



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA  
CAMPUS I - CAMPINA GRANDE  
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

GLEYTON LIRA DE FREITAS

UMA ABORDAGEM DA MUDANÇA DE COORDENADAS COM O  
AUXÍLIO DOS NÚMEROS COMPLEXOS E APLICAÇÕES

CAMPINA GRANDE

2023

**GLEYTON LIRA DE FREITAS**

**UMA ABORDAGEM DA MUDANÇA DE COORDENADAS COM O  
AUXÍLIO DOS NÚMEROS COMPLEXOS E APLICAÇÕES**

Dissertação de Mestrado apresentada ao  
Corpo Docente do Programa de Pós-  
Graduação em Matemática - CCT - UEPB,  
na modalidade Mestrado Profissional, como  
requisito parcial para obtenção do título de  
Mestre.

**Área de concentração:** Ensino de  
Matemática

**Orientador:** Prof. Dr. Francisco Sibério Bezerra Albuquerque

**CAMPINA GRANDE**

**2023**

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

F866u Freitas, Gleyton Lira de.  
Uma abordagem da mudança de coordenadas com o auxílio dos números complexos e aplicações [manuscrito] / Gleyton Lira de Freitas. - 2023.  
70 p.  
  
Digitado.  
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2023.  
"Orientação : Prof. Dr. Francisco Sibério Bezerra Albuquerque, Coordenação do Curso de Matemática - CCT. "  
1. Ensino de Matemática. 2. Cônicas. 3. Números complexos. 4. Representação geométrica. I. Título  
21. ed. CDD 372.7

**GLEYTON LIRA DE FREITAS**

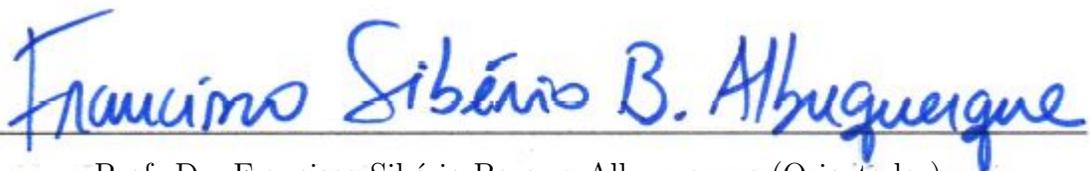
**UMA ABORDAGEM DA MUDANÇA DE COORDENADAS COM O  
AUXÍLIO DOS NÚMEROS COMPLEXOS E APLICAÇÕES**

Dissertação de Mestrado apresentada ao  
Corpo Docente do Programa de Pós-  
Graduação em Matemática - CCT - UEPB,  
na modalidade Mestrado Profissional, como  
requisito parcial para obtenção do título de  
Mestre.

**Área de concentração:** Ensino de  
Matemática

Aprovado em: 18/08/2023

**BANCA EXAMINADORA**



Prof. Dr. Francisco Sibério Bezerra Albuquerque (Orientador)  
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)



Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas (Membro interno)  
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)



Prof. Dr. Marcelo Carvalho Ferreira (Membro externo)  
Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)

À minha família, em especial ao  
meu pai Hélio Ursulino de Freitas  
(In Memoriam), DEDICO.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço inicialmente ao Grande Arquiteto do Universo, que é Deus, por toda a sabedoria a mim concedida, para que eu pudesse chegar a esse momento.

Agradeço a meus familiares, em especial à minha mãe Maria das Graças e minha esposa Maria do Socorro, por toda a paciência e apoio que me deram durante minha jornada acadêmica.

Ao meu orientador, Professor Dr. Francisco Sibério Bezerra Albuquerque, por todo o apoio, empenho e disponibilidade para acompanhar a construção deste trabalho.

Ao Corpo Docente do PROFMAT da Universidade Estadual da Paraíba, por todas as contribuições a mim repassadas durante o curso, em especial ao Professor Dr. Aldo Trajano Lourêdo, que para mim é um grande exemplo de pessoa e profissional.

Aos meus colegas de turma, por todo o empenho e união demonstrada durante o curso.

Aos mestres que me ensinaram muito do que sei, desde o início dos meus estudos.

Enfim, agradeço a todos que contribuíram de alguma forma para que eu pudesse realizar este sonho.

*“Não há nenhum ramo da Matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia ser aplicado a fenômenos do mundo real.”*  
*(Nicolai Lobachevsky)*

## RESUMO

Abordaremos neste trabalho a mudança de coordenadas via números complexos. Em seguida, aplicaremos essa abordagem na identificação de seções cônicas e determinação de seus elementos. Tendo em vista que no Ensino Médio existe a abordagem apenas das situações em que estes lugares geométricos possuem eixos paralelos aos eixos do plano cartesiano, o conteúdo abordado neste trabalho visa auxiliar alunos e professores do ensino básico, propondo de forma simples, um método para identificar e determinar os elementos das cônicas até mesmo quando estas possuírem eixos não paralelos aos eixos coordenados do plano, além de demonstrar a facilidade na solução de alguns problemas e demonstrações ao utilizar os números complexos.

**Palavras-chave:** números complexos; cônicas; ensino de matemática; representação geométrica.

## ABSTRACT

We will approach in this work coordinates changes via complex numbers. Then, we will apply this approach to identify conic sections and determine their elements. Establishing in mind that in high school there is only an approach to situations in which these geometric places have axes parallel to the axes of cartesian plane, the addressed content in this work aims to help students and teachers from basic education, proposing, in a simple way, a method to identify and determine the elements of conics even when they have axes not parallels to the coordinate axes of the plane, in addition to demonstrate facilities in solving some problems and demonstrations when using complex numbers.

**Keywords:** complex numbers; conics; mathematics teaching, geometrical representation.

## LISTA DE NOTAÇÕES E SIMBOLOGIAS

- $\mathbb{N}$  conjunto dos números naturais
- $\mathbb{R}$  conjunto dos números reais
- $\mathbb{C}$  conjunto dos números complexos
- $\in$  pertence
- $\neq$  diferente

## LISTA DE FIGURAS

2.1	Niccolò Fontana (Tartaglia). . . . .	14
2.2	Girolamo Cardano. . . . .	14
2.3	Rafael Bombelli. . . . .	16
2.4	<i>L'Algebra parte maggiore dell'Arithmetica, de Rafael Bombelli.</i> . . . . .	16
2.5	O número complexo como um ponto do plano. . . . .	21
2.6	O número complexo como um vetor. . . . .	23
2.7	Representação geométrica para a soma e a subtração de dois complexos. . . . .	27
2.8	Representação para $z \cdot z_1$ com $ z_1  = 1$ (à esquerda) e com $ z  > 1$ (à direita). . . . .	28
2.9	Representação para $\frac{z}{z_1}$ com $ z_1  > 1$ (à esquerda) e com $ z  = 1$ (à direita). . . . .	29
2.10	Representação para $-z$ , $\bar{z}$ e $z \cdot i$ . . . . .	29
3.1	Ilustração do teorema de Dandelin-Quetelet. . . . .	30
3.2	Sistemas de eixos. . . . .	32
3.3	Sistemas de eixos (rotação). . . . .	38
3.4	Análise geométrica da rotação. . . . .	38
3.5	Rotação de eixos utilizando números complexos. . . . .	45
4.1	Elipse no plano $W$ . . . . .	57
4.2	Elipse de equação $9x^2 - 4xy + 6y^2 - 30 = 0$ . . . . .	58
4.3	Parábola de equação $\left(x' - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = -\sqrt{2}\left(y' - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ no plano $W$ . . . . .	62
4.4	Parábola de equação $2x^2 - 4xy + 2y^2 + 8y = 0$ . . . . .	63
4.5	Hipérbole de equação $3x^2 - 4\sqrt{3}xy - y^2 + 20y = 25$ . . . . .	67

# SUMÁRIO

	Página
<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> <span style="float: right;"><b>11</b></span>
<b>2</b>	<b>NÚMEROS COMPLEXOS: NOTAS HISTÓRICAS E SUA ESTRUTURA</b> <span style="float: right;"><b>13</b></span>
<b>2.1</b>	<b>O surgimento dos números complexos</b> . . . . . 13
<b>2.2</b>	<b>As primeiras interpretações geométricas</b> . . . . . 17
<b>2.3</b>	<b>Os números complexos</b> . . . . . 19
2.3.1	O corpo dos números complexos . . . . . 19
2.3.2	A forma algébrica de um número complexo . . . . . 19
2.3.3	Representação geométrica de um número complexo . . . . . 21
2.3.3.1	<i>Os números complexos como pontos e vetores do plano</i> . . . . . 21
2.3.3.2	<i>Interpretações geométricas para as operações com números complexos</i> . . . . . 26
<b>3</b>	<b>UMA ABORDAGEM DA MUDANÇA DE COORDENADAS VIA NÚMEROS COMPLEXOS</b> <span style="float: right;"><b>30</b></span>
<b>3.1</b>	<b>Rotação e translação de eixos</b> . . . . . 30
3.1.1	Translação de eixos . . . . . 32
3.1.2	Eliminando os termos lineares de uma quadrática . . . . . 33
3.1.3	Rotação de eixos . . . . . 38
3.1.4	Eliminação do termo retangular $(x, y)$ de uma quadrática . . . . . 39
3.1.5	Resumo da simplificação da equação geral de uma cônica . . . . . 43
<b>3.2</b>	<b>Rotação e translação utilizando números complexos</b> . . . . . 44
3.2.1	Rotação e translação: uma visão diferente . . . . . 45
3.2.2	Números complexos e cônicas . . . . . 46
3.2.2.1	<i>Forma canônica da equação <math>\bar{A}z^2 + A\bar{z}^2 + Bz\bar{z} + Cz + \bar{C}\bar{z} + D = 0</math></i> . . . . . 49
3.2.2.2	<i>Cônicas em coordenadas cartesianas</i> . . . . . 50
3.2.2.3	<i>Resumo da simplificação da equação geral utilizando números complexos</i> . . . . . 51
<b>4</b>	<b>EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO E COMPARATIVO DE MÉTODOS</b> <span style="float: right;"><b>53</b></span>
<b>4.1</b>	<b>Exercícios de aplicação</b> . . . . . 53
<b>5</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> <span style="float: right;"><b>68</b></span>
	<b>REFERÊNCIAS</b> <span style="float: right;"><b>69</b></span>

## 1 INTRODUÇÃO

Ao adentrar em uma sala de aula, muitas vezes nos deparamos com a surpresa dos estudantes ao iniciarem o contato com determinados conteúdos matemáticos. Na maioria das vezes, esta impressão inicial é causada tanto pela dificuldade na compreensão, quanto pela forma em que o conteúdo é abordado pelo livro didático. Neste sentido, um exemplo da situação descrita acima é quando são abordados em sala de aula os números complexos.

Embora inexista a obrigatoriedade da abordagem destes números no Novo Ensino Médio, tal conteúdo mereceria uma certa importância, haja vista suas brilhantes aplicações em diversas áreas da Matemática, donde discutiremos uma destas neste trabalho.

Na maioria das vezes, ao iniciar o contato com os números complexos, vemos que os estudantes os acham de difícil compreensão e agregam a estes um certo grau de inutilidade, seja pela forma abordada nos livros, pelo desconhecimento de suas brilhantes aplicações ou por serem apenas abordados com tratamento puramente algébrico, como se a necessidade de seu surgimento se desse apenas com o intuito de resolver equações quadráticas com discriminante negativo.

Ao contrario desta ideia, a origem dos números complexos é, na verdade, bem definida e pode ser consultada em bibliografias de referência em História da Matemática. Discutiremos alguns detalhes de seu surgimento no segundo capítulo deste trabalho.

Os números complexos possuem belíssimas aplicações. Algumas mais primorosas, como por exemplo a demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra, mas também importantes aplicações em Geometria e Engenharia. Veremos também neste trabalho, como estes números se transformam em uma poderosa ferramenta para alcançar determinado objetivo matemático, desde que façamos sua correta utilização.

Comumente, verificamos que os livros didáticos trazem uma definição “padrão” sobre os complexos, que diz “Um número complexo é um número da forma  $a+bi$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $i^2 = -1$ ”. Em seguida são apresentados exemplos e exercícios propostos utilizando as propriedades e operações dos complexos. Neste nível de ensino, não são vistas aplicações e funcionalidades proporcionadas pelos números complexos, o que torna o seu tratamento puramente algébrico onde o estudante o entende apenas como uma ferramenta para realizar cálculos.

Naturalmente, surge a indagação: “*Existe um número cujo quadrado resulta em um número negativo?*”. Esta pergunta deixa o número  $i$  com significado confuso, pois até então os estudantes estão acostumados apenas com os números reais, que não possuem tal propriedade.

Considerando a relação entre números complexos e geometria, iniciada por John Wallis e posteriormente revisitada por Gauss, onde demonstra vários resultados de Geometria Plana, obtemos um direcionamento mais preciso do significado dos números complexos.

Logo, podemos representar o número  $z = a + bi$  por meio de um par ordenado da forma  $(a, b)$  onde este representa um ponto ou até mesmo um vetor no plano, donde as operações de adição e multiplicação representam movimentações do vetor no plano.

Esta representação traz um significado ao  $i$ . Podemos visualizá-lo como o ponto  $(0, 1)$  ou até mesmo como um vetor  $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ , onde  $A = (0, 0)$  e  $B = (0, 1)$ . Isto posto, podemos mostrar, por exemplo, que a multiplicação de um complexo  $z$  por  $i$  consiste em rotacionar o vetor representante de  $z$  sob um ângulo de  $\frac{\pi}{2}$  em torno da origem, no sentido anti-horário. Observe que caso multipliquemos  $z$  por  $i^2$ , obtemos duas rotações sucessivas de  $\frac{\pi}{2}$  ao vetor que representa  $z$ , e isto nos dá uma simetria com relação à origem.

Abordaremos neste trabalho a mudança de coordenadas utilizando o auxílio dos números complexos. Trataremos especificamente da mudança de coordenadas aplicada nas seções cônicas, propondo de forma simples, um método para identificar e determinar os elementos das cônicas até mesmo quando estas possuem eixos não paralelos aos eixos coordenados do plano.

No Capítulo 2, iniciaremos mostrando a origem dos números complexos, abordando seu aparecimento e suas primeiras interpretações geométricas. Em seguida, trataremos os números complexos como uma estrutura algébrica, expondo propriedades e alguns resultados importantes para o desenvolvimento do objeto de estudo do trabalho, buscando sempre conexões com sua interpretação geométrica.

No Capítulo 3, fazemos a abordagem da rotação e da translação de cônicas, desenvolvendo um método para reconhecimento da cônica através de uma equação quadrática. Inicialmente o faremos pelo método tradicional, utilizando o plano cartesiano. Em seguida, amparados pelo auxílio dos números complexos.

No Capítulo 4, são discutidos exercícios de aplicação da teoria proposta, exemplificando diferenças e a eficiência de cada método, a depender do que fora solicitado. Assim, exemplificaremos a importância dos números complexos na representação e na movimentação de objetos geométricos no plano.

Esperamos que este trabalho sirva de apoio para estudantes e professores do Ensino Médio, a fim de melhorar a compreensão dos números complexos e oferecer um complemento ao estudo das cônicas.

## 2 NÚMEROS COMPLEXOS: NOTAS HISTÓRICAS E SUA ESTRUTURA

Neste capítulo, trataremos sucintamente da história dos números complexos. Abordaremos desde o seu surgimento, mostrando suas primeiras aparições que se têm registro até o aparecimento de suas primeiras interpretações geométricas. Em seguida, faremos uma abordagem do conjunto dos números complexos como uma estrutura algébrica, enfatizando e discutindo operações, interpretações geométricas e propriedades que serão úteis ao longo do trabalho.

### 2.1 O surgimento dos números complexos

Apesar de muitos acreditarem que os números complexos surgiram pela necessidade de resolver equações quadráticas cujo discriminante é negativo ( $\Delta < 0$ ), mostraremos a seguir que isto difere do que afirmam os textos de História da Matemática.

Estas obras sugerem que o surgimento dos números complexos está diretamente relacionado com as tentativas de resolução de equações algébricas do terceiro grau e, sua abordagem, embora feita a partir do século XVIII, foi tratada, sucintamente, por estudiosos anteriores à data, como por exemplo Heron de Alexandria (Século I depois de Cristo) e Diofanto (Século III depois de Cristo).

A equação da forma  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ , com  $a \neq 0$ , foi primordialmente resolvida pelo professor da Universidade de Bolonha, Scipione del Ferro <sup>1</sup>. Del Ferro não publicou tal solução. Porém, um discípulo seu, Antônio Maria Fiore, a conhecia, e desafiou Niccolò Fontana <sup>2</sup>, o Tartaglia, a resolver a equação. Tartaglia aceitou o desafio e solucionou o problema.

No livro *Ars Magna* (datado de 1545), do italiano Girolamo Cardano<sup>3</sup> que são encontrados os primeiros registros dos números complexos. Nele, Cardano discute os métodos resolutivos de Del Ferro e Tartaglia para as equações algébricas do terceiro grau.

Em seu trabalho, Cardano precisou realizar operações com raízes quadradas que envolviam números negativos, utilizando as regras da Álgebra conhecidas à época. Porém, por não compreender com clareza os números negativos, Cardano não deu prosseguimento ao trabalho.

---

<sup>1</sup>Scipione del Ferro (1465 - 1526) foi um matemático italiano, pioneiro no método para resolver a equação cúbica reduzida.

<sup>2</sup>Niccolò Fontana, o Tartaglia (1500 - 1557), foi um matemático italiano, que desenvolveu o triângulo de Tartaglia e auxiliou no desenvolvimento da solução das equações do terceiro grau.

<sup>3</sup>Girolamo Cardano (1501 - 1576) foi um polímata italiano. Escreveu mais de 200 trabalhos sobre medicina, matemática, física, filosofia, religião e música. Na matemática foi o primeiro a introduzir as ideias gerais da teoria das equações algébricas.

Figura 2.1 – Niccolò Fontana (Tartaglia).



Fonte: Imagem da Internet

Disponível em [https://pt.wikipedia.org/wiki/Niccol%C3%B2\\_Fontana\\_Tartaglia#/media/Ficheiro:Niccol%C3%B2\\_Tartaglia.jpg](https://pt.wikipedia.org/wiki/Niccol%C3%B2_Fontana_Tartaglia#/media/Ficheiro:Niccol%C3%B2_Tartaglia.jpg). Acesso em: 25 de maio de 2023.

Figura 2.2 – Girolamo Cardano.



