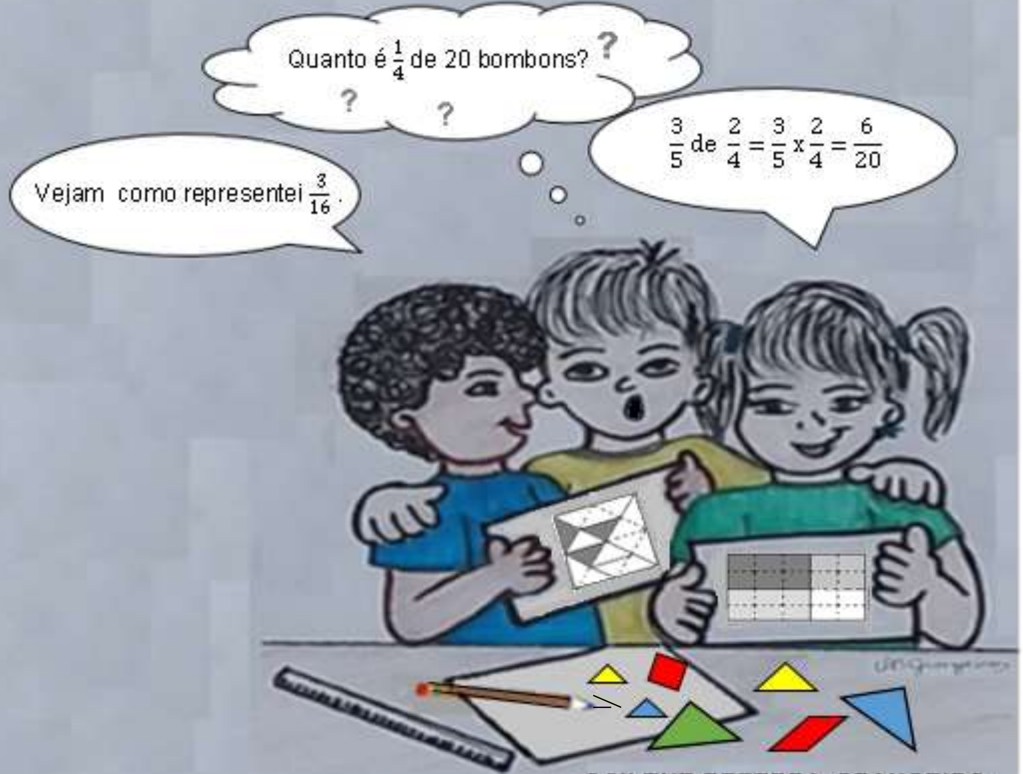
UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

EXPLORAR-RESOLVER-PROPOR PROBLEMAS:
POTENCIALIZANDO O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE FRAÇÃO



OSILENE BEZERRA GRANGEIRO
DOUTOR SILVANIO DE ANDRADE

CAMPINA GRANDE – PB
2020

OSILENE BEZERRA GRANGEIRO
DOUTOR SILVANIO DE ANDRADE

ENSINO E APRENDIZAGEM DE FRAÇÃO VIA EXPLORAÇÃO-RESOLUÇÃO-PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS

Produto educacional, apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, linha de pesquisa Metodologia, Didática e Formação do Professor no Ensino de Ciências e Educação Matemática, como requisito à obtenção do grau de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática

Orientador: Prof. Dr. Silvanio de Andrade

CAMPINA GRANDE – PB
2020

G757e Grangeiro, Osilene Bezerra.
Explorar-resolver-propor problemas [manuscrito] : potencializando o ensino e a aprendizagem de fração / Osilene Bezerra Grangeiro. - 2020.
54 p. : il. colorido.

Digitado.

Dissertação (Mestrado em Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2020.

"Orientação : Prof. Dr. Silvanio de Andrade , Departamento de Matemática - CCT."

1. Ensino e Aprendizagem. 2. Fração. 3. Exploração de problemas. 4. Resolução de problemas. I. Título

21. ed. CDD 513.26

Elaborada por Giulianne M. Pereira - CRB - 15/714 BC/UEPB

OSILENE BEZERRA GRANGEIRO

ENSINO E APRENDIZAGEM DE FRAÇÃO VIA EXPLORAÇÃO-RESOLUÇÃO-PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, linha de pesquisa Metodologia, Didática e Formação do Professor no Ensino de Ciências e Educação Matemática, como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática

Aprovada em: 01 de dezembro de 2020.

BANCA EXAMINADORA

Silvanio de Andrade

Prof. Dr. Silvanio de Andrade (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Egidio Rodrigues Martins

Prof. Dr. Egidio Rodrigues Martins
Instituto Federal do Norte de Minas Gerais(IFNMG)

Imbalbuquerque

Prof.ª. Drª. Izabel Maria Barbosa de Albuquerque
Unidade Acadêmica de Matemática (UFCG)

CAMPINA GRANDE – PB
2020

APRESENTAÇÃO

Caro professor, este material foi produzido a parti da pesquisa intitulada: *Ensino e Aprendizagem de Fração via Exploração, Proposição e Resolução de Problema*, da mestranda Osilene Bezerra Grangeiro, com a orientação do professor Doutor Silvanio de Andrade. O referido produto educacional, é parte exigida na obtenção de título de mestre, no mestrado profissional, pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, na Linha de Pesquisa: Metodologia, Didática e Formação do Professor no Ensino de Ciências e Educação Matemática.

A pesquisa caracterizada qualitativa, foi desenvolvida na modalidade pedagógica, tendo o ambiente da sala de aula (5º ano), de uma escola pública (municipal), como espaço de interação e vivência do tema abordado. Cujo eixo norteador, dar-se a partir da indagação: *Como o ensino e a aprendizagem de fração, podem ser potencializados, via Exploração-Resolução-Proposição de Problemas*

Concebemos a Exploração como primordial neste processo. Uma exploração que não se limita apenas ao contexto matemático, mas também ao mundo social; uma exploração que vai além de indagar, problematizar, investigar; uma exploração livre (porém não solta), como descreve ANDRADE, Silvanio (1998;2017); uma exploração reflexiva, crítica e criativa, que flui da interação e socialização de ideias entre professor-aluno, aluno-aluno, gerando novos problemas, novas explorações e assim sucessivamente.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO 5

1 EXPLORAÇÃO-RESOLUÇAÕ-PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS........................6

2 FRAÇÃO: SIGNIFICADOS ESSENCIAIS E OUTROS ASPECTOS......................9

3 CONSIDERAÇÕES, ORIENTAÇÕES E SUGESTÕES..21

O que os alunos já sabem sobre Fração?.. 23

Manuseando, explorando e conhecendo o Tangram 33

Fração: representação gráfica, numérica e por extenso 35

Leitura e escrita de frações 37

Fração contínua e fração discreta...41

Aritmética com frações...42

Diferenciando fração e razão na configuração do número fracionário 50

REFERÊNCIAS 52

APÊNDICE

INTRODUÇÃO

A exploração pode partir tanto do professor quanto dos alunos e/ou aluno-aluno. Ressaltamos que a compreensão por parte de quem ensina de que um conceito só se efetiva quando o próprio desenvolvimento mental da criança já estiver atingido o nível necessário é de suma importância no processo de ensino e aprendizagem. Sem, no entanto, deixar de oportunizar vivências/experiências que sejam desafiantes, no sentido de verificar, romper ou transpor o nível de desenvolvimento cognitivo em que o aluno se encontra.

Nesta perspectiva, apresentam-se sugestões para explorar a necessária compreensão e configuração do número fracionário, representando fração, razão ou fração com razão, explorando os significados essenciais da fração, a compreensão de frações contínuas e discretas, representações gráficas, numéricas e por extenso, tendo em vista a leitura adequada, as conversões e reversões de frações.

A fração é explorada de um outro ponto de vista, qual seja: a divisão de um todo, em partes diferentes, possibilitando aos alunos entenderem que ainda que um todo esteja particionado em partes diferentes, cada parte corresponde a uma fração do todo, no entanto, para que a fração indicada seja quantificada com maior exatidão, torna-se necessário a subdivisão, de modo que o todo fique particionado em partes iguais.

A Exploração-Resolução-Proposição de Problemas pode potencializar o ensino e aprendizagem de frações, na medida em que favorece a interação e socialização das experiências/vivências exploradas, despertando o senso crítico, criativo, pessoal e social, promovendo a socialização do conhecimento adquirido de modo individual e/ou coletivo, de modo a aguçar a indagação e a busca de soluções para além do problema proposto, ao proporcionar transpor obstáculos, como é o caso da timidez, uma vez que a exploração tende a motivar a participação e a exposição de dúvidas, ideias, refutações. Observa-se, ainda, a possibilidade do professor verificar se e como os alunos percebem determinada situação e, assim, articular meios que possam propiciar maior êxito na mediação, conferindo, também, avaliar não apenas o interesse e participação dos alunos, mas como estes avançam no processo de aprendizagem do tema e de outros aspectos inerentes.

1 EXPLORAÇÃO-RESOLUÇÃO-PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS

A Resolução de Problemas tem sido cada vez mais foco de estudos por parte de pesquisadores e educadores, na pretensão de melhor compreender seu uso e possibilidades didáticas e pedagógicas, visando alternativas viáveis que possam promover a inserção e atuação do aluno tendo em vista a compreensão significativa na e para construção e obtenção do conhecimento formal/social.

O que é um problema?

Andrade (1998, 2017) descreve que:

> Um problema é como um projeto, uma questão, uma tarefa, uma situação em que: a) O aluno não tem ou não conhece nenhum processo que lhe permita encontrar de imediato a solução; b) O aluno deseja resolver, explorar ou realizar algum trabalho efetivo; c) Se introduz ou se leva o aluno à realização de algum trabalho efetivo (ANDRADE, 1998, p, 26; 2017, p. 364).

O problema caracteriza-se, então, como uma situação em que o aluno ou o “resolvedor” não sabe a solução de imediato ou de maneira evidente e terá que dispor de conhecimentos prévios para buscar e criar meios/ações que o leve ao alcance da resolução do problema.

Resolver um problema implica encontrar uma ou mais soluções, a depender do contexto ou objetivo que se quer alcançar, após ter feito a análise dos dados contidos no problema; ter explorado, “codificado e descodificado” esses dados; ter compreendido aspectos gerais do problema; ter refletido as ações a serem realizadas; ter executado as ações e utilizado os meios necessários que conduziram à solução do problema.

A Resolução de Problema, concebida numa perspectiva metodológica, vai além do sentido puramente matemático, implica significá-la socialmente, projetando, inclusive, a compreensão de avaliar o ensino e a aprendizagem.

Segundo Cai e Lester (2010, p. 5), a Resolução de Problemas é uma parte integrante da aprendizagem da Matemática, não sendo considerada como um tópico separado no currículo, mas como um meio para o ensino de conceitos e competências matemáticas. Em consonância ao que este autor afirma, constata-se na Educação Básica, indicação metodológica da Resolução de Problemas, em alguns documentos oficiais, como os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN e a Base Nacional Comum Curricular- BNCC.

A Metodologia de Ensino e Aprendizagem via Resolução de Problema transpõe a ideia de resolver, meramente, exercícios prontos, pré-definidos, uma vez que assume, cada vez mais, a importância e possibilidades de ensino e aprendizagem desafiantes, que vão se ampliando, na medida em que são realizados estudos e alternativas viáveis a partir da mesma. Dessa forma, a Exploração-Resolução-Proposição de problemas favorece a construção mútua e significativa do conhecimento.

Cai *et al*. (2015, p. 26) descreve que as "atividades de criação de problemas geralmente exigem tarefas cognitivas, com o potencial de fornecer contextos intelectuais para o rico desenvolvimento dos alunos" e que encorajar os estudantes a propor problemas matemáticos favorece não tão somente o desenvolvimento de estratégias e de conhecimento matemático, mas, também, o desenvolvimento crítico e criativo, impactando positivamente no aprendizado de outros aspectos.

Andrade (1998, 2017) desenvolve estudos e indica a Proposição de Problemas como aspecto importante, devendo ser explorada em sintonia com a resolução, não como ponto a ser proposto apenas ao final da Resolução de Problema, mas, também, como ponto de partida a ser explorado, problematizado e construído pelos alunos, partindo do interesse e criatividade dos mesmos.

Compreendemos a problematização como parte de um processo exploratório, que se constitui da indagação por curiosidade ou da instigação indagativa (mediada ou não, pelo professor), para explorar a criatividade, a criticidade e, consequentemente, o conhecimento/identificação de um objeto, tema ou situação (simulada ou real). Indaga-se sobre: O que é isso? Pra que isso? Como poderia ser? Pra que serve? Neste momento, há um processo exploratório, para, só então, problematizar, ou seja, perceber o que sabe e o que não sabe sobre o que está sendo apresentado ou proposto. E, assim, obter condições de iniciar ações e alternativas que possam conduzir a respostas ou à proposição de outros problemas.

De acordo com Andrade (2017, p. 368):

> A exploração é o caminhar sobre a tarefa que pode proporcionar descobertas em torno e além da proposta, ainda que a solução não seja efetivada. Entendida, neste sentido, em toda sua contextualidade, tornando o trabalho de exploração inacabado, numa experiência aberta, não fechada,

> embora não solta, a partir do movimento Problema-Trabalho-Reflexão e Síntese - Resultado(P-T-RS-R).

A exploração de um problema não acaba ao chegar a uma solução do problema, vai além e em várias direções e aspectos, conforme nos indica Andrade (2017):

> O final de uma experiência de Exploração de Problemas em sala de aula nunca é o final de uma história, mas o começo de muitas outras histórias. Trabalhar com Exploração de Problemas é colocar-se sempre em movimento, em aventura, é um sair sempre para mergulhar reflexivamente e criticamente em si mesmo e além de si mesmo. (ANDRADE, 2017, p. 367).

Nessa perspectiva, a Exploração de Problemas é compreendida, em nossa proposta, como "ferramenta ampla e importante" que perpassa e projeta a problematização, a indagação, a investigação, a resolução e a proposição de problemas, sem, necessariamente, seguir uma ordem.

Explora-se um objeto/tema/situação e, a partir de então, explora-se e indaga-se sobre o que se sabe, como sabe, buscando, posteriormente, meios que possam levar à resolução e, neste caminhar, outras explorações são realizadas, problematizadas, Podendo gerar a proposição de outros problemas em relação ao objeto/tema/situação e/ou indo além destes, adentrando em questões sociais, inferindo conhecimentos prévios, expondo ideias, opiniões, dúvidas que, ao serem socializadas, poderão promover descobertas e, consequentemente, a aquisição de novos saberes e novas indagações.

2 FRAÇÃO: SIGNIFICADOS ESSENCIAIS E OUTROS ASPECTOS

Fração é uma parte, um fragmento de um todo(contínuo) ou parte de certa quantidade (discreto), expressa concretamente/graficamente ou pela notação barra fracionária $\frac{a}{b}$, com grandeza do mesmo tipo e natureza, cujo denominador indica a partição e o numerador aponta o total de partes tomadas/admitidas do todo. Assumimos que, necessariamente, um todo não precisa está dividido em partes iguais para que uma de suas partes indique fração, no entanto, para que a fração indicada possa ser identificada com mais exatidão, faz-se necessário a conversão de divisão do todo em partes iguais.

Para melhor compreender o sentido que as frações podem ter tanto na vida prática quanto escolar, é necessário identificar e considerar alguns aspectos a respeito das quantidades contínuas e discretas. De acordo com Moutinho (2005, p. 32):

> entendemos por quantidades **contínuas** aquelas que são passiveis de serem divididas de modo exaustivo, sem que, necessariamente percam as características [...] quantidades **discretas** dizem respeito a um conjunto de objetos idênticos, que representa um único todo, cujo resultado da divisão deverá produzir subconjuntos com o mesmo número de unidades (grifo próprio).

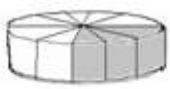
Uma das grandes dificuldades apresentadas por alunos e professores refere-se a problemas que envolvem fração. Isso se dá, justamente, pelo desconhecimento dos significados da fração e, também, pela falta de exploração adequada da leitura e interpretação necessária. Muitas vezes, ocorre pela mesmice tradicional, em que não se considera e nem se explora o que o aluno já sabe sobre este tema, visto que este seria um fator determinante para que os estudantes pudessem melhor se engajar nas aulas.

Explorar os significados essenciais da fração, de certo, proporciona ao aluno verificar e identificar as facetas em que se apresenta uma fração, ao tempo que compreende o que é uma fração.

- **Significados essenciais**

Na literatura acadêmica, podemos constatar, em relação à fração, que há convergência para cinco significados essenciais: parte-todo, medida, número, quociente e operador, como podemos ver no quadro 1:

Quadro 1– Fração com significado Parte-todo.

<table>
<tr><td>Fração como Parte-todo</td><td>A fração parte-todo expressa uma relação entre as partes de tamanhos ou quantidades de um todo ou unidade (VASCONCELOS, 2015).
Moutinho (2005) argumenta que, em situações-problema que envolva a ideia de parte - todo,o aluno necessita desenvolver, previamente, algumas competências, como: a identificação de unidade (que o todo é tudo aquilo que se considera como unidade em cada caso concreto), de realizar divisões e saber que o todo se conserva, mesmo quando dividido em partes.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Exemplificando este significado:</td></tr>
<tr><td colspan="2">- Foram comidas 3 partes de um bolo fracionado em 10 partes iguais. Que fração representa a parte que sobrou desse bolo? (Quantidade contínua).
 $\frac{10}{10}-\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">- Foram feitos 6 bolos de mesmo formato e tamanho. Sendo 2 desses bolos de morango e os outros de chocolate. Em relação ao todo, que fração representa a quantidade de bolos de chocolate? (Quantidade discreta).


Os bolos de chocolate representam $\frac{2}{6}$</td></tr>
</table>

Fonte: Produção própria

A ideia de fração parte-todo tem sido um dos aspectos mais enfatizados no processo de ensino com frações, todavia, é preciso considerar outros significados e como estes se relacionam, embora seja o significado parte-todo um ponto de partida para os demais significados, assim como também um modelo conveniente na produção da linguagem fracionária.

Quadro 2 – Fração com significado de Medida.

<table>
<tr><td>Fração como Medida</td><td>Pode ser entendida como sendo a fração que representa subunidades de uma unidade, ou seja, toma-se uma parte do todo como referência, para medir as demais, isto é, tem-se o referencial $\frac{1}{b}$ usado repetidamente para determinar uma medida, cujo resultado será $\frac{a}{b}$.
O resultado obtido na representação fracionária $\frac{a}{b}$ permitirá a compreensão de que a subunidade $\frac{1}{b}$ foi utilizada a vezes na medição efetuada (SILVA, 2005).</td></tr>
<tr><td colspan="2">Para ilustrar este significado:</td></tr>
<tr><td colspan="2">No traçado do Tangram, qual é a medida da fração B, tendo como referencial a medida da parte C? $\frac{1}{16}$ x 4= $\frac{1}{16}$x$\frac{4}{1}$ = $\frac{4}{16}$
</td></tr>
</table>

Fonte: Produção própria

Silva (1997) comenta que não dá para falar de fração sem falar em medidas, tendo em vista que, historicamente, a fração tenha surgindo em virtude da necessidade de medir.

Assim, ao observar o exemplo dado, há percepção de que a fração $\frac{1}{16}$ (um dezesseis avos) foi utilizada como medida para verificar a quantidade de vezes que a mesma corresponde na medida da fração $\frac{1}{4}$. Isto fica mais evidente, ao manusear com material, destacando a medida $\frac{1}{16}$, sobrepondo e contando quantas vezes a mesma caberá em $\frac{1}{4}$.

Quadro 3 – Fração com significado de Número.

<table>
<tr><td>Fração com significado de Número</td><td>Drechmer; Andrade e Susimeire (2011) dizem que uma fração $\frac{a}{b}$ com b ≠ 0 pode assumir o significado de número e ser posicionada na reta numérica. Esta abordagem quase não é utilizada pelos livros didáticos, o que prejudica a organização do conceito, pois o aluno tende a não identificar a fração como um número. É importante que ele reconheça este significado, visualize seu posicionamento na reta numérica e compreenda que este número também pode ser representado como um número decimal (a, b).
Moutinho (2005, p.36) afirma que as frações, como os inteiros, são números que não precisam, necessariamente, referir-se a quantidades específicas.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Exemplificando este significado:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Represente $\frac{1}{2}$ na reta numérica.


Converta $\frac{1}{2}$ em fração decimal.


$\frac{1}{2} = 1 \div 2 = 0{,}5$
Assim, $\frac{1}{2}$, na reta representada, equivale a $\frac{5}{10}$, que corresponde a 0,5 em decimal.</td></tr>
</table>

Fonte: Produção própria

A identificação das frações com ponto na reta númerica poderá ajudar o aluno a perceber a fração como um novo tipo de número, e, também, pode ser fator auxiliar no conhecimento e identificação com significado de medida e de fração equivalente.

Quadro 4 - Fração com significado de Quociente.

<table>
<tr><td>Fração como Quociente</td><td>Extrapola a ideia de parte-todo, pois, nestas situações de quociente, temos duas variáveis.
Botta(1997) descreve que:
Dividir uma quantidade é separá-la em partes de mesmo tamanho. Essa função quociente é chamada divisão partitiva.
Extrair é tirar repetidamente uma quantidade (parte) de outra. Esta é a função quociente chamada de divisão quotitiva.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Exemplificando o que foi posto:</td></tr>
<tr><td colspan="2">- Há 3 chocolates a serem divididos para 4 crianças (duas invariantes).
Em quantas partes cada chocolate deverá ser dividido? 4 partes (partitiva).
Que fração de chocolate cada criança receberá?

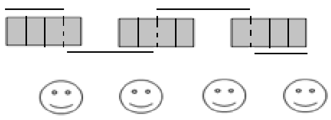
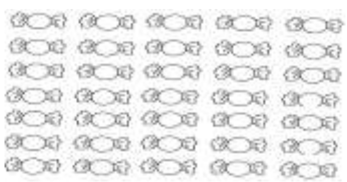
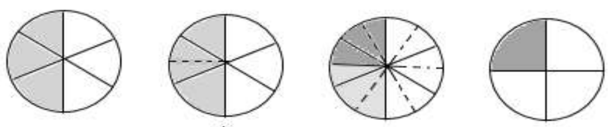



Imagem adaptada de Silva (1997).
Cada criança receberá $\frac{3}{4}$ de chocolate. (quotitiva).</td></tr>
<tr><td colspan="2">- Há 35 bombons para dividir igualmente entre 5 crianças (duas invariantes).
Quantos bombons cada criança deverá receber?
Essa divisão é representada por $\frac{35}{5} = 35 \div 5 = 7$
 Cada criança receberá $\frac{7}{35}$ de bombons (quotitiva).</td></tr>
</table>

Fonte: Produção própria

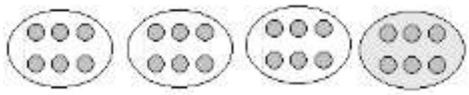
Magina e Campos (2008) alegam que situações com o significado de quociente podem ser utilizadas na pretensão de levar as crianças a perceberem a invariante de ordenação das frações, uma vez que, ao perceberem a relação inversa entre divisor e quociente, possibilitaria a compreensão de que quanto maior é o denominador menor será a parte (MAGINA; CAMPOS, 2008, p. 28).

Quadro 5 – Fração com significado Operador.

<table>
<tr><td>Fração como Operador</td><td>Esse significado está associado à ideia de transformar, isto é, a representação de uma ação sobre o número/quantidade, transformando seu valor final nesse processo.
A fração, com b ≠ 0, observada pela ótica do operador multiplicativo, atua como fator transformador de um número ao ser multiplicando por ‘a’ e, logo em seguida, dividido por ‘b’. O número resultante deste processo pode ser maior ou menor que o número em seu estado inicial, dependendo do quociente $\frac{a}{b}$ (DRECHMER; ANDRADE, SUSIMEIRE , 2011).
Uma forma simples de se referir à noção de operador é associada a “encolher/esticar”, “contrair/expandir”, “reduzir/ampliar” ou ‘dividir/multiplicar” (LEMOS, 2006 apud VASCONCELOS, 2015, p. 42).</td></tr>
<tr><td colspan="2">Vejamos os exemplos:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ana comeu $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{6}$ de uma pizza. Que parte da pizza Ana comeu? (Quantidade contínua).

$\frac{3}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$
Ana comeu $\frac{1}{4}$ da pizza.</td></tr>
</table>

Qual valor corresponde à fração $\frac{1}{4}$ de 24 bolas de gude? (Quantidade discreta)

A fração representa $\frac{1}{4}$ de 24 bolas de gude, corresponde a 6 bolas de gude.



$\frac{1}{4}$

Fonte: Adaptado de Vasconcelos, 2015, p. 42.

Fonte: Produção própria

O significado $\frac{1}{4}$ de 24 bolas de gude é feito considerando-se a fração $\frac{1}{4}$ operando sobre a quantidade de 24 bolas de gude, utilizando a multiplicação e divisão para gerar o resultado de seis bolas de gude (NUNES *et al.*, 2004 *apud* VASCONCELOS, 2015).

Entende-se que, para a criança, seja difícil a compreensão de que a configuração de dois números (notação barra fracionária) forma um só número. Assim sendo, o ensino de fração, especialmente nos anos iniciais, deve ser cauteloso e prolongado, de modo a oportunizar várias vivências e explorações que melhor conduzam a aquisição deste conhecimento.

A fração é considerada por muitos pesquisadores como a origem fenomenológica do número racional, a exemplo de Freudenthal (1983, p.134), que descreve “frações são o fenômeno, fonte nomenológica do número racional - uma fonte que nunca seca”.

É justamente enquanto aspecto do número racional que o uso e entendimento da fração se amplia, tornando-a complexa, sendo concebida, no âmbito escolar, com múltiplas facetas, ou seja, adquire significados a depender do contexto, assume diversas representações: gráficas, por extenso (com a terminologia de avos, decimais...), numéricas (fracionário, decimal...). Em relação ao número fracionário, há que salientar que nem sempre o mesmo indica uma fração. Daí a necessidade de compreender sua configuração em relação a uma fração e em relação a uma razão.

- **Fração, razão e número fracionário**

Um número racional é todo número que pode ser representado por uma razão ou fração $\frac{a}{b}$ de dois números inteiros, um numerador *a* e um denominador não nulo *b*. Consideram-se os números inteiros como parte do conjunto dos números racionais, bastando tomar b igual a 1.

Moreira e Ferreira (2008), apresentando uma breve síntese das ideias de Freudenthal (1983), descrevem que este autor vê dois elementos fundamentais nos fenômenos associados às noções de fração e de número racional, quais sejam: *fracionar* (sentido de fratura, daí o nome fração) e de *comparar* (sentido de relação ou razão, daí o nome número racional).

Ressaltamos que fração é diferente de razão e que poderá haver confusão no entendimento de razão como sendo fração pelo não conhecimento do que caracteriza cada um desses conteúdos, bem como pelo fato de ambos os conteúdos serem representados na forma fracionária (símbolo), isto é, por um número fracionário.

Quanto a isso, o professor deve estar consciente dessa diferença, para que, desde o início da exploração do conteúdo de fração (a partir do 5º ano do Fundamental I), possa ir direcionando, ou melhor, ir dando indícios aos alunos para que compreendam e diferenciem fração de razão, mencionando que ambos são representados por números fracionários, porém, possuem sentidos diferentes.

Desse modo, é importante que o aluno perceba a diferença base entre fração e razão, ou seja, saiba que a fração se dá do referencial **parte-todo**, com grandeza de mesmo tipo/natureza, enquanto que a razão se dá na relação **parte-parte** com grandezas de naturezas diferentes, como podemos observar no quadro a seguir:

Quadro 6 – Diferença entre fração e razão.

FRAÇÃO	
De 7 copos de suco de laranja, 2 foram tomados.	$\frac{2}{7}$ partes (suco de laranja) todo (suco de laranja) (Mesma natureza)
RAZÃO	
Para fazer 7 copos de suco de laranja, foram necessários: 2copos de concentrado de laranja e 5 copos de água.	$\frac{2}{5}$ parte (concentrado de laranja) parte (água) (Natureza diferente)

Fonte: Produção própria

Um mesmo número fracionário pode representar uma fração, uma razão ou uma fração com razão, a depender do contexto, como nos exemplos, a seguir:

Quadro 7– Representação de um mesmo número fracionário para razão, fração e fração com razão.

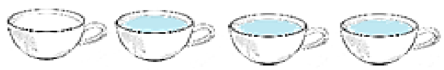
FRAÇÃO

Comeram $\frac{1}{3}$ do chocolate.

RAZÃO

Para fazer a receita de um determinado bolo, são necessários 1 xicara de leite e 3 xicaras de água.

Assim, a razão para cada bolo feito, é de: $\frac{1}{3}$ $\frac{\text{leite}}{\text{água}}$



FRAÇÃO COM RAZÃO

No copo de suco, há $\frac{1}{3}$ de polpa de fruta.

Fonte: Produção Própria

Na fração com razão, tem-se uma constatação da quantidade (parte) de um todo (neste caso, a polpa de fruta), que está na composição de outro todo (neste caso, o suco). Nesta situação, temos o todo (inteiro), que é o suco particionado em três partes (medidas) iguais, das quais, se quer saber quanto há de polpa de fruta. Nota-se que não é uma comparação de parte-parte, mas, sim, uma constatação da quantidade de outro todo (polpa de fruta) na composição do todo (suco).

Assim, devemos explorar o número fracionário**,** de modo que os alunos compreendam que, apesar de ser composto por dois números, ele é um só, que corresponde a partes de um todo (inteiro) e que essa configuração numérica pode representar uma fração, uma razão ou uma fração com razão.

Neste processo, a compreensão e atribuição da nomenclatura (palavra), relacionada ao número e seu significado será fundamental na obtenção da aprendizagem.

- **Leitura e escrita de fração**

A leitura e interpretação adequada de uma fração é um aspecto importantíssimo e deve ser explorado em relação à representação gráfica e sentido numérico, também quanto ao sentido e significado da palavra que representa e descreve a fração em suas representações.

Usualmente, surgem palavras do contexto da Língua Materna que mudam seu significado quando consideramos o contexto da linguagem matemática, a exemplo da palavra “quarto” que pode significar um cômodo (Língua materna) ou a quarta parte das partes que constituem um inteiro/todo (linguagem matemática).

Em se tratando de frações, na representação barra fracionária, podemos ter vários contextos, como:

- Escrita, leitura e interpretação quanto aos denominadores até 9 (meio, terço, quarto...nono), exemplo: $\frac{3}{5}$ (três quintos);
- Escrita, leitura e interpretação de frações com potência de 10: décimo, centésimo... Exemplo: $\frac{3}{10}$ (três décimos);
- Na escrita, leitura e interpretação de fração com 10, 20, 30...100..., associados à algarismos (1 a 9) no denominador ocorre outra mudança. Neste caso, é feita a leitura apenas na terminologia da palavra AVOS. Exemplo: $\frac{3}{15}$ (três quinze avos).

A complexidade ocorre em compreender que dois números, numa barra fracionária, constituem um número só e esse número pode ter leitura/compreensão variada.

Sobre isto, Bertoni (2008, p. 212-213), destaca:

> Vamos pensar cuidadosamente sobre o que pode estar envolvido para que uma criança compreenda que $\frac{3}{5}$ representa uma só entidade, compreender o que é essa entidade, que ela tem um tamanho e que tamanho é esse.

Deste modo, problematizar, questionar, promover a reflexão, estudo e compreensão de que a palavra pode mudar o significado e o sentido a depender do contexto torna-se mais do que necessário.

- **Representações, conversões e reversões de frações**

Podemos visualizar frações a partir da representação concreta, utilizando material manipulativo; a partir da representação gráfica, cujas ilustrações podem e devem se dar de várias maneiras; através da representação numérica; a partir da descrição por extenso. Essa variedade representacional pode constituir dificuldades para o entendimento de frações. Deste modo, ressaltam-se a importância de experienciar, principalmente com as crianças do Ensino Fundamental I, situações em que possam vivenciar, comparar e perceber conversões de uma mesma fração, de maneira concreta com material manipulativo, de maneira visual/graficamente, numericamente e por extenso.

Outro aspecto que poderá contribuir na aprendizagem de fração é expor e oportunizar aos alunos a conversão e reversão dos procedimentos realizados, ou seja, chegar a um determinado resultado e voltar pela inversão do processo feito, chegando ao estado inicial do que foi proposto. Deste modo, possivelmente, irá favorecer maior compreensão referente ao porquê do resultado obtido, assim como também favorecerá a percepção de que a quantidade (todo) se conserva na junção das partes.

O desenvolvimento de múltiplas situações para explorar frações, num movimento de converter e reverter frações por frações, frações por decimais ou decimais em frações decimais, em representação gráfica, numérica e por extenso favorece não apenas a compreensão de aspectos em relação ao grafo, a notação barra fracionária e ao registro por extenso da fração, também promove a ação e aquisição de muitos outros conceitos que envolvem este tema. Converter uma fração por outra fração (equivalência) e compreender que o valor numérico é o mesmo e o que mudou foi apenas a forma de representá-lo, certamente, denota aquisição de senso numérico.

- **Materiais manipulavéis e aritmética com frações**

Sabemos que a apropriação das técnicas operatórias é importante, porém, para que estas sejam melhor compreendidas e obterem maior alcance na aprendizagem dos alunos, faz-se necessário estabelecer apropriação adequada do entendimento de fração e sua relação na notação barra fracionária, assim como também compreender a relação e conversão numérica da mesma em processos aritméticos.

Sugerimos que, para que se obtenha maior êxito no ensino e na aprendizagem de aritmética com fração, antes sejam exploradas vivências com materiais manipuláveis, de modo que se possa visualizar, converter, comparar, confirmar, retornar ao todo, obtendo compreensão das partes e possibilidades de tamanhos e partições que podem ser feitas e/ou associadas a outros todos.

Assim, ao explorar, em um primeiro momento frações, de maneira manipulável, é visualmente mais perceptível e compreensível entender e significar o porquê da obtenção do resultado final ao realizar a mesma situação em registros gráficos, numéricos e por extensos.

Colocamos os procedimentos aritméticos, relacionando o movimento usual da regra operatória em paralelo ao manuseio e exploração de materiais manipulativos, de modo que os registros gráficos, numéricos e por extenso são uma representação do que está sendo vivenciado na e a partir da manipulação do material.

Materiais manipulativos são concebidos no sentido visual ou palpável de movimento e interação, sejam concretos ou visuais, com imagens, objetos, ambientes virtuais e outros. Além de lúdicos, favorecem o processo de ensino e aprendizagem, possibilitando múltiplos usos e reflexões, a exemplo do quebra-cabeça chinês Tangram, que possibilita explorar, propor e resolver questões matemáticas, sendo excelente recurso para trabalhar frações.

3 CONSIDERAÇÕES, ORIENTAÇÕES E SUGESTÕES DE ATIVIDADES

A proposta uma sugestão de como poderá ser iniciada e instigada a exploração, desencadeando a exploração-resolução-proposição de problemas com frações, que serão mutuamente desenvolvidas no decurso das explorações e interesses tanto dos alunos quanto da oportunidade instigada pelo professor. Lembramos que, para ser um problema, necessariamente não precisa ter enunciado.

Um dos aspectos mencionados e, geralmente, questionado na literatura acadêmica trata-se de como o tema fração tem sido trabalhado na escola, ou seja, partindo de figuras particionadas igualmente, para, assim, indicar a parte admitida. Diante disto, nossa proposta parte do manuseio com material manipulativo, o Tangram, na pretensão, entre outras, de explorar fração partindo do concreto e da partição do todo em partes diferentes, de modo que os alunos sejam desafiados e compreendam que, necessariamente, o todo não precisa esta particionado em partes iguais para ser fração, porém, para que a fração seja quantificada com mais exatidão, pode-se fazer a conversão, particionando o todo que antes estava em partes (tamanhos) diferentes para partes iguais, percebendo, assim, entre outros aspectos, como se dá a configuração do número fracionário indicando fração.

É inviável mensurar as múltiplas possibilidades que a exploração de um problema poderá ter. No entanto, há de se considerar alguns aspectos que podem fazer parte desse processo, tais como:

- <u>Indagação-Curiosidade-Problematização</u>: Exploração iniciada partindo da curiosidade e observações feitas pelos próprios alunos. O professor faz a mediação e intervenção necessária para gerar a problematização;

- Instigação indagativa-Problematização: Exploração instigada pode ser mediada intencionalmente e diretamente pelo professor, no sentido de levantar hipóteses e conhecimento prévio dos alunos, promovendo o questionamento e a problematização de um objeto/tema ou situação problema; pode ser a instigação feita pelo professor ou em virtude da própria dinâmica exploratória dos questionamentos feitos por aluno-aluno, aluno-professor-aluno, problematizando o que está sendo explorado;
- Contextualização: Exploração no sentido de melhor conhecer e relacionar o que é apresentado ao aluno, seja objeto, tema ou situação problema (simulado ou real);
- Investigação: Exploração de meios, alternativas, ações e diálogos que possam conduzir a solução do problema;
- Solução-Verificação-Problematização: Exploração no sentido de verificar a solução encontrada; explorando e problematizando para verificar se há outras maneiras de resolver o problema; explorando para problematizar e propor outro(s) problema(s) a partir do problema inicial.

Quanto à metodologia, categorizamos a EXPLORAÇÃO da seguinte maneira:

✓ Exploração-Exploração (EE):

Exploração de ideias, opiniões e percepções que surgem durante a própria exploração, “problematizando-a”. No seu desenvolvimento, poderá ser desencadeando a proposição e/ou a resolução de problemas, ou apenas explorar, para contextualizar/ conhecer o objeto/tema, a fim de verificar e ou realizar ações.

✓ Exploração-Proposição -Exploração-Resolução (EPER).

Exploração de um objeto, vivência. Assim, é possível propor um problema ou mais problemas, com ou sem enunciado, explorando continuamente, para encontrar soluções e fazer novas proposições.

✓ Exploração – Resolução - Exploração (ERE):

Exploração para encontrar meios, caminhos e estratégias que possam levar à resolução e, a partir da resolução, fazer novas explorações, pretendendo encontrar outras alternativas que confirmem e/ou indiquem outras possibilidades de resoluções. Nessa perspectiva, a resolução não é algoritmo, ela é decorrente do processo da exploração realizada pelo aluno, aluno-aluno ou aluno-professor.

Frisamos que a exploração é livre, flui e é fluída das indagações, dúvidas e ideias que vão surgindo das ou nas explorações realizadas, no entanto, o professor, enquanto mediador, deve estar atento para intervir e instigar, oportunizando aspectos que, ao seu ver, são essenciais à compreensão e aprendizagem do conteúdo.

A cada aula/encontro é interessante que o professor realize um esquema do que foi e como foi explorado anteriormente, avaliando o que e como ocorreu a exploração, que questionamentos foram feitos pelos alunos, para, assim, retomar a exploração no encontro/aula seguinte, de modo a priorizar e articular oportunidades de rever aspectos essenciais do assunto abordado.

Se a exploração inicial for instigada pelo professor no sentido de desencadear o interesse e a participação ativa do aluno, poderá ser necessário realizar o levantamento de alguns questionamentos, principalmente verificar:

O que os alunos já sabem sobre fração?

É importante considerar o que os alunos expõem sobre o tema apresentado, para que o professor trace um norte do que poderá ser enfatizado, que informações, ações e adequações serão oportunas para que se possa obter maior êxito na exploração e aprofundamento do tema em questão. Para isso, se faz necessário realizar um diagnóstico, que pode ser feito no formato que convier aos propósitos de estudo.

No estudo realizado, o diagnóstico se deu por via impressa, em dois momentos: o primeiro, abordando fração sobre alguns aspectos (representação gráfica e numérica/ fração discreta e contínua, equivalência...); o segundo, com questões envolvendo frações em situações problemas.

- Aplicação de Atividade **Diagnóstica - I**

Para realizar a atividade diagnóstica I, foram disponibilizadas 16 questões envolvendo fração.

Ressaltamos que a fase diagnóstica objetiva a obtenção de percepção, quanto às dificuldades (referentes ao tema fração) apresentadas pelos alunos e os resultados obtidos destas subsidiam o professor na tomada de ações e instigações exploratórias.

1.Descreva o que você entende ao ler a palavra FRAÇÃO.

2. Dê exemplos de:

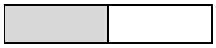
a) Números naturais____

b) Números fracionários______________________________________

A questão 1, objetiva de verificar se o aluno tem ideia do que é uma fração.

Na questão 2, solicita-se que o aluno dê exemplos de números naturais e números fracionários, na pretensão de perceber se o mesmo possui ideia do que

3. Que fração representa a parte pintada na figura?



4. Represente, graficamente (desenho), as seguintes frações?

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{5}{10}$

seja número e diferencie número natural de número fracionário.

Nas questões 3 e 4, busca-se verificar se o aluno faz inferência da representação gráfica (desenho), com a representação numérica, no caso, com o número fracionário e vice-versa.

5. Um chocolate foi dividido em 4 partes iguais. Depois foi dada 1 parte desse chocolate. Que fração representa a parte dada?

Na questão 5, visa-se o entendimento do aluno em relação a uma fração em sua representação gráfica e em número fracionário, apenas pela leitura e interpretação da situação, sem nenhum recurso ilustrativo.

6. Como se lê as seguintes frações?

$\frac{1}{2}$ ______________________________

$\frac{1}{13}$ ______________________________

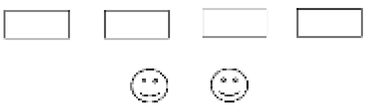
$\frac{1}{10}$ ______________________________

$1\frac{1}{2}$ ______________________________

A questão 6 visa averiguar a compreensão que o aluno apresenta quanto a leitura e escrita de fração, representada por número fracionário e por número misto. Foram destacadas frações cujo numerador é sempre 1, com intuito de tornar mais

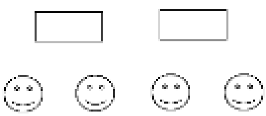
7.Observe:

a) Ao dividir igualmente os quatro chocolates para as duas crianças, quanto cada uma deverá receber?



R:____

b) Agora, são dois chocolates para quatro crianças. Quanto de chocolate, cada criança deve receber?



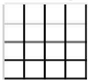
R:____

Adaptada :SILVA,1997.

claro e objetivo o entendimento da leitura de frações feita pelo aluno, uma vez que a leitura feita por numeradores não muda, é sempre analógica aos números naturais, diferente da leitura de denominadores.

Na questão 7, a observância ocorre quanto a distribuição de quantidades, a inversão de distribuição pela divisão em maior ou menor quantidade, verificando-se, a partir das situações apresentadas, se a criança já possui entendimento da fração discreta e da fração contínua.

8. O quadrado está dividido em 16 partes iguais.
Pinte 12 dessas partes.
A que fração do quadrado corresponde a parte que você pintou?



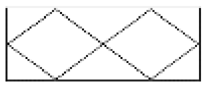
R:____

Adaptadas: Silva 1997.

A questão 8 objetiva verificar se a representação gráfica auxilia na compreensão e resultado da situação posta.

9. Na figura abaixo, pinte:

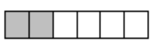
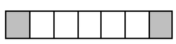
$\frac{1}{4}$ de verde $\frac{4}{16}$ de azul $\frac{1}{2}$ de amarelo

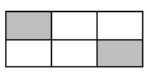


Adaptadas: Silva 1997.

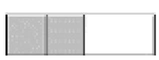
A questão 9 visa averiguar se os alunos compreendem a fração partindo do todo dividido em partes diferentes, que, para quantificar com mais exatidão, este todo deve ser particionado de modo que as partes fiquem iguais. Possivelmente, conflito e dificuldades serão externados na realização desta questão, tendo em vista que, até então, os alunos, talvez, não tenham tido nenhuma vivência de representar várias frações em um todo, ainda mais sendo este todo particionado em partes não

10. Assinale com um X as figuras abaixo que representam a fração $\frac{2}{6}$

b)  b) 

g)  d) 

11. A parte pintada na figura pode ser representada por quais frações?



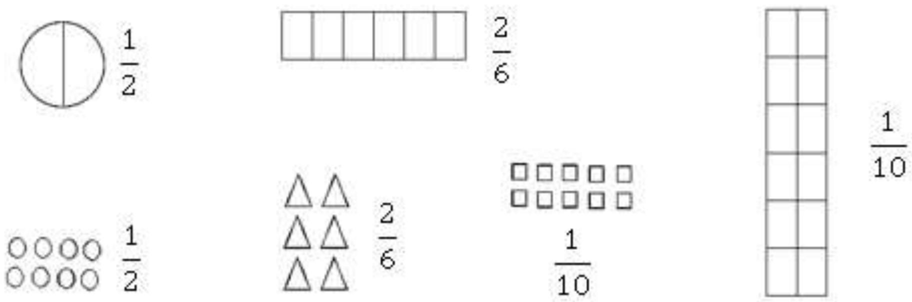
a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{2}{4}$

Adaptadas: Silva 1997.

iguais.

As questões 10 e 11 abordam a equivalência de frações pela representação gráfica e de números fracionários, visando perceber se, a partir das respostas apontadas pelo aluno, o mesmo entende que uma fração pode ser convertida/revertida e representada a partir de outras divisões e indicações de outros números fracionários e, ainda assim, manter a mesma quantidade.

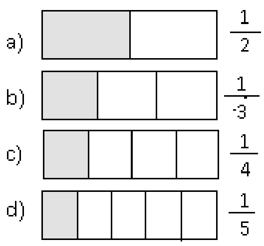
12. Em cada figura, pinte a fração indicada.



13. Registre que fração indica a parte pintada na seguinte figura.

As questões 12 e 13 objetivam saber se o aluno compreende a representação de fração discretas (partição de quantidade-conjunto de inteiros), diferenciando da fração contínua (partição de um todo), ao realizar leitura visual das representações gráficas.

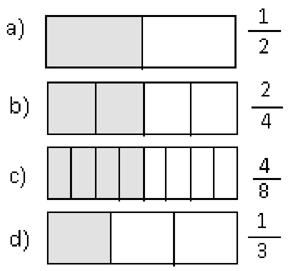
14.Observe a parte pintada e as frações indicadas em cada figura.



- A **maior** fração está no item a, b, c ou d? ___________________________
  Justifique sua resposta____
- A **menor** fração está no item a, b, c ou d? ___________________________
  Justifique sua resposta______________________________________

A questão 14 visa averiguar como e se os alunos compreendem a fração a partir do tamanho e/ou da ordem. Distribuídas, partindo de frações unitárias, por acreditarmos ser esta a mais viável na obtenção visual (gráfica) e numérica ao entendimento dos alunos.

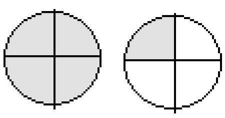
15.Observe a parte pintada e as frações indicadas, na disposição das seguintes figuras.



• Entre as figuras dos itens a, b, c e d, há frações equivalentes (que correspondem a mesma quantidade). Quais são?

Na questão 15, o propósito está especificamente voltado para a equivalência de frações, portanto, o desafio está em perceber as frações equivalentes entre as frações dadas.

16. Observe! O resultado dessa operação poderá ser:



$\frac{4}{4} + \frac{1}{4} =$

a) $\frac{5}{4}$ ou $1\frac{1}{4}$ ( )

b) $\frac{5}{4}$ ou $\frac{5}{8}$ ( )

Na questão 16, o objetivo se dá por verificar a compreensão do aluno quanto a divisão e tomadas de partes de mais de um todo. Observou-se que a grande maioria concebe as partes admitidas de mais de um todo somando denominador por denominador e numerador por numerador.

- Aplicação de Atividade **Diagnóstica - II**

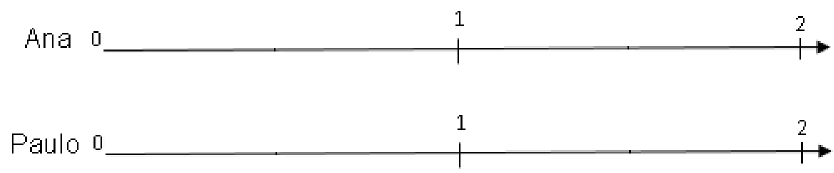
Para realizar a atividade diagnóstica II, foram disponibilizadas 8 questões envolvendo problemas com os significados essenciais da fração.

Outros questionamentos poderão ser agregados como forma de complementar o diagnóstico, como, por exemplo, sugerir uma lista ou outro recurso para que os alunos proponham problemas, visando verificar se os mesmos possuem entendimento e/ou já conseguem compreender o que é uma proposição de problema, sem, contudo, necessariamente, neste momento de diagnóstico, os problemas propostos estarem associados ao tema fração, podendo, ainda, destacar questões voltadas apenas para a interpretação de situações, a fim de verificar a leitura, compreensão e interpretação dos dados em mais de um contexto. Neste sentido, as questões 6, 7 e 8, na pesquisa realizada, são complementares. Ressaltamos que a importância da atividade está, de alguma forma, associada a um contexto de vivência dos alunos.

A atividade proposta, a seguir, parte do contexto dos festejos juninos, período no qual os alunos vivenciaram na escola, inclusive, com barracas de comidas típicas, pescaria, danças, que ocorrem anualmente nesta instituição, não apenas para vivenciar os festejos juninos, mas, também, para prestigiar a cultura nordestina e arrecadar verbas com a venda das comidas típicas (doadas por professores, funcionários...), que são convertidas, posteriormente (outubro), em festejos para comemorar o dia da criança.

Leitura informativa do texto "Festas juninas" (Leitura feita individualmente e, posteriormente, coletivamente, no intuito de esclarecer o sentido de algumas palavras). O texto se encontra em apêndice.

1. Para ganharem maçã do amor, Ana e Paulo precisam responder um desafio. Ana deverá representar $\frac{1}{2}$ numa reta numérica e Paulo deverá representar $\frac{1}{4}$ em outra reta numérica. Como deverá ficar cada representação?

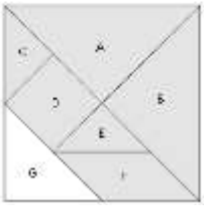


A questão 1 objetiva a identificação pelo aluno da divisão fracionária com significado de **número** a partir da reta numérica. Alguns estudos apontam que essa abordagem é muito pouco explorada nos livros didáticos, o que prejudica o entendimento deste conceito.

Pressupondo que os alunos ainda não tenham tido experenciado oportunidade de fração com significado de número, o professor poderá julgar viável dispor de uma reta para Ana e outra para Pedro, pensando, justamente, na dificuldade que o aluno pode apresentar em compreender a representação numérica na reta, ainda mais de dois números fracionários numa mesma reta, ficando a critério do professor aplicar ou adaptar a questão, a depender dos objetivos e nível da turma.

2. Para ornamentar o salão para a festa junina, foram feitas algumas bandeirolas e balões com os alunos do 5º ano. Depois de ajudarem, foram recrear e um dos alunos que estava brincando com um Tangram, percebeu que a disposição da peças no traçado (desenho) formava a representação plana de um balão junino.

- Se subdividirmos as partes (traçado do Tangram) em partes iguais a C e a E, a que fração corresponderá o traçado do balão junino?



Na proposta da questão 2, a pretensão se dá em verificar se o aluno compreende o significado **parte-todo,** partindo da partição do todo em partes diferentes, sendo necessário a conversão, isto é, a subdivisão do todo em partes iguais, para responder a questão.

3. No dia da festa junina, compareceram 23 alunos do 5º ano A, mais a professora. Para a festa junina dessa turma, foram levadas 8 pamonhas partidas em três partes iguais cada uma.

- Que fração de pamonha deve ser destinada a cada pessoa desta turma? Represente, graficamente(desenho), e em número fracionário.

Na questão 3, emprega-se o significado de fração **quociente,** objetivando verificar o entendimento que os alunos têm quanto a identificar a parte que cada pessoa terá direito em relação à divisão feita das pamonhas, ou seja, se o aluno compreende que, apesar de ter 8 inteiros, a indicação fracionária se fará pela partição de três partes iguais de cada uma das pamonhas.

4. O local onde ocorrerá a quermesse da escola precisou ser pintado. Como tinha pouca tinta, o pintor misturou 2 litros de tinta vermelha com 3 litros de tinta amarela, gerando uma nova tinta na cor laranja.

- Que fração de tinta amarela está contida na tinta laranja?

a) $\frac{3}{5}$ ( )

b) $\frac{2}{3}$ ( )

Uma das ideias do significado **medida** é a divisão de uma unidade em partes iguais e destas serem retiras novas medidas (subunidades) para verificar quantas dessas partes irão caber em determinada parte do todo. Outro aspecto está relacionado com a comparação de duas grandezas. Como é o caso da questão 4, proposta acima, em que o aluno deverá externar compreensão da quantidade de uma grandeza (tinta amarela) como parte na composição de outra grandeza (tinta laranja), ou seja, a razão de uma quantidade em relação a outra quantidade.

5. Na brincadeira de pescaria que havia na festa junina da escola, Lia pescou $\frac{1}{3}$ dos 18 peixes que havia na pescaria e seu amigo Lucas pescou $\frac{2}{3}$ dos 18 peixes.

Imagem adaptada: www.smartkids.com.br

- Que quantidade de peixes Lucas pescou?

A questão 5 objetiva verificar a compreensão do aluno quanto ao significado **operador** multiplicativo, ou seja, se o aluno infere que $\frac{2}{3}$ de 18 peixes corresponde a 12 peixes pescados por Lucas.

6. Caio comprou um bilhete para participar do bingo na Quermesse. Ele ganhou um brinde surpresa e, ao abrir, viu que era uma barra de chocolate. Ele deu a cada um dos seus dois irmãos uma parte igual à que ele comeu.

- Que fração do chocolate foi dada para os irmãos de Caio?
- Que fração do chocolate recebeu cada um dos irmãos, inclusive, Caio?

Na questão 6, pretende-se verificar se o aluno fará uso da representação gráfica para encontrar uma solução e se usar, observar se a ilustração corresponderá adequadamente à situação e à resposta apresentada.

7. Caio estava com pouco dinheiro e se juntou a Eva para comprarem um bilhete e, assim, puderam participar do sorteio que houve na Quermesse. Eles foram sorteados e ganharam um pacote com 100 bombons.

- Na situação descrita, que fração corresponde à quantidade de bombons?

a) $\frac{1}{2}$ ( )

b) $\frac{50}{100}$ ( )

c) a e b estão corretas ( )

- Como se lê o número $\frac{50}{100}$?
- Em número decimal, como seria a representação da fração $\frac{50}{100}$?
- E em porcentagem, como seria a representação dessa fração?

A questão 7 objetiva verificar a compreensão do aluno acerca da relação de conversão de fração em porcentagem e em número decimal. Também, visualizar se o aluno compreende a leitura e escrita adequada indicada na questão.

8. Observe a lista de comidas típicas que cada aluno do 5º ano A ficou de levar para a festa junina:

Lista com a contribuição de comida tipica, por cada pessoa do 5º ano A

1.Ana......................4 pamonhas
2.Ana Maria ....4 pamonhas
3.Bia....................... 10 espigas de milho
4.Bruno.................. 4 canjicas
5.Caio...................... 4 canjicas
6.Carla.................... 12 cocadas de amendoim
7.Carlos.................. 1 bolo de milho
8.Claudia.................1 bolo de batata
9.Denis.................. 12 tapiocas de queijo
10.Eva.....................12 fatias de queijo qualho
11.Fábio..................12 fatias de queijo coalho
12.Gilma..................1 grarrafa com café(1 litro)
13.Henry..................1 garrafa com chocolate quente(1 litro)
14.Ian......................12 pacotes de pipoca
15.Ivo...................... 12 pacotes de pipoca
16.João....................2 rapaduras
17.José....................1 pacote de paçoca
18.Lucas...................1 pacote com paçoca
19.Maria.................. 12 tapiocas de coco
20.Mariana............. mungunzá
21.Paulo................ 1 refrigerante de 2 litros
22.Pedro..................1 refrigerante de 2 litros
23.Raí.......................1 refrigerante de litros
Professora................25 maças do amor

- Que problemas poderiam ser propostos a partir da leitura dessa lista?

A proposta dada na questão 8 objetiva averiguar se o aluno apresenta compreensão do que é propor problemas, podendo a proposição feita está ou não relacionada à ideia de fração.

Após obter noção do que os alunos já externam de “entendimento” sobre fração, o professor poderá fazer um quadro síntese, em que, posteriormente, poderá se utilizar deste para nortear aspectos da fração a serem articuladas na exploração, podendo acrescentar aspectos que julga necessário ser explorado, a exemplo, destacamos o quadro a seguir:

Quadro 8 - Levantamento de aspectos e dificuldades referentes a fração, observadas no diagnóstico**.**

FRAÇÃO			
Contínua		Discreta	
Leitura e escrita			
Significados essenciais	**Representações e aritmética de frações.**	**Notação barra fracionária**	**Representações: conversão e reversão**
Parte-todo Número Medida Quociente Operador	Gráfica Numérica Extenso	Fração Razão	Gráfica Número fracionário Número misto Equivalência Fração decimal

Fonte: Produção própria

Salientamos que este é apenas um norte para iniciar a exploração, podendo ser acrescido de outros tópicos a partir da própria exploração feita no decurso das aulas/encontros.

Manuseando, explorando e conhecendo o Tangram

Foco metodológico: EE

- ✓ Aqui, a exploração ocorre na pretensão de conhecer o material a ser utilizado, articulado ao tema proposto. Neste sentido, temos a <u>Contextualização.</u>

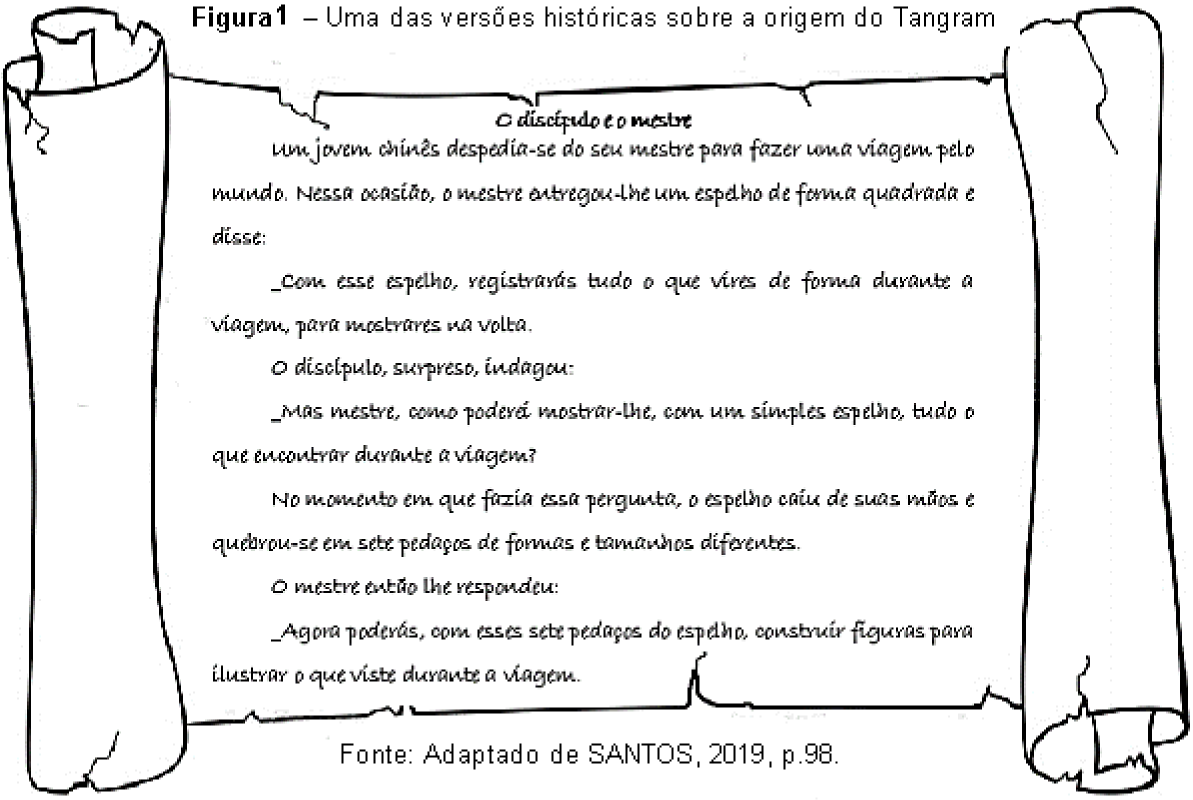
A contextualização feita refere-se a possibilitar aos alunos vivenciar não apenas o manuseio do material, mas, também, os seguintes aspectos:

- O que é?
- De onde surgiu?
- Como é feito?
- Como pode ser utilizado?

Instigando, pois, a criatividade, compreensão e associação do tema fração a ser explorado com o Tangram.

O professor poderá, após explanar algumas versões históricas sobre a origem do Tangram, escolher, junto aos alunos, a que mais parece lógica e, assim, explorá-la, a exemplo da história “O discípulo e o mestre”.

Figura 1 – Uma das versões históricas sobre a origem do Tangram



O discípulo e o mestre

Um jovem chinês despedia-se do seu mestre para fazer uma viagem pelo mundo. Nessa ocasião, o mestre entregou-lhe um espelho de forma quadrada e disse:

_Com esse espelho, registrarás tudo o que vires de forma durante a viagem, para mostrares na volta.

O discípulo, surpreso, indagou:

_Mas mestre, como poderei mostrar-lhe, com um simples espelho, tudo o que encontrar durante a viagem?

No momento em que fazia essa pergunta, o espelho caiu de suas mãos e quebrou-se em sete pedaços de formas e tamanhos diferentes.

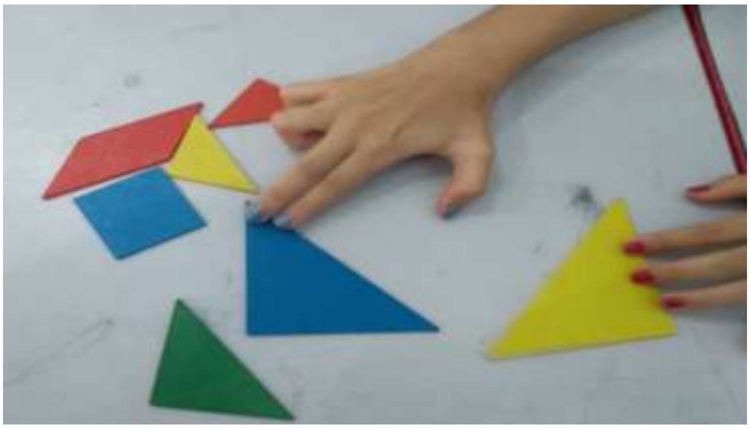
O mestre então lhe respondeu:

_Agora poderás, com esses sete pedaços do espelho, construir figuras para ilustrar o que viste durante a viagem.

Fonte: Adaptado de SANTOS, 2019, p.98.

É possível explorar, posteriormente, algumas possibilidades de representar, através do Tangram, figuras que retratam o que o discípulo poderia ter visto durante a viagem feita, a título de familiarizar os alunos com o Tangram, reconhecendo e nomeando as peças que o compõe.

Figura 2– Registro: Montando o Tangram



Fonte: Dados da pesquisa

Portanto, cada aluno deverá dispor de um Tangram que poderá ser confeccionado por eles mesmos em E.V.A[1] ou disponibilizado em MDF[2] pelo professor.

Fração: representação gráfica, numérica e por extenso

Foco metodológico: EE

- ✓ Explorar o significado de fração **parte-todo**;
- ✓ Explorar representações da fração: gráfica, numérica e por extenso;

A partir da exposição de um Tangram (feito em E.V.A), afixado no quadro da sala de aula, retoma-se, verbalmente, o que foi vivenciado e explorado sobre o que é o Tangram, sobre as peças que o compõe com suas respectivas nomenclaturas.

De modo a facilitar e entender a disposição e tamanho das peças (as quais passamos a identificar como partes) atribui-se a cada uma identificação a partir de uma letra. É interessante que se explore e associe a nomenclatura e tamanho de cada peça à letra que identificará a parte/fração do todo no traçado do Tangram. Por exemplo:

Figura 3–Tangram (Identificação das peças em: A, B, C, D, E, F e G).

Fonte: Dados da pesquisa.

É preciso desafiar os alunos para que, individualmente, ou em duplas, a partir de um Tangram impresso, tentem cortar e/ou traçar outras subdivisões a partir de uma das partes indicadas por letras, de modo que o todo fique particionado em partes iguais.

---

[1] A sigla E.V.A. significa um processo de alta tecnologia que mistura **Etil, Vinil e Acetato** (E.V.A.), que resulta em placas emborrachadas e muito conhecidas entre artistas, artesão, entre outros. Disponível em:<https://www.eurekaeva.com.br/artigos/o-que-e-placa-de-e-v-a> Acesso em: 15 abr.2020.

[2] MDF é uma sigla internacional e é um material oriundo da madeira, fabricado com resinas sintéticas. Disponível em:<https://www.significados.com.br/mdf/> Acesso em: 15 abr.2020.

Figura 4 – Registro: Subdividindo o traçado das partes que compõem o Tangram

Fonte: Dados da pesquisa

Veja alguns exemplos:

Figura 5 – Exemplos de subdivisões no traçado de Tangram

Fonte: produção própria

Lógico que, por se tratar de uma exploração livre, muitas outras subdivisões irão surgir. O importante é que os alunos percebam possibilidades e socializem as subdivisões por eles realizadas, correlacionando cada parte à representação numérica e por escrito.

A exploração, neste momento, poderá oportunizar, entre outros aspectos:

- Que os alunos percebam e externem as formas e tamanhos diferentes;
- Percebam que, embora as partes tenham formas diferentes, podem ter a mesma dimensão;
- Relacione cada parte, como sendo parte/fração do todo;
- Que a junção das partes formam o todo, promovendo a noção de invariância e reversão, bem como o significado de fração parte-todo;
- Identifiquem e relacionem a fração representada graficamente à configuração do número fracionário, bem como fazendo observação da leitura e escrita tanto em número quanto por extenso.
- Explore a leitura e a escrita de fração, por extenso, com suas singularidades e nomenclaturas, como avos.

Em um outro momento, a exploração feita poderá ser retomada para que outros aspectos sejam acrescidos diante das explorações já realizadas e, neste momento, o professor poderá intervir para instigar novos desafios que surjam e/ou que julgue importante para a aprendizagem de fração.

Leitura e escrita de frações

Foco metodológico: EE e EPER

- ✓ Fração com significado de **medida**;
- ✓ Equivalência de frações;
- ✓ Leitura e escrita (gráfica, por extenso e numérica) de fração;

Após a exploração e identificação das partes do Tangram, podem surgir, por parte dos alunos e/ou feitas pelo professor, algumas indagações, como, por exemplo:

- A parte D indica que fração do todo?

- A parte/fração C tem a mesma medida da parte/fração E?

E, assim, é possível promover a exploração e busca por respostas, ao tempo que outras indagações vão sendo geradas.

Desse modo, poderá ser explorado ou reexplorado alguns aspectos da fração, como:

- Partição do todo em partes diferentes, convertendo em partes iguais;
- Conversão e reversão de fração (representação gráfica, extenso e número);
- Fração gráfica representada em número fracionário e vice-versa;

A exploração indagativa poderá gerar a problematização e proposição de problemas, os quais podem ocorrer, inicialmente, de maneira coletiva, uma vez que os alunos podem apresentar insegurança e dificuldade em propor individualmente.

A dificuldade apresentada pelos alunos, ao serem solicitados a problematizarem e proporem um problema, pode está diretamente relacionada com a pouca ou nenhuma experiência de formularem problemas, tendo, até então, a experiência de resolverem problemas propostos apenas pelos livros didáticos e/ou pelo professor, como destaca Andrade (2017):

> temos notado que a Preposição de Problemas parece ser a ferramenta mais difícil de ser trabalhada e desenvolvida nos alunos. Temos observado que isso advém de uma prática de sala de aula que tem sido concentrada apenas na resolução de problemas propostos exclusivamente pelo professor e nunca pelos alunos. (ANDRADE, 2017. p. 388).

A partir da exploração coletiva, o professor pode articular a formalização de

A que fração do Tangram exposto no quadro corresponde as partes (peças) A e B?

um problema proposto coletivamente. Por exemplo:

Oportunidade em que se fez exploração e identificação de fração contínua, bem como a relação da fração gráfica com a representação em número fracionário e sua descrição por extenso.

Assim, a fração indicada ou destacada a partir de um todo manipulável pode ser ilustrada na representação gráfica, indicada na representação numérica e descrita por extenso, tornando a compreensão que estas representações são diferentes, mas correspondem a mesma fração.

De acordo com o que nos coloca Bertoni (2009, p.20-21), "centramos a proposta na construção de um número, explicitando a que vem esse número e o que ele quantifica". De modo que se perceba a relação da configuração do número fracionário indicando fração.

Outras proposições podem ser feitas e, caso o tempo para explorá-las não seja viável, estas poderão ser o fio condutor na aula/encontro seguinte, para a retomada exploratória do material manipulável, dando continuidade do ponto que parou e/ou das indagações postas pelos alunos ao apresentarem a ou as soluções encontradas para o problema ou os problemas propostos coletivamente.

Foco metodológico: EE e ERE

- ✓ Explorando e resolvendo o ou os problemas propostos na aula anterior.
- ✓ Explorando, identificando e diferenciando a leitura com denominadores até 9, denominadores potência de 10 e com a nomenclatura de avos.

Exploração feita a partir da retomada verbal do que foi explorado anteriormente, com descrições (socialização) do que e como chegaram à solução do ou dos problemas propostos. Exemplo:

“*Eu dividi todo o Tangram em quatro (4) partes do mesmo jeito das peças (partes) A e B. Daí, será que a resposta é* $\frac{2}{4}$? “

“*Será? Faremos o seguinte: vamos explorar outras possibilidades e, assim, concluiremos se está correta.”*

Após os alunos realizarem outras partições do todo (traçado do Tangram), podem concluir que a medida da peça A é igual a medida da peça B, que a medida da peça A corresponde, por exemplo, a medida das peças E, D e C, que, ao fazerem subdivisões, embora a representação seja diferente, corresponde ao mesmo tamanho, ou seja, encontram equivalências.

Neste ponto, é interessante destacar que:

- A participação direta dos alunos, explicando como estão compreendendo e externando/explanando para os demais é um momento da exploração que pode e deve ser favorecido, pois, além de encorajar os demais a exporem suas ideias, opiniões, desperta o interesse e confiança na aquisição do conhecimento experenciado, como o exemplo destacado a seguir, em que a aluna explica para os demais a conversão da fração D, que corresponde a $\frac{1}{8}$ ou $\frac{4}{32}$ nas representações expostas no quadro.

Figura 6– Explorando subdivisão do Tangram

Fonte: Dados da pesquisa

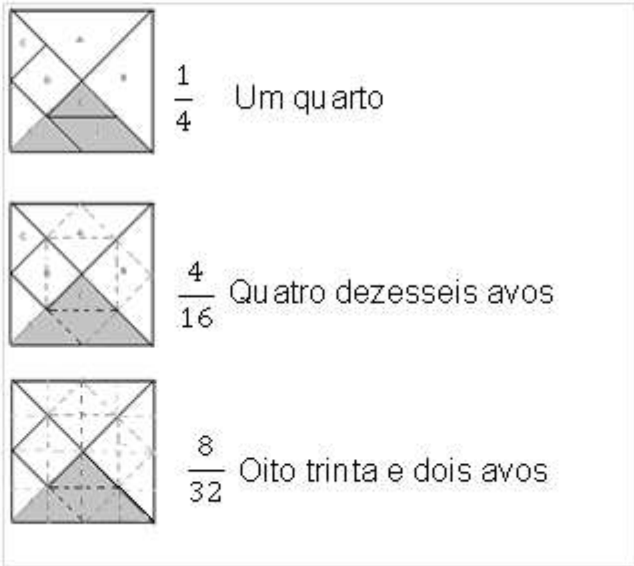
Mediando a fala externada pela aluna “quatro, trinta e dois avos”, a exploração prossegue em relação à leitura e escrita adequada, isto é, dependendo do contexto, a leitura do denominador é diferente.

O professor pode estender a exploração questionando e solicitando a representação gráfica, numérica e por extenso de $\frac{1}{4}$ do Tangram, explorando o sentido da palavra referente à fração e o sentido que a mesma poderá ter em outro contexto, por exemplo:

- A palavra “quarto” indica o que na fração?
- Que outro sentido essa mesma palavra poderá ter em outros contextos?

Socializa-se, em seguida, as representações feitas individualmente ou em dupla, de modo que se faça o registro coletivo no quadro da sala de aula, para que visualizem e melhor compreendam as representações realizadas.

Figura 7 – Demonstração de equivalência, leitura e escrita de fração.



Fonte: Produção própria

No caso, o professor poderá realizar a mediação, questionando e articulando as ideias expostas, a fim de tornar viável a identificação adequada da leitura e escrita de fração, quando se trata da leitura do denominador até 9, diferenciando a leitura de frações, cujos denominadores são potencias de 10 ou quando a leitura requeira a nomenclatura de avos.

O registro das explorações realizadas, feito no quadro da sala de aula, constitui-se de momento oportuno para explorar, entre outros aspectos, a leitura e a escrita (gráfica, por extenso e em número) de fração.

Dependendo do andamento da exploração e da disponibilidade de tempo nesta aula/encontro, ou, ainda, da retomada na aula/encontro seguinte, poderá instigar a exploração para conversão de frações em números decimais, ao explorar a medida de uma fração. Por exemplo:

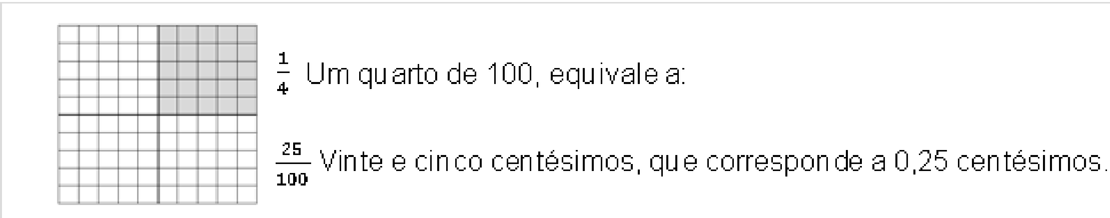
- Qual a forma do todo (Tangram)? Certamente, identificarão como quadrado.

- Como ficaria se o Tangram fosse particionado em 100 partes iguais?
- A que fração corresponderia 25 dessa partes?

Ao explorarem e visualizarem a ilustração feita por cada aluno ou em dupla, e por já terem explorado anteriormente, de certo, perceberão que 25 partes indica $\frac{1}{4}$.

- Um quarto $\frac{1}{4}$ de 100 é 25. Como fica essa representação em número decimal?

Figura 8 – Exemplo de exploração e conversão: fração ordinária para fração decimal.



Fonte: Produção própria

Oportunidade em que poderá ser explorada, também, a conversão em porcentagem.

A exploração referente à leitura e a escrita de frações poderá ocorrer continuamente ou ser retomada sempre que a exploração de algum outro aspecto da fração assim favorecer.

Fração contínua e fração discreta

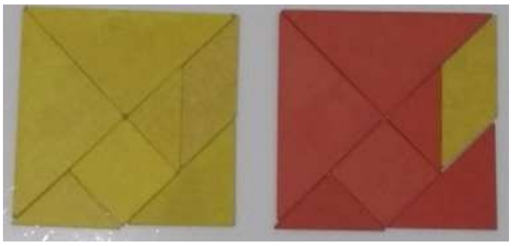
Foco metodológico: EE e ERE

- ✓ Fração contínua e fração discreta;
- ✓ Número misto;
- ✓ Explorando o significado de fração **quociente**: partitiva e quotitiva.

Com manuseio do Tangram, entregue individualmente aos alunos, estes formam duplas. Em seguida, questiona-se sobre como deveria ser descrito em número, se pegássemos um Tangram (todo) de um dos alunos com uma parte do Tangram de outro aluno.

Após ouvir as exposições e demonstrações dos alunos, o professor pode verificar, instigar e articular algumas explorações, a exemplo do registro da descrição abaixo:

Figura 9 – Explorando conversão do número fracionário e número misto e vice-versa.



Fonte: Dados da pesquisa

Após algumas explorações, os alunos fazem o registro representando a fração gráfica, numérica, bem como a visualização concreta. Assim, após registrarem e socializarem suas percepções, a exploração segue no sentido de verificar e retomar quando necessário a forma adequada do registro gráfico, numérico e por extenso, viabilizando, dessa forma, a percepção usual do número misto, pois se conclui que há (1) inteiro e um oitavo ($\frac{1}{8}$), tendo em vista que, anteriormente, já haviam identificando cada fração representada por letras em cada parte do Tangram.

Situação na qual é viável explorar, também, fração contínua e fração discreta e a adição de frações com mesmo denominador.

Como Exemplo da exploração e constatação feita, temos:

Convertendo o número misto $1\frac{1}{8}$, tem -se $\frac{8}{8}+\frac{1}{8}=\frac{9}{8}$, que corresponde a um inteiro mais uma parte de outro inteiro, assim, temos uma fração contínua, que é caracterizada com partes de um ou mais todos.

O professor pode provocar, questionando:

- Se a fração indicada fosse $\frac{1}{3}$ dos 24 Tangrans entregues à turma, como ficaria?

Essa instigação leva os alunos a refletirem e explorarem a situação apresentada. Após algum tempo, os alunos começam a externar suas opiniões, momento no qual se destaca e diferencia os tipos de fração em contínua e discreta, caracterizando esta última em fração por quantidade de grupos.

Assim, no decurso da exploração, os alunos compreendem e diferenciam, descrevendo, inclusive, as suas compreensões, como, por exemplo: $\frac{1}{3}$ de 24 é a divisão dos 24 Tangrans em três grupos, sendo 8 Tangrans em cada grupo, logo, $\frac{1}{3}$ de 24 é 8.

Aritmética de frações

Foco metodológico: EE, EPER e ERE

- ✓ Exploração de adição e subtração de fração (denominadores iguais/diferentes).
- ✓ Exploração, proposição e resolução de problemas com fração;

Aqui, faz-se a retomada verbal do que foi explorado na aula/encontro anterior, dando continuidade a partir do ponto em que parou a aula/encontro, solicita-se que os alunos tentem fazer outras adições, partindo da observação explorada no Tangram.

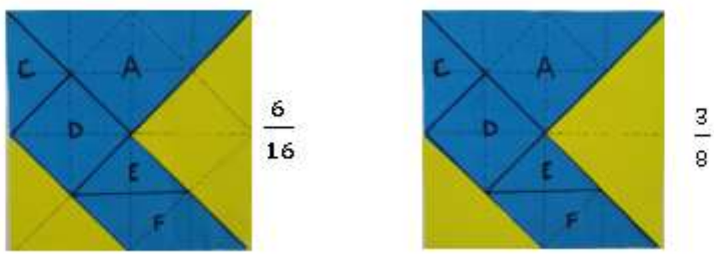
É possível expor e observar um Tangram afixado no quadro, explorando-o e sobrepondo com outra cor as peças descritas, na medida em que os alunos vão fazendo colocações e explorações, de modo que percebam a ideia de adição de frações. Exemplo:

Na exposição feita, os alunos concluíram que a adição da peça (parte) B mais a peça G, na conversão (partes iguais), daria:

$$\frac{2}{16} + \frac{4}{16} = \frac{6}{16}.$$

Assim, se explorou a adição de frações com denominadores iguais. Após outras explorações feitas coletivamente, concluíram que daria pra ser feita de outra maneira, ou seja, $\frac{1}{8} + \frac{2}{8} = \frac{3}{8}$ sendo equivalente a $\frac{6}{16}$.

Figura 10 – Equivalência e adição de frações



Fonte: Dados da pesquisa

Ao manusearem e explorarem o Tangram, o professor poderá instigar para a compreensão de adição com denominadores diferentes ou mesmo os alunos podem questionar e/ou externar que, se a adição fosse de $\frac{1}{8} + \frac{4}{16}$, denominadores diferentes poderiam fazer a equivalência (deixar os denominadores iguais) e, assim, encontrar o resultado, da mesma forma, neste mesmo contexto, pode-se explorar a subtração de fração.

O professor poderá instigar com questionamentos que levem a explorar questões que caracterizam a fração com significado quociente, em termos da divisão do todo e da quota tirada desse todo, ou seja, explorar a fração quociente (partitiva e quotitiva), desafiando os alunos a proporem coletivamente (alunos e professor) um problema.

Ana e Pedro querem dividir igualmente um Tangram entre eles. Como poderão fazer isso?

Diante do desafio e da mediação feita pelo professor podem surgir vários problemas ou apenas um envolvendo o material manipulativo utilizado no momento. Isso é um exemplo de uma proposição feita coletivamente.

Alguns conflitos poderão surgir, inicialmente, mas, ao ir explorando, os alunos começam a compreender e diferenciar que a partição (quantidade de partes que o todo foi particionado) é diferente da cota (quantidade destinada a cada indicação feita), ou seja, se são duas crianças, a cada uma caberá uma cota (mesma quantidade) do todo (Tangram).

Possivelmente, após explorar as várias possibilidades, chegarão as possíveis resposta:

- Ana receberá as partes A e B; Pedro receberá as partes C, D, E, F e G;

Ana: $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}$

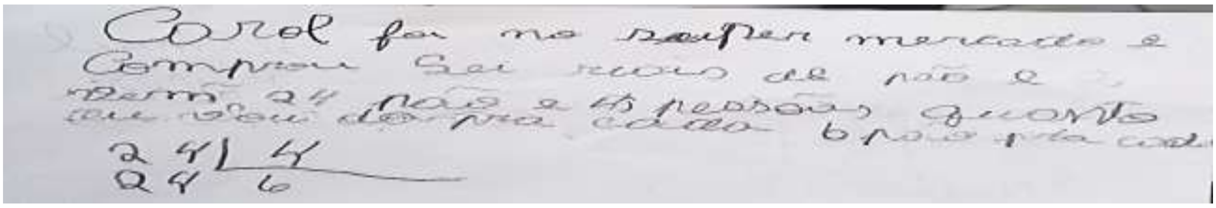
Pedro: $\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$ $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{4}{8}=\frac{2}{4}$

- Ana receberá as partes A, C, E e G; Pedro receberá as partes B, D e F;

Outras combinações podem ser feitas, de modo que percebam e diferenciem a fração partitiva de quotitiva.

Após algumas explorações, o professor poderá desafiar os alunos a proporem (individualmente ou em dupla) um problema (pode ser a partir do material manipulativo explorado ou deixar livre, instigando, ainda mais, a criatividade dos alunos). Posteriormente, faz-se a exploração de um ou mais problemas propostos, oportunidade na qual se pode inferir questões do cotidiano dos alunos, como, por exemplo, a exploração feita em uma das produções da pesquisa de campo:

Figura 11 – Produção do A22 (Exploração e proposição de problemas).



Fonte: Dados da pesquisa

Quando a proposição de A22 foi explorada, alguns questionamentos por parte dos alunos foram sendo colocados, como:

A18: *Faltou desenhar a fração e representar em número fracionário.*

A7: *Em fração, a resposta fica quanto?*

A3: *6 pães é uma parte dos 24 pães?*

PP: *É sim. Mas por que você perguntou?*

A3: *É que pagou seis reais e vai dar 6 pães para cada pessoa. Como assim?*

Após um momento dado para tentarem verificar qual seria a fração, A3 responde:

A3: *6 pães de 24 pães é* $\frac{1}{4}$.

PP: *Como você fez?*

A3: *Desenhei 24 pães e fiz quatro (4) grupos. Cada grupo com seis(6).*

PP: *E os seis reais?*

A3: *Foi o valor pago nos 24 pães.*

PP: *Será que 24 pães custam 6,00?*

A11: *Eu compro 2,00 reais de pão e vem 6 pães.*

PP: *Então, no local que A11 compra o pão, quantos pães seriam com 6,00 reais?*

A4: *18 pães.*

PP: *Como você chegou a essa quantidade?*

A4: *Juntei 6 pães, que é 2,00 reais, mais 6 pães com 2,00 reais, mais 6 pães com 2,00 reais. Daí vai dar 18 pães com 6,00 reais.*

PP: *Jóia. E se A11 for guloso e comer um terço dos 6 pães que compra?*

A20: *Daí divide os 6 pães em 3 grupos com 2 pães em cada grupo. Ele vai comer 2 pães.*

PP: *Como fica essa quantidade em fração?*

A4: *Fica* $\frac{1}{3}$.

Foco metodológico: EE, EPER e ERE

- Explorando fração com significado de **operador.**

A partir de um Tangram exposto no quadro da sala de aula, retoma-se verbalmente aspectos referentes a fração explorada anteriormente em relação à adição e a subtração, em seguida, questiona:

Como vocês acham que seria se, ao invés de somar ou subtrair, precisássemos fazer uma multiplicação de frações?

Após ouvir as colocações dos alunos, o professor poderá expor e desafiar os alunos a explorarem como poderiam realizar a multiplicação dada. Por exemplo, se tivéssemos que multiplicar $\frac{3}{8}$ por $\frac{4}{8}$ como seria?

Ao externar suas ideias, alguns alunos podem associar a multiplicação de numerador por numerador e denominador por denominador como, igualmente, se faz na adição de fração com denominadores iguais. Oportunidade viável para confirmar tal colocação e questionar:

Como seria, no caso da multiplicação com denominadores diferentes? Por exemplo: $\frac{4}{16} \text{x} \frac{1}{2}$?

Socializadas opiniões, ideias, dúvidas, desafiando a realizarem a multiplicação de frações com denominadores diferentes, levando-os, pois, a concluírem que a multiplicação de fração por fração se dá de forma direta, isto é, multiplica-se numerador por numerador e denominador por denominador, com os denominadores sendo iguais ou diferentes.

Assim, podem concluir que: $\frac{4}{16} \text{x} \frac{1}{2} = \frac{4}{32}$.

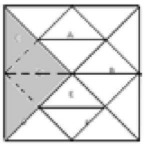
Temos, aqui, uma outra situação, ou seja, foi dada a fração em número e, posteriormente, solicita-se que os alunos tentem representar, graficamente, o processo feito pelo algoritmo. Salientamos que o importante é desafiar o aluno a representar a fração ou o algoritmo com fração, realizando, de modo concreto, gráfico, numérico e por extenso.

Para explorar visualmente a multiplicação das frações realizada, mais uma vez, utilizamos o traçado do Tangram, representando, graficamente, o processo operatório, ou seja, a descrição passo a passo, no quadro da sala da sala de aula, de modo coletivo.

Assim, os alunos poderão perceber o porquê do resultado obtido, visualizando a transformação que ocorre, isto é, que há uma ampliação e, posteriormente, uma redução, para se chegar ao resultado final. Vejamos:

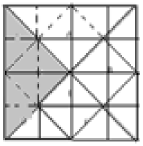
Figura 12 – Demonstração do passo a passo do resultado obtido na multiplicação de $\frac{4}{16}$ x $\frac{1}{2}$

1º Passo: Cada um dezesseis avos $\frac{1}{16}$ divididos por um meio $\frac{1}{2}$



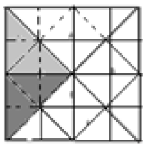
$\frac{4}{16}$ Quatro dezesseis avos

2º Passo: O todo fica com 32 partes, cada parte sendo $\frac{1}{32}$. A fração $\frac{4}{16}$ equivalente a $\frac{8}{32}$.



$\frac{8}{32}$ Oito trinta e dois avos

3º Passo: Toma-se $\frac{1}{2}$ de $\frac{8}{32}$ que corresponde a $\frac{4}{32}$



Um meio de $\frac{8}{32}$ oito trinta e dois avos, corresponde a :

$\frac{4}{32}$ quatro trinta e dois avos.

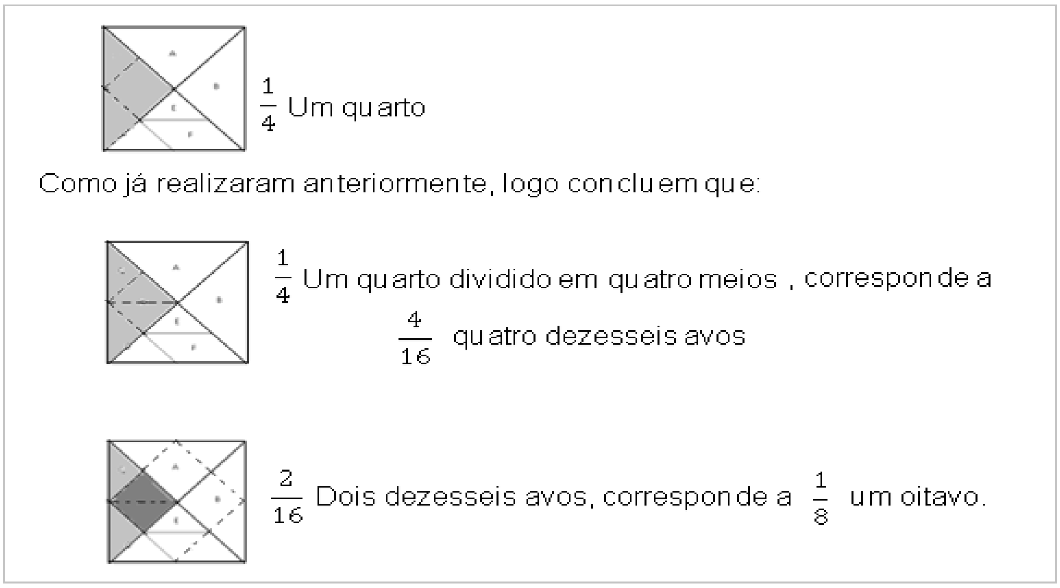
Fonte: Produção própria

Outro exemplo de fração com significado de operador pode ser explorado, após várias explorações de multiplicações de frações ou mesmo no decurso poderá surgir, por parte dos alunos, outras indagações, por exemplo: *Como podemos dividir fração por fração? Na divisão de fração por fração, faz do mesmo jeito da multiplicação?*

Caso questionamentos do tipo não surjam, o professor, enquanto articulador e mediador, poderá oportunizar, questionando e/ou lançar um desafio, sugerindo uma divisão de fração por fração, a exemplo de:$\frac{1}{4} \div \frac{4}{2}$.

Explorando a partir da representação gráfica, solicita-se que os alunos tentem subdividi r$\frac{1}{4}$ do todo (Tangram).

Figura 13 – Compreendendo a inversão da divisão de fração em multiplicação de fração e o resultado obtido.



Fonte: Produção própria

Percebe-se que foi dividido um quarto do Tangram ao meio e depois ao meio novamente, isto é, um quatro foi dividido duas vezes.

Ao manusearem visualmente, os alunos podem concluir o porquê da inversão de operação, notando que ocorre uma multiplicação (ampliação) da quantidade de partes, sendo convertida $\frac{1}{4} \div \frac{4}{2}$ por $\frac{1}{4} \times \frac{2}{4} = \frac{2}{16}$.

Este significado requer explorações contínuas e em múltiplos contextos, dado a complexidade e ações a serem realizadas. Deste modo, sugere-se que sejam realizadas com alunos a partir do 5º ano, explorando materiais manipulativos diversos, paralelamente á realização da operação usual, de modo que estes, gradativamente, se familiarizem e melhor compreendam este significado.

Foco metodológico: EE, EPER e ERE

- Explorando fração com significado de **número**;

Como já mencionado, a cada aula/encontro é importante que seja realizada a retomada (verbal e, por vezes, prática) da exploração feita na aula/encontro anterior.

Assim, na pretensão de oportunizar explorações referentes à fração com significado de número, podem-se aproveitar as colocações dos alunos, por exemplo, retomando a exploração feita em relação ao significado parte-todo, pode-se indagar se $\frac{1}{2}$, corresponde à metade de um 1 inteiro e se um inteiro é representado pelo número 1.

- Quanto é $\frac{1}{2}$ de 1 ?

Tal situação, aos alunos de 5º ano, pode causar alvoroço e inquietações do tipo: "*Como posso saber a metade de 1?", "Tem que ser metade de uma coisa, para partir."*

Nessa situação, se faz necessário associar a divisão do número ao Sistema Decimal, estudado pelos alunos desde as séries anteriores e, assim, explorar, também, a ideia de número decimal.

Desse modo, pode-se partir da observação e manuseio de uma régua. Após observarem a distribuição dos números na régua, os alunos passam a descrever verbalmente o que perceberam, como descrito a seguir:

"*O zero(0), depois 1, depois 2... e entre cada número tem uns tracinhos!"*

- Quantos tracinhos há entre um número e outro?

"*Tem dez (10) tracinhos*".

Esses tracinhos correspondem ao quê?

Observem que, entre um número e outro, há os tracinhos. Imagine que cada grupo de tracinhos corresponde a um número da régua.

"*Cada número é como se fosse um inteiro?"*

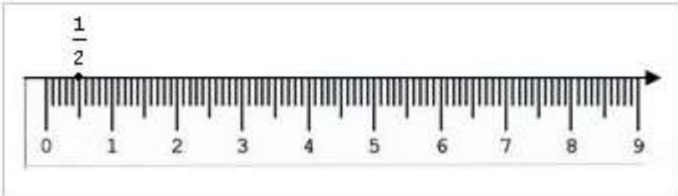
"*Quer dizer que do zero (0) até o um(1) é um inteiro e depois do um (1) até o dois (2)é outro inteiro?*

"Sim. E cada número, na sequência da reta, pode ser dividido e indicado uma parte do todo, ou seja, uma fração."

A analogia feita a parte-todo foi um meio no qual julga-se viável para que os alunos tenham noção da possibilidade de particionar um número, tendo em vista que a ação de particionar um número é bastante abstrata.

Explora-se a compreensão da disposição dos números na régua, transpondo, para uma reta numérica (representação gráfica), em que os alunos são desafiados e encorajados a identificar e destacar, na reta, a fração indicada: $\frac{1}{2}$ de 1.

Figura 14 – Representação na reta numérica: $\frac{1}{2}$ de 1.



Fonte: Produção própria

Após a exploração e socialização da representação feita na reta numérica, pode-se explorar a representação decimal, questionando sobre a metade do número um (1) não ser um inteiro, desafiando os alunos a imaginarem e a explorarem possibilidades de fazer a representação da metade do número 1 de outra forma, podendo, inclusive, associar ao valor monetário (REAL), uma vez que, nesta faixa etária, os alunos já possuem compreensão de valor monetário, no caso, Real (parte inteira) e centavos (partes menores que 1 Real).

Concluindo-se, por fim, que a metade de 1 é 0,5. Posteriormente, outras explorações e representações seguem de acordo com o ritmo de apropriações da turma, ou mesmo da disponibilidade e objetivos em relação à fração com significado de número.

É importante destacar que a fração com significado de número se mostrou de grande conflito ao entendimento dos alunos do 5º ano, participantes da pesquisa.

Acreditamos que isso tenha ocorrido não apenas pela exigência cognitiva abstrata que tal significado demanda, mas, também, pelo tempo disponibilizado para explorar tal significado. Diante disso, sugere-se que as explorações e vivências sejam oportunizadas e intensificadas com este significado, para obtenção de maior e melhor êxito.

Diferenciando fração e razão na configuração do número fracionário.

Foco metodológico: EE, EPER e ERE

- ✓ Explorar a configuração do número fracionário, representando fração;
- ✓ Explorar a configuração do número fracionário, representando razão.

Para que se tenha maior entendimento da configuração do número fracionário indicando fração, se faz necessário compreender que este número, por vezes, não representa fração, mas, sim, razão.

Pode ser retomada uma das aulas/encontros explorados anteriormente ou mesmo aproveitar a exploração realizada, instigando e estendendo para explorar e diferenciar a configuração do número fracionário, indicado fração e indicando razão. Por exemplo, no momento da exploração realizada em relação à fração contínua e fração discreta.

- Se a fração indicada fosse $\frac{1}{3}$ dos 24 Tangrans entregues na turma, como ficaria?

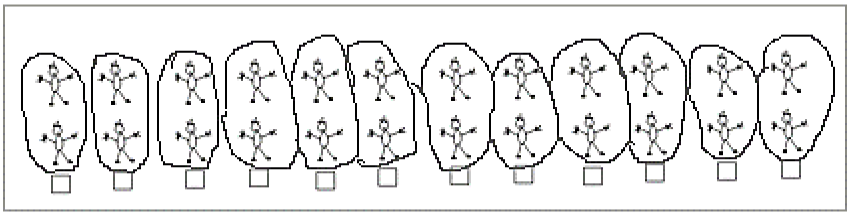
Após os alunos explorarem, eles concluem que a fração discreta se dá pelo agrupamento de quantidades, compreendendo que $\frac{1}{3}$ de 24 corresponde a 8 Tangrans. E, portanto, $\frac{1}{3}$ é a fração indicada no todo de 24 Tangrans.

Podem-se instigar os alunos perguntando:

- Como seria a distribuição se tivéssemos apenas 12 Tangrans para 24 crianças?

Pela experiência anterior, os alunos, certamente, farão grupos, desenhando e tentando visualizar a quantidade de Tangrans para as crianças.

Figura 15 – Exemplo de possível representação feita pelos alunos.



Fonte: Produção própria

Após socializarem, eles concluem que é um Tangram para cada duas crianças. Pode-se pedir que os mesmos representem a situação em número fracionário, socializando, em seguida, o que os alunos fizeram (individualmente ou em dupla). E, assim, é possível que eles percebam e explorem as possibilidades de resposta adequada, visualizando, na configuração do número fracionário, a comparação de grandezas de natureza diferente, concluindo que a exploração feita trata-se de uma razão.

$$\frac{24 \text{ Crianças}}{12 \text{ Trangans}} \qquad \frac{24 \div 12}{12 \div 12} = \frac{2}{1} \frac{\text{Crianças}}{\text{Trangans}}$$

Nas explorações realizadas, pode-se perceber a diferença da representação do número fracionário representando fração, cuja característica tem como base parte-todo, diferenciando da configuração do número fracionário representando razão, cuja caracteriza tem como base parte-parte.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, S. Um caminhar crítico e reflexivo sobre Resolução, Exploração e Proposição de Problemas Matemáticos no Cotidiano da Sala de Aula. *In*: ONUCHIC, L. R.; JUNIOR, L. C. L.; PIRONEL, M. (Orgs.). **Perspectivas para Resolução de Problemas.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017, p.355-395.

ANDRADE, S. **Ensino-Aprendizagem de Matemática via resolução, exploração, codificação e descodificação de problemas**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1998.

BERTONI, N.E. A Construção do Conhecimento sobre o Número Fracionário. **Bolema– Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v.21. n º 31, p.209-237, 2008

BOTTA, L.S. **Números racionais e raciocínio proporcional**: considerações sobre o ensino aprendizagem. 1997. 185 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de MESQUISTA, Rio Claro, 1997.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática, SEF/MEC. Brasília: DF, 1997.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. 3ª versão. Brasília: Ministério da Educação. 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_20dez_site.pdf. Acesso em: 21 mar. 2018

CAI, J. & LESTER, F. (2010). Why is teaching with problem solving importantto student learning? **Research Brief,** 14, 1–6.

CAI, J. et al. Problem-Posing Research in Mathematics Education: Some Answered and Unanswered Questions. In: SINGER, F. M.; ELLERTON, N. F.; CAI, J. (ed). **Mathematical Problem Posing, From Research to Effective Practice**. Nova York: Springer Science + Business Media, 2015. p. 3-34.

DRECHMER, P.A.O; ANDRADE, S.V.R. **Os cinco significados da fração**. *In*: CIAEM-IACME, 13. 2011. **Anais** [...]. Recife, Brasil, 2011. Disponível em:<http://xiii.ciaem-redumate.org> Acesso em: 15 set. 2019.

FREUDENTHAL, H. **Didactical phenomenology of mathematical Structures**. Kluwer Academic Publishers New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow.Cap.5, p.133-177.Disponível em: <http://gpdmatematica.org.ar/wp-content/uploads/2015/08/Freudenthal_Didactical_Phenomenology_of_Mathematical_Structures1983.pdf> Acesso em: 23 fev.2019.

MAGINA, S. CAMPOS, T. M. M**.** A fração nas perspectivas do professor e do aluno dos dois primeiros ciclos do ensino fundamental. **Bolema:** Boletim de Educação Matemática, Rio Claro (SP), v. 21, n. 31, p. 23-40, 2008.

MOUTINHO, L.V. **Fração e seus diferentes significados:** um estudo com alunos dos 4ª e 8ª séries do ensino fundamental. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

MOREIRA, P.C; FEREIRA, M.C.C. A Teoria dos Subconstructos e o Número racional como Operador: das estruturas algébricas às cognitivas. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, Rio Claro(SP), v. 21, n. 31, p.103-127, 2008.

SANTOS, S.F.**O uso do Tangram como proposta no Ensino de Frações**. Dissertação (Mestrado)- Universidade Federal de Goiás, Unidade Acadêmica Especial de Ciências Exatas e Tecnológicas, PROFMAT - Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional, Jataí, 2019.

SILVA, M.J.F. **Sobre a introdução de números fracionários**. 1997. 245 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de MATEMÁTICA) – Pontifícia Universidade católica de São Paulo, PUC, São Paulo, 1997.

SILVA, M. J. F. **Investigando saberes de professores do ensino fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série**. Tese de Doutorado – PUC, São Paulo, 2005. 302f.

VASCONCELOS, I.C.P. **A Compreensão das relações numéricas: um estudo com crianças brasileiras e portuguesas do 4º ano da Educação Básica.** Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Faculdade de Educação, Porto Alegre BR-RS, 2015.

APÊNDICE – Atividade diagnóstica II

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
Mestrado profissional

Pesquisa: Ensino e Aprendizagem de Fração via Exploração, Proposição e Resolução de Problemas Matemáticos.

Escola Municipal:____

Turma: 5º ano A - manhã   Data:_____/_______/_____.

Aluno(a):____

- Leitura informativa:

Festas juninas

As festas juninas homenageiam três santos católicos: Santo Antônio (no dia 13 de junho), São João Batista (dia 24) e São Pedro (dia 29). No entanto, a origem das comemorações nessa época do ano vem de diversos povos da antiguidade, como os celtas e os egípcios, que realizam danças e festejos em que comemoram a fartura nas colheitas. "Na Europa, os cultos à fertilidade, em junho, foram reproduzidos até por volta do século 10. Como a igreja não conseguia combatê-los, decidiu cristianizá-los, instituindo dias de homenagens aos três santos no mesmo mês", diz a antropóloga Lucia Helena Rangel, da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP).

O curioso é que os índios que habitavam o Brasil antes da chegada dos portugueses também faziam importantes rituais durante o mês de junho. Eles tinham várias celebrações ligadas à agricultura, com cantos, danças e muita comida. Com a chegada dos jesuítas portugueses, os costumes indígenas e o caráter religioso dos festejos juninos se fundiram. É por isso que as festas tanto celebram santos católicos como oferecem uma variedade de pratos feitos com alimentos típicos dos nativos. Já a valorização da vida caipira nessas comemorações reflete a organização da sociedade brasileira até meados do século 20, quando 70% da população viviam no campo. Hoje, as grandes festas juninas se concentram no Nordeste, com destaque para as cidades de Caruaru (PE) e **Campina Grande** (PB).

A dança (quadrilha junina), a música (forró, coco, xaxado...), os pratos típicos como pamonha, canjica e outros, as brincadeiras (pescaria, subi no pau de sebo...) e enfeites com bandeirolas e símbolos rústicos são mantidos em alguns locais onde ocorre estes festejos.

Adaptado de Super. Interessante. ***Cíntia Cristina da Silva.***