordo com a Proposta Curricular do Ensino Médio da Paraíba, área de Matemática e Suas Tecnologias, outro ponto a se considerar com o estudo do conceito de Semelhança Matemática é o fato de sua compreensão ser essencial para os demais conteúdos de Geometria propostos pelo currículo, o qual contribui diretamente na formulação e resolução de problemas no campo geométrico, em geral.

Atrelado ao processo de reflexão sobre nossa prática, percebeu-se a necessidade de avançar nos estudos acadêmicos para um melhor entendimento do ambiente sala de aula, bem como para melhor analisar os processos de ensino e aprendizagem em Geometria na Educação Básica. Essa oportunidade constituiu-se elemento integrante em nossa formação acadêmica para elaboração de estratégias voltadas ao Ensino de Matemática, capazes de promover uma abordagem mais ampla do saber matemático e de suas possibilidades na aprendizagem.

Na tentativa de responder à problemática do nosso estudo, apresentou-se, pois, o seguinte objetivo geral: Analisar a compreensão de Semelhança Matemática produzida por alunos da 1ª série do Ensino Médio, tendo como base a Teoria dos Registros de Representações Semióticas (TRRS). Nessa perspectiva, em busca de resultados concretos que pretendemos alcançar e contribuir com o objetivo geral, tem-se dois objetivos específicos, que são: (i) Identificar os possíveis obstáculos que dificultam o entendimento do conceito de Semelhança Matemática; e (ii) Propor uma sequência de atividades que explorem o conceito de Semelhança Matemática à luz da TRRS.

A primeira segmentação deste trabalho consiste na apresentação da base teórica subjacente à nossa pesquisa. Essa seção é estruturada da seguinte maneira: inicialmente, apresentamos os aspectos históricos e curriculares do Ensino de Geometria, analisamos as perspectivas derivadas de pesquisas que abrangem o panorama do ensino de Geometria e da TRRS no contexto da sala de aula da Educação Básica e exploramos pontos do conceito de Semelhança Matemática, ilustrando exemplos de sua aplicabilidade em situações cotidianas – neste contexto, conduzimos uma análise crítica e construtiva, estabelecendo conexões teóricas para aprofundar o estudo da Semelhança Matemática; em um segundo momento, discutimos os aspectos cruciais da TRRS.

A segunda parte descreve a metodologia adotada na pesquisa, justificando a abordagem escolhida e delineando o tipo de pesquisa realizado. Discutimos o campo de pesquisa e esclarecemos a seleção dos participantes envolvidos, apresentando também os métodos empregados na coleta e organização dos dados.

No terceiro capítulo, apresentamos minuciosamente a intervenção efetuada na realização do estudo, acompanhada de análises detalhadas que contextualizam o instrumento da nossa pesquisa.

A conclusão deste estudo engloba as considerações finais, nas quais respondemos à questão-problema e aos objetivos estabelecidos. Na última parte do nosso trabalho, apresenta-se a sequência didática de sete aulas, que se baseia nos níveis de compreensão dos alunos sobre semelhança matemática, identificados nas salas de aula dessa pesquisa. Essa sequência foi projetada para auxiliar professores, oferecendo uma abordagem gradual e eficaz para fortalecer o entendimento dos alunos sobre o conceito de semelhança matemática, contribuindo assim para aprimorar suas habilidades matemáticas.

2 O ENSINO DE GEOMETRIA – ASPECTOS HISTÓRICOS E CURRICULARES

Neste capítulo da dissertação, exploramos o ensino de Geometria sob três perspectivas cruciais: seus aspectos históricos, sua integração nos currículos educacionais e especificamente o conceito de Semelhança Matemática. Analisamos a evolução da Geometria como disciplina ao longo do tempo, destacando marcos históricos e abordagens pedagógicas relevantes. Além disso, investigamos como a Geometria é abordada nos currículos educacionais, examinando como as mudanças ao longo do tempo impactaram sua relevância e enfoque dentro do contexto educativo contemporâneo. Por último, trazemos a presença e a definição do conceito de Semelhança Matemática de acordo com um livro didático, uma vez que esse conteúdo é o objeto central de nossa pesquisa.

De acordo com relatos de filósofos como Heródoto e Aristóteles, há evidências de que a Geometria teve origem no Egito. Heródoto menciona que a Geometria surgiu graças às ações do Faraó Sesóstris III[1]. Segundo o relato, o faraó dividiu as terras da região para fins agrícolas, estabelecendo tributos proporcionais ao tamanho das propriedades. Quando o Rio Nilo transbordava e inundava parte dessas terras, os agricultores solicitavam uma nova medição para pagar menos impostos. Foi a partir dessas medições que teria surgido o desenvolvimento da Geometria.

Nos diferentes textos e ideias que Aristóteles expressou em relação ao conhecimento matemático e suas origens, há relatos de uma classe sacerdotal no Egito que se dedicava aos estudos geométricos. Portanto, nas perspectivas desses filósofos, podemos identificar claramente duas origens distintas para o surgimento da geometria: uma baseada na prática e outra puramente teórica.

Acredita-se que Tales de Mileto tenha levado a Geometria do Egito para a Grécia por volta do século 5 a.C. É importante ressaltar que as concepções filosóficas eram completamente diferentes no Egito e na Grécia. De acordo com diferentes perspectivas filosóficas e abordagens à Geometria, no Egito e na Babilônia a verdade era determinada pela experiência, ou seja, acreditava-se naquilo que era observável.

---

[1] Faraó do Antigo Egito que reinou durante a 12ª Dinastia, por volta de 1878 a.C. a 1839 a.C. Ele é considerado um dos faraós mais poderosos e bem-sucedidos dessa dinastia. Sesóstris III expandiu o império egípcio por meio de campanhas militares e é conhecido por suas conquistas na Núbia e na região da Síria. Ele também foi responsável por importantes obras de construção e por reorganizar o governo e o exército egípcios. Sua governança é considerada um período de prosperidade e estabilidade para o Antigo Egito.

Já na Grécia, a visão era diferente, pois observar não era suficiente, era necessário fundamentar racionalmente, representando uma mudança de paradigma. Com o conhecimento prático adquirido do Egito e da Babilônia, os gregos começaram a aprimorar a Geometria.

Durante a Idade Média, a Geometria foi preservada principalmente nos centros de aprendizado islâmicos e monásticos. No Renascimento, o interesse pela Geometria foi reavivado na Europa, com matemáticos como Leonardo da Vinci e René Descartes. Descartes introduziu a geometria analítica, que unia Geometria e Álgebra.

Nos séculos XVIII e XIX, a Geometria foi expandida com as pesquisas de matemáticos como Gauss, Lobachevsky e Bolyai, que exploraram geometrias não euclidianas, rompendo com os postulados de Euclides. Esse desenvolvimento revolucionou a compreensão da Geometria e suas aplicações.

2.1 O Ensino de Geometria no Brasil – Apontamentos Históricos

A Geometria começou a ser estudada no Brasil durante o período colonial, sob influência dos jesuítas, que trouxeram conhecimentos matemáticos da Europa. No entanto, a prática da Geometria já era conhecida e aplicada por povos indígenas que habitavam o território antes da chegada dos europeus.

Segundo Castro (1999), a Geometria foi utilizada no Brasil porque, desde a sua aparição, o país sempre teve um vasto território e precisava ser protegido da invasão de outros reinos europeus. Para tal, foi necessário desenvolver estratégias defensivas para proteger não só o território, mas também a sua população.

Março de 1549 marca a chegada dos jesuítas em território nacional. Na época do Brasil Colonial, "os jesuítas se dedicavam a proclamar a fé católica entre os índios, ou seja, ensinar o catecismo. Mas, para que tivessem acessibilidade aos textos da Bíblia, os indígenas precisavam ser educados e aprender a ler e escrever" (Rosário; Silva, 2004, p. 01).

Desde sua chegada em território brasileiro, os jesuítas construíram muitas escolas em todo o país. A primeira escola primária a ser fundada no Brasil foi construída na cidade de Salvador e, à medida que os jesuítas se deslocavam pelo território brasileiro, mais escolas eram construídas.

Os jesuítas ficaram aqui cerca de dois séculos até serem expulsos. Dedicavam-se não apenas ao ensino fundamental, mas também ao conhecimento superior, dando maior relevância à Aritmética. No curso filosófico se podia estudar Matemática, entre outras ideias, e o curso artístico se encarregava de introduzir a Geometria, na qual também estavam presentes a Física, a Metafísica, a Ética, a Lógica e a Matemática, precedidas pela Geometria Plana e Sólida (CASTRO, 1953, apud FERREIRA, 2005).

A preocupação em defender as áreas costeiras brasileiras contra possíveis ataques inimigos fez da Geometria uma aliada fundamental, pois ajudou a planejar e mapear as fortificações a serem construídas ao longo da costa brasileira, por esse motivo, foi incluído no currículo das escolas militares através dos livros "O Exame de Artilheiros e O Exame de Bombeiros"[2]. Na época do Brasil Colonial, o principal objetivo do ensino de Geometria era "fornecer uma base sólida para futuros estudos em engenharia militar, navegação e arquitetura naval" (CASTRO, 1999, p.19).

A partir de 1810, outras escolas começaram a oferecer cursos de Matemática e especificamente de Geometria. Foram a Academia Real Militar e a Academia Real dos Guardas-Marinha, que, no Brasil, tornaram-se curso de grau superior e curso de grau secundário, respectivamente.

Influenciado pela obra de Euclides, o Ensino de Geometria no Brasil seguiu uma abordagem fixa durante um bom tempo. Para Monteiro (2015), a partir do ano 1960, o Brasil e também outros países sofreram mudanças significativas com o Movimento da Matemática Moderna (MMM)[3], que buscava aproximar a Matemática desenvolvida na Educação Básica da Matemática produzida pelos pesquisadores da área.

> Durante os anos 70 o currículo de Matemática parecia preocupar-se mais com o aumento nas notas de testes e habilidades básicas ou computacionais do que com o ensino propriamente dito. Os alunos eram capacitados para a resolução de exercícios ou de problemas-padrão e a Geometria não fugia à regra nas raras situações em que era abordada. (MONTEIRO, 2015, p. 19).

Embora o livro de Morris Kline[4] traga um diagnóstico do fracasso do MMM no mundo inteiro, os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCN), de 1998,

---

[2] Escritos por José Fernandes Pinto Alpoim em 1744, tinham como foco principal o ensino de Geometria e Trigonometria.

[3] Movimento Internacional do Ensino de Matemática que surgiu na década de 1960 e se baseava na formalidade e no rigor dos fundamentos da teoria dos conjuntos e da álgebra para o ensino e a aprendizagem de Matemática.

[4] Trata-se da obra "O fracasso da matemática moderna" traduzido para o português por Leônidas Gontijo de Carvalho, em 1976. A obra critica o ensino tradicional de Matemática e propõe mudanças na abordagem pedagógica, visando melhorar a Educação Matemática no Brasil, promovendo uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos e despertando o interesse dos estudantes pela disciplina.

asseguram que muitas ideias trazidas pelo MMM estão no ensino brasileiro de Matemática ainda na atualidade, a citar:

> (...) a insistência no trabalho com os conjuntos nas séries iniciais, o predomínio absoluto da Álgebra nas séries finais, a formalização precoce de conceitos e a pouca vinculação da Matemática às suas aplicações práticas (PCN, 1998, p. 17).

Por isso, pode-se notar que o MMM conseguiu ser bastante influente, algo que requer análises e estudos no que se refere em como essas ideias estiveram presentes ao decorrer do tempo no Ensino de Matemática no Brasil.

Considera-se que o processo de ensinar e aprender Geometria deve partir da intuição e se aproximar gradativamente da dedução, direção já defendida na Reforma de Francisco Campos[5]. De acordo Pavanello (1996, p. 04), a Reforma,

> [...] em relação ao ensino da geometria, propõe que ele se inicie pelas explorações intuitivas, a partir das quais se estabelecerão os conhecimentos indispensáveis à construção de uma sistematização, que deverá atingir a exposição formal.

Segundo Huete e Bravo (2006, p. 23), a forma de construção do conhecimento geométrico substitui parcialmente qualquer tentativa de usar métodos e algoritmos mecanicamente adequados para resolver problemas reais. Neste contexto, Pavanello (1996, p. 07), ao tratar do Ensino de Geometria nas escolas, reitera quão prejudicial é essa visão de que Matemática e Geometria são disciplinas independentes.

> O ensino da geometria na abordagem tradicional já enfrentava grandes problemas em relação ao conhecimento do professor, aos métodos utilizados, à dificuldade em se estabelecer uma ponte entre a geometria prática indicada para a escola elementar e a abordagem axiomática introduzida no secundário. (PAVANELLO, 1996, p. 07).

Percebe-se que, a partir da criação dos PCN de Matemática, a Geometria recebeu atenção especial, principalmente no Ensino Fundamental, e foi incluído nesse documento eixos temáticos denominados Espaço e Forma e Grandezas e Medidas. Com os Parâmetros Curriculares servindo de referência, as diretrizes de avaliação do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) e o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), organizado pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), do Ministério da Educação (MEC), começaram

---

[5] Reforma que, tendo início em 1931, tinha como principal objetivo a tentativa de unificar o ensino em todo o Brasil.

a induzir mudanças nos livros didáticos voltados para a Educação Básica. (TENÓRIO, 2016).

Em resumo, pôde-se apresentar alguns dos principais fatos históricos da Geometria no Brasil, são eles: (i) o Período Colonial; (ii) a Geometria do séculos XIX e início do século XX; (iii) as décadas de 1960 e de 1990. Ainda assim, é importante ressaltar que esses são apenas alguns dos marcos históricos da Geometria no Brasil. Ao longo do tempo, muitos outros matemáticos e pesquisadores brasileiros têm contribuído para o avanço dessa área, enriquecendo o campo da Geometria no país.

2.2 A Geometria nas propostas curriculares do Brasil

Para Fonseca (2001, p. 27), a construção do espaço e a percepção das formas começam muito cedo, “quando a criança percebe o espaço a partir de seu próprio corpo". Portanto, considerando que o espaço é tridimensional, é correto que a Geometria seja iniciada pela observação desse espaço. Além disso, "as aulas de Geometria devem ajudar a ampliar e sistematizar o conhecimento espontâneo da criança sobre o espaço em que vive" (FONSECA, 2001, p. 47).

Conceitos geométricos, conforme Miguel e Miorim (1986), não devem ser desenvolvidos em uma única ordem, partindo da definição de uma linha reta até chegar a objetos tridimensionais. Ao contrário disso, os conceitos devem se relacionar quando ensinados.

2.2.1 O Ensino de Geometria e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)

Nos PCN de Matemática estão publicados objetos e métodos para os anos iniciais e finais do Ensino Fundamental. Uma coleção com certas reflexões e análises que trazem sua potência e sentido. Assim sendo, é pertinente referendar estudos experimentais, uma vez que possibilitam a produção de pressupostos e ampliam o entendimento dos objetos abordados. No documento, os objetos admitem fortalecer um aprendizado de maneira progressiva e em vários pontos, enquanto os métodos são ideias que permitem o progresso de competências relativas com o conseguir executar, cabíveis a diversos casos.

No que se referem aos conteúdos, eles estão estruturados nos PCN em blocos, a citar: (i) Números e Operações (Aritmética e Álgebra); (ii) Espaço e Forma

(Geometria); (iii) Grandezas e Medidas (Aritmética, Álgebra e Geometria); (iv) Tratamento da Informação (Estatística, Combinatória e Probabilidade).

Em suas ocorrências, os conteúdos não se mostram numa simples lista, contudo destacam a exigência de compreendê-los em três proporções: conceitos, procedimentos e atitudes. A sistematização, especialmente quando não faz sentido, acaba atrapalhando a compreensão da matemática e de como a gente chega a entender as ideias. Isto posto, entende-se que uma busca investigativa ou uma ação exploratória que surge de situações-problemas oferecidas pedagogicamente são direções que fortalecem atitudes efetivas para o saber integral e rigorosamente matemático.

Há uma clara indicação de que a estruturação das situações de ensino-aprendizagem envolve a integração dos conceitos de Aritmética, Álgebra e Geometria, visando beneficiar não apenas a Matemática, mas também promover a interação com outras áreas do conhecimento.

O estudo de Geometria é destacado pelos PCN como um "campo fértil para o trabalho com situações-problema" (BRASIL, 1998, p. 51), assunto geralmente de interesse natural dos alunos. Segundo os PCN, a atividade envolvendo elementos geométricos favorece o "aprendizado de números e medidas, pois estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças, reconhecer regularidades etc" (BRASIL, 1998, p. 51). A Geometria se destaca no contexto histórico e social contemporâneo, porque esse campo do conhecimento matemático se encontra presente no cotidiano e em outros meios do conhecimento, o que proporciona uma rápida facilidade no trabalho com conteúdos relacionados à ‘Espaço e Forma’, em conexão com outras disciplinas relacionadas ao cotidiano dos alunos.

A seguir, abordaremos sobre a unidade temática Espaço e Forma, seguida de Grandezas e Medidas, uma vez que tratam diretamente sobre Geometria, área do nosso estudo.

Na unidade temática Espaço e Forma, os PCN reconhecem os conceitos geométricos como sendo parte imprescindível do currículo de Matemática, uma vez que:

> [...] por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula a criança a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades e vice-versa. (BRASIL, 1997, p. 56).

Ademais, o trabalho a partir da análise de objetos do cotidiano dos estudantes, sejam obras de arte, pinturas, imagens ou desenhos, permitirá que eles estabeleçam relações entre os conceitos matemáticos e demais áreas do conhecimento.

Na unidade temática Grandezas e Medidas, é sugerido o ensinamento de medidas e das suas associações apoiadas na aproximação da Matemática e das diversas áreas do conhecimento. Além disso, recomenda-se que os discentes identifiquem as ideias de área (abertura de ângulos, volume e comprimento) como grandezas relacionadas a figuras geométricas e que possam solucionar problemas que envolvam suas relações com medidas padronizadas. Assim sendo, entende-se que no processo de ensino e aprendizagem de Geometria é imprescindível oferecer diversos métodos e maneiras de modo a torná-lo mais significativo. Em concordância com o documento,

> [...] as grandezas e as medidas estão presentes em quase todas as atividades realizadas. Desse modo, desempenham papel importante no currículo, pois mostram claramente ao aluno a utilidade do conhecimento matemático no cotidiano (BRASIL/PCN, 1997, p. 56).

É nesse contexto que Smole, Diniz e Cândido (2000) destacam a Geometria como sendo o eixo do conteúdo matemático que pode ser explorado de forma lúdica, pois está presente em atividades que envolvem discernimento e memória visual, ligadas a noções de direção e espaço.

2.2.2 A Geometria na Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

No contexto da Geometria, a progressão ao longo das primeiras fases da educação básica na BNCC visa desenvolver gradualmente as habilidades espaciais e a compreensão dos elementos geométricos por parte dos estudantes.

Nos anos iniciais do Ensino Fundamental, a BNCC enfatiza o reconhecimento e a descrição de formas geométricas básicas, como círculos, quadrados, retângulos e triângulos, por meio da observação e manipulação de objetos do cotidiano. Os alunos são incentivados a identificar essas formas em diferentes contextos, como na natureza, na arte e na arquitetura.

Conforme os alunos progridem para os anos finais do Ensino Fundamental, a BNCC propõe o aprofundamento dos conceitos geométricos, como simetria, perímetro, área, volume e ângulos. Os estudantes são desafiados a resolver problemas envolvendo essas noções e a utilizar instrumentos de medição, como régua e compasso, para construir figuras geométricas mais complexas.

Além disso, a BNCC também valoriza a abordagem interdisciplinar da Geometria, relacionando-a a outras áreas do conhecimento, como a Física e a Arte. Isso proporciona aos alunos uma compreensão mais ampla e integrada dos conceitos geométricos, estimulando o pensamento crítico e a resolução de problemas.

Nesta subseção abordamos de forma geral a Geometria para o Ensino Médio, uma vez que esse é o tema do nosso trabalho. No seu texto introdutório para os instrumentos matemáticos do Ensino Médio, a BNCC (2018) propõe,

> [...] a consolidação, a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental. Para tanto, propõe colocar em jogo, de modo mais inter-relacionado, os conhecimentos já explorados na etapa anterior, a fim de possibilitar que os estudantes construam uma visão mais integrada da Matemática, ainda na perspectiva de sua aplicação à realidade. (BRASIL, 2018, p. 527).

Na BNCC, área de Matemática do Ensino Fundamental, as habilidades encontram-se estruturadas em unidades de conhecimento da área, que são: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística. Nesse contexto, tratamos especificamente aqui sobre Geometria, Grandezas e Medidas.

Em relação ao pensamento geométrico, a BNCC cita habilidades que deveriam ser desenvolvidas pelos alunos no Ensino Fundamental, quais sejam: interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano, identificar transformações isométricas e produzir ampliações e reduções de figuras. Além disso, afirma que esses alunos, durante a referida etapa de ensino, são solicitados a formular e resolver problemas em contextos diversos, aplicando os conceitos de congruência e semelhança (BRASIL, 2018).

No que menciona sobre Grandezas e Medidas, a BNCC traz que nessa unidade, na etapa do Ensino Fundamental, os estudantes constroem e ampliam a noção de medida e obtêm expressões para o cálculo da medida da área de superfícies planas e da medida do volume de alguns sólidos geométricos. Outro ponto enfatizado no Ensino Fundamental pela BNCC é o desenvolvimento do pensamento proporcional

(BRASIL, 2018).

Na proposta para o Ensino Médio, o centro é a construção de um olhar integrado da Matemática, conectado à realidade, em diversos contextos. Em consequência, faz-se necessário considerar as vivências dos discentes do Ensino Médio – tocados de diversos modos pelas tecnologias, pelas condições do mercado de trabalho, entre outros. (BRASIL, 2018).

De acordo o referido documento, para que propósitos se efetivem na área de Matemática e suas tecnologias,

> [...] os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados (2018, p. 529).

Assim sendo, compreende-se que, para o discente potencializar as habilidades que englobam o procedimento investigativo, o levantamento de padrões e soluções de problemas diversos, faz-se necessário que esse tenha um modelo próprio de refletir, simbolizar, informar, discutir e, sobretudo, gerar conceitos e métodos mais bem desempenhados.

Levando em conta esses propósitos, e em articulação com as competências gerais da Educação Básica[6] e as da área de Matemática para o Ensino Fundamental, no Ensino Médio, a área de Matemática deve assegurar aos estudantes o desenvolvimento de competências específicas. Referentes a cada uma dessas competências, são apontadas habilidades a serem alcançadas nessa etapa, ambas presentes no decorrer do texto da BNCC.

2.3 O Conceito de Semelhança Matemática

Nesta subseção, abordamos o conceito de Semelhança Matemática, desde a parte histórica, perpassando pelas consequências e casos, através de demonstrações, e também desenvolvemos situações-problemas correspondentes à

[6] De forma resumida, tem-se as seguintes competências trazidas no texto da BNCC: (i) Conhecimento; (ii) Pensamento científico, crítico e criativo; (iii) Repertório cultural; (iv) Comunicação; (v) Cultura digital; (vi) Trabalho e projeto de vida; (vii) Argumentação; (viii) Autoconhecimento e autocuidado; (ix) Empatia e cooperação; (x) Responsabilidade e cidadania.

temática. Para os dois últimos pontos, utilizou-se da obra de Iezzi et al. (2015). Como o nosso estudo é voltado para sala de aula, encontramos no livro didático supracitado demonstrações pertinentes para o que buscávamos explanar, esse foi o motivo da escolha da obra.

