UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

OSILENE BEZERRA GRANGEIRO

ENSINO E APRENDIZAGEM DE FRAÇÃO VIA EXPLORAÇÃO-RESOLUÇÃO-PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS

CAMPINA GRANDE – PB
2020

OSILENE BEZERRA GRANGEIRO

ENSINO E APRENDIZAGEM DE FRAÇÃO VIA EXPLORAÇÃO-RESOLUÇÃO-PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, linha de pesquisa Metodologia, Didática e Formação do Professor no Ensino de Ciências e Educação Matemática, como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática

Orientador: Prof. Dr. Silvanio de Andrade

CAMPINA GRANDE – PB
2020

G757e Grangeiro, Osilene Bezerra.
Ensino e aprendizagem de fração via exploração-resolução-proposição de problemas [manuscrito] / Osilene Bezerra Grangeiro. - 2020.
196 p. : il. colorido.
Digitado.
Dissertação (Mestrado em Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2020.
"Orientação : Prof. Dr. Silvanio de Andrade , Departamento de Matemática - CCT."
1. Ensino e Aprendizagem. 2. Fração. 3. Resolução de problemas. 4. Exploração de problemas. I. Título
21. ed. CDD 510.7

Elaborada por Giulianne M. Pereira - CRB - 15/714 BC/UEPB

OSILENE BEZERRA GRANGEIRO

ENSINO E APRENDIZAGEM DE FRAÇÃO VIA EXPLORAÇÃO-RESOLUÇÃO-PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, linha de pesquisa Metodologia, Didática e Formação do Professor no Ensino de Ciências e Educação Matemática, como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática

Aprovada em: 01 de dezembro de 2020.

BANCA EXAMINADORA

Silvanio de Andrade

Prof. Dr. Silvanio de Andrade (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Egidio Rodrigues Martins

Prof. Dr. Egidio Rodrigues Martins
Instituto Federal do Norte de Minas Gerais(IFNMG)

Imalbuquerque

Prof.ª. Drª. Izabel Maria Barbosa de Albuquerque
Unidade Acadêmica de Matemática (UFCG)

CAMPINA GRANDE – PB
2020

Dedico este trabalho a minha mãe, Rita Maria da Conceição e ao meu filho, Raisson Adrian, por serem, em minha vida, fonte de alento, equilíbrio e inspiração.

AGRADECIMENTOS

Ao Supremo DEUS, gratidão, por permitir luz, me conceder discernimento em meio às dificuldades e por guiar-me na conquista de mais um sonho.

A minha família, pelo suporte nas horas difíceis. A minha mãe, Rita Maria da Conceição, e, ao meu filho, Raisson Adrian, pelo companheirismo e incentivo.

Ao meu orientador, Dr. Silvanio de Andrade, que contribuiu e me conduziu não apenas na realização deste trabalho, mas forneceu-me conhecimentos, os quais ampliaram e aguçaram ainda mais a busca pelo saber matemático. Agradecer, também, aos seus ensinamentos enquanto coordenador do Grupo de Estudo e Pesquisa de Educação e Pós Modernidade - GEPEP.

À Universidade Estadual da Paraíba, a partir do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, especialmente, aos professores das disciplinas por mim cursadas.

Ao coordenador e professor Dr. Joelson Pimentel, pela contribuição e aprendizado para a concretização deste trabalho, enquanto professor, mas, também, como coordenador do curso e do grupo de estudos Leitura e Escrita em Educação Matemática - LEEMAT.

Aos professores da minha trajetória escolar e acadêmica.

Às valorosas e fundamentais contribuições dadas pelos membros da banca feitas pelo professor Dr. Egídio Rodrigues Martins e pela professora Drª. Izabel Maria Barbosa de Albuquerque.

Aos colegas de curso, que, de maneira direta ou indireta, contribuíram para a realização deste trabalho, bem como, para meu crescimento pessoal e profissional.

À professora regente da turma de 5º ano, por conceder sua sala de aula como espaço de investigação.

Aos alunos do 5º ano, pela participação e colaboração na pesquisa.

À direção escolar, por acolher a realização da pesquisa.

Aos municípios de Campina Grande-PB e Lagoa Seca-PB, por viabilizarem condições para e na melhoria de minha prática enquanto pedagoga.

À Scooth Akmith, por suas peraltices serem, para mim, uma terapia.

A todos que, de alguma maneira, desejaram e emanaram boas energias, incentivando, apoiando e contribuindo na realização deste trabalho.

“O final de uma experiência de Exploração de Problemas em sala de aula nunca é o final de uma história, mas o começo de muitas outras histórias”.

(Silvanio Andrade)

RESUMO

Este estudo tem como objetivo identificar como a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas pode potencializar o ensino e aprendizagem de fração. A pesquisa, com base na perspectiva da resolução de problemas, trabalhou ideias conceituais relativas ao ensino e aprendizagem de fração, utilizando o Tangram como material manipulativo e tendo, como fio condutor, a Exploração. Exploração essa que não se limita apenas ao contexto matemático, mas, também, ao mundo social; uma exploração que vai além de indagar, problematizar, investigar; uma exploração livre, porém, não solta, como descreve Andrade (1998; 2017); uma exploração crítica e criativa, que flui da interação e socialização de ideias entre professor-aluno e/ou aluno-aluno; uma exploração reflexiva, que vê, revê, cria e recria novas perspectivas, gerando outros problemas, promovendo novas explorações e assim sucessivamente. Para tanto, este estudo parte de uma abordagem qualitativa, na modalidade de Pesquisa Pedagógica, por entender que, além de favorecer o levantamento dos dados, este tipo de pesquisa possibilita o aprimoramento docente em relação às práticas de ensino de Matemática e, consequentemente, o surgimento de alternativas que venham a somar no processo de aprendizagem. O *lócus* de pesquisa é uma escola pública, localizada no município de Lagoa Seca-PB, com o universo de 25 alunos do 5º ano A, turno manhã, com idade de 10 a 15 anos. O presente estudo, desenvolveu-se em 15 encontros, que foram distribuídos em duas fases: a primeira fase consistiu na atividade diagnóstica I e II e a segunda fase se pautou na intervenção pedagógica. Os resultados obtidos evidenciam que a Exploração-Proposição-Resolução de Problemas potencializa o ensino e a aprendizagem de fração, por conferir ao professor avaliar sua prática ao mesmo tempo em que avalia como e se os alunos estão avançando no processo de aprendizagem de fração e de outros aspectos inerentes ao tema, podendo, assim, articular meios e ações que possam propiciar maior êxito na mediação, por possibilitar, de maneira interativa, livre, crítica e criativa, que os alunos resolvam e proponham problemas ao tempo em que exploram, externam e adquirem compreensões sobre fração, convertendo e revertendo, representando-a de maneira gráfica, numérica e por extenso. Sendo assim, nesta pesquisa, concluímos que, de maneira significativa, a proposta favoreceu a leitura e a escrita de frações; a identificação da configuração do número fracionário, indicando a diferença entre fração e razão; a identificação dos significados essenciais da fração, observando-se que, quanto à fração com significado de número e a fração com significado operador, obteve-se identificação, no entanto, constatou-se dificuldade de aprofundamento, especialmente, quanto à fração com significado de número, talvez, por este demandar maior maturação cognitiva abstrata.

Palavras-chave: Ensino e Aprendizagem. Fração. Exploração-Resolução-Proposição de Problemas.

ABSTRACT

The aim of this study is to identify how the Problem Exploration-Posing-Solving can boost the teaching and learning of fractions. Based on the problem solving perspective, the research explored conceptual ideas related to the teaching and learning of fraction, employing the Tangram as a manipulative material and the Exploration as a connecting thread. Such exploration is not just about the mathematical context, but is also about the social world; exploration that goes beyond inquiring, problematizing, investigating; a free, though not loose, exploration, such as described by Andrade (1988; 2017); a critic and creative exploration, which flows from the interaction and socialization of ideas between teacher-student and/or student-student; a reflexive exploration, that views, reviews, creates and recreates new perspectives, generating new problems, promoting new forms of exploration and so on. Therefore, this study was conducted through a qualitative approach, in the teacher Research modality, since it favors the survey data collection and, besides that, this kind of research enables a teaching upgrading in connection to mathematics teaching practices and, thus, the development of alternatives that might enrich the learning process. The locus of the research is a public school situated in Lagoa Seca-PB, and the participants are 25 students from the 5th grade A of the morning shift, with ages ranging from 10 to 15. The present study, 15 meetings were arranged in two phases: the first phase consisted of the diagnostic activity I and II and the second phase was based on the pedagogical intervention. The obtained results point to a potentiation in the teaching and learning of fractions through the Problem Exploration-Posing-Solving, since it gives the teachers the chance to evaluate their own practice and the chance to also evaluate, in the meantime, if and how the students are moving forward in the process of learning fractions and other inherent aspects of the subject. In this way, teachers will be able to articulate means and practices that might lead to a greater success in the mediation by giving the students the chance to solve and to come up with new problem sin an interactive, free, critic and creative way, while at the same time exploring, externalizing and getting their minds around fraction, converting and inverting, representing it graphically, numerically and in full. Therefore, through this research we conclude that the proposal, in a significant way, favored the reading and writing of fractions; the identification of the fractional portion configuration, indicating the difference between fraction and ratio; the identification of the essential meanings of a fraction, taking into account that regarding the fraction with numerical meaning and the fraction with operator meaning, the identification was accomplished. It was identified, however, a struggle with going deeper, especially when it comes to the fraction with numerical meaning, perhaps because it demands a higher abstract cognitive maturation.

Keywords: Teaching and Learning. Fraction. Problem Exploration-Posing-Solving .

LISTA DE FIGURAS

FIGURAS REFERENTES ÀS DESCRIÇÕES E MODELOS EXPLICATIVOS

FIGURAS REFERENTES À FASE DIAGNÓTICA - I

FIGURAS REFERENTES À FASE DIAGNÓTICA - II

FIGURAS REFERENTES À FASE DE INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Enquanto pedagoga[1], buscando conhecer e aprimorar conhecimentos, sobretudo, relacionados à Educação Matemática, embora tenha certa compreensão e interesse por questões lógicas e intrigantes que a Matemática apresenta, sempre me percebi fazendo indagações quanto à compreensão acerca de como melhor intercambiar a abordagem de alguns conteúdos matemáticos e sua relação com a vida prática. Entendendo que a metodologia Resolução de Problemas proporciona meios favoráveis para o ensino e a aprendizagem interdisciplinar[2] e, na pretensão de adquirir maior entendimento e uso dessa metodologia no fazer pedagógico, fiz inscrição como aluna especial no Programa de Pós-Graduação de Ensino em Ciências e Educação Matemática, na disciplina de Resolução de Problemas e Construtivismo Social. Nessa disciplina, tive a oportunidade de perceber a infinidade de possibilidades de ensino e aprendizagem, a partir, não só da Resolução, mas também da Exploração e Proposição de problemas matemáticos e muitos outros aspectos e sentidos matemáticos, os quais, intensificaram meu interesse em saber mais sobre a linguagem matemática, e um passo para isso se daria ingressando, efetivamente, no Programa.

Inicialmente, pensava em tratar apenas da questão relativa à aprendizagem do aluno, depois, considerando que, para o aluno aprender melhor, o professor tem que ter uma formação mais adequada e ser melhor preparado, iniciei estudos no sentido de investigar aspectos com relação à formação inicial e continuada do professor, direcionando, para o professor pedagogo, os saberes necessários para melhor atuação no ensino de Matemática. Porém, diante das leituras e experiências vivenciadas em uma das aulas (agora, já como aluna regular do referido Programa), a Fração foi outro ponto que despertou ainda mais atenção. Instigada e curiosa por saber mais e como melhor ensinar este tema, e, em conversa com o professor Dr. Silvanio de Andrade (orientador), fui encorajada a seguir o estudo na perspectiva de ensino e aprendizagem com Fração, fazendo descobertas e buscando entendimentos sobre o assunto, sendo levada a pensar em voz alta "Puxa, como eu não percebia isso!".

---

[1] Utiliza-se a primeira pessoa do singular (início da introdução), por se tratar de uma descrição de experiência pessoal. No mais, será utilizado a segunda pessoa do plural.

[2] O termo interdisciplinar, nesse contexto, diz respeito ao estabelecimento de relações entre duas ou mais disciplinas ou ramos de conhecimento.

O fato é que pesquisas apontam a necessidade de aprimoramentos constantes na formação do professor, o que se aplica ao pedagogo (embora sua atuação seja ampla em diversos segmentos da educação, sua formação principal é a docência para lecionar na Educação Infantil e Fundamental I). Como professor polivalente, este tem que atuar em vários campos de conhecimento, no entanto, destaca-se, aqui, o conhecimento matemático, em que, historicamente, (segundo a literatura acadêmica), muitos apresentam lacunas em relação ao ensino e aprendizagem matemática, entre outros aspectos, em virtude da pouca ênfase dada ao estudo deste campo de conhecimento na própria formação pedagógica.

Curi (2005, p.69) afirma que os futuros professores (pedagogos) terminam a formação inicial sem os devidos conhecimentos necessários para o exercício da docência e que, "em alguns momentos da história, sequer havia a disciplina Matemática".

Assim sendo, pode-se inferir que os mesmos professores que possuem a atribuição de promover a iniciação do conhecimento formal nos anos iniciais, de certo modo, são influenciados pela trajetória escolar e acadêmica em relação aos conhecimentos vivenciados, gerando, então, reflexo no seu fazer docente.

Ao realizar estudos referentes ao que as professoras polivalentes pensavam acerca da influência como estudantes de Matemática na escolha profissional, Curi (2005) observou uma imagem negativa de algumas alunas-professoras, ao expor que se sentiam incapazes de aprender Matemática, afirmando, inclusive, que a Matemática não era para elas, que o "saber matemático é um fator genético, hereditário". Outras expressaram que não gostavam de Matemática por não terem construído os conceitos básicos ainda nos anos iniciais. "Outros depoimentos evidenciam que apenas depois de formadas, passaram a compreender e a gostar de Matemática". A superação em torno do saber matemático se deu a partir do momento que buscaram aprimorar os conhecimentos através de formação continuada, pois, tendo contato com formadores na perspectiva da aprendizagem significativa, passaram a "desmistificar" a Matemática (CURI, 2005, p. 99-103).

Curi (2005), assim como Crespo (2003), tomando como base os estudos da pesquisadora norte-americana Ball, quanto ao conhecimento que os professores polivalentes têm da Matemática a ser ensinada para crianças, destaca a importância de o professor possuir conhecimentos "de e sobre" Matemática, os quais, para serem ensinados, envolvem conceitos, proposições e procedimentos matemáticos.

Aponta, ainda, a importância de o professor saber sobre a natureza da Matemática, sua organização interna, compreender os princípios subjacentes aos procedimentos, os conhecimentos do fazer Matemática, incluindo a resolução de problemas e o discurso matemático (CURI, 2005).

Liping Ma (2009) desenvolveu, a partir de seus estudos, a concepção de que, para aprender Matemática, a ênfase deve ser dada a quatro aspectos do conhecimento que poderão contribuir melhor para a capacidade do professor de explicar ideias matemáticas importantes aos estudantes, quais sejam: ideias básicas, conectividade, representações múltiplas e coerência longitudinal. A autora denomina tais aspectos de *Compreensão Profunda da Matemática Fundamental* (CPMF).A estudiosa esclarece que essas quatro propriedades estão inter-relacionadas, porém, a conectividade é uma característica geral do ensino da matemática por parte de um professor com CPMF e as outras três propriedades (perspectivas múltiplas, ideias básicas e coerência longitudinal) são ligações que conduzem a diferentes aspectos da compreensão significativa da matemática – alcance, profundidade e abrangência (LIPING MA,2009).

Das observações e colocações feitas, percebe-se que vários são os fatores que podem contribuir ou não para um ensino e aprendizagem matemática coerente e efetivo, mas um aspecto relevante é, primordialmente, na formação inicial do professor pedagogo ou especialista e na busca de aprimoramento contínuo de sua prática.

1.1 Problemática, objetivos e hipótese

O tema Fração é abrangente e, a princípio, pode ser visto como um conteúdo básico. No entanto, diante de alguns estudos já realizados em torno desse assunto, há convergência do quanto pode ser complexo e desafiante trabalhar com Fração, pelo fato de entremear-se por vários conteúdos, em diversos níveis de compreensão. A Fração é considerada, por muitos autores, como sendo o ponto cimeiro[3] no Ensino Fundamental I, em que os alunos e, até mesmo, o professor, quer seja dos anos iniciais, quer seja especialista em Matemática, apresentam dificuldades em compreender a complexidade que envolve tal conteúdo, tendo em vista a gama de fatores que precisam ser utilizados e articulados para dar

[3] Que está no cimo; o mais alto nível. Disponível em:<https://www.infopedia.pt/dicionarios/lingua-portuguesa/cimeiro>Acesso em: 13 mar. 2020.

embasamento ao ensino e à aprendizagem de Fração, a exemplo da compreensão de seus significados, tipologias e representações.

Diante desse cenário, esta pesquisa busca responder à seguinte indagação: **Como a Exploração-Resolução-Proposição de Problemas Matemáticos pode potencializar o Ensino e a Aprendizagem de Fração?** E justifica-se pela relevância e contribuição que poderá trazer ao ensino e à aprendizagem de conteúdos matemáticos, tendo em vista que estes estão intrinsecamente relacionada à vida prática e que o uso adequado de aspectos metodológicos alternativos poderá inferir diretamente na aquisição de conhecimentos e suas interconexões do ponto de vista formal, pessoal e social.

Assim, a referida pesquisa, em termo geral, objetiva:

- Investigar e obter respaldo teórico-prático acerca da Exploração-Resolução-Proposição de Problemas Matemáticos como meio de potencializar o Ensino e a Aprendizagem de Fração.

Especificamente, objetiva:

- Fomentar a reflexão e ampliação do pensamento consciente, crítico e criativo, a partir de problematizações oportunizadas e/ou construídas coletivamente, mediante a Exploração, Resolução e Proposição de Problemas envolvendo Fração e seus significados;
- Explorar Fração, partindo do uso de material manipulável de conversões e reversões representacionais (gráfica, numérica e por extenso).
- Desenvolver e/ou ampliar a leitura e a escrita adequada e a compreensão do significado de palavras usualmente colocadas, referindo-se à fração/razão na configuração do número fracionário.

Para tanto, temos a hipótese de que o ensino e a aprendizagem Matemática poderão ser potencializados com a Exploração, Problematização, Proposição e Resolução de Problemas.

1.2 Descrição da dissertação

O referente estudo está organizado em cinco capítulos. O primeiro capítulo consiste nesta introdução.

O segundo capítulo, sem pretensão de aprofundamento, traz alguns aspectos da teoria sócio-histórica na perspectiva de Vigotski (2009; 2008a; 2008b), que embasa a pesquisa ao tempo que norteia o processo de ensino e aprendizagem matemática, visualizando a interação e a mediação como meio necessário para obtenção efetiva da aprendizagem.

O terceiro capítulo discorre sobre o surgimento e uso da Resolução de Problemas, sua dinâmica e estratégias posta por alguns autores, como Polya (1945), Schroeder e Lester (1989). Aborda a Resolução de Problema numa perspectiva metodológica, agregando a esta aspectos atuais que a define em um novo patamar. Para esta discussão, destaca-se, entre outros, as ideias de Andrade (2017;1998) numa abordagem metodológica mais atual. Apresenta, ainda, de modo sucinto, como a Resolução de Problemas tem sido indicada em documentos e programas oficiais, como: Base Nacional Comum Curricular (BNCC), em 2018, Parâmetros Curriculares Nacionais(PCN), em 1997.

O quarto capítulo traz, inicialmente, uma breve descrição e evolução histórica de como surgiu a Fração, segundo Boyer (1996) e Eves (2011), e como está sendo compreendida atualmente por pesquisadores e educadores no meio escolar. Também são postos aspectos em relação à conceituação e significados essenciais da Fração, na visão de Botta (1997), Moutinho (2005), Bertoni (2009; 2008), Magina, Bezerra e Spinollo (2009) e Vasconcelos (2015).

A partir de então, são expostos aspectos relacionados às dificuldades que alguns estudos feitos no exterior e no Brasil apresentam como entraves no processo de ensino e aprendizagem, tais como a falta de compreensão do significado de palavras na escrita e leitura de Fração (quinto, avos, décimos...), de número racional em relação à Fração e outros conteúdos (razão, porcentagem, número decimal...) que se inter-relacionam de maneira direta ou indireta com a Fração. Neste capítulo, há, de maneira sucinta um “Estudo da arte”, com apontamentos destacados de alguns artigos, dissertações e teses nacionais e internacionais. Assim, além dos autores já citados, temos discussões advindas de Steencken e Maher (2002), Smith III (2002), Liping Ma (2009), Lima(2014) e outros.

Ainda no quarto capítulo, há aspectos em relação ao uso de recursos manipulativos como forma de auxiliar o ensino e a aprendizagem de Fração e descreve-se sobre a importância de identificar e descrever a fração a partir da manipulação de materiais (concretos e/ou visuais), como também de realizar, paralelamente, a aritmética, relacionando a representação gráfica, numérica e por extenso.

O quinto capítulo trata dos procedimentos metodológicos que foram utilizados no intuito de obter dados para a análise e resultados da pesquisa feita a partir da abordagem qualitativa, na modalidade da Pesquisa Pedagógica, tendo como *lócus* uma Escola Municipal de Ensino Infantil e Fundamental I, situada na cidade de Lagoa Seca/PB, mais especificamente, uma turma de 5º ano, no turno matutino, com o universo de 25 alunos, em idade de 10 a 15 anos, onde foram realizados 15 encontros.

Por fim, as considerações finais, retomando a questão norteadora da referida pesquisa, bem como o que se pôde averiguar de modo geral diante da realização da mesma e do subsídio teórico.

2 ASPECTOS DA TEORIA SÓCIO-HISTÓRICA NA PERSPECTIVA DE VIGOTSKI

O processo de desenvolvimento não coincide com o da aprendizagem, o processo de desenvolvimento segue o da aprendizagem, que cria a área de desenvolvimento potencial.

(*Vigotski*)

Sem pretensão de aprofundar, destacamos neste capítulo, alguns aspectos da teoria sócio-histórica da perspectiva de Vigotski, que respalda e condiz com a proposta metodológica da Exploração-Resolução-Proposição de Problemas.

Vigotski dedica-se à investigação dos processos do desenvolvimento humano nas dimensões filogenética (desenvolvimento da espécie humana), sóciogenética (história dos grupos sociais), ontogenética (desenvolvimento do indivíduo) e microgenética (desenvolvimento de aspectos específicos do repertório psicológico dos sujeitos). Em suas reflexões, há uma profunda conexão e relação entre vários aspectos da experiência humana, tais como: o individual e o social, o biológico e o cultural, a aprendizagem e o desenvolvimento, o pensamento e a linguagem (Oliveira, 1995 *apud* ALBUQUERQUE, 2005, p. 36).

Na perspectiva de Vigotski (2008a), as relações sociais são convertidas em funções mentais, de modo que o desenvolvimento dos processos mentais superiores é fruto da socialização e não do desenvolvimento cognitivo. Para ele, a aquisição do conhecimento se dá a partir da interação social, do conhecimento histórico e através da compreensão e uso de instrumentos e signos. O que seriam instrumento e signo na teoria de Vigotski? Os instrumentos são ferramentas, algo que é utilizado para fazer alguma coisa; já os signos, de algum modo, informam e têm significados que poderão mudar de acordo com o sentido do seu uso.

Na concepção vigotskiana, a ideia de quem ensina e de quem aprende não envolve, necessariamente, a presença física de um educador, o próprio objeto ou ambiente estão impregnados de elementos culturais, e a interação do indivíduo com o objeto e com o meio, atrelada aos conhecimentos que este já possui, podem gerar novos conhecimentos, no entanto, estes podem ser potencializados, com a mediação direta e intencional de alguém. De acordo com o que nos coloca Oliveira (1995, p.38-39)” é através da relação interpessoal concreta com outros homens que o indivíduo vai chegar a interiorizar as formas culturalmente estabelecidas de funcionamento psicológico". Dessas interações, ocorre que o processo interpessoal é transformado num processo intrapessoal. Nos parágrafos que seguem, vamos entender alguns conceitos importantes acerca das ideias discutidas por Vigotski.

- ✓ Linguagem

No desenvolvimento cognitivo do ser humano, a linguagem é, para Vigotski (2009), o mais importante sistema de signos, atribuindo a ela a função principal de intercâmbio social.

Segundo Vigotski (2009), o desenvolvimento da linguagem e do pensamento realiza-se de forma não paralela e desigual. As curvas desse desenvolvimento cruzam-se, nivelam-se em determinados períodos e seguem paralelamente, chegam a confluir em algumas de suas partes para, depois, tornar a bifurcar-se. O teórico descreve que o desenvolvimento da linguagem ocorre em três etapas: linguagem exterior, linguagem egocêntrica e linguagem interior. Em linhas gerais, esse desenvolvimento passa por quatro estágios básicos. Primeiro: natural ou primitivo, que corresponde à linguagem pré-intelectual e ao pensamento pré-verbal, quando essas operações aparecem em sua forma original; Segundo: chamado de "Psicologia ingênua" por analogia com a chamada "física ingênua", a experiência da criança com as propriedades físicas do seu corpo e a aplicação dessa experiência ao uso de instrumentos (primeiro exercício da inteligência prática que está brotando na criança); Terceiro: Se caracteriza por signos exteriores, operações externas que são usadas como auxiliares na solução de problemas internos. É o estágio em que a criança conta nos dedos, o estágio dos signos mnemotécnicos [4] externos no processo de memorização. No desenvolvimento da fala, corresponde-lhe à linguagem egocêntrica; Quarto: denominado, metaforicamente, como o estágio do crescimento para dentro. As operações externas se interiorizam e passam por profunda mudança. A criança começa a contar mentalmente, a usar a "memória lógica". No campo da fala, corresponde à linguagem interior ou silenciosa,

---

[4] Uso de símbolos e analogias representacionais que se conectam e são utilizados para memorizar algo. Por exemplo: o uso dos dedos para exercer contagem (descrição própria).
"Mnemotecnia é uma palavra de origem grega que se forma pela combinação de dois termos: *mnéme*, que quer dizer memória e *techne*, que significa técnica. Assim, a mnemotecnia é um procedimento ou método que serve para recordar algo com mais facilidade".
Disponível em: <https://conceitos.com/mnemotecnia>Acesso em 29 mar. 2020.

coexistindo constantemente interação entre as operações externas e internas (VIGOTSKI, 2009, p.111-139).

A fala internalizada reflete e é refletida, tornando-se cada vez mais independente e abstrata em relação a contextos concretos, favorecendo a conceptualização de objetos/palavras, atribuindo a estes sentido e significado.

Segundo Moysés, (2009, p.39), “sentido e significado são conceitos que foram introduzidos por Vigotski ao tratar das relações entre linguagem e pensamento”. O significado diz respeito ao que o indivíduo é capaz de explicar com suas palavras, quando é capaz de inferir e resolver problemas novos, quando compreende e expressa, de maneira clara e objetiva, o que aprendeu, o que foi internalizado. O processo de internalizar a aprendizagem, necessariamente, utiliza-se de mediação humana e semiótica, sendo fundamental, nesse processo, a linguagem e, em particular, a palavra. O sentido diz respeito ao contexto de uso da palavra.

A formação de conceitos não é um processo mecânico, mas, sim, criativo, que surge e se configura no curso de uma operação complexa, com intuito de solucionar um problema; assim sendo, o uso mecânico de uma palavra e sua ligação com um objeto não é suficiente para a criação de um conceito (VIGOTSKI, 2008b). Para este autor,

> Um conceito não é uma formação isolada, fossilizada e imutável, mas sim uma parte ativa do processo intelectual, constantemente a serviço da comunicação, do entendimento e da solução de problemas (VIGOTSKI, 2008b, p. 67).

Os conceitos se formam e se desenvolvem sob condições internas e externas diferentes, dependendo do fato de se originarem do aprendizado em sala de aula, podendo ser caracterizados como conceitos científicos ou da experiência pessoal da criança, sendo estes últimos denominados de conceitos espontâneos.

Em Vigotski (2009), a aquisição dos conceitos se realiza de maneira diferente em cada criança, isto é, independentemente da idade, crianças que se encontrem na mesma faixa etária podem apresentar desenvolvimentos diferentes. Para este autor, o aprendizado, geralmente, precede o desenvolvimento, exemplificando que, quando uma criança aprende algo, como uma operação aritmética ou algum conceito científico, o desenvolvimento dessa operação ou conceito está apenas no início. Isto posto, compreende-se que, segundo Vigotski (2009, p. 318) a aprendizagem se apoia em “processos psíquicos imaturos, que apenas estão iniciando o seu círculo primeiro e básico de desenvolvimento”.

Nesse processo, a imitação também se torna importantíssima, porque, para Vigotski (2009, p.328), “a criança só pode imitar o que se encontra na zona das suas próprias potencialidades”. A imitação poderá promover a aprendizagem da fala e/ou das matérias escolares, partindo da premissa de que o que a criança é capaz de fazer hoje em cooperação, será capaz de fazer amanhã de maneira autônoma.

Desse modo, o aprendizado poderá ocorrer com a imitação e/ou mediação de algo e/ou alguém, a depender do nível da zona de desenvolvimento que se encontra o indivíduo.

✓ Zona de desenvolvimento proximal

A zona de desenvolvimento proximal surge, segundo Moysés (2009), em virtude da necessidade de Vigotski compreender o desenvolvimento do ensino e da aprendizagem. Vigotski (2008a), caracteriza o nível de desenvolvimento cognitivo em real e potencial. O nível de desenvolvimento real seria a capacidade de resolver problemas de maneira independente, sem precisar, necessariamente, da colaboração ou mediação de alguém, enquanto que o nível potencial diz respeito à necessidade de orientação e/ou intervenção de alguém ou da colaboração do coletivo, estando o indivíduo em processo de maturação, isto é, em transição para a aquisição de aprendizagem de algo.

Em Vigotski (2008a), temos a seguinte descrição:

> A zona de desenvolvimento proximal. Ela é a distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da solução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da solução de problemas sob a orientação de um aluno ou em colaboração com companheiros mais capazes (VIGOTSKI, 2007, p. 97).

Na teoria de Vigotski (2008a), considera-se que o bom ensino está à frente do desenvolvimento cognitivo, liderando-o, ou seja, num processo de ensino e de aprendizagem, deve-se levar em conta o nível em que o aluno está, propondo-se situações em que o aluno avance na compreensão de conhecimentos, adequando-os, inferindo na compreensão e agregação de outros conhecimentos.

A mediação do professor na aprendizagem do aluno é indispensável, sendo o docente um participante do processo que já internalizou significados socialmente compartilhados para o ensino e aprendizagem e, na medida em que ensina, clarifica, aprende e incorpora significados à ação pedagógica, ocorrendo, assim, efetivamente, o processo de ensino e aprendizagem.

De acordo com Moysés (2009, p.37), o processo de ensino e aprendizagem é dinâmico, constituindo uma inter-relação entre indivíduos que ensinam e aprendem ao mesmo tempo, em que o questionamento e a "correção" por parte de quem ensina é "papel relevante na aprendizagem". O professor bem preparado e conhecedor da zona proximal de desenvolvimento saberá melhor mediar, provocar o desequilíbrio na estrutura cognitiva e, assim, favorecer a aprendizagem do aluno.

Como bem descreve Albuquerque (2005, p. 39), "é a aprendizagem que impulsiona o desenvolvimento e, por isso, a instituição de ensino tem papel fundamental na tríade ensino-aprendizagem-desenvolvimento".

Em suma, ao adquirir conhecimento, o aluno desenvolve-se e amplia sua consciência, e, consequentemente, seu modo de pensar, de agir e interagir de imaginar, de criar e recriar.

2.1 O objeto de pesquisa subsidiado na teoria sócio-histórica

A referente pesquisa pauta-se em aspectos da teoria sócio-histórica visgoskiana, por entendermos ser esta teoria a que mais se adequa ao nosso propósito, qual seja: Se utilizar da Exploração, como meio para problematizar, propor e resolver problemas coletivos/individuais, através da interação e mediação, como ricos suportes no desenvolvimento cognitivo e social.

A interação diz respeito à participação dos alunos em atividades compartilhadas, exploradas e socializadas. Já a mediação é vista como processo de intervenção de um elemento intermediário numa relação, que, na visão vigotskiana, refere-se ao uso de instrumentos e signos, ou seja, em nossa pesquisa, esses instrumentos e signos estão voltados para o uso de materiais manipulativos, a identificação de símbolos, gestos, linguagens, como fatores essenciais à aprendizagem. Mediação, também, no sentido de intervenção pedagógica, uma vez que, de acordo com Oliveira (1995, p. 62), "o professor tem papel explícito de interferir na zona de desenvolvimento proximal dos alunos, provocando avanços que não ocorreriam espontaneamente", visualizando nesse processo, a apreensão de conceitos formais adquiridos no âmbito escolar a partir da colaboração mútua.

Nessa interação e mediação mútua, ao se oportunizar tais explorações, fazemos uso da linguagem falada e escrita, tão importantes para a socialização, o intercambio das ideias e do pensamento, para e na inserção social e aquisição cognitiva. Assim, conhecer o significado e o sentido que uma palavra exerce a partir do contexto em que está sendo utilizada faz toda diferença. A exploração favorece a aquisição desse conhecimento de maneira dinâmica, uma vez que pode ser o fio condutor para compreender o uso da palavra em contextos distintos.

De acordo com a teoria sócio-histórica, ao associar o significado de uma palavra, o homem está dominando a experiência social. A palavra conserva um significado desenvolvido historicamente, mas poderá ter outro significado individual a depender do entendimento de cada um. Além do mais, como destaca Moysés (2009, p.39), “o sentido com que a palavra é utilizada é impregnada do contexto em que ela surge ou é abordada”.

Usualmente, surgem palavras do contexto da Língua Materna que mudam seu significado, no contexto da linguagem matemática, por exemplo, a palavra “quarto” que pode significar um cômodo (Língua materna) ou a quarta parte das partes que constituem um inteiro/todo (linguagem matemática). Sobre isto, podemos destacar, ainda, outro ponto: o significado da palavra “fração”, que é diferente do significado da palavra razão, porém, ambas estão associadas a uma mesma representação, ou seja, ao número fracionário. Neste caso, o mesmo termo (número fracionário), do mesmo contexto (linguagem matemática), ainda assim assume significado diferente.

Assim, com base na teoria sócio-histórica na perspectiva de Vigotski, destacamos a importância da escrita e das formas de representações das frações, que são representadas por signos/símbolos (gráficos, numéricos e por extenso), os quais são mediadores e representam informações na e para construção cognitiva do tema.

Deste modo, ao explorar e contextualizar o objeto/situação problema, dar-se condições dos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem identificarem e se identificar com aspectos de sua vivência e experiência social, inferindo conhecimentos que já possuem e, a partir de então, favorecer apreensão e ou ampliação de novos conhecimentos.

A contextualização de determinado conteúdo poderá partir do conhecimento e ou reconhecimento de características próprias de determinado objeto/situação para interpor um contexto social e, assim, promover aprendizagem mais efetiva.

Para tanto, promover a exploração do objeto/situação problema, no caso, a identificação do quebra cabeça Tangram e o diagnóstico do que os alunos já sabem sobre fração, no sentido de despertar o interesse, a curiosidade e criticidade do aluno, também de perceber o que o aluno sabe e como sabe, são fundamentais para a obtenção de maior êxito neste processo.

Concordamos, assim, com o que afirma Moysés (2009):

> Evidentemente que, ao privilegiar a contextualização, esse ensino deve ser concebido de uma maneira diferente. Mais solto, mais flexível, ele deve permitir que a significação dos conceitos seja construída por cada um, mediante um processo de trocas coletivas. (MOYSÉS, 2009, p. 78).

A compreensão, por parte de quem ensina, de que um conceito só se efetiva quando o próprio desenvolvimento mental da criança já estiver atingido o nível necessário é de suma importância no processo de ensino e aprendizagem. Sem, no entanto, deixar de oportunizar vivências/experiências que sejam desafiantes, no sentido de verificar, romper ou transpor o nível de desenvolvimento cognitivo em que o aluno se encontra.

3 EXPLORAÇÃO-RESOLUCÃO-PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS

> *"...Problema é entendido como um projeto, uma questão, uma tarefa, uma situação em que: o aluno não tem ou não conhece nenhum processo que lhe permita encontrar de imediato a solução."*
>
> (*Silvanio Andrade*)

Neste capítulo, são destacados aspectos da Resolução de Problemas no processo de ensino e aprendizagem, apresentando uma breve evolução de entendimento e uso. Considerada como uma metodologia, que dá condições de desenvolver questões que interagem tanto em relação ao cognitivo quanto ao desenvolvimento social, tal metodologia tem sido, constantemente, foco de pesquisas, as quais apresentam alternativas que consolidam, ainda mais, seu uso no fazer pedagógico e social. Onuchic *et al*. (2014) comentam sobre a importância de incorporar à Resolução de Problemas possibilidades de avaliar, de maneira contínua e formativa, com vistas ao desenvolvimento do processo e menos ao julgamento dos resultados obtidos neste processo. Andrade (2017) nos diz que, em sua proposta, denominada de Exploração-Resolução-Proposição de Problema, atribui à *exploração* [5] ferramenta fundamental para problematizar [6], propor [7] e resolver problemas e/ou resolver e propor outros problemas a partir da exploração e resolução de um problema, indo além dos aspectos pedagógicos, uma vez que, ao explorar os problemas/objeto/tema, dar-se condições de surgir e/ou inferir questões sociais.

Esta pesquisa encontra respaldo e é referenciada em Andrade (1998, 2017), por constatarmos, neste autor, identificação com nosso propósito de pesquisa, qual seja: a exploração como eixo para trabalharmos não só a resolução de problemas, mas, também, a problematização e proposição de problemas como forma de tornar viável ao aluno à construção do conhecimento de maneira livre e criativa, coletiva/individual, a partir das vivências surgidas e ou oportunizadas na sala de aula.

---

[5] Ver página 35.
[6] Ver página 48.
[7] Ver página 39.

3.1 Resolução de Problemas como metodologia de ensino

- ✓ O que é um Problema?

Na literatura acadêmica, de modo geral, as ideias convergem para o fato de o termo problema designar um desafio, uma situação a ser solucionada.

Andrade (1998), em sua dissertação de mestrado intitulada "*Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução, Exploração, Codificação e Descodificação de Problemas (RECDP)"* e, posteriormente, em estudos mais atuais, com o título" *Ensino-Aprendizagem de Matemática via Exploração, Resolução, Proposição, Codificação e Descodificação de Problemas (ERPCDP)"* descreve:

> Um problema é como um projeto, uma questão, uma tarefa, uma situação em que: a) O aluno não tem ou não conhece nenhum processo que lhe permita encontrar de imediato a solução; b) O aluno deseja resolver, explorar ou realizar algum trabalho efetivo; c) Se introduz ou se leva o aluno à realização de algum trabalho efetivo. Para este autor, o ensino e a aprendizagem de Matemática sempre começam com um problema (ANDRADE, 1998, p, 26; 2017, p.364-365).

Smole e Diniz (2016a, p.11-12) assumem que um problema "é toda situação que não possui solução evidente e que exige que o resolvedor combine seus conhecimentos e se decida pela forma de usá-los em busca da solução".

Em Conti e Longo (2017), encontra-se a posição de Krulik e Reys, afirmando que "um problema é uma situação quantitativa ou não, que pede uma solução para a qual os indivíduos implicados não conhecem meios ou caminhos evidentes para obtê-la" (CONTE; LONGO, 2017.p. 23).

O problema caracteriza-se, então, como uma situação em que o aluno ou o "resolvedor" não sabe a solução de imediato ou de maneira evidente e terá que dispor de conhecimentos prévios para buscar e criar meios/ações que o leve ao alcance da resolução do problema.

- ✓ O que é resolver um problema?

Resolver problema implica encontrar uma ou mais soluções, a depender do contexto ou objetivo que se quer alcançar, após ter feito a análise dos dados contidos no problema; ter explorado, "codificado e descodificado" esses dados; ter compreendido aspectos gerais do problema; ter refletido as ações a serem realizadas; ter executado as ações e utilizado os meios necessários que conduziram à solução do problema.

Sobre resolver problema, Smole e Diniz (2016a) destacam que:

> Resolver problemas necessariamente inclui alguma forma de pensar matemática. Mesmo os problemas diários ou profissionais exigem que os dados sejam analisados e que alguma estratégia seja pensada para verificação se, de fato, permitiu ou não chegar à solução da situação inicial. (SMOLE e DINIZ, 2016a p. 9).

O entendimento e uso da Resolução de Problemas têm assumido várias concepções ao longo do tempo. Segundo Onuchic *el at.* (2014), o estudo e a aplicabilidade de Resolução de Problemas no ensino de Matemática tornaram-se evidentes mundialmente nos anos 70, embora se tenha como marco inicial a obra intitulada *How to sorve it?* (POLYA, 1945), que apresenta estratégias para a Resolução de Problemas, as quais estão organizadas em quatro etapas: 1) compreender o problema; 2) estabelecer um plano; 3) executar o plano; 4) examinar a solução obtida. Foi a partir dos trabalhos de Polya (1945) que se passou a dar maior ênfase à Resolução de Problemas, ainda que as práticas e orientações que sucederam revelem diferentes concepções quanto à resolução de situações-problema (ONUCHIC *et al*., 2014).

Nessas condições, Schroeder e Lester (1989), apresentam três sentidos para a Resolução de Problemas, a saber: Ensinar *sobre*, *para* e *através* de resolução de problemas. Nas linhas a seguir, vamos explicar o funcionamento desses três sentidos:

- Ensinar "*sobre*" Resolução de Problemas é trabalhar na perspectiva de Polya (1945, 1995). A atenção centra-se nos procedimentos e estratégias a serem usados para se chegar à "solução" do problema.
- Ensinar "*para*" Resolução de Problemas implica priorizar a aquisição de conhecimentos matemáticos, que são ensinados formalmente e, posteriormente, aplicados a partir de problemas.
- Ensinar "*através/via*" Resolução de Problemas é o modo concebido como metodologia: o problema é o ponto de partida para o ensino.

De acordo com Onuchic *et al* (2014), o termo ensino e a aprendizagem *através/via* Resolução de Problemas torna-se mais evidente a partir do Standards 2000 e reflete o trabalho desenvolvido pela *National Council of Teachers os Mathematics* (NCTM) ao longo das décadas anteriores, em que fora discutida com educadores e pesquisadores, perspectivas didático-pedagógicas com a Resolução de Problemas, pensada como uma metodologia de ensino. A metodologia de ensino através/via Resolução de Problemas assume, então, significado de “ao longo”, “no decurso”, enfatizando a Matemática e a Resolução de Problema a partir de uma construção mútua. (Onuchic *et al*., 2014).

A Resolução de Problemas passa a ser concebida numa perspectiva metodológica, indo além do sentido puramente matemático ou do sentido de significá-la socialmente, projetando, inclusive, a compreensão de avaliar o ensino e a aprendizagem através da Resolução de Problemas. A exemplo, pode-se citar Onuchic *et al*. (2014, p. 31), que considera a “Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática *através* da Resolução de Problema “uma ampliação das três concepções, descritas por Schroeder e Lester (1989), por integrar a avaliação às atividades de sala de aula, ocorrendo simultaneamente na Resolução de Problemas, o caráter de Ensino-Aprendizagem-Avaliação, durante a construção do conhecimento pelo aluno, com o professor atuando como guia mediador.

Segundo Cai e Lester (2010, p. 5), a Resolução de Problemas é uma parte integrante da aprendizagem da Matemática, não sendo considerada como um tópico separado no currículo, mas como um meio para o ensino de conceitos e competências matemáticas. Em consonância ao que este autor coloca, constata-se, na Educação Básica, indicação metodológica da Resolução de Problemas, em alguns documentos oficiais, como os Parâmetros Curriculares Nacionais –PCN (BRASIL, 1997, p.40-41), que destaca:

- O ponto de partida da atividade matemática não é a definição, mas o problema. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las;

- O problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada;

- Aproximações sucessivas ao conceito são construídas para resolver um certo tipo de problema; num outro momento, o aluno utiliza o que aprendeu para resolver outros, o que exige transferências, retificações, rupturas, segundo um processo análogo ao que se pode observar na história da Matemática;

- O aluno não constrói um conceito em resposta a um problema, mas constrói um campo de conceitos que tomam sentido num campo de problemas. Um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações;

- A resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas.

Um dos documentos oficiais mais recentes que menciona a Resolução de Problemas é a Base Nacional Comum Curricular- BNCC. Nela, encontra-se descrito, em um primeiro momento, dentre as dez competências gerais (BRASIL, 2017, p. 9):

> 2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
>
> 5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.

De maneira mais específica, encontra-se, na BNCC, referência ao uso de Resolução de Problema, em que:

> desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações (BRASIL, 2018, p. 265).
>
> Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental (BRASIL, 2017, p. 266).

Resolução de Problema, concebida como Perspectiva Metodológica de/para o ensino, é descrita por Smole e Diniz (2016a, p. 9) “como um conjunto de orientações para o ensino” que podem ocorrer a partir de alguns aspectos, tais como: usar um problema detonador ou desafio que possa desencadear o ensino e a aprendizagem de conhecimentos matemáticos; trabalhar com problemas abertos; usar a problematização ou formulação de problemas em projetos. Na concepção dessas autoras, a *Perspectiva Metodológica da Resolução de Problemas* é uma forma de organizar o ensino, pois, indo além de aspectos metodológicos, envolve o que significa ensinar e, consequentemente, o que significa aprender.

Resolução de Problema como metodologia é compreendida, de modo geral, como proposta de ensino, no intuito de promover a aprendizagem de algum conteúdo, partindo dos conhecimentos que os alunos já dispõem. Nesse processo, a exploração se torna necessária, pois vai além de promover a *problematização* e/ou a *investigação*[8]**.** Na busca pela solução, promove-se a criatividade, a criticidade, possibilita a proposição de novos problemas e a inferência do contexto social. O aluno é levado a pensar e a compreender outros aspectos existentes na situação proposta e/ou gerados a partir de problemas com ou sem enunciado.

3.2 A exploração: indo além de resolver problemas

- ✓ O que é explorar problemas?

Para Silva (2013), em um problema, a exploração pode ocorrer no sentido de:

1. **Ir além do problema –** no momento em que o professor faz uso do problema, mas extrapola os limites curriculares dele;
2. **Construir novos problemas –** na exploração de uma determinada situação-problema, o professor lança mão de novas situações derivadas da primeira;
3. **Buscar padrões e mediar a aprendizagem –** ao trazer situações mediadoras para situações mais complexas, intensificando a aprendizagem do aluno.

Concebemos, aqui, o termo "explorar", na visão de Andrade (1998, 2017), ou seja, como processo que abrange a indagação, hipótese, a análise dos dados, a investigação, a codificação e a descodificação, a reflexão, a refutação, a busca por alternativas e ações para entender e resolver um problema, podendo essa exploração se dá a partir de um objeto, tema ou situação (simulada ou real); a partir da solução do problema ou mesmo para problematizar e propor novos problemas, isto é, o processo exploratório pode ocorrer antes, durante e depois da resolução do problema; pode ir muito além.

Andrade (1998, 2017) destaca que a Resolução de Problemas como metodologia de ensino e aprendizagem necessita ser pensada globalmente. Para

[8] Parte de um processo exploratório [...] referência à realização de atividades intelectuais e experimentais de modo sistemático (pesquisar) [...] procura de conhecimentos ou de soluções para certos problemas. Disponível em:<https://conceito.de/investigação>. Acesso em: 05 abr. 2020.

tanto, faz-se necessário a instigação constante neste processo de ensino-aprendizagem e a exploração de fatos, códigos, símbolos, entre outros aspectos, que possam possibilitar maior apreensão e ampliação dos mais variados conhecimentos aí experenciados. Essa instigação ocorre, principalmente, via Exploração.

Andrade (2017) expressa a ideia de que a exploração de um problema favorece:

> Um prazer e uma alegria de ir cada vez mais profundo, um ir cada vez mais curioso, há um ir que chega e nunca chega, um ir que pode sempre ir, um ir que sempre se limita ao contexto do aluno, do professor, da Matemática, da escola [...] e por isso pode ir outra vez e mais outra vez. (ANDRADE, 2017, p. 366).

A exploração de problema aguça o despertar reflexivo, indagativo, investigativo, a interação e socialização de ideias, opiniões e dúvidas, promovendo uma aprendizagem significativa para os envolvidos neste processo, isto é:

> À medida que os estudantes explicam e justificam o seu pensamento e desafiam as explicações de seus colegas e professores, eles também se engajam em esclarecer o seu próprio pensamento, tornando-se donos do "saber" (LAMPERT, 1990 *apud* LESTER; CAI, 2010, p.3).

A partir da exploração e solução de um problema, podem surgir outras indagações, que podem se tornar, de fato, um problema, como também, pode ser um problema com ou sem enunciado, um objeto ou jogo, em que não se sabe seu uso, não se sabe as regras, precisando, portanto, que este seja explorado, para que se obtenha a identificação de suas possibilidades contextuais. Lester e Cai (2010, p.1) mencionam que "problemas sem enunciados podem ser problemas verdadeiros". Assim,

> Nesta perspectiva, percebe-se a existência de maior possibilidade do problema ser resolvido e explorado, não se limitando apenas à busca da solução, indo muito além, permitindo que o aluno reconheça seus aspectos, analise suas principais causas, eliminando as desnecessárias, executando reflexivamente as ações cabíveis, enfim, ocorra aprendizagem profunda durante o processo de resolução e exploração do problema (SILVA; ANDRADE, 2016, p.23-24).

Frente ao exposto, ressalta-se que ainda que a situação/objeto/tema não seja contextualizada ou não tenha uma contextualização adequada, poderá ser explorada no sentido de promover aos estudantes a oportunidade da exploração com vistas a adequá-la ao contexto no qual estão inseridos e/ou no sentido de despertar neles a criticidade da ausência de dados necessários, que poderiam melhor elucidar o problema. A exploração de um problema não acaba quando, supostamente, se chegou a uma solução, vai além e em várias direções e aspectos, conforme menciona Andrade (2017, p. 367):

> O final de uma experiência de Exploração de Problemas em sala de aula nunca é o final de uma história, mas o começo de muitas outras histórias. Trabalhar com Exploração de Problemas é colocar-se sempre em movimento, em aventura, é um sair sempre para mergulhar reflexivamente e criticamente em si mesmo e além de si mesmo.

Compreendida desde modo, a exploração possibilita ao aluno explorar, de maneira livre e criativa, múltiplos aspectos, que o conduzirão a outras explorações, oportunizando e promovendo um tecer de saberes.

Segundo Andrade (2017), a exploração é o caminhar sobre a tarefa que pode proporcionar descobertas em torno e além da proposta, ainda que a solução não seja efetivada, entendida, neste sentido, em toda sua contextualidade, tornando o trabalho de exploração inacabado, numa experiência aberta, não fechada, embora não solta, a partir do movimento Problema-Trabalho-Reflexão e Síntese - Resultado(P-T-RS-R).

As relações apresentadas por Andrade (2017) representam apenas um mapeamento do caminho que pode ser trilhado durante a experiência de explorar e resolver problemas, em que o ensino e a aprendizagem deixam de ser uma relação direta, através de um processo simples de estímulo-resposta e passam a ser uma relação mediada, não sendo essas relações lineares, nem uma sequência de passos, mas representando um caminho que podemos trilhar, durante uma experiência de Resolução e Exploração de Problemas.

É inviável mensurar as múltiplas possibilidades que a exploração de um problema poderá ter. No entanto, há de se considerar alguns aspectos que podem fazer parte desse processo, tais como:

- Indagação-Curiosidade-Problematização: Exploração iniciada partindo da curiosidade e observações feitas pelos próprios alunos. O professor faz a mediação e intervenção necessária para gerar a problematização;
- Instigação indagativa-Problematização: Exploração instigada, pode ser mediada intencionalmente e diretamente pelo professor, no sentido de levantar hipóteses e conhecimento prévio dos alunos, promovendo o questionamento e a problematização de um objeto/tema ou situação problema; pode ser a instigação feita pelo professor ou em virtude da própria

dinâmica exploratória dos questionamentos feitos por aluno-aluno, aluno-professor-aluno, problematizando o que está sendo explorado;

- Contextualização: Exploração no sentido de melhor conhecer e relacionar o que é apresentado ao aluno, seja objeto, tema ou situação problema (simulado ou real);
- Investigação: Exploração de meios, alternativas, ações e diálogos que possam conduzir a solução do problema;
- Solução-Verificação-Problematização: Exploração no sentido de verificar a solução encontrada; explorando e problematizando para verificar se há outras maneiras de resolver o problema; explorando para problematizar e propor outro(s) problema(s) a partir do problema inicial.

Cabe destacar que, segundo Andrade (2017, p. 369):

> **Codificar** um problema é representá-lo em uma outra forma, outro código, outra linguagem [...] A codificação refere-se também a todo trabalho de síntese que é desenvolvido em torno de um problema. Vale salientar que o próprio problema dado já se constitui num código (grifo próprio).
> **Descodificar** um problema é procurar o seu significado, é procurar compreendê-lo, é decifrar a mensagem que ele expressa e, sobre tudo, é também fazer uma análise crítica dessa mensagem. Neste trabalho, a descodificação refere-se, principalmente, a toda análise crítica que se fez sobre um problema, sua resolução ou sobre cada trabalho feito (grifo próprio).

A exploração abrange os aspectos que estão inseridos num codificar e descodificar constante. Desse modo, a Exploração de Problemas é compreendida, em nossa pesquisa, como “ferramenta ampla e importante” que perpassa e projeta a problematização, a resolução e a proposição de problemas, sem, contudo, necessariamente, seguir uma ordem.

O termo “problematizar” possui sentido polissêmico [9]. Isto ocorre, provavelmente, em virtude das várias compreensões observadas em diferentes perspectivas e teorias.

Importa verificar que, independente de qual seja o fundamento para o uso da problematização, esta, sempre estará ancorada à primazia da pergunta, não há problematização sem que antes haja uma indagação/pergunta. Muenchen e Delizoicov (2013, p. 2449), destacam porém, que “toda problematização se origina de uma pergunta, no entanto, nem toda pergunta é problematização”.

---

[9] Que possui vários significados.

Para Andrade (2017, p. 375), “a problematização baseia-se em perguntas geradoras, feitas pelos alunos ou pelo professor, em processos que levam o aluno a se envolver com novos problemas e, portanto, à realização de novos trabalhos”.

Com vistas ao ensino e aprendizagem, compreendemos a problematização como parte de um processo exploratório, que se constitui na indagação por curiosidade ou instigação indagativa (mediada ou não, pelo professor), para explorar a criatividade, a criticidade e, consequentemente, o conhecimento ou identificação de um objeto, tema ou situação (simulada ou real). Indaga-se sobre: O que é isso? Pra que isso? Como poderia ser? Pra que serve? Neste momento, há um processo exploratório, para, só então, problematizar, ou seja, perceber o que sabe e o que não sabe sobre o que está sendo apresentado ou proposto. E, assim, obter condições de iniciar ações e alternativas que possam conduzir a respostas ou a proposição de outros problemas.

- ✓ O que é propor problema?

Powell e Yokoyama (2011), em artigo intitulado “Proposição de problemas colaborativos online: um estudo preliminar”, diz que propor problemas é engajar um indivíduo ou um grupo de indivíduos a uma atividade pessoal e/ou social, que implica uma apropriação. Os problemas emergem de dentro do indivíduo, não impostos por meios externos, e manifestam tentativas do indivíduo de compreender o seu mundo. Jurado (2016, p. 79) inicia o artigo “Formulação de problemas: avanços e desafios na educação matemática” questionando o porquê de o ensino e a aprendizagem com ênfase na Resolução de Problemas se dão apenas no intuito de resolver o que foi redigido e proposto por outras pessoas. Expõe que, certamente, há muitos bons problemas criados por matemáticos e educadores/pesquisadores que podem ser úteis em dados momentos, no entanto, em cada turma de alunos, se desenvolvem problemas próprios e motivações e dificuldades particulares, assim como o entorno sociocultural e o conjunto de experiências dessa determinada turma que requer atenção particular, especialmente por parte do docente e, evidentemente, ao uso de situações-problema, emergindo daí a proposição de problemas pelo professor. Problemas que estejam relacionados com o contexto e favoreçam uma aprendizagem significativa, visando estimular os alunos na proposição de problemas e situações que estimulem a criatividade e ampliem a visão exploratória e investigativa, obtendo amplo conhecimento.

Cai *et al*. (2015, p. 26) descrevem que as “atividades de criação de problemas geralmente exigem tarefas cognitivas, com o potencial de fornecer contextos intelectuais para o rico desenvolvimento dos alunos” e que é preciso encorajar os estudantes a propor problemas matemáticos, favorecer não tão somente o desenvolvimento de estratégias e de conhecimento matemático, mas, também, o desenvolvimento crítico e criativo, impactando positivamente no aprendizado de outros aspectos.

Como se pode perceber, os autores acima citados deixam claro que, atualmente, a proposição de problemas, elaborada pelos alunos e/ou em conjunto com o professor, tem estado no centro de pesquisas e debates educacionais, assim como também no currículo de muitos países, como forma alternativa e importante no processo de ensino e aprendizagem. Inclusive, o termo Preposição de Problemas, constitui o 17º Tópico Study Group –TSG (Tópico Grupo de Estudos) do 14º *International Congress on Mathematical Educacion* – ICME (Congresso Internacional de Educação Matemática)[10], que será realizado em Shanghai – China, no ano de 2020.

No Brasil, a proposição de problemas vem ganhando espaço e está cada vez mais articulada com o ensino e a aprendizagem Matemática através da Resolução de Problemas, uma vez que se pretende não apenas que os alunos resolvam problemas, mas que também reflitam, analisem, explorem e saibam propô-los, mediante a alteração de dados acrescidos e/ou retirados de um dado problema, da exploração feita em múltiplos contextos. Aspectos que correspondem ao que se indica, inclusive, na BNCC (BRASIL, 2018, p. 273):

> Na Matemática escolar, o processo de aprender uma noção em um contexto, abstrair e depois aplicá-la em outro contexto envolve capacidades essenciais, como formular, empregar, interpretar e avaliar – criar, enfim –, e não somente a resolução de enunciados típicos que são, muitas vezes, meros exercícios e apenas simulam alguma aprendizagem.

Em relação às competências gerais da Educação Básica, a BNCC aponta:

> Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão a análise crítica, a imaginação

[10]Disponível em: <https://www.icme14.org/> Acesso em: 28 set.2019.

Em virtude da pandemia (Covid-19), houveram alterações e o referido evento ocorrerá de 11 a 18 de julho de 2021. Novo acesso em: 25 out.2020.

> e a criatividade para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas. (BRASIL, 2017, p. 9).

Observa-se, nesse trecho da BNCC, a ideia de investigação, de reflexão e de análise que conduz, ainda que não esteja explícita, a perspectiva de promover, no âmbito escolar, ensino e aprendizagem pautados na dinâmica exploratória.

Pesquisadores como Onuchic *et al.* (2014) e Andrade (1998, 2017) desenvolvem estudos e indicam a Proposição de Problemas como aspecto importante, devendo ser explorada em sintonia com a Resolução, não como ponto a ser proposto apenas ao final de uma suposta Resolução de Problema, mas, também, como ponto de partida a ser problematizada e construída pelos alunos, partindo do interesse e criatividade dos discentes.

Neste processo, professores e alunos são os protagonistas, sendo o professor-educador matemático "o principal mediador entre os conhecimentos matemáticos historicamente produzidos. Para Andrade (2017, p. 392) ambos (professor e aluno) "são responsáveis por possíveis transformações tanto na escola, como na sociedade".

Assim, visualizamos a metodologia Exploração-Resolução-Preposição de Problemas como alternativa rica e viável de conferir aos alunos e ao professor protagonismo mútuo, em que as ideias, posturas e ações são exploradas, socializadas e construídas no decurso das vivências oportunizadas/surgidas no âmbito da sala de aula, visualizando, ainda, a possibilidade de avaliar se e como os alunos estão externando compreensão, quais as colocações feitas para além do assunto abordado, aproveitando tais exposições para que o professor avalie, também, a necessidade de oportunizar ações/mecanismos que venham favorecer a construção conjunta de saberes sobre e além do tema fração.

4 FRAÇÃO: ENSINO E APRENDIZAGEM, SIGNIFICADOS E RECURSOS

> *"Visões conceituais de objetos matemáticos têm fontes históricas que, por sua vez, moldam as perspectivas ontológicas e epistemológicas desses objetos. Entendendo que a natureza ou ontologia de um objeto matemático influencia as perspectivas de como alguém adquire conhecimento dele ou de sua epistemologia. O conhecimento de fração é um exemplo disso".*
>
> (*Arthur B. Powell*)

Buscando situar acerca dos aspectos que serão expostos neste tópico em relação ao ensino e a aprendizagem de Fração, inicialmente, são descritas algumas pesquisas que tratam do tema fração e, posteriormente, tem-se um breve resgate histórico visando situar quanto à origem e à evolução histórica de como o tema foi concebido e como tem sido atualmente utilizado no âmbito escolar. O referido capítulo segue abordando alguns aspectos que tratam e ou se conectam diretamente com a fração.

4.1 O que apontam algumas pesquisas sobre o ensino e aprendizagem de fração

Muitas pesquisas e autores, como Magina, Bezerra e Spinillo (2009), apontam que a complexidade e a compreensão do conhecimento conceitual das frações tem sido um dos maiores desafios cognitivos no ensino fundamental, bem como para os demais níveis, tendo como premissa que a compreensão de aspectos relacionados à fração se constituem em base fundamental para a compreensão de outros conteúdos.

Não apenas no Brasil, mas no mundo todo, há um fracasso no ensino e na aprendizagem com frações. A dificuldade ocorre tanto no que concerne à natureza conceitual quanto operatória. Muitos artigos trazem, em seu teor, algumas recomendações enfocando sempre a compreensão de frações, o ensino de maneira contextualizada e com significado para os alunos, em particular, a relação entre o todo, suas partes e sua representação simbólica em números racionais, mas nem sempre há real entendimento por parte de quem ensina, sequer dos aprendizes.

Uma das grandes dificuldades apresentadas por alunos e professores refere-se a problemas que envolvem fração, uma vez que há desconhecimento dos significados da fração, sua relação com número racional, o contexto em interconexões com outros conteúdos, a leitura e interpretação necessária. Com base nessa premissa, vejamos observações, considerações e outros aspectos em relação ao ensino e à aprendizagem de frações, apontados por alguns pesquisadores:

Quadro 1 - Resumo de algumas pesquisas realizadas a partir do tema fração

Steencken e Maher (2002), no artigo ***Young Children's Growing Understanding of Fraction Ideas*** (Aumento da compreensão das ideias das frações por crianças pequenas).[11]
As crianças pequenas podem aprender frações? Esse foi um dos questionamentos feitos por Steencken e Maher (2002), ao conduzirem uma experiência de ensino numa turma de 4ª série com 25 alunos (agrupadas de maneira heterogênea, por habilidades) em Nova Jersey. Sendo destacadas neste artigo, 7 primeiras sessões (com duração de 60 a 80 minutos cada) das 25 realizadas. Nesta experiência, os alunos eram convidados a revisitar os mesmos problemas ou problemas similares, dias depois, na pretensão que fossem responsáveis por determinar a razoabilidade de suas ideias. Deste modo, os pesquisadores incentivavam os alunos a decidir sobre as correções de suas soluções e a pensar a partir destas. Concluiu-se que, ao criar modelos, desenharem quadros, acabaram por desenvolver notações para as ideias que tinham. Partindo do todo (inteiro), relacionavam e exploravam padrões criados por sucessivas "reduzir pela metade", construindo, através da comparação de frações a compreensão das unidades para representar as frações, desenvolvendo um firme entendimento de que as unidades usadas para representar frações, devem ter o mesmo tamanho. Constatou-se, nessa experiência, que as crianças desenvolviam argumentos convincentes ao ouvir e expor suas ideias e as ideias dos colegas de sala de aula (STEENCKEN; MAHER, 2002).
Liping Ma (2009), a partir do título **"Saber e Ensinar Matemática Elementar"**

[11] Tradução própria.

Entre outros temas, a autora se propôs a identificar as diferenças no conhecimento e na compreensão do conteúdo da matemática entre professores chineses e americanos, destacando-se, aqui, parte de seu estudo em relação a “Criar representações; divisão de frações”, feita de maneira comparativa entre chineses e americanos. Concluiu constatando que, apesar dos americanos terem maior tempo de estudo (em torno de 16 a 18 anos e complemento de, pelo menos, mais dois anos) em relação aos chineses (em torno de 11 a 12 anos e complemento de 2 ou 3 anos), apresentam grande discrepância em termos de conhecimento matemático em relação aos chineses, sendo maior a observância em relação ao tópico de divisão com fração.

O conhecimento procedimental dos professores americanos mostrou-se, segundo a autora, não apenas fraco na divisão de frações, mas, também, noutras operações com fração. Os chineses, em geral, obtiveram sucesso nos seus cálculos e muitos se mostravam entusiasmados a resolver o problema. Para eles, calcular e obter a resposta não eram suficientes, quiseram apresentar vários modelos para fazê-lo e o fizeram com extrema confiança e com uma capacidade surpreendentemente flexível. Eles se mostraram conscientes para além de “fazer matemática”, expressando e confirmando entendimento lógico e conectivo das frações com outros tópicos matemáticos.

A autora tece comentários acerca do pouco desempenho em relação ao conhecimento de frações, apresentado pelos professores americanos, dizendo que uma das razões pode ser pelo fato destes professores apoiarem-se em apenas uma ideia “o modelo de partição da divisão com números inteiros” e descreve que criar representações para um conceito matemático deve ser uma tarefa pedagógica comum. Contudo, também aponta que os cenários utilizados pelos professores chineses foram de âmbito mais alargado e menos relacionados com as vidas dos alunos, embora concorde que o contexto de vida prática dos alunos, associados aos conteúdos propostos, tendem a ser benéficos no auxílio à compreensão e significado do ensino e da aprendizagem. Essa autora faz uma ressalva de que “o mundo real não pode por si só” produzir conteúdo matemático, pois, sem um conhecimento sólido sobre o que representar, não se consegue produzir uma representação conceitualmente correta, não importando quão rico seja o conhecimento pessoal das vidas dos alunos sem motivação que se tenha para relacionar a matemática com suas vidas (LIPING, 2009).

Moutinho (2005), em sua dissertação **“Fração e seus significados: um estudo com alunos das 4ª e 8ª series do Ensino Fundamental”.**

Visando encontrar resposta para sua indagação: “Quais concepções que são possíveis de se identificar com relação aos cinco diferentes significados da fração (número, parte-todo, quociente, medida e operador multiplicativo), a partir da aplicação diagnóstica, com alunos (4ª e 8ª séries)[12] do ensino fundamental?” Pautando-se nos estudos de Nunes e Bryant (1997), Moutinho (2005) comenta que as aparências podem enganar, quando se trata da aprendizagem de frações, pois, embora as crianças possam realizar satisfatoriamente algumas atividades envolvendo fração, utilizando linguagem e termos fracionais, resolvendo alguns problemas de ordem fracionaria, ainda assim pode ocorrer sem nenhuma compreensão efetiva do que seja a natureza da fração, haja vista complexidade e diversidade dos múltiplos conceitos envolvidos. Considerando o baixo percentual de acertos nas duas séries, este autor conclui ser clara a necessidade de se trabalhar com várias situações, abordando os diferentes significados, ou seja, parte-todo, quociente e medida no 4ª ano e que, a partir do 5º ano, sejam acrescidos os demais significados (MOUTINHO, 2005).

Bertoni (2008, 2009), no artigo intitulado: **A construção do Conhecimento sobre o número Fracionário** e em estudo intitulado **Educação e linguagem matemática IV frações e números fracionários**.

Tendo como fio condutor estudos voltados para a formação dos conceitos de fração, de número fracionário e da representação fracionária desse número, Bertoni (2008, 2009), discorre que as dificuldades com números fracionários são apontadas na literatura e nas avaliações, a exemplo do SAEB – Sistema de Avaliação da Educação Básica, desenvolvido pelo INEP/MEC (2001; 2003). Argumenta que vários autores atribuem tais dificuldades à complexidade, ou às múltiplas facetas do número racional. Essa autora destaca:

> Vamos pensar cuidadosamente sobre o que pode estar envolvido para que uma criança compreenda que 3/5 representa uma só entidade, compreender o que é essa entidade, que ela tem um tamanho e que tamanho é esse. (BERTONI, 2008, p. 212-213).

[12]Na Legislação vigente, corresponde ao 5º e 9º ano (**Lei** nº 11.274, de 6 de fevereiro de 2006 -amplia o **Ensino Fundamental** para nove **anos** de duração). Disponível em: <http//:www.portal.mec.gov.br>. Acesso em: 27 nov. 2019.

Ao visar à compreensão da entidade numérica fracionária anterior à representação escrita, a proposta de Bertoni (2009, p.20-21), centra-se na construção de um número, explicitando “o que vem a ser esse número e o que ele quantifica, assim como também a relação dos mesmos com os números naturais”. O conceito claramente formado do que esses números quantificam conduz a várias percepções, como a de que há uma ampliação do que era suscetível de ser quantificado, isto é, sem os fracionários, só se podia quantificar coleções constituídas apenas de objetos inteiros. Com os fracionários, é possível quantificar coleções formadas por unidades e partes delas, oriundas de divisões em partes iguais; de que é possível comparar em termos das quantidades que representam esses números entre si e com os números naturais; do reconhecimento de que os novos números entremeiam-se entre os números naturais; do posicionamento dos mesmos na reta numérica; do significado das operações entre eles (BERTONI, 2008, 2009).
Magina, Bezerra e Spinillo (2009), no artigo intitulado **Como desenvolver a compreensão da criança sobre fração? Uma experiência de ensino.**
Esses autores fazem uma observação do ensino de frações e, entre outros aspectos, enfatizam o fato de que há maior uso de representações em relação a quantidades contínuas em detrimento das quantidades discretas. Estas (discretas) quase sempre iniciadas a partir da relação parte-todo, ignorando-se quase sempre a variedade de significados e interconexões que se tem em relação aos conceitos (divisão, porcentagem, proporção...) que envolvem a ideia de fração e noções relevantes, como a equivalência. Também, muitas vezes, ignorando o conhecimento informal que a criança já possui, oriundo de sua vivência fora da escola, assim como também a não associação destes conhecimentos que os alunos possuem com o ensino a ser proposto na sala de aula. Comparando intervenção realizada com crianças de 3º ano em relação a outras crianças também do 3º ano, em que não foi aplicada a intervenção, esses autores concluíram que o desempenho apresentado foi melhor nas crianças que foram instruídas diretamente com a proposta. Buscando compreender o porquê de tal resultado, perceberam a predominância de três aspectos: 1º natureza específica, voltada para as facetas que caracterizam o conceito de fração com relação ao todo.

2º natureza representacional, voltada para o fato de que os suportes de representação não são excludentes, entendidas como diferentes possibilidades, sendo articuladas e combinadas entre si de forma flexível.

3º refere-se à instância de natureza psicológica, a metacognição. Ao propor discussões a respeito das formas de resolver as situações-problema, ao encorajar a explicitação do conhecimento intuitivo do aluno e dos procedimentos de resolução adotados, o professor colocava as formas de pensar dos alunos em evidência, passando o pensamento a ser, ele próprio, um objeto de reflexão e de análise.

Os autores concluem ainda que algumas causas que interferem e dificultam a compreensão das crianças em relação à fração, residem na complexidade inerente a esse conceito e na abordagem aplicada, havendo, portanto, a necessidade de explorar formas alternativas de ensino que considerem uma maneira mais ampla da fração, em todos os sentidos, de modo a encorajar o aluno a adotar seu conhecimento informal sobre frações que auxiliem na superação das dificuldades encontradas em relação a esse conceito (MAGINA; BEZERRA; SPINOLLA, 2009).

Botta (1997), em sua pesquisa de mestrado “**Número racionais e raciocínio proporcional: considerações sobre o ensino-aprendizagem**” destaca recomendações para o ensino das operações com frações.

De acordo com a referida autora, quando não se compreende o significado dos símbolos, ainda que se compreendam os procedimentos necessários para operar, isso se tornará sem efeito. É preciso descobrir e conectar saberes e estes só promoverá novos saberes se, de fato, forem apreendidos e não meramente memorizados. Portanto, entende-se que a noção quantitativa, tanto gráfica quanto numérica, deve ser desenvolvida e relacionada como prioridade no ensino de frações. Compreendendo as representações gráficas e suas relações proporcionais numéricas, as operações aritméticas se tornarão muito mais compreensivas, assim, como também, fluirá a inferência das mesmas na vida prática e vice-versa.

Botta (1997) argumenta que:

> O ensino deveria promover a compreensão e isto supõe ajudar os alunos a fazerem conexões. Eles precisam ver como novas informações se conectam aos seus conhecimentos já existentes, como as várias representações – concreta, via desenho (pictórico) e simbólicas – podem

ilustrar o mesmo conceito ou o mesmo procedimento e como conceitos diferentes (por exemplo, fração, decimal, porcentagem...) estão relacionados uns com os outros. Assim, os estudantes precisam "ver" como os procedimentos se relacionam aos conceitos, o porquê desses procedimentos, como e onde eles são aplicados (BOTTA, 1997, p. 29). Botta (1997) argumenta que Kieren (1991) descreve em *Personal Knowledge of Rational Numbers: Its Intuitive and Formal Development* sobre evitar trabalhar racionais (frações) de maneira prematura, enfocando manipulações de símbolos numéricos, enfatizando que as frações devam ser construídas e operacionalizadas a partir da compreensão intuitiva de frações que as crianças têm e baseadas em ações sobre objetos ou desenhos (BOTTA, 1997). Em sua pesquisa, Botta (1997) destaca, também, a necessidade de se trabalhar na transposição da pesquisa para a sala de aula.
Lopes (2008), em artigo intitulado **O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre Frações, quando tentamos lhes ensinar Frações**?
Para este autor, a aprendizagem de frações não se dá com definições prontas, nomenclatura obsoleta e pseudoproblemas sobre pizzas e barras de chocolates. Os professores deveriam ter atenção para a complexidade que envolve um conceito tão delicado. Os obstáculos para a aprendizagem são muitos e de várias naturezas, a começar pelo fato de que a palavra fração está relacionada com muitas ideias e constructos, não sendo o estatuto epistemológico das frações o único obstáculo à sua aprendizagem. A notação das frações, constitui um obstáculo, uma vez que não é tão trivial a associação de uma parte através de dois números inteiros separados por um tracinho (LOPES, 2008). Em seus estudos, detecta que o ensino de frações tem estado restrito até o final da 6ª série, posteriormente, nas séries que se segue é dada ênfase a outros conteúdos que, de algum modo, estão relacionados a frações. No entanto, a aquisição dos mesmos pode ser superficial, caso os alunos não tenham clareza e objetividade acerca da compreensão conceitual dos significados das frações. O autor ainda considera que confinar o tema frações a algumas séries do currículo é um erro grave, pois desconsidera o fato de que o desenvolvimento do pensamento proporcional se estende por um longo período que vai dos 7/8 anos aos 14/15 anos em níveis distintos de complexidade (LOPES, 2008, p.10-11). As experiências em torno do tema fração, segundo este autor, deveriam ocorrer e contemplar experiências diversas com todas as séries do Ensino

Fundamental e Médio, referindo-se ao tratamento do ensino de fração em espiral e que implique na aquisição e mudança conceitual da compreensão, explorando distintas ideias a fim de consolidar a aprendizagem em relação à fração (LOPES, 2008).

Smith III (2002), no artigo ***The Development of Students' Knowledge of Fractions and Ratios*** (O desenvolvimento do conhecimento dos alunos sobre frações e proporções).

Referente ao desenvolvimento do raciocínio dos estudantes sobre frações, este autor nos diz que os alunos precisam apreender a ideia chave, isto é, a nomeação e relação entre uma coleção, como o entendimento da partição de diferentes tamanhos e objetos que podem manter sua representação por mesmo número fracionário (quantidades contínuas). Esse raciocínio tem que ser claro, inclusive, no que se refere a quantidades discretas, isto é, coleções de objetos, que, inicialmente, poderá ser com possibilidades possíveis e exatas de partição e, posteriormente, em níveis mais complexos, com representações e relações em decimais arredondados ou não. Para este autor, construir tarefas com quantidades contínuas ou discretas reforça a identificação da unidade, que é fundamental no entendimento da fração, como também é referencial para realizar operações aritméticas com frações. Outro aspecto importante é a linguagem usada. Deste modo, os alunos aprendem a usar a fração tanto em sua representação gráfica e por extenso, quanto numérica, para falar de quantidades divididas (SMITH III, 2002):

> Uma vez que os estudantes podem gerar quantidades diferentes (contínuo e discreto) para determinadas frações e frações para diferentes exibições de quantidade, eles estão prontos para explorar frações como um sistema de números. (SMITH III, 2002, p. 9).

O autor conclui que os alunos trazem para a sala de aula uma variedade de experiências devido à natureza de nosso mundo físico e social e que grande parte dessa experiência e conhecimento se concentra na divisão. É preciso descobrir como os alunos pensam e o que sabem sobre frações e proporções e então iniciar o processo de modelagem, reformulação e construção desse conhecimento (SMITH III, 2002).

VASCONCELOS (2015), a partir da dissertação **A compreensão das relações numéricas: um estudo com crianças brasileiras e portuguesas do 4º ano da Educação Básica.**

Visando averiguar a partir dos aspectos dos estudos transversais referentes à compreensão da relação inversa entre quantidades em situações de divisão e comparar se existe diferenças e semelhanças entre o desempenho de estudantes brasileiros em relação aos estudantes portugueses, o autor constata que a situação com fração quociente promove mais facilmente a compreensão da relação inversa entre quantidades e situações de divisão com fração e que os estudantes portugueses obtiveram desempenho melhor que os brasileiros. Conclui, ainda, que o referente estudo evidencia que os alunos nesta faixa etária podem compreender a relação inversa entre quantidades e que momentos de exploração em torno do assunto poderiam ser interessantes nas aulas das séries iniciais.

Considera a introdução prematura dos símbolos como impedimento do desenvolvimento de sentido das operações dos mesmos, pelo fato de não conseguirem conectar os símbolos ao mundo real.

Lima (2014), em sua tese intitulada **O ensino e a aprendizagem significativas das operações com frações: Sequência didática e o uso de tecnologias digitais para alunos do Ensino Fundamental II.**

Entre outros aspectos, destaca que, nas pesquisas analisadas, de modo geral, atribuem as dificuldades no ensino e na aprendizagem de fração às estratégias de ensino dos professores e aos livros didáticos que fazem uso de situações-problemas, algoritmos e materiais sem a devida contextualização e preparação adequada destes instrumentos em sala de aula, tornando-se um vilão para a construção do conhecimento matemática sobre frações.

Resumidamente, Lima (2014) descreve que os trabalhos analisados sobre, o processo de ensino e aprendizagem de operações com frações e a formação de professores, apontam questões comuns como a importância a ser dada à formação continuada, visando aprimorar a prática docente em sala de aula e quanto ao aprofundamento sobre o conteúdo matemático ensinado. Os trabalhos preconizam também sobre o uso dos livros didáticos como instrumento de ensino mais utilizado pelos professores, entretanto, em muitos casos, priorizam conceitos, principalmente, em relação ao assunto frações, que limitam os professores a seguir as orientações apresentadas nos livros, deixando de abordar aspectos importantes em relação à fração, por apresentarem insegurança em não seguir o livro ou por não dominar o assunto, assim a opção por escolher o significado que será ensinado, além de estar impregnada nos livros didáticos, passa pela dificuldade e pouco domínio dos professores com o assunto frações, o que acarreta em um ensino com lacunas para os alunos. Muitos estudos relacionam ainda que a prática docente dos professores de Matemática está diretamente relacionada à forma com que aprenderam na Educação Básica (LIMA, 2014).

Embora tenha destacado algumas pesquisas em relação ao processo de ensino e aprendizagem de fração, Lima (2014) esteve empenhado em analisar a aprendizagem no Ensino Fundamental sobre as operações, por meio de uma sequência de atividades mediadas pelo professor com o uso de software educacional (Fracton). Concluiu confirmando que a mediação do professor em atividades sequenciadas de situações-problema com fração e com o uso do software proposto possibilita aprendizagem significativa e potencializa os conhecimentos prévios dos alunos.

Sant'Anna, Bittencourt e Olsson (2007), no artigo **Transposição e Mediação Didática no Ensino de Frações.**

Entre outros aspectos, esses autores identificam objetivos didáticos e abordagens indicadas nos textos curriculares, em relação ao ensino das frações que continua antecedendo o estudo dos decimais, sendo desvinculado do estudo dos números racionais. Esses autores destacam a desconsideração do aspecto de medida associada às frações e, consequentemente, as frações ainda são estudadas sem nenhum sentido numérico.

Concluem que as principais modificações entre os Livros Didáticos de 90 e os atuais referem-se muito mais às mudanças gerais, de ordem educacional e pedagógica, sugeridas pelas prescrições curriculares nacionais, que oriundas na reorganização do saber sábio. Argumentam, ainda, que o ensino é recontextualizado de acordo com as circunstâncias e os interesses que configuram as políticas curriculares. Salientam, também, a necessidade de análise mais profunda quanto à mediação da escola e dos professores em relação às tendências postas a partir da análise feita nos livros (SANT'ANNA, BITTENCOURT; OLSSON, 2007).

SILVA (2017), na dissertação intitulada **Ensino-aprendizagem de frações: um olhar para as pesquisas e para sala de aula.**

Objetivando identificar o ensino-aprendizagem de frações na sala de aula e nas pesquisas, bem como averiguar as aproximações das pesquisas e da sala de aula, o autor analisou aleatoriamente algumas pesquisas sobre frações, constatando, de modo geral, de maneira direta ou indireta, que a abordagem do tema fração é proposta para ser feita como representações variadas, com uso de material manipulável, além da notação barra fracionária, verificando, ainda, que os autores mostram algumas alternativas para amenizar problemas citados pela literatura, como falta de atenção e dificuldade para compreender as ideias de equivalência, comparação e operações com frações. Também que os autores afirmam haver, na sala de aula, uma preocupação demasiada em memorizar fórmulas e realizar procedimentos prontos e acabados na busca de respostas corretas, argumentando que nem sempre tais respostas implicam em saber o conteúdo. Assim, chega-se a conclusão acerca do distanciamento que há entre a sala de aula e as pesquisas (SILVA, 2017, p.15-45).

Fonte: Livros, teses, dissertações e artigos descritos no quadro.

Diante apontamentos das pesquisas citadas, percebe-se que o ensino e a aprendizagem de fração precisam superar vários obstáculos, entre estes está o fato das pesquisas realizadas não chegarem ao âmbito escolar (sala de aula). As dificuldades em relação ao ensino e aprendizagem sobre frações ocorrem, muitas vezes, pela mesmice tradicional, em que não se considera e nem se exploram o que o aluno já sabe sobre este tema. Os trabalhos também sinalizam que as dificuldades conceituais e operatórias podem surgir, justamente, através do ensino inadequado, em que regras e procedimentos são postos sem que os alunos detenham ou sejam levados a compreenderem o significado dos símbolos usualmente utilizados em frações, e que estes, quando abordados de maneira prematura, podem ser limitadores ou inibidores da aquisição adequada da compreensão de fração e aspectos inerentes.

Apontam, ainda, que há a necessidade de desenvolver um ensino contextualizado, no qual o tema fração seja explorado em vários contextos e representações variadas, tornando o ensino e aprendizagem de fração mais consistente, e que isso ocorra continuamente em todos os níveis de ensino.

4.2 Fração: da origem à escola

Os métodos de registro para contar surgiram em várias culturas, cada um ao seu modo, a partir das vivências de domínios representacionais que tinham de contagem.

Eves (2011, p.29) descreve que:

> Numa certa época usaram-se largamente os números digitais (representados por dedos). Com efeito a expressão de número por meio de várias posições dos dedos e das mãos talvez preceda os símbolos numéricos ou os nomes dos números. Assim, os símbolos escritos primitivos para 1,2,3 e 4 eram invariavelmente o número conveniente de riscos verticais ou horizontais, representando o número correspondente de dedos levantados ou estendidos, remontando a palavra dígito (isto é 'dedo'), para indicar os algarismos de 1 a 9, à mesma origem.

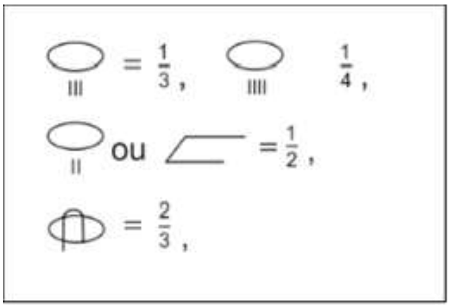
A história conta que algumas civilizações, como babilônios, egípcios e hindus, contribuíram sobremaneira para a evolução, ideia e uso de números. O princípio de contagem e representação facilitou bastante a vida prática dessas civilizações, no entanto, outros problemas foram surgindo, como a questão de medição de terras, partes menores que um todo(inteiro).

Segundo Boyer (1996), não há uma precisão histórica do surgimento das frações e seu uso. No entanto, a maioria dos historiadores e matemáticos convergem para o entendimento de que as frações tenham surgido, inicialmente, no antigo Egito, por volta de 3000 a.C, sob o reinado do faraó Sesóstris, onde a economia girava, principalmente, em torno do cultivo de terras que eram demarcadas e entregues para os agricultores que haveriam de pagar impostos sobre seus lotes. Essas terras ficavam, em sua maioria, às margens do rio Nilo, e, entre os meses de junho e setembro, ocorriam cheias, subindo muitos metros além do seu leito normal; quando baixava, as terras estavam prontas para o cultivo, porém, a demarcação feita anteriormente era desfeita por essa enchente, sendo necessário realizar novas demarcações pelos "estiradores de cordas" ou "agrimensores", como eram chamadas as pessoas para esse fim. Dependendo dos lados do terreno, nem sempre a medição correspondia ao todo (medida da corda) utilizado, quase sempre sobrava ou faltava uma parte. Surgindo a necessidade de criar uma nova unidade de medida, os chamados "quebrados", emergindo-se, portanto, as primeiras noções de frações e, consequentemente, do número fracionário.

Eves (2011) menciona que os egípcios conceberam as frações como parte da unidade, tomando o numerador sempre igual a 1, designando o termo fração unitária partindo da representação por símbolos hieroglíficos[13]. Eles utilizaram um símbolo na forma oval para representar o numerador. Para representar outras Frações, como $\frac{3}{7}$, eram feitas adições de Frações com numerador 1 (Frações unitárias), embora não utilizassem o sinal (+), pois, na época, este sinal para representar adições ainda não havia sido criado. A Fração $\frac{3}{7}$(fração irredutível) era pensada pelos escribas egípcios como soma de três frações unitárias $\frac{1}{7}$ e $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{28}$. Sobre as frações unitárias, Eves (2011) destaca que:

> As frações unitárias eram indicadas, na notação hieroglífica egípcia, pondo-se um símbolo elíptico sobre o número do denominador. Um símbolo especial era usado também para a fração excepcional 2/3 e um outro símbolo às vezes aparecia para 1/2. (EVES, 2011, p. 73).

Figura 1 - Fração egípcia com numerais modernos correspondentes



Fonte: Eves (2011, p.73)

Durante muito tempo, as Frações não foram consideradas como números, assim como não se concebia a noção de Fração geral m/n, como m vezes o inverso de n (IFRAN, 1996 *apud* BEZERRA, 2001, p. 45).

Embora indicadores históricos apontem os egípcios como sendo os primeiros a inserirem a ideia de fração em seu sistema de númeração, há também indícios de que outros povos conheciam e utilizavam a ideia de fração, apesar de não apresentarem regras estabelecidas para trabalhar com elas, apresentavam simbologias para representá-las, como os babilônios.

O segredo de clara superioridade da matemática babilônia sobre a dos egípcios, indubitavelmente, está em que os que viviam “entre os dois rios (Tigre e

[13] Tipo de escrita na qual as palavras/números não se representam com sinais alfabéticos ou fonéticos, mas em que o significado das palavras se expõe com símbolos ou figuras.
Disponível em: <https://conceito.de/hieroglifo > Acesso em 21 jun. 2019.

Eufrates)" deram o passo muito feliz de estender o princípio da posição às frações. Eles dominavam o poder de computação que a moderna notação decimal para as frações nos confere (BOYER ,1996, p.19).

Segundo Celestino (2017), no artigo "As *frações em algumas civilizações antigas"*, as frações decimais parecem ter surgido inicialmente na China, no entanto, seu primeiro uso ocorreu na Europa por volta do século XVI. Em seu estudo, há mensões de que as frações decimais se popularizaram com o livro do matemático Belga Simon Stevin (1548-1620), *The Theth*, de 1585.

Boyer (1996, p.4) comenta que o conceito de número inteiro é o mais antigo na Matemática e sua origem se perde nas névoas da antiguidade pré-histórica, e que a noção de número racional surgiu relativamente tarde, em geral, não estava relacionada de perto com os sistemas para os inteiros. Entre as tribos primitivas, parece não ter havido praticamente nenhuma necessidade de usar frações, sendo as frações decimais um produto essencialmente da idade moderna da matemática.

4.2.1 Fração: significados essenciais

Afinal, o que é uma fração?

A palavra fração[14] vem do latim *frangere*, que significa quebrar, e *fractio, fractionis*, que significa quebrado, pedaço, segmento.

A fração representada na barra fracionária constitui-se de dois termos: o denominador, que indica em quantas partes o inteiro foi dividido, e o numerador, que indica a quantidade de partes que foram "tomadas":

$$\frac{a\ \text{numerador}}{b\ \text{denominador}}$$

Botta (1997) argumenta que a palavra fração é usada para se referir a uma parte, a um fragmento de uma certa quantidade, e que esta é a fração vista como uma relação parte-todo. Para a autora, o termo fração é ambíguo, pois utilizamos a palavra também para nos referir a quantidades inteiras ou até maiores que a unidade, mostrando o exemplo na fração aparente seis terços ($\frac{3}{3}+\frac{3}{3}=\frac{6}{3}$), que não representa uma parte fracionária de um todo, mas sim duas unidades inteiras ($\frac{6}{3}$ = 2),

[14]Disponível em: <https://fundamentosmatematica.wordpress.com/2012/06/13/fracões> Acesso em: 23 jul. 2019.

isto é, $\frac{6}{3}$ é igual a dois inteiros; e na fração imprópria, quando nos referimos às frações maiores do que o todo ($\frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$), ou seja, dois inteiros e meio (BOTTA, 1997,p.81).

A partir da exposição feita, entende-se que, em se tratando do termo fração imprópria e na pretensão de não gerar entendimento ambíguo, o mais adequado seria utilizar a terminologia número misto. Quanto ao termo fração aparente, entende-se que, de fato, não é fração e que tal termo deve ser evitado, pois se um todo é particionado e dele nada é retido/admitido, logo, as partes que o compõem se mantêm, havendo portanto, um inteiro.

Concordamos com Botta (1997), quando a autora menciona que fração é uma palavra utilizada para indicar uma parte, um fragmento de um todo ou certa quantidade em relação a um todo. Esse todo, no entanto, deve ser de mesma natureza. Então, questiona-se: para ser fração, o todo, necessariamente, precisa ser particionado em partes iguais? Entende-se que não, uma vez quea palavra fração remete à parte, fragmento,e esta parte poderá ter tamanhos variados.Todavia, para indentificar com mais exatidão a fração de um todo, é necessário que as partes estejam igualmente particionadas. Assim, ainda que seja tomado/admitido uma parte ou algumas partes de um todo em tamanhos diferentes, isto é, que não sejam iguais, estes devem ser convertidos/subdivididos em partes iguais, para que se possa compreender e quantificar a que parte do todo a parte admitida/tomada corresponde.

Isso posto, vejamos o que nos dizem SILVA e AMOULOUD (2008):

> A concepção parte-todo se caracteriza por um inteiro (grandeza discreta ou continua), do qual uma parte pode ser associada a um número fracionário e, com este intuito, as figuras se prestam como representação desse inteiro.Convenciona-se então que deva estar dividido em partes 'iguais' (mesma área) para que a parte em questão possa ser quantificada (SILVA; AMOULOUD, 2008, p. 58).

Alguns pesquisadores, como Magina, Bezerra e Spinolla (2009) caracterizam a fração num patamar de natureza complexa e multifacetada.

Lopes (2008, p.8) diz que frações são “consideradas, um megaconceito, constituído por diferentes subconceitos, aquilo que chamamos de interpretações do conceito”.

Moutinho (2005), por sua vez, ao situar sua pesquisa na teoria dos campos conceituais de Vergnaud, afirma que, para dar conta dos desafios do cotidiano, o sujeito precisa mobilizar conceitos constituídos em situações diárias, cujo domínio progressivo exige uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas que possuem estreita relação uns com os outros. Assim, a apropriação de um conceito não se reduz à sua definição, ainda mais ao considerarmos seu ensino e aprendizagem, uma vez que é se fundamentando nas situações e problemas a resolver que um conceito adquire sentido para o sujeito (MOUTINHO, 2005).

Para melhor compreender o sentido que as frações podem ter tanto na vida prática quanto escolar, é necessário identificar e considerar alguns aspectos:

- **Grandeza** é tudo que pode ser associado a um valor numérico.

Grandeza [15]é tudo aquilo que pode ser contado, mensurado. Existem dois tipos de grandezas: as discretas e as contínuas. Essas grandezas envolvem duas noções elementares da matemática, ou seja, contar e medir. As grandezas discretas são consideradas contáveis, pois podem ser facilmente quantificadas. Já as grandezas contínuas são passíveis de medida, pois não permitem a contagem direta/imediata.

- **Fração contínua** refere-se à partição de um ou mais inteiro(s), em partes continuas, de modo que cada pedaço, mantém as características do todo, ou seja, pode-se partir uma pizza em vários pedaços e ainda assim será pizza.
- **Fração discreta** refere-se a uma ou mais partes (subquantidade-grupos) de uma quantidade de elementos de mesma natureza, nos quais cada elemento se mantém inteiro.

Moutinho (2005, p.32) descreve:

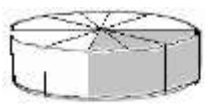
> Entendemos por quantidades contínuas aquelas que são passiveis de serem divididas de modo exaustivo, sem que, necessariamente percam as características [...] quantidades discretas dizem respeito a um conjunto de objetos idênticos, que representa um único todo, cujo resultado da divisão deverá produzir subconjuntos com o mesmo número de unidades.

- **Significados essenciais** da fração são caracterizados na literatura acadêmica em cinco: Parte-Todo, Número, Medida, Quociente e Operador.

No quadro 2, vamos compreender como se dá a fração com significado Parte-todo:

[15] São Paulo(SP)Secretaria Municipal de Educação. Coordenação Pedagógica. Contribuições teóricas sobre o ensino das grandezas e medidas. Orientações didáticas do currículo da cidade: Matemática – Volume 2 – 2 ed. São Paulo: SME/COPED, 2019, p. 13. Disponível em: < http://portal.sme.prefeitura.sp.gov.br/ > Acesso em 11 de dezembro de 2020.

Quadro 2 - Fração com significado Parte-todo

Fração como Parte-todo	As partes fracionárias recebem nomes especiais, que indicam quantas partes daquele tamanho ou quantidade são necessárias para compor o todo (VASCONCELOS, 2015). Moutinho (2005) argumenta que, em situações-problema que envolvam a ideia de parte - todo, o aluno precisa desenvolver previamente algumas competências, como: a identificação de unidade (que o todo é tudo aquilo que se considera como unidade em cada caso concreto), de realizar divisões e saber que o todo se conserva, mesmo quando dividido em partes (MOUTINHO,2005.
Exemplificando este significado	
- Foram comidas 3 partes de um bolo fracionado em 10 partes iguais. Que fração representa a parte que sobrou desse bolo? (Quantidade **contínua**). $\frac{10}{10} - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$ 	
Exemplificando este significado	
- Foram feitos 6 bolos de mesmo formato e tamanho. Sendo 2 desses bolos de morango e os outros de chocolate. Em relação ao todo, que fração representa a quantidade de bolos de chocolate? (Quantidade **discreta**).  Os bolos de chocolate representam$\frac{2}{6}$	

Fonte: Produção própria

Na partição de um todo (representação concreta/gráfica), é possível compreender a ordenação que envolve a relação inversa entre o tamanho do denominador e a quantidade tomada (representada).

Simoni e Scheffer (2019), em referência a Nunes *et al.* (2009), descrevem que a percepção do conhecimento quanto a medir grandezas contínuas pode ser assimilada com maior dificuldade pelos alunos, uma vez que precisam ter, antes de tudo, a noção de que o todo pode ser contado por partes divididas igualmente e que essas dificuldades podem estar relacionadas às condições cognitivas dos estudantes. Nesse caso, o autor sugere que se inicie a exploração de frações a partir de quantidades discretas, já que os estudantes estão mais habituados a trabalhar com números inteiros e contagem (SIMONI; SCHEFFER, 2019).

Partindo de outro ponto de vista, suponhamos ser mais compreensível para as crianças dos anos iniciais (Fundamental I) iniciarem com o particionamento de um todo contínuo, uma vez que, ao particionar "um inteiro", é dada a criança a oportunidade de entender o conceito básico da fração que é o de "quebrar", "fraturar". A nosso ver, a criança entende que quebrar é partir algo inteiro e, assim, a compreensão do conceito base da fração a partir de um inteiro contínuo seria mais viável.

A ideia de fração parte-todo tem sido um dos aspectos mais enfatizados no processo de ensino com frações, todavia, há que se observarem outros significados e como estes se relacionam, embora seja o significado parte-todo um ponto de partida para os demais significados, assim como também, um modelo propício na produção inicial da linguagem fracionária.

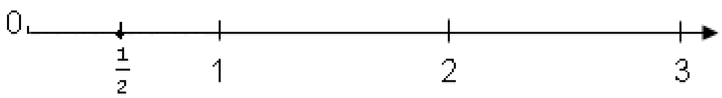
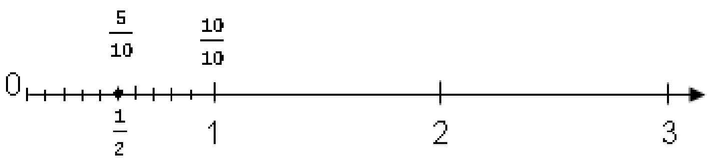
Há o significado de fração como número, que trata da percepção indicativa de parte ou partes iguais de um número, geralmente, localizado e destacado na representação de uma reta numérica.

Embora alguns autores, como Belfort e Vasconcelos(2006), argumentem que:

> A visualização dos números fracionários na reta numérica não deveria, a rigor, ser considerada como uma nova ideia, pois também se trata da divisão de uma unidade em partes iguais. Só que, ao invés de destacarmos a parte, passamos a destacar pontos da reta. Como em uma régua, marcamos os valores inteiros em intervalos iguais, como ilustrado abaixo. O número 1 passa, então, a ser representado por um ponto na reta, que dista uma unidade do zero para a direita, o número 2 pelo ponto que dista uma unidade para a direita do número 1, e assim sucessivamente. (BELFORT; VASCONCELOS, 2006, p.2).

No quadro 3, vamos observar o funcionamento da fração com significado de número:

Quadro 3 - Fração com significado de Número

<table>
<tr><td>Fração com significado de Número</td><td>Drechmer, Andrade, Susimeire (2011) dizem que uma fração $\frac{a}{b}$ com b ≠ 0 pode assumir o significado de número e ser posicionada na reta numérica. Esta abordagem quase não é utilizada pelos livros didáticos, o que prejudica a organização do conceito, pois o aluno tende a não identificar a fração como um número. É importante que ele reconheça este significado, visualize seu posicionamento na reta numérica, e compreenda que este número também pode ser representado como um número decimal (a, b).
Moutinho (2005, p.36) afirma que as frações, como os inteiros, são números que não precisam necessariamente referir-se a quantidades específicas.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Exemplificando este significado:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Represente $\frac{1}{2}$na reta numérica.

Converta $\frac{1}{2}$ em fração decimal.

$\frac{1}{2} = 1 \div 2 = 0{,}5$
Assim, $\frac{1}{2}$ na reta representada, equivale a $\frac{5}{10}$que corresponde a 0,5 em decimal.</td></tr>
</table>

Fonte: Produção própria

A identificação das frações com pontos na reta númerica não apenas ajuda o aluno a perceber a fração como um novo tipo de número, como também poder ser fator auxiliar no conhecimento e identificação de fração equivalente.

No quadro 4, vamos observar a fração com significado de medida:

Quadro 4 - Fração com significado de Medida

<table>
<tr><td>Fração como Medida</td><td>Pode ser entendida como sendo a fração que representa subunidades de uma unidade, ou seja, toma-se uma parte do todo como referência, para medir as demais, assim, tem-se o referencial $\frac{1}{b}$ usado repetidamente para determinar uma medida, cujo resultado será $\frac{a}{b}$.
O resultado obtido na representação fracionária $\frac{a}{b}$ permitirá a compreensão de que a subunidade $\frac{1}{b}$ foi utilizada a vezes na medição efetuada (SILVA, 2005).</td></tr>
<tr><td colspan="2">Para ilustrar este significado:</td></tr>
<tr><td colspan="2">No traçado do Tangram, qual é a medida da fração B, tendo como referencial a medida da parte C? $\frac{1}{16}$x 4= $\frac{1}{16}$x$\frac{4}{1}$ = $\frac{4}{16}$

</td></tr>
</table>

Fonte: Produção própria

Silva (1997) comenta que não dá para falar de fração sem falar em medidas, tendo em vista que, historicamente, a fração tenha surgindo em virtude da necessidade de medir. Para este autor, a representação de medidas na forma de fração, nos dias atuais, passa despercebida, pelo fato de usarmos um sistema métrico decimal que são subunidades criadas no nosso sistema decimal consideradas como novas unidades. Destaca ainda que, apesar da medida envolver a concepção de parte-todo, ela remete a outras possibilidades, como as frações maiores que um e da percepção efetivamente como número (SILVA, 1997). Nesse sentido,

> As tarefas de medição naturalmente associam a concepção de medida, solicitando a manipulação de um padrão, chamado de unidade de medição que, por sua vez, dependerá diretamente da grandeza em jogo (SILVA, 2005, p.117).

No quadro 5, vamos compreender a fração com significado de Quociente:

Quadro 5 - Fração com significado de Quociente

<table>
<tr><td>Fração como Quociente</td><td>Nas situações em que a estratégia utilizada para resolver um problema com ideia de divisão ou partilha, ou seja, o quociente significa o tamanho de cada grupo, Extrapola-se as ideias de parte-todo, pois, nestas situações de quociente, temos duas variáveis, admitindo na representação de uma dada situação numerador maior, igual ou menor que o denominador e que representa diferentes objetos.
Botta(1997), descreve que dividir uma quantidade é separá-la em partes de mesmo tamanho. Essa função quociente é chamada divisão partitiva.
Extrair é tirar repetidamente uma quantidade (parte) de outra. Esta é a função quociente chamada de divisão quotitiva.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Exemplificando o que foi posto:</td></tr>
<tr><td colspan="2">- Há 3 chocolates a serem divididos para 4 crianças (duas invariantes).
Em quantas partes cada chocolate deverá ser dividido? 4 partes (partitiva).
Que fração de chocolate cada criança receberá?

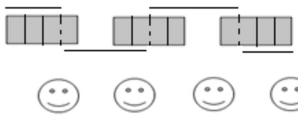
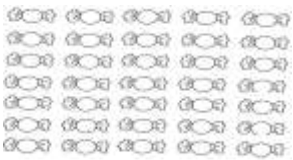



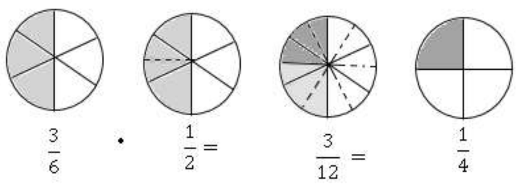
Imagem adaptada de Silva (1997).
Cada criança receberá $\frac{3}{4}$ de chocolate(quotitiva).</td></tr>
<tr><td colspan="2">- Há 35 bombons para dividir igualmente entre 5 crianças. Quantos bombons cada criança deverá receber? Que fração representa essa divisão? (Quantidade discreta). Essa divisão é representada por $\frac{35}{5} = 35 \div 5 = 7$

Cada criança receberá $\frac{7}{35}$ de bombons (quotitiva).</td></tr>
</table>

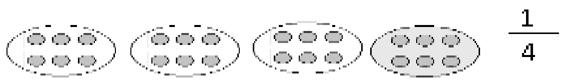
Fonte: Produção própria

Magina e Campos (2008) alegam que situações com o significado de quociente podem ser utilizadas na pretensão de levar as crianças a perceberem a invariante de ordenação das frações, uma vez que, ao perceberem a relação inversa entre divisor e quociente, possibilitaria a compreensão de que quanto maior é o denominador menor será a parte (MAGINA; CAMPOS, 2008).

No quadro 6, observa-se a fração com significado Operador:

Quadro 6 - Fração com significado de Operador

<table>
<tr><td>Fração como Operador</td><td>A fração, com b ≠ 0, observada pela ótica do operador multiplicativo, atua como fator transformador de um número ao ser multiplicando por ‘a’ e, logo em seguida, dividindo por ‘b’. O número resultante deste processo pode ser maior ou menor que o número em seu estado inicial, dependendo do quociente $\frac{a}{b}$ (DRECHMER; ANDRADE, SUSIMEIRE, 2011).Uma forma simples de se referir à noção de operador é associada a “encolher/esticar”, contrair/expandir”, “reduzir/ampliar” ou ‘dividir/multiplicar” (LEMOS, 2006 apud VASCONCELOS, 2015, p .42).</td></tr>
<tr><td colspan="2">Vejamos os exemplos:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ana comeu $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{6}$ de uma pizza. Que parte da pizza Ana comeu?


Ana comeu $\frac{1}{4}$ da pizza.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Que quantidade, corresponde à fração $\frac{1}{4}$ de 24 bolas de gude?
A fração representa $\frac{1}{4}$ de 24 bolas de gude, corresponde a 6 bolas de gude.


Fonte: Adaptado de Vasconcelos, 2015, p.42.
O significado de $\frac{1}{4}$ de 24 bolas de gude é feito considerando-se a fração $\frac{1}{4}$ operando sobre a quantidade de 24 bolas de gude, utilizando a multiplicação e divisão para gerar o resultado de seis bolas de gude (Nunes et al., 2004 apud VASCONCELOS, 2015).</td></tr>
</table>

Fonte: Produção própria

Segundo Moreira e Ferreira (2008, p.105), embora o significado operador seja, frequentemente, mencionado nos relatos de pesquisas, parece não ser trabalhado como tal nos livros didáticos ou nos currículos escolares brasileiros.

Entende-se que, para a criança, é difícil a compreensão que a configuração de dois números (notação barra fracionária), forma um número. Assim sendo, o ensino de fração, especialmente nos anos iniciais, deve ser cauteloso e prolongado, de modo a oportunizar várias vivências e explorações que melhor conduzam a aquisição deste conhecimento.

A fração é considerada por muitos pesquisadores como a origem fenomenológica do número racional, a exemplo de Freudenthal (1983, p.134), que descreve "frações são o fenômeno, fonte nomenológica do número racional - uma fonte que nunca seca".

4.2.2 Número racional: Fração, razão e número fracionário

Um número racional é todo número que pode ser representado por uma razão ou fração $\frac{a}{b}$ de dois números inteiros, um numerador ***a*** e um denominador não nulo ***b***. Consideram-se os números inteiros como parte do conjunto dos números racionais, bastando tomar b igual a 1.

Há grande concordância entre professores e pesquisadores de Educação Matemática de que a aprendizagem dos conceitos do número racional se constitui num obstáculo para o desenvolvimento matemático da criança, tendo em vista que:

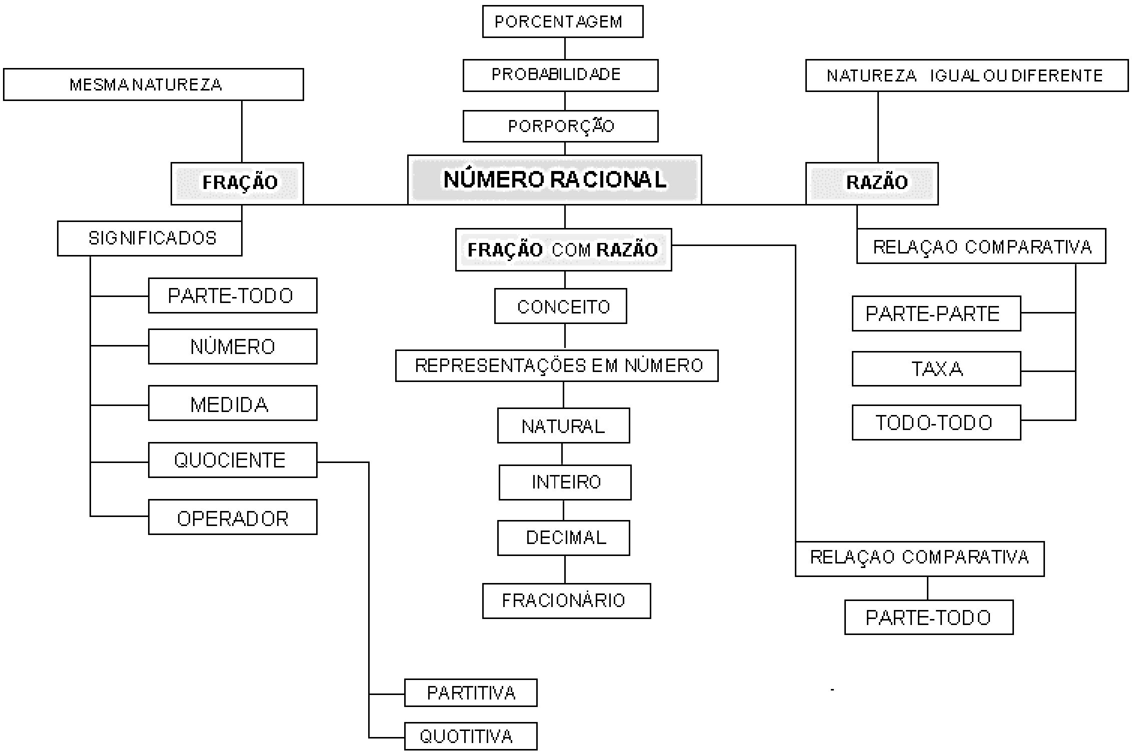
> Números racionais são elementos de um corpo quociente infinito que consiste de infinitas classes de equivalência e os elementos destas classes de equivalência são frações. Entretanto, quando frações e números racionais, aplicados a problemas do mundo real, são vistos do ponto de vista pedagógico, eles assumem numerosas 'personalidades'. Da perspectiva da pesquisa e do desenvolvimento curricular, o problema é descrever estas personalidades com profundidade e clareza suficientes, de modo que a organização das experiências de aprendizagem das crianças tenha uma firme fundamentação teórica (BEHR *et al*., 1992, p. 296 *apud* BOTTA, 1997, p. 50).

Segundo Botta (1997), Kieren foi o primeiro a dizer que números racionais admitem várias interpretações, isto é, vários construtos, e que é necessário a exposição dos numerosos construtos desse número para que se obtenha um completo entendimento do número racional. Essa autora destaca:

> O número natural é racional, que um número inteiro também é racional, que os números fracionários também são racionais. E ao chegarmos aos fracionários, encontramos vários tipos de números, todo podendo ser expressos pela notação barra fracionária. Os números fracionários podem ser frações ordinárias, frações decimais e números decimais [...] Além disso, encontramos na matemática escolar outros "seres" matemáticos como razões, proporções, taxas, porcentagens e probabilidade, que também podem ser representados pela notação barra-fracionária (BOTTA, 1997, p.67).

A exposição a seguir é uma síntese mental, que denominamos de "MAPA MENTAL", da diferença entre razão e fração, e suas conexões com outros "seres" matemáticos que, de algum modo, se articulam e caracterizam aspectos do número racional.

Figura 2 - Mapa mental (Número racional: fração/razão/fração com razão)



Fonte: Produção própria

Afinal, o que é razão?

De acordo com Onuchic e Allevato (2008), razão é uma comparação multiplicativa entre duas grandezas, denotadas por $\frac{a}{b}$ = a:b (*a está para b*).

Walle (2009, p. 383) diz que "razão é um número que relaciona duas quantidades ou medidas dentro de uma dada situação através de uma relação multiplicativa" e, a partir desta descrição, apresenta três aspectos:

- Razão parte-todo - Comparação de uma parte em relação ao todo, por exemplo, a relação entre o número de meninas em uma turma e o número de alunos. Neste caso, trata-se, na verdade, de fração com razão;
- Razão parte-parte - Expressa a relação de uma parte do todo em relação à outra parte deste mesmo todo. Por exemplo, comparando o número de meninas com o número de meninos numa mesma turma.
- Razão como taxa - Comparação das medidas de duas grandezas ou quantidades de natureza diferente. Por exemplo, se 4 barcos semelhantes transportam 36 passageiros, então a comparação de 4 barcos com 36 passageiros é uma razão. Barcos e passageiros são quantidades de natureza diferente.

Além do que já foi exposto, há, ainda, de acordo com Fernandes e Leite (2015), a razão para todo-todo, com a seguinte descrição:

- Razão todo-todo - Comparação da medida de um todo que dimensiona outro todo. Por exemplo, 1 cm no mapa corresponde a 1.000.000 cm no terreno (SUGGATE, DAVIS; GOULDING, 2006 *apud* FERNANDES; LEITE, 2015, p. 245).

Moreira e Ferreira (2008), apresentando breve síntese das ideias de Freudenthal (1983), descrevem que este autor vê dois elementos fundamentais nos fenômenos associados às noções de fração e de número racional, quais sejam: *fracionar* (sentido de fratura, daí o nome fração) e de *comparar* (sentido de relação ou razão, daí o nome número racional), estando essas duas ideias associadas aos fenômenos de duas formas: como “ações” ou como “estados”. Como ação, pode-se exemplificar a partição de duas pizzas entre três pessoas (ação de fracionamento), e, como estado, exemplificam que, neste caso, se constata que a altura de uma janela é a metade da altura da porta, havendo, assim, uma comparação de estado (MOREIRA; FERREIRA, 2008).

Percebe-se que as bases de estudo de alguns autores partem de objetos diferentes (fração ou racional). Embora estes tenham conexão, possuem características próprias, sendo preciso percebê-las de modo a saber diferenciá-las e assim compreender seus usos e contextos.

Ressaltamos que fração é diferente de razão e que poderá haver confusão no entendimento de razão como sendo fração, pelo não conhecimento que caracteriza cada um desses conteúdos, bem como pelo fato de ambos os conteúdos serem representados na forma fracionária (símbolo), isto é, por um número fracionário.

Como descreve Botta (1997, p. 67), “é comum estudantes e alguns professores confundirem razão com fração. A razão de um para dois, escrita na forma $\frac{1}{2}$, erradamente lida e entendida como um meio, confundindo-se com a fração”.

Quanto a isso, o professor deve estar consciente dessa diferença, para que, desde o início da exploração do conteúdo de fração, possa ir direcionando, ou melhor, dando indícios aos alunos para que compreendam e diferenciem fração de razão, mencionando que ambos são representados por números fracionários, porém, possuem sentidos diferentes.

Nessa perspectiva, como bem destaca Nunes (2012, p. 67) “o mundo dos números não é simples. Os números têm diferentes funções e por isso o mesmo número ou a mesma expressão com números pode ter diversos significados”.

Desse modo, é importante que o aluno perceba a diferença base entre fração e razão, ou seja, saiba que a fração se dá do referencial parte-todo, com grandeza de mesmo tipo/natureza, enquanto que a razão se dá na relação comparativa com grandezas de naturezas iguais ou diferentes, como podemos observar no quadro a seguir:

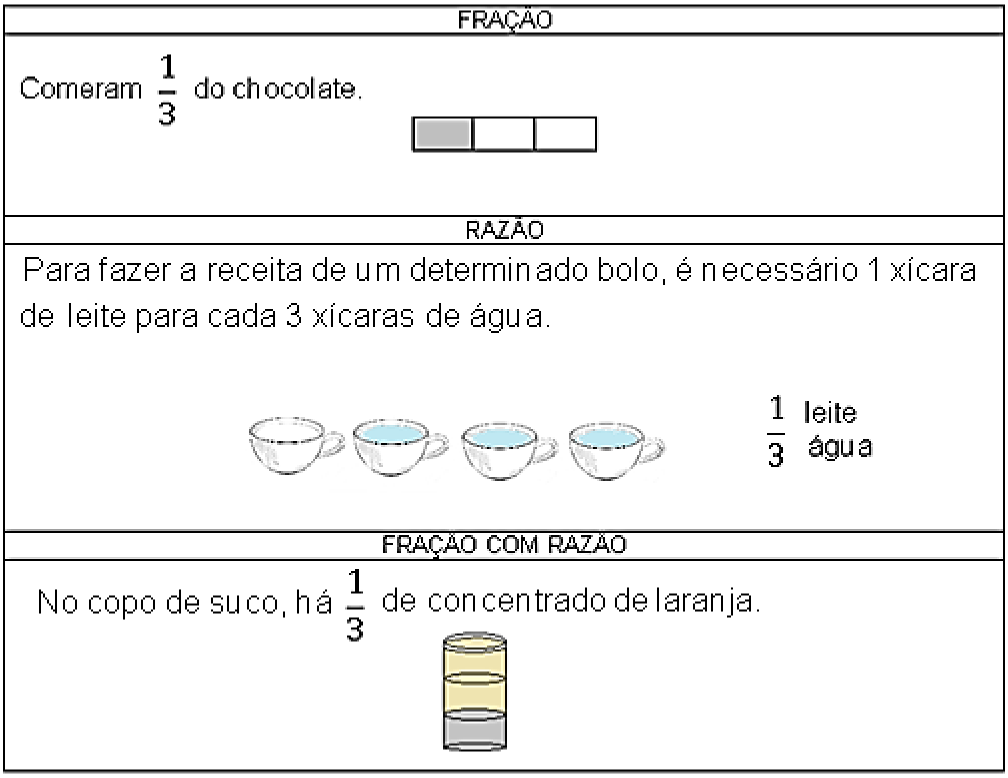
Quadro 7 - Diferença entre fração e razão

FRAÇÃO	
De 7 copos com suco de laranja, 2 foram tomados.	$\frac{2}{7}$ parte (suco de laranja). todo (suco de laranja). Mesma natureza (grandeza ml).
RAZÃO	
Para 7 copos de suco de laranja, foram necessários: 2 copos de concentrado (100 ml em cada -200ml) e 5 copos de água (100 ml em cada – 500 ml).	$\frac{2}{5}$ parte (concentrado de laranja). parte (água). Mesma natureza (grandeza ml).
Para 7 copos de suco de laranja, foram necessários: 2 copos de polpa de laranja (100 ml em cada - 200 ml) e 5 copos de água (100 ml em cada – 500 ml).	$\frac{2}{5}$ parte (polpa de laranja). parte (água). Natureza diferente (grandezas: ml e g).

Fonte: Produção própria

É possível perceber que um mesmo número fracionário pode representar uma fração, uma razão ou uma fração com razão, a depender do contexto, como nos exemplos, a seguir:

Quadro 8 - Representação de um mesmo número fracionário para razão, fração e fração com razão



Fonte: Produção própria

Na fração com razão, tem-se uma constatação da quantidade (parte) de um todo (neste caso, a polpa de fruta), que está na composição de outro todo (neste caso, o suco). Nesta situação, temos o todo (inteiro) que é o suco particionado em três partes (medidas) iguais, das quais, se quer saber quanto há de polpa de fruta. Nota-se que não é uma comparação de parte-parte, mas, sim, uma constatação comparativa da quantidade de polpa de fruta (parte) na composição do todo (suco).

O que se pretende, com as crianças, não é trabalhar a razão em todos os seus aspectos, mas, sim, explorar a fração e seus significados na configuração do número fracionário, percebendo e diferenciando que nem sempre este número indica uma fração, por vezes, pode indicar apenas uma razão.

Lortie-Forgues *et al* (2015), no artigo; Why Is Learning Fraction and Decimal Arithmetic So Difficult? (Porque o aprendizado de fração e aritmética de decimais são tão difíceis?)[16], menciona que a compreensão de fração não é nada simples, especialmente para as crianças do Fundamental I, pois a configuração da notação fracionária, tal como se apresenta, em três partes (denominador, numerador e linha divisória), muitas vezes, é interpretada de maneira equivocada. Acreditam que a notação barra fracionária, na verdade, são dois números inteiros distintos (por exemplo $\frac{1}{2}$ pode ser compreendido como 1+2 ou como 12).

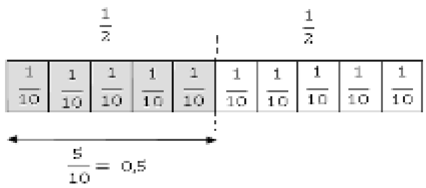
Assim, deve-se explorar o número fracionário**,** de modo que os alunos compreendam que, apesar de ser composto por dois números, ele é um só, que corresponde a uma parte e ou partes de um todo (inteiro) e que essa configuração numérica pode representar uma fração ou uma razão.

A partir dos estudos expostos até aqui, e a título de facilitar a compreensão a qual nossa pesquisa discorre, entende-se que:

Quadro 9 - Resumo do entendimento sobre fração, número, número fracionário, número misto, fração decimal, número decimal, razão e número racional

FRAÇÃO
Segundo Silva e Amouloud (2008, p.58), a fração "se caracteriza por um inteiro(grandeza contínua ou discreto), do qual uma parte pode ser associado a um número fracionário.Convenciona-se que o todo deva ser dividido em partes 'iguais' (mesma área) para a parte em questão possa ser quantificada". Então, fração é uma parte, um fragmento de um todo(contínuo) ou parte de certa quantidade (discreto), expressa concretamente/graficamente ou pela notação barra fracionária $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$, com grandeza do mesmo tipo e natureza, cujo denominador indica a partição e o numerador aponta o total de partes tomadas/admitidas do todo e que, para quantificar, devem ser convencionalmente convertidas em partes iguais, quando estas se encontram divididas em partes diferentes.
NÚMERO
É um objeto/ferramenta (simbologia) usado na Matemática para descrever a ideia de quantidade, ordem ou medida.O conceito de número, provavelmente, foi um dos primeiros conceitos matemáticos assimilados pela humanidade no processo de contagem.
NÚMERO FRACIONÁRIO
É representado por dois números inteiros, separados por uma barra horizontal ($\frac{n}{d}$), em que o numerador pode ser qualquer número inteiro e o denominador deverá ser diferente de zero. Poderá representar uma fração em relação a um todo do mesmo tipo/natureza ou uma razão, em relação à

[16] Tradução própria.

comparação de grandezas de natureza igual ou diferente.
NÚMERO MISTO
O número misto se configura, por número natural (representando um ou mais inteiros), mais uma parte ou partes (indicada por número fracionário) de outro inteiro.
FRAÇÃO DECIMAL
São denominadas frações decimais as frações cujo denominador seja uma potência de 10. As frações ordinárias podem ser definidas como frações decimais, quando a fração dada é convertida numa equivalência e o denominador seja uma potência de 10. Exemplo: A fração ordinária $\frac{1}{2}$ pode ser convertida em: $$\frac{1}{2} = \frac{1 \text{ x } 5}{2 \text{ x } 5} = \frac{5}{10} = 0{,}5$$ Vejamos na representação gráfica: 
NÚMERO DECIMAL
Número decimal é número racional, pois pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, com a e b inteiros e b≠0. Número decimal faz parte da categoria de frações, uma vez que a fração pode ser convertida a número decimal, dividindo -se o numerador pelo denominador (ONUCHIC; ALLEVATO, 2008). Números decimais são números não inteiros, indicam parte de algo e são escritos com vírgulas. Este número está associado diretamente à fração.
NÚMERO RACIONAL
O número racional é qualquer número que possa ser representado na forma $\frac{a}{b}$ com b diferente de zero.
RAZÃO
Razão parte da comparação em relação a duas grandezas de natureza igual ou diferente, representada por $\frac{a}{b}$ = a:b (*a está para b*).

Fonte: Produção própria

Diante das explanações feitas acima, pode-se caracterizar a fração como sendo um número?

Vianna (2008), no artigo "A Hora da Fração - Pequena Sociologia dos Vampiros na Educação Matemática", ao fazer a analogia de vampiros com frações, nos apresenta argumentos para diferenciar frações de números. Para este autor, "a hora da fração" continua sendo um gasto de energia para as crianças dos anos iniciais, pelo fato da forma como ainda lhes é apresentada a fração e que sua funcionalidade difere daquela concebida no Egito. As frações existiram para povos variados e em diversas épocas, mas elas não estavam associadas a algo próximo àquilo que chamamos hoje de números racionais. Quanto a isso, o autor expõe que:

> São muitas as coisas que estavam presentes em sociedades do passado, mas que deixaram de frequentar os conteúdos escolares... as frações (tal como pedi aos leitores que buscassem a definição!) são mesmo números racionais? (VIANNA, 2008, p.166).

Desse modo, Vianna (2008, p.166) aponta que fração não é número, se considerarmos o ponto de vista de como as frações são ensinadas na escola, definidas como relação parte-todo, ao recorrer a "barras" ou "tortas" divididas em partes iguais e das quais são tomadas algumas. Porém, alguns professores, geralmente dos anos iniciais, acham que estão lidando com "números", ao fazerem a relação com a definição parte-todo. Este autor defende que não é tão simples a transposição da ideia de fração tal como ela é vista na escola:

> Definida como forma de representar a relação parte-todo, num contexto que exclui a operação de divisão e a representação decimal, num contexto em que número aparece associado à contagem e nomeação de partes, mas raramente associado às medidas... Neste contexto, as frações dificilmente poderiam ser compreendidas como 'números racionais', sequer como números, visto que 'não' enumeram 'no mesmo sentido' que os números naturais que são ensinados às crianças nessa mesma época (VIANNA, 2008, p.173).

Mendes (2006) ressalta que as representações mentais e simbólicas do conceito de número manifestam-se através de um processo no qual a mente humana se baseia para criar uma linguagem de comunicação do seu pensamento, seja ela oral ou simbólica. O importante é a concretização da representação mental através de códigos elaborados para comunicar.

Entendemos que a comunicação e a elaboração de códigos tornar-se-ão gradativamente mais complexas, na medida em que os indivíduos vão atingindo a maturação. O processo de assimilação de alguns códigos (números) pode ser potencializado quando abordados de maneira que tenham sentido, ao mesmo tempo os mesmos poderão ser base para o conhecimento e aplicação desses códigos em conexão com outros contextos. Daí a necessidade de tornar possível aos alunos a compreensão essencial do princípio de contagem, apontada por Guerra e Silva

(2008) como crucial no ensino e compreensão de número, do conceito e de operações com fração, respeitando-se a maturidade cognitiva dos alunos.

Neste processo, a compreensão e atribuição da nomenclatura (palavra), relacionada ao número e seu significado, será fundamental na e para obtenção da aprendizagem.

4.2.3 Escrita e leitura de fração

A leitura e interpretação adequada de uma fração é um aspecto importantíssimo e deve ser explorado em relação à representação gráfica e sentido numérico, também quanto ao sentido e significado da palavra que representa e descreve a fração em suas representações.

Problematizar, questionar, promover a reflexão, estudo e compreensão de que a palavra pode mudar o significado e o sentido a depender do contexto torna-se mais do que necessário. Por exemplo, em frações que tenham denominadores com representação até 9, a leitura dar-se por:

Quadro 10 - Leitura de fração com denominador até 9

Numerador	2	3	4	5	6	7	8	9
Escrita e leitura	dois	três	quatro	cinco	seis	sete	oito	nove
Denominador	2	3	4	5	6	7	8	9
Escrita e leitura	meio	terço	quarto	quinto	sexto	sétimo	oitavo	nono

Fonte: Produção própria

Em frações cujos denominadores são decimais, a compreensão, para crianças dos anos iniciais (Fundamental I), torna-se ainda mais difusa e complexa:

Quadro 11 - Leitura de fração decimal

Denominador	10	100	1000
Escrita e leitura	décimo	centésimo	Milésimo

Fonte: Produção própria

O número decimal está associado diretamente à fração, porém, o ensino de fração e número decimal, nem sempre, se dá de maneira interligada.

De modo geral, as literaturas apontam que, assim como no Brasil, outras culturas costumam trabalhar a fração e seus conceitos e que, posteriormente, se introduz a noção de número decimal. Compreender a notação barra fracionária, como já foi aqui mencionado, não é nada fácil; entender que essa mesma notação pode ser convertida num número decimal, sem se quer ter noções do que seja um número decimal, constitui-se num grande conflito cognitivo

Em sua pesquisa, Espinosa (2009) observa que, ao solicitar que alunos da 5ª e 6ª séries escrevessem determinado número decimal, surgiram registros do tipo: 1,4, como sendo "um vírgula quatro" ao invés de "um inteiro mais quatro décimos", isto é, um inteiro mais outro inteiro dividido em 10 partes e que foram utilizadas apenas 4 das 10 partes. Eles entendem que a vírgula tem a função de separar algarismos, reconhecendo que sem ela o número é um inteiro, expressando pouca ou nenhuma compreensão de número decimal. Nesse sentido, assim como na fração e demais conteúdos matemáticos, a questão crucial é a maneira como é feita a abordagem e sua exploração, inclusive, quanto à leitura feita, muitas vezes, rasa, sem conexão e sem atribuição de significado e/ou sentido.

Assim, de modo efetivo, deve-se explorar tanto a leitura quanto a disposição dos números, para que o aluno compreenda o que cada um diz, qual o sentido e relação que há entre eles. Deve-se compreender a função da barra horizontal na fração, assim como a vírgula no número decimal, isto é, a barra horizontal indica, de um lado, a quantidade que o inteiro foi divido e, acima da barra horizontal, a quantidade de partes tomadas/admitidas, comparando, em relação ao número decimal, onde o número que fica antes da vírgula representa o inteiro, se tem zero antes da vírgula, logo, não há inteiro, há apenas parte de um inteiro.

No quadro 12, pode-se observar a leitura de fração decimal e representação em número decimal:

Quadro 12 - Leitura de fração decimal e representação em número decimal

Fração decimal	Escrita e leitura	Representação decimal	Escrita e leitura
$\frac{1}{10}$	Um décimo	0,1	Um décimo
$\frac{5}{100}$	Cinco centésimos	0,05	Cinco centésimos
$\frac{98}{100}$	Noventa e oito centésimos	0,98	Noventa e oito centésimos
$\frac{15}{1000}$	Quinze milésimos	0,015	Quinze milésimos

Fonte: Produção própria

Na leitura de fração com 10, 20, 30...100..., associados a algarismos (1 a 9), no **denominador**, ocorre outra mudança. Neste caso, é feita a leitura apenas na terminologia da palavra AVOS. Vejamos alguns exemplos:

Quadro 13 - Leitura de fração com a terminologia AVOS

Fração	Escrita e leitura
$\frac{1}{13}$	um treze avos
$\frac{5}{19}$	cinco dezenove avos
$\frac{9}{25}$	nove vinte e cinco avos
$\frac{1}{36}$	um trinta e seis avos
$\frac{2}{77}$	dois setenta e sete avos
$\frac{4}{89}$	quatro oitenta e nove avos

Fonte: Produção própria

No artigo intitulado "Onze avos, doze avos... de onde vem esse termo avo?", Ferreira (2006) aponta possível origem deste termo. Segundo esse autor, o termo avos veio do harmônico pitagórico oitavo, sendo este o que teve maior importância, comprovadamente, por permanecer em outras línguas, a saber: Espanhol: octavo. Inglês: octave; Alemão: oktave. Italiano: ottava; Francês: octave. Latim: octavus (ou, ainda, oriundo do grego diapason). Em se tratando das frações rítmicas, os nomes vêm nas línguas de origem com os nomes fracionários, somente o harmônico oitavo tem estas denominações acima. Desse modo, para este autor, o termo avos tem a ver com a fração sonora musical. Em sua pesquisa, ele apresenta indagações sobre o motivo pelo qual a palavra avos teve sua disseminação na Espanha e em Portugal e não nas demais línguas do Ocidente, tendo encontrado no *Diccionário Histórico da Real Academia Española,* na sua edição de 1933, o seguinte texto: "a existência deste termo foi a partir da introdução, na Península Ibérica, da palavra habba = partícula do árabe, que sofreu a adaptação avo, em Portugal, e ava, na Espanha" (FERREIRA, 2006, p. 102).

Com foco na terminologia avo, Ferreira (2006) encontrou, no Dicionário Etimológico da Língua Portuguesa, de José Pedro Machado, uma explicação epistemológica para o uso do termo avo:

> Avo. s.m. Da terminação de oitavo c.f.: Leite de Vasconcelos – Notas Philológicas, em Revue Hispanique t. V. 1989 pp. 419-420 (Opúsculo, I, pp. 499- 500) — É um exemplo de um sufixo se tornar palavra independente: três quinze avos, etc. A escolha recaiu em oitavo porque para o ouvido esta palavra parecia composta de oit(o)+avo: não havia outra nas mesmas condições. Em terço, quarto, quinto, sexto, sétimo, nono, décimo a palavra fundamental está obscurecida, excepto em sexto = seis-to, e sétimo = set-imo, mas nestas não podia prestar-se atenção nem a –to, nem a –timo, por tais terminações serem átonas, o que não acontece com oitavo = oit-ávo (FERREIRA, 2006, p.107).

Ferreira (2006) conclui, então, que o termo avo, ou sufixo avo, veio do harmônico grego da oitava e que foi introduzido na Espanha pelos árabes e de lá para Portugal. Porém, apesar de expressar convicção, diz ainda precisar pesquisar mais sobre o assunto, por haver outros manuscritos (principalmente, nas bibliotecas de Évora e da universidade de Toledo) que precisam ser analisados.

Como podemos perceber, a complexidade de entendimento que se pode ter na escrita e leitura de uma fração é diversa, e, assim sendo, é preciso que seja levada em conta no processo de ensino e aprendizagem de fração, de modo a dar sentido e promover o saber efetivo.

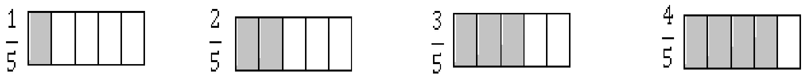
4.2.4 Fração, ordenação e equivalência

Lopes (2008) entende que o conceito de fração equivalente é um dos mais importantes no ensino-aprendizagem das frações, mas considera insuficiente o trabalho restrito a grades retangulares. Ele tem observado que, para escrever uma fração equivalente, na maioria dos casos, a atividade da criança reduz-se à contagem total de células, tal como foi instruída.

Moutinho (2005), referenciando Nunes (2003), considera importantes e centrais no conceito de fração, as invariantes de ordenação e equivalência, existindo na ordenação duas ideias básicas:

- 1ª para um mesmo denominador, quanto maior for o numerador, maior será a fração:

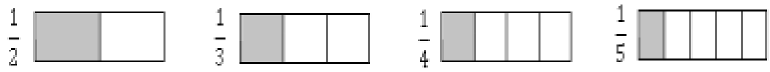
Figura 3 - Frações, ordenação com mesmo denominador



Fonte: Produção própria

- 2ª para um mesmo numerador, quanto maior o denominador menor será a fração:

Figura 4 - Frações, ordenação com o mesmo numerador



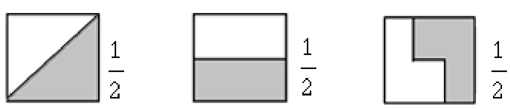
Fonte: Produção própria

Observa-se que a compreensão para a primeira situação é considerada relativamente simples, entendendo-se que a estratégia a ser utilizada é semelhante à utilizada na resolução com números naturais, enquanto que, na segunda situação, poderá haver maior dificuldade, pelo fato de as crianças precisarem pensar em uma relação inversa entre o denominador e a quantidade representada pela fração.

Vasconcelos (2015) destaca, segundo Nunes e Bryant (2008), a equivalência no domínio dos números naturais, em que dois conjuntos têm a mesma quantidade se forem representados pelo mesmo número e essas quantidades são diferentes quando representadas por números diferentes. No entanto, na representação racional, a mesma quantidade pode ser representada de maneiras diferentes, para se referir à mesma quantidade, como: $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}$ e assim infinitamente. Essa mesma representação numérica pode representar quantidades diferentes, como: $\frac{1}{2}$ de 10 e $\frac{1}{2}$ de 12. Esses autores sugerem ainda que a equivalência de frações envolve a compreensão da linguagem e da percepção e mencionam alguns exemplos (VASCONCELOS, 2015):

- Um mesmo todo, uma mesma fração, modelos visuais diferentes indicam a mesma quantidade.

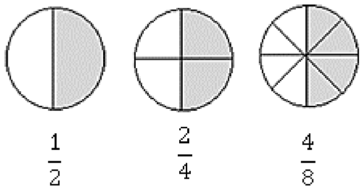
Figura 5 - Mesma quantidade: modelos visuais diferentes para uma mesma fração, num mesmo todo



Fonte: Adaptado de Vasconcelos (2015, p.37)

- Indicação de mesma quantidade em diferentes frações:

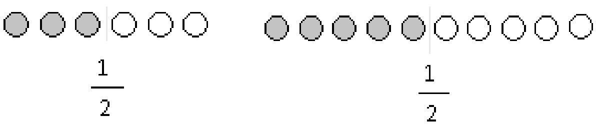
Figura 6 - Mesma quantidade: frações diferentes em modelos visuais, similares



Fonte: Adaptado de Vasconcelos (2015, p.37)

- Quantidades diferentes para a mesma fração, $\frac{1}{2}$ de 6 bolas é igual a 3 bolas de gude e $\frac{1}{2}$ de 10 bolas de gude é igual a 5 bolas de gude.

Figura 7 - A mesma fração: representação em quantidades diferentes



Fonte: Adaptado de Vasconcelos (2015, p.38)

Observa-se, a partir dos esquemas, que a compreensão de equivalência nas frações não é tão simples e requer compreensão e maturação cognitva, assim como também certo domínio da linguagem e percepção visual. Por outro lado, pode-se aguçar e desenvolver a cognição, a percepção e a linguagem, explorando e vivenciando as situações acima expostas, ao oportunizar a conversão e reversão dos processos, de modo que seja viável ao aluno a percepção visual da relacão gráfica, numérica e por extenso dos resultados obtidos.

4.2.5 Fração: conversão e reversão

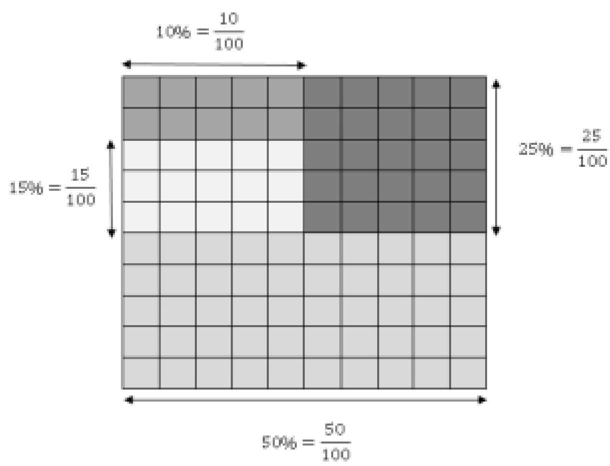
Sharp, Garofalo e Adams (2002) argumentam que as crianças, gradualmente, expandem seu conhecimento e pensam em frações partindo do intuitivo no qual combinam o pensamento, a linguagem informal e imagens. Só a partir de então passam a fazer abstrações e pensar em ideias fracionadas sem forte dependência do contexto específico. Passam a usar e compreender o símbolo de maneira formal, tornando-se capazes de conectar conceitos e procedimentos próprios dessa linguagem, das notações e algoritmos convencionais.

Antes, porém, é necessário expor e oportunizar aos alunos a conversão e reversão dos procedimentos realizados, ou seja, chegar a um determinado resultado e voltar pela inversão do processo feito, chegando ao estado inicial do que foi proposto, utilizando várias formas de representação, como: gráfica, numérica e por extenso. Deste modo, possivelmente irá favorecer maior compreensão referente ao por que do resultado obtido, assim como também, favorecerá a percepção de que a quantidade (todo) se conserva na junção das partes.

O desenvolvimento de múltiplas situações para explorar, converter e reverter frações por frações, frações por decimais ou decimais em frações decimais, em representação gráfica, numérica e por extenso, favorece não apenas a compreensão de aspectos em relação ao grafo, anotação barra fracionária e ao registro por extenso da fração, mas, também, promove a ação e aquisição de muitos outros conceitos que envolvem este conteúdo, como a porcentagem, que é indicada por números acompanhados do símbolo % (por cento), indica uma quantidade ou grandeza, calculada sobre a centena (100%), podendo ser convertida e representada na forma de número decimal ou de fração.

A exploração de porcentagem convertida em fração torna-se mais fácil a partir do significado parte-todo, por ser visualmente mais compreensível a conversão de uma para outra. Se a criança entender que 50% corresponde à metade de um todo, certamente, fará a inferência em outras situações, a partir do referencial, isto é, do valor total de um todo. Vejamos:

Figura 8 - Representação de porcentagem em fração e número fracionário



Fonte: produção da pesquisadora

Referencial: Um todo particionado em 100 partes:

10% de $100 = \frac{10}{100}$ correspondem a 10 partes do todo, igual a 0,10.

15% de $100 = \frac{15}{100}$ correspondem a 15 partes do todo, igual 0,15.

25% de $100 = \frac{25}{100}$ correspondem a 25 partes do todo, igual a 0,25.

50% de $100 = \frac{50}{100}$ correspondem a 50 partes do todo, igual 0,50.

A representação visual é apenas um dos meios a ser utilizado para a exploração desses conteúdos e a interação entre eles pode e deve acontecer na medida em que um possa auxiliar a compreensão do outro, ocorrendo sua exploração e abordagem simultaneamente ou sequenciada, a partir de outros recursos, como uso de materiais manipulativos.

O que são materiais manipuláveis?

Nacarato (2005, p.3) diz se apropriar da definição dada por Reys (1971), ao descrever que materiais manipulativos são “objetos ou coisas que o aluno é capaz de sentir, tocar, manipular e movimentar. Podem ser objetos reais que têm aplicação no dia a dia ou podem ser objetos que são usados para representar uma ideia”.

Ao manusearem o material, os alunos também desenvolvem a linguagem matemática, isso porque os alunos, naturalmente, verbalizam e discutem suas ideias, refletem, estabelecem uma negociação entre diferentes significados de uma mesma noção, enquanto o manuseiam (SMOLE; DINIZ, 2016b).

Isto posto, entende-se que os materiais manipulativos devem ser utilizados de modo a ter sentido, no intuito de apontar e/ou clarificar a compreensão e objetivo a ser alcançado, podendo ir além, quando bem explorado.

Cramer e Henry (2002, p.41), para construir o sentido numérico em adição de frações, usaram modelos manipulativos, com crianças de 4ª e 5ª séries, e, a partir de experimentos realizados e revisados a longo prazo, refletem um currículo baseado nas seguintes crenças:

1. O aprendizado das crianças sobre frações pode ser otimizado através do envolvimento ativo com múltiplos modelos concretos;

2. A maioria das crianças precisa usar modelos concretos durante longos períodos de tempo a fim de desenvolver imagens mentais necessárias para pensar conceitualmente sobre frações;

3. As crianças se beneficiam das oportunidades de conversar umas com as outras e com seus professores sobre ideias fracionárias à medida que constroem seus próprios entendimentos de fração e de número;

4. Os materiais de ensino para frações devem focar no desenvolvimento de conhecimento conceitual antes do trabalho formal com símbolos e algoritmos.

Das quatro crenças citadas, a mais importante, na visão desses autores, é a segunda, pois a maioria das crianças necessita de longos períodos de tempo e de modelos físicos que lhes permitam desenvolver o senso fracionário. Assim, os alunos podem usar seu entendimento do tamanho da fração para operar em frações de maneira significativa.

Ao experienciar a manipulação e a visualização do todo particionado e das partes operacionalizadas, o aluno poderá compreender, de forma muito mais exitosa, os conteúdos estudados.

4.3 Aritmética com fração: representação gráfica, numérica e por extenso

Sabemos que a apropriação das técnicas operatórias são importantes, porém, para que estas sejam melhor compreendidas e possam obter maior alcance na aprendizagem dos alunos, faz-se necessário estabelecer apropriação adequada do entendimento de fração e sua relação na notação barra fracionária.

Mendes (2006) considera que as características dos números estão definidas, geralmente, em termos das formas em que podem combinar-se uns com os outros, de acordo com as regras do que chamamos de “matemática”, ou limitando sua aplicação aos números, simplesmente chamada de “aritmética”. Para ele, não se pode estabelecer nenhum fundamento sem, primeiramente, ter uma espécie de cognição dos números e certo domínio das técnicas numéricas.

Desse modo, apresenta-se, a seguir, processos aritméticos com fração, representados de maneira gráfica, numérica e por extenso. Neste processo, o aluno vivência, concretamente, participa, visualiza e compreende o passo a passo realizado no processo para a obtenção dos resultados. Coloca-se os procedimentos aritméticos, relacionando (paralelamente) o movimento usual da regra operatória com as representações, de modo que os registros são uma representação do que está sendo vivenciado e explorado na e a partir do uso de material manipulativo.

✓ Adição de frações

Para Silva e Almouloud (2008), percebe-se que, em relação às demais operações com números fracionários, a adição de frações com mesmo denominador é a que menos apresenta complicadores para a compreensão dos alunos, no entanto, quando os denominadores são diferentes, há complicadores pelo fato de as partes consideradas terem nomes e significados diferentes. Vejamos frações com:

- **Mesmo denominador**, para **adição** de fração. Geralmente, realizada a partir da regra operatória descrita a seguir:

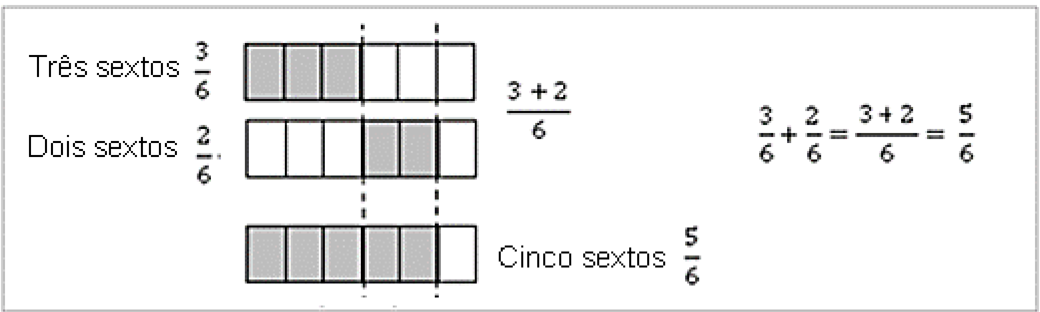
$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$$

Como se vê, repete-se o denominador, tendo em vista que a partição é a mesma e juntam-se as partes tomadas. Exemplo:

$$\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{3+2}{6}=\frac{5}{6}$$

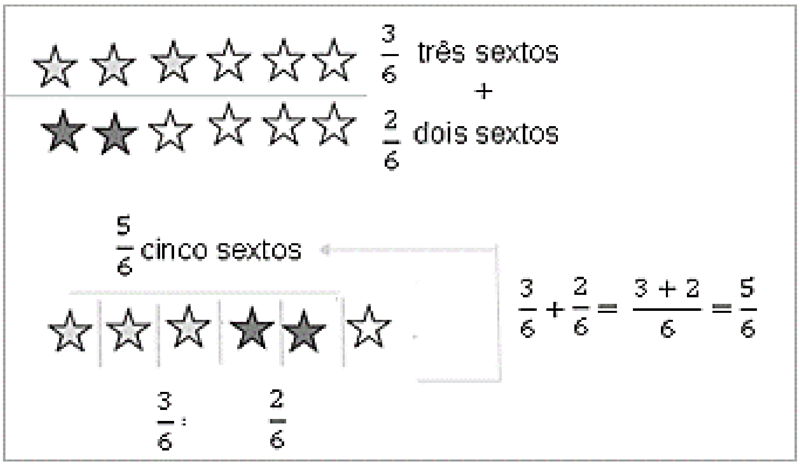
Verificando graficamente, podemos perceber que o caminho poderia ser o inverso, ou seja, antes, o manuseio de materiais concretos, depois, a representação gráfica em paralelo com a descrição da regra operatória, identificando cada fração na representação do número fracionário tanto a partir da leitura quanto da escrita:

Figura 9 - Representação gráfica, numérica e por extenso: adição de fração contínua com mesmo denominador



Fonte: Produção própria

Figura 10 - Representação gráfica, numérica e por extenso: adição de fração discreta com mesmo denominador



Fonte: Produção própria

- Para a **adição** de frações com **denominadores diferentes** é necessário converter as frações dadas em frações equivalentes, tornando os denominadores, que antes eram diferentes, em denominadores iguais. Observe a regra, geralmente, indicada no caso operatório numérico:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a.d + c.b}{b \times d} =$$

Temos como exemplo $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} =$

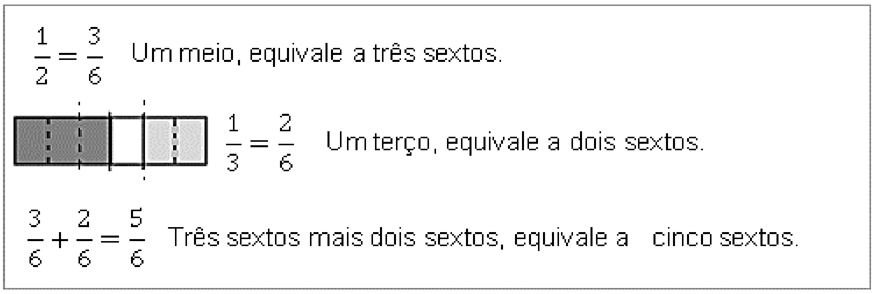
Pode-se encontrar o denominador comum para as duas frações da seguinte maneira:

- ✓ Multiplicando o denominador de uma fração pelo denominador da fração seguinte;
- ✓ Em seguida, divide-se o denominador comum (encontrado na multiplicação de denominador por denominador diferente), pelo denominador de cada fração;
- ✓ Multiplica o resultado obtido na divisão do denominador pelo numerador de cada fração;
- ✓ Soma-se os resultados obtidos em cada numerador e repete o denominador comum.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1 \times 3 + 2 \times 1}{3 \times 2} = \frac{3 + 2}{6} = \frac{5}{6}$$

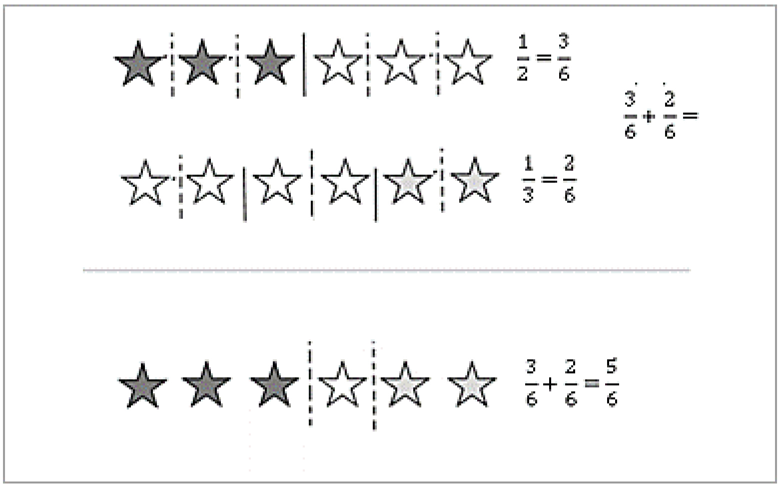
Vejamos, graficamente, a conversão de cada fração e como encontrar o denominador comum pela equivalência:

Figura 11 - Representação gráfica, numérica e por extenso: adição de fração continua com denominadores diferentes



Fonte: Produção própria

Figura 12 - Representação gráfica, numérica e por extenso: adição de fração discreta com denominadores diferentes



Fonte: Produção própria

Cramer e Henry (2002) afirmam que uma criança com senso fracionário deve ser capaz de estimar uma resposta razoável aos problemas de adição de fração. Para esses mesmos autores:

> Desenvolver uma compreensão do tamanho da fração e estimar uma resposta razoável para problemas de operação fracionária são objetivos apropriados para crianças em idade escolar primária. Grande parte da manipulação simbólica de símbolos de frações feita na quarta e quinta séries pode ser adequadamente abordada nos graus intermediários. Os alunos terão mais sucesso se os professores da escola elementar investirem seu tempo construindo significado para frações usando modelos concretos e enfatizando conceitos, estratégias informais de ordenamento e estimativas (CRAMER; HENRY, 2002, p. 47).

A adição de frações com denominadores diferentes pode confundir e levar o aluno a fazer a adição dos denominadores, ao invés de multiplicá-los e/ou de encontrarem o MMC entre os denominados.

Segundo Smith III (2002, p.45), “esse erro pode ser superado pedindo aos alunos que considerem os tamanhos relativos das unidades”, de maneira explícita. Podem ser feitas conexões entre o procedimento de adição e o significado de frações, examinando as principais etapas do procedimento de adição, ou seja, visualizando como e por qual motivo se faz a equivalência, e, assim, encontrar o denominador comum, de modo a realizar a adição das frações, compreendendo o resultado obtido.

- ✓ **Subtração de frações**

A subtração de fração com mesmo denominador e a subtração de fração com denominadores diferentes seguem a mesma lógica da adição. A diferença está em subtrair, retirar uma parte do todo.

- **Mesmo denominador**, para **subtração** de fração. Tem-se que:

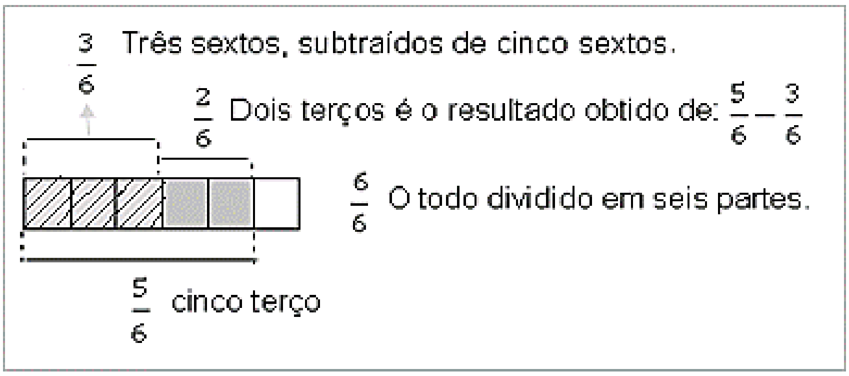
$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$$

Repete-se o denominador, tendo em vista que a partição é a mesma, subtraem-se as partes indicadas na fração seguinte. Exemplo:

$$\frac{5}{6} - \frac{3}{6} = \frac{5-3}{6} = \frac{2}{6}$$

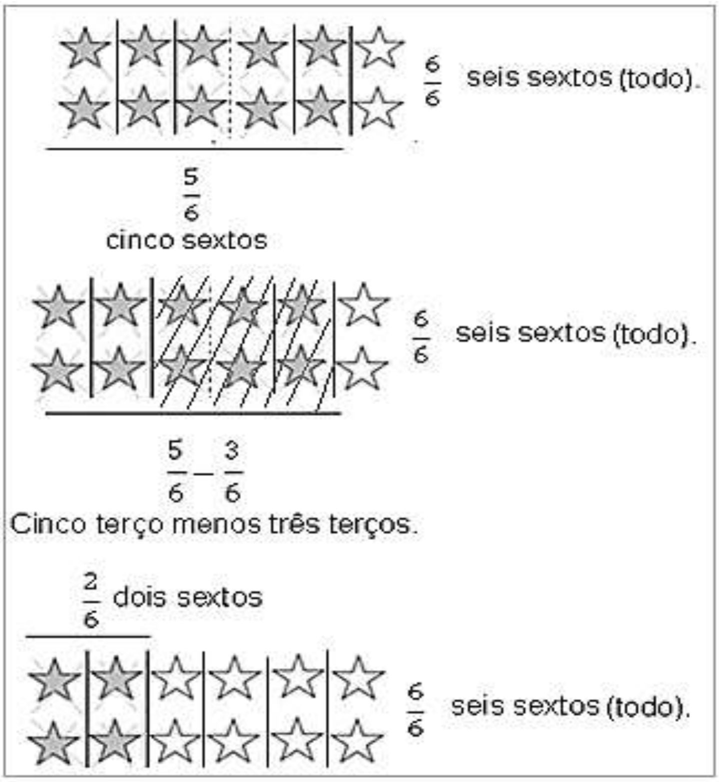
Verificando, graficamente, e por extenso, temos:

Figura 13 - Representação gráfica, numérica e por extenso: Subtração de fração contínua com mesmo denominador



Fonte: Produção própria

Figura 14 - Representação gráfica, numérica e por extenso: subtração de fração discreta com mesmo denominador



Fonte: Produção própria

Cinco sextos menos três sextos, corresponde a: $\frac{2}{6}$ dois sextos.

Cada sexto corresponde a 2 estrelas. Assim, $\frac{5}{6}$ (10 estrelas), três sextos (6 estrelas).

Então, $\frac{5}{6} - \frac{3}{6} = \frac{2}{6}$ (4 estrelas).

- Para a **subtração** de fração com **denominadores diferentes,** é o mesmo procedimento feito na adição de fração com denominadores diferentes. A diferença está em subtrair (retirar):

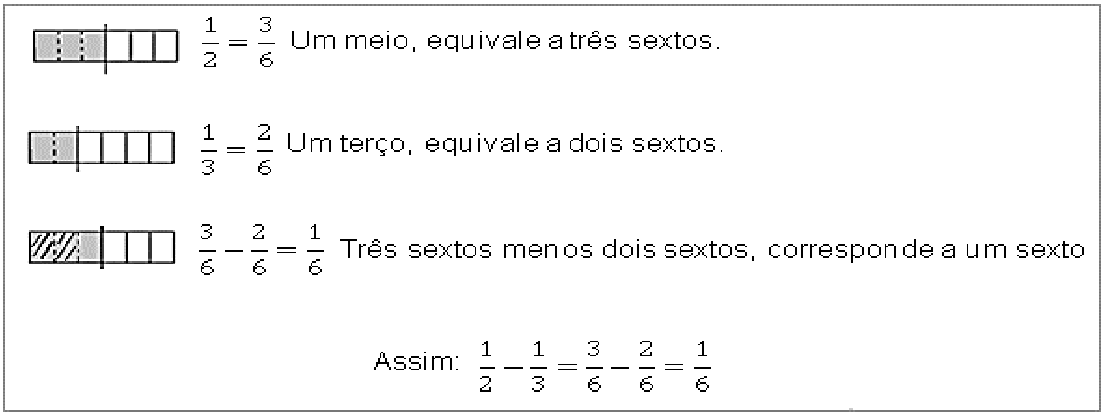
$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \text{ x } d - c \text{ x } b}{b \text{ x } d} =$$

Por exemplo:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3 \text{ x } 1 - 2 \text{ x } 1}{3 \text{ x } 2} = \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6}$$

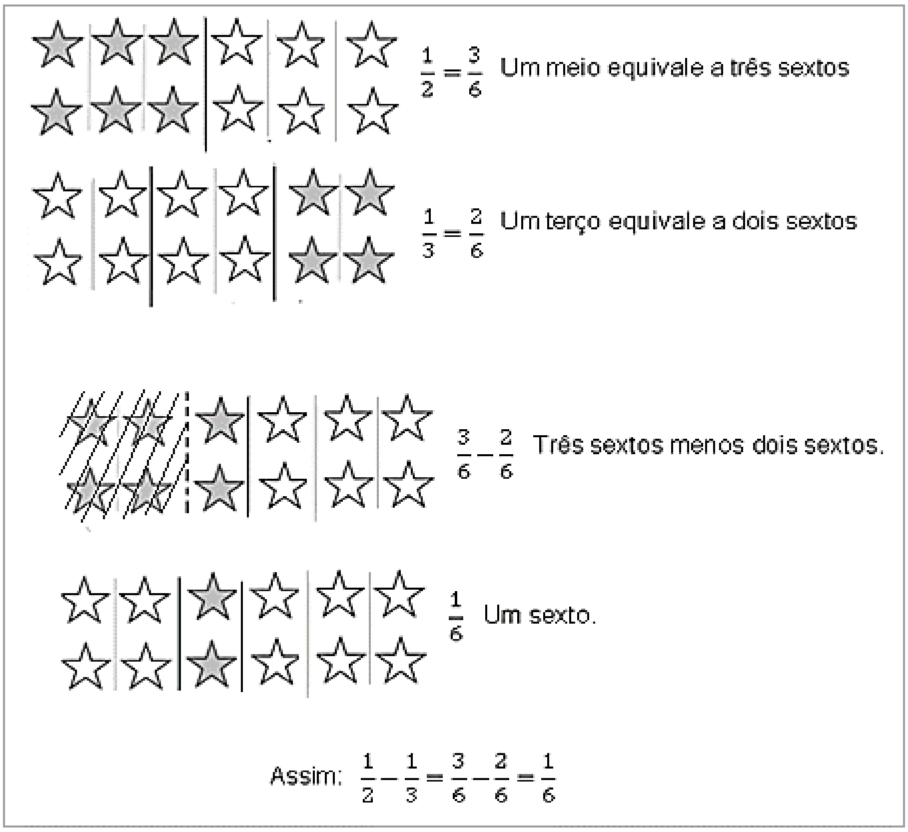
Vejamos a equivalência encontrada graficamente:

Figura 15 - Representação gráfica, numérica e por extenso: subtração de fração continua com denominador diferente



Fonte: Produção própria

Figura 16 - Representação gráfica, numérica e por extenso: Subtração de fração discreta com denominador diferente



Fonte: Produção própria

A ação de converter a fração (neste caso, refere-se a encontrar equivalências) é posta por muitos pesquisadores como um dos maiores obstáculos na aprendizagem de fração, precisando, portanto, de muito mais tempo e situações contextuais diferenciadas para que se consolide a compreensão e aprendizagem por parte dos alunos.

✓ Multiplicação de frações

A multiplicação de fração apresenta-se como modificador, por transformar os valores indicados. A ação multiplicadora pode ser compreendida a partir do significado parte-todo, associado ao operador multiplicativo.

Uma forma simples de se referir à noção de operador multiplicativo é associada a "encolher/esticar", "contrair/expandir", "reduzir/ampliar" ou "dividir/multiplicar" (Lemos 2016 *apud* VASCONCELOS, 2015, p.42).

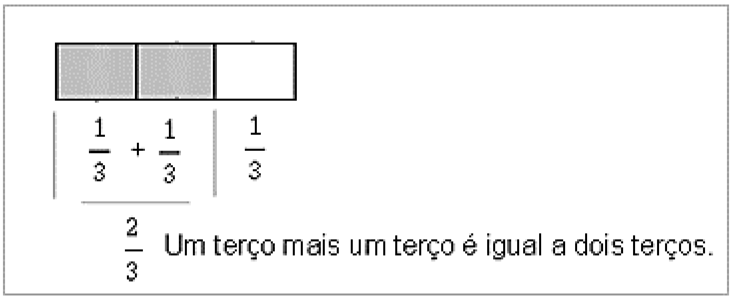
✓ Multiplicação de inteiro por fração

Silva e Almouloud (2008, p.65) apontam que a multiplicação com números fracionários pode ser associada às concepções de operador e de medida, fazendo analogias com as operações de números naturais que os alunos já conhecem. Assim, multiplicar $2 \times \frac{1}{3}$ corresponde a $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, assim como 2.3=3+3.

Assim: $a \times \frac{b}{c} = \frac{b}{c} + \frac{b}{c}$

Na representação gráfica e por extenso, temos:

Figura 17 - Representação gráfica, numérica e por extenso: multiplicação de inteiro por fração



Fonte: Produção própria

O entendimento multiplicativo se estende para qualquer número natural, na posição de **a,** ou seja, se **a** for 3 por exemplo: $3 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3}$

$$a \times \frac{b}{c} = \frac{b}{c} + \frac{b}{c} + \frac{b}{c}$$

✓ Multiplicação de fração por inteiro

Na multiplicação de uma fração por um número natural, pode-se seguir a mesma lógica usada na multiplicação de um número natural por uma fração.

Neste caso, tem-se que $\frac{1}{3}$x 2 corresponde à terça parte de 2 inteiros, ou seja,$\frac{1}{3}$ de 1 inteiro mais $\frac{1}{3}$ de 1 (outro inteiro) corresponde a:

$$\frac{a}{b} \text{x } c = \frac{a}{b} + \frac{a}{b} \quad \frac{a}{b} \text{ x } c = \frac{a}{b} \text{x} \frac{c}{1}$$

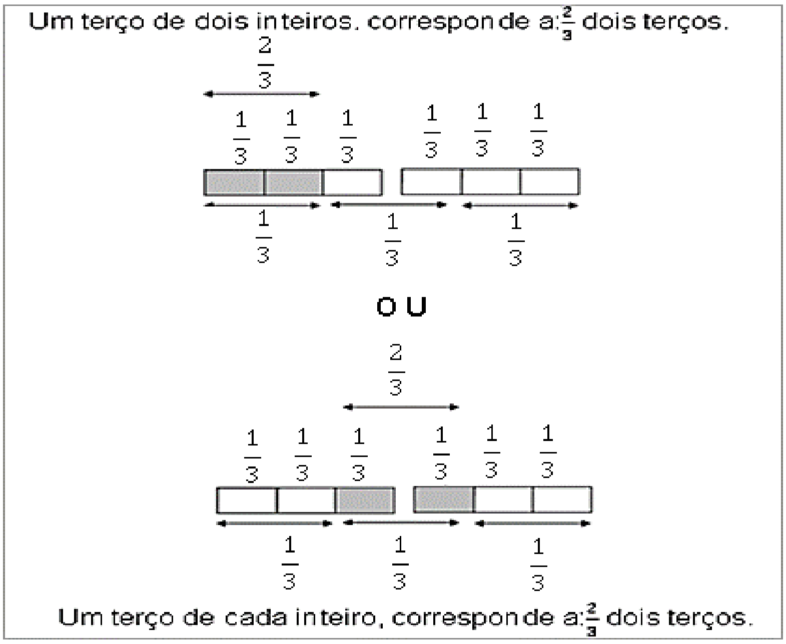
OU

$$\frac{1}{3} \text{ x } 2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \qquad \frac{1}{3} \text{ x } 2 = \frac{1}{3} \text{x} \frac{2}{1} = \frac{2}{3}$$

Vê, pois, o mesmo resultado, mas a partir de procedimentos diferentes.

Vejamos, graficamente, e por extenso:

Figura 18 - Representação gráfica, numérica e por extenso: multiplicação de fração por inteiro



Fonte: Adaptada (GOIS, 2014, p. 27).

Visualmente, fica mais fácil a compreensão do(s) processo(s) realizado(s) para chegar ao resultado obtido.

✓ Multiplicação de fração por fração

Para realizar a multiplicação de fração por fração, multiplica-se $\frac{a}{b}$ com b≠0 por outra fração dita $\frac{c}{d}$ com d≠0. Multiplica-se o numerador pelo numerador e multiplica-se o denominador pelo denominador. Deste modo, temos:

$$\frac{a}{b} x \frac{c}{d} = \frac{a \text{ x } c}{b \text{ x } d}$$

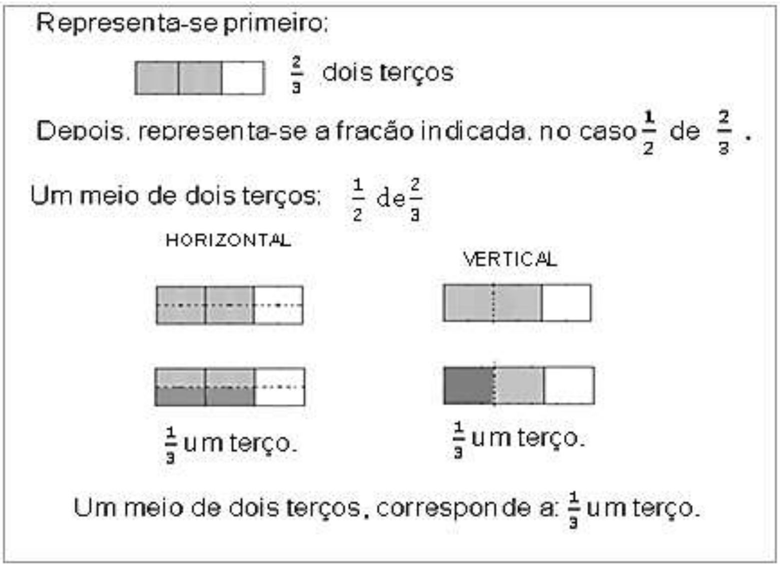
A multiplicação de uma fração por outra fração pode ser compreendida como uma parte de outra parte de fração. Vejamos:

$$\frac{1}{2} \text{ x } \frac{2}{3} = \frac{1 \text{ x } 2}{2 \text{ x } 3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Representando graficamente e por extenso, temos que:

$\frac{1}{2} \text{x} \frac{2}{3}$ é igual a determina r$\frac{1}{2}$ de$\frac{2}{3}$, ou seja, corresponde a encontrar um meio (metade) de$\frac{2}{3}$ de um inteiro:

Figura 19 - Representação gráfica, numérica e por extenso: multiplicação de fração por fração



Fonte: Produção própria

Visualmente, neste caso, fica mais fácil perceber o meio da fração indicada, pela representação particionada horizontalmente, porém, a representação gráfica pode ser feita das duas maneiras (horizontal e/ou vertical), e com modelos variados, no sentido de tornar a aprendizagem mais efetiva.

✓ **Divisão de frações**

A divisão de frações dá-se a partir da lógica de particionar em partes iguais um inteiro (partição continua) ou um grupo de elementos (partição discreta) e a estes deve-se levar em conta a lógica operatória a ser realizada, tendo em vista que devem ser consideradas as relações de quantidades partidas e as quantidades a serem admitidas.

Sobre a divisão de fração, Botta (1997, p.36), apresenta dois tipos de situações que pedem a operação da divisão: o processo de agrupar e o processo de repartir. A partição que determina quantos há em cada grupo é chamada de divisão partitiva e o processo de agrupar que determina a quantidade de grupos formados é chamado de divisão quotitiva.

Vasconcelos (2015, p. 49) descreve que:

> existe uma relação inversa entre as partes e o tamanho das partes, ou seja, quanto mais partes, menor o tamanho de cada parte. [...] a compreensão do conceito de divisão constitui-se na capacidade de compartilhar um conjunto ou quantidade de forma equitativa (distribuição) e nas relações entre os três elementos em uma situação de divisão: o dividendo (o todo); o divisor (o número de partes) e o quociente (tamanho das partes ou quotas).

Liping Ma (2009) aponta a divisão como sendo a mais complicada operação que envolve a fração, sendo por ela considerado um tópico cimeiro da aritmética, e argumenta que:

> Apesar de o conceito de divisão por fração ser construído logicamente sobre a aprendizagem prévia de vários conceitos, ele desempenha por seu turno um papel de reforço e aprofundamento dessa aprendizagem prévia (LIPING MA, 2009, p.144-145).

Para tanto, deve-se explorar várias possibilidades de representação. A divisão de fração apenas pela regra operatória é abstrata, pode confundir e/ou não ser compreendida pela criança que ainda está em processo de aquisição de conhecimento sobre frações, sendo necessário fazer a relação gráfica para que a regra operatória seja melhor compreendida.

Divisão de frações por número natural (inteiro)

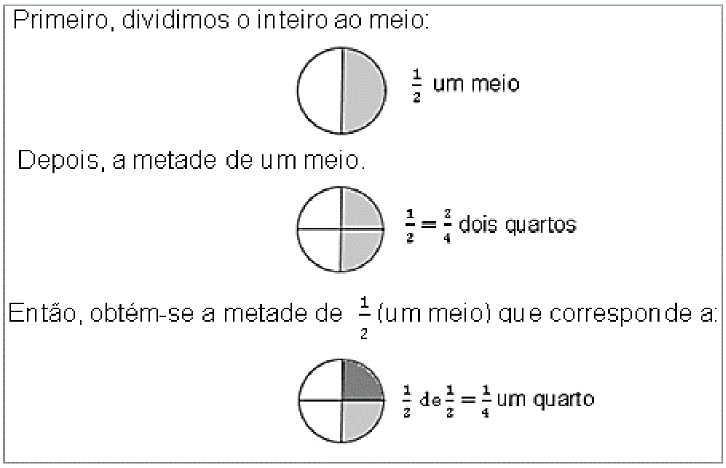
Na regra operatória de uma fração por um número natural, temos que:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{1} = \frac{a}{b} \mathrm{x} \frac{1}{c}$$

Por exemplo: $\frac{1}{2} \div 2$

$$\frac{1}{2} \div 2 = \frac{1}{2} \div \frac{2}{1} = \frac{1}{2} x \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Figura 20 - Representação gráfica, numérica e por extenso: divisão de fração por número natural (inteiro)



Fonte: Produção própria

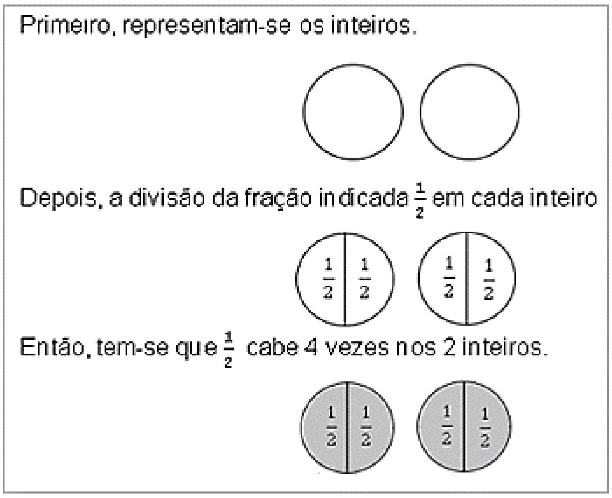
✓ Divisão de número natural por fração

Quando a divisão é de um número natural por uma fração, o resultado é diferente, pois temos os inteiros e deles serão indicadas quantas partes cabem nos inteiros. Fazendo o inverso da divisão de $\frac{1}{2} \div 2$, teremos $2 \div \frac{1}{2}$

$$\frac{a}{1} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{1} x \frac{d}{c}$$

Assim: $2 \div \frac{1}{2} = \frac{2}{1} \div \frac{1}{2} = \frac{2}{1} x \frac{2}{1} = \frac{4}{1} = 4$

Figura 21- Representação gráfica, numérica e por extenso: divisão de número natural (inteiro) por fração.



Fonte: Produção própria

Fazendo o passo a passo com material concreto, relacionando com a representação gráfica, numérica e por extenso, aumenta-se as chances de compreensão da divisão realizada.

✓ **Divisão de fração por fração**

Em geral, para a regra operatória em divisão de fração por fração, tem-se a divisão de $\frac{a}{b}$, com b≠0 por $\frac{c}{d}$ (d≠0), por definição, a multiplicação do número fracionário $\frac{a}{b}$ pelo inverso de $\frac{c}{b}$. Temos que:

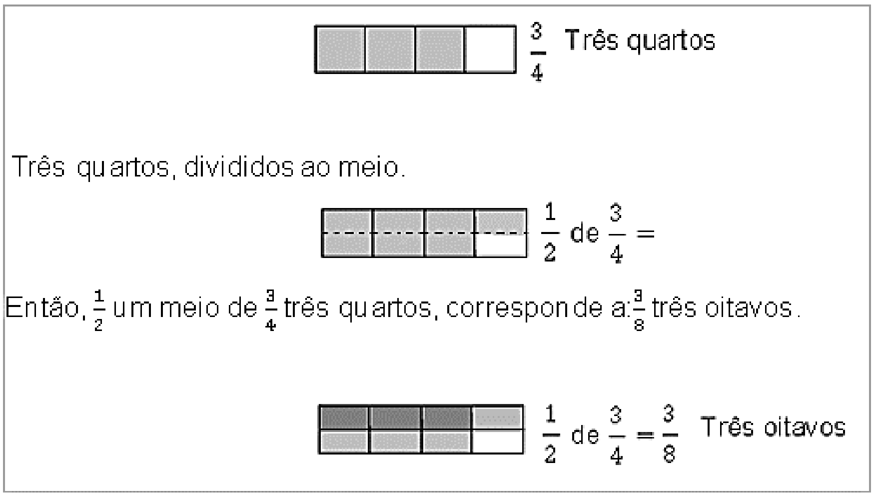
$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

Assim, tem-se, por exemplo, que calcular $\frac{3}{4} \div \frac{2}{1}$ é encontrar a quantidade de vezes que $\frac{1}{2}$ caberá em $\frac{3}{4}$.

$$\frac{3}{4} \div \frac{2}{1} = \frac{3 \times 1}{4 \times 2} = \frac{3}{8}$$

Verificando pela representação gráfica e por extenso, temos:

Figura 22 - Representação gráfica, numérica e por extenso: divisão de fração por fração



Fonte: Produção própria

Liping Ma (2009, p.124) menciona que, apesar de o modo tradicional para efetuar a divisão por frações ser a multiplicação pelo recíproco do divisor, nem sempre é preciso atuar dessa forma. Por vezes, a divisão da fração pode ser resolvida sem recorrer à multiplicação. Essa autora explica que a divisão de fração por fração, sem recorrer a multiplicação, só é aplicável aos problemas em que tanto o numerador quanto o denominador são divisíveis, respectivamente, pelo numerador e pelo denominador do divisor. Neste procedimento, dois passos são eliminados: a inversão do divisor e a redução.

Vejamos exemplos:

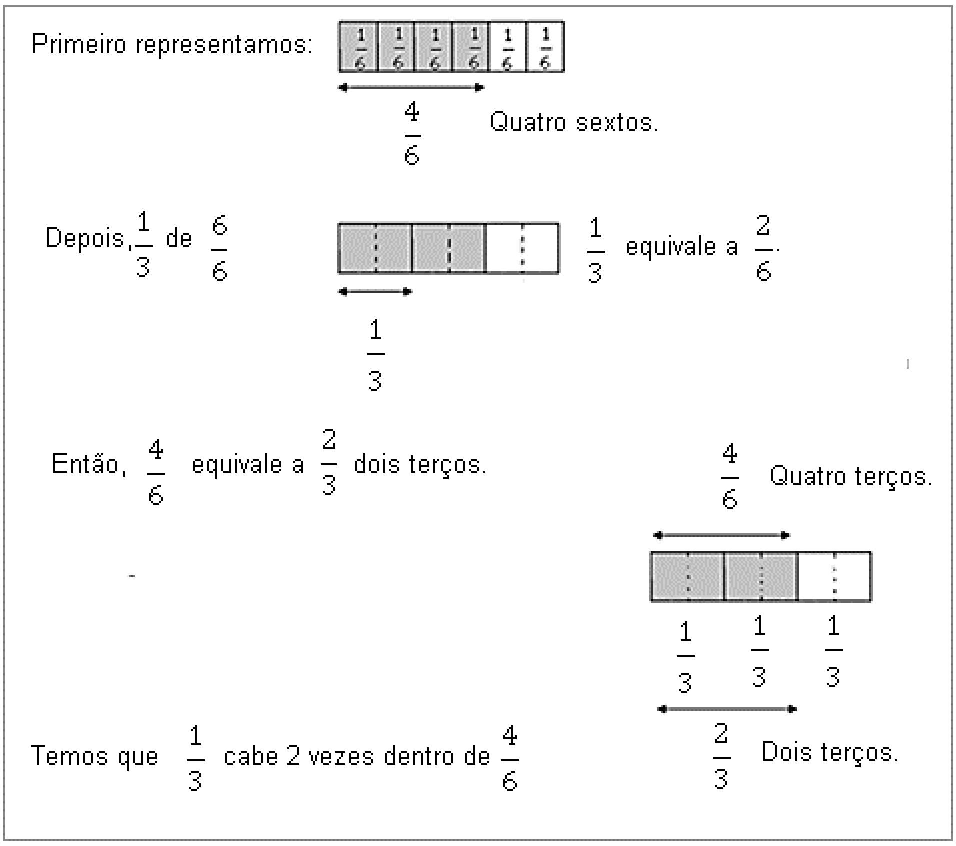
- **Divisão direta**, com **denominadores diferentes**:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \div c}{b \div d}$$

Assim, se tivermos, por exemplo: $\frac{4}{6} \div \frac{1}{3} = \frac{4 \div 1}{6 \div 3} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1} = 2$

Vejamos o passo a passo:

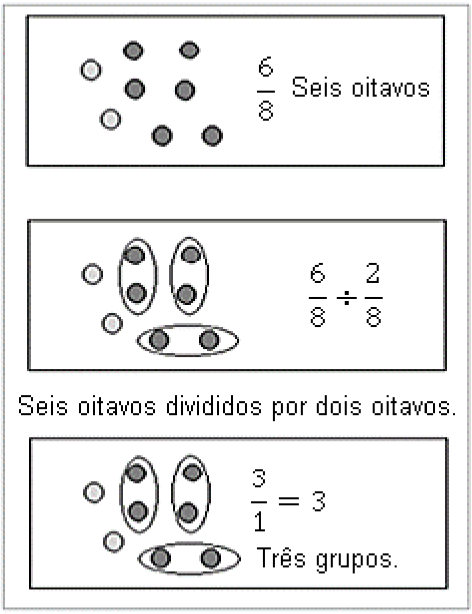
Figura 23 - Representação gráfica, numérica e por extenso: divisão direta sem multiplicação com denominadores diferentes



Fonte: Produção própria

- **Divisão direta**, com **denominadores iguais**.

Figura 24 - Representação gráfica, numérica e por extenso: divisão direta sem multiplicação com denominadores iguais



$$\frac{6}{8} \div \frac{2}{8} = \frac{6 \div 2}{8 \div 8} = \frac{3}{1} = 3$$

Fonte: Produção própria

Assim, dois oitavos $\frac{2}{8}$ de $\frac{6}{8}$ seis oitavos corresponde a três(3) grupos de 2 (dois).

A manipulação de materiais concretos e/ou virtuais, como jogos, recortes de papel, *software* e outros, devem ser utilizados para que o aluno possa fazer relação com as representações numérica e escrita, e, assim, compreender melhor o porquê dos resultados obtidos.

5 O PERCURSO METODOLÓGICO DA PESQUISA

Neste capítulo, há os aspectos, as características e o porquê da escolha pela pesquisa Qualitativa na modalidade Pedagógica. Há, também, descrições das fases (diagnóstica e intervenção pedagógica) desenvolvidas em campo, bem como, o local, o perfil dos sujeitos da pesquisa, o levantamento de dados, a análise dos dados e os resultados.

O referido estudo foi submetido à apreciação do Comitê de Ética da UEPB, com (CAAE) de número 17812319.3.0000.5187, sendo aprovado, com parecer de número 3.500.045.

5. 1 Metodologia da pesquisa

A realização deste estudo pauta-se na metodologia da Pesquisa Qualitativa, por abordar, em profundidade, o fenômeno, aclarando, além das explicações, os significados do mesmo, permitindo ao pesquisador buscar e explorar indícios no ambiente natural, através da compreensão do fenômeno estudado no contexto, uma vez que a abordagem qualitativa parte do fundamento de que há uma relação dinâmica entre o objeto, a realidade e o sujeito. Assim, para o investigador qualitativo, separar a ação, a palavra ou o gesto do seu contexto é perder de vista o significado. Para Bogdan e Biklen (1994), neste tipo de pesquisa, aspectos sociais têm uma importância particular para compreensão da história da investigação qualitativa em educação, dada a sua relação imediata com os problemas sociais e a sua posição particular a meio caminho entre a narrativa e o estudo cientifico. Assim, para os estudiosos em questão, este tipo de estudo, configura-se a partir dos seguintes aspectos: i) a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador como instrumento principal; ii) a investigação é descritiva; iii) o interesse dos investigadores qualitativos dá-se tanto pelo processo quanto pelos resultados; iv) a análise dos dados tende a ser de forma indutiva; v) o significado é de importância vital na abordagem qualitativa (BOGDAN; BIKLEN, 1994).

Lara e Molina (2011, p.130) descrevem que a pesquisa qualitativa:

1º) não segue sequência tão rígida das etapas;

2º) a maior parte do trabalho se realiza no processo de desenvolvimento do estudo; a investigação se apoia numa fundamentação teórica geral e o pesquisador realiza revisão da literatura em torno do tópico em discussão;

3º) as variáveis deverão ser descritivas e seu número pode ser grande;

4º) Busca-se uma representatividade dos sujeitos e os recursos podem ser aleatórios para fixar a amostra.

Estes autores comentam que a pesquisa qualitativa é uma “expressão genérica”, tendo em vista que mesma possui atividades de investigação que se apresentam de forma específica e que possuem características e traços comuns, sendo necessária a percepção de dois aspectos: as peculiaridades da pesquisa qualitativa e as modalidades dos tipos de investigação (LARA; MOLINA, 2011).

Desse modo, a referida pesquisa foi realizada na modalidade Pedagógica, tendo em vista a atuação da professora pesquisadora que, após obter alguns subsídios teóricos sobre a metodologia de resolução de problemas e sobre o tema fração, inseriu-se no âmbito da sala de aula, para observar, diagnosticar e desenvolver atividades, tendo como base a exploração, para problematizar e realizar ações, no sentido de encontrar meios para resolver e propor problemas envolvendo a ideia de fração. Conforme Lanchear e Knobel (2008):

- Pesquisadores pedagógicos são profissionais da sala de aula, professores que visam, com a pesquisa, investigar práticas que possam aprimorar suas atuações docentes e quiçá a de outros docentes a partir da divulgação da pesquisa realizada;
- O ponto crucial é que a pesquisa pedagógica flua de questões e ou problemas observados, percebidos pelos próprios professores;
- A pesquisa pedagógica pode ser realizada em salas de aula, bibliotecas nos lares, em comunidades e em qualquer outro lugar onde se possa obter, analisar e interpretar informações pertinentes às orientações por um pesquisador enquanto professor;
- A pesquisa pedagógica pode envolver a observação empírica de salas de aula (a própria ou a de colegas), a reflexão sistemática documentada sobre as próprias experiências ou o engajamento com textos e questões teóricas ou conceituais;
- Pode ser fundamentada em dados do presente ou do passado e até mesmo em dados relacionados ao futuro. Seu escopo e variedade potenciais são enormes.

Além do já exposto, a modalidade de pesquisa pedagógica proporciona não apenas a obtenção de dados, de experienciar algo ou algum aspecto educacional, mas, também, contribui substancialmente em situações educacionais que, de algum modo, se relacionem com o tema investigado e ou que seja do interesse educacional de maneira direta ou indireta.

5.2 O ambiente da pesquisa

A pesquisa foi desenvolvida numa escola pública localizada na zona urbana (Lagoa Seca – Paraíba). Na instituição, funciona o Ensino Infantil e o Fundamental I. A referida pesquisa centrou-se em uma turma de 5º ano, identificada como turma A, com o universo de 25 alunos, no turno da manhã. Foram realizados 15 encontros, os quais se deram, em sua maioria, no horário das 07h15 às 09h15 (duas horas de duração, ou seja, até a hora do intervalo), no período de 29 de agosto à 21 de novembro de 2019. Houve, também, alguns encontros que se estenderam pela manhã toda, das 7h15min às 11h00, com intervalo de 20 minutos.

- ✓ Perfil dos alunos

O quadro, a seguir, foi elaborado a partir de dados existentes no sistema de matrícula da referida escola, em relação a essa turma, descreve as faixas etárias e quantidade de alunos por gênero:

Quadro 14 - Composição da turma por gênero e faixa etária

<table>
<tr><td>IDADE</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td></tr>
<tr><td>QUANTIDADE</td><td>8</td><td>6</td><td>6</td><td>1</td><td>3</td><td>1</td></tr>
<tr><td>TOTAL DE ALUNOS</td><td colspan="6">25</td></tr>
<tr><td colspan="7">Quantidade de alunos por gênero</td></tr>
<tr><td colspan="4">MASCULINO</td><td colspan="3">FEMENINO</td></tr>
<tr><td colspan="4">14</td><td colspan="3">11</td></tr>
</table>

Fonte: Produção própria

Julgamos necessário frisar que, no decurso da pesquisa, houve a transferência de um aluno do sexo masculino e houve a inserção de uma aluna na turma, mantendo-se, assim, a mesma quantidade de alunos, sendo alterada, apenas, a quantidade em relação ao gênero e à faixa etária, como mostra o quadro a seguir:

Quadro 15 - Composição da turma por gênero e faixa etária, após a transferência e inserção de alunos

IDADE	10	11	12	13	14	15
QUANTIDADE	8	6	7	1	2	1
TOTAL DE ALUNOS	25					
Quantidade de alunos por gênero						
MASCULINO			FEMENINO			
13			12			

Fonte: Produção própria

Destacamos, ainda, quanto ao perfil desta turma, haver dois (2) alunos repetentes, quatro(4) alunos que são oriundos da zona rural e um (1) aluno diagnosticado com deficiência intelectual, tendo acompanhamento constante de uma cuidadora, bem como de Atendimento Educacional Especializado (AEE), com a professora deste segmento, pelo menos duas vezes na semana, com duração em torno de 50 minutos cada.

5.3 Instrumentos e levantamento de dados

O desenvolvimento desta pesquisa se deu em duas fases.

- ✓ Diagnóstica

Distribuída em 5 encontros, com aplicação de atividade diagnóstica I (16 questões referentes à fração) e atividade diagnóstica II (8 questões envolvendo problemas matemáticos com fração e seus significados essenciais). Tendo como propósito, nesta fase, observar e perceber: Que compreensão os alunos apresentam quanto à fração? Quais as dificuldades mais latentes quanto à ideia de fração e seus significados? A partir de então, buscamos obter subsídios para traçar meios e ações a serem desenvolvidas na intervenção pedagógica.

- ✓ Intervenção pedagógica

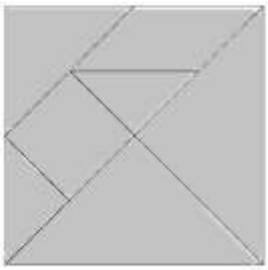
Desenvolvida em 10 encontros, a partir de aspectos e dificuldades em relação à fração, identificadas na fase diagnóstica, tendo como base, a exploração (coletiva, em dupla, em grupo e individualmente) de conteúdo (verbal e de registro), em que foram utilizadas observações, atividades digitadas, fotos e anotações das falas dos alunos. Nesta fase, utilizou-se o Tangram, explorando-o, problematizando-o, com a finalidade de explorar o todo, dividido em partes diferentes, dispondo do traçado do mesmo, para converter em partes iguais, no sentido de instigar o conhecimento dos alunos sobre Fração e sua relação com o número fracionário, diferenciando este e seu uso quanto à fração e quanto à razão.

5.3.1 O Tangram

Muitas são as versões[17] históricas atribuídas ao surgimento do quebra-cabeça milenar denominado de Tangram[18], como: “O mensageiro e o Imperador”, “O discípulo e o mestre”, “O Sr. Tan e o azulejo” e “Yu e o deus do trovão” etc. No entanto, a maioria converge para o fato de o mesmo ter surgido na China durante a dinastia Song (960 - 1279 d.C.) e que chegou à Europa no começo do século XIX.

Na China antiga, o Tangram era um dos mais famosos "testes" utilizados para estudar a inteligência humana. Os chineses conhecem o Tangram por ”Tch’i Tch´iao pan”, que significa “A sete tábuas da argúcia (habilidade, destreza)”, formado por sete peças (2 triângulos grandes, 1 triângulo médio, 2 triângulos pequenos, 1 quadrado e 1 paralelogramo) que são chamadas de "trans"[19]:

Figura 25 - Ilustração do Tangram



Fonte: Produção própria.

O quebra cabeça Tangram tem sido cada vez mais utilizado no âmbito escolar, seja como recurso didático, seja como jogo educativo ou outra finalidade. Nas aulas de matemática, tem sido utilizado, segundo Santos (2019, p.98), para introduzir ”o conceito e as operações com frações, estudar polinômios, identificar formas geométricas, compor e decompor polígonos, relacionar elementos de um polígono, explorar o conceito de área, resolver problemas”. Esta autora afirma que o uso do Tangram torna as aulas mais dinâmicas, interessantes e produtivas,

[17]Histórias. Disponível em: <https://repositório.bc.ufg.br>A cesso em:13 set.2020.
[18] Quebra-cabeça Chinês. Disponível em: https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br Acesso em: 13 set.2020
[19] Exprime o significado de além de, para além de, através de. Disponível em: <https://pt.wiktionary.org/wiki/trans->. Acesso em: 27 abr. 2020.

oportunizando-se maior discussão do conteúdo, facilitando a compreensão dos alunos e tornando-os sujeitos ativos do processo de aprendizagem.

Smole e Diniz (2016, p. 106) ressaltam que a "partir do 4º ano, o Tangram pode ser utilizado para trabalhar a conceituação de frações e operações entre frações, e auxiliar no desenvolvimento do conceito de área."

Na visão de alguns autores, o uso do Tangram nas aulas de matemática:

> enquanto recurso de ensino, colabora sim, qualitativamente e quantitativamente, de forma significativa, prazerosa e interessante para a compreensão, construção e fixação do conceito de fração, aumentando também, o nível de concentração, esforço, participação e motivação dos alunos (RODRIGUES, 2016, p. 28-29 *apud* SANTOS, 2019, p.100).

> vem de encontro às necessidades dos alunos em desenvolver a transição do conhecimento construído de forma concreta até chegar à abstração, desenvolvendo ao mesmo tempo requisitos para a construção de conhecimentos posteriores que oferece inúmeras possibilidades em despertar condições de elaborar, compreender e construir os conceitos fracionários e geométricos já vistos em anos anteriores, mediante a sua utilização e exploração. (FORNARI, 2014, p. 2 *apud* SANTOS, 2019, p.100).

> é útil, desde que o docente utilize em suas aulas [...] como um material lúdico pedagógico, enriquecendo o conhecimento do discente, encorajando a curiosidade, a reflexão, a paciência e a criatividade, ou seja, a eficácia do Tangram em sala de aula está nas mãos dos professores. Escolher o conteúdo a ser trabalhado, como: formas geométricas, simetria, frações, divisão, área, perímetro, medidas, congruência, semelhança, ângulos da figura, conforme a série em estudo, porém, é um jogo que pode ser elaborado, preparado, organizado, formado, comprado e construído pelo próprio discente. (GANGI, 2009, p. 3 *apud* SANTOS, 2019.p. 99).

Nesta pesquisa, faz-se o uso do Tangram, por considerarmos que, além de ser material manipulativo lúdico, favorece o processo de ensino e aprendizagem, possibilitando múltiplos usos, uma vez que pode-se utilizar da contextualização do jogo e da disponibilidade das peças que o compõe, para explorar, propor e resolver questões que envolvem fração. Aspectos fundamentais que condizem ao referido estudo.

5.4 Descrição e análise dos dados

Segundo Creswell (2014, p. 152), ao conduzirem a pesquisa qualitativa, os pesquisadores se envolvem diretamente na interpretação dos dados, pois" Esse tipo de análise permite ao pesquisador fazer a conexão entre o tema abordado em relação ao que diz a literatura deste e a interpretação da pesquisa realizada", podendo a pesquisa ser baseada em impressões, insights e intuição. A pesquisa, ainda, insere-se na ideia de Ciência Social, a partir do contraste ou da combinação de visões pessoais, além do uso de materiais e registros que podem ser revistos pelo investigador, sendo o entendimento que este tem destes, o instrumento chave de análise.

Visando a melhor compreensão na descrição e análise dos dados, assim como, para preservar a identidade dos alunos, nos utilizamos da sequência numérica, ordenada a partir do diário de classe, atribuindo a letra A para designar aluno, seguido do símbolo numérico: A1, A2, A3...A25 para a identificação (fala dos alunos) e, para identificar a fala da professora pesquisadora, fazemos uso da sigla PP. Ainda, visando explicar, argumentar ou comentar algum fato ou situação, fazemos uso das letras :CPP.

A análise dos dados segue concomitantemente com a descrição dos encontros e atividades realizadas, por considerarmos que, desse modo, seja mais compreensível ao leitor entender o que e como foi desenvolvida cada fase.

5.4.1 Primeira fase :Atividades Diagnósticas e Analises dos dados

Encontro 1: 29/08/2019, das 8h00 às 9h15 (contato inicial)

Neste encontro, a pesquisadora foi apresentada pela diretora e pela professora aos alunos da turma do 5º ano A, e aos pais que estiveram presentes na ocasião (convidados previamente pela gestora), para que pudessem ficar cientes da pesquisa a ser realizada e assim assinarem o termo de consentimento (por se tratar de pesquisa com menores). Foi dado espaço para que a pesquisadora se colocasse e melhor explicasse aos alunos e aos pais suas pretensões (especificamente, na referida turma) na escola.

Encontro 2: 05/09/2019, das 7h15 às 9h15

- Aplicação de **Atividade Diagnóstica - I**

Para realizar a Atividade Diagnóstica I, foram disponibilizadas 16 questões envolvendo a ideia de fração, sendo descritas e analisadas (concomitantemente) abaixo. Tais questões encontram-se, na integra, no apêndice A.

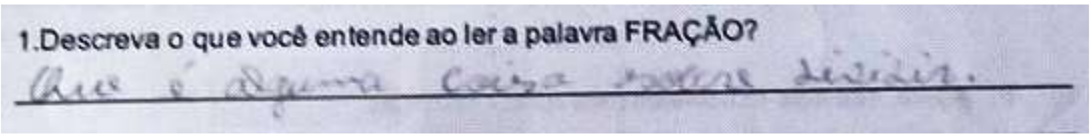
Ressaltamos que a fase diagnóstica objetiva a obtenção de percepção, quanto às dificuldades (referentes ao tema fração) apresentadas pelos alunos. Os resultados obtidos destas subsidiam o desenvolvimento da intervenção pedagógica.

Com o objetivo de verificar se o aluno tinha ideia do que seria uma fração, foi feita, na **questão 1**, a solicitação seguinte:

1. Descreva o que você entende ao ler a palavra FRAÇÃO.

Verificando que, apesar da turma apresentar alguma relação de fração com divisão, as respostas foram pouco precisas, como se pode perceber nos registros feitos por A7 e A19.

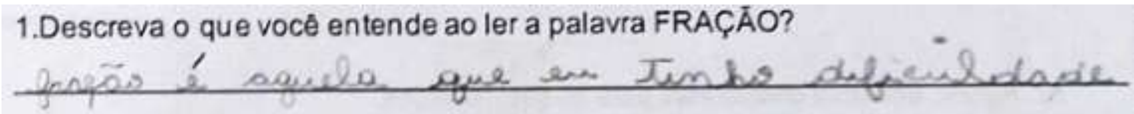
Figura 26 - Registro de A19


1.Descreva o que você entende ao ler a palavra FRAÇÃO?

Que é alguma coisa [illegible] dividir.

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 27 - Registro de A7

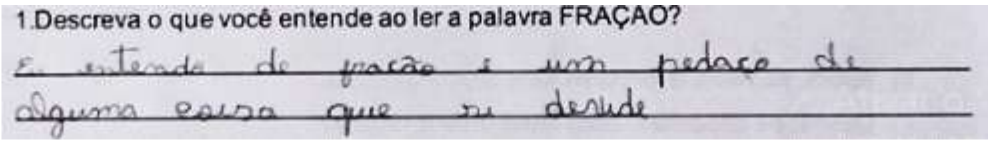

1.Descreva o que você entende ao ler a palavra FRAÇÃO?

fração é aquilo que eu tenho dificuldade

Fonte: Dados da pesquisa.

Uma variedade de respostas foram dadas a essa questão, denotando pouco ou nenhuma compreensão do significado da palavra fração. Sendo externada, dificuldade conceitual, de maneira mais acentuada, em algumas respostas, a exemplo de A13:

Figura 28 - Registro de A13


1.Descreva o que você entende ao ler a palavra FRAÇAO?

E entendo de fração é um pedaço de alguma coisa que se divide

Fonte: Dados da pesquisa.

Ficou clara, então, a necessidade de explorar o conceito de fração.

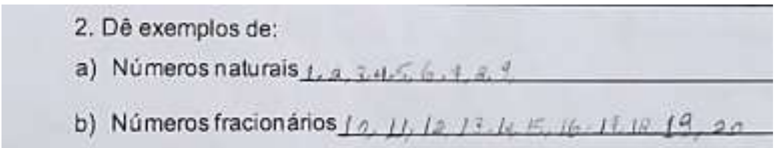
Questão 2

2. Dê exemplos de: a) Números naturais____ b) Números fracionários______________________________________

Solicita-se que o aluno dê exemplos de números naturais e números fracionários, na pretensão de perceber se o mesmo diferencia número natural de número fracionário.

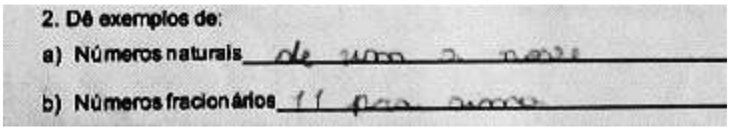
Observamos que a maioria dos alunos demonstrou compreensão registrando adequadamente números naturais e números fracionários, no entanto, um ou outro aluno externou não saber diferenciar número natural de número fracionário, como se pode perceber nos registros a seguir:

Figura 29 - Registro de A22



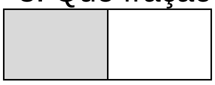
Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 30 - Registro de A6



Fonte: Dados da pesquisa.

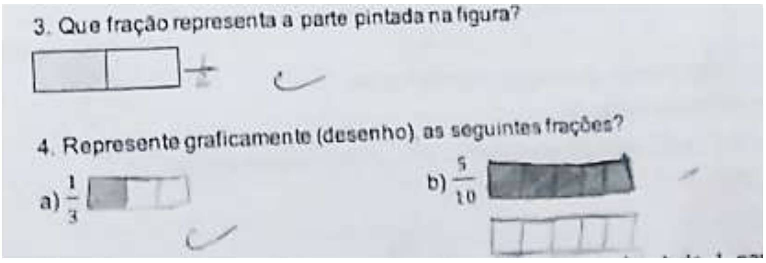
Questões 3 e 4

3. Que fração representa a parte pintada na figura?  4. Represente, graficamente (desenho), as seguintes frações. a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{5}{10}$

Objetivamos, nessas questões, verificar se o aluno faz inferência à representação gráfica (desenho), com a representação numérica, no caso, com o número fracionário e vice-versa.

Observamos que boa parte dos alunos fizeram a conversão de fração gráfica para numérica, em relação à resposta da questão 3, enquanto que, nas situações da questão 4, houve maior índice de respostas inadequadas, como se pode ver nos exemplos a seguir:

Figura 31 - Registro de A6



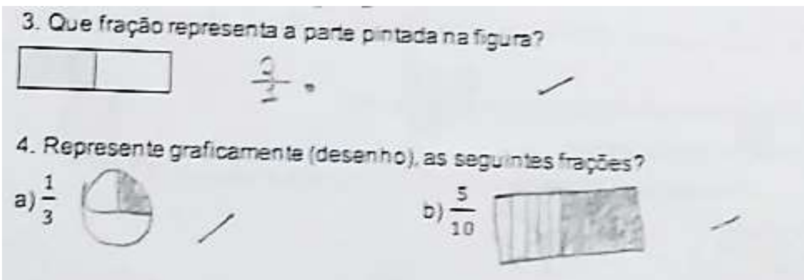
Fonte: Dados da pesquisa.

Assim como A6, outros alunos, como A10 e A16, representaram graficamente a fração $\frac{5}{10}$, a partir de dois inteiros divididos em cinco partes cada um.

Notamos que o aluno representa graficamente através do que visualiza no numerador e o que visualiza no denominador, ou seja, apesar de representar graficamente $\frac{1}{3}$ de maneira adequada, observa-se que não há compreensão fracionária, uma vez que, no item *b*, a representação deveria ser dada a partir da divisão de um inteiro em 10 partes.

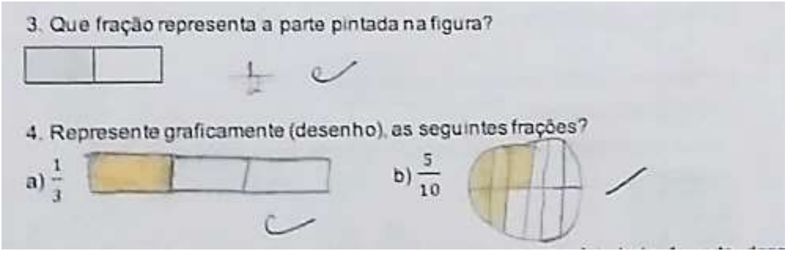
Quanto à divisão da fração na representação gráfica, percebe-se que falta aos alunos, representados pelos registros de A3 e A13 (abaixo), compreensão quanto à igualdade das partes fracionadas, embora expressem compreensão em relação à quantificação numérica na indicação gráfica. Eles precisam apreender percepção pictórica de igualdade das partes de um todo, para que melhor sejam quantificadas e visualizadas.

Figura 32 - Registro de A3



Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 33 - Registro de A13



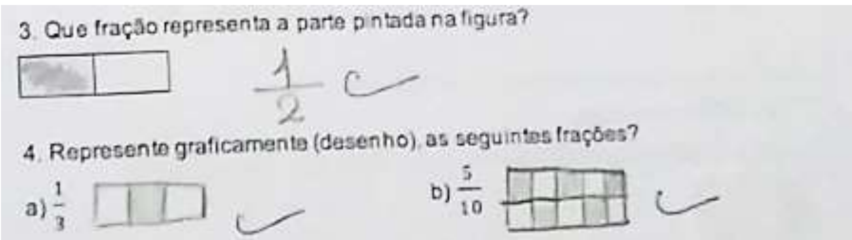
Fonte: Dados da pesquisa.

Na representação de A13, item b da questão 4, o aluno representa adequadamente a indicação do número de partes admitidas, porém, a representação do todo dividido (numerador), deveria ser de 10 partes, no entanto, o aluno representou em 12 partes, deixando claro que a inadequação da resposta ocorre, principalmente, em virtude da representação equivocada e pela não verificação da mesma.

Supõe-se que isto tenha ocorrido pelo fato de, geralmente, a fração ser trabalhada a partir da representação gráfica para conversão representacional de número fracionário e quase não se trabalhar partindo do inverso, ou seja, da representação numérica para representação gráfica.

De toda a turma, apenas A12 apresentou, de modo mais evidente, ter compreensão da fração indicada em número fracionário, convertendo adequadamente em ambas as questões:

Figura 34 - Registro de A12



Fonte: Dados da pesquisa.

Questão 5

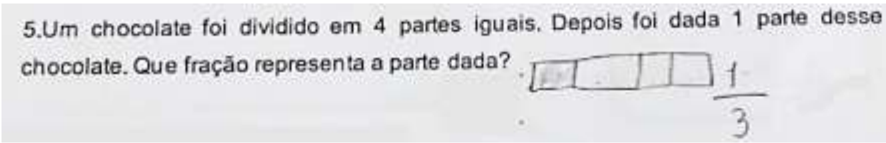
5. Um chocolate foi dividido em 4 partes iguais. Depois foi dada 1 parte desse chocolate. Que fração representa a parte dada?

Nesta questão, visamos o entendimento do aluno em relação a uma fração em sua representação gráfica e em número fracionário, apenas pela leitura e interpretação da situação, sem nenhum recurso ilustrativo.

Metade dos alunos da referida turma responderam adequadamente, no entanto, colocou, em sua maioria, apenas a representação numérica, poucos colocaram a representação gráfica e numérica.

Da outra metade da turma, 3 alunos deixaram a questão sem resposta e os demais responderam de maneira inadequada, demonstrando dificuldade de compreensão, inclusive, representando como resposta ao questionamento feito, uma fração na forma gráfica e outra fração (diferente) representada em número fracionário, ou seja, duas respostas bem diferentes para o mesmo questionamento, a exemplo de:

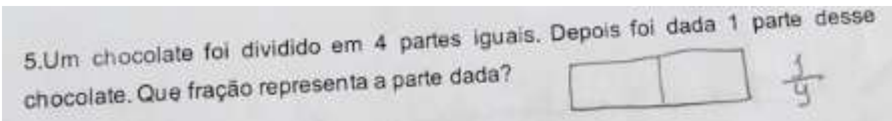
Figura 35 - Registro de A14


5.Um chocolate foi dividido em 4 partes iguais. Depois foi dada 1 parte desse chocolate. Que fração representa a parte dada? $\frac{1}{3}$

Fonte: Dados da pesquisa.

No registro feito por A14, a representação gráfica é feita com a partição do todo em 4 partes, e dele admite-se 1 parte, ou seja, $\frac{1}{4}$, mas A14 representa em número fracionário $\frac{1}{3}$. Podemos perceber no registro abaixo feito por A18, que representa o todo particionado ao meio, sem nenhuma indicação de fração admitida e indica em número fracionário $\frac{1}{4}$. Os alunos que assim fizeram denotam não perceberem a relação direta que há entre a fração representada graficamente com a representação da mesma fração em número fracionário e vice-versa.

Figura 36 - Registro de A18


5.Um chocolate foi dividido em 4 partes iguais. Depois foi dada 1 parte desse chocolate. Que fração representa a parte dada? $\frac{1}{4}$

Fonte: Dados da pesquisa.

Uma grande parcela da turma deixou a questão em branco. Isso pode ter ocorrido pelo fato de o aluno ainda apresentar lacunas no seu processo de leitura e interpretação ou pelo fato de realmente ainda precisar de representações gráficas, para melhor entender o questionamento feito.

Questão 6

6. Como se lê as seguintes frações?

$\frac{1}{2}$ ____________________________

$\frac{1}{13}$ ____________________________

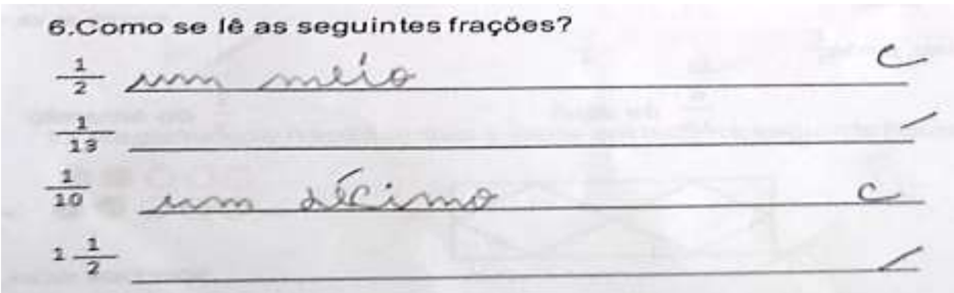
$\frac{1}{10}$ ____________________________

$1\frac{1}{2}$ ____________________________

Buscando averiguar a compreensão que o aluno apresenta quanto a leitura e escrita de fração, representada por número fracionário e por número misto, foram destacadas frações cujo numerador é sempre 1, com intuito de tornar mais clara e objetiva o entendimento da leitura de frações feita pelo aluno, uma vez que a leitura feita por numeradores não muda, é sempre analógica aos números naturais, diferente da leitura de denominadores.

Notadamente, alguns alunos apresentam maior facilidade em identificar números fracionários com denominadores até 10, demonstrando dificuldade em frações com leitura de avos e número misto, a exemplo de A24 que, apesar de fazer o registro adequado de $\frac{1}{2}$, mais adiante o registro do número misto $1\frac{1}{2}$, fora deixada em branco:

Figura 37 - Registro de A24



6.Como se lê as seguintes frações?

$\frac{1}{2}$ um meio C

$\frac{1}{13}$

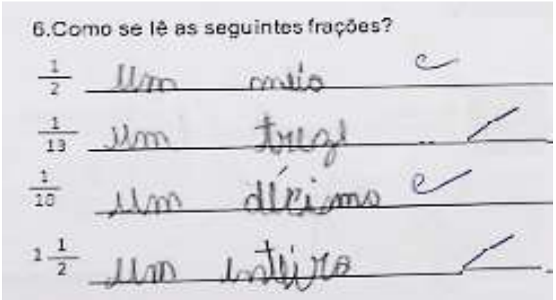
$\frac{1}{10}$ um décimo C

$1\frac{1}{2}$

Fonte: Dados da pesquisa.

Ao responderem a questão de modo parcial ou parcialmente correta, os alunos denotam processo de aquisição de leitura e escrita de fração e de número fracionário, ainda em construção, como podemos observar nos registros de A7 e de A14:

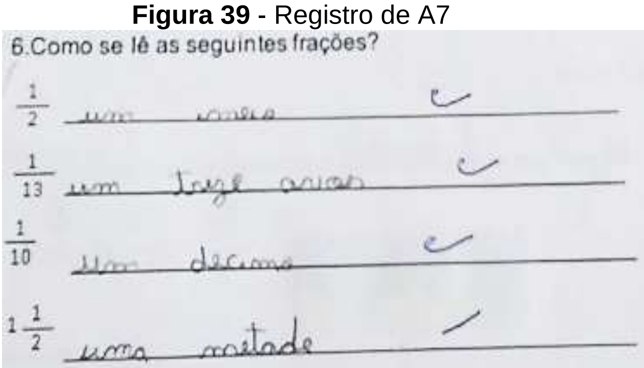
Figura 38 - Registro de A14



Fonte: Dados da pesquisa.

Notamos que A14, embora tenha respondido toda a questão, a acerta de modo parcial, tendo em vista as respostas dadas para $\frac{1}{13}$ sem o acréscimo da palavra avos, o que indica que o mesmo ainda precisa se apropriar da escrita e leitura adequada em frações cujo denominador requeira a terminologia avos, assim como também no uso, escrita e leitura de números mistos, tendo em vista que responde atribuíndo registro apenas para uma parte do número misto dado, ou seja, demonstra dificuldade em compreender que este número é formado a partir de um número natural (inteiro) mais um número farcionário.

Figura 39 - Registro de A7



Fonte: Dados da pesquisa.

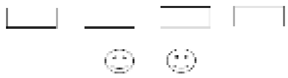
Percebemos que o aluno A7 compreende e registra adequadamente por extenso $\frac{1}{2}$, porém, no número misto, descreve como sendo metade, havendo, portanto, conflito não apenas na identificação adequada do número misto, mas, também, quanto ao significado das palavras meio e metade, não ficando evidente, na situação, se o aluno compreende que são palavras que possuem o mesmo sentido.

Diante do observado, entendemos a necessidade de aprofundar, na intervenção de sala de aula, a leitura e escrita de fração, de número fracionário e de número misto.

Questão 7

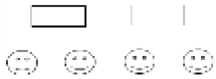
7. Observe!

a) Ao dividir igualmente os quatro chocolates para as duas crianças, quanto cada uma deverá receber?



R:____

b) Agora, são dois chocolates para quatro crianças. Quanto de chocolate cada criança deve receber?



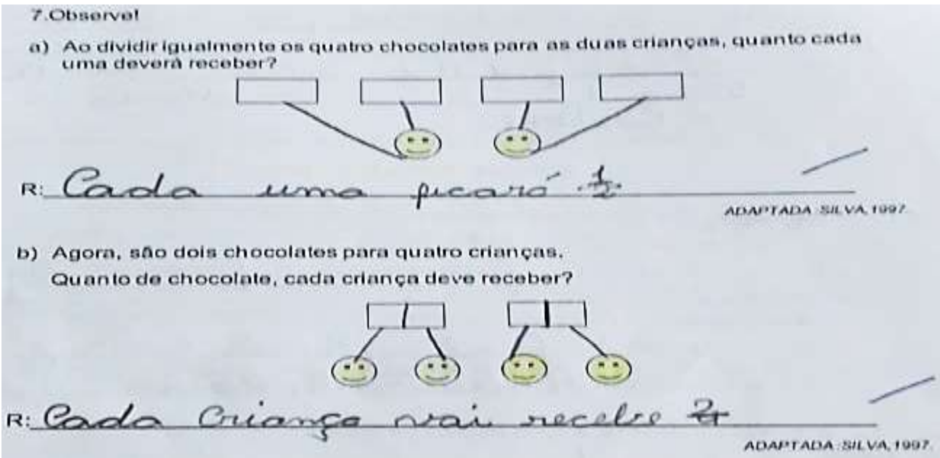
R:____

Adaptada :SILVA,1997.

A observação, ocorre quanto à distribuição de quantidades, a inversão de distribuição pela divisão em maior ou menor quantidade.

Ao analisar as respostas dadas nesta questão, mais da metade da turma respondeu de modo parcial, ou seja, responderam pela representação gráfica de maneira correta, porém, inadequadamente por representação numérica e ou por extenso, a exemplo de A12:

Figura 40 - Registro de A12



7.Observe!

a) Ao dividir igualmente os quatro chocolates para as duas crianças, quanto cada uma deverá receber?

R: Cada uma ficará $\frac{1}{2}$

ADAPTADA :SILVA,1997

b) Agora, são dois chocolates para quatro crianças.
Quanto de chocolate, cada criança deve receber?

R: Cada Criança vai receber $\frac{2}{4}$

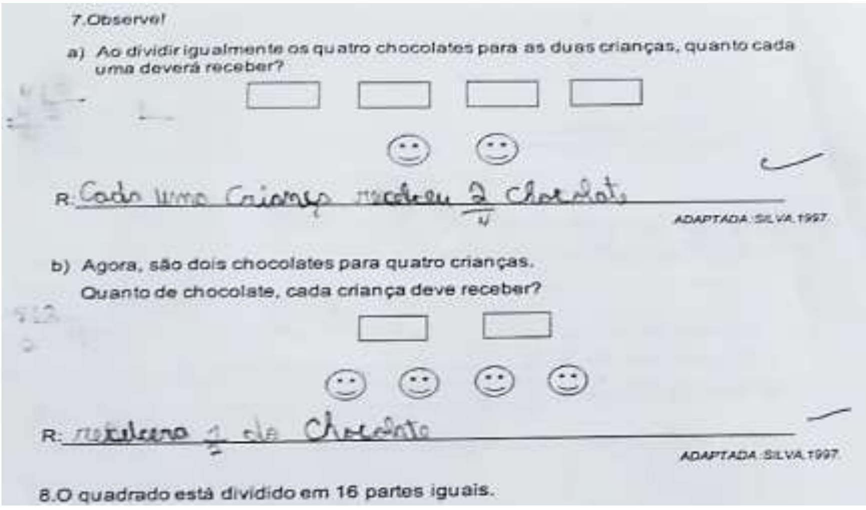
ADAPTADA :SILVA,1997

Fonte: Dados da pesquisa.

Observamos que, no item *a*, desta questão, a resposta dada não fica clara ao que se refere $\frac{1}{2}$, isto é: Um meio de quê? Do todo, que são quatro chocolates? Essa observação se faz tendo em vista que, no item *b*, a resposta é dada por $\frac{2}{4}$, enquanto que, na representação gráfica, tem-se 2 inteiros divididos ao meio, o que corresponde a $\frac{1}{2}$ para cada criança e o registro feito por A12 foi de $\frac{2}{4}$ para cada criança. Os alunos que assim registraram denotam dificuldade em compreender a quantidade de partição de um inteiro (todo) e sua distribuição quotitiva indicada pelo numerador, sobretudo, quando esta se dá por mais de um inteiro, ainda que se auxiliem da representação gráfica.

Na resposta apresentada abaixo, dada por A8, no item *a*, a partir da descrição “cada uma criança”, ou seja, cada criança irá receber $\frac{2}{4}$, fica subentendido que se refere ao todo (4 chocolates):

Figura 41 - Registro de A8



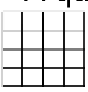
Fonte: Dados da pesquisa.

Já quanto à resposta apresentada no item *b*, assim como o que foi observado em A12, verifica-se que o entendimento pode ser de equívoco, pela falta de informação a que se refere $\frac{1}{2}$.

As situações postas sugerem que boa parte da turma apresenta pouco conhecimento em diferenciar a quantidade de partes em que o(s) todo(s) foram dividido(s), com a quantidade de partes admitida. Denotam, ainda, a necessidade de explorar a leitura e a escrita (extenso) de frações.

Questão 8

8. O quadrado está dividido em 16 partes iguais.
Pinte 12 dessas partes.
A quê fração do quadrado corresponde a parte que você pintou?

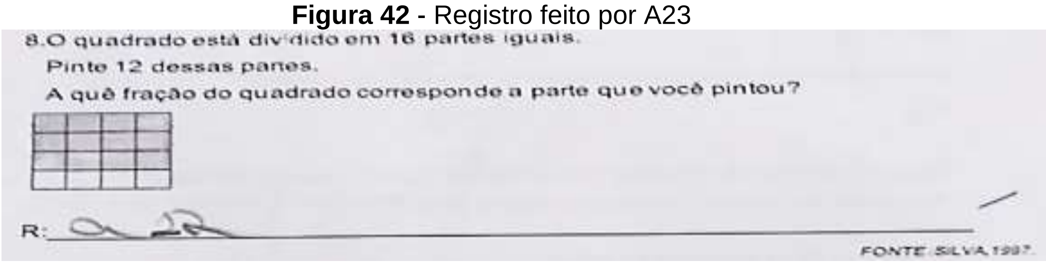


R:______________________________

Adaptadas: Silva 1997.

Objetivando verificar se a representação gráfica auxilia na compreensão e resultado da situação posta, observou-se que metade da turma apresentou dificuldades nesta questão, apesar de ter se utilizado do ícone gráfico e das indicações feitas adequadamente, isto é, ter representado a parte indicada a partir da pintura. Ao fazer o registro numérico, expressaram dificuldade, colocando em número natural, a exemplo de A23:

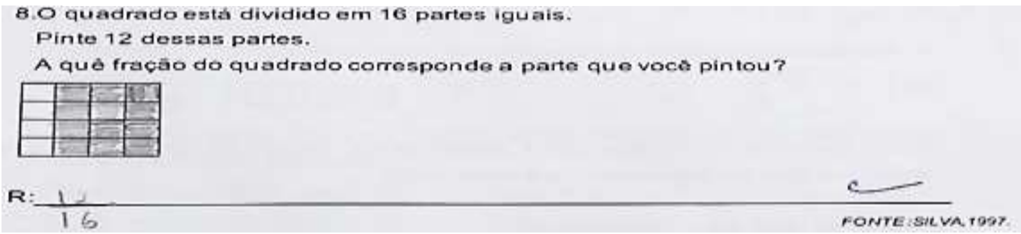
Figura 42 - Registro feito por A23


8.O quadrado está dividido em 16 partes iguais.
Pinte 12 dessas partes.
A quê fração do quadrado corresponde a parte que você pintou?
R:
FONTE:SILVA,1997.

Fonte: Dados da pesquisa.

Isso pode ter ocorrido pelo fato de não se aterem a relação da fração com o número fracionário. Outro aspecto observado foi a de que a grande maioria dos alunos deixou de responder por extenso, mesmo os que expressaram ter compreendido e registrado numericamente de maneira correta, a exemplo de A16:

Figura 43 - Registro feito por A16

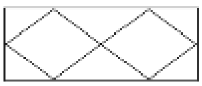

8.O quadrado está dividido em 16 partes iguais.
Pinte 12 dessas partes.
A quê fração do quadrado corresponde a parte que você pintou?
R: $\frac{12}{16}$
FONTE:SILVA,1997.

Fonte: Dados da pesquisa.

Questão 9

9. Na figura abaixo, pinte:

$\frac{1}{4}$ de verde $\frac{4}{16}$ de azul $\frac{1}{2}$ de amarelo



Adaptadas: Silva 1997.

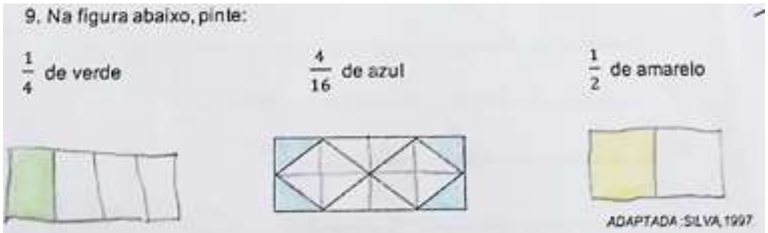
Visando averiguar se os alunos compreendem a fração partindo do todo dividido em partes diferentes, que, para quantificar com mais exatidão, este todo deve ser particionado de modo que as partes fiquem em tamanhos iguais, observamos que todos os alunos da referida turma apresentaram dificuldades em realizar a proposta, alguns, inclusive, deixaram a questão em branco. Outros representaram parcialmente correto, demonstrando conflito de entendimento, a exemplo de A23.

Figura 44 - Registro feito por A23

Fonte: Dados da pesquisa.

Ao analisar a questão, um dos aspectos observados, foi a dificuldade em representar as frações dadas, num mesmo todo. Alguns alunos entendem que há um todo para cada fração dada, a exemplo destaca-se, abaixo, a resposta dada por A16, em que, apesar de ter redividido o todo dado, ilustrou outros todos, indicando uma fração para cada um:

Figura 45 - Registro feito por A16



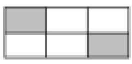
Fonte: Dados da pesquisa.

A resposta do aluno reflete o que já foi observado em outras questões, ou seja, a maior dificuldade de representar a fração dada numericamente para ser representada graficamente.

Questões 10 e 11

10. Assinale com um X as figuras abaixo que representam a fração $\frac{2}{6}$

b)  b) 

g)  d) 

11. A parte pintada na figura pode ser representada por quais frações?

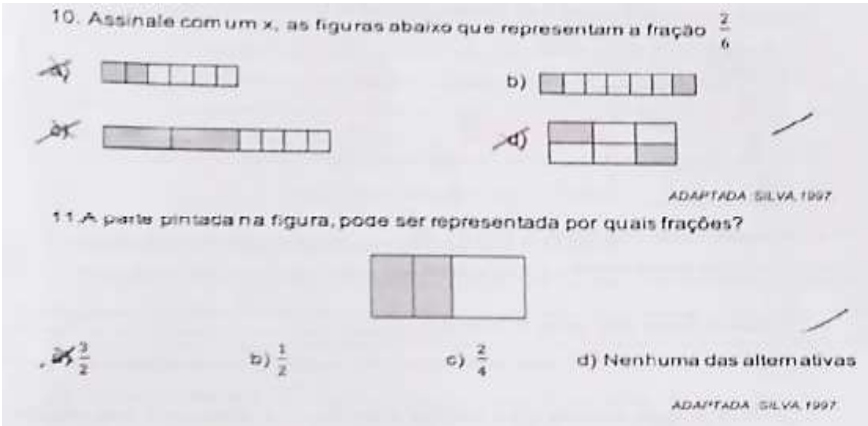
a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{2}{4}$

Adaptadas: Silva 1997.

Essas questões, abordam a equivalência de frações pela representação gráfica e de números fracionários, visando perceber se, a partir das respostas dadas pelo aluno, o mesmo entende que uma fração pode ser convertida/revertida e representada a partir de outras divisões e indicações de outros números fracionários e, ainda assim, manter a mesma quantidade.

Nestas questões, observamos o que é apontado na literatura acadêmica, isto é, geralmente o aluno vê a fração a partir da quantidade de partes, sem ter real entendimento quanto ao tamanho dessas partes. Aspecto observado em quase todas as respostas dadas, a exemplo de A10:

Figura 46 - Registro feito por A10


10. Assinale com um x, as figuras abaixo que representam a fração $\frac{2}{6}$

a) b)

c) d)

ADAPTADA SILVA 1997

11. A parte pintada na figura, pode ser representada por quais frações?

a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{2}{4}$ d) Nenhuma das alternativas

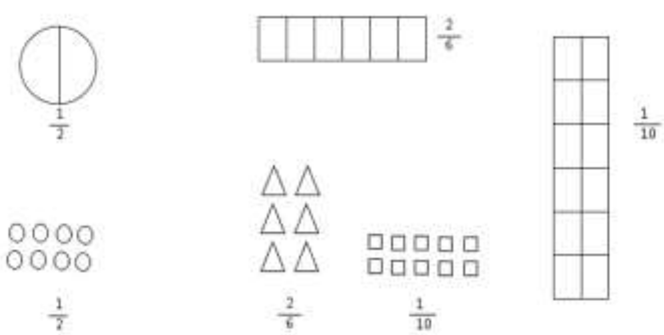
ADAPTADA SILVA 1997

Fonte: Fonte: Dados da pesquisa.

Os alunos que assim responderam visualizam a quantidade de partes de um todo, independentemente do tamanho das partes ou ordem do denominador e numerador.

Questões 12 e 13

12. Em cada figura, pinte a fração indicada.



13. Registre que fração indica a parte pintada na seguinte figura.

Essas questões objetivam saber se o aluno compreende a representação de frações discretas (partição de quantidade - conjunto de inteiros), diferenciando da fração continua (partição de um todo).

A priori*,* percebe-se que a maior parte da turma (17 alunos) apresenta certa compreensão em relação à fração indicada de maneira contínua, identificando-a quando observada a representação gráfica e numérica simultaneamente. No entanto, ao comparar e averiguar o porquê da dificuldade expressa, quanto às respostas dadas em relação à fração discreta, supõe-se que, assim como nas questões 10 e 11, o aluno, na verdade, visualiza o numerador e o denominador, atribuindo a estes uma leitura individualizada, identificando a quantidade a ser admitida/pintada e a quantidade dividida, sem considerar e/ou relacionar estas ao tipo de todo. Podemos observar o registro feito por A16:

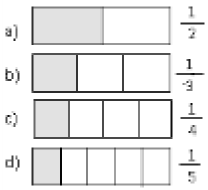
Figura 47 - Registro feito por A16

Fonte: Dados da pesquisa

A identificação feita na atividade proposta ocorre apenas a partir do numerador. Acreditamos que isso se explica por ainda não terem, de fato, compreensão da relação fracionária, assim como também da mesma na configuração do número fracionário. E, também, devido ao fato de os alunos terem tido poucas ou nenhuma oportunidade de conhecer a fração a partir de quantidades discretas, tendo em vista que, de modo geral, quase não se discute e ou se aprofunda este contéudo, especialmente em anos anteriores ao 5º ano.

Questão 14

14. Observe a parte pintada e as frações indicadas em cada figura.

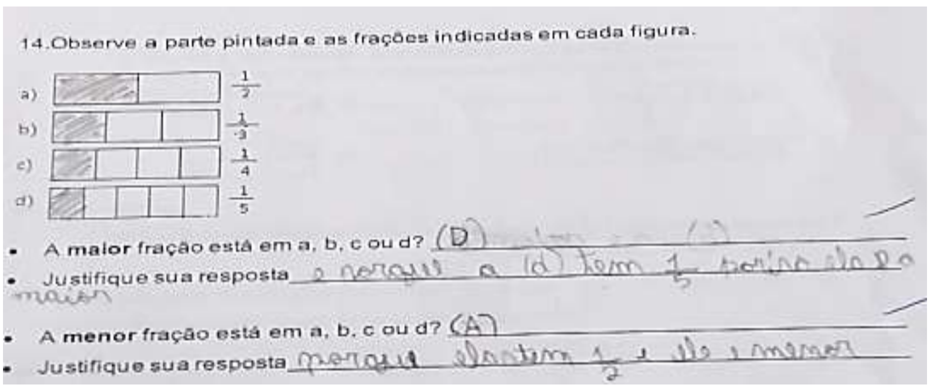


- A **maior** fração está no item a, b, c ou d? ___________________________
  Justifique sua resposta____
- A **menor** fração está no item a, b, c ou d? ___________________________
  Justifique sua resposta______________________________________

A questão 14 foi proposta visando averiguar como e se os alunos compreendem a fração a partir do tamanho e ou da ordem. Distribuímos partindo de frações unitárias, por acreditarmos ser esta a mais viável na obtenção visual (gráfica) e numérica ao entendimento dos alunos.

Ao analisar esta questão, percebemos que quase dois terços da turma apresentaram dificuldades, mesmo com a disposição gráfica das frações dadas em ordem decrescente, ou seja, da maior para a menor. Acreditamos que tais dificuldades estão relacionadas ao fato de alguns alunos perceberem a fração pela quantidade de partes divididas de um todo, ou seja, entendem que quanto mais partes, maior a fração, equivocando-se e/ou fazendo analogia com o que aprenderam na quantificação dos números naturais, como podemos conferir nas respostas dadas por A8:

Figura 48 - Registro feito por A8

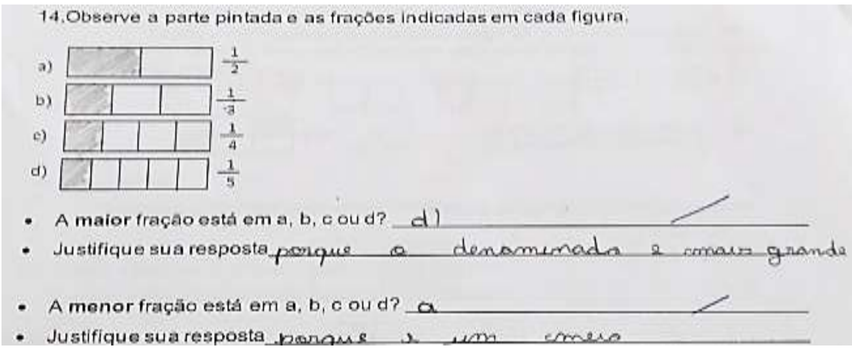

14.Observe a parte pintada e as frações indicadas em cada figura.

a) 1/2
b) 1/3
c) 1/4
d) 1/5

- A **maior** fração está em a, b, c ou d? (D)
- Justifique sua resposta o porque a (d) tem 1/5 partes ela é maior
- A **menor** fração está em a, b, c ou d? (A)
- Justifique sua resposta porque ela tem 1/2 e ela é menor

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 49 - Registro feito por A7

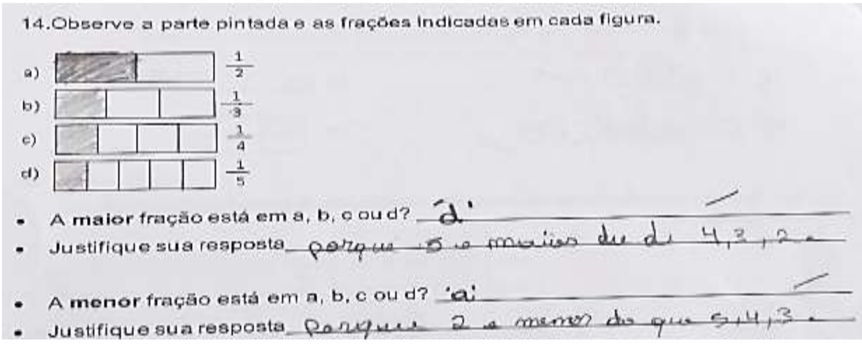

14.Observe a parte pintada e as frações indicadas em cada figura.

a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{1}{3}$
c) $\frac{1}{4}$
d) $\frac{1}{5}$

- A **maior** fração está em a, b, c ou d? d)
- Justifique sua resposta porque o denominador é o mais grande
- A **menor** fração está em a, b, c ou d? a
- Justifique sua resposta porque é um ...

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 50 - Registro feito por A3


14.Observe a parte pintada e as frações indicadas em cada figura.

a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{1}{3}$
c) $\frac{1}{4}$
d) $\frac{1}{5}$

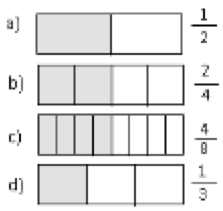
- A **maior** fração está em a, b, c ou d? 'd'
- Justifique sua resposta porque 5 é maior do que 4,3,2.
- A **menor** fração está em a, b, c ou d? 'a'
- Justifique sua resposta porque 2 é menor do que 5,4,3.

Fonte: Dados da pesquisa.

A partir da resposta dada por A3, fica ainda mais notória a analogia feita aos números naturais, ao descrever o porquê de considerar o item *d*, como sendo a maior em relação às demais.

Questão 15

15. Observe a parte pintada e as frações indicadas na disposição das seguintes figuras.

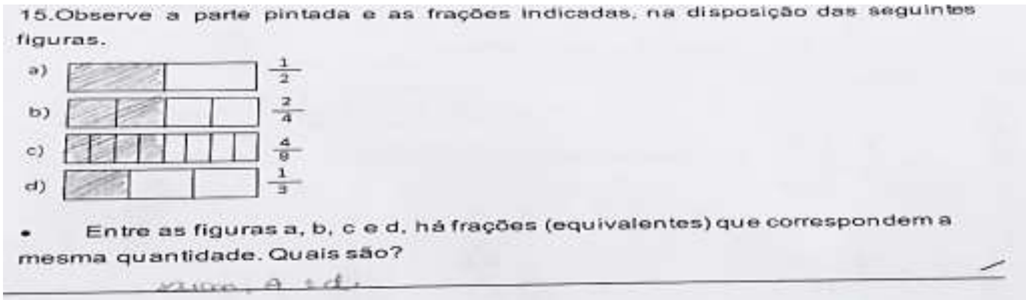


- Entre as figuras dos itens a, b, c e d, há frações equivalentes (que corresponde a mesma quantidade). Quais são? ________________________

Na questão 15, o propósito está especificamente voltado para a equivalência de frações, portanto, o desafio está em perceber as frações equivalentes entre as frações dadas.

Nesta questão, apenas 2 alunos responderam adequadamente, os demais apresentaram dificuldade em perceber/entender que uma fração pode ser representada por outra fração, sendo uma a equivalência da(s) outra(s) e vice-versa. Alguns deixaram sem resposta, outros responderam aleatoriamente e/ou atribuindo sentido ao que visualizavam na representação gráfica ou ao que percebiam em comum, entre os denominadores e ou entre os numerados, a exemplo de A1:

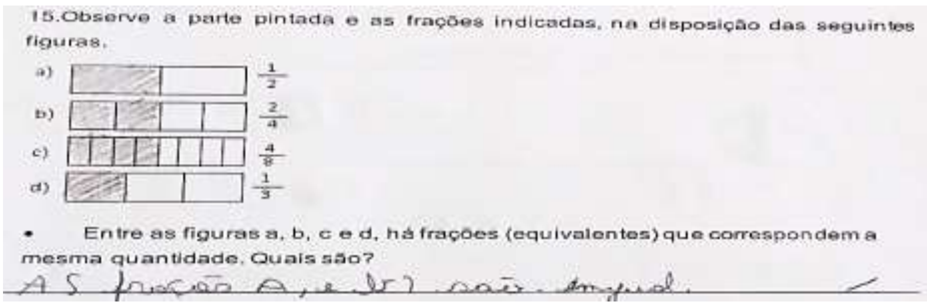
Figura 51 - Registro feito por A1



Fonte: Dados da pesquisa.

Observando e analisando a resposta dada por A1 e, também, a resposta de outros alunos que assim responderam, percebe-se que estes entendem a equivalência a partir da quantidade admitida nas frações *a* e *d*, ou seja, tanto na representação gráfica quanto na numérica, atribuem a equivalência em relação ao numerador, neste caso o 1.

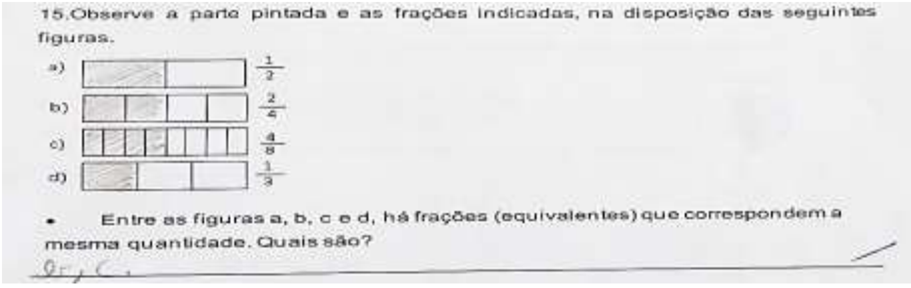
Figura 52 - Registro feito por A4



Fonte: Acervo da pesquisadora

No exemplo de resposta dada por A4, supõe-se que os alunos que assim responderam partem da “lógica” entre denominador e numerador das frações indicadas em *a* e *b*, ou seja, do numerador 2 na fração *a*, com o denominador na fração *b*. Neste mesmo sentido, outros alunos responderam de maneira similar, a exemplo de A21, neste caso, com o denominador 4 e com o numerador 4, das frações indicadas em *b* e *c.*

Figura 53 - Registro feito por A21


15.Observe a parte pintada e as frações indicadas, na disposição das seguintes figuras.

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{2}{4}$

c) $\frac{4}{8}$

d) $\frac{1}{3}$

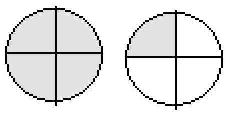
• Entre as figuras a, b, c e d, há frações (equivalentes) que correspondem a mesma quantidade. Quais são?

Fonte: Acervo da pesquisadora

Diante das dificuldades observados nas respostas dadas pela maioria dos alunos, a equivalência é um aspecto crucial a ser explorado na intervenção pedagógica.

Questão16

16. Observe! O resultado dessa operação poderá ser:



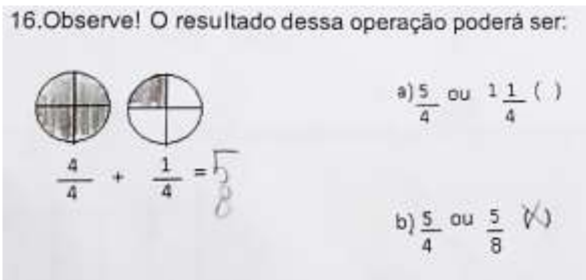
$\frac{4}{4} + \frac{1}{4} =$

a) $\frac{5}{4}$ ou $1\frac{1}{4}$ ( )

b) $\frac{5}{4}$ ou $\frac{5}{8}$ ( )

Objetivando verificar a compreensão do aluno quanto à divisão e tomadas de partes de mais de um todo, observou-se que a grande maioria concebe as partes admitidas de mais de um todo, somando denominador por denominador e numerador por numerador, a exemplo de A17:

Figura 54 - Registro feito por A17


16.Observe! O resultado dessa operação poderá ser:

$\frac{4}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$

a) $\frac{5}{4}$ ou $1\frac{1}{4}$ ( )

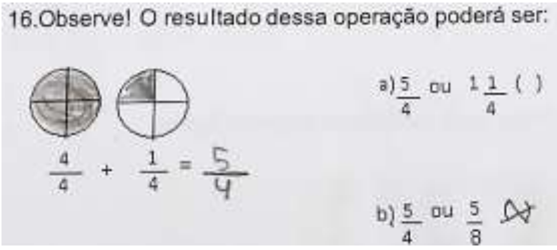
b) $\frac{5}{4}$ ou $\frac{5}{8}$ (X)

Fonte: Dados da pesquisa.

Os alunos que assim responderam partem da “lógica” de adicionar analogicamente da maneira como apreenderam a fazer adições com número naturais. Ficando notório que ainda precisam adquirir compreensão em relação à operação de adição de fração.

Alguns alunos realizaram satisfatoriamente a operação de adição com denominadores iguais, no entanto, ainda expressam conflito de entendimento, como se pode perceber no registro feito por A11:

Figura 55 - Registro feito por A11



Fonte: Dados da pesquisa.

Analisando respostas similares a que foi dada por A11, percebe-se que, embora tenham realizado a adição (somando apenas o numerador e repetindo o denominador que é igual), lhes falta compreensão quanto à equivalência numérica entre o número fracionário e o número misto.

Encontro 3: 12/09/2019, das 7h15 às 9h15 com duração de 2 horas

- Aplicação de **Atividade Diagnóstica - II**

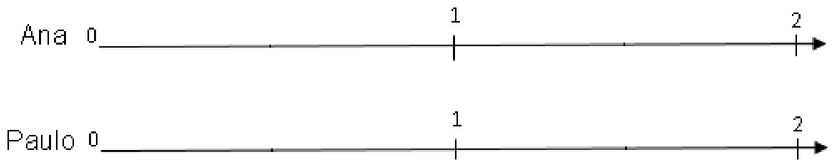
Para realizar a atividade diagnóstica II, foram disponibilizadas 8 questões envolvendo problemas com os significados essenciais da fração. O significado medida se estende no sentido de verificar se os alunos diferenciam fração de razão, aspecto que consideramos importante na compreensão do conceito de fração. São descritas e analisadas, abaixo, as questões consideradas mais latentes, em termos de dificuldade apresentadas pelos alunos. No apêndice B, encontra-se a atividade na íntegra.

Esta atividade parte do contexto dos festejos juninos, período no qual os alunos vivenciaram na escola, inclusive, com barracas de comidas típicas, pescaria, danças, que ocorrem anualmente nesta instituição, não apenas para vivenciar os festejos juninos, mas, também, para prestigiar a cultura nordestina e arrecadar verbas com a venda das comidas típicas (doadas por professores, funcionários), que são convertidas posteriormente (outubro) em festejos para comemorar o dia da criança.

Leitura informativa do texto: Festas juninas (Leitura feita individualmente pelos alunos e, posteriormente, pela pesquisadora, no intuito de esclarecer o sentido de algumas palavras). O texto encontra-se em anexo.

Questão 1

1. Para ganharem maçã do amor, Ana e Paulo precisam responder um desafio. Ana deverá representar $\frac{1}{2}$ numa reta numérica e Paulo deverá representar $\frac{1}{4}$ em outra reta numérica. Como deverá ficar cada representação?

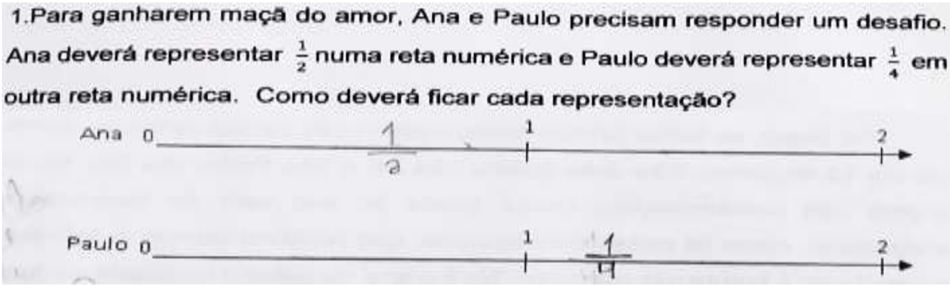


Esta questão objetiva a identificação, pelo aluno, da divisão fracionária com significado de **número** a partir da reta numérica. Alguns estudos apontam que essa abordagem é muito pouco explorada nos livros didáticos.

Pressupondo que os mesmos ainda não tivessem tido experenciado oportunidade de fração com significado de número, julgou-se viável dispor de uma reta para Ana e outra para Pedro, pensando justamente na dificuldade que o aluno poderia ter em compreender a representação numérica na reta, ainda mais de dois números fracionários numa mesma reta.

A partir da análise feita das respostas apresentadas ou deixadas sem resposta, observa-se que todos os alunos da referida turma apresentam grandes dificuldades de entendimento da fração com significado de fração de número. Alguns responderam deduzindo apenas que $\frac{1}{4}$ é maior que $\frac{1}{2}$, apenas por visualizar o 4 como sendo maior que 2, tal qual em números naturais, a exemplo de A8:

Figura 56 - Registro feito por A8



1.Para ganharem maçã do amor, Ana e Paulo precisam responder um desafio. Ana deverá representar $\frac{1}{2}$ numa reta numérica e Paulo deverá representar $\frac{1}{4}$ em outra reta numérica. Como deverá ficar cada representação?

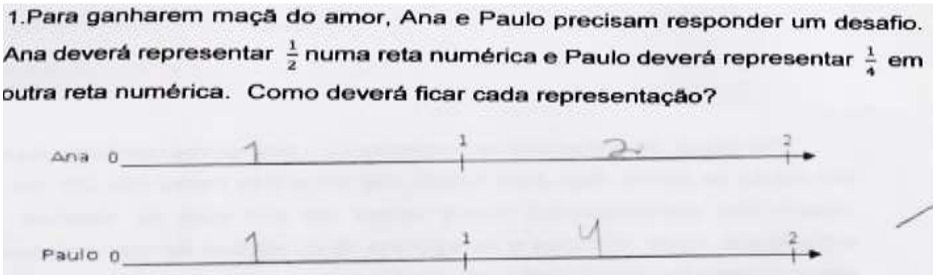
Ana 0 $\frac{1}{2}$ 1 2

Paulo 0 1 $\frac{1}{4}$ 2

Fonte: Dados da pesquisa.

Outros distribuíram os números fracionários na reta numérica, sem ter nenhum nexo, colocando, inclusive, de maneira paralela, como se ambos fossem equivalentes, como se pode ver nas figuras a seguir:

Figura 57 - Registro feito por A4



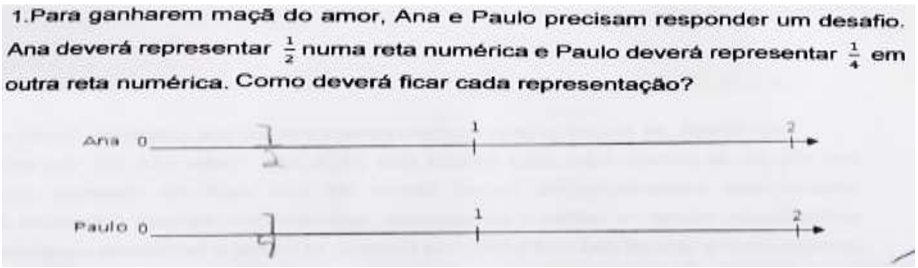
1.Para ganharem maçã do amor, Ana e Paulo precisam responder um desafio. Ana deverá representar $\frac{1}{2}$ numa reta numérica e Paulo deverá representar $\frac{1}{4}$ em outra reta numérica. Como deverá ficar cada representação?

Ana 0 1 1 2 2

Paulo 0 1 1 4 2

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 58 - Registro feito por A2



1.Para ganharem maçã do amor, Ana e Paulo precisam responder um desafio. Ana deverá representar $\frac{1}{2}$ numa reta numérica e Paulo deverá representar $\frac{1}{4}$ em outra reta numérica. Como deverá ficar cada representação?

Ana 0 $\frac{1}{2}$ 1 2

Paulo 0 $\frac{1}{4}$ 1 2

Fonte: Dados da pesquisa.

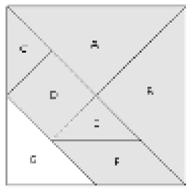
Nota-se ainda que, apesar de A2 representar os números fracionários dentro da margem de 0 a 1, o fez de maneira aleatória, representando $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$ de forma equivalente.

Verificamos que nenhum dos alunos apresenta entendimento de que cada número na sequência da reta numérica corresponde a um inteiro.

Questão 2

2. Para ornamentar o salão para a festa junina, foram feitas algumas bandeirolas e balões com os alunos do 5º ano. Depois de ajudarem, foram recrear e um dos alunos que estava brincando com um Tangram, percebeu que a disposição da peças no traçado (desenho) formava a representação plana de um balão junino.

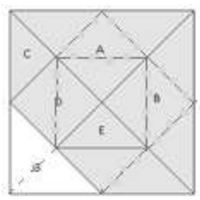
- Se subdividirmos as partes (traçado do Tangram) em partes iguais a C e a E, a que fração corresponderá o traçado do balão?



Nesta proposta, a pretensão se dá em verificar se o aluno compreende o significado **parte-todo,** partindo da partição do todo em partes diferentes, sendo necessária a conversão, isto é, a subdivisão do todo em partes iguais, para responder a questão.

Ressaltamos que a questão, em si, é um desafio, por saber que, possivelmente, os alunos desta turma ainda não tenham tido oportunidade de trabalhar com a subdivisão das partes de um todo, como podemos observar no exemplo destacado:

Figura 59 - Subdivisão de grandeza fracionária



Fonte: Produção da pesquisadora

Quase toda a turma deixou a questão sem resposta e apenas 3 alunos tentaram responder e, ainda assim, de maneira inadequada, inclusive, sem fazer a representação gráfica necessária para maior entendimento da fração indicada na figura, ou seja, responderam apenas por dedução e/ou de maneira aleatória.

A1 indica que é $\frac{5}{7}$, A8 indica que é $\frac{2}{7}$ e A4 indica que é $\frac{7}{1}$, não ficando claro o critério utilizado por estes alunos para chegarem a resposta que foi apresentada, ou seja, apenas atribuíram um valor numérico sem a descrição gráfica, quando, a partir da subdivisão, a resposta a ser dada como adequada é $\frac{14}{16}$.

Questão 3

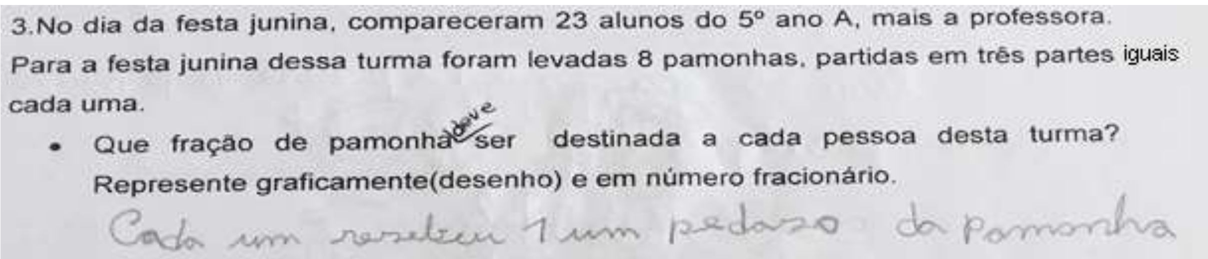
3. No dia da festa junina, compareceram 23 alunos do 5º ano A mais a professora. Para a festa junina dessa turma, foram levadas 8 pamonhas partidas em três partes iguais cada uma.

- Que fração de pamonha deve ser destinada a cada pessoa desta turma? Represente, graficamente(desenho), e em número fracionário.

Nesta questão, emprega-se o significado de fração **quociente,** objetivando verificar o entendimento que os alunos têm quanto a identificar a parte que cada pessoa terá direito em relação a divisão feita das pamonhas, ou seja, se o aluno compreende que, apesar de ter 8 inteiros, a indicação fracionária se fará pela partição de três partes iguais de cada uma das pamonhas.

Observou-se que alguns alunos responderam apenas por extenso, sem deixar claro como havia chegado à resposta dada, como é o caso de A2:

Figura 60 - Registro feito por A2



3.No dia da festa junina, compareceram 23 alunos do 5º ano A, mais a professora. Para a festa junina dessa turma foram levadas 8 pamonhas, partidas em três partes iguais cada uma.

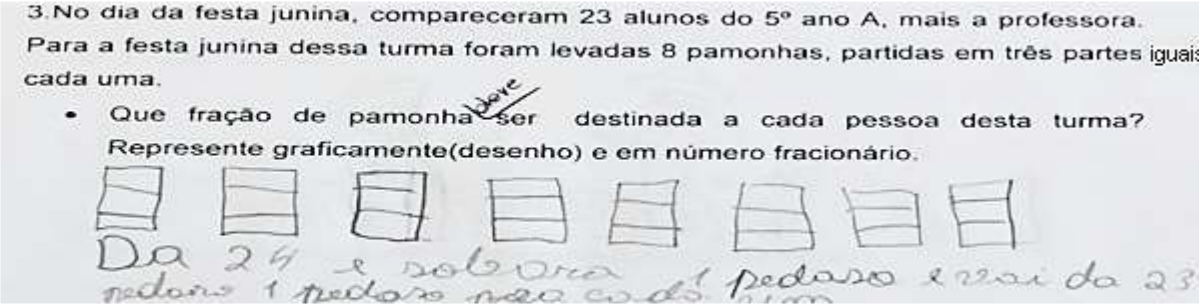
- Que fração de pamonha deve ser destinada a cada pessoa desta turma? Represente graficamente(desenho) e em número fracionário.

Cada um recebeu 1 um pedaso da pamonha

Fonte: Dados da pesquisa.

Alguns alunos, a exemplo de A22, representaram graficamente e por extenso, deixando de colocar a representação em número fracionário. Isso pode ter ocorrido pelo fato dos alunos que assim responderam ainda não terem domínio da relação fracionária com a representação numérica, ou por não ter interpretado a totalidade do todo (24 pessoas, incluindo a professora) na questão:

Figura 61 - Registro feito por A22



3.No dia da festa junina, compareceram 23 alunos do 5º ano A, mais a professora. Para a festa junina dessa turma foram levadas 8 pamonhas, partidas em três partes iguais cada uma.

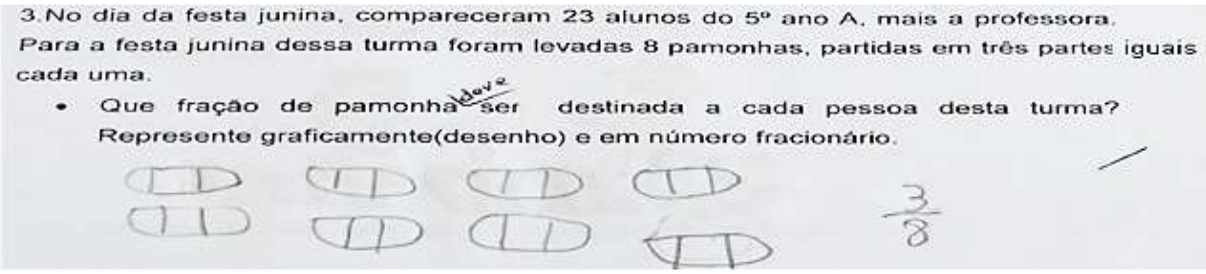
- Que fração de pamonha deve ser destinada a cada pessoa desta turma? Represente graficamente(desenho) e em número fracionário.

Da 24 e sobra 1 pedaço e vai da 23 pedaço 1 pedaço não cada

Fonte: Dados da pesquisa.

Alguns alunos, a exemplo de A4 e A23, apresentaram dificuldade em perceber que fração indica a parte que cabe a cada uma das pessoas dessa turma, possivelmente, por ainda precisar adquirir compreensão quanto a indicar a fração partindo da lógica de atribuir ao numerador a quantidade a ser distribuída de acordo com o denominador que indica a partição que foi feita no todo:

Figura 62 - Registro feito por A4



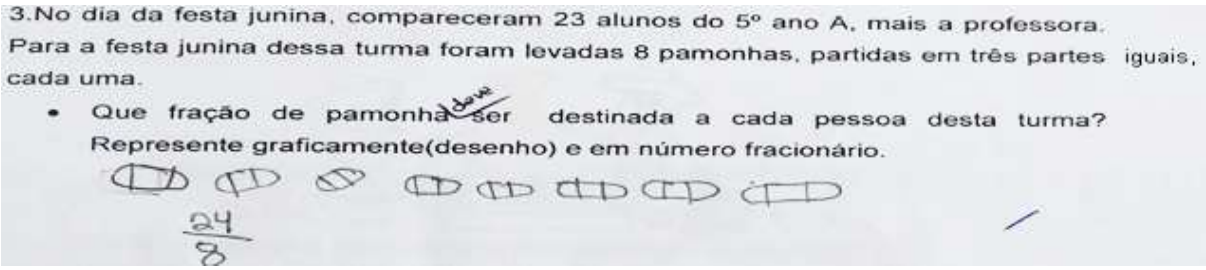
3.No dia da festa junina, compareceram 23 alunos do 5º ano A, mais a professora. Para a festa junina dessa turma foram levadas 8 pamonhas, partidas em três partes iguais cada uma.

- Que fração de pamonha deve ser destinada a cada pessoa desta turma? Represente graficamente(desenho) e em número fracionário.

$\frac{3}{8}$

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 63 - Registro feito por A23



3.No dia da festa junina, compareceram 23 alunos do 5º ano A, mais a professora. Para a festa junina dessa turma foram levadas 8 pamonhas, partidas em três partes iguais, cada uma.

- Que fração de pamonha deve ser destinada a cada pessoa desta turma? Represente graficamente(desenho) e em número fracionário.

$\frac{24}{8}$

Fonte: Dados da pesquisa.

Os alunos que assim fizeram apresentam conflito em compreender o sentido atribuído a uma fração em relação ao que é o todo e as partes em que esse todo está dividido.

Questão 4

4. O local onde ocorrerá a quermesse da escola precisou ser pintado. Como tinha pouca tinta, o pintor misturou 2 litros de tinta vermelha com 3 litros de tinta amarela, gerando uma nova tinta na cor laranja.

- Que fração de tinta amarela está contida na tinta laranja?

a) $\frac{3}{5}$ ( )

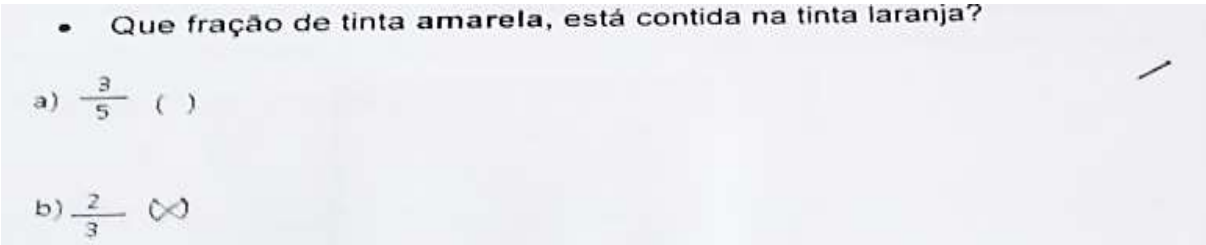
b) $\frac{2}{3}$ ( )

Uma das ideias do significado “medida” é a divisão de uma unidade em partes iguais e destas serem retiradas novas medidas (subunidades) para verificar quantas dessas partes irão caber em determinada parte do todo. Outro aspecto está relacionado com a comparação de duas grandezas, como é o caso da questão proposta acima, em que o aluno deverá externar compreensão da quantidade de uma grandeza (tinta amarela), como parte na composição de outra grandeza (tinta laranja), ou seja, a razão de uma parte em relação ao todo.

Verificamos que 17 alunos assinalaram adequadamente, o item *a* $\frac{3}{5}$, todavia, acredita-se que a representação gráfica tenha auxiliado nessa compreensão, pois, quando questionados o porquê da resposta dada, a maioria comentou que era por causa do desenho do balde com tinta amarela, deixando clara a falta do real entendimento de fração com razão.

Dos demais alunos, um (1) deixou a questão em branco e seis (6) assinalaram o item *b* $\frac{2}{3}$, a exemplo de A4:

Figura 64 - Registro feito por A4



- Que fração de tinta amarela, está contida na tinta laranja?

a) $\frac{3}{5}$ ( )

b) $\frac{2}{3}$ (X)

Fonte: Dados da pesquisa.

Os alunos que assim o fizeram, externaram que assinalaram porque achavam que o adequado é o item b, ou seja, assinalaram sem nenhum critério.

Questão 5

5. Na brincadeira de pescaria que havia na festa junina da escola, Lia pescou $\frac{1}{3}$, dos 18 peixes que havia na pescaria e seu amigo Lucas pescou $\frac{2}{3}$ dos 18 peixes.

Imagem adaptada: www.smartkids.com.br

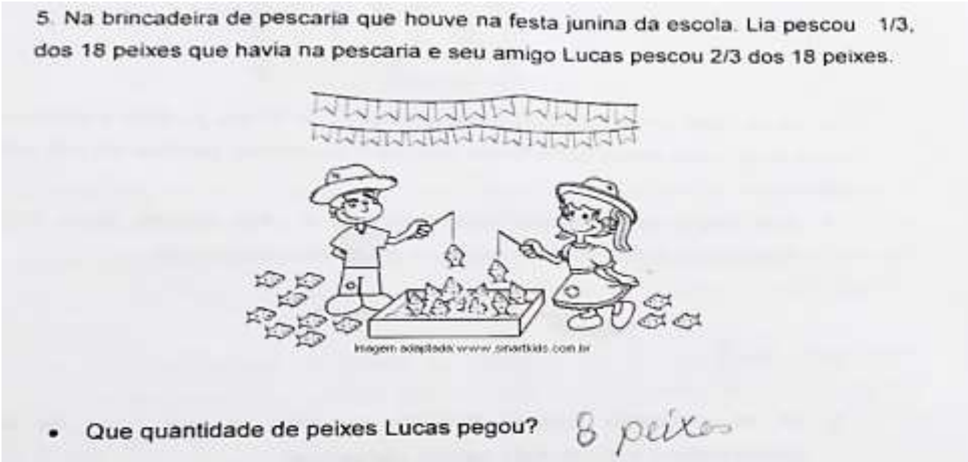
- Que quantidade de peixes Lucas pegou?

O significado **operador** desempenha função de transformar, ou seja, ao ser multiplicado por ***a*** e, em seguida, dividido por ***b*,** o número que resulta deste procedimento poderá ser maior ou menor que o número inicial, isto é, a fração $\frac{a}{b}$, em quantidades contínuas, funciona como se fosse uma máquina de reduzir ou ampliar e, em quantidades discretas, sua aplicação ocorre como um multiplicador ou divisor.

Nesta questão, observou-se que nenhum dos alunos apresentou resposta considerada adequada, além de dois (2) alunos terem deixado sem resposta, chamando a atenção para o que já foi mencionado quanto à representação gráfica, que pode auxiliar no entendimento do conteúdo trabalhado.

Aqui, confirma-se isso por outro viés, ou seja, que a representação gráfica tanto pode auxiliar quanto atrapalhar, uma vez que, nas respostas analisadas, percebeu que alguns alunos visualizaram apenas a representação gráfica, sem se ater a leitura e interpretação adequada do problema, como se pode notar nas figuras abaixo:

Figura 65 - Registro feito por A21



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 66 - Registro feito por A8

Fonte: Dados da pesquisa.

Além do mais, outro aspecto deve ser considerado: o fato dos alunos ainda precisarem se apropriar da compreensão e conversão de quantidades discretas e destas indicadas em número fracionário.

As questões 6, 7 e 8 são complementares e encontram-se em anexo.

Em virtude do avançar da hora e do tipo de atividade (requerer leitura e releitura para melhor compreensão dos enunciados e dados existentes nas questões de situação problema), a atividade ficou para ser concluída no encontro seguinte.

Encontro 4: 19/09/2019, das 7h15 às 9h15, com duração de 2 horas

1º momento: Conversa para dar início e finalizar a atividade proposta no encontro anterior (Atividade Diagnóstica – II).
2º momento: Aplicação da atividade diagnóstica – II

Encontro 5: 26/09/2019, das 7h15 às 9h15 duração de 2 horas

Ainda referente a primeira fase:
1º momento: Conhecendo a história e origem do Tangram

Esse encontro foi realizado com o intuito de saber se os alunos conheciam o Tangram, com fins a contextualizar e dar início à parte interventiva, tendo em mente a disponibilidade das peças deste quebra-cabeça formar um todo (inteiro), também por ser composto de diferentes partes fracionárias.

Neste sentido, oportunizamos aos alunos o conhecimento do Tangram, a partir de uma das lendas "**O discípulo e o mestre"**:

Um jovem chinês despedia-se do seu mestre para fazer uma viagem pelo mundo. Nessa ocasião, o mestre entregou-lhe um espelho de forma quadrada e disse:

- Com esse espelho, registrarás tudo o que vires de forma durante a viagem, para mostrares na volta.

O discípulo, surpreso, indagou:

- Mas, mestre, como poderei mostrar-lhe, com um simples espelho, tudo o que encontrar durante a viagem?

No momento em que fazia essa pergunta, o espelho caiu de suas mãos e quebrou-se em sete pedaços de formas e tamanhos diferentes.

O mestre então lhe respondeu:

- Agora, poderás, com esses sete pedaços do espelho, construir figuras para ilustrar o que viste durante a viagem.

Após a leitura da história, fizemos questionamento, reflexão e interpretação (verbal) referente a compreensão da mesma.

<u>2º momento</u>: Manuseio e desafios com o Tangram.

Após contar a história do Tangram para que os alunos se familiarizassem com o quebra-cabeça, foram feitos alguns estudos e desafios, como:

- Identificação (forma e nomeação) de cada peça que compõe o Tangram;
- Foi entregue um Tangram em MDF, por dupla, para que os mesmos tentassem montar o quadrado que torna o todo (inteiro), do Tangram;

Figura 67 - Registro Montando o Tangram

Fonte: Dados da pesquisa.

Observamos que os mesmos interagiam demonstrando curiosidade e interesse, embora apresentarem, inicialmente, dificuldade em montar o quadrado com as sete peças que formam o Tangram, alegando, inclusive, ser impossível montar um quadrado com as sete peças, como podemos perceber na fala de alguns alunos.

A 8: *Não tem como juntar essas peças e fazer um quadrado*.

PP: *Por que não?*

A8: *Cada peça é de um tamanho e forma diferente, como vai ficar bem retinho?*

A3: *Consigo não.*

PP: *Tentem um pouco mais.*

Depois de muitas tentativas, uma das duplas, por fim, conseguiu e, assim, esses alunos foram dando as dicas e auxiliando as demais duplas.

A12 e A 20: *Conseguimos!*

PP: *Ok! Muito bem.*

A8: *Deixa eu ver como é? Vem aqui me mostrar.*

A20: *Assim ô (demonstrando).*

A1: *Nossa, faz um quadrado mesmo!*

Os alunos foram convidados para tentarem montar uma das muitas figuras dispostas em sombras na folha impressa, que veio junto com o quebra-cabeça Tangram (momento no qual os alunos ficaram livremente manuseando, se familiarizando com o Tangram e interagindo uns com os outros).

Figura 68 - Ilustração de sombras para formar figuras a partir do Tangram

Fonte: Encarte do fabricante.

Ao término deste encontro, constatamos que aquela ocasião havia oportunizado, para a maioria dos alunos da referida turma, o primeiro contato e manuseio com um Tangram. Como o dia das crianças estava próximo e por constituir material a ser utilizado na nossa pesquisa, foram entregues Tangrans, feito com placa de E.V.A para cada aluno.

Destacamos que tanto os acertos como os equívocos observados na realização das atividades desenvolvidas na fase diagnóstica nos foram valorosos, por nos indicar, ainda que de maneira superficial, o que e como melhor explorar nosso objeto de estudo. “Tanto os sucessos como os equívocos, são fonte de informação, igualmente preciosos sobre como o aluno pensa” (GITIRANA, 2014 *apud* SILVA, 2016, p. 57).

Neste encontro, fora concluída a fase diagnóstica, dando-se início, no encontro seguinte, a fase interventiva.

De modo geral, a realização da fase diagnóstica norteia aspectos referentes à complexidade do ensino e aprendizagem de fração ao apontar dificuldades que os alunos apresentaram diante do tema.

Dentre os aspectos e dificuldades, apresentadas pelos alunos na fase diagnóstica, foram feitos os seguintes levantamentos, dispostos no quadro a seguir:

Quadro 16 - Levantamento de aspectos e dificuldades observadas na fase diagnóstica I e II

FRAÇÃO			
Contínua		Discreta	
Leitura e escrita			
Significados essenciais	**Representações, aritmética e descrições**	**Notação barra fracionária**	**Conversão e reversão**
Parte-todo Número Medida Quociente Operador	Gráfica Numérica Extenso	Fração Razão	Gráfica Número fracionário Número misto Equivalência Fração decimal Porcentagem

Fonte: Produção própria

5.4.2 Segunda fase : Intervenção pedagógica

O quadro acima, fora utilizado como norteador dos conteúdos a serem explorados na fase interventiva. Conteúdos estes, distribuídos juntamente com o foco metodológico (descrito adiante), em cada encontro realizado nesta fase.

A base da intervenção pedagógica ocorre principalmente via exploração. Embora o início da intervenção pedagógica, em cada encontro, seja sistematizado, as explorações foram sendo realizadas livremente, mediante os questionamentos, dúvidas e curiosidades surgidas ao longo da intervenção. Salientamos que, em alguns momentos, havia instigação e mediação diante a percepção que iamos tendo, aproveitando tais momentos para inserir um novo aspecto da fração, não havendo uma sequência fixa a ser feita, no entanto, visualizamos, como base, a exploração, para desencadear a problematização e investigação, na e para a resolução e a proposição de problemas, sem que tenha, necessariamente, uma ordem. Ora explorávamos para problematizar e propor problema, ora explorávamos para resolver e, ao resolver, explorávamos para propor outros problemas a partir do que havia sido proposto e assim por diante. Portanto, as atividades e ações desenvolvidas na intervenção foram produzidas a partir da construção coletiva entre alunos e pesquisadora, mediante as explorações feitas ao longo da intervenção.

Deste modo, categorizamos a EXPLORAÇÃO da seguinte maneira:

- Exploração-Exploração (EE)

Exploração de ideias, opiniões, percepções... que surgem durante a própria exploração, “problematizando”. No seu desenvolvimento, poderá ser desencadeado a proposição e ou a resolução de problemas, ou apenas explorar, para verificar e/ou realizar ações.

- Exploração-Proposição -Exploração-Resolução (EPER)

Exploração de um objeto, vivência. Desse modo, busca-se propor um problema ou mais problemas, com ou sem enunciado, explorando continuamente, para encontrar soluções e fazer novas proposições.

- Exploração – Resolução - Exploração (ERE)

Exploração para encontrar meios, caminhos e estratégias que possam levar a resolução e, a partir da resolução, fazer novas explorações, pretendendo encontrar outras alternativas que confirmem e ou indiquem outras possibilidades de resoluções. Nessa perspectiva, a resolução não é algoritmo, ela é decorrente do processo da exploração realizada pelo aluno, aluno-aluno ou aluno-professor.

Nossa proposta parte do manuseio com material manipulativo, o Tangram, na pretensão, entre outras, de explorar a fração partindo do concreto, também de explorar fração do todo particionado em partes diferentes, de modo que os alunos compreendam que, necessariamente, o todo não precisa estar particionado em partes iguais, porém, para que a fração, seja identificada com mais exatidão, pode-se fazer a conversão particionando o todo, que antes estava em partes (tamanhos) diferentes, para partes iguais, podendo, também, ser explorada, nesta situação, a equivalência.

Nossa proposta parte do manuseio com material manipulativo, o Tangram, na pretensão, entre outras, de explorar a fração partindo do concreto, também de explorar fração do todo particionado em partes diferentes, de modo que os alunos compreendam que, necessariamente, o todo não precisa estar particionado em partes iguais, porém, para que a fração indicada, seja identificada com mais exatidão, pode-se fazer a conversão particionando o todo, que antes estava em partes (tamanhos) diferentes, para partes iguais, podendo, também, ser explorada, nesta situação, a equivalência.

Encontro 6: 02/10/2019, das 7h15 às 11h00, com duração de 3 horas e 45 minutos

Foco metodológico: EE e EPER.

- Explorando o Tangram (partição do todo em partes diferentes);
- Exploração de Fração parte-todo - contínua;
- Exploração de Número fracionário (fração);
- Explorando o Tangram, problematizando e propondo problema.

1º momento:

Nesse encontro, a aula teve início a partir da exposição de um Tangram (feito em E.V.A), afixado no quadro da sala de aula. Retomamos, verbalmente, o que foi vivenciado no encontro anterior. Em seguida, fizemos o seguinte questionamento a turma:

PP: *Há alguma relação do Tangram com a fração?*

Figura 69 - Ilustração do Tangram feito em E.V.A

Fonte: Produção própria

Segue, abaixo, algumas colocações feitas pelos alunos, a partir do questionamento e EE feita:

A19: *O Tangram é partido e a fração também é.*

A16: *A fração é parte de uma coisa pintada e aí, nesse Tangram do quadro, está tudo da mesma cor, o que a gente brincou na outra aula, as peças tinham cores diferentes.*

CPP: *Explanação sobre a exploração ser feita associando a história contada "O mestre e o discípulo", em que o quadrado (espelho) quebra-se em sete partes, constituindo um todo. Surge, a partir de então, o quebra-cabeça nominado de Tangram, comercialmente atribuiu-se cores, como forma de destacar as peças, e assim serem melhor visualizadas.*

Figura 70 - Tangram (Identificação das peças em: A, B, C, D, E, F e G)

Fonte: Produzido pela pesquisadora e participantes da pesquisa.

A pretensão, neste momento, foi a de explorar e levar os alunos a entenderem que a junção das partes formam um todo, no caso, o Tangram que é composto por 7 partes, sendo cada parte, independentemente do tamanho, corresponder a uma fração (parte) do todo, promovendo, a partir de então, a noção de invariância e reversão, aspectos de suma importância no ensino e na aprendizagem de fração, uma vez que é destacado na literatura, a exemplo de Magina, Bezerra e Spinillo (2009, p. 412), ao citarem Piaget, Inhelder e Szeminska (1960), sobre a não compreensão, por parte da criança, quanto ao princípio da invariância (conservação de quantidades) e "não dispor de um pensamento reversível que lhe permita perceber que a soma das partes é igual ao todo inicial que as originou", sendo, portanto, mais que necessário promover e explorar ações pedagógicas, em que tais aspectos possam ser visualizados e, assim, favorecer tal compreensão.

<u>2º momento:</u>

Após fazer algumas observações e explanações, faz-se novo questionamento:

PP: *O que é fração?*

A4: *Acho que é alguma coisa, partido, dividido.*

PP: *Quem poderia dar um exemplo?*

A4: *Tipo assim: Desenha um chocolate partido, pega uma parte e diz que é a fração com aquele número que é um em cima e outro embaixo da linha.*

PP: *O número fracionário?*

A4: *É, esse mesmo.*

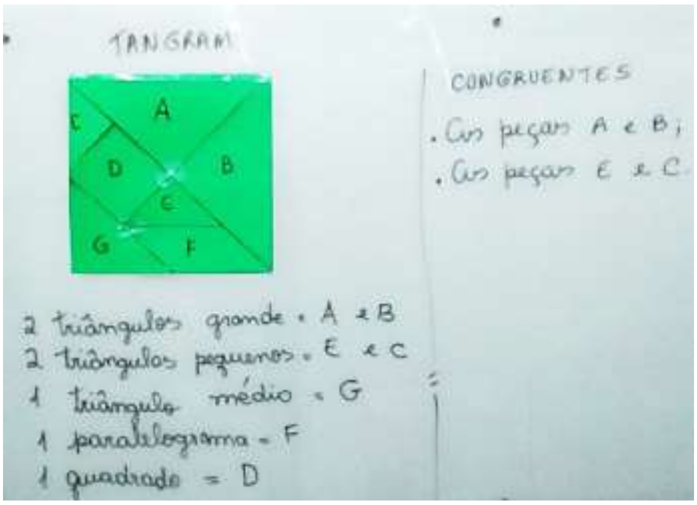
CPP: *Aproveitando o momento, para explicar que cada parte pode ser representada por um número fracionário, sendo colocada abaixo da linha horizontal a quantidade* *de partes em que o todo foi dividido, nomeada de denominador e acima a quantidade utilizada (retirada, admitida), nomeada de numerador. Ambos formam um só número que corresponde a fração indicada.*

É importante mencionar que, ao explicar, o professor tem o papel mediador e que a instrução dada, segue, aqui, no contexto exploratório coletivo, em que todos os participantes foram expondo suas ideias, construindo e dando informações. Tendo como base o que descreve Vigotski (2008a, p. 101): "numa atividade coletiva ou sob a orientação de adultos, usando a imitação, as crianças são capazes de fazer muito mais coisas".

<u>3º momento:</u>

Partindo da observação feita no Tangram afixado no quadro da sala de aula, os alunos foram convidados a classificar (um triângulo grande, dois triângulos médios, um triângulo pequeno, um quadrado e um losango) as peças do Tangram e assim perceberam que havia peças com tamanho e forma igual, tal como foi registrado pela pesquisadora, na medida quem iam descrevendo (coletivamente).

Figura 71 - Registro: classificando as peças do Tangram



Fonte: Registro feito pela pesquisadora

Retomando a exploração, os alunos passaram a problematizar e a perceber que poderiam usar as próprias peças como padrão para deixar a divisão total do Tangram em partes iguais. Entre outros aspectos sobre a aprendizagem ter significado, Smole e Diniz (2016, p.11) menciona que a atividade exploratória "é um poderoso instrumento para a aquisição de novos conhecimentos porque a motivação para explorar, descobrir e aprender está presente em todas as pessoas de maneira natural".

Solicitamos que os alunos explorassem, tentassem problematizar e propor um problema a partir das observações e discussões feitas em torno do Tangram. Após algum tempo, percebemos que poucos alunos estavam tentando realizar a atividade proposta. Diante do observado, foi perguntado o porquê de alguns alunos não estarem tentando. Segue algumas colocações e explorações feitas a partir de então:

A9: *É difícil.*

A14: *Sei fazer não*.

A17: *Consigo não.*

PP: *O que é um problema?*

A1: *Uma coisa que tem que resolver*.

A12: *É algo que precisa pensar e depois resolver*.

PP: *E o que seria propor um problema?*

A19: *Acho que é fazer uma pergunta para alguém responder*.

A20: *É dizer uma situação e depois faz a perguntar.*

PP: *Certo. Problematiza, descreve e faz um questionamento a ser respondido e aí está o problema que deve ser analisado, entendido para encontrar meios de resolvê-lo.*

PP: *Observem o traçado disposto no Tangram e as letras que indicam cada parte (peça). Podemos tentar juntos.*

A3: *Podia ser assim: Que fração do Tangram é a peça A?*

PP: *Ótimo. Temos um problema.*

A1:*Pode ser assim também: Qual a fração da peça A mais a peça B?*

PP: *OK!*

A dificuldade apresentada pelos alunos ao serem solicitados a problematizarem e proporem um problema pode está diretamente relacionada com a pouca ou nenhuma experiência de formularem problemas, tendo, até então, a experiência de resolverem problemas propostos apenas em livros didáticos e ou pelo professor, como destaca Andrade (2017):

> [...]temos notado que a Preposição de Problemas parece ser a ferramenta mais difícil de ser trabalhada e desenvolvida nos alunos. Temos observado que isso advém de uma prática de sala de aula que tem sido concentrada apenas na resolução de problemas propostos exclusivamente pelo professor e nunca pelos alunos. (ANDRADE, 2017, p. 388).

Diante da dificuldade e resistência apresentados por alguns alunos em propor um problema, a exploração e construção coletiva se fez necessária, postulando que a exploração e vivência coletiva na formulação e proposição de um problema oportunizam entendimento e autonomia futura, para que, em outro momento, possam ter um norte e maior desenvoltura ao proporem um problema individualmente. Essa visão baseia-se em Vigotski (2008b, p.129), na medida em que o autor declara: “o que uma criança é capaz de fazer hoje em cooperação, será capaz de fazer sozinha amanhã”.

<u>4º momento:</u>

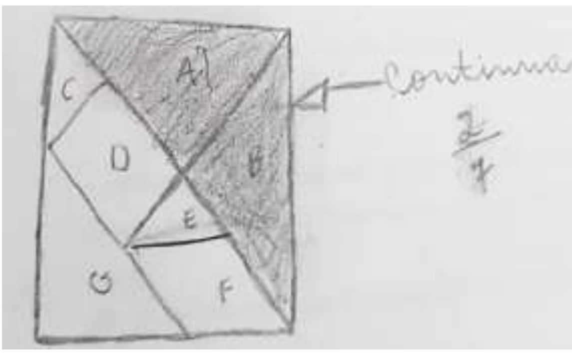
Após as explorações, a formalização do problema proposto coletivamente, ficou da seguinte forma:

A que fração do Tangram exposto no quadro corresponde às partes (peças) A e B?

.

Alguns alunos não responderam a questão, enquanto os demais responderam que a resposta seria $\frac{2}{7}$, como demonstrado por A24:

Figura 72 - Produção do A24



Fonte: Dados da pesquisa.

A12: *É duas partes, das sete partes que o todo foi partido.*

A19: *Foi dividido em sete partes, A é uma parte e B é outra parte, que dá 2 partes do todo.*

A16: *Na fração, é tudo partido do mesmo jeito e aí no Tangram, as partes é dividida diferente.*

PP: *Diferente como?*

A16: *As peças têm a forma diferente*.

A1: *Os tamanhos também são diferentes.*

A12: *Não é* $\frac{2}{7}$ **.**

PP: *Por que não?*

A12: *Porque, no Tangram, fica na metade*.

CPP: *A fala de A12 é referente ao Tangram de E.V.A, exposto no quadro e destacado a peça A e a peça B, de modo que indica um meio na divisão diagonal. Então, foi explicado que um inteiro pode ser divido em várias partes iguais ou diferentes e que, para que sejam identificadas de maneira mais exata, é preciso fazer a conversão, isto é, a subdivisão dessas partes, de modo que o todo seja particionado em partes iguais ou que sejam encontradas equivalências de uma parte em relação a outra ou outras partes deste mesmo todo.*

Isto posto, explorou-se que a fração não é só uma parte pintada, é uma parte do todo e que cada parte corresponde a uma medida e que essa medida, pode ser subdividida continuamente, no caso de um inteiro, sendo denominada de fração continua.

Assim, a fração pode ser indicada ou destacada a partir de um todo manipulável, essa mesma fração pode ser ilustrada na representação gráfica, indicada na representação numérica e descrita por extenso.

De acordo com o que nos coloca Bertoni (2009, p.20-21), “centramos a proposta na construção de um número, explicitando o que vem ser, esse número e o que ele quantifica.”

A partir das explorações e explicações feitas, percebeu-se certo entendimento do que seria a fração parte-todo, bem como sua representação em número fracionário.

Como o horário de aula já finalizava, a pesquisadora deixou como desafio para os alunos pensarem e tentarem encontrar a solução da proposição do problema, combinando de retomar e socializar essa atividade no encontro seguinte.

Encontro 7: 11/10/2019, das 7h15 às 9h15, com duração de 2 horas

Foco metodológico: EE e ERE

- Explorando o Tangram: partição do todo em partes diferentes, convertendo em partes iguais;
- Explorando fração: significado de medida;
- Explorando e identificando fração gráfica representada em número fracionário e vice-versa;
- Explorando e resolvendo o problema proposto na aula anterior.

<u>1º momento:</u>

No início deste encontro, deu-se espaço para que os alunos pudessem expor suas colocações, referentes a ter encontrado uma resposta para a proposição de problema feita coletivamente no encontro anterior.

CPP: *Retomar verbalmente e ou figuramente o que foi explorado em encontros anteriores foi um aspecto constante em nosso estudo, como forma de fazer conexão entre o que foi explorado no encontro anterior com o que poderia ou estaria sendo explorado na ocasião, oportunizando aos alunos a revisão do que foi estudado, aguçando e explorando o arquivo de memória dos alunos.*

De acordo com Vigotski (2008a, p.29), “a memória da criança não somente torna disponíveis fragmentos do passado, como, também, transforma-se num novo método de unir elementos da experiência passada com o presente.” A memória é em si característica fundamental no e para desenvolvimento cognitivo. Ainda segundo Vigotski (2009, p.284), “a memorização pressupõe necessariamente a atividade da atenção, da percepção e da assimilação”.

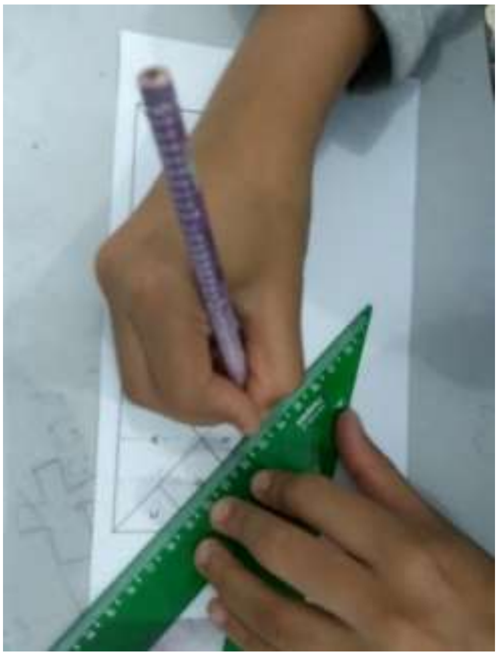
A20 trouxe a seguinte indagação:

A20: *Eu dividi todo o Tangram em quatro (4) partes, do mesmo jeito das peças (partes) A e B. Daí, será que a resposta é* $\frac{2}{4}$?

PP: *Será? Faremos o seguinte: vamos explorar outras possibilidades e assim verificar se está correta.*

Com a exploração e a classificação das peças (partes) do Tangram, os alunos (individualmente) foram desafiados a dispor a divisão total do Tangram, usando uma das peças (partes) como padrão, de modo que todas as partes ficassem iguais.

Figura 73 - Registro: subdividindo o traçado das partes que compõem o Tangram



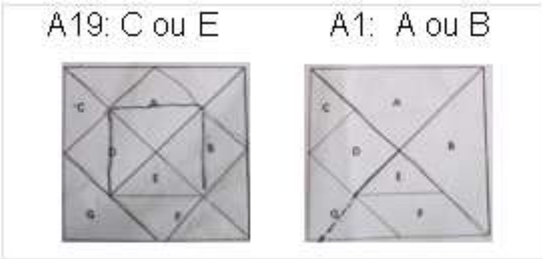
Fonte: Dados da pesquisa.

Observamos nesta proposta, dificuldades da maioria dos alunos em traçar adequadamente as linhas, para que se compreendesse visualmente a disposição da divisão do todo em partes iguais, embora até tenham verbalizado em quantas partes o Tangram ficaria dividido. Outros fizeram a divisão, sem utilizar-se de nenhuma das peças (partes) para padronizar a divisão, o que julgamos importante, pois esses alunos foram além da proposta dada.

Verificamos que, de fato, a exploração torna possível ao aluno ir além da proposta dada e que a exploração feita desencadeia tanto descobertas e aprendizagens cognitivas quanto sociais. Situação experenciada que condiz com o que descreve Andrade (2017, p. 365), “às vezes pode até acontecer da tarefa proposta não ser solucionada, mas o seu caminhar sobre a tarefa proposta pode propiciar muitas descobertas em torno e além da tarefa proposta”.

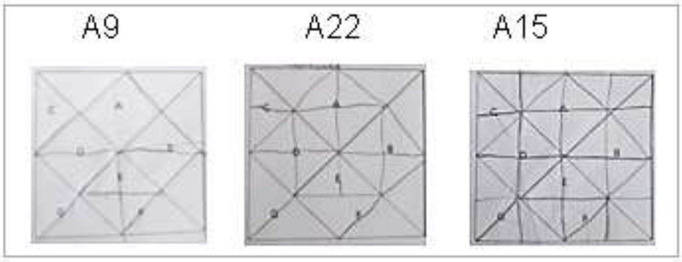
Segue um exemplo da atividade realizada:

Figura 74 - Produção realizada a partir de uma das peças (partes) do Tangram



Fonte: Dados da pesquisa.

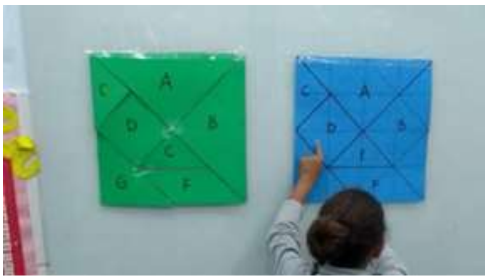
Figura 75 - Produção realizada sem padrão das peças (partes) do Tangram



Fonte: Dados da pesquisa.

Com a finalidade de explorar mais e tornar possível melhor compreensão quanto a converter a divisão do todo em partes diferentes para partes iguais, foi exposto um Tangram em E.V.A no quadro da sala de aula, em que os alunos interagiam dando suas opiniões e questionando quando julgavam necessário. Inclusive, com a participação direta dos alunos que já haviam assimilado a proposta, como é o caso de A4, explicando para a turma como fazer o padrão a partir da peça (parte) D.

Figura 76 - Explorando a subdivisão do Tangram



Fonte: Dados da pesquisa.

CPP: *A proposta a partir de um padrão foi dada por julga-se ser de mais fácil compreensão para os alunos perceberem a divisão em partes iguais, porém, explorou-se, também, a partir de outras divisões, percebidas pelos próprios alunos,* *através de partições do todo em partes cada vez menores, explorando fração com o significado de medida.*

<u>2º momento:</u>

A partir das colocações, a exploração de fração com significado de medida passou a ser feita com a fala de A16:

A16: *A peça D cabe duas (2) vezes dentro da peça A e a mesma coisa na B.*

PP: *Isso, com a partição do todo em partes iguais, podemos verificar e medir com mais exatidão as quantidades indicadas.*

A16: *Pode fazer proposição também, né, professora?*

PP: *Sim. Vamos tentar?*

A16: *Pode ser assim: Quantas vezes a peça C cabe na peça A*?

PP: *Ótimo*.

Dado algum tempo, A20 verbaliza:

A20: *Cabe quatro (4) vezes.*

Neste momento, há concordância unânime da turma. Os alunos seguem fazendo outras proposições desse tipo, como:

A9: *Quantas vezes cabem a parte G dentro da parte D?*

Concluindo (turma), pois, que cabe uma (1) vez.

Diante das explorações realizadas, os alunos concluíram que a resposta dada por A20 estaria correta e que poderia ser respondida de outras maneiras, como foi mencionado por alguns alunos.

A4: *Então, as partes A e B do Tangram, podem ser, também, uma metade.*

A18: *Que fica* $\frac{1}{2}$?

A20: *Se dividir o Tangram em quatro (4) partes, do mesmo tamanho das partes A e B, a resposta é* $\frac{2}{4}$ *e se dividir só em duas (2), fica dois (2) triângulos grandes e as peças (partes) A e B, é igual a metade que é*$\frac{1}{2}$?

A4: *É, porque fica a mesma quantidade, só que dividida diferente*.

PP: *Isso é o que chamamos de equivalência.*

A12: *Agora, acho que estou entendendo.*

Alguns alunos esboçaram certo entendimento, outros apresentavam inquietude, expressando não estar compreendendo, evidenciando a importância da percepção e intervenção feita pelo professor para promover a compreensão do assunto explorado.

Segundo Oliveira (1995), sendo o aprendizado um resultado desejável na escola, e este é o próprio objetivo do processo escolar, a intervenção é um processo pedagógico privilegiado, em que o professor tem um papel explícito de interferir na zona de desenvolvimento proximal dos alunos, provocando avanços que não ocorreriam espontaneamente.

O horário da aula já finalizava, ficando combinado que, no encontro seguinte, retomaríamos e estudaríamos sobre equivalência.

Encontro 8: 17/10/2019, das 7h15 às 11h00, com duração de 3 horas e 45 minutos

Foco metodológico: EE

- Exploração de equivalência de frações;
- Explorando leitura e escrita (gráfica, por extenso e numérica) de fração;
- Conversão e reversão de fração (representação gráfica, extenso e número).

1º momento:

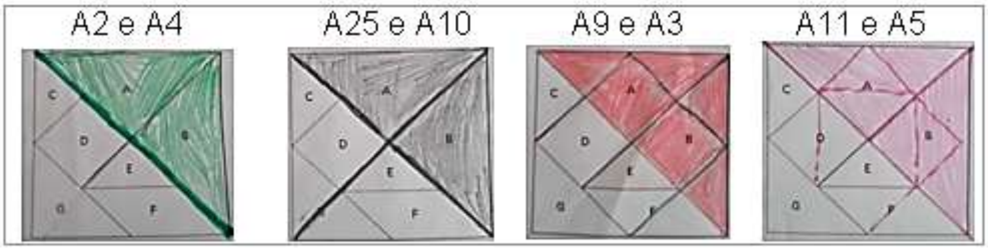
Retomamos, inicialmente, alguns questionamentos feitos na aula anterior, partindo de onde havíamos parado, ou seja, a equivalência. Questionando a turma sobre o que entediam sobre a palavra destacada (escrita no quadro da sala de aula), foram feitas intervenções necessárias, partindo das colocações que eram feitas pelos alunos.

Após algumas colocações, interações socializamos o entendimento de que a palavra equivalência corresponde à mesma quantidade, representada de maneira diferente.

Os alunos, em dupla, foram solicitados a tentarem verificar de que outras maneiras poderiam fazer equivalência com as peças (partes) A e B no traçado do Tangram (impresso). Embora alguns alunos tenham apresentado, inicialmente, certa dificuldade em perceber e realizar a atividade proposta, notamos que boa parte da turma, após a socialização e a comparação de representações feitas de maneiras diferentes por cada dupla, passaram a compreender a ideia de equivalência. Destacamos a participação de alguns alunos, por terem compreendido a ideia de equivalência, passando a mediar diretamente os colegas, levando-os a perceberem o que é equivalência de fração.

Segue algumas descrições feitas, exploradas e socializadas:

Figura 77 - Equivalência de fração pela visualização gráfica



Fonte: Dados da pesquisa.

CPP: *Ao socializarmos a atividade, alguns alunos externaram compreensão do que seria a equivalência, outros, embora identificassem visualmente (gráfica), ainda demonstravam certa insegurança em relacionar a parte gráfica com a representação em número fracionário. Outros demonstraram pouco interesse em realizar a atividade e precisavam ser mais instigados. Aspecto percebido, passomos a buscar maior interação destes alunos. Instigando-os a reverem e exporem suas ideias.*

No sentido de retomarem e fazerem ajustes e ou as correções necessárias, foi dado mais um tempo para que, posteriormente, novas socializações fossem feitas:

PP: *Como fizeram A18 e A9?*

A18 e A9: *Dividimos em oito (8) e encontramos* $\frac{4}{8}$.

A4 e A25: *Nós dividimos em 16 e deu* $\frac{8}{16}$

Depois de algumas socializações, conclui-se que: $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{8}{16}$

Foi explorado e feito, também, o registro por extenso no quadro da sala de aula e constitui-se de momento oportuno para explorar a leitura e a escrita (por extenso e em número) de fração.

<u>2º momento:</u>

Questionamos sobre a leitura que é feita das frações que foram expostas no quadro.

PP: *Como é feita a leitura dessas frações?*

A18: *É, um meio, dois quartos, quatro oitavos e oito dezesseis?*

A9: *A parte do denominador é diferente, né, professora? Quando é quatro (4), não lê quatro e sim quartos.*

A12: *Dois quartos parece que é de casa*.

Turma: *Risos!*

CPP: *Diante das colocações feitas pelos alunos, passamos a explicar que o sentido de uma palavra pode variar de acordo com o local em que é usada. Por exemplo, o termo "dois quartos" pode estar se referindo a quarto, que é um cômodo de uma casa/apartamento, se for usado na frase: Na minha casa, há dois (2) quartos. Se eu estiver me referindo à fração, vai estar no sentido que A9 colocou. Na fração, a leitura do denominador é diferente da leitura feita no numerador, ou seja, no numerador se lê como número natural por indicar uma quantidade admitida, já o denominador indica a quantidade de partes em que o todo foi dividido, daí a leitura ser feita de* $\frac{1}{4}$ *como em número ordinal, isto é, 4 corresponde a quarta parte porque o todo foi particionado em quatro partes iguais.*

Explorar os significados e contextos da palavra, tanto na Língua Materna quanto na linguagem matemática, poderá fazer toda diferença na aquisição da aprendizagem sobre fração, especialmente em alunos das séries elementares. O estudo e compreensão do uso e contexto de palavras vão bem além de ampliar o vocabulário, como bem descreve Vigotski (2008b, p.125), "podemos replicar que a nossa análise mostrou claramente que o estudo da gramática é de grande importância para o desenvolvimento mental da criança".

No intuito de explorar outras possibilidades na leitura de fração, questionamos:

PP: *Como é a leitura feita da fração* $\frac{1}{3}$?

A7: *Se lê um três.*

A11: *Não. Aí vai ser um terço.*

Após algumas explorações verbais em torno da leitura de frações, destacamos o uso de algumas palavras (meio, terço, quarto...) com significados diferentes em relação à Língua Materna e à linguagem matemática. Durante a exploração, notamos que A18 lê $\frac{8}{10}$ (oito dez).

Então, passamos a explicar que, em fração, lê-se o denominador de 2 a 9 (meio, terço...nono), com denominador 10 ou potências de 10, como 100 e 1000 se lê: décimo, centésimo, milésimo. Depois de 10, a leitura é feita como em números naturais, acrescentando a palavra avos.

A18: *Quer dizer que se lê oito dezesseis avos. Por quê?*

CPP: *Acredita-se que o uso da palavra avos, tenha surgido em virtude da dificuldade em se partir um todo em partes ímpares e o particionamento não corresponder a uma divisão exata, constituindo-se, assim, por analogia, a palavra avos de oit**avos.** Essa explicação foi dada por julgar ser a de mais fácil entendimento para os alunos.*

Aproveitamos o momento para explorar, também, em termo de leitura, frações com denominadores decimais, a partir do registro no quadro:

PP: *Como poderíamos fazer a leitura de* $\frac{3}{10}$?

A20: *Três décimos.*

PP: *E de* $\frac{3}{100}$?

A16: *Se lê três cem?*

A4: *Não. É três centésimos.*

PP*: Isso.*

A3: *Se fosse com denominar 1000, seria três milésimos, né?*

PP: *Exato.*

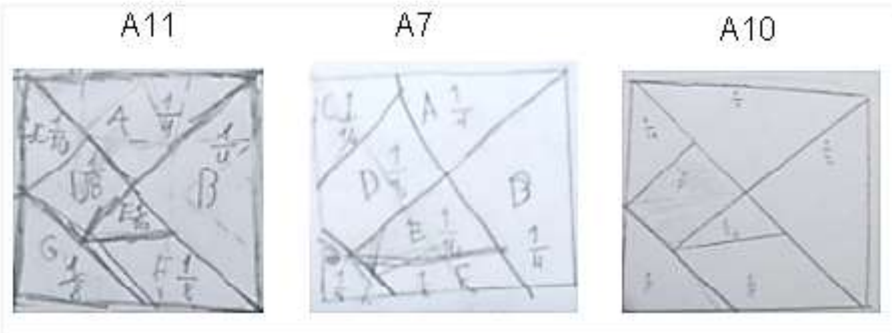
3º momento:

A exploração foi retomada em relação a igualdades de partes particionada no todo. Os alunos passaram a registrar, em um Tangram traçado por eles mesmos, a fração correspondente; a equivalência identificada e relacionada de cada parte que compõe o quebra-cabeça Chinês, percebendo, nesta proposta, o que Magina, Bezerra e Spinillo (2009, p.414) descrevem:

> Estudar uma definição, em termos de seu campo conceitual, implica considerá-la em suas relações com outros conceitos que, por demandarem esquemas de ações semelhantes, se auxiliam mutuamente, no sentido de que contribuem de forma recíproca, um na constituição do outro, compartilhando invariantes, situações e formas de representação.

Percebemos, através da socialização, que a maioria dos alunos havia compreendido a relação de equivalência, explorada até então. No entanto, apesar de a maioria dos alunos terem identificado e relacionado a quantificação fracionária das partes, a representação gráfica teria que ser mais explorada para que melhorassem o traçado (desenho). Quanto a isto, entendemos que é um aspecto próprio relacionado à coordenação motora, talvez, por ter sido pouco explorada nas séries anteriores. Segue, abaixo, o registro feito por alguns alunos.

Figura 78 – Identificando cada peça (parte) no traçado do Tangram



Fonte: Acervo da pesquisadora

CPP: *Questionamos alguns alunos sobre o traçado (desenho) e sobre a forma adequada de traçar cada peça (parte), levando-os a refletirem sobre o desenho feito do Tangram, bem como sobre a necessidade das partes traçadas, precisarem serem melhor definidas.*

<u>4º momento:</u>

Neste momento, a exploração passou a ser feita com vistas à adição de fração com denominadores iguais. Na ocasião, foi feito o seguinte questionamento:

PP: *Que fração seria se juntássemos a peça (parte) D e a G?*

Após algum tempo rabiscando, A9 diz:

A9: *A fração ai é* $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{16}$.

PP: *Quem de vocês, acha que esse é o resultado*?

Turma em silencio, até que A21 questiona:

A21: *Se está tudo dividido em oito (8) partes, então vai somar o denominador?*

A10: *Acho que é* $\frac{2}{8}$ *porque repete o denominador e soma só o numerador.*

Usamos o argumento de A10, para confirmar que, na adição de fração, repete-se os denominadores, quando estes são iguais. Ficando este aspecto para dar continuidade no próximo encontro, tendo em vista o término da aula.

Encontro 9: 24/10/2019, das 7h15 às 9h15, com duração de 2 horas

Foco metodológico: EPER.

- Explorando adição de fração e subtração de fração (denominadores iguais/diferentes).
- Exploração, proposição e resolução de problemas com fração (dupla);
- Explorando conversão e reversão.

<u>1º momento:</u>

Neste encontro, retomou-se verbalmente o que tinha sido explorado no encontro anterior. Em seguida, solicitamos que os alunos tentassem fazer outras adições, partindo da observação explorada no Tangram. Após algum tempo, foi realizada a socialização, verificando que a maioria dos alunos compreenderam e alguns até externaram ser muito fácil fazer adição de fração com mesmo denominador, porém, ao fazerem a socialização da atividade proposta, foram feitos alguns questionamentos em relação a adições de frações com denominadores diferentes.

A20: *Professora, como faz quando a adição é com o denominador diferente?*

A4: *Eu coloquei a parte B mais a G e não sei como fazer.*

PP: *Alguém tem alguma ideia?*

A19: *Acho que partindo o todo de maneira igual, daí os denominadores vai ser o mesmo, né?*

PP: *Vamos verificar a partir do que A19 está dizendo.*

Ao observar o Tangram afixado no quadro, explorando-o e sobrepondo com outra cor as peças descritas, os alunos foram fazendo colocações concluindo que a adição das partes B e G, na conversão (partes iguais) daria:

$$\frac{2}{16} + \frac{4}{16} = \frac{6}{16}.$$

Após outras explorações feitas coletivamente, os alunos concluíram que daria pra ser feita de outra maneira, por exemplo: $\frac{1}{8}+\frac{2}{8}=\frac{3}{8}$, sendo equivalente a $\frac{6}{16}$.

Figura 79 - Equivalência e adição de frações

Fonte: Dados da pesquisa

<u>2º momento:</u>

Passamos a explorar esta mesma situação de outra maneira, ou seja, em paralelo à representação gráfica, foi explicado que haveria a necessidade de fazer o Mínimo Múltiplo Comum (MMC) do denominador da fração $\frac{1}{4}$ (B) com a fração $\frac{1}{8}$ (G).

CPP: *O conteúdo (MMC) já havia sido estudado com a professora regente, o que, na ocasião, facilitou a exploração quanto a este aspecto.*

A proposta foi realizada coletivamente, concluindo-se que 8 era o MMC da questão posta. Segue o passo a passo e as colocações dos alunos para resolver a operação:

A9: *Então vai ficar assim: um oitavo mais um oitavo igual a dois oitavos?*

A4: *Dois oitavos é só a parte B. E a parte G? Oxe, assim é difícil.*

Instigando maior participação de alguns alunos que expressavam dificuldade em entender e pouco interesse em participar das discussões, questionamos A2:

PP: *Você concorda que assim é mais difícil?*

A2: *Eu entendi da outra maneira, agora não sei como fazer assim.*

PP: *E você, A5, o que acha?*

A5: *Não sei.*

Enquanto a instigávamos a participação de alguns alunos, A9 conversava com A3, dirigindo-se, em seguida, para professora pesquisadora e perguntando:

A9: *Professora, lembrei! Parece que divide e depois soma.*

PP: *Sim, dividimos o número encontrado no MMC pelo denominador de cada fração, depois multiplicamos o resultado de cada divisão feita por cada numerador e, só em seguida, é que se faz a adição.*

Consideramos ser necessário explicar, de modo coletivo, no quadro da sala de aula, explorando coletivamente, tanto com o manuseio e sobreposição de partes no Tangram, quanto pelo M.M.C. Concluímos que:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2+1}{8} = \frac{3}{8}.$$

O registro e leitura foram descritos, também coletivamente, no quadro da sala de aula:

- ✓ Denominador comum 8, dividido pelo denominador 4, com resultado de 2 multiplicado por 1, obtendo, ao final, 2;
- ✓ Denominador comum 8, dividido pelo denominador 8, com resultado 1 multiplicado por 1, obtendo, ao final, 1;
- ✓ Agora, repete o denominador 8, soma o numerador 2 com o numerador 1, obtendo $\frac{3}{8}$.

Ao término da proposta feita coletivamente no quadro, A21 questiona:

A21: *E pra tirar uma fração de outra fração, como faz?*

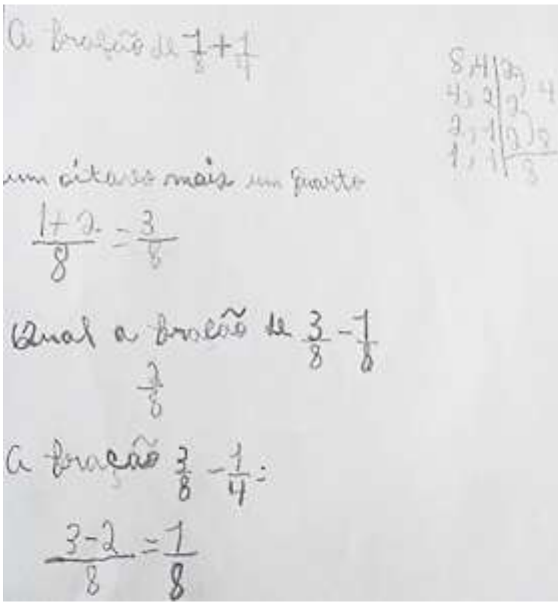
PP: *A subtração de fração por fração segue os mesmos critérios que utilizamos para fazer a adição. A diferença é adicionar ou subtrair.*

A2: Ah, pelas "partes" é mais fácil. Agora entendi.

CPP: *Após as explorações e explicações referentes a operações de adição e subtração de fração, os alunos fizeram alguns registros, externando terem compreendido, inclusive, os alunos que se mostraram sem muito interesse no início do encontro, após serem constantemente instigados, passaram a interagir melhor e demonstrar certo entendimento ao realizarem a proposta coletivamente.*

Segue, abaixo, um resumo do que foi realizado e registrado por A24 deste momento.

Figura 80 - Registro de A24 (Adição e subtração de frações)



Fonte: Dados da pesquisa.

Avaliamos que este encontro foi riquíssimo e que, apesar de precisar instigar continuamente alguns alunos, houve ganho considerável de aprendizagem, ao que refere-se a instigação constante feita a partir das explorações realizadas, trazendo à tona o que os alunos já tinham de conhecimento prévio, isto é, de desenvolvimento real, em relação a adicionar, subtrair e sobre o M.M.C, que foram fundamentais na aquisição dos novos conceitos; realizar a adição e a subtração no contexto de fração com denominadores iguais e diferentes.

A percepção do professor, quanto ao nível de desenvolvimento que o aluno se encontra, é fundamental para que sua atuação, no ato de ensinar, cause "desequilíbrio" nas estruturas psicológicas (ditas superiores) do aluno, para que ocorra uma reestruturação e aquisição do aprendizado objetivado e ainda não alcançado. Podemos fazer uma analogia a isso quando Vigotski (2008a, p. 104), exemplifica que "o domínio inicial das quatro operações aritméticas fornece a base para o desenvolvimento subsequente de vários processos internos altamente complexos no pensamento das crianças". Implica dizer que, quando ocorre o aprendizado de algo, este está apenas no início.

É Importante dizer, ainda, que a instigação para que alguns alunos participassem de maneira mais efetiva, surtiu considerável efeito, inclusive, ao término da aula, alguns alunos interagiam enquanto organizavam o material, comentando sobre estarem entendendo e gostando de estudar fração "desse jeito", reportando à exploração oportunizada nos encontros.

Encontro 10: 28/10/2019, das 7h15 às 11h00, com duração de 3 horas e 45 minutos

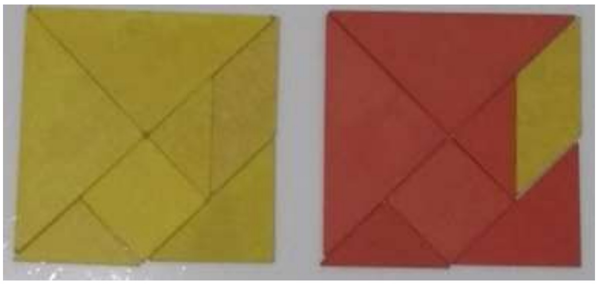
Foco metodológico: EE e EPER

- Explorando número misto;
- Explorando fração: ordem e equivalência;
- Explorando o significado de fração quociente: partitiva e quotitiva;
- Explorando proposição e resolução de problema envolvendo adição e subtração com denominadores iguais/diferentes;
- Explorando fração continua/discreta.

<u>1º momento:</u>

Neste encontro, iniciamos com o manuseio de Tangram (MDF), em seguida, questionamos sobre como deveria ser descrito em número, se pegássemos um Tangram (todo) de um dos alunos com a peça (parte) F do Tangram de outro aluno:

Figura 81 – Explorando a configuração do número fracionário e número misto



Fonte: Dados da pesquisa.

Após algumas explorações, chegou- à conclusão de que seria um (1) inteiro e um oitavo ($\frac{1}{8}$). Registrando em número $1\frac{1}{8}$, A15 pergunta:

A15: *Fração é uma parte?*

PP: *Sim*.

A15: *Aí tá(está) um inteiro e uma parte. Não estou entendendo*.

PP: *Quando temos um inteiro (todo) mais uma parte fracionária, o número fica misto.*

A21: *Então, como pegou um todo e uma parte de outro todo fica o número que é o inteiro e o outro número que quer dizer a parte do outro todo?*

PP: *Exato, por isso que chamamos de número misto.*

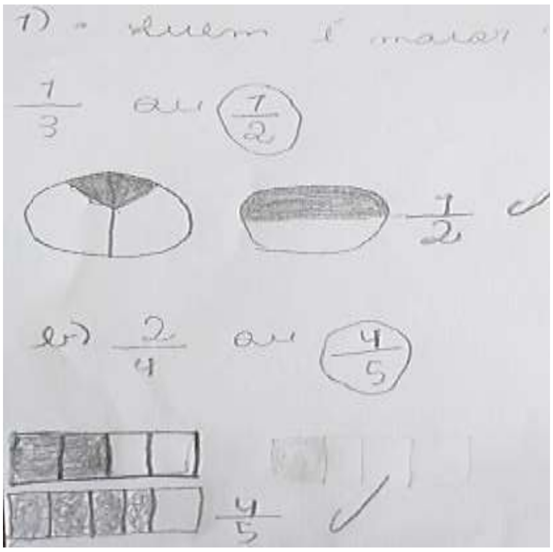
Para certificar-se de que a turma compreendeu, outras explorações e problematizações, foram feitas coletivamente, de modo que todos distinguissem fração, número natural e número misto.

2º momento:

Dando continuidade à compreensão de fração, foram expostas, no quadro, as frações, como, por exemplo: $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$, para que os alunos representassem graficamente e compreendessem que, na fração, quanto maior for a quantidade de divisões do todo, menor será suas partes. Neste caso, perceberem que o valor numérico na fração é diferente do que é em número natural. Como no exemplo dado, o numeral 3 assume valor menor do que o numeral 2, por representarem o tamanho das partes divididas de uma fração.

CPP: *Percebemos, nesta proposta, que os alunos ficaram bem intrigados e acharam interessante descobrir que o numeral que indica maior divisão pode representar um valor fracionário menor que outro numeral que representa menor divisão fracionária, embora, na representação gráfica, fizessem a divisão indicando a quantidade particionada correta, alguns traçaram a divisão em tamanhos diferentes, como se pode observar no registro de A15:*

Figura 82 - Produção do A15 (explorando frações e suas invariantes de ordenação)

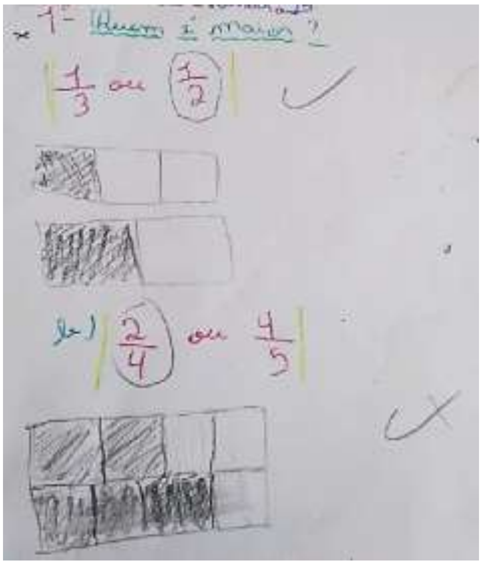


Fonte: Dados da pesquisa

Interessante observar que, ao fazermos a socialização, a fim de explorar e perceber o que haviam compreendido, alguns alunos fizeram a correção em seus registros, percebendo o equívoco quanto à representação gráfica.

Outros alunos, embora externassem compreensão de que, na fração, quanto menor for o denominador (quantidades de partições do todo), maior será o tamanho da fração, ainda apresentaram conflito quanto à representação gráfica adequada, a exemplo de A19:

Figura 83 - Produção do A19 (explorando frações e suas invariantes de ordenação)



Fonte: Acervo da pesquisadora (2020).

CPP: *Nesta oportunidade, tornou-se possível maior compreensão em relação ao estudo que estava sendo feito, também em relação à interação dos alunos, ao expor uns para os outros o que e como haviam realizado.*

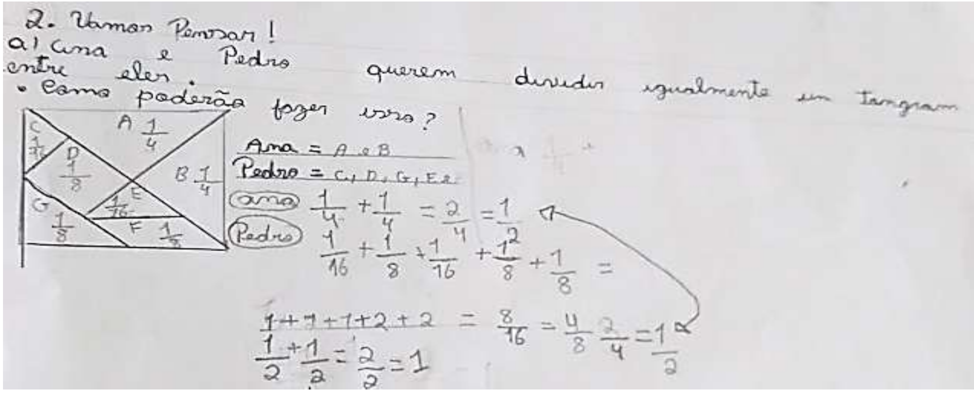
3º momento:

Pensando em explorar equivalência, bem como, o significado de fração quociente, como desafio, fizemos a seguinte proposição:

Ana e Pedro querem dividir igualmente um Tangram entre eles. Como poderão fazer isso?

A proposta foi realizada individualmente, observamos que, embora fossem instigados, alguns alunos apresentaram dificuldade, fazendo e apagando sem concluir a atividade. Outros concluíram satisfatoriamente e socializaram como fizeram, como podemos ver nas figuras abaixo:

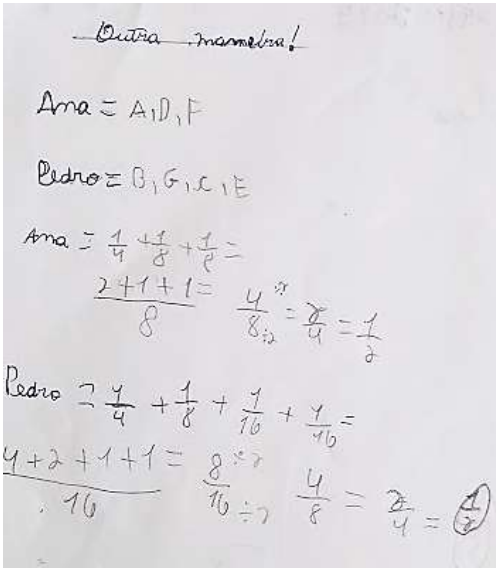
Figura 84 - Registro do A19 (Explorando equivalência e fração quociente)



Fonte: Dados da pesquisa

.

Figura 85 - Registro do A11 (Explorando equivalência e fração quociente)



Fonte: Dados da pesquisa.

Os alunos demonstraram terem compreendido a ideia de fração com significado de quociente, bem como a adição e subtração de fração com denominadores iguais e ou diferentes, assim como também a ideia de equivalência, tanto gráfica quanto em número fracionário.

Questionamos, por que pode ser feita a divisão de outras maneiras.

A5: Professora, é que se for $\frac{1}{8}$*, cabe 2 vezes dentro de A e 2 vezes dentro de B que é a metade do Tangram.*

A20: Se $\frac{1}{16}$*, vai caber 4 vezes em A e 4 vezes em B.*

A4: Pode ir combinando as peças (partes) e fazer as metades de maneira diferente.

CPP: *Momento oportuno, em que foi exposto para a turma, que a fração quociente é uma divisão, que pode ser feita a partir da quantidade de partes divididas no todo, ou pode ser feita uma divisão descrevendo a quota dada da divisão partitiva feita. No caso, um meio seria a quota dada para cada uma das crianças (Pedro e Ana).*

<u>4º momento</u>

Partindo do que tinha sido explorado e na pretensão de possibilitar a compreensão de que a fração pode se dá através da partição de um todo, tanto no sentido contínuo como discreto, questiona-se:

PP: A fração é apenas uma parte de um inteiro ou pode ser a parte de uma quantidade?

Após o silencio da turma diante do questionamento, algumas colocações são feitas:

A20: Parte de fração é um pedaço, então, como posso tirar um pedaço de quantidade?

A9: Pedaço é parte (quantidade) também.

PP: O que você, A5, me diz sobre isso?

A5: Acho que A9 está certa.

Registramos, no quadro da sala de aula, a fração $\frac{2}{3}$ solicitando que os alunos tentassem representá-la graficamente, tanto a partir de um (1) inteiro contínuo quanto em quantidade discreta, socializando, em seguida, o que haviam feito. Explorou-se, coletivamente, com a participação direta de alguns alunos, como mostra o quadro abaixo, com A9 explicando a maneira que havia feito:

Figura 86 - Registro: explorando, coletivamente, fração contínua e fração discreta

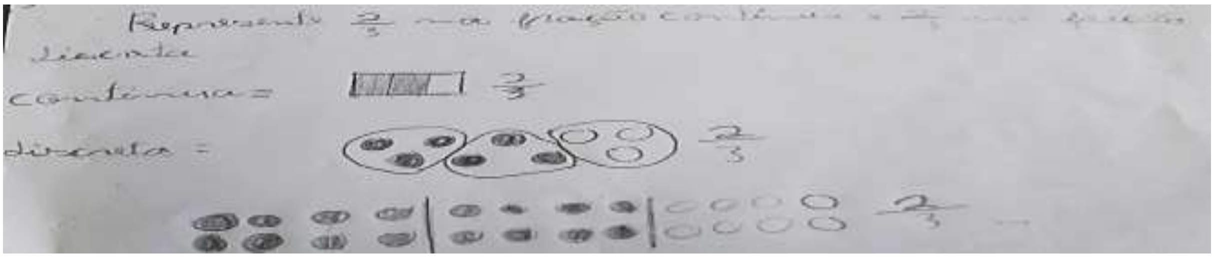
Fonte: Dados da pesquisa

Concluímos que, quando a fração é parte de um todo (inteiro), é denominada contínua e, quando a fração é parte de um todo (quantidade de elementos), é denominada de fração discreta. Alguns registros são descritos de como os alunos representaram tanto a fração dada $\frac{2}{3}$ quanto outras que os mesmos propuseram. Segue alguns exemplos deste momento:

Figura 87 - Produção de A2 (Explorando fração contínua e fração discreta)

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 88 - Produção do A20 (Explorando fração continua e fração discreta)



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 89 - Produção do A22 (Explorando fração continua e fração discreta)

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 90 - Produção do A11 (Explorando fração continua e fração discreta)

Fonte: Dados da pesquisa.

A exploração da atividade proposta constituiu-se como importante e relevante fator na aquisição da diferenciação e aprendizagem de fração contínua/discreta, sendo a exploração uma ferramenta propícia para o entendimento dos signos e palavras utilizadas na obtenção do aprendizado proposto. Tal situação se alinha ao que Vigotski (2008b, p.72-73), descreve:

> O processo não pode ser reduzido à associação, à atenção, à formação de imagens, à inferência ou às tendências determinantes. Todas são indispensáveis, porém insuficientes sem o uso do signo, ou palavra, como o meio pelo qual conduzimos as nossas operações mentais, controlamos o seu curso e as canalizamos em direção à solução do problema que enfrentamos.

É Importante destacar, quanto ao caráter transitório do adolescente, como nos coloca Vigotski (2008b, p.99), que "o adolescente formará e utilizará um conceito com muita propriedade numa situação concreta, mas achará estranhamente difícil expressar esse conceito em palavras". Isso ficou claro, quando A9 passou a explicar aos colegas como havia feito, demonstrando entender o conceito, mas esboçando certa estranheza ao descrever o processo feito. Daí, a importância de explorar continuamente utilizando o signo e/ou palavra que tenha relação direta com o objeto em estudo.

5º momento:

Dando continuidade à exploração de fração contínua e fração discreta, também a fim de ampliar o estudo referente à proposição de problemas, bem como outras questões até aqui abordadas, solicitamos que os alunos (individualmente) tentassem problematizar e propor alguma situação que envolvesse fração discreta (quantidade). Com o término da aula, foram entregues as proposições feitas, ficando a socialização e a exploração das mesmas para o encontro seguinte.

Encontro 11: 01/11/2019, das 7h15 às 9h15, com duração de 2 horas

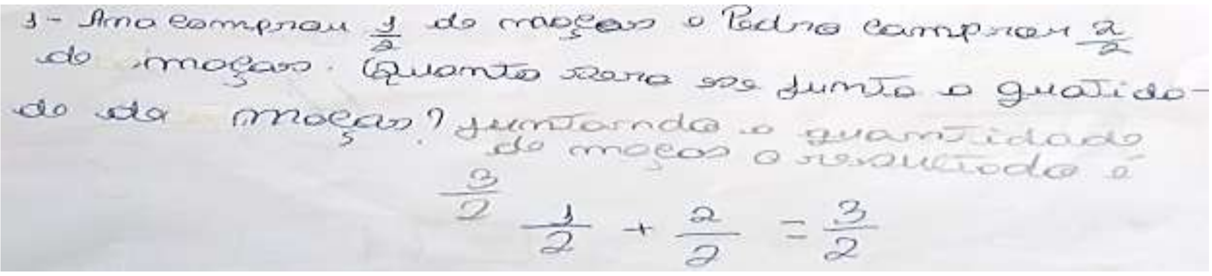
Foco metodológico: EE e EPER

- Exploração, proposição e resolução de problemas envolvendo fração discreta e fração contínua.

1º momento:

Iniciamos o encontro retomando a proposta que foi feita no encontro anterior, entregando aos alunos as proposições elaboradas anteriormente, e dando um tempo para que retomassem e concluíssem o que julgassem necessário. Posteriormente, algumas proposições foram socializadas e destas fizemos explorações coletivas, a fim de evidenciarmos o que poderia ser melhorado, assim como também destacando o que foi colocado em termos de fração, como pode-se perceber nas descrições que seguem:

Figura 91 - Produção do A21 (Exploração e proposição de problemas)



Fonte: Dados da pesquisa.

PP: *Quanto é* $\frac{1}{2}$ *de maçãs?*

A20: *Quantas são as maçãs?*

A21: *Nem coloquei, já vi que errei tudo.*

PP: *E* $\frac{2}{2}$ *é igual a que quantidade de maçãs?*

A4: *Duas metades, que dá um todo. Aí ficou* $\frac{3}{2}$ *que pode ser 1* $\frac{1}{2}$*, né?*

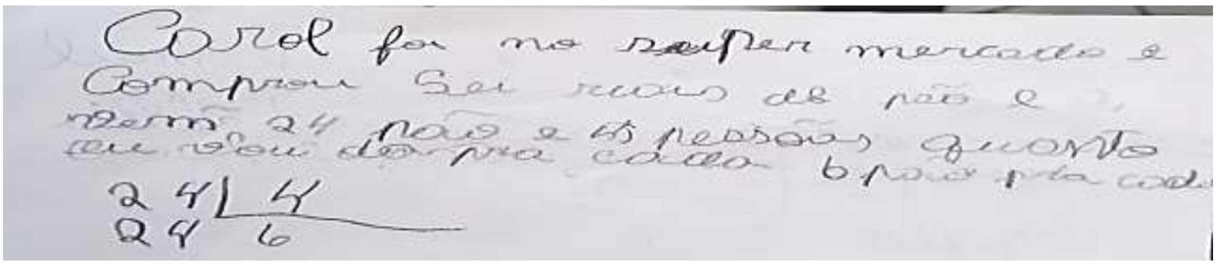
PP: *Como A21 poderia ter percebido e refeito os dados?*

A20: *Desenhando o que tinha feito e registrando o resultado por extenso.*

Notamos, no problema proposto por A21, que o mesmo ainda apresenta dificuldade de entendimento em diferenciar a fração contínua da discreta.

Na proposição seguinte, a ideia é bem mais complexa por envolver o significado de fração quociente a partir da fração discreta, entre outros aspectos observados nos dados, como a quantidade de pães correspondente ao valor pago. Porém, percebe-se que a falta de pontuação dificulta o melhor entendimento da mesma. Aspecto que foi explorado coletivamente a fim de chamar a atenção para o uso de pontuação, necessária na proposição de problemas com enunciados:

Figura 92 - Produção do A22 (Exploração e proposição de problemas)



Fonte: Dados da pesquisa.

Quando a proposição de A22 foi explorada, alguns questionamentos por parte dos alunos foram sendo colocados, como:

A18: Faltou desenhar a fração e representar em número fracionário.

A7: Em fração, a resposta fica quanto?

A3: 6 pães é uma parte dos 24 pães?

PP: É sim. Mas por que você perguntou?

A3: É que pagou seis reais e vai dar 6 pães para cada pessoa. Como assim?

Após um momento dado para tentarem verificar qual seria a fração, A3 responde:

A3: É, 6 pães de 24 pães é $\frac{1}{4}$.

PP: Como você fez?

A3: Desenhei 24 pães e fiz quatro (4) grupos. Cada grupo com seis (6).

PP: E os seis reais?

A3: Foi o valor pago nos 24 pães.

PP: Será que 24 pães custa 6,00?

A11: Eu compro 2,00 reais de pão e vem 6 pães.

PP: Então, no local que A11 compra o pão, quantos pães seriam com 6,00 reais?

A4: 18 pães.

PP: Como você chegou a essa quantidade?

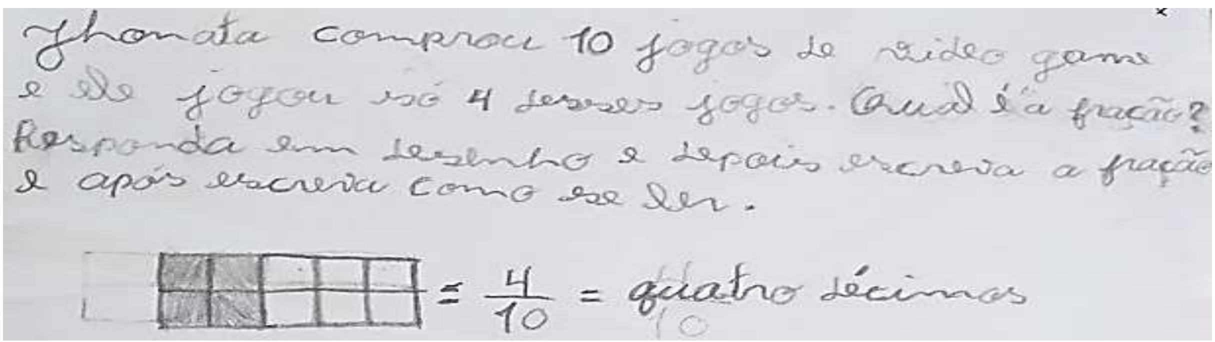
A4: Juntei 6 pães que é 2,00 reais, mais 6 pães com 2,00 reais, mais 6 pães com 2,00 reais. Daí vai dar 18 pães com 6,00 reais.

PP: Jóia. E se A11 for guloso e comer um terço dos 6 pães que compra?

A20: Daí divide os 6 pães em 3 grupos com 2 pães em cada grupo. Ele vai comer 2 pães.

PP: Ok.

Figura 93 - Produção do A20 (Exploração e proposição de problemas)



Fonte: Dados da pesquisa.

Como se pode notar a partir do registro feito, a estruturação da proposição de A20 apresentou, ricamente, detalhes e seguiu, adequadamente, o uso de sinais de pontuação, deixando evidente sua proposição e resposta. Inclusive, sendo visto por grande parte da turma como totalmente correta, até que A9 questiona:

A9: *Os jogos é junto é? Ou separado?*

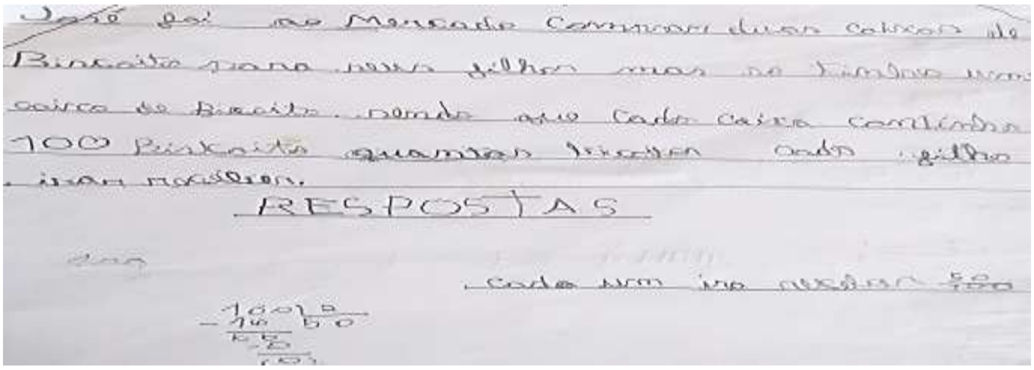
A20: *Separados.*

A9: *Então, você tinha que fazer o desenho separado e não junto, né quantidade de jogos*?

A20: *É mesmo, o desenho da fração(parte-todo) está incorreto.*

Essa constatação levou os demais alunos a reverem e compreenderem a representação da fração de quantidade (discreta).

Figura 94 - Produção do A7 (Exploração e proposição de problemas)



Fonte: Dados da pesquisa.

Nesta proposição, percebeu-se, durante a exploração, que faltou colocar como parte dos dados a quantidade de filhos. Também se foi percebido e explorado a falta de pontuação e escrita incorreta de algumas palavras, bem como a falta da representação gráfica da fração. Segue o registro parcial da exploração feita nesta proposição, após a pesquisadora fazer a leitura dos enunciados sem mostrar a resposta dada:

A12: *Quantos são os filhos?*

A7: *Dois (2).*

A9: *Mas não tem dizendo.*

A7: *Esqueci de colocar no problema. Coloquei na resposta.*

A9: *Tem que ter no problema. Se não, como resolve?*

É feito no quadro, o registro da resposta dada por A7.

A4: *Cadê o desenho da resposta?*

A7: *Ia ficar muito grande, desenhar cem (100) biscoitos.*

A20: *Com o desenho, fica mais fácil de entender a resposta.*

PP: *Ele respondeu a fração com o número fracionário* $\frac{50}{100}$*, poderia ser com outra representação?*

A4: *Sim. Poderia ser a metade que é* $\frac{1}{2}$.

PP: *Há outra ou outras maneiras?*

Turma: Pensando em silencio.

A19: *Pode ser em número decimal, né?*

PP: *Sim.*

A19: *Só não sei como fica.*

É feita a exploração e a explicação, no quadro, de como seria a conversão da fração em decimal, levando os alunos a concluírem que $\frac{50}{100} = 0{,}50$.

CPP: *O conteúdo de número decimal já havia sido introduzido pela professora regente da turma. Assim, ao serem questionados e levando-os a explorar a conversão de fração decimal para a representação em número decimal, percebemos entendimento por parte da maioria dos alunos, até porque a conversão feita pela metade é bem mais fácil de ser compreendida.*

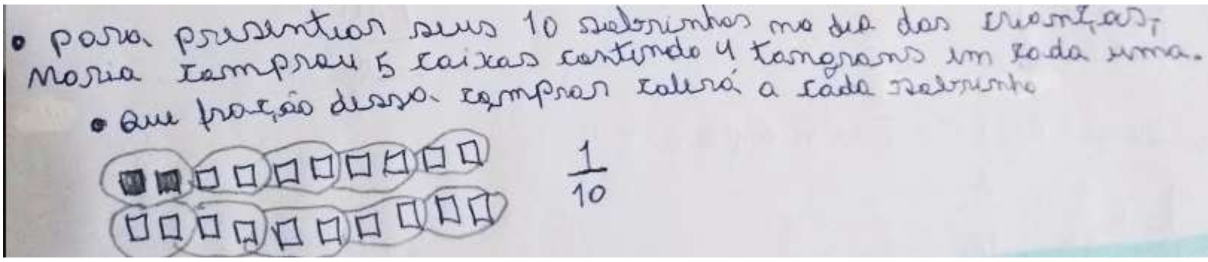
<u>2º momento:</u>

No segundo momento, se fez a problematização e elaboração de proposição de problema coletivamente(turma), com a participação direta da pesquisadora, ao comentar que havia quatro (4) Tangrans, em cada caixa, das 5 caixas que havia comprado. Ficando a proposição assim:

Para presentear seus 10 sobrinhos no dia das crianças, Maria comprou 5 caixas com 4 Tangrans em cada uma. Que fração dessa compra caberá a cada sobrinho?

A proposta foi realizada coletivamente, explorada e representada no quadro, posteriormente, registrada de maneira individual, chegando à resolução que segue, como mostra o registro feito por A9:

Figura 95 - Registro do A9 (Exploração e proposição de problemas)



Fonte: Dados da pesquisa.

Por serem desenvolvidos a partir do âmbito escolar, os conceitos científicos requerem a interação professor-aluno-objeto, para que possa haver maior compreensão e apreensão dos mesmos. Neste caso, o professor tem função primordial de mediador entre o aluno e o conhecimento. Moysés (2009), nos diz, com base na teoria de Vigotski, o que seria a essência de um ensino voltado para compreensão:

a) "*Trabalhando com o aluno*": A preposição *com* já revela uma atitude de interação. A exploração, neste caso, promove essa interação de forma dinâmica.

b) "*Explicou e 'deu informações*": Explicar é muito mais do que fazer mera exposição. É buscar, na estrutura cognitiva dos alunos, as ideias relevantes que servirão como ponto de partida para o que se quer ensinar. Como se pode verificar na atividade oportunizada, gerou-se questionamentos, os quais foram sendo instigados e "explicados". Na medida em que os alunos iam expondo suas ideias/entendimentos, caminhávamos ampliando os esquemas mentais já existentes, modificando-os ou modificando-os para outros mais sólidos e abrangentes.

c) "*Questionou e corrigiu o aluno*": A verificação do que foi falado e se havia compreensão na exposição de suas ideias. A intervenção do professor se faz necessária, aqui, no sentido de corrigir possíveis equívocos.

d)" *...E o fez explicar*": Talvez resida, aqui, o ponto alto de todo o processo. Ao solicitar que o aluno explique, o professor pode detectar se está havendo, no plano intrapsicológico, uma reestruturação das relações que ocorreram no âmbito intrapsicológico. Como é o caso da exposição feita por A9, ao explicar para a turma como havia feito a representação gráfica de $\frac{1}{3}$ em fração contínua e em fração discreta. Isso tornou possível perceber o que e como estava e se estava ocorrendo compreensão do assunto estudado, assim como também as demais demonstrações em relação as proposições feitas, exploradas e registradas pelos alunos.

A aula foi concluída com a exploração da proposta feita e resolvida coletivamente.

Encontro 12: 06/11/2019, das 7h15 às 9h15, com duração de 2 horas

Foco metodológico: EE e EPER

- Exploração, preposição e resolução de situações problema, envolvendo a ideia de fração e a ideia de razão;
- Explorando número fracionário (diferenciando razão, fração e fração com razão).

1º momento:

Neste encontro, inicialmente, foi feita a releitura da proposição elaborada e resolvida coletivamente no encontro anterior. Explorou-se o que e como havíamos feito para chegar ao resultado de $\frac{1}{10}$ de Tangrans, verificando como se configurou o número fracionário indicado nesta fração, como, pode-se perceber na fala de alguns alunos:

A11: *Um décimo dos vinte (20) Tangrans é igual a dois(2) Tangrans.*

A18: *O todo são os 20 Tangrans.*

A7: *Dividiu os 20 Tangrans em dez (10) grupos, cada grupo com dois(2).*

A partir da observações e explorações feitas, a maioria da turma passou a entende melhor e a relacionar a fração discreta na representação gráfica e em número fracionário.

2º momento

No intuito de instigar e promover o estudo referente à configuração do número fracionário, indicando fração e indicando razão, questionamos a turma sobre comparar a quantidade de sobrinhos com a quantidade de Tangrans, dispondo agora duas grandezas de natureza diferente.

PP: *Qual a relação de Tangrans por sobrinho?*

A1: *Dois (2) para cada um(1).*

A9: *Agora, tem que dividir os vinte(20) Tangrans para dez(10) sobrinhos.*

PP: *Como fica na representação de número fracionário?*

Após algum tempo rascunhando e tentando, socializamos para verificar o que haviam feito.

A3*: É* $\frac{2}{20}$?

A20:*É*$\frac{2}{1}$ *, porque ao contrário, fica um meio e não é um meio.*

PP: *Temos como numerador o dois (2) que representa a parte do Tangram e como denominador um(1) que indica um(1) sobrinho. É isso?*

A20: *É.*

PP: *Então* $\frac{2}{1}$ *neste caso, é uma fração?*

A4: *Sim.*

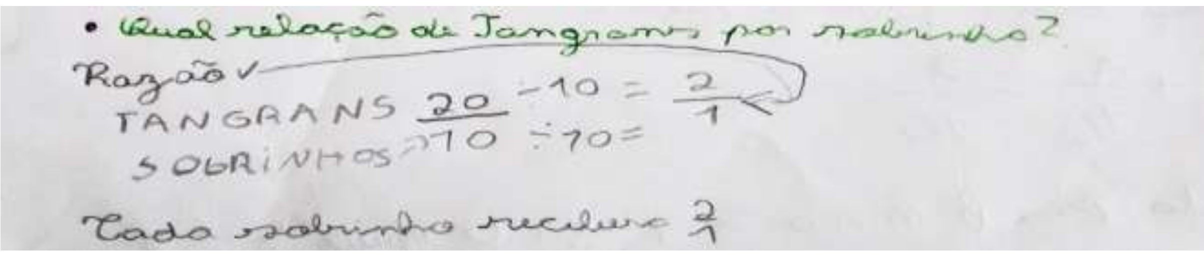
PP: *Todos concordam?*

Turma: *É sim*.

CPP: *Partindo do que foi colocado por A20, foi comentado, sobre o fato de a fração ser uma parte de um todo de mesma natureza, passamos a explicar que, quando se comparava a relação de grandezas de natureza igual ou diferente, havia a ideia de razão e não de fração, ou seja, que o número fracionário pode representar uma fração, quando indicar parte de um todo de mesma natureza, mas, quando há uma comparação de relação entre dois todos de natureza igual ou diferente, representa-se com o número fracionário por tratar de partes, no entanto, denomina-se de razão e não de fração.*

Coletivamente, a referida proposição foi retomada, novamente explorada, descrita e, por fim, identificada como razão e registrada individualmente como no exemplo que segue:

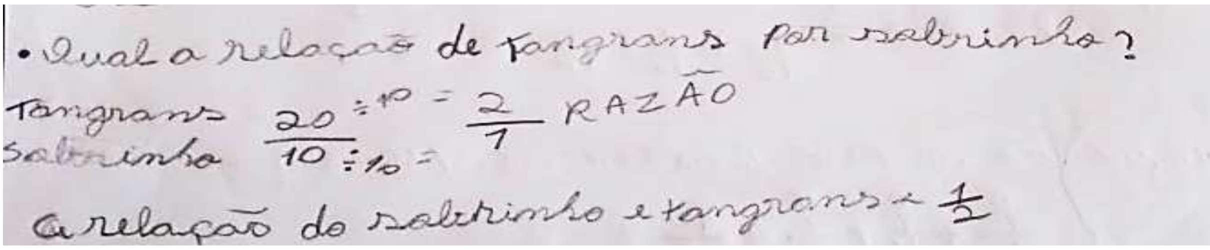
Figura 96 - Registro do A9 (Explorando, configuração do número fracionário indicando razão)



Fonte: Dados da pesquisa.

O registro que segue nos chamou a atenção:

Figura 97 - Registro do A6 (Explorando, configuração do número fracionário indicando razão)


• Qual a relação de tangrans por sabrinho?

Tangrans $\frac{20 \div 10}{10 \div 10} = \frac{2}{1}$ RAZÃO
Sabrinho

A relação do sabrinho e tangrans = $\frac{1}{2}$

Fonte: Dados da pesquisa.

Notamos que, ao fazer o registro final, o aluno inverte a posição dos valores e, ao ser questionado, comenta:

A6: *É mesmo, troquei. Pode ser um sobrinho a cada 2 Tangrans?*

PP: *Pode sim. Vamos escrever, para ver como fica.*

CPP: *A situação é apresentada novamente à turma e explorada, invertendo, colocando a quantidade de sobrinhos sobre a quantidade de Tangrans, chegando à comparação de* $\frac{1}{2}$ *de um para dois, ou seja, para cada sobrinho, 2 Tangrans.*

A3: *Assim, parece ser um meio, mas como são dois todos diferentes, então é uma razão?*

PP: *Sim,* $\frac{1}{2}$*, neste caso, o número fracionário está indicando razão, mas poderia indicar uma fração se fosse um todo de mesma natureza.*

A12: *Êita, é complicado.*

PP: É, mas pra facilitar podemos usar a palavra (preposição) PARA e, assim, comparar e perceber que é uma razão. Quando é fração, além de ser da mesma natureza, podemos usar a palavra (preposição) DE.

A12: Então, podemos ler assim: Um meio "de" alguma coisa é fração e um "para" alguma coisa é razão?

PP: Sim.

Embora tenhamos feito a proposta de atividade coletivamente, percebe-se claramente, que um dos aspectos necessários ao explorar qualquer que seja o conteúdo, deve-se atentar para a atenção a ser instigada, uma vez que, de acordo com Vigotski (2008a, p.27), "dentre as grandes funções da estrutura psicológica que embasa o uso de instrumentos, o primeiro lugar deve ser dado à atenção". Esta poderá determinar o sucesso ou não de qualquer ação, sendo, portanto, um determinante essencial no processo de ensino e aprendizagem.

Diante do que foi explorado e da percepção de ser necessário explorar um pouco mais a diferença de fração e razão, surgiu outro exemplo elaborado coletivamente a partir de alguns materiais (12 lápis e 4 borrachas) colhidos na sala de aula. Descrevemos em fração, correspondendo ao todo de dezesseis (16), materiais escolares colhidos, onde $\frac{12}{16}$ atribuiu-se a fração de lápis e $\frac{4}{16}$ atribui-se a fração de borrachas. Houve, portanto, a comparação de uma quantidade em relação ao todo (fração com razão).

Na comparação de lápis em relação à quantidade de borrachas, explorou-se e os alunos concluíram que seria:

$$\frac{12\ lápis}{4\ borrachas} = \frac{12 \div 4}{4 \div 4} = \frac{3}{1}.$$

A12: *Para cada três (3) lápis, uma(1) borracha.*

PP: *Vocês concordam?*

Confirmam que sim.

PP: *Ok, até o próximo encontro.*

Como já havíamos explorado anteriormente, a maioria dos alunos descreveu que, nesta situação, se tratava de uma razão e não de uma fração, porque não era um todo, mas dois (2) todos de naturezas diferentes, representado por número fracionário.

Cabe esclarecer que o estudo e explorações feitas sobre a configuração do número fracionário, representando razão se deu apenas de modo coletivo e que haveria necessidade de realizar outras explorações para se obter com mais precisão o entendimento individual. Um estudo contínuo e aprofundado seria necessário, dada a complexidade que é, para alguns alunos nesta faixa etária, compreenderem a configuração de dois algarismos formarem um só número, ainda mais representar mais de uma situação, como é o caso da fração e da razão. Todavia, julgamos que a exploração feita em torno do conteúdo abordado tenha obtido êxito em parte dos alunos e pelo fato de tornar possível aos alunos vivenciarem tal experiência, que poderá desencadear melhor compreensão em experiências futuras, tendo em vista que, segundo Vigotski (2009, p. 318), "a aprendizagem se apoia em processos psíquicos imaturos, que apenas estão iniciando o seu círculo primeiro e básico de desenvolvimento".

Encontro 13: 12/11/2019, das 7h15 às 9h15, com duração de 2 horas

Foco metodológico: EE e ERE.

- Explorando fração com significado de operador;
- Explorando operações de divisão e multiplicação de frações.
- Explorando operações com frações através de gráficos (desenhos, ilustrações...).

1º momento:

Neste encontro, a partir de um Tangram exposto no quadro da sala de aula, a retomamos verbalmente aspectos referentes à adição e à subtração de frações e, em seguida, questionamos:

PP: *Como seria se ao invés de adicionar ou subtrair, precisássemos fazer uma multiplicação de frações*?

A20: *Tira o MMC também, porque os denominadores são diferentes?*

CPP: *Diante do questionamento de A20 e de perceber certa inquietude da turma, explica-se que, na multiplicação de fração, multiplicam-se os numeradores por numerados e denominadores por denominadores, sendo iguais ou diferentes.*

Ao explorarmos algumas possibilidades, A3 sugere:

A3: *Qual a fração de* $\frac{4}{16}\text{x}\frac{1}{2}$?

Depois de algum tempo, socializamos o que os alunos haviam feito a partir da operação, explorando e verificando coletivamente como fizeram e o resultado obtido:

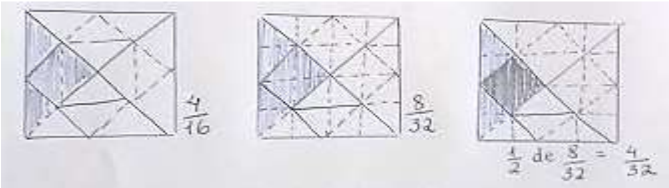
A21: *Assim é mais fácil, porque multiplica numerador por numerador e denominador por denominador, mesmo quando os denominadores são diferentes, então fica assim*: $\frac{4}{16}\text{x}\frac{1}{2} = \frac{4}{32}$

PP: Vamos ver pela representação gráfica.

Solicitamos que fizessem a mesma operação, representando, no traçado do Tangram, o passo a passo até chegar ao resultado obtido. Foi sendo explorado e feito o passo a passo de modo coletivo.

Desse modo, foi possível perceber a transformação ocorrida no resultado da fração, explorando, assim, a fração com significado de operado, oportunizando, ainda, explorar a equivalência de fração, como destacado na figura, a seguir:

Figura 98 - Registro: explorando equivalência e multiplicação de fração



Fonte: Dados da pesquisa.

É interessante observar que, no decorrer da exploração na multiplicação de fração, ao fazer o processo operacional paralelamente à representação gráfica, os alunos passaram a compreender melhor o porquê de, apesar de serem multiplicados, os resultados em fração podem apresentar números fracionários menores, como é o caso do exemplo dado acima.

A7: Pra dividir fração, é do mesmo jeito?

PP: Na divisão de fração, ocorre algo diferente, ou seja, é pra dividir, mas pra resolver, temos que transformar numa multiplicação.

A9: *Eu, hein! Como assim?*

Na pretensão de iniciar exploração de operação de divisão, lançamos a seguinte operação:$\frac{1}{4} \div \frac{4}{2}$?

A7: *Como vai dividir um (1) por quatro(4)?*

CPP: *Neste momento, julgamos necessário explicar e descrever aspectos desta operação, dada a complexidade de ações a serem feitas e internalizadas para a compreensão de transformar, isto é, converter as operações. A explicação foi dada, sem, no entanto, dar o suposto resultado, deixando este para ser encontrado durante a exploração. Após alguns apontamentos feitos, promovemos instigação, exploração e mediação, conduzindo-os à aprendizagem. Assim, foi explicado que há uma inversão, isto é, muda-se a divisão* ($\div$) *para multiplicação (x) e inverte-se o número que está no denominador com o que está no numerador, neste caso, a operação irá ficar desta maneira:* $\frac{1}{4} \div \frac{4}{2} = \frac{1}{4} x \frac{2}{4}$

PP: *E agora, vamos resolver?*

A1: *Sempre que for dividir uma operação de fração, faz assim é?*

PP: *Sim.*

A12: *O resultado é* $\frac{2}{4}$?

PP: *Quem concorda?*

A20: *Está certo, porque depois que fez a inversão ficou sendo a multiplicação e ai é fácil porque é só multiplicar.*

Apesar de chegarem ao resultado, a maior parte da turma expressou não entender o porquê da necessidade de inverter a operação de divisão de fração para a multiplicação. Passamos, então, a verificar, mais uma vez, visualmente, este processo, passo a passo a partir da representação gráfica, representando no traçado do Tangram, o que foi feito na operação.

Passo 1:

Representa-se, no traçado do Tangram, $\frac{1}{4}$.

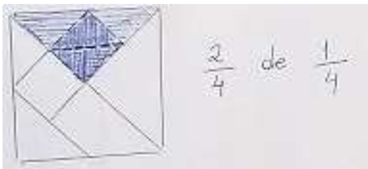
Figura 99 - Explorando conversão e de fração (divisão para multiplicação)

Fonte: Produção da pesquisadora e participantes

Passo 2:

Na fração tomada/admitida, divide-se em quatro (4) partes iguais. Depois, inverte-se o numerador pelo denominador da fração seguinte, ficando $\frac{2}{4}$ de $\frac{1}{4}$. Fizemos a divisão, e, a partir de então, faremos uma multiplicação.

Figura 100 - Explorando conversão de fração (divisão para multiplicação)

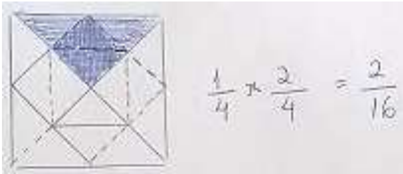


Fonte: Produção da pesquisadora e participantes

Passo 3:

Como iremos multiplicar denominador por denominador e numerador por numerador, na representação gráfica, é possível perceber que o todo passa a ser dezesseis (16) partes iguais e que, destas partes, são tomadas/admitidas duas (2) partes já representadas:

Figura 101 - Explorando conversão de fração (divisão para multiplicação)



Fonte: Produção da pesquisadora e participantes

Outras operações foram sugeridas, exploradas e realizadas coletivamente, fazendo todo o processo numa mesma representação gráfica.

A aula foi finalizada e concluímos que a representação gráfica das operações exploradas auxiliou no entendimento do porquê se chegou a determinados resultados. Todavia, esse entendimento se deu a partir das explorações coletivas. Quando postas individualmente situações similares, boa parte dos alunos apresentaram dificuldade de compreender o sentido de inverter as operações (divisão de fração), aspecto que consideramos ocorrer pelo fato da pouca vivência de situações que envolva a ideia de frações, nas séries anteriores, além da alta complexidade que requer o entendimento de fração com significado de operador, em que há uma mudança de operações para a obtenção dos resultados que, muitas vezes, pode gerar dificuldade pelo fato de ser visto como contraditório. Até então, a compreensão que os alunos têm é que, ao multiplicar números naturais, haverá um acréscimo de valor/ quantidade, porém, na multiplicação com frações, nem sempre multiplicar indica aumentar, muitas vezes, há uma redução.

Visualizando o que foi desenvolvido neste encontro, a exploração coletiva assume fator importante, uma vez que pode favorecer a compreensão individual futura do que foi abordado coletivamente, como bem destaca Vigotski (2008a, p.97), ao referir-se à zona de desenvolvimento proximal:

> Ela é a distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da solução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da solução de problemas sob orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais capazes. (VIGOTSKI, 2008a, p.97).

Assim sendo, ainda que alguns alunos tenham apresentado dificuldade de compreensão, algo ficou de experiência registrada em sua memória e, a partir dessa experiência, quando os alunos estiverem diante deste em uma nova vivência em relação ao que foi estudado, haverá uma facilitação na compreensão do conteúdo abordado.

Encontro 14: 14/11/2019, das 7h15 às 9h15, com duração de 2 horas

Foco metodológico: EE e ERE.

- Explorando fração com significado de número.

<u>1º momento:</u>

Para iniciarmos a exploração com significado de número, foi solicitado que os alunos observassem suas réguas ou quem não tivesse régua poderia observar a de um colega. Após observarem, os alunos passaram a descrever verbalmente o que perceberam na régua.

A12: *Na minha, tem números e cor verde.*

A16: *A minha é transparente e tem tracinhos maiores e menores.*

A3: *Na minha, tem números, traços e pontinhos também.*

A1: *Na minha régua, tem número, traços, uma marca de onde foi feita e também tem um furinho no final.*

A9: *A minha tem números, traços e tem 30 cm.*

Explorando um pouco mais, questionamos sobre a possibilidade de fracionarmos os números 1,2,3...mostrando, na régua, que há espaços de um número para o outro e um aluno destaca:

A11: *São dez (10) partes, cada número na minha régua.*

A partir da fala de A11, explicamos sobre o fato de que o espaço entre os números na régua ser dividido em 10 basear-se no Sistema de Numeração Decimal (SND). Assim como o metro é composto de 100 cm, que é igual a 1 metro e tem dez(10) partes de 10cm, a régua escolar, geralmente, é feita com medida de 30cm, que corresponde a $\frac{30}{100}$ do metro ou em decimal a 0,30, mas, se quisermos, podemos fracionar o número como desejarmos, e convertê-lo em número decimal.

PP: *Na reta numérica, cada número é considerado um inteiro, ou seja, uma unidade, e as divisões feitas no intervalo de cada número natural (inteiro), na reta numérica, correspondem a subunidades que podem ser representadas por número fracionário.*

A5: *Quer dizer que do zero(0) até o um (1) é um inteiro e depois do um (1) até o dois (2) é outro inteiro?*

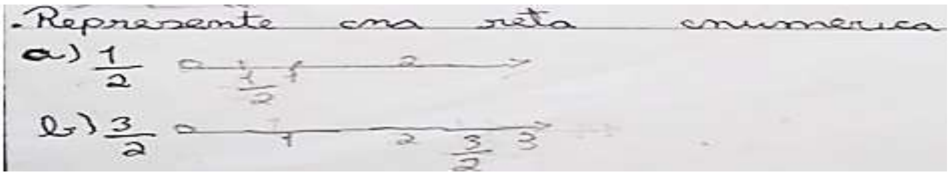
PP*: Um número inteiro, disposto numa reta numérica pode ter esse entendimento, pois, cada número inteiro na sequência da reta, poderá ser dividido, e dele, ser indicado uma parte do todo.*

A analogia feita a parte-todo foi um meio no qual se julgou viável para que os alunos tivessem noção da possibilidade de particionar um número, tendo em vista que a ação de particionar um número é abstrata.

2º momento:

A turma é desafiada a representar $\frac{1}{2}$ e depois $\frac{3}{2}$ na reta numérica. Em seguida, é feita a exploração coletiva das produções realizadas. Segue alguns registros da proposta.

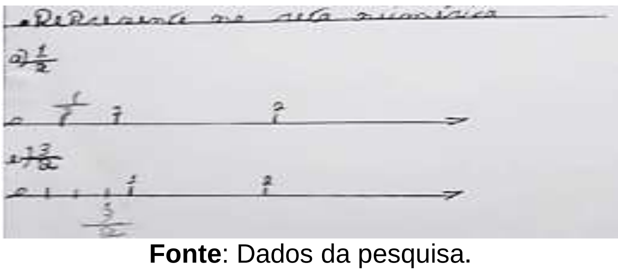
Figura 102 - Produção do A9 (Explorando fração com significado de número)



Fonte: Dados da pesquisa

Feita a exploração coletiva, constatou-se dificuldade de compreensão por parte da maioria dos alunos em perceberem a fração com significado de número, a exemplo de A9, que, embora tenha identificado $\frac{1}{2}$ como metade entre 0 e 1, apresentou dificuldade em localizar $\frac{3}{2}$, ainda que tenha traçado uma reta numérica para cada representação. Assim como também é observado na produção de A5:

Figura 103 - Produção do A5 (Explorando fração com significado de número)



Fonte: Dados da pesquisa.

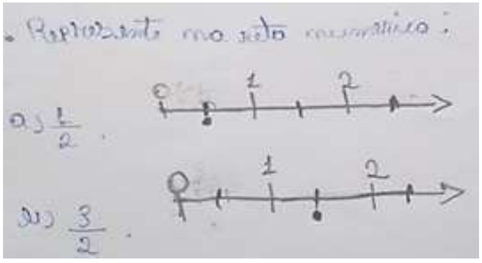
Exploramos coletivamente a atividade realizada por A5 e é interessante destacar o que alguns alunos apontaram:

A12: *Tinha que dividir o espaço de 0 a 1 em três (3) partes. Está partido em quatro (4) partes.*

A3: *São três (3) metades, então, cada número tem que ser dividido ao meio e conta três partes e chega na fração de* $\frac{3}{2}$ *que 1 (todo) e a metade do 2.*

Nota-se que A3 percebe a divisão a ser feita para que se obtenha $\frac{1}{2}$ de 1 e, na reta seguinte, se obtenha $\frac{3}{2}$. Vejamos como o mesmo realizou a proposta e o que se observou de sua produção:

Figura 104 - Produção do A3 (Explorando fração com significado de número)



Fonte: Dados da pesquisa.

Na exploração coletiva realizada na produção de A3, constatamos que a mesma apresenta coerência quanto a situar os pontos fracionários, mas faltou fazer o registro da fração em número fracionário em cada ponto situado.

Diante das colocações, observamos que poucos conseguiam relacionar cada número sendo um (1) inteiro e que, para $\frac{3}{2}$, poderia fazer a conversão para $1\,\frac{1}{2}$, como explicado durante a exploração feita.

Encontro 15: 21/11/2019, das 7h30 às 11h00.

Foco metodológico: EE e ERE.

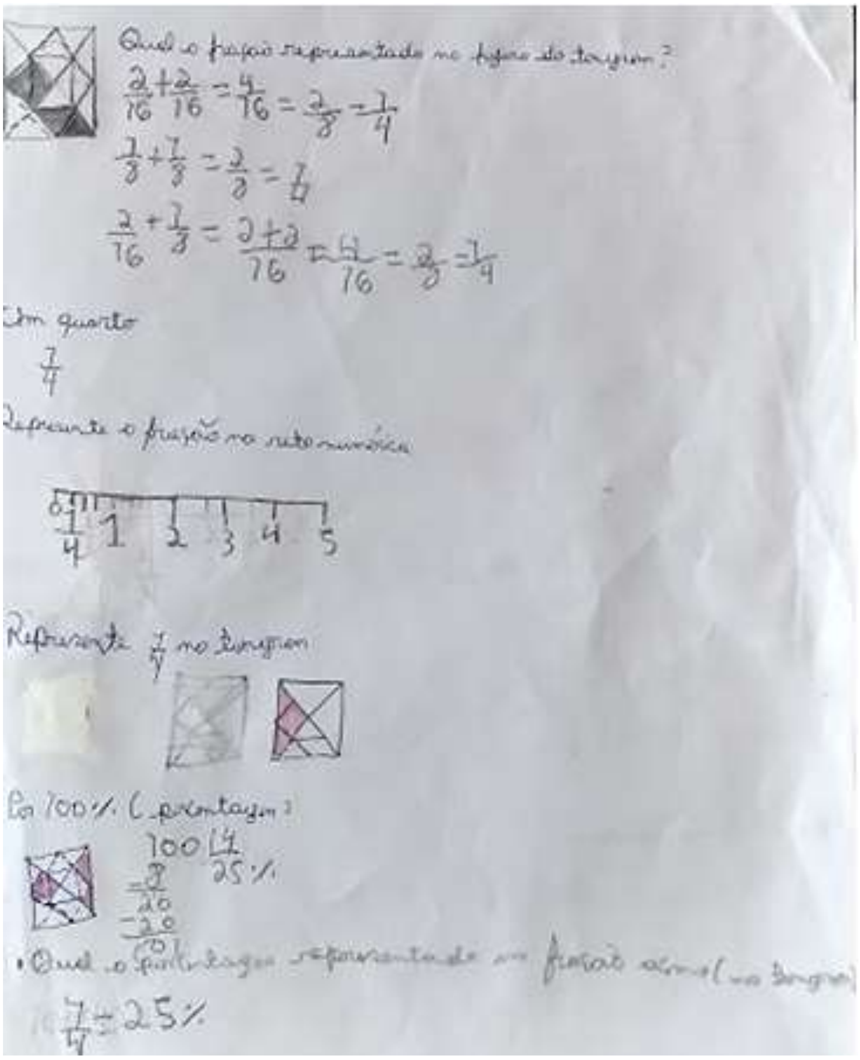
- Explorando frações nas representações: decimal e em porcentagem;
- Explorando conversão e reversão de frações.

<u>1º momento:</u>

Pretendendo verificar, revisar e aprofundar algumas questões exploradas ao longo da intervenção, inclusive, referente à fração com significado de número na reta numérica, passamos a fazer, coletivamente, conversões e reversões de frações, em que uma mesma fração dada fosse representada de diferentes maneiras, concomitantemente com o que Smole e Diniz (2016, p.13) descrevem sobre isso “os alunos estarão se comunicando sobre matemática quando as atividades propostas a eles forem oportunizadas para representar conceitos de diferentes formas e para discutir como diferentes representações refletem o mesmo conceito.”

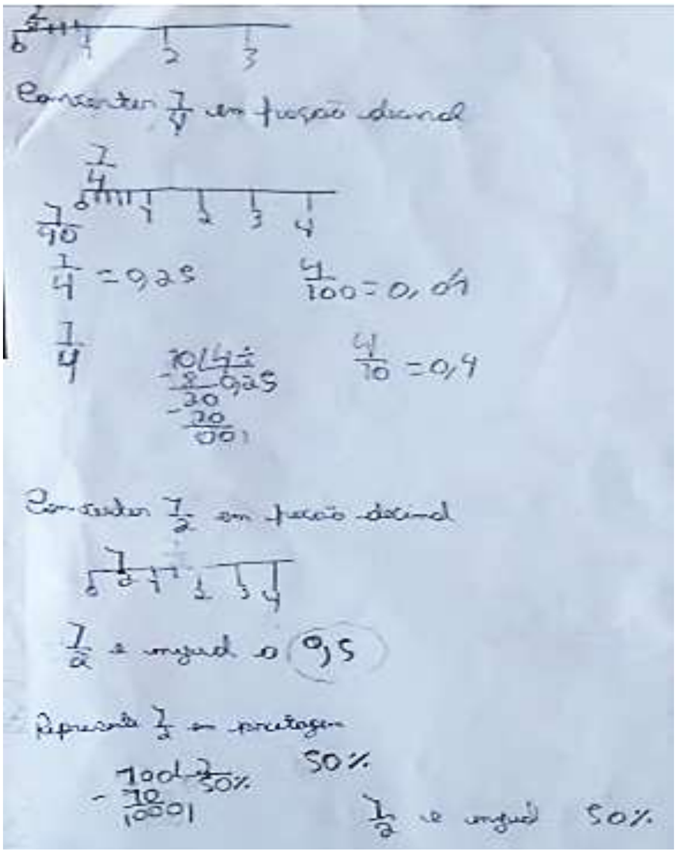
Ressaltamos que a questão de porcentagem (embora tenha sido trabalhada pela professora regente), foi colocada pela pesquisadora apenas neste momento, a fim de propor noções de conversão de fração na representação de porcentagem. Segue, abaixo, o que foi explorado coletivamente a partir das frações indicadas, ou seja: conversões e reversões feitas a partir $\frac{1}{4}$ e a partir de $\frac{1}{2}$, utilizando os registros feitos por A4, por considerar que estes representam, de maneira mais organizada, o desenvolvimento da proposta realizada:

Figura 105 - Registro do A4 (frente): explorando conversões e reversões de frações



Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 106 - Registro do A4 (verso): explorando conversões e reversões de frações



Fonte: Acervo da pesquisadora.

Durante a exploração, A4 diz:

A4: *Se fosse* $\frac{4}{100}$ *ficaria em decimal 0,04, né?*

PP: *Sim.*

A4: *Fazer o número decimal de fração com 10, com 100 é fácil, desse jeito da reta é difícil.*

PP: *Por que você acha que a fração com decimais é mais fácil?*

A4: *Porque é só pensar assim: se for* $\frac{4}{100}$ *fica 0,04 porque é uma parte de 100. Se for* $\frac{4}{10}$ *fica 0,4 porque é 4 de 10*.

A21*: Professora, a fração* $\frac{1}{2}$ *de 100 em porcentagem é o mesmo que 50%, né?*

PP: *Sim. Numa fração parte-todo, representada graficamente, corresponderia a* quê?

A1: *Duas metades iguais, sendo cada uma 50%.*

A4: *E, em decimal, esse 50% é 50 professora?*

PP: *E aí, pessoal, é 50?*

A12: *É sim, mas em decimal tem que ter a vírgula, né? Fica 0,50*.

PP*: Ok! E se os 50% corresponder a* $\frac{1}{2}$ *de 10?*

A12*:* $\frac{1}{2}$ *é metade, então metade de 10 é 5.*

PP: *E convertendo em decimal, como fica?*

A1*: Fica 5,0?*

A12*: Professora, o que fica antes da vírgula é inteiro?*

PP*: Sim.*

A12*: Então vai ser 0,5?*

PP*: O que acham? É 5,0 ou 0,5?*

A9*: É 0,5 por que menos que o inteiro, fica um zero antes da vírgula.*

Turma*: Concordam*

2º momento

Neste segundo momento, agradecemos a participação da turma e realizamos um lanche coletivo.

Finalizamos a parte interventiva avaliando que a exploração feita ao longo dos encontros fora positiva, ainda que se tenha observado dificuldade de alcance, em um ou outro conteúdo explorado.

De modo geral, concluímos que a exploração para problematizar, propor e resolver problemas com enunciados ou não, pode ser uma ferramenta metodológica riquíssima por oportunizar aos alunos expressarem e verbalizarem suas ideias, opiniões e dúvidas, possibilitando, inclusive, a superação de timidez ou resistência de argumentar e/ou se expor perante a turma (socialmente), tornando a aprendizagem muito mais significativa e possibilitando um ensino mais adequado, uma vez que torna possível ao professor perceber e fazer interferências necessárias e objetivas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir da nossa questão de pesquisa e do aporte teórico metodológico, identificamos e elencamos alguns dos vários aspectos que podem ser indicadores da complexidade que poderá envolver o ensino e a aprendizagem de fração:

- A falta de compreensão dos diferentes significados que a fração pode assumir, como: Parte-todo, Número, Medida, Quociente e Operador;

A exploração e a aquisição de compreensão do significado parte-todo são primordiais para o embasamento de outros significados. A fração parte-todo não deve ser o único significado a ser explorado, mas acreditamos ser essa ideia base a ser apreendida. Explorar este significado, a partir da divisão do todo em partes diferentes, torna possível ao aluno compreender que não se trata apenas de indicar a fração (parte admitida), mas, sim, de compreender a que fração corresponde essa parte no todo.

Entendendo que a exploração de um mesmo todo, objeto/referência, pode favorecer a apreensão de vários aspectos abordados, nos utilizamos do Tangram, por considerar que o mesmo poderia ser utilizado para esse fim, além da viabilidade deste, para explorar fração de um todo, em partes diferentes. No entanto, não foi viável para explorar a fração com significado de número, o que nos levou a utilizar outro objeto, no caso, a régua, por ser um instrumento numerado.

Todavia, além do Tangram, surgiu, por parte dos alunos, a utilização de outras figuras geométricas (retângulo e círculo) para externarem suas ideias, opiniões, dúvidas, além da fração com significado de número ter explorada e visualizada em reta numérica.

Observamos que a maioria dos alunos apresentou dificuldades em compreender a fração com significado de número, embora alguns localizassem-se a fração indicada na reta numérica, externaram conflito para perceberem que cada número na reta indica um inteiro e as subdivisões entre estes indicam partes. Com a exploração retomada e algumas explanações feitas, foi possível perceber que poucos alunos passaram a compreender cada número natural na reta como um inteiro, explorando a partir das subdivisões entre um número e outro para fazer a representação fracionária e deste a conversão em número decimal. O conflito apresentado pode ser causado, a nosso ver, pelo fato da dimensão abstrata do número requerer maior maturação cognitiva.

Quanto à fração com significado de operador, verificamos que, quando explorada coletivamente a partir do material manipulativo, representada graficamente, descrevendo e registrando por extenso cada etapa realizada para chegar ao resultado final, os alunos externaram certa compreensão, porém, ainda demonstraram insegurança e inquietude, implicando em entender que a fração com significado operador requeira maior tempo e exploração contínua para a obtenção de maior êxito. Ao que se percebe, a aquisição deste conteúdo demanda, para seu entendimento, aprofundamento e consolidação dos demais significados, também, por requerer maturação cognitiva para compreender, de maneira mais efetiva, o porquê da ampliação ou redução do resultado final.

Fora constatado que, ao explorarmos os demais significados (parte-todo, medida e quociente) da fração, fazendo conversões e reversões, representando-as de diversas maneiras, obteve-se êxito, uma vez que os alunos passaram a compreender e identificá-las em outros contextos. Inclusive, percebendo, a partir da conversão e subdivisão das partes de um todo, a ideia de equivalência e de que quanto mais o todo é particionado, maior será o denominador, por aumentar a quantidade de partes.

Quanto a isso, consideramos importante a exploração de frações realizadas a partir do número fracionário para ser representada graficamente, aspecto que percebemos ser bastante enriquecedor, uma vez que os alunos tem a oportunidade de experienciar maior compreensão do que vem a ser a fração indicada em número fracionário, já que precisa despertar e dispor de entendimento do que representa o denominador e do que representa o numerador, tendo que representá-los graficamente e, assim, inferir como deva ser a representação adequada. Observamos que, apesar de perceberem a quantidade de partes a serem representadas e admitidas a partir de um número fracionário, por vezes ocorre que, na representação gráfica, a divisão das partes não ficam iguais, denotando não compreensão por parte do aluno, o que, de modo geral, não implica, necessariamente, falta de compreensão por parte do aluno, por vezes, é tão somente falta de atenção ou pouca desenvoltura pictórica.

- A falta de compreensão em relação à fração gráfica, numérica com significado das palavras usualmente utilizadas para indicar partes fracionárias, como: meio, terço, quinto, avos...;

Percebemos que a exploração com manuseio de material manipulativo e representação gráfica viabiliza encontrar equivalências de maneira mais perceptiva, e, assim, favorece a compreensão de forma mais clara do que o número fracionário quantifica, associando a leitura e escrita adequada quanto ao sentido de palavras usuais para se referir a frações.

Embora se tenha percebido certa resistência por parte dos alunos quanto ao registro por extenso, os mesmos, por vezes, argumentavam que não seria necessário escrever, bastava apenas verbalizar. Talvez, isso ocorra pela falta de costume de escreverem a ação realizada, tendo em vista que, geralmente, fazem apenas o registro numérico e/ou gráfico.

A contextualização de palavras, como terço, quinto, distinguindo seus sentidos quanto à Língua Materna e à linguagem matemática, bem como a compreensão de avos e decimais auxilia na percepção e identificação da configuração do número fracionário, no que se refere à leitura e escrita de frações, assim como também na percepção que caracteriza e diferencia fração de razão, ou seja, o uso da preposição ***de*** ao se referir à fração, por exemplo: $\frac{1}{2} de$ 1 Tangram, ou $\frac{1}{10}\ de\ 20$ Tangrans; o uso da preposição ***para*** ao se referir a razão, por exemplo: Para cada sobrinho 2 Tangrans ($\frac{1}{2}$ Um para dois) ou 2 Tangrans para cada sobrinho ($\frac{2}{1}$ Dois para um). Situação essa vivenciada a partir da exploração e proposição de problemas utilizando quantidades de Tangrans, após explorar e diferenciar fração contínua (partes do todo) de fração discreta (partes/grupos/subquantidades de uma quantidade).

Obtivemos por parte dos alunos a compreensão e diferença que caracteriza uma fração contínua de uma fração discreta, bem como maior compreensão quanto à representação das partes/quantificadas indicadas no número fracionário.

- O fato de o número fracionário ser um número racional e este, dependendo do contexto, poder com a mesma representação simbólica indicar uma fração ou uma razão;

Ainda, em relação à compreensão do registro em número fracionário, foi possível perceber que os alunos externaram compreensão quanto a diferenciar fração de razão, especialmente em relação à ideia de fração corresponder a um todo de mesma natureza, enquanto na razão há uma comparação de quantidades de tanto para tanto, ficando evidente maior domínio quanto à visualização de razão com naturezas diferentes, como no caso exposto acima, em que a relação comparativa se dá de quantidades de sobrinhos(pessoas) para quantidades de Tangrans (objetos).

Em se tratando de fração com razão, foram propostas, pelos alunos, de maneira coletiva, além da que já foi descrita, a seguinte preposição: Foram colhidos 16 materiais na sala de aula, sendo 12 lápis e 4 borrachas. Quantos lápis em relação ao todo? Obtendo-se como resposta $\frac{12}{16}$, nota-se que há uma comparação de parte-todo (Dos 16 materiais, 12 são lápis), portanto, fração com razão. Se a referência fosse apenas de materiais, teríamos uma fração, por exemplo: Foram utilizados $\frac{12}{16}$ dos materiais colhidos na sala de aula. Neste aspecto, o mesmo número utilizado para representar fração e fração com razão denotou grande conflito de entendimento, por parte da maioria dos alunos. O conflito foi percebido, igualmente, com o uso de número fracionário diferente, ou seja, a fração com razão: Dos 16 materiais, 4 são borrachas, representando em número fracionário $\frac{4}{16}$, havendo uma comparação parte-todo da quantidade de borrachas em relação ao todo (materiais).

Com o conflito percebido (referente a identificação de fração com razão), priorizou-se o estudo e entendimento do que seria a representação do número fracionário indicando fração e indicando razão, diferenciando e consolidando estes conceitos, que, a nosso ver, já foi de grande conquista, uma vez que, até então, os alunos da turma a qual foi desenvolvida a pesquisa não tinham tido nenhuma experiência neste sentido.

Logramos êxito, pela maioria da turma, ao compreenderem a configuração do número fracionário, inclusive, compreendendo que, por ser um número fracionário, não quer dizer, necessariamente, que é uma fração.

Percebemos, a partir das atividades oportunizadas e exploradas, que os alunos possuem potencial para propor problemas, mas apresentaram, de início, certa resistência, por não estarem acostumados a proporem, apenas a “resolverem” os problemas dados pelos professores e/ou existentes no livro didático. Ainda assim, julgamos ter obtido resultados satisfatórios, dado o pouco tempo em que foi usado para explorar a proposição de problemas pelos e com os alunos. Todavia, devemos destacar que, embora a maioria dos alunos tenha realizado individualmente algumas proposições, elas foram postas coletivamente, para serem exploradas, analisadas e melhoradas, de forma a conduzir os participantes (envolvidos na atividade) a chegarem a um consenso e, consequentemente, a aprendizagem do que seria uma proposição de problema.

Ao término da pesquisa de campo, nos foi possível constatar que a metodologia Exploração-Resolução-Proposição de Problemas tornou bem mais significativo o processo de ensino e aprendizagem de fração, por dar condições de interação e socialização entre os participantes, de modo que todos os envolvidos externam suas ideias, dúvidas e descobertas, promovendo inquietações que geram novas explorações e, assim, oportunizam a aprendizagem. A participação efetiva do aluno nas discussões e liderando em alguns momentos a exploração e socialização de ideias, ao expor para os demais como conseguiu chegar a determinado resultado, é crucial neste processo, além de despertar entusiasmo em quem o faz, encoraja os demais colegas a explorem, também, seus entendimentos.

Constatamos ainda que a referida metodologia oportuniza e sinaliza para o professor o que e como o aluno, possivelmente, está pensando e entendendo quanto ao que está sendo abordado, que conflitos cognitivos e sociais estão sendo expostos, e assim, tornar possível uma mediação mais objetiva e obtenção de maior êxito no ensino e na aprendizagem.

Ressaltamos que a mediação e as explicações feitas pelo professor são necessárias, porém, não devem ser um ensino direto, mas, sim, articulador, instigador e esclarecedor das dúvidas postas durantes as explorações tão necessárias no e para o processo de descoberta, criatividade e criticidade no decorrer das atividades propostas.

A realização desta pesquisa é tão somente um ponto de partida que viabiliza a reflexão quanto ao ensino e aprendizagem de fração e a tomada de consciência crítica na prática docente. Que esta seja fomento para a realização de outras pesquisas quanto à compreensão e diferença entre fração, razão e fração com razão, na configuração do número fracionário, bem como no aprofundamento do que foi posto, e/ou adentrando em outros aspectos que as diferenciam, como forma de identificar e viabilizar alternativas de ensino e aprendizagem no Ensino Fundamental I, também, visando verificar se e como estes temas têm sido abordados na formação inicial e/ou continuada do professor pedagogo.

REFERÊNCIAS

ALBUQUERQUE, I.M.B. **O conceito de grupo:** sua formação por alunos de matemática. Tese (Doutorado em Educação Brasileira) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2005.

ANDRADE, Silvanio. Um caminhar crítico e reflexivo sobre Resolução, Exploração e Proposição de Problemas Matemáticos no Cotidiano da Sala de Aula. *In*: ONUCHIC, L. R.; JUNIOR, L. C. L.; PIRONEL, M. (Orgs.). **Perspectivas para Resolução de Problemas.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017, p.355-395.

ANDRADE, Silvanio. **Ensino-Aprendizagem de Matemática via resolução, exploração, codificação e descodificação de problemas**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1998.

BELFORT, E; VASCONCELOS, C.B. **Diferentes significados de um mesmo conceito -o caso das frações.** Pró Letramento em Matemática - Minas Gerais. Disponível em:<http://www.professoresdematematica.com.br/wa_files/Fracoes_20e_20seus_20Significados.pdf> Acesso em: 13 jul.2019.

BERTONI, N.E. A Construção do Conhecimento sobre o Número Fracionário. **Bolema – Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v.21.nº 31, p.209-237, 2008.

BERTONI, N.E. **Educação e linguagem matemática IV:** frações e números fracionários. Brasília: Universidade de Brasília, 2009.

BEZERRA, F. J. B. **Introdução do conceito de número fracionário e suas representações:** uma abordagem criativa para a sala de aula. Dissertação (Mestrado: Programa-Educação Matemática). PUCSP, 2001.

BOGDAN, R. C. BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em Educação:** Uma introdução à teoria e aos métodos. Tradução de M. J. Alvarez, S. B. Santos e T. M. Baptista. Porto: Porto Editora, 1994.

BOTTA, L.S. **Números racionais e raciocínio proporcional**: considerações sobre o ensino aprendizagem.1997.185f.Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de MESQUISTA, Rio Claro, 1997.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Trad. Elza Gomide. 2ª ed. São Paulo: Edga rd Blücher, 1996.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática, SEF/MEC. Brasília: DF, 1997.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. 3ª versão. Brasília: Ministério da Educação. 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNC C_20dez_site.pdf>. Acesso em: 21 mar. 2018.

CAI, J.; LESTER, F. (2010). Why is teaching with problem solving importantto student learning? **Research Brief,** 14, 1–6.

CAI, J. *et al*. Problem-Posing Research in Mathematics Education: Some Answered and Unanswered Questions. In: SINGER, F. M.; ELLERTON, N. F.; CAI, J. (ed). **Mathematical Problem Posing, From Research to Effective Practice**. Nova York: Springer Science + Business Media, 2015, p. 3-34.

CELESTINO, K.G. **As frações em algumas civilizações antigas.** Disponível em: <www.sbemparana.com.br/eventos/index>. Acesso em: 19 mai. 2019.

CRESWELL, J.W. **Investigação Qualitativa e Projeto de Pesquisa**: Escolhendo entre cinco abordagens. Tradução: Sandra Mallmann da Rosa. 3.ed. Porto Alegre: Penso, 2014.

CONTI, K. C; LONGO, C. A. C. (Orgs.) **Resolver problemas e pensar a matemática.** Campinas, SP: Merc. das Letras, 2017.

CRAMER, K; HENRY, A. **Using Manipulative Models to Buid Number Sense for Addition and Fractions**. In: B. Litwiller and G. Bright (eds.), *Making Sense of Fractions, Ratios, and Proportions*, Reston, Virginia, NCTM, 2002, p. 41-48.

CRESPO, S. **Aprendendo a colocar problemas matemáticos:** explorando mudanças nas práticas dos professores de preservação.
Mathematics Teachers Education. 2003.p.243-270. Disponível em: <https://www.researchgate.net/profile/Sandra_Crespo/publication> Acesso em: 28 mai.2019.

CURI, E. **A matemática e os professores dos anos iniciais.** São Paulo: Musa, 2005.

DRECHMER, P.A.O; ANDRADE, Susimeire. V.R. Os cinco significados da fração. *In*: CIAEM-IACME,13. 2011. **Anais** [...]. Recife, Brasil, 2011. Disponível em: <http://xiii.ciaem-redumate.org>Acesso em: 15 set. 2019.

ESPINOSA, C.E. **Números decimais:** Dificuldades e propostas para o ensino e o aprendizado de alunos de 5ª e 6ª séries. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2009.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Hygino Domingues. 5a ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

FERNANDES, J.A; LEITE, F. Compreensão do Conceito de Razão por Futuros Educadores e Professores dos Primeiros anos de Escolaridade. **Bolema:** Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, 2015, n.51, p. 241-262.

FERREIRA, E.S. Onze avos, doze avos... de onde vem este termo avo? **Revista Brasileira de História da Matemática**, São Paulo, v. 6, n. 11, p. 97-108, 2006.

FREUDENTHAL, H. **Didactical phenomenology of mathematical Structures**.

Kluwer Academic Publishers New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow.Cap.5, p.133-177.Disponível em: <http://gpdmatematica.org.ar/wp-content/uploads/2015/08/Freudenthal_Didactical_Phenomenology_of_Mathematical_Structures1983.pdf> Acesso em: 23 fev.2019.

GUERRA, R.B; SILVA, F.H.S. As Operações com frações e o Princípio da Contagem. **Bolema:** Boletim de Educação Matemática, Rio Claro (SP), v. 21, n. 31, p.41-54, 2008.

JURADO, U.M. Creación de Problemas. Avances y Desafíos en la Educación Matemática, **REMATEC**, Ano 11, n. 21, jan./abr., 2016, p. 79-90.

LANKSHEAR, C.; KNOBEL, M. **Pesquisa pedagógica:** do projeto à implementação. Porto Alegre: Artmed. 2008.

LARA, A. M. B.; MOLINA, A.A. Pesquisa Qualitativa: apontamentos, conceitos e tipologias. *In*: TOLEDO, Cèzar de Alencar Arnaut de; GONZAGA, Maria Teresa Claro(Orgs.). **Metodologia e Técnicas de Pesquisa nas Áreas de Ciências Humanas.** Maringá: EEduem, 2011, p. 121-172.

LIMA, R. P. **O ensino e a aprendizagem significativa das operações com frações:** Sequência didática e o uso de tecnologias digitais para alunos do Ensino Fundamental II**.** 2014.232f. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemática) – Universidade Federal do Pará, Belém, 2014.

LOPES.A. J. O Que Nossos Alunos Podem Estar Deixando de Aprender sobre Frações, quando tentamos lhes Ensinar Frações. **Bolema:** Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, v.21. nº 31, p.1-22, 2008.

LORTIE-FORGUES, H.; TIAN, J.; SIEGLER, R. S. (2015). **Why Is Learning Fraction and Decimal Arithmetic So Difficult?** Development Review, 38, 201-221.

MA, LIPING. **Saber e Ensinar Matemática Elementar**. Tradução de Sara Lemos e Ana Sofia Duarte. Lisboa: Gradiva, 2009.

MAGINA, S. CAMPOS, T. M. M**.** A fração nas perspectivas do professor e do aluno dos dois primeiros ciclos do ensino fundamental. **Bolema:** Boletim de Educação Matemática, Rio Claro (SP), v. 21, n. 31, p. 23-40, 2008.

MAGINA, S.; BEZERRA, F. B; SPINILLO, A. Como desenvolver a compreensão da criança sobre fração? Uma experiência de ensino. **RBEP**, Brasília, v. 90, n. 225, p. 411-432, maio/ago. 2009.

MENDES, I.A. **Números:** o simbólico e o racional na história**.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2006.

MOREIRA, P. C.; FEREIRA, M. C. C. A Teoria dos Subconstructos e o Número racional como Operador: das estruturas algébricas às cognitivas. **Bolema:** Boletim de Educação Matemática, Rio Claro(SP), v. 21, n. 31, p.103-127, 2008.

MOUTINHO, L.V. **Fração e seus diferentes significados**: um estudo com alunos dos 4ª e 8ª séries do ensino fundamental. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

MOYSÉS. L. **Aplicações de Vygotsky à educação matemática**. 9ª ed. Campina, SP: Papirus, 2009.

MUENCHEN, C.; DELIZOICOV, D Concepções sobre a problematização na educação em ciências. **IX Congresso Internacional sobre Investigación em Didáctica de las Ciências**. Girona: Espanha, p. 2447-2451, 2013

NACARATO, A. M. Eu trabalho primeiro no concreto. **Revista de Educação Matemática**, São Paulo, v. 9, n. 9-10, p. 1- 6, 2005.

NUNES, T. (org.). **Aprender pensando: contribuições da psicologia cognitiva para a educação**.20.ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2012.

OLIVEIRA, M.K. **VYGOTSKY**: Aprendizado e desenvolvimento. Um processo sócio-histórico. São Paulo: Scipione,1995.

ONUCHIC, l. de. R. *et al*. **Resolução de problemas:** Teoria e prática. Jundiaí, Paco Editorial, 2014.

ONUCHIC, l. de la R; ALLEVATO, N. S. G. As diferentes "Personalidades" do NÚMERO Racional trabalhadas através da Resolução de Problemas. **Bolema:** Boletim de Educação Matemática, Rio Claro(SP), v. 21, n. 31, p.79-102, 2008.

POWELL, A. B. **Measuring perspective of fraction knowledge: integrating historical and neurocognitive findings. ReviSeM**, Ano 2019, N°. 1, p. 1 – 19.

POWELL, A.D; YOKOYAMA, L.A. **Proposição de problemas colaborativos online: um estudo preliminar**. Junho de 2011. DOI: 10.5935/reeduc.v8i16.167 Disponível em: <www.researchgate.net/publication>. Acesso em: 22 jul. 2019.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas:** um novo aspecto do método matemático. Tradução de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciências, 1995.

SANT'ANNA, D. C.; BITTENCOURT, J; OLSSON, S. Transposição e mediação didática no ensino de frações **Bolema**: Boletim de Educação Matemática. Ano 20, n. 27: 71-91, Rio Claro, maio de 2007.

SANTOS, S.F.**O uso do Tangram como proposta no Ensino de Frações**. Dissertação (Mestrado)- Universidade Federal de Goiás, Unidade Acadêmica Especial de Ciências Exatas e Tecnológicas, PROFMAT - Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional, Jataí, 2019.

SCHROEDER, T. L.; LESTER, F. K., JR. Developing understanding in mathematics via problem solving. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Eds.). **New directions for elementary school mathematics.** Reston: NCTM, 1989, p. 31-42.

SHARP, J. M.; GAROFALO, J.; ADAMS, B. **Children's Development of Meaningful FRACTION Algorithms:** A Kis's Cookies and a Puppy's Pills. In: B. Litwiller and G. Bright (eds.), *Making Sense of Fractions, Ratios, and Proportions*, Reston, Virginia, NCTM, 2002, p.18-28.

SILVA, A. P. **Ensino-aprendizagem de análise combinatória através da resolução de problemas:** um olhar para a sala de aula. 2013.91f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual, 2013.

SILVA, M. J. F. **Sobre a introdução de números fracionários**. 1997. 245 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de MATEMÁTICA) – Pontifícia Universidade católica de São Paulo, PUC, São Paulo, 1997.

SILVA, M. J. F. **Investigando saberes de professores do ensino fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série**. Tese de Doutorado – PUC, São Paulo, 2005. 302f.

SILVA, M. J. F., & ALMOULOUD, S. A. As Operações com Números Racionais e seus Significados a partir da Concepção Parte-todo. **Bolema:** Boletim de Educação Matemática, 2008,21(31), 55-78.

SILVA, P.H. **Ensino e aprendizagem de fração:** um olhar para as pesquisas e para a sala de aula. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2017.

SILVA, S. V. P. **Ideias/significados da multiplicação e divisão:** o processo de aprendizagem via Resolução, Exploração e Proposição de Problemas por alunos do 5º ano do Ensino Fundamental. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2016.

SILVA, V.S; ANDRADE, Silvanio. Resolução e exploração de problemas com o uso das tecnologias nas aulas de matemática. Caminhos da Educação Matemática em **Revista/Instituto Federal de Sergipe**, Aracaju, v. 9, 2016.

SIMONI, T.C.C; SCHERFFER, N.F. A superação do erro no estudo de frações: uma discussão quanto a contribuições das TIC e de materiais manipulativos. **ReviSeM**, Ano 2019, n. 1, p.20-39.

SMITH III, J.P. **The Development of students' Knowledge of fractions and ratios**,' in B. Litwiller and G. Bright (eds.), *Making Sense of Fractions, Ratios, and Proportions*, Reston, Virginia, NCTM, 2002, p. 3-17.

SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I.(Org.). **Resolução de problemas nas aulas de matemática**: o recurso da problemateca. Porto Alegre: Penso, 2016a.

SMOLE.K.S; DINIZ.M.I(Org.). **Materiais manipulativos para o ensino de frações e números decimais**. Porto Alegre: Penso, 2016b.

STEENCKEN, E; MAHER, C. A. **Young Children's Growing Understanding of Fraction Ideas**. In: B. Litwiller and G. Bright (eds.), *Making Sense of Fractions, Ratios, and Proportions*, Reston, Virginia, NCTM, 2002, p. 49-60.

VASCONCELOS, I.C.P. **A Compreensão das relações numéricas:** um estudo com crianças brasileiras e portuguesas do 4º ano da Educação Básica. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Faculdade de Educação, Porto Alegre BR-RS, 2015.

VIANNA. C.R. A Hora da Fração: pequena sociologia dos vampiros na Educação Matemática. **Bolema:** Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, v.21. nº 31, p.161-181, 2008

VIGOTSKI.L.S. **A formação social da mente**. 4 ed. São Paulo: Martins Fontes, 2008a.

VIGOTSKI. L.S. **Pensamento e linguagem**. 7ed. São Paulo: Martins Fontes, 2008b.

VIGOTSKI.L.S. **A construção do pensamento e da linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 2009.

WALLE, J. A. V. **Matemática no ensino fundamental:** Formação de professores e aplicação em sala de aula. 6ª edição, Porto Alegre, 2009.

APÊNDICE A – ATIVIDADE DIAGNÓSTICA I

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
Mestrado profissional

Pesquisa: Ensino e Aprendizagem de Fração via Exploração-Resolução-Proposição de Problemas Matemáticos.

Escola Municipal:____

Turma: 5º ano A - manhã Data:_____/_______/_____.

Aluno(a):____

1.Descreva o que você entende ao ler a palavra FRAÇÃO.

____

____

2. Dê exemplos de:

a) Números naturais____

b) Números fracionários____

3. Que fração representa a parte pintada na figura?

4. Represente, graficamente (desenho), as seguintes frações?

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{5}{10}$

5. Um chocolate foi dividido em 4 partes iguais. Depois, foi dada 1 parte desse chocolate. Que fração representa a parte dada?

6. Como se lê as seguintes frações?

$\frac{1}{2}$ ____

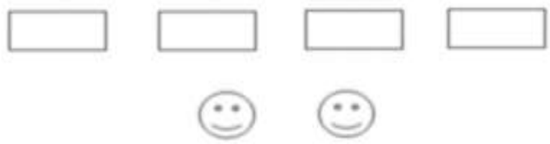
$\frac{1}{13}$ ____

$\frac{1}{10}$ ____

$1\frac{1}{2}$ ____

7. Observe:

a) Ao dividir igualmente os quatro chocolates para as duas crianças, quanto cada uma deverá receber?

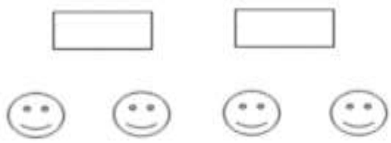


R:____

ADAPTADA :SILVA,1997.

b) Agora, são dois chocolates para quatro crianças.

Quanto de chocolate cada criança deve receber?



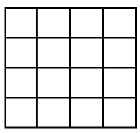
R:____

ADAPTADA :SILVA,1997.

8. O quadrado está dividido em 16 partes iguais.

Pinte 12 dessas partes.

A que fração do quadrado corresponde a parte que você pintou?

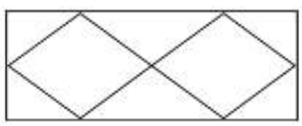


R:____

FONTE :SILVA,1997.

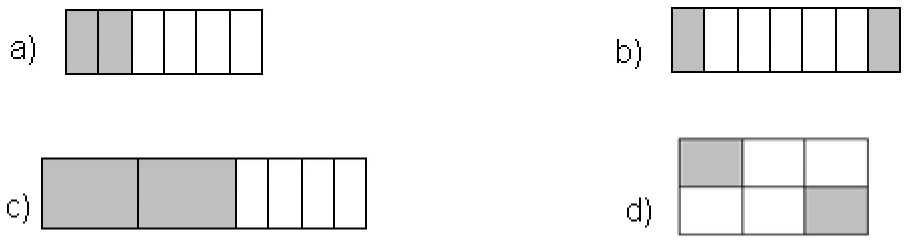
9. Na figura abaixo, pinte:

$\frac{1}{4}$ de verde $\frac{4}{16}$ de azul $\frac{1}{2}$ de amarelo



ADAPTADA :SILVA,1997.

10. Assinale com um x as figuras abaixo que representam a fração $\frac{2}{6}$



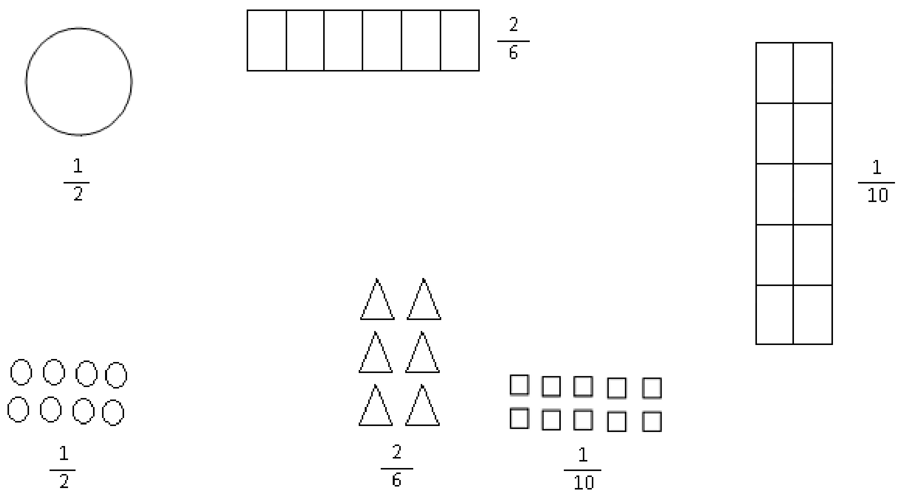
ADAPTADA :SILVA,1997.

11. A parte pintada na figura pode ser representada por quais frações?

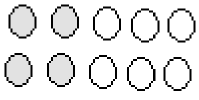
a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{2}{4}$ d) Nenhuma das alternativas

Adaptada :SILVA,1997.

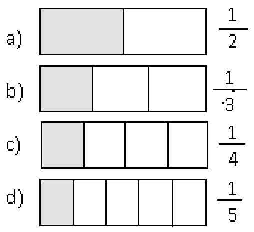
12. Em cada figura pinte a fração indicada.



13. Registre que fração indica a parte pintada na seguinte figura:



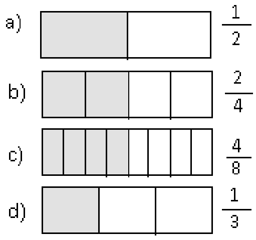
14. Observe a parte pintada e as frações indicadas em cada figura.



- A **maior** fração está em a, b, c ou d?_________________________________
- Justifique sua resposta____

- A **menor** fração está em a, b, c ou d? ________________________________
- Justifique sua resposta____

15. Observe a parte pintada e as frações indicadas na disposição das seguintes figuras.

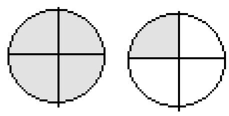


- Entre as figuras a, b, c e d, há frações (equivalentes) que correspondem à mesma quantidade. Quais são?

____

____

16. Observe. O resultado dessa operação poderá ser:



$$\frac{4}{4} + \frac{1}{4} =$$

a) $\frac{5}{4}$ ou $1\frac{1}{4}$ ( )

b) $\frac{5}{4}$ ou $\frac{5}{8}$ ( )

APÊNDICE B – ATIVIDADE DIAGNÓSTICA II

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
Mestrado profissional

Pesquisa: Ensino e Aprendizagem de Fração via Exploração-Resolução-Proposição de Problemas Matemáticos.

Escola Municipal:____

Turma: 5º ano A - manhã Data:_____/_______/_____.

Aluno(a):____

- Leitura informativa:

Festas juninas

As festas juninas homenageiam três santos católicos: Santo Antônio (no dia 13 de junho), São João Batista (dia 24) e São Pedro (dia 29). No entanto, a origem das comemorações nessa época do ano vem de diversos povos da antiguidade, como os celtas e os egípcios, que realizam danças e festejos em que comemoram a fartura nas colheitas. “Na Europa, os cultos à fertilidade, em junho, foram reproduzidos até por volta do século 10. Como a igreja não conseguia combatê-los, decidiu cristianizá-los, instituindo dias de homenagens aos três santos no mesmo mês”, diz a antropóloga Lucia Helena Rangel, da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP).

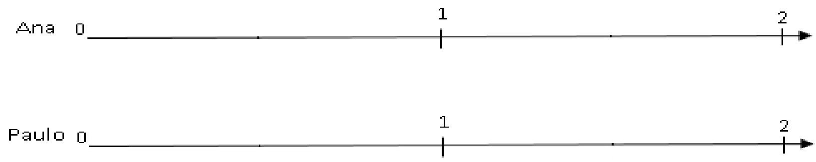
O curioso é que os índios que habitavam o Brasil antes da chegada dos portugueses também faziam importantes rituais durante o mês de junho. Eles tinham várias celebrações ligadas à agricultura, com cantos, danças e muita comida. Com a chegada dos jesuítas portugueses, os costumes indígenas e o caráter religioso dos festejos juninos se fundiram. É por isso que as festas tanto celebram santos católicos como oferecem uma variedade de pratos feitos com alimentos típicos dos nativos. Já a valorização da vida caipira nessas comemorações reflete a organização da sociedade brasileira até meados do século 20, quando 70% da população viviam no campo. Hoje, as grandes festas juninas se concentram no Nordeste, com destaque para as cidades de Caruaru (PE) e **Campina Grande** (PB).

A dança (quadrilha junina), a música (forró, coco, xaxado...), os pratos típicos, como pamonha, canjica e outros, as brincadeiras (pescaria, subi no pau de sebo...) e enfeites com bandeirolas e símbolos rústicos são mantidos em alguns locais onde ocorre estes festejos.

Adaptado de Super. Interessante. ***Cíntia Cristina da Silva.***

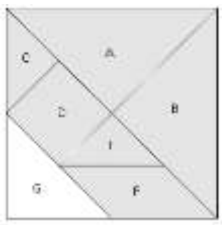
- Leia os questionamentos, reflita e responda:

1. Para ganharem maçã do amor, Ana e Paulo precisam responder um desafio. Ana deverá representar $\frac{1}{2}$ numa reta numérica e Paulo deverá representar $\frac{1}{4}$ em outra reta numérica. Como deverá ficar cada representação?

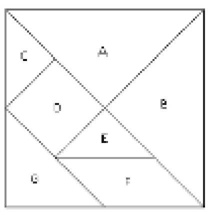


2. Para ornamentar o salão para a festa junina, foram feitas algumas bandeirolas e balões com os alunos do 5º ano. Depois de ajudarem, foram recrear e um dos alunos que estava brincando com um Tangram percebeu que a disposição das peças no traçado (desenho do Tangram) formava a representação plana de um balão junino.

- Se subdividirmos as partes (traçado do Tangram), em partes iguais a C e a E, a que fração corresponderá o traçado do balão?



- É possível haver outro símbolo junino na disposição das peças do Tangram ou ao fracionarmos o Tangram em partes iguais? Se sim, qual? Identifique, pintando as peças na ilustração em branco.



Observação: É possível formar o traçado de uma bandeirola junina

3. No dia da festa junina, compareceram 23 alunos do 5º ano A, mais a professora. Para a festa junina dessa turma, foram levadas 8 pamonhas partidas em três partes iguais cada uma.

- Que fração de pamonha deve ser destinada a cada pessoa desta turma? Represente, graficamente (desenho), e em número fracionário.

4. O local onde ocorrerá a quermesse da escola precisou ser pintado. Como tinha pouca tinta, o pintor misturou 2 litros de tinta vermelha com 3 litros de tinta amarela, gerando uma nova tinta na cor laranja.

- Que fração de tinta **amarela** está contida na tinta laranja?

a) $\frac{3}{5}$ (   )

b) $\frac{2}{3}$ (   )

5 . Na brincadeira de pescaria que havia na festa junina da escola, Lia pescou $\frac{1}{3}$, dos 18 peixes que havia na pescaria e seu amigo Lucas pescou $\frac{2}{3}$ dos 18 peixes.

Imagem adaptada: www.smartkids.com.br

- Que quantidade de peixes Lucas pegou?

6. Caio comprou um bilhete para participar do bingo na Quermesse. Ele ganhou um brinde surpresa e, ao abrir, viu que era uma barra de chocolate. Ele deu a cada um dos seus dois irmãos uma parte igual à que ele comeu.

- Que fração do chocolate foi dada para os irmãos de Caio?
- Que fração do chocolate recebeu cada um dos irmãos, inclusive, Caio?

7. Caio estava com pouco dinheiro e se juntou a Eva para comprarem um bilhete e assim puderam participar do sorteio que houve na Quermesse. Eles foram sorteados e ganharam um pacote com 100 bombons.

- Na situação descrita, que fração corresponde à quantidade de bombons para cada um?

a) $\frac{1}{2}$ ( )

b) $\frac{50}{100}$ ( )

c) a e b, estão corretas ( )

- Como se lê o número $\frac{50}{100}$?
- Na forma decimal, como seria a representação da fração?
- E em porcentagem, como seria a representação dessa fração?

8. Observe a lista de comidas típicas que cada aluno do 5º ano A ficou de levar para a festa junina:

Lista com a contribuição de comida tipica, por cada pessoa do 5º ano A

1.Ana....................4 pamonhas
2.Ana Maria ....4 pamonhas
3.Bia...................... 10 espigas de milho
4.Bruno................. 4 canjicas
5.Caio.................... 4 canjicas
6.Carla................... 12 cocadas de amendoim
7.Carlos................. 1 bolo de milho
8.Claudia................1 bolo de batata
9.Denis................. 12 tapiocas de queijo
10.Eva....................12 fatias de queijo qualho
11.Fábio.................12 fatias de queijo coalho
12.Gilma.................1 grrarfa com café(1 litro)
13.Henry.................1 garrafa com chocolate quente(1 litro)
14.Ian.....................12 pacotes de pipoca
15.Ivo..................... 12 pacotes de pipoca
16.João...................2 rapaduras
17.José...................1 pacote de paçoca
18.Lucas..................1 pacote com paçoca
19.Maria................. 12 tapiocas de coco
20.Mariana............. mungunzá
21.Paulo................ 1 refrigerante de 2 litros
22.Pedro.................1 refrigerante de 2 litros
23.Raí......................1 refrigerante de litros
Professora...............25 maças do amor

- Que problemas, poderiam ser propostos a partir da leitura dessa lista? Utilize o espaço disponibilizado abaixo para fazer seus registros.

ANESOS

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

OSILENE BEZERRA GRANGEIRO
DOUTOR SILVANIO DE ANDRADE

ENSINO E APRENDIZAGEM DE FRAÇÃO VIA EXPLORAÇÃO-RESOLUÇÃO-PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS

Produto educacional, apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, linha de pesquisa Metodologia, Didática e Formação do Professor no Ensino de Ciências e Educação Matemática, como requisito à obtenção do grau de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática

Orientador: Prof. Dr. Silvanio de Andrade

CAMPINA GRANDE – PB
2020

G757e Grangeiro, Osilene Bezerra.

Explorar-resolver-propor problemas [manuscrito] : potencializando o ensino e a aprendizagem de fração / Osilene Bezerra Grangeiro. - 2020.

54 p. : il. colorido.

Digitado.

Dissertação (Mestrado em Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2020.

"Orientação : Prof. Dr. Silvanio de Andrade , Departamento de Matemática - CCT."

1. Ensino e Aprendizagem. 2. Fração. 3. Exploração de problemas. 4. Resolução de problemas. I. Título

21. ed. CDD 513.26

Elaborada por Giulianne M. Pereira - CRB - 15/714 BC/UEPB

OSILENE BEZERRA GRANGEIRO

ENSINO E APRENDIZAGEM DE FRAÇÃO VIA EXPLORAÇÃO-RESOLUÇÃO-PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, linha de pesquisa Metodologia, Didática e Formação do Professor no Ensino de Ciências e Educação Matemática, como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática

Aprovada em: 01 de dezembro de 2020.

BANCA EXAMINADORA

Silvanio de Andrade

Prof. Dr. Silvanio de Andrade (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Egidio Rodrigues Martins

Prof. Dr. Egidio Rodrigues Martins
Instituto Federal do Norte de Minas Gerais(IFNMG)

IMBAlbuquerque

Prof.ª. Drª. Izabel Maria Barbosa de Albuquerque
Unidade Acadêmica de Matemática (UFCG)

CAMPINA GRANDE – PB
2020

APRESENTAÇÃO

Caro professor, este material foi produzido a parti da pesquisa intitulada: *Ensino e Aprendizagem de Fração via Exploração, Proposição e Resolução de Problema*, da mestranda Osilene Bezerra Grangeiro, com a orientação do professor Doutor Silvanio de Andrade. O referido produto educacional, é parte exigida na obtenção de título de mestre, no mestrado profissional, pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, na Linha de Pesquisa: Metodologia, Didática e Formação do Professor no Ensino de Ciências e Educação Matemática.

A pesquisa caracterizada qualitativa, foi desenvolvida na modalidade pedagógica, tendo o ambiente da sala de aula (5° ano), de uma escola pública (municipal), como espaço de interação e vivência do tema abordado. Cujo eixo norteador, dar-se a partir da indagação: *Como o ensino e a aprendizagem de fração, podem ser potencializados, via Exploração-Resolução-Proposição de Problemas*

Concebemos a Exploração como primordial neste processo. Uma exploração que não se limita apenas ao contexto matemático, mas também ao mundo social; uma exploração que vai além de indagar, problematizar, investigar; uma exploração livre (porém não solta), como descreve ANDRADE, Silvanio (1998;2017); uma exploração reflexiva, crítica e criativa, que flui da interação e socialização de ideias entre professor-aluno, aluno-aluno, gerando novos problemas, novas explorações e assim sucessivamente.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A exploração pode partir tanto do professor quanto dos alunos e/ou aluno-aluno. Ressaltamos que a compreensão por parte de quem ensina de que um conceito só se efetiva quando o próprio desenvolvimento mental da criança já estiver atingido o nível necessário é de suma importância no processo de ensino e aprendizagem. Sem, no entanto, deixar de oportunizar vivências/experiências que sejam desafiantes, no sentido de verificar, romper ou transpor o nível de desenvolvimento cognitivo em que o aluno se encontra.

Nesta perspectiva, apresentam-se sugestões para explorar a necessária compreensão e configuração do número fracionário, representando fração, razão ou fração com razão, explorando os significados essenciais da fração, a compreensão de frações contínuas e discretas, representações gráficas, numéricas e por extenso, tendo em vista a leitura adequada, as conversões e reversões de frações.

A fração é explorada de um outro ponto de vista, qual seja: a divisão de um todo, em partes diferentes, possibilitando aos alunos entenderem que ainda que um todo esteja particionado em partes diferentes, cada parte corresponde a uma fração do todo, no entanto, para que a fração indicada seja quantificada com maior exatidão, torna-se necessário a subdivisão, de modo que o todo fique particionado em partes iguais.

A Exploração-Resolução-Proposição de Problemas pode potencializar o ensino e aprendizagem de frações, na medida em que favorece a interação e socialização das experiências/vivências exploradas, despertando o senso crítico, criativo, pessoal e social, promovendo a socialização do conhecimento adquirido de modo individual e/ou coletivo, de modo a aguçar a indagação e a busca de soluções para além do problema proposto, ao proporcionar transpor obstáculos, como é o caso da timidez, uma vez que a exploração tende a motivar a participação e a exposição de dúvidas, ideias, refutações. Observa-se, ainda, a possibilidade do professor verificar se e como os alunos percebem determinada situação e, assim, articular meios que possam propiciar maior êxito na mediação, conferindo, também, avaliar não apenas o interesse e participação dos alunos, mas como estes avançam no processo de aprendizagem do tema e de outros aspectos inerentes.

1 EXPLORAÇÃO-RESOLUÇÃO-PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS

A Resolução de Problemas tem sido cada vez mais foco de estudos por parte de pesquisadores e educadores, na pretensão de melhor compreender seu uso e possibilidades didáticas e pedagógicas, visando alternativas viáveis que possam promover a inserção e atuação do aluno tendo em vista a compreensão significativa na e para construção e obtenção do conhecimento formal/social.

O que é um problema?

Andrade (1998, 2017) descreve que:

> Um problema é como um projeto, uma questão, uma tarefa, uma situação em que: a) O aluno não tem ou não conhece nenhum processo que lhe permita encontrar de imediato a solução; b) O aluno deseja resolver, explorar ou realizar algum trabalho efetivo; c) Se introduz ou se leva o aluno à realização de algum trabalho efetivo (ANDRADE, 1998, p, 26; 2017, p. 364).

O problema caracteriza-se, então, como uma situação em que o aluno ou o “resolvedor” não sabe a solução de imediato ou de maneira evidente e terá que dispor de conhecimentos prévios para buscar e criar meios/ações que o leve ao alcance da resolução do problema.

Resolver um problema implica encontrar uma ou mais soluções, a depender do contexto ou objetivo que se quer alcançar, após ter feito a análise dos dados contidos no problema; ter explorado, “codificado e descodificado” esses dados; ter compreendido aspectos gerais do problema; ter refletido as ações a serem realizadas; ter executado as ações e utilizado os meios necessários que conduziram à solução do problema.

A Resolução de Problema, concebida numa perspectiva metodológica, vai além do sentido puramente matemático, implica significá-la socialmente, projetando, inclusive, a compreensão de avaliar o ensino e a aprendizagem.

Segundo Cai e Lester (2010, p. 5), a Resolução de Problemas é uma parte integrante da aprendizagem da Matemática, não sendo considerada como um tópico separado no currículo, mas como um meio para o ensino de conceitos e competências matemáticas. Em consonância ao que este autor afirma, constata-se na Educação Básica, indicação metodológica da Resolução de Problemas, em alguns documentos oficiais, como os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN e a Base Nacional Comum Curricular- BNCC.

A Metodologia de Ensino e Aprendizagem via Resolução de Problema transpõe a ideia de resolver, meramente, exercícios prontos, pré-definidos, uma vez que assume, cada vez mais, a importância e possibilidades de ensino e aprendizagem desafiantes, que vão se ampliando, na medida em que são realizados estudos e alternativas viáveis a partir da mesma. Dessa forma, a Exploração-Resolução-Proposição de problemas favorece a construção mútua e significativa do conhecimento.

Cai *et al*. (2015, p. 26) descreve que as "atividades de criação de problemas geralmente exigem tarefas cognitivas, com o potencial de fornecer contextos intelectuais para o rico desenvolvimento dos alunos" e que encorajar os estudantes a propor problemas matemáticos favorece não tão somente o desenvolvimento de estratégias e de conhecimento matemático, mas, também, o desenvolvimento crítico e criativo, impactando positivamente no aprendizado de outros aspectos.

Andrade (1998, 2017) desenvolve estudos e indica a Proposição de Problemas como aspecto importante, devendo ser explorada em sintonia com a resolução, não como ponto a ser proposto apenas ao final da Resolução de Problema, mas, também, como ponto de partida a ser explorado, problematizado e construído pelos alunos, partindo do interesse e criatividade dos mesmos.

Compreendemos a problematização como parte de um processo exploratório, que se constitui da indagação por curiosidade ou da instigação indagativa (mediada ou não, pelo professor), para explorar a criatividade, a criticidade e, consequentemente, o conhecimento/identificação de um objeto, tema ou situação (simulada ou real). Indaga-se sobre: O que é isso? Pra que isso? Como poderia ser? Pra que serve? Neste momento, há um processo exploratório, para, só então, problematizar, ou seja, perceber o que sabe e o que não sabe sobre o que está sendo apresentado ou proposto. E, assim, obter condições de iniciar ações e alternativas que possam conduzir a respostas ou à proposição de outros problemas.

De acordo com Andrade (2017, p. 368):

> A exploração é o caminhar sobre a tarefa que pode proporcionar descobertas em torno e além da proposta, ainda que a solução não seja efetivada. Entendida, neste sentido, em toda sua contextualidade, tornando o trabalho de exploração inacabado, numa experiência aberta, não fechada,

> embora não solta, a partir do movimento Problema-Trabalho-Reflexão e Síntese - Resultado(P-T-RS-R).

A exploração de um problema não acaba ao chegar a uma solução do problema, vai além e em várias direções e aspectos, conforme nos indica Andrade (2017):

> O final de uma experiência de Exploração de Problemas em sala de aula nunca é o final de uma história, mas o começo de muitas outras histórias. Trabalhar com Exploração de Problemas é colocar-se sempre em movimento, em aventura, é um sair sempre para mergulhar reflexivamente e criticamente em si mesmo e além de si mesmo. (ANDRADE, 2017, p. 367).

Nessa perspectiva, a Exploração de Problemas é compreendida, em nossa proposta, como “ferramenta ampla e importante” que perpassa e projeta a problematização, a indagação, a investigação, a resolução e a proposição de problemas, sem, necessariamente, seguir uma ordem.

Explora-se um objeto/tema/situação e, a partir de então, explora-se e indaga-se sobre o que se sabe, como sabe, buscando, posteriormente, meios que possam levar à resolução e, neste caminhar, outras explorações são realizadas, problematizadas, Podendo gerar a proposição de outros problemas em relação ao objeto/tema/situação e/ou indo além destes, adentrando em questões sociais, inferindo conhecimentos prévios, expondo ideias, opiniões, dúvidas que, ao serem socializadas, poderão promover descobertas e, consequentemente, a aquisição de novos saberes e novas indagações.

2 FRAÇÃO: SIGNIFICADOS ESSENCIAIS E OUTROS ASPECTOS

Fração é uma parte, um fragmento de um todo(contínuo) ou parte de certa quantidade (discreto), expressa concretamente/graficamente ou pela notação barra fracionária$\frac{a}{b}$, com grandeza do mesmo tipo e natureza, cujo denominador indica a partição e o numerador aponta o total de partes tomadas/admitidas do todo. Assumimos que, necessariamente, um todo não precisa está dividido em partes iguais para que uma de suas partes indique fração, no entanto, para que a fração indicada possa ser identificada com mais exatidão, faz-se necessário a conversão de divisão do todo em partes iguais.

Para melhor compreender o sentido que as frações podem ter tanto na vida prática quanto escolar, é necessário identificar e considerar alguns aspectos a respeito das quantidades contínuas e discretas. De acordo com Moutinho (2005, p. 32):

> entendemos por quantidades **contínuas** aquelas que são passiveis de serem divididas de modo exaustivo, sem que, necessariamente percam as características [...] quantidades **discretas** dizem respeito a um conjunto de objetos idênticos, que representa um único todo, cujo resultado da divisão deverá produzir subconjuntos com o mesmo número de unidades (grifo próprio).

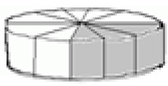
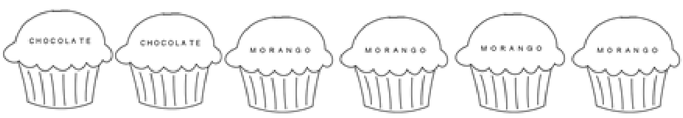
Uma das grandes dificuldades apresentadas por alunos e professores refere-se a problemas que envolvem fração. Isso se dá, justamente, pelo desconhecimento dos significados da fração e, também, pela falta de exploração adequada da leitura e interpretação necessária. Muitas vezes, ocorre pela mesmice tradicional, em que não se considera e nem se explora o que o aluno já sabe sobre este tema, visto que este seria um fator determinante para que os estudantes pudessem melhor se engajar nas aulas.

Explorar os significados essenciais da fração, de certo, proporciona ao aluno verificar e identificar as facetas em que se apresenta uma fração, ao tempo que compreende o que é uma fração.

- **Significados essenciais**

Na literatura acadêmica, podemos constatar, em relação à fração, que há convergência para cinco significados essenciais: parte-todo, medida, número, quociente e operador, como podemos ver no quadro 1:

Quadro 1– Fração com significado Parte-todo.

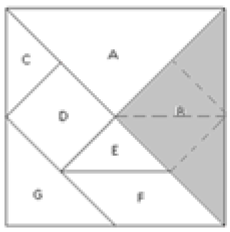
<table>
<tr><td>Fração como Parte-todo</td><td>A fração parte-todo expressa uma relação entre as partes de tamanhos ou quantidades de um todo ou unidade (VASCONCELOS, 2015).
Moutinho (2005) argumenta que, em situações-problema que envolva a ideia de parte - todo,o aluno necessita desenvolver, previamente, algumas competências, como: a identificação de unidade (que o todo é tudo aquilo que se considera como unidade em cada caso concreto), de realizar divisões e saber que o todo se conserva, mesmo quando dividido em partes.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Exemplificando este significado:</td></tr>
<tr><td colspan="2">- Foram comidas 3 partes de um bolo fracionado em 10 partes iguais. Que fração representa a parte que sobrou desse bolo? (Quantidade contínua).
 $\frac{10}{10} - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">- Foram feitos 6 bolos de mesmo formato e tamanho. Sendo 2 desses bolos de morango e os outros de chocolate. Em relação ao todo, que fração representa a quantidade de bolos de chocolate? (Quantidade discreta).


Os bolos de chocolate representam $\frac{2}{6}$</td></tr>
</table>

Fonte: Produção própria

A ideia de fração parte-todo tem sido um dos aspectos mais enfatizados no processo de ensino com frações, todavia, é preciso considerar outros significados e como estes se relacionam, embora seja o significado parte-todo um ponto de partida para os demais significados, assim como também um modelo conveniente na produção da linguagem fracionária.

Quadro 2 – Fração com significado de Medida.

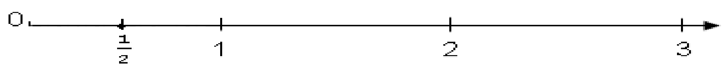
<table>
<tr><td>Fração como Medida</td><td>Pode ser entendida como sendo a fração que representa subunidades de uma unidade, ou seja, toma-se uma parte do todo como referência, para medir as demais, isto é, tem-se o referencial $\frac{1}{b}$ usado repetidamente para determinar uma medida, cujo resultado será $\frac{a}{b}$.
O resultado obtido na representação fracionária $\frac{a}{b}$ permitirá a compreensão de que a subunidade $\frac{1}{b}$ foi utilizada$a$vezes na medição efetuada (SILVA, 2005).</td></tr>
<tr><td colspan="2">Para ilustrar este significado:</td></tr>
<tr><td colspan="2">No traçado do Tangram, qual é a medida da fração B, tendo como referencial a medida da parte C? $\frac{1}{16}$ x 4= $\frac{1}{16}$x$\frac{4}{1}$ $= \frac{4}{16}$

A medida da fração B é $\frac{4}{16}$.</td></tr>
</table>

Fonte: Produção própria

Silva (1997) comenta que não dá para falar de fração sem falar em medidas, tendo em vista que, historicamente, a fração tenha surgindo em virtude da necessidade de medir.

Assim, ao observar o exemplo dado, há percepção de que a fração $\frac{1}{16}$ (um dezesseis avos) foi utilizada como medida para verificar a quantidade de vezes que a mesma corresponde na medida da fração $\frac{1}{4}$. Isto fica mais evidente, ao manusear com material, destacando a medida $\frac{1}{16}$, sobrepondo e contando quantas vezes a mesma caberá em $\frac{1}{4}$.

Quadro 3 – Fração com significado de Número.

<table>
<tr><td>Fração com significado de Número</td><td>Drechmer; Andrade e Susimeire (2011) dizem que uma fração $\frac{a}{b}$ com b ≠ 0 pode assumir o significado de número e ser posicionada na reta numérica. Esta abordagem quase não é utilizada pelos livros didáticos, o que prejudica a organização do conceito, pois o aluno tende a não identificar a fração como um número. É importante que ele reconheça este significado, visualize seu posicionamento na reta numérica e compreenda que este número também pode ser representado como um número decimal (a, b).
Moutinho (2005, p.36) afirma que as frações, como os inteiros, são números que não precisam, necessariamente, referir-se a quantidades específicas.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Exemplificando este significado:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Represente $\frac{1}{2}$ na reta numérica.


Converta $\frac{1}{2}$ em fração decimal.


$\frac{1}{2} = 1 \div 2 = 0{,}5$
Assim, $\frac{1}{2}$, na reta representada, equivale a $\frac{5}{10}$, que corresponde a 0,5 em decimal.</td></tr>
</table>

Fonte: Produção própria

A identificação das frações com ponto na reta númerica poderá ajudar o aluno a perceber a fração como um novo tipo de número, e, também, pode ser fator auxiliar no conhecimento e identificação com significado de medida e de fração equivalente.

Quadro 4 - Fração com significado de Quociente.

<table>
<tr><td>Fração como Quociente</td><td>Extrapola a ideia de parte-todo, pois, nestas situações de quociente, temos duas variáveis.
Botta(1997) descreve que:
Dividir uma quantidade é separá-la em partes de mesmo tamanho. Essa função quociente é chamada divisão partitiva.
Extrair é tirar repetidamente uma quantidade (parte) de outra. Esta é a função quociente chamada de divisão quotitiva.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Exemplificando o que foi posto:</td></tr>
<tr><td colspan="2">- Há 3 chocolates a serem divididos para 4 crianças (duas invariantes).
Em quantas partes cada chocolate deverá ser dividido? 4 partes (partitiva).
Que fração de chocolate cada criança receberá?

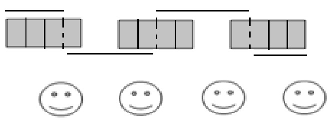
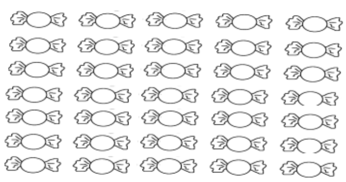
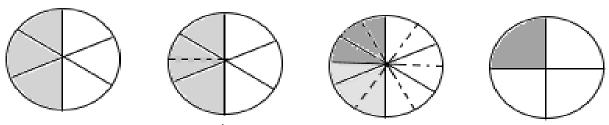



Imagem adaptada de Silva (1997).
Cada criança receberá $\frac{3}{4}$ de chocolate. (quotitiva).</td></tr>
<tr><td colspan="2">- Há 35 bombons para dividir igualmente entre 5 crianças (duas invariantes).
Quantos bombons cada criança deverá receber?
Essa divisão é representada por $\frac{35}{5} = 35 \div 5 = 7$
 Cada criança receberá $\frac{7}{35}$ de bombons (quotitiva).</td></tr>
</table>

Fonte: Produção própria

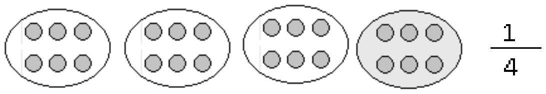
Magina e Campos (2008) alegam que situações com o significado de quociente podem ser utilizadas na pretensão de levar as crianças a perceberem a invariante de ordenação das frações, uma vez que, ao perceberem a relação inversa entre divisor e quociente, possibilitaria a compreensão de que quanto maior é o denominador menor será a parte (MAGINA; CAMPOS, 2008, p. 28).

Quadro 5 – Fração com significado Operador.

<table>
<tr><td>Fração como Operador</td><td>Esse significado está associado à ideia de transformar, isto é, a representação de uma ação sobre o número/quantidade, transformando seu valor final nesse processo.
A fração, com b ≠ 0, observada pela ótica do operador multiplicativo, atua como fator transformador de um número ao ser multiplicando por ‘a’ e, logo em seguida, dividido por ‘b’. O número resultante deste processo pode ser maior ou menor que o número em seu estado inicial, dependendo do quociente $\frac{a}{b}$ (DRECHMER; ANDRADE, SUSIMEIRE , 2011).
Uma forma simples de se referir à noção de operador é associada a “encolher/esticar”, “contrair/expandir”, “reduzir/ampliar” ou ‘dividir/multiplicar” (LEMOS, 2006 apud VASCONCELOS, 2015, p. 42).</td></tr>
<tr><td colspan="2">Vejamos os exemplos:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ana comeu $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{6}$ de uma pizza. Que parte da pizza Ana comeu? (Quantidade contínua).

$\frac{3}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$
Ana comeu $\frac{1}{4}$ da pizza.</td></tr>
</table>

Qual valor corresponde à fração $\frac{1}{4}$ de 24 bolas de gude? (Quantidade discreta)

A fração representa $\frac{1}{4}$ de 24 bolas de gude, corresponde a 6 bolas de gude.



Fonte: Adaptado de Vasconcelos, 2015, p. 42.

Fonte: Produção própria

O significado $\frac{1}{4}$ de 24 bolas de gude é feito considerando-se a fração $\frac{1}{4}$ operando sobre a quantidade de 24 bolas de gude, utilizando a multiplicação e divisão para gerar o resultado de seis bolas de gude (NUNES *et al.*, 2004 *apud* VASCONCELOS, 2015).

Entende-se que, para a criança, seja difícil a compreensão de que a configuração de dois números (notação barra fracionária) forma um só número. Assim sendo, o ensino de fração, especialmente nos anos iniciais, deve ser cauteloso e prolongado, de modo a oportunizar várias vivências e explorações que melhor conduzam a aquisição deste conhecimento.

A fração é considerada por muitos pesquisadores como a origem fenomenológica do número racional, a exemplo de Freudenthal (1983, p.134), que descreve “frações são o fenômeno, fonte nomenológica do número racional - uma fonte que nunca seca”.

É justamente enquanto aspecto do número racional que o uso e entendimento da fração se amplia, tornando-a complexa, sendo concebida, no âmbito escolar, com múltiplas facetas, ou seja, adquire significados a depender do contexto, assume diversas representações: gráficas, por extenso (com a terminologia de avos, decimais...), numéricas (fracionário, decimal...). Em relação ao número fracionário, há que salientar que nem sempre o mesmo indica uma fração. Daí a necessidade de compreender sua configuração em relação a uma fração e em relação a uma razão.

- **Fração, razão e número fracionário**

Um número racional é todo número que pode ser representado por uma razão ou fração $\frac{a}{b}$ de dois números inteiros, um numerador a e um denominador não nulo b. Consideram-se os números inteiros como parte do conjunto dos números racionais, bastando tomar b igual a 1.

Moreira e Ferreira (2008), apresentando uma breve síntese das ideias de Freudenthal (1983), descrevem que este autor vê dois elementos fundamentais nos fenômenos associados às noções de fração e de número racional, quais sejam: *fracionar* (sentido de fratura, daí o nome fração) e de *comparar* (sentido de relação ou razão, daí o nome número racional).

Ressaltamos que fração é diferente de razão e que poderá haver confusão no entendimento de razão como sendo fração pelo não conhecimento do que caracteriza cada um desses conteúdos, bem como pelo fato de ambos os conteúdos serem representados na forma fracionária (símbolo), isto é, por um número fracionário.

Quanto a isso, o professor deve estar consciente dessa diferença, para que, desde o início da exploração do conteúdo de fração (a partir do 5º ano do Fundamental I), possa ir direcionando, ou melhor, ir dando indícios aos alunos para que compreendam e diferenciem fração de razão, mencionando que ambos são representados por números fracionários, porém, possuem sentidos diferentes.

Desse modo, é importante que o aluno perceba a diferença base entre fração e razão, ou seja, saiba que a fração se dá do referencial **parte-todo**, com grandeza de mesmo tipo/natureza, enquanto que a razão se dá na relação **parte-parte** com grandezas de naturezas diferentes, como podemos observar no quadro a seguir:

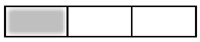
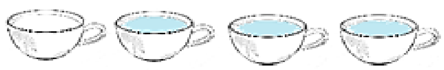
Quadro 6 – Diferença entre fração e razão.

FRAÇÃO	
De 7 copos de suco de laranja, 2 foram tomados.	$\frac{2}{7}$ 2 partes (suco de laranja) 7 todo (suco de laranja) (Mesma natureza)
RAZÃO	
Para fazer 7 copos de suco de laranja, foram necessários: 2copos de concentrado de laranja e 5 copos de água.	$\frac{2}{5}$ 2 parte (concentrado de laranja) 5 parte (água) (Natureza diferente)

Fonte: Produção própria

Um mesmo número fracionário pode representar uma fração, uma razão ou uma fração com razão, a depender do contexto, como nos exemplos, a seguir:

Quadro 7– Representação de um mesmo número fracionário para razão, fração e fração com razão.

FRAÇÃO
Comeram $\frac{1}{3}$ do chocolate. 
RAZÃO
Para fazer a receita de um determinado bolo, são necessários 1 xicara de leite e 3 xicaras de água. Assim, a razão para cada bolo feito, é de: $\frac{1}{3}\ \frac{\text{leite}}{\text{água}}$ 
FRAÇÃO COM RAZÃO
No copo de suco, há $\frac{1}{3}$ de polpa de fruta. 

Fonte: Produção Própria

Na fração com razão, tem-se uma constatação da quantidade (parte) de um todo (neste caso, a polpa de fruta), que está na composição de outro todo (neste caso, o suco). Nesta situação, temos o todo (inteiro), que é o suco particionado em três partes (medidas) iguais, das quais, se quer saber quanto há de polpa de fruta. Nota-se que não é uma comparação de parte-parte, mas, sim, uma constatação da quantidade de outro todo (polpa de fruta) na composição do todo (suco).

Assim, devemos explorar o número fracionário**,** de modo que os alunos compreendam que, apesar de ser composto por dois números, ele é um só, que corresponde a partes de um todo (inteiro) e que essa configuração numérica pode representar uma fração, uma razão ou uma fração com razão.

Neste processo, a compreensão e atribuição da nomenclatura (palavra), relacionada ao número e seu significado será fundamental na obtenção da aprendizagem.

- **Leitura e escrita de fração**

A leitura e interpretação adequada de uma fração é um aspecto importantíssimo e deve ser explorado em relação à representação gráfica e sentido numérico, também quanto ao sentido e significado da palavra que representa e descreve a fração em suas representações.

Usualmente, surgem palavras do contexto da Língua Materna que mudam seu significado quando consideramos o contexto da linguagem matemática, a exemplo da palavra "quarto" que pode significar um cômodo (Língua materna) ou a quarta parte das partes que constituem um inteiro/todo (linguagem matemática).

Em se tratando de frações, na representação barra fracionária, podemos ter vários contextos, como:

- Escrita, leitura e interpretação quanto aos denominadores até 9 (meio, terço, quarto...nono), exemplo: $\frac{3}{5}$ (três quintos);
- Escrita, leitura e interpretação de frações com potência de 10: décimo, centésimo... Exemplo: $\frac{3}{10}$ (três décimos);
- Na escrita, leitura e interpretação de fração com 10, 20, 30...100..., associados à algarismos (1 a 9) no denominador ocorre outra mudança. Neste caso, é feita a leitura apenas na terminologia da palavra AVOS. Exemplo: $\frac{3}{15}$ (três quinze avos).

A complexidade ocorre em compreender que dois números, numa barra fracionária, constituem um número só e esse número pode ter leitura/compreensão variada.

Sobre isto, Bertoni (2008, p. 212-213), destaca:

> Vamos pensar cuidadosamente sobre o que pode estar envolvido para que uma criança compreenda que $\frac{3}{5}$ representa uma só entidade, compreender o que é essa entidade, que ela tem um tamanho e que tamanho é esse.

Deste modo, problematizar, questionar, promover a reflexão, estudo e compreensão de que a palavra pode mudar o significado e o sentido a depender do contexto torna-se mais do que necessário.

- **Representações, conversões e reversões de frações**

Podemos visualizar frações a partir da representação concreta, utilizando material manipulativo; a partir da representação gráfica, cujas ilustrações podem e devem se dar de várias maneiras; através da representação numérica; a partir da descrição por extenso. Essa variedade representacional pode constituir dificuldades para o entendimento de frações. Deste modo, ressaltam-se a importância de experienciar, principalmente com as crianças do Ensino Fundamental I, situações em que possam vivenciar, comparar e perceber conversões de uma mesma fração, de maneira concreta com material manipulativo, de maneira visual/graficamente, numericamente e por extenso.

Outro aspecto que poderá contribuir na aprendizagem de fração é expor e oportunizar aos alunos a conversão e reversão dos procedimentos realizados, ou seja, chegar a um determinado resultado e voltar pela inversão do processo feito, chegando ao estado inicial do que foi proposto. Deste modo, possivelmente, irá favorecer maior compreensão referente ao porquê do resultado obtido, assim como também favorecerá a percepção de que a quantidade (todo) se conserva na junção das partes.

O desenvolvimento de múltiplas situações para explorar frações, num movimento de converter e reverter frações por frações, frações por decimais ou decimais em frações decimais, em representação gráfica, numérica e por extenso favorece não apenas a compreensão de aspectos em relação ao grafo, a notação barra fracionária e ao registro por extenso da fração, também promove a ação e aquisição de muitos outros conceitos que envolvem este tema. Converter uma fração por outra fração (equivalência) e compreender que o valor numérico é o mesmo e o que mudou foi apenas a forma de representá-lo, certamente, denota aquisição de senso numérico.

- **Materiais manipulavéis e aritmética com frações**

Sabemos que a apropriação das técnicas operatórias é importante, porém, para que estas sejam melhor compreendidas e obterem maior alcance na aprendizagem dos alunos, faz-se necessário estabelecer apropriação adequada do entendimento de fração e sua relação na notação barra fracionária, assim como também compreender a relação e conversão numérica da mesma em processos aritméticos.

Sugerimos que, para que se obtenha maior êxito no ensino e na aprendizagem de aritmética com fração, antes sejam exploradas vivências com materiais manipuláveis, de modo que se possa visualizar, converter, comparar, confirmar, retornar ao todo, obtendo compreensão das partes e possibilidades de tamanhos e partições que podem ser feitas e/ou associadas a outros todos.

Assim, ao explorar, em um primeiro momento frações, de maneira manipulável, é visualmente mais perceptível e compreensível entender e significar o porquê da obtenção do resultado final ao realizar a mesma situação em registros gráficos, numéricos e por extensos.

Colocamos os procedimentos aritméticos, relacionando o movimento usual da regra operatória em paralelo ao manuseio e exploração de materiais manipulativos, de modo que os registros gráficos, numéricos e por extenso são uma representação do que está sendo vivenciado na e a partir da manipulação do material.

Materiais manipulativos são concebidos no sentido visual ou palpável de movimento e interação, sejam concretos ou visuais, com imagens, objetos, ambientes virtuais e outros. Além de lúdicos, favorecem o processo de ensino e aprendizagem, possibilitando múltiplos usos e reflexões, a exemplo do quebra-cabeça chinês Tangram, que possibilita explorar, propor e resolver questões matemáticas, sendo excelente recurso para trabalhar frações.

3 CONSIDERAÇÕES, ORIENTAÇÕES E SUGESTÕES DE ATIVIDADES

A proposta uma sugestão de como poderá ser iniciada e instigada a exploração, desencadeando a exploração-resolução-proposição de problemas com frações, que serão mutuamente desenvolvidas no decurso das explorações e interesses tanto dos alunos quanto da oportunidade instigada pelo professor. Lembramos que, para ser um problema, necessariamente não precisa ter enunciado.

Um dos aspectos mencionados e, geralmente, questionado na literatura acadêmica trata-se de como o tema fração tem sido trabalhado na escola, ou seja, partindo de figuras particionadas igualmente, para, assim, indicar a parte admitida. Diante disto, nossa proposta parte do manuseio com material manipulativo, o Tangram, na pretensão, entre outras, de explorar fração partindo do concreto e da partição do todo em partes diferentes, de modo que os alunos sejam desafiados e compreendam que, necessariamente, o todo não precisa esta particionado em partes iguais para ser fração, porém, para que a fração seja quantificada com mais exatidão, pode-se fazer a conversão, particionando o todo que antes estava em partes (tamanhos) diferentes para partes iguais, percebendo, assim, entre outros aspectos, como se dá a configuração do número fracionário indicando fração.

É inviável mensurar as múltiplas possibilidades que a exploração de um problema poderá ter. No entanto, há de se considerar alguns aspectos que podem fazer parte desse processo, tais como:

- <u>Indagação-Curiosidade-Problematização</u>: Exploração iniciada partindo da curiosidade e observações feitas pelos próprios alunos. O professor faz a mediação e intervenção necessária para gerar a problematização;

- Instigação indagativa-Problematização: Exploração instigada pode ser mediada intencionalmente e diretamente pelo professor, no sentido de levantar hipóteses e conhecimento prévio dos alunos, promovendo o questionamento e a problematização de um objeto/tema ou situação problema; pode ser a instigação feita pelo professor ou em virtude da própria dinâmica exploratória dos questionamentos feitos por aluno-aluno, aluno-professor-aluno, problematizando o que está sendo explorado;
- Contextualização: Exploração no sentido de melhor conhecer e relacionar o que é apresentado ao aluno, seja objeto, tema ou situação problema (simulado ou real);
- Investigação: Exploração de meios, alternativas, ações e diálogos que possam conduzir a solução do problema;
- Solução-Verificação-Problematização: Exploração no sentido de verificar a solução encontrada; explorando e problematizando para verificar se há outras maneiras de resolver o problema; explorando para problematizar e propor outro(s) problema(s) a partir do problema inicial.

Quanto à metodologia, categorizamos a EXPLORAÇÃO da seguinte maneira:

✓ Exploração-Exploração (EE):

Exploração de ideias, opiniões e percepções que surgem durante a própria exploração, “problematizando-a”. No seu desenvolvimento, poderá ser desencadeando a proposição e/ou a resolução de problemas, ou apenas explorar, para contextualizar/ conhecer o objeto/tema, a fim de verificar e ou realizar ações.

✓ Exploração-Proposição -Exploração-Resolução (EPER).

Exploração de um objeto, vivência. Assim, é possível propor um problema ou mais problemas, com ou sem enunciado, explorando continuamente, para encontrar soluções e fazer novas proposições.

✓ Exploração – Resolução - Exploração (ERE):

Exploração para encontrar meios, caminhos e estratégias que possam levar à resolução e, a partir da resolução, fazer novas explorações, pretendendo encontrar outras alternativas que confirmem e/ou indiquem outras possibilidades de resoluções. Nessa perspectiva, a resolução não é algoritmo, ela é decorrente do processo da exploração realizada pelo aluno, aluno-aluno ou aluno-professor.

Frisamos que a exploração é livre, flui e é fluída das indagações, dúvidas e ideias que vão surgindo das ou nas explorações realizadas, no entanto, o professor, enquanto mediador, deve estar atento para intervir e instigar, oportunizando aspectos que, ao seu ver, são essenciais à compreensão e aprendizagem do conteúdo.

A cada aula/encontro é interessante que o professor realize um esquema do que foi e como foi explorado anteriormente, avaliando o que e como ocorreu a exploração, que questionamentos foram feitos pelos alunos, para, assim, retomar a exploração no encontro/aula seguinte, de modo a priorizar e articular oportunidades de rever aspectos essenciais do assunto abordado.

Se a exploração inicial for instigada pelo professor no sentido de desencadear o interesse e a participação ativa do aluno, poderá ser necessário realizar o levantamento de alguns questionamentos, principalmente verificar:

O que os alunos já sabem sobre fração?

É importante considerar o que os alunos expõem sobre o tema apresentado, para que o professor trace um norte do que poderá ser enfatizado, que informações, ações e adequações serão oportunas para que se possa obter maior êxito na exploração e aprofundamento do tema em questão. Para isso, se faz necessário realizar um diagnóstico, que pode ser feito no formato que convier aos propósitos de estudo.

No estudo realizado, o diagnóstico se deu por via impressa, em dois momentos: o primeiro, abordando fração sobre alguns aspectos (representação gráfica e numérica/ fração discreta e contínua, equivalência...); o segundo, com questões envolvendo frações em situações problemas.

- Aplicação de Atividade **Diagnóstica - I**

Para realizar a atividade diagnóstica I, foram disponibilizadas 16 questões envolvendo fração.

Ressaltamos que a fase diagnóstica objetiva a obtenção de percepção, quanto às dificuldades (referentes ao tema fração) apresentadas pelos alunos e os resultados obtidos destas subsidiam o professor na tomada de ações e instigações exploratórias.

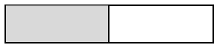
1.Descreva o que você entende ao ler a palavra FRAÇÃO.

2. Dê exemplos de: a) Números naturais____ b) Números fracionários____

A questão 1, objetiva de verificar se o aluno tem ideia do que é uma fração.

Na questão 2, solicita-se que o aluno dê exemplos de números naturais e números fracionários, na pretensão de perceber se o mesmo possui ideia do que

3. Que fração representa a parte pintada na figura?



4. Represente, graficamente (desenho), as seguintes frações?
a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{5}{10}$

seja número e diferencie número natural de número fracionário.

Nas questões 3 e 4, busca-se verificar se o aluno faz inferência da representação gráfica (desenho), com a representação numérica, no caso, com o número fracionário e vice-versa.

5. Um chocolate foi dividido em 4 partes iguais. Depois foi dada 1 parte desse chocolate. Que fração representa a parte dada?

Na questão 5, visa-se o entendimento do aluno em relação a uma fração em sua representação gráfica e em número fracionário, apenas pela leitura e interpretação da situação, sem nenhum recurso ilustrativo.

6. Como se lê as seguintes frações?

$\frac{1}{2}$ ______________________________

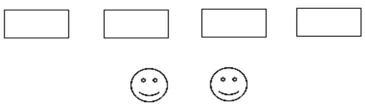
$\frac{1}{13}$ ______________________________

$\frac{1}{10}$ ______________________________

$1\frac{1}{2}$ ______________________________

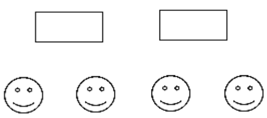
A questão 6 visa averiguar a compreensão que o aluno apresenta quanto a leitura e escrita de fração, representada por número fracionário e por número misto. Foram destacadas frações cujo numerador é sempre 1, com intuito de tornar mais

7.Observe:
a) Ao dividir igualmente os quatro chocolates para as duas crianças, quanto cada uma deverá receber?



R:______________________________

b) Agora, são dois chocolates para quatro crianças. Quanto de chocolate, cada criança deve receber?



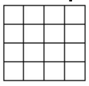
R:______________________________

Adaptada :SILVA,1997.

claro e objetivo o entendimento da leitura de frações feita pelo aluno, uma vez que a leitura feita por numeradores não muda, é sempre analógica aos números naturais, diferente da leitura de denominadores.

Na questão 7, a observância ocorre quanto a distribuição de quantidades, a inversão de distribuição pela divisão em maior ou menor quantidade, verificando-se, a partir das situações apresentadas, se a criança já possui entendimento da fração discreta e da fração contínua.

8. O quadrado está dividido em 16 partes iguais.
Pinte 12 dessas partes.
A que fração do quadrado corresponde a parte que você pintou?



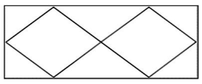
R:____

Adaptadas: Silva 1997.

A questão 8 objetiva verificar se a representação gráfica auxilia na compreensão e resultado da situação posta.

9. Na figura abaixo, pinte:

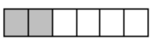
$\frac{1}{4}$ de verde $\quad$ $\frac{4}{16}$ de azul $\quad$ $\frac{1}{2}$ de amarelo

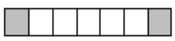


Adaptadas: Silva 1997.

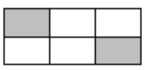
A questão 9 visa averiguar se os alunos compreendem a fração partindo do todo dividido em partes diferentes, que, para quantificar com mais exatidão, este todo deve ser particionado de modo que as partes fiquem iguais. Possivelmente, conflito e dificuldades serão externados na realização desta questão, tendo em vista que, até então, os alunos, talvez, não tenham tido nenhuma vivência de representar várias frações em um todo, ainda mais sendo este todo particionado em partes não

10. Assinale com um X as figuras abaixo que representam a fração $\frac{2}{6}$

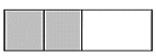
b) 

b) 

g) 

d) 

11. A parte pintada na figura pode ser representada por quais frações?



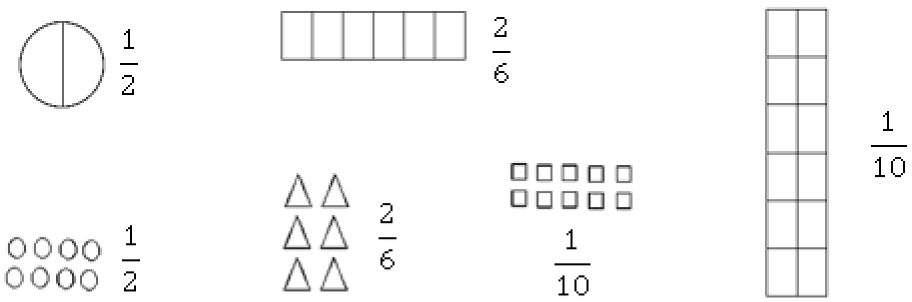
a) $\frac{3}{2}$ $\quad$ b) $\frac{1}{2}$ $\quad$ c) $\frac{2}{4}$

Adaptadas: Silva 1997.

iguais.

As questões 10 e 11 abordam a equivalência de frações pela representação gráfica e de números fracionários, visando perceber se, a partir das respostas apontadas pelo aluno, o mesmo entende que uma fração pode ser convertida/revertida e representada a partir de outras divisões e indicações de outros números fracionários e, ainda assim, manter a mesma quantidade.

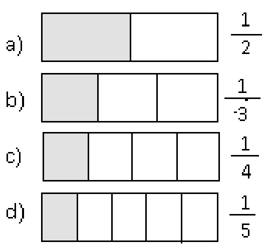
12. Em cada figura, pinte a fração indicada.



13. Registre que fração indica a parte pintada na seguinte figura.

As questões 12 e 13 objetivam saber se o aluno compreende a representação de fração discretas (partição de quantidade-conjunto de inteiros), diferenciando da fração contínua (partição de um todo), ao realizar leitura visual das representações gráficas.

14.Observe a parte pintada e as frações indicadas em cada figura.

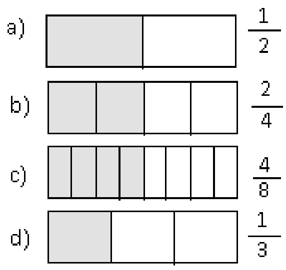


- A **maior** fração está no item a, b, c ou d? ___________________________
  Justifique sua resposta____

- A **menor** fração está no item a, b, c ou d? ___________________________
  Justifique sua resposta______________________________________

A questão 14 visa averiguar como e se os alunos compreendem a fração a partir do tamanho e/ou da ordem. Distribuídas, partindo de frações unitárias, por acreditarmos ser esta a mais viável na obtenção visual (gráfica) e numérica ao entendimento dos alunos.

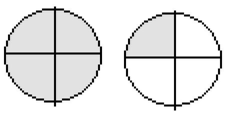
15.Observe a parte pintada e as frações indicadas, na disposição das seguintes figuras.



- Entre as figuras dos itens a, b, c e d, há frações equivalentes (que correspondem a mesma quantidade). Quais são?

Na questão 15, o propósito está especificamente voltado para a equivalência de frações, portanto, o desafio está em perceber as frações equivalentes entre as frações dadas.

16. Observe! O resultado dessa operação poderá ser:



$\frac{4}{4} + \frac{1}{4} =$

a) $\frac{5}{4}$ ou $1\frac{1}{4}$ ( )

b) $\frac{5}{4}$ ou $\frac{5}{8}$ ( )

Na questão 16, o objetivo se dá por verificar a compreensão do aluno quanto a divisão e tomadas de partes de mais de um todo. Observou-se que a grande maioria concebe as partes admitidas de mais de um todo somando denominador por denominador e numerador por numerador.

- Aplicação de Atividade **Diagnóstica - II**

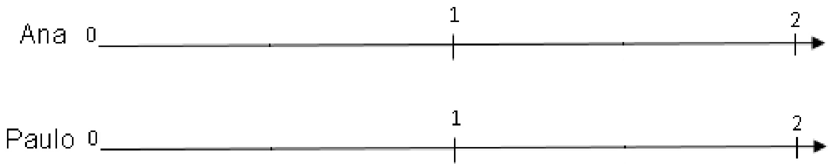
Para realizar a atividade diagnóstica II, foram disponibilizadas 8 questões envolvendo problemas com os significados essenciais da fração.

Outros questionamentos poderão ser agregados como forma de complementar o diagnóstico, como, por exemplo, sugerir uma lista ou outro recurso para que os alunos proponham problemas, visando verificar se os mesmos possuem entendimento e/ou já conseguem compreender o que é uma proposição de problema, sem, contudo, necessariamente, neste momento de diagnóstico, os problemas propostos estarem associados ao tema fração, podendo, ainda, destacar questões voltadas apenas para a interpretação de situações, a fim de verificar a leitura, compreensão e interpretação dos dados em mais de um contexto. Neste sentido, as questões 6, 7 e 8, na pesquisa realizada, são complementares. Ressaltamos que a importância da atividade está, de alguma forma, associada a um contexto de vivência dos alunos.

A atividade proposta, a seguir, parte do contexto dos festejos juninos, período no qual os alunos vivenciaram na escola, inclusive, com barracas de comidas típicas, pescaria, danças, que ocorrem anualmente nesta instituição, não apenas para vivenciar os festejos juninos, mas, também, para prestigiar a cultura nordestina e arrecadar verbas com a venda das comidas típicas (doadas por professores, funcionários...), que são convertidas, posteriormente (outubro), em festejos para comemorar o dia da criança.

Leitura informativa do texto “Festas juninas” (Leitura feita individualmente e, posteriormente, coletivamente, no intuito de esclarecer o sentido de algumas palavras). O texto se encontra em apêndice.

1. Para ganharem maçã do amor, Ana e Paulo precisam responder um desafio. Ana deverá representar $\frac{1}{2}$ numa reta numérica e Paulo deverá representar $\frac{1}{4}$ em outra reta numérica. Como deverá ficar cada representação?

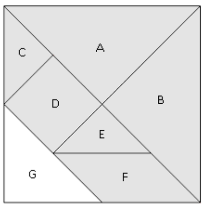


A questão 1 objetiva a identificação pelo aluno da divisão fracionária com significado de **número** a partir da reta numérica. Alguns estudos apontam que essa abordagem é muito pouco explorada nos livros didáticos, o que prejudica o entendimento deste conceito.

Pressupondo que os alunos ainda não tenham tido experenciado oportunidade de fração com significado de número, o professor poderá julgar viável dispor de uma reta para Ana e outra para Pedro, pensando, justamente, na dificuldade que o aluno pode apresentar em compreender a representação numérica na reta, ainda mais de dois números fracionários numa mesma reta, ficando a critério do professor aplicar ou adaptar a questão, a depender dos objetivos e nível da turma.

2. Para ornamentar o salão para a festa junina, foram feitas algumas bandeirolas e balões com os alunos do 5º ano. Depois de ajudarem, foram recrear e um dos alunos que estava brincando com um Tangram, percebeu que a disposição da peças no traçado (desenho) formava a representação plana de um balão junino.

- Se subdividirmos as partes (traçado do Tangram) em partes iguais a C e a E, a que fração corresponderá o traçado do balão junino?



Na proposta da questão 2, a pretensão se dá em verificar se o aluno compreende o significado **parte-todo,** partindo da partição do todo em partes diferentes, sendo necessário a conversão, isto é, a subdivisão do todo em partes iguais, para responder a questão.

3. No dia da festa junina, compareceram 23 alunos do 5º ano A, mais a professora. Para a festa junina dessa turma, foram levadas 8 pamonhas partidas em três partes iguais cada uma.

- Que fração de pamonha deve ser destinada a cada pessoa desta turma? Represente, graficamente(desenho), e em número fracionário.

Na questão 3, emprega-se o significado de fração **quociente,** objetivando verificar o entendimento que os alunos têm quanto a identificar a parte que cada pessoa terá direito em relação à divisão feita das pamonhas, ou seja, se o aluno compreende que, apesar de ter 8 inteiros, a indicação fracionária se fará pela partição de três partes iguais de cada uma das pamonhas.

4. O local onde ocorrerá a quermesse da escola precisou ser pintado. Como tinha pouca tinta, o pintor misturou 2 litros de tinta vermelha com 3 litros de tinta amarela, gerando uma nova tinta na cor laranja.

- Que fração de tinta amarela está contida na tinta laranja?

a) $\frac{3}{5}$ ( )

b) $\frac{2}{3}$ ( )

Uma das ideias do significado **medida** é a divisão de uma unidade em partes iguais e destas serem retiras novas medidas (subunidades) para verificar quantas dessas partes irão caber em determinada parte do todo. Outro aspecto está relacionado com a comparação de duas grandezas. Como é o caso da questão 4, proposta acima, em que o aluno deverá externar compreensão da quantidade de uma grandeza (tinta amarela) como parte na composição de outra grandeza (tinta laranja), ou seja, a razão de uma quantidade em relação a outra quantidade.

5. Na brincadeira de pescaria que havia na festa junina da escola, Lia pescou $\frac{1}{3}$ dos 18 peixes que havia na pescaria e seu amigo Lucas pescou $\frac{2}{3}$ dos 18 peixes.

Imagem adaptada: www.smartkids.com.br

- Que quantidade de peixes Lucas pescou?

A questão 5 objetiva verificar a compreensão do aluno quanto ao significado **operador** multiplicativo, ou seja, se o aluno infere que $\frac{2}{3}$ de 18 peixes corresponde a 12 peixes pescados por Lucas.

> 6. Caio comprou um bilhete para participar do bingo na Quermesse. Ele ganhou um brinde surpresa e, ao abrir, viu que era uma barra de chocolate. Ele deu a cada um dos seus dois irmãos uma parte igual à que ele comeu.
>
> - Que fração do chocolate foi dada para os irmãos de Caio?
> - Que fração do chocolate recebeu cada um dos irmãos, inclusive, Caio?

Na questão 6, pretende-se verificar se o aluno fará uso da representação gráfica para encontrar uma solução e se usar, observar se a ilustração corresponderá adequadamente à situação e à resposta apresentada.

> 7. Caio estava com pouco dinheiro e se juntou a Eva para comprarem um bilhete e, assim, puderam participar do sorteio que houve na Quermesse. Eles foram sorteados e ganharam um pacote com 100 bombons.
>
> - Na situação descrita, que fração corresponde à quantidade de bombons?
>
> a) $\frac{1}{2}$ ( )
>
> b) $\frac{50}{100}$ ( )
>
> c) a e b estão corretas ( )
>
> - Como se lê o número $\frac{50}{100}$?
> - Em número decimal, como seria a representação da fração $\frac{50}{100}$?
> - E em porcentagem, como seria a representação dessa fração?

A questão 7 objetiva verificar a compreensão do aluno acerca da relação de conversão de fração em porcentagem e em número decimal. Também, visualizar se o aluno compreende a leitura e escrita adequada indicada na questão.

8. Observe a lista de comidas típicas que cada aluno do 5º ano A ficou de levar para a festa junina:

Lista com a contribuição de comida tipica, por cada pessoa do 5º ano A

1.Ana.....................4 pamonhas
2.Ana Maria ....4 pamonhas
3.Bia........................ 10 espigas de milho
4.Bruno.................. 4 canjicas
5.Caio..................... 4 canjicas
6.Carla.................... 12 cocadas de amendoim
7.Carlos.................. 1 bolo de milho
8.Claudia.................1 bolo de batata
9.Denis.................. 12 tapiocas de queijo
10.Eva.....................12 fatias de queijo qualho
11.Fábio..................12 fatias de queijo coalho
12.Gilma..................1 grarrafa com café(1 litro)
13.Henry..................1 garrafa com chocolate quente(1 litro)
14.Ian.......................12 pacotes de pipoca
15.Ivo...................... 12 pacotes de pipoca
16.João....................2 rapaduras
17.José....................1 pacote de paçoca
18.Lucas...................1 pacote com paçoca
19.Maria.................. 12 tapiocas de coco
20.Mariana.............. mungunzá
21.Paulo................. 1 refrigerante de 2 litros
22.Pedro..................1 refrigerante de 2 litros
23.Raí.......................1 refrigerante de litros
Professora...............25 maças do amor

- Que problemas poderiam ser propostos a partir da leitura dessa lista?

A proposta dada na questão 8 objetiva averiguar se o aluno apresenta compreensão do que é propor problemas, podendo a proposição feita está ou não relacionada à ideia de fração.

Após obter noção do que os alunos já externam de “entendimento” sobre fração, o professor poderá fazer um quadro síntese, em que, posteriormente, poderá se utilizar deste para nortear aspectos da fração a serem articuladas na exploração, podendo acrescentar aspectos que julga necessário ser explorado, a exemplo, destacamos o quadro a seguir:

Quadro 8 - Levantamento de aspectos e dificuldades referentes a fração, observadas no diagnóstico**.**

FRAÇÃO			
Contínua		Discreta	
Leitura e escrita			
Significados essenciais	**Representações e aritmética de frações.**	**Notação barra fracionária**	**Representações: conversão e reversão**
Parte-todo Número Medida Quociente Operador	Gráfica Numérica Extenso	Fração Razão	Gráfica Número fracionário Número misto Equivalência Fração decimal

Fonte: Produção própria

Salientamos que este é apenas um norte para iniciar a exploração, podendo ser acrescido de outros tópicos a partir da própria exploração feita no decurso das aulas/encontros.

Manuseando, explorando e conhecendo o Tangram

Foco metodológico: EE

✓ Aqui, a exploração ocorre na pretensão de conhecer o material a ser utilizado, articulado ao tema proposto. Neste sentido, temos a <u>Contextualização.</u>

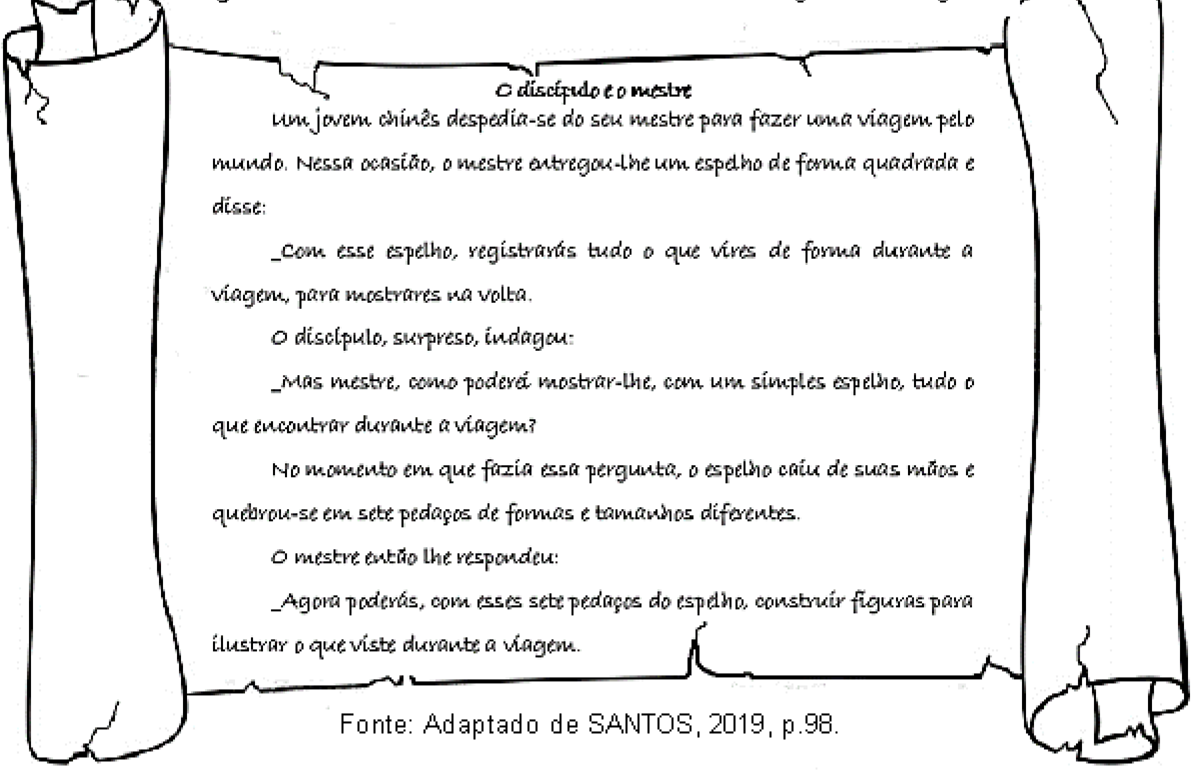
A contextualização feita refere-se a possibilitar aos alunos vivenciar não apenas o manuseio do material, mas, também, os seguintes aspectos:

- O que é?
- De onde surgiu?
- Como é feito?
- Como pode ser utilizado?

Instigando, pois, a criatividade, compreensão e associação do tema fração a ser explorado com o Tangram.

O professor poderá, após explanar algumas versões históricas sobre a origem do Tangram, escolher, junto aos alunos, a que mais parece lógica e, assim, explorá-la, a exemplo da história “O discípulo e o mestre”.

Figura1 – Uma das versões históricas sobre a origem do Tangram



O discípulo e o mestre

Um jovem chinês despedia-se do seu mestre para fazer uma viagem pelo mundo. Nessa ocasião, o mestre entregou-lhe um espelho de forma quadrada e disse:

_Com esse espelho, registrarás tudo o que vires de forma durante a viagem, para mostrares na volta.

O discípulo, surpreso, indagou:

_Mas mestre, como poderei mostrar-lhe, com um simples espelho, tudo o que encontrar durante a viagem?

No momento em que fazia essa pergunta, o espelho caiu de suas mãos e quebrou-se em sete pedaços de formas e tamanhos diferentes.

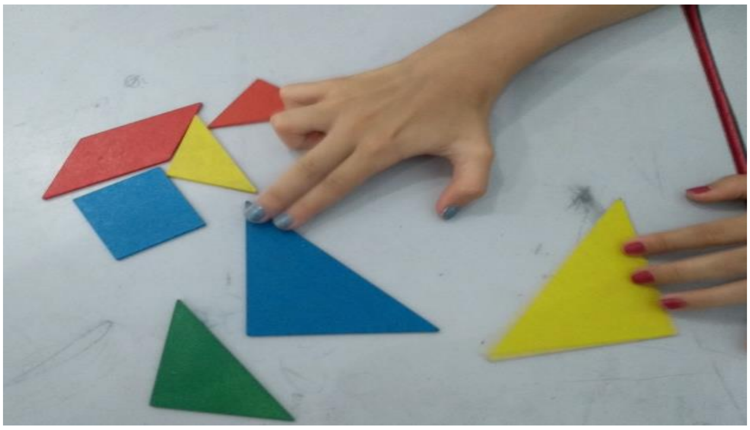
O mestre então lhe respondeu:

_Agora poderás, com esses sete pedaços do espelho, construir figuras para ilustrar o que viste durante a viagem.

Fonte: Adaptado de SANTOS, 2019, p.98.

É possível explorar, posteriormente, algumas possibilidades de representar, através do Tangram, figuras que retratam o que o discípulo poderia ter visto durante a viagem feita, a título de familiarizar os alunos com o Tangram, reconhecendo e nomeando as peças que o compõe.

Figura 2– Registro: Montando o Tangram



Fonte: Dados da pesquisa

Portanto, cada aluno deverá dispor de um Tangram que poderá ser confeccionado por eles mesmos em E.V.A[1] ou disponibilizado em MDF[2] pelo professor.

Fração:representação gráfica, numérica e por extenso

Foco metodológico: EE

- ✓ Explorar o significado de fração **parte-todo**;
- ✓ Explorar representações da fração: gráfica, numérica e por extenso;

A partir da exposição de um Tangram (feito em E.V.A), afixado no quadro da sala de aula, retoma-se, verbalmente, o que foi vivenciado e explorado sobre o que é o Tangram, sobre as peças que o compõe com suas respectivas nomenclaturas.

De modo a facilitar e entender a disposição e tamanho das peças (as quais passamos a identificar como partes) atribui-se a cada uma identificação a partir de uma letra. É interessante que se explore e associe a nomenclatura e tamanho de cada peça à letra que identificará a parte/fração do todo no traçado do Tangram. Por exemplo:

Figura 3–Tangram (Identificação das peças em: A, B, C, D, E, F e G).

Fonte: Dados da pesquisa.

É preciso desafiar os alunos para que, individualmente, ou em duplas, a partir de um Tangram impresso, tentem cortar e/ou traçar outras subdivisões a partir de uma das partes indicadas por letras, de modo que o todo fique particionado em partes iguais.

---

[1] A sigla E.V.A. significa um processo de alta tecnologia que mistura **Etil, Vinil e Acetato** (E.V.A.), que resulta em placas emborrachadas e muito conhecidas entre artistas, artesão, entre outros. Disponível em:<https://www.eurekaeva.com.br/artigos/o-que-e-placa-de-e-v-a> Acesso em: 15 abr.2020.

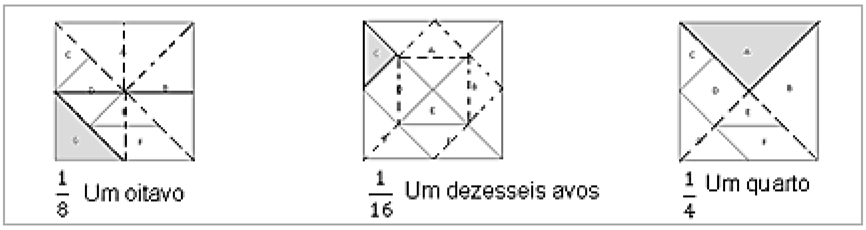
[2] MDF é uma sigla internacional e é um material oriundo da madeira, fabricado com resinas sintéticas. Disponível em:<https://www.significados.com.br/mdf/> Acesso em: 15 abr.2020.

Figura 4 – Registro: Subdividindo o traçado das partes que compõem o Tangram

Fonte: Dados da pesquisa

Veja alguns exemplos:

Figura 5 – Exemplos de subdivisões no traçado de Tangram



Fonte: produção própria

Lógico que, por se tratar de uma exploração livre, muitas outras subdivisões irão surgir. O importante é que os alunos percebam possibilidades e socializem as subdivisões por eles realizadas, correlacionando cada parte à representação numérica e por escrito.

A exploração, neste momento, poderá oportunizar, entre outros aspectos:

- Que os alunos percebam e externem as formas e tamanhos diferentes;
- Percebam que, embora as partes tenham formas diferentes, podem ter a mesma dimensão;
- Relacione cada parte, como sendo parte/fração do todo;
- Que a junção das partes formam o todo, promovendo a noção de invariância e reversão, bem como o significado de fração parte-todo;
- Identifiquem e relacionem a fração representada graficamente à configuração do número fracionário, bem como fazendo observação da leitura e escrita tanto em número quanto por extenso.
- Explore a leitura e a escrita de fração, por extenso, com suas singularidades e nomenclaturas, como avos.

Em um outro momento, a exploração feita poderá ser retomada para que outros aspectos sejam acrescidos diante das explorações já realizadas e, neste momento, o professor poderá intervir para instigar novos desafios que surjam e/ou que julgue importante para a aprendizagem de fração.

Leitura e escrita de frações

Foco metodológico: EE e EPER

- ✓ Fração com significado de **medida**;
- ✓ Equivalência de frações;
- ✓ Leitura e escrita (gráfica, por extenso e numérica) de fração;

Após a exploração e identificação das partes do Tangram, podem surgir, por parte dos alunos e/ou feitas pelo professