



UEPB

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I – CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA
MESTRADO ACADÊMICO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA**

CÍCERO FÉLIX DA SILVA

**ENSINO APRENDIZAGEM DE FUNÇÃO AFIM VIA EXPLORAÇÃO, RESOLUÇÃO
E PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS COM O USO DO APLICATIVO DESMOS EM
CONTEXTO REMOTO**

**CAMPINA GRANDE – PB
2021**

CÍCERO FÉLIX DA SILVA

**ENSINO APRENDIZAGEM DE FUNÇÃO AFIM VIA EXPLORAÇÃO, RESOLUÇÃO
E PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS COM O USO DO APLICATIVO DESMOS EM
CONTEXTO REMOTO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática

Orientador: Prof. Dr. Silvanio de Andrade.

**CAMPINA GRANDE – PB
2021**

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

S586e Silva, Cícero Félix da.

Ensino aprendizagem de função afim via exploração, resolução e proposição de problemas com o uso do aplicativo Desmós em contexto remoto [manuscrito] / Cícero Félix da Silva. - 2021.

149 p. : il. colorido.

Digitado.

Dissertação (Mestrado em Acadêmico em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2022.

"Orientação : Prof. Dr. Silvanio de Andrade, Departamento de Matemática - CCT."

1. Ensino Remoto. 2. Novas tecnologias na Educação. 3. Ensino de matemática. I. Título

21. ed. CDD 372.7

CÍCERO FÉLIX DA SILVA

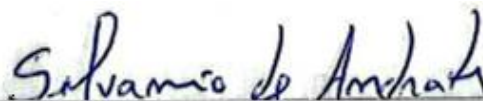
**ENSINO APRENDIZAGEM DE FUNÇÃO AFIM VIA EXPLORAÇÃO, RESOLUÇÃO
E PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS COM O USO DO APLICATIVO DESMOS EM
CONTEXTO REMOTO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática

Aprovado em: 23/12/2021.

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Silvanio de Andrade (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)



Prof. Dr. José Joelson Pimentel de Almeida (Examinador Interno)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)



Prof. Dr. Tiêgo dos Santos Freitas (Examinador Externo)
SEECT – PB

A Deus, por tudo. Ao meu pai. João Félix (*in
memorian*), à minha mãe e meus irmãos(ãs),
por toda confiança, incentivo, apoio e amor,
DEDICO.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, a Deus, por tudo, pois sem ele eu não conseguiria chegar até aqui. Sei dos propósitos dele para comigo e sou grato por tudo!

À minha mãe, Maria Lídia, por todo amor, incentivo, apoio e por sempre acreditar em mim.

Aos meus irmão e irmãs, que torcem muito por mim e que estão sempre felizes com as minhas conquistas.

Ao meu querido e digníssimo orientador, Silvanio de Andrade, pela compreensão, pela paciência, pelos momentos de orientações e conversas. Minha gratidão e reconhecimento, além de orientador uma pessoa de um coração imenso.

Aos membros da banca examinadora, Prof. Dr. José Joelson Pimentel de Almeida e Prof. Dr. Tiêgo dos Santos Freitas, por aceitarem o convite de participação tanto na qualificação quanto na defesa e pelas valiosas contribuições que almejaram a melhoria do trabalho.

A todos os discentes que fazem parte do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em especial àqueles que, além de companheiros de turma, se tornaram meus amigos, Izamara, Dênis, Littyanni, Igor, João, dentre outros.

Aos professores e funcionários do PPGECEM, que contribuíram ao longo desses meses, por meio das disciplinas e debates, para o desenvolvimento desta pesquisa.

Aos colegas do Grupo de Estudo e Pesquisa sobre Educação e Pós-Modernidade (GEPEP), com os quais tive a oportunidade de adquirir mais conhecimento, em especial àqueles que me apoiaram bastante e, se não fosse por eles, talvez o percurso teria sido outro: Ana Beatriz, Jéssica e Saul. Considero vocês como grandes amigos.

Aos alunos que aceitaram o convite e participaram efetivamente das oficinas, vocês foram peças fundamentais na minha pesquisa.

Enfim, a todas aquelas pessoas que torceram por mim e que sempre me diziam que eu era capaz!

RESUMO

O presente trabalho busca analisar as contribuições da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas para o ensino de função afim com o uso do Aplicativo Desmos, visando a construção desse conceito matemático e sua relação com o cotidiano. Como aporte teórico, utilizamos as ideias de Andrade (1998; 2017), Silva (2013) e Brandão (2014), entre outros trabalhos que discutem acerca da metodologia de ensino aprendizagem de Matemática através da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas. Trazemos as grandes 5 ideias do conceito de função defendidas por Cooney, Beckmann e Lloyd (2010) e as possibilidades das tecnologias no ensino remoto, discutindo as principais perspectivas de seu uso. O estudo da pesquisa de campo possui cunho qualitativo, na modalidade de pesquisa pedagógica de acordo com Lankshear e Knobel (2008), na qual o professor-pesquisador pesquisa a sua própria prática. Realizamos o trabalho de campo de forma remota, compreendendo o atual momento que passamos hodiernamente e pensando nas contribuições deste trabalho para o ensino da Matemática. Os dados foram coletados a partir de registros dos alunos e das gravações de cada encontro. Foram realizados dez encontros, de duas horas cada, no período de outubro a novembro de 2020. As aulas foram ministradas de forma remota, devido ao atual momento em que vivemos. Como sujeitos da pesquisa, tínhamos confirmados 16 participantes, mas, no primeiro encontro, só participaram dez, todos oriundos de uma escola estadual do Estado da Paraíba. Dentre os resultados da pesquisa, evidenciados nas aplicações dos encontros, percebemos que o trabalho com a Exploração, Resolução e Proposição de Problemas fez com que os alunos conseguissem enxergar mais detalhes no conceito de função afim, dando-lhes a oportunidade de um entendimento mais consistente. Em contrapartida, percebemos que, no ensino remoto, a interação ainda estava escassa, quando comparamos com o ambiente da sala de aula. A visualização oferecida pelo Desmos fez com que os alunos vissem detalhes mais genuínos do gráfico da função afim. Diante de tudo que discutimos e apresentamos nesse trabalho tivemos o privilégio de repensarmos a nossa prática docente e compreendermos que o ensino é um processo contínuo, com altos e baixos, mas tendo vontade e persistência podemos alcançar excelentes resultados e contribuir de forma significativa na vida dos alunos.

Palavras-chave: Exploração, Resolução e Proposição de Problemas. Função Afim. Desmos. Ensino Remoto.

ABSTRACT

The present work seeks to analyze the contributions of Exploration, Solving and Posing Problems for the teaching of affine function with the use of the Desmos Application, aiming at the construction of this mathematical concept and its relationship with everyday life. As theoretical contribution, we use the ideas of Andrade (1998; 2017), Silva (2013) and Brandão (2014), among other works that discuss the teaching-learning methodology of mathematics through Exploration, Solving and Posing Problems. We bring the great 5 ideas of the concept of function defended by Cooney, Beckmann and Lloyd (2010) and the possibilities of technologies in remote learning, discussing the main perspectives of their use. The field research study has a qualitative nature, in the form of pedagogical research according to Lankshear and Knobel (2008), in which the professor-researcher researches his own practice. We carried out the fieldwork remotely, understanding the current moment we are experiencing today and thinking about the contributions of this work to the teaching of mathematics. Data were collected from student records and recordings of each ten meetings were held, of two hours each, from October to November 2020. Classes were held remotely, due to the current moment in which we live. As research subjects, we had confirmed 16 participants, but, in the first meeting, only ten participated, all from a state school in the State of Paraíba. Among the research results, evidenced in the applications of the meetings, we realized that the work with the Exploration, Solving and Posing of Problems allowed the students to see more details in the concept of affine function, giving them the opportunity for a more consistent understanding. On the other hand, we realize that, in remote learning, interaction is scarce, when compared to the classroom environment. The visualization offered by Desmos made the students see more genuine details of the affine function graph. In view of everything we discussed and presented in this work, we had the privilege of rethinking our teaching practice and understanding that teaching is a continuous process, with ups and downs, but with the will and persistence we can achieve excellent results and contribute significantly to the lives of students.

Keywords: Exploration, Solving e Posing of problems. Affine Function. Desmos. Remote Teaching.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1: Resolução do item b pelo Aluno A4.....	67
Figura 2: Resolução do item “c” pelo Aluno A6.....	69
Figura 3: Expressão Matemática do Aluno A7.....	73
Figura 4: Problema proposto pelo Aluno A8.....	74
Figura 5: Gráfico da função do Aluno A2 com pontos demarcados.....	75
Figura 6: Tabela construída pelo Aluno A3.....	78
Figura 7: Expressão Matemática escrita pelo Aluno A3.....	79
Figura 8: Resolução do Aluno A5.....	80
Figura 9: Tabela construída pelo Aluno A4.....	85
Figura 10: Questionamento do Aluno A5 sobre o preço da mão de obra.....	87
Figura 11: Esboço do gráfico no Desmos feito pelo Aluno A8.....	89
Figura 12: Tabela com os valores feito pelo Aluno A3.....	88
Figura 13: Problemas propostos pelos Alunos A4 e A5.....	90
Figura 14: Expressão Matemática feita pelo Aluno A3.....	93
Figura 15: Expressão Matemática feita pelo Aluno A4.....	94
Figura 16: Resolução dos itens (b) e (c) feita pelo Aluno A2.....	94
Figura 17: Resolução do item (b) feita pelo Aluno A9.....	95
Figura 18: Resolução do item (d) pelo Aluno A3.....	95
Figura 19: Print das telas dos celulares de A2, A5 e A7	97
Figura 20: Representação algébrica para o problema do Aluno A3.....	101
Figura: 21: Representação algébrica para o problema do Aluno A6.....	101
Figura: 22: Representação algébrica para o problema do Aluno A7.....	101
Figura 23: Tabela referente aos planos A e B feita pelo Aluno A5.....	103
Figura 24: Tabela referente aos planos A e B feita no desmos pelo Aluno A8.....	104
Figura 25: Visualização gráfica no desmos do Aluno A7.....	109
Figura 26: Bilhete escrito pelo Aluno A8.....	113
Figura 27: Sentença Matemática do Aluno A6.....	114
Figura 28: Sentença Matemática do Aluno A5:	114
Figura 29: Resolução das primeiras questões pelo Aluno A5.....	117
Figura 30: Representação gráfica das duas expressões do Aluno A2.....	118
Figura 31: Print do desmos da resolução do item “f” do Aluno A4.....	120
Figura 32: Proposição de problemas dos Alunos A3 e A5.....	121
Figura 33: Print da tela do desmos do Aluno A8.....	124

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Síntese das pesquisas analisadas.....	29
Quadro 2 – Principais resultados em pesquisas do GEPEP.....	40
Quadro 3 – Resumo de vantagens das representações múltiplas.....	51
Quadro 4 – Quadro demonstrativo dos dez encontros.....	59
Quadro 5 – Falas dos alunos sobre a avaliação dos encontros.....	127

SUMÁRIO

1 NOSSA TEMÁTICA DE ESTUDO	10
2 O USO DE TECNOLOGIAS PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA:	
PERPSECTIVAS DO ENSINO REMOTO E O APLICATIVO DESMOS	15
2.1 O uso de tecnologias no ensino de matemática	15
2.2 Perspectivas para o ensino remoto: a sala de aula em transformação	21
2.3 A plataforma Desmos como ferramenta para o ensino remoto.....	26
3 A PERSPECTIVA DA EXPLORAÇÃO, RESOLUÇÃO E PROPOSIÇÃO DE	
PROBLEMAS.....	32
3.1 A Resolução de Problemas no ensino de Matemática	32
3.2 O ensino de Matemática através da exploração, resolução e proposição de problemas	
.....	35
4 O ENSINO APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES: IDEIAS, CONCEITOS E	
APLICAÇÕES	43
4.1 A relevância do ensino e aprendizagem de função na Matemática	43
4.2 Concepções de ideias essenciais de função	47
5 O PERCURSO METODOLÓGICO DA PESQUISA.....	53
6 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DAS ATIVIDADES NO ENSINO REMOTO VIA	
EXPLORAÇÃO, RESOLUÇÃO E PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS USANDO O	
APLICATIVO DESMOS.....	59
7 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	130
REFERÊNCIAS.....	135
ANEXO A – PLANO DE ATIVIDADES	141

1 NOSSA TEMÁTICA DE ESTUDO

Apresentamos, preliminarmente, a nossa justificativa da temática, esclarecendo a partir de onde surgiu o interesse em pesquisar o ensino-aprendizagem de função afim através da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas com o uso de tecnologias. Posteriormente, fazemos uma descrição geral da nossa pesquisa, mostrando a nossa problemática de estudo e como se deu nossa fundamentação teórica, a elucidação dos nossos objetivos, além da metodologia de ensino e a nossa análise dos dados.

Através das inquietações no percurso da nossa vida acadêmica e no dia a dia da prática docente, surgiu o interesse em pesquisar a respeito do ensino-aprendizagem do conteúdo de funções, atrelado à metodologia da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas com o uso de uma ferramenta tecnológica no âmbito do ensino remoto.

As discussões que envolvem essa temática chamam nossa atenção pelo fato da necessidade de estimular a inserção de novas metodologias no ensino de matemática, prezando pela formação dos conceitos e reconhecendo a importância de se trabalhar a metodologia de ensino-aprendizagem da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas nas aulas de matemática, sendo capaz de superar obstáculos relacionados ao conhecimento adquirido por parte dos alunos.

Por se tratar de uma temática de bastante utilidade e que interfere diretamente no cotidiano dos alunos e, por muitas vezes, não é oferecida a capacidade de relacionar com situações conhecidas, fica visível nossa inquietação em abordar o estudo de funções a partir da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas, por ser uma metodologia a qual torna o aluno um ser ativo no processo de ensino-aprendizagem.

Nossa averiguação parte do foco no estudo da função afim, também conhecida como função polinomial do 1º grau, fazendo uso da plataforma digital Desmos, uma calculadora gráfica utilizada para trabalhar com conteúdo matemático, como o caso das funções. Tal plataforma ainda é pouco conhecida e explorada, mas, em algumas pesquisas, mostrou potencial para uso em atividades de exploração de funções, gráficos e geometria, como se evidencia nas dissertações de Abreu (2018), Euzébio (2018) e Scrimin (2019).

O interesse por fazer uso de tecnologias no nosso trabalho mostra-se a partir da dimensão desse recurso na vida dos alunos, por ser um recurso familiarizado pelos estudantes, apresentar grande importância na visualização gráfica, além de permitir que a aprendizagem seja mais dinâmica e com maior compreensão.

O diferencial do nosso trabalho está na incorporação da metodologia da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas no ensino de função afim, atrelada ao uso da plataforma Desmos, fazendo conexões das potencialidades dessa metodologia com o uso de tecnologias e, ainda, por aplicarmos nossa parte empírica de forma remota, diante do atual momento em que vivemos, o que impossibilitou, de todas as maneiras, aplicar a pesquisa no ambiente da sala de aula de forma presencial.

Nessa direção, percebemos que os estudos acerca do impacto na inserção de ferramentas tecnológicas para a proposição de problemas devem considerar como elas podem alterar as tarefas e os objetivos de aprendizado da instrução matemática.

A aprendizagem de um conteúdo matemático através da metodologia de ensino com o viés da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas, segundo Andrade (1998, p. 71), caracteriza uma “atividade multicontextual que compreende os contextos da matemática, do professor, do aluno e da sala de aula”. É nessa perspectiva que elaboramos o nosso trabalho, dando significado ao conceito de função com uma abordagem tecnológica.

Diante das leituras e análises de trabalhos que retratam sobre essa temática, decidimos pesquisar o ensino-aprendizagem de função, sobretudo no que se refere à dificuldade de compreensão do conceito e as representações de função; por isso, o nosso interesse em utilizar a metodologia da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas, com o intuito de atribuir um melhor significado e entendimento ao conceito de função, dando oportunidade para os alunos serem capazes de construir os seus próprios conhecimentos.

De acordo com a análise da pesquisa de Silva (2013), foi possível identificar a relevância de se trabalhar as representações múltiplas de funções para a compreensão desse conteúdo, as quais são legitimadas por Cooney, Beckmann e Lloyd (2010), que abordam as cinco ideias essenciais para o desenvolvimento do conceito de função. Ainda em seu trabalho, Silva (2013) aponta para as representações múltiplas de funções, vistas como um instrumento poderoso para se fazer matemática, daí a importância de trabalharmos com essas representações.

A utilização do Desmos no ensino de função afim foi considerada uma ferramenta que serviu como facilitadora para o entendimento do aluno no que se refere às representações de funções, seja na forma gráfica ou tabular. A manipulação oferecida pelo Desmos ajudou no trabalho da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas, pois, a partir daquilo que o aluno consegue visualizar, é que os questionamentos poderão ser formulados.

Assimilando a interação como parte fundamental para o ensino em tempos de crise, em que precisamos compreender a forma como se dá esse processo, Bairral (2015) dialoga a

respeito do conceito de interação que “tem sido valorizado com o avanço das tecnologias digitais, pelo seu potencial comunicativo, pelo rompimento de barreiras físico-temporais e pelos múltiplos formatos com que uma comunicação pode ser estabelecida” (BAIRRAL, 2015, p. 486).

Nesse sentido, nossa pesquisa buscou, a partir da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas e do uso do Desmos, abordar o conceito de função afim e as representações múltiplas de função de forma mais acessível e significativa para os alunos, de uma forma remota, para que eles pudessem ter uma maior compreensão deste conteúdo, tanto no que diz respeito ao desenvolvimento do conceito em si, como nas relações cotidianas, sendo necessário, desse modo, para que os estudantes desenvolvessem autonomia e autodidática.

Diante do que examinamos em algumas pesquisas, com relação ao ensino-aprendizagem de funções, identificamos as dificuldades encontradas pelos alunos quando são orientados a respeito desse tema, por não compreender as ideias essenciais desse conteúdo e sabendo da importância de utilizar uma metodologia de ensino investigativa para o ensino remoto aliada ao uso de aplicativos móveis. Assim, nossa pesquisa busca responder a seguinte pergunta norteadora: *Quais as contribuições e possibilidades da metodologia de exploração, resolução e proposição de problemas no ensino-aprendizagem de função afim com o uso do aplicativo Desmos no ensino remoto?*

Com o intuito de encontrarmos evidências para responder à nossa pergunta, é necessário discutirmos sobre aportes teóricos fundamentais que embasam o nosso trabalho. Assim, estudos relacionados à Exploração, Resolução e Proposição de Problemas, o uso de tecnologias para o ensino remoto e concepções sobre o ensino de função constituem-se como base teórica necessária para o desenvolvimento desta dissertação.

Considerando a questão de investigação apresentada, delimitamos o objetivo central de nosso trabalho, a saber:

- ❖ Analisar como uma abordagem de ensino remoto, com atividades investigativas através da metodologia da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas, pode contribuir/potencializar o ensino-aprendizagem do conceito de função afim aliado ao uso do Desmos.

Partindo dessa intenção, traçamos uma sequência de ações elencadas em nossos objetivos específicos:

- Identificar as compreensões dos alunos sobre o conceito de função afim;
- Apresentar alternativas metodológicas ao ensino remoto com o uso do aplicativo Desmos;

- Trabalhar com os estudantes aspectos conceituais de função afim e as suas diferentes representações, a partir de atividades com a metodologia de exploração, resolução e proposição de problemas no Desmos;
- Contribuir para que os discentes sejam capazes de explorar e propor novos problemas, aplicando a situações e contextos matemáticos relacionados ao momento atual.

A metodologia utilizada foi de cunho qualitativo na modalidade de pesquisa pedagógica, na qual o pesquisador pesquisa sua própria sala de aula, no nosso caso, a sala de aula remota. A metodologia escolhida para aplicação das atividades em formato de oficina, de forma remota, foi a de Exploração, Resolução e Proposição de Problemas. Os participantes eram alunos de uma turma de 1º ano do Ensino Médio, de uma escola estadual localizada na cidade de Monteiro – PB.

Os dados para análise dos nossos encontros foram coletados através de gravação, das notas de aulas e das análises das produções dos alunos. Nos empenhamos sempre em trazer as falas dos alunos para as nossas descrições, pois essa comunicação e troca de informações nos mostraram o quanto é importante trabalhar nessa perspectiva. Utilizamos também o aplicativo *WhatsApp* para trocas de informações e identificamos que, no momento presente, esse aplicativo foi uma ferramenta indispensável, pois os alunos interagem mais por ele do que na própria aula.

Nessa direção, é preciso destacar que a escrita do texto está estruturada em cinco capítulos, que estão descritos nos parágrafos seguintes.

Neste primeiro capítulo, explanamos sobre o progresso de perspectivas educacionais com tecnologias, especialmente as digitais, bem como polemizamos argumentos sobre a emergência do ensino remoto ao desenvolver possibilidades de ensinar e aprender em um ambiente virtual de aprendizagem abordando a plataforma Desmos para o ensino de função afim.

Debatemos pontos de vista sobre algumas pesquisas que utilizaram esse recurso tecnológico como forma de mostrar seu potencial para uso em atividades de exploração de funções e gráficos, bem como o desenvolvimento de um trabalho mais dinâmico e com ótimo aproveitamento em diferentes abordagens de conteúdos matemáticos, tanto pelo professor quanto para os alunos envolvidos. Finalizamos apresentando as funcionalidades e algumas características importantes dessa ferramenta tecnológica para o ensino não-presencial.

No segundo capítulo, destinamo-nos aos apontamentos teóricos, os quais fundamentaram nossa investigação, abordando, em especial, as contribuições de autores que

pesquisam especificamente a Exploração, Resolução e Proposição de Problemas como metodologia no ensino de Matemática.

O terceiro capítulo, por sua vez, traz algumas discussões sobre como as pesquisas e documentos oficiais expõem olhares sobre o ensino-aprendizagem de função, discutindo sobre as grandes ideias essenciais. Selecionamos alguns trabalhos que tratam do conceito de função e foram desenvolvidos no contexto da sala de aula.

Já no quarto capítulo apontamos os procedimentos metodológicos que utilizamos para desenvolvermos o nosso trabalho de campo.

No quinto capítulo, apresentamos o desenvolvimento do trabalho de campo, a coleta de dados e os resultados das análises das atividades e encontros realizados durante o trabalho empírico, dispendo como fundamento os elementos teóricos discutidos e delimitados nos capítulos anteriores, confrontando a proposta do trabalho empírico desenvolvido de forma remota, não presencial, com as pesquisas analisadas desenvolvidas na escola em períodos normais.

E encerramos o texto com as nossas Considerações Finais, destacando as nossas contribuições para o aperfeiçoamento no ensino de Matemática, quando se faz uso da metodologia de ensino-aprendizagem da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas. Atentamos para o fato de que essa metodologia torna o aluno um ser ativo, detentor do seu próprio aprendizado e o quanto é estimulante e habilidoso o trabalho com as tecnologias no ensino remoto para o estudo de função afim. Fazemos, também, o delineamento para futuros trabalhos de pesquisa que surgirão ao longo de nosso estudo.

2 O USO DE TECNOLOGIAS PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA: PERSPECTIVAS DO ENSINO REMOTO E O APLICATIVO DESMOS

No presente capítulo apresentamos considerações acerca das tecnologias e sua importância no contexto da sala de aula de matemática, além da intervenção com o ensino remoto emergencial e a utilização de um aplicativo móvel para o ensino de função afim. Faz-se ainda um levantamento de alguns trabalhos que utilizaram o aplicativo Desmos em favor do processo de aprendizagem de conteúdos matemáticos. Nas aulas práticas, buscamos criar ambientes onde os alunos possam explorar os conceitos, por meio da experimentação, formulando e verificando conjecturas, visando à concretização do conceito de função afim.

2.1 O uso de tecnologias no ensino de matemática

Inicialmente, para situar e engajar o nosso leitor precisamos definir o conceito de tecnologia.

Encontramos vários conceitos de tecnologia na literatura. Segundo Kenski (2007) tecnologia é um conjunto de conhecimentos e princípios científicos aplicados à determinada área, existindo variação do conceito de novas tecnologias a partir do contexto onde elas estão inseridas. Podemos encontrar as tecnologias em diferentes instrumentos, procedimentos e conhecimentos, contudo, todas elas têm em comum a competência de desenvolver e facilitar as atividades do cotidiano.

Ainda sobre o conceito de tecnologia, no âmbito educacional, vislumbramos a sua amplitude. Reis (2008, p. 5) respalda que o conceito de tecnologia educacional pode ser entendido a partir de um “conjunto de procedimentos (técnicas) que visam ‘facilitar’ os processos de ensino e aprendizagem com a utilização de meios (instrumentais, simbólicos ou organizadores) e suas consequentes transformações culturais”.

Na contemporaneidade, percebemos a existência de uma transformação tecnológica por parte do ser humano, ao nos depararmos com invenções mais potentes que as já existentes e isso acontece em ritmo acelerado. Abreu (2018, p. 25) discute uma transformação a qual “tem acontecido de forma tão rápida que não é preciso ter nascido em décadas tão distantes para perceber tal evolução, basta tomarmos como exemplo o primeiro telefone móvel”.

Para Bairral (2013, p. 375) “O avanço acentuado das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) vem ocasionando transformações em nosso cotidiano, sejam pessoais,

sejam profissionais”. Esse avanço tecnológico está presente no cotidiano da humanidade e tem possibilitado a disseminação do uso de aplicativos móveis ao redor do mundo, entre crianças, jovens e adultos.

A utilização das tecnologias pode ser incrementada nas mais variadas organizações e em diferentes profissões do mundo atual, seja em caixas eletrônicas, restaurantes, supermercados, em qualquer empresa que procura incorporar meios tecnológicos a fim de viabilizar o seu funcionamento. Diante disso, percebemos que no espaço escolar, as tecnologias digitais estão limitadas apenas a setores administrativos, secretaria, e não ao espaço da sala de aula, para utilização desses recursos pelo professor, o qual realiza o seu trabalho, na maioria das vezes, apenas com o uso de livros, lápis e quadro. (FREDERICO; GIANOTO, 2015).

No que remete ao avanço das tecnologias, Frederico e Gianoto (2015, p. 67) afirmam que:

As facilidades de comunicação e informação advindas dos avanços tecnológicos traduzem-se em mudanças irreversíveis nos comportamentos pessoais e sociais. Novas formas de pensar, de agir, de se relacionar comunicativamente são introduzidas como hábitos corriqueiros.

Assim, podemos perceber os avanços tecnológicos nos últimos anos e o seu papel de destaque nas orientações curriculares para o ensino da Matemática. A BNCC (2018) indica que as tecnologias digitais sejam o alicerce das práticas pedagógicas a serem desenvolvidas fundamentadas neste documento e que essas tecnologias sejam utilizadas para modelar e resolver problemas do nosso cotidiano.

Uma das competências da BNCC (2018, p. 9), no que tange ao uso de tecnologias no ensino é:

Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

No ambiente escolar os meios tecnológicos estão oferecendo novas maneiras de pensar, agir e interpretar situações, pois o fácil acesso à *internet* tem possibilitado a busca por conhecimento e informações em tempo hábil. Pensando nesse fenômeno tecnológico, Lisboa e Cespedes (2013, p. 152) enfatizam que a *internet* é “um importante meio de comunicação onde as informações estão disponíveis”.

Diante disso, entendemos que a educação deve ser considerada a atividade humana ideal para incorporar essas novas tecnologias, pela razão da possibilidade de descoberta do

novo. E, a partir do desejo por inovações é que surgem os avanços tecnológicos. Neste mesmo ponto de vista, Carreira (2009, p. 63) discute e aponta que “os seres humanos são constituídos pelas tecnologias, no sentido em que estas transformam e modificam o seu raciocínio, mas simultaneamente, são os seres humanos que estão a transformar continuamente as tecnologias”.

A incorporação de recursos tecnológicos voltados para o ensino da matemática apresenta como finalidade o desenvolvimento dos alunos, os quais proporcionem a discussão sobre o ensino dessa ciência. Além disso, o entendimento adquirido através do uso de recursos tecnológicos permite aos estudantes ter acesso a um conhecimento matemático capaz de viabilizar a inserção dos mesmos no mundo do trabalho, sendo capazes de exercer a cidadania, a viver e ter relações, social e culturalmente. Desenvolvendo a autonomia e o seu potencial, transformando suas vidas através da aprendizagem, esforço e perseverança.

Em função do desenvolvimento das tecnologias, uma característica contemporânea marcante no mundo do trabalho, exigem-se trabalhadores mais criativos e versáteis, capazes de entender o processo de trabalho com todo, dotados de autonomia e iniciativas para resolver problemas em equipe e para utilizar diferentes tecnologias e linguagens (que vão além da comunicação oral e escrita). Isso faz com que os profissionais tenham de estar num contínuo processo de informação e, portanto, aprender a aprender torna-se cada vez mais fundamental. (BRASIL, 1998, p. 25).

É de competência do professor de Matemática, de acordo com as sugestões dos PCN (BRASIL, 2017, p. 29):

(1) Identificar as principais características dessa ciência, de seus métodos, de suas ramificações e aplicações; (2) Conhecer a história de vida de seus alunos, seus conhecimentos informais sobre um dado assunto, suas condições sociológicas, psicológicas e culturais; (3) Ter clareza de suas próprias concepções sobre a Matemática, uma vez que a prática em sala de aula, as escolhas pedagógicas, a definição dos objetivos e conteúdos de ensino e as formas de avaliação estão intimamente ligadas a essas concepções.

Desse modo, percebemos o quanto é indispensável para o professor adquirir conhecimento sobre determinadas áreas e além disso se preocupar com a história de vida dos alunos, as concepções em Matemática e aplicações para que seja possível obter oportunidades de inserir as tecnologias como recurso para auxiliar suas aulas e contribuir para o desenvolvimento social, intelectual e social de seus alunos. Nessa perspectiva, Cursino (2017, p. 31) comenta sobre uma nova representação a qual “surge um novo perfil do cidadão, que dessa vez participa democraticamente na construção do conhecimento”.

Em seu texto, a BNCC (Base Nacional Comum Curricular) sublinha que:

Em decorrência do avanço e da multiplicação das tecnologias de informação e comunicação e do crescente acesso a elas pela maior disponibilidade de computadores, telefones celulares, *tablets* e afins, os estudantes estão

dinamicamente inseridos nessa cultura, não somente como consumidores. (BRASIL, 2018, p. 61)

Esse documento ainda estabelece que as tecnologias desempenham um papel fundamental e aponta que os recursos tecnológicos devem, gradativamente, estar presentes no cotidiano das escolas. Ainda assim, precisamos compreender que a inserção das tecnologias na educação deve ir além de utilizá-las apenas como meio ou suporte para promover aprendizagens ou despertar o interesse do estudante (BNCC, 2018).

Deste modo, os professores precisam cada vez mais estar desenvolvendo algumas habilidades de ensino com o uso de tecnologias, aperfeiçoando sua prática, tornando a aprendizagem mais dinâmica e proveitosa. *Tablets e smartphones* são aparelhos que também estão dando a oportunidade de facilitar o ensino, quebrando as antigas barreiras geográficas para o acesso à educação. Bairral (2015, p. 488) destaca que “necessitamos de mais análises sobre o aprendizado de professores de matemática e sobre as diferentes formas de apropriação de tecnologias digitais em sua prática”, com isso entendemos que o processo precisa ser contínuo e levar o professor a avaliar como está o desenvolvimento de sua prática com o uso das tecnologias.

Corroboramos a ideia de Moran (2013, p. 1), quando este destaca que “as mudanças que estão acontecendo na sociedade, mediadas pelas tecnologias em rede, são de tal magnitude que implicam em reinventar a educação como um todo, em todos os níveis e de todas as formas”, e, dessa forma, nós professores precisamos nos reinventar e procurar mudanças em nossas práticas de ensino e incorporar as tecnologias no ambiente escolar, podendo usar como estratégia necessária à interação entre áreas de conhecimento.

Nos tempos de hoje, o professor necessita se adequar e ter a aptidão em desempenhar métodos para um ensino remoto, combinados com o presencial, devendo entender e compreender sobre o que vale a pena fazer através da *internet*, o qual contribua para uma melhoria na aprendizagem, onde mantenha a motivação, trazendo novas experiências para a classe e enriquecendo o repertório do grupo (MORAN, 2013).

A tecnologia está cada vez mais presente e é atualizada com maior frequência com o passar do tempo em nossa sociedade, é necessário que nesse processo a escola seja um lugar não excluído desse meio, mas responsável por inserir as pessoas na sociedade. Esse fato é apontado nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio:

Não se pode negar o impacto provocado pela tecnologia de informação e comunicação na configuração da sociedade atual. Por um lado, tem-se a inserção dessa tecnologia no dia-a-dia da sociedade, a exigir indivíduos com capacitação para

bem usá-la; por outro lado, tem-se nessa mesma tecnologia um recurso que pode subsidiar o processo de aprendizagem da Matemática. É importante contemplar uma formação escolar nesses dois sentidos, ou seja, a Matemática como ferramenta para entender a tecnologia, e a tecnologia como ferramenta para entender a Matemática (BRASIL, 2006, p. 80).

Entendemos que a BNCC está em vigor no nosso país, mas sabemos da crítica existente, seja por insistir em uma visão fragmentada do conhecimento e do desenvolvimento humano ou um distanciamento da realidade em que vivemos, por ser documento oficial sentimos necessidade de abordar em nosso trabalho. Em relação ao uso de tecnologias, podemos citar a cultura digital, como uma das competências da BNCC, propondo inclusão o qual tem a finalidade ensinar não apenas conhecimentos, mas práticas relativas ao contexto digital. Como discutem Machado e Amaral (2021):

Analisa-se que a própria elaboração de um conjunto de habilidades e conhecimentos denominado Cultura Digital denota o imperativo tecnológico característico do Determinismo e sustenta a categoria de Determinação pelo artefato. Essa categoria assume que a tecnologia se desenvolve de maneira autônoma e independente, ditando o compasso da vida em sociedade; e a Educação cumpre o papel de ensinar às pessoas como acompanhar essa Cultura Digital, da qual a maioria das pessoas parece estar à margem de qualquer interferência (MACHADO e AMARAL, 2021, p.9).

O uso das tecnologias em sala de aula deve ser compreendido como recurso que auxilie a aprendizagem do aluno viabilizando um ensino de Matemática de qualidade, propiciando a formação de cidadãos mais ativos e críticos, serem detentores do seu próprio conhecimento matemático, não que seja algo instrumental ou funcional.

Valente (2014, p. 149) explica sobre condições de utilização das tecnologias e destaca que “as tecnologias criam condições para que a interação professor-aprendiz seja intensa, permitindo o acompanhamento do estudante e a criação de condições para o professor ‘estar junto’, vivenciando seus problemas e auxiliando-o a resolvê-los”. Esse pensamento é fundamental para o momento atual, pois podemos compreender o envolvimento, a interação entre o professor e aluno, o qual contribui para uma aprendizagem centrada no aluno.

A tecnologia é um recurso favorável às mudanças no processo de ensino e aprendizagem, o qual está interligado com o conhecimento adquirido pelos alunos e a sua participação nesse processo.

No que tange à participação dos alunos, é necessário que haja atuação dos mesmos nas propostas desenvolvidas, para que assim seja possível a aquisição de conhecimento. Valente (2014) afirma que essa construção deve ser ponderada. Para o autor, “a educação não deve ser totalmente baseada na transmissão, nem totalmente baseada na construção – nem tanto ao céu

nem tanto à terra!” (VALENTE, 2014, p. 144). Segundo ele, o ponto central está no equilíbrio do aluno, levando em consideração esses dois aspectos, capazes de proporcionar situações desafiadoras que favoreçam o desenvolvimento do aprendizado e a busca pelo conhecimento.

Pensando nesse processo, compreendemos que ao fazer uso das tecnologias nas aulas, o papel do aluno deve ser efetivo e capaz de criar condições para a construção do conhecimento. A necessidade da inserção de tecnologias no ensino deve ser pensada levando em consideração como se dá a interação professor-aluno e as condições criadas para que a aprendizagem seja alcançada.

Muito tem-se discutido da inserção das tecnologias na sala de aula, pois parece ser um assunto que algumas escolas e professores apresentam certa resistência para a utilização desses recursos, com a crença “do novo” em assustar a quem está acostumado com o tradicional, mas que só vem a contribuir com a aprendizagem do aluno e o trabalho do professor (LIMA; CASTILHO, 2017).

A resistência quanto ao uso das tecnologias, segundo Carneiro (2002), se torna desafiadora, mas vem sendo vencida conforme a inserção dessas tecnologias ao convívio do professor, que deverá ser capaz de transformar os sentimentos de medo e resistência em ações que reflitam criticamente a sua prática, dessa forma, contribuindo para o crescimento profissional e os avanços dessas tecnologias para o ensino.

Uma perspectiva importante com relação às discussões do uso de tecnologia pelo professor está na necessidade de saída da zona de conforto (PENTEADO, 2000), entendida como aquilo que está acostumado a fazer, não sente nenhum tipo de medo, na qual não ocorrem mudanças, tudo é contido e esperado, para a entrada na zona de risco (PENTEADO; SKOVSMOSE, 2008), em que podem ocorrer novas descobertas, há uma versatilidade, não é nada certo e esperado, frequentemente despertando o medo e a hesitação na prática docente.

Borba e Penteado (2012) refletem que existem os debates que defendem as tecnologias como solução dos problemas educacionais nos dias atuais, mas que também há os defensores de que o uso das tecnologias como recurso pedagógico é um fator que contribui para o “empobrecimento intelectual” dos alunos.

Esses autores ainda relatam que o mais relevante é reconhecer as diversas possibilidades de uso dessas tecnologias e que sua inserção no ambiente da sala de aula pode trazer melhorias significativas aos processos de ensino e de aprendizagem, segundo eles quando se utilizam as tecnologias combinadas com metodologias que possibilitem o seu uso elas são capazes de “transformar o tipo de matemática abordada em sala de aula” (BORBA; PENTEADO, 2012, p. 38).

Bairral (2021), discute sobre algumas das suas inquietações, indecisões e transformações que as tecnologias digitais têm provocado, citando que algumas dessas forçam a planejar e criar práticas inovadoras e ambientes formativos para o ensino, por exemplo:

A conectividade e o rompimento de fronteiras de espaço físico e de tempo. A simultaneidade, a volatilidade e a fluidez na curiosidade e nos modos de criar e descobrir. A facilidade de localização de informação e de autoaprendizado. As interações e as possibilidades de intercâmbios e de colaboração. A multimodalidade comunicativa, A constituição de redes horizontais, emergentes dos movimentos de base (*botton-up*) e não direcionados de cima para baixo (*top-down*), orientados por interesses e perfil dos sujeitos, como indivíduos, mas interconectados. (BAIRRAL 2021, p. 5-6).

Outros autores, como Cai, Hwang *et al* (2015), a respeito do uso das tecnologias, ressaltam que é particularmente preocupante a tendência da educação em adotar tecnologias sem ter uma imagem clara de seus impactos e eficácia. Isso levanta uma questão sem resposta clara e persistente.

É bastante importante que o professor, enquanto mediador da aprendizagem do aluno possa ter conhecimento sobre as novas tecnologias que estão sendo utilizadas pelos próprios alunos, discutindo suas potencialidades e tentando influenciar no seu desenvolvimento, evitando reações negativas com relação a essas ferramentas. Os professores precisam inovar no dia a dia da sala de aula, sabendo que os alunos atualmente não pensam e agem como os alunos de antes, e isso é fundamental para que seja possível atingir resultados positivos em nossas práticas pedagógicas fazendo uso das tecnologias.

Ainda de acordo com Cai, Hwang *et al* (2015), o professor é responsável pelo seu próprio planejamento, valorizando o processo de investigação por parte do estudante, privilegiando assim a construção do conhecimento (o processo) e não um produto como resultado do trabalho de sala de aula (BORBA; PENTEADO, 2012).

2.2 Perspectivas para o ensino remoto: a sala de aula em transformação

Diante do que vivemos hodiernamente, é emergente discutirmos sobre a educação em tempos de pandemia, algo inesperado que ocasionou preocupações da comunidade escolar quanto ao processo de escolarização, tendo em vista as mudanças que ocorreram em todas as esferas sociais.