Fonte: Imagem da Internet

Disponível em <http://clubes.obmep.org.br/blog/wp-content/uploads/2020/07/cardano01.png>. Acesso em: 25 de maio de 2023.

Analisando a solução de Cardano-Tartaglia para as equações do terceiro grau da forma

$$x^3 = ax + b$$

observamos que a solução proposta por estes é dada por

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

e, uma equação dessa forma terá solução se

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3 \geq 0.$$

Utilizando este raciocínio, note que a equação

$$x^3 = 15x + 4$$

possui  $x = 4$  como uma das soluções, pois

$$4^3 = 64 = 15 \cdot 4 + 4.$$

Por outro lado, como no exemplo temos  $a = 15$  e  $b = 4$ ,

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3 = \left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{15}{3}\right)^3 = 2^2 - 5^3 = 4 - 125 = -121 < 0.$$

Segundo (GUIMARÃES, 2008, p.13)

Os matemáticos da Grécia Antiga julgavam óbvia a constatação de que um número negativo não possuía raiz. As equações matemáticas eram representações de problemas concretos, ou seja, chegando-se à raiz de um negativo, concluía-se que o problema não tinha solução.

Assim, de acordo com os matemáticos da Grécia Antiga, a equação não teria solução. Mas, como vimos,  $x = 4$  é solução da equação e, portanto, deveríamos ter,

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 4$$

o que aparentemente seria um absurdo.

Rafael Bombelli<sup>1</sup>, em seu livro *L'Algebra parte maggiore dell'Arithmetica*, tratou sobre as regras para operar com tais números. Nele, Bombelli decidiu considerar as raízes quadradas de números negativos como verdadeiros números, introduziu a notação  $\sqrt{-1}$ , a qual nomeou de *piú de meno*, e supôs que

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

poderia ser escrito na forma

$$A + \sqrt{B} + A - \sqrt{B}$$

---

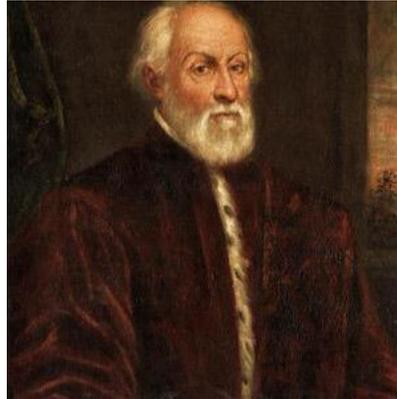
<sup>1</sup>Rafael Bombelli (1526 - 1572) foi um matemático e engenheiro hidráulico italiano. É autor de um tratado de álgebra e figura central na compreensão dos números imaginários.

com  $A, B \in \mathbb{R}$ . De fato,

$$A + \sqrt{B} + A - \sqrt{B} = 2A$$

e a representação feita dessa forma não pareceria tão absurda.

Figura 2.3 – Rafael Bombelli.



Fonte: Imagem da Internet

Disponível em [https://3.bp.blogspot.com/-2HzZjvNGuzE/XERDvhl8ivI/AAAAAAAAAMZk/yWTC5ThNFtUfrofzprJWJEN3zV2pS16fgCLcBGAs/s1600/GltQizxi\\_400x400.jpeg](https://3.bp.blogspot.com/-2HzZjvNGuzE/XERDvhl8ivI/AAAAAAAAAMZk/yWTC5ThNFtUfrofzprJWJEN3zV2pS16fgCLcBGAs/s1600/GltQizxi_400x400.jpeg). Acesso em: 25 de maio de 2023.

Figura 2.4 – *L'Algebra parte maggiore dell'Arithmetica*, de Rafael Bombelli.



Fonte: Imagem da Internet

Disponível em [https://pt.m.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Bombelli\\_-\\_Algebra,\\_1572\\_-\\_56656.jpg](https://pt.m.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Bombelli_-_Algebra,_1572_-_56656.jpg). Acesso em: 25 de maio de 2023.

Ainda assim, a aceitação dos números complexos demorou para ser completa. Cardano, por exemplo, tentou resolver problemas semelhantes sem o uso dos números sofisticados (como eram chamados na época). Apenas em 1890, foi provado que esta tarefa era impossível, dando início ao desenvolvimento dos estudos desse novo campo da Álgebra, os Números Complexos.

## 2.2 As primeiras interpretações geométricas

O primeiro registro de tentativa de obtenção da representação geométrica para os números complexos é atribuído ao matemático britânico Jonh Wallis<sup>1</sup>, contemporâneo de Isaac Newton (1643-1727).

No livro “*De Álgebra Tractatus: historicus e practicus*”, Wallis tentou conseguir uma interpretação gráfica para as raízes complexas, interpretando números negativos como distâncias. Nesta época, a fórmula

$$(\cos\theta + \sqrt{-1}\operatorname{sen}\theta)^n = \cos(n\theta) + \sqrt{-1}\operatorname{sen}(n\theta)$$

do francês Abraham Moivre (1667-1754) era conhecida por Newton, e Leonhard Euler (1707-1783), que seguia as ideias de Newton, introduziu a notação  $i = \sqrt{-1}$ . Euler considerava a raiz quadrada de um número negativo como sendo uma quantidade impossível, embora nomeando-a de quantidade imaginária. Euler ainda definiu a função exponencial no conjunto dos números complexos, também provando a fórmula

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\operatorname{sen}\theta$$

que honrosamente carrega seu nome.

Trezentos anos após a primeira aparição dos complexos (na obra de Cardano), surgiu um artigo científico que propunha uma representação geométrica correta para os números complexos, com tratamento via segmentos orientados. O artigo intitulado “*Sobre a Representação Analítica da Direção*” foi apresentado na Academia Dinamarquesa de Ciências pelo agrimensor nascido em Jorsrud, na Noruega, Caspar Wessel (1745-1818). Como citado por (JÚNIOR, 2009, p.64):

Sua proposta se baseia em uma consideração evidente de que a variação de direção produzida por operações algébricas também deveria ser representada por símbolos. Podemos constatar que Wessel não pretendia isolar a Álgebra da Geometria.[...] Para ele, a geometria analítica era uma aplicação da Álgebra à Geometria.

---

<sup>1</sup>John Wallis (1616-1703) foi um matemático britânico, também historiador da matemática. Em seu livro *Treatise on Algebra*, apresenta um importante estudo de equações e antecipa o conceito de números complexos.

Wessel não era matemático, e na época, a Noruega não tinha tradição matemática e nem uma Academia de Ciências. Assim sendo, a obra de Wessel permaneceu excluída do mundo, sendo achada cerca de 98 anos depois de ter sido escrita. Como citado por (EVES, 2011, p.522), a comunidade matemática teve acesso ao artigo de Wessel apenas 100 anos depois de seu aparecimento, e esse atraso ocorrido em seu reconhecimento (apesar de seu incontestável pioneirismo) explica o motivo do plano complexo ser chamado de Plano de Argand-Gauss ao invés de homenagear o norueguês.

Argand<sup>1</sup> e Gauss<sup>2</sup> deram importantes contribuições nos estudos sobre os números complexos. Argand escreveu em 1806 um livreto de nome “*Ensaio sobre a interpretação geométrica das quantidades imaginárias*”, que foi publicado como artigo em um periódico chamado *Annales de Mathématiques*.

Neste artigo, Argand descreveu que multiplicando  $+1$  por  $i$ , obtemos  $i$ , e multiplicando o resultado por  $i$  mais uma vez, obtemos  $-1$ . A partir disto, surge a noção de representar o produto por  $i$  como uma rotação de  $90^\circ$  no sentido anti-horário em torno da origem.

Foi Gauss quem denominou estes números de *números complexos*, e pela sua contribuição, a interpretação geométrica dos complexos foi amplamente aceita. Gauss demonstrou o Teorema Fundamental da Álgebra, criou a representação geométrica dos complexos associando parte real e parte imaginária, respectivamente, à abscissa e a ordenada de pontos do plano  $\mathbb{R}^2$ .

Através das contribuições de Gauss, é pertinente manipular os números complexos segundo os métodos conhecidos da geometria e, em consequência disto, encerra-se a desconfiança e a interpretação “artificial” dos números complexos. Como dito por Gauss em 1831, em sua obra *Teoria dos Resíduos Quadráticos*:

Fazia muito tempo que as quantidades imaginárias estavam baseadas na ficção, não sendo plenamente aceitas na matemática e vistas como uma coisa a ser tolerada; elas estavam longe de ter o mesmo status que as quantidades reais. Agora não há mais justificativa para tal discriminação, uma vez que a metafísica dos números imaginários está plenamente esclarecida, e que provou que eles têm um significado tão real quanto o dos números negativos.

Por fim, vale salientar que o tratamento de números complexos via pares ordenados de números reais foi primordialmente publicado pelo físico e matemático irlandês Willian Rowan Hamilton (1805-1865), em um artigo datado de 1833.

---

<sup>1</sup>Jean-Robert Argand (1768-1822) foi um matemático francês, nascido na Suíça. Publicou em 1806 uma interpretação geométrica dos números complexos, o Diagrama de Argand.

<sup>2</sup>Carl Friedrich Gauss (1777-1855) é considerado um dos maiores matemáticos de todos os tempos. Conhecido pela dedução da equação para o cálculo da soma dos termos de uma progressão, Gauss também teve importantes contribuições no estudo dos números complexos.

## 2.3 Os números complexos

### 2.3.1 O corpo dos números complexos

**Definição 2.1.** (Definição de Corpo). *Diz-se que um conjunto  $K$  munido de duas operações chamadas de adição (+) e multiplicação ( $\cdot$ ) é um Corpo se, para todos  $k_1, k_2$  e  $k_3 \in K$ , são válidas as seguintes propriedades:*

A1) Associatividade:  $(k_1 + k_2) + k_3 = k_1 + (k_2 + k_3)$ .

A2) Comutatividade:  $k_1 + k_2 = k_2 + k_1$ .

A3) Existência do elemento neutro: existe  $0 \in K$  tal que  $k + 0 = k$ , para todo  $k \in K$ .

A4) Existência do elemento simétrico: para todo  $k \in K$ , existe  $-k \in K$  tal que  $k + (-k) = 0$ .

M1) Associatividade:  $(k_1 \cdot k_2) \cdot k_3 = k_1 \cdot (k_2 \cdot k_3)$ .

M2) Comutatividade:  $k_1 \cdot k_2 = k_2 \cdot k_1$ .

M3) Existência do elemento neutro: existe  $1 \in K$  tal que  $k \cdot 1 = k$ , para todo  $k \in K$ .

M4) Existência do elemento inverso: para todo  $k \neq 0 \in K$ , existe  $k^{-1} \in K$  tal que  $k \cdot k^{-1} = 1$ .

AM) Distributiva da multiplicação em relação à adição:  $k_1 \cdot (k_2 + k_3) = k_1 \cdot k_2 + k_1 \cdot k_3$ .

Consideremos o conjunto  $\mathbb{C} = \{(x, y); x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ . Tomemos  $z_1 = (x_1, y_1)$  e  $z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$  e definamos as operações de adição e multiplicação, respectivamente, como:

$$+ : z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$\cdot : z_1 \cdot z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2)$$

**Teorema 2.1.** *O conjunto dos Números Complexos  $(\mathbb{C}, +, \cdot)$  é um Corpo.*

**Demonstração:** Como este Teorema não possui relação direta com o objeto de estudo do trabalho, não descreveremos aqui a sua demonstração. A demonstração deste Teorema encontra-se completa em (IEZZI, 2013a).

### 2.3.2 A forma algébrica de um número complexo

Consideremos o subconjunto  $R' \subset \mathbb{C}$ ,

$$R' = \{(x, y) \in \mathbb{C} : y = 0\}$$

ou seja, os pares ordenados cujo segundo termo é zero. Note que os pares  $(1, 0)$ ,  $(0, 0)$ ,  $(x, 0)$ ,  $(x + y, 0)$  e  $(x \cdot y, 0)$  pertencem a  $R'$ .

Consideremos agora uma aplicação  $f : \mathbb{R} \rightarrow R'$ , que aplica cada  $x \in \mathbb{R}$  ao par ordenado  $(x, 0) \in R'$ .

Observe que, todo par  $(x, 0) \in R'$  possui correspondência, segundo  $f$ , com  $x \in \mathbb{R}$ . Logo, temos  $CD(f) = Im(f)$ , ou seja,  $f$  é *sobrejetiva*. Além disso,  $f$  é *injetiva*, pois se tomarmos  $x \in \mathbb{R}$  e  $x' \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq x'$ , teremos seus correspondentes em  $R'$  distintos, pois, pela definição da igualdade de pares ordenados, temos que  $(x, 0) \neq (x', 0)$ .

Agora, veja que  $f$  conserva as operações de adição e multiplicação pois, tomando  $x \in \mathbb{R}$  e  $y \in \mathbb{R}$  temos que:

I) A soma  $x + y$  está associada ao par ordenado  $(x + y, 0)$  que é a soma dos pares  $(x, 0)$  e  $(y, 0)$ , correspondentes de  $x$  e  $y$  respectivamente. De fato:

$$f(x + y) = (x + y, 0).$$

Por outro lado,

$$f(x) + f(y) = (x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0 + 0) = (x + y, 0)$$

logo,

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

II) O produto  $x \cdot y$  está associado ao par ordenado  $(x \cdot y, 0)$  que é o produto dos pares  $(x, 0)$  e  $(y, 0)$ , correspondentes de  $x$  e  $y$  respectivamente. Com efeito:

$$f(x \cdot y) = (x \cdot y, 0) = (x \cdot y - 0 \cdot 0, x \cdot 0 + y \cdot 0) = (x, 0) \cdot (y, 0) = f(x) \cdot f(y).$$

Como descrito acima,  $f$  é uma aplicação bijetiva que conserva as operações de adição e multiplicação. Devido à existência de  $f$ , dizemos que  $\mathbb{R}$  e  $R'$  são *isomorfos* e, devido a esse isomorfismo, obtemos resultados análogos ao operar com  $x$  ou  $(x, 0)$ , o que justifica o uso de

$$x = (x, 0), \forall x \in \mathbb{R}.$$

De posse desta igualdade, garantimos a existência de  $0 = (0, 0)$  e  $1 = (1, 0)$ . Enfim, podemos concluir que  $\mathbb{R} = R'$ , ou seja, o conjunto dos números reais é um *subconjunto* dos números complexos.

Consideremos portanto o número  $(0, 1) \in \mathbb{C}$ , ao qual denotaremos por  $i$ . Chamamos este número  $i$  de *unidade imaginária*.

Note que, como  $i \in \mathbb{C}$ ,

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1) = (-1, 0) = -1.$$

Dado um número complexo  $z = (x, y)$ , temos:

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y \cdot 0 - 0 \cdot 1, y \cdot 1 + 0 \cdot 0) = (x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1)$$

donde segue que,

$$z = x + yi.$$

Chamamos a forma de escrita  $z = x + yi$  do complexo  $z = (x, y)$  de **forma algébrica**.

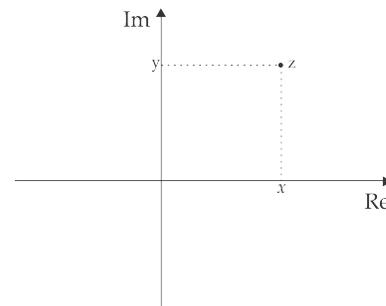
### 2.3.3 Representação geométrica de um número complexo

#### 2.3.3.1 Os números complexos como pontos e vetores do plano

Para representar geometricamente os números complexos, utilizaremos um referencial cartesiano, onde teremos o eixo das abscissas determinado pelo conjunto  $\mathbb{R} = \{x + yi \in \mathbb{C} : y = 0\}$ , ou seja, o conjunto dos números reais, e o eixo das ordenadas determinado pelo conjunto  $\mathbb{I} = \{x + yi \in \mathbb{C} : x = 0\}$  ao qual chamaremos de *Conjunto dos Números Imaginários Puros*. Denominamos o eixo real de **Re** e o eixo imaginário puro como **Im**.

Dado um complexo  $z = x + yi$ , chamaremos suas componentes  $x$  e  $y$ , respectivamente, de *parte real* e *parte imaginária* de  $z$  e as denominamos como  $Re(z) = x$  e  $Im(z) = y$ .

Figura 2.5 – O número complexo como um ponto do plano.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Chamaremos o sistema de coordenadas descrito acima como **Plano Complexo**. Este sistema também pode ser chamado de Plano de Argand-Gauss ou Diagrama de Argand.

**Definição 2.2.** Seja  $z = x + yi$ . O **conjugado** de  $z$  é o número complexo  $\bar{z} = x - yi$ .

*Observação 2.1.* Note que, geometricamente, o complexo  $\bar{z}$  representa a reflexão do complexo  $z$  em relação ao eixo real.

Consideremos  $z, z_1$  e  $z_2 \in \mathbb{C}$ . As propriedades a seguir são válidas.

P1:  $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$  ;

P2:  $\overline{z_1 + (-z_2)} = \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$  ;

P3:  $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$  ;

P4: Se  $z_2 \neq 0$  e  $z_1 \cdot z_2^{-1} = \frac{z_1}{z_2}$ , então  $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$  ;

P5:  $z + \bar{z} = 2Re(z)$  ;

P6:  $z - \bar{z} = 2iIm(z)$  ;

P7: Se  $z \in \mathbb{R}$ , então  $z = \bar{z}$  ;

P8:  $z = \overline{\bar{z}}$  ;

P9: Se  $n$  é um número natural, então  $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$ .

As propriedades descritas acima não compõem o objeto de estudo deste trabalho e, portanto, não demonstraremos aqui. Para verificação completa das demonstrações das propriedades citadas, recomendamos consulta a (IEZZI, 2013a).

Ao associar um número complexo a um par ordenado, criamos a possibilidade de outra representação muito útil em nossos estudos. A seguir, iniciaremos o tratamento dos números complexos a partir de associação com vetores no plano de Argand-Gauss.

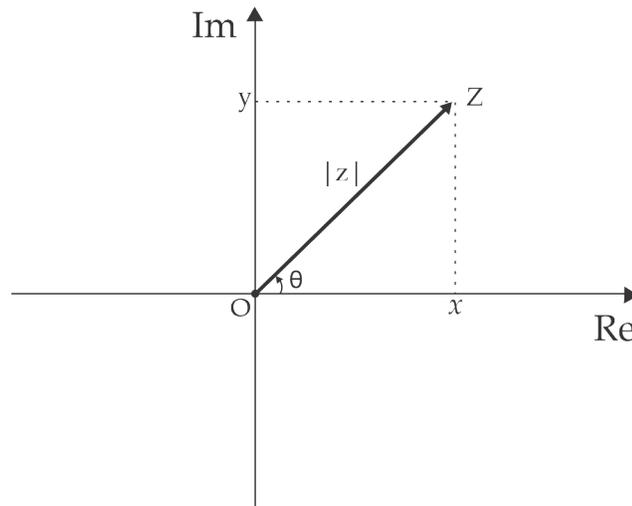
Consideremos o número complexo  $z = x + yi$ . Como vimos,  $z$  pode ser representado por um ponto no Plano Complexo e, esta representação nos permite associar o complexo  $z$  a um vetor  $\overrightarrow{OZ}$ , onde o ponto  $O$  é a origem do plano complexo e  $Z$  o ponto do plano complexo que representa  $z$ .

Chamamos de **módulo** de um número complexo, e representamos por  $|z|$ , o número real que representa a distância do ponto  $Z$  ao ponto  $O$ . Assim,

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Tomemos agora o ângulo  $\theta$  formado pelo semieixo real positivo e o vetor  $\overrightarrow{OZ}$ . Este ângulo é chamado de **argumento** do número complexo  $z$ , e denotamos por  $Arg(z)$ . É importante mencionar que um complexo não nulo  $z$  possui infinitos argumentos que diferem entre si por um múltiplo de  $2\pi$ , mas vamos considerar  $Arg(z)$  como o único argumento de  $z$  pertencente ao intervalo  $(-\pi, \pi]$ . A figura a seguir ilustra a representação vetorial de um número complexo.

Figura 2.6 – O número complexo como um vetor.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Observe que, com base na figura, podemos escrever:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{y}{|z|} \Rightarrow y = |z| \cdot \operatorname{sen} \theta. \quad (I)$$

Analogamente, temos:

$$\operatorname{cos} \theta = \frac{x}{|z|} \Rightarrow x = |z| \cdot \operatorname{cos} \theta. \quad (II)$$

Como  $z = x + yi$ , substituindo os resultados encontrados em (I) e (II), obtemos

$$z = |z| \cdot \operatorname{cos} \theta + (|z| \cdot \operatorname{sen} \theta)i \Rightarrow$$

$$z = |z| \cdot (\operatorname{cos} \theta + i \operatorname{sen} \theta) \quad (2.1)$$

que é chamada de **Forma Polar** de um Número Complexo.

Dado o número complexo  $z = |z| \cdot (\operatorname{cos} \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ , o conjugado de  $z$  é o complexo

$$\bar{z} = |z| \cdot (\operatorname{cos} \theta - i \operatorname{sen} \theta) = |z| \cdot (\operatorname{cos}(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)).$$

A seguir são listadas algumas propriedades envolvendo módulo e argumento de um número complexo. Estas propriedades serão importantes para as interpretações geométricas posteriores.

$$\text{P10: } z \cdot \bar{z} = |z|^2 ;$$

$$\text{P11: } |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| ;$$

$$\text{P12: Se } z_2 \neq 0, \text{ então } \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} ;$$

$$\text{P13: } \text{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2) ;$$

$$\text{P14: } \text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \text{Arg}(z_1) - \text{Arg}(z_2).$$

Para demonstração destas propriedades, sugerimos consulta a (IEZZI, 2013a).

Dado um número complexo  $z$  não nulo, podemos demonstrar através de P10, a forma polar de  $\frac{1}{z} = z^{-1}$ . De fato, segue de P10 que

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

e como vimos,  $\bar{z} = |z| \cdot (\cos \theta - i \sen \theta)$ .

Daí, obtemos

$$z^{-1} = \frac{|z| \cdot (\cos \theta - i \sen \theta)}{|z|^2} \Rightarrow z^{-1} = \frac{1}{|z|} \cdot (\cos \theta - i \sen \theta) \Rightarrow z^{-1} = |z|^{-1} \cdot (\cos \theta - i \sen \theta).$$

De acordo com as propriedades P11 e P13, podemos afirmar que o produto de dois números complexos  $z_1 = |z_1| \cdot (\cos \theta_1 + i \sen \theta_1)$  e  $z_2 = |z_2| \cdot (\cos \theta_2 + i \sen \theta_2)$  é dado por

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \sen(\theta_1 + \theta_2)). \quad (2.2)$$

Mostraremos a seguir que a equação 2.2 pode ser estendida para  $n$  números complexos.

**Proposição 2.1.** *Sejam  $z_1 = |z_1| \cdot (\cos \theta_1 + i \sen \theta_1)$ ,  $z_2 = |z_2| \cdot (\cos \theta_2 + i \sen \theta_2)$ , ...,  $z_n = |z_n| \cdot (\cos \theta_n + i \sen \theta_n)$ , então:*

$$z_1 \cdot z_2 \dots z_n = |z_1| \cdot |z_2| \dots |z_n| \cdot (\cos(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) + i \sen(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)). \quad (2.3)$$

**Demonstração:** O resultado será demonstrado por Indução sobre  $n$ .

Para  $n = 2$ , o resultado segue de 2.2.

Suponhamos então, que 2.3 seja válida para algum  $n \geq 3$  e provemos que esta também é válida para  $n + 1$ .

Pela hipótese de indução, temos que

$$z_1 \cdot z_2 \dots z_n = |z_1| \cdot |z_2| \dots |z_n| \cdot (\cos(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)).$$

Multiplicando a equação por  $z_{n+1}$ , obtemos

$$(z_1 \cdot z_2 \dots z_n) \cdot z_{n+1} = [|z_1| \cdot |z_2| \dots |z_n| \cdot (\cos(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n))] \cdot z_{n+1}.$$

Temos que  $z_{n+1} = |z_{n+1}| \cdot (\cos \theta_{n+1} + i \operatorname{sen} \theta_{n+1})$ , e daí obtém-se

$$(z_1 \cdot z_2 \dots z_n) \cdot z_{n+1} = [|z_1| \cdot |z_2| \dots |z_n| \cdot (\cos(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n))] \times \\ \times |z_{n+1}| \cdot (\cos \theta_{n+1} + i \operatorname{sen} \theta_{n+1}).$$

Utilizando a Equação 2.2,

$$(z_1 \cdot z_2 \dots z_n) \cdot z_{n+1} = |z_1| \cdot |z_2| \dots |z_n| \cdot |z_{n+1}| (\cos((\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) + \theta_{n+1}) + i \operatorname{sen}((\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) + \theta_{n+1})).$$

E, portanto, temos que

$$z_1 \cdot z_2 \dots z_n \cdot z_{n+1} = |z_1| \cdot |z_2| \dots |z_n| \cdot |z_{n+1}| (\cos(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n + \theta_{n+1}) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n + \theta_{n+1})).$$

■

A seguir, mostraremos como calcular as potências de números complexos.

**Proposição 2.2. (Fórmula de Moivre)** Se  $n \in \mathbb{Z}$  e  $z = |z| \cdot (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ , então

$$z^n = |z|^n \cdot (\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)).$$

**Demonstração:** Para  $n = 0$  ou  $n = 1$ , o resultado é trivial.

Para  $n \in \mathbb{Z}$  maior que 1, basta tomar a equação 2.3 e considerar  $z_1 = z_2 = \dots = z_n = z$ , e obtém-se o resultado.

Para  $n < 0$ , façamos  $n = -k$ , com  $k$  inteiro positivo. Temos que

$$z^n = [|z| \cdot (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)]^n = [|z| \cdot (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)]^{-k} = \frac{1}{[|z| \cdot (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)]^k} \Rightarrow$$

$$z^n = \frac{1}{|z|^k \cdot (\cos(k\theta) + i \operatorname{sen}(k\theta))} = \frac{\cos 0 + i \operatorname{sen} 0}{|z|^k \cdot (\cos(k\theta) + i \operatorname{sen}(k\theta))}.$$

E, utilizando a propriedade **P14**, segue que

$$z^n = \frac{1}{|z|^k} \cdot (\cos(0 - k\theta) + i \operatorname{sen}(0 - k\theta)) = |z|^{-k} \cdot (\cos(-k\theta) + i \operatorname{sen}(-k\theta)).$$

Finalmente, substituindo  $-k$  por  $n$ , obtemos o resultado.

■

**Definição 2.3.** *Seja  $x \in \mathbb{R}$ , definimos*

$$e^{xi} = \cos x + i \operatorname{sen} x.$$

Utilizando-se desta definição, podemos escrever a forma polar de um número complexo  $z$  como

$$z = |z| \cdot e^{\theta i}, \text{ onde } \theta \text{ é o argumento de } z.$$

Temos as propriedades:

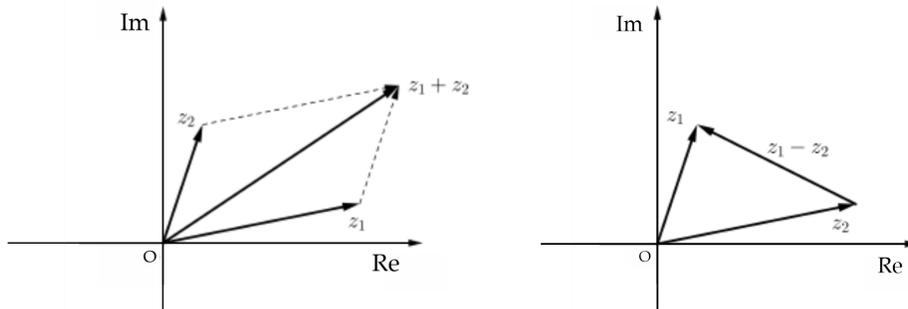
- i)  $e^0 = 1$  ;
- ii)  $e^{xi} \cdot e^{yi} = e^{(x+y)i}$  ;
- iii)  $e^{-xi} = (e^{xi})^{-1}$  ;
- iv)  $(e^{xi})^n = e^{nxi}$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

Escrever um número complexo não nulo na sua forma exponencial nos permite simplificar as operações algébricas realizadas, como por exemplo no produto e no quociente de números complexos.

### 2.3.3.2 Interpretações geométricas para as operações com números complexos

Quando trabalhamos com vetores, sabemos que somar dois vetores é equivalente a somar as componentes destes. Assim sendo, somar dois números complexos em representação vetorial, significa somar as componentes dos vetores que os representam. Analogamente, a diferença de dois números complexos consiste em subtrair as componentes dos vetores que os representam.

Figura 2.7 – Representação geométrica para a soma e a subtração de dois complexos.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

*Observação 2.2.* Sejam  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , a distância  $d(z_1, z_2)$  entre estes é numericamente igual ao módulo de sua diferença. Ou seja

$$d(z_1, z_2) = |z_2 - z_1|.$$

Podemos pensar também na soma  $z + z_1$  de dois números complexos representados por vetores no plano, como sendo uma representação do deslocamento paralelo do vetor representante de  $z_1$  na direção do vetor representante de  $z$ , com mesmo módulo de  $z_1$ . Disto, podemos concluir que esta operação “transporta” a origem  $O$  do plano para o complexo  $z$  e o complexo  $z_1$  no complexo  $w = z + z_1$ .

Em outras palavras, a ideia descrita acima apresenta-nos uma noção de como transladar um vetor no plano complexo. Isto será discutido em mais detalhes no capítulo seguinte deste trabalho.

**Definição 2.4.** Sejam  $z_1$  e  $z_2$  números complexos não nulos. O ângulo entre eles é o número real

$$\theta(z_1, z_2) = \text{Arg} \left( \frac{z_1}{z_2} \right).$$

Tomemos  $z_1 = |z_1| \cdot e^{\alpha i}$  e  $z_2 = |z_2| \cdot e^{\beta i}$ . Em consequência da definição apresentada, temos que

$$\theta(z_1, z_2) = \text{Arg} \left( \frac{\frac{|z_1| \cdot e^{\alpha i}}{|z_1|}}{\frac{|z_2| \cdot e^{\beta i}}{|z_2|}} \right) = \text{Arg} \left( \frac{e^{\alpha i}}{e^{\beta i}} \right) = \text{Arg}(e^{(\alpha - \beta)i}).$$

*Observação 2.3.* Em consequência da equação encontrada acima, podemos destacar alguns pontos, quais sejam:

- i)  $\theta(z_1, z_2) = -\theta(z_2, z_1)$ ;
- ii)  $\theta(iz_1, z_1) = \text{Arg}(i) = \frac{\pi}{2}$ ;
- iii)  $\theta(z_1, iz_1) = \text{Arg}(-i) = -\frac{\pi}{2}$ ;
- iv) Sejam  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ,  $z_1$  é perpendicular a  $z_2$  se  $z_1 = \alpha z_2 i$ , com  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ .

■

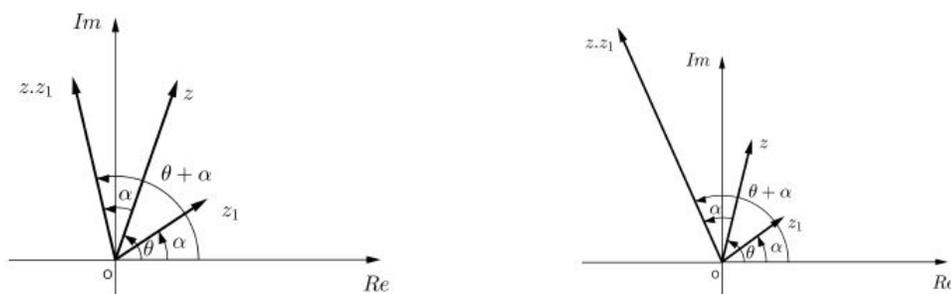
Vamos considerar os números complexos  $z = |z| \cdot (\cos \theta + i \text{sen } \theta)$  e  $z_1 = |z_1| \cdot (\cos \alpha + i \text{sen } \alpha)$ . Pela Equação 2.2, podemos garantir que se  $|z_1| = 1$  e  $\alpha > 0$ ,

$$z \cdot z_1 = |z| \cdot (\cos(\theta + \alpha) + i \text{sen}(\theta + \alpha)),$$

ou seja, o produto  $z \cdot z_1$  indica uma rotação no sentido anti-horário de um ângulo  $\alpha$  de  $z$  em torno da origem do Plano Complexo.

Caso tenhamos  $|z| \neq 1$  teremos o mesmo caso de rotação, porém o comprimento de  $z \cdot z_1$  será expresso por  $|z| \cdot |z_1|$ .

Figura 2.8 – Representação para  $z \cdot z_1$  com  $|z_1| = 1$  (à esquerda) e com  $|z| > 1$  (à direita).



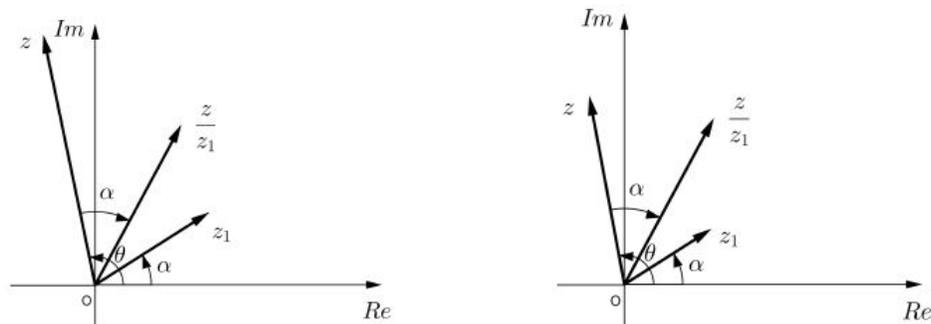
Fonte: ARAÚJO (2014).

Assim, concluímos que o produto de dois números complexos representa uma rotação de um ângulo  $\alpha$  em torno da origem do Plano Complexo, seguido de uma homotetia<sup>1</sup> com centro na Origem O e coeficiente de semelhança igual a  $|z_1|$ .

<sup>1</sup>Ampliação ou redução de distâncias ou áreas, partindo de um ponto fixo.

Pela propriedade P14, sabemos que o quociente  $\frac{z}{z_1}$  representa a rotação de um ângulo  $\alpha$  no sentido horário do vetor representante de  $z$  em torno da origem, seguida de uma homotetia com centro na origem  $O$  do Plano Complexo.

Figura 2.9 – Representação para  $\frac{z}{z_1}$  com  $|z_1| > 1$  (à esquerda) e com  $|z_1| = 1$  (à direita).



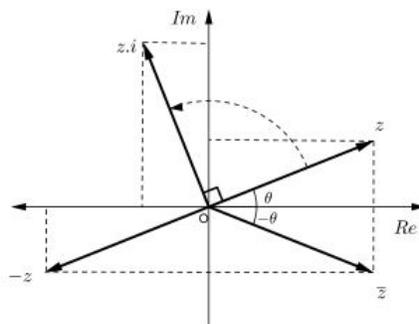
Fonte: ARAÚJO (2014).

Tomemos, por fim, o número complexo  $z = x + yi$  e, como sabemos,  $-z = -x - yi$  e  $\bar{z} = x - yi$ . Os números complexos  $-z$  e  $\bar{z}$  representam, respectivamente, uma simetria de  $z$  com relação à origem e ao eixo real.

Note que o produto  $z \cdot i = (x + yi) \cdot i = -y + xi$  representa geometricamente uma rotação de  $90^\circ$  do vetor representante de  $z$  no sentido anti-horário, em torno da origem.

É importante observar que o número complexo  $z \cdot (-i) = (x + yi) \cdot (-i) = y - xi$  representa geometricamente uma rotação de  $90^\circ$  do vetor representante de  $z$  no sentido horário, em torno da origem.

Figura 2.10 – Representação para  $-z$ ,  $\bar{z}$  e  $z \cdot i$ .



Fonte: ARAÚJO (2014).

### 3 UMA ABORDAGEM DA MUDANÇA DE COORDENADAS VIA NÚMEROS COMPLEXOS

Neste capítulo, trataremos sobre a mudança de coordenadas utilizando rotação e translação de eixos. Inicialmente, abordaremos o método tradicional, utilizando números reais e o sistema cartesiano. Em seguida, faremos a abordagem utilizando os números complexos, dando ênfase nas diferenças e benefícios adquiridos ao utilizar este método.

Abordaremos especificamente, a mudança de coordenadas aplicadas em **seções cônicas**. Para uma abordagem completa sobre estes lugares geométricos, sugerimos consulta à (IEZZI, 2013b) e (GUIMARÃES, 2013).

#### 3.1 Rotação e translação de eixos

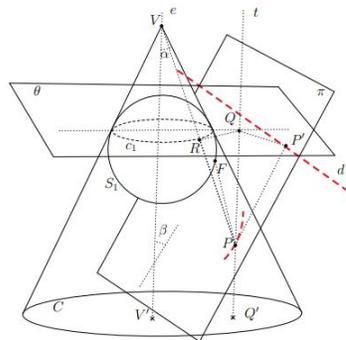
Para o desenvolvimento do capítulo, precisamos demonstrar um importante resultado sobre a equação de uma cônica. Para tal, devemos conhecer inicialmente o 2º Teorema de Dandelin<sup>1</sup>-Quetelet<sup>2</sup>.

**Teorema 3.1.** (*2º Teorema de Dandelin-Quetelet*) *Considere uma superfície cônica de eixo de revolução reto sendo cortado por um plano  $\pi$ . Se  $P$  é um ponto qualquer da interseção, então existe um ponto  $F$  e uma reta  $d$  fixos, pertencentes ao plano de corte  $\pi$ , tais que:*

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{Pd}} = e$$

onde  $e$  é a excentricidade da cônica.

Figura 3.1 – Ilustração do teorema de Dandelin-Quetelet.



Fonte: MONTEIRO (2014).

<sup>1</sup>Germinal Pierre Dandelin (1794 - 1847) foi um matemático, soldado e professor de engenharia belga.

<sup>2</sup>Lambert Adolphe Jacques Quételet (1796 - 1874), foi um astrônomo, matemático, demógrafo, estatístico e sociólogo belga do século XIX.

**Demonstração:** Para a demonstração deste teorema, sugerimos consulta à (GUIMARÃES, 2013).

*Observação 3.1.* O resultado anterior vale para as três seções cônicas. A reta  $d$  definida no enunciado é chamada **reta diretriz da seção cônica** e, ao ponto  $F$ , damos o nome de **foco**.

**Teorema 3.2.** *Uma seção cônica qualquer, em um dado sistema de coordenadas, será sempre representada por uma equação quadrática, conhecida como **Equação Geral de uma Seção Cônica**, do tipo:*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

com  $A, B \dots F \in \mathbb{R}$  e  $A^2 + B^2 + C^2 > 0$ .

**Demonstração:** Pelo 2º teorema de Dandelin-Quetelet, temos que para todo ponto  $P$  de uma seção cônica de foco  $F$ , existirá uma reta  $d$  tal que:

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{Pd}} = e.$$

Tomemos  $P = (x, y)$ ,  $F = (x_f, y_f)$  e  $d: rx + sy + t = 0$ . Daí, segue que:

$$\frac{\sqrt{(x - x_f)^2 + (y - y_f)^2}}{\frac{|rx + sy + t|}{\sqrt{r^2 + s^2}}} = e$$

Elevando a equação ao quadrado, temos

$$\left( \frac{\sqrt{(x - x_f)^2 + (y - y_f)^2}}{\frac{|rx + sy + t|}{\sqrt{r^2 + s^2}}} \right)^2 = e^2 \Rightarrow (x - x_f)^2 + (y - y_f)^2 = e^2 \cdot \frac{(rx + sy + t)^2}{r^2 + s^2}.$$

Assim, segue que,

$$(x - x_f)^2 + (y - y_f)^2 = \frac{e^2}{r^2 + s^2} \cdot (r^2x^2 + s^2y^2 + 2r \cdot s \cdot x \cdot y + 2r \cdot t \cdot x + 2s \cdot t \cdot y + t^2).$$

E, desenvolvendo a equação acima, chegamos a

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

onde:

$$A = \frac{(1 - e^2)r^2 + s^2}{r^2 + s^2}, B = \frac{2e^2rs}{r^2 + s^2}, C = \frac{(1 - e^2)s^2 + r^2}{r^2 + s^2}, D = -2\left(x_f + \frac{e^2rt}{r^2 + s^2}\right),$$

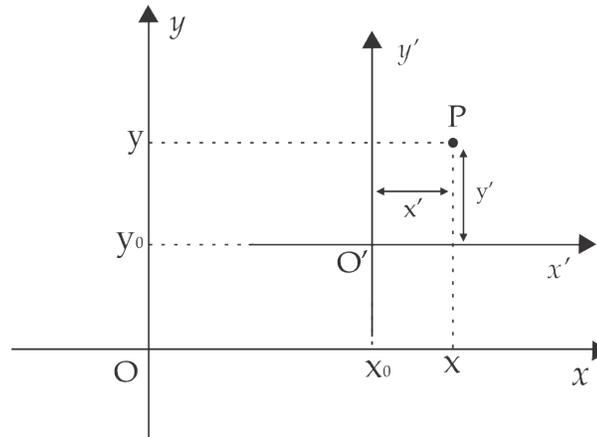
$$E = -2\left(y_f + \frac{e^2st}{r^2 + s^2}\right), \text{ e } F = x_f^2 + y_f^2 - \frac{e^2t^2}{r^2 + s^2}.$$

■

### 3.1.1 Translação de eixos

Consideremos dois sistemas de eixos quais sejam o sistema cartesiano ortogonal tradicional  $(xOy)$  e o segundo  $(x'O'y')$ , é tal que seja deslocado de  $x_0$  unidades para a direita e  $y_0$  unidades para cima em relação ao primeiro.

Figura 3.2 – Sistemas de eixos.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Da figura acima, obtemos:

$$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases}.$$

De modo geral, sendo  $(x'O'y')$  um sistema de eixos deslocado de  $p$  unidades para a direita e  $q$  unidades para cima em relação ao sistema  $(xOy)$ , as coordenadas de um ponto nos dois sistemas se relacionam de acordo com o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x' = x - p \\ y' = y - q \end{cases}.$$

### 3.1.2 Eliminando os termos lineares de uma quadrática

Consideremos um sistema de eixos  $(x'O'y')$  deslocado  $a$  unidades para a direita e  $b$  unidades para cima em relação ao sistema  $(xOy)$ . Pelas equações da translação de eixos, temos:

$$\begin{cases} x = a + x' \\ y = b + y' \end{cases}.$$

Substituindo na equação geral da cônica,

$$A(a + x')^2 + B(a + x') \cdot (b + y') + C(b + y')^2 + D(a + x') + E(b + y') + F = 0.$$

Organizando esta equação, obtemos:

$$Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + x'(2Aa + Bb + D) + y'(2Cb + Ba + E) + (a^2A + b^2C + Bab + Da + Eb + F) = 0.$$

Note que, podemos fixar  $a$  e  $b$  de modo a eliminar os termos em  $x'$  e em  $y'$ .

*Observação 3.2.* Dada uma curva quadrática  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$  a translação de eixos  $(x, y) \rightarrow (x', y')$  tal que a equação resultante não possua os termos lineares em  $x$  e  $y$  será da forma:

$$\begin{cases} x = a + x' \\ y = b + y' \end{cases},$$

onde  $a$  e  $b$  são determinados resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} 2Aa + Bb + D = 0 \\ Ba + 2Cb + E = 0 \end{cases}.$$

**Exemplo 3.1.** Encontrar o novo sistema de eixos tal que a equação

$$3x^2 + 8xy + y^2 + 6x + 2y + 3 = 0$$

quando representada no novo sistema, não possua termos lineares em  $x$  e  $y$ .

**Solução:** Utilizando a observação 3.2, as constantes  $a$  e  $b$  da translação de eixos serão encontradas resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} 2.3a + 8b + 6 = 0 \\ 8a + 2.1b + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + 4b + 3 = 0 \\ 4a + b + 1 = 0 \end{cases} \therefore \begin{cases} a = -\frac{1}{13} \\ b = -\frac{9}{13} \end{cases}.$$

Logo, o novo sistema de eixos que trará a solução do problema proposto é:

$$\begin{cases} x' = x + \frac{1}{13} \\ y' = y + \frac{9}{13} \end{cases}.$$

■

*Observação 3.3.* Também é possível encontrar as equações que determinam os valores de  $a$  e  $b$  utilizando as **derivadas parciais**. A primeira equação será a derivada parcial da equação geral em relação a  $x$ , e a segunda, a derivada parcial da equação geral com relação a  $y$ , aplicadas no ponto  $(a, b)$  e em seguida igualadas a zero. No exemplo anterior, teríamos:

$$\frac{\partial}{\partial x}(3x^2 + 8xy + y^2 + 6x + 2y + 3) = 6x + 8y + 6$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 8xy + y^2 + 6x + 2y + 3) = 8x + 2y + 2$$

que aplicadas ao ponto  $(a, b)$  e igualadas a zero, nos levam justamente às equações procuradas.

Esta maneira de determinar tais equações não exige que “decuremos” o sistema proposto para tal.

Observe que  $Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + x'(2Aa + Bb + D) + y'(2Cb + Ba + E) + (a^2A + b^2C + Bab + Da + Eb + F) = 0$  permite-nos dizer que a translação de eixos transforma a equação quadrática  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$  em  $A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$ , de modo que:

- $A' = A$ ;
- $B' = B$ ;
- $C' = C$ ;
- $D' = 2Aa + Bb + D$ ;
- $E' = 2Cb + Ba + E$ ;

- $F' = Aa^2 + Bab + Cb^2 + Da + Eb + F.$

*Observação 3.4.* Isto posto, concluímos que numa translação de eixos, os termos quadráticos  $A$ ,  $B$  e  $C$  da equação geral da seção cônica não se alteram.

*Observação 3.5.* Dada a translação de eixos

$$\begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b \end{cases},$$

o termo independente da equação resultante é obtido substituindo o par  $(a, b)$  na equação geral da curva, ou seja:

$$F' = Aa^2 + Bab + Cb^2 + Da + Eb + F.$$

**Exemplo 3.2.** Sem desenvolver a translação, vamos utilizar as observações 3.4 e 3.5 para encontrar a equação resultante da translação de eixos discutida no exemplo 3.1.

**Solução:** Considerando a curva  $3x^2 + 8xy + y^2 + 6x + 2y + 3 = 0$ , sabemos por 3.4 que os coeficientes  $A, B$  e  $C$  não se alteram.

Além disso, no exemplo 3.1, vimos que o par  $(a, b)$  que anula os termos lineares da quadrática é  $\left(-\frac{1}{13}, -\frac{9}{13}\right)$ .

Por 3.5,

$$F' = 3 \cdot \left(-\frac{1}{13}\right)^2 + 8 \cdot \left(-\frac{1}{13}\right) \cdot \left(-\frac{9}{13}\right) + \left(-\frac{9}{13}\right)^2 + 6 \cdot \left(-\frac{1}{13}\right) + 2 \cdot \left(-\frac{9}{13}\right) + 3 = \frac{351}{169}.$$

E a equação procurada é:

$$3x'^2 + 8x'y' + y'^2 + \frac{351}{169} = 0.$$

■

Nem sempre será possível eliminar os termos lineares de uma quadrática utilizando a translação de eixos. Isto acontecerá quando o sistema da definição 3.2 não tiver solução ou sua solução não for única.

Dado o sistema

$$\begin{cases} 2Aa + Bb + D = 0 \\ Ba + 2Cb + E = 0 \end{cases}.$$

Se o determinante principal do sistema for nulo, ou seja

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2A & B \\ B & 2C \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4AC - B^2 = 0 \Rightarrow B^2 = 4AC$$

será impossível eliminar o termo linear por meio de uma translação de eixos.

Ora, sabemos que as constantes da curva em função dos parâmetros da reta diretriz  $d: rx + sy + t = 0$ , foco  $F(x_f, y_f)$  e excentricidade  $e$  que definem a cônica são dadas por:

$$A = \frac{(1 - e^2).r^2 + s^2}{r^2 + s^2}, \quad B = \frac{2e^2.r.s}{r^2 + s^2}, \quad C = \frac{(1 - e^2).s^2 + r^2}{r^2 + s^2}, \quad D = -2 \left( x_f + \frac{e^2.r.t}{r^2 + s^2} \right),$$

$$E = -2 \left( y_f + \frac{e^2.s.t}{r^2 + s^2} \right) \text{ e } F = x_f^2 + y_f^2 - \frac{e^2 t^2}{r^2 + s^2}.$$

E, portanto:

$$4AC - B^2 = 4 \cdot \left( \frac{(1 - e^2).r^2 + s^2}{r^2 + s^2} \right) \cdot \left( \frac{(1 - e^2).s^2 + r^2}{r^2 + s^2} \right) - \left( \frac{2e^2.r.s}{r^2 + s^2} \right)^2.$$

Desenvolvendo, obtemos:

$$\begin{aligned} 4AC - B^2 &= 4 \cdot \left( \frac{r^2.(1 - e^2) + s^2}{r^2 + s^2} \right) \cdot \left( \frac{s^2.(1 - e^2) + r^2}{r^2 + s^2} \right) - \left( \frac{2e^2.r.s}{r^2 + s^2} \right)^2 \\ &= \frac{4}{(r^2 + s^2)^2} \cdot \{ r^2 s^2 [1 + (1 - e^2)^2] + (1 - e^2).(r^4 + s^4) - (e^4 r^2 s^2) \} \\ &= \frac{4}{(r^2 + s^2)^2} \cdot (1 - e^2).(r^4 + 2r^2 s^2 + s^4). \end{aligned}$$

Note que  $(r^4 + 2r^2 s^2 + s^4) > 0$ , logo:

- $4AC - B^2 = 0 \Leftrightarrow e = 1$ ;
- $4AC - B^2 > 0 \Leftrightarrow 0 < e < 1$ ;
- $4AC - B^2 < 0 \Leftrightarrow e > 1$ .

O resultado acima nos mostra que é possível eliminar os termos lineares por meio de uma translação de eixos caso a cônica seja uma elipse ou uma hipérbole. Porém, não será possível se tivermos uma parábola ( $e = 1$ ).

**Definição 3.1.** Para uma seção cônica descrita por  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ , definimos o **determinante da cônica** como sendo:

$$\Delta_{cônica} = B^2 - 4AC.$$

Analisando o sinal deste determinante, descobrimos qual cônica está sendo representada pela equação dada. De modo que,

- $\Delta_{cônica} = B^2 - 4AC < 0 \Rightarrow$  O lugar geométrico é uma ELIPSE;
- $\Delta_{cônica} = B^2 - 4AC > 0 \Rightarrow$  O lugar geométrico é uma HIPÉRBOLE;
- $\Delta_{cônica} = B^2 - 4AC = 0 \Rightarrow$  O lugar geométrico é uma PARÁBOLA.

*Observação 3.6.* As degenerações de cada tipo estão inclusas nos casos acima. Portanto, apenas o sinal deste determinante não nos permite afirmar se estamos tratando da cônica ou de um caso degenerado desta.

**Definição 3.2.** Dada uma cônica definida por

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

definimos o **centro da cônica** como sendo o ponto  $(x, y)$ , que é solução do sistema

$$\begin{cases} 2Ax + By + D = 0 \\ Bx + 2Cy + E = 0 \end{cases} .$$

Como no caso da parábola o sistema acima não possui solução, dizemos que esta não possui centro.

É válido ressaltar que de acordo com a definição apresentada, até as degenerações das seções cônicas podem possuir centro. Analisemos a equação  $3x^2 + y^2 + 6x + 2y + 5 = 0$ .

Note que

$$\Delta_{cônica} = B^2 - 4AC = 0^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 \Rightarrow \Delta_{cônica} = -12 < 0.$$

Logo, a curva é do tipo **elipse** e portanto possui centro  $C$ , dado pelo sistema:

$$\begin{cases} 6x + 6 = 0 \\ 2y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow C = (-1, -1).$$

Assim, após a translação de eixos teremos

$$F' = 3 \cdot (-1)^2 + (-1)^2 + 6 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) + 5 = 1$$

e a equação da curva após a translação será

$$3x'^2 + y'^2 + 1 = 0.$$

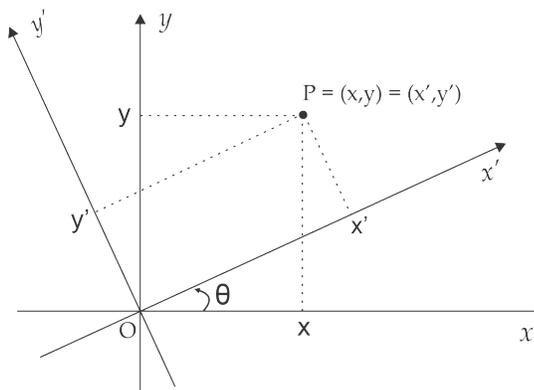
Mas é nítido que a equação obtida trata-se de um conjunto vazio, pois não existem  $x'$  e  $y'$  reais que satisfaçam a equação obtida. Sugerimos que, para evitar “surpresas” como esta, faça-se uma análise detalhada da equação da quadrática como uma equação do 2º grau em uma das variáveis.

### 3.1.3 Rotação de eixos

Abordaremos agora, o que acontece com as coordenadas de um ponto se rotacionarmos o sistema de eixos de um ângulo  $\theta$  em relação ao original.

Para tal, tomemos os sistemas  $(xOy)$  e  $(x'Oy')$  representados na figura abaixo.

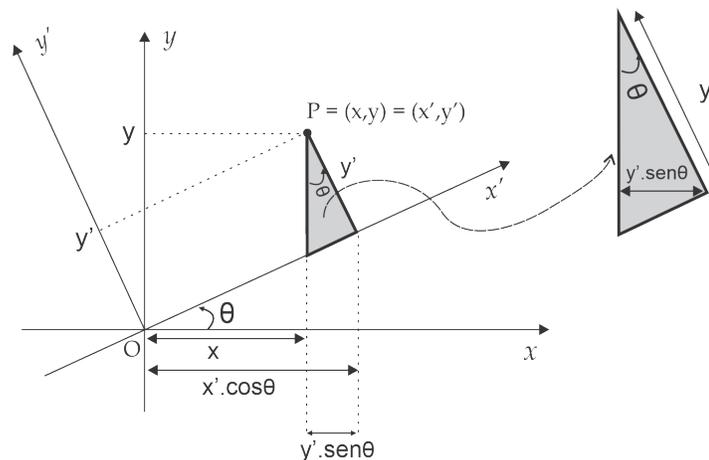
Figura 3.3 – Sistemas de eixos (rotação).



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Analisemos os itens geométricos presentes na figura:

Figura 3.4 – Análise geométrica da rotação.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Segue da figura 3.4 que

$$x = x' \cdot \cos \theta - y' \cdot \sen \theta.$$

Note que, utilizando o raciocínio análogo, obtemos

$$y = x' \cdot \sen \theta + y' \cdot \cos \theta.$$

Tais equações nos dão o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x = x' \cdot \cos \theta - y' \cdot \sen \theta \\ y = x' \cdot \sen \theta + y' \cdot \cos \theta \end{cases},$$

que é conhecido como sistema de equações da transformação **rotação**.

Para expressar  $x'$  e  $y'$  em função de  $x$  e  $y$  basta inverter o sistema acima. Daí, obtemos:

$$\begin{cases} x' = x \cdot \cos \theta + y \cdot \sen \theta \\ y' = -x \cdot \sen \theta + y \cdot \cos \theta \end{cases}.$$

### 3.1.4 Eliminação do termo retangular $(x, y)$ de uma quadrática

Das equações da rotação de eixos, temos que

$$\begin{cases} x = x' \cdot \cos \theta - y' \cdot \sen \theta \\ y = x' \cdot \sen \theta + y' \cdot \cos \theta \end{cases}.$$

Agora analisaremos o efeito que uma rotação genérica tem sobre a equação geral de uma curva. Para tal, tomemos a curva definida pela equação  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ .

Com efeito, utilizando as equações da rotação, ficamos com:

$$A(x' \cdot \cos \theta - y' \cdot \sen \theta)^2 + B(x' \cdot \cos \theta - y' \cdot \sen \theta) \cdot (x' \cdot \sen \theta + y' \cdot \cos \theta) + C(x' \cdot \sen \theta + y' \cdot \cos \theta)^2 + D(x' \cdot \cos \theta - y' \cdot \sen \theta) + E(x' \cdot \sen \theta + y' \cdot \cos \theta) + F = 0.$$

Efetuando os cálculos e organizando a equação, obtemos:

$$(A \cdot \cos^2 \theta + B \cdot \cos \theta \cdot \sen \theta + C \cdot \sen^2 \theta) \cdot x'^2 + (C \cdot \cos^2 \theta - B \cdot \sen \theta \cdot \cos \theta + A \cdot \sen^2 \theta) \cdot y'^2 + (2C \cdot \cos \theta \cdot \sen \theta - 2A \cdot \cos \theta \cdot \sen \theta + B \cdot \cos^2 \theta - B \cdot \sen^2 \theta) \cdot x'y' + (D \cdot \cos \theta + E \cdot \sen \theta) \cdot x' + (E \cdot \cos \theta - D \cdot \sen \theta) \cdot y' + F = 0.$$

Ao organizar a equação de modo a obter  $A'x'^2 + B'x'y' + Cy'^2 + Dx' + Ey' + F' = 0$ , chegamos aos seguintes coeficientes:

- $A' = A \cdot \cos^2 \theta + B \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta + C \cdot \sin^2 \theta$ ;
- $B' = 2 \cos \theta \sin \theta (C - A) + B(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$ ;
- $C' = C \cdot \cos^2 \theta - B \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta + A \cdot \sin^2 \theta$ ;
- $D' = D \cdot \cos \theta + E \cdot \sin \theta$ ;
- $E' = E \cdot \cos \theta - D \cdot \sin \theta$ ;
- $F' = F$ .

*Observação 3.7.* Dada uma curva quadrática de equação  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ , a rotação dos eixos coordenados de um ângulo  $\theta$  não altera o termo independente  $F$ .

**Teorema 3.3.** *O ângulo  $\theta$  de rotação que eliminará o termo retangular (coeficiente do termo  $xy$ ) da equação quadrática  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$  é tal que:*

$$\operatorname{tg}(2\theta) = \frac{B}{A - C}.$$

**Demonstração:** Observe que, pelo obtido acima, o termo retangular será nulo quando

$$B' = 2 \cos \theta \sin \theta (C - A) + B(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 0.$$

Utilizando as equações de arco duplo, já conhecidas da trigonometria, podemos escrever:

$$\sin(2\theta)(C - A) + B \cos(2\theta) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}(2\theta) = \frac{B}{A - C}.$$

■

*Observação 3.8.* Note que:

- i) Se  $A = C$  o valor de  $\theta$  que eliminará o termo retangular será tal que:

$$\cos(2\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta = \pm \frac{\pi}{4};$$

- ii) A rotação altera os termos lineares da equação desde que os mesmos existam. Para eliminar ambas as partes (linear e retangular), é recomendável realizar primeiro a translação de eixos e em seguida a rotação;

iii) De acordo com o teorema 3.3, haverá mais de um ângulo que elimina o termo retangular. É importante ressaltar que todos nos servem, porém, por questão de convenção, utilizaremos o menor ângulo positivo entre eles.

A seguir, listaremos algumas propriedades importantes sobre a rotação de eixos.

PR1) A soma dos termos em  $x'^2$  e em  $y'^2$  não sofre alteração após uma rotação, ou seja:

$$A' + C' = A + C.$$

PR2) O determinante da cônica não se altera após uma rotação, ou seja:

$$B' - 4A' \cdot C' = B^2 - 4A \cdot C.$$

**Demonstração:** Para demonstração completa das propriedades, sugerimos consulta à (GUIMARÃES, 2013).

As propriedades acima nos ajudam a obter um método mais simples para obter os termos  $A'$  e  $C'$ . Ora, sabemos que após uma rotação os termos a seguir são invariantes:

$$\begin{cases} A' + C' = A + C \\ B' - 4A' \cdot C' = B^2 - 4A \cdot C \end{cases} .$$

Como desejamos eliminar o termo retangular, devemos ter  $B' = 0$ , o que nos dá

$$\begin{cases} A' + C' = A + C \\ -4A' \cdot C' = B^2 - 4A \cdot C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A' + C' = A + C \\ A' \cdot C' = \frac{B^2 - 4A \cdot C}{-4} \end{cases} .$$

Como a equação antes da rotação nos é conhecida, sabemos portanto os valores de  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Assim, conseguimos determinar os valores de  $A' + C'$  e  $A' \cdot C'$ . Por fim, para encontrar os valores de  $A'$  e  $C'$ , basta encontrar as raízes do polinômio:

$$k^2 - (A' + C')k + (A' \cdot C') = 0.$$

Em resumo, se a equação já não possuir os termos lineares (eliminados por uma translação de eixos adequada) e nem termo retangular, como sabemos que o termo independente  $F$  permanece inalterado após a rotação a equação resultante é obtida de maneira mais simples utilizando este processo. Vejamos um exemplo.

**Exemplo 3.3. (IME)** Determine o lugar geométrico definido pela equação em  $\mathbb{R}$ :

$$2x^2 - 4 \cdot x \cdot y + 4y^2 - 2x - 8y + 9 = 0.$$

**Solução:** Inicialmente, tentaremos a eliminação dos termos lineares aplicando a translação. O sistema de equações que nos permitirá tal eliminação é:

$$\begin{cases} 2Ax + By + D = 0 \\ Bx + 2Cy + E = 0 \end{cases}.$$

Aplicando os coeficientes da equação, obtemos:

$$\begin{cases} 4x - 4y - 2 = 0 \\ -4x + 8y - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{5}{2} \end{cases}.$$

Logo, a curva possui centro  $C = \left(3, \frac{5}{2}\right)$ , e o termo independente após a translação será:

$$F' = 2 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3 \cdot \left(\frac{5}{2}\right) + 4 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2 \cdot 3 - 8 \cdot \left(\frac{5}{2}\right) + 9 \Rightarrow F' = -4.$$

A equação da curva após a translação será, portanto:

$$x'^2 - 2x'y' + 2y'^2 - 2 = 0.$$

Para evitar muitos cálculos a fim de encontrar o ângulo que elimina o termo retangular, vamos aplicar o método encontrado com o auxílio das propriedades de rotação. Consideremos a equação

$$x^2 - 2xy + 2y^2 - 2 = 0.$$

Dos termos invariantes de uma rotação, sabemos que:

$$\begin{cases} A' + C' = A + C \\ B' - 4A' \cdot C' = B^2 - 4A \cdot C \end{cases}.$$

Assim, teremos:

$$\begin{cases} A' + C' = 1 + 2 = 3 \\ B' - 4A' \cdot C' = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4 \end{cases}$$

donde segue que:

$$\begin{cases} A' + C' = 3 \\ A' \cdot C' = \frac{-4}{-4} = 1 \end{cases}.$$

Assim, para encontrar os valores de  $A'$  e  $C'$ , basta encontrar a solução da equação

$$k^2 - 3k + 1 = 0.$$

E obtemos portanto,  $A' = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$  e  $C' = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ , que nos levam à equação:

$$\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right) \cdot x'^2 + \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right) \cdot y'^2 - 2 = 0.$$

Efetuando os cálculos necessários a fim de organizar a equação no padrão desejado para identificar a cônica, obtemos:

$$\frac{x'^2}{\left(\frac{4}{3 - \sqrt{5}}\right)} + \frac{y'^2}{\left(\frac{4}{3 + \sqrt{5}}\right)} = 1.$$

A equação obtida mostra-nos que o lugar geométrico descrito é uma **Elipse**.

■

### 3.1.5 Resumo da simplificação da equação geral de uma cônica

A seguir, apresentamos um resumo passo a passo de como devemos proceder para realizar a simplificação da equação geral de uma cônica.

**Passo 1:** A fim de evitar as degenerações, devemos inicialmente tentar resolver a equação do 2º grau em  $x$  ou em  $y$ . Se não obtivermos sucesso, procedemos ao próximo passo;

**Passo 2:** A curva não é uma degeneração. Portanto, precisamos saber se ela possui centro utilizando as equações da translação de eixos.

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \rightarrow 2A \cdot x + B \cdot y + D = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} \rightarrow B \cdot x + 2C \cdot y + E = 0 \end{cases}.$$

**Passo 3:** Se o sistema não possuir solução, a curva não possui centro. Logo, trata-se de uma parábola. A única alternativa que nos resta é determinar o ângulo de rotação que elimina o termo retangular. Para isto, usamos:

$$\operatorname{tg}(2\theta) = \frac{B}{A - C}.$$

Obtido o valor de  $\theta$ , aplicamos este às equações de rotação a fim de determinar a equação resultante:

$$\begin{cases} x = x' \cdot \cos \theta - y' \cdot \operatorname{sen} \theta \\ y = x' \cdot \operatorname{sen} \theta + y' \cdot \cos \theta \end{cases}.$$

**Passo 4:** Caso a curva possua centro  $(a, b)$ , devemos calcular o termo independente após a translação:

$$F' = A \cdot a^2 + B \cdot a \cdot b + C \cdot b^2 + D \cdot a + E \cdot b + F.$$

**Passo 5:** Usamos os termos invariantes de uma rotação para determinar  $A'$  e  $C'$ :

$$\begin{cases} A' + C' = A + C \\ A' \cdot C' = \frac{B^2 - 4A \cdot C}{-4} \end{cases}.$$

**Passo 6:** Tendo em mãos  $A'$ ,  $C'$  e  $F'$ , determinamos a equação resultante da rotação:

$$A'x^2 + C'y^2 + F' = 0.$$

Finalizado o tratamento da mudança de coordenadas para as cônicas utilizando o método tradicional, abordaremos agora outra maneira de reconhecer uma cônica mesmo quando esta possuir eixos não paralelos aos eixos coordenados. Esta proposta utilizando o auxílio dos números complexos, além de facilitar a demonstração das equações de rotação, pode ser tratada no Ensino Médio, já que sua abordagem é, para algumas finalidades, mais simples.

### 3.2 Rotação e translação utilizando números complexos

Inicialmente, mostraremos a facilidade encontrada na abordagem da rotação e da translação de eixos com o auxílio dos números complexos. De fato, para encontrar, por exemplo, as equações de rotação, veremos que com o auxílio dos números complexos nosso trabalho é reduzido.

### 3.2.1 Rotação e translação: uma visão diferente

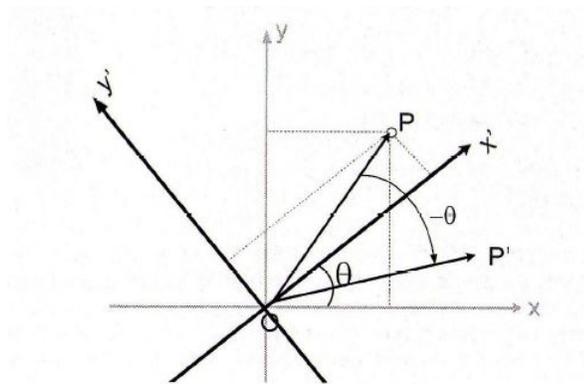
Como vimos, a soma de dois números complexos em representação vetorial é equivalente a somar as componentes dos vetores que os representam. Do mesmo modo, dados  $z = a + bi$  e  $w = c + di$ , a soma  $z + w$  será dada por

$$z + w = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d).$$

A soma do complexo  $z$  com o complexo  $w = c + di$ , acarretará na **translação** do vetor representante de  $z$ , acrescentando  $c$  unidades à sua componente horizontal e  $d$  unidades à sua componente vertical.

Anteriormente, também vimos que o produto  $z \cdot z_1$  indica uma rotação no sentido anti-horário de um ângulo  $\alpha$  de  $z$  em torno da origem do plano complexo. Assim, utilizando números complexos, rotacionar os eixos de um ângulo  $\theta$  e escrever as coordenadas de um ponto  $P$  é equivalente a escrever as coordenadas de  $\overrightarrow{OP'}$  (o vetor  $\overrightarrow{OP}$  rotacionado de  $(-\theta)$ ) no sistema original. Observe a figura:

Figura 3.5 – Rotação de eixos utilizando números complexos.



Fonte: GUIMARÃES (2008).

Assim,

$$\overline{OP'} = \overline{OP} \cdot \text{cis}(-\theta) \Rightarrow x' + y'i = (x + yi) \cdot (\cos \theta - i \sin \theta).$$

Donde obtemos:

$$\begin{cases} x' = x \cdot \cos \theta + y \cdot \sin \theta \\ y' = -x \cdot \sin \theta + y \cdot \cos \theta \end{cases}.$$

Note que é muito mais simples demonstrar as equações de rotação utilizando os números complexos. Isto nos proporciona uma útil ferramenta na resolução de problemas envolvendo rotação, pois, não se faz necessário “decorar” as equações obtidas.

### 3.2.2 Números complexos e cônicas

Vimos na observação 2.2 que dados  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , a distância  $d(z_1, z_2)$  entre estes é numericamente igual ao módulo de sua diferença, ou seja,  $d(z_1, z_2) = |z_2 - z_1|$ . Agora, iremos demonstrar como calcular uma distância entre uma reta e um ponto localizado fora dela, no plano complexo.

**Proposição 3.1.** *Seja  $r$  uma reta em  $\mathbb{C}$  definida por  $z(t) = z_0 + tv$  com  $|v| = 1$  e  $t \in \mathbb{R}$ . A distância mínima  $\lambda$  de um ponto arbitrário  $f$  à reta  $r$  é dada pela equação*

$$\lambda = |\operatorname{Im}((f - z_0)\bar{v})|. \quad (3.1)$$

**Demonstração:** Seja  $D(t)$  o quadrado da distância de  $f$  a um ponto de  $r$ . Assim, temos que:

$$\begin{aligned} D(t) &= |f - z|^2 = |f - z_0 - tv|^2 = ((f - z_0) - tv) \cdot ((\bar{f} - \bar{z}_0) - t\bar{v}) \\ &= (f - z_0) \cdot (\bar{f} - \bar{z}_0) - t(f - z_0)\bar{v} - t(\bar{f} - \bar{z}_0)v + t^2v\bar{v} \\ &= |f - z_0|^2 - 2t\operatorname{Re}((f - z_0)\bar{v}) + t^2|v|^2 \\ &= |f - z_0|^2 - 2\operatorname{Re}((f - z_0)\bar{v})t + t^2 \end{aligned}$$

sendo a última igualdade obtida utilizando o fato de que  $|v| = 1$ .

Note que  $D(t)$  é uma função quadrática na variável  $t$ . Assim, seu valor mínimo será dado quando:

$$t = -\frac{[-2\operatorname{Re}((f - z_0)\bar{v})]}{2 \cdot 1} = \operatorname{Re}((f - z_0)\bar{v}).$$

Substituindo  $t$  em  $D(t)$ , obtemos o quadrado da menor distância. Assim:

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= |f - z_0 - \operatorname{Re}((f - z_0)\bar{v})v|^2 = \left| \frac{(f - z_0)\bar{v} - \operatorname{Re}((f - z_0)\bar{v})v\bar{v}}{\bar{v}} \right|^2 \\ &= \left| \frac{2(f - z_0)\bar{v} - (f - z_0)\bar{v} - (\bar{f} - \bar{z}_0)v}{2\bar{v}} \right|^2 = \left| \frac{(f - z_0)\bar{v} - (\bar{f} - \bar{z}_0)v}{2\bar{v}} \right|^2 = \left| \frac{(f - z_0)\bar{v} - \overline{(f - z_0)v}}{2\bar{v}} \right|^2 \\ &= \left| \frac{1}{\bar{v}} \operatorname{Im}((f - z_0)\bar{v}) \right|^2 = \left| \frac{1}{\bar{v}} \right|^2 |\operatorname{Im}((f - z_0)\bar{v})|^2 = |\operatorname{Im}((f - z_0)\bar{v})|^2. \end{aligned}$$

Sendo  $\lambda$  e  $|\operatorname{Im}((f - z_0)\bar{v})|$  dois números reais não negativos, podemos extrair a raiz quadrada em ambos os lados da última equação obtida. Assim, temos:

$$\sqrt{\lambda^2} = \sqrt{|\operatorname{Im}((f - z_0)\bar{v})|^2} \Rightarrow \lambda = |\operatorname{Im}((f - z_0)\bar{v})|.$$

■

Vamos então utilizar a ideia do Teorema 3.1, agora estendido para o Plano Complexo, para determinar a forma padrão de uma cônica em  $\mathbb{C}$ .

Seja uma reta  $r$  em  $\mathbb{C}$  definida por  $f(t) = z_0 + tv$  (a qual chamaremos de **diretriz**), com  $|v| = 1$  e  $f$  um ponto fora de  $r$  (que chamaremos de **foco**). Tomemos então o número real positivo  $\epsilon$  e consideremos o lugar geométrico dos pontos do plano para os quais a distância ao ponto  $f$  é uma constante positiva  $\epsilon$ -múltipla da distância à  $r$ . Assim,

$$|z - f| = \epsilon |Im((f - z_0)\bar{v})|.$$

Elevando ambos os membros da equação ao quadrado, obtemos

$$|z - f|^2 = \epsilon^2 |Im((f - z_0)\bar{v})|^2.$$

Desenvolvendo ambos os lados, vamos obter

$$(z - f)(\bar{z} - \bar{f}) = \epsilon^2 \left| \frac{(z - z_0)\bar{v} - (\bar{z} - \bar{z}_0)v}{2i} \right|^2.$$

Efetuando os cálculos necessários e agrupando os termos semelhantes, temos

$$\begin{aligned} & \bar{v}^2 z^2 + v^2 \bar{z}^2 + \left(\frac{4}{\epsilon^2} - 2\right) z\bar{z} + \left(2\bar{z}_0 - 2z_0\bar{v}^2 - \frac{4}{\epsilon^2}\bar{f}\right) z + \left(2z_0 - 2\bar{z}_0v^2 - 4\frac{4}{\epsilon^2}f\right) \bar{z} + \\ & + \left(\frac{4}{\epsilon^2}f\bar{f} + z_0^2\bar{v}^2 + \bar{z}_0^2v^2 - 2z_0\bar{z}_0\right) = 0. \end{aligned}$$

E, se tomarmos,

$$A = v^2, B = \left(\frac{4}{\epsilon^2} - 2\right), C = \left(2\bar{z}_0 - 2z_0\bar{v}^2 - \frac{4}{\epsilon^2}\bar{f}\right) \text{ e } D = \left(\frac{4}{\epsilon^2}f\bar{f} + z_0^2\bar{v}^2 + \bar{z}_0^2v^2 - 2z_0\bar{z}_0\right)$$

na equação acima, obtemos a equação que denominamos de **forma padrão**, qual seja

$$\bar{A}z^2 + A\bar{z}^2 + Bz\bar{z} + Cz + \bar{C}\bar{z} + D = 0. \quad (3.2)$$

*Observação 3.9.* Note que:

- I)  $v = \pm\sqrt{A}$ . Sem perda de generalidade, vamos considerar  $v = \sqrt{A}$ , pois,  $|A| = 1$  e além disso,  $(+\sqrt{A})$  e  $(-\sqrt{A})$  possuem a mesma direção, determinada por  $v$ ;

II) Como  $\epsilon > 0$ , temos que

$$\epsilon > 0 \Rightarrow \frac{4}{\epsilon^2} > 0 \Rightarrow \frac{4}{\epsilon^2} - 2 > 0 - 2 \Rightarrow B > -2;$$

III) Se  $\bar{A}z^2 + A\bar{z}^2 + Bz\bar{z} + Cz + \bar{C}\bar{z} + D = 0$  representa uma cônica, com  $|A| = 1$  e  $B > -2$ , então:

- i) Se  $B = 2$ , a cônica é uma **parábola**;
- ii) Se  $-2 < B < 2$ , a cônica é uma **hipérbole**;
- iii) Se  $B > 2$ , a cônica é uma **elipse**;

IV) Caso seja necessário, podemos realizar alguns procedimentos algébricos para transformar a equação em sua forma padrão. Por exemplo, se na equação  $\bar{A}z^2 + A\bar{z}^2 + Bz\bar{z} + Cz + \bar{C}\bar{z} + D = 0$ , tivermos  $|A| \neq 1$ , basta dividi-la por  $|A|$ . Caso  $B < -2$ , basta multiplicarmos a equação por  $-1$ , para assim ajustá-la a forma desejada;

V) Se  $A = 0$  na equação 3.2, vamos obter

$$Bz\bar{z} + Cz + \bar{C}\bar{z} + D = 0$$

de modo a considerar dois casos:

- i) Se  $B = 0$ , a equação se reduz a  $Cz + \bar{C}\bar{z} + D = 0$ , que representa uma reta;
- ii) Se  $B \neq 0$ , reorganizamos a equação de modo a obter

$$\left| z + \frac{\bar{C}}{B} \right|^2 = \frac{|C|^2 - BD}{B^2}. \quad (3.3)$$

Neste caso, o conjunto solução será **vazio** sempre que  $\frac{|C|^2 - BD}{B^2} < 0$ , **um ponto** quando  $\frac{|C|^2 - BD}{B^2} = 0$  e **uma circunferência** quando  $\frac{|C|^2 - BD}{B^2} > 0$ ;

VI) A circunferência não é considerada uma cônica, pois não possui reta diretriz.

Agora, suponhamos que a equação  $\bar{A}z^2 + A\bar{z}^2 + Bz\bar{z} + Cz + \bar{C}\bar{z} + D = 0$  represente uma cônica. Note que  $\bar{A}z^2 + A\bar{z}^2 = 2Re(\bar{A}z^2)$  e  $Cz + \bar{C}\bar{z} = 2Re(Cz)$ , assim temos que

$$2Re(\bar{A}z^2) + Bz\bar{z} + 2Re(Cz) + D = 0 \quad (3.4)$$

Tomando  $z = x + yi$ ,  $A = a_1 + a_2i$  e  $C = c_1 + c_2i$ , obtemos

$$2\operatorname{Re}(\overline{A}z^2) = 2a_1x^2 - 2a_1y^2 + 4xya_2$$

$$2\operatorname{Re}(Cz) = 2c_1x - 2c_2y.$$

Substituindo estes valores na equação 3.4 e agrupando os termos semelhantes, vamos obter finalmente a equação:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad (3.5)$$

com  $a = B + 2a_1$ ,  $b = 4a_2$ ,  $c = B - 2a_1$ ,  $d = 2c_1$ ,  $e = -2c_2$  e  $f = D$ .

A equação 3.5 é a representação da equação 3.2 em **coordenadas cartesianas**.

### 3.2.2.1 Forma canônica da equação $\overline{A}z^2 + A\overline{z}^2 + Bz\overline{z} + Cz + \overline{C}\overline{z} + D = 0$

Consideremos a equação  $\overline{A}z^2 + A\overline{z}^2 + Bz\overline{z} + Cz + \overline{C}\overline{z} + D = 0$ , com  $|A| = 1$  e  $B > -2$ . Faremos uma breve análise para determinar quando esta representa uma cônica.

Inicialmente, façamos a mudança de variável  $z = \sqrt{A}w \Rightarrow z^2 = Aw^2$ . Observe que  $\overline{z}^2 = \overline{A}\overline{w}^2$  e  $\overline{z} = \sqrt{\overline{A}\overline{w}} = \sqrt{\overline{A}}\overline{w}$ . Assim, obtemos,

$$\begin{aligned} \overline{A}Aw^2 + A\overline{A}\overline{w}^2 + B\sqrt{A}w\sqrt{\overline{A}\overline{w}} + C\sqrt{A}w + \overline{C}\sqrt{\overline{A}\overline{w}} + D &= 0 \Rightarrow \\ w^2 + \overline{w}^2 + \sqrt{A}\sqrt{\overline{A}}Bw\overline{w} + C\sqrt{A}w + \overline{C}\sqrt{\overline{A}\overline{w}} + D &= 0. \end{aligned}$$

Perceba que  $\sqrt{A}\sqrt{\overline{A}} = \sqrt{A\overline{A}} = \sqrt{|A|^2} = |A| = 1$ . Tomando  $C' = C\sqrt{A}$ , temos a equação:

$$w^2 + \overline{w}^2 + Bw\overline{w} + C'w + \overline{C'}\overline{w} + D = 0 \quad (3.6)$$

que chamaremos de **forma canônica**.

Consideremos então a equação  $w^2 + \overline{w}^2 + Bw\overline{w} + C'w + \overline{C'}\overline{w} + D = 0$  com  $B > -2$  e  $C' = c'_1 + c'_2i$ . Temos que:

- Caso  $-2 < B < 2$ , a equação representa uma cônica se, e somente se,

$$\frac{c_1'^2}{B+2} + \frac{c_2'^2}{B-2} - D \neq 0$$

e neste caso a cônica é uma **hipérbole**.

- Caso  $B = 2$ , a equação representa uma cônica se, e somente se,

$$c'_2 = \text{Im}(C') \neq 0$$

e neste caso a cônica é uma **parábola**.

- Caso  $B > 2$ , a equação representa uma cônica se, e somente se,

$$\frac{c_1'^2}{B+2} + \frac{c_2'^2}{B-2} - D > 0$$

e neste caso a cônica é uma **elipse**.

*Observação 3.10.* Para demonstração dos resultados descritos acima, sugerimos consulta à (ARAÚJO, 2014).

### 3.2.2.2 Cônicas em coordenadas cartesianas

Anteriormente, vimos que a equação  $\bar{A}z^2 + A\bar{z}^2 + Bz\bar{z} + Cz + \bar{C}\bar{z} + D = 0$  com  $B$  e  $D$  reais pode ser representada em coordenadas cartesianas pela equação 3.5. Agora, vamos verificar em que condições a equação  $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$  representa uma cônica e a classificação desta.

Inicialmente, consideremos  $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$  e  $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$  e façamos esta substituição na equação 3.5. Deste modo, vamos obter:

$$a\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right)^2 + b\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right)\left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right) + c\left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right)^2 + d\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right) + e\left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right) + f = 0.$$

Efetuada os cálculos necessários e reagrupando os termos semelhantes, temos

$$\left(\frac{a - c - bi}{4}\right)z^2 + \left(\frac{a - c + bi}{4}\right)\bar{z}^2 + \left(\frac{2a + 2c}{4}\right)z\bar{z} + \left(\frac{d - ei}{2}\right)z + \left(\frac{d + ei}{2}\right)\bar{z} + f = 0.$$

Note que, se  $a = c$  e  $b = 0$ , está evidenciado nos itens da observação 3.9 que a equação não representa uma cônica. Assim, devemos tomar  $(a - c)^2 + b^2 \neq 0$ .

Agora, vamos ajustar a última igualdade de modo a fazermos um comparativo com a forma padrão. Para tal, vamos multiplicá-la por 4 e dividi-la por  $\sqrt{(a - c)^2 + b^2}$ . Assim, obtém-se

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a - c - bi}{\sqrt{(a - c)^2 + b^2}}\right)z^2 + \left(\frac{a - c + bi}{\sqrt{(a - c)^2 + b^2}}\right)\bar{z}^2 + \left(\frac{2a + 2c}{\sqrt{(a - c)^2 + b^2}}\right)z\bar{z} \\ & + 2\left(\frac{d - ei}{\sqrt{(a - c)^2 + b^2}}\right)z + 2\left(\frac{d + ei}{\sqrt{(a - c)^2 + b^2}}\right)\bar{z} + 4f = 0. \end{aligned}$$

Finalmente, comparando com a forma padrão, temos que, se  $|B| = 2$ ,

$$\left| \frac{2a + 2c}{\sqrt{(a-c)^2 + b^2}} \right| = 2 \Rightarrow |a + c| = \sqrt{(a-c)^2 + b^2}.$$

Elevando ao quadrado a última igualdade, temos

$$\begin{aligned} |a + c|^2 &= \left( \sqrt{(a-c)^2 + b^2} \right)^2 \Rightarrow \\ (a + c)^2 &= (a - c)^2 + b^2 \Rightarrow \\ a^2 + 2ac + c^2 &= a^2 - 2ac + c^2 + b^2 \end{aligned}$$

donde segue que

$$4ac - b^2 = 0.$$

Analogamente, podemos demonstrar que se  $|B| > 2$  tem-se  $4ac - b^2 > 0$  e se  $|B| < 2$ , temos  $4ac - b^2 < 0$ . Em resumo:

- i)  $|B| > 2 \Rightarrow 4ac - b^2 > 0$ , e a equação pode representar uma **elipse**;
- ii)  $|B| = 2 \Rightarrow 4ac - b^2 = 0$ , e a equação pode representar uma **parábola**;
- i)  $|B| < 2 \Rightarrow 4ac - b^2 < 0$ , e a equação pode representar uma **hipérbole**.

### 3.2.2.3 Resumo da simplificação da equação geral utilizando números complexos

Como feito no método tradicional, agora apresentaremos um resumo passo a passo de como devemos proceder para simplificar uma equação geral utilizando os números complexos.

**Passo 01:** Verificar se  $a \neq c$  e/ou  $b \neq 0$ ;

**Passo 02:** Complexificar a equação tomando  $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$  e  $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ ;

**Passo 03:** Colocar (caso necessário), a equação na forma padrão. Para tal, dividir a equação por  $A$  e se preciso, multiplicá-la por  $-1$  (caso  $B \leq -2$ );

**Passo 04:** Aplicar a rotação  $z = \sqrt{A}w$  para obter a forma canônica;

**Passo 05:** Verificar, de acordo com o exposto em 3.2.2.1, se a equação na forma canônica representa uma cônica;

**Passo 06:** Transformar a equação canônica em coordenadas cartesianas nesse novo sistema de coordenadas;

**Passo 07:** Completar o quadrado;

**Passo 08:** Aplicar a translação para colocar a equação na forma canônica desse novo sistema de coordenadas;

**Passo 09:** Determinar todos os elementos na cônica nesse último sistema de coordenadas;

**Passo 10:** Aplicar a isometria inversa para obter os elementos no sistema de coordenadas original.

Como vimos, com o auxílio dos números complexos obtemos demonstrações mais simples das equações de rotação e entendemos a translação através de sua interpretação geométrica. No capítulo a seguir, serão abordados exercícios de aplicação focados no reconhecimento de cônicas.

## 4 EXERCÍCIOS DE APLICAÇÃO E COMPARATIVO DE MÉTODOS

Neste capítulo, faremos a abordagem dos conceitos discutidos no trabalho através de exercícios de aplicação. Discutiremos os exercícios utilizando os dois métodos propostos, dando ênfase à diferença entre estes para obtenção da solução.

### 4.1 Exercícios de aplicação

E1) Identifique a cônica descrita pela equação

$$9x^2 - 4xy + 6y^2 - 30 = 0.$$

**Solução (utilizando o método tradicional):** Não precisamos nos preocupar com as degenerações, pois o enunciado já afirma que trata-se de uma cônica. Note que, pela equação apresentada no problema podemos identificar que não há translação aparente, pois não temos termos lineares (em  $x$  ou em  $y$ ) na equação. Ainda assim, precisamos verificar se a curva possui centro, aplicando as propriedades da translação. Para tal, devemos verificar se o sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \rightarrow 2A \cdot x + B \cdot y + D = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} \rightarrow B \cdot x + 2C \cdot y + E = 0 \end{cases}$$

possui solução.

Assim, temos:

$$\begin{cases} 18x - 4y = 0 \\ -4x + 12y = 0 \end{cases}$$

Donde segue que  $x = y = 0$ . Portanto, o lugar geométrico descrito pela equação **possui centro**  $C(0, 0)$ .

Tomemos portanto a equação  $9x^2 - 4xy + 6y^2 - 30 = 0$ . Sabemos que esta possui centro, e agora devemos determinar os termos após uma rotação, a fim de eliminar o termo retangular. Como **não queremos determinar os elementos da cônica**, utilizaremos a ideia dos termos invariantes da rotação, o que nos proporcionará um caminho mais rápido até a solução.

Temos que,

$$\begin{cases} A' + C' = A + C \\ A' \cdot C' = \frac{B^2 - 4A \cdot C}{-4} \end{cases}$$

Daí,

$$\begin{cases} A' + C' = 9 + 6 = 15 \\ A' \cdot C' = \frac{16 - 4 \cdot 9 \cdot 6}{-4} = 50 \end{cases} .$$

Para encontrar os valores de  $A'$  e  $C'$ , basta determinar a solução de

$$k^2 - (A' + C')k + (A' \cdot C') = 0.$$

Assim, temos que

$$k^2 - 15k + 50 = 0 \Rightarrow \begin{cases} k_1 = A' = 10 \\ k_2 = C' = 5 \end{cases}$$

Por fim, obtemos a equação

$$\begin{aligned} 10x'^2 + 5y'^2 &= 30 \Rightarrow \\ \frac{x'^2}{3} + \frac{y'^2}{6} &= 1. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Concluimos portanto, que a cônica é uma **elipse**.

■

*Observação 4.1.* Note que como não queríamos determinar os elementos da cônica, utilizamos um processo rápido para determinar a classificação da cônica. Caso quiséssemos determinar os elementos desta no sistema de coordenadas da equação 4.1 teríamos uma tarefa relativamente fácil.

No entanto, caso queiramos determinar os elementos da cônica no seu sistema original, teremos um intenso trabalho algébrico. Nesse caso, não seria recomendável utilizar o método dos termos invariantes (que é mais rápido), pois precisaríamos obrigatoriamente determinar as equações de rotação para depois aplicar a isometria inversa. Para isto, teríamos que utilizar vários conceitos trigonométricos (como as fórmulas de arco metade) para encontrar o seno e o cosseno do ângulo de rotação, o que, como dito anteriormente, torna o processo algébrico cansativo.

No exemplo a seguir, vamos determinar os elementos da mesma cônica do exemplo 1, agora identificando seus elementos no sistema original **com o auxílio dos números complexos**.

**E2)** Identifique o lugar geométrico descrito pela equação  $9x^2 - 4xy + 6y^2 - 30 = 0$  e determine seus elementos.

**Solução (utilizando os números complexos):** Note que, como  $a \neq c$  e  $b \neq 0$ , a equação pode representar uma cônica.

Vamos **complexificar** a equação. Tomemos portanto  $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$  e  $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ . Assim,

$$\begin{aligned} 9\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right)\left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right) + 6\left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right)^2 - 30 &= 0 \\ 9\left(\frac{z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2}{4}\right) - 4\left(\frac{z^2 - \bar{z}^2}{4i}\right) + 6\left(\frac{z^2 - 2z\bar{z} + \bar{z}^2}{-4}\right) &= 30, \quad \left(\frac{1}{i} = -i\right) \\ 9\left(\frac{z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2}{4}\right) + 4i\left(\frac{z^2 - \bar{z}^2}{4}\right) + 6\left(\frac{z^2 - 2z\bar{z} + \bar{z}^2}{-4}\right) &= 30, \quad (\times 4) \\ 9(z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2) + 4i(z^2 - \bar{z}^2) - 6(z^2 - 2z\bar{z} + \bar{z}^2) &= 120 \\ 9z^2 + 18z\bar{z} + 9\bar{z}^2 + 4iz^2 - 4i\bar{z}^2 - 6z^2 + 12z\bar{z} - 6\bar{z}^2 &= 120 \\ (3 + 4i)z^2 + (3 - 4i)\bar{z}^2 + 30z\bar{z} &= 120. \end{aligned}$$

Obtemos então que  $A = (3 - 4i)$ , e assim  $|A| = |3 - 4i| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$ . Logo, precisamos dividir a equação por  $|A|$  para deixá-la na forma padrão, donde resulta

$$\left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right)z^2 + \left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i\right)\bar{z}^2 + 6z\bar{z} = 24. \quad (4.2)$$

A equação 4.2 está na **forma padrão**, pois  $|A| = \left|\left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right)\right| = 1$  e  $B = 6 > -2$ .

A direção da **reta diretriz** é dada por

$$v = \sqrt{A} = \sqrt{\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i} = \sqrt{\frac{1 + \frac{3}{5}}{2}} - \sqrt{\frac{1 - \frac{3}{5}}{2}}i = \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}i. \quad (4.3)$$

Vamos aplicar a rotação  $z = \sqrt{A}w$  para obter a **forma canônica** da equação. Assim, sendo  $z = \left(\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}i\right)w$ , temos:

$$w^2 + \bar{w}^2 + 6w\bar{w} = 24 \Leftrightarrow 2\operatorname{Re}(w^2) + 6|w|^2 = 24.$$

Agora, devemos verificar se a equação na forma canônica representa uma cônica. Observe que  $B = 6 > 2$ . Logo, analisaremos o caso da elipse. Assim, temos que

$$\frac{c_1'^2}{B+2} + \frac{c_2'^2}{B-2} - D = \frac{0^2}{6+2} + \frac{0^2}{6-2} - (-24) = 24 > 0.$$

e enfim podemos afirmar que a equação  $9x^2 - 4xy + 6y^2 - 30 = 0$  **representa uma elipse**.

Para transformar a forma canônica em coordenadas cartesianas neste novo sistema de coordenadas, tomemos  $w = x' + y'i$ . Logo,

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re}(w^2) + 6|w|^2 &= 24 \Rightarrow \\ 2(x'^2 - y'^2) + 6(x'^2 + y'^2) &= 24 \Rightarrow \\ 8x'^2 + 4y'^2 &= 24 \Rightarrow \\ \frac{x'^2}{3} + \frac{y'^2}{6} &= 1. \end{aligned}$$

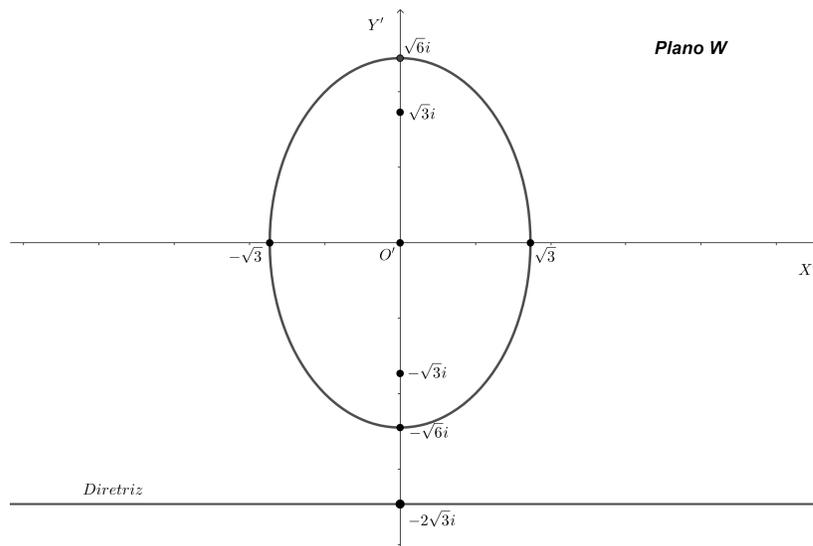
Note que a última equação obtida é exatamente a equação 4.1 obtida no exercício anterior, solucionado utilizando o método tradicional. Também podemos destacar que esta última equação está na forma canônica com relação ao plano  $W$ , portanto os eixos da cônica são paralelos aos eixos coordenados do plano  $W$ .

Precisamos determinar os elementos da cônica neste sistema de coordenadas, para em seguida aplicar a isometria inversa para determinar os elementos no sistema de coordenadas original. Temos portanto,

- $a = \sqrt{6}$  e  $b = \sqrt{3}$ . Pela equação  $a^2 = b^2 + c^2$ , temos  $c = \sqrt{3}$ ;
- O eixo maior possui medida  $2\sqrt{6}$  e o eixo menor,  $2\sqrt{3}$ ;
- Os vértices são  $a'_1 = \sqrt{6}i$ ,  $a'_2 = -\sqrt{6}i$ ,  $b'_1 = \sqrt{3}$  e  $b'_2 = -\sqrt{3}$ ;
- Os focos são  $c'_1 = \sqrt{3}i$  e  $c'_2 = -\sqrt{3}i$ ;
- A excentricidade é  $\epsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ;
- A localização da diretriz é  $\gamma = \pm \frac{a}{\epsilon}i = \pm 2\sqrt{3}i$ .

*Observação 4.2.* Vale saber que a diretriz é sempre paralela ao eixo não focal da cônica e no caso do exemplo, caso tomemos sua localização em relação ao foco  $-\sqrt{3}i$ , teremos  $\gamma = -2\sqrt{3}i$ . Caso a referência seja o foco  $\sqrt{3}i$  a localização da diretriz será dada por  $\gamma = 2\sqrt{3}i$ . Disto, concluímos que as cônicas (exceto a parábola) possuem duas diretrizes, que dependem do foco tomado como referencial.

Figura 4.1 – Elipse no plano W.



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Já sabemos que a direção da diretriz no plano complexo é dada por  $v = \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}i$ . Se  $\theta$  é o ângulo que  $v$  forma com o eixo  $OX$  do plano complexo, então

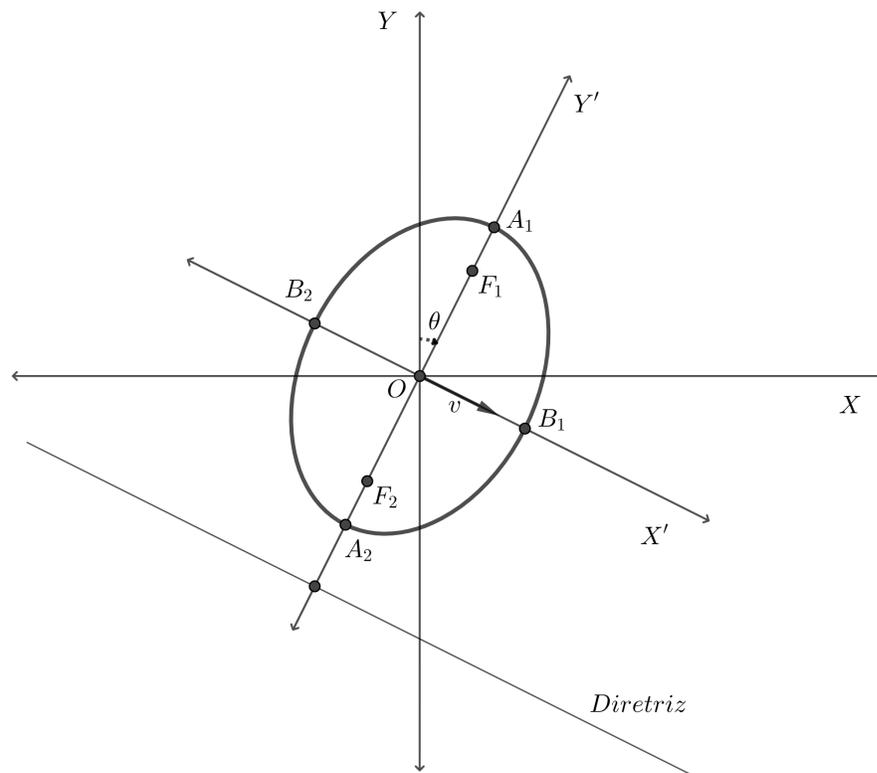
$$\theta = \operatorname{arctg} \left( \frac{\frac{-1}{\sqrt{5}}}{\frac{2}{\sqrt{5}}} \right) = \operatorname{arctg} \left( -\frac{1}{2} \right) = -\operatorname{arctg} \left( \frac{1}{2} \right) = -\alpha.$$

onde  $\alpha = \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{2} \right)$ .

Como  $\theta$  é negativo, a equação  $z = \left( \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}i \right) w$  nos diz que cada ponto  $z$  do plano complexo é obtido pela rotação de cada ponto  $w$  de  $W$  de um ângulo  $\theta$  no sentido horário. Assim, substituindo  $w$  por cada elemento da cônica, concluímos que:

- Os vértices  $a'_1 = \sqrt{6}i$  e  $a'_2 = -\sqrt{6}i$ , são levados em  $a_1 = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} + \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{5}}i$  e  $a_2 = -\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} - \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{5}}i$ ;
- Os vértices  $b'_1 = \sqrt{3}$  e  $b'_2 = -\sqrt{3}$ , são levados em  $b_1 = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}i$  e  $b_2 = -\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}i$ ;
- Os focos  $c'_1 = \sqrt{3}i$  e  $c'_2 = -\sqrt{3}i$  são levados em  $c_1 = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}} + \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}i$  e  $c_2 = -\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}} - \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}i$ ;
- A localização da diretriz  $\gamma = -2\sqrt{3}i$  é levada em  $\gamma = -\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}} - \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{5}}i$ .

Figura 4.2 – Elipse de equação  $9x^2 - 4xy + 6y^2 - 30 = 0$ .



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Note que  $O' = 0 + 0i$  é levada pela equação em  $O = 0 + 0i$  e a diretriz é dada por

$$f(t) = \left( -\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}} - \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{5}}i \right) + t \left( \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}i \right).$$

■

*Observação 4.3.* Na solução deste exercício utilizamos o fato de que a rotação (e também a translação) é uma isometria. A demonstração deste resultado pode ser consultada em (ARAÚJO, 2014). Além disto, utilizamos a equação

$$r = \pm \left( \sqrt{\frac{|z| + a}{2}} \pm \sqrt{\frac{|z| - a}{2}}i \right)$$

para calcular as raízes quadradas  $r_1$  e  $r_2$  do número complexo  $z = a + bi$ . Para demonstração deste resultado, sugerimos consulta à (SAITO; NÓS; SANTOS, 2017).

Vale salientar que os cálculos realizados para obtenção dos elementos da cônica no sistema de coordenadas original foram relativamente simples, e os processos algébricos não foram tão extensos. Isto nos leva a perceber que **a utilização dos números complexos é uma ferramenta bastante útil para esta finalidade**, considerando o exposto acima.

Observe que, utilizando os números complexos, não é obrigatório que saibamos exatamente o valor do ângulo de rotação. Neste caso, precisamos saber apenas seu sinal para identificar o sentido da rotação. Quando utilizamos as coordenadas cartesianas, faz-se necessário saber ao menos as razões trigonométricas associadas ao ângulo, obrigando-nos a conhecer alguns conceitos trigonométricos e tornando os cálculos mais trabalhosos.

**E3)** Identifique o lugar geométrico descrito pela equação

$$x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 2y = 0.$$

**Solução:** Como o exercício pede apenas para fazer a identificação, vamos utilizar o método tradicional.

A fim de evitar degenerações, começamos tentando resolver a equação como uma equação do 2º grau, na variável  $x$  ou na variável  $y$ . De fato, ao tentar aplicar este processo, não obteremos sucesso (omitiremos os cálculos, a fim de não estender a solução). Logo, sabemos que a equação **não representa uma degeneração**.

Em seguida, vamos verificar se a cônica possui centro através do sistema de equações

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \rightarrow 2A \cdot x + B \cdot y + D = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} \rightarrow B \cdot x + 2C \cdot y + E = 0 \end{cases}.$$

Assim, temos:

$$\begin{cases} 2x + 2y - 2 = 0 \\ 2y + 2x + 2 = 0 \end{cases}.$$

Note que o sistema acima não possui solução, e portanto a cônica em questão **não possui centro**. Logo, podemos afirmar que a equação representa uma **parábola**.

*Observação 4.4.* Neste exemplo, notamos que quando a equação representar uma parábola, descobriremos facilmente utilizando o método tradicional. O que enfatiza mais uma vez que caso queiramos determinar apenas o lugar geométrico descrito pela equação dada, este método confirma-se mais eficiente.

**E4)** Identifique o lugar geométrico descrito por  $2x^2 - 4xy + 2y^2 + 8y = 0$ . Em seguida, determine seus elementos.

**Solução:** Como queremos, além de identificar o lugar descrito pela equação, calcular os seus elementos, utilizaremos o método dos **números complexos**.

Temos  $a = 2$ ,  $b = -4$  e  $c = 2$ . Note que  $a = c$ , mas  $b \neq 0$ , logo a equação **pode representar uma cônica**.

Vamos **complexificar** a equação. Tomemos portanto  $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$  e  $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ . Assim,

$$2\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right)\left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right) + 2\left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right)^2 + 8\left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right) = 0$$

$$2\left(\frac{z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2}{4}\right) - 4\left(\frac{z^2 - \bar{z}^2}{4i}\right) + 2\left(\frac{z^2 - 2z\bar{z} + \bar{z}^2}{-4}\right) + 4\left(\frac{z - \bar{z}}{i}\right) = 0, \quad \left(\frac{1}{i} = -i\right)$$

$$\left(\frac{z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2}{2}\right) + i(z^2 - \bar{z}^2) - \left(\frac{z^2 - 2z\bar{z} + \bar{z}^2}{2}\right) - 4i(z - \bar{z}) = 0, \quad (\times 2)$$

$$z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2 + 2iz^2 - 2i\bar{z}^2 - z^2 + 2z\bar{z} - \bar{z}^2 - 8iz + 8i\bar{z} = 0$$

$$(2i)z^2 + (-2i)\bar{z}^2 + 4z\bar{z} + (-8i)z + (8i)\bar{z} = 0$$

Temos  $|-2i| = 2$ , então vamos dividir a equação por 2 para deixá-la na **forma padrão**. Logo, obtemos:

$$(i)z^2 + (-i)\bar{z}^2 + 2z\bar{z} + (-4i)z + (4i)\bar{z} = 0.$$

A direção da diretriz com relação ao plano complexo é dada por

$$v = \sqrt{A} = \sqrt{0 - i} = \sqrt{\frac{1+0}{2}} - \sqrt{\frac{1-0}{2}}i = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

Aplicando a rotação  $z = \sqrt{A}w = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)w$ , obtemos a **forma canônica**

$$w^2 + \bar{w}^2 + 2w\bar{w} + \left(-\frac{4}{\sqrt{2}} - \frac{4}{\sqrt{2}}i\right)w + \left(-\frac{4}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{2}}i\right)\bar{w} = 0 \quad (4.4)$$

que é equivalente a

$$2\operatorname{Re}(w^2) + 2|w|^2 + 2\left(-\frac{4}{\sqrt{2}}\operatorname{Re}(w) + \frac{4}{\sqrt{2}}\operatorname{Im}(w)\right) = 0.$$

Na equação 4.4 temos que  $B = 2$ . Assim, basta verificar se  $c'_2 = \operatorname{Im}(C') \neq 0$  para saber se a equação representa uma cônica, e de fato,  $c'_2 = -\frac{4}{\sqrt{2}} \neq 0$ . Logo, **a equação representa uma parábola.**

Assumindo  $w = x' + y'i$ , temos

$$2\operatorname{Re}(w^2) + 2|w|^2 + 2\left(-\frac{4}{\sqrt{2}}\operatorname{Re}(w) + \frac{4}{\sqrt{2}}\operatorname{Im}(w)\right) = 0 \Rightarrow$$

$$2(x'^2 - y'^2) + 2(x'^2 + y'^2) + 2\left(-\frac{4}{\sqrt{2}}x' + \frac{4}{\sqrt{2}}y'\right) = 0 \Rightarrow$$

$$4x'^2 - 4\sqrt{2}x' + 4\sqrt{2}y' = 0 \Rightarrow$$

$$x'^2 - \sqrt{2}x' + \sqrt{2}y' = 0 \Rightarrow$$

Completando o quadrado,

$$\begin{aligned} x'^2 - \sqrt{2}x' &= -\sqrt{2}y' \Rightarrow \\ x'^2 - \sqrt{2}x' + \frac{2}{4} &= -\sqrt{2}y' + \frac{2}{4} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\left(x' - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = -\sqrt{2}\left(y' - \frac{\sqrt{2}}{4}\right). \quad (4.5)$$

Tomando

$$u = w + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right) = (x', y') + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{4}\right) = \left(x' - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(y' - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)i = x'' + y''i \quad (4.6)$$

obtemos a equação na forma canônica no plano  $U$ ,

$$x''^2 = -\sqrt{2}y''.$$

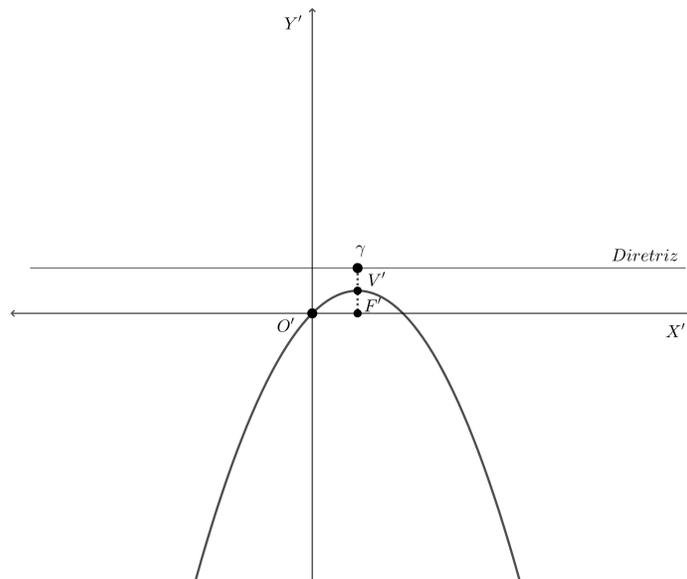
Podemos então determinar os elementos da cônica neste último sistema de coordenadas. Assim,  $2p = \sqrt{2}$  e portanto  $\frac{p}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ .

Logo, a parábola tem vértice em  $O''$ , o foco é dado pelo complexo  $c'' = -\frac{\sqrt{2}}{4}i$ , e a localização da diretriz no eixo  $O''Y''$  é dada pelo complexo  $\gamma'' = \frac{\sqrt{2}}{4}i$ .

Para determinar os elementos obtidos no plano  $W$  não precisamos necessariamente utilizar a equação 4.6 da mudança de variável. Note que a equação 4.5 já nos permite encontrar tais elementos. Mas, como vimos, podemos ilustrar o problema através de três planos.

No plano  $W$ , o vértice  $V'$  da parábola é dado pelo complexo  $v' = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}i$ , o foco  $F'$  pelo complexo  $c' = \frac{\sqrt{2}}{2}$  e a localização da diretriz por  $\gamma' = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ .

Figura 4.3 – Parábola de equação  $\left(x' - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = -\sqrt{2}\left(y' - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$  no plano  $W$ .



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Note que o ângulo que  $v$  forma com o eixo  $OX$  do plano complexo é dado por

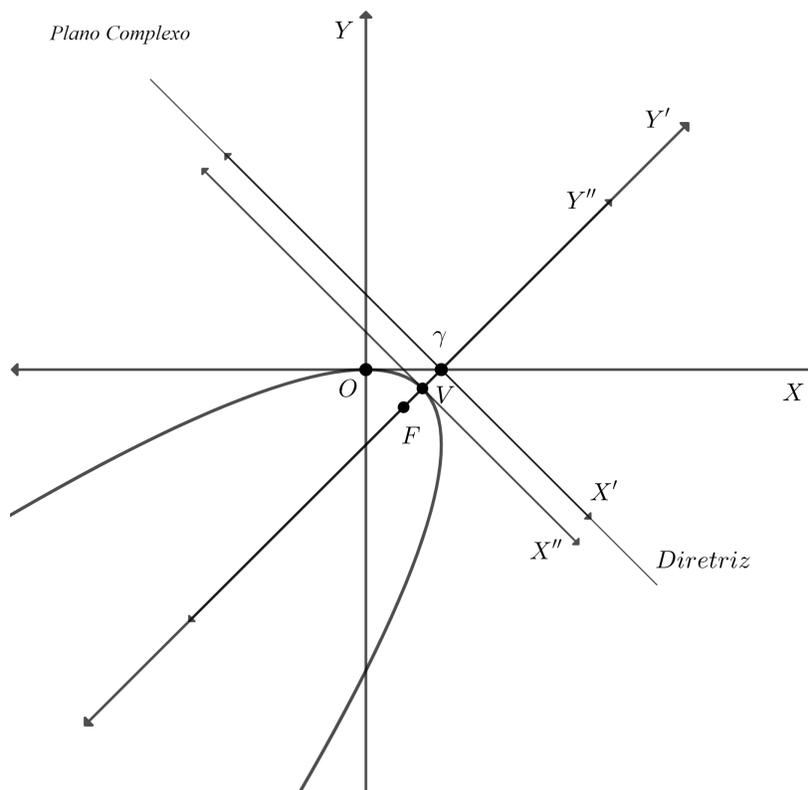
$$\theta = \operatorname{arctg} \left( \frac{\frac{-1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \right) = \operatorname{arctg}(-1) = -45^\circ$$

o que nos diz que a equação  $z = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)w$  rotaciona cada elemento do plano  $W$  de  $45^\circ$  no sentido horário.

Agora, basta fazer a substituição dos complexos que representam os elementos da cônica na equação  $z = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)w$ , para obter as coordenadas da cônica no plano complexo, donde segue que

- O vértice  $V$  é dado pelo complexo  $v = \left(\frac{3}{4}\right) - \left(\frac{1}{4}\right)i$ ;
- O foco  $F$  é dado pelo complexo  $c = \left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)i$ ;
- A localização da diretriz é dada por  $\gamma = 1$

Figura 4.4 – Parábola de equação  $2x^2 - 4xy + 2y^2 + 8y = 0$ .



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

Neste exemplo, os cálculos para encontrar as coordenadas da cônica no plano complexo se tornam ainda mais simples, pois a equação no plano  $W$  já nos permitiu uma visão completa dos elementos do lugar geométrico.

■

**E5)** Determine os elementos da cônica descrita por

$$3x^2 - 4\sqrt{3}xy - y^2 + 20y = 25.$$

**Solução:** Note que o enunciado já afirma que a equação representa uma cônica. Logo, não há necessidade de fazer a verificação descrita no passo 1.

Tomemos  $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$  e  $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ , a fim de complexificar a equação. Daí, temos que

$$\begin{aligned} 3\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right)^2 - 4\sqrt{3}\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right)\left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right) - \left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right)^2 + 20\left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right) &= 25 \\ 3\left(\frac{z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2}{4}\right) - 4\sqrt{3}\left(\frac{z^2 - \bar{z}^2}{4i}\right) - \left(\frac{z^2 - 2z\bar{z} + \bar{z}^2}{-4}\right) + 20\left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right) &= 25 \end{aligned}$$

Efetutando os cálculos necessários e agrupando os termos semelhantes, obtemos

$$(4 + 4\sqrt{3}i)z^2 + (4 - 4\sqrt{3}i)\bar{z}^2 + 4z\bar{z} + (-40i)z + (40i)\bar{z} = 100.$$

Como  $|A| = \sqrt{4^2 + (-4\sqrt{3})^2} = 8$ , vamos dividir a equação por  $|A|$  a fim de obtê-la na **forma padrão**. Com efeito, temos que

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\bar{z}^2 + \frac{1}{2}z\bar{z} + (-5i)z + (5i)\bar{z} = \frac{25}{2} \quad (4.7)$$

que possui  $|A| = 1$  e  $B > -2$ , e portanto está na forma padrão.

A direção da diretriz com relação ao plano complexo é dada por

$$v = \sqrt{A} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i} = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{2}}{2}} - \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{2}}{2}}i = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.$$

Aplicando a rotação  $z = \sqrt{A}w = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)w$ , obtemos a **forma canônica**

$$w^2 + \bar{w}^2 + \frac{1}{2}w\bar{w} + \left(-\frac{5}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}i\right)w + \left(-\frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i\right)\bar{w} = \frac{25}{2}.$$

Como  $B = \frac{1}{2}$ , vamos verificar se a forma canônica representa uma hipérbole.

Note que

$$\frac{c_1'^2}{B+2} + \frac{c_2'^2}{B-2} - D = \frac{\left(-\frac{5}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}+2} + \frac{\left(-\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}-2} - \left(-\frac{25}{2}\right) = \frac{5}{2} \neq 0$$

logo a equação representa uma hipérbole.

Reorganizando a equação na forma canônica, segue

$$w^2 + \bar{w}^2 + \frac{1}{2}w\bar{w} + \left(-\frac{5}{2} - \frac{5\sqrt{3}}{2}i\right)w + \left(-\frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i\right)\bar{w} = \frac{25}{2} \Rightarrow$$

$$2\operatorname{Re}(w^2) + \frac{1}{2}|w|^2 + 2\left(-\frac{5}{2}\operatorname{Re}(w) + \frac{5\sqrt{3}}{2}\operatorname{Im}(w)\right) = \frac{25}{2}.$$

Para transformar a forma canônica em coordenadas cartesianas neste novo sistema de coordenadas, tomemos  $w = x' + y'i$ . Assim,

$$2(x'^2 - y'^2) + \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) + 2\left(-\frac{5}{2}x' + \frac{5\sqrt{3}}{2}y'\right) = \frac{25}{2}$$

que simplificando, obtemos

$$5(x'^2 - 2x') - 3\left(y'^2 - \frac{10\sqrt{3}}{3}y'\right) = 25.$$

Completando quadrados,

$$5(x'^2 - 2x' + 1) - 3\left(y'^2 - 2\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)y' + \left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^2\right) = 25 + 5 - 25 \Rightarrow$$

$$5(x' - 1)^2 - 3\left(y' - \frac{5}{\sqrt{3}}\right)^2 = 5 \Rightarrow$$

$$\frac{(x' - 1)^2}{1} - \frac{\left(y' - \frac{5}{\sqrt{3}}\right)^2}{\frac{5}{3}} = 1 \tag{4.8}$$

que é a equação da hipérbole no plano  $W$ . E tomando

$$u = w + \left(-1, -\frac{5}{\sqrt{3}}\right) = (x', y') + \left(-1, -\frac{5}{\sqrt{3}}\right) = (x' - 1) + \left(y' - \frac{5}{\sqrt{3}}\right)i = x'' + y''i \tag{4.9}$$

obtemos a equação da hipérbole no plano  $U$ , dada por

$$\frac{x'^2}{1} - \frac{y'^2}{\frac{5}{3}} = 1.$$

Como no exemplo anterior, para determinar os elementos obtidos no plano  $W$  não precisamos necessariamente utilizar a equação 4.9 da mudança de variável, pois a equação 4.8 já nos permite encontrar tais elementos.

Pela equação 4.8, temos que no plano  $W$ :

- $a^2 = 1 \Rightarrow a = 1$  e  $b^2 = \frac{5}{3} \Rightarrow b = \sqrt{\frac{5}{3}}$ ;
- Como  $c^2 = a^2 + b^2$ , segue que  $c = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ ;
- A excentricidade é  $\epsilon = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ ;
- O centro  $K'$  é dado pelo complexo  $k' = 1 + \frac{5\sqrt{3}}{3}i$ ;
- Os focos  $F'_1$  e  $F'_2$  são dados, respectivamente, pelos complexos  $c'_1 = \left(1 - \frac{2\sqrt{6}}{3}\right) + \frac{5\sqrt{3}}{3}i$  e  $c'_2 = \left(1 + \frac{2\sqrt{6}}{3}\right) + \frac{5\sqrt{3}}{3}i$ ;
- Os vértices  $A'_1$  e  $A'_2$  são dados por  $a'_1 = \frac{5\sqrt{3}}{3}i$  e  $a'_2 = 2 + \frac{5\sqrt{3}}{3}i$ ;
- Os co-vértices  $B'_1$  e  $B'_2$  são dados por  $b'_1 = 1 + \left(\frac{5\sqrt{3} - \sqrt{15}}{3}\right)i$  e  $b'_2 = 1 + \left(\frac{5\sqrt{3} + \sqrt{15}}{3}\right)i$ ;
- A direção da diretriz, considerando o foco dado pelo complexo  $c'_1$  no eixo  $O'X'$  do plano  $W$  é  $\gamma' = 1 - \frac{\sqrt{6}}{4}$ .

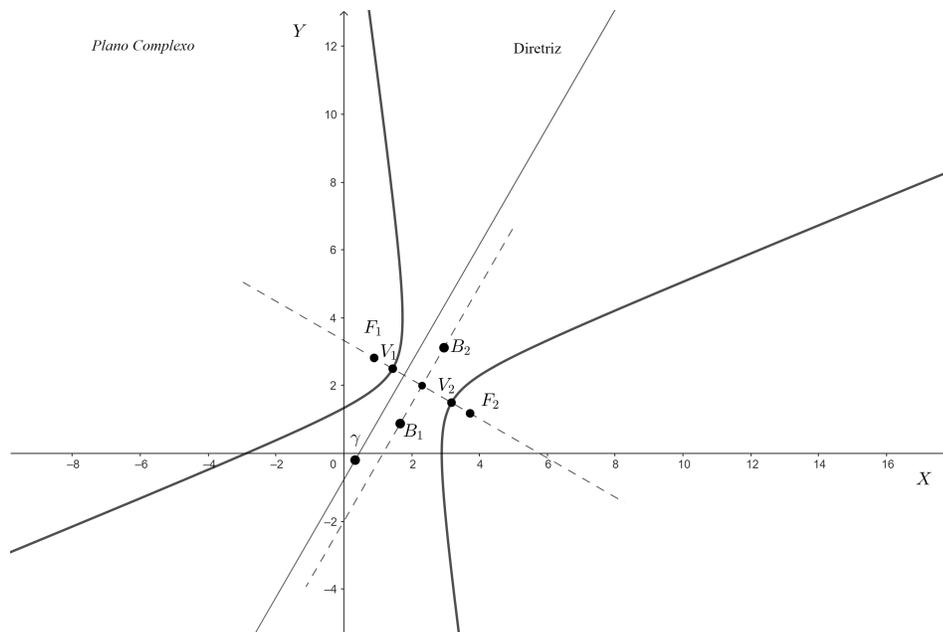
Sabemos que  $v = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ . O ângulo que  $v$  forma com o eixo  $OX$  do plano complexo é dado por

$$\theta = \operatorname{arctg} \left( \frac{\frac{-1}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}}{\frac{2}{2}} \right) = -\operatorname{arctg} \left( \frac{\sqrt{3}}{3} \right) = -30^\circ.$$

Isto significa que a equação  $z = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)w$  leva cada ponto  $w$  de  $W$  em um ponto  $z$  do plano complexo através de uma rotação de um ângulo de  $30^\circ$  no sentido horário. Assim, para determinar os elementos da cônica no plano complexo, basta substituí-los na equação em questão, donde obtemos que:

- O centro  $k' = 1 + \frac{5\sqrt{3}}{3}i$  é levado em  $k = \frac{4\sqrt{3}}{3} + 2i$ ;
- Os focos  $c'_1 = \left(1 - \frac{2\sqrt{6}}{3}\right) + \frac{5\sqrt{3}}{3}i$  e  $c'_2 = \left(1 + \frac{2\sqrt{6}}{3}\right) + \frac{5\sqrt{3}}{3}i$  são levados em  $c_1 = \left(-\sqrt{2} + \frac{4\sqrt{3}}{3}\right) + \left(2 + \frac{\sqrt{6}}{3}\right)i$  e  $c_2 = \left(\sqrt{2} + \frac{4\sqrt{3}}{3}\right) + \left(2 - \frac{\sqrt{6}}{3}\right)i$ ;
- Os vértices  $a'_1 = \frac{5\sqrt{3}}{3}i$  e  $a'_2 = 2 + \frac{5\sqrt{3}}{3}i$  são levados em  $a_1 = \frac{5\sqrt{3}}{6} + \frac{5}{2}i$  e  $a_2 = \frac{11\sqrt{3}}{6} + \frac{2}{2}i$ ;
- Os co-vértices  $b'_1 = 1 + \left(\frac{5\sqrt{3} - \sqrt{15}}{3}\right)i$  e  $b'_2 = 1 + \left(\frac{5\sqrt{3} + \sqrt{15}}{3}\right)i$  são levados em  $b_1 = \left(\frac{8\sqrt{3} - \sqrt{15}}{6}\right) + \left(2 - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)i$  e  $b_2 = \left(\frac{8\sqrt{3} + \sqrt{15}}{6}\right) + \left(2 + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)i$ ;
- A direção da diretriz,  $\gamma' = 1 - \frac{\sqrt{6}}{4}$  é levada em  $\gamma = \left(\frac{4\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{8}\right) + \left(\frac{\sqrt{6} - 4}{8}\right)i$ .

Figura 4.5 – Hipérbole de equação  $3x^2 - 4\sqrt{3}xy - y^2 + 20y = 25$ .



Fonte: Elaborado pelo autor, 2023.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Como exposto anteriormente, este trabalho propõe servir de apoio para professores e alunos do ensino médio, oferecendo um método alternativo para reconhecimento de cônicas que, em algumas situações é mais vantajoso que o método tradicional. Além disso, visamos aqui atribuir importância aos números complexos, tendo em vista que por muitas vezes, esta ferramenta algébrica não é sequer mencionada em sala de aula. Os números complexos, como aqui demonstrado, são um valioso aparato geométrico quando conhecemos suas propriedades.

Trouxemos aqui uma nova oportunidade de aprendizagem para os números complexos. Muitas vezes abordados apenas com tratamento puramente algébrico, e apesar de alguns currículos não abordarem estes brilhantes números, vale considerar sua relevante importância para o desenvolvimento da Álgebra Moderna, donde podemos destacar diversas de suas aplicações, em especial, a aplicação abordada neste trabalho.

De fato, no ensino médio, na maioria das vezes, os alunos apenas têm acesso ao estudo do reconhecimento de cônicas apenas quando estas possuem seus eixos paralelos aos eixos coordenados do plano cartesiano. Assim sendo, este trabalho oferece um aparato de estudo de um modo geral, possibilitando ao leitor identificar as cônicas quando estas estão além de transladadas, rotacionadas, sendo um complemento ao estudo comumente abordado.

Por fim, destacamos o grande potencial dos números complexos na movimentação de objetos no plano. Munidos de suas propriedades geométricas, conseguimos um caminho mais simples para realizar por exemplo a demonstração das fórmulas de rotação abordadas neste trabalho e, além de diversos outros artifícios, podemos determinar os elementos de uma cônica sem precisar utilizar, por exemplo, recursos inerentes à Álgebra Linear, que só é tratada em cursos de nível superior.

## REFERÊNCIAS

- ARAÚJO, T.S. **Números complexos e cônicas**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2014.
- BEIRIGO, T. **Números complexos: uma metodologia baseada na história para obtenção de conceito**. 1ª ed. Confresa-MT: Editora do Autor, 2016.
- BOYER, C.B. **História da Matemática**; tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 1974.
- EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Howard Eves; tradução Hygino H. Domingues. 5ª ed. Campinas-SP: Editora da Unicamp, 2011.
- GUIMARÃES, C.S. **Matemática em nível IME-ITA**. 1ª ed. Volume 1. Fortaleza: Ed. Vestseller, 2008.
- GUIMARÃES, C.S. **Matemática em nível IME-ITA**. 1ª ed. Volume 2. Fortaleza: Ed. Vestseller, 2013.
- HEFEZ, A.; VILLELA, M.L.T. **Polinômios e Equações Algébricas**. 1ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- IEZZI G. **Fundamentos de Matemática elementar - volume 6: complexos, polinômios e equações**. 8ª ed. São Paulo: Atual, 2013a.
- IEZZI G. **Fundamentos de Matemática elementar - volume 7: geometria analítica**. 6ª ed. São Paulo: Atual, 2013b.
- JÚNIOR, U.P. **A História dos Números Complexos: das quantidades sofisticadas de Cardano às linhas orientadas de Argand**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2009.
- LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio**. 5ª ed. Volume 3. Rio de Janeiro: SBM, 2005.
- MONTEIRO, R.M. **Resgate do teorema de Dandelin no estudo de cônicas com o Geogebra**. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2014.
- NETO, A.C.M. **Tópicos de Matemática Elementar - volume 6: polinômios**. 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.
- NETO, R.V. **Números complexos: uma abordagem integradora através das transformações geométricas no plano**. Curitiba: CRV, 2020.

ROQUE, T.; CARVALHO, J.B.P. **Tópicos de História da Matemática**. 1<sup>a</sup> ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

RYPOLL, J.B.; CYDARA, C.R.; SILVEIRA, J.F.P. **Números Racionais, Reais e Complexos**. Porto Alegre: UFRGS Editora, 2011.

SAITO, O.H.; NÓS, R.L.; SANTOS, M.A. Radicais duplos e raiz quadrada de um número complexo. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics**, 14 abr. 2017. Disponível em <<https://doi.org/10.5540/03.2017.005.01.0557>>. Acesso em: 05 jul. 2023.