UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I – CAMPINA GRANDE
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ALLYSON MEDEIROS GABRIEL

COMPLETANDO A RETA: NÚMEROS IRRACIONAS EM SALA DE AULA NUMA PERSPECTIVA INVESTIGATIVA

CAMPINA GRANDE
2023

ALLYSON MEDEIROS GABRIEL

COMPLETANDO A RETA: NÚMEROS IRRACIONAIS EM SALA DE AULA NUMA PERSPECTIVA INVESTIGATIVA

Trabalho de Conclusão de Curso (Artigo) apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UEPB, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Área de concentração: Ensino de Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Emanuela Regia de Sousa Coelho
Coorientador: Prof. Dr. Arlandson Matheus Silva Oliveira

CAMPINA GRANDE
2023

G118c Gabriel, Allyson Medeiros.

Completando a reta [manuscrito] : números irracionais em sala de aula numa perspectiva investigativa / Allyson Medeiros Gabriel. - 2023.

38 p. : il. colorido.

Digitado.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2023.

"Orientação : Profa. Dra. Emanuela Regia de Sousa Coelho, Departamento de Matemática - CCT. "

"Coorientação: Prof. Dr. Arlandson Matheus Silva Oliveira , Coordenação do Curso de Matemática - CCEA."

1. Números irracionais. 2. Números racionais. 3. Investigação matemática. 4. Ensino fundamental. I. Título

21. ed. CDD 372.7

Elaborada por Talita M. A. Tavares - CRB - CRB 15/971 BC/UEPB

ALLYSON MEDEIROS GABRIEL

COMPLETANDO A RETA: NÚMEROS IRRACIONAIS EM SALA DE AULA NUMA PERSPECTIVA INVESTIGATIVA

Trabalho de Conclusão de Curso (Artigo) apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UEPB, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Área de concentração: Ensino de Matemática

Aprovado em 22 de Agosto de 2023

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
EMANUELA REGIA DE SOUSA COELHO
Data: 28/08/2023 17:03:52-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dra. Emanuela Regia de Sousa Coelho (Orientadora)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Documento assinado digitalmente
LUCIANA ROZE DE FREITAS
Data: 28/08/2023 18:00:52-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas (Membro interno)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Documento assinado digitalmente
GIOVANA HIGINIO DE SOUZA
Data: 28/08/2023 17:42:11-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dra. Giovana Higinio de Souza (Membro externo)
Instituto Federal do Mato Grosso (IFMT)

Dedico este trabalho à minha família, aos meus orientadores e aos meus amigos.

“Se a educação sozinha não transforma a sociedade, sem ela tampouco a sociedade muda.”
Paulo Freire

SUMÁRIO

COMPLETANDO A RETA: NÚMEROS IRRACIONAIS EM SALA DE AULA NUMA PERSPECTIVA INVESTIGATIVA

Allyson Medeiros Gabriel*

RESUMO

Este artigo de conclusão de curso foi concebido com o intuito de apresentar conceitos, ideias e propostas metodológicas que envolvem o estudo de números irracionais no ensino básico, mais precisamente no ensino fundamental, visto que a literatura dedicada a isto, nos seu mais diversos tipos e níveis, é insatisfatória e, mesmo a delicada abordagem sobre o que são os números racionais, pode não ser tão bem solidificada nesse estágio do ensino. Com esse objetivo, estabelecemos uma sequência de discussões relativas tanto aos números racionais quanto irracionais que acreditamos ser mais intuitiva e construtiva para uma formalização do que seria, ao final, o conjunto dos números reais. Ainda, como produto educacional, apresentamos propostas de atividades para serem executadas nos anos finais do ensino fundamental, seguindo o processo de Investigação Matemática.

Palavras-chave: números irracionais; números racionais; investigação matemática; ensino fundamental.

ABSTRACT

This course conclusion article was conceived with the intention of presenting concepts, ideas and methodological proposals that involve the study of irrational numbers in basic education, more precisely in fundamental education, since the literature dedicated to this, in its most diverse types and levels, is unsatisfactory and even the delicate approach about what rational numbers are may not be so well solidified at this stage of teaching. With this objective, we established a sequence of discussions related to both rational and irrational numbers that we believe is more intuitive and constructive for a formalization of what would be, in the end, the set of real numbers. Still, as an educational product, we present proposals for activities to be carried out in the final years of elementary school, following the process of Mathematical Investigation.

Keywords: irrationals numbers; rationals numbers; mathematical investigation; elementary school.

*Aluno do Programa de Pós-Graduação em Matemática do CCT, Universidade Estadual da Paraíba. E-mail: allysonmgabriel@gmail.com. Este artigo de conclusão de curso foi escrito sob orientação dos professores Dra. Emanuela Regia de Sousa Coelho e Dr. Arlandson Matheus Silva Oliveira.

1 INTRODUÇÃO

Esse trabalho propõe um passeio didático pelo ensino dos números racionais e irracionais na educação básica, especificamente, no ensino fundamental, a partir de reflexões sobre suas formas de apresentação, guiadas pelos documentos curriculares oficiais e pela literatura matemática pertinente e culminando em propostas de atividades a serem desenvolvidas em sala de aula, a partir de uma perspectiva investigativa.

Um dos grandes problemas do ensino básico de Matemática é o momento da apresentação dos números *irracionais* e todo uso posterior que se faz desses números, no restante da vida escolar e no ensino superior. Costuma-se falar que falta algo aos racionais, falta que é corrigida pelo acréscimo dos irracionais ao universo numérico dos alunos, chegando aos números reais (é o que se faz, por exemplo, quando se introduz os irracionais para garantir que sempre se pode obter a raiz de um número racional não-negativo) ou que os irracionais são aqueles números que não são racionais etc, quando na verdade nem o próprio conceito do que é ser um número *racional* está claro para a maior parte dos alunos.

Associado a isso está o fato de já existirem alguns números irracionais previamente conhecidos, como $\sqrt{2}$ ou π. Nada impede que certas justificativas venham depois na vida escolar ou acadêmica — muitas vezes é preciso lidar com a ferramenta antes de saber como ela foi feita, senão a roda não gira. Ainda que seja esse o caso com relação a certas partes da Matemática escolar, ao final do ensino médio muitos alunos ainda não têm uma ideia satisfatória do que é um número irracional; em que um número desse tipo difere de um número racional não está claro o suficiente para os alunos e muitas vezes também não para os professores.

Broetto e Santos-Wagner (2019) argumentam que a forma como esses conjuntos numéricos são tratados, seja na educação básica, seja nos cursos de formação de professores de matemática, contribui para um círculo vicioso: o estudante sai da educação básica com um entendimento incompleto e, por vezes, confuso sobre números racionais e irracionais; nos cursos de graduação, esses números são abordados de forma excessivamente rigorosa (do ponto de vista matemático) e distante do que conhecia da educação básica; retornando à educação básica, o professor recém-graduado chega sem uma preparação apropriada para tratar do tema.

A conclusão apresentada por Broetto e Santos-Wagner tem relação com a nossa própria vivência em sala de aula. Nossa ideia de tratar desse tema veio de inquietações com respeito às justificativas de que π é um número irracional e às formas como isso é tratado no ensino fundamental. Por ser um número transcendente[1], não há uma prova simples da irracionalidade[2] de π, embora esse fato seja apresentado como verdadeiro em todas as etapas do ensino, sem a preocupação de qualquer justificativa.

Na busca por uma apresentação possível sobre a irracionalidade de π, deparamo-nos com questões mais gerais sobre o tratamento dos números irracionais na educação básica, abarcando também questões sobre os números racionais e sobre a reta real como um todo. No Brasil, ainda há pouca literatura sobre o tema, mas destacamos as contribuições de Broetto (2016), Broetto e Santos-Wagner (2019) e Soares, Ferreira e Moreira (1999).

Considerando a escassez na literatura brasileira, espera-se que ao menos os documentos curriculares oficiais consigam direcionar o trato com o tema. A Base Nacional Comum Curricular - BNCC (Brasil, 2018) destaca

[1]Um número transcendente é um número real ou complexo que não é raiz de nenhuma equação polinomial com coeficientes inteiros. Uma prova da transcendência de π pode ser consultada em JONES, T. W. (2017). The Squared Case of π^n is Irrational Gives π Transcendental.

[2]Uma prova da irracionalidade de π pode ser encontrada em: BREUSCH, R. (1954). A Proof of the Irrationality of π. The American Mathematical Monthly, 61(9), 631-2.

> Com referência ao Ensino Fundamental – Anos Finais, a expectativa é a de que os alunos resolvam problemas com números naturais, inteiros e racionais, envolvendo as operações fundamentais, com seus diferentes significados, e utilizando estratégias diversas, com compreensão dos processos neles envolvidos. Para que aprofundem a noção de número, é importante colocá-los diante de problemas, sobretudo os geométricos, nos quais os números racionais não são suficientes para resolvê-los, de modo que eles reconheçam a necessidade de outros números: os irracionais. (Brasil, 2018, p.269)

Entretanto, os números irracionais só aparecem em uma única habilidade a ser desenvolvida nos anos finais do ensino fundamental e somente no 9º ano, ou seja, último dessa etapa de ensino. Quando buscamos esse direcionamento na Proposta Curricular do Estado da Paraíba — PCPB (SEECT-PB, 2019), deparamo-nos com uma situação curiosa no que se refere ao currículo da área de Matemática: há comentários ou sugestões metodológicas para abordagem de cada uma das habilidades a serem fomentadas nos anos iniciais do ensino fundamental; quando se trata dos anos finais, o currículo se resume a associar cada habilidade aos conteúdos que devem ser trabalhados. Há, sim, uma seção ínfima de possibilidades metodológicas ao final do capítulo, mas de caráter genérico, sem levar em consideração as particularidades dos temas a serem trabalhados. Este fato motivou o presente trabalho, servindo-lhe também de justificativa e enfatizando sua importância.

Neste sentido, constatamos que há uma carência de textos, incluindo normativos, que tratem das possibilidades de ensino de números reais no ensino fundamental, desde a apresentação dos números racionais até seu "completamento" com os números irracionais.

Diante isso, este trabalho não visa formular métodos de demonstração para aplicar em sala de aula, muito menos formalizar a nível de Análise Real a completude dos reais. Pretendemos lançar um olhar cuidadoso sobre quais rotas que os professores podem tomar para tornar a transição do conjunto dos racionais para os reais, com o acréscimo dos números irracionais, menos obscura para os alunos do ensino básico, tentando minimamente dirimir o ciclo indicado por Broetto e Santos-Wagner (2019). Em nossos esforços, destacamos os pontos mais críticos desse trajeto com números e tentamos desenvolver o potencial das habilidades contidas na BNCC e da PCPB.

Por fim, pensando num direcionamento prático, apresentamos, como produto educacional da nossa pesquisa, algumas propostas de atividades que possam ser aplicadas em salas de aula do ensino fundamental, percorrendo os temas tratados durante o texto. Para esta parte, escolhemos a abordagem metodológica pautada na Investigação Matemática em sala de aula, visto que muito do que constitui a própria Matemática deve-se ao fato de que ela só existe enquanto um exercício investigativo. Isto implica que, para entender certos conceitos matemáticos, os alunos precisam se colocar na posição de "detetives", como afirma Braumann (2002), e protagonizar os processos de descoberta de conceitos, definições e até teoremas, que se revelam muitas vezes na resolução de um problema ou numa atividade. A própria BNCC apresenta a Investigação Matemática como um dos Processos Matemáticos a serem adotados no ensino fundamental e destaca que, juntamente da Resolução de Problemas, Desenvolvimento de Projetos e Modelagem Matemática, esses processos são "potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático" (Brasil, 2018, p. 266) por parte dos estudantes nessa etapa do ensino.

O objetivo geral deste trabalho foi construir e apresentar uma introdução teórico-investigativa aos números irracionais que seja factível na sala de aula do ensino fundamental. Para tanto, precisamos fragmentar nosso objetivo geral nos seguintes objetivos específicos:

- compreender as frações, sua relação com as expressões decimais e como se constitui o conjunto dos números racionais;

- generalizar como é feita a conversão da representação decimal para fracionária de dízimas periódicas;
- compreender a incomensurabilidade de segmentos;
- entender por que os racionais não são suficientes para preencher toda a reta numérica;
- propor roteiros de investigação em sala de aula sobre números racionais, irracionais, incomensurabilidade, aproximação e representação numérica.

A fim de atingir nossos objetivos, este trabalho está organizado em três seções de desenvolvimento, além desta Introdução e de Considerações Finais.

Iniciamos a seção 2 nos debruçando sobre a construção dos números racionais a partir da ideia de fração, passando pela representação decimal, pela relação e conversão entre essas duas formas de representação, por uma caracterização do conjunto dos números racionais e pela generalização do processo de obter uma fração geratriz de uma dízima periódica.

Na seção 3 apresentamos a noção de número irracional. Fazemos algumas discussões sobre a forma como esses números são apresentados no ensino básico e tecemos algumas considerações sobre os erros ao conceituá-los. Em seguida, caracterizamos o conjunto dos irracionais e tratamos a questão da incomensurabilidade de segmentos. Tratamos, ainda, da manipulação algébrica dos irracionais, com o objetivo de fugir dos exemplos comuns. Por fim, falamos um pouco sobre como podemos entender de maneira intuitiva que os racionais deixam "buracos" na reta real.

Finalmente, na seção 4, propomos uma série de atividades de cunho investigativo a serem realizadas em sala de aula com o acompanhamento do professor, mas com o aluno como protagonista e agente das investigações.

2 OS NÚMEROS RACIONAIS

No Livro X dos Elementos, de Euclides, na tradução para o português do Irineu Bicudo, constam 127 páginas tratando de teoremas sobre a *incomensurabilidade* de segmentos. Nos mais de 100 teoremas explanados neste livro, a palavra *Irracional* (traduzida diretamente do grego) aparece com bastante frequência, dado que a ideia abstrata de número, na linguagem da época, era entendida como magnitudes (grandezas), comprimentos de segmentos, áreas de figuras planas. Deste momento, podemos então garantir que a preocupação com a existência de grandezas que não podiam ser medidas a partir de uma magnitude, dada pelo que se chamava de número racional, era real!

Ou seja, os gregos antigos já tinham uma visão muito bem amadurecida do que séculos depois chamaríamos de Conjunto dos Números Racionais, formalizado apenas através da linguagem moderna de conjuntos, porém, já entendido historicamente por todo o mundo se levarmos em consideração o fato de que as frações sempre foram elementos muito conhecidos desde o antigo Egito. Operar com frações foi a base matemática de muitas culturas, poderíamos até dizer que é mais natural pensar em frações, visto que todos os contextos da vida prática diziam respeito a repartição, divisão, e que é muito difícil encontrar uma situação de caráter *inteiro*, a não ser na quase que primitiva operação de contagem.

E essa visão mais simples sobre frações é mais ou menos a que se mantém até hoje, apesar de o conjunto dos racionais ser algo mais abstrato, as frações constituem um elemento bastante material e concreto na vida prática, quando nos referimos a dizeres como "daqui a meia hora", "um quarto de xícara" ou "pagar o dízimo" estamos fazendo um uso literal da linguagem de frações dentro da linguagem corrente. Ou seja, o entendimento sobre o que é uma fração e de como operar com esses números faz parte de um processo até razoavelmente natural de se ensinar e aprender. Porque a humanidade tem o costume de dividir tudo em partes (o mês, as semanas, os dias, as horas, os minutos, etc.), partes estas que constituem, reciprocamente, um todo.

2.1 A representação fracionária

As representações de números em forma de fração aparecem na vida escolar do estudante no 6º ano do ensino fundamental (habilidades EF06MA07[3] e EF06MA08[4] da BNCC), e quando dizemos "representação", queremos literalmente dizer que estamos falando de números que agora estão escritos numa forma que não a forma decimal utilizada até então. Uma coisa é dizer que estamos "devendo $R\$2,50$", mas expressar essa mesma quantia em forma de fração pode soar estranho. Então o uso das frações diz respeito a qual situação matemática estamos lidando. Ora, é bem mais simples dizer que se dividirmos um bolo em 3 partes teremos *um terço* ao invés de $0,3333\ldots$ Realizar certas operações com números em sua forma decimal pode ser mais complicado, e é aí que a forma fracionária tem vantagem, pois possui uma "álgebra" muito bem definida para fazer contas manualmente, e é isso que importa a essa altura do ensino.

Para um estudante de ensino fundamental, não é difícil compreender que o símbolo $\frac{1}{2}$ corresponde à ideia de metade, assim como $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, todas as frações da forma $\frac{1}{q}$, com $q \in \mathbb{N}$; queremos dizer que estamos pegando um todo e dividindo em q partes iguais, onde q é um número natural maior que 1. Ideia bastante praticável visualmente se dissermos que um retângulo desenhado no quadro representa uma barra de chocolate. Saímos aqui da ideia de porções unitárias, como um saco contendo bolinhas, para uma ideia de porções que compõem um todo.

E aqui, já podemos dizer que entende-se muita coisa, tais quais:

i) esse número chamado fração é, a principio, uma divisão, isto é, ele origina-se de um processo de dividir um todo em partes iguais;

ii) que o q referido acima denomina como essa divisão será feita, isto é, em quantas partes o todo será dividido, podendo ser chamado então de *Denominador*.

Mas agora, para sairmos da ideia simples de fração unitária, é preciso entender que dividir um todo em varias partes iguais é um passo, e que podemos querer agora não apenas uma, mas varias dessas partes. Se eu divido uma barra de chocolate em 5 partes iguais, podemos querer dois desses pedaços (partes) para mim. Ou seja, eu terei agora um elemento que numera quantas dessas partes me dizem respeito, um *Numerador*, ou seja, eu quero duas das cinco partes que o todo foi subdividido, ou seja, dois quintos $\left(\frac{2}{5}\right)$. Assim, podemos generalizar a ideia de que uma fração é uma representação numérica das partes de um todo. A formulação $\frac{p}{q}$ indica que queremos uma quantidade p do todo que foi subdividido em q partes iguais[5].

Por outro lado, o entendimento de que uma fração representa um número que também possui uma representação decimal é algo mais delicado, e é aqui onde tudo se esbarra e cria-se as

[3]Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes.

[4]Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica

[5]Consideraremos durante todo esse texto que o numerador e o denominador de uma fração são números inteiros, com o denominador diferente de zero.

ilusões de ótica e confusões epistemológicas. Na próxima sessão vamos contrapor algumas ideias sobre representação fracionária e decimal.

2.2 A representação decimal de uma fração

Dizer que "faz *meia hora*" quer dizer que de uma hora metade dela já se passou, o mesmo significado tem quando dizemos que "já se passaram $0,5$ horas" desse mesmo tempo. Ora, aqui se faz necessário dizer que o poder cognitivo da linguagem de frações é extremamente poderoso e eficaz, porque uma coisa é dizer que, se 45 minutos se passaram, rapidamente convertemos isso para $\dfrac{3}{4}$ de hora, pois dividimos a hora (60 minutos) em 4 porções de 15 minutos, mas assim de cabeça, fica difícil dizer a representação decimal para essa mesma fração. Já que aqui estamos lidando com partes de um todo dividido de maneira sexagesimal e queremos sua representação num sistema que divide em dez! Sabemos que $\dfrac{3}{4}$ equivale a $0,75$, mas essa conversão não é assim tão intuitiva e direta para alunos do $6°$ ano, por exemplo. Observe que 50 minutos, isto é, $\dfrac{5}{6}$ de hora, já não é um valor tão simples de obter na representação decimal.

A relação entre as representações decimal e fracionária pode parecer obvia mas não aos olhos de um aluno nesse estágio do ensino. Por exemplo, qual a representação decimal da fração $\dfrac{1}{81}$? Qual a representação fracionária do número $0,1234$? Essas duas perguntas estão intimamente relacionadas pelo fato de que a operação de divisão determina os processos de conversão, por assim dizer, de uma representação na outra e, segundo Broetto (2019), a relação entre as representações decimal e fracionária precisa ser trabalhada melhor em todo o ensino básico. Através do processo de divisão euclidiana podemos "transformar" números da forma fracionária para a forma decimal se entendermos a fração como uma divisão, a priori.

2.3 A divisão euclidiana

Aprender a dividir dois números é um passo fundamental no entendimento de como as representações fracionária e decimal se relacionam. Vamos seguir algumas etapas tal como se um aluno começasse a pensar sobre o comportamento de certas frações. A fração $\frac{1}{2}$ representa o mesmo número que o decimal $0,5$. Mas se tomarmos a fração $\frac{1}{3}$ entramos num outro território, o que é estranho pois é apenas a próxima fração unitária, dividir algo em 3 partes é um passo ainda muito incipiente. Vejamos o que acontece[6].

Ao dividir um número menor (numerador) por um maior (denominador) temos que levar em consideração que, pelo processo da divisão euclidiana, não há o que se fazer, pois o numerador já seria o resto dessa divisão [7]. A fração $\frac{1}{3}$ equivale a dividirmos uma unidade em 3 partes. Façamos essa divisão justificando o processo e também o uso de certos passos que ao longo do tempo ficaram viciados e perderam significado conceitual.

Ao tentarmos dividir 1 por 3 nos deparamos com o fato de que operacionalmente isso não faz sentido, pois 1 é algo inteiro, 3 não cabe em 1, a ideia mais ingênua (porém correta) de que a divisão diz respeito a quantas vezes uma quantia cabe dentro da outra. Mas se pensarmos que

[6] É preciso entender que dividir um número menor por um maior ainda não é uma realização tão natural nesse estágio do ensino, mas se dividimos 1 bolo para 10 pessoas todo o processo se torna inteligível. Vamos sempre partir desse pressuposto então, da objetificação para depois nos atermos apenas ao número.

[7] A palavra "*resto*" aqui não será de interesse pois estamos interessados apenas na fração como um número, por mais que o numerador seja maior que o denominador (fração imprópria), faremos essa divisão ser exata, no sentido de que aqui, no domínio dos números racionais, lidamos com valores "quebrados", não apenas inteiros.

1 unidade são dez décimos, então queremos dividir 10 décimos por 3, o que agora é totalmente plausível. Então ao invés de começarmos a tradicional divisão assim:

$$1 \,\underline{|\, 3 \;}$$

já podemos justificar o uso desse zero que aparece fazendo o 1 agora ser 10 (ora, 1 unidade de fato é composta por 10 décimos!). Pois, temos agora:

$$\begin{array}{r|l} 10 & 3 \\ \cline{2-2} 1 & 0,3 \end{array}$$

Já podemos também justificar o aparecimento do "0," no quociente, que nada mais é que estamos dividindo uma quantia dada em décimos, portanto o resultado (quociente) também será dado em décimos (se dividirmos 10 maçãs por 3 pessoas, o resultado terá que ser maçãs ainda). Observe que o que sobra (resto) é exatamente um décimo, que, por ser agora uma subunidade, também não faz sentido dividir por três, mas um décimo também é o mesmo que 10 centésimos. Façamos então agora a mesma coisa que fizemos antes, adicionando um 0 ao número 1 que restou. Ficamos assim:

$$\begin{array}{r|l} 10 & 3 \\ \cline{2-2} 10 & 0,33 \\ 1 & \end{array}$$

Novamente obtemos resto 1, que agora representa um centésimo de unidade, mas 1 centésimo é o mesmo que 10 milésimos. Seguindo esse processo iremos sempre obter resto 1, ao qual podemos subdividir na próxima camada de grandeza e entramos num processo infinito, o qual representaremos com o uso das reticências.

$$\begin{array}{r|l} 10 & 3 \\ \cline{2-2} 10 & 0,333\ldots \\ 10 & \\ \vdots & \end{array}$$

Entendido isso, podemos então resumir tudo simplesmente assim:

$$\frac{1}{3} = 0,333\ldots$$

Antes de prosseguirmos analisaremos alguns pontos:

- aqui a ideia de um processo infinito parece ter sido aplicada levianamente, mas infelizmente uma formalização sobre o infinito a essa altura atrapalharia mais que ajudaria;
- temos o fato de que agora existe um número cuja representação decimal não pode ser escrita por completo, pelo menos não sem o uso das reticências;
- podemos então dizer que um número que possui infintas casas decimais depois da virgula, mas que um ou mais termos se repetem infinitamente é uma *Dízima Periódica* (trataremos com mais detalhes sobre isso mais a frente).