Em uma situação emergencial, como a advinda pela pandemia do coronavírus, na qual as recomendações de isolamento social são impostas, surgem desafios a serem enfrentados pelas instituições educacionais. Nesse contexto, o ensino remoto surge como uma alternativa que visa atender com rapidez e efetividade as demandas de escolarização e formação acadêmica (MORAIS *et al.*, 2020, p. 5).

Com a pandemia do coronavírus, que teve início na China e se espalhou pelo mundo, foi preciso encontrar mecanismos para continuar com a educação nas instituições de ensino, sejam elas da iniciativa privada ou pública. Sabendo dos altos riscos que essa doença pode trazer e entendendo que o ambiente da sala de aula acomoda vários indivíduos, está sendo necessário buscar alternativas para que a educação não pare, diante disso restou para as escolas e universidades optarem pela modalidade do ensino remoto. “O ensino remoto é um formato de escolarização mediado por tecnologia, mantidas as condições de distanciamento professor e aluno” (MORAIS *et al.*, 2020, p. 5).

Para começo de conversa podemos diferenciar o ensino remoto do ensino EAD (Educação à distância), pois são formatos distintos e que têm suas especificidades. A EAD surgiu a partir da inserção das tecnologias da informação e comunicação (TIC's) na educação, nessa modalidade as pessoas têm acesso à educação por meio de vídeos, materiais midiáticos, aplicativos educacionais, entre outros.

[...] EaD é um sistema tecnológico de comunicação bidirecional que substitui a interação pessoal, em sala de aula, entre professor e aluno, como meio preferencial de ensino, pela ação sistemática e conjunta de diversos recursos didáticos e pelo apoio de uma organização tutorial, de modo a propiciar a aprendizagem autônoma dos estudantes (GUAREZI; MATOS, 2009, p. 19).

A Educação a Distância (EaD) é uma modalidade educacional na qual a mediação didático-pedagógica nos processos de ensino e aprendizagem ocorre com a utilização de Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TIDCs) com estudantes e professores desenvolvendo atividades educativas em lugares e tempos diversos e comunicação diferida. A EaD se distingue de outras formas de ensino remoto pela sua característica planejada e por exigir inovações de ordem pedagógica, didática e organizacional com metodologias, ambientes de aprendizagens, gestão e avaliação peculiares (BRASIL, 2005).

Já no ensino remoto, mesmo que as atividades sejam mediadas através de recursos tecnológicos elas são pensadas como se fossem para o ensino presencial, sendo uma solução temporária para continuar as atividades pedagógicas, de modo a diminuir os impactos na aprendizagem dos estudantes do sistema de ensino presencial. A educação a distância já tem o seu formato elaborado e consolidado, com uma metodologia própria que é desenvolvida para diferentes cursos e que vai além de momentos síncronos e assíncronos do ensino remoto.

A utilização das tecnologias no ensino remoto emergencial nos possibilitou um ambiente de comunicação e integração envolvendo o aluno e o professor, aonde podemos perceber a importância em discutir uma alternativa de ensino que, necessariamente, deve ocorrer com a presença de recursos tecnológicos, viabilizando a compreensão de conceitos e

ideias, seu potencial para gerar a simulação de fatos reais e contextualizados, ampliando o universo dos conteúdos.

O ensino dessa forma é tido como remoto, pois sabemos que os professores e alunos estavam impossibilitados de frequentarem as instituições de ensino, por decreto estabelecido pelos governos em diferentes esferas e por orientações da OMS (Organização Mundial da Saúde), tendo em vista que o não cumprimento pode acarretar na disseminação do vírus. É classificado como emergencial, pois todos nós fomos surpreendidos e em questões de dias tivemos que planejar e elaborar planos para continuar com as aulas em outro formato (BEHAR, 2020).

O que estamos vivenciando é a inserção, mesmo que de repetente, das tecnologias para o ensino, mas Bairral (2003, p. 1) já discutia que “com o avanço da tecnologia informática a formação profissional tem sido cada vez mais desenvolvida em contextos virtuais”. Mesmo sabendo da importância da implementação das tecnologias na formação do professor, todos fomos pegos de surpresa e tivemos que nos reinventarmos diante do cenário de crise que foi provocado pela pandemia. O que mais se vê atualmente é a utilização de recursos tecnológicos para tentar dar continuidade às aulas. De uma maneira repentina os professores, que tivemos nossa formação com foco em aulas presenciais, nos inserimos em um novo contexto, envolvendo a gravação de vídeo-aulas e transmissões ao vivo em múltiplas plataformas virtuais.

O ensino presencial físico teve a necessidade de ser moldado para os meios digitais, pois precisávamos manter relações com os alunos e demais membros envolvidos no processo educacional, com isso percebemos a importância de discutir o ensino remoto emergencial e suas ambientações, tal como o ensino nas dimensões síncrona e assíncrona para entender o funcionamento dessas aulas. Sobre isso, Arruda (2020, p. 266) afirma “que a educação remota é um princípio importante para manter o vínculo entre estudantes, professores e demais profissionais da Educação”. Ao se estabelecer as medidas de enfrentamento à pandemia algumas atividades sofreram severas modificações, como foi o caso da educação aonde as aulas presenciais ficaram suspensas.

Entendemos que o ensino na dimensão assíncrona é aquele aonde alunos e professores não estão estudando no mesmo momento, o tempo é diferente para cada um dos envolvidos, dependendo de sua disponibilidade e cada indivíduo se organiza como achar conveniente. Já o ensino na dimensão síncrona ocorre em sintonia, ou seja, todos estão conectados ao mesmo tempo e exige a participação simultânea de todos os envolvidos, sabendo que o local físico

não é o mesmo. Existem inúmeras ferramentas à disposição do professor, seja para ambientes virtuais de ensino síncrono ou assíncrono.

O ensino remoto ficou conhecido como o novo normal e o esforço de toda a comunidade de professores para continuar desempenhando da melhor forma possível seu trabalho está sendo imenso. A grande maioria foi forçada a aprender de uma hora para outra sobre as novas ferramentas voltadas para o ensino não presencial, até então desconhecidas (ANTUNES; CAMBRAINHA, 2020).

Sabemos que as tecnologias digitais no ensino remoto são necessárias e oferecem alternativas para que possamos avançar e oferecer aos estudantes uma educação com resultados positivos, sendo possível garantir a aprendizagem e a criação de um mundo melhor, utilizando de todos esses recursos que temos à nossa disposição.

Alguns questionamentos nos afligem diante do momento que vivenciamos durante a elaboração dessa pesquisa e a necessidade de recorrer a ambientes tecnológicos para o ensino, dentre esses citamos “como iremos garantir oportunidades iguais para todos os alunos”, “quais alternativas utilizaremos para avaliar se os alunos estão aprendendo, mesmo com o acesso às aulas” e “como garantir uma aprendizagem satisfatória diante do ensino remoto para os alunos”. Essas são perguntas que procuramos responder com a realização desse trabalho em um momento tão atípico que estamos vivendo.

Considerando o isolamento social ocasionado pela pandemia do COVID-19 o papel exercido pela tecnologia de oferecer oportunidades para a elaboração de ferramentas e mídias digitais que facilitarão a vida da população se faz ainda mais essencial e indispensável. E, no que diz respeito ao contexto educacional é plausível prosseguir com às atividades de ensino através do uso de ferramentas e mídias digitais que permitam aulas remotas por meio de aplicativos de salas virtuais, de plataformas que ofereçam o gerenciamento de conteúdo de forma digital e bibliotecas *online*. Além do mais, estão sendo oferecidos vários cursos e aplicativos gratuitos de diversos segmentos para quem se interessar durante esse período e podem ser usados para ampliar o conhecimento.

A crítica em relação ao ensino remoto emergencial, instituído pela pandemia do COVID-19, predominantemente mediado pelas tecnologias tem sido direcionada ao campo da educação, como afirmam Almeida e Scheifer (2021):

O ensino remoto provocou, abruptamente, um movimento de ruptura das bases tecnológicas, espaciotemporais e epistemológicas sobre as quais a instituição escola foi erigida e tem, em grande medida, mantido-se pelo menos desde o Iluminismo. Ainda que ensino remoto não seja sinônimo de educação a distância, entendemos que, no atual contexto de pandemia, são exceções os casos em que essa modalidade

de ensino não tenha se organizado sob mediação de recursos digitais. (ALMEIDA E SCHEIFER, 2021, p. 1197).

Prontamente, vimos que a crise educacional se alastrou na proporção em que nos inserimos no digital, modificando as tecnologias, os tempos, os espaços, as formas de ensinar de como fazemos na escola, a partir dos quais nos entendemos como professores e como alunos que, juntos, de maneira situada, produzem um certo tipo de saber.

Outras críticas surgiram em relação ao ensino remoto emergencial, conhecido como ERE, as quais trazem questionamentos em relação às condições em que professores foram submetidos, às medidas impostas para mudar a forma de ensinar, implementando uma mudança drástica que aconteceu do dia para a noite e impôs que os docentes assumissem o processo de planejamento, criação e adaptação dos planos de ensino.

Pires (2021) traz uma discussão que podemos dizer que todos os professores sentiram e ainda sentem no ensino remoto. O autor discute que as atividades no ensino remoto:

Alteraram de maneira profunda as relações de ensino e aprendizado, impondo um novo ritmo de trabalho, muito mais intenso, acelerado e extenuante (aulas, reuniões, atendimento aos alunos, entre outras atividades). Uma boa ilustração desta situação pode ser encontrada na composição «Samba do Ensino Remoto», de autoria da professora Stella Maris Nicolau, cuja letra salienta dificuldades nas interações, em falar para pequenos retratos na tela do computador, nos tempos de fala e de silêncio das aulas que foram agudamente transformados (PIRES, 2021, p. 93).

Já no que diz respeito aos alunos observam-se alterações nas rotinas, distanciamento das relações presenciais com colegas, vivências alteradas, ansiedades, depressões e incertezas, que trazem consequências nas vidas desses alunos, como também na aprendizagem e convivência social. Podemos considerar o acesso às ferramentas tecnológicas, à *internet* e a outros equipamentos para serem desenvolvidas as atividades advindas do ensino remoto, ao capital, que varia de pessoa a pessoa.

As questões socioeconômicas e as dificuldades adquiridas por alunos e professores foram um dos maiores problemas encontrados no início da pandemia, pois nem todos têm a mesma acessibilidade e nem o mesmo acesso que proporcionasse uma aprendizagem ampla. Ferreira, Madureira e Silva (2020) discutem sobre isso ao se referirem aos desafios desse ensino:

Esse é o desafio presente no contexto de pandemia suscitado pelo Covid-19, garantir uma aprendizagem a todos da rede de ensino que os ajude a entender que a sociedade brasileira é injusta em termos de distribuição de renda, é injusta para com os mais pobres, mas, lutar contra a alienação, contra o domínio do capital é tarefa da educação, proporcionar uma aprendizagem que seja ampla e emancipadora, que ajude o sujeito a se posicionar e não seja apenas aquele que explica a realidade dada, mas aquele que a transforma (PEREIRA; MADUREIRA; SILVA, 2020, p.130; 131).

A adesão ao ensino remoto demandou uma ressignificação da sala de aula. A inclusão digital ganhou importância e as tecnologias foram adotadas de forma acelerada, mas esse processo não acompanhou o mesmo ritmo para todos os alunos, nem foram tão bem recebidas por alguns professores.

De acordo com Bairral, no que se refere as desigualdades sociais e educacionais acentuadas pela pandemia do COVID-19, “precisamos de investimentos em plataformas públicas para a constituição de ambientes de aprendizagens diversos” (2021, p. 10).

A inserção das tecnologias está sendo de importância fundamental, com isso precisamos entender que usar essas tecnologias requer um aprimoramento e preparação sobre métodos e ferramentas para o ensino por parte do professor, conhecendo as potencialidades de cada recurso a ser utilizado, como também uma atenção maior por parte dos alunos. Moran (2018, p. 9), afirma que “as tecnologias atrapalham quando nos distraem, nos tornam dependentes ou são utilizadas sem explorar todo o potencial criativo e colaborativo”.

Desse modo, o uso didático das tecnologias da informação e comunicação, em especial do computador e das calculadoras gráficas, no ensino vem sendo discutido por diversos educadores e pesquisadores, tornando-se uma forte tendência dentro da Educação Matemática há algumas décadas. E nos dias atuais a discussão por novas alternativas de ensino com tecnologias é bastante emergente diante da problemática que assola a sociedade em geral.

Na nossa pesquisa utilizamos as tecnologias durante toda a realização do trabalho empírico, fazendo uso de aplicativo para o ensino remoto e utilizando o Desmos para o desenvolvimento das atividades propostas. Com isso precisamos estar focados no potencial dessa plataforma e estar explorando suas especificidades, deixando o ensino e o aprendizado mais atrativo e encontrando alternativas para o ensino do conteúdo matemático.

Junto a tudo que discutimos até aqui, tendo o conhecimento da realidade que atravessamos na atualidade e da relação existente entre educação e tecnologias, entendemos a importância de trabalhar em conjunto com essas ferramentas, tanto pelo contexto que estamos passando, como pela necessidade de inovar. Apresentaremos a seguir o Desmos, que é uma plataforma que foi criada com o propósito de oferecer uma calculadora gráfica feita em HTML e de forma que fosse possível inserir equações ou funções em uma barra de entrada em tempo real e o seu gráfico sendo construído na janela gráfica.

2.3 A plataforma Desmos como ferramenta para o ensino remoto

A plataforma Desmos foi criada por Eli Luberoff em 2011 nos Estados Unidos, numa feira em que buscava financiamento para uma calculadora HTML que rodasse em qualquer navegador (ANTUNES; CAMBRAINHA, 2020). O Desmos, um aplicativo novo que vem sendo investigado e discutido por muitos pesquisadores nos últimos anos, é uma calculadora gráfica avançada executado como uma página da web e também como um aplicativo móvel.

Luberoff sentia que estudantes não teriam que pagar para utilizar uma calculadora gráfica, então foi a partir daí que surgiu o estímulo para criação do Desmos. Dentre os benefícios da calculadora gráfica de Luberoff, destaca-se interface colorida, com um ambiente dinâmico que proporciona a interação, possui uma interface amigável, gráfico em tempo real, acessibilidade de qualquer computador ou *smartphone* e o mais importante, custo zero para o usuário e multi-idíomas. Além disso, o Desmos é disponível nos sistemas operacionais Android e iOS para *downloads* grátis e pode ser acessado sem estar conectado à *internet*. (ANTUNES; CAMBRAINHA, 2020).

A plataforma Desmos está disponível em diversos idiomas, apresenta alguns tutoriais realizados na própria calculadora, mostrando vídeos de algumas construções na própria ferramenta e disponibiliza um guia de usuário.

Em tempos de pandemia, no Brasil, essa plataforma está sendo investigada e discutida como um recurso que oferece funcionalidades que contribuem para o ensino de Matemática. A SBEM (Sociedade Brasileira de Educação Matemática) do Rio de Janeiro realizou duas lives tratando das possibilidades da utilização do Desmos e com diferentes aplicações de atividades nessa plataforma, auxiliando o professor no ensino de conteúdo matemático.

Com essa calculadora gráfica, que também pode ser reconhecida como um *software*, pois é um programa, é possível trabalhar com tabelas, construir pontos, gráficos de funções, cônicas e regiões do plano por meio de equações cartesianas, paramétricas ou polares, permite calcular expressões numéricas, trabalhar com estatística, trigonometria, resolver equações de primeiro e segundo grau com uma incógnita, derivadas e integrais de uma função.

O Desmos foi escolhido pelas seguintes razões: é uma calculadora gráfica de Matemática dinâmica, gratuito, multiplataforma, que pode ser usado *on-line* ou *offline* e de fácil utilização e pelo fato de trabalharmos com representações múltiplas de funções e a exploração de problemas, percebemos que esse aplicativo oferece uma facilidade e potencialidade no trabalho envolvendo essas perspectivas.

Mesmo com vários outros aplicativos disponíveis para o trabalho com funções, o Desmos foi o melhor que encontramos quando se refere a representações múltiplas de funções, seja ela gráfica, verbal, tabular ou algébrica.

Nos últimos anos, pesquisas vêm mostrando potencialidades dessa plataforma e constantemente é utilizada em trabalhos que discutem sobre a temática das tecnologias (ABREU, 2018; EUZÉBIO, 2018; SCREMIN, 2019). Neste contexto, cresceu a motivação de compartilhar o aplicativo Desmos, uma plataforma que oferece diversas atividades sobre diferentes tópicos de Matemática da Educação Básica e do Ensino Superior, uma calculadora gráfica *on-line* totalmente gratuita e com a disponibilidade de uma ferramenta para criar tarefas *on-line* (ANTUNES; CAMBRAINHA, 2020).

O *software* oferece ferramentas que permite ao professor utilizar para realizar avaliações, prioriza o engajamento entre os estudantes e o professor, como também tem a finalidade de apresentar uma Matemática de maneira diferente da que encontramos nos livros didáticos. Sendo assim, acreditamos que a utilização dessa ferramenta possa vim contribuir para o ensino e aprendizagem do conteúdo de função afim no ensino remoto.

A visualização gráfica gerada pela plataforma Desmos tem se mostrado uma ferramenta eficiente para o ensino de função como outros conteúdos da Matemática e a exploração de conceitos muitas vezes abstratos para os alunos. A visualização possibilita ao aluno construir conceitos ou ainda refletir sobre conteúdos já estudados. Scremin *et al.* (2018, p. 121) relatam que a visualização “permite imbricar conceitos e significados que podem ser facilmente incorporados à solução simbólica de problemas ou ao conteúdo”.

Ratificando o exposto, Flores, Wagner e Buratto (2003, p. 35) comentam que:

O termo visualização científica é comumente corrente para o uso da tecnologia gráfica do computador de apoio à investigação nas ciências. Neste caso, adicionar visualização no contexto da educação matemática, além de promover a intuição e o entendimento, possibilita uma maior abrangência da cobertura em assuntos matemáticos, permitindo que os estudantes não somente aprendam matemática, mas também se tornem capazes de construir sua própria matemática.

A visualização promovida pelo Desmos, quando está se trabalhando um conceito matemático, oferece oportunidades para o professor explorar mais ainda o conteúdo, como o entendimento por parte do aluno, pois é permitido fazer ampliações e reduções na plataforma. Segundo Scremin *et al.* (2018, p. 51) “a visualização, portanto, pode ser considerada como parte integrante do próprio processo analítico da solução”.

Diante de algumas pesquisas que trabalharam com o Desmos, foi possível refletir sobre a exploração e a investigação por parte dos discentes e os resultados positivos dessa plataforma quando utilizada no ambiente da sala de aula. Nosso trabalho apresenta como diferencial a utilização do Desmos em um formato de ensino diferente, ou seja, de forma remota.

Com a finalidade de obter informações sobre o que as pesquisas vêm trazendo sobre o ensino aprendizagem de Matemática e o uso do Desmos, analisamos as dissertações de Abreu (2018), Euzébio (2018) e Scremin (2019), todas desenvolvidas no ambiente da sala de aula, sendo duas delas voltadas para o ensino básico, as de Abreu e Euzébio, e a última no ensino superior. A pesquisa foi realizada na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) da capes, onde filtramos o aplicativo Desmos e focamos nos trabalhos que eram voltados para os conteúdos envolvendo a Matemática. Dentre os conteúdos que foram trabalhados, temos o de funções, geometria e cálculo.

Na pesquisa de Abreu (2018) foi feito um levantamento de vários aplicativos móveis para o ensino de Matemática, abordando outros conteúdos como geometria, ângulos, tabuada entre outros, mas a maior parte da pesquisa foi destinada à utilização do Desmos, pois o mesmo demonstrou mais potencialidades e despertou mais interesse do pesquisador.

O quadro a seguir mostra uma síntese de cada um dos trabalhos analisados, discutindo sobre o que foi investigado e realizado, logo em seguida tecemos algumas considerações sobre os principais resultados encontrados e destacamos o fortalecimento de ideias a respeito das contribuições e limitações do uso do Desmos no ensino da Matemática.

Quadro 1. Síntese das pesquisas analisadas

<i>Título: Aprendizagem móvel: explorando a matemática por meio de aplicativos educacionais em smartphones (Abreu, 2018)</i>
❖ O intuito dessa pesquisa foi identificar as possibilidades e limitações dos aplicativos móveis para o ensino aprendizagem da Matemática na sala de aula. O pesquisador analisou e explorou alguns aplicativos educacionais, úteis para o ensino de Matemática desenvolvendo atividades no ensino fundamental e ensino médio. A partir de uma inquietação, percebeu-se as potencialidades do Desmos e com isso desenvolveu a última etapa do seu trabalho com uso do Desmos no estudo da função quadrática. Com isso proporcionou que os discentes participantes da pesquisa compreendessem as ideias e conceitos referentes ao conteúdo estudado.
<i>Título: Proposta de ensino de geometria analítica utilizando o desmos (Euzébio, 2018)</i>
❖ A pesquisa teve como objetivo investigar as possibilidades de ensino aprendizagem de geometria analítica, abordando alguns conteúdos dessa área com uso do Desmos; foi criada uma sequência de atividades mútuas, para explorar as possibilidades do <i>software</i> . Além disso, ele faz uma comparação entre o Desmos e o <i>software</i> GeoGebra, mostrando diferenças e semelhanças e argumentando o porquê da

utilização do Desmos em vez do GeoGebra.
<i>Título: O que $f'(x)$ nos diz sobre $f(x)$: uma abordagem com uso de tecnologia computacional (Scremin, 2019)</i>
❖ A pesquisa desenvolvida com alunos de graduação estava interessada em compreender às dificuldades no aprendizado dos conceitos fundamentais da derivada, fundada em pesquisas sobre a importância do uso de tecnologias computacionais em situações de ensino aprendizagem de cálculo, para isso desenvolveu uma ação pedagógica para o ensino de derivadas através de atividades usando Desmos, cujo propósito foi investigar as possíveis possibilidades do uso dessa ferramenta.

Fonte: Abreu, 2018; Euzébio, 2018 e Scremin, 2019.

A partir das análises das atividades aplicadas com o Desmos nas pesquisas mencionadas foi possível diagnosticar que essa ferramenta contribuiu de maneira significativa na exploração e construção dos conceitos estudados, principalmente na base conceitual, dando oportunidades para os alunos conseguirem circular nas diferentes representações da álgebra.

A interatividade e os comandos acessíveis e de fácil compreensão foram essenciais para o trabalho com atividades de esboço de gráficos, manipulação de pontos, criação de tabelas, além da possibilidade de explorar o Desmos à medida que estamos discutindo sobre um conteúdo.

Confirmando com essas ideias, Abreu (2018, pp. 222-223) defende que “o aplicativo foi capaz de promover a interação aluno professor aplicativo”, fazendo com que fosse possível “atrair a atenção do aluno para a aprendizagem do conteúdo”. Desta forma mostrando o quão potencializador é o trabalho a partir da utilização do Desmos, sempre deixando claro a importância do planejamento.

Com relação às vantagens e incentivo do Desmos, Scremin (2019) atenta para o interesse e a disposição desempenhada pelos alunos para realizarem as atividades com a ferramenta, ela cita que esse enfoque foi percebido durante os encontros quando os alunos indagavam e contribuíam no desenvolvimento da proposta. Vale salientar ainda a possibilidade do Desmos em oferecer oportunidade de reflexão e descobertas em um ambiente diferenciado, em que os alunos apresentam papel ativo no processo de aprendizagem.

Diante disso, foi possível perceber que o Desmos apresenta uma perspectiva de substituir metodologias tradicionais por metodologias ativas, as quais sejam centradas no aluno e focadas na preocupação com sua aprendizagem e o seu aproveitamento, e também

capaz de estimular a construção de conhecimento e a descoberta das soluções ao invés de trazê-las prontas e apenas demonstrar (SCREMIN, 2019).

Euzébio (2018) faz uma comparação entre o Desmos e o Geogebra explicando que o Desmos oferece menor variedade de recursos e trata-se de uma ferramenta que apresenta recursos mais simples de serem manuseados, além disso aponta que o visual do Desmos é altamente espontâneo, fazendo com que “sua interface apresente maior facilidade quando é colocado o trabalho em ação” (2018, p. 25).

A partir do que foi discutido e mostrado pelos trabalhos que analisamos, é indiscutível a aplicabilidade do Desmos para aprimorar e contribuir com a aprendizagem de conteúdos matemáticos, de modo que o uso dessa ferramenta proporcione ao aluno ser capaz de construir seu próprio conhecimento. Entendemos que o uso de tecnologias no âmbito educacional e em uma sala de aula *on-line* requer do professor um melhor planejamento, pois precisa alcançar os objetivos estabelecidos para aquele momento, sabendo que contratempos podem ocorrer.

Nos dias atuais, o Desmos pode ser utilizado como uma plataforma que ajudará bastante o trabalho do professor, pois uma das suas atualizações propõe que o professor crie uma sala de aula, com atividades e compartilhe com os alunos, na medida que as atividades são resolvidas o professor tem o total controle e o acesso de tudo que é realizado pelos participantes.

Essa funcionalidade é bastante importante para o trabalho com o ensino remoto, é uma forma do professor está acompanhando o raciocínio do aluno ao fazer o uso da tecnologia, podendo intervir quando for necessário. Reforçando o exposto, Antunes e Cambrainha (2020) expõem que:

Nessa direção, acreditamos que as ferramentas disponíveis no painel do professor contribuem para que o mesmo tenha, em tempo real, uma ideia do andamento da atividade como um todo, podendo identificar, por exemplo, através das análises das respostas dos estudantes, aqueles que precisam de algum tipo de intervenção ou aqueles que estão respondendo mais rapidamente às perguntas propostas. (2020, p. 9)

Ressaltamos que, diante dos apontamentos apresentados, na condição de professores de Matemática, cabe indagar neste momento: Como aliar o Desmos a Exploração, Resolução e Proposição de Problemas para o ensino de função afim em uma sala de aula *online*? Partindo desse questionamento discutimos as principais concepções e os diferentes olhares sobre a perspectiva da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas, como também a construção do conceito de função afim e as suas características.

3 A PERSPECTIVA DA EXPLORAÇÃO, RESOLUÇÃO E PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS.

Neste capítulo trazemos algumas considerações a respeito do ensino de Matemática através da Resolução de Problemas, apontando definições para um problema, o trabalho realizado com essa metodologia na sala de aula e o papel desempenhado pelo professor. Em seguida, apresentamos a metodologia da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas para o ensino aprendizagem de Matemática, apoiado nas ideias defendidas por Andrade (1998, 2017), finalizamos expondo um quadro com pesquisas desenvolvidas por membros do Grupo de Estudo e Pesquisa sobre Educação e Pós-Modernidade (GEPEP).

3.1 A Resolução de Problemas no ensino de Matemática

Sabemos que as reformas curriculares propostas para o ensino de Matemática ocorridas no Brasil e no mundo apontam para uma necessidade de mudanças nas formas com que os conhecimentos matemáticos são ensinados e aprendidos, daí a importância da Resolução de Problemas para o professor e para os alunos. Dentre as mudanças em desenvolvimento, talvez a que melhor reflita o espírito da reforma educacional atual seja a de promover nos alunos a capacidade de aprender, conferindo-lhe certa dose de autonomia.

A Resolução de Problemas vem ganhando destaque nos últimos anos, seja no trabalho realizado na universidade ou na escola. Pesquisadores matemáticos como também de outras áreas estão interessados nessa metodologia de ensino por entender que ela leva seus praticantes a pensar o seu próprio fazer, não apenas interessados a chegar a um resultado, mas sim de entender o processo que foi adotado para se chegar a tal solução.

O grande precursor da Resolução de Problemas foi Polya, e a abordagem defendida por ele preocupava-se em explicar o processo de resolução de problemas e em ensinar métodos de resolução que levem a enxergar caminhos para solução dos problemas (POLYA, 1985). Hoje em dia, pesquisadores se contrapõem a esse pensamento, pois não se deve estar interessado em apenas chegar à solução, mas que sejam dadas condições para o professor desempenhar o trabalho junto com a Resolução de Problemas.

A palavra problema possui diferentes significados, não se distinguindo, por vezes, exercício e problema. De acordo com o dicionário Houaiss (2009), problema é um “substantivo masculino - obstáculo, dificuldade que desafia a capacidade de solucionar de

alguém”. Para Onuchic (1999, p. 215), “problema é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver”. Por sua vez, em um de seus trabalhos, Allevato (2007, p. 1) destaca que “o termo problema está bastante presente no dia a dia de quem trabalha com Matemática, mas nem sempre seu uso vem acompanhado de um consciente posicionamento sobre o seu significado”.

Em um de seus trabalhos, Andrade (2017, p. 364) discute que um problema deve ser entendido como um “projeto, uma questão, uma tarefa, uma situação” e, diante disso, aponta três contextos que se relacionam com o aluno, que são: o primeiro é que “o aluno não tem ou não conhece nenhum processo que lhe permita encontrar de imediato a solução”, já o segundo “o aluno deseja resolver, explorar ou realizar algum trabalho efetivo” e o último é incluir o aluno “à realização de algum trabalho efetivo” (ANDRADE, 2017, p. 364).

Ainda de acordo com esse autor, a ideia defendida não estar relacionada com apenas a resolução do problema, mas sim de que o aluno seja capaz de ir além realizando que:

A situação ou tarefa proposta possa desencadear no aluno a realização de algum trabalho efetivo, num processo de reflexão e síntese, com a mediação-refutação do professor e/ou dos próprios alunos, possa então se chegar a resolução e solução da tarefa proposta e ir inclusive além dela. A grande questão aqui é que o trabalho realizado não se limita apenas a busca da solução da tarefa proposta, podendo ir muito além dela. (ANDRADE, 2017, p. 365)

Vejamos o quão é vantajoso o trabalho que é realizado a partir de um problema, sabendo que mesmo sem chegar à solução do problema às vezes o caminho que é percorrido pode desencadear novas ideias e proporcionar ao aluno novas descobertas, com isso percebemos a importância de entendermos as concepções de um problema.

Mesmo estando nos deparando com diferentes concepções de problemas, podemos compreender que todas têm um mesmo viés. Diante disso, Lester (1980 p. 270) sustenta que:

Um problema é uma situação em que um indivíduo ou um grupo é solicitado a desempenhar uma tarefa na qual não existe nenhum algoritmo disponível que determine completamente o método de resolução. A realização desta tarefa tem que ser desejada pelo indivíduo ou grupo. De outro modo a situação não pode ser considerada um problema.

Com isso percebemos a importância de saber definir o que é um problema, entendendo que um problema não necessariamente é aquela situação que tem um enunciado, mas seja algo que se queira resolver, não apresentando um único caminho para se resolver.

Nas diversas etapas do Ensino Básico, é imprescindível destacar a necessidade de que os alunos adquiram não somente o conjunto de conhecimentos já elaborados, que constituem a cultura e a ciência da nossa sociedade, mas também, e de maneira muito especial, que adquiram habilidades e novas táticas que lhes permitam aprender, por si mesmos, novos conhecimentos. Percebemos que diante de uma sociedade muito flexível nas demandas

trabalhistas e culturais de seus cidadãos e, ao mesmo tempo, muito competitiva, não basta proporcionar conhecimentos “empacotados”, ou seja, prontos e acabados, fechados em si mesmo.

Ao contrário, há necessidade de tornar os alunos pessoas capazes de enfrentar situações e contextos variados, que exijam deles a aprendizagem de novos conhecimentos e habilidades. Por isso, os alunos que adquirirem a capacidade de aprender estarão, provavelmente, em melhores condições de adaptar-se às mudanças culturais, sociais e políticas que os aguardam futuramente. Andrade (1998, p. 3) discute que:

A Resolução de Problemas, além de ser assumida como uma metodologia de ensino, é pensada globalmente, não é olhada somente no nível de processos e conceitos matemáticos, mas, também, no nível de questões de natureza sócio-político-cultural, da educação em geral e da educação matemática em particular onde a sala de aula é olhada, observada e trabalhada em todos os seus múltiplos aspectos, isto é, em toda sua multicontextualidade.

Desta forma, uma das maneiras mais acessíveis para levar o aluno a aprender é a Resolução de Problemas, vista aqui não como uma simples tarefa rotineira, mas sim como um caminho para aperfeiçoar os processos de ensino e aprendizagem e dando oportunidade para conviver em uma sociedade em constante transformação. Diante de um ensino baseado na transmissão de conhecimentos, que está um pouco ultrapassado, a Resolução de Problemas pode contribuir não somente como conteúdo educacional, mas também, e principalmente, como estratégia ou forma de conceber as atividades educacionais.

No ensino baseado na Resolução de Problemas, o aluno é sujeito ativo e participante do processo de aprendizagem, o professor serve como mediador do conhecimento, permitindo que o aluno busque maneiras e procedimentos para a resolução de uma situação-problema proposta e a partir daí é que a aprendizagem vai ocorrendo em todo o percurso, desde o princípio, quando o aluno é provocado a procurar o caminho para se chegar a tal solução.

De acordo com Santos (2019, p. 22):

O problema surge a partir do interesse em descobrir o método de resolução da situação imposta. Por essa razão, é importante que o indivíduo tenha interesse no problema que se depara, tendo em vista que a busca por estratégias de sua resolução é motivada pelo seu interesse em encontrar ou determinar a solução do problema proposto. E em compreender com significados as ações realizadas em torno da resolução desenvolvida.

Partindo desse pressuposto, percebemos que o aluno precisa estar interessado em resolver o problema que lhe é proposto, com isso entendemos a importância da qualidade em elaborar e selecionar bons problemas, provocando o aluno a ter motivação para resolver os problemas. O diferencial em trabalhar com a Resolução de Problemas é partir da situação e depois definir um conteúdo, pois o que ainda é feito nas escolas é a explanação do conteúdo

para em seguida ser proposto um problema, muitas vezes os alunos não estão interessados em entender o processo para se chegar a uma solução, mas sim de aplicar aquilo que foi repassado pelo professor e chegar a um resultado, sem ao menos entender o real propósito daquele problema. Partindo disso, as autoras Onuchic e Allevato (2011) afirmam que nessa metodologia:

Os problemas são propostos aos alunos antes de lhes ter sido apresentado formalmente o conteúdo matemático necessário o mais apropriado a sua resolução que, de acordo com o programa da disciplina para a série atendida, é pretendido pelo professor. Dessa forma, o ensino-aprendizagem de um tópico matemático começa com problema [problema gerador] que expressa aspectos-chave desse tópico e técnicas matemáticas devem ser desenvolvidas na busca de respostas razoáveis ao problema dado. (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p.85)

Serrazina (2017, p. 56-57) aponta que o trabalho com a Resolução de Problemas é imprescindível para o aluno, pois ele se torna capaz de analisar “a validade dos conceitos matemáticos, realizar conjecturas, relacionar os conceitos, generalizar, utilizar os procedimentos em contexto significativo, ter uma atitude reflexiva e desenvolver a capacidade de raciocínio e o pensamento matemático”. Ela ainda discute sobre a formação do professor para o uso da Resolução de Problemas em sala de aula.

Entendemos que ao fazer uso da metodologia de ensino aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas é indiscutível o papel do professor nesse processo de mediação, fazendo com que os alunos sejam capazes de pensar e produzir seu próprio conhecimento. No nosso trabalho o desafio é maior ainda, pois a mediação de forma remota pode não ser tão eficaz quanto de forma presencial, tendo em vista que a aplicação de nossa parte prática foi realizada de forma *online*.

Entendendo que o ensino de Matemática através da Resolução de Problemas é considerado uma abordagem capaz de levar o aluno a aprender de forma mais consistente, os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) apontam alguns obstáculos para o ensino de Matemática, dentre os quais destacamos a falta de uma formação profissional qualificada que leve o aluno a ser desafiado, algumas condições de trabalho não favoráveis para desempenhar um ensino de qualidade, a ausência de políticas educacionais que incentivem o professor e os ajudem e as interpretações equivocadas das concepções pedagógicas.

3.2 O ensino de Matemática através da exploração, resolução e proposição de problemas

Na nossa pesquisa realizamos uma experiência de ensino aprendizagem de função afim refletindo sobre as contribuições da interação em aulas de Matemática de forma remota,

para isso foi necessário definir a nossa metodologia de ensino adotada para desenvolver esse trabalho. A seguir buscamos explicar e orientar o percurso que escolhemos para a metodologia de ensino aprendizagem de Matemática através da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas.

Percebemos que a Resolução de Problemas, a partir de pressupostos teóricos, é capaz de potencializar e fortalecer a aprendizagem dos alunos, a partir disso salientamos que a Exploração de Problemas vem a levar o aluno a compreender o conteúdo. Discutimos isso a partir de trabalhos concluídos que evidenciam a eficácia dessa metodologia atrelada também à concepção da Resolução e Proposição de Problemas.

Em seu trabalho de dissertação de mestrado, intitulado “Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução, Exploração, Codificação e Descodificação de Problemas e a Multicontextualidade da Sala de Aula”, Andrade (1998) aponta que o ensino-aprendizagem de Matemática tem o seu pontapé inicial a partir de um problema. Afirma também, que os estudantes apresentam a capacidade de aprender e entender os aspectos de um conceito ou ideais matemáticas a partir do momento em que ele é desafiado a explorar, resolver e propor problemas.

Segundo Andrade (2017), diante da exploração do problema o aluno já é capaz de resolver e propor novos problemas, pois o trabalho com a exploração de problemas compreende os processos de resolver e propor o problema, proporcionando ao aluno ir além daquele problema inicial que é proposto, isto é, explorando problemas.

Ainda de acordo com esse autor, na realização do trabalho com a exploração de problemas, o que deve ser feito a princípio é lançar o problema para os alunos, para que analisem e façam um trabalho sobre ele, depois, é feita a discussão do problema em conjunto professor e aluno; a partir das reflexões desenvolvidas pelos alunos é que poderão chegar a solução do problema, ser capazes de propor novos problemas e até surgirem novos conteúdos, assim, dando oportunidade para novas reflexões e sínteses. Andrade (1998) construiu um esquema que caracteriza o processo de exploração de problemas: Problema-Trabalho-Reflexões e Síntese-Resultado (P-T-RS).

Em nossa proposta de pesquisa, trabalhamos alguns problemas de função afim que possuem em sua essência diferentes ideias. Desejamos com isso dar possibilidade aos alunos de criarem um conjunto de problemas que os motivem a construir ideias e conceitos que são essenciais para a aprendizagem de função afim. Dessa forma, trabalhamos problemas que pudessem permitir ao aluno sistematizar e compreender o conteúdo, sabendo das dificuldades que os mesmos tinham em entender aspectos importantes de função.

Retomando à discussão sobre as ideias defendidas por Andrade (1998, 2017) na perspectiva da exploração de problemas, ele sublinha que:

No trabalho de exploração de problemas, há um prazer e uma alegria em ir-se cada vez mais longe, um ir cada vez mais profundo, um ir cada vez mais curioso; há um ir que chega e nunca chega, um ir que pode sempre ir, que sempre se limita ao contexto do aluno, do professor, da Matemática, da escola e, por isso, pode ir outra vez e mais outra vez (ANDRADE, 1998, p. 26)

Assim sendo, na exploração de problemas é possível compreender que quando se chega na resposta, não necessariamente o problema estará findado, resolvido. Devemos ir além da resolução do problema, por meio de questionamentos e provocações a fim de criar novas questões em diversas direções, num processo de começar a partir de um determinado resultado, que não se encerra com a resposta e que em outras ocasiões se pode ter um novo olhar para aquela mesma situação de forma a apresentar a capacidade de criar novos problemas.

O contexto no qual estão inseridos aluno e professor não podem ser deixados de fora, pois é importante para as reflexões feitas no trabalho de exploração de problemas, já que muitas vezes o professor pode ser surpreendido por alguma indagação inesperada feita pelo aluno, que para aquela situação o mesmo não esperava. Esse trabalho de reflexão feita pelo aluno pode aprimorar a prática do professor no trabalho com a exploração de problemas (ANDRADE, 1998).

A partir disso entendemos o quanto é significativo o trabalho da exploração de problemas no cotidiano da sala de aula, na nossa pesquisa, mesmo estando em uma sala de aula remota, é claro perceber o quanto é importante trabalhar com a exploração de problemas, pois mesmo que os alunos queiram chegar a uma resposta, sempre vai ser possível fazer eles pensarem em algo a ser descoberto, fazendo com que eles atinjam novos conceitos.

No nosso trabalho, além da Exploração e Resolução de Problemas, também abordamos a Proposição de Problemas, onde os alunos foram levados a propor novas situações de acordo com a exploração das situações problemas que apresentamos a eles, e essa proposição pode ocorrer em diferentes momentos da exploração.

Andrade (2017) discute que a proposição de problemas avança o trabalho da exploração de problemas e ainda traz que:

No caso da proposição de problemas, na/com a sala de aula, temos ainda observado que ela também impulsiona o trabalho com a resolução e exploração de problemas. Ela pode ocorrer tanto antes como durante e depois do processo de resolução e exploração de problemas. Mas o ideal é que ela seja sempre o ponto de partida de todo esse processo. E quando pensamos em exploração de problemas sempre pensamos na proposição de problemas como uma ferramenta presente em todo processo. É necessária essa tomada de consciência. (ANDRADE, 2017, p. 389-390)

Ao longo da nossa intervenção com os alunos de forma remota, oferecemos oportunidade para que eles realizassem suas próprias proposições de problemas, no início foi algo bastante novo e desafiador, mas no decorrer dos encontros se tornou uma atividade frequente para eles. Consideramos que ao formular os seus problemas, os alunos estão desenvolvendo a atividade cognitiva de pensar matematicamente, isso foi perceptível nos problemas elaborados por cada aluno.

Sobre a proposição de problemas, Chica (2011) afirma que:

Quando o aluno cria seus próprios textos de problemas, ele precisa organizar tudo que sabe e elaborar o texto, dando-lhe sentido e estrutura adequados para que possa comunicar o que se pretende. [...] O aluno deixa, então, de ser um resolvidor para ser um propositor de problemas, vivenciando o controle sobre o texto e as ideias matemáticas. (CHICA, 2011, p. 151)

Com o intuito de promover a aprendizagem de Matemática para estudantes, enxergamos na proposição de problemas um caminho para o alcance de um conhecimento mais entendível em que o aluno se torna protagonista e apresenta a capacidade de entender todo o processo. Cai e Hwang (2020) definem a proposição de problemas matemáticos como sendo uma sequência de atividades intelectuais específicas para os estudantes e, para isso, elenca dois passos:

- (a) Os alunos apresentam problemas matemáticos com base em determinadas situações de problema que podem incluir expressões matemáticas ou diagramas, e
- (b) os alunos apresentam problemas por mudar (isto é, reformular) os problemas existentes. (CAI; HWANG, 2020, p. 3, tradução nossa)¹

O trabalho realizado na proposição de problemas surge a partir do que é feito na exploração e resolução de problemas, por isso a ligação entre Exploração, Resolução e Proposição de Problemas. Há todo um envolvimento do aluno nesse processo, pois o trabalho realizado nessa perspectiva vai além de resolver problemas, sendo capaz de provocar o aluno a chegar a novas descobertas, compreender o novo e avançar no seu conhecimento. O aluno nessa perspectiva é levado a se sentir um ser ativo no processo de aprendizagem, pois a partir do momento que o professor permite que ele proponha os seus problemas, o mesmo se sente capaz.

Nessa perspectiva os autores Cai *et al.* (2015, p. 5, tradução nossa) afirmam que a “proposição de problemas é reconhecida como uma atividade intelectual de importância crítica na investigação científica”, com isso devemos pensar nesse trabalho junto com os nossos alunos, preparando-os para serem cidadãos críticos, numa perspectiva de Educação

¹ (a) Students pose mathematical problems based on given problem situations which may include mathematical expressions or diagrams, and (b) students pose problems by changing (i.e., reformulating) existing problems.

crítica e direitos humanos. Vejamos, com tudo que foi exposto aqui a grande importância e relevância de se trabalhar com essa abordagem em sala de aula.

Ainda de acordo com esses autores, eles retratam sobre as potencialidades dos processos existentes na proposição de problemas, destacando que:

Existem muitos processos potenciais envolvidos na proposição de problemas, e eles podem variar dependendo do tipo de problema que está sendo considerado. Isso pode envolver técnicas para reformular problemas, heurísticas ou estratégias existentes para gerar problemas a partir de determinadas situações e processos para explorar um contexto matemático e testar seus limites para desenvolver uma "sensação" para os tipos de perguntas que podem ser solicitados. Os pesquisadores trabalharam para entender melhor esses processos e documentar os tipos de estratégias que são usadas na proposição de problemas. (CAI *et al.*, 2015, p. 11, tradução nossa).²

Contudo, percebemos o quanto pode ser estimulante o trabalho com a proposição de problemas no cotidiano da sala de aula, onde os alunos terão a oportunidade de inventar, fazendo novas descobertas e explorando outros contextos, alcançando assim a aprendizagem e o conhecimento sobre determinado conteúdo ou ideia Matemática, tendo como mediador o professor que nesse processo tem o papel de criar oportunidades para os alunos proporem problemas e exige grande experiência para o trabalho com a proposição.

Em uma publicação de Singer *et al.* (2013) há uma discussão que remete ao papel do professor na proposição de problemas:

Tarefas de proposição de problemas bem projetadas para alunos requerem também professores qualificados que possam gerenciar as complexidades de tais contextos. Além disso, os professores de matemática em exercício e os futuros professores devem ter a oportunidade de colocar seus próprios problemas. O uso bem-sucedido de atividades matemáticas autênticas no ensino requer professores que tenham experiência com tais atividades como alunos de matemática. (SINGER *et al.*, 2013, p. 3, tradução nossa)³

A Resolução, Exploração e Proposição de Problemas permite que o aluno realize uma reflexão mais aprofundada sobre os conceitos que estão subentendidos nos problemas que são apresentados, o que favorece o processo de construção de novos conhecimentos. Contudo, compreendemos que, quando a aula é realizada nessa dinâmica, promove nesta direção o despertar nos alunos pela autoconfiança, essencial para a criação e exploração de diferentes

² There are many potential processes involved in posing a problem, and they can vary depending on the type of problem being considered. This may involve techniques for rephrasing problems, heuristics or existing strategies for generating problems from certain situations and processes to explore a mathematical context and test its limits to develop a "feel" for the types of questions that might be asked. The researchers worked to better understand these processes and document the types of strategies that are used in posing problems.

³ Well-designed problem-posing tasks for students also require skilled teachers who can manage the complexities of such contexts. Moreover, in-service and prospective mathematics teachers should be offered opportunities to pose their own problems. The successful use of authentic mathematical activities in teaching requires teachers who have experience with such activities themselves as learners of mathematics.

formas de resolução e ideias matemáticas que, por sua vez, pode evidenciar como o seu conhecimento a ser desenvolvido diante das ideias e os conceitos trabalhados sobre função.

Na certeza da potencialidade do ensino aprendizagem de Matemática através da metodologia da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas e objetivando sintetizar os principais resultados obtidos por outros autores que já desenvolveram pesquisas nessa vertente, apresentaremos a seguir um quadro com algumas dissertações desenvolvidas no GEPEP no período de 2015 a 2019.

O Grupo de Estudo e Pesquisa sobre Educação e Pós-modernidade (GEPEP) é um grupo de pesquisa vinculado à Universidade Estadual da Paraíba – Campus Campina Grande, coordenado pelo professor Dr. Silvanio de Andrade, grupo esse que possui, em sua maioria, dissertações na temática da Resolução, Exploração e Proposição de Problemas.

Para essa análise selecionamos cinco dissertações as quais fazem referência à Resolução, Exploração e Proposição de Problemas, abordando diferentes conteúdos e sendo todas desenvolvidas no cotidiano da sala de aula.

Trazemos nessa análise os principais resultados encontrados pelos autores na aplicação de atividades utilizando a metodologia da Resolução, Exploração e Proposição de Problemas, evidenciando assim a eficácia do trabalho com essa metodologia. Todas as pesquisas foram orientadas pelo professor Andrade.

No quadro abaixo listamos a identificação do autor da dissertação, o título, o ano de publicação e os principais resultados encontrados.

Quadro 2: Principais resultados em pesquisas do GEPEP

AUTOR/ ANO	TÍTULO DA DISSERTAÇÃO	PRINCIPAIS RESULTADOS
MARTINS (2019)	<i>Ensino-aprendizagem de sistemas lineares na formação do professor de matemática via Exploração, Resolução e Proposição de problemas</i>	No trabalho com a metodologia da resolução, exploração e proposição de problemas, sentiu-se que os alunos primeiramente fazem a resolução, em seguida a exploração e por último a proposição, sendo essa a etapa mais demorada por eles. Evidenciou-se a importância da mediação do professor. Concluiu, ainda, que a metodologia de ensino aprendizagem de Matemática através da Resolução, Proposição e Exploração de Problemas contribui para a

		construção de uma nova postura frente ao ensino de Sistemas Lineares.
SANTOS (2019)	Contribuições da Resolução, Exploração e Proposição de problemas ao processo de ensino e aprendizagem da combinatória nos anos iniciais do ensino fundamental.	As problematizações provocadas durante o processo de Resolução, Exploração e Proposição de Problemas potencializaram o trabalho de reflexão sobre os invariantes dos problemas combinatórios, o que favoreceu o desenvolvimento do raciocínio combinatório, generalizante e lógico dos alunos, além de também ter possibilitado aos pesquisadores explorar diferentes dimensões dos problemas propostos.
ARAÚJO (2016)	<i>Ensino-aprendizagem de álgebra através da Resolução e Exploração de problemas.</i>	Através da metodologia abordada constatou-se uma maior motivação por parte dos alunos, ao questionarem e refletirem sobre as ideias discutidas, sendo sempre instigados a atuarem no processo de ensino-aprendizagem. Ainda destacou a relevância da metodologia adotada, que permitiu uma maior compreensão da Álgebra, de modo a minimizar ou até superar as dificuldades apresentadas constantemente pelos alunos.
SILVEIRA (2016)	<i>Análise combinatória em sala de aula: uma proposta de ensino-aprendizagem via Resolução, Exploração e Proposição de problemas.</i>	Através da abordagem via Resolução, Exploração e Proposição de problemas foi possível acompanhar o crescimento dos alunos, com suas próprias ideias para resolver os problemas, encontrando múltiplas estratégias de resolução, justificando suas soluções, participando efetivamente da construção do seu conhecimento. A metodologia permitiu um aprendizado com mais compreensão, potencializando o aluno para resolver problemas com foco não apenas na busca da solução do

		problema, mas no processo da resolução e podendo ir muito além, como a realização de um trabalho de proposição e exploração de problemas.
SILVA, V. (2015)	<i>Proposição e Exploração de problemas no cotidiano da sala de aula de matemática.</i>	Percebemos que a essência do processo torna a compreensão mais refinada e que é preciso elaborar e/ou propor questões que desenvolvam o raciocínio e que levem à mediação do pensamento matemático. Ainda destaca o trabalho com diferentes formas de representações de uma mesma função e a criatividade apresentada na proposição dos problemas.

Fonte: Martins; 2019. Santos; 2019. Araújo; 2016. Silveira; 2016. Silva, V.; 2015.

Diante do que foi aqui exposto, percebemos a importância de levar para sala de aula a metodologia da Resolução, Exploração e Proposição de Problemas, os resultados relatados mostram como tem ocorrido o trabalho com a Resolução de Problemas nas aulas de Matemática, evidenciamos em todos os trabalhos o cotidiano da sala de aula, percebendo que o professor-pesquisador deixou ser tocado pelas vivências da sala de aula, isso é fundamental para o trabalho nessa perspectiva.

Com isto, concluímos este capítulo, sabendo que a metodologia da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas pode oferecer bons resultados para o desenvolvimento do ensino de função afim com o uso de aplicativos móveis no ensino remoto, apresentando vários fatores positivos, como: proporcionar ao aluno o pensar matemático; aperfeiçoar a exploração e a autonomia; contribuir para que o aluno desenvolva sua aprendizagem, pensando no processo de metacognição; mostrar aplicações da Matemática no cotidiano, favorecendo o uso dessa ciência no dia a dia do aluno, fortalecendo a inovação e ainda proporcionando que o aluno desenvolva o pensamento crítico, quando se preocupa com o processo de alcançar uma solução. Isso tudo contribui favoravelmente para o conhecimento e o entendimento do aluno.

4 O ENSINO APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES: IDEIAS, CONCEITOS E APLICAÇÕES

No presente capítulo apresentamos alguns apontamentos da relevância do ensino de função para a Matemática, trazemos as ideias associadas ao conceito e o ensino de função, tomando como fundamentação teórica para a nossa pesquisa princípios essenciais de compreensão de funções defendidos por Cooney, Beckmann e Lloyd (2010), a nível internacional, abordando as representações múltiplas, como também as contribuições de Silva (2013) e Brandão (2014), membros do grupo GEPEP, que discutem em suas pesquisas o ensino-aprendizagem de função via Resolução, Exploração e Proposição de Problemas, revelando a importância desse tema no ensino básico. Posteriormente, sintetizamos o nosso estudo na função afim com algumas definições desse conteúdo em livros didáticos e aplicações no cotidiano.

4.1 A relevância do ensino e aprendizagem de função na Matemática

As funções representam um importante conteúdo da Matemática, tendo em vista que o conceito de função foi construído por décadas e mais décadas; com contribuições de grandes representantes da Matemática. A ideia de função surgiu diante da necessidade do homem em solucionar problemas do seu dia a dia, fazendo relações através de números (SILVA, 2013). É um conteúdo que exerce bastante influência na aprendizagem do aluno e que se torna desafiante para o professor ensiná-lo, pois é necessário construir a ideia de função e relacionar com situações vivenciadas pelos alunos, que muitas vezes compreendem de forma equivocada ou sem nenhuma aplicação.

O estudo de função no currículo médio brasileiro ainda segue uma linha considerada tradicional e ordenada, por muitas vezes, utilizando a sequência que é recomendada nos livros didáticos. Os temas de função são sempre tratados de formas independentes sem apresentarem alguma conexão entre um tipo e outro de função ou outro conteúdo matemático, isso possibilita que o aluno trate os diferentes tipos de funções como um conteúdo isolado, que não apresenta ligação alguma. Por exemplo, a função afim e a progressão aritmética são tratadas como conteúdo sem nenhuma relação, sendo que o professor poderia ministrar esses conteúdos de forma acoplada, alcançando até uma melhor compreensão pelos alunos.

Nos últimos anos, os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL; 2002, 2006) mostram uma grande inquietação com críticas à forma como é abordado o conteúdo de função

no Ensino Médio, com isso trazem sugestões acerca do tratamento deste conteúdo. Propõem um conjunto de temas que possibilitam o desenvolvimento de competências, com relevância científica e cultural e com uma articulação lógica das ideias e conteúdos matemáticos a serem desenvolvidos nas três séries do Ensino Médio.

Estes documentos ainda destacam a possibilidade de alcance de função e a sua importância para o ensino de Matemática e outras áreas do conhecimento:

O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. (Brasil, 2006, p. 121)

O estudo de função é de grande relevância, mas, devido à abrangência do conceito, ocasiona um grande número de dificuldades pelos alunos. O conceito de função envolve concepções diversas e múltiplas representações, com isso faz-se necessário compreender o sentido que este conceito pode assumir em diferentes contextos e situações, quais significados o aluno pode produzir e de que formas isto se desenvolve no ambiente escolar e na sua vida.

Durante a nossa vida estudantil e acadêmica percebemos que o conceito de função é considerado um dos mais pertinentes para a Matemática e pode representar diferentes situações da realidade dos alunos e o quanto isso interfere na sua vida em sociedade. Diante disso, a compreensão e a construção do conceito de função pelo aluno são, de grande importância e indispensável, sabendo que o conteúdo de funções é ensinado desde as séries iniciais até o ensino superior.

Em virtude da sua importância para tantos outros temas matemáticos e seu papel na matemática de nível universitário, funções constituem um dos temas mais importantes na Matemática do ensino secundário. Eles fornecem um meio de pensar, quantitativamente, sobre os fenômenos do mundo real e um contexto para estudar as relações e mudanças (COONEY, BECKMANN E LLOYD, 2010, p. 7, tradução nossa).⁴

Sobre o conceito de função Van de Walle (2009, p. 303) defende “uma evolução melhor a partir de situações contextualizadas em que uma mudança em uma coisa (variável independente) cause uma mudança correspondente em outra coisa (variável dependente)”. Dessa forma, permitindo que sejam utilizados exemplos contextualizados de fácil compreensão e os alunos possam entender facilmente essa relação. O professor pode provocar os alunos para criarem outros, e colocá-los como criadores de suas novas situações e permitir

⁴ Because of their importance to so many other mathematical topics and their role in university-level mathematics, functions constitute one of the most important topics in secondary school mathematics. They provide a means of thinking quantitatively about real-world phenomena and a context for studying relationships and changes.

uma discussão na sala de aula, para verificar se o conceito foi entendido por todos os alunos. É necessário que todos tenham entendido essa relação e assim o professor passar adiante.

Toda ideia introduzida na aula de matemática pode e deve ser compreendida completamente por todas as crianças. Sem nenhuma exceção! [...] Todas as crianças são capazes de aprender toda a matemática que nós queremos que elas aprendam e elas podem aprendê-la de uma maneira significativa e de um modo que lhes faça sentido. (VAN DE WALLE, 2009, p. 33).

Diante disso, nós professores precisamos entender que nossos alunos são capazes de aprender, mas deve partir de nós a criatividade de abordar um conteúdo que ofereça aos alunos a capacidade de relacionar com situações de sua realidade, com isso a aprendizagem deve fluir e a compreensão ser alcançada. É bastante importante a compreensão do conceito de função por parte do aluno e que seja possível a elaboração de procedimentos matemáticos que necessitam ter significados capazes de contextualizar o conteúdo.

A partir das nossas vivências em sala de aula, partindo de uma prática docente que ainda é tida como “tradicional”, percebemos precisamente que seguimos a sequência traga no livro didático, com cada um dos tipos de funções abordadas de forma desconexa uma das outras, mas sabemos o quão é importante proporcionar ao aluno relacionar os tipos de funções estudadas e que esse procedimento seja realizado a partir de situações problemas vivenciados na vida em sociedade.

O ensino de função é abordado com mais intensidade no 1º ano do Ensino Médio, mas o aluno já tem o contato com função no 9º ano do Ensino Fundamental, mas também em outras fases da educação básica, mas na forma de relação, como na Educação Infantil e anos iniciais do Ensino Fundamental, sem o tratamento do termo função, mas as sequências e padrões vistos durante anos é uma relação que mais à frente será denominado de função. O ensino de função também está presente no ensino superior, em diferentes cursos, não só apenas nos cursos de exatas.

Levando em consideração a relevância do conceito de função e sua importância para o ensino, Rêgo (2000) destaca que:

[...] O conceito de Função constitui-se um dos principais pré-requisitos para grande parte dos conteúdos desenvolvidos no Ensino Superior, uma vez que inúmeros problemas de Ciências Exatas, da Tecnologia, da Saúde e Ciências Sociais e Aplicadas podem ser modelados e estudados utilizando-se funções de uma ou várias variáveis. (RÊGO, 2000, p. 20)

Percebemos a grande importância do conteúdo de função em todas as etapas da educação básica e do ensino superior, como também o nosso papel enquanto professor de possibilitar ao aluno lidar com situações do cotidiano em que a variação de uma grandeza está

relacionada à variação da outra. Essa ideia é fundamental para a compreensão do conceito de função e oportuniza aos alunos atividades que os estimulem a pensar o conteúdo matematicamente e preencher várias lacunas que são deixadas quando é abordado esse conteúdo.

A partir disso, entendemos que o estudo contextualizado do conceito de função pode favorecer a compreensão do seu significado, como um conceito que contribui na interpretação de fenômenos reais, possibilitando, assim, atribuir significado ao conteúdo e propiciando estabelecer relações entre as diferentes formas de expressão: verbal, gráfica, algébrica e numérica. Dessa forma, sendo possível sanar as dificuldades encontradas pelos alunos quando se deparam com esse conteúdo.

Em relação às dificuldades no aprendizado de Matemática, Silva (2013) argumenta que:

Dos tópicos de Álgebra, trabalhados no Ensino Fundamental e Médio, pesquisas indicam que o conteúdo função tem trazido inúmeras dificuldades no aprendizado por parte dos alunos. Há falta de uma integração entre Aritmética e Álgebra, ou mesmo a falta de elementos basilares que possam ajudar os alunos no Ensino Médio a poder formalizar, sistematizar e aplicar conteúdos que deveriam ter sido construídos na Educação Fundamental. (SILVA, 2013, p. 24).

Esse é um dos grandes problemas que encontramos quando se trabalha com o conteúdo de função, por muitas vezes os alunos não entenderem a álgebra, fica difícil compreender o real conceito de função. O professor enquanto mediador do ensino necessita trazer situações que façam os alunos compreenderem de fato o conceito de função, sendo capazes de relacionar com o seu dia a dia, pois são inúmeras as aplicações de funções em situações do cotidiano.

Situações do dia a dia dos alunos podem estar associadas ao conceito de função, seja nas relações de compra e venda, por exemplo, a quantidade de pão e o valor a ser pago, o número de casos que aumentam a cada dia pelo novo coronavírus, a partir de uma pessoa infectada quantas outras pessoas poderão ser infectadas também, são exemplos como esses que podem ser levados para a sala de aula para serem discutidos entre alunos e professor, sendo assim possível formular o conceito de função.

Consideramos, enquanto professores, que os alunos apresentam desinteresse quanto à aprendizagem de função e isso se deve a diversos fatores, trazemos em nossa pesquisa uma Matemática que deve ser ensinada na escola levando o estudante a pensar sobre o seu fazer, trazendo situações que são vivenciadas por esses alunos no seu cotidiano, tentando estimulá-los na construção do conceito de um conteúdo que é imprescindível na vida deles.

Sobre isso, Silva (2016, p.16) diz que:

O processo de ensino da Matemática escolar deve ser gratificante para todos os envolvidos no processo educativo. [...] as pessoas gostam de aprender desde que a nova informação se conecte com as ideias já desenvolvidas, ou seja, é necessário trabalhar de acordo com as percepções dos alunos, auxiliando para que os mesmos possam reconhecer os conceitos matemáticos presentes na vida de cada um, e também contribuindo para que equívocos com relação a disciplinas possam ser quebrados.

Nessa perspectiva, entendemos que na sala de aula tanto o aluno como o professor devem se envolver no processo de ensino aprendizagem, proporcionando assim que haja interação e troca de informações. O professor precisa ficar atento às mudanças curriculares e persistir sempre numa educação que seja de qualidade. Sabemos da existência de ferramentas que despertam o interesse do aluno, então como educadores precisamos inovar e trazer para a nossa sala de aula atividades que sejam atrativas para os estudantes.

Diante de tudo que foi discutido aqui percebemos a relevância do conteúdo de função para o ensino da Matemática e as conexões desse tópico com o cotidiano, que vai além de questões do ambiente escolar, atingindo a vida do aluno, questionamos a respeito do papel do professor para o ensino de Matemática, pensando na sua importância como mediador desse processo e as implicações para o entendimento do conteúdo pelo aluno.

4.2 Concepções de ideias essenciais de função

Neste tópico compreendemos as ideias essenciais de função, partindo dos pressupostos teóricos de Cooney, Beckmann e Lloyd (2010) e também dos trabalhos de mestrado de Brandão (2014) e Silva (2013), os quais abordaram o ensino de função através da resolução, exploração e proposição de problemas. Esses trabalhos apresentaram grandes contribuições para o ensino de função e o cotidiano da sala de aula, ao final fazemos um mapeamento desses dois trabalhos, apontando os objetivos e os principais resultados alcançados.

Na Matemática, o conceito de função é um dos mais significativos e que apresenta diversas aplicações no cotidiano dos alunos. Diante disso, é preciso que os nossos alunos apresentem uma compreensão altamente relevante ao estudar esse conteúdo, entendendo de fato, o seu conceito. Assim sendo, nós enquanto professores precisamos encontrar alternativas que possibilitem o ensino aprendizagem de função, para assim enfrentar essas dificuldades que tantas pesquisas apontam com relação ao entendimento desse conteúdo por parte dos alunos.

Acreditamos que, para compreender o formalismo matemático do conceito de função, o aluno deve ser colocado em um ambiente que inclua a experiência do dia a dia, exemplos concretos, vários tipos de representação e, em linhas gerais, seguindo

o percurso semelhante ao historicamente construído fazendo com que o aluno forme a estrutura conceitual com compreensão. (BRANDÃO, 2014, p.30).

Para entendermos as ideias essenciais de função partiremos da publicação do livro *Developing Essential Understanding of Functions Grades 9-12* dos autores Cooney, Beckmann e Lloyd, vinculado ao NCTM (National Council Teacher Mathematics – Conselho Nacional de Professor de Matemática dos Estados Unidos) – 2010, nesse livro são definidas cinco grandes ideias relacionadas a função. Os autores consideram como as cinco grandes ideias para o desenvolvimento do conceito de função. O livro discute as ideias para as series 9-12 (Estados Unidos), que no Brasil corresponde ao 9º ano do Ensino Fundamental e 3º ano do Ensino Médio.

Para Cooney, Beckmann e Lloyd (2010, p. 85, tradução nossa) “a maior parte da discussão envolveu o tratamento de funções no nível do Ensino Médio. Entretanto, funções também são fundamentais para Matemática nas séries intermediárias e colegiadas”, desta forma as ideias apresentadas por eles também são válidas para o ensino superior.

As cinco grandes ideias desenvolvidas pelos autores são: O conceito de função; Covariação e taxa de variação; Família de funções; Combinação e transformação de funções e Representações de funções. Dentro de cada uma dessas grandes ideias os autores trazem subdivisões particulares, nas quais são chamadas de entendimentos essenciais, ou seja, cada grande ideia será subdividida em ideias menores, para assim obter um maior entendimento. No nosso trabalho destacamos apenas as cinco grandes ideias, não adentramos nos entendimentos essenciais.

A primeira grande ideia é uma das mais importantes, que é o conceito de função; nela estão presentes todas as relações que podem ser feitas que nos lembram uma função no mundo real. Por exemplo, a quantidade de pães e o valor a ser pago, são nessas situações que surgem o conceito de função.

Cooney, Beckmann e Lloyd (2010) mostram que uma função é um mapeamento de valor único de um conjunto - o domínio da função - para outro, que no caso seria a imagem. Ainda segundo esses autores as funções são essenciais em todos os campos da Matemática.

As funções têm utilidade multidisciplinar independentemente de quaisquer padrões de conteúdo. São úteis para o estatístico que implanta um conjunto de funções, da probabilidade que diz se uma certa observação remota é significativa ou esperada, ou seja, descrevendo quantidades que variam continuamente. (COONEY, BECKMANN E LLOYD, 2010, p.11)

Silva (2013, p. 52) aponta que “é útil apresentar funções em contextos que façam sentido para os alunos que estão iniciando seu estudo e, somente mais adiante, trabalhar a Matemática dentro do próprio campo do saber matemático”.

Diante disso entendemos como é ampla a percepção sobre o conceito de função, das inúmeras situações que podemos relacionar com esse conteúdo, partindo sempre do pressuposto que o aluno precisa entender o contexto da situação para assim fazer suas reflexões e alcançar a compreensão. Por isso, essa ideia é essencial e a partir dela que o aluno entenderá as demais e assimilará com outras áreas de conhecimento não só a Matemática, entendendo a multidisciplinaridade desse conteúdo.

O conhecimento do professor em relação às funções irá ajudá-lo a criar tarefas e perguntas que fornecem contraexemplos e maneiras de orientar os alunos a ver as conexões em vários tópicos algébricos e geométricos. Conforme estabelece o conteúdo com metas de aprendizagem, é preciso considerar como moldar nos alunos os seus entendimentos iniciais a outros mais profundos, construindo conexões ricas ao longo do caminho (COONEY, BECKMANN E LLOYD, 2010).

A segunda grande ideia é a covariação e a taxa de variação. Nela compreendemos como fazemos relações entre quantidades que estão variando juntas, a partir disso percebemos como uma taxa varia em relação a outra. Entendemos essa grande ideia a partir da observação de duas grandezas variando entre si.

A covariação e a taxa de variação estão entrelaçadas na Grande Ideia e três entendimentos essenciais associados fornecem um foco na covariação e variação no que diz respeito às funções, isto é, relação entre as quantidades que variam juntas. Podemos classificar, prever e caracterizar vários tipos de variação, atendendo à taxa na qual uma quantidade varia em relação a outra. Essa relação é chamada de covariação. Podemos facilmente reduzir a covariação a uma ideia simplista de "mudança". Mesmo se alargarmos essa definição para incluir diferentes tipos de mudança - linear, quadrática, exponencial e assim por diante. (COONEY, BECKMANN E LLOYD, 2010, p.26).

Para assimilarmos a covariação podemos perceber “quando tratamos de como muda uma entrada ao produzir mudança na saída”. Já para compreender a taxa de variação de uma função podemos pensar que “é a taxa em que a saída da função muda em relação a uma mudança na entrada – esse é um modo de quantificar a ideia de covariação”, como afirma Silva (2013, p. 69). A partir da covariação é que iremos encontrar a expressão algébrica que representa a função.

Os autores Cooney, Beckmann e Lloyd (2010) ainda discutem sobre avaliar a compreensão de um aluno sobre covariação, indo muito além de “entende a mudança” ou “não entende a mudança”. Uma avaliação precisa da compreensão de covariação de um aluno

é uma condição necessária, mas não suficiente para ajudar o aluno a subir nessa ideia. Um professor que procura fazer tal avaliação da compreensão do aluno deve selecionar e oferecer tarefas e perguntas que proporcionem oportunidades para os alunos desenvolverem compreensão conceitual de vários contextos de covariância.

As famílias de funções é a terceira grande ideia, ela fala a respeito das mais variadas famílias que uma função possui, podendo ser agrupadas e organizadas de acordo com suas características. Podemos compreender as famílias de funções como sendo os tipos de função estudados no 1º ano do ensino médio, por exemplo função afim, quadrática, exponencial, entre outras. Para que o aluno perceba e saiba distinguir as características de uma família de funções é necessário que ele tenha contato com elas, tentando encontrar padrões que mudam de uma situação para outra.

Para Cooney, Beckmann e Lloyd (2010 p. 140), “as funções podem ser classificadas em diferentes famílias de funções, cada uma com suas próprias características únicas. Diferentes famílias podem ser usadas para modelar diferentes mundos reais fenômenos”.

A partir dessa afirmação percebemos que existem famílias de funções dentro de outras famílias, pois sempre teremos algum caso particular de função em um grupo maior. Tomamos como exemplo a função afim, que é uma família de funções, já a função constante é um tipo de função afim, formando uma subfamília.

No ensino de Matemática no Brasil, as famílias de funções mais frequentemente estudadas e exploradas são a função afim, função quadrática, função exponencial e as funções trigonométricas. Cooney, Beckmann e Lloyd (2010) incluem as sequências aritmética e geométrica como sendo mais duas famílias de funções, mesmo essas duas já estando incluídas dentro das funções afim e quadrática, respectivamente, sabendo que as sequências possuem domínios no conjunto dos números inteiros positivos.

Mais uma ideia considerada essencial é a combinação e transformação de função, que é a quarta ideia, é uma técnica bastante utilizada na Matemática, principalmente a combinação aritmética. A partir desse procedimento muitas funções podem ser combinadas pelas operações fundamentais da Matemática. Nessa grande ideia, podemos também, decompor e transformar funções para estudar suas relações de várias maneiras diferentes.

Para Cooney, Beckmann e Lloyd (2010), as funções podem ser combinadas pela adição, subtração, multiplicação, divisão e composição elas. Às vezes, as funções têm inversas. As funções podem frequentemente ser analisadas a partir da transformação de outras funções.

Segundo Silva (2013, p. 79), “A composição e decomposição ou combinação e transformação de números, termos, equações, funções e figuras são processos bastante utilizados na compreensão de um conceito matemático”. Contudo, entendemos a importância dessa grande ideia para o ensino de função.

Ainda de acordo com a combinação e transformação de função, Brandão (2014) afirma que as funções podem ser vistas de diferentes maneiras podendo facilitar o entendimento pelos alunos. Esta técnica é muito usada em toda a Matemática, em que desmontamos e analisamos, por partes, as funções que, por sua vez podem ser combinadas, divididas e transformadas em várias formas diferentes, permitindo fazer uma análise mais detalhada

A última grande ideia, denominada de representações múltiplas, é a que mais usamos no nosso trabalho e merece destaque pois em quase todas as situações problemas trabalhados na nossa pesquisa estávamos interessados que os alunos compreendessem essa grande ideia a partir da exploração de problemas.

As funções podem ser representadas de várias maneiras, incluindo a algébrica (simbólica), gráfica, representações verbais e tabulares. Conexões entre essas diferentes representações são importantes para estudar relações e mudanças (COONEY, BECKMANN E LLOYD, 2010, p.141).

Essa grande ideia das representações múltiplas facilitou e contribuiu para a aplicação das oficinas, pois quando se faz uso de representações múltiplas e a exploração de problemas os resultados são satisfatórios e a aprendizagem é alcançada.

Cada uma das representações são modos distintos de apresentar funções, contribuindo para que o aluno progrida na compreensão total desse conceito.

Silva (2013, p. 84) aponta que:

Cada uma dessas cinco representações incorpora modos diferentes de comunicação da mesma regra funcional ou de correspondência. É importante perceber que cada representação expressa a mesma ideia, ainda que forneça um modo diferente de olhar ou pensar sobre a função. O valor de cada representação está no modo pelo qual ela ajuda a ver e compreender a função de um modo diferente do que as outras fazem. (SILVA, 2013, p.84)

Por entendermos a importância das representações múltiplas, tanto quanto a ideia do conceito de função, trazemos o quadro abaixo com uma síntese extraída de Brandão (2014, p. 40). Para situar o nosso leitor, nesse quadro são apontadas as vantagens de cada uma dessas representações múltiplas de função.

Quadro 3: Resumo de vantagens das representações múltiplas

Representação verbal	Representação tabular	Representação algébrica	Representação gráfica
Essa representação	As tabelas ajudam	Esta é concisa,	Proporciona uma

<p>normalmente associada à apresentação do problema e à interpretação final dos resultados obtidos, dá ênfase à conexão da Matemática com outras áreas do conhecimento e entre a Matemática e o cotidiano.</p>	<p>os alunos a passar do mundo concreto da aritmética, onde os problemas envolvem números específicos, para o mundo abstrato da álgebra, onde as quantidades variam. As tabelas dão aos alunos uma experiência tangível em que as variáveis são números que se alteram e em que o valor das expressões varia como o resultado.</p>	<p>geral e efetiva na apresentação de padrões e modelos matemáticos, por vezes é o único método de justificar ou efetuar generalizações.</p>	<p>imagem clara de uma função de variável. É uma forma de representação intuitiva e apelativa para os alunos que gostam de uma análise visual.</p>
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Fonte: Brandão (2014, p. 40)

Trabalhamos nessa pesquisa com as cinco grandes ideias e a partir delas tivemos a oportunidade de fundamentar o nosso trabalho, percebendo o quanto essas ideias são importantes para desenvolvermos as atividades com os alunos. Cada uma dessas ideias está presente no desenvolvimento do conteúdo de funções para atingirmos a compreensão desse conceito de forma mais ampla e significativa, diante disso são indiscutíveis as contribuições das cinco grandes ideias propostas por Cooney, Beckmann e Lloyd (2010) para o ensino de função.

Na seção seguinte, remetemos a nossa discussão para o ensino de função afim, apontaremos alguns conceitos e aplicações encontradas em livros didáticos, para através disso fazermos algumas comparações sobre o conceito e a forma do trabalho com a função nos livros didáticos. Entendemos que, por se tratar de uma pesquisa com alunos, é importante entender como esse conceito está sendo abordado nos livros, sabendo que na maioria das escolas o livro é material didático mais utilizado.

5 O PERCURSO METODOLÓGICO DA PESQUISA

Apresentamos, agora, a descrição dos procedimentos metodológicos, os quais utilizamos em nossa pesquisa, ou seja, o tipo de pesquisa, o local que realizamos a pesquisa, os participantes, os instrumentos de coleta de dados e a forma como foi feita a análise dos dados.

A metodologia utilizada é de cunho qualitativo na modalidade de pesquisa pedagógica. Como metodologia escolhida para a aplicação e desenvolvimento das atividades propostas para a sala de aula, utilizamos a Exploração, Resolução e Proposição de Problemas, desenvolvida com a aplicação de uma sucessão de atividades sobre o conteúdo de função afim, fazendo uso da plataforma Desmos, como um recurso que visa contribuir com o ensino e aprendizagem de função.

Nossa pesquisa foi aplicada para um grupo de alunos do 1º ano do Ensino Médio de uma escola da rede estadual da cidade de Monteiro – PB, feita, exclusivamente, de forma remota.

O estudo se desenvolveu em três etapas específicas e sequenciais: 1) identificação do local onde os participantes estudam; 2) levantamento da população e amostra do estudo, explicitando como se deu o processo de escolha dos envolvidos; 3) aplicação empírica das atividades através da metodologia escolhida mediada pelo Desmos.

Para Bogdan & Biklen (1994, p. 16), numa pesquisa de caráter qualitativa “os dados recolhidos são designados por qualitativos, o que significa ricos em pormenores descritivos relativamente a pessoas, locais e conversas, e de complexo tratamento estatístico”. Segundo os autores, são atribuídas algumas particularidades que caracterizam a pesquisa qualitativa, são elas:

- (i) A fonte direta de dados é o ambiente natural, o investigador torna-se o instrumento principal;
- (ii) Os dados são recolhidos em uma situação e complementados pela informação que se obtém através do contato direto e são predominantemente descritivos;
- (iii) A investigação qualitativa interessa-se mais nos processos do que nos resultados ou produtos que dela decorrem;
- (iv) A análise dos dados segue um processo indutivo, não se pretendendo confirmar hipóteses prévias;

- (v) A compreensão do “significado” que os participantes atribuem às suas experiências assume uma importância vital na abordagem qualitativa (BOGDAN; BIKLEN, 1994, pp.47-50).

Segundo Flick (2013, p. 23), na pesquisa qualitativa “o objetivo é menos testar o que é conhecido do que descobrir novos aspectos na situação que está sendo estudada e desenvolver hipóteses ou uma teoria a partir dessas descobertas”. Possui um caráter investigativo de aspectos característicos dos acontecimentos, não possui a preocupação com dados numéricos ou estatísticos e o local onde se desenvolve a pesquisa é a principal fonte para a coleta de dados.

Ainda sobre o trabalho a ser desenvolvido na perspectiva da pesquisa qualitativa, é necessário entendermos sobre as condições que esse tipo de pesquisa nos permite. Diante disso, Yin (2016, p. 5) mostra que a pesquisa qualitativa:

Permite a realização de estudos aprofundados sobre uma ampla variedade de tópicos, incluindo seus favoritos, em termos simples e cotidianos. Além disso, a pesquisa qualitativa oferece maior liberdade na seleção de temas de interesse, porque os outros métodos de pesquisa tendem a ser limitados.

Na pesquisa pedagógica, o pesquisador é o próprio professor e pesquisa a sua própria sala de aula, no nosso caso, de forma remota. O objeto de estudo da pesquisa pedagógica é a sala de aula, em uma visão mais ampla, há o envolvimento de profissionais. Assim, na nossa pesquisa, é o professor-pesquisador dando suporte à sua própria prática pedagógica e à qualidade no ensino de Matemática. Desde o momento no qual o professor se propõe a realizar a pesquisa na sua própria sala de aula, essa iniciativa contribui para proporcionar a ele fazer conhecimento de sua própria realidade profissional, a qual implicará numa reavaliação de sua prática pedagógica no decorrer da pesquisa.

O modelo de pesquisa pedagógica está apoiado em propósitos e ideais que se resumem a dois conceitos fundamentais, a saber:

Um deles diz respeito a melhorar a percepção do papel e da identidade profissional dos professores. O outro é a ideia de que o envolvimento com a pesquisa pedagógica pode contribuir para um ensino e uma aprendizagem de melhor qualidade nas salas de aula. (LANKSHEAR; KNOBEL, 2008, p.14)

A parte empírica de toda a nossa pesquisa ocorreu de forma não presencial, na sala de aula remota, com a participação do professor pesquisando fenômenos de sua própria prática pedagógica, em que foi o mediador do processo de ensino dos alunos, sendo estes compreendidos como peças fundamentais desse processo. Sabemos dos desafios encontrados, mas, com um planejamento de ensino que levou em consideração os diferentes aspectos envolvendo o contexto e a realidade do aluno e do professor, conseguimos desenvolver a parte

empírica e obter resultados relevantes para a nossa pesquisa, contribuindo para o ensino e para a aprendizagem da Matemática no cenário atual.

Ainda em concordância com esses autores, a pesquisa pedagógica apresenta, como objetivo, fazer com que o professor-pesquisador contribua com a melhora de sua prática pedagógica e a sua identidade enquanto professor, diante da necessidade de investigar e ser capaz de refletir sobre sua própria prática, contribuindo, dessa forma, para obter um aperfeiçoamento em seus conhecimentos e um olhar mais detalhado sobre a sala de aula de forma remota. Nessa perspectiva,

De forma alternativa, a pesquisa pedagógica propicia aos professores a oportunidade de testar a eficácia de intervenções que eles acreditam que possam melhorar os resultados da aprendizagem de alguns, ou mesmo de todos os seus alunos. Onde as intervenções têm sucesso, os professores que conduziram a pesquisa original, e outros que dela tomem conhecimento, podem conseguir implementar e adaptar essas intervenções, para obter a melhoria. (LANKSHEAR; KNOBEL, 2008, p.14).

A abordagem de pesquisa pedagógica pode ser realizada na sala de aula como também em qualquer outro ambiente, desde que seja possível permitir ao professor-pesquisador subsídios necessários e oportunos para alcançar os objetivos de ensino estabelecidos.

A pesquisa pedagógica se propõe a observar e refletir sobre a própria prática. Segundo Lankshear e Knobel (2008, p.18):

Pode envolver a observação de sua própria sala de aula, a reflexão sistemática das notas de campo contendo descrições dessas aulas sobre as suas próprias experiências elucidadas através das questões teóricas ou conceituais que sustentam tal pesquisa. E finalmente, pode ser fundamentada por meio dos dados coletados através das aulas ministradas implicando numa variedade potencial de informações, interpretações e considerações relevantes ao campo de pesquisa realizada.

Com isso, os professores se incluem como pesquisadores para colaborar e aperfeiçoar o seu profissionalismo e desenvolvimento de sua prática, além de favorecer o conhecimento da sua realidade escolar e ter a capacidade de transformá-la. Também é possível, nesse sentido, que o professor pense sobre a sua prática pedagógica, construindo formas e maneiras de melhorar, contribuindo para o seu crescimento enquanto educador.

Os autores defendem que a pesquisa pedagógica não venha a ser conduzida de maneira independente ao envolvimento acadêmico formal, destacando que:

Não vemos por que razão os professores não possam engajar-se em programas acadêmicos de pós-graduação, para conduzir pesquisas relevantes às próprias necessidades e aos interesses como educadores. O ponto crucial é que os propósitos ou os objetos da pesquisa pedagógica devem fluir de questões, problemas ou preocupações autênticas (ou percebidos) pelos próprios professores (LANKSHEAR; KNOBEL, 2008, p.18).

Na pesquisa pedagógica, a observação e a reflexão visam a entender como as coisas acontecem. Para Lankshear e Knobel (2008, p. 18), com relação à postura de um pesquisador,

eles articulam bem a função e o papel desempenhado na pesquisa, argumentando que “um pesquisador sério não está meramente interessado em algo que funcione, mas em entender como e por que funciona e/ou como precisa ser adaptado para funcionar em outras circunstâncias ou se aplicar a outros casos”.

Embasados nesses autores, detectamos a importância do pensar na própria prática, não se detendo apenas em alcançar o objetivo, mas também em refletir sobre os caminhos que foram percorridos, pensando em outras possibilidades de cenário com outros indivíduos, ambientes e situações em que sejam mais desafiadoras. Esse, de fato é o trabalho de um professor preocupado com o aprendizado do seu aluno.

As atividades que foram elaboradas e aplicadas na nossa pesquisa tiveram como finalidade levar o aluno à compreensão e ao entendimento do conceito de função e, desta forma, melhorar o seu aprendizado em relação a esse assunto. As atividades foram desenvolvidas com abordagem nas representações múltiplas de uma função, como a verbal, tabular, algébrica e gráfica, propondo articulações entre elas e utilizando a plataforma Desmos.

Prezamos por trazer atividades que estivessem relacionadas ao cotidiano dos alunos, para que eles fossem capazes de identificar a presença do conteúdo, que é bastante importante no currículo de Matemática e a sua aplicabilidade que está ligada diretamente às ações mais simples do dia a dia.

O trabalho de forma remota foi realizado indicando, no primeiro encontro, como seriam desenvolvidas as aulas quanto à comunicação: síncrona (ou seja, todos estavam conectados à *internet, on-line* ao mesmo tempo) e também assíncrona (com atividades e tarefas *off-line*) com posterior discussão com os alunos e o professor; e quanto aos recursos e às mídias que dizem respeito ao suporte tecnológico (computador; *smartphone; tablet*) que todos teriam que dispor para a realização das aulas.

No total, foram realizados dez encontros, com duração máxima de duas horas cada, totalizando uma carga horária de 20 horas, sendo, no primeiro dia, um encontro de apresentação da pesquisa e ambientação da plataforma Desmos, fazendo uma breve explicação sobre os comandos do aplicativo e para conhecer os alunos e suas expectativas para com o desenvolvimento das aulas, trazendo algumas indagações iniciais. Nesse encontro, já aplicamos algumas situações que envolviam o conceito de função, para, a partir disso, fazermos a utilização da plataforma Desmos.

Os alunos que participaram da oficina foram convidados, através da professora titular, que, gentilmente, divulgou sobre a aplicação das oficinas e alguns alunos optaram por

participar, essa foi a melhor forma que encontramos para aplicarmos a nossa pesquisa, pois, entendendo o atual cenário que vivemos, seria impossível aplicar de forma presencial.

As oficinas foram realizadas durante 5 semanas, sempre nas quintas-feiras e sextas-feiras, das 13h às 15h. O primeiro encontro foi realizado no dia 22 de outubro de 2020 e o último encontro no dia 27 de novembro de 2020, totalizando dez encontros; sendo que, nos dias 12 e 13 de novembro, não houve encontro, pois, o professor-pesquisador estava a serviço da justiça eleitoral do seu município.

Encontramos dificuldades em formar uma turma para aplicação das atividades, mas, com esforço e dedicação, conseguimos formar um grupo de *WhatsaApp*, com um total de 16 alunos. Entretanto, no primeiro dia, participaram apenas dez alunos, pois alguns nos informaram na semana de início que não seria possível mais participar e, ao decorrer dos outros encontros, esse número veio a diminuir.

Em cada um dos encontros, foram aplicadas atividades fazendo uso da metodologia de ensino-aprendizagem através da exploração, resolução e proposição de problemas, apoiada na plataforma digital Desmos, com a finalidade de contribuir com a aprendizagem do conceito de função pelos alunos, identificando as contribuições dessa metodologia para o ensino de função nas aulas remotas com uma abordagem tecnológica.

Durante a realização de uma pesquisa, sabemos que surgem alguns questionamentos no decorrer da prática didática, mais comumente denominado trabalho de campo. Precisamos, enquanto pesquisadores, dar conta dessas questões para poder encerrar as etapas da pesquisa a qual, frequentemente, nos levam a um momento de reflexão em torno das questões confrontadas, falhas cometidas, algumas escolhas feitas e os impasses encontrados.

Para a coleta de dados na sala de aula, foram utilizadas as notas de aulas, as descrições e produções dos alunos, bem como o diálogo entre professor-aluno através do grupo criado no aplicativo *WhatsApp*.

Utilizamos os registros e as produções dos alunos a partir de *prints*, os quais foram tirados nos momentos de realização das atividades, nas plenárias, apresentações dos alunos, sempre prezando pela naturalidade dos fatos. O professor-pesquisador, nesta ação, assumiu um papel de mediador do processo de aprendizagem, não de transmissor de informações, sempre indagando e desafiando os alunos, levando-os a pensar sobre as relações do conteúdo e a exploração, resolução e proposição de novos problemas a partir de situações matemáticas, permitindo aos alunos serem autônomos, detentores dos seus próprios conhecimentos.

Encontramos algumas dificuldades no decorrer da aplicação das oficinas, devido a problemas que não estavam ao nosso alcance resolvê-los, mas sempre prezamos pela eficácia do trabalho desenvolvido e pela autenticidade e veracidade das informações.

No próximo capítulo, expomos as nossas análises a partir deste percurso metodológico que acabamos de apresentar.

6 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DAS ATIVIDADES NO ENSINO REMOTO VIA EXPLORAÇÃO, RESOLUÇÃO E PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS USANDO O APLICATIVO DESMOS

Neste capítulo, apresentamos as atividades trabalhadas em sala de aula. É feita uma descrição detalhada com as respectivas análises dos dez encontros que realizamos com os alunos que se propuseram a participar do estudo. Diante disso, construímos um texto em que temos um olhar detalhado e reflexivo dos diversos acontecimentos que envolveram o trabalho com os alunos no ensino remoto.

As atividades foram divididas em dez encontros, as quais foram sendo adaptadas a cada encontro, no momento da aplicação para os participantes, pois entendíamos que era essencial alterarmos um detalhe ou outro do nosso planejamento inicial.

A seguir, trazemos um quadro mostrando o que fizemos nos dez encontros, apresentando o conteúdo trabalhado, os objetivos a serem alcançados e as ideias essenciais de funções pretendidas para aquela atividade; sendo assim, situando o leitor sobre o que foi desenvolvido nessas atividades. Em seguida, trazemos a descrição da dinâmica de atividades e os dois primeiros encontros, tecemos as análises e, no final, fazemos uma conclusão sobre o que alcançamos diante da realização do 1° e 2° encontros.

Quadro 4: Quadro demonstrativo dos 10 encontros

Encontro	Objetivo	Conteúdo trabalhado	Ideias essenciais de função
1° ENCONTRO	Explorar e estabelecer relações entre grandezas e representações de função.	Introdução à ideia de função.	Conceito de função afim, taxa de variação e covariação, representações de funções e famílias de funções.
2° ENCONTRO	Compreender o conceito de função afim e distinguir os	Função afim	Conceito de função afim, taxa de variação e covariação

	tipos de variáveis.		e representações de funções.
3° ENCONTRO	Propor, através da competição, o envolvimento dos alunos com o professor e os demais participantes.	Funções	Conceito de função afim, taxa de variação e covariação, famílias de funções, combinação e transformação de funções e representações de funções.
4° ENCONTRO	Entender a variação entre duas grandezas fazendo relações a partir de uma situação-problema da realidade do aluno.	Função Afim (Variação e Gráfico)	Conceito de função afim, taxa de variação e covariação e representações de funções.
5° ENCONTRO	Compreender, a partir de uma situação, o domínio e o crescimento e decrescimento do gráfico de uma função afim.	Domínio e gráfico de uma função afim	Conceito de função, representações de função e taxa de variação e covariação.
6° ENCONTRO	Identificar, a partir de uma situação, os valores do domínio e imagem da função e a taxa de variação.	Domínio, imagem e gráfico de uma função afim.	Conceito de função, taxa de variação e covariação, combinação e transformação de

			funções e representações de funções.
7° ENCONTRO	Refletir sobre múltiplas conexões não matemáticas com temáticas de saúde, formulando expressões algébricas.	Domínio, imagem, crescimento, decrescimento e gráfico de uma função afim.	Conceito de função, representações de função e taxa de variação e covariação.
8° ENCONTRO	Compreender a função afim fazendo uso das representações múltiplas.	Função Afim	Conceito de função afim, taxa de variação e covariação, combinação e transformação de funções e representações de funções.
9° ENCONTRO	Compreender a função afim em diferentes representações.	Função Afim	Conceito de função; covariação e taxa de variação; combinação e transformação de funções e representações múltiplas de função.
10° ENCONTRO	Perceber a função afim em contextos que representam mais de uma	Função Afim	Conceito de função; covariação e taxa de variação;

	representação e diferenciar as expressões matemáticas que são expressas por cada situação.		combinação e transformação de funções e representações múltiplas de função.
--	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------	--	-----------------------------------------------------------------------------------------

Fonte: Autoria própria.

A seguir, apresentamos como as atividades foram desenvolvidas em cada encontro.

Conhecendo a dinâmica das atividades

Para cada encontro, tínhamos estabelecido o conteúdo a ser abordado, como também os objetivos a serem alcançados e as ideias essenciais do conceito de função que estariam presentes naquela atividade. A quantidade de atividades não foi determinada para cada encontro, iríamos adequando tendo em vista a necessidade e o desenvolvimento da turma.

As oficinas foram realizadas durante cinco semanas, ocorrendo sempre nas quintas-feiras e sextas-feiras, das 13 h às 15 h. Esses dias foram escolhidos, pois estava de acordo com a disponibilidade dos participantes e do professor-pesquisador, uma vez que ele ministrava aulas *on-line* nos outros dias da semana, evidenciando a escolha por esses dias.

Iniciamos as oficinas aplicadas de forma *on-line*, via plataforma do *Google Meet*, no dia 22 de outubro de 2020. Para isso, foi criado um grupo no *WhatsApp*, no qual adicionamos todos os participantes, esse grupo seria para repasses de informações e um meio de conversação entre os participantes e o pesquisador. O grupo serviria também para disponibilizarmos o *link* das nossas oficinas.

A professora titular da turma pediu para também participar do grupo do *WhatsApp*, alegando que os alunos poderiam fazer uso de conteúdos inadequados no grupo ou, até mesmo, ficarem receosos em participar das oficinas. Não achamos nenhum incômodo e ela foi adicionada ao grupo.

Inicialmente, contávamos com a confirmação de 16 participantes, mas já imaginávamos que o número viria a diminuir, pois, de acordo com a professora, os participantes poderiam chegar a não participar, seja pela disponibilidade, como também por alguns fatores externos que poderiam acarretar a desistência dos mesmos nos encontros determinados.

O *link* do nosso primeiro encontro foi disponibilizado no grupo dez minutos antes do início da aula. Assim, os alunos foram logo pedindo acesso para participar. Neste primeiro encontro, tivemos a presença de dez participantes. Após as boas-vindas e agradecimentos pelos alunos terem aceitado o convite em participar das oficinas, fizemos a nossa apresentação falando o porquê de estarmos com esse propósito de aplicar essas oficinas, apresentando a nossa pesquisa. Na ocasião, também discutimos algumas regras que seriam imprescindíveis para o bom desempenho e convivência em nossas aulas. Ficaram decididos, com os alunos, os seguintes pontos:

- Precisaríamos estabelecer uma relação de respeito e confiança uns com os outros;
- Solicitamos dos alunos atenção quando estivéssemos expondo uma situação;
- Quando não entendessem alguma coisa perguntassem ao professor, pois só avançaríamos caso todos compreendessem;
- Pedimos para que eles interagissem, seja com uma pergunta, questionamento, pois entendíamos que o primeiro contato conosco estava sendo de forma *on-line* e era um professor ainda desconhecido para eles;
- Fizemos um acordo para que tudo que eles fizessem fosse compartilhado com o professor-pesquisador.

Em seguida disponibilizamos um *link* para que eles acessassem e respondessem a uma pergunta. Esse foi um momento para sabermos o que os alunos estavam sentindo instantes antes de iniciar a oficina. A pergunta foi: O que você está sentindo nesse momento? Os alunos respondiam e formavam uma nuvem de palavras. Entre as palavras, eles escreveram: feliz na paz, entusiasmo, tranquilidade, gratidão, estou me sentindo bem, entre outras. Esse momento foi só para entender o que eles pensavam naquele instante, para, assim, iniciarmos o que estava proposto para aquele dia.

Com isso, iniciamos o nosso primeiro encontro, apresentando o Desmos, aplicativo esse que já tinha sido informado que seria trabalhado durante as nossas oficinas. Fizemos uma minuciosa apresentação do Desmos, falando do surgimento dessa ferramenta, mostrando algumas construções feitas nele e falando a respeito de conteúdos matemáticos que poderíamos trabalhar usando esse aplicativo. Em seguida, informamos que o assunto a ser trabalhado com eles seria o de função, conteúdo esse que eles já tinham estudado, tendo em vista já estarmos no mês de outubro.

Depois disso, apresentamos a primeira atividade, pedimos para que todos lessem o enunciado do problema que depois iríamos fazer alguns questionamentos a respeito.

Nomeamos os alunos como A1, A2, A3, A4, ..., A10, a fim de preservar suas identidades e adotamos a sigla PP para nos referirmos ao professor-pesquisador.

Fizemos a análise de cada atividade por encontros, sendo que, durante a realização da atividade, tecemos considerações a respeito de como foi e o que encontramos que poderia ser importante para a discussão. Os direcionamentos apontados serviram para aperfeiçoar ou modificar o roteiro de atividades dos encontros posteriores.

DESENVOLVIMENTO DA ATIVIDADE DO 1º ENCONTRO (22/10/2020)

TÍTULO: A função afim e o aplicativo desmos.

CONTEÚDOS: Conceito de função.

OBJETIVOS:

- Proporcionar aos alunos, a partir de uma situação-problema, o estabelecimento de relações sobre as grandezas envolvidas e, a partir disso, formular uma expressão algébrica para representar tal situação.
- Entender a taxa de variação e covariação de uma função.

IDEIAS ESSENCIAIS: Conceito de função afim, taxa de variação e covariação e representações de funções.

1. Marta é dona de uma padaria e está oferecendo a seguinte promoção aos seus clientes:

PÃO FRANCÊS: R\$ 7,50 O QUILOGRAMA

Aurora e Margarida estão indo à padaria e comprará, respectivamente, 2,5 kg e 3 kg de pão. Analisando essa situação, faça o que se pede:

- a) Quais grandezas estão envolvidas nessa situação? O que podemos dizer a respeito do preço pago e a quantidade de pão?*
- b) Quanto Aurora e Margarida irão pagar pela quantidade de pães que levarão?*
- c) É possível escrever uma expressão matemática que relacione a quantidade de pão francês, em quilogramas, e o preço a pagar, em reais? Se sim, qual?*

- d) *Uma pessoa, em certo dia, comprou pães na padaria de Marta e pagou com uma cédula de R\$ 50,00 e recebeu de troco a quantia de R\$ 3,50. Pergunta-se: Qual a quantidade de pães que essa pessoa comprou?*
- e) *Elabore um problema a partir das informações citadas nessa situação.*
- f) *Utilizando o Desmos construa uma tabela com as quantidades, 0,5 kg; 1 kg; 2 kg; 2,8 kg; 4 kg e 5 kg. O que você pode observar?*

(Elaborada pelo autor)

O objetivo da Atividade 1 era proporcionar aos alunos, a partir de uma situação do cotidiano, a identificação das grandezas envolvidas na situação, fazendo lembrar as ideias associadas ao conceito e as representações múltiplas de uma função. Um participante respondeu que a grandeza envolvida nessa situação seria o quilograma.

Diante disso, indagamos: “Só existe essa grandeza?” E ele respondeu que era o quilograma e o grama. Nas respostas dos alunos, percebemos apenas que eles respondiam que a grandeza seria o quilograma, mas, a partir dos questionamentos feitos pelo professor, eles conseguiram chegar ao resultado.

Análise

Percebemos que o papel do professor é bastante importante no processo de ensino e aprendizagem de um conteúdo matemático, não sendo encarregado de dar respostas; mas, sim, de indagar os seus alunos a chegarem a um resultado que seja significativo para chegar ao que é esperado. Muitas vezes, os alunos não chegam ao objetivo do problema, porque não lhes é permitido, por alguma interferência do professor ou, até mesmo, por não ter questionamentos que lhes façam compreender e encontrar o caminho para se chegar à solução daquele problema. Entendemos que, se não fosse a condução dada pelo professor, levaria bem mais tempo para os alunos chegarem à solução do primeiro exercício.

O aluno 2 fez um pequeno questionamento com relação ao item “a” do problema.

A2: Falar a respeito do preço do pão de Aurora ou de Margarida?

PP: Veja o que está pedindo.

A2: “O que podemos dizer a respeito do preço pago e a quantidade de pão?”

PP: Está especificando se é de Aurora ou de Margarida?

A2: Não.

PP: Então, o que dizer?

A2: O preço vai depender do “tanto” de quilo.

PP: Isso, a quantidade.

No momento da discussão com o grupo sobre esse questionamento, percebemos que eles ainda apresentavam pouco conhecimento a respeito do que é variável e a taxa de variação, a fim de tentar descrever como as grandezas estão relacionadas com quantidades que variam juntas e compreender quais grandezas estão envolvidas na situação, sendo capazes de entender o processo de variação entre duas grandezas.

Com relação ao item “b”, todos os alunos conseguiram chegar ao resultado previsto, a partir da exploração que foi feita e das indagações mediadas pelo professor, mas, mesmo assim, sentimos uma dificuldade em alguns alunos ao efetuarem as operações corretas. Observemos a exploração feita por um aluno:

PP: Se for 2 kg, quanto Aurora pagará?

A4: $7,50 + 7,50$, que é 15.

PP: E meio quilo?

A4: A metade de 7,50.

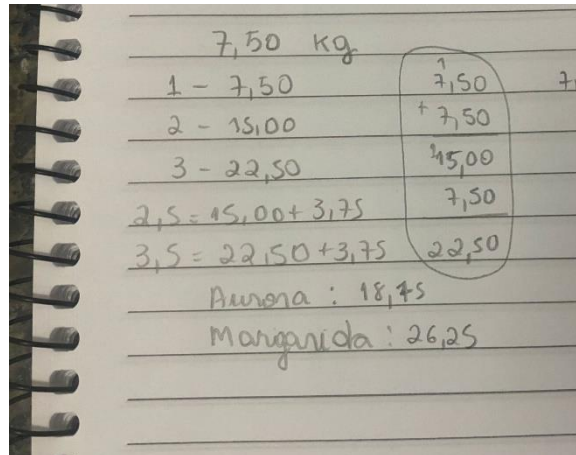
PP: Quanto é?

A4: Ahhh... Entendi.

A4: Margarida vai pagar $7,50 + 7,50 + 7,50$, que dá 22,50, e Aurora vai ser o preço de 7,50 duas vezes mais a metade de um, que é 3,75; e tudo dá 18,75.

Vejamos a resposta do aluno. Mesmo chegando ao resultado, percebe-se que ele conseguiu a partir dos questionamentos para adotar outras quantidades de quilograma do pão, adicionando sempre o valor de 1 kg.

Figura 1: Resolução do item b pelo Aluno A4



Fonte: Acervo do pesquisador.

Mesmo com as dificuldades, o aluno A4 conseguiu chegar ao valor a ser pago por Aurora e Margarida. Sabemos que, pelo fato de ser uma multiplicação de dois números decimais, os alunos chegaram à conclusão de que fazendo por partes seria melhor. Ainda detectamos que eles estão habituados a colocar apenas as respostas e são poucos aqueles que deixam o cálculo registrado.

Na aplicação dessa atividade, sentimos que, no item “c”, os alunos apresentaram mais dificuldades, pois notamos que eles não apresentavam familiaridade em escrever uma expressão algébrica para representar a situação dada. Esse foi o item no qual nos alongamos mais, pois foi preciso intervir e apresentar alguns exemplos para irmos discutindo até chegar à expressão que representava a situação:

PP: O que está aparecendo em todas as situações?

A1: O preço de 7,50.

PP: E o que você está encontrando?

A1: O valor.

PP: Que valor?

A1: O que irei pagar.

A3: O preço não vai modificar, vai ser de 7,50; vai ser sempre fixo, né?

PP: É isso? E o que está variando?

A3: Aí vai variar o “tanto” que a pessoa vai querer, o preço será fixo e o valor vai ser de acordo com a multiplicação.

PP: Então o que está variando?

A1: O preço e o “tanto” de pão que irá comprar.

PP: Tanto é quantidade de quilos, certo?

A3: É isso, me confundi.

Análise

A partir da discussão acerca do item “c”, sentimos a grande dificuldade que os alunos apresentavam quando eram solicitados para generalizar uma situação, em que todos conseguem chegar ao resultado quando utilizamos um valor numérico, mas, quando é pedido para que eles escrevam uma expressão para qualquer valor, algo fica vago, sem resposta e foi a partir disso que intervimos com alguns exemplos para que fossem generalizando para qualquer quantidade do quilograma de pão. Sentimos a necessidade de generalizar a partir de exemplos expostos em uma situação que, ao nosso entender, os alunos já deveriam estar em condições para tal formulação, pois sabemos que o conteúdo de função foi dado no início do ano letivo, segundo o que a professora nos relatou. Mas, esse é um obstáculo a ser vencido, pois o propósito é que eles entendam o conceito de função a partir de situações-problemas. Verificamos que eles apresentam condições, só precisam de incentivo e paciência, pois é perceptível que poucos têm a vontade de pensar a respeito do problema e explorá-lo, de forma a construir o conceito do conteúdo trabalhado e, no trabalho com a exploração de problemas, eles precisam ir muito além, como argumenta Andrade (1998; 2017).

Já com relação ao item “d”, notamos que todos chegaram ao resultado, mas que usaram o método de ir juntando o valor do quilograma até chegar ao valor pago. Nesse instante, percebemos que alguns usaram a calculadora e que um dos alunos foi fazendo por tentativas, multiplicando, subtraindo e somando até chegar ao resultado. Foi uma das resoluções mais interessantes que recebemos, pois, o aluno desenvolveu vários cálculos para chegar ao resultado, como mostra a Figura 2.

Embora com uma quantidade elevada de cálculos, percebe-se que esse aluno apresenta um raciocínio muito acelerado, pois, mesmo seguindo passo a passo, ele consegue chegar à solução. Algo que nos chamou bastante atenção foi quando ele fez a soma de R\$ 1,50 para chegar ao valor de R\$ 7,50 e conseguiu relacionar que cada uma das parcelas corresponderia a 200, que, no caso, seria um quinto do quilograma, daí entendemos como esse processo está além do trabalho com a Exploração, Resolução e Proposição de Problemas.

Figura 2: Resolução do item “c” pelo Aluno A6

Handwritten mathematical work by student A6. The work includes several calculations and a final conclusion. The calculations are as follows:

$$\begin{array}{r} 50,00 \\ - 3,00 \\ \hline 47,00 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 47,00 - 0,50 = 46,50 \\ 7,50 \\ \times 2 \\ \hline 15,00 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15,00 \\ \times 2 \\ \hline 30,00 \\ + 7,50 \\ \hline 37,50 \\ + 7,50 \\ \hline 45,00 \end{array}$$

Below the calculations, the student writes: $2 + 2 + 2 = 6$ KILOGRAMA. Then, another calculation is shown:

$$\begin{array}{r} 46,50 \\ - 45,00 \\ \hline 1,50 \end{array}$$

Next, a series of subtractions are listed:

$$\begin{array}{r} 1,50 - 200 \\ 1,50 - 200 \\ + 1,50 - 200 \\ 1,50 - 200 \\ 1,50 - 200 \\ \hline 7,50 \end{array}$$

The final conclusion is written as: FOI 6 KILOGRAMA E 200.

Fonte: Acervo do pesquisador.

No item “e”, foi dada uma questão para que os alunos criassem um problema de acordo com as informações da situação apresentada. Nesse momento, constatamos o impacto dos alunos, pois, até então, eles ainda não sabiam como propor um problema a partir de uma situação-problema proposta.

Identificamos que os alunos ficaram sem saber o que realmente era para fazer, pois, até então, eles nunca tinham sido desafiados a elaborar um problema, foi quando intervimos, pedindo para que eles criassem um problema com aquelas informações. Sentíamos a necessidade de nos expressarmos nesse momento, pois para eles essa forma de como estávamos conduzindo era nova e precisávamos explorar mais.

Todos concluíram o quesito, mas apenas três se disponibilizaram a apresentar os problemas para os demais. Reparamos que os problemas se assemelhavam com o que propusemos para eles e um dos problemas foi elaborado com uma mudança das variáveis envolvidas, mas, como ainda estávamos no nosso primeiro contato, não intervimos tanto nas proposições dos alunos.

O último quesito era para fazer utilização do Desmos, construindo uma tabela com as quantidades dadas. De início, eles não compreenderam, necessitamos apresentar a janela do Desmos e explicar novamente, sendo assim, todos acessaram. Em seguida, um aluno entrou em debate com o professor:

A5: Professor, onde está isso?

PP: O que o problema está pedindo?

A5: Tabela, mas o que vou colocar nas partes?

PP: Os valores dados representam x ou y?

A5: x.

PP: E quem é y?

A5: 7,5x

PP: Pois preencha a tabela.

A5: Ah, entendi.

Análise

A partir dessa questão, houve alguns questionamentos, pois, ao digitarem 7,5x na tabela, o aplicativo não reconhecia; foi quando explicamos que a vírgula deveria ser substituída pelo ponto, quando todos perceberam que a segunda coluna estava sendo preenchida de acordo com a primeira coluna. À medida que os alunos iam construindo a tabela, descobriam que, no plano cartesiano, aparecia um ponto com coordenadas correspondentes àqueles valores que estavam na linha, com isso indagávamos aos alunos o que isso significava e eles relataram que eram os valores de x e y, que são esses valores usados para construir o gráfico. Ficamos felizes, pois, com os questionamentos, os alunos conseguiram alcançar a aprendizagem e isso é gratificante para o professor.

Em conformidade com isso, Onuchic e Allevato (2011, p. 85) afirmam que os professores “sentem-se gratificados com a constatação de que os alunos desenvolvem a compreensão por seus próprios raciocínios”. Com a utilização do Desmos, os alunos relataram que não teriam que usar mais calculadora, já que o aplicativo daria a resposta sem eles terem que fazer os cálculos. Diante disso, constatou-se que os alunos estavam se interessando pelos cálculos a serem realizados e não pelo conceito em si. Tentamos desmistificar esse pensamento dos alunos nos próximos encontros, para que eles percebessem que o aplicativo é uma ferramenta de apoio e o que queremos é que eles alcancem uma aprendizagem de boa qualidade e com significado.

Finalizamos esse primeiro encontro sentindo que a interação entre alunos e professor e alunos e alunos ainda estava um pouco reduzida. Sabemos que o trabalho com a exploração, resolução e proposição de problemas requer uma forte discussão, mas entendemos que por ser ainda o primeiro encontro os alunos se sentiam receosos, mesmo estando por trás de uma câmera. Descobrimos que alguns dos alunos tinham bastante vergonha/receio de enviar fotos das atividades respondidas e preferiam enviar os itens no *WhatsApp* do professor, sendo assim impossível de fazer trocas de experiências entre os demais. São alguns desafios que devemos encontrar alternativas para superá-los.

SEGUNDO ENCONTRO (23/10/2020)

O nosso segundo encontro aconteceu no dia 23 de outubro de 2020. Prosseguimos da mesma forma do primeiro encontro, disponibilizando o *link* minutos antes no grupo do *WhatsApp*. Neste encontro, trabalhamos com duas atividades, reservando um tempo de uma hora para cada uma. Iniciamos o nosso encontro pedindo que todas as questões respondidas fossem enviadas pelo *WhatsApp*, pois precisaríamos acompanhar as resoluções de cada participante. Neste encontro, estiveram presentes nove alunos.

DESENVOLVIMENTO DAS ATIVIDADES DO 2º ENCONTRO

ATIVIDADE 1: A função afim

CONTEÚDOS: Conceito de função.

OBJETIVOS: Compreender o conceito de função e entender a taxa de variação e covariação de uma função.

IDEIAS ESSENCIAIS: Conceito de função afim, taxa de variação e covariação e representações de funções.

1. *Um técnico em informática cobra R\$ 45,00 a visita e um adicional de R\$ 80,00 por hora de trabalho, com valor proporcional no fracionamento da hora.*
 - a) *Quanto o técnico receberia por um serviço de 2,5 h?*
 - b) *Dispondo-se de R\$ 400,00, seria possível contratar esse técnico para um serviço de 4 horas?*
 - c) *Qual é a expressão matemática que representa o valor v , em reais, de um serviço de x horas feito pelo técnico?*
 - d) *Altere os valores e elabore uma nova situação problema. Para isso, formule um texto e escreva a expressão matemática que a representará.*
 - e) *Esboce o gráfico dessa função no desmos.*

(Retirada e adaptada de Iezzi, Dolce et al., 2016).

A atividade tinha como propósito compreender o conceito de função afim, através de uma situação corriqueira em que os alunos fossem capazes de fazer relações de dependência entre as variáveis, entendendo a ideia do valor fixo e o valor que irá variar.

Ao apresentar o Problema 1 para os alunos, pedimos que eles fizessem a leitura detalhada do problema e respondessem às questões propostas. O primeiro questionamento foi do Aluno A3, seguido pelo Aluno A6.

Vejamos o diálogo:

A3: Esse 45, que está aí em cima, ele vale por uma hora, né?

A3: Aí, se passar de uma hora, paga R\$ 80,00.

PP: É? Como você chegou a isso?

A6: Cada hora que é 80,00.

A3: É mesmo.

A6: 45,00 é a visita.

PP: Vejam aí, entendam o problema, para, então, ir às questões.

A partir desses questionamentos, pudemos perceber que as ideias dos alunos ainda estavam confusas. Atribuímos isso à rapidez com que eles leem o problema e se destinam logo à resolução das questões, por isso o pedido para que eles entendessem primeiro o problema, para, depois, refletir sobre o que cada questão está pedindo, chegando, assim, à resolução do quesito.

Nos itens “a” e “b”, os alunos passaram, em média, 25 minutos para chegar ao resultado. Por instantes, pensamos que todos estivessem deixados a oficina, mas o real motivo do silêncio era porque tinha aluno que ainda estava tentando entender o problema para responder. Sentimos que os Alunos A4, A7 e A9 não estavam discutindo nem interagindo na aula, mas, quando indagados por nós, informaram que estavam resolvendo a atividade e que, quando terminassem, iriam enviar por *WhatsApp*. No item “b”, constatamos que todos responderam que sim, que teria como contratar o técnico por quatro horas e que, ainda, sobriaria dinheiro.

Como no primeiro encontro, o item “c” foi uns dos quesitos que demandou mais tempo, pois era para escrever a expressão algébrica que representasse a situação. Alguns alunos relataram que não iam saber, intervimos dizendo que eles precisariam entender o problema, para, assim, existir possibilidades de escrever a expressão Matemática. A partir do entendimento da situação é que eles estariam preparados para escrevê-la. Nessa situação, a maior dificuldade que eles sentiram foi onde que iriam colocar os R\$ 45,00, que era a taxa fixa. Percebemos que, no diálogo entre os alunos e o professor-pesquisador, eles relataram como entenderam a situação:

A6: Por hora, vai ser 80, então, no x, fica 80 e o valor...

PP: Você está escrevendo?

A6: Não, estou falando de cabeça mesmo.

A5: O 45 vai ser v.

PP: E se for 2 horas, eu irei pagar só 45?

A2: O 45,00, no caso, vai ficar fixo, né? Que é uma taxa e o v será vai ser o resultado?

PP: E qual será a expressão?

A2: Espera.

Mesmo depois desses questionamentos e discussões, poucos alunos ainda tinham escrito corretamente a expressão. O Aluno A7 nos enviou a sua resolução e constatamos a dificuldade na representação da expressão.

Figura 3: Expressão matemática do Aluno A7

3 tanto metro
faltava pra che
em 5 m falta R

$$45 + 80 = y$$

$$y = 45 + 80 \cdot x = 80x$$

Fonte: Acervo do pesquisador.

Identificamos que, ao escrever a expressão $y = 45 + 80x$, o aluno iguala a $80x$; deixando os 45 de lado e, em outras resoluções, percebemos também esse mesmo erro. Daí, a importância do papel do professor com mediador.

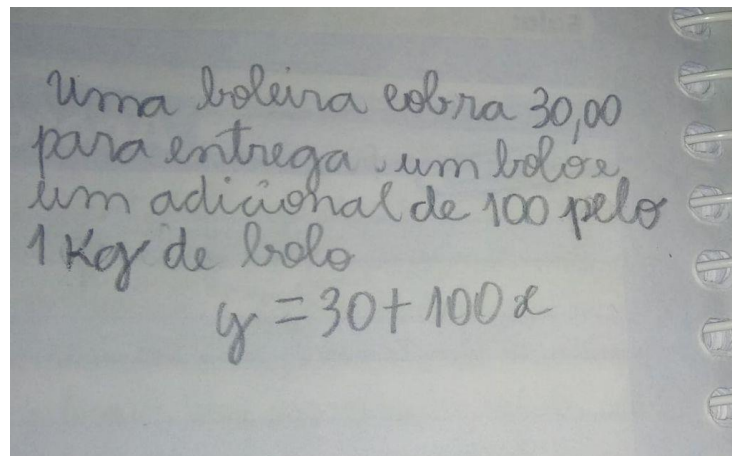
Análise

Na aplicação desta atividade, sentimos que os alunos estavam explorando pouco o problema, só se importando em resolver o problema e o nosso propósito não é apenas resolver o problema, e sim encontrar meios para que eles compreendam significativamente o conceito de função. A partir do quesito “c”, indagamos e explicamos mais um pouco sobre o que é variável dependente e variável independente e também falamos da função afim, foi um

momento dedicado à definição e exemplos, pois sentimos que os alunos precisariam desse momento. O nosso propósito com as atividades era que os alunos pensassem a respeito do conteúdo e fizessem relações com o seu mundo, não nos interessamos somente pelo resultado da questão, pois, de acordo com Cooney, Beckmann e Lloyd (2010), as funções dão oportunidades para os alunos pensar sobre os fatos do mundo real. E a nossa pesquisa busca isso, que os alunos tenham condições de relacionar o conteúdo com o a sua realidade.

Depois de discutirmos bastante item “c”, iniciamos a discussão da questão “d”. Essa questão tinha como finalidade que os alunos criassem uma situação problema, alterando os valores e formulando um texto, em seguida, que eles escrevessem a expressão que representasse aquela situação. Para essa questão, verificamos que a maioria dos alunos já sabiam do que se tratava, devido ao fato de explorarmos bastante na atividade do encontro anterior. Abaixo, trazemos o problema criado pelo Aluno A8:

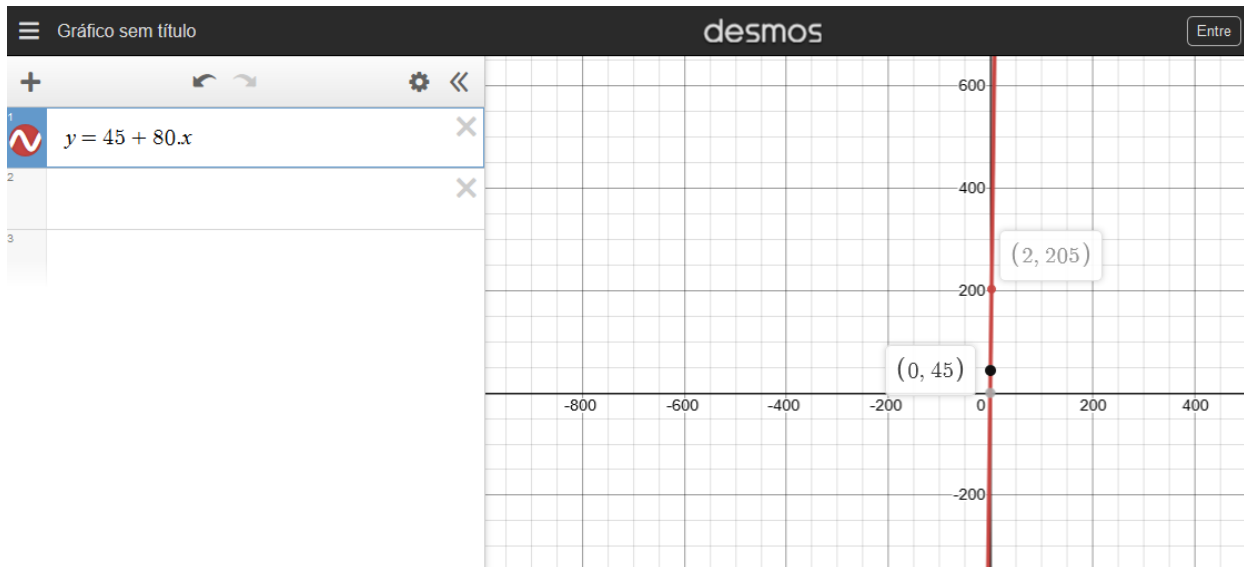
Figura 4: Problema proposto pelo Aluno A8



Fonte: Acervo do pesquisador.