A noção de Semelhança Matemática remonta à antiguidade e tem suas raízes na Grécia Antiga. De acordo com Eves (2011, p. 115):

> Há duas versões de como Tales calculou a altura de uma pirâmide egípcia por meio da sombra. O relato mais antigo, dado por Hierôminos, discípulo de Aristóteles, diz que Tales anotou o comprimento da sombra no momento em que esta era igual à altura da pirâmide que a projetava. A versão posterior, dada por Plutarco, diz que ele fincou verticalmente uma vara e fez o uso da semelhança de triângulos.

A partir desse fato, de acordo com Eves (2011), Tales alcançou imensa estima em seu tempo e, devido essa e tantas outras contribuições – a citar o próprio Teorema de Tales –, até hoje é tido como um dos mais importantes nomes da Matemática.

No nosso cotidiano, afirmamos que dois objetos são semelhantes se são parecidos, ou seja, quando possuem características comuns. Logo, normalmente estamos afirmando que animais, prédios, pessoas, plantas e demais coisas e figuras são semelhantes.

Entretanto, no campo da Matemática, pode-se afirmar que não é o mesmo, pois ocorre quando duas figuras têm a mesma forma, podendo ter tamanhos diferentes. Portanto, na matemática, semelhança é uma propriedade que descreve essa relação entre objetos matemáticos.

No momento que aumentamos ou diminuímos uma fotografia, a título de exemplo, as medidas dos ângulos correspondentes permanecem iguais, enquanto as medidas de comprimento dos lados dessa fotografia mantêm proporcionalidade com as medidas de comprimentos dos seus lados correspondentes na primeira fotografia. Tem-se abaixo uma situação:

Figura 01 – Fotos ilustrativas com as respectivas dimensões: comprimento 2 cm e largura 3 cm; comprimento 3 cm e largura 4,5 cm.

Fonte: Folhapress.

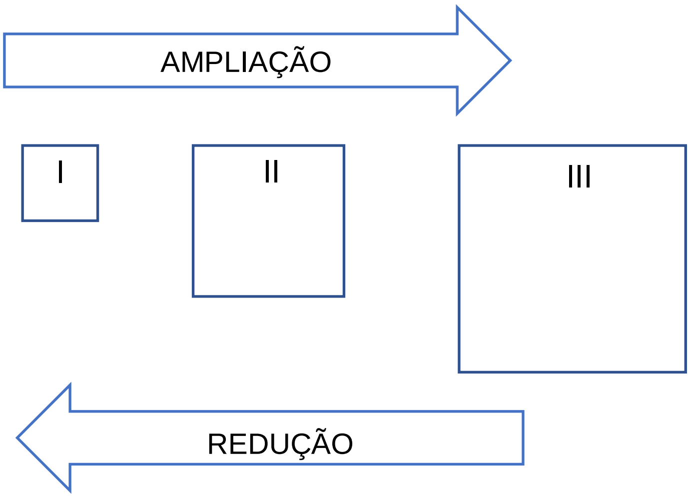
Na figura 1, das fotos ilustrativas, (i) as medidas dos ângulos correspondentes seguem iguais e (ii) as medidas dos lados correspondentes são proporcionais, uma vez que:

$\frac{3}{4,5} = \frac{2}{3}$, visto que $3 * 3 = 4,5 * 2$. Ademais, ao simplificarmos $\frac{3}{4,5} = \frac{3}{\frac{45}{10}} = \frac{30}{45} = \frac{2}{3}$.

Nessas situações, seja quando aumentamos, reduzimos ou reproduzimos fotos, afirmamos que a fotografia inicial e a fotografia secundária são figuras semelhantes. Nesse exemplo supracitado, dizemos que $\frac{2}{3}$ é a razão de proporcionalidade entre as figuras.

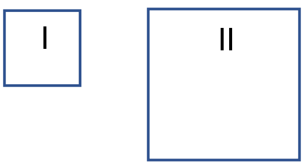
No que se refere à ampliação e redução de figuras, tem-se os seguintes exemplos efetivos de figuras semelhantes no cotidiano: a amplificação de fotografias, as imagens na tela do computador, a representação gráfica num mapa, a planta baixa de uma casa, as miniaturas, as maquetes de edifícios, entre outros.

Em matemática, ampliar ou reduzir uma figura quer dizer manter a forma dela, preservando as medidas dos ângulos correspondentes e alterando de forma proporcional as medidas de comprimento. A seguir, tem-se três quadrados I, II e III; dizemos que II e III são ampliações de I ou que I e II são reduções de III.



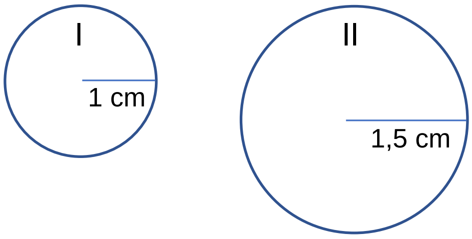
Considerando o apresentado sobre razão de proporcionalidade e as formas dos quadrados acima, podemos chegar a diversas conclusões. A seguir, apresentaremos quatro delas, as quais foram adaptadas de Iezzi et al. (2015):

1. Dois quadrados quaisquer são sempre semelhantes;



Nessa situação, tem-se dois quadrados I e II com os lados medindo, respectivamente, 1 cm e 2 cm, onde a razão de semelhança entre esses quadrados I e II, nesta ordem, é 1/2.

2. Dois círculos quaisquer são sempre semelhantes;



Nessa situação, tem-se dois círculos I e II de raios medindo, respectivamente, 1 cm e 1,5 cm, onde a razão de semelhança entre esses círculos II e I, nesta ordem, é 1,5.

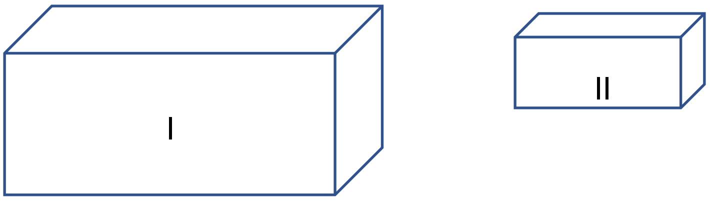
3. Dois retângulos serão semelhantes somente se a razão entre as medidas de suas bases for igual à razão entre as medidas de suas alturas.

Nessa situação, tem-se dois retângulos I e II com as seguintes dimensões:

- ✓ Retângulo I: comprimento 5 cm e largura 1,5 cm;
- ✓ Retângulo II: comprimento 2 cm e largura 0,6 cm.

Dizemos, portanto, que a razão de semelhança entre os retângulos I e II, nesta ordem é: $\frac{5cm}{2cm} = \frac{1,5cm}{0,6cm} = 2,5$.

4. Dois blocos retangulares serão semelhantes somente se as razões entre as três dimensões de um deles e as correspondentes dimensões do outro forem iguais.



Nessa situação, tem-se dois paralelepípedos (blocos retangulares) I e II com as seguintes dimensões:

- ✓ Paralelepípedo I: comprimento 4 cm, largura 3 cm e altura 2,5 cm;
- ✓ Paralelepípedo II: comprimento 2 cm, largura 1,5 cm e altura 1,25 cm.

Dizemos, portanto, que a razão de semelhança entre os paralelepípedos I e II, nesta ordem é: $\frac{2,5cm}{1,25cm} = \frac{3cm}{1,5cm} = \frac{4cm}{2cm} = 2$.

2.3.1 Homotetia

Em Matemática, a homotetia é uma transformação geométrica que preserva a forma e a proporção dos objetos. Conforme apresentado no tópico, faz parte do estudo da Semelhança, que envolve figuras que possuem a mesma forma, mas tamanhos diferentes.

Uma homotetia é uma ampliação ou redução de uma figura em relação a um ponto fixo chamado centro de homotetia. O fator de escala determina a quantidade pela qual a figura será ampliada ou reduzida. Esse fator é um número real positivo. Se o fator de escala for maior que 1, a figura será ampliada; se for menor que 1, será reduzida.

Durante uma homotetia, todos os pontos da figura original são deslocados ao longo de retas que partem do centro. A razão entre as distâncias dos pontos ao centro de homotetia é constante para a figura original e a imagem correspondente.

A homotetia é uma ferramenta útil em diversas áreas além da Geometria, a citar a física e a engenharia. Ela permite estudar propriedades proporcionais de figuras e objetos, bem como modelar transformações de escala em diferentes contextos.

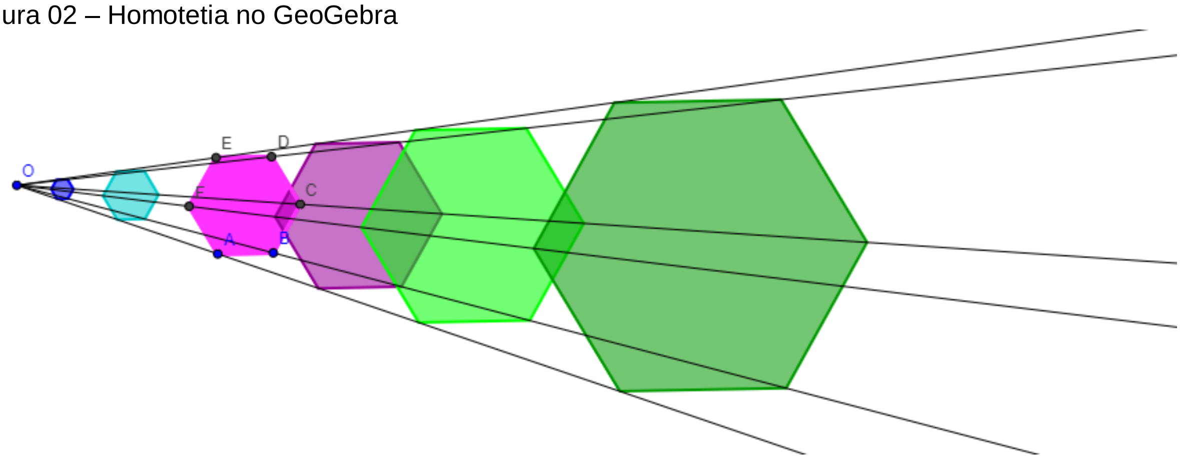
É importante destacar que a homotetia é uma das transformações que preservam a semelhança entre figuras geométricas, juntamente com a translação, a rotação e a reflexão. A translação envolve mover uma figura ou objeto de forma paralela, mantendo a mesma forma e tamanho, apenas deslocando sua posição no espaço. A rotação, por outro lado, gira uma figura em torno de um ponto central, modificando sua orientação, mas mantendo sua forma e tamanho. Já a reflexão espelha uma figura em relação a um eixo, criando uma imagem espelhada em relação à original. Essas transformações são fundamentais na Geometria e têm aplicações práticas em diversas áreas do conhecimento.

A seguir, apresentamos as instruções sobre como criar uma homotetia no

Geogebra[7]: (i) Abra o Geogebra e crie um novo arquivo; (ii) Para desenhar um ponto, clique na ferramenta "Ponto" na barra de ferramentas e clique em qualquer lugar na área de desenho para criar um ponto; (iii) Em seguida, clique na ferramenta "Círculo com centro e raio" e clique no ponto que você acabou de criar. (iv) Em seguida, arraste o cursor para criar o círculo; (v) Agora, clique na ferramenta "Homotetia" e selecione o círculo como objeto base. (vi) Em seguida, clique em um ponto como centro de homotetia e arraste o cursor para criar a homotetia.

A partir dessas instruções, pode-se ajustar a homotetia arrastando o ponto de centro de homotetia ou movendo o ponto de escala. Abaixo, tem-se uma representação após uma execução das instruções semelhantes às supracitadas.

Figura 02 – Homotetia no GeoGebra



Fonte: Site oficial geogebra.org.

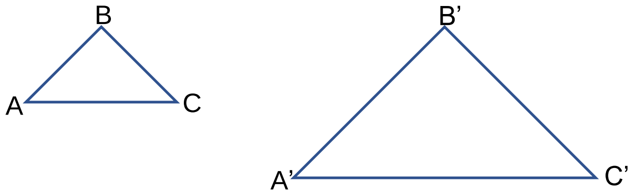
2.3.2 Semelhança de Triângulos

Nesta subseção, destacamos os casos específicos dos triângulos, pois entendemos ser um ponto de partida natural para o estudo da semelhança matemática devido à sua simplicidade, propriedades específicas e importância prática, e também porque servem como uma base sólida para conceitos geométricos mais complexos.

Os triângulos são polígonos, logo, a definição tratada anteriormente é válida também para eles. Assim sendo, pode-se afirmar que dois triângulos são semelhantes quando atendem, simultaneamente, às duas exigências: os lados correspondentes têm medidas de comprimento proporcionais e os ângulos correspondentes são congruentes.

[7] Software da matemática dinâmica que reúne geometria, álgebra e cálculo. Neste software, pode-se fazer construções das mais variadas formas do contexto da matemática.

Para ilustrar, tem-se as formas abaixo, as quais serão semelhantes quando, e somente quando, possuirmos:



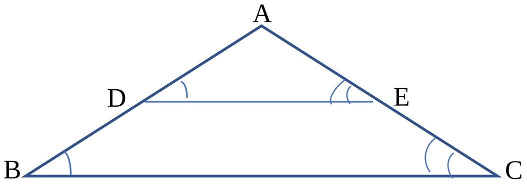
- ✓ $m(\hat{A}) = m(\hat{A}'); m(\hat{B}) = m(\hat{B}'); m(C) = m(\hat{C}');$
- ✓ $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$

Satisfeitas essas duas condições, dizemos que o par de triângulos representados são semelhantes e podemos indicar da seguinte forma: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

Ademais, no estudo de semelhança de triângulos, há um teorema muito importante, que é o Teorema Fundamental da Semelhança de Triângulos. Nele, enuncia-se o seguinte: *"Se traçarmos um segmento de reta paralelo a qualquer um dos lados de um triângulo e ficar determinado outro triângulo, então este será semelhante ao primeiro".*

A seguir, apresentaremos uma demonstração dessa propriedade adaptada da obra de Iezzi et al. (2015).

A figura mostra um triângulo *ABC*, e $\overline{DE}$ é um segmento paralelo ao lado $\overline{BC}$.

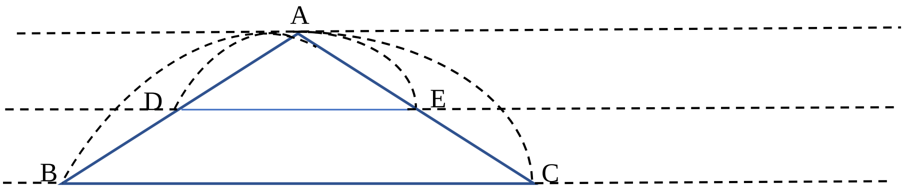


Observe os ângulos dos triângulos *ADE* e *ABC*. Do paralelismo de $\overleftrightarrow{DE}$ e $\overleftrightarrow{BC}$, temos: $\hat{D} \equiv \hat{B}\ e\ \hat{E} \equiv \hat{C}$

Então os triângulos *ADE* e *ABC* têm os seguintes pares de ângulos congruentes:

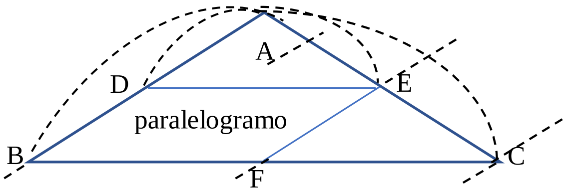
$$\hat{D} \equiv \hat{B}, \hat{E} \equiv \hat{C}\ e\ \hat{A}\ (comum) \qquad \boxed{1}$$

Sendo $\overleftrightarrow{DE} // \overleftrightarrow{BC}$ e aplicando o Teorema de Tales nas transversais $\overleftrightarrow{AB}\ e\ \overleftrightarrow{AC}$, temos:



$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \quad \boxed{2}$$

Pelo ponto *E*, vamos conduzir $\overleftrightarrow{EF}$, paralela a $\overleftrightarrow{AB}$.



Sendo $\overleftrightarrow{EF}//\overleftrightarrow{AB}$ e aplicando o Teorema de Tales, temos: $\frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC}$.

Mas $\overline{BF} \equiv \overline{DE}$, pois *BDEF* é um paralelogramo[8]; vamos então substituir *BF* por *DE* na igualdade anterior:

$$\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \quad \boxed{3}$$

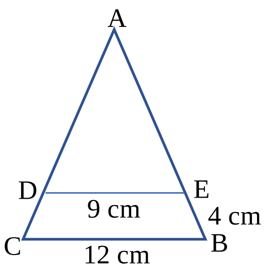
Comparando 2 e 3, resulta:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \quad \boxed{4}$$

Concluímos, assim, que os triângulos ADE e ABC têm ângulos congruentes (ver 1) e lados proporcionais (ver 4). Portanto, eles são semelhantes:

$$\Delta ADE \sim \Delta ABC$$

Situação 01: Na figura abaixo, sabendo que $\overline{DE}//\overline{AB}$, descobriremos as medidas dos segmentos $\overline{CB}$ e $\overline{CE}$.



[8] Quadrilátero com lados opostos paralelos, o que significa que seus lados opostos nunca se cruzam. A principal propriedade de um paralelogramo é que os lados opostos são iguais em comprimento e paralelos, e os ângulos opostos são congruentes. Além disso, os ângulos adjacentes (ângulos ao lado um do outro) em um paralelogramo também são suplementares, o que significa que a soma de suas medidas é igual a 180 graus.

Pelo Teorema, sendo $\overline{DE}//\overline{AB}$, temos $\Delta CDE \sim \Delta CAB$. Daí, tem-se:

$$\frac{CD}{CA}=\frac{CE}{CB}=\frac{DE}{AB}=\frac{9}{12}\rightarrow\frac{CE}{CB}=\frac{9}{12}\rightarrow\frac{CE}{CE+4}=\frac{9}{12}\rightarrow \boldsymbol{CE=12\ cm}$$

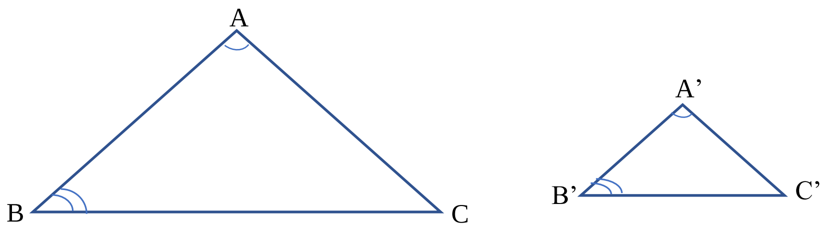
$$CB=CE+4=12+4=16\rightarrow \boldsymbol{CB=16\ cm}$$

2.3.2.1 Critérios de semelhança de triângulos

As demonstrações dos critérios deste tópico foram adaptadas da obra de Iezzi et al. (2015).

I. Se dois triângulos têm pares de dois ângulos respectivamente congruentes, então os triângulos são semelhantes. (AA: ângulo – ângulo)

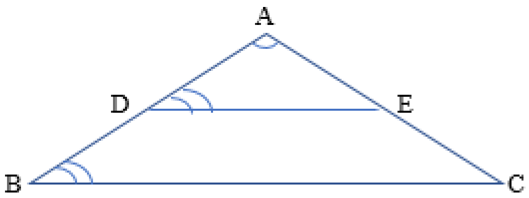
Observe os triângulos *ABC* e *A'B'C'*, com dois ângulos respectivamente congruentes $\hat{A}\equiv\widehat{A'}\ e\ \hat{B}\equiv\widehat{B'}$.



Se $\overline{AB}\equiv\overline{A'B'}$, então $\Delta ABC\equiv\Delta A'B'C'$ e, consequentemente, $\Delta ABC\sim\Delta A'B'C$.

Vamos supor que os triângulos não sejam congruentes e que $\overline{AB}$ > $\overline{A'B}$'. Tomemos D em $\overline{AB}$, de modo que $\overline{AD}\equiv\overline{A'B'}$, e por D vamos traçar $\overline{DE}//\overline{BC}$.

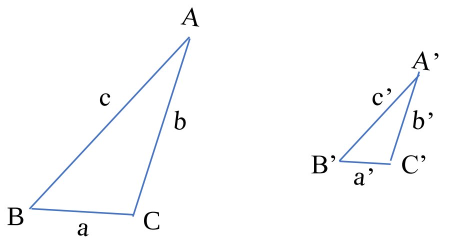
- ✓ Pelo caso de congruência ALA[9]: $\Delta ADE\sim\Delta A'B'C'$
- ✓ Pelo Teorema Fundamental: $\Delta ADE\sim\Delta ABC$
- ✓ Portanto, $\Delta A'B'C'\sim\Delta ABC$.



II. Se dois triângulos têm dois lados correspondentes proporcionais e os ângulos compreendidos são congruentes, então os triângulos são semelhantes. (LAL: lado – ângulo – lado)

---

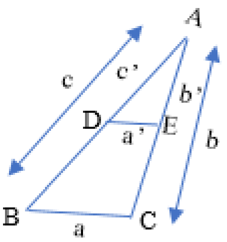
[9] Caso específico de congruência em que dois triângulos são congruentes se possuem dois ângulos correspondentes congruentes e o lado incluído entre esses ângulos congruentes é também congruente.



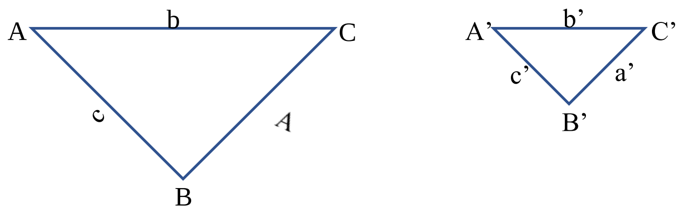
$$\begin{cases} \dfrac{c}{c'} = \dfrac{b}{b'} \to \Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \\ \hat{A} \equiv \hat{A} \end{cases}$$

Tomemos D em $\overline{AB}$, de modo que $\overline{AD} \equiv \overline{A'B'}$, e por D vamos traçar $\overline{DE}//\overline{BC}$. Note que:

- ✓ Pelo caso de congruência LAL[10]: $\Delta ADE \sim \Delta A'B'C'$
- ✓ Pelo Teorema Fundamental: $\Delta ADE \sim \Delta ABC$
- ✓ Portanto, $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$.



III. Se dois triângulos têm os lados correspondentes proporcionais, então os triângulos são semelhantes. (LLL: lado – lado – lado)

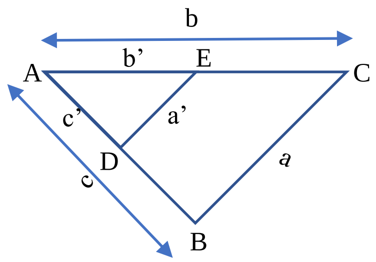


$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \to \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

Tomemos D em $\overline{AB}$, de modo que $\overline{AD} \equiv \overline{A'B'}$, e por D vamos traçar $\overline{DE}//\overline{BC}$.

Pela figura ao lado, notamos que:

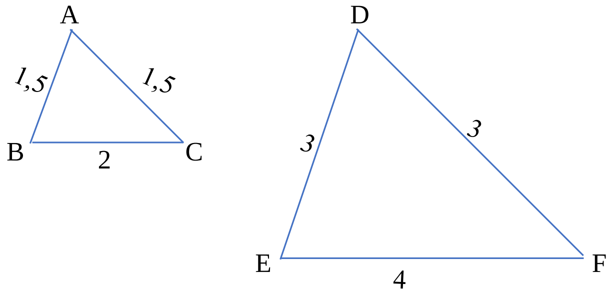
- ✓ Pelo caso de congruência LLL[11]: $\Delta ADE \sim \Delta A'B'C'$
- ✓ Pelo Teorema Fundamental: $\Delta ADE \sim \Delta ABC$
- ✓ Portanto, $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$.



[10] Caso específico de congruência de triângulos. Ele estabelece que dois triângulos são congruentes se possuírem: (1) Um ângulo correspondente (L): Um ângulo de um triângulo é congruente a um ângulo correspondente no outro triângulo; (2) Um lado (L) Um lado do primeiro triângulo é congruente a um lado correspondente no segundo triângulo; (3) Um ângulo correspondente (L): Outro ângulo do primeiro triângulo é congruente a outro ângulo correspondente no segundo triângulo. Se essas três condições forem atendidas, então os dois triângulos são congruentes pelo critério LAL.

[11] Caso específico de congruência de triângulos. Esse caso estabelece que dois triângulos são congruentes se todos os três lados de um triângulo são congruentes aos três lados correspondentes do outro triângulo.

Situação 02: Observe os triângulos abaixo.



Temos:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD} = \frac{1}{2}$$

Então, pelo critério LLL de semelhança, $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ e, portanto, $\widehat{A} \equiv \widehat{D}, \hat{B} \equiv \hat{E}\ e\ \hat{C} \equiv \hat{F}.$

3 A TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS (TRRS)

A Teoria dos Registros de Representações Semióticas foi desenvolvida pelo filósofo e psicólogo Raymond Duval (1995), a qual situa que, na atividade matemática, na mobilização dos seus objetos, a acessibilidade ocorre através de representações.

> As representações semióticas são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações os quais têm suas dificuldades próprias de significado e funcionamento. Uma figura geométrica, um enunciado em língua natural, uma fórmula algébrica, um gráfico são representações semióticas que exigem sistemas semióticos diferentes (DUVAL, 1993, p. 39).

Os signos e as representações são dois termos nucleares dessa teoria. De maneira geral, podemos chamar de signos os movimentos que fazemos com nossas mãos, letras, números, siglas. Classifica-se como representações os conjuntos desses signos, quais sejam: operações matemáticas com algarismos provenientes de um conjunto de número; equações, que contêm um conjunto de letras e números, bem como outros sinais.

No que se referem às representações, Duval (1993) sintetiza que são conjuntos de signos com regras bem definidas. Para ele, essas representações estão ligadas às questões epistemológicas do objeto, que, de forma geral, trata de tudo a que esse objeto se refere, desde o seu surgimento, perpassando pelos obstáculos e pelo conhecimento sobre ele em si. Está também ligado às representações o funcionamento cognitivo do pensamento, que, segundo Duval, “se revela inseparável da existência de uma diversidade de registros de representação semiótica” (1993, p. 39).

As representações semióticas contribuem para o desenvolvimento de três elementos importantes para o indivíduo: o desenvolvimento das representações mentais, a realização de diferentes funções cognitivas e a produção de conhecimentos.

Segundo Duval, o desenvolvimento das representações mentais envolve a construção gradual de diferentes formas de representação que os indivíduos utilizam para compreender e resolver problemas matemáticos.

Duval (2011) propôs três estágios principais nesse desenvolvimento. O primeiro estágio é o das representações perceptivas, onde as crianças utilizam objetos concretos e suas características visuais para resolver problemas. O segundo estágio é o das representações figural-simbólicas, em que as crianças começam a usar símbolos, como desenhos ou diagramas, para representar informações e relações matemáticas.

No terceiro estágio, chamado de representações discursivas-simbólicas, os indivíduos utilizam símbolos verbais e escritos para representar conceitos e resolver problemas matemáticos. Nesse estágio, a linguagem desempenha um papel fundamental na organização e expressão das ideias matemáticas.

O elemento desenvolvimento das representações mentais de Duval destaca a importância da progressão gradual e contínua na aprendizagem matemática, permitindo que os estudantes avancem de estágios mais concretos para formas mais abstratas de representação.

No contexto da execução de várias funções cognitivas, as representações semióticas desempenham um papel fundamental, atuando como ferramentas de objetivação. Em outras palavras, as representações semióticas possuem uma linguagem própria, permitindo que um indivíduo as interprete de maneira única, o que difere do simples ato de comunicação.

No que se refere à produção de conhecimento, as representações semióticas desempenham um papel crucial, pois capacitam o indivíduo a analisar um objeto através de múltiplos registros, oferecendo diversas perspectivas para representar o referido objeto. Esse processo de análise multidimensional possibilita uma compreensão mais profunda e rica do objeto em questão.

3.1 Registros de Representações Semióticas

A expressão Registro de Representação Semiótica é utilizada para indicar os variados tipos de representações, a exemplo da língua materna, do registro algébrico, figural, gráfico e numérico. Esses registros se associam através de uma coordenação, que servirá para gerar uma inter-relação entre eles.

Conforme Raymond Duval, para um sistema semiótico ser um registro de representação, deve permitir as três atividades cognitivas ligadas à semiose[12]. São elas: a formação de uma representação identificável, o tratamento e a conversão. A

[12] Para Raymond Duval, a semiose refere-se ao processo de produção e interpretação de signos, ou seja, de representações simbólicas que carregam significados. Duval considera que a semiose é fundamental para a construção e comunicação do conhecimento. De acordo com sua perspectiva, a semiose ocorre em diferentes níveis de representação mental, desde os níveis mais concretos até os mais abstratos.

formação de uma representação identificável diz respeito à seleção de relações e dados no conteúdo a apresentar. Ao escolher a língua natural para representar um determinado conceito, devem-se respeitar as regras gramaticais que a língua possui. Assim, faz-se necessário obedecer à linguagem das funções sintáticas ou semânticas de qualquer representação.

O tratamento de uma representação é uma transformação interna a um registro, isto é, a transformação com os mesmos significados, por exemplo: Quando solucionamos uma equação de 1º grau para encontrar o valor numérico da incógnita, geralmente estamos realizando um tratamento, pois a mobilização cognitiva acontece dentro de um mesmo sistema de significado.

A conversão é a transformação de um registro de representação em outro tipo de registro de representação, isto é, um mesmo objeto matemático pode ser convertido em mais de um registro de representação. Por exemplo: o triplo de um número resulta em seis, sendo representado pela forma algébrica $3x = 6$. Aqui são utilizados dois tipos de representação: língua natural e forma algébrica, isto é, há uma conversão de um tipo de representação em outro.

A seguir, apresenta-se o quadro da classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático proposto por Raymond Duval. Essa é uma ferramenta fundamental para compreender como os indivíduos podem abordar e representar conceitos matemáticos de maneiras diversas. Duval (1998) identifica cinco registros mobilizáveis: o registro de ação, o registro de objeto, o registro de imagem, o registro de palavras e o registro de símbolos. Cada registro representa uma forma específica de representação e pensamento matemático, abrangendo desde manipulações concretas até abstrações simbólicas. Essa classificação oferece uma base teórica sólida para entender a diversidade de estratégias e linguagens utilizadas na resolução de problemas matemáticos, facilitando o ensino e a aprendizagem da disciplina.

Duval (2003, p. 14) classifica os Registros de Representações Semióticas em quatro grupos, como se apresenta no Quadro 01 a seguir. Por conseguinte, é importante entendermos, para a introdução do quadro, que os registros multifuncionais apresentam tratamentos de forma não algorítmica, ao mesmo tempo que os registros monofuncionais são formados a partir de algoritmos e cálculos. Além do mais, os registros multifuncionais têm como representação discursiva a língua natural, manifestando-se por associações verbais, enquanto os registros monofuncionais têm os sistemas de escritas numéricas e os cálculos. Por outro lado, na representação não-discursiva, os registros multifuncionais apresentam-se como figuras geométricas planas e espaciais, enquanto os monofuncionais estão nos gráficos cartesianos com mudanças de sistemas de coordenadas.

Quadro 01: Quadro da classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático.

	Representação Discursiva	**Representação não- discursiva**
Registros Multifuncionais	Língua Natural. Associações verbais (conceituais). Forma racional: argumentação a partir de observações, de crenças [...]; dedução válida a partir de definições ou uso de teoremas.	Figuras geométricas planas ou em perspectiva. Apreensão operatória e não somente perspectiva; Construção com instrumentos.
Registro Monofuncionais	(binárias, decimal, fracionária [...]); algébricas; simbólicas (línguas formais). Cálculo.	Gráficos cartesianos. Mudanças de sistema de coordenadas; Interpolação, extrapolação.

Fonte: Duval (2003, p.14).

As várias maneiras de representar impulsionam as ações do pensamento do sujeito, a auxiliar no aperfeiçoamento das representações mentais, na efetivação de funções cognitivas diversas e, consequentemente, na apropriação do conhecimento. Essas maneiras mostram o significado atribuído por cada aluno a um conceito matemático, à medida que novos objetos de conhecimento são construídos.

Na compreensão de um objeto, evidenciá-lo de várias formas é imprescindível para sua apreensão, pois “a originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo momento de registro de representação” (DUVAL, 2003, p. 14).

Além disso, é importante não confundir as representações entre cada registro no estudo de um objeto. Por exemplo, a visibilidade que um indivíduo tem de uma função afim no registro algébrico é diferente da visualização que ele tem no registro gráfico. No registro gráfico, a representação gráfica é uma reta, e no registro algébrico, a sua representação algébrica é dada por um polinômio de primeiro grau atrelado a uma outra variável y.

Nesse sentido, ilustraremos abaixo uma coordenação de três registros de representações do objeto matemático função quadrática.

Ao enunciar o exercício “Considere a lei de formação da função do 2º grau a seguir, com domínio real, encontre suas raízes e faça seu esboço gráfico no plano cartesiano”, tem- se uma representação da situação em Língua Materna.

Figura 03 - Representação da função f(x) = x² + x – 2 no Registro Algébrico.

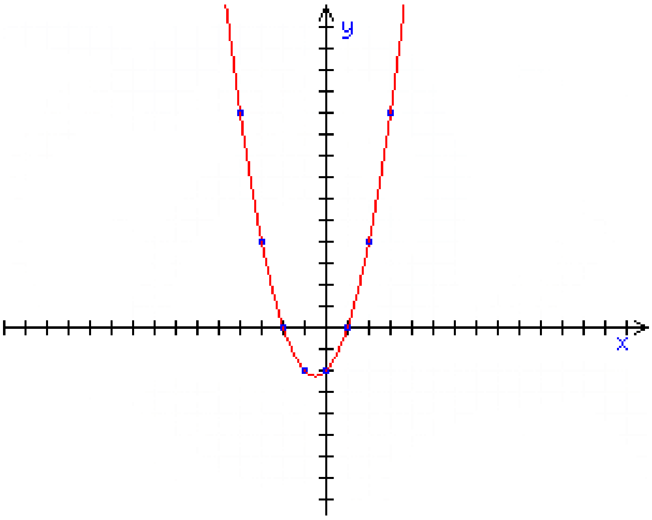
$$f(x) = x^2 + x - 2$$

$$f(x) = 0 \rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow (x-1)(x+2) \rightarrow$$

$$\rightarrow x = 1 \; ou \; x = -2 \; (Raízes\ reais)$$

Fonte: Acervo do pesquisador.

Figura 04 - Representação da função f(x) = x² + x – 2 no Registro Gráfico.

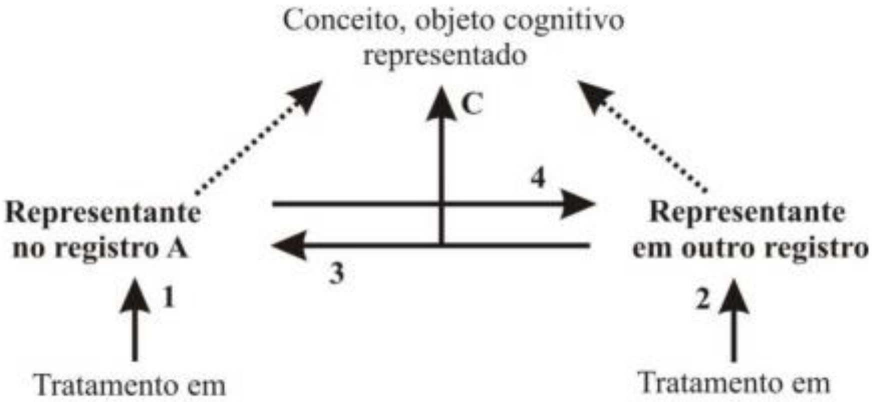


Fonte: Acervo do pesquisador.

Apresentar a compreensão de um objeto matemático fazendo uso de um exemplo de representação proporciona aos estudantes mobilizar operações cognitivas que foram e estão sendo observadas durante o recurso de aprendizagem formal ou informal. Modificá-lo para outro tipo de registro é um obstáculo que pode ser superado no decorrer do processo de aprendizagem, visto que as mobilizações cognitivas requerem do estudante a noção que estão sendo produzidas no decorrer de sua vida escolar, aspecto que leva em conta suas experiências e vivências extra colegial.

Nesse contexto, tem-se modelo da representação centrado sobre a função da objetivação proposto por Raymond Duval, que é uma abordagem que busca compreender como os conceitos matemáticos são construídos e internalizados pelos estudantes. Segundo Duval, a objetivação é um processo pelo qual os conceitos matemáticos são transformados em objetos externos, como símbolos, diagramas ou representações gráficas. Esses objetos são então manipulados e operados pelo estudante, permitindo a construção de significados e a apropriação dos conceitos. O modelo enfatiza a importância de criar conexões entre diferentes registros e modos de representação, favorecendo a compreensão e a generalização dos conceitos matemáticos.

Figura 05 – Modelo da representação centrado sobre a função da objetivação.



Fonte: Raymond Duval (2009, p. 89).

Na estrutura acima, as setas 1 e 2 representam as transformações internas a um registro e as setas 3 e 4 as transformações externas, ou seja, modificação de registro por conversões. Quando admite a coordenação dos dois registros, a seta C representa o entendimento inteiro de uma representação.

3.2 Congruência de duas representações na TRRS

Na TRRS, a congruência de duas representações semióticas, conforme proposto por Raymond Duval, refere-se à correspondência e coerência entre diferentes formas de representar e compreender um mesmo conceito ou objeto matemático. Duval argumenta que a congruência é fundamental para uma compreensão sólida e profunda da Matemática, pois permite que os estudantes articulem diferentes formas de representação, como símbolos, palavras, gráficos e diagramas. Quando as representações são congruentes, ou seja, estão consistentes entre si, os estudantes são capazes de estabelecer conexões mais significativas e transferir seu conhecimento para novas situações matemáticas.

A articulação de registros é um ponto fundamental do processo de ensino e aprendizagem, pois ensina o estudante a distinguir conceitos de suas representações, visto que sua dificuldade não é corrigida de imediata. A ocorrência dessa dificuldade se dá por que os discentes não conseguem identificar um próprio objeto em variados registros de representação e por que a ação envolve acontecimentos de não-congruência e de dessemelhança das ideias de conversão, através de conceitos de particularidades das compatibilizações das peças significantes de partida e de chegada.

Duval (2009, p. 06) afirma que, para definir se duas representações são congruentes ou não, “é preciso começar por segmentá-las em suas unidades significantes respectivas, de tal maneira que elas possam ser colocadas em correspondência”.

É normal, segundo o autor, a conversão ser vista, ainda que de forma equivocada, como uma junção de palavras e imagens, tornando-se uma configuração mais descomplicada de tratamento. De acordo com Duval (2003), as dificuldades encontradas na conversão das representações podem influenciar na apreensão do conceito matemático de que se trata. Para o autor, a depender do fenômeno de congruência das conversões, essas poderão ser mais compreensíveis ou não.

Com a finalidade de validar o fenômeno de congruência, Duval indica três condições:

(1) Correspondência semântica dos elementos significantes: “a cada unidade significante simples de uma das representações, pode-se associar uma unidade significante elementar” (2009, p. 68).

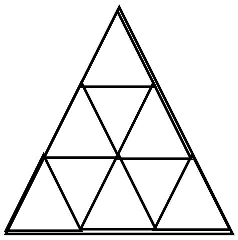
(2) Univocidade semântica terminal: “a cada unidade significante elementar da representação de partida, corresponde uma só unidade significante elementar no registro de representação de chegada” (2009, p. 69).

(3) Correspondência na ordem da organização das unidades compondo cada uma das duas representações: “é pertinente apenas quando estas apresentam o mesmo número de dimensão. (...) Esse critério é importante quando se trata de comparar frases e fórmulas literais” (2009, p. 69).

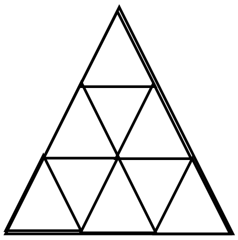
Segundo Duval (2009, p. 69), se uma dessas três condições supracitadas não for realizada, a conversão não será congruente. O autor afirma que “(...) naturalmente, pode haver correspondência para nenhum desses três critérios, para dois ou somente para um”, justificando, pois, que a não-congruência entre duas representações pode ser maior ou menor.

Isto posto, apresenta-se duas situações de conversão para um melhor entendimento, essas que estão disponíveis em Duval (2009).

Situação 01: Quantos triângulos você aponta na seguinte figura?



Situação 02: Quantas e quais as formas geométricas que você aponta na seguinte figura?



Explorando as situações supracitadas, verificamos que a situação 1 é congruente, visto que há correspondência semântica entre a imagem e o que se pede na situação, não existindo termos ou manifestações que causariam confusão para o leitor. Observemos também a univocidade na representação de partida e chegada, assim como uma organização nelas.

Na situação 2, dispomos de uma ocorrência de não-congruência, uma vez que ela é capaz de provocar uma compreensão equivocada da situação, como, a título de exemplo, reconhecer somente os triângulos, mesmo a situação sugerindo diferentes figuras.

Duval (2009) faz uma associação entre o fenômeno de congruência nas conversões e o êxito dos sujeitos na execução de ações em matemática. Conforme o autor, na ocasião em que a conversão é congruente, as dificuldades são logo resolvidas pelos discentes, ao mesmo tempo em que numa conversão não-congruente, o índice de sucessos dos discentes é baixo.

Além disso, Duval (2009) acrescenta que os problemas apresentados numa conversão não-congruente têm potencial de se agravarem com a falta de conhecimento dos registros de representação. Dessa maneira, apoiados nas três condições de congruência empregadas por Duval, apresentamos os níveis de congruência de uma conversão discutidos por Silva, Vertuan e Almeida (2009).

Quadro 02: Níveis de congruência para uma conversão.

	Níveis de Congruência	**Condições a serem satisfeitas pela Conversão**
1	Alto	• As três condições de congruência de Duval estão satisfeitas; • Para o sujeito que realiza a conversão, o objeto matemático em estudo é algo que, de algum modo, pode ser compreendido por ele; • O registro de chegada, de alguma forma, transparece o registro de saída. Em geral, corresponde a uma simples atividade de codificação para quem executa.
2	Intermediário	• As três condições de congruência de Duval estão satisfeitas; • O sujeito que realiza a conversão precisa utilizar conhecimentos matemáticos mais avançados e não somente realizar uma atividade de codificação; • O registro de chegada apresenta características e propriedades que transparecem o registro de saída. Em geral, um tipo de registro deixa transparecer um outro tipo de registro quando o sujeito é familiarizado com o objeto em estudo.
3	Baixo	• As três condições de congruência de Duval estão satisfeitas; • A natureza dos registros de representação é diferente, o que pode tornar a conversão mais complexa; • Há uma necessidade de realizar algumas alterações em um dos registros de representação para que o registro de chegada deixe transparecer o registro de saída. Em geral, o sujeito deve apresentar um registro em que haja a sinalização de que a conceptualização do objeto matemático estudado pode não ter sido atingida, ainda que a conversão entre os registros corresponda a uma conversão congruente.

Fonte: Produção do pesquisador a partir do texto de DA SILVA, K. A. P.; VERTUAN, R. E.; DE ALMEIDA, L. M. W, 2009, p. 04-05.

Conforme Silva, Vertuan e Almeida (2009), os níveis de congruência para uma conversão podem ser classificados como alto, intermediário e baixo. Assim sendo, apoiados nessa classificação, podemos, em resumo, afirmar que: (i) no nível de congruência alto, há uma correspondência estreita e consistente entre os registros utilizados, facilitando a compreensão e a transferência de conhecimento entre eles; (ii) no nível intermediário, a congruência é parcial, com algumas discrepâncias ou inconsistências, o que pode requerer esforço adicional para a interpretação e conexão entre os registros; (iii) e no nível de congruência baixo, há uma falta significativa de correspondência e coerência entre os registros, dificultando a compreensão e a transferência de conhecimento. Essa classificação dos níveis de congruência, portanto, ajuda a avaliar a eficácia e a qualidade das conversões entre registros em termos de sua consistência e compatibilidade.

3.3 Pesquisas no Brasil que tratam da TRRS no Ensino de Geometria

Relativamente ao Ensino de Geometria, Duval (2011) diz que seu aprendizado corresponde a uma atividade cognitiva própria, que não se encontra associada com o ambiente no qual reside e não decorre de influências características de um elemento. Continuadamente, as formas conseguem trazer dificuldades para a sua compreensão, uma vez que têm de estarem aproximadas da reprodução figural.

As conjecturas de Duval (2003) no tocante à Geometria apontam que é um espaço da Matemática que pede insistência, visto que provoca tanto a linguagem, quanto o gesto e o olhar. Pesquisas baseadas na teoria desse autor revelaram sua importância na formação de docentes, na formação e compreensão de conceitos matemáticos, na organização dos conhecimentos que explicitam a Matemática e, principalmente, no aprendizado dos alunos ao estudar os objetos matemáticos.

Entre os meses de março e abril de 2022, realizamos um levantamento na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), com o objetivo de identificar trabalhos, da área de Ensino de Geometria, que trouxessem, em sua abordagem, a TRRS. Restringimos essa busca aos últimos dez (10) anos com os seguintes filtros: (i) registros de representações semióticas e (ii) Geometria. Abaixo, tem-se um quadro com as seguintes especificações de oito (08) dessas pesquisas de mestrado (dissertação): metodologia da pesquisa, conteúdo matemático trabalhado, etapa escolar da educação básica – aqui, adotaremos a abreviação E.F. para os Anos Finais do Ensino Fundamental e a E.M. para o Ensino Médio –, resultados da pesquisa e pontos levantados da TRRS.

.

Quadro 03: Resumo das pesquisas observadas.

Metodologia da Pesquisa – Autor – Ano	**Conteúdo Matemático Trabalhado – Tipo de Mestrado**	**Etapa Escolar**		**Resultados da Pesquisa**	**Pontos levantados da TRRS**
		E.F.	**E.M.**		
Investigação qualitativa. CRUZ, José Laelson Gomes. 2018.	Semelhança de Polígonos. Mestrado Profissional.		X	Os resultados da pesquisa permitiram compreender que o entendimento dos conceitos de objetos matemáticos começa, somente, no momento em que o aluno é capaz de mobilizar e coordenar, de forma espontânea ou provocada, nas aulas de Matemática, em	Tratamento e conversão entre os registros a partir de atividades de uma sequência didática.

				registros diferentes, as representações de um mesmo objeto matemático.	
Investigação qualitativa do tipo pedagógica. DE SOUSA, Zuleide Ferreira. 2016.	Polígonos e Poliedros. Mestrado Acadêmico.	X		Os resultados apontaram para o destaque dos significados mais notáveis, as compreensões dos educandos sobre os objetos estudados e a verificação de relação entre os significados apresentados e o emprego dos registros de representações semióticas.	Tratamento e conversão entre os registros a partir da construção, com materiais manipuláveis, de uma sequência didática.
Engenharia Didática. DE ASSUMPÇÃO, Paula Gabrieli Santos. 2015.	Perímetro e Área de Polígonos. Mestrado Profissional.	X		Percebeu-se um aprimoramento dos seus processos visuais em relação à exploração heurística das figuras geométricas. Permitindo a estes, uma melhor percepção na forma de interpretarem as representações geométricas envolvidas.	Tratamento a partir de uma sequência didática no GeoGebra.
Qualitativa/ Engenharia Didática. HALBERSTADT, Fabrício Fernando. 2015.	Geometria Analítica. Mestrado Profissional.		X	Os resultados apontaram para a consolidação do reconhecimento dos objetos abordados nos seus diferentes registros de representação semiótica, condição prioritária para a sua compreensão.	Operações com diversidades de registros trazidos no desenvolvimento de atividades de uma sequência didática.
Qualitativa. ARCEGO, Priscila. 2017.	Área do Círculo. Mestrado Profissional.	X		Concluiu-se que todas as apreensões foram mobilizadas, mantendo a prevalência da perceptiva, mas com aumento expressivo da discursiva e da operatória.	Apreensão operatória e perspectiva a partir de desenvolvimento de atividades de uma sequência didática.
Qualitativa/ Pesquisa-ação. OKAEDA, Micarlla Priscilla Freitas da Silva. 2017.	Triângulos. Mestrado Profissional.	X		Conclui-se que houve efetiva aprendizagem e que, de fato, as aulas se tornaram mais dinâmicas, facilitando todo o processo.	Tipos de representações a partir da produção de histórias em quadrinhos (HQ).
Qualitativa e exploratória. NOVAK, Franciele Isabelita Lopes. 2018.	Pirâmides. Mestrado Profissional.		X	Os resultados apontaram que as atividades contribuíram para revisar conceitos básicos de geometria, para a construção e compreensão de novos conceitos, na visualização do objeto em diferentes formas de representação.	Tipos de representações a partir de uma sequência de atividades no GeoGebra 3D.
Engenharia Didática.	Trigonometria no Triângulo Retângulo.		X	Na análise dos resultados constatou-se que foi viabilizada aos alunos a	Coordenação de representações semióticas e

BERLANDA, Juliane Carla. 2017.	Mestrado Profissional.			aquisição de conhecimentos relativos ao estudo de trigonometria no triângulo retângulo.	análise de apreensões perceptivas, discursivas e operatória oportunizada pelos recursos do GeoGebra.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023, a partir de pesquisa na BDTD.

Nesse levantamento, observou-se que sete (07), das oito (08) pesquisas analisadas, utilizaram sequências de atividades referentes a conteúdos de Geometria, e foram produzidas à luz da TRRS, para buscar, em sua totalidade, amenizar obstáculos encontrados por discentes do Ensino Básico, produzindo aprendizados através de sequências didáticas e de aprendizagens.

Nessa perspectiva, Duval afirma que "o desenvolvimento das representações semióticas foi a condição essencial para a evolução do pensamento matemático" (2003, p.13). Acredita-se que todo objeto tem um meio característico de representação carregado de ideias, por esse motivo é indispensável explorar e debater os variados sistemas de representação nos diferentes contextos, assim como se apresenta num trabalho a partir de sequências didáticas.

Ademais, quando relacionamos os processos fundamentais da TRRS no que se refere à Geometria, percebemos ações que se relacionam e dialogam com a nossa pesquisa: uma ação relativa aos tratamentos figurais e outra relativa aos tratamentos discursivos. Para Duval (1993), a Geometria depende da coordenação simultânea dessas duas ações.

Duval (2003) afirma que o desenvolvimento das representações semióticas foi uma circunstância fundamental para a otimização do pensamento matemático. Quer dizer, os tipos de representações foram utilizados para demonstrar o próprio pensamento matemático.

> Os registros de representação são elementos constitutivos da ciência matemática, e é através deles que são definidos os vários tratamentos que podem ser empregados no estudo dos objetos matemáticos, daí não podermos deixar de reconhecer a importância dos registros para a construção do conhecimento, considerando os conteúdos específicos que cada representação tem (PANTOJA; CAMPOS; SALCEDOS, 2013, p. 04).

Para Arcego (2017), a Matemática generalizou-se através de registros e representações que acabaram modificando-se conforme seu progresso. Nesse contexto, as teorias das representações desempenham uma função primordial nas aprendizagens, logo utilizá-las para fortalecer o ensino de objetos matemáticos é o que orienta Duval. Abaixo, contextualizamos com uma citação de Moretti (2002, p. 345) para melhor explanar:

> Em Matemática esta separação é fundamental. Por exemplo: 1, 3-2, 4/4, e 5^0 referem-se ao mesmo número, ao mesmo objeto matemático, a mesma referência. No entanto, o objeto nestas distintas representações, não possuem o mesmo significado operatório. Um aluno, por exemplo, pode reconhecê-lo em 3-2, mas não pode fazer o mesmo em 5^0 e 4/4.

As possibilidades que as representações têm ao simbolizar um mesmo conceito matemático são muitas e os subsídios que as leituras dessas pesquisas trouxeram apontam para isso e estão em conversação com o nosso estudo.

3.4 A TRRS e o Ensino de Geometria

A respeito do Ensino de Geometria, Duval (2011) destaca os meios cognitivos exigidos nesse espaço que ocupam as próprias funcionalidades epistemológicas: raciocínio, visualização e construção.

O raciocínio, enquanto recurso do discurso, coordena para a evidência e para a justificação. Além disso, Duval (2011) afirma que a construção de configurações é capaz de ser trabalhada por meio de um padrão em que as atividades executadas, da mesma forma que os resultados considerados, relacionam-se aos conteúdos matemáticos significados.

A visualização é compreendida na qualidade de uma investigação de uma circunstância abstrata. Nessa representação, revelam-se quatro possibilidades de observação de figuras na resolução de problemas: sequencial, discursiva, perceptiva e operatória.

A apreensão sequencial é expressamente requerida em trabalhos de produção ou de exposição em que o objetivo é a representação de uma figura geométrica. Na resolução de problemas de Geometria, todas as apreensões estão presentes, mas, conforme a qualidade do problema, algumas são mais exigidas do que as demais.

A apreensão discursiva tem associação com a compreensão dos componentes da figura geométrica. Normalmente, decorre da forma que a afirmação trata o objeto geométrico ali posto e suas possibilidades, mas também consegue relacionar-se com as características do citado objeto. Ademais, ela pode ser vista como uma conjectura da representação figural.

A apreensão perceptiva encontra-se associada aos problemas geométricos que tratam dos modos de ver as figuras e, a partir disso, compreender as características que as constituem.

Por último, tem-se a apreensão operatória, que está centralizada nas prováveis variações de uma figura e nas reestruturações que essas modificações possibilitam.

Apesar de Duval (2011) descrever separadas as três atividades cognitivas – a formação de uma representação identificável, o tratamento de uma representação e conversão –, acredita-se que elas, envolvidas em colaboração, sejam fundamentais para a compreensão de Geometria.

Conforme a TRRS, as características exclusivamente qualitativas são vistas como a primeira análise crítica no aprendizado de Geometria. Por consequência, associam-se ao modo de ensinar, que também é visto como algo abstrato, mas fundamental na apreensão de um objeto de Geometria.

Para Duval (2011), essas características estão consolidadas no entendimento do sujeito. O autor reitera que conceitos de Geometria permanecem colocados no currículo escolar numa perspectiva moderada, não considerando esses entendimentos. Para melhor analisar essas concepções, ele acredita que, no ensino de Geometria, as figuras precisam de uma boa diversidade de atividades que tratem, entre outros, dos seguintes aspectos: observação, construção, reprodução, definição e descrição.

Além disso, Duval (2011) cita as adversidades apontadas pelos discentes nas avaliações e, buscando contorná-las, considera importante o reconhecimento da percepção geométrica, que se apoia na compreensão do lugar a sua volta e suas definições, especificamente: figuras, desenhos, plantas, imagens e mapas.

Percebe-se que a compreensão é um fator essencial para entender a Geometria. Contudo, é também considerada na TRRS que a compreensão determina um modo habitual de enxergar que, em algumas ocorrências, confundem os dois modos que são exigidos na compreensão de Geometria: (i) está centralizada na criação de figuras usando materiais; (ii) centraliza-se na incumbência de fazer descobertas, que possibilita a aparição de novos significados não vistos num primeiro momento.

A transição entre essas diferentes maneiras de visualização, embora desafiadora para os alunos, revela-se um elemento fundamental no processo de compreensão geométrica. Ao explorar as perspectivas prática e teórica, os discentes são incentivados a explorar as nuances das formas geométricas sob múltiplas lentes. A desconstrução das formas apenas pela dimensão adiciona um nível adicional de complexidade a essa jornada. Ao dominar a habilidade de discernir formas tridimensionais por meio de projeções bidimensionais e, em seguida, reconstruí-las mentalmente, os alunos não apenas ampliam seu conhecimento em Geometria, mas também desenvolvem uma capacidade analítica mais profunda, abrindo caminho para uma apreciação mais completa das complexidades geométricas em nosso mundo tridimensional. Portanto, embora desafiador, esse processo de transição e integração das diferentes maneiras de visualizar contribui para uma compreensão mais completa e abrangente da Geometria.

4 ASPECTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

Nesta seção, será apresentado o percurso metodológico da pesquisa, sua abordagem, o tipo de pesquisa, os sujeitos envolvidos e os procedimentos tomados em seu decorrer.

4.1 Pesquisa qualitativa numa modalidade diagnóstica

A metodologia escolhida foi de abordagem qualitativa. Esta abordagem permitiu ao pesquisador estar diretamente em contato com o local em que os dados foram coletados. Ofereceu condições para observar e analisar ações, pensamentos expressos, representações, emoções e qualquer tipo de movimento que esteve ligado ou influenciou a coleta de dados ou os sujeitos envolvidos.

> A pesquisa qualitativa não procura enumerar e/ou medir os eventos estudados, nem emprega instrumental estatístico na análise dos dados. Parte de questões ou focos de interesses amplos, que vão se definindo à medida que o estudo se desenvolve. Envolve a obtenção de dados descritivos sobre pessoas, lugares e processos interativos pelo contato direto do pesquisador com a situação estudada, procurando compreender os fenômenos segundo a perspectiva dos sujeitos, ou seja, dos participantes da situação em estudo (GODOY, 1995, p. 58).

A pesquisa qualitativa se refere a uma ocupação do conhecimento que busca a estruturação da prática e dá importância às ideias primordiais em uma categoria de realidade que não é capaz de ser calculada ou analisada apenas estatisticamente. Consequentemente, baseia-se em concepções, crenças, normas e distintas representações.

A nossa pesquisa se caracterizou como qualitativa numa modalidade diagnóstica. Esta modalidade de pesquisa pôde oferecer subsídios a futuros trabalhos de intervenção, uma vez que nos possibilitou uma boa visão de uma situação específica, o que nos capacitou a efetivar uma pesquisa de intervenção mais aperfeiçoada, posteriormente.

Pesquisas diagnósticas costumam ser realizadas por órgãos governamentais, como é o caso do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), com amplitude nacional, e do Sistema Estadual de Avaliação da Educação da Paraíba (Avaliando IDEPB), com amplitude estadual. Ambos os tipos de pesquisa são importantes e trazem imensas contribuições para a Educação. Essas pesquisas possuem um foco em avaliar o sistema educacional brasileiro e o sistema educacional paraibano, respectivamente.

Assim sendo, no contexto da abordagem qualitativa de pesquisa do tipo diagnóstica ora apresentado, os sujeitos envolvidos no estudo foram alunos que frequentam as salas de aula das primeiras séries do Ensino Médio de uma Escola Pública de Santa Luzia, na Paraíba.

4.2 O campo e os sujeitos da pesquisa

A pesquisa aconteceu na Escola Cidadã Integral Técnica Padre Jerônimo Lauwen (Santa Luzia). A escolha dessa se deu a partir da logística de transporte para o pesquiador, uma vez que reside na região e conhece a instituição, possibilitando um melhor acesso e, consequentemente, a concretização da pesquisa. Por sua vez, a escolha pela etapa de ensino passou por reflexões acerca da necessidade da pesquisa em buscar por alunos que previsivelmente estudaram um esboço de conceitos de semelhança na série anterior – nono ano do Ensino Fundamental.

Além disso, houve um contato inicial com o professor que ministra a disciplina de Matemática nas primeiras séries dessa escola, no sentido de que houvesse uma alteração em seu plano anual de ensino para que o período da pesquisa não coincidisse com o momento em que os alunos estivessem a estudar os conceitos de Semelhança Matemática na disciplina, com o que o profissional concordou.

Buscou-se abranger um total de quatro (04) turmas para enriquecer e diversificar ainda mais o nosso material, não limitando somente a um pequeno grupo.

4.3 O Percurso da Pesquisa

Na escola campo de pesquisa, inicialmente, foi feita uma apresentação da pesquisa para todo o alunado da escola, e o pesquisador apresentou o seu trabalho e as etapas da intervenção em sala de aula.

Em seguida, aplicou-se o instrumento de pesquisa que contempla o objetivo geral e um dos objetivos específicos da nossa pesquisa – "*Identificar os possíveis obstáculos que dificultam o entendimento do conceito de Semelhança Matemática".* Além disso, enxergou-se, nesse instrumento, o ponto norteador para desenvolvermos a sequência didática do nosso estudo.

Após aplicação do instrumento, analisamos os dados de maneira descritiva, buscando investigar e descrever as respostas e, posteriormente, buscamos contemplar os perfis pesquisados com a sequência que veio a ser desenvolvida. Nesse contexto, pôde-se analisar os (i) Níveis de compreensão de semelhança matemática – associando ao cotidiano; (ii) a compreensão de ampliação e redução; (iii) Erro e acerto; (iv) Análise de respostas – tratamentos e conversões; (v) Associação entre erros e registros produzidos.

Coletados e analisados os dados, partimos para produção da sequência didática, que é o produto final da pesquisa. Estes foram os pontos da sequência didática, que, por sua vez, divide-se em sete (07) aulas: (i) Jornada Histórica da Semelhança Matemática: Da Antiga Grécia à Modernidade, (ii) Introdução à Semelhança Matemática, (iii) Razão e Proporção, (iv) Teorema Fundamental de Semelhança; (v) Aplicações de Semelhança, (vi) Semelhança de Triângulos e (vii) Revisão e Avaliação.

É importante ressaltar que a sequência didática da nossa pesquisa estará disponível para todos os professores de Matemática da Educação Básica. Após a publicação do material, o pesquisador entregará a todos os professores da instituição parceira uma cópia dessa sequência para que possam ser desenvolvidas em suas salas de aula.

4.4 O Instrumento da Pesquisa

A TRRS desempenhou um papel fundamental na elaboração desta atividade, pois forneceu uma base sólida para a concepção das questões, uma vez que se concentra na análise de como as representações matemáticas são construídas e interpretadas pelos estudantes. Neste contexto, apresenta-se as questões que exploram o conceito nossa pesquisa - semelhança matemática - e sua compreensão através de diferentes registros de representação, como linguagem natural, figuras e símbolos. A teoria de Duval ajudou a estruturar as perguntas e os objetivos delas, de forma a considerar as múltiplas maneiras pelas quais os alunos podem abordar e entender o conceito de semelhança, promovendo uma compreensão mais profunda de Matemática.

Questão 01: Para você, qual o significado de semelhança?

Questão 02: Você já estudou o conteúdo de semelhança em alguma etapa escolar?
( ) Sim. ( ) Não.

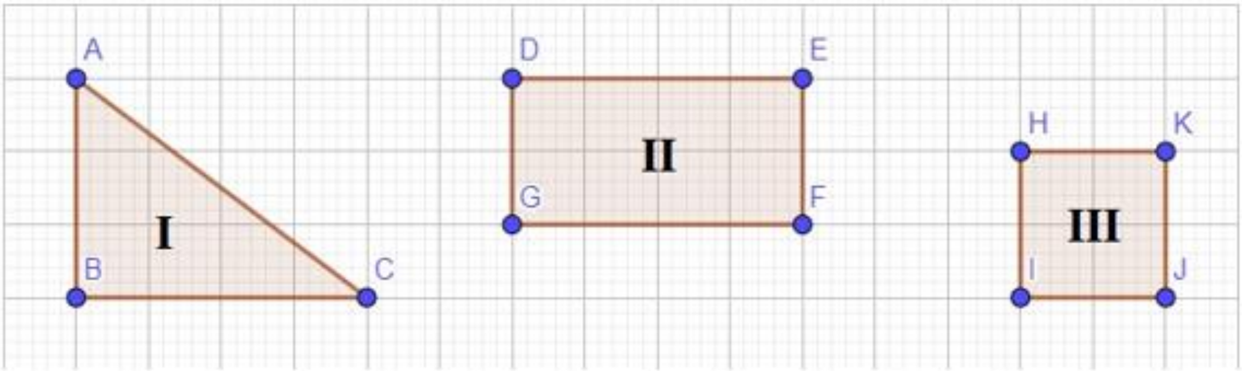
Questão 03: Caso tenha assinalado SIM na pergunta anterior, relate o que você se recorda dos seus estudos de semelhança.

Questão 04: Utilizando seus conhecimentos matemáticos, como você explicaria o que é semelhança?

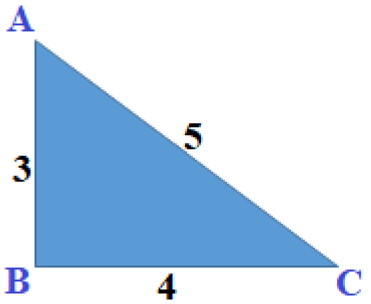
Questão 05: Você consegue identificar situações no seu cotidiano que envolvem ou que estão relacionadas com o conceito de semelhança matemática? Em caso afirmativo, apresente-as.

Questão 06: O que você entende por ampliação ou redução de uma figura plana? Você pode apresentar exemplos?

Questão 07: Com o auxílio da folha quadriculada, realize ampliações das figuras I, II e III representadas abaixo.



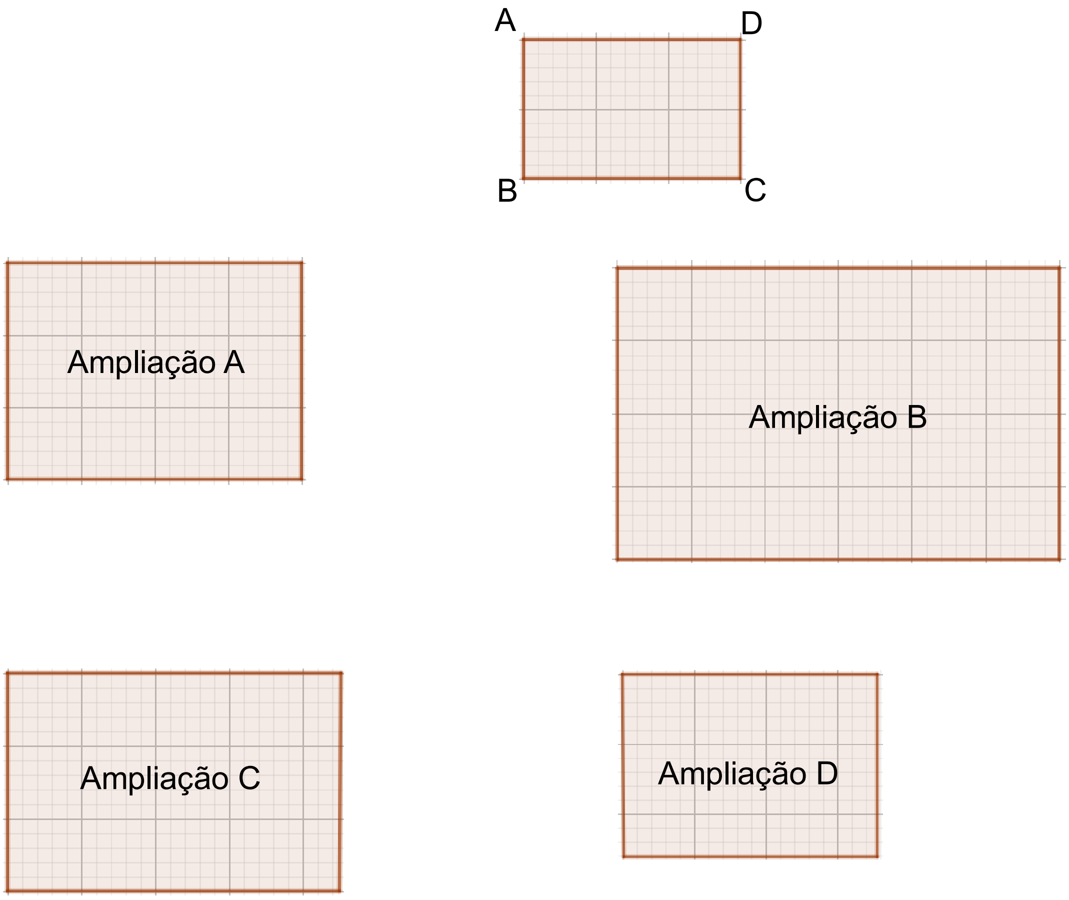
Questão 08: Considere o seguinte triângulo ABC.



a) Que tipo de triângulo é esse? Justifique a sua resposta.

b) Construa pelo menos uma redução e pelo menos uma ampliação do triângulo ABC. Explique como você realizou cada construção.

Questão 09: A seguir, tem-se quatro tentativas de ampliação do retângulo ABCD.



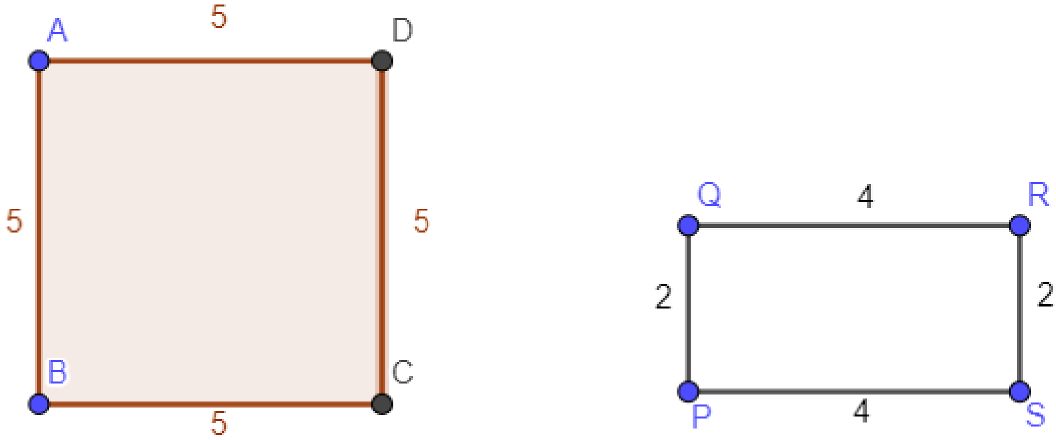
Quais ampliações estão corretas? Justifique a sua resposta.

Questão 10: Dois triângulos que têm pares de lados proporcionais são sempre semelhantes?

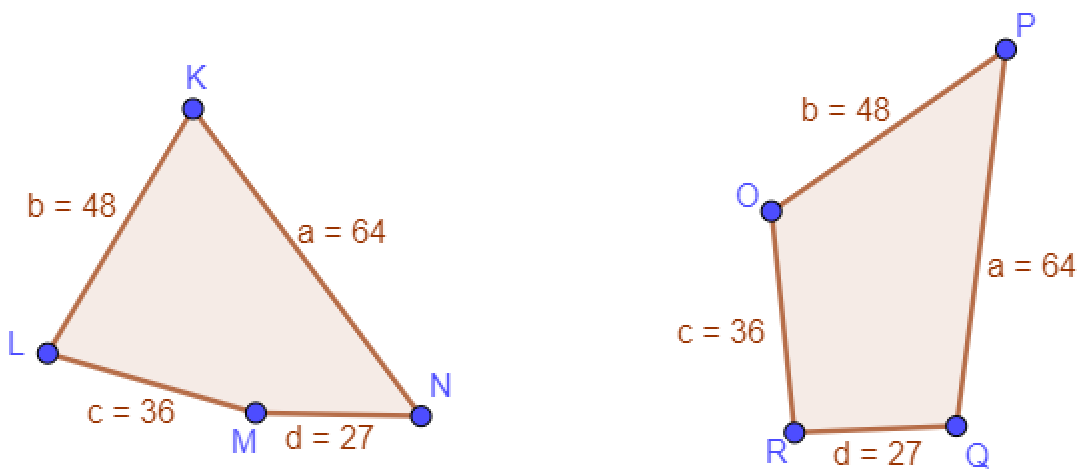
Questão 11: Tendo representadas as medidas dos seus lados em todas as situações, responda:

a) Os quadriláteros abaixo são semelhantes? Por quê?

b) Os quadriláteros abaixo são semelhantes? Por quê?



c) Os quadriláteros abaixo são semelhantes? Por quê?



5 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

No presente capítulo, serão apresentados os resultados obtidos a partir da aplicação do instrumento da nossa pesquisa. Este capítulo busca fornecer uma análise detalhada dos dados coletados, relacionando-os aos objetivos delineados para cada questão presente no referido instrumento. Será explorada a correspondência entre as respostas dos alunos e as metas propostas em cada questão, proporcionando uma compreensão abrangente das conclusões que emergem desse confronto entre as expectativas iniciais e as evidências empíricas reveladas.

5.1 A visita à Unidade Escolar

No dia 7 de agosto de 2023, tivemos a oportunidade de visitar a Escola Cidadã Integral Técnica Estadual Padre Jerônimo Lauwen – instituição da Rede Estadual de Ensino – para conduzir a pesquisa nas turmas das primeiras séries. Na escola, um docente era o responsável pelas quatro turmas pesquisadas. A pesquisa contou com a participação de cem (100) alunos dessas quatro (04) turmas.

A nossa visita foi calorosamente recebida por toda a equipe escolar, e fomos especialmente bem-vindos por ser um pesquisador e ex-aluno da instituição. Durante a visita, nosso foco principal era aplicar o instrumento de pesquisa e acompanhar o processo. Felizmente, a atividade transcorreu de forma suave, sem a ocorrência de dúvidas por parte dos alunos nem a necessidade de realizar leituras adicionais.Os alunos das quatro (04) turmas realizaram de maneira autônoma, sem nenhuma intercorrência ou dúvida no decorrer dos cem (100) minutos de aula.

A aplicação do material de pesquisa foi realizada tanto no turno da manhã quanto no da tarde. As quatro turmas foram incluídas na atividade, permitindo uma representação significativa dos alunos – ver figura 06. A colaboração do professor foi crucial para o sucesso da aplicação, garantindo a adesão dos alunos e a eficácia desta.

A experiência enriquecedora na Escola Cidadã Integral Técnica Estadual Padre Jerônimo Lauwen transcendeu a mera coleta de dados, revelando-se como um reencontro emocionante com as raízes que sustentaram nossa jornada acadêmica. Durante a visita, não obtivemos apenas informações relevantes para nossa pesquisa, mas também compartilhamos momentos genuínos de troca com os educadores, que muitos são ex-professores do pesquisador, e alunos que compõem essa comunidade escolar. A oportunidade de reacender laços com a instituição que moldou os alicerces do nosso percurso educacional trouxe à tona memórias inspiradoras e renovou nosso compromisso com o fortalecimento do ambiente educativo para as futuras gerações.

Figura 06 – Registros da visita à escola para a aplicação do Instrumento da Pesquisa.

Fonte: Acervo do pesquisador.

5.2 Percepções acerca da aplicação do instrumento de pesquisa

Conforme já enunciado, nesta seção abordamos, questão a questão, os objetivos e os resultados obtidos. Preservando a imagem dos interlocutores da pesquisa, nomeamos como aluno 01 a aluno 100 no tratar de cada questão. Faz-se necessária uma atenção especial a três pontos da análise e descrição dos nossos dados, quais sejam: (i) No intervalo entre as questões 01 (um) e 06 (seis), todo o grupo pesquisado se limitou a apresentar suas respostas em língua natural, trazendo, somente a partir do sétimo questionamento, figuras para as suas respostas; (ii) Os alunos apresentaram, em sua totalidade, respostas bem parecidas, que é um ponto que reforçamos ao analisar cada questão; (iii) Utilizamos a proporcionalidade na apresentação das respostas no decorrer desta seção. Exemplo: Se dos 100 pesquisados, 80 responderam de forma “correta” e esperada a questão, enquanto 20 responderam de forma “errada”, trouxemos 4 das 80 respostas “certas” e 1 das 20 respostas “erradas” na discussão.

Na questão 01, indagamos o discente sobre o significado que ele atribui à palavra semelhança, tendo como objetivo analisar o entendimento dos alunos no tocante à palavra semelhança para, posteriormente, adentrarmos nos conceitos específicos; obtivemos respostas das mais variadas formas. No entanto, o que chamou a atenção foi o fato de 82% dos pesquisados limitar a palavra semelhante a algo “parecido”.

Na questão 02, foi perguntado se o discente já estudou o conteúdo de semelhança em alguma etapa escolar. Nessa questão, tinha-se como objetivo estimar a quantidade de alunos que já tiveram experiência com o conteúdo de Semelhança durante a trajetória escolar. Abaixo, tem-se o gráfico de pizza[13], que ilustra percentualmente as respostas dos alunos no referido questionamento.

Gráfico 01 – Dados produzidos na questão 02 do instrumento.

Fonte: Acervo do pesquisador.

Nesse universo, a partir do questionamento, percebeu-se que um bom número de alunos já teve um contato com o nosso objeto de estudo em alguma etapa da sua trajetória escolar.

Na questão 03, a pergunta foi direcionada aos oitenta e dois (82) estudantes que assinalaram sim no questionamento anterior. Foi solicitado que esses relatassem o que recordavam dos seus estudos de semelhança. Nosso objetivo nesse questionamento era observar o conhecimento apresentado pelo aluno, de maneira

[13] Também conhecido como gráfico de setores ou gráfico de torta, é um tipo de representação gráfica que utiliza uma circunferência dividida em fatias para mostrar a proporção ou distribuição de diferentes categorias em relação a um todo. Cada fatia do gráfico representa uma categoria e a área dela é proporcional à quantidade ou percentual que essa categoria representa em relação ao total. Esse tipo de gráfico é frequentemente usado para visualizar dados categóricos e mostrar a composição relativa das partes em relação ao todo.

espontânea, sobre Semelhança Matemática. Pode-se afirmar que ele foi alcançado, uma vez que boa parte dos alunos conseguiram discorrer sobre o tema, tendo respostas como as apresentadas a seguir.

> *Aluno 14: "A semelhança matemática ensinava a comparar figuras que são como primas. Parecidas, mas não exatamente iguais".*
>
> *Aluno 32: "Lembro que era pegar duas figuras e aumentar ou diminuir, mas manter o mesmo formato dela".*
>
> *Aluno 51: "Duas figuras semelhantes são aquelas que cresceram de tamanhos diferentes, mas que ainda têm os mesmos ângulos e que se parecem muito".*
>
> *Aluno 87: "Lembro do meu professor do ano passado falando que era como redimensionar desenhos no computador, como se estivéssemos ajustando o zoom, mantendo os detalhes, mas fazendo tudo ficar maior ou menor".*

Nesse sentido, considerando a ideia da totalidade e dos quatro (04) alunos supracitados, observou-se que o objetivo da questão foi atendido em sua totalidade, uma vez que os discentes puderam transcrever, de forma espontânea, o que entendiam do objeto de estudo.

A pergunta 04 trazia o seguinte questionamento: "Utilizando seus conhecimentos matemáticos, como você explicaria o que é semelhança?". A partir dessa questão, esperava-se que os alunos explicassem o conceito de semelhança usando relações das figuras geométricas e/ou identificassem propriedades semelhantes em diferentes escalas, algo já presente no questionamento anterior. A seguir, apresenta-se cinco respostas trazidas pelos alunos.

> *Aluno 07: "Dizia que era quando duas figuras são parecidas, mas não tem que ser do mesmo tamanho. Elas tem os mesmos ângulos, mas são maiores ou menores".*
>
> *Aluno 14: "É tipo quando duas figuras tem a mesma forma, mas não precisam ter o mesmo tamanho. Como quando você redimensiona uma foto, ela fica parecida, mas maior ou menor".*
>
> *Aluno 41: "Sabe quando você desenha um quadrado e depois faz um maior com os mesmos ângulos? Isso é semelhança, é tipo ter a mesma forma, mas em tamanhos diferentes".*
>
> *Aluno 51: "É quando você tem duas figuras que parecem iguais, só que uma é como um zoom da outra. Os ângulos são iguais, mas os lados podem ser diferentes. São do mesmo jeito, mas umas são maiores".*
>
> *Aluno 92: "É quando as figuras tem os mesmos ângulos, é a mesma coisa, tipo se você olhar de cima e elas forem iguais. É como uma cópia".*

De maneira geral, quando consideramos a população pesquisada e as cinco respostas acima, percebemos que boa parte dos alunos demonstraram uma compreensão do conceito de semelhança ao enfocar a importância dos ângulos iguais e, em poucos casos, também mencionar a presença de proporções entre os lados. As respostas evidenciaram diferentes níveis de abstração, da explicação prática do redimensionamento à exploração da manutenção dos ângulos em figuras ampliadas. Ao aprimorar a abordagem das proporções entre os lados, entende-se que os alunos teriam compreendido de maneira mais abrangente os elementos fundamentais de semelhança. Contudo, parte dos alunos confundiram semelhança com congruência, tal qual a resposta do aluno 92.

Em sequência, seguimos o questionário com a pergunta "Você consegue identificar situações no seu cotidiano que envolvem ou que estão relacionadas com o conceito de semelhança matemática? Em caso afirmativo, apresente-as". O intuito dessa questão foi de proporcionar aos alunos a oportunidade de perceber como a Matemática está intrinsecamente presente em suas vidas, mesmo fora do contexto formal da escola. Entende-se que, a partir da identificação e dos compartilhamentos de exemplos de situações que envolvem semelhança, os alunos podem aplicar o conhecimento matemático adquirido de maneira significativa e contextualizada. Através da conexão entre o conhecimento matemático formal e a observação do mundo à nossa volta, estamos pavimentando uma estrada que leva à descoberta, ao entendimento e à apreciação das sutilezas da Matemática em ação. Nesse sentido, apresentaremos, a seguir, cinco respostas colocadas pelos setenta e sete (77) alunos que responderam SIM ao questionamento supracitado. É importante salientar que os vinte e três (23) alunos que assinalaram NÃO sequer justificaram suas respostas.

Organizamos no quadro a seguir – quadro 04, algumas respostas de estudantes que demonstram níveis diferentes de compreensão sobre semelhança matemática em seu cotididano; ao lado, inserimos nossa análise e reflexão.

Quadro 04 – Situações do cotidiano que envolvem semelhança matemática

Respostas de estudantes	Análise e reflexão
Aluno 14: "Uma fotografia e o zoom dela. Quando dou o zoom em uma câmera, estou explorando a semelhança matemática, já que o que eu estou focando aparece maior ou menor, sendo que com suas proporções mantidas".	A resposta acima demonstra principalmente um tratamento do conceito de semelhança matemática na fotografia, com elementos de representação identificável, mas não uma conversão completa entre registros de representação, uma vez que o estudante não consegue trazer uma conexão efetiva que relacione, por exemplo, os elementos da fotografia e do zoom dela.
Aluno 21: "Se eu construir alguma coisa em escala, seja um prédio, ou um carro, ou qualquer coisa, pois as proporções entre os tamanhos do desenho e dela são mantidas".	Aqui, vemos um caso de tratamento. O aluno percebe que construir algo em escala mantém as proporções e trata essa situação como uma aplicação do conceito de semelhança matemática. Se tivesse sido o caso de o aluno representar essa experiência de maneira visual ou gráfica, por exemplo, teríamos uma conversão completa entre os registros de representação.
Aluno 35: "Como a sombra de qualquer coisa varia durante o dia é um caso de semelhança, porque as sombras são proporcionais às alturas dos objetos e a relação entre elas permanece a mesma".	Podemos afirmar que nessa resposta há novamente tratamento da semiose. O aluno está tratando o conceito de proporção ao descrever como as sombras e as alturas dos objetos se relacionam e como essa relação é mantida durante o dia.
Aluno 69: "Dois quadrados que eu desenhar. É só eu colocar um com um lado de 2 cm e outro com um lado de 4 cm. Eu deixei do mesmo jeito e só dobrei os lados".	Nesta resposta, vemos um aluno que está realizando um tratamento do conceito de semelhança matemática ao descrever as diferenças nos tamanhos dos quadrados e como eles foram alterados.
Aluno 82: "Quando duas torres eólicas têm sombras com a mesma forma devido aos ângulos iguais do sol, a gente pode dizer que elas são sombras semelhantes".	Assim como o aluno 35, o aluno 82 trata o conceito de proporção ao descrever como as sombras e as alturas dos objetos se relacionam e como essa relação é mantida durante o dia. Ademais, aplica a situação às torres eólicas, que é comum na região.

Fonte: Elaborado pelo autor, 2023, partir do instrumento aplicado.

Nesse questionamento, percebemos que as respostas dos alunos demonstram um entendimento considerável do conceito de semelhança matemática, com destaque para a identificação de situações cotidianas, tratamento dessas situações e aplicações entre o contexto físico e o conceito matemático. Isso sugere que eles conseguem relacionar o conhecimento matemático em situações do dia a dia de forma eficaz.

A seguir, tem-se a pergunta seis (06): "O que você entende por ampliação ou redução de uma figura plana? Você pode apresentar exemplos?". O intuito de aplicar essa questão com os alunos foi compreender como eles assimilam o conceito de ampliação e redução de figuras planas. Ao analisar as atividades cognitivas ligadas à semiose, a pergunta tem como objetivo entender a maneira como os alunos formam representações mentais dessas transformações, como tratam a relação entre tamanho e proporção e como convertem o objeto matemático em situações reais e vice versa. Diante disso, apresentamos, a seguir, quatro respostas trazidas pelos alunos no questionamento.

> *Aluno 09: "Ampliação ou redução de uma figura plana é quando a gente faz ela ficar maior ou menor, mas sem mudar o tipo. Assim, se eu tenho um retângulo e faço ele maior, ainda é um retângulo, só que maior. Um exemplo é pegar um desenho de um coração e fazer ele maior no papel".*

Na situação, mesmo que o aluno tenha descrito o conceito de ampliação ou redução, não há uma aplicação específica desse conceito em uma situação prática ou cálculos matemáticos envolvidos, o que caracterizaria um tratamento. Além disso, não há uma conversão para registros de representação diferentes, como gráficos ou equações, que caracterizaria uma conversão. Portanto, temos principalmente uma representação identificável do conceito de ampliação ou redução de figuras planas.

Vejamos a resposta do aluno 22:

> *Aluno 22: "Ampliação ou redução de uma figura plana é quando a gente muda o tamanho dela, mas mantendo as proporções. Por exemplo, se eu tenho um triângulo e faço ele menor, os ângulos continuam iguais e os lados ficam mais curtos"*

Aqui, há tratamento da semiose. O aluno está tratando o conceito de ampliação ou redução ao explicar que, ao mudar o tamanho de uma figura plana, as proporções são mantidas - os ângulos permanecem iguais, e os lados ficam mais curtos ou mais longos de acordo com a escala de ampliação ou redução.

O aluno 52 respondeu:

> *Aluno 52: "A ampliação ou redução de uma figura é quando a gente aumenta ou diminui ela, mas a forma não muda. Por exemplo, se eu pego um quadrado e faço ele menor, continua sendo um quadrado, só que menorzinho".*

Nessa resposta, o aluno está identificando e descrevendo o conceito de ampliação ou redução, explicando que, ao aumentar ou diminuir o tamanho de uma figura, sua forma básica não muda. Ele fornece um exemplo prático de como isso funciona, como no caso de um quadrado que permanece um quadrado, apenas maior ou menor. O conceito de ampliação ou redução é reconhecido e explicado, mas não há aplicação específica desse conceito em uma situação prática ou cálculos, o que caracterizaria um tratamento. Além disso, não há uma conversão para registros de representação diferentes, o que caracterizaria uma conversão.

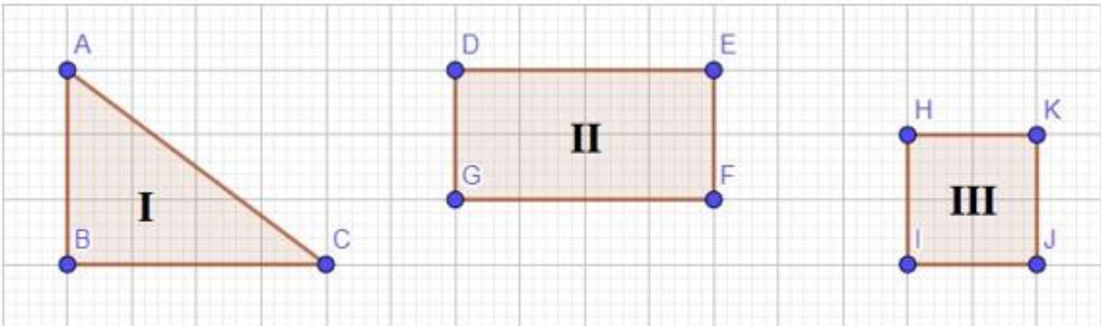
Vejamos a resposta do aluno 61:

> *Aluno 61: "Entendi que ampliação ou redução de uma figura plana é quando a gente muda o tamanho dela, mas a forma fica igual. Por exemplo, se eu tenho um círculo e faço ele maior, ele ainda é um círculo, só que maior".*

Assim como o aluno 52, o aluno 61 representa um exemplo prático de como funciona a ampliação ou redução, citando a situação de um círculo que permanece um círculo, apenas maior ou menor.

Numa avaliação geral da questão, vemos que as respostas dos alunos demonstraram uma compreensão razoável do conceito de ampliação e redução de figuras planas. Eles conseguem formar representações identificáveis e tratar as situações. Isso mostra que eles compreendem o conceito tanto em nível abstrato quanto aplicado, demonstrando proficiência nas atividades cognitivas relacionadas à nossa temática.

Na questão sete (07), solicitamos aos discentes que, com o auxílio da folha quadriculada, realizassem ampliações das figuras I, II e III representadas abaixo.



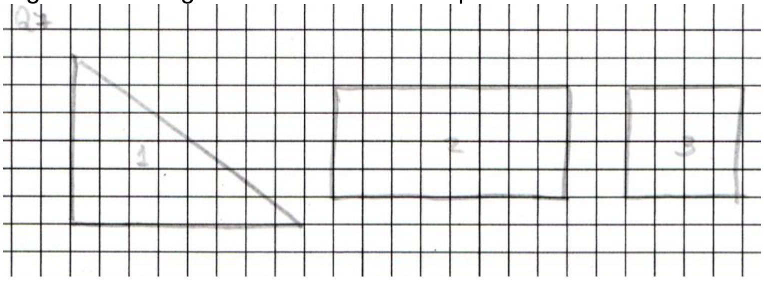
Essa questão visou obter insights[14] sobre como os discentes passam da formação de uma representação à conversão das figuras ampliadas, proporcionando uma compreensão mais profunda dos processos cognitivos envolvidos.

Nesse questionamento, tivemos a constatação de que 82% dos alunos conseguiram ampliar corretamente as figuras, optando por dobrar os lados das figuras originais, sugerindo uma tendência interessante em direção a uma abordagem

[14] Referem-se a ocorrências profundas e explicativas que surgem a partir da análise de cuidados de informações ou situações. São compreensões repetidas que testemunham conexões, padrões ou significados previamente não reconhecidos, fornecendo uma compreensão mais abrangente e profunda do assunto em questão. (Kahneman, 2011, p. 12)

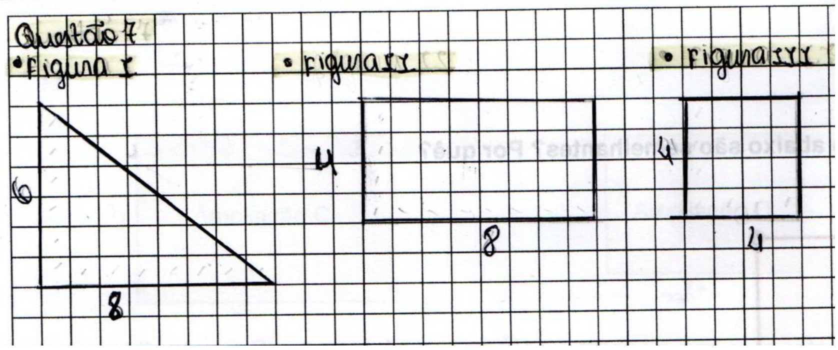
intuitiva de escalonamento – a seguir, serão demonstradas quatro (04) respostas nesse sentido –, o que pode indicar uma percepção de proporção entre as dimensões das figuras.

Figura 06 – Registros do aluno 03 ao questionamento 07 do instrumento.



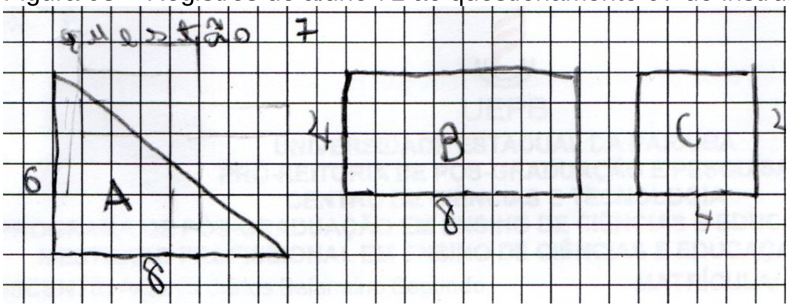
Fonte: Acervo do pesquisador.

Figura 07 – Registros do aluno 36 ao questionamento 07 do instrumento.



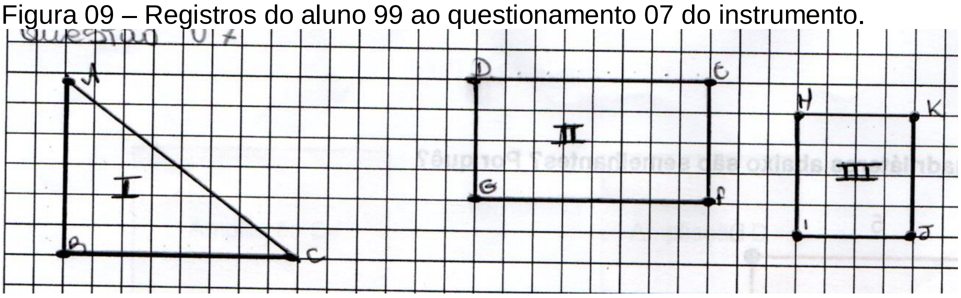
Fonte: Acervo do pesquisador.

Figura 08 – Registros do aluno 71 ao questionamento 07 do instrumento.



Fonte: Acervo do pesquisador.

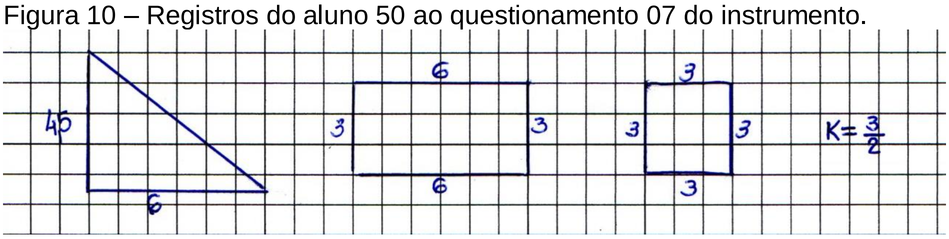
Figura 09 – Registros do aluno 99 ao questionamento 07 do instrumento.



Fonte: Acervo do pesquisador.

Além disso, houve uma observação para a resposta apresentada por um único aluno, que optou por usar uma razão de proporcionalidade 1,5. Aqui, destaca-se um nível mais complexo de compreensão, onde ele aplicou conceitos de números racionais para realizar a ampliação.

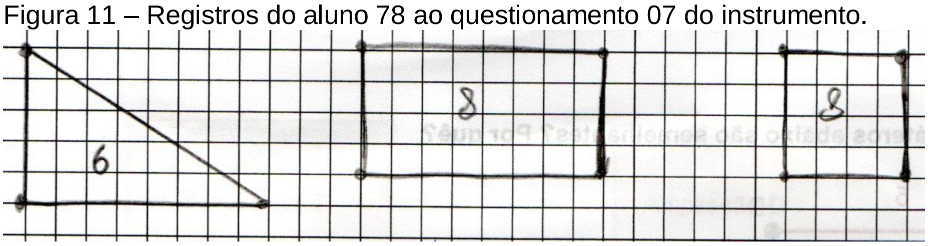
Figura 10 – Registros do aluno 50 ao questionamento 07 do instrumento.



Fonte: Acervo do pesquisador.

Em outro contexto, vejamos a resposta do aluno 78, onde o mesmo não conseguiu executar o tratamento quando se refere à proporcionalidade dos lados. O mesmo até consegue manter o formato da figura e seus ângulos, mas não mantém a proporcionalidade entre os pares de lados respectivos. Assim sendo, ele apenas representa a figura, mas não obtém êxito quando vai tratar os elementos que validaria as propriedades de semelhança.

Figura 11 – Registros do aluno 78 ao questionamento 07 do instrumento.



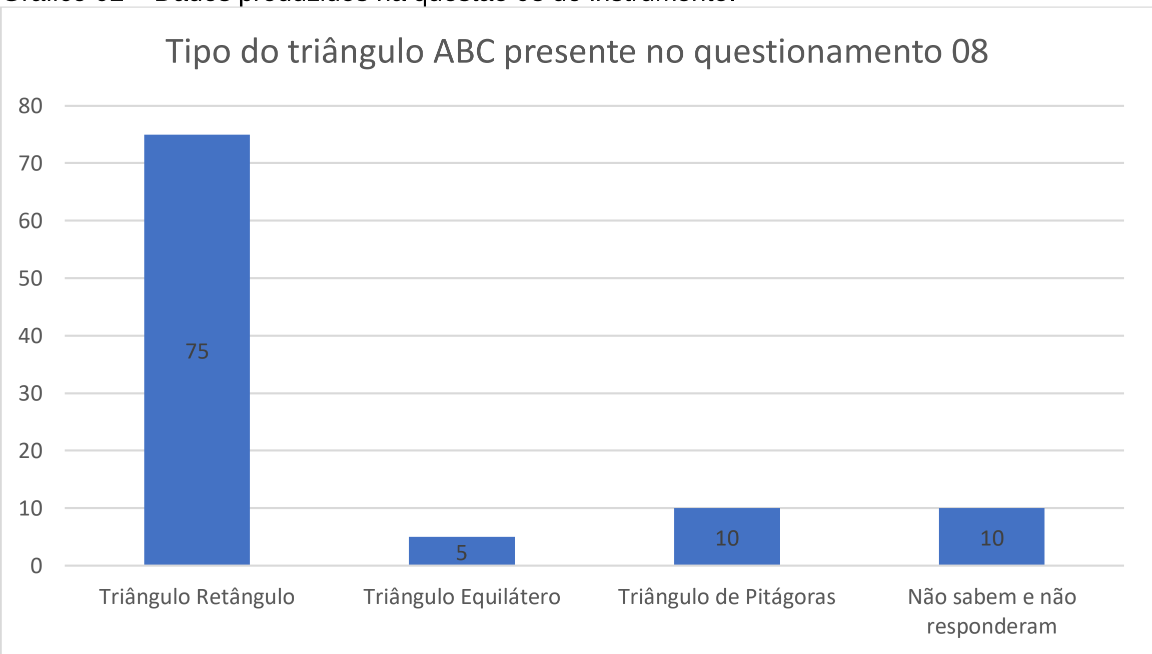
Fonte: Acervo do pesquisador.

De modo geral, pode-se afirmar que esse questionamento ilustrou uma diversidade de abordagens e compreensões dentro do grupo de alunos avaliados. Enquanto a maioria optou por uma ampliação intuitiva, um aluno demonstrou habilidades conceituais mais sofisticadas ao usar razões de proporcionalidade. Esse cenário indica que é importante ensinar os conceitos geométricos de maneira gradual e variada, permitindo que os alunos tenham a chance de aprender tanto por meio de abordagens intuitivas quanto de abordagens mais formais.

No que diz respeito às atividades cognitivas ligadas à semiose, houve uma observação de como os alunos manipulavam as figuras originais para ampliá-las, o que nos forneceu percepções sobre como eles abordaram a conversão de informações geométricas entre dois contextos, a citar: (i) Contexto das figuras originais: Os alunos obtiveram as informações sobre as dimensões e características das figuras originais que precisavam ampliar ou reduzir; (ii) Contexto das figuras ampliadas ou reduzidas: Os alunos precisaram converter as informações das figuras originais para as figuras ampliadas ou reduzidas, fazendo cálculos e ajustando as dimensões. O uso da malha quadriculada como ferramenta auxiliar ressaltou a aplicação prática desses conceitos na resolução de problemas.

Em sequência, na questão oito (08), apresentamos um triângulo retângulo de lados 3cm, 4cm e 5cm e colocamos duas assertivas. Na primeira, pedíamos que os alunos classificassem o tipo de triângulo e, a partir da classificação, justificassem a sua resposta. A seguir, apresentaremos um gráfico de barras[15] com as respostas dos discentes.

Gráfico 02 – Dados produzidos na questão 08 do instrumento.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Dentre as justificativas apresentadas no questionamento, 80% dos alunos que afirmaram se tratar de um triângulo retângulo conseguiu falar sobre estar satisfeito o Teorema de Pitágoras[16], enquanto 20% afirmou ser retângulo por possuir um ângulo reto – ângulo de 90º. É importante retomar que, no momento da aplicação do instrumento, os alunos portavam réguas e transferidores distribuídos pelo

[15] Representação visual que utiliza barras retangulares para mostrar a comparação entre diferentes categorias ou conjuntos de dados. Cada barra no gráfico corresponde a uma categoria específica e sua altura ou comprimento é proporcional à quantidade ou valor que está sendo representado. É uma ferramenta eficaz para visualizar padrões, tendências ou diferenças em dados discretos, permitindo uma compreensão rápida das relações entre as informações apresentadas.

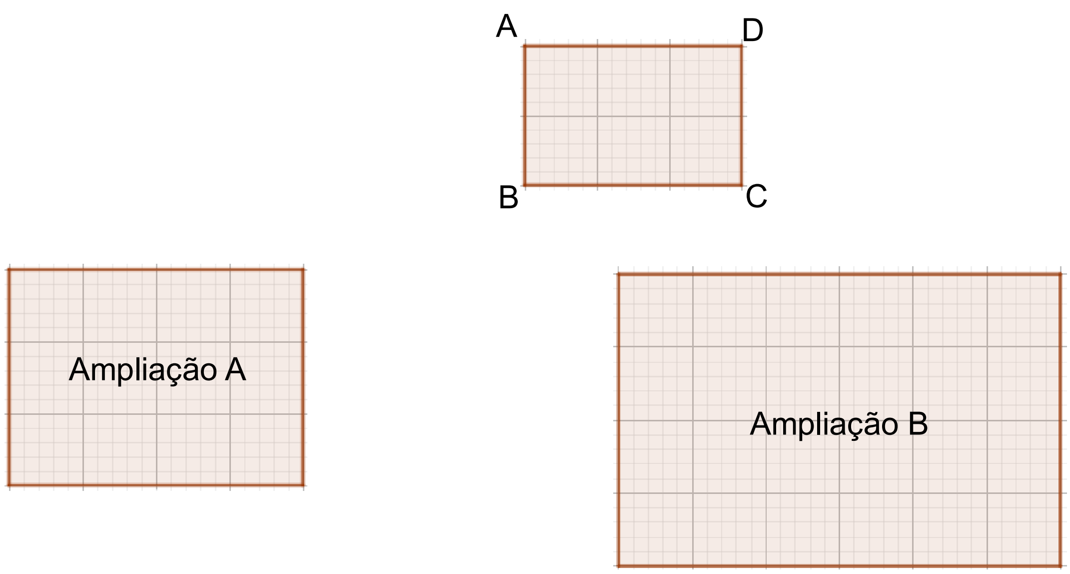
[16] Princípio fundamental na Geometria que descreve uma relação entre os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo, ou seja, um triângulo que possui um ângulo reto. De acordo com o teorema, a soma dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa. O Teorema de Pitágoras é amplamente utilizado para resolver problemas envolvendo distâncias, áreas e outras relações geométricas em triângulos retângulos.

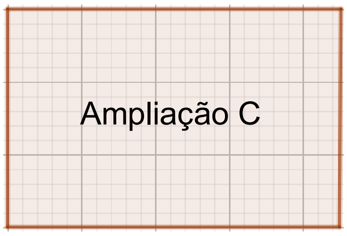
pesquisador, o que pôde contribuir nessa constatação. Todos os alunos que afirmaram se tratar de um triângulo equilátero não justificaram a questão. Os dez (10) alunos que afirmaram ser um "Triângulo de Pitágoras" limitaram as suas justificativas em "*por conseguir aplicar o Teorema de Pitágoras*", tendo um deles transcrito a relação.

Os resultados da pergunta b do questionamento 8, na qual solicitamos que os alunos apresentassem ao menos uma redução e uma ampliação do triângulo ABC, mostraram uma habilidade notável dos alunos em desenvolver raciocínio ao abordar a questão. A grande maioria, representando 85% dos alunos, demonstrou uma compreensão sólida do conceito, aplicando a relação de proporção. Eles utilizaram de maneira eficaz a noção de dobrar, dividir ao meio, triplicar e dividir por 1/3 as dimensões, evidenciando um entendimento intuitivo das proporções, o que era previsível diante dos resultados das outras questões. Além disso, muitos alunos destacaram a importância de manter a forma geral do triângulo e os ângulos durante a ampliação, indicando uma percepção aguçada dos princípios fundamentais.

No questionamento nove (09), representamos um retângulo ABCD numa malha quadriculada e na própria malha sugerimos possíveis respostas, colocadas em alternativas A, B, C e D. A partir disso, foi solicitado que os alunos assinalassem quais as ampliações estavam corretas e que justificassem suas respostas. A seguir, apresentaremos a questão para melhor ilustrarmos.

"Questão 09: A seguir, tem-se quatro tentativas de ampliação do retângulo ABCD.





Quais ampliações estão corretas? Justifique a sua resposta".

O nosso intuito a partir da aplicação dessa questão foi entender como os alunos aplicavam seus conhecimentos para identificar ampliações corretas de um retângulo, levando em consideração as atividades cognitivas. Ao pedir justificativas, buscava-se obter compreensões sobre as estratégias que os alunos utilizavam para resolver problemas de semelhança, contribuindo para uma compreensão mais clara de como eles abordam conceitos geométricos complexos e tomam decisões fundamentadas baseadas em suas habilidades cognitivas.

Nesse questionamento, constatamos um grande número de acertos. Em números, 85 dos alunos assinalaram que as ampliações corretas seriam as ampliações B e C. A seguir, serão demonstradas cinco (05) respostas distintas nesse sentido e uma pequena abordagem do nosso entendimento a partir de cada uma delas. Iniciamos com o aluno 07:

> *Aluno 07: "As ampliações B e C são as corretas. Na B, o retângulo foi ampliado mantendo a mesma proporção, e na C também, com lados aumentados de forma proporcional".*

Podemos afirmar que esse aluno usou uma abordagem centrada na formação de representação identificável, demonstrando uma compreensão sólida dos princípios de semelhança. Ao escolher as ampliações B e C como corretas, ele reconheceu a importância de manter a proporção entre os lados do retângulo original e suas ampliações. Ao mencionar que na ampliação B o retângulo foi "*ampliado mantendo a mesma proporção*", ele enfatizou a regra fundamental de que as dimensões aumentam proporcionalmente para manter a semelhança. Essa observação reflete uma formação de representação identificável sólida, uma vez que ele consegue identificar a relação de tamanho entre as figuras e como ela se mantém constante nas ampliações. A escolha da ampliação C é justificada de maneira semelhante, indicando que o aluno compreende a importância de manter a proporção dos lados aumentados de forma proporcional, demonstrando um entendimento claro das atividades cognitivas de semelhança.

Vejamos a resposta do aluno 91:

> *Aluno 91: “A ampliação A e a ampliação D estão corretas. Na A, o retângulo foi aumentado, mas mantém a mesma proporção. Na D, as dimensões também foram ampliadas proporcionalmente”.*

Em contraste, apresentamos acima a resposta do aluno 91 para que possamos analisar o “incorreto”. Observa-se que o aluno selecionou as ampliações A e D. Ao afirmar que "*A ampliação A e a ampliação D estão corretas",* apesar de ambas as ampliações serem incorretas, o aluno revela uma confusão nas suas justificativas. A declaração de que na ampliação A "*o retângulo foi aumentado, mas mantém a mesma proporção*" é incoerente com a proposta de ampliação, uma vez que o aumento das dimensões nessa alternativa não manteve a proporção. Da mesma forma, ao mencionar que na ampliação D "*as dimensões também foram ampliadas proporcionalmente"*, o aluno incorre em erro, visto que essa ampliação também não mantém a proporção adequada.

Vejamos o aluno 28:

> *Aluno 28: "Eu escolho as ampliações B e C. Na B, os lados foram multiplicados por 2, mantendo a proporção, e na C também, com um aumento de 1,5".*

Na resposta acima, o aluno evidencia um entendimento notável da conversão e também do tratamento dos dados, ao escolher as ampliações B e C como corretas com justificativas que refletem um conhecimento sólido. A observação de que "*Na B, os lados foram multiplicados por 2, mantendo a proporção*" demonstra claramente o conceito de ampliação proporcional, em que o aluno reconhece que multiplicar as dimensões por um fator constante resulta em uma ampliação mantendo a relação de tamanho original. A referência à ampliação C, em que menciona que os lados foram aumentados "*com um aumento de 1,5*", ilustra a aplicação da razão de proporção de forma precisa. A compreensão demonstrada pelo aluno em relação à aplicação de fatores de multiplicação distintos para cada ampliação denota um bom entendimento das atividades cognitivas de tratamento, mostrando que o aluno não apenas calculou as ampliações, mas também compreendeu os princípios subjacentes à transformação.

O aluno 66 assim respondeu:

> *Aluno 66: "Minha escolha são as ampliações B e C. Na B, houve um aumento de 100% nos lados, e na C um aumento de 50%. Ambas parecem manter a proporção”.*

Nesse caso, o aluno mostrou uma abordagem muito boa ao combinar habilmente diferentes aspectos cognitivos na resolução do problema. Ao escolher as ampliações B e C como corretas, e ao justificar sua escolha com a observação de que "*Na B, houve um aumento de 100% nos lados, e na C um aumento de 50%",* o aluno demonstrou uma percepção clara das alterações percentuais nas dimensões dos retângulos. Isso reflete a aplicação de um tratamento ao identificar os incrementos específicos nas ampliações. Além disso, ao afirmar que "*Ambas parecem manter a proporção*", o aluno também integra uma formação de representação identificável, reconhecendo a importância de manter a relação de tamanho original ao realizar as ampliações. Essa abordagem abrangente evidencia um entendimento completo e avançado das atividades cognitivas envolvidas, indicando que o aluno não apenas compreende os conceitos isolados, mas também consegue combiná-los de maneira coesa para tomar decisões sobre as ampliações corretas.

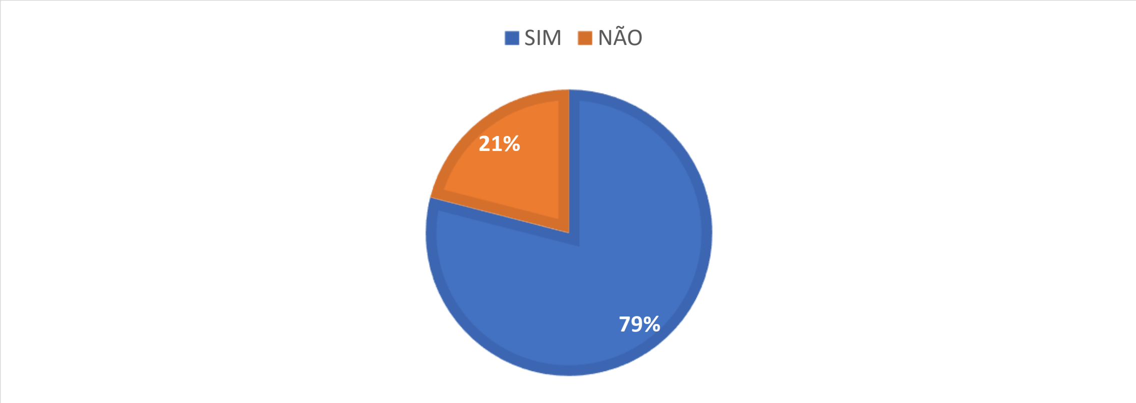
Passemos para o aluno 20:

> *Aluno 20: "Eu acredito que as ampliações B e C estão corretas. Na B, o comprimento foi duplicado e a altura também, mantendo a proporção. Na C, o comprimento foi multiplicado por 1,5, mantendo a mesma ideia."*

Nessa situação, ao escolher as ampliações B e C como corretas e justificar sua escolha, o aluno também exibe um entendimento claro dos processos envolvidos. A observação de que "*Na B, o comprimento foi duplicado e a altura também, mantendo a proporção"* indica um tratamento, já que o aluno reconhece a importância de manter a proporção original durante a ampliação. Além disso, ao mencionar que "*Na C, o comprimento foi multiplicado por 1,5, mantendo a mesma ideia*", o aluno demonstra habilidade no tratamento, ao aplicar especificamente uma razão de semelhança.

Dois triângulos que possuem pares de lados proporcionais são sempre semelhantes. Esse é um dos critérios fundamentais de semelhança de triângulos. A proporção dos lados é um indicador-chave de que os triângulos são semelhantes e compartilham relações geométricas semelhantes. Com o intuito de visualizar esse e os demais critérios de semelhança de triângulos, aplicamos o questionamento dez (10), que perguntava se “dois triângulos que têm pares de lados proporcionais são semelhantes”. Sem justificativas por parte dos discentes, obtivemos os resultados do gráfico a seguir.

Gráfico 03 – Dados produzidos na questão 10 do instrumento.



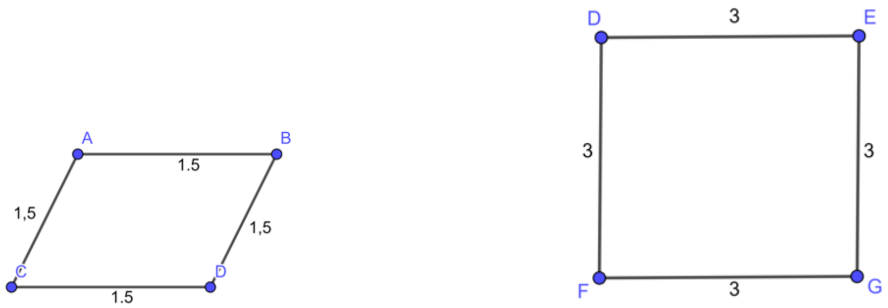
Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Dos 100 alunos que responderam, 79 responderam afirmativamente, enquanto 21 indicaram uma resposta negativa. Surpreendentemente, todos os alunos optaram por respostas diretas de "sim" ou "não", sem adentrar em justificativas detalhadas relacionadas aos critérios de semelhança, como esperávamos.

Em sequência, tivemos o último questionamento do instrumento, o questionamento onze (11), que apresentava pares de figuras em cada uma das perguntas A, B e C da questão para os alunos falarem se eram semelhantes e justificarem o porquê da sua resposta. Nesse caso, o objetivo dessa pergunta foi reforçar e validar o conhecimento prévio dos alunos sobre o critério de semelhança entre pares de figuras geométricas.

A seguir, apresentaremos as assertivas, em seguida as respostas dos alunos, e faremos uma análise detalhada de cada uma delas.

<u>*Questionamento a)*</u> *Os quadriláteros abaixo são semelhantes? Por quê?*



Vejamos três respostas:

> *Aluno 12: "Não, eles não são semelhantes. Os lados do paralelogramo têm comprimentos diferentes dos lados do quadrado, e os ângulos internos também não são congruentes".*

> *Aluno 22: "Não, porque o paralelogramo tem lados diferentes dos lados do quadrado, e os ângulos internos também não são congruentes".*
>
> *Aluno 93: "Não, eles não são semelhantes. Existe a proporção dos lados entre o paralelogramo e o quadrado, mas os ângulos internos também não são congruentes".*

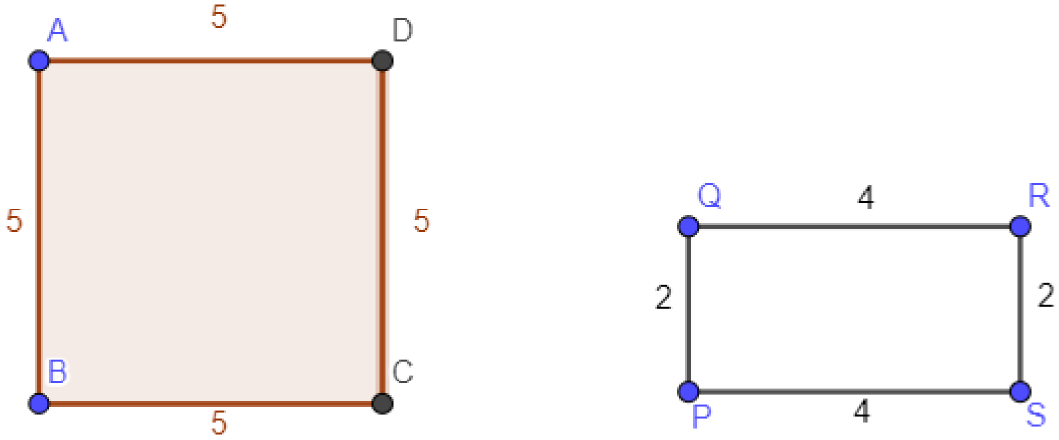
O aluno 12 identifica corretamente que os lados do paralelogramo têm comprimentos diferentes dos lados do quadrado, distinguindo diferentes representações observáveis de diferentes quadriláteros. Além disso, ele incorpora a compreensão de que os ângulos internos não são congruentes, indicando uma aplicação do critério de semelhança que envolve tanto os lados quanto os ângulos.

O aluno 22 consegue distinguir as diferentes representações a partir da identificação dos lados diferentes. A inclusão da observação de que os ângulos internos não são congruentes indica um entendimento adicional do critério de semelhança que envolve tanto os lados quanto os ângulos.

Já o aluno 93 aplica o tratamento ao mencionar a proporção dos lados. Ao adicionar que os ângulos internos também não são congruentes, ele demonstra uma compreensão abrangente dos critérios de semelhança, considerando ambos os aspectos geométricos relevantes.

No geral, os alunos que justificaram suas respostas nesse questionamento apresentaram ideias semelhantes aos supracitados, alegando, em sua maioria, a diferença do formato da figura e, consequentemente, dos seus ângulos.

<u>Questionamento b)</u> Os quadriláteros abaixo são semelhantes? Por quê?



Vejamos respostas de alguns estudantes:

> *Aluno 4: "Não, eles não são semelhantes. Os lados do retângulo têm proporções diferentes dos lados do quadrado".*
>
> *Aluno 47: "Não, eles não são semelhantes. O quadrado tem lados iguais, mas o retângulo tem lados diferentes e mais compridos".*

> *Aluno 88: "Não, eles não são semelhantes. O retângulo tem lados diferentes dos lados do quadrado, e isso faz eles não serem semelhantes".*

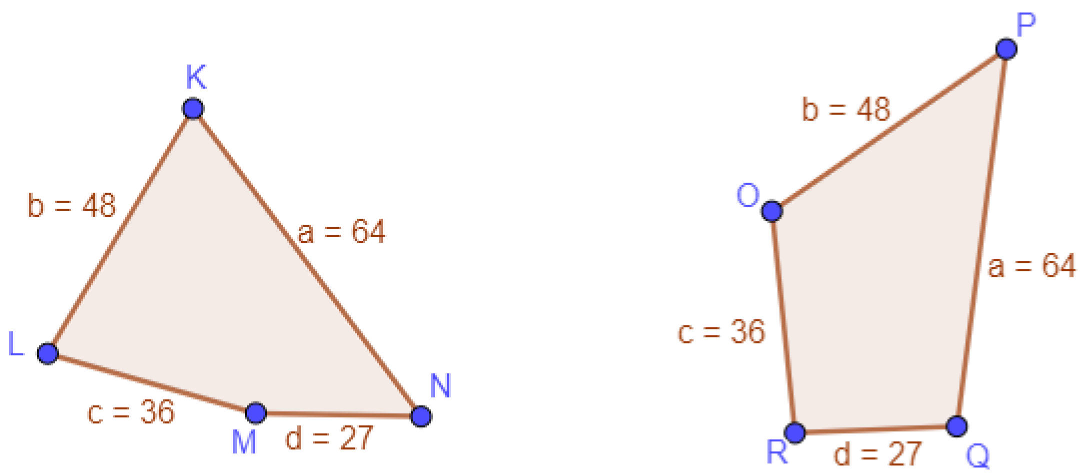
O aluno 4 usa o tratamento ao notar as diferenças nas proporções dos lados entre o retângulo e o quadrado. A resposta indica uma compreensão acertada de que a diferença nas proporções dos lados é um critério para a falta de semelhança entre as figuras geométricas.

O aluno 47 emprega o tratamento ao destacar as diferenças nos lados entre o quadrado e o retângulo. Ao mencionar a diferença nas proporções e o fato de que o retângulo tem lados "*mais compridos*", o aluno apresenta uma análise adequada dos critérios de semelhança, reforçando a compreensão de que a igualdade das proporções é um fator determinante.

O aluno 88 utiliza o tratamento ao perceber que os lados do retângulo diferem dos lados do quadrado. A resposta é direta, porém nem tanto assertiva em relação à não semelhança das figuras, uma vez que em sua justificativa ele traz que "*tem lados diferentes*". Nessa ocasião, ele pode estar equivocado na sua justificativa, uma vez que estaria satisfeita a semelhança mesmo com os lados diferentes, porém proporcionais.

De modo geral, as respostas fornecidas pelos alunos para esse questionamento se alinharam com o exemplo anterior, predominantemente enfatizando a discrepância na configuração das figuras. Os alunos que argumentaram, fundamentaram suas justificativas na diferença perceptível no formato das figuras geométricas em análise.

<u>*Questionamento c)*</u> *Os quadriláteros abaixo são semelhantes? Por quê?*



Neste questionamento, a totalidade dos cem (100) alunos convergiram em suas respostas, afirmando que as figuras não eram semelhantes, apesar de possuírem lados com mesmas medidas. Esta percepção foi compartilhada de forma unânime entre os que justificaram, além de acrescentarem que não se tratava de uma ampliação ou redução entre elas. A observação crucial residiu no entendimento de que, mesmo mantendo uma possível semelhança de razão 1, as características fundamentais da forma e dos ângulos divergiam entre as figuras, justificando a conclusão de não semelhança, fato que se repetiu nas assertivas A e B.

É importante salientar que a aplicação do instrumento desempenhou um papel fundamental no desenvolvimento do nosso produto educacional. Ao conduzir a pesquisa com um grupo diversificado de alunos, obtivemos resultados valiosos que enriqueceram consideravelmente o conteúdo e a abordagem da sequência. O engajamento e a atenção dos alunos durante a pesquisa foram notáveis, refletindo o interesse genuíno em compreender as situações ali propostas. Através das respostas proporcionadas, pôde-se observar a variedade de entendimentos, dificuldades e perspectivas dos alunos em relação à semelhança.

As respostas que evidenciaram desafios e lacunas na compreensão dos critérios de semelhança também direcionaram nossa atenção para os pontos mais críticos que merecem maior ênfase em nossa abordagem educacional.

O cuidado, a seriedade e a responsabilidade demonstrados pelos alunos ao responderem ao questionário fortaleceram a confiabilidade dos resultados obtidos. A contribuição ativa desses alunos enriqueceu nossa pesquisa, permitindo que construíssemos um produto educacional mais alinhado às suas necessidades e níveis de compreensão. Essa colaboração proporcionou uma base sólida para o desenvolvimento de uma sequência didática que visa aperfeiçoar o aprendizado de semelhança, abordando as questões identificadas e oferecendo uma perspectiva abrangente e envolvente sobre o tema.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

À medida que este capítulo conclusivo se desenrola, mergulhamos em uma análise abrangente e profunda dos resultados obtidos, explorando as implicações e contribuições intrínsecas desta pesquisa. Em retrospectiva, reexaminamos os objetivos estabelecidos no início da nossa pesquisa, avaliando não apenas a extensão em que esses objetivos foram cumpridos, mas também desvendando as complexas interconexões que emergem entre as conclusões obtidas e o cenário acadêmico mais amplo, especialmente no domínio da Educação Matemática.

Este estudo, ancorado por um objetivo geral – Analisar a compreensão de Semelhança Matemática produzida por alunos da 1ª série do Ensino Médio, tendo como base a Teoria dos Registros de Representações Semióticas (TRRS) – e dois objetivos específicos – (i) Identificar os possíveis obstáculos que dificultam o entendimento do conceito de Semelhança Matemática; e (ii) Propor uma sequência de atividades que explorem o conceito de Semelhança Matemática à luz da TRRS –, foi delineado e conduzido com minuciosa atenção aos detalhes, empregando a TRRS como uma lente interpretativa para compreender a profundidade do conceito de Semelhança Matemática entre os alunos da 1ª série do Ensino Médio. Essa abordagem permitiu uma exploração aprofundada da questão central que norteou este estudo: Qual a contribuição da Teoria dos Registros de Representações Semióticas para compreensão de Semelhança Matemática?

No contexto do primeiro objetivo específico, pudemos observar que estudantes muitas vezes demonstraram dificuldades em aplicar as propriedades de Semelhança nas situações práticas, onde deveriam identificar e usar proporções e relações geométricas de maneira mais eficaz. Contudo, ressaltamos que essa é uma ação desafiadora, pois requer a capacidade de reconhecer a relevância da propriedade, bem como conseguir aplicar a proporção dos pares de lados respectivos.

Desde o início, tornou-se evidente que a TRRS desempenhou um papel central na sondagem das múltiplas representações subjacentes ao conceito de semelhança. Essa teoria fornecia uma estrutura teórica que nos permitia decifrar as diferentes perspectivas que os alunos trazem consigo quando abordam esse objeto. No entanto, a aplicação da TRRS foi além de uma simples análise de diferentes representações; ela se estabeleceu como uma abordagem pedagógica inclusiva, a partir da nossa sequência didática pensada à luz da teoria.

A análise em etapas distintas da pesquisa revelou a riqueza e a complexidade das distintas perspectivas que os alunos detêm em relação à Semelhança Matemática. O processo de criação de uma sequência didática, que surge da participação ativa dos alunos, mostrou ser uma ferramenta pedagógica extremamente valiosa para lidar com a complexa mistura de ideias por trás desse conceito. A abordagem estruturada permitiu que a teoria se transformasse em prática, enriquecendo a experiência de aprendizado dos alunos e capacitando-os a explorar a semelhança por meio de várias lentes.

Reconhecemos que o processo educativo é fluido e multifacetado, requerendo abordagens adaptativas que levem em consideração as singularidades e diversidade dos alunos como aprendizes únicos. A TRRS forneceu uma base sólida para uma pedagogia flexível, que reconhece as diversas vias cognitivas pelas quais os alunos constroem significado matemático. O reconhecimento da multiplicidade de representações permitiu que estratégias pedagógicas fossem moldadas para atender às necessidades individuais, resultando em um aprendizado mais autêntico e significativo.

As implicações deste estudo transcendem a esfera da compreensão do conceito de Semelhança Matemática, reverberando em um terreno mais amplo da Educação Matemática e da Geometria. A abordagem da TRRS destacou a necessidade premente de estratégias pedagógicas inclusivas que acolham as distintas concepções individuais. Essa abordagem não apenas valoriza a riqueza das representações alternativas, mas também fomenta ambientes de aprendizado enriquecedores, nos quais as vozes dos alunos são autenticamente ouvidas e valorizadas.

Expressamos nossa sincera gratidão aos alunos que participaram ativamente desta pesquisa, oferecendo perspectivas únicas e inestimáveis que enriqueceram nosso panorama analítico. Através de seu envolvimento e contribuições significativas, a pesquisa ganhou em profundidade e autenticidade, tornando-se mais alinhada com as necessidades e realidades individuais dos aprendizes. A colaboração ativa demonstrou a importância de engajar os alunos como parceiros ativos na construção do conhecimento, um princípio vital para a pedagogia participativa e autêntica.

Enquanto pesquisadores e educadores, reconhecemos o impacto potencialmente transformador deste estudo no campo da Educação Matemática. Além de aprofundar nossa compreensão da Semelhança Matemática, essa pesquisa abriu portas para investigações futuras, incluindo a expansão da aplicação da TRRS a outros conceitos matemáticos e a análise das representações adotadas pelos professores ao ensinar o conceito de Semelhança Matemática. Assim sendo, com base em nossa pesquisa, sugerimos como possíveis áreas de estudo para o futuro: explorar os prismas e seus componentes sob a abordagem da TRRS; além disso, investigar como os professores de Matemática representam o conceito de Semelhança Matemática que ensinam, com base nos princípios da TRRS.

À medida que concluímos este capítulo, celebramos não apenas o sucesso desta pesquisa, mas também a promessa e o potencial que ela carrega para a evolução do campo acadêmico e para o aprimoramento do ensino de Matemática. Essa pesquisa estabeleceu uma base sólida para investigações subsequentes, destacando o papel crucial da Teoria das Representações Semióticas como uma ferramenta valiosa para explorar a compreensão matemática. Olhamos, pois, para o horizonte das pesquisas futuras com otimismo, antecipando as descobertas e desafios que enriquecerão ainda mais o diálogo acadêmico e o panorama educacional.

REFERÊNCIAS

ARCEGO, Priscila. **Representações semióticas mobilizadas no estudo da área do círculo no Ensino Fundamental.** 2017. 153 f. Dissertação (Mestrado em Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física) - Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2017.

BERLANDA, Juliane Carla. **Mobilizações de registros de representação semiótica no estudo de trigonometria no triângulo retângulo com o auxílio do software geogebra.** 2017. 175 f. Dissertação (Mestrado em Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Física) - Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2017.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática/secretaria de educação fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1997.

_____. Ministério da Educação e Cultura. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** ensino médio/ciência da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília, 1998.

_____. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília, 2018.

CALÁBRIA, Angélica Raiz; CAVALARI, Mariana Feiteiro. PRIMEIRO COLÓQUIO BRASILEIRO DE MATEMÁTICA: UMA BREVE APRESENTAÇÃO DA PARTICIPAÇÃO FEMININA. **Revista Brasileira de História, Educação e Matemática (HIPÁTIA)**, v. 1, n. 1, p. 30-45, 2016.

CASTRO, F. M. DE OLIVEIRA. **A Matemática no Brasil**. Campinas, S.P.- Editora da Unicamp, 1999, 2ª edição.

CRUZ, José Laelson Gomes. **Um estudo de representações semióticas em atividades de Geometria.** 2018. 142f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática - PPGECEM) - Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2018.

DA SILVA, Karina Alessandra Pessôa; VERTUAN, Rodolfo Eduardo; DE ALMEIDA, Loudes Maria Werle. **Fenômeno de congruência em conversões entre registros: caracterização dos níveis de congruência e não-congruência.** In: II seminario Internacional de Educação Matematica. 2009, p. 1-6. Disponível em: < http://www.uel.br/grupo-pesquisa/grupemat/docs/CC02_siemat2009.pdf>. Acesso em: 30 abr. 2022.

DE ASSUMPÇÃO, Paula Gabrieli Santos. **Perímetro e área: uma engenharia didática utilizando o geogebra sob o olhar das representações semióticas.**

2015. 233 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Ensino de Física) - Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2015.

DE SOUSA, Zuleide Ferreira. **Geometrias espacial e plana: Uma análise dos significados revelados por meio dos registros de representações semióticas.** 2016. 149f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática - PPGECEM) - Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2016.

DUVAL, Raymond. Ver e ensinar matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. Trad. **Tânia M. M. Campos e Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM**, 2011.

______. Semiósis e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Trad. **Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física**, 2009.

______. Registros de Representações Semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Aprendizagem em Matemática:** Registros de Representação Semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2003, p.11-33.

______. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **Annales de Didactique et Sciences Cognitives**, Strasbourg: IREM – ULP, v. 5, p. 37-65, 1993.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. 5.ed. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

FONSECA, M. C. F. R. et al. **O ensino de geometria na escola fundamental** - três questões para a formação do professor dos ciclos iniciais. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

GODOY, Arlida Schmidt. **Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades**. Revista de administração de empresas, v. 35, p. 57-63, 1995.

HALBERSTADT, Fabrício Fernando. **A aprendizagem da geometria analítica do ensino médio e suas representações semióticas no grafeq**. 2015. 174 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Ensino de Física) - Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2015.

HUETE, J. C. Sánches e BRAVO, J. A. Fernández. **O ensino da matemática- fundamentos teóricos e bases epistemológicas.** Porto Alegre, Artmed, 2006.

IEZZI, Gelson et al. **Matemática: ciência e aplicações.** v. 1. 3. ed. São Paulo: Ed. Saraiva, 2015.

KAHNEMAN, Daniel. **Rápido e Devagar: Duas Formas de Pensar**. Rio de Janeiro: Ed. Objetiva, 2011.

MONTEIRO, Ivan Alves. O desenvolvimento histórico do ensino de Geometria no Brasil. **Universidade Estadual paulista.** Unesp–SP, 2015.
MORETTI, Méricles Thadeu. O papel dos registros de representação na aprendizagem de matemática. **Revista Contrapontos**, v. 2, n. 3, 2002, p. 343-362.

NOVAK, Franciele Isabelita Lopes et al. **O ambiente dinâmico GeoGebra para o desenvolvimento de aspectos específicos da aprendizagem em Geometria segundo Raymon Duval: olhares, apreensões e desconstrução dimensional**. 2018. Dissertação (Mestrado em Educação - Área de Concentração: Educação) - Setor de Ciências Humanas, Letras e Artes, Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2018.

OKAEDA, Micarlla Priscilla Freitas da Silva. **Histórias em quadrinhos em contexto matemático: uma proposta para o ensino de triângulos à luz da teoria dos registros de representação semiótica.** 2017. 223 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) - Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2017.

PANTOJA, Lígia Françoise Lemos; CAMPOS, Nadja Fonseca da Silva Cutrim; SALCEDOS, Rocio Rubi Calla. A teoria dos registros de representações semióticas e o estudo de sistemas de equações algébricas lineares. In: CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DE MATEMÁTICA, 4, 2013, Canoas. **Anais.** Canoas, RS: ULBRA. Disponível em: <http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vi/paper/view/1423/528>. Acesso em: 15 abr. 2022.

PAVANELLO, R.M. O Abandono do Ensino da Geometria no Brasil: causas e consequências. **Revista Zetetiké**, ano 1, n.1, 1996. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646822. Acesso em: 20 jun. 2022.

ROSÁRIO, Maria José Aviz do; SILVA, José Carlos da. **A Educação Jesuítica no Brasil Colônia,** 2004. Disponível em:http://www.ufpi.br/subsiteFiles/ppged/arquivos/files/eventos/evento2004/. Acesso em: 28 jul. 2022.

SMOLE, K. C. S. **A matemática na Educação Infantil:** a teoria das inteligências múltiplas na prática escolar. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2000.

TENÓRIO, André et al. Levantamento de competências pedagógicas necessárias a tutores da educação a distância. **RIED. Revista Iberoamericana de Educación a Distancia**, 2016.

APÊNDICE A – PRODUTO EDUCACIONAL

UEPB

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE SEMELHANÇA MATEMÁTICA

ANTONIO CARLOS BELARMINO SEGUNDO

MARIA ALVES DE AZERÊDO

Sumário

Observação: As aulas devem ser planejadas considerando o ritmo e as características individuais de cada grupo de alunos, com foco principal nas demandas dos estudantes.

Bom trabalho!

Apresentação

Esta iniciativa pedagógica é fruto do planejamento instrucional destinado à criação de um recurso educacional, resultante do curso de pós-graduação oferecido pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba. O conteúdo foi elaborado por Antonio Carlos Belarmino Segundo, sob a orientação da Professora Maria Alves de Azerêdo, após pesquisa de campo realizada numa escola pública do Estado da Paraíba.

A proposta apresentada consiste em uma Sequência Didática que foi formatada em folheto, concebida com o propósito de servir como um suporte valioso para docentes que atuam na Educação Básica. As atividades planejadas estão dispostas em sete etapas, com a finalidade primordial de enriquecer o entendimento acerca das questões inerentes ao processo de ensino e aprendizado em relação à Semelhança Matemática.

Olá, docentes!

Nas próximas páginas, vocês terão acesso a um recurso educacional em forma de Sequência Didática, parte do meu trabalho no Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Educação Matemática na Universidade Estadual da Paraíba (UEPB). Essa proposta surgiu das reflexões e desafios que enfrentei ao ensinar Matemática na Educação Básica.

O objetivo deste material é oferecer a vocês, professores e professoras, um recurso que possa enriquecer o ensino contextualizado e a abordagem interdisciplinar em suas práticas profissionais. A sequência didática inclui uma variedade de atividades para ensinar Semelhança Matemática, utilizando recursos didáticos adicionais para ampliar as oportunidades de interação com o tema.

Este material está à disposição para que vocês possam usá-lo como ponto de partida em conjunto com outros recursos que julguem necessários para planejar suas aulas.

Objetivo e Público Alvo

O **objetivo geral** dessa sequência é compreender e aplicar os conceitos de semelhança em figuras geométricas, relacionando-as com proporções e propriedades geométricas. O **público alvo** são alunos que cursam o a primeira (1ª) série do Ensino Médio.

Aula 01: Jornada Histórica

A compreensão da semelhança matemática remonta à Grécia Antiga, quando matemáticos como Tales de Mileto e Pitágoras exploraram as proporções e as relações geométricas em figuras semelhantes. Tales, por volta do século VI a.C., é frequentemente lembrado pelo famoso "Teorema de Tales", que estabelece que um feixe de retas paralelas determina, em duas transversais quaisquer, segmentos proporcionais.

A semelhança matemática começou a se desenvolver mais profundamente com Euclides, autor da obra "Os Elementos". No livro VI de "Os Elementos", Euclides formalizou os princípios da semelhança, incluindo a definição de figuras semelhantes e suas propriedades.

Durante a Renascença, o estudo da semelhança ganhou novo vigor com a redescoberta das obras gregas, e matemáticos como Leonardo da Vinci e Luca Pacioli exploraram as aplicações da semelhança em arte, arquitetura e engenharia.

No século XIX, a semelhança matemática desempenhou um papel crucial na geometria projetiva, com matemáticos como Jean-Victor Poncelet e Karl von Staudt desenvolvendo teorias sobre projeções e figuras geométricas semelhantes.

Hoje, a semelhança matemática continua a ser uma parte fundamental do currículo de Geometria, não apenas em escolas, mas também em aplicações práticas em áreas como computação gráfica, engenharia e design. A compreensão das proporções e relações entre figuras semelhantes é uma ferramenta essencial para resolver uma ampla gama de problemas geométricos e práticos.

Aula 02: Introdução à Semelhança

DEFINIÇÃO DE SEMELHANÇA MATEMÁTICA EM GEOMETRIA

Na vastidão do reino da Geometria, a Semelhança Matemática emerge como um conceito fundamental, uma pedra angular que lança luz sobre inúmeras questões e aplicações dentro deste domínio tão rico e complexo. É através do entendimento da Semelhança Matemática que desvendamos a profunda conexão entre figuras geométricas que compartilham características estruturais similares, mas que podem diferir em escala. Este conceito é, portanto, uma ferramenta essencial para a compreensão e a análise de proporções, relações angulares e outras propriedades geométricas que permeiam nosso mundo.

Definida de maneira concisa, a Semelhança Matemática se manifesta quando duas figuras geométricas, sejam elas polígonos, triângulos ou outras formas, apresentam características correspondentes idênticas ou proporcionais. O termo "semelhante" deriva da raiz latina "similis", que significa "similar" ou "parecido", e é precisamente essa similitude que a Semelhança Matemática busca elucidar.

PROPRIEDADES DE FIGURAS SEMELHANTES

Para que duas figuras geométricas sejam consideradas semelhantes, três condições fundamentais devem ser satisfeitas:

1. Proporcionalidade Linear: As medidas de comprimento das correspondentes partes das figuras devem ser proporcionais. Em outras palavras, se a medida de um segmento em uma figura é multiplicada por um certo fator, a medida correspondente na figura semelhante deve ser multiplicada pelo mesmo fator.

2. Concordância de Ângulos: Os ângulos correspondentes entre as figuras devem ser congruentes, ou seja, possuir a mesma medida. Esta condição assegura a conservação das relações angulares entre as figuras semelhantes.

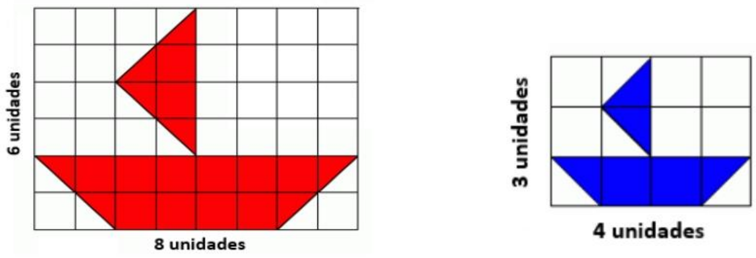
3. Estrutura Semelhante: A estrutura das figuras deve ser similar, o que significa que a mesma disposição de elementos geométricos deve ser mantida nas figuras semelhantes, mesmo que as dimensões variem.

A partir dessas condições, a Semelhança Matemática abre portas para a resolução de diversos problemas práticos. Por exemplo, na determinação de distâncias inacessíveis, como a altura de uma torre: podemos utilizar a Semelhança de Triângulos para estabelecer relações proporcionais entre as sombras projetadas de objetos e suas alturas reais.

EXEMPLOS DE FIGURAS SEMELHANTES

Na Geometria, o termo "semelhante" está associado à noção de ter a mesma configuração. É possível dizer que duas figuras são semelhantes quando possuem a mesma configuração e suas dimensões correspondentes são proporcionais. Portanto, ao ampliar, diminuir ou replicar uma figura, resultam em figuras que compartilham a mesma configuração. Atentemo-nos às seguintes figuras semelhantes, extraídas de Santos e Maymone (2015, p. 247):

Exemplo 01: Semelhança matemática em malha quadriculada.



Fonte: Santos e Maymone (2015, p. 247).

- ✓ Base menor do barco azul/Base menor do barco vermelho $= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$;
- ✓ Base maior do barco azul/Base maior do barco vermelho $= \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$;
- ✓ Altura do barco azul/Altura do barco vermelho $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

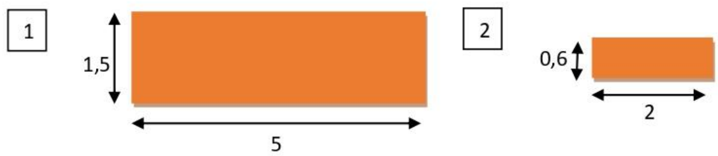
Nas figuras acima, existe uma constante de proporcionalidade, k, entre as medidas correspondentes das figuras acima; neste caso, k = ½. Essa constante chama-se razão de semelhança.

Além disso, observa-se que o barco vermelho é uma ampliação do barco azul, pois as dimensões do barco vermelho são duas vezes maiores do que as dimensões do barco azul, ou seja, os lados correspondentes foram aumentados na mesma proporção.

Exemplo 02: Dois quadrados quaisquer são semelhantes.

A razão de semelhança entre os quadrados 1 e 2 é $\frac{2}{3}$.

Exemplo 03: Dois retângulos serão semelhantes somente se a razão entre as medidas de suas bases for igual à razão entre as medidas de suas alturas.



A razão de semelhança entre os retângulos 1 e 2 é $\frac{5}{2} = 2{,}5$.

ATIVIDADE PRÁTICA – RESOLUÇÃO NO CADERNO

Objetivo: Tornar o conceito de semelhança mais concreto para os alunos, bem como incentivar o pensamento crítico e a observação detalhada das figuras que eles encontram.

Questão: Encontre três (03) pares de figuras semelhantes em revistas, jornais ou web, imprima-os, se necessário, recorte-as, cole-as em seguida, e justifique o porquê de elas serem semelhantes.

Aula 03: Razão e Proporção

Uma razão é uma comparação entre duas quantidades. Ela é expressa como uma fração, onde o numerador representa a quantidade da primeira coisa e o denominador representa a quantidade da segunda coisa. Por exemplo, se tivermos 2 maçãs e 3 laranjas, a razão entre o número de maçãs e o número de laranjas é 2/3.

A proporção é uma igualdade entre duas razões. Em outras palavras, quando duas razões são iguais, elas formam uma proporção. Por exemplo, se temos as razões 2/3 e 4/6, podemos dizer que elas formam uma proporção porque são iguais.

RESOLVENDO PROPORÇÕES

Para resolver uma proporção, você pode usar a regra do produto cruzado. Se tivermos a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, você pode multiplicar o extremo esquerdo (a) pelo extremo direito (d) e o extremo esquerdo direito (b) pelo extremo direito esquerdo (c). O resultado deve ser o mesmo, ou seja, ad = bc.

EXEMPLO: Se você tem a proporção $\frac{2}{3} = \frac{x}{6}$ e deseja encontrar o valor de x, pode usar a regra do produto cruzado:

$\frac{2}{3} = \frac{x}{6} \rightarrow 2 \cdot 6 = 3 \cdot x \rightarrow 12 = 3x$

Agora, dividindo ambos os lados por 3, você encontra x:

$x = \frac{12}{3} \rightarrow x = 4$

Portanto, x é igual a 4.

UTILIZAÇÃO DA RAZÃO NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE SEMELHANÇA

Ao resolver problemas de Semelhança Matemática, frequentemente utilizamos a razão para determinar medidas desconhecidas de figuras semelhantes.

Através da proporção (que é uma forma de expressar a igualdade de razões), podemos estabelecer relações entre as medidas dos lados de figuras semelhantes e, assim, encontrar valores desconhecidos com base em medidas conhecidas.

CÁLCULO DE ESCALA

A razão é comumente usada para calcular escalas em mapas, plantas de construção, modelagem e outros campos nos quais é necessário representar objetos do mundo real de forma proporcional em um espaço limitado.

Essas escalas são essencialmente razões que relacionam as dimensões dos objetos reais com suas representações em uma escala menor.

EXEMPLO: Suponhamos que temos um mapa de uma cidade e desejamos representar uma estrada que tem 5 quilômetros de comprimento no mundo real nesse mapa de forma proporcional. A escala do mapa é 1:10000, o que significa que cada unidade no mapa representa 10000 unidades no mundo real.

Para calcular o comprimento da estrada no mapa, usaremos a seguinte fórmula:

$$Comprimento\ no\ mapa\ = \frac{Comp.\ no\ mapa}{Comp.\ real}$$

Neste caso:

$$Comprimento\ no\ mapa\ = \frac{5\ km}{10000}\ =\ 0{,}0005\ km$$

Agora, para tornar essa medida mais compreensível, podemos convertê-la para centímetros, já que 1 km é igual a 100000 centímetros:

Comprimento no mapa = 0,0005 km . 100000 = 50 centímetros

Portanto, na escala 1:10000, a estrada de 5 quilômetros de comprimento no mundo real será representada por 50 centímetros no mapa.

Isso significa que, ao medir essa estrada no mapa, você encontrará um comprimento de 50 centímetros, o que é uma representação proporcional do comprimento real de 5 quilômetros.

ATIVIDADE PRÁTICA 01 – COMPARANDO RECEITAS DE BOLO

Objetivo: Explorar o conceito de razão e proporção através de uma atividade prática e deliciosa.

Materiais necessários:

- Duas receitas de bolo (A e B)
- Ingredientes para as duas receitas (farinha, açúcar, ovos, leite etc.)
- Balança de cozinha
- Utensílios de cozinha (tigelas, colheres de medição, copos medidores)
- Ficha com questões para os alunos

Passos:

Apresente duas receitas de bolo diferentes (A e B) para os alunos. As receitas devem ser para bolos do mesmo tipo, como um bolo de chocolate.

Divida a turma em grupos e forneça a cada grupo as duas receitas e os ingredientes necessários.

Peça aos alunos que escolham uma das receitas para fazer, mas com uma condição: eles devem ajustar a receita escolhida para fazer uma quantidade diferente de bolo. Por exemplo, eles podem escolher fazer metade da receita ou o dobro da receita.

Os alunos devem usar a balança de cozinha e os utensílios de medição para ajustar as quantidades dos ingredientes de acordo com a quantidade de bolo que desejam fazer.

Em seguida, distribua uma ficha com questões que incentivem os alunos a pensar sobre a razão e a proporção envolvidas na atividade. Os alunos poderão responder perguntas deste tipo: "Quantas vezes você multiplicou ou dividiu a receita original?" ou "Como as quantidades dos ingredientes mudaram quando você ajustou a receita?"

ATIVIDADE PRÁTICA 02 - CONSTRUINDO UMA MAQUETE DE UMA CASA

Objetivo: Introduzir o conceito de escala de forma prática e visual, construindo uma maquete de casa.

Materiais necessários:

- Folhas de papel em branco
- Régua
- Lápis de cor ou canetas coloridas

Passos:

1. Divida os alunos em grupos pequenos e forneça a cada grupo uma folha de papel em branco.

2. Peça a cada grupo que desenhe uma maquete de uma casa no papel em branco.

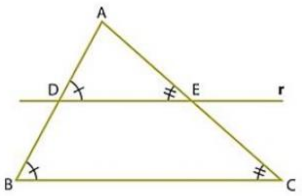
3. Defina uma escala para a atividade, por exemplo, "1 centímetro no papel representa 1 metro na maquete". Explique que isso significa que todas as medidas no desenho devem ser feitas de acordo com essa escala.

4. Os alunos devem usar a régua para medir as dimensões dos elementos em sua maquete e desenhá-los de acordo com a escala definida.

5. Depois que todos terminarem suas maquetes, discuta como a escala foi usada para criar proporções corretas entre os elementos na maquete.

Aula 04: Teorema Fundamental de Semelhança

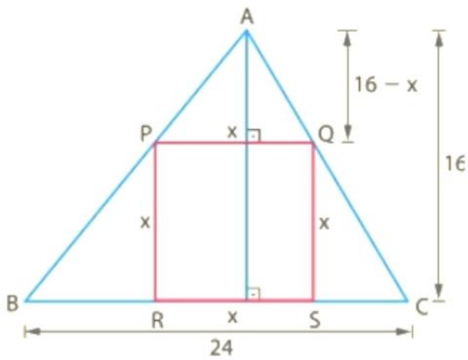
Toda reta paralela a um lado de um triângulo que intersepta os outros dois lados em pontos distintos determina outro triângulo semelhante ao primeiro[1].



$$\left.\begin{array}{l} r \parallel BC \\ r \cap AB = \{D\} \\ r \cap AC = \{E\} \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ABC$$

APLICAÇÃO DO TEOREMA EM UMA SITUAÇÃO

A figura mostra um quadrado PQRS inscrito em um triângulo ABC. Sendo BC = 24 cm e a altura relativa à base igual a 16 cm. Qual a medida do lado desse quadrado? [2]



No quadrado PQRS, o lado PQ é paralelo ao lado BC do triângulo ABC. Como, pelo teorema fundamental de semelhança, o triângulo APQ é semelhante ao triângulo ABC, seguimos:

[1] Texto e imagens adaptados de Dante (2008).
[2] Texto e imagens adaptados de Dante (2008).

$$\frac{x}{24} = \frac{16 - x}{16} \rightarrow x = 9{,}6\ cm.$$

Portanto, o lado do quadrado mede 9,6 cm.

ATIVIDADE PRÁTICA 01 - EXPLORANDO TRIÂNGULOS SEMELHANTES COM RETAS PARALELAS

Objetivo: Aplicar o Teorema Fundamental de Semelhança relacionado a retas paralelas cortando triângulos.

Materiais necessários:

- Papel em branco
- Régua
- Lápis
- Compasso
- Transferidor

Passos:

1. Desenho do Triângulo Original: Peça aos alunos que desenhem um triângulo qualquer no papel. Eles podem usar a régua para garantir que os lados do triângulo sejam retos e bem definidos. Além disso, podem usar o compasso para desenhar arcos. Os pontos onde esses arcos se cruzam serão os vértices do triângulo.

2. Adição da Reta Paralela: Agora, os alunos devem desenhar uma reta que seja paralela a um dos lados do triângulo, mas que ela atravesse os outros dois lados do triângulo.

3. Identificação dos Triângulos: Peça aos alunos que identifiquem e nomeiem os dois triângulos resultantes da interseção da reta paralela com os lados do triângulo original.

4. Comparação de Triângulos: Peça que os alunos comparem os dois triângulos formados (um dentro do triângulo original e o outro fora) e observem suas semelhanças. Aqui, peça que os alunos utilizem transferidor na medição dos ângulos e régua nas medidas dos lados.

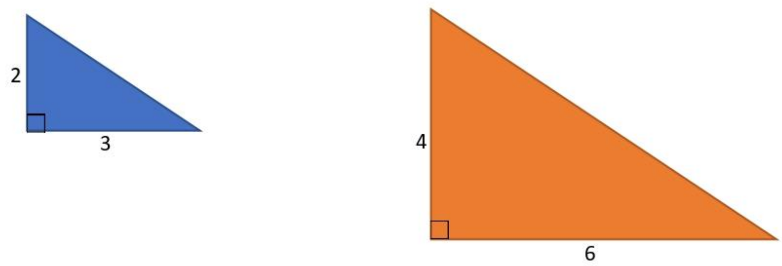
5. Discussão: Realize uma discussão em sala de aula para que os alunos compartilhem suas observações. Reforce que, de acordo com o Teorema Fundamental de Semelhança, os dois triângulos são semelhantes.

Aula 05: Semelhança em Triângulos

A semelhança de triângulos é um conceito fundamental na Geometria que nos permite comparar triângulos de diferentes tamanhos, mas com a mesma forma. Existem três casos importantes de semelhança de triângulos:

1. Ângulo-Angulo (AA): Neste caso, se dois triângulos têm ângulos correspondentes, eles são semelhantes.
Por exemplo, se um triângulo tem ângulos de 30°, 60° e 90°, e outro triângulo tem os mesmos ângulos de 30°, 60° e 90°, eles são semelhantes.

2. Lado-Ângulo-Lado (LAL): Se os comprimentos de dois lados de um triângulo estão relacionados de forma proporcional aos comprimentos dos lados correspondentes do outro triângulo e se o ângulo entre esses lados é igual ao ângulo correspondente no outro triângulo, então os triângulos são semelhantes.
EXEMPLO:



3. Lado-Lado-Lado (LLL) - Critério de Semelhança: Se todos os lados correspondentes de dois triângulos são proporcionais, eles são semelhantes.
Por exemplo, se um triângulo tem lados de 2 cm, 3 cm e 4 cm, e outro triângulo tem lados de 4 cm, 6 cm e 8 cm, eles são semelhantes.

ATIVIDADE PRÁTICA 01 – EXPLORANDO OS TRÊS CASOS DE SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Objetivo: Aplicar os três casos de semelhança de triângulos em situações do mundo real.

Materiais necessários:
- Régua;
- Lápis;
- Papel em branco;
- Transferidor;
- Conjunto de triângulos, desenhados em escala, produzidos com papel cartão.

Passos:

1. Divida os alunos em grupos e forneça a cada grupo um conjunto de triângulos desenhados em escalas distintas.

2. Peça aos alunos que encontrem pares de triângulos que tenham ângulos correspondentes iguais.
Professor, favor verificar se os lados correspondentes também são proporcionais, para confirmar a semelhança.

3. Em seguida, peça aos alunos que encontrem pares de triângulos onde os comprimentos de dois lados de um triângulo estão relacionados de forma proporcional aos comprimentos dos lados correspondentes do outro triângulo e se o ângulo entre esses lados de um triângulo é igual ao ângulo correspondente no outro triângulo.
Professor, favor verificar se os ângulos correspondentes também são congruentes para confirmar a semelhança.

4. Finalmente, os alunos devem encontrar pares de triângulos onde todos os lados correspondentes são proporcionais.
Neste caso, professor, não é necessário verificar ângulos, pois a proporção dos lados já garante a semelhança.

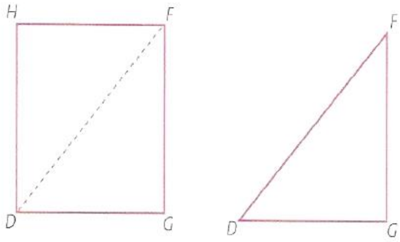
5. Ao final, peça que cada grupo apresente seus pares de triângulos encontrados e explique qual caso de semelhança se aplica a cada par.

6. Discuta em sala de aula as descobertas de cada grupo e verifique se as condições de semelhança foram satisfeitas corretamente.

Aula 06: Aplicações de Semelhança

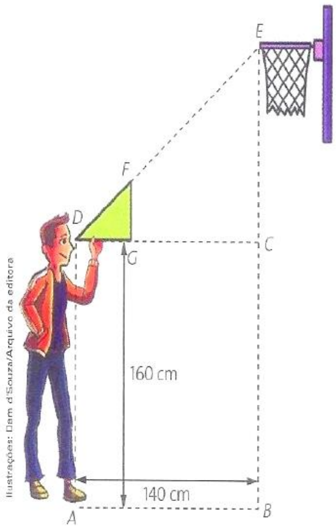
Um homem deseja saber a altura aproximada de uma cesta de basquete. Como calcular essa altura com o auxílio de um triângulo de papel DFG? [3]

Solução: Vamos medir a altura aproximada de uma cesta de basquete. Para isso, usaremos a metade de uma folha de papel retangular, como mostrado abaixo. Observe que DG = FG.



Siga estes procedimentos:

1. Mire o topo da cesta conservando a parte inferior da folha (DG) paralela ao chão. Talvez você precise afastar-se ou aproximar-se da cesta para que isso ocorra.
2. Meça a distância entre você e a perpendicular ao chão que passa pela cesta: AB = 140 cm na figura ao lado. Observe que AB = DC. Logo, DC = 140 cm.
3. Meça agora a distância do chão aos seus olhos na figura: AD = 160 cm. Veja que $AD = BC$. Logo, BC = 160 cm.



ΔDCE ~ **Δ**DGF (dois ângulos correspondentes congruentes).

Da semelhança dos triângulos DCE e DGF, concluímos que:

$$\frac{DE}{DF} = \frac{DC}{DG} = \frac{EC}{FG}.$$

Observando a última igualdade $\frac{DC}{DG} = \frac{EC}{FG}$ e sabendo que DG = FG, concluímos que $DC = EC$. Assim, a altura da cesta de basquete é dada por: BC + CE na figura: 160 cm + 140 cm = 300 cm = 3 m.

[3] Texto e imagens adaptados de Dante (2008).

ATIVIDADE PRÁTICA 01 – CALCULANDO UMA ALTURA DESCONHECIDA UTILIZANDO SEMELHANÇA

Objetivo: Esta atividade prática tem como objetivo ensinar aos alunos como calcular a altura de um objeto inacessível usando semelhança de triângulos.

Materiais necessários:

- Um objeto alto, como um poste, árvore ou prédio;
- Régua ou trena;
- Prancheta, papel e lápis;
- Calculadora.

Passos:

1. Escolha um objeto alto cuja altura não se possa medir diretamente. Pode ser um poste de luz, uma árvore alta ou um prédio.
2. Peça aos alunos que escolham um local a uma certa distância do objeto. Isso pode ser feito ao ar livre em um local onde o objeto seja visível e a distância possa ser medida com precisão.
3. Divida os alunos em grupos e forneça a cada grupo uma régua ou trena, prancheta, papel e lápis.
4. Reforce o conceito de semelhança e como ele pode ser aplicado para calcular a altura do objeto inacessível. Mostre como um triângulo semelhante pode ser formado usando o objeto, o ponto de observação e um ponto no chão onde a distância foi medida.
5. Peça aos alunos que meçam a distância horizontal entre o ponto de observação e o objeto alto com precisão, usando a régua ou trena. Registrem essa medida.
6. Agora, peça que os alunos estimem a medida da altura do objeto até a linha de visão, mantendo um ângulo reto em relação ao chão. Isso pode ser feito observando o objeto e imaginando uma linha reta até a altura desejada.
7. Com base nessas medidas, os alunos podem formar dois triângulos semelhantes: um com a altura do objeto inacessível e a distância horizontal medida e o outro com a altura estimada e a mesma distância horizontal.
8. Usando o conceito de razão de semelhança, os alunos podem configurar uma proporção e calcular a altura real do objeto inacessível.
9. Depois de calcular a altura, os alunos podem comparar suas estimativas com o valor real e discutir a precisão de suas medições.

Aula 07: Revisão e Avaliação

Neste momento, solicitamos ao professor que utilize o seguinte instrumento de pesquisa do meu trabalho de dissertação, intitulado "SEMELHANÇA MATEMÁTICA: ANALISANDO SIGNIFICADOS A PARTIR DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS", para avaliar o progresso dos alunos após a implementação da sequência didática. Este instrumento, que está inserido na dissertação, encontra-se disponível na aba "dissertações e teses" da página do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, link: https://pos-graduacao.uepb.edu.br/ppgecm/dissertacoes-e-teses-teste/. O acesso ao instrumento a ser aplicado em PDF pode ser feito através do QR code abaixo.

REFERÊNCIAS

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto & aplicações**. V. 1, 2 ed. São Paulo: Ática, 2008.

________________. **Matemática: contexto & aplicações.** V. 1, 2 ed. São Paulo: Ática, 2013.

IEZZI, Gelson et al. **Ciência e Aplicações.** V. 1, 6 ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

SANTOS, J.; MAYMONE, A. **Sucesso Sistema de Ensino:** 9º ano. Recife: Construir, 2015.