Se continuarmos a dividir as próximas frações $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \ldots\right)$ o aluno certamente encontrará algumas surpresas, como dízimas estranhas. E isso por si só já é uma proposta interessante de atividade: fazer o aluno obter números decimais a partir de frações simples. Falaremos sobre propostas de atividades mais a frente, mas todo esse processo deve ser seguido com os alunos não apenas como observadores, mas operando e explorando por si só as nuances da conversão de algumas frações para a forma decimal.

2.4 O conjunto dos números racionais

No 7º ano o tema das frações é apresentado novamente aos alunos, mas agora sob a estranha concepção de *número racional* (habilidades EF07MA10[8] e EF07MA11[9]), que pode parecer uma definição igual a que foi dada anteriormente para a definição de fração. Mas percebamos a nuance entre essas duas definições.

Definição 2.1. O conjunto dos números racionais é o conjunto $\mathbb{Q}$ formado por todos os números da forma $\frac{a}{b}$, onde a e b pertencem ao conjunto dos números inteiros e $b \neq 0$.

Essa definição aparece na vida do aluno como uma pessoa que chega vestida de terno e gravata numa festa na piscina, porque até então lidávamos com números na forma fracionária, e de repente aparece uma definição na forma de conjunto. Bom, podemos concluir então que o conjunto dos números racionais é o conjunto formado por todas as frações. Mas ainda temos que criar um método para determinar quando um número pode ser expresso em forma de fração e como representá-lo.

Se fizermos algumas conversões para a forma decimal com algumas frações (isso pode ser experimentado em sala de aula!), como as seguintes:

$$\frac{5}{9}, \frac{11}{7}, \frac{1}{29}, \frac{53}{83}, \text{etc.}$$

veremos que algumas coisas interessantes podem ocorrer. Vamos analisar cada caso ao longo desse artigo.

O passo a seguir é categorizar os números racionais a partir de sua expressão decimal, isto é, saber se ele possui uma expressão decimal finita ou infinita e periódica. Antes, porém, formalizemos a ideia de expressão decimal.

Definição 2.2. Uma **expressão decimal** é um símbolo da forma

$$\alpha = a_0, a_1a_2a_3 \ldots a_n \ldots$$

onde a_0 é um número inteiro e $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são dígitos, isto é, números inteiros tais que $0 \leq a_n \leq 9$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tem-se um dígito a_n, chamado de n-ésimo dígito da expressão decimal de α. O número natural a_0 é chamado de parte inteira de α.

Definição 2.3. Chamamos de **expressão decimal finita** a um símbolo da forma

$$\alpha = a_0, a_1a_2a_3 \ldots a_n \ldots$$

com $a_{n+1} = a_{n+2} = \ldots = 0$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Representaremos uma expressão decimal finita por

$$\alpha = a_0, a_1a_2 \ldots a_n.$$

Observe que podemos representar uma expressão decimal finita da seguinte forma:

$$\alpha = a_0, a_1a_2a_3 \ldots a_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \ldots + \frac{a_n}{10^n},$$

que é um número racional.

[8]Comparar e ordenar números racionais em diferentes contextos e associá-los a pontos da reta numérica.

[9]Compreender e utilizar a multiplicação e a divisão de números racionais, a relação entre elas e suas propriedades operatórias.

Definição 2.4. Chamamos de **expressão decimal infinita e periódica** a um símbolo da forma

$$\alpha = a_0, a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1} a_{n+2} \dots a_{n+m} \dots$$

que apresenta, a partir de certo ponto, alguns dígitos $a_{n+1}a_{n+2} \dots a_{n+m}$ se repetindo indefinidamente na mesma ordem. Diremos que uma expressão decimal infinita e periódica é uma **Dízima Periódica**.

2.5 Dízimas periódicas e fração geratriz

No 8º ano do ensino fundamental a habilidade EF08MA05[10] da BNCC contempla todo um arcabouço sobre como transformar dízimas periódicas em frações, muitas vezes cheios de fórmulas que não se sabe de onde vem e macetes. É de extrema importância que o professor saiba justificar todas as etapas desse processo, visto que ele que terá que transpor esses resultados de forma legível para o nível de maturidade que os alunos nesse estágio possuem.

Definição 2.5. Dizemos que uma dízima periódica é *simples* quando sua expressão decimal $\alpha = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots$, com $n \in \mathbb{N}$, em que o período $a_1 a_2 \dots a_n$ se repete indefinidamente na mesma ordem. Ou seja, o período aparece imediatamente após a vírgula.

Definição 2.6. Dizemos que uma dízima periódica é *composta* quando sua expressão decimal for $\alpha = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots$, com $n \in \mathbb{N}$, apresenta um ou mais dígitos após a vírgula que não se repetem, seguidos de uma parte periódica. Ou seja, existe um ou mais algarismos entre a vírgula e o período, que não fazem parte da composição do período.

Alguns exemplos de dízimas periódicas são:

- $0,777\dots$: dízima periódica simples e período 7;
- $2,292929\dots$: dízima periódica simples e período 29;
- $0,584343\dots$: dízima periódica composta e período 43;
- $1,152631631\dots$: dízimas periódica composta e período 631.

Observação 2.1. *Denotamos por $0,\overline{7}$ a dízima cujo período é 7. De maneira geral, colocamos uma barra em cima da parte periódica para não fazer uso do símbolo dúbio que pode ser as reticencias. Desse modo, o número $\alpha = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \overline{a_{n+1} a_{n+2} \dots a_{n+m}}$ representa a dízima cujo período é $a_{n+1}a_{n+2} \dots a_{n+m}$.*

Seguindo o objetivo de categorizar os números racionais a partir de sua expressão decimal, apresentamos o Teorema de Transformação de dízimas periódicas em frações cuja demonstração foi adaptada de Niven (2012).

Teorema 2.1 (Transformação de dízimas periódicas em frações)**.** *A dízima periódica*

$$0, a_1 a_2 \dots a_m b_1 b_2 \dots b_n \dots$$

é um número racional que pode ser escrito como:

$$\frac{a_1 a_2 \dots a_m b_1 b_2 \dots b_n - a_1 a_2 \dots a_m}{\underbrace{99\dots9}_{n\ vezes}\underbrace{00\dots0}_{m\ vezes}},$$

onde o denominador da fração é um número com n noves e m zeros. Sendo $a_1 a_2 \dots a_m$ a parte não periódica e $b_1 b_2 \dots b_n$ a parte periódica.

[10]Reconhecer e utilizar procedimentos para a obtenção de uma fração geratriz para uma dízima periódica.

Demonstração. Seja $0, a_1a_2 \ldots a_mb_1b_2 \ldots b_n \ldots$ uma dízima periódica, onde $0, a_1a_2 \ldots a_m$ é a parte não periódica e $b_1b_2 \ldots b_n$ o período com $n, m \in \mathbb{N}$. Vamos calcular a fração que representa essa dízima[11].

Veja que podemos reescrever a dízima periódica da seguinte maneira:

$$0, a_1a_2 \ldots a_mb_1b_2 \ldots b_n \ldots = \frac{a_1a_2 \ldots a_m}{10^m} + \frac{b_1b_2 \ldots b_n}{10^{m+n}} + \frac{b_1b_2 \ldots b_n}{10^{m+2n}} + \ldots$$

onde se percebe que a partir do segundo termo, temos uma soma infinita de termos de uma progressão geométrica com

$$c_1 = \frac{b_1b_2 \ldots b_n}{10^{m+n}} \quad \text{e} \quad q = \frac{1}{10^n} < 1.$$

Sabemos que o somatório de uma P.G. infinita com razão menor que 1 é dado por

$$S_n = \frac{c_1}{1-q}.$$

Observe ainda que n representa a quantidade de algarismos que o período possui.

$$\begin{aligned}
0, a_1a_2 \ldots a_mb_1b_2 \ldots b_n \ldots &= \frac{a_1a_2 \ldots a_m}{10^m} + \frac{b_1b_2 \ldots b_n}{10^{m+n}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10^n}} = \\
&= \frac{a_1a_2 \ldots a_m}{10^m} + \frac{b_1b_2 \ldots b_n}{10^{m+n}} \cdot \frac{10^n}{10^n - 1} = \\
&= \frac{a_1a_2 \ldots a_m}{10^m} + \frac{b_1b_2 \ldots b_n}{10^m(10^n - 1)} = \\
&= \frac{a_1a_2 \ldots a_m(10^n - 1) + b_1b_2 \ldots b_n}{10^m(10^n - 1)} = \\
&= \frac{a_1a_2 \ldots a_m \cdot 10^n - a_1a_2 \ldots a_m + b_1b_2 \ldots b_n}{10^m(10^n - 1)} = \\
&= \frac{a_1a_2 \ldots a_m \overbrace{00 \ldots 0}^{\text{n zeros}} - a_1a_2 \ldots a_m + b_1b_2 \ldots b_n}{10^m(10^n - 1)} = \\
&= \frac{a_1a_2 \ldots a_mb_1b_2 \ldots b_n - a_1a_2 \ldots a_m}{1\underbrace{00 \ldots 0}_{\text{m zeros}}\underbrace{99 \ldots 9}_{\text{n noves}}} = \\
&= \frac{a_1a_2 \ldots a_mb_1b_2 \ldots b_n - a_1a_2 \ldots a_m}{\underbrace{99 \ldots 9}_{\text{n noves}}\underbrace{00 \ldots 0}_{\text{m zeros}}}
\end{aligned}$$

onde o denominador da fração é um número com n noves e m zeros, sendo n o número de algarismos do período e m o número de algarismos da parte não periódica. □

Observação 2.2. *Quando a expressão for uma dízima periódica simples* $0, b_1b_2 \ldots b_nb_1b_2 \ldots b_n \ldots$*, com* $n \in \mathbb{N}$*, onde* $b_1b_2 \ldots b_n$ *é o período, conclui-se do Teorema anterior, que o número racional que representa essa dízima é*

$$\frac{b_1b_2 \ldots b_n}{\underbrace{99 \ldots 9}_{\textit{n noves}}}.$$

[11] Observe que a notação $a_1a_2 \ldots a_mb_1b_2 \ldots b_n$ não é a notação algébrica usual e não representa o produto dos números $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_n$; ela representa o inteiro cujos algarismos são $a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Teorema 2.2. *Toda dízima periódica representa um número racional, ou seja, é possível encontrar a fração que dá origem à dízima. A essa fração damos o nome de fração geratriz.*

Demonstração. Segue diretamente da demonstração do Teorema 2.1 e da Observação 2.2. □

Podemos generalizar o resultado do Teorema 2.2 da seguinte maneira:

Teorema 2.3 (Teorema de caracterização dos racionais)**.** *Um número é racional se, e somente se, tem uma representação decimal finita ou infinita e periódica.*

O Teorema 2.2 constitui a "volta" deste último. Falta demonstrar o fato de que se um número é racional então ele necessariamente possui uma representação decimal finita ou infinita e periódica. Provemos.

Demonstração. (*Do Teorema 2.3*) Essa demonstração decorre diretamente do algoritmo da divisão de Euclides[12], que diz que, dados $m, n \in \mathbb{Z}$, existem inteiros únicos q e r tais que

$$m = nq + r, \text{ onde } 0 \leq r < n.$$

Ou seja, $r \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, o que quer dizer que temos no máximo n possibilidades distintas para o resto quando dividimos m por n. Pelo Princípio da Casa dos Pombos[13], caso na divisão de m por n apareçam mais do que n restos, isto é, quando esgotamos todos os restos possíveis, o próximo resto necessariamente terá que ser igual a um dos n restos já computados anteriormente na divisão. O que nos leva a repetir todo (dízima periódica simples) ou apenas parte (dízima periódica composta) dos algarismos que aparecem no quociente. □

É a partir desse último teorema que iremos dar prosseguimento na discussão, pois é com ele que delimitamos o que chamamos de conjunto dos números racionais, ao passo que delimitamos também o que não é racional (podemos agora nos perguntar o que acontece com os números que possuem uma representação decimal infinita e não periódica). Mas antes, vamos a alguns pontos delicados quando se faz a passagem para o que chamaremos a seguir de *Números Irracionais*.

3 OS NÚMEROS IRRACIONAIS

No 9º ano do ensino fundamental é enfim apresentada aos alunos a noção do que é um *número irracional* e, por conseguinte, um numero *real* (habilidades EF09MA01[14] e EF09MA02[15]). Antes de discutirmos de fato o que representam esses conceitos, vejamos algumas considerações sobre a maneira como eles são apresentados. Segundo Moreira e David (2007), a crítica que se faz à abordagem usual dos livros didáticos sobre os números irracionais é a de que eles

> normalmente apresentam os irracionais como os "números" cuja representação decimal é infinita e não periódica ou, alternativamente, como os "números" que não podem ser escritos na forma de fração. E eventualmente "definem" o conjunto dos números reais como a união dos racionais com os irracionais. (Moreira e David (2007))

[12]Uma demonstração pode ser encontrada em Hefez (2022).

[13]Se tivermos $n + 1$ pombos para serem colocados em n casas, então pelo menos uma casa deverá conter dois ou mais pombos.

[14]Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade.

[15]Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica.

Bom, nada de errado com essa definição, pois do ponto de vista técnico os irracionais são exatamente isso. Porém temos que ter o cuidado se essa maneira de definir tem alguma utilidade prática no ensino básico. Moreira e David (2007) consideram essa apresentação inadequada e argumentam que:

> Ora, se o universo numérico dos alunos ainda é o conjunto dos racionais, nenhuma dessas duas caracterizações tem qualquer significado. Quando não se sabe o que significa uma forma decimal infinita não periódica, também não se sabe o que é um número irracional e vice-versa. Do mesmo modo, se a ideia escolar de número está associada, na sua concepção mais ampla, apenas a uma razão de inteiros, os irracionais não são números, já que não são razões de inteiros.

Precisamos mostrar de antemão aos alunos que, ao passo que as dízimas periódicas podem ser escritas na forma de fração (e os números decimais finitos, evidentemente), existem números que seria impossível tal façanha. E isso é uma coisa muito simples de ser feita, muito mais simples do que a contraproducente definição usualmente dada, pois esta não disponibiliza uma visualização imediata de quem seriam esses números.

Dado que os alunos já sabem que existem números cuja representação decimal é infinita, tais como $0,\overline{3}$ ou $0,12\overline{34}$ (o que é de extrema importância pois é muito comum a falsa afirmação de que os irracionais seriam aqueles números que possuem infinitas casas após a vírgula!), o que diriam eles de um número como

$$0,010110111011110111111\ldots?$$

Aqui estamos lidando com um número que possui infinitas casas após a vírgula que apesar de ter um padrão de formação, não podemos determinar um padrão que a partir de tal ponto se repetirá infinitamente. O mesmo acontece com outros números como

$$0,123456789101112131415\ldots$$

formado pela sequência dos números naturais (constante de Champernowne), que evidentemente não apresenta um período.

Esses números que não podem ser expressos como uma fração, isto é, números decimais infinitos que não possuem uma fração geratriz, são chamados de números irracionais, por não serem racionais. Porém, apenas isso não é uma informação suficiente, porque o número imaginário "i" também não um número racional, mas também não é irracional. A seguir, daremos uma definição que caracteriza o conjunto dos números irracionais, que nada mais é do que a complementação do Teorema 2.3:

Definição 3.1 (Caracterização dos irracionais)**.** Um número é irracional se, e somente se, tem uma representação decimal infinita e não periódica.

Usando essa caracterização, é simples dar exemplos de números irracionais formados por expressões decimais, sem usar necessariamente raízes. O que comumente ocorre quando apresentamos um número irracional a primeira vez aos alunos é mostrar números como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ou π, embora nem sempre seja possível explicar por que eles são irracionais.

Muitas vezes é atribuído aos números irracionais a característica de que, após a vírgula, não podemos prever qual será o próximo algarismo. Bom, isso acontece com alguns números como o próprio π, pois não se conhece sua expressão decimal completa, mas com o número $0,01001000100001000001\ldots$ podemos prever com exatidão qualquer algarismo de qualquer casa que quisermos. O que é interessante de se observar é que, ainda no 7º ano, antes mesmo de se falar em números irracionais, o número π é apresentado aos alunos como a razão entre a medida de uma circunferência e seu diâmetro (habilidade EF07MA33[16]). Isso pode ser útil do ponto de vista de entender que π é uma constante, isto é, se pegarmos qualquer círculo a razão entre sua circunferência e seu diâmetro resulta no mesmo valor, o qual chamamos de π.

Por outro lado, o que se conhece até então são os números racionais, que são uma razão entre números inteiros. Daí, para que o aluno não confunda essas duas coisas ele teria que compreender que ou o comprimento da circunferência ou o diâmetro é irracional, informação que não se tem nesse estágio do ensino. Em outros termos: a medida da circunferência tem que ser *incomensurável* com o diâmetro. Fato que não é tão simples de ser provado!

Tomemos o seguinte número:

$$0,0344827586\ldots.$$

Podemos a princípio dizer que se trata de um número irracional, pois não estamos vendo um padrão aparente se repetir. Isto quer de fato dizer que se trata de um número irracional? Provar que um dado número é irracional é uma tarefa que muitas vezes não é tão simples nem num nível avançado. Na verdade o número acima se trata da expressão decimal da fração $\frac{1}{29}$, uma fração simples, unitária, mas cujo período possui 28 casas!

Se puséssemos essa fração para um aluno encontrar sua expressão decimal, talvez ele pudesse chegar a um ponto em que começasse a crer que esse número não é racional, pois não estaria vendo um período. Mas ora, esse número já o foi dado como fração de antemão, então ele não pode não ser racional. Esse tipo de conclusão só é possível na mente do aluno que está com uma base sólida sobre o que é ser racional.

Para tratar disso, há diversas pesquisas relacionadas ao conhecimento dos graduandos em licenciatura em Matemática e estudantes secundaristas sobre números reais, muitas dessas pesquisas revelam que nem os próprios futuros professores compreendem bem o que é um número ser irracional. E isso vem do fato de que os cursos de Análise Real e Cálculo consideram que o ingressante já sabe muito bem o que é um número *Real*, quando na verdade ele chega com uma bagagem muito informal de conteúdo e, como apontou Bortolossi (2017), essa descontinuidade entre o ensino superior e a educação ainda persiste nos cursos de licenciatura em Matemática. Essa tese já havia sido tratada por Felix Klein, com o conceito da dupla ruptura.

> O jovem estudante universitário é confrontado com problemas que em nada se referem às coisas com as quais fora confrontado na escola. Naturalmente ele esquece essas coisas rapidamente e completamente. Quando, ao final do curso, ele se torna um professor, é esperado dele que ensine a matemática elementar da forma tradicional e pedante e, como não foi capacitado para discernir alguma conexão entre a matemática escolar e a da universidade, ele rapidamente retorna à forma de ensinar consagrada pelo tempo, e seus estudos universitários permanecem apenas como uma memória mais ou menos agradável que não tem influência em sua forma de ensinar (Klein (1932)).

Em algumas das pesquisas citadas acima, encontramos várias evidências do que foi percebido por Klein, como por exemplo o caso em que o número π aparece como a razão entre dois números (habilidade EF07MA33) e, portanto, deve ser racional. Mas, por outro lado, é sobejamente conhecido o fato de que π é um número irracional. As pesquisas publicadas por Soares, Ferreira e Moreira (1999) e Fischbein, Jehian e Cohen (1995) demonstram muito bem esse tipo de problema baseado em questionários aplicados em turmas de licenciandos como também em turmas de ensino médio.

[16]Estabelecer o número π como a razão entre a medida de uma circunferência e seu diâmetro, para compreender e resolver problemas, inclusive os de natureza histórica.

3.1 Incomensurabilidade de segmentos

Um exemplo clássico de número irracional dado nos primeiros contatos com o assunto é a $\sqrt{2}$, cuja clássica demonstração aritmética é dada ou não a depender do nível argumentativo trabalhado em sala. O argumento base dessa demonstração é o fato de que se $\sqrt{2}$ não fosse irracional, poderia ser escrita como uma fração p/q, o que nos leva a uma contradição. A "simplicidade" dessa demonstração esconde um fato interessantíssimo sobre o que significa *medir* esse número.

Ao que tudo indica, Hipaso de Metaponto (filósofo grego seguidor de Pitágoras) abordou de maneira geométrica esse problema e demonstrou que existiam números que não podiam ser racionais. Mais adiante, a teoria das proporções de Eudoxo resolveu o problema sobre os incomensuráveis, que constam no já citado livro X dos Elementos, contemplando todo um tratado sobre esse tema (na verdade a ideia era ter uma teoria bem definida para que o Teorema de Tales funcionasse tanto com medidas comensuráveis quanto incomensuráveis).

Faremos uma transposição dessa abordagem numérica, digamos, para um argumento geométrico considerando um quadrado de lado 1 (como todos os quadrados são semelhantes o resultado vale para qualquer quadrado). E veremos que a diagonal do quadrado e seu lado não podem ser medidos através de uma mesma unidade.

Primeiramente, façamos uma definição formal do que é a comensurabilidade entre grandezas:

Definição 3.2. Dizemos que dois segmentos são **comensuráveis** se um deles é uma fração do outro, isto é, se a razão entre eles for um número racional. Caso contrário, dizemos que os segmentos são **incomensuráveis**.

Observação 3.1. *Podemos dizer ainda que dois números são comensuráveis se houver uma mesma unidade que possa medir os dois, ou seja, que os dois sejam múltiplos dessa mesma unidade.*

Apresentamos agora um roteiro, extraído de Broetto e Santos-Wagner (2017), para entender o procedimento para se demonstrar que o lado e a diagonal do quadrado são incomensuráveis. O roteiro pode (e deve!) ser reproduzido em sala de aula. É de grande importância que o professor saiba entender e guiar todos os passos que se seguem.

Da incomensurabilidade da diagonal do quadrado de lado 1. Seja um quadrado $ABCD$ e considere a diagonal AC. Tracemos com um compasso com a ponta seca no ponto C e a outra no ponto B um arco de circunferência (no sentido horário) até que intersecte a diagonal AC no ponto E.

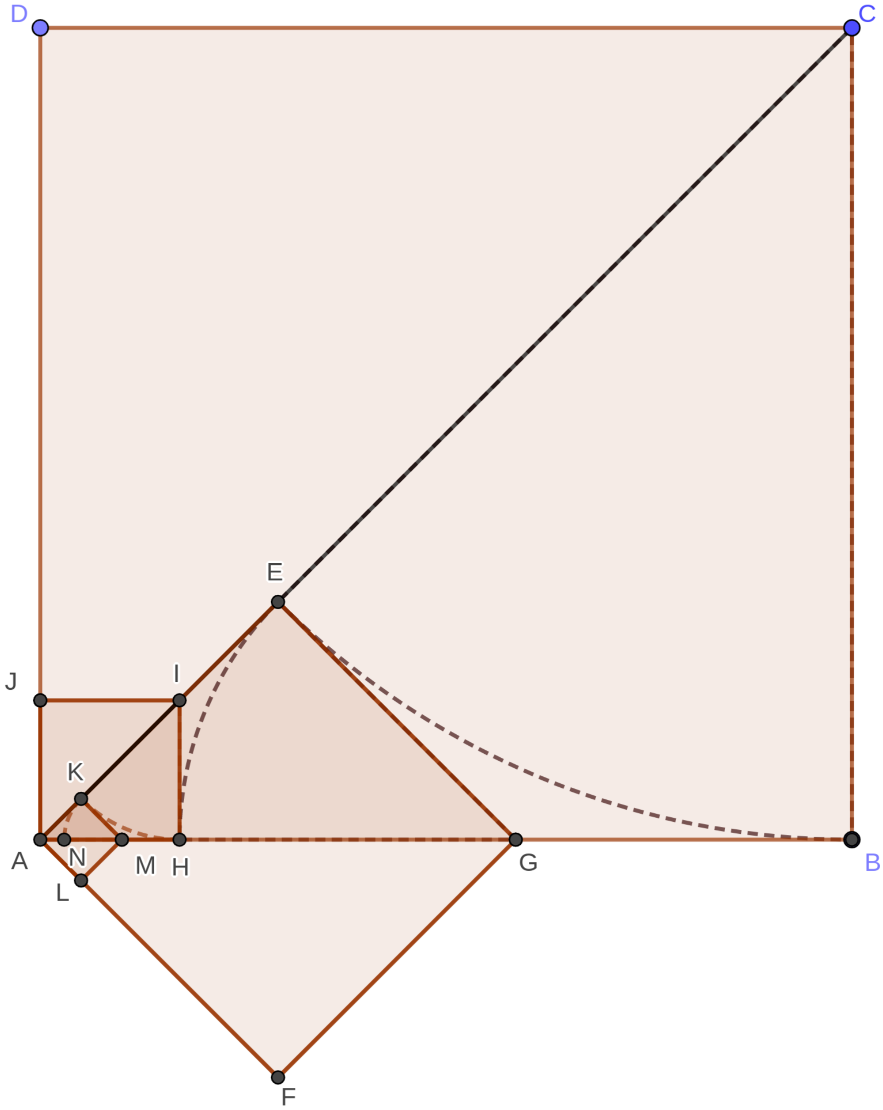
Afirmação 3.1. $BC < AC$. BC cabe uma vez em AC, pois a diagonal é maior que o lado, sobrando o segmento AE;

Afirmação 3.2. Se existir uma unidade comum aos segmentos BC e AC, ela tem que ser menor do que ou igual à sobra AE, pois como $BC = CE$ um segmento que mediria tanto BC quanto AC teria também que caber em AE;

Afirmação 3.3. Marque o ponto G sobre o lado AB de modo que $EG \perp AC$. Então, $AE = EG = GB$. $AE = EG$ pois $E\widehat{A}G = A\widehat{G}E$ e, como $BC = CE \Rightarrow C\widehat{E}B = E\widehat{B}C \Rightarrow B\widehat{E}G = G\widehat{B}E$ e, portanto, $EG = GB$;

Afirmação 3.4. Agora vamos repetir o processo com AE. AE cabe duas vezes em $BC = AB$ e sobra AH;

Figura 1: Incomensurabilidade do lado e da diagonal de um quadrado



Fonte: de Autoria Própria

Afirmação 3.5. Se existir uma unidade comum aos segmentos BC e AC, ela é menor do que ou igual à sobra AH;

Afirmação 3.6. $AH = HI = EI$;

Afirmação 3.7. AH cabe duas vezes em AE e sobra AK;

Afirmação 3.8. Se existir uma unidade comum aos segmentos BC e AC ela é menor do que ou igual a AK;

Afirmação 3.9. O processo pode continuar indefinidamente: uma sobra cabe duas vezes na anterior e ainda sobra alguma coisa;

Afirmação 3.10. Se existisse uma unidade comum aos segmentos BC e AC, essa unidade seria menor do que ou igual à menor das sobras. Como vimos, o processo não acaba nunca e por isso não existe a menor das sobras. Portanto, BC e AC são incomensuráveis.

$\square$

Com isso conseguimos demonstrar que o lado do quadrado não pode ser comensurável com sua diagonal, ou seja, nenhuma fração do lado cabe um número inteiro de vezes na diagonal. O que significa que sendo o lado a unidade, o número que exprime a diagonal é irracional. Isso não deve levar à percepção de que o tamanho desse segmento é algo impreciso, inexato (pois conseguimos marcar ele na reta), mas quer dizer que não podemos exprimi-lo como uma soma de um número finito de frações do lado. Neste caso, se faz necessário recorrer a um processo infinito para expressar o comprimento da diagonal.

Aí está o vínculo essencial do número irracional com o infinito. Não se pode exprimir um comprimento irracional através de inteiros (múltiplos e submúltiplos da unidade), sem envolver de algum modo a ideia de infinito.

Mas aí vem a pergunta, o número racional $0,3333\ldots$ também não demanda infinitas contagens? Ai que está a diferença, o vínculo do comprimento $1/3$ com o infinito é casual, porque depende da escolha das subunidades. Veja, quando dividimos 1 por 3 lá atrás, na verdade dividimos 10 décimos de unidade, depois 10 centésimos, 10 milésimos, e assim por diante. A escolha de subdividir a unidade em 10 é que levou a esse processo infinito. Mas isso não acontece se dividirmos a unidade em 3 partes iguais, como é possível dividir um segmento em 3 terços. No caso do comprimento irracional esse vínculo com o infinito é inevitável, essencial.

Um cuidado que temos que ter é que a ideia de somar nessa fase do ensino ainda é ligada a juntar uma quantidade finita de parcelas para atingir um resultado preciso. Mas a ideia com os irracionais é a de uma soma de infinitas parcelas tendo um resultado preciso, finito. E, por mais que não possamos na prática somar infinitas parcelas, podemos pensar sobre. Do mesmo modo que não se pode, na prática, dividir um segmento ao meio infinitamente (isto é, dividi-lo ao meio, depois uma de suas metades ao meio, e assim por diante), mas pode-se imaginar esse processo sendo feito.

3.2 Manipulação algébrica com irracionais

O fato de que existem números irracionais pode ser evidenciado com inúmeros exemplos como os já citados até aqui, seja pelas raízes de números que não são quadrados perfeitos (na verdade, qualquer raiz quadrada de um número que não seja um quadrado perfeito é irracional), seja por outras formas mais complicadas quando entendemos a álgebra dos irracionais. Diferentemente dos racionais, os irracionais não são fechados em relação às operações básicas, entretanto efetuando operações básicas entre um número racional e um irracional o resultado nos fornece um número irracional. Esse fato, recordado por Cordeiro (2023), nos permite construir uma gama de exemplos interessantes e diversos dos tradicionais.

Vejamos, inicialmente, o resultado anunciado.

Teorema 3.1. *Seja α um número irracional qualquer e r um número racional diferente de zero. Então, a adição, subtração, multiplicação e divisão de α e r resultarão sempre em um número irracional. Também são irracionais os números $-\alpha$ e α^{-1}.*

Demonstração. Suponha que $r_1 = \alpha + r, r_2 = \alpha - r, r_3 = \alpha \cdot r, r_4 = \alpha/r, r_5 = r/\alpha$ sejam números racionais. Como o conjunto dos números racionais é fechado para essas operações, isto é, a soma, subtração, multiplicação e divisão de racionais resultam em um número racional, então também seriam racionais os números $\alpha = r_1 - r, \alpha = r_2 + r, \alpha = r_3/r, \alpha = r_4 r, \alpha = r/r_5$. O que é uma contradição por α ser irracional. $\square$

Com esse simples teorema, podemos agora construir vários números interessantes e fugir um pouco daqueles já cansados irracionais que aparecem na literatura ($\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi$). Vejamos como criar alguns desses números.

Se somarmos, multiplicarmos ou dividirmos qualquer número racional com um irracional, ele será irracional. Exemplos:

$$\sqrt{3}+2, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ou } 2\sqrt{2}.$$

Podemos ir além e entender que a raiz quadrada de um irracional também é irracional. Obtendo números como:

$$\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{4\ldots}}}}.$$

Ou ainda, que a raiz n-ésima de um irracional também é irracional:

$$\sqrt[5]{\sqrt[4]{\sqrt{2}+3}+17}.$$

Podemos usar nossa criatividade, seguindo as regras obviamente, para criar uma sorte de números irracionais não convencionais e convencer os alunos de que esses números, ao contrário do que possa parecer, existem numa quantidade infinita.

3.3 Buracos na reta

Agora vamos tentar entender como os números racionais deixam certos buracos na reta, isto é, não a preenchem toda (embora intuitivamente não seja essa a primeira impressão). Mais ainda, a medida do quanto os racionais não preenchem a reta pode ser ilusória, pois por algum motivo tendemos a achar que os irracionais são apenas alguns pontos esparsos nessa distribuição.

A maioria dos estudantes acredita que a soma

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots,$$

onde $n \in \mathbb{N}$, pode atingir valores arbitrariamente grandes, já que estamos somando uma quantidade positiva a cada vez, a soma irá crescer sem limite. Pensemos no seguinte:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} + \overbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} \\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\overbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}} \end{aligned}$$

Esse processo pode continuar indefinidamente? Aqui pode estar uma boa discussão sobre o que "infinito" significa. Não é o propósito explicar o que é o infinito, mas expor aos alunos algumas de suas incongruências quando contrastado com o finito. O ponto do argumento acima também não é estipular um número que represente a "soma" da série, mas mostrar que, se uma existe, claramente não é maior que 1.

Uma vez que esse argumento for aceito, não é difícil convencer de que a seguinte soma

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$$

não é maior do que $1/2$. Que a soma

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\dots$$

não é maior que $1/4$. De maneira geral,

$$\sum_{k=p}^{\infty}\frac{1}{2^k}<\frac{1}{2^{p-1}}.$$

Agora, o aluno poderia também pensar que qualquer série decrescente possui uma soma finita, também temos que ter cuidado para não causar essa impressão. Consideremos a seguinte série (série harmônica):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\dots$$

Essa soma permanece menor que algum valor fixo por quantos termos quisermos? Como sabemos, a resposta é não! Vejamos uma prova, seguindo as ideias de (Kifowit (2019)).

Da Divergência da Série Harmônica. Escolha um inteiro positivo k e observe que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} &= 1+\overbrace{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{k+1}\right)}^{k\text{ termos}}+\overbrace{\left(\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\dots+\frac{1}{k^2+k+1}\right)}^{k^2\text{ termos}}+\\ &+\overbrace{\left(\frac{1}{k^2+k+2}+\frac{1}{k^2+k+3}+\dots+\frac{1}{k^3+k^2+k+1}\right)}^{k^3\text{ termos}}+\dots\\ &>1+\frac{k}{k+1}+\frac{k^2}{k^2+k+1}+\frac{k^3}{k^3+k^2+k+1}+\dots\\ &>1+\left(\frac{k}{k+1}\right)+\left(\frac{k}{k+1}\right)^2+\left(\frac{k}{k+1}\right)^3+\dots\\ &=\frac{1}{1-\frac{k}{k+1}}=k+1.\end{aligned}$$

Como isso é verdade para qualquer inteiro positivo k, segue que a série harmônica diverge. □

Observação 3.2. *Aqui seria ideal que os alunos tivessem alguma noção dos seguintes fatos:*

- *entre dois racionais sempre existe um racional;*
- *o conjunto dos números pares tem mesma cardinalidade que* $\mathbb{N}$.

Com tudo isso que foi mostrado, o terreno está pronto para criarmos a necessidade de números que não são racionais.

Podemos aproveitar a ideia de Andersen (1968) e considerar o conjunto

$$A=\left\{\frac{1}{2^j}:2\leq j\in\mathbb{N}\right\},$$

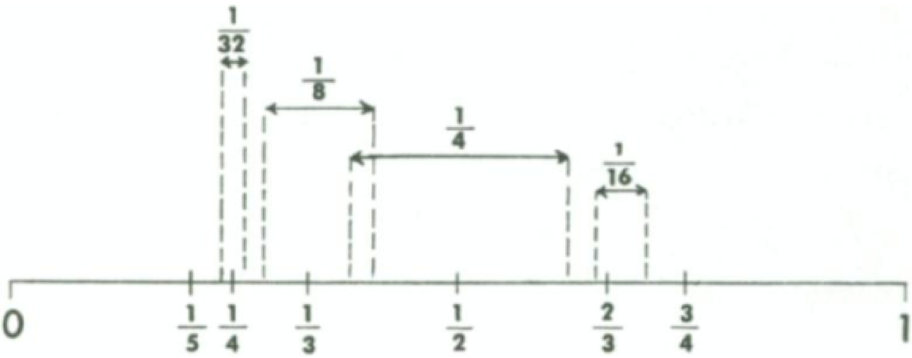
cujos elementos são vistos como medidas de segmentos. Os racionais no intervalo $(0,1)$ podem ser organizados como segue:

$$\underbrace{\frac{1}{2}}_{\frac{\bullet}{2}},\underbrace{\frac{1}{3},\frac{2}{3}}_{\frac{\bullet}{3}},\underbrace{\frac{1}{4},\frac{3}{4}}_{\frac{\bullet}{4}},\underbrace{\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5}}_{\frac{\bullet}{5}},\underbrace{\frac{1}{6},\frac{5}{6}}_{\frac{\bullet}{6}},\underbrace{\frac{1}{7},\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{4}{7},\frac{5}{7},\frac{6}{7}}_{\frac{\bullet}{7}},\dots$$

A ideia da lista acima é organizar, sem repetição, os racionais do intervalo $(0,1)$ agrupando-os em frações da forma k/n, para cada $2 \leq n \in \mathbb{N}$ e em que $k \in \mathbb{N}$ é tal que $k < n$ e M.D.C.$\{k,n\} = 1$. As frações são organizadas em ordem crescente dos denominadores e, para cada $2 \leq n \in \mathbb{N}$, as frações $\frac{\bullet}{n}$ são organizadas em ordem crescente dos numeradores. Não deve ser difícil convencer que, para cada n, o número de frações $\frac{\bullet}{n}$, nas condições que especificamos, é finito nem que essa lista que estamos organizando contém, sem repetição, todos os racionais no interior do intervalo unitário.

Seja B o conjunto de pontos do intervalo unitário organizados nessa lista ordenada de frações. Vamos estabelecer uma correspondência entre os elementos de A e de B como segue. Vamos considerar os elementos de A também de forma ordenada, em ordem crescente dos expoentes j. A fração $1/2 \in B$ será coberta por um intervalo de comprimento $1/4 \in A$. Cobrir um ponto significa colocá-lo dentro de um intervalo aberto. No caso do ponto $1/2$ e do comprimento a ele associado, podemos considerar o intervalo $(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}, \frac{1}{2} + \frac{1}{8})$. Recorde que, como é natural de se esperar a partir da nossa experiência medindo segmentos com uso de uma régua graduada, o comprimento de um intervalo da forma (a,b) é definido como $\ell((a,b)) := b - a$. Para as frações da forma $\frac{\bullet}{3}$, que são duas, vamos utilizar intervalos abertos com comprimentos iguais aos dois próximos elementos de A, isto é, $\frac{1}{3} \in (\frac{1}{3} - \frac{1}{16}, \frac{1}{3} + \frac{1}{16})$ e $\frac{2}{3} \in (\frac{2}{3} - \frac{1}{32}, \frac{2}{3} + \frac{1}{32})$. E assim por diante.

Figura 2: Recobrimento dos pontos racionais entre 0 e 1.



Fonte: Andersen (1968)

Com n variando no conjunto $\{2,3,4,5,6,\ldots\}$ e considerando, para cada tal n, as frações k/n em que $k \in \mathbb{N}$ é tal que $k < n$ e M.D.C.$\{k,n\} = 1$, obtemos infinitas frações, cada uma correspondendo a um dos infinitos racionais entre 0 e 1. Para cada n, contudo, já sabemos que há apenas uma quantidade finita de tais frações k/n, de modo que para cobrir essas frações, seguindo o processo descrito no parágrafo anterior, usaremos uma quantidade finita de intervalos abertos, consumindo, em cada etapa do processo, uma quantidade finita dos elementos de A. Como há tantos elementos em A quantos são os números naturais, não faltarão elementos em A para executar o processo de recobrimento, desde que também a quantidade de frações de inteiros em $(0,1)$ não exceda o infinito dos naturais.[17]

Analisemos o que acontece em termos de comprimentos. Cada ponto associado a um

[17]Em Aimeric Malter, Dierk Schleicher, Don Zagier; New Looks at Old Number Theory, **The American Mathematical Monthly**, Vol. 120, No. 3 (March 2013), pp. 243-264, há uma interessantíssima prova de que os racionais são enumeráveis a partir do que os autores chamam de árvore euclidiana. Uma prova sem palavras encontra-se em Des MacHale, Proof without Words: $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ Is a Countable Set, **Mathematics Magazine**, Vol. 77, No. 1 (Feb., 2004), p. 55. Uma elegante demonstração, baseada no Teorema Fundamental da Aritmética, é devida a Yoram Sagher, Counting the Rationals, **The American Mathematical Monthly**, Vol. 96, No. 9 (Nov., 1989), p. 823.

número racional no intervalo unitário estará recoberto por um intervalo aberto. A soma dos comprimentos desses intervalos não excede

$$\sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{2^j} \leq \frac{1}{2}.$$

Mas o comprimento do intervalo $(0, 1)$ é igual a 1. É forçoso concluir que há pontos nesse intervalo que não correspondem a números racionais!

Observação 3.3. *Se tomarmos os conjuntos* $\left\{\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots\right\}, \left\{\frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \ldots\right\}$ *e assim por diante, vai ficando mais claro que esse novo conjunto dos irracionais é muito grande, ele ocupa quase que toda a reta.*

4 PROPOSTAS DE ATIVIDADES EM SALA DE AULA

Nesta seção, dedicamo-nos a tentar compor uma série de investigações sobre os temas abordados neste trabalho. Partimos do pressuposto de que o aluno deve protagonizar a investigação matemática, inclusive em temas concepcionalmente difíceis como números irracionais, ao contrário do que comumente é feito nos livros nos quais apenas afirma-se que certos números são irracionais e o aluno, naturalmente, não se convence desses fatos, e é daí que nascem muitas confusões e controvérsias.

Para Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), as atividades de natureza investigativa têm ganhado crescente visibilidade nos currículos escolares, pois, segundo eles, estudos em educação tem mostrado que investigar constitui uma importante forma de construir conhecimento. Braumann (2002, p. 55) também ressalta a importância das atividades investigativas na construção do saber quando diz que

> Aprender Matemática não é simplesmente compreender a Matemática já feita, mas ser capaz de fazer investigação de natureza matemática (ao nível adequado a cada grau de ensino). Só assim se pode verdadeiramente perceber o que é a Matemática e a sua utilidade na compreensão do mundo e na intervenção sobre o mundo. Só assim se pode realmente dominar os conhecimentos adquiridos. Só assim se pode ser inundado pela paixão "detetivesca" indispensável à verdadeira fruição da Matemática. Aprender Matemática sem forte intervenção da sua faceta investigativa é como tentar aprender a andar de bicicleta vendo os outros andar e recebendo informação sobre como o conseguem. Isso não chega. Para verdadeiramente aprender é preciso montar uma bicicleta e andar, fazendo erros e aprendendo com eles.

Além de serem recomendadas por diversos estudiosos, a necessidade do uso de atividades investigativas é percebido na prática quotidiana do professor em sua sala de aula como método de melhorar o processo ensino-aprendizagem, estando tais investigações presentes inclusive nos Parâmetros Curriculares (Brasil, 1998) da disciplina de Matemática e na BNCC (Brasil, 2018), como um dos encaminhamentos metodológicos sugeridos aos professores.

4.1 Atividade 1 – Comensurabilidade e incomensurabilidade de segmentos

Ano: Esta atividade deverá ser preferencialmente desenvolvida no 9º ano e compreende a Habilidade EF09MA01 da BNCC.

Conteúdo: Segmentos comensuráveis e incomensuráveis.

Pré-requisitos: Os alunos devem saber manusear régua e compasso, dividir um segmento em n partes iguais e entender como se subdivide uma unidade em subunidades.

Objetivos:

I. Verificar a relação entre irracionalidade e a incomensurabilidade de segmentos;

II. Fazer os alunos compreenderem que qualquer segmento racional é comensurável com a unidade;

III. Mostrar que segmentos de medidas irracionais podem ser comensuráveis com outros segmentos também irracionais.

Questões norteadoras:

1. Considere quatro retângulos cujas dimensões, x e y, em cm, são dadas por:

a) $x = 15$ e $y = 35$;

b) $x = 1,5$ e $y = 3,5$;

c) $x = 15\sqrt{2}$ e $y = 35\sqrt{2}$;

d) $x = 15\sqrt{2}$ e $y = 35$.

Quais desses retângulos podem ser divididos em um número inteiro de quadrados iguais, traçando retas verticais e horizontais, de modo que se forme uma grade retangular de quadrados congruentes interior ao retângulo?

Recomendações metodológicas: O professor pode fornecer aos alunos cartolinas e materiais de desenho geométrico (régua, transferidor, compasso e esquadro) e pedir que eles construam os retângulos com as dimensões indicadas em cada item e realizem experimentos com relação às possibilidades de decomposição do interior de cada retângulo em quadrados congruentes. O professor deve deixar os alunos livres para realizar suas construções e experimentos, não indicando nem mesmo, a princípio, como realizar nenhuma construção, mas mantendo-se sempre disponível para ajudar a avançar os trabalhos à medida que os alunos apresentarem ideias ou dúvidas. Para a realização desta atividade, é necessário conhecimento prévio sobre o número $\sqrt{2}$; caso os alunos não disponham desse conhecimento ou só dele disponham parcialmente, afetando a execução do que é pedido, pode-se aproveitar para falar sobre esse número irracional, estabelecendo conexões com Aritmética, polinômios, uso de calculadora etc. Esta pode ser também uma boa ocasião para indagar o que acontecerá se trocarmos $\sqrt{2}$ por $\sqrt{3}$ e, posteriormente, se os achados serão os mesmos para a raiz de qualquer número natural no lugar de $\sqrt{2}$.

4.2 Atividade 2 – Aritmética

Ano: Esta atividade deverá ser preferencialmente desenvolvida no 8º ano e compreende a Habilidade EF08MA05 da BNCC.

Conteúdo: Dízimas periódicas e fração geratriz.

Pré-requisitos: Os alunos devem saber manusear e operar com frações, compreender a representação decimal de um número e a divisão euclidiana com decimais.

Objetivos:

I. Verificar se o aluno consegue reconhecer padrões no processo de divisão;

II. Conjecturar, formalizar e generalizar o fato de que frações de inteiros com denominador diferente de $2^n 5^m$, com n e m números naturais, possuem representação decimal infinita e periódica;

III. Aplicar a generalização da transformação de dízimas periódicas em suas respectivas frações geratrizes.

Questões norteadoras:

1. Verifique se as frações irredutíveis abaixo possuem representação decimal finita ou infinita e periódica, fazendo em cada uma delas a divisão euclidiana.

a) $\frac{73}{8}$

b) $\frac{49}{6}$

c) $\frac{11}{7}$

d) $\frac{53}{80}$

e) $\frac{1}{29}$

2. Calcule as operações entre dízimas periódicas abaixo:

a) $0,777\ldots + 0,24333\ldots$

b) $0,4526363\ldots - 0,7454545\ldots$

c) $0,252525\ldots \times 0,2333\ldots$

d) $0,42743743\ldots \div 0,2525\ldots$

Comentários: A divisão euclidiana e o Teorema Fundamental da Aritmética são poderosos aliados em argumentos sobre irracionalidade. O trabalho com a divisão euclidiana já é bastante importante por si só, uma vez que é nessa operação, dentre as assim chamadas quatro operações fundamentais, que os alunos costumam apresentar maiores dificuldades e défices de aprendizado. O trabalho com dízimas deve preparar o caminho para dar sentido à definição comumente apresentada de número irracional como um número real cuja expansão decimal é infinita e sem padrão periódico de repetição, prevenindo mal-entendidos, elucidando a diferença com relação aos racionais (expansão decimal finita ou periódica a partir de certo dígito) e a ideia de aproximação por racionais, bastante útil quando se precisa fazer contas com irracionais (como nos mui conhecidos enunciados "considere $\pi = 3,14$"). A passagem de frações para dízimas e vice-versa é muito importante na compreensão das diferentes representações de um número real. O sentido das operações entre números com "infinitas casas a serem operadas" deve ser cuidadosamente construído, e as similaridades e diferenças entre as operações com esses números e aquelas da Aritmética habitual devem ser sublinhadas. O professor pode organizar a turma em grupos e entregar a cada grupo questões diferentes a serem investigadas, com o intuito de enfatizar que os padrões e regras/algoritmos desenvolvidos podem ser, de fato, generalizados. Para a devida fundamentação matemática, bem como para encontrar elementos que podem servir de motivação para o estudo de dízimas, em nível elementar, sugerimos ver Lima (1991).

4.3 Atividade 3 – Polinômios

Ano: Esta atividade deverá ser preferencialmente desenvolvida no 9º ano e compreende a Habilidade EF09MA02 da BNCC.

Conteúdo: Reconhecimento e demonstração da irracionalidade de alguns números com radical.

Pré-requisitos: Os alunos devem compreender o que é um polinômio, suas raízes, MDC entre dois números e radicais.

Objetivos:

I. Demonstrar a irracionalidade de certos números através de uma propriedade sobre as raízes de um polinômio;

II. Tornar o aluno capaz de "construir" seus próprios irracionais e verificar sua irracionalidade.

Fundamentação matemática:

Vamos enunciar um resultado sobre polinômios que pode ser empregado em sala de aula nos casos dos polinômios quadráticos e cúbicos com os quais os alunos já devem ter certa familiaridade.

Teorema das Raízes Racionais. Se $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, com M.D.C.$\{p,q\} = 1$, é uma raiz da equação polinomial

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0, \tag{1}$$

com $a_i \in \mathbb{Z}$, $a_n \neq 0$, então:

$$p|a_0 \quad \text{e} \quad q|a_n.$$

A demonstração é bastante simples: Se $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ é raiz de (1), então

$$\begin{aligned} & a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \ldots + a_2\left(\frac{p}{q}\right)^2 + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0 \\ \Rightarrow \quad & a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_1 pq^{n-1} + a_0 q^n = 0 \\ \Rightarrow \quad & p(a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \ldots + a_1 q^{n-1}) = -a_0 q^n. \end{aligned}$$

Segue-se que p divide $a_0 q^n$ e, como não divide q^n, concluímos que p divide a_0.

Por um raciocínio análogo, passando o termo com a_n para o lado direito de

$$a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \ldots + a_1 pq^{n-1} + a_0 q^n = 0$$

e colocando q em evidência no lado esquerdo, concluímos que q divide a_n.

Para verificar que o número $x = \sqrt{2}$ não é racional, por exemplo. Elevando os dois lados da igualdade ao quadrado temos que

$$x^2 = 2 \Rightarrow x^2 - 2 = 0,$$

sabemos que $\sqrt{2}$ é raiz dessa equação polinomial. Mas, as eventuais raízes racionais da equação polinomial são divisores de 2, já que o coeficiente de x^2 é 1. Então, as possíveis raízes racionais estão no conjunto $\{\pm 1, \pm 2\}$.

Nenhum desses valores verifica a equação, portanto nenhum é raiz. Como a equação precisa ter uma raiz, concluímos que ela não é racional. Por sua vez, $\sqrt{2}$ é raiz da equação e, portanto, é irracional.

Questões norteadoras:

1. Mostre que os seguintes números são irracionais:

a) $\sqrt{3}$

b) $\sqrt[3]{2}$

c) $\sqrt[2023]{2023}$

2. Determine se cada número a seguir é racional ou irracional:

a) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$

b) $\sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$

c) $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}$

d) $\sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}$

Recomendações metodológicas: Esta atividade requer que o professor já tenha feito com seus alunos uma discussão satisfatória a respeito da existência dos números irracionais, nos moldes, por exemplo, do que fizemos na subseção 3.3. Após uma tal discussão, espera-se que os alunos estejam curiosos sobre exemplos de números irracionais, assim como que estejam mais abertos a explorar argumentos indiretos para garantir que determinado número é irracional. A atividade também requer conhecimento prévio sobre polinômios. O teorema que fundamenta nosso trabalho aqui pode ser apresentado primeiro por casos particulares. Por exemplo, consideremos o polinômio $p(x) = 3x^3 - 5x^2 + 4x + 2$ e a equação $p(x) = 0$. Temos:

$$\text{possíveis raízes racionais} = \pm\frac{\text{divisores do termo constante}}{\text{divisores do coeficiente líder}}. \tag{2}$$

Pode-se listar os divisores do termo constante e do coeficiente líder e então testar as frações da forma (2) à procura por raízes de p. Nessa procura, os alunos devem ser estimulados a empregar todo o conhecimento que têm sobre polinômios, sendo facultado ao professor introduzir coisas novas ou revisar as já estudadas. Não recomendamos apresentar exemplos de polinômios sem raízes reais, pois isso entrará em conflito com o que os alunos devem saber do Teorema Fundamental da Álgebra e tirar o foco dos números irracionais. A discussão sobre um número como $\sqrt{2}$ pode ser feita sem referência a polinômio, por um viés geométrico ou aritmético, por exemplo, só depois propondo o caminho inverso que conduz de $\sqrt{2}$ a um polinômio quadrático, ocasião na qual o professor deve indagar o que significa o fato de as possíveis raízes fornecidas pelo Teorema das Raízes Racionais não se confirmarem como raízes. O uso de algum recurso computacional pode ajudar a dar uma ideia da localização das raízes.

4.4 Atividade 4 – Representação Decimal

Ano: Esta atividade deverá ser preferencialmente desenvolvida no 7º ano e compreende as Habilidades EF07MA10 e EF07MA11 da BNCC.

Conteúdo: Operações com números racionais e representação decimal de números não racionais.

Pré-requisitos: Os alunos devem saber operar com números na sua forma decimal e converter uma expressão decimal em fração.

Objetivos:

I. Verificar se os alunos compreendem que número irracional não necessariamente é aquele cujo valor da próxima casa decimal é imprevisível, como comumente se acha. Um número pode ter um “padrão” de formação e não ser periódico;

II. Verificar se os alunos compreenderam que a soma de números irracionais podem resultar em números racionais;

III. Generalizar o fato de que $0,99999\ldots = 1$.

Atividade:

1. Calcule o resultado das somas de números irracionais abaixo:

a) $0,3131131113\ldots + 0,0202202220\ldots$

b) $0,101101110\ldots + 0,232232223\ldots$

2. Realizar as seguintes operações:

a) $0,11363636\ldots + 0,13636363\ldots$

b) $0,33333\ldots + 0,66666\ldots$

Recomendações metodológicas: Recomendamos que uma atividade como esta tome lugar após um bom trabalho com decimais e dízimas; ela pode ocorrer, por exemplo, em associação ou após uma atividade como a segunda desta nossa proposta. O professor deve pedir que os alunos expliquem se números como os das parcelas nos itens da primeira questão são racionais ou não; a discussão pode ser feita com toda a turma, deixando que cada aluno apresente seus argumentos, ou entre grupos; o importante é que se chegue a um consenso, satisfatoriamente justificado, sobre a irracionalidade desses números, sem imposições por parte do professor. Uma vez atingido semelhante consenso, o professor pode pedir que os alunos produzam outros exemplos, acompanhados sempre de justificativas, de outros irracionais como os da primeira questão. A seguir, o professor deve pedir que os alunos efetuem as somas da primeira questão e discutir a natureza das respostas. Uma discussão sobre por que são racionais as parcelas nos itens da segunda questão também deve ser provocada pelo professor, inclusive com a passagem a frações de inteiros (o professor pode pedir que as operações sejam também efetuadas com as frações correspondentes e os resultados, comparados). Feitas, a seguir, as somas da segunda questão, os resultados também devem ser discutidos.

4.5 Atividade 5 – Aproximações para π

Ano: Esta atividade deverá ser preferencialmente desenvolvida no 8º ano (mas pode ser feita no 9º) e compreende a Habilidade EF08MA19 da BNCC.

Conteúdo: Estimativa e aproximação para o número π através do comprimento da circunferência.

Pré-requisitos: Os alunos devem compreender o Teorema de Pitágoras, propriedades básicas sobre triângulos (soma dos ângulos internos, triângulos equiláteros e equiângulos).

Objetivos:

I. Entender como funciona um processo de aproximação de um número irracional por racionais;

II. Estimar valores para π a partir de construções manuais dos alunos, antes de mostrar como o processo funciona computacionalmente.

Motivação:

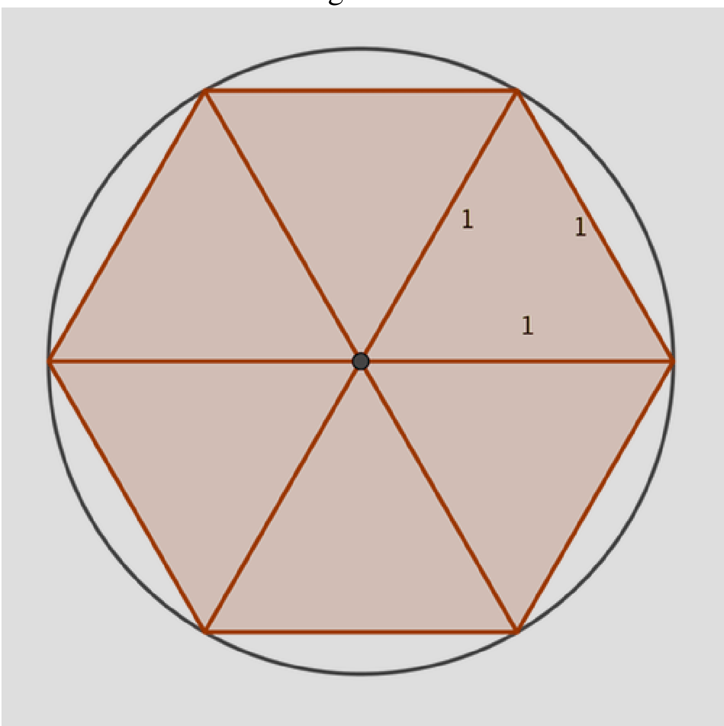
Sabemos que o comprimento da circunferência de um círculo de raio R é dado por $C = 2\pi R$. Nesta aplicação, recriamos o processo de Arquimedes com polígonos regulares inscritos em um círculo com raio pré fixado. Construímos uma aproximação para π por sucessões de números racionais, obtendo assim aproximações por falta para este número irracional.

A ideia é usar hexágonos inscritos ao círculo e ir duplicando o número de lados dos polígonos. Utilizando o GeoGebra, um aplicativo de geometria dinâmica, podemos mostrar que quando os polígonos tem 96 lados se verifica a aproximação $223/71 < \pi < 22/7$ (considerando, na última desigualdade, também o processo com os polígonos circunscritos, o qual não iremos tratar aqui), que foi realizada por Arquimedes (287 - 212 a.E.C). Para mais detalhes sobre o processo arquimediano, sugerimos consultar Heath (1921).

Etapas:

i) Primeiramente temos um círculo de raio 1. Nesse círculo construímos um hexágono regular inscrito. Pelas propriedades do hexágono sabemos que seu lado l_1 mede 1.

Figura 3:



Fonte: de Autoria Própria

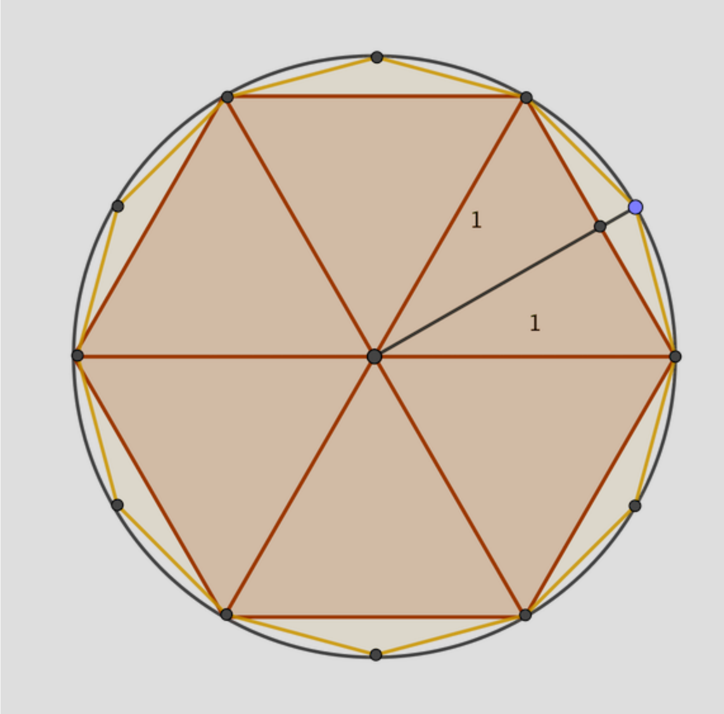
Como a figura mostra, o hexágono é formado por 6 triângulos equiláteros. E daí temos a primeira aproximação para para o comprimento da circunferência. Sendo 6 o perímetro do hexágono e o comprimento da circunferência dado por $2\pi R = 2\pi$, então $6 < 2\pi \Rightarrow 3 < \pi$.

ii) Agora, iremos refinar esse processo dobrando o número de lados do hexágono inscrito, isto é, tomando um polígono de 12 lados. Para isso, basta construirmos um triângulo isósceles usando como base o lado do hexágono anterior. Veja a figura 4.

Para calcular o perímetro do dodecágono precisamos descobrir quanto mede seu lado l_2. Descobrindo a altura a_1 do triângulo equilátero do hexágono anterior, podemos encontrar a diferença $b_1 = 1 - a_1$ e, assim, calculando por Pitágoras, o lado l_2 do dodecágono.

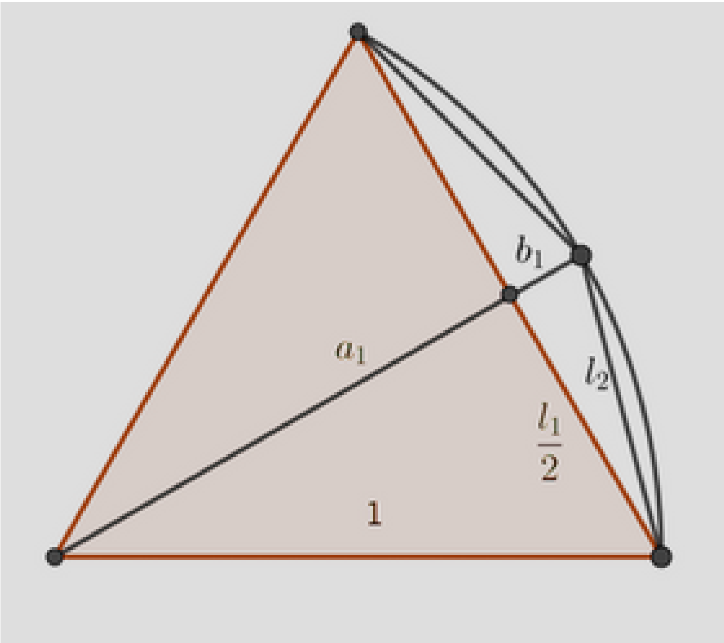
$$a_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{l_1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Figura 4:



Fonte: de Autoria Própria

Figura 5:



Fonte: de Autoria Própria

donde,

$$b_1 = 1 - a_1 = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$$

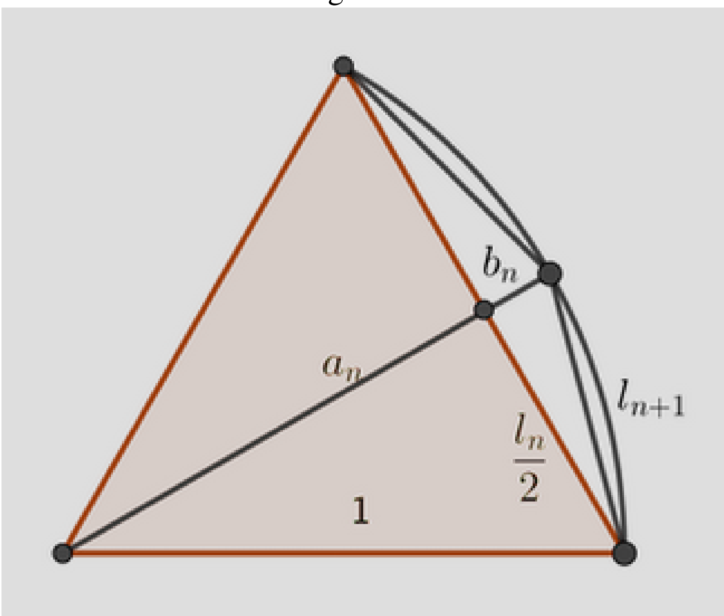
e, por Pitágoras, temos que

$$l_2 = \sqrt{\left(\frac{l_1}{2}\right)^2 + b_1^2} = \sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

Isso nos dá que o perímetro do hexágono é $6\sqrt{2-\sqrt{3}}$, o que nos dá a aproximação $\pi > 6\sqrt{2-\sqrt{3}} \approx 3,10583$.

iii) Agora, prosseguimos o processo indutivamente, dobrando em cada etapa o número de lados do polígono, isto é, 24, 48, 96, etc. O método para obter o lado do próximo polígono é o mesmo e pode ser generalizado da seguinte forma.

Figura 6:



Fonte: de Autoria Própria

Onde temos:

$$a_n = \sqrt{1 - \left(\frac{l_n}{2}\right)^2}, \quad b_n = 1 - a_n \quad \text{e} \quad l_{n+1} = \sqrt{\left(\frac{l_n}{2}\right)^2 + b_n^2}.$$

Arquimedes conseguiu realizar esse procedimento manualmente até um polígono de 96 lados, obtendo a incrível aproximação $\pi > 3,1394$. Obviamente não iremos realizar o mesmo cálculo em sala de aula, mas a ideia é entender e mostrar aos alunos como esse procedimento pode ser pensado em infinitas etapas, cada uma delas se aproximando mais do comprimento da circunferência.

Recomendações metodológicas: A ideia primordial aqui é que os alunos experienciem essa atividade no caráter mais investigativo possível, isto é, que eles desenvolvam ideias sobre como medir um comprimento, antes de aplicarmos fórmulas. Esse guia acima serve mais ao professor como uma maneira mais rápida de chegar aos resultados, mas em sala isso deve partir da experiência dos alunos com o problema.

Inclusive, o fato surpreendente aqui, é que esse processo deve funcionar para quaisquer círculos, já que parte da investigação é o alunos perceberem que a razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro é constante, e aproxima-se do valor que acabamos de estimar. Essa parte da atividade deve ser experienciada pelos alunos como uma forma deles se convencerem que esse número existe, mas que só podemos obter aproximações finitas para ele, utilizando números racionais.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A ideia desse trabalho começou com um incomodo a respeito do tratamento dado aos números irracionais, seja na formação, seja na literatura, incluindo aqui livros didáticos, documentos normativos, e muitos outros materiais voltados para a formação do professor sobre os temas do ensino básico. Em sua maioria, os números irracionais já surgem como sendo irracionais e, como bem apontou recentemente o professor Daniel Cordeiro em uma de suas aulas ministradas no PAPMEM - Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio - de 2023 (Cordeiro, 2023a) e (Cordeiro, 2023b), há uma falta de exemplos de números comprovadamente irracionais. Ou seja, esse tema está latente e necessita de revisões de conteúdo e metodologias práticas para sala de aula.

Nesse sentido, entendemos que os roteiros aqui apresentados diminuem algumas dessas inquietações além de servirem de norte para a introdução e o trato com os números reais também nas etapas seguintes de ensino.

Ainda há muitas questões sobre como traduzir melhor para o professor do ensino básico aquilo que é visto na disciplina de Análise Real, a aplicação e as consequências disto, começando por: o currículo dessa disciplina atende às expectativas de quem vai ensinar? Ou, há alguma outra complementação possível na formação do futuro professor que quebre o ciclo indicado por Broetto e Santos-Wagner (2019)? Entendemos que estudos como o programa da disciplina “Números na Educação Básica”, que está sendo desenvolvida pelo Departamento de Matemática da UFMG - Universidade Federal de Minas Gerais, são pontos de partida, mas ainda há muito trabalho a se percorrer.

Em outra direção, ainda causa estranhamento não termos bons conteúdos, por exemplo, sobre como convencer os estudantes de que números como π ou a constante de Euler sejam irracionais. Uma pesquisa futura sobre esses números talvez se faça necessário, e é o que objetivamos por hora, já que são os números irracionais mais importantes da formação escolar. Acreditamos que hajam métodos viáveis ainda não explorados para que os alunos do ensino básico não se contentem apenas com o fato sobejamente conhecido de suas irracionalidades.

Referências

ABBOTT, S. **Understanding Analysis.** Undergraduate Texts in Mathematics. New York: Springer, 2010.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental**. Brasília: Ministério da Educação/ Secretaria de Educação Fundamental, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

BORTOLOSSI, H. J. **A formação nas universidades do professor de matemática para a escola básica: o que é realmente preciso e prioritário?** In: Colóquio do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal Fluminense. Niterói, 2017. Disponível em: <https://youtu.be/FSzSetkZLq0>. Acesso em 7 de agosto de 2023.

BRAUMANN, C. **Divagações sobre investigação matemática e o seu papel na aprendizagem de matemática.** In: PONTE, J. P. et al. Atividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores. p. 5-24. Lisboa: SEM-SPCE, 2002.

BROETTO, G. **O ensino de números irracionais para alunos ingressantes da licenciatura em matemática**, 2016. Tese (Doutorado em Educação) - Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2016.

BROETTO, G. C.; SANTOS-WAGNER, V. M. P. **O Ensino de Números Irracionais na Educação Básica e na Licenciatura em Matemática: um círculo vicioso está em curso?** Bolema, v. 33, n.64, p. 728-747. Rio Claro (SP), 2019.

BROETTO, G. C.; SANTOS-WAGNER, V. M. P. **Números irracionais para professores (e futuros professores) de matemática.** Vitória (ES): Edifes, 2017.

CORDEIRO, D. **PAPMEM - Janeiro de 2023 - A importância de esquecida representação decimal de números racionais.** YouTube. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=tVMnpwojfO8>. Acesso em 07 de agosto de 2023.

CORDEIRO, D. **PAPMEM - Julho de 2023 - Números irracionais envolvendo logaritmos e funções trigonométricas.** YouTube. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=j6s8Il5xY1U>. Acesso em 07 de agosto de 2023.

FISCHBEIN, E.; JEHIAM, R.; COHEN, D. **The concept of irrational numbers in high scholl students and prospective teachers.** Educational Studies in Mathematics, v. 29, p. 29-44. Belgium: Kluwer Academic Publishers, 1995.

HEATH, T. L. **A History of Greek Mathematics.** Clarendon: Oxford, 1921.

HEFEZ, A. **Aritmética.** 3ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2022.

KIFOWIT, S. J. **More proofs of divergence of the harmonic series.** Praire State College, 2019.

KLEIN, F. **Elementary mathematics from an advanced standpoint.** Londres: Macmillian and Co. Ltd., 1932.

LIMA, E. L. **Meu professor de Matemática e outras histórias.** Rio de Janeiro: SBM, 1991.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A matemática do ensino médio.** Coleção do professor de matemática. Vol. 1. 11ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. **A formação matemática do professor: licenciatura e prática docente escolar.** 2ª ed. Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2007.

MOREIRA, P. C.; FERREIRA, M. C. C. **O que é um número real? Os números reais na formação do professor da Educação Básica.** In: Cury, H. N.; Vianna, C. R. (Orgs.). Formação do professor de matemática: reflexões e propostas. p. 49-94. Santa Cruz do Sul: Editora IPR, 2012.

NIVEN, I. **Números racionais e irracionais.** Rio de Janeiro: SBM, 2012.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

SECRETARIA DO ESTADO DA EDUCAÇÃO E DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA PARAÍBA . **Proposta Curricular do Estado da Paraíba: Educação Infantil e Ensino Fundamental.** 2019.

SOARES, E. F.; FERREIRA, M. C. C.; MOREIRA, P. C. **Números reais: concepções dos licenciandos e formação matemática na licenciatura.** Zetetiké - CEMPEM - FE/UNICAMP, v. 7, n. 12, p. 95-117. Campinas, 1999.

TAMAROZZI, A. C. **Identificando números irracionais através de polinômios.** Revista do Professor de Matemática, n.42, p.16-19. Rio de Janeiro, 2000.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS. **Programa da disciplina "Números na Educação Básica".** Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. [Sd]. Disponível em: <https://www.mat.ufmg.br/wp-content/uploads/2013/05/N\%C3\%BAmeros-na-Educa\%C3\%A7\%C3\%A3o-B\%C3\%A1sica1.pdf>. Acesso em 7 de agosto de 2023.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Aos amigos e orientadores Emanuela Regia e Arlandson Matheus por me inspirarem enquanto professores e nessa busca pela matemática.

Aos meus infindáveis amigos que tanto torcem por mim e pelo meu sucesso.

Aos meus pais e à minha irmã que me dão apoio incondicional.

À Daniela Cesarino por aguentar tudo que ninguém mais aguenta de mim e sem ela eu não teria feito esse trabalho.