O item “e” foi realizado a partir do Desmos. Pedimos que eles acessassem o aplicativo, uma vez que iríamos utilizá-lo naquele momento para a exploração da questão. Fizemos a apresentação da tela na página do Desmos. Pedimos que eles escrevessem a expressão algébrica, observassem o gráfico da função e, em seguida, encontrassem pontos nesse gráfico. Vejamos o gráfico do Aluno A2 e também um trecho do que foi discutido no momento que utilizávamos o aplicativo para explorarmos a situação.

Figura 5: Gráfico da função do Aluno A2 com pontos demarcados



Fonte: Acervo do pesquisador.

A6: O ponto (1, 125) quer dizer que x é 0 e y é 125.

A2: Quando x for 0, será pago 45,00 reais, que é a taxa, então, só foi pago a taxa, quer dizer que não houve manutenção.

PP: Mas quem garante que não houve manutenção?

A2: Porque não foi cobrado a hora, o x é zero.

Na figura, é possível visualizar que o Aluno A2 demarcou os pontos (0, 45) e (2, 205) no gráfico, os quais quase coincidem com o eixo das ordenadas, isso se deve ao fato do intervalo entre os valores do gráfico estarem de 200 em 200, como é possível ver, dificultando, assim, a sua ampliação.

Análise

Com o gráfico da função no Desmos, observamos que os alunos conseguiram explorar algumas situações. A partir dos pontos formados no gráfico da função, entendemos que, pelo fato deles estarem acessando o aplicativo pelo celular, a visualização não seja tão apropriado como ocorre pela tela do computador. Isso é nítido quando se compara o visor de ambos, mas ainda sentimos que, com o Desmos, podemos explorar bastante elementos do gráfico de uma função afim. Sabemos da importância da visualização quando se utilizam recursos tecnológicos e o nosso propósito com o Desmos é oferecer essa visualização gráfica aos alunos. Diante disso, Flores, Wagner e Buratto (2003) afirmam que a visualização, além de

promover a intuição e o entendimento, dá oportunidade para que o aluno compreenda conceitos matemáticos.

Ao finalizar essa atividade, fizemos alguns esclarecimentos com os alunos. Antes de iniciar a segunda parte do encontro, falamos que precisávamos de mais interação entre o grupo, pois o trabalho no ensino remoto requer uma forte interação entre os participantes e o trabalho com tecnologias necessita que eles estejam empenhados em contribuir para alcançar uma aprendizagem com significado e proveitosa.

Finalizamos essa atividade, pois precisaríamos dar continuidade ao nosso encontro e aplicar a segunda parte proposta para aquele dia. Abaixo, vemos a Atividade 2.

ATIVIDADE 2: O problema do motorista

CONTEÚDO: Função Afim.

OBJETIVOS: Explorar, resolver e propor problemas a partir de situações em contextos diversos, observando a variação entre as grandezas envolvidas.

IDEIAS ESSENCIAIS: conceito de função, representações múltiplas de função e covariação e taxa de variação.

Um motorista viaja com seu carro a uma velocidade constante de 100 km/h. A distância percorrida varia proporcionalmente em função do tempo. Sabendo que a velocidade é calculada pela razão entre a distância e o tempo, determine:

- a) Que distância o veículo percorrerá no tempo de 5 horas?*
- b) Construa uma tabela representando as distâncias percorridas por esse motorista nas primeiras 6 horas.*
- c) Escreva uma expressão matemática que representa todos os tempos decorridos e as respectivas distâncias.*
- d) Qual será a distância percorrida no tempo de 4,5 horas?*
- e) Proponha um problema, mudando os dados, em que a distância percorrida seja de 1 500 km.*

(Retirada e adaptada de Bezerra, 2017, p. 65).

Essa atividade foi desenvolvida com o intuito de, mais uma vez, os alunos entenderem como duas grandezas estão variando, além de compreender o que são grandezas proporcionais. Ao apresentar a atividade, percebemos que os alunos já não perguntaram mais

o que era para fazer, sabendo que, primeiro, eles precisam entender o problema, para, em seguida, analisar as questões.

Observemos o seguinte diálogo:

A6: Se o tempo é 5 horas e a velocidade é 100 km/h, então, é só eu somar o 100 com o 5.

PP: Somar o 100 com 5?

A6: Eu fiz 100 km para cada 1 hora.

PP: Isso é uma soma?

A6: Coloquei 100 em cada hora.

PP: E se for 50 horas? Você vai fazer $100 + 100 + 100 \dots + 100$ até ter uma soma com 50 parcelas de 100?

A6: Não, professor, só fazer 50×100 .

PP: Isso.

A6: Então, é 500.

PP: Que operação você realizou?

A6: $5 \times 100 = 500$

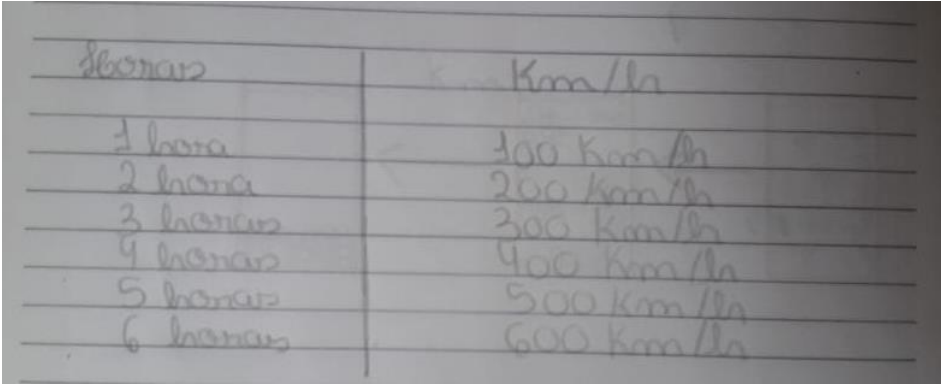
Vejamos que o aluno pensou em somar as velocidades de acordo com o número de horas. Sabemos que ele não está errado, pois a multiplicação é uma soma de parcelas iguais, mas fizemos ele entender que, se a parcela está sendo a mesma, ele pode usar a operação de multiplicação, isso ele só percebeu quando o professor indagou para um número maior. Entende-se que o aluno, quando trabalha com valores pequenos, acha mais cômodo efetuar uma adição em vez de uma multiplicação, mas, quando o número já é um pouco elevado, ele pensa mais um pouco e logo percebe que a multiplicação pode ser aplicada também nessa situação. Depois, socializamos e levamos os exemplos para discutir com a turma.

Daí, percebemos a dimensão de um conteúdo matemático para trabalhar diferentes conceitos em uma única situação e o papel que a exploração de problemas desempenha, como também a importância do papel do professor nesse trabalho de exploração, pois este tem a função de colaborar para a aprendizagem do aluno, tornando-os protagonistas do processo de exploração e resolução de problemas e, posteriormente, da construção do conhecimento. Corroborando isso, Silva (2013, p. 68) aponta que o professor tem o papel de conduzir os alunos a adquirir “um pensamento matemático repleto de conceitos e habilidades” com relação ao conteúdo de função.

Com as explorações feitas na questão “a”, percebemos que os alunos conseguiram chegar aos 500 km, Figura 6. Exploramos, nessa questão, as unidades de cada variável para que eles pudessem compreender em que unidades estão cada uma das grandezas. Por exemplo, distância (km), velocidade (km/h) e tempo (h). Nesse momento, o Aluno A7 perguntou: “Isso é física, professor?”, mostrando a conexão entre as áreas de conhecimento, confirmando o que os PCN (BRASIL, 2006) apontam com relação ao conteúdo de função e as possibilidades de várias conexões dentro e fora da Matemática. Nessa direção, o trabalho com a exploração de problemas enaltece esse pensamento, de acordo com Andrade (1998), haja vista que o trabalho, nessa perspectiva, possibilita que seja explorada uma situação em diferentes contextos, seja no nível de aprofundamento ou de ensino.

O item “b” da atividade propõe que os alunos elaborem uma tabela com as distâncias percorridas pelo motorista nas seis primeiras horas. Foi uma questão simples, a maioria conseguiu realizar, o único que não respondeu, no final, enviou sua tabela. O nosso propósito era de que eles percebessem a variação entre os valores e que o valor da velocidade era fixo. Constatamos que, com a tabela, os dados ficaram mais perceptíveis para os alunos, como é possível perceber na tabela construída pelo aluno A3.

Figura 6: Tabela construída pelo Aluno A3



horas	Km/h
1 hora	100 km/h
2 horas	200 km/h
3 horas	300 km/h
4 horas	400 km/h
5 horas	500 km/h
6 horas	600 km/h

Fonte: Acervo do pesquisador.

Logo em seguida, abordamos o item “c”, já estávamos prevendo que os alunos fossem demonstrar a mesma dificuldade das duas outras atividades que tínhamos aplicado, mas nos surpreendemos, pois, a partir da tabela, a maioria percebeu que a expressão Matemática para representar aquela situação era $y = 100x$, onde x é o tempo (em horas) e y é a distância (em quilômetros), como podemos observar a expressão feita também pelo Aluno A3.

Figura 7: Expressão Matemática escrita pelo Aluno A3

A photograph of a piece of lined paper with the handwritten mathematical expression $y = 100 - 2x$ written in blue ink. The paper has several horizontal lines, and the expression is written on the top line.

Fonte: Acervo do pesquisador.

Análise

Nessa atividade, notamos que os alunos não estavam apresentando tantas dificuldades como as detectadas no primeiro encontro. O que ainda estava nos incomodando e nos inquietando era a interação, pois nem todos estavam interagindo conosco e isso nos inquietava, pois queríamos a participação de todos nas discussões, não apenas na resolução daqueles problemas propostos. Sabemos da dificuldade encontrada no ensino remoto, mas buscamos melhorar essa interação. Ao definirmos as grandezas envolvidas e discutirmos a respeito delas, ficou mais claro para os alunos entender as grandezas que estavam variando e, assim, estabelecer uma relação entre elas. Foi notório que a representação na tabela permitiu que os alunos encontrassem a expressão Matemática que representava aquela situação. Com isso, mostra-se a eficiência de representarmos uma função na forma tabular. Brandão (2014) aponta isso em seu trabalho, ao defender que a representação tabular favorece a aptidão de generalizar, assim formulando a representação algébrica ao perceberem os dados que estão distribuídos nas colunas da tabela.

O item “d” foi respondido por alguns alunos através dos dados que eles colocaram na tabela. Após um minuto, o Aluno A5 respondeu o seguinte:

A5: É 450?

PP: Já fez?

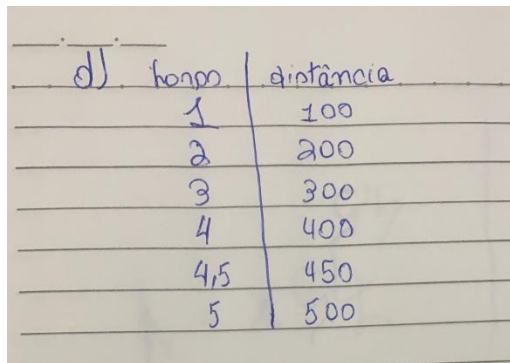
A5: É?

PP: E como você chegou a esse resultado?

A5: Por que 4 horas é 400 km e a metade de 1 hora é 50 km.

PP: Onde você percebeu esses dados?

A5: Através da tabela.

Figura 8: Resolução do Aluno A5


horas	distância
1	100
2	200
3	300
4	400
4,5	450
5	500

Fonte: Acervo do pesquisador

A partir deste questionamento, podemos entender a importância de se trabalhar com as representações múltiplas, em especial, a tabular e a verbal, pois os alunos conseguem compreender mais ainda o conteúdo quando são oferecidas diferentes possibilidades para que eles criem conexões com outras formas de se chegar a um resultado.

Para finalizar a atividade, pedimos que eles propusessem um problema que tivesse como resultado 1 500 km. Essa proposta teve o objetivo de investigar se os alunos entenderam as diferentes grandezas envolvidas no problema.

Análise

Sentimos que, quando os dados estão colocados numa tabela, os alunos conseguem visualizar melhor e explorar situações a partir desses dados. Notamos que eles elaboraram o problema, mas que alguns ainda não estavam entendendo a essência da proposição de problemas, pois queríamos que eles realizassem a proposição para sabermos se eles estavam entendendo o conteúdo, compreendendo as ideias essenciais, para, assim, intervir junto a eles. Segundo Cai, Hwang, Jiang e Silber (2015), a proposição pode ser entendida com uma ação humana intelectual muito importante, que age diretamente nas formas de pensar do aluno.

Assim, finalizamos o nosso encontro sempre pedindo para que os alunos enviassem as fotos do que estavam fazendo. A partir desse encontro, precisávamos pensar em alguma alternativa para que pudéssemos superar o desafio da interação entre os alunos, para, assim, tornar o ambiente da oficina um lugar em que houvesse discussão dos problemas propostos e compartilhamento dos pensamentos e ideias. Nos despedimos e agradecemos a presença deles naquele encontro, afirmando que esperávamos por eles na próxima semana.

Com esses dois encontros realizados, já podemos trazer algumas considerações sobre o trabalho com a função afim através da exploração, resolução e proposição de problemas por meio do uso do Desmos em aulas remotas. As conclusões a que chegamos até ali nos remeteu

a pensar um pouco e discutir acerca do nosso planejamento, pois precisávamos despertar o interesse do aluno e vencer os desafios encontrados na aula remota. Foi possível perceber que um dos fatores mais difíceis que detectamos nesses dois encontros foi a interação entre alunos-professor e alunos-alunos. Sabemos que não é fácil desenvolver um trabalho de pesquisa dessa maneira, pois é preciso que haja a discussão, que todos falem, relatem suas dúvidas, perguntas, indagações, para que, assim, surjam novos questionamentos, novas conjecturas e novos problemas.

Diante disso, pensamos e mudamos o nosso planejamento e, no terceiro encontro, ao invés de realizar um momento com atividades, realizamos uma gincana para que trouxéssemos todos os alunos para dialogar com o professor e entre eles, a fim de tentar superar essa dificuldade e promover o envolvimento entre todos.

TERCEIRO ENCONTRO (29/10/2020)

TÍTULO DA ATIVIDADE: Gincana Matemática

CONTEÚDOS: Conceito e aplicações de função

OBJETIVOS: Apresentar situações-problema por meio de uma gincana Matemática envolvendo o conteúdo de função, a fim de promover a interação dos alunos.

A gincana Matemática ocorreu no nosso terceiro encontro, a partir da avaliação feita nos encontros anteriores, em que diagnosticamos a pouca interação dos alunos nos momentos síncronos e decidimos fazer uma mudança no nosso planejamento e roteiro de atividades. Como sabemos que o planejamento é flexível, pensamos em fazer algo que pudesse chamar a atenção dos alunos, tentando, assim, contribuir para o avanço da turma. Acreditamos que esta gincana propiciaria aos alunos a capacidade de compreender melhor como trabalhar com situações-problema.

A sugestão da gincana foi pensada por nós, pois entendemos que seria um momento que permitiria a participação de todos e, por ser uma gincana, eles teriam que falar suas respostas para os demais, assim estimulando a interação e favorecendo a aprendizagem dos alunos. No total, foram abordadas sete situações-problema, de acordo com o conteúdo de função, cada situação tinha mais de uma pergunta e eles ficavam à vontade para pensar e discutir os questionamentos.

O funcionamento da gincana foi o seguinte: a situação-problema era mostrada na tela da apresentação do professor e dado um tempo para que os alunos pudessem ler e, em

seguida, pensar a respeito do problema abordado. A mediação seguiu esse mesmo formato até o final. No decorrer das explorações, fizemos muitas indagações aos alunos com o objetivo de instigar mais ainda o pensamento deles a respeito do problema.

Análise

Foi possível entender que os alunos ficaram mais entusiasmados com a forma com que foi conduzida a aula e, ao saber que naquele dia seria feita uma gincana, a participação foi mais efetiva e interativa. Compreendemos que uma gincana, por ter um caráter competitivo, permite que o aluno se envolva efetivamente com o conteúdo de forma mais dinâmica e não de forma mecânica.

Sabemos da importância que uma atividade espontânea pode proporcionar ao ambiente da sala de aula, mesmo estando de forma *on-line*. O texto da BNCC (2018) propõe atividades cujo enfoque esteja na interação dos estudantes; no incentivo à investigação, a fundamentar seus argumentos, a criar diferentes representações para expressar objetos matemáticos e na tomada de decisões, prezando pelo respeito e diversidade. Dessa forma, entendemos que essa atividade possibilitou um conhecimento a mais para os alunos.

Em seu texto, a BNCC (2018) assinala que devemos fazer uso de processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, a fim de exemplificar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, constatando novas táticas e resultados.

Com a aplicação dessa gincana, percebemos que os alunos apresentavam dificuldade em distinguir as variáveis dependente e independente, mas trabalhamos bastante essa diferença para que, nos encontros seguintes, eles não apresentassem tanta dificuldade. Destacamos, ainda, que os alunos conseguiram fazer relação nos aspectos da variação de uma função como também a generalização de situações.

QUARTO ENCONTRO (30/10/2020)

O encontro do dia 30 de outubro de 2020 iniciou-se, pontualmente, às 13h e, no primeiro contato, já fomos indagados pelo Aluno A3 se haveria outra gincana naquela aula. Explicamos que voltaríamos a analisar alguns outros problemas, mas que não seria no formato de uma gincana, pois precisávamos dar continuidade ao que estava previsto em nosso planejamento. Nesse momento, tivemos a certeza da contribuição que foi trabalhar as

situações-problema de forma competitiva. Contamos com a participação de oito alunos, sendo que todos tinham participado da gincana que aplicamos no encontro anterior.

DESENVOLVIMENTO DAS ATIVIDADES DO 4º ENCONTRO

ATIVIDADE 1

CONTEÚDOS: Função (Variação)

OBJETIVOS: Entender a variação entre duas grandezas a partir de uma situação-problema da realidade do aluno. Fazer relações entre as variáveis envolvidas.

IDEIAS ESSENCIAIS: Conceito de função, representações de funções e taxa de variação.

1. *Um estudante viaja periodicamente de João pessoa a uma cidade do Sertão paraibano; sabendo que a distância de uma cidade a outra é de 600 km, responda:*
 - a) *Se a lei permitisse e o estudante fizesse o percurso com uma velocidade média de 150 km/h, quanto tempo ele levaria para fazer a viagem? E a 60 km/h?*
 - b) *O tempo depende de qual informação (variável)?*
 - c) *Qual a relação existente entre as variáveis utilizadas para fazer o cálculo?*
 - d) *Se o profissional fizer o percurso em 3 horas, qual deve ser a velocidade média do automóvel? E em 6 horas?*

(Retirada e adaptada de BRANDÃO, 2014, p. 104).

Com essa atividade, queríamos que os alunos compreendessem a relação entre duas grandezas e que conseguissem entender e identificar as variáveis que estão envolvidas no problema. Sabendo que os alunos conseguem fazer relações entre os valores e que encontram dificuldades em generalizar aquela situação, pensamos em começar indagando-os a partir dos seus conhecimentos de mundo, perguntando que velocidade estaria adequada para realizar esse percurso, bem como sobre valores que se encaixariam na situação.

Análise

É fato que, em sua grande maioria, os alunos são capazes de quantificar, de estimar valores para um certo problema, o que lhes faltam é a habilidade para pensar de forma genérica tal situação; mas, a partir do trabalho com a exploração de problemas, é possível enxergar que os caminhos já são outros e, mesmo com a dificuldade, os alunos já tentam pensar de forma a chegar a uma expressão que generalize a situação-problema trabalhada. Assim, embora sabendo que o caminho é longo, a vontade em propiciar uma aprendizagem de

significado para esses alunos é cada vez maior e nos instiga a ter um olhar mais minucioso sobre o percurso de cada um na resolução do problema.

Ao apresentar o problema e a questão do item “a”, fomos indagados pelo Aluno A4, que fez o seguinte questionamento.

A4: Professor, a velocidade é calculada pela razão distância sobre tempo, né?

PP: Como assim? Explique.

A4: Se eu quero encontrar o tempo, é só dividir a distância pela velocidade.

PP: Então, veja quais serão esses tempos.

A4: 4 e 10.

PP: Me mande sua resolução e vamos deixar o restante da turma terminar. Veja as demais questões e retorne novamente ao item “a”.

É plausível a percepção de que o aluno conhece a fórmula para calcular a velocidade média. A partir desse conhecimento, ele chegou aos resultados dos tempos 4 horas e 10 horas, respectivamente, quando a velocidade fosse igual a 150 km/h e 60 km/h. No decorrer da discussão, os outros alunos foram indagados sobre quais seriam esses tempos e como eles fizeram para chegar aos valores e percebemos que todos chegaram ao mesmo resultado. Esse trabalho foi fruto dos questionamentos e exploração realizados nesse item.

No decorrer da exploração feita pelo problema, sentimos o interesse dos alunos e as discussões foram fluindo e conseguimos que todos participassem. Com relação ao item “b”, constatou-se que eles conseguiram identificar que o tempo dependia da velocidade, ou seja, se a velocidade aumentasse, o tempo diminuía e, se ela diminuísse, o tempo é que aumentava. Isso só foi possível observar a partir da manipulação de vários valores, através de algo que eles perceberam e que acontece no cotidiano deles, como é retratado no diálogo e na Figura 9.

PP: Que explicação vocês poderiam dar para justificar isso?

A4: Professor, é simples, porque o tempo sendo de 2 horas a velocidade será de 300 km/h e, se for de 3 horas, diminuirá para 200 km/h.

PP: Mas, de forma geral, como generalizar isso?

A4: Porque uma diminui, aí a outra aumenta.

A5: E isso acontece quando estamos dirigindo, pois, se vamos com o carro “correndo”, demoramos menos tempos, já se for devagar; aí irá demorar mais.

A2: Por isso que quando uma aumenta, o outro diminui; mas a distância é a mesma.

Figura 9: Tabela construída pelo Aluno A4

Tempo	Velocidade
1,5	400
2	300
2,5	240
5	120

Fonte: Acervo do pesquisador.

Notamos que o conhecimento prévio do aluno é muito importante para explorar a situação e chegar a uma solução. De fato, uma explicação mais formal seria dizer que as grandezas envolvidas são inversamente proporcionais, mas, pelas explicações e debates entre eles, notamos que o objetivo foi alcançado.

Análise

Com essa situação, constatamos o quanto é proveitoso o trabalho com situações de natureza do cotidiano dos alunos, pois é algo que eles conhecem e se interessam em dialogar e questionar junto com o professor, são problemas que estão além de conceitos matemáticos, como afirma Andrade (1998). Assim, a resolução de problemas retrata questões de natureza sócio-político-cultural, pensando em uma educação mais geral. Também é possível observar o grande interesse dos alunos ao se deparar com uma situação desse tipo. Isso corrobora o pensamento de Santos (2019, p. 22) ao afirmar para um “interesse no problema que se depara” e, com isso, o estudante se sente motivado à sua resolução, encontrando, assim, uma solução para esse problema.

Nessa situação, reparamos que os alunos se saíram muito bem na exploração e resolução do problema e que conseguiram alcançar uma boa compreensão, atribuímos isso ao fato dessa situação está presente no dia a dia de cada um e, diante disso, eles se sentiram mais motivados, proporcionando mais interação, fazendo com que o primeiro momento do nosso quarto encontro fosse muito produtivo e possibilitando autonomia aos mesmos. Em seguida, apresentamos o nosso segundo problema.

ATIVIDADE 2: A pandemia do novo Coronavírus

CONTEÚDOS: Função afim e gráfico

OBJETIVOS:

- Instigar os alunos a desenvolverem um conhecimento com mais compreensão do conceito de função afim.
- Entender as representações de função, a partir de uma situação de fácil entendimento.

IDEIAS ESSENCIAIS: Conceito de função, representações de funções e a covariação e taxa de variação de funções.

Com o início da pandemia do novo Coronavírus e a obrigatoriedade do uso de máscaras em diversas cidades brasileiras para evitar o contágio do vírus, Dona Maria encontrou uma oportunidade para os negócios e passou a produzir máscaras para comerciantes de sua cidade.

Para a produção de máscaras em grande quantidade, Dona Maria cobra um valor de R\$ 50,00 pela mão de obra mais um valor adicional de R\$ 1,50 por peça produzida.

- a) A prefeitura da cidade de Dona Maria fez um pedido de produção de 200 máscaras para a distribuição em uma comunidade carente. Qual é o valor que ela deverá receber com essa produção?*
- b) Esboce graficamente essa situação.*
- c) Escreva uma expressão matemática que relacione a quantidade de máscaras produzidas e o valor a ser pago pelo trabalho.*
- d) Faça uma tabela que represente o valor que ela receberá para a produção de 50, 100, 200, 300, 500 máscaras.*
- e) Quanto ela receberá se pegar uma encomenda para a produção de 600 máscaras?*
- f) Em um dia em que o faturamento de Dona Maria com a produção de máscaras foi de R\$ 312,50, qual foi a quantidade produzida por ela?*
- g) Sabendo que Dona Maria costuma vender a unidade da máscara por R\$ 1,75; proponha um problema com as informações descritas nessa situação fazendo um comparativo com a produção em grande quantidade e em pequena quantidade.*

(Elaborada pelo autor).

Como sabíamos que o Problema 2 demandaria mais tempo, pedimos que os alunos analisassem inicialmente o enunciado e, em seguida, apresentamos os questionamentos para, assim, discutirmos a respeito. O tempo dedicado a essa situação foi superior ao da anterior; pois se tratava de uma situação-problema mais extensa. Para esse problema, também fizemos o uso do Desmos, a fim de entendermos algumas características dessa situação.

De início, os alunos não compreenderam. Depois, discutimos a respeito e pensamos em outras vertentes para o problema, pois, não ficou tão explícito. O Aluno A3 foi o primeiro a se pronunciar com relação ao item “a”, dizendo que o valor que Dona Maria iria receber com a produção de 200 máscaras é R\$ 10.300,00. Vejamos, abaixo, o diálogo entre o professor e o Aluno A3 e, em seguida, A2 também participa:

PP: Explique como você encontrou chegou a esse resultado.

A3: Eu multipliquei R\$ 51,50 por 200.

PP: É isso mesmo?

A2: Eu cheguei a R\$ 375,00.

PP: Como você chegou a R\$ 375,00?

A2: Porque, na questão, fala que a produção em grande quantidade de máscaras cobra R\$ 50,00 e quando “junta” 200 com 50 da produção aí dá 250 vezes o valor que ela cobra por cada máscara que é 1,5; aí eu multipliquei 250 por 1,5.

PP: Veja aí se é esse valor mesmo. Você pode juntar a quantidade de máscara com o valor de R\$ 50,00?

A2: Irei refazer, mas estou confuso. Esse está difícil.

Notamos que os alunos interpretaram o problema de uma forma diferente, pois o Aluno A3 somou o preço da mão de obra com o valor de cada máscara e multiplicou por 200, já o Aluno A2 somou a quantidade com o valor da mão de obra e o resultado multiplicou por 1,50, que é o valor de cada máscara.

Alguns questionamentos e discussões foram acontecendo na exploração desse item até que o Aluno A5 questionou sobre a mão de obra que estava muito cara e, então, perguntamos o porquê. Vejamos o que ele respondeu no chat:

Figura 10: Questionamento do Aluno A5 sobre o preço da mão de obra

: Professor essas mascara são caras, porque se for encomendado 2 máscaras será pago mais de 50 reais.

Fonte: Acervo do pesquisador.

Vejamus que essa fala do Aluno A5 foi bem pertinente para discutirmos a respeito de questões relacionadas à quantidade de máscaras produzidas e o preço pago. Também possibilitou refletirmos sobre a produção de máscaras nos tempos em que estamos vivendo, pois, esse acessório usado para cobrir parte do rosto tornou-se algo obrigatório e, por isso, o grande aumento na fabricação, sendo que as vendas aumentaram consideravelmente.

Foi a partir desse instante que boa parte dos alunos conseguiu enxergar a situação em outra vertente, pois, até esse momento, eles não estavam entendendo o contexto ao qual o problema estava inserido e o seu objetivo e isso serviu para nós, enquanto pesquisadores, pensarmos mais em como elaborar a situação-problema e sobre o público ao qual está sendo aplicado e também entender as várias interpretações que um problema pode oferecer.

Encontramos um desafio na aplicação dessa atividade diante do que os alunos estavam interpretando do problema, pois, por mais que fizéssemos a mediação, não estávamos interessados em dar respostas e, sim, que eles pensassem a respeito da situação. Assim, a partir da indagação feita pelo Aluno A5 e dos questionamentos feitos pelo professor, pudemos avançar. Notamos que, no processo de exploração e resolução de problemas, o aluno tem uma autonomia de seguir o seu caminho de acordo com o que pensa e vê no problema.

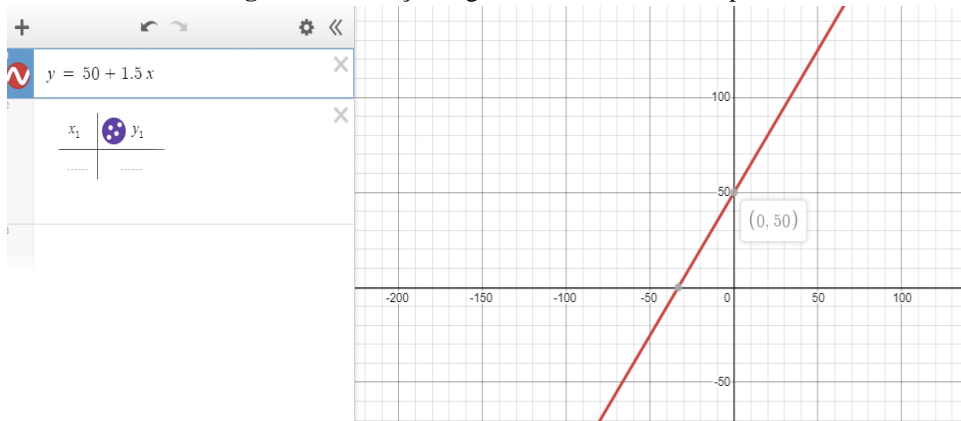
Análise

Diante do fato que desencadeou a exploração desse problema, entendemos que o trabalho com a resolução de problemas é ir além de conceitos matemáticos, pois é essencial que o indivíduo desempenhe significados para o que está sendo realizado e, a partir de suas ideias, encontre alternativas para a resolução e discutir outros contextos, não apenas chegar à solução. Nesse trabalho de exploração, o aluno pode ir além do que imagina, dependendo de sua curiosidade, como defende Andrade (1998; 2017).

Nos itens “b” e “d”, os estudantes utilizavam o Desmos para realizar as questões. Já um pouco familiarizados com a interface do aplicativo, pedimos que eles realizassem as questões, pois precisávamos observar algumas particularidades do gráfico dessa função. Com relação ao item “c”, foi mais rápido para eles fazerem, já que a discussão feita no item “a” possibilitou um maior entendimento sobre a expressão Matemática para representar a situação.

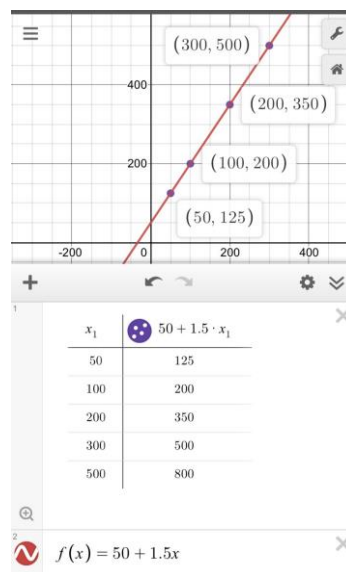
Vejamus, nas duas imagens abaixo, o gráfico da função esboçada pelo Aluno A8 e a tabela feita pelo Aluno A3, ambos no Desmos:

Figura 11: Esboço do gráfico no Desmos feito pelo Aluno A8



Fonte: Acervo do pesquisador.

Figura 12: Tabela com os valores feita pelo Aluno A3.



Fonte: Acervo do pesquisador.

Identificamos que o Aluno A8 acessou o aplicativo de um computador enquanto o aluno A3 de um *smartphone*. Com isso, é possível visualizar que o gráfico da função fica mais detalhado quando é feito no computador, isso se deve ao tamanho da tela dos respectivos aparelhos, mas algo que precisamos discutir a respeito desse gráfico é que o domínio da função não está definido para todos os números reais, então, devemos restringir o gráfico e apenas localizarmos pontos no plano cartesiano, como mostra a Figura 12, em que estão demarcados pontos lilás, que foram surgindo a partir dos valores que foram acrescentados na tabela.

Sabemos que o domínio dessa função será apenas os números naturais, sendo assim o gráfico estará delimitado apenas aos pontos pertencentes ao primeiro quadrante. Isso é algo que precisa ser discutido com os alunos e, como pesquisadores, pensarmos em como fazer uso

das tecnologias, sabendo que existem algumas limitações e que devemos estar sempre atentos e mostrando essas particularidades aos nossos alunos.

Análise

Diante do que discutimos aqui, percebemos que, com a exploração de problemas, podemos ir muito além de compreendermos os conteúdos matemáticos. A partir do que foi esboçado no Desmos, tivemos a oportunidade de enxergar conceitos essenciais no estudo de função, como também enxergar limitações quando fazemos uso da tecnologia e saber compreender que um aplicativo tem suas vantagens e também pode apresentar desvantagens, mas isso não o faz ser inferior. Sabemos que as tecnologias têm proporcionado imensas transformações no cotidiano e isso é fundamental ser introduzido no ambiente escolar, como afirma Bairral (2013). Destacamos, ainda, que a exploração e resolução de problemas se torna bem mais prazerosa quando inserimos meios tecnológicos nessa interação.

Nos itens “e” e “f” pediu-se para que os alunos encontrassem as respostas usando o aplicativo Desmos. No item “g”, pedia-se que os alunos propusessem um problema e que, ao formular esse problema, fizessem um comparativo entre a produção em grande e pequena quantidade, para, assim, concluir a partir de quanto que ela terá um lucro maior e qual será mais vantajoso para Dona Maria.

As proposições feitas e mandadas para o professor se assemelharam com o problema inicial. Vejamos os problemas propostos pelos alunos A4 e A5:

Figura 13: Problemas propostos pelos Alunos A4 e A5

Problema proposto pelo Aluno A4: Dona Maria em certo dia vendeu separadamente 150 máscaras na feira de sua cidade, todas ao preço de R\$ 1,75. No outro dia ela recebeu uma encomenda para produzir 150 máscaras, qual dos dias ela terá o maior lucro?

Problema proposto pelo Aluno A5: Eu quero comprar 300 máscaras para distribuir na empresa do meu pai, o que sairá mais em conta, comprar por unidade ou fazer a encomenda a Dona Maria?

Fonte: Acervo do pesquisador.

Compreendemos que muito ainda tem a ser feito, pois o trabalho com a Exploração, Resolução e Proposição de Problemas é um caminho minucioso. Assim, com as experiências compartilhadas, vamos adquirindo mais prática e conhecimento com essa metodologia que desperta interesse e a vontade dos alunos de ir além e contribuir com o ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos, como também dos estudantes se tornarem indivíduos autônomos e que sejam capazes de pensar sobre o seu papel na sociedade, não só no contexto escolar, mas enquanto um ensinamento para a vida.

Encerramos esse encontro com a certeza de que a metodologia da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas é, além de tudo, capaz de promover autonomia no indivíduo, de conseguir ver uma situação de diferentes maneiras, sabendo que há sempre algo novo para descobrirmos, basta termos interesse e querer ir o mais profundo que for, pois, segundo Andrade (2017, p. 365), “o trabalho com exploração de problemas é inacabado”, então, quanto mais investigamos e nos interessamos por um problema, novos olhares devem surgir.

QUINTO ENCONTRO (05/11/2020)

O nosso quinto encontro foi iniciado com alguns questionamentos aos alunos sobre o que eles estavam achando dos momentos que, até então, desenvolvemos com eles, a fim de compreendermos o que cada um sentia, os seus anseios e perspectivas futuras. Foi bastante produtivo esse momento, pois eles puderam falar a respeito do que pensavam e esperavam. Sentimos que, naquele momento, os alunos estavam interessados em aprender e engajados na nossa proposta de pesquisa. Contamos com a participação de nove alunos nesse encontro, um deles estava há dois encontros sem comparecer e alegou problemas de *internet* e incompatibilidade de horários com o trabalho.

Depois desse momento, foi apresentada a atividade intitulada “Desconto na mensalidade”, na qual abordamos o conceito de função, representações de função, domínio, crescimento e decréscimo de uma função.

Foi a partir desse encontro que sentimos a necessidade de trabalhar com apenas uma atividade, proporcionando um maior tempo para a exploração do problema e a utilização do aplicativo Desmos, a fim de oferecer uma discussão mais detalhada, proporcionando, assim, uma maior aprendizagem.

DESENVOLVIMENTO DA ATIVIDADE DO 5º ENCONTRO

TÍTULO: Desconto na mensalidade

CONTEÚDOS: Domínio e gráfico de uma função

OBJETIVO: Compreender, a partir de uma situação, o domínio de uma função afim e o crescimento e decréscimo do gráfico de uma função afim.

IDEIAS ESSENCIAIS: Conceito de função, representações de função e taxa de variação e covariação.

Para incentivar o pagamento adiantado da mensalidade, uma escola no Município de Monteiro, PB, oferece um desconto de R\$ 8,00 para cada dia de antecipação, podendo antecipar, no máximo, 10 dias. Sabendo que o valor da mensalidade é de R\$ 320,00, responda às seguintes questões:

- a. Qual é a expressão matemática que relaciona o valor y da mensalidade com o número de dias de antecipação do pagamento x ?*
- b. Quanto um pai de aluno irá pagar se efetuar o pagamento com 5 dias de antecedência? Quanto, no máximo, em reais, um pai pode economizar?*
- c. Quais são os possíveis valores que podemos atribuir a x ?*
- d. Se um pai pagou em certo mês R\$ 288,00 de mensalidade, com quantos dias de antecipação ele efetuou o pagamento?*
- e. Proponha um problema com os dados da situação.*
- f. Faça a representação gráfica utilizando o Desmos.*

(Retirada e adaptada de BRANDÃO, 2014, p. 104).

Cada item da atividade foi apresentado um por vez, seguindo a ordem; foi dado um tempo para que os alunos pensassem e refletissem sobre o primeiro questionamento e, em seguida, começamos a exploração do problema, sempre prezando pela fala do aluno e do seu entendimento diante do problema exposto.

O primeiro diálogo entre os alunos e o professor-pesquisador se direcionava à expressão Matemática na qual relacionava o valor da mensalidade e o número de dias antecipados. Nesse primeiro momento, os alunos foram bem participativos e demonstraram interesse com o problema, bem como gostaram da forma como foi conduzimos a exploração, para, assim, entender o raciocínio e o que os alunos estavam pensando. Vejamos, a seguir:

A8: Ô, professor, os números de dias aí não vão mudar, né?

PP: Veja: o que é que irá mudar?

A8: Porque a mensalidade é o que vai ficar alterando.

PP: Mas, dependendo de quê? Por que vai alterar?

A8: Ah...acho que entendi.

A2: O que não vai mudar é o desconto.

PP: De quanto será esse desconto?

A8: De 8 reais.

PP: E como irá ganhar esse desconto? Pensem e reflitam!

(A partir desse momento, os alunos permaneceram em silêncio.)

A3: Professor, eu vou mandar uma foto “pro” senhor.

PP: Pode mandar, os demais também.

A8: Eu já entendi, o que vai variar é os dias.

A5: O valor que vai pagar é menos se os dias que antecipar for mais, né, professor?

PP: Muito bem, pessoal. Precisamos discutir e refletir sobre o que cada um está pensando. Alguém mais tem algo a dizer? Quero ouvir os demais.

A4: Eu também entendi assim.

PP: Assim, como?

A4: Pagar um valor menor se “tiver” mais dias.

PP: Se estiver mais dias?

A4: Sim, professor, adiantar os dias; 10, 9, 8.

PP: Certo. Quem mais?

A3: Os dias quando varia, o valor diminui.

PP: Pode ser qualquer quantidade de dias?

A3: Só pode 10.

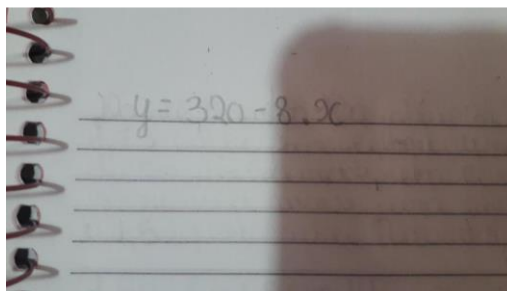
A6: Até 10

A5: 10.

O momento foi bastante participativo, pois seis dos alunos presentes se entusiasmaram e dialogaram com o professor. Esse trabalho requer uma mediação bastante pensada e planejada do pesquisador; pois, quando o aluno é indagado, ele procura, a partir do seu pensamento, aprofundar aquela ideia e encontra outros entendimentos, esse é o objetivo da exploração de problemas.

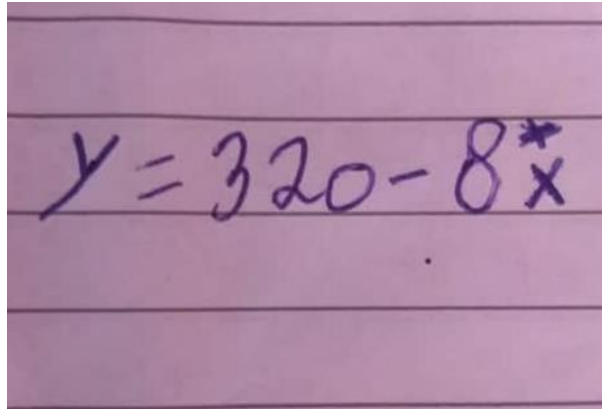
Vejamos, a seguir, as fotos enviadas pelos Alunos A3 e A4, mostrando a respectiva expressão algébrica encontradas por eles:

Figura 14: Expressão Matemática feita pelo Aluno A3



Fonte: Acervo do pesquisador.

Figura 15: Expressão Matemática feita pelo Aluno A4



$$y = 320 - 8x$$

Fonte: Acervo do pesquisador.

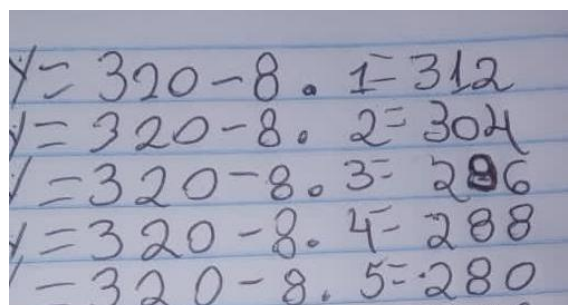
Análise

Com esse item, percebemos a contribuição dos problemas semelhantes que foram trabalhados anteriormente com os alunos, uma vez que os estudantes demonstraram excelentes desenvolvimento na resolução dos problemas atuais. Quando os alunos exploram e resolvem um novo problema a partir do aproveitamento de algumas particularidades de problemas que já foram resolvidos, eles se tornam mais experientes e mais capacitados.

Acreditamos que, com essa metodologia de ensino, a aprendizagem se torna mais eficaz para os alunos e acaba se transformando em algo prazeroso e prático de ser realizado. Sentimos a necessidade de sempre explorar a representação algébrica do problema, por ser uma das ideias essenciais do conceito de função.

Com relação aos itens “b”, “c” e “d”, constatamos que as dificuldades que eles apresentavam no início dos encontros, com relação a determinar valores da imagem a partir de valores dados do domínio, já estavam sendo sanadas, pois conseguiram explorar e resolver os itens, a partir dos questionamentos e das trocas de experiências no decorrer dos encontros anteriores. Vejam, nas Figuras 16, 17 e 18, as resoluções dos Alunos A2, A9 e A3 dos itens b, c e d do problema.

Figura 16: Resolução dos itens (b) e (c) feita pelo Aluno A2



$$\begin{aligned}
 y &= 320 - 8 \cdot 1 = 312 \\
 y &= 320 - 8 \cdot 2 = 304 \\
 y &= 320 - 8 \cdot 3 = 296 \\
 y &= 320 - 8 \cdot 4 = 288 \\
 y &= 320 - 8 \cdot 5 = 280
 \end{aligned}$$

Fonte: Acervo do pesquisador.

Figura 17: Resolução do item (b) feita pelo Aluno A9

$$g = 320 - 8.5$$

$$320 - 40 = 280$$

$$\begin{array}{r} 320 \\ - 40 \\ \hline 280 \end{array}$$

Fonte: Acervo do pesquisador.

Figura 18: Resolução do item (d) pelo Aluno A3.

$$d/320 - 288 = 32 = 4 \text{ dias}$$

$$8$$

Fonte: Acervo do pesquisador.

O Aluno A2 foi utilizando um raciocínio numérico até chegar na quantidade pedida. De posse desses resultados, o mesmo foi questionado e outros alunos entraram na discussão também:

PP: E quais são os valores possíveis para “x”? São esses que você me enviou?

A2: Não, professor, coloquei até 5.

PP: Então, só são 5 valores que podemos atribuir a x?

A2: Não.

A5: Não, são mais.

A4: Eu fiz 10.

A2: Professor, essa é a letra “b”, a letra “c” eu coloquei 10.

PP: Então, o que significa esses valores? Alguém poderia me dizer?

A6: O domínio.

A8: O valor de x.

A6: É isso, professor?

PP: Como você chegou a essa conclusão?

A6: Porque o senhor disse que x representa o domínio. Né, não?

A3: O domínio seria todos os valores que vamos dar a x .

PP: Correto.

Análise

É nítido que quanto mais exploramos o problema, mais os alunos têm a oferecer, mudar a sua forma de pensar e, até mesmo, encontrar outras maneiras de repensar a respeito do problema. De início, constatamos que a forma de pensar deles era de resolver o problema numericamente, mas, no desenvolvimento desse encontro, estamos percebendo que conseguiram compreender com facilidade a questão de atribuir valores a x e encontrar um correspondente em y , ou seja, a correspondência entre duas grandezas, como também tivemos a oportunidade de aprofundar o conceito do domínio de uma função. Com essa atividade, trabalhamos conceitos fundamentais de função – Ideia 2 defendida por Cooney, Beckmann e Lloyd (2010).

Os alunos foram desafiados a proporem novos problemas, a partir da situação trabalhada, em seguida, fizemos o uso do aplicativo Desmos para explorarmos ainda mais o problema. Nesse momento, os alunos já estavam familiarizados com o aplicativo e, como estavam de posse da expressão Matemática que representava a situação, logo foram escrevendo no Desmos e já falando a respeito do gráfico que tinha sido encontrado, mesmo antes de serem indagados pelo professor:

A2: Professor, não apareceu o gráfico da função.

PP: Tem certeza? Você digitou corretamente?

A2: Vou enviar para o senhor.

A5: O meu também não.

A7: Está diferente.

PP: O que está diferente A7?

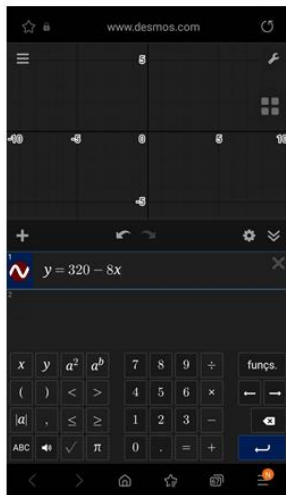
A7: O gráfico.

PP: Me enviem.

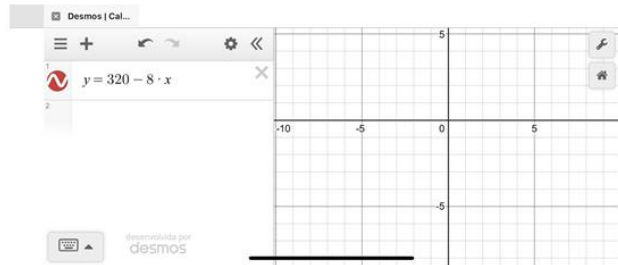
Nesse momento, percebemos o que os alunos estavam encontrando de diferente, mas deixamos que eles compreendessem e vissem o motivo de não estarem visualizando o gráfico. Isso é, de fato, uma limitação do Desmos, pois como a maioria utiliza celulares, a visualização gráfica nem sempre é vista com detalhes.

Como se trata de uma função que intersecta o eixo y no ponto (0, 320) e x no ponto (40, 0), é um pouco difícil para que eles visualizem o gráfico de imediato. Vejamos, nas imagens, os gráficos no aplicativo Desmos dos Alunos A2, A5 e A7.

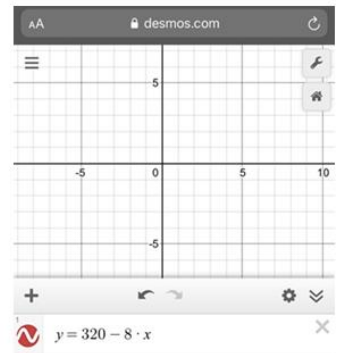
Figura 19: Print das telas dos celulares de A2, A5 e A7



A2



A5



A7

Fonte: Acervo do pesquisador.

É possível visualizar que, em nenhuma das telas, estávamos conseguindo enxergar o gráfico da função nos aplicativos dos alunos.

Com a nossa mediação, os alunos já começaram a perceber o que estava acontecendo e começaram a relatar:

A5: Já vi o gráfico. Ele está muito “grande”.

PP: Muito grande?

A5: Sim, a tela é pequena.

A8: Eu diminuí o zoom.

A4: Eu já consegui ver assim que “botei” a expressão.

PP: Como você conseguiu A4?

A4: Pelo computador.

PP: Muito bem.

O Aluno A4 foi além e fez uso do computador para utilizar o Desmos. Vejamos que já foi despertado o interesse no mesmo de buscar um recurso que permita uma melhor visualização.

Já percebemos uma evolução na capacidade de pensar e ir além nos alunos, isso nos possibilitou fazer algumas indagações para investigar o entendimento deles diante do

conteúdo de função e fomos surpreendidos por alguns alunos que já estavam mostrando uma compreensão do conceito trabalhado.

PP: Pessoal, esse gráfico é finito ou infinito?

A6: Professor, aqui no aplicativo, se faz redução, o gráfico permanece, então, ele não tem fim.

A2: É infinito no aplicativo.

A3: Infinito.

PP: Mas, pela situação-problema, os valores são infinitos?

A5: É não.

A3: Os de x é até 10.

A7: Só pode ser os valores do domínio.

A6: Se 11 fosse x , não tinha y e, aqui, no gráfico, tem x igual a 11 e y 232.

PP: Como assim?

A6: Só pode ser x de 1 até 10 e, no gráfico, tem outros números e negativos.

A5: Se os dias descontados fossem 15, o valor a ser pago seria 200 reais só. Ia ser melhor assim, professor.

PP: Veja que vocês podem pensar em outras possibilidades.

A7: Pode ser negativo?

PP: Tem dia que é negativo? Vejam aí.

Os alunos já estavam percebendo que o gráfico representava a função $y = 320 - 8x$ e a situação tinha os valores limitados para x , isso deve-se ao fato de que precisaríamos representar a situação usando alguma notação específica pois havia uma limitação para o domínio e, quando eles inseriram a expressão Matemática no Desmos, o aplicativo já mostrou o gráfico.

Daí, pedimos que eles utilizassem a tabela, mostrando os valores possíveis de x e os respectivos de y . Essa foi uma atividade de reflexão e que serviu para pensarmos e também mostrar aos alunos as diferentes representações de uma situação, levando em consideração o seu contexto.

Análise

Acreditamos que a mediação do professor deve estar sempre atenta ao que os alunos estão enxergando, indo além para promover debates e discussões que possam torná-los indivíduos mais ativos, que tenham capacidade de pensar a respeito de limitações encontradas e respeitar a fala de cada um. O trabalho com a exploração de problemas é isso, os alunos não

devem se preocupar, exclusivamente, com a resposta que irá chegar, mas, sim, com o percurso que é feito até chegar a uma conclusão. Andrade (2017, p. 371) pontua que a “atividade de exploração de problemas é considerada a ferramenta mais importante e mais ampla de todas, ela compreende tanto a resolução como a proposição”. Nesse problema, foi possível perceber isso, pois os alunos conseguiram chegar a um bom entendimento, a partir das provocações feitas e pela mediação do professor, sempre os colocando como protagonistas.

Finalizamos esse encontro felizes e com o desejo de muito mais, pois as discussões foram bastante produtivas e os alunos já estavam mais interativos e dialogando, não na proporção que almejávamos, mas, pelo momento que vivemos e a forma como estávamos tendo as aulas, ainda havia um longo percurso a vencer.

SEXTO ENCONTRO (06/11/2020)

Neste encontro, trabalhamos uma situação-problema que apresentava duas possibilidades para um plano de saúde. Apresentamos para os alunos o Plano A e o Plano B e, em seguida, apresentamos o primeiro questionamento. Foi dado um tempo para que eles pensassem a respeito de cada um dos planos.

Também prezamos por trabalhar com apenas uma situação-problema, pois já sabíamos que o tempo seria mais propício para discussão e exploração da atividade e escutar mais os alunos, já que o tempo estava se tornando pouco para as provocações do professor e as falas dos alunos.

O objetivo principal do problema era que os alunos comparassem e chegassem à conclusão de qual plano seria mais econômico e compreendessem a característica de cada um deles, pensando a respeito das expressões que representavam, além de trazer a questão sociocultural da qualidade de vida e do bem-estar do ser humano.

Falamos que eles estavam evoluindo e sentimos que estavam conseguindo resolver as atividades de forma mais rápida e de maneira correta. Já com relação à utilização do Desmos, os mesmos estavam se habituando e conseguindo utilizar a ferramenta, sendo capazes de identificar pontos específicos e o comportamento dos gráficos.

DESENVOLVIMENTO DA ATIVIDADE DO 6º ENCONTRO

TÍTULO DA ATIVIDADE: Plano de Saúde.

CONTEÚDOS: Domínio, imagem e gráfico de uma função afim.

OBJETIVO: Identificar, a partir de uma situação, os valores do domínio e imagem da função e a taxa de variação.

IDEIAS ESSENCIAIS: Conceito de função, taxa de variação e representações de funções.

Uma pessoa vai escolher um plano de saúde entre duas opções: A e B.

PLANO A

Inscrição R\$ 100,00

Cada Consulta R\$ 50,00

PLANO B

Inscrição R\$ 180,00

Cada Consulta R\$ 40,00

O gasto total de cada plano é dado em função do número x de consultas. De acordo com o exposto, responda:

- Qual é a expressão matemática correspondente a cada plano?
- Qual delas tem maior taxa de variação e como isso poderia ser interpretado?
- Em que condições é possível afirmar que: o Plano A é mais econômico; o Plano B é mais econômico; os dois planos são equivalentes.
- Qual é o domínio e a imagem de cada função representadas na situação A e B?
- Pensando na qualidade de vida e no bem-estar do ser humano, pense em uma situação que seja mais vantajosa que o Plano A e o Plano B. (Represente a função e o seu gráfico no Desmos).
- Construa os gráficos das respectivas funções no Desmos e explique o que você pode observar.

(Retirado e adaptado de Dante, 2013).

Quando o problema foi lançado as perguntas já começaram a serem feitas pelos alunos. Sentimos que eles já estavam mais engajados e participativos; pois percebemos que, com esses questionamentos, os alunos começam a pensar sobre o que estavam fazendo e conseguiam ter um entendimento melhor do que estávamos expondo em nossas aulas.

O item “a” pedia que os alunos escrevessem a expressão que representasse a situação. Como já estávamos trabalhando sempre com esse item, decidimos que era importante começar por ele. Poucos minutos depois de apresentarmos o problema, o Aluno A3 já começou a questionar:

A3: Professor, o valor da inscrição não vai mudar, né isso?

PP: Por que você acha isso?

A3: O que vai mudar é a consulta, né?

PP: A consulta?

A3: E o valor de cada inscrição também.

PP: Analise bem o enunciado.

A3: Entendi, professor. Então, $y = 50 \cdot x$ e o 100 é o valor fixo.

PP: Explique como chegou a essa conclusão.

A3: Porque está dizendo, professor, cada consulta é 50 e a inscrição é de 100. Se for 2 consultas, será 100 mais 100, porque 2 vezes 50 é 100.

Diante do questionamento feito, o Aluno A3 rapidamente chegou à expressão esperada para o Plano A. A partir da exploração realizada no problema e da discussão feita com as perguntas levantadas, o aluno conseguiu chegar a um entendimento para a questão referida. A representação verbal, ou seja, a fala do aluno no momento da exploração lhe ajuda bastante no processo de passagem do concreto para o abstrato. Após essa discussão verbal, percebemos que os alunos identificam e conseguem chegar facilmente à expressão algébrica que representa a situação.

Os alunos se deram bem nesse item e se envolveram, como apresentamos a seguir:

Figura 20: Representação algébrica para o problema do Aluno A3

Handwritten algebraic expressions on lined paper:

$$a) \quad y = 100 + 50x$$

$$y = 180 + 40x$$

Fonte: Acervo do pesquisador.

Figura 21: Representação algébrica para o problema do Aluno A6

Handwritten algebraic expressions on lined paper:

$$A = 50x + 100$$

$$B = 40x + 180$$

Fonte: Acervo do pesquisador.

Figura 22: Representação algébrica para o problema do Aluno A7

Handwritten algebraic expressions on lined paper:

$$Y = 100 + 50x$$

$$Y = 180 + 40x$$

Fonte: Acervo do pesquisador.

No item “b” pedimos para que eles pensassem um pouco e, com alguns minutos, cada um deveria falar qual a conclusão a que se chegou. Pensávamos que, nessa alternativa, poucos iriam falar ou apenas aqueles que sempre falam, mas percebemos que, mesmo com acertos e erros, todos falaram a que pensamento chegaram. Vejamos, abaixo:

PP: Alguém conseguir pensar a respeito?

A2: Ainda não, professor.

PP: Pensem mais um pouco e, assim que chegarem ao resultado, me falem. Quero ouvir de todos.

A3: Professor, acho que é a A.

A5: É o plano B.

A6: O plano A tem a maior taxa, por que 50 é maior do que 40.

A4: O plano B, eu acho.

PP: E os demais?

A8: O B, professor.

A7: Eu vou no plano A.

A2: Já pensei e é o plano A

Análise

Ficamos surpreendidos com a fala dos participantes e sabemos que, com esse espaço de discussão entre eles, é notório o alcance de bons resultados. Sabendo que a questão ainda pedia para o aluno dizer como chegou a esse resultado, fomos indagando um por um até todos falarem. Esse processo de partilha de conhecimento é importante para o ensino-aprendizagem de Matemática e, quando trabalhamos na perspectiva da resolução de problemas, o andamento da aula é prazeroso.

Ao questionarmos os alunos sobre como chegaram aos seus resultados, sentimos algumas evidências em relação ao valor da consulta do plano A ser maior do que o plano B ou pelo preço da inscrição está sendo maior no item B do que a do item A. Finalizamos o item explicando a eles que, nesse tipo de função polinomial de primeiro grau, o valor de “a”, ou seja, o valor que acompanha o x, é chamado de taxa de variação.

As respostas aos itens “c” e “d” foram dadas todas através de uma tabela, em que os alunos colocaram uma representando o plano A e outra representando o plano B, a partir disso chegaram às conclusões quando cada plano é mais econômico e quando eles são equivalentes. Em um dos casos, o aluno utilizou o Desmos e fez a tabela através da ferramenta. Os alunos já

conseguiram identificar que os valores de x representavam o domínio e os de y a imagem. Observemos o diálogo abaixo e as imagens de alguns alunos:

A2: Professor, se for de 1 até 7 consultas, o plano A é melhor.

PP: Como você chegou a esse resultado?

A2: Fui fazendo de 50 em 50 e, no outro, de 40 em 40.

PP: A que conclusão você chegou?

A2: Se for igual a 8 consultas, o plano A e B serão tudo a mesma coisa e, depois de 8, o B é mais barato.

PP: E o plano A?

A2: Até 7 consultas, já falei.

PP: E quem seria o domínio e a imagem?

A7: Os valores de x é domínio e os valores de y a imagem.

PP: E quanto vale x e y ?

A3: x é as consultas, aqui é 1, 2, 3, 4, 5, até 10, e y é os resultados das contas. No A, é 150, 200, 250, até outros valores.

PP: Os valores de x e y só são esses?

A3: Não, tem mais, vai depender de quantas consultas serão.




Nesse diálogo, percebe-se que os alunos apresentam uma compreensão mais detalhada sobre as questões relacionadas à tabela, domínio e imagem de uma função. Assim, vimos que, com o andamento das aulas, eles estavam entendendo as ideias essenciais do conceito de função.

Figura 23: Tabela referente aos planos A e B feita pelo Aluno A5

x	$y = 100 + 50x$	x	$y = 180 + 40x$
1	150	1	220
2	200	2	260
3	250	3	300
4	300	4	340
5	350	5	380
6	400	6	420
7	450	7	460
8	500	8	500
9	550	9	540
10	600	10	580

Fonte: Acervo do pesquisador.

Figura 24: Tabela referente aos planos A e B feita no desmos pelo Aluno A8

x	 $50 \cdot x + 100$	 y	 $40 \cdot y + 180$
1	150	1	220
2	200	2	260
3	250	3	300
4	300	4	340
5	350	5	380
6	400	6	420
7	450	7	460
8	500	8	500
9	550	9	540

Fonte: Acervo do pesquisador.

Já no item “e”, os alunos foram levados a pensar em cada situação, fazendo relações com a qualidade de vida e o bem-estar do ser humano, tornando pessoas preocupadas com questões sociais. Veja, a seguir, o relato de um dos alunos:

A3: Professor, se for para pessoas ou famílias que costumam ir mais de 8 vezes ao médico por mês, o Plano B é melhor, vai ser mais em conta.

PP: Por quê?

A3: Vai ser menos gasto que o plano A e, sendo muitas consultas, vai sair ganhando.

Com relação à criação do gráfico no Desmos, alguns questionamentos surgiram e isso se deve ao fato de que esse tipo de situação precisa ser estudado levando em consideração o domínio da função. Os alunos estavam percebendo, com a exploração do gráfico criado, a existência de pontos os quais não seriam válidos para a situação, como perguntado pelo Aluno A5:

A5: Professor, no gráfico A, apareceu o ponto -2 e 0. Como assim?

PP: Isso é porque não foi especificado o domínio. Pode ser -2 consultas?

A5: Não, só se estiver devendo (risos).

PP: E pode dever consulta?

A5: É mesmo, professor. Esse valor não pode. Só x acima de 1.

A partir desse diálogo, é possível perceber que o aluno conseguiu compreender a questão do domínio da função e que, no Desmos, estavam usando valores para todos os reais. Fechamos o momento explicando a eles que, no caso dessas funções, o domínio não são todos os reais, e sim os naturais maiores ou igual a 1.

Análise

A atividade desse encontro permitiu que os alunos percebessem regularidades e diferenças entre duas situações e, a partir disso, pudessem fazer deduções de qual situação seria vantajosa e em qual momento fazer uso de uma ou de outra. Vale salientar a importância de trabalharmos com as representações de função, pois, com a representação tabular, foi fácil perceber em quais condições o Plano A era mais econômico, o Plano B e onde eles eram equivalentes. Sentimos que os alunos estavam evoluindo no entendimento de que as representações têm sua importância para o entendimento do conceito de função, pois, ao lançar o problema, eles quase não tinham dificuldades para representar e explorar os dados nas diferentes representações. Diante disso, entendemos que o uso das representações e a exploração e resolução de problemas devem ser articulados de forma permanente para a boa compreensão do conceito de função, além da ferramenta Desmos que oferece uma boa visualização, levando a compreender pontos importantes de uma função.

Finalizamos o encontro agradecendo a todos os alunos e informando a eles que não haveria encontros na semana posterior, devido ao deslocamento do pesquisador para a sua cidade natal para participar das eleições presidenciais que ocorreria no dia 15 de novembro, remarcando o encontro para o dia 19. Pedimos desculpas, mas para não termos que fazer apenas um encontro na semana, melhor seria adiarmos e todos concordaram.

SÉTIMO ENCONTRO – (19/11/2020)

O sétimo encontro foi realizado depois de uma semana sem nos encontrarmos, pois foi na semana que antecedeu as eleições presidenciais e, devido alguns imprevistos, decidimos que só retornaríamos depois das eleições.

Neste encontro, trabalhamos uma situação relacionada ao tema da saúde que está bastante em alta (sobre a perda de peso) e discutimos alguns conteúdos como domínio, imagem, crescimento e decréscimo de uma função.

Durante a aplicação dessa atividade, sentimos os alunos mais investigativos, sendo que alguns problemas estavam sendo propostos por eles, a partir da exploração; pois, até então, na

maioria das vezes, os alunos só estavam propondo problemas quando era pedido em algum item da atividade trabalhada.

Um total de sete alunos participaram, se engajando nas discussões e tornando aquele encontro mais dinâmico e promissor para boas reflexões.

DESENVOLVIMENTO DA ATIVIDADE DO 7º ENCONTRO

TÍTULO DA ATIVIDADE: Perdendo peso.

CONTEÚDOS: Domínio, imagem, crescimento, decrescimento e gráfico de uma função afim.

OBJETIVO: Refletir sobre múltiplas conexões não matemáticas com temáticas de saúde formulando expressões algébricas.

IDEIAS ESSENCIAIS: Conceito de função, taxa de variação e representações de funções.

Uma dona de casa vivia uma vida sedentária, pois, afora seus afazeres domésticos, ela não praticava atividades esportivas e também se alimentava muito mal, ingerindo poucas verduras e frutas em sua alimentação diária. Com isso, a sua massa chegou a 100 kg. Daí, ela foi ao médico, porque precisava emagrecer e, sob orientação médica, fez um regime.

Sabendo que o peso dessa dona de casa era de 100 kg e ela emagreceu 5 quilos por semana, podemos estabelecer uma relação entre o peso e o tempo. Sabendo que o peso ideal dessa dona de casa era de 65 kg, pede-se:

- a) Elaborem uma tabela, relacionando o tempo relativo ao peso perdido por essa dona de casa por semana;*
- b) Escreva a expressão matemática que representa o peso versus tempo;*
- c) Quantas semanas serão necessárias para que a dona de casa adquira o peso ideal?*
- d) Que grandeza depende da outra?*
- e) Se ela tivesse emagrecido 3 quilos por semana, em quanto tempo ela chegaria aos 65 quilos?*
- f) Represente graficamente essa função no Desmos;*
- g) Qual o comportamento dessa função? Ela é crescente ou decrescente?*
- h) Crie uma situação usando a temática abordada nesse problema.*

(Retirada e adaptada de Silva, 2013).

Apresentamos a situação para os alunos e foi dado um tempo para que eles lessem a situação e, em seguida, iríamos discutir sobre a situação. A Aluna A3 foi a primeira a se

pronunciar, dizendo que tinha enviado algo no *WhatsApp* com um questionamento que nos levou a pensar:

A3: Professor, mas o que garante que seja 5 kg toda semana?

PP: Suponha que haja um padrão e que esse padrão é de 5 por semana.

A3: Entendi.

Entendemos que o pensamento da aluna foi condizente com a situação real, pois nem sempre a quantidade de perda de peso vai ser a mesma, o valor pode variar para mais ou para menos, sendo quase que impossível alguém ao realizar uma dieta ter a mesma quantidade de massa perdida a cada semana. Percebe-se que o pensamento da aluna foi além da situação e trouxe algo a se refletir.

Dando continuidade ao nosso encontro, constatamos que os alunos conseguiram elaborar a tabela relacionando o tempo e o peso.

Em seguida, o Aluno A4 começou a mensurar que, se fosse 2,5 kg por semana, o tempo dobrava, enquanto se fosse 10 kg, o tempo seria menor. Ao ser indagado pelo professor sobre como ele chegou a isso, ficamos impressionados com sua explicação:

A4: Professor, se fosse 2,5 kg por semana, ela passaria o dobro do tempo para chegar aos 65 kg, se fosse 10 kg, o tempo seria a metade.

PP: Como você chegou a essa conclusão?

A4: Porque, se está dando o 5 e 2,5 é a metade desse número, então os dias vão dobrar, vai passar mais tempo; já quando é 10 kg, aumentou os quilos, aí o tempo vai diminuir. Um é inverso do outro.

Percebemos que o Aluno A4 foi além da exploração e resolução de problemas, sendo capaz de propor outra situação para o problema, compreendendo a variação entre as variáveis envolvidas, pois trata-se de grandezas inversamente proporcionais, ou seja, quando a quantidade de quilogramas aumenta, ela passará menos tempo para chegar ao seu peso ideal, já quando a quantidade diminui o tempo será maior.

Os itens “a”, “b”, “c” e “d” foram discutidos e resolvidos rapidamente pelos alunos, pois eles já estavam familiarizados em realizar exercícios desse tipo, foi um dos avanços que percebemos do início das oficinas até os encontros atuais. Não sentimos nenhuma dificuldade na discussão deles, pois, ao elaborar a tabela, eles já visualizaram o tempo que ela chegará ao seu peso ideal.

O item “e” perguntava qual era o tempo que ela chegaria ao seu peso ideal se a cada semana perdesse 3 kg e fomos imediatamente interrompidos por um dos alunos indagando o seguinte:

A2: Professor, se for perdendo 3 kg a cada semana, começando com 100 kg, ela irá chegar aos 65 kg depois de 11 semanas, não é um valor exato; agora, se ela estiver pesando 101 kg, ela irá levar 12 semanas para chegar ao peso ideal.

PP: Mas, por que 101 kg?

A2: Porque irá dar um número inteiro, que é 12.

PP: E se for 100 kg, tem o quê?

A2: O tempo não vai ser exato.

Vejamos o quanto é crítico o pensamento do aluno, pois ele almeja que o tempo seja um número inteiro, tendo em vista que o peso sendo 100 kg e perdendo 3 kg por semana não chegará a um valor de semanas inteiros, sendo assim, um número entre 11 e 12.

Percebemos a importância do trabalho da exploração de problemas, pois o aluno chegou à solução do problema, mas foi além e pensou sobre outras possibilidades para discutir sobre a situação-problema.

Análise

Neste encontro, foi possível perceber que os alunos já estavam bem mais participativos e tendo atitudes ao refletir sobre a situação-problema discutida, não estando apenas preocupados em resolver as questões, mas de ir além e desenvolverem seu pensamento matemático, além de aguçar a sua criatividade ao entender outras vertentes do problema tratado, de acordo com Singer, Ellerton e Cai (2013), que destacam as contribuições da proposição de problemas no avanço de competências para os alunos, tendo, assim, uma compreensão mais vasta. Desse modo, nessa atividade os alunos estavam interessados em discutir, entender mais sobre o problema e questionar.

Depois de toda a discussão, estávamos nos aproximando da parte final do nosso encontro e alguns alunos já estavam indagando sobre a representação gráfica da função. No momento em que os alunos acessaram o Desmos para visualizar o comportamento do gráfico, pedimos para que eles colocassem tanto a forma algébrica quanto os valores na tabela para que pudéssemos analisar as duas representações gráficas. Com poucos minutos, já fomos chamados pelo Aluno A7:

A7: Professor, eu mandei uma foto, o senhor dar uma olhadinha?

PP: Irei olhar agora.

PP: O que você percebeu?

A7: Então, professor, quando coloquei a expressão algébrica ficou a reta que é o gráfico e a tabela ficou os pontos.

PP: O que você entende por isso?

A7: O gráfico dessa função deve ser apenas alguns valores do gráfico. Porque o domínio é a partir de 0 até outros valores, esses negativos não entram. E só deve ir até o valor 65 de y que é o peso ideal.

PP: Será que só pode ir até 65.

A7: Sim, professor, ou, então, chegar a zero, se, por acaso, pedisse até quando ela precisa emagrecer para chegar em 0 kg.

PP: Mas, tem como uma pessoa chegar a 0 kg?

A5: Não.

A4: Ela morria.

A7: Não, professor, mas se, no caso, não fosse kg e sim outra medida.

PP: Entendi. Qual seria o valor de x para que chegasse ao valor de y igual a 0.

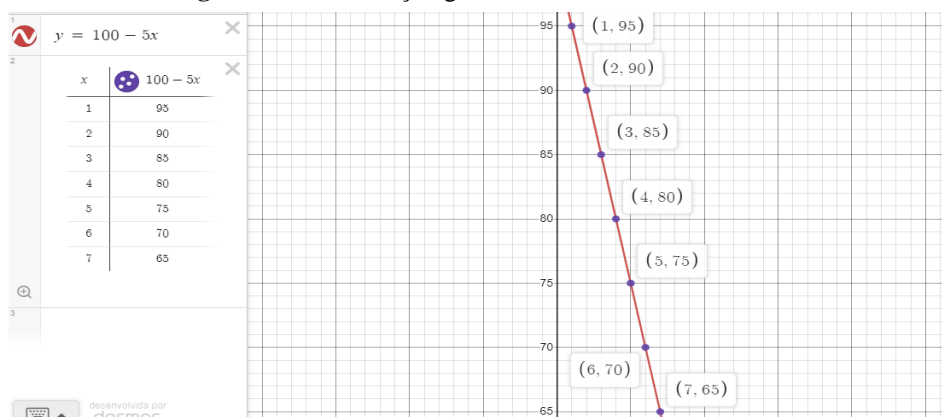
A7: 20, porque 20 vezes 5 é 100 e 100 menos 100 é 0.

PP: Como você chegou a esse resultado?

A7: Procurei o número que multiplicado com 5 dê 100.

PP: Ok, muito bem.

Figura 25: Visualização gráfica no desmos do Aluno A7



Fonte: Acervo do pesquisador.

De posse disso, percebemos que algumas regularidades sobre a representação gráfica de uma função e a relação com domínio e imagem já estavam sendo percebida pelos alunos. Veja que, no diálogo, o professor instiga o aluno a fim de que ele alcance uma melhor

aprendizagem e ele tenha respostas para as perguntas e novos questionamentos. No momento em que o aluno trouxe valores que ultrapassavam o do preço ideal, notou-se que ele estava relacionando com outra situação, pois sabia que uma pessoa não poderia chegar aos 0 kg, mas o propósito era de refletir sobre a representação gráfica da expressão algébrica e da tabela no Desmos.

Essa questão serviu para discutirmos sobre o crescimento e decréscimo do gráfico que representava essa situação e mostramos algumas regularidades que faziam aquele gráfico ser decrescente e um dos alunos percebeu que as grandezas eram inversamente proporcionais.

Análise

Essa atividade foi altamente discutida e teve grande participação dos alunos. O papel do professor contribui bastante para o processo de exploração e proposição, desde que seja experiente e saiba conduzir todo o processo, como discutem Singer e Cai (2013). Percebe-se também que, com o auxílio do Desmos, os alunos formulam representações numéricas na construção de tabelas; elaboram representações algébricas na descoberta da expressão algébrica da função afim; manipulam a representação gráfica da função, fazendo comparações. Constatamos que foram levantadas múltiplas representações para função que estava, inicialmente, representada verbalmente dentro do contexto apresentado pela situação-problema.

O encontro foi finalizado devido ao fato de já estarmos passando do horário combinado, sentimos que esse encontro foi satisfatório e proveitoso nos deixando grandes reflexões e excelentes compreensões sobre o conceito de função. Nos despedimos e avisamos que esperaríamos todos para o oitavo encontro no dia seguinte.

OITAVO ENCONTRO (20/11/2020)

Na realização do oitavo encontro, contamos com a participação de cinco alunos, já que dois informaram que não iriam conseguir participar, pois tinham alguns imprevistos e precisariam resolver, tivemos que dar continuidade às nossas oficinas só com aqueles estudantes presentes.

A situação trabalhada nesse encontro se referia à comissão sobre vendas, para compreendermos mais sobre as ideias essenciais de função com o uso das representações múltiplas, abordando a covariação e a taxa de variação.

No desenvolvimento dessa aplicação, os alunos continuaram mais participativos, indagando o professor, vendo outras possibilidades para o problema, não querendo apenas chegar ao resultado, mas entendendo o porquê daquele resultado e possibilitando uma análise mais ampla do problema e do conteúdo envolvido.

O objetivo conceitual desse encontro foi compreender a função afim fazendo uso das representações múltiplas de função com o aplicativo desmos.

DESENVOLVIMENTO DA ATIVIDADE DO 8º ENCONTRO

TÍTULO DA ATIVIDADE: Comissão sobre vendas

CONTEÚDOS: Função Afim

OBJETIVO: Compreender a função fazendo uso das representações múltiplas.

IDEIAS ESSENCIAIS: Conceito de função; covariação e taxa de variação; combinação e transformação de função e representações múltiplas de função.

O salário base de um vendedor em uma loja de preço único do Município de Monteiro-PB é de R\$ 1.200,00. Para incentivar o crescimento das vendas dos produtos e aumentar seu lucro, o proprietário da loja oferece, aos seus vendedores, uma comissão de R\$ 0,60 por venda de cada produto.

- a) *Para cada produto vendido, o salário do vendedor é aumentado de quanto?*
- b) *Se em um mês o vendedor vender 10 produtos, que salário receberá no fim do mês? E se vender 50 produtos? E 100? E 200? E 500?*
- c) *Se você fosse escrever um bilhete ao dono dessa loja, explicando como o vendedor deve fazer para calcular seu salário mensal, o que você falaria?*
- d) *Maria, uma das vendedoras da loja, precisa faturar R\$ 1.500,00 para cobrir umas despesas que aumentaram no mês. Quantos produtos ela deve vender para conseguir este salário? Explique como você chegou ao resultado.*
- e) *Escreva uma sentença matemática para esta situação.*
- f) *Represente graficamente essa função no Desmos.*
- g) *Qual o comportamento dessa função? Ela é crescente ou decrescente?*
- h) *Pensando que você é um empreendedor e que quer beneficiar seus empregados, a partir das vendas mensais, elabore um problema para mostrar como será esse benefício.*

(Retirada e adaptada de Brandão, 2014, p. 161).

Ao apresentar a situação, demos um tempo para eles lerem e, em seguida, começamos a discutir e os alunos começaram a se pronunciar, sempre fazendo indagações aos questionamentos deles:

A6: Professor, o salário vai sempre aumentar os 60 centavos.

PP: Mas, a partir de que ele aumenta?

A6: Veja, se ele vender uma peça ele ganha 60 centavos.

PP: Isso e o que mais você percebe?

A6: Que varia de acordo com a quantidade.

A2: Professor, o salário vai aumentar dependendo da venda dos produtos, pois se vender muito o salário será mais.

PP: E os demais, o que têm a dizer?

A4: Professor, se fosse um real por peça produzida e se, ao mês, fosse vendida 100 peças por uma pessoa, ela ganharia 100 reais de comissão, né isso?

PP: Muito bem. Que relação existe?

A4: O salário vai aumentar se vender muitas peças.

A2: Esse dono é sabido [risos].

Com esse diálogo, notamos que os alunos já estavam familiarizados com as ideias de variação entre grandezas e conseguiam fazer relações entre as grandezas envolvidas. Percebemos um avanço nas falas dos alunos, pois é uma fala com propriedade e sem medo de errar, acreditamos que eles compreenderam que todos estávamos ali para aprender e isso foi fundamental para alcançarmos uma compreensão melhor desse conceito de função afim.

O trabalho de exploração de problemas promove uma autoridade ao aluno ao expor suas opiniões e dúvidas, vai além da resolução de problemas. Mesmo considerando o resultado importante, entendemos que o processo para se chegar a tal é mais instigante e desperta um desejo de ir além das respostas.

Nessa atividade, os alunos logo chegaram aos valores que seriam pagos caso as quantidades fossem 50, 100, 200 e 300, entre outros valores. Identificaram isso logo no ponto de partida ao ver que o valor a ser pago é diretamente proporcional ao valor da comissão, como mostra o diálogo abaixo:

A6: Professor, diferente do outro problema de ontem, nessa aqui quando a comissão aumenta o valor do dinheiro aumenta.

PP: Como você vê isso?

A6: Aqui, professor, “tá” aumentando sempre a comissão e o valor do salário.

A4: Então, a função já vai ser crescente.

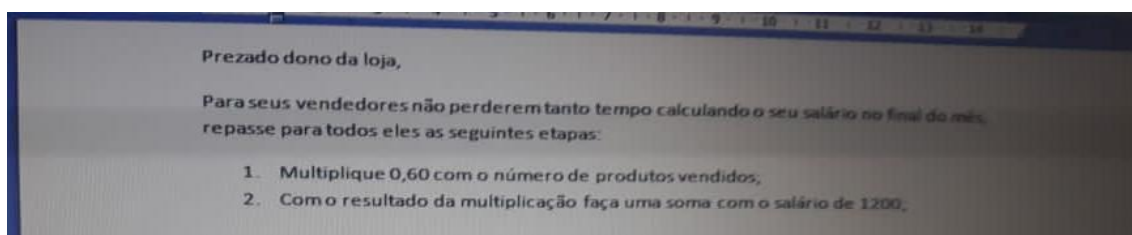
PP: Muito bem!

Análise

Percebe-se que o trabalho com a exploração, resolução e proposição de problemas leva o aluno a entender um conteúdo sem ter que definir, de início, tudo sobre determinado conceito, essas ideias são defendidas na Resolução de Problemas por Onuchic e Allevato (2011). Com essas falas, constatamos que a proposição pode ocorrer no início, antes ou depois da exploração e da resolução e vice-versa; os alunos, ao se depararem com uma situação, eles analisam e, ao mesmo tempo, trazem novas indagações, outros significados e isso possibilita uma melhor aprendizagem e compreensão do conteúdo. Andrade (2017) traz essas ideias como “caixa de ferramentas”, uma vez que uma ajuda e enaltece o processo da outra.

Continuando com a atividade, o Aluno A8 perguntou se poderia resolver as questões a partir do editor de textos do seu *notebook* e logo falamos que sim, entendendo que ele estava se aliando a novos recursos para desenvolver as atividades. Logo, em seguida, ele enviou a foto do item “c”.

Figura 26: Bilhete escrito pelo Aluno A8



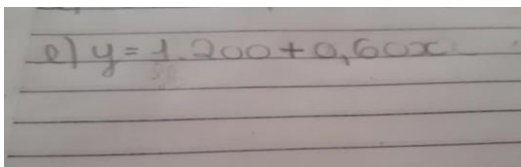
Fonte: Acervo do pesquisador.

Na Figura 26, o aluno A8 escreve o bilhete mostrando como deve proceder para fazer o cálculo do salário mensal de uma pessoa de acordo com a comissão recebida por venda realizada. Nessa atividade o aluno tinha que mostrar sua criatividade como também o desenvolvimento da escrita.

Os itens “d”, “e” e “g” foram todos discutidos quando os alunos estavam elaborando o bilhete, já que, no início do problema, todos já conseguiam escrever a situação Matemática para representar aquela situação. O Aluno A4, em uma de suas falas, argumentou que a função seria crescente já que os valores eram crescentes em ambas as variáveis.

Nas Figuras 27 e 28, é mostrada a sentença Matemática que representava a situação da comissão de vendas dos Alunos A6 e A5, comprovando que eles já apresentam conhecimento de encontrar essa expressão.

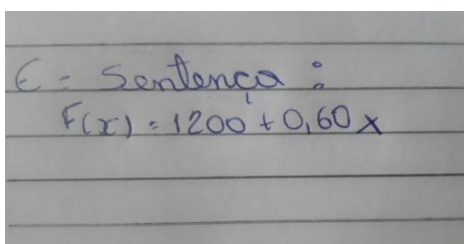
Figura 27: Sentença Matemática do Aluno A6



$$e) y = 1200 + 0,60x$$

Fonte: Acervo do pesquisador.

Figura 28: Sentença Matemática do Aluno A5



$$E = \text{Sentença:}$$

$$F(x) = 1200 + 0,60x$$

Fonte: Acervo do pesquisador.

Na representação gráfica, nos atentamos novamente ao pensamento sobre o gráfico da função que era representado pela expressão algébrica e para pontos restritos do domínio, pois, mais uma vez, a função não admite valores negativos. E foi a partir desse momento que o aluno A5 levantou o seguinte questionamento:

A5: Professor, caso o problema fosse 0,60 para peças vendidas e menos 0,60 para as peças não vendidas, o gráfico poderia ser com todos os valores?

PP: Vamos deixar os outros alunos pensarem a respeito disso!

Com essa pergunta, o professor-pesquisador parou e pensou um pouco para que a turma refletisse sobre essa pergunta. A partir desse momento, outros alunos se pronunciaram também:

A2: Ia diminuir 60, então, do salário, né, professor?

PP: 60 reais?

A2: Não, 60 centavos.

A8: Mas como saber das peças não vendidas?

PP: Pois é, pensem aí.

A5: Poderia dizer um número a ser vendido quem passasse desse número ganharia 60 centavos a cada peça vendida e quem não chegasse ao número teria menos 60 centavos, poderia ser por dia ou semana.

PP: E seria função?

A5: Sim, com domínio sendo os positivos e negativos. Se não chegasse ao valor, diminuiria no seu salário.

Vimos o quanto é preciso que o professor esteja preparado para mediar uma aula em que se trabalhe a exploração, resolução e proposição de problemas, pois os alunos são capazes de pensar muito além do que imaginamos e chegar a provocações que possam não estar ao alcance do entendimento do professor.

Entendemos que a proposição de problemas pode dar outros rumos ao planejamento do professor e que é um caminho não tão fácil de percorrer, pois não é possível adivinhar o que está por vir, mas é preciso estar preparado para encarar a situação que poderá vir, como afirma Martins (2019).

Encerramos o encontro com a certeza de que as discussões só estavam melhorando a cada encontro e que isso estava contribuindo com a aprendizagem dos alunos e com a capacidade de compreender o conceito de função a partir da exploração, resolução e proposição de problemas.

NONO ENCONTRO (26/11/2020)

O nosso penúltimo encontro foi realizado na quinta-feira, dia 26 de novembro de 2020. Abordamos uma situação-problema intitulada “O problema da máquina”, para discutirmos sobre o conceito de função, as representações múltiplas de uma função, além da covariação de taxa de variação.

Nesse encontro, participaram sete alunos. Tivemos boas discussões e a participação dos alunos sempre se engajando para discutir sobre as questões, levantar novos questionamentos e contribuir em grande potencial com o aprendizado.

Iniciamos falando que estávamos nos aproximando do fim das oficinas e escutamos depoimentos de alunos falando do quanto estavam gostando das aplicações e das tardes de quintas e sextas-feiras. Isso, para nós, é gratificante e nos motiva a sempre procurar fazer o possível e o impossível para que os nossos alunos adquiram um ensino com mais compreensão.

DESENVOLVIMENTO DA ATIVIDADE DO 9º ENCONTRO

TÍTULO DA ATIVIDADE: O problema da máquina.

CONTEÚDOS: Função Afim

OBJETIVO: Estudar a função afim e suas diferentes representações.

IDEIAS ESSENCIAIS: Conceito de função; covariação e taxa de variação; combinação e transformações de funções e representações múltiplas de função.

Uma máquina produz um tipo de peça destinada às montadoras de automóveis. Essa máquina tem um custo fixo diário de R\$ 150,00 reais mais R\$ 7,50 por peça produzida.

- a) *Escreva a lei da função que permite calcular o custo c para se produzir p peças.*
- b) *Qual a variável dependente e a variável independente?*
- c) *Construa uma tabela de valores que relacione as variáveis c custo e p preço.*
- d) *Construa, no Desmos, o gráfico da função que representa esse problema.*
- e) *Supondo que o custo fixo diário fosse de R\$ 50,00, ao analisar o gráfico da função, o que poderíamos dizer?*
- f) *Em certo dia, a máquina apresentou problemas e cada peça produzida com defeito foi descontado do custo fixo da máquina. Qual a lei da função que representa esse novo comportamento da máquina?*
- g) *Represente graficamente essa função no Desmos.*
- h) *Qual o comportamento dessa função, ela é crescente ou decrescente?*
- i) *Qual a quantidade de peças com defeitos deve ser produzida para que o custo seja de R\$ 0,00? Analise graficamente e diga o que esse valor representa.*
- j) *A partir de quantas peças produzidas com defeito o proprietário da máquina terá um saldo negativo?*
- k) *A partir dessa situação, elabore um problema em que o custo fixo diário seja o dobro do proposto nesse problema.*

(Retirada e adaptada de Abreu, 2018, p. 150).

Por se tratar de um problema semelhante aos que já havíamos discutidos nos encontros anteriores, identificamos que os alunos não sentiram dificuldades em resolver os primeiros questionamentos, isso nos mostra a eficácia e a contribuição ao trabalhar com situações-problemas já vistas anteriormente; pois os alunos conseguem fazer conexões, chegando, assim, ao aprendizado.

Figura 29: Resolução das primeiras questões pelo Aluno A5

The image shows two parts of a student's work. On the left, there is a handwritten equation: $a - f(c) = 7,5 \cdot p + 150$. Below it, there are two lines of text: $b - c \rightarrow$ dependente and $p \rightarrow$ independente. On the right, there is a table with four columns: 'e. Valor da peça produzida (cada)', 'Quantidade de peças (P)', 'Valor fixo da máquina', and 'Total (C)'. The table contains five rows of data, each with a value of R\$ 7,50 in the first column and a corresponding quantity in the second column. The third and fourth columns are calculated based on these values. Below the table, there is a handwritten note: 'Exemplo: $f(c) = 7,5 \cdot p + 150$ '.

e. Valor da peça produzida (cada)	Quantidade de peças (P)	Valor fixo da máquina	Total (C)
R\$ 7,50	5	R\$ 150,00	R\$ 172,50
R\$ 7,50	2	R\$ 150,00	R\$ 165,00
R\$ 7,50	4	R\$ 150,00	R\$ 180,00
R\$ 7,50	5	R\$ 150,00	R\$ 187,50
R\$ 7,50	6	R\$ 150,00	R\$ 195,00

Exemplo: $f(c) = 7,5 \cdot p + 150$

Fonte: Acervo do pesquisador.

A exploração de problemas, nessa atividade, foi realizada através do Desmos, por meio do gráfico criado e pela expressão Matemática que eles escreveram para representar a situação da produção de peças produzidas por uma máquina. Alguns questionamentos foram surgindo com a participação dos alunos.

Sobre a análise do gráfico da função, supondo que o custo fixo diário fosse de apenas R\$ 50,00, surgiram algumas indagações:

A2: Professor, se o custo fixo for de R\$ 50,00, o gráfico é o mesmo, só que fica um pouco abaixo do gráfico da primeira expressão.

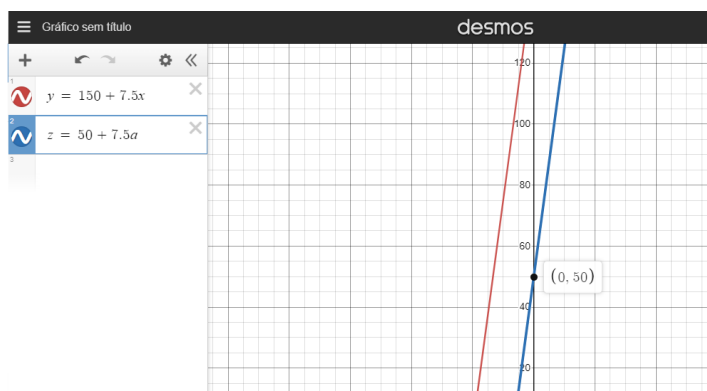
PP: E qual é a expressão?

A2: $50 + 7,5$ vezes x que é o gráfico azul.

PP: Que gráfico?

A2: Vou mandar para o senhor.

O Aluno A2 já tinha encontrado o gráfico da nova função e comprovou que ele estaria abaixo do gráfico da função principal, isso porque o ponto de intersecção com o eixo y do gráfico que ele se refere é $(0, 50)$, enquanto o da primeira função é $(0, 150)$. Para entendermos melhor, vejamos a Figura 30 enviada pelo Aluno A2, na qual mostrou-se as duas representações gráficas:

Figura 30: Representação gráfica das 2 expressões do Aluno A2

Fonte: Acervo do pesquisador.

Na Figura do Aluno A2, o gráfico vermelho representa expressão $y = 150 + 7,5x$ e o gráfico azul a expressão $y_2 = 50 + 7,5x_2$. O aluno rapidamente percebeu o comportamento do gráfico, ou seja, estão na mesma posição, o que muda é a intersecção com o eixo y. Em seguida, houve mais questionamentos:

A4: Professor, então, se eu aumentar o valor fixo diário, o gráfico vai sempre aumentar verticalmente, no eixo y; se diminuir, ele ficará mais próximo dos valores negativos.

PP: Como assim?

A4: Assim, professor, se o valor do custo diário for mais, o gráfico vai subindo no valor de y, nessa parte que fica em “pé”, já se os valores do custo diário for menos, aí o gráfico vai descendo para os números menores.

PP: Entendi.

A5: Eu também percebi isso, professor, assim que coloquei a fórmula no Desmos.

PP: Percebeu o quê?

A5: Que o gráfico desce e sobe dependendo desse valor diário.

PP: Esse é o entendimento de taxa de variação.

Depois desses apontamentos, que foram riquíssimos para o encontro, falamos a respeito da taxa de variação e do coeficiente angular, o qual é responsável por tudo aquilo que os alunos estavam percebendo, mas não estavam conseguindo observar essa atribuição ao valor de “a” na função afim.

Análise

Percebemos a contribuição que problemas análogos aos trabalhados em encontros anteriores, resolvidos pelos alunos, ajudam na exploração e resolução de uma situação atual.

De fato, quando um aluno resolve um problema, ele está utilizando artefatos já usados anteriormente, seja a forma de resolver, o resultado encontrado, a maneira ou a própria experiência adquirida anteriormente, proporciona uma resolução mais rápida. O aplicativo Desmos nos mostrou o quanto é importante o trabalho que é feito na exploração de problemas, pela ferramenta de manipulação e representação gráfica que oferece estimulando a criatividade e a construção do conhecimento.

Dando continuidade ao desenvolvimento da atividade, fomos indagados pelo Aluno A8 sobre o item “f”, o qual responderia, posteriormente, o item “h”:

A8: Professor, nessa letra f tem que usar o sinal de menos, né?

PP: É? Por quê?

A8: Eu fiz $150 \text{ menos } 7,50 \text{ vezes } x$, porque cada peça produzida com defeito será descontada do valor fixo se cada peça custa 7,50, então dá isso.

PP: É isso mesmo?

A8: É, professor, fiz até o gráfico e ele é decrescente, quantos mais peça produzida, menos dinheiro ficará.

PP: Muito bem, A8, me mande as fotos. E os demais o que pensaram?

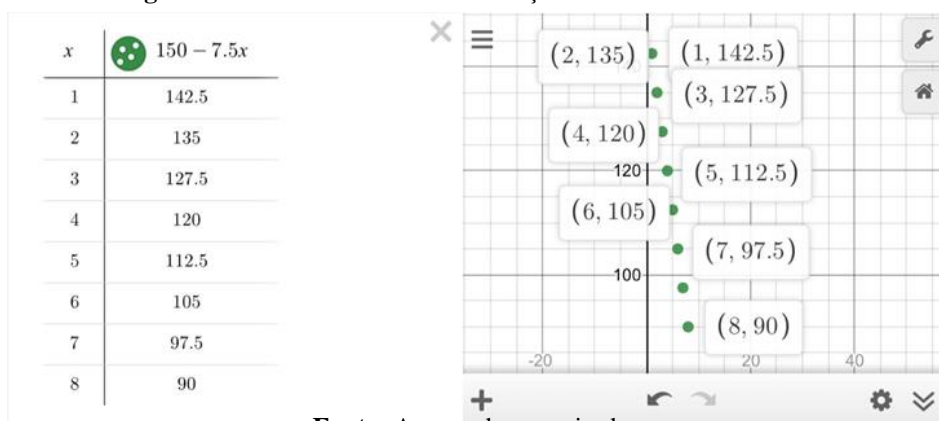
A2: Eu fiz de menos também.

A4: Fui fazendo na tabela, percebi o mesmo.

PP: Que mesmo você percebeu?

A4: Que os valores de x vão aumentando e o da imagem, que é y , diminuindo, como na aula da semana passada que a função era decrescente.

Vejamos o quanto já está acelerado o pensamento dos alunos, pois eles estão conseguindo ir além e já perceberem coisas mesmo antes de serem indagados, isso nos mostra a potencialidade do ensino nessa perspectiva, mostrando que os alunos estão compreendendo o conteúdo que vem sendo estudado. E, como foi falado anteriormente, a importância de trabalharmos situações semelhantes oferece mais subsídios aos alunos para resoluções e conhecimentos futuros. Observamos, na figura abaixo, a resolução no Desmos do Aluno A4.

Figura 31: Print do Desmos da resolução do item “f” do Aluno A4

Fonte: Acervo do pesquisador.

Análise

Esta atividade propiciou, aos alunos, entender que uma função pode passar por um processo de transformação dando origem a uma nova função, mesmo estando se referindo a mesma situação só que com contexto diferentes; permitiu, ainda, que eles percebessem o comportamento do gráfico no Desmos e fizessem o estudo do crescimento e do decréscimo, a partir da utilização do aplicativo, de modo mais eficiente; por fim, puderam fazer uso de diferentes representações para discutir o problema e chegar às suas resoluções, ou seja, fazendo uso das representações.

Quando estávamos nos aproximando do final da atividade, o Aluno A5 nos questionou a respeito da seguinte situação: se o custo fixo fosse R\$ 200,00, cada peça produzida fosse R\$ 7,50 e produzida com defeitos fosse descontado R\$ 5,00, a situação ainda representaria uma função?

Diante desse fato, explicamos a ele que deveria ser feito um estudo sobre as peças produzidas com defeitos e as peças produzidas sem defeitos e, em seguida, seria necessário realizar um comparativo. Posteriormente, fizemos outro questionamento ao aluno:

PP: Tomando essa sua situação, iria haver 1 ou 2 expressões matemáticas para representar?

A5: Creio que seria duas, professor.

A2: Duas, professor. Uma para peças produzidas normais e outra pra peças produzidas com defeitos.

PP: Quem discorda?

A8: Eu também acho, professor.

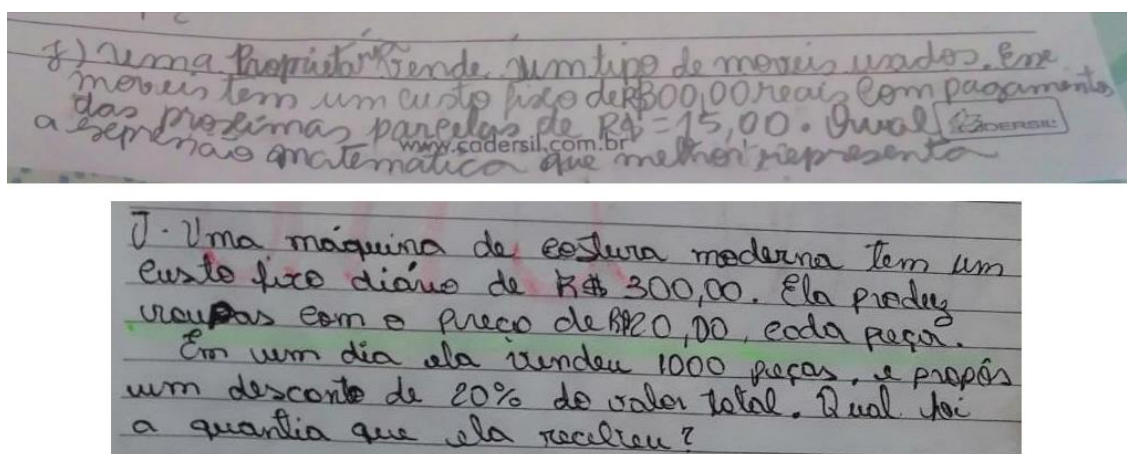
Constatamos que os alunos estavam conseguindo propor novos problemas a partir da situação trabalhada e que esses problemas poderiam ser discutidos com mais calma e detalhes,

mas, devido ao tempo, tínhamos que concluir o encontro e finalizar, pois já estávamos passando do horário combinado e alguns tinham que sair.

Com a utilização da tabela, os alunos conseguiram chegar ao total de peças produzidas com defeito em que o proprietário começaria a obter saldo negativo, que, no caso, seria os valores de x maiores do que 20.

Na figura a seguir, trazemos dois problemas produzidos pelos Alunos A3 e A5, como não tivemos tempo para discutir, mas analisamos cada um deles junto aos participantes da oficina.

Figura 32: Proposição de problemas dos Alunos A3 e A5



Fonte: Acervo do pesquisador.

Finalizamos o nosso encontro perguntando se os alunos tinham mais algum questionamento, se tinham alguma dúvida ou esclarecimento; diante das respostas e do não pronunciamento de nenhum dos participantes, agradecemos a participação de todos e enaltecemos a presença deles no nosso último encontro.

DÉCIMO ENCONTRO – Data 27/11/2020

Iniciamos o nosso último encontro com clima de despedidas já, em que o professor-pesquisador agradeceu a todos pela participação durante os dez encontros e o quanto estávamos felizes por ter contribuído com a aprendizagem de cada um deles. Ouvimos muitas coisas boas dos alunos, que se mostraram interessados e engajados com cada um dos encontros.

No décimo encontro, trabalhamos mais uma situação-problema sobre o conteúdo de função afim, dessa vez o problema das máquinas, que tinha como objetivo principal entender a função afim em diferentes contextos que representam mais de uma expressão diferenciando uma expressão da outra e encontrando pontos comuns.

Neste encontro, não apresentamos item por item, achamos melhor apresentar logo alguns dos itens da questão, para que, na discussão, já fôssemos encontrando as soluções e dando prosseguimento à atividade.

Estavam presentes os participantes que vinham frequentando os encontros anteriores, iniciamos apresentando alguns *insights* dos encontros e pedimos, mais uma vez, que tudo o que eles fizessem nos mandassem fotos, pois os registros de cada um seriam importantes para o nosso trabalho.

DESENVOLVIMENTO DA ATIVIDADE DO 10º ENCONTRO

TÍTULO DA ATIVIDADE: Problema das gráficas

CONTEÚDOS: Função Afim

OBJETIVO: Entender a função afim em contextos que representam mais de uma representação e diferenciar as expressões matemáticas que são expressas em cada situação.

IDEIAS ESSENCIAIS: Conceito de função; covariação e taxa de variação; representações múltiplas de função.

Uma empresa de publicidade solicitou orçamento às Gráficas A e B para a impressão de folhetos de propaganda. Na Gráfica A, o custo de montagem do folheto é de R\$ 150,00 e cada folheto custa R\$ 0,30. Na Gráfica B, o custo de montagem do folheto é de R\$ 90,00 e cada folheto custa R\$ 0,50. Com base nestes dados:

- a) Escreva a expressão matemática para calcular o custo de produção de x folhetos para as duas gráficas:*
- b) Pretendo fazer uma compra de 450 folhetos. Em qual gráfica sairá mais vantajoso realizar essa compra?*
- c) Eu tenho R\$ 1 200,00 para serem comprados de folhetos. Em qual das fábricas eu comprarei a maior quantidade de folhetos?*
- d) A partir do exposto no problema, qual é a variável dependente e independente?*

- e) No mês de Aniversário da Gráfica A, os gerentes lançaram uma promoção espetacular, em que cada folheto custaria R\$ 0,15, ou seja, a metade. Qual a nova expressão matemática que usaríamos para calcular o valor a ser pago por certa quantidade de folhetos? E, se você fosse gerente da Gráfica B, que promoção você lançaria para não ficar atrás?
- f) Faça uma tabela com três colunas para representar o custo de 0, 100, 200, 300, 400, 500 e 600 folhetos nas duas fábricas.
- g) Em qual quantidade de folhetos as duas gráficas possuem o mesmo custo?
- h) Agora, você é o gerente, qual seria sua logística de vendas para a sua fábrica. Pense e elabore uma situação problema!

(Retirada e adaptada de Boschetto, 2015, p. 79).

Os alunos já estavam fazendo uso do Desmos ao iniciar a atividade, essa utilização é, na maioria das vezes, para representar a forma gráfica ou tabular. Isso nos mostra a independência dos alunos e a utilização de outras ferramentas além do caderno. Veja, a seguir, os questionamentos de alguns alunos em relação aos primeiros itens da atividade:

A2: Professor, essa questão “a” a pessoa já sabe só em ler o problema, só ver as variáveis.

PP: Quais são as variáveis?

A3: Dependente y e independente x.

A2: O custo de montagem e o preço de cada folheto.

PP: Quem varia?

A2: O número de folhetos varia, o preço continua o mesmo, só que tem dois: um para a Gráfica A e outro para a Gráfica B.

A5: Professor, no Desmos, eu vi que quando x for 300 ambas as gráficas cobrarão 240 reais.

PP: Quem é esse 300 e 240?

A5: 300 é o número de folhetos e 240 o valor a ser pago.

PP: O que vocês observam com relação a isso?

A2: A partir de 300 folhetos, é melhor comprar na Gráfica A.

PP: Alguém discorda?

A4: Não.

A8: Não, é isso mesmo. Até 300 é melhor a Gráfica B, passando disso, a Gráfica A vai ser sempre mais barato.

Análise

Com relação aos primeiros itens da atividade, constatamos que os alunos estavam se dando muito bem, pois, nas ideias essenciais de função, eles já conseguiam identificar as variáveis dependente e independente, quais grandezas estavam envolvidas na situação, qual variava e em função de quê; os conceitos e as ideias que trabalhamos desde o primeiro encontro. Percebemos, também, que, a partir da representação tabular, os alunos conseguiram encontrar a partir de qual valor seria mais vantajoso optar pela Gráfica A ou Gráfica B.

O Aluno A8 nos relatou que pôde observar, a partir dos valores demarcados no gráfico, que, no ponto (300, 240), havia uma alteração dos pontos. Vejamos:

A8: Professor, na tela do Desmos, dá para ver direitinho onde a Gráfica A vai ser melhor que a Gráfica B.

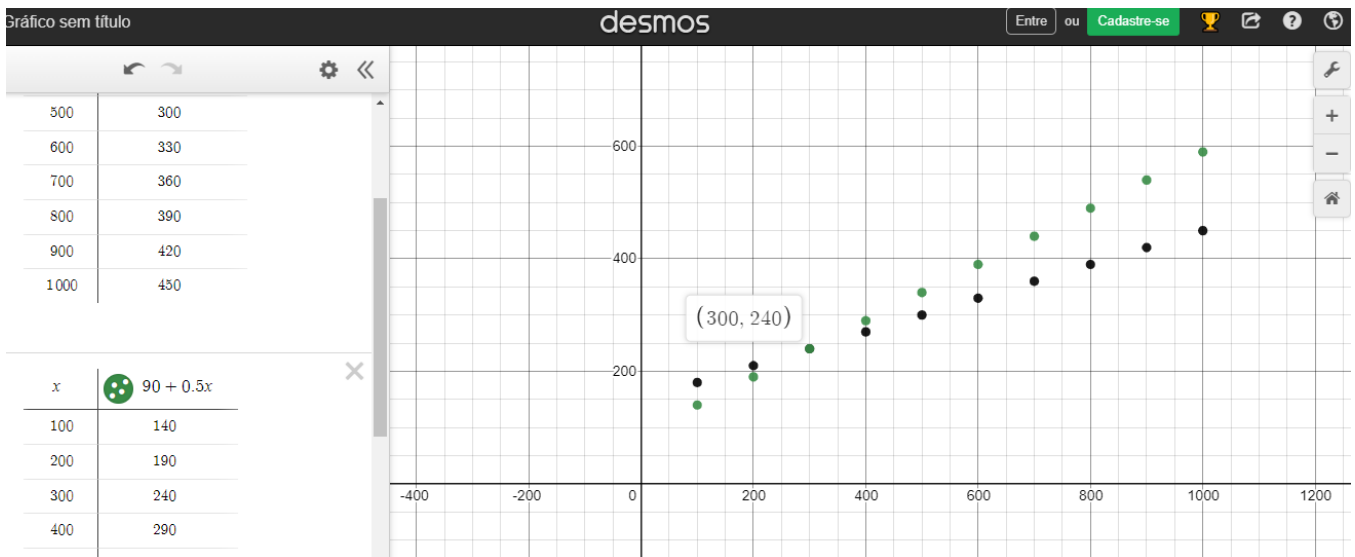
PP: Como?

A8: Porque, professor, a partir do valor (300, 240), os pontos da tabela de B passam a ser mais do que a tabela de A. Vou mandar para o senhor o print.

PP: Certo.

Em seguida, o aluno nos enviou o *print* do que ele estava falando e comprovamos a sua fala em relação aos pontos da expressão que representa as Gráficas A e B, como podemos ver na Figura 33 enviada pelo aluno.

Figura 33: Print da tela do desmos do Aluno A8



Fonte: Acervo do pesquisador

Na figura, os pontos que representam a Gráfica A estão demarcados de preto e os da Gráfica B estão de verde. O ponto (300, 240) está marcado pois representa um ponto comum as expressões das duas gráficas.

Análise

Entendemos que, no decorrer dessas atividades, os alunos já estavam entusiasmados na exploração e resolução dos problemas que foram propostos. Identificamos que os alunos se sentiam motivados a resolver os problemas, participavam das discussões, levantavam questionamentos. Santos (2019) respalda que é importante que o indivíduo tenha interesse no problema que se depara, contribuindo, assim, com a aprendizagem do aluno.

Na discussão do item “e”, um dos alunos questionou e trouxe uma questão que sentíamos a necessidade de discutir:

A6: Professor, se a Gráfica A reduzir para 0,15 o valor do folheto, eu teria uma sugestão para a Gráfica B não ficar atrás e ainda sair na frente.

PP: Qual?

A6: Só um instante.

PP: Alguém mais pensou a respeito e chegou a uma promoção para a Gráfica A?

A7: Eu vendia o folheto a 10 centavos.

PP: E você teria lucro?

A7: Quase nenhum [risos].

A6: Professor, eu faria o seguinte: daria um desconto de 25 centavos para compras de folhetos até a quantidade 600 e, a partir de 600, o desconto em cada folheto passaria a ser 30 centavos. Dessa forma, eu tenho dois tipos de descontos e duas expressões.

PP: Então, formule seu problema para discutirmos.

A6: Vou mandar.

Diante do que o Aluno A6 apresentou, sentimos a necessidade de que todos se voltassem para o problema dele e discutissem a respeito dos dados apresentados, chegando, então, à constatação ou não do que ele havia dito, que seria vantajoso.

Em seguida, colocamos o problema proposto pelo Aluno A6 e pedimos que os alunos analisassem para que, em seguida, discutíssemos a respeito. O problema era o seguinte:

Com o desconto dado pela Gráfica A, o gerente da Gráfica B precisou lançar uma promoção que seria a seguinte:

Custo de Montagem: R\$ 90,00

Preço do folheto: Até 600 folhetos, R\$ 0,25 e, acima de 600 folhetos, R\$ 0,20.

Foi dado um tempo aos alunos para que eles explorassem a situação e comparassem com a Gráfica A, depois da redução do preço do folheto pela metade. Com poucos minutos, os alunos já estavam trazendo os seus resultados:

A2: Professor, até 1200 folhetos é mais vantajoso na Gráfica B mesmo, a partir de 1200 folhetos, a Gráfica A oferecerá o melhor preço.

PP: O que é possível constatar com isso?

A2: Que sempre terá um momento em que a Gráfica A vai ser mais vantajoso que a Gráfica B.

A6: É isso mesmo, professor, mas pelo menos a Gráfica B não irá ficar tanto atrás. O meu problema está errado, professor?

PP: Não, não, o seu problema é vantajoso e seria uma boa saída para a Gráfica B não ficar tão atrás.

A8: Professor, no gráfico do Desmos, dá pra ver os pontos onde cada gráfica vai oferecer os melhores preços.

PP: Por isso a importância da expressão gráfica. Alguém encontrou as expressões algébricas?

A5: Do problema proposto por A6?

PP: Sim.

A5: Eu fiz: seria 90 mais 25 centavos vezes x e 90 mais 20 centavos vezes x . A primeira para compras até 600 e a outra para compras a partir de 600.

A2: Professor, a Gráfica B poderia fazer outra promoção para produtos acima de 1200.

PP: O que é possível perceber em relação aos valores onde a Gráfica A vai ser mais vantajosa do que a gráfica B?

A5: Sempre de 600 em 600.

O problema proposto pelo Aluno A6 trouxe excelentes discussões, entendemos a importância da proposição de problemas onde o aluno é capaz de propor uma situação que desperte a curiosidade dos demais. Tivemos que finalizar o momento de discussões, pois ainda queríamos escutar dos alunos suas percepções sobre os encontros, o que eles acharam, se continuariam e se aprenderam com os encontros realizados.

Pedimos que todos falassem naquele momento sobre como avaliavam os encontros, as dificuldades encontradas, sugestões de melhorias, algo que os deixaram chateados, podia ser em poucas palavras, o importante seria que todos participassem e fossem os mais sinceros

possível. Abaixo, apresentamos um quadro com alguns fragmentos das falas dos alunos para esse questionamento:

Quadro 5 – Falas dos alunos sobre a avaliação dos encontros

<p>Aluno A2: “Só tive dificuldade de raciocinar às vezes, experiência boa”, “Gostei muito como o professor ajuda todos os alunos, às vezes tinha muito barulho de moto e carro”, “Nunca tinha estudado dessa forma”, “Aprendi coisas que eu não sabia”, “Só tenho a agradecer ao professor que disponibilizou as oficinas e pedir desculpas pelas vezes que tive problemas e não pude assistir a aula”.</p>
<p>Aluno A3: “Não tive muitas dificuldades, só alguns detalhes que estava desatenta”, “Já tinha visto situações-problemas, só que eu não sabia explorar da forma que foi ensinada”, “Levarei a experiência de resolver esse tipo de questão”, “Eu gostei muito porque só é colocar as expressões já mostra o resultado e gráfico, e visualizamos muitas coisas”, “Legal porque a gente resolvia os problemas e criava discussões envolvendo o assunto”.</p>
<p>Aluno A4: “Minha maior dificuldade foi utilizar o aplicativo Desmos”, “Muitas coisas foram novas, como a montagem de tabelas e o Desmos”, “Pra mim, foi a melhor maneira de ensino, pois só se aprende algum conteúdo de Matemática por meio de problemas e cálculos”, “Presencial seria bem melhor, pois teria um professor presente, mas ainda sim houve uma aprendizagem” “As aulas foram ótimas, com uma boa explicação a apresentação dos problemas para resolver, o único problema pra mim foi o tempo das aulas, devia ser mais tempo”.</p>
<p>Aluno A5: “Eu tive algumas dificuldades nos cálculos, mas consegui entender o assunto”, “Me lembro de alguns assuntos parecidos com função afim”, “Mesmo com poucos alunos participando, todos respondiam as perguntas das atividades. Vou levar a esperança de obter um futuro bom e cheio de conquistas”, “No começo, eu não sabia muito bem usar o aplicativo, mas depois fui aprendendo”, “Eu gostei de responder às questões na hora da aula”, “Aprendi muito, se fosse presencial, talvez tivesse sido melhor”, “Eu gostei bastante da forma como o professor ensinou nesse curso e explicou o assunto”.</p>
<p>Aluno A6: “Não tive dificuldades significativas, a experiência foi muito satisfatória”, “A forma de ensino, as situações-problemas foram bastante dinâmicas”, “Forma como o assunto foi trabalhado no aplicativo Desmos me chamou atenção, um aplicativo que eu não conhecia, mas agora irei levar sua</p>

utilidade como ensinamento”, “No meu aprendizado, houve uma grande evolução em relação ao primeiro e último dia de oficina”, “Apesar de ter sido um ensino a distância, o aprendizado foi muito satisfatório, mesmo acreditando que o ensino presencial seja um pouco mais produtivo”, “A forma de ensino do professor nos ajudou muito” “Os problemas fazia com que a pessoa pensasse mais e aprendesse sem o professor está só falando o tempo todo”.

Aluno A7: “Tive pouca dúvida, as dúvidas que eu tinha quando eu perguntava ao professor e eu compreendia já”, “As questões me chamou a atenção e como resolvia”, “Ajuda a compreender mais quando falar desse assunto na escola vai ser bom porque já vai saber como fazer”, “Muito bom, professor, gostei muito das suas aulas”, “Eu aprendi muito, porque o professor não dizia que estava errado, só pedia pra eu pensar mais”.

Aluno A8: “Foi muito bom, o jeito que o professor ensina que deixa nós chegar na resposta”, “Não assisto aula remota, mas gosto das do senhor porque a gente usa outras coisas”, “As discussões nas aulas eram muito boas, eu aprendi muito”, “O Desmos ajudava bastante e eu sempre ia primeiro nele”, “Se tivesse mais encontro, eu participava”.

Fonte: acervo do pesquisador.

Diante dessas respostas, esperamos que tenhamos deixado algo de importante para esses alunos, pois nosso objetivo principal era refletir sobre as possibilidades de utilização do Desmos associado à Exploração, Resolução e Proposição de Problemas no ensino de função afim.

Finalizamos o encontro e agradecemos a todos pela participação e desejamos que eles alcançassem um futuro brilhante e promissor.

Diante da realização dos dez encontros, percebemos algumas dificuldades e também avanços dos alunos em relação ao conteúdo de função afim e as representações múltiplas trabalhadas.

Nos primeiros encontros, foi possível observar a dificuldade que os alunos encontraram para representar algebricamente uma situação-problema sobre função, mas, no decorrer dos encontros, essa dificuldade foi sendo sanada, de tal forma que, nos últimos encontros, todos conseguiam, a partir da situação apresentada, dizer qual a expressão Matemática que representava o problema.

Das quatro representações múltiplas, a verbal e a algébrica foram as que mais os alunos mostraram dificuldades, isso porque, muitas vezes, não conseguiam expressar verbalmente por apresentar alguns obstáculos na compreensão e interpretação dos problemas, mas, com as explorações feitas a cada encontro, eles se mostraram mais engajados e focados na interpretação do problema, antes mesmo de procurar a solução. Isso foi possível pelo trabalho desempenhado ao utilizar a exploração de problemas, sempre antes de resolver o problema e, assim, ouvir e discutir os questionamentos iniciais dos alunos.

Com a utilização dos Desmos, foi possível notar o grande desempenho dos alunos em relação às representações tabular e gráfica. Apenas nos dois primeiros encontros foram que eles tinham mais dificuldades, isso pelo fato de não terem tido contato antes com o aplicativo.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nosso trabalho se propôs a analisar as contribuições e possibilidades da metodologia de ensino e aprendizagem de Matemática através da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas no ensino de função afim aliado ao uso de tecnologias, fazendo uma abordagem do aplicativo Desmos no ensino remoto.

A partir dos nossos objetivos traçados, da fundamentação teórica utilizada, dos recursos metodológicos e dos principais resultados, culminamos na escrita deste trabalho e trazemos algumas reflexões e considerações acerca de todo esse desenvolvimento, elencando as contribuições para a Educação Matemática, refletindo sobre os desafios e as dificuldades encontradas no percurso de toda a elaboração e a aplicação desta pesquisa.

Para o embasamento teórico do nosso trabalho e a fim de o situarmos no campo das pesquisas atuais, analisamos e discutimos algumas pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem de conteúdos matemáticos a partir da exploração, resolução e proposição de problemas e também sobre as dificuldades encontradas no ensino de função afim, encontrando maneiras eficientes na abordagem desse conteúdo.

As pesquisas do Grupo de Estudo e Pesquisa sobre Educação e Pós-Modernidade (GEPEP) foram fundamentais na elaboração deste trabalho, pelas grandes discussões e contribuições que trazem para o ensino de Matemática através da exploração, resolução e proposição de problemas, como também os trabalhos de Andrade (1998; 2017), coordenador do grupo de estudos em questão.

Com relação à nossa metodologia de pesquisa, utilizamos uma abordagem qualitativa, na qual fizemos uso da modalidade de pesquisa pedagógica, em que o professor/ministrante da oficina é o próprio pesquisador. Durante todas as oficinas, foram feitos registros e todas foram gravadas para, em seguida, fazermos a análise detalhada de cada encontro.

O itinerário que seguimos nos faz considerar que o objetivo do nosso trabalho foi alcançado, pelo fato de os alunos terem aceitado e se debruçado sobre a metodologia que foi trabalhada, mesmo de forma remota. Consideramos que a exploração, resolução e proposição de problemas concedeu aos alunos uma melhor compreensão do conteúdo de função e, por isso, acreditamos que essa metodologia, juntamente com a utilização do aplicativo Desmos, contribuiu, de forma significativa, para o processo de construção do conceito de função, oferecendo ao professor subsídios para uma boa prática de ensino.

No início das aplicações, percebemos os alunos desmotivados, com pouco interesse nas discussões e quase sem se pronunciar. Atribuímos esse comportamento a alguns fatores,

dentre eles, a incompatibilidade com o ensino remoto, uma certa vergonha, pois os alunos conheceram o professor-pesquisador nos primeiros dias de oficinas, mesmo de forma remota e também por não estarem instigados a participarem. Um dos primeiros obstáculos que vencemos foi a interação, que até o terceiro encontro não era muito grande e ficamos sem ideias para atrair esses alunos, mas, a partir de uma gincana realizada no terceiro encontro, os alunos se sentiram mais a vontade e começaram a participar efetivamente dos encontros.

Percebemos a recorrência dos alunos em apenas colocar a resposta final, sem discutir ou explorar as ideias e os cálculos que utilizaram para chegar às devidas respostas, com isso, constatamos que, até então, não estavam sendo valorizados todo o percurso de resolução de uma situação-problema, pois demanda tempo e requer o pensamento crítico dos estudantes.

Nas primeiras aplicações, sentimos que os participantes não estavam acostumados em escrever uma expressão algébrica representando matematicamente o problema trabalhado, mas, ao utilizar a exploração, resolução e proposição, já foi possível perceber um avanço nos alunos, possibilitando-os pensar a respeito do problema e comparar as variáveis envolvidas, fazendo relações de dependência e independência.

A mediação feita pelo professor-pesquisador foi essencial para o ensino nessa abordagem, como destaca Andrade (2017, p. 388-389), uma vez que “o professor-pesquisador precisa constantemente impulsionar o trabalho para que os alunos, com sua mediação-refutação, possam ir cada vez mais além da solução do problema”. Entendemos, de fato, a importância do trabalho do professor para alcançar os melhores resultados.

Nas aplicações das oficinas, fazíamos sempre o uso das representações múltiplas de funções defendidas por Cooney, Beckmann e Lloyd (2010) e foi sendo algo sempre presente e utilizado pelos alunos, especialmente as representações gráficas, tabular e algébrica. Entendemos que isso potencializou mais ainda a aprendizagem dos alunos e a importância dessas representações no entendimento do conteúdo.

O uso das representações múltiplas ofereceu aos alunos uma melhor compreensão de que uma mesma função pode ser representada de maneiras diferentes e que, ao ser mudada a sua representação, a função continua sendo a mesma e isso foi essencial na nossa pesquisa. Compreendemos, então, que algumas representações irão ser mais úteis do que outras, dependendo da situação, e que cada uma oferece características particulares, mas todas são importantes e devem ser entendidas pelos alunos.

O sucesso dos estudantes, no que diz respeito às representações múltiplas de funções, promoveu neles a capacidade de elaborar uma tabela, de verbalizar uma situação que

represente um problema obtendo os valores das variáveis dependente e independente, outra bastante usada foi a representação gráfica, a partir do aplicativo Desmos.

O aplicativo Desmos mostrou potencialidade na sua utilização, por ser uma ferramenta de interação, a qual os alunos se familiarizam e utilizavam em todas as aplicações, além de ser essencial na exploração dos problemas trabalhados, oferecendo aos alunos a identificação de pontos importantes na representação gráfica de uma situação-problema. Foi também essencial no processo de proposição de problemas.

Uma das dificuldades encontradas durante a elaboração do trabalho de campo se refere aos materiais que os alunos produziam a partir dos questionamentos de cada problema. Por estarmos 100% no ensino remoto, mesmo que pedindo a cada encontro, ainda existia aluno que não nos encaminhava os seus registros, isso foi também um grande desafio, entendendo a importância que esses materiais tinham para a análise que fizemos.

Nos últimos encontros, já foi possível constatar que os resultados seriam mais pontuais e mais elaborados se o tempo de aplicação tivesse sido maior, por entender que o trabalho com a proposição de problemas não é algo tão rápido, que requer tempo para ser efetivada, como discute Martins (2019) em seu trabalho, apontando que a proposição de problemas era a etapa mais demorada e, na nossa pesquisa, percebemos isso, pois o tempo que tivemos foi muito pouco.

De fato, durante o andamento das oficinas, os alunos iam se desenvolvendo cada vez mais e percebemos que todos conseguiam solucionar e propor novos problemas, mas sempre fazíamos as discussões, explorávamos os problemas, escutávamos os questionamentos e refletíamos sobre os valores encontrados, as potencialidades de outros valores e o caminho que eles seguiam até a resolução, enaltecendo que o mais importante era o percurso que eles faziam até a resolução e não apenas a resolução.

O trabalho com a exploração, resolução e proposição de problemas é uma ação prazerosa que traz questionamentos/problematizações durante todo o processo, contribuindo para uma aprendizagem libertadora e o desenvolvimento do aluno como um todo. O papel do professor na proposição de problemas deve ser entendido também como um aprendiz, pois está a todo tempo sendo surpreendido com questionamentos dos alunos, caso não seja experiente, pode ficar impossibilitado de mediar e contribuir com o pensamento do estudante, como defende Singer e Cai (2013).

Vimos, no decorrer das oficinas, que as proposições feitas pelos alunos surgiram em diferentes momentos, seja no início, meio e fim, como afirma Andrade (2017). Notamos também que a proposição foi a etapa mais demorada e sempre os alunos ou resolviam ou

exploravam em um primeiro momento. No decorrer dos encontros, vimos que as proposições eram, em sua maioria, de forma verbal, ou seja, eles falavam ao invés de escrever.

De modo geral, constatamos que as ideias essenciais de função dentro das representações múltiplas (verbal, algébrica, tabular e gráfica), trabalhadas com a exploração de problemas e com o uso da ferramenta Desmos, ofereceu bons resultados e os alunos conseguiram, de fato, compreender essas ideias, sendo capazes de fazer a transição da linguagem oral para a escrita, para a tabular e para a algébrica; da tabular para a algébrica e para a gráfica; da algébrica para a tabular e para a gráfica; e da gráfica para a algébrica, para a tabular e para a verbal.

Diante do que apresentamos até aqui e entendendo as potencialidades e as contribuições do ensino de função a partir da exploração, resolução e proposição de problemas, recomendamos, como trabalhos futuros, pesquisas que possam ter muito mais tempo para realização das atividades práticas e abordem a proposição de problemas a fim de subsidiar e auxiliar na resolução e exploração de problemas, oferecendo a capacidade de pensar e aperfeiçoar o comportamento do aluno, contribuindo para a sua aprendizagem e sua formação intelectual e pessoal.

Outra questão que pode ser tema de pesquisas futuras, como já está sendo na pesquisa doutoral de Abreu (2021), é acerca das características e a utilização do Desmos, no que se refere às limitações com relação ao estudo do domínio da função.

O desenvolvimento desta pesquisa nos ensinou abundantemente no que diz respeito à nossa prática docente. Evidenciamos que a pesquisa permitiu, a partir das reflexões que fizemos acerca da nossa própria prática, ampliássemos mais ainda a nossa identidade profissional, sendo capazes de escutar mais os nossos alunos, dar importância a tudo o que é dito, aproveitando o que é falado para realizar questionamentos, possibilitando que o estudante chegue a uma solução por si só, nos sentimos mais abertos a aceitar tudo o que os alunos dizem, não esperar que seja dito apenas aquilo que queremos escutar, pois estamos em um processo de ensino-aprendizagem e tudo deve ser levado em consideração.

Durante a elaboração desta pesquisa, em conjunta orientação com o orientador, desfrutamos de algumas publicações de trabalhos que retratavam sobre a nossa pesquisa, foram atividades (minicurso e comunicação oral) desenvolvidas com a nossa temática de estudo e que levamos para serem discutidas a partir de outros olhares. As publicações realizadas no I EEPEM (Encontro de Ensino e Pesquisa em Educação Matemática), XI EPBEM (Encontro Paraibano de Educação Matemática) e XXV EBRAPEM (Encontro

Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática) contribuíram, de forma positiva, para a elaboração e finalização deste trabalho.

REFERÊNCIAS

- ABREU, J. D. **Aprendizagem móvel: explorando a matemática por meio de aplicativos educacionais em *smartphones***. 2018. 233 f. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Educação Matemática), Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2018.
- ALMEIDA, A. C. P; SCHEIFER, C. L. Caindo na rede, caindo na real: Em busca do inédito viável no mundo em (pós)pandemia. **Revista Brasileira de Linguística Aplicada** [online]. 2021, v. 21, n. 4, pp. 1193-1218. Disponível em: <<https://doi.org/10.1590/1984-6398202117903>>. Epub 03 Dez 2021. ISSN 1984-6398. <https://doi.org/10.1590/1984-6398202117903>. Acesso em: 9 dez. 2021.
- ANDRADE, S. Um caminhar crítico reflexivo sobre Resolução, Exploração e Proposição de Problemas Matemáticos no Cotidiano da Sala de Aula. *In*: ONUCHIC, L; JUNIOR, L; PIRONEL, M. (Orgs.). **Perspectivas para a Resolução de Problemas**. Livraria da Física, 2017, p. 355-395.
- ANDRADE, S. **Ensino-aprendizagem de matemática via resolução, exploração, codificação e decodificação de problemas e a multicontextualidade da sala de aula**. 1998. 325f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, SP, 1998.
- ANTUNES, G.; CAMBRAINHA, M. **Modelos de exploração matemática na plataforma Desmos: ensinar e aprender em um ambiente virtual de aprendizagem**. Rio de Janeiro: ANPMat, 2020. 48 f. Disponível em: <https://anpmat.org.br/wp-content/uploads/2020/07/e-book_Desmos_final.pdf>. Acesso em: 06 ago. 2020.
- ARAÚJO, A. I. S., **Ensino-aprendizagem de álgebra através da resolução e exploração de problemas**. 127f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, PB, 2016.
- ARRUDA, E. P. Educação remota emergencial: elementos para políticas públicas na educação brasileira em tempos de Covid-19. **EmRede - Revista de Educação a Distância**, v. 7, n. 1, p. 257-275, 15 maio 2020.
- BAIRRAL, M. A.; MAIA, R. C. O. O uso do Google Earth em aulas de matemática. **Linhas Críticas**, v. 19, n. 39, 2013, p. 373-390.
- BAIRRAL, M. “Dimensões de Interação na Formação à Distância em Matemática. Erechim-RS, **Revista Perspectiva**, v.27, n.98, p.33-42, jul./2003. Disponível em: <<http://www.gepeticem.ufrj.br/wp-content/uploads/2020/01/Bairral-Rev-Perspectiva-2003.pdf>>. Acesso em: 10 de jul. 2020.
- BAIRRAL, M. A. Pesquisas em educação matemática com tecnologias digitais: algumas faces da interação. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 8, n. 18, 18 dez. 2015.
- BAIRRAL, M. A. Encontros com Ubiratan D’Ambrosio: memórias que inspiram políticas de currículo em educação matemática com tecnologias digitais. **Bolema: Boletim de Educação Matemática** [online], v. 35, n. 70, pp. 12, 2021. Disponível em:

<<https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n70e01>>. Epub 04 Ago 2021. ISSN 1980-4415. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n70e01>. Acesso em: 9 dez. 2021.

BEHAR, P. A. Artigo: o ensino remoto emergencial e a educação a distância. **Jornal da Universidade**. Porto Alegre, p. 1-2. 6 jul. 2020. Disponível em: <<https://www.ufrgs.br/coronavirus/base/artigo-o-ensino-remoto-emergencial-e-a-educacao-a-distancia/>>. Acesso em: 05 set. 2020.

BEZERRA, A. S. V. **Conceito e representações de função via resolução, proposição e exploração de problemas: um trabalho com alunos de graduação**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Campina Grande: UEPB, 2017.

BOGDAN, R; BIKLEN, S. **Investigação Qualitativa em Educação**. Editora: Porto Editora. Porto, Portugal, 1994.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. 5ª ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora. 2012.

BOSCHETTO, V. C. **Função afim e suas propriedades através da resolução de problemas**. 2015. 80 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto, 2015.

BRANDÃO, J. D. P. **Ensino aprendizagem de função através da resolução de problemas e representações múltiplas**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciência e Educação Matemática). UEPB, Campina Grande-PB, 2014.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática/Secretaria de Educação Fundamental**. – Brasília: MEC/SEF, 1997. 142p.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática/ Secretaria de Educação Fundamental**. – Brasília: MEC/ SEF, 1998.

BRASIL. Decreto nº 5.622, de 19 de dezembro de 2005. Regulamenta o art. 80 da Lei no 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. **Ministério da Educação**. Diário Oficial da União, Brasília, DF; 20/12/2005, Seção 1, p.1.

BRASIL. (2006). **Orientações curriculares para o ensino médio: Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em 08 de jul. 2020.

BRASIL, Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **PCNEM: Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Brasília: MEC, 2002.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME, 2018. Disponível em: <

http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf >
Acesso em: 02 jul. 2020.

SINGER, F. M.; ELLERTON, N. F.; CAI, J. **Problem-posing research in mathematics education: new questions and directions**. Educational Studies in Mathematics An International Journal. New York, v. 82, n. 3, p. 1-7, mar. 2013.

CAI, J.; HWANG, S. Learning to teach through mathematical problem posing: Theoretical considerations, methodology, and directions for future research. **International Journal of Educational Research**. Elsevier. V. 102. Amsterdam. 2020.

CAI, J. *et al* (org.). Problem-Posing Research in Mathematics Education: some answered and unanswered questions. In: SINGER, F. M. *et al* (ed.). **Mathematical Problem Posing: From Research to Effective Practice**. Normal, Il, Usa: Springer, 2015. p. 3-34.

CARNEIRO, R. **Informática na educação: representações sociais do cotidiano**. 2. ed. São Paulo: Cortez, 2002.

CARREIRA, S. Matemática e tecnologia – Ao encontro dos “nativos digitais” com os “manipulativos virtuais”. **Quadrante**, Lisboa, v. 18, n.1 e 2, 2009.

CHICA, C. H. Por que formular problemas? In: SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. (Org.). **Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática**. Porto Alegre: Artmed, 2001. p. 151-173.

CONNAY, T. J.; BECKMANN, S.; LLOYD, G. M. *et al*. **Developing an essential understanding of functions: fo teaching mathematics in grades 9-12**. Reston, NCTM, 2010.

CURSINO, A.G. **Contribuições das tecnologias para uma aprendizagem significativa e o desenvolvimento de projetos no Ensino Fundamental I**. 2017. 137 p. Dissertação (Mestrado em Ciências) – Escola de Engenharia de Lorena – Universidade de São Paulo, Lorena, 2017.

DANTE, L. R. **Matemática: contexto e aplicações**. 2. ed. São Paulo: Ática, 2013.

EUZÉBIO, J. S. **Proposta de ensino de geometria analítica utilizando o desmos**. 2018. 119 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional Profmat, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Pato Branco, 2018.

FLICK, U. **Introdução à metodologia de pesquisa: um guia para iniciantes**. Porto Alegre: Penso, 2013.

FLORES, C. R.; WAGNER, D. R.; BURATTO, I. C. F. Pesquisa em visualização na educação matemática: conceitos, tendências e perspectivas. **Revista Educação Matemática e Pesquisa**. v. 14, n. 1, p. 31-45, 2012.

FREDERICO, F. T.; GIANOTO, D. E. P. Ensino de ciências e matemática: utilização da informática e formação de professores. **Zetetiké**. v.22, p. 63-88, 2015.

GUAREZI, R. de C.; MATOS, M. M. **Educação a Distância sem segredos**. Curitiba: Ibpex, 2009.

HOUAISS, A.; VILLAR, M. S. **Dicionário Houaiss de Língua Portuguesa**. Elaborado pelo Instituto Antônio Houaiss de Lexicografia e Banco de Dados da Língua Portuguesa S/C Ltda. Rio de Janeiro: Objetiva, 2009.

IEZZI, G. *et al.* **Matemática: ciência e aplicações**. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

KENSKI, V. M. **Educação e Tecnologias: o novo ritmo da informação**. 2. ed. Campinas: Papirus, 2007. 144 p.

LANKSHEAR, C.; KNOBEL, M. **Pesquisa Pedagógica**. Porto Alegre: Artmed, 2008.

LIMA, M. A. V.; CASTILHO, M. I. O ensino dos poliedros em séries finais do ensino fundamental: uma experiência com mídia digital. In: TAROUCO, L. M. R.; ABREU, C. S. (org.). **Mídias na Educação: a pedagogia e a tecnologia subjacentes**. Porto Alegre: Evangraf, 2017. Cap. 10. p. 221-234.

LISBOA, P; CESPEDES, J. G. Dados estatísticos em meio digital: compreensão dos alunos do ensino fundamental. **Rematec**, Natal, v. 14, n. 8, p. 150-164, dez. 2013.

MACHADO, A. A. e AMARAL, M. A. Uma análise crítica da competência cultura digital na Base Nacional Curricular Comum. **Ciência & Educação** (Bauru) [online]. 2021, v. 27, e21034. Disponível em: <<https://doi.org/10.1590/1516-731320210034>>. Epub 23 Ago 2021. ISSN 1980-850X. <https://doi.org/10.1590/1516-731320210034>. Acesso em: 9 dez. 2021.

MARTINS, F. C. **Ensino-aprendizagem de Sistemas Lineares na Formação do Professor de Matemática via Exploração, Resolução e Proposição de Problemas**. 2019, 138 p. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), Campina Grande, 2019.

MORAN, J. M. Metodologias ativas para uma aprendizagem mais profunda. In: BACICH, L.; MORAN, J. M. (Orgs.). **Metodologias ativas para uma educação inovadora: uma abordagem teórico-prática** [recurso eletrônico]. Porto Alegre: Penso, 2018. e-PUB.

MORAN, J. M. Ensino e aprendizagem inovadores com apoio de tecnologias. In: MORAN, José Manuel; MASETTO, M. T.; BEHRENS, M. A. **Novas Tecnologias e Mediação Pedagógica**. 21. ed. Campinas: Papirus Editora, 2013. Cap. 1. p. 11-72.

MORAIS, I. R. D. *et al* (org.). **Ensino Remoto Emergencial: Orientações básicas para elaboração do plano de aula**. Natal: Edufrn, 2020. 23 p.

PENTEADO, M. G. Possibilidades para a formação de professores de Matemática. In: PENTEADO, M. G; BORBA, M. C. (Orgs.). **A Informática em Ação: formação de professores, pesquisa e extensão**. 1. ed. São Paulo: Olho D'água. 2000, p. 23- 34.

PEREIRA, M. J. A.; MADUREIRA, N. L. V.; SILVA, E. A. P. da. **O ensino remoto: condições e contradições sobre a aprendizagem e o trabalho dos professores da educação**

básica. *In*: SOUSA, Raimundo; QUEIROZ, L. M. G. Educação Pública na pandemia do coronavírus. Curitiba: CRV, 2020.

PIRES, A. A Covid-19 e a Educação Superior no Brasil: usos diferenciados das tecnologias de comunicação virtual e o enfrentamento das desigualdades educacionais. **Educación**, Lima, v. 30, n. 58, p. 83-103, Janeiro, 2021. Disponível em: <http://www.scielo.org.pe/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1019-94032021000100083&lng=es&nrm=iso>. Acesso em: 9 dez. 2021.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. A sala de Aula, A Pesquisa em Educação Matemática e a Produção Científica do GTERP. *In*: **Anais do IX Encontro Nacional de Educação Matemática**. Belo Horizonte/MG: 2007.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **BOLEMA**. Boletim de Educação Matemática, UNESPE – Rio Claro, v. 25, p.73-98, 2011.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. *In*: BICUDO, M. A. V. (Org.) **Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas**. São Paulo: UNESP, 1999, p.199-218.

PENTEADO, M. G; SKOVSMOSE, O. Riscos trazem possibilidades. *In*: SKOVSMOSE, O. (Org). **Desafios da Reflexão em Educação Matemática Crítica**. 1 ed. Campinas: papirus, 2008, p. 41-50.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: Interciência, 1985, 196p.

RÊGO, R. G. **Um Estudo sobre a Construção do Conceito de Função**. Tese (Doutorado em Educação) UFRN, Natal, 2000.

REIS, J. B. A. **O conceito de tecnologia e tecnologia educacional para alunos do ensino médio e superior**. Disponível em: <http://alb.com.br/arquivo-morto/edicoes_antteriores/anais17/txtcompletos/sem16/COLE_932.pdf>. Acesso em: 01 ago. 2020.

SANTOS, E. V. **Contribuições da resolução, exploração e proposição de problemas ao processo de ensino e aprendizagem da combinatória nos anos iniciais do ensino fundamental**. 2019, 229p. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), Campina Grande, 2019.

SCREMIN, G. **O QUE $f'(x)$ NOS DIZ SOBRE $f(x)$** : uma abordagem com uso de tecnologia computacional. 2019. 132 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas, Universidade do Vale do Taquari - Univates, Lajeado, 2019.

SCREMIN, G. *et al.* O uso de tecnologia no ensino e na aprendizagem de cálculo diferencial. **Rev. Docência Ens. Sup**, Belo Horizonte, v. 8, n. 2, p. 119-139, 2018. Disponível em: <<http://oaji.net/articles/2017/6624-1546011243.pdf>>. Acesso em: 08 set. 2020.

SERRAZINA, L. Resolução de Problemas e Formação de Professores: um olhar sobre a situação de Portugal. In: ONUCHIC, L; JUNIOR, L; PIRONEL, M. (Orgs.). **Perspectivas para a Resolução de Problemas**. Ed. Livraria da Física, 2017, p.55-83.

SILVA, L. **Compreensão de ideias essenciais ao ensino-aprendizagem de funções via resolução, proposição e exploração de problemas**. 307f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, PB, 2013.

SILVA, A. C. **O Uso de Jogos nas Aulas de Matemática do Ensino Médio: Um Recurso Avaliativo do Conceito de Função**. 2016. 173f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual da Paraíba – UEPB, Campina Grande, 2016.

SILVA, V. S., **Proposição e exploração de problemas no cotidiano da sala de aula de matemática**. 132f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, PB, 201.

SILVEIRA, A. **Análise combinatória em sala de aula: uma proposta de ensino-aprendizagem via resolução, exploração e proposição de problemas**. 235f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, PB, 2016.

VALENTE, J. A. A Comunicação e a Educação baseada no uso das Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação. **Unifeso: Humanas e Sociais**, Teresópolis, v. 1, n. 1, p. 141-166, 2014.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula**. 6. ed. Tradução: Paulo Henrique Colonese. Porto Alegre: Artmed, 2009.

YIN, R. K. **Pesquisa qualitativa do início ao fim**. Tradução: Daniel Bueno, Revista técnica: Dirceu da Silva. Porto Alegre: Penso, 2016.

ANEXO A – PLANO DE ATIVIDADES

Aqui encontra o plano de atividades com todas as situações-problemas usadas na realização do trabalho de campo dessa pesquisa.

1° ENCONTRO: (Data de aplicação: 22/10/2020)

TÍTULO DA ATIVIDADE: A função afim e o aplicativo desmos.

CONTEÚDOS: Conceito de função.

OBJETIVOS:

- Propor que os alunos explorem e estabeleçam relações a respeito da **função afim**.
- Discutir sobre a representação de função a partir de tabelas.
- Trabalhar a taxa de variação e covariação de uma função.

IDEIAS ESSENCIAIS: Conceito de função afim, taxa de variação e covariação e representações de funções.

Marta é dona de uma padaria e está oferecendo a seguinte promoção aos seus clientes:

PÃO FRANCÊS: R\$ 7,50 O QUILOGRAMA

1. Aurora e Margarida estão indo à padaria e cada uma delas comprará, respectivamente, 2,5 kg e 3 kg de pão. Analisando essa situação, faça o que se pede:
 - a) Quais grandezas estão envolvidas nessa situação? O que podemos dizer a respeito do preço pago e a quantidade de pão?
 - b) Quanto Aurora e Margarida irão pagar pela quantidade de pães que levarão?
 - c) É possível escrever uma expressão matemática que relacione a quantidade de pão francês, em quilogramas, e o preço a pagar, em reais? Se sim, qual?
 - d) Uma pessoa, em um certo dia, comprou pães na padaria de Marta e pagou com uma cédula de R\$ 50,00 e recebeu de troco a quantia de R\$ 3,50. Pergunta-se: Qual a quantidade de pães que essa pessoa comprou?
 - e) Elabore um problema a partir das informações citadas nessa situação.
 - f) Utilizando o desmos construa uma tabela com as quantidades, 0,5 kg ; 1 kg; 2 kg; 2,8 kg; 4 kg e 5 kg. O que você pode observar?

(Elaborada pelo autor)

2º ENCONTRO: (Data de aplicação: 23/10/2020)

ATIVIDADE 1: A função afim e o aplicativo desmos.

CONTEÚDOS: Conceito de função.

OBJETIVOS: Compreender o conceito de função e entender a taxa de variação e covariação de uma função. Diferenciar e detectar a variável dependente e independente de uma função.

IDEIAS ESSENCIAIS: Conceito de função afim, taxa de variação e covariação e representações de funções.

1. Um técnico em informática cobra R\$ 45,00 a visita e um adicional de R\$ 80,00 por hora de trabalho, com valor proporcional no fracionamento da hora.
 - a) Quanto o técnico receberia por um serviço de 2,5 h?
 - b) Dispondo-se de R\$ 400,00, seria possível contratar esse técnico para um serviço de 4 horas?
 - c) Qual é a expressão matemática que representa o valor v , em reais, de um serviço de x horas feito pelo técnico? Esboce o gráfico dessa função no desmos.
 - d) Construa uma tabela com alguns valores de serviços realizados por esse técnico e apresente uma conclusão a respeito.
 - e) Altere os valores e elabore uma nova situação problema, para isso formule um texto e escreva a expressão matemática que a representará.

(Retirada e adaptada de Iezzi, Dolce et al, 2016)

ATIVIDADE 2: O problema do motorista.

CONTEÚDO: Função Afim.

OBJETIVOS: Explorar, resolver e propor problemas a partir de situações em contextos diversos, observando a variação entre as grandezas envolvidas.

IDEIAS ESSENCIAIS: conceito de função, representações de função e covariação e taxa de variação.

Um motorista viaja com seu carro a uma velocidade constante de 100 km/h. A distância percorrida varia proporcionalmente em função do tempo. Sabendo que a velocidade é calculada pela razão entre a distância e o tempo, determine:

- a) Que distância o veículo percorrerá no tempo de 5 horas?

- b) Construa uma tabela representando as distâncias percorridas por esse motorista nas primeiras 6 horas.
- c) Escreva uma expressão matemática que representa todos os tempos decorridos e as respectivas distâncias?
- d) Qual será a distância percorrida no tempo de 4,5 horas?
- e) Proponha um problema, mudando os dados, em que a distância percorrida seja de 1 500 km.

(Retirada e adaptada de Bezerra, 2017, p. 65)

3° ENCONTRO:

GINCANA MATEMÁTICA

4° ENCONTRO:

ATIVIDADE 1:

CONTEÚDOS: Função (Variação)

OBJETIVOS: Entender a variação entre duas grandezas a partir de uma situação-problema da realidade do aluno. Fazer relações entre as variáveis envolvidas.

IDEIAS ESSENCIAIS: Conceito de função, representações de funções e taxa de variação.

2. Um estudante viaja periodicamente de João pessoa a uma cidade do Sertão paraibano; sabendo que a distância de uma cidade a outra é de 600 km, responda:
 - e) Se a lei permitisse e o estudante fizesse o percurso com uma velocidade média de 150 km/h, quanto tempo ele levaria para fazer a viagem? E a 60 km/h?
 - f) O tempo depende de qual informação (variável)?
 - g) Qual a relação existente entre as variáveis utilizadas para fazer o cálculo?
 - h) Se o profissional fizer o percurso em 3 horas, qual deve ser a velocidade média do automóvel? E em 6 horas?

(Retirada e adaptada de Brandão, 2014, p. 104)

ATIVIDADE 2: A pandemia do novo Coronavírus

CONTEÚDOS: Função afim e gráfico

OBJETIVOS:

- Instigar os alunos a desenvolverem um conhecimento com mais compreensão do conceito de função afim.

- Entender as representações de função, a partir de uma situação de fácil entendimento

IDEIAS ESSENCIAIS: Conceito de função, representações de funções e a covariação e taxa de variação de funções.

Com o início da pandemia do novo Coronavírus e a obrigatoriedade do uso de máscaras em diversas cidades brasileiras para evitar o contágio do vírus, Dona Maria encontrou uma oportunidade para os negócios e passou a produzir máscaras para comerciantes de sua cidade.

Para a produção de máscaras em grande quantidade, Dona Maria cobra um valor de R\$ 50,00 pela mão de obra mais um valor adicional de R\$ 1,50 por cada peça produzida.

- A prefeitura da cidade de Dona Maria fez um pedido de produção de 200 máscaras para a distribuição em uma comunidade carente. Qual é o valor que ela deverá receber com essa produção?
- Esboce graficamente essa situação.
- Escreva uma expressão matemática que relacione a quantidade de máscaras produzidas e o valor a ser pago pelo o trabalho?
- Faça uma tabela que represente o valor que ela receberá para a produção de 50, 100, 200, 300, 500 máscaras.
- Quanto ela receberá se pegar uma encomenda para a produção de 600 máscaras?
- Em um dia em que o faturamento de Dona Maria com a produção de máscaras foi de R\$ 312,50, qual foi a quantidade produzida por ela?
- Sabendo que Dona Maria costuma vender a unidade da máscara por R\$ 1,75; proponha um problema com as informações descritas nessa situação fazendo um comparativo com a produção em grande quantidade e em pequena quantidade.

(Elaborada pelo autor)

5º ENCONTRO:

TÍTULO DA ATIVIDADE: Desconto na mensalidade

CONTEÚDOS: Domínio e gráfico de uma função

OBJETIVO: Compreender a partir de uma situação o domínio de uma função afim e o crescimento e decréscimo do gráfico de uma função afim.

IDEIAS ESSENCIAIS: Conceito de função, representações de função e taxa de variação e covariação.

Para incentivar o pagamento adiantado da mensalidade, uma escola no Município de Monteiro, PB, oferece um desconto de R\$ 8,00 para cada dia de antecipação, podendo antecipar no máximo 10 dias. Sabendo que o valor da mensalidade é de R\$ 320,00, responda às seguintes questões:

- g. Qual é a expressão matemática que relaciona o valor y da mensalidade com o número de dias de antecipação do pagamento x ?
- h. Quanto um pai de aluno irá pagar se efetuar o pagamento com 5 dias de antecedência? Quanto no máximo em reais um pai pode economizar?
- i. Quais são os possíveis valores que podemos atribuir a x ?
- j. Se um pai, pagou em certo mês R\$ 288,00 de mensalidade. Com quantos dias de antecipação ele efetuou o pagamento?
- k. Proponha um problema com os dados da situação.
- l. Faça a representação gráfica utilizando o desmos.

(Retirada e adaptada de Brandão, 2014, p. 104)

6º ENCONTRO:

TÍTULO DA ATIVIDADE: Plano de Saúde.

CONTEÚDOS: Domínio, imagem e gráfico de uma função afim.

OBJETIVO: Identificar a partir de uma situação os valores do domínio e imagem da função e a taxa de variação.

IDEIAS ESSENCIAIS: Conceito de função, taxa de variação e representações de funções.

Uma pessoa vai escolher um plano de saúde entre duas opções: A e B.

PLANO A			PLANO B		
Inscrição R\$ 100,00			Inscrição R\$ 180,00		
Cada	Consulta	R\$	Cada	Consulta	R\$
50,00			40,00		

O gasto total de cada plano é dado em função do número x de consultas. De acordo com o exposto, responda:

- g) Qual é a expressão matemática correspondente a cada plano?
- h) Qual delas tem maior taxa de variação e como isso poderia ser interpretado?
- i) Em que condições é possível afirmar que: o plano A é mais econômico; o plano B é mais econômico; os dois planos são equivalentes.
- j) Qual é o domínio e a imagem de cada função representadas na situação A e B?
- k) Pensando na qualidade de vida e no bem-estar do ser humano pense em uma situação que seja mais vantajosa que o plano A e o plano B. (Represente a função e o seu gráfico no desmos).
- l) Construa os gráficos das respectivas funções no desmos e explique o que você pode observar?

(Retirado e adaptado de Dante, 2013)

7º ENCONTRO:

TÍTULO DA ATIVIDADE: Perdendo peso.

CONTEÚDOS: Domínio, imagem, crescimento, decrescimento e gráfico de uma função afim.

OBJETIVO: Refletir sobre múltiplas conexões não matemáticas com temáticas de saúde formulando expressões algébricas.

IDEIAS ESSENCIAIS: Conceito de função, taxa de variação e representações de funções.

Uma dona de casa vivia uma vida sedentária, pois, afora seus afazeres domésticos, ela não praticava atividades esportivas e também se alimentava muito mal ingerindo poucas verduras e frutas em sua alimentação diária. Com isso, a sua massa chegou a 100 kg. Daí, ela foi ao médico, porque precisava emagrecer e, sob orientação médica, fez um regime.

Sabendo que o peso dessa dona de casa era de 100 kg e ela emagreceu 5 quilos por semana, podemos estabelecer uma relação entre o peso e o tempo. Sabendo que o peso ideal dessa dona de casa era de 65 kg. Pede-se:

- i) Elaborem uma tabela, relacionando o tempo relativo ao peso perdido por essa dona de casa por semana;
- j) Escreva a expressão matemática que representa o peso versus tempo;
- k) Quantas semanas serão necessárias para que a dona de casa adquira o peso ideal?

- l) Que grandeza depende da outra?
- m) Se ela tivesse emagrecido 3 quilos por semana. Em quanto tempo ela chegaria aos 65 quilos?
- n) Represente graficamente essa função no desmos;
- o) Qual o comportamento dessa função, ela é crescente ou decrescente?
- p) Crie uma situação usando a temática abordada nesse problema.

(Retirada e adaptada de Silva, 2013)

8° ENCONTRO:

TÍTULO DA ATIVIDADE: Comissão sobre vendas

CONTEÚDOS: Função Afim

OBJETIVO: Compreender a função afim e fazendo uso das representações múltiplas.

IDEIAS ESSENCIAIS: Conceito de função; covariação e taxa de variação; combinação e representações múltiplas de função.

O salário base de um vendedor em uma loja de preço único do Município de Monteiro-PB, é de R\$ 1.200,00. Para incentivar o crescimento das vendas dos produtos e aumentar seu lucro, o proprietário da loja oferece, aos seus vendedores, uma comissão de R\$ 0,60 por venda de cada produto.

- i) Para cada produto vendido o salário do vendedor é aumentado de quanto?
- j) Se em um mês o vendedor vender 10 produtos, que salário receberá no fim do mês? E se vender 50 produtos? E 100? E 200? E 500?
- k) Se você fosse escrever um bilhete ao dono dessa loja, explicando como o vendedor deve fazer para calcular seu salário mensal. O que você falaria?
- l) Maria, uma das vendedoras da loja, precisa faturar R\$ 1.500,00 para cobrir umas despesas que aumentaram no mês. Quantos produtos ela deve vender para conseguir este salário? Explique como você chegou ao resultado.
- m) Escreva uma sentença matemática para esta situação.
- n) Represente graficamente essa função no desmos.
- o) Qual o comportamento dessa função, ela é crescente ou decrescente?

- p) Pensando que você é um empreendedor e que quer beneficiar seus empregados, a partir das vendas mensais. Elabore um problema para mostrar como será esse benefício.

(Retirada e adaptada de Brandão, 2014, p. 161)

9º ENCONTRO:

TÍTULO DA ATIVIDADE: O problema da máquina.

CONTEÚDOS: Função Afim

OBJETIVO: Estudar a função afim e suas diferentes representações.

IDEIAS ESSENCIAIS: Conceito de função; covariação e taxa de variação; combinação e transformações de funções e representações múltiplas de função.

Uma máquina produz um tipo de peça destinada às montadoras de automóveis. Essa máquina tem um custo fixo diário de R\$ 150,00 reais mais R\$ 7,50 por peça produzida.

- l) Escreva a lei da função que permite calcular o custo c para se produzir p peças.
- m) Qual a variável dependente e a variável independente?
- n) Construa uma tabela de valores que relacione as variáveis c custo e p preço.
- o) Construa no desmos o gráfico da função que representa esse problema.
- p) Supondo que o custo fixo diário fosse de R\$ 50,00, ao analisar o gráfico da função o que poderíamos dizer?
- q) Em certo dia a máquina apresentou problemas e cada peça produzida com defeito foi descontado do custo fixo da máquina. Qual a lei da função que representa esse novo comportamento da máquina.
- r) Represente graficamente essa função no desmos.
- s) Qual o comportamento dessa função, ela é crescente ou decrescente?
- t) Qual a quantidade de peças com defeitos deve ser produzidas para que o custo seja de R\$ 0,00? Analise graficamente e diga o que esse valor representa.
- u) A partir de quantas peças produzidas com defeito o proprietário da máquina terá um saldo negativo.
- v) A partir dessa situação elabore um problema em que o custo fixo diário seja o dobro do proposto nesse problema.

(Retirada e adaptada de Abreu, 2018, p. 150)

10° ENCONTRO:**TÍTULO DA ATIVIDADE:** Problema das gráficas**CONTEÚDOS:** Função Afim**OBJETIVO:** Entender a função afim em contextos que representam mais de uma representação e diferenciar as expressões matemática que é expressa por cada situação.**IDEIAS ESSENCIAIS:** Conceito de função; covariação e taxa de variação; representações múltiplas de função.

Uma empresa de publicidade solicitou orçamento às gráficas A e B para a impressão de folhetos de propaganda. Na gráfica A, o custo de montagem do folheto é de R\$ 150,00 e cada folheto custa R\$ 0,30. Na gráfica B, o custo de montagem do folheto é de R\$ 90,00 e cada folheto custa R\$ 0,50. Com base nestes dados:

- i) Escreva a expressão matemática para calcular o custo de produção de x folhetos para as duas gráficas:
- j) Pretendo fazer uma compra de 450 folhetos. Em qual gráfica sairá mais vantajoso realizar essa compra?
- k) Eu tenho R\$ 1 200,00 para serem comprados de folhetos. Em qual das fábricas eu comprarei a maior quantidade de folhetos?
- l) A partir do exposto no problema qual é a variável dependente e independente?
- m) No mês de Aniversário da gráfica A, os gerentes lançaram uma promoção espetacular, onde cada folheto custaria R\$ 0,15, ou seja, a metade. Qual a nova expressão matemática que usaríamos para calcular o valor a ser pago por certa quantidade de folhetos? E se você fosse gerente da gráfica B que promoção você lançaria para não ficar atrás?
- n) Faça uma tabela com 3 colunas para representar o custo de 0, 100, 200, 300, 400, 500 e 600 folhetos nas duas fábricas.
- o) Em qual quantidade de folhetos as duas gráficas possuem o mesmo custo?
- p) Agora, você é o gerente, qual seria sua logística de vendas para a sua fábrica. Pense e elabore uma situação problema!

(Retirada e adaptada de Boschetto, 2015, p. 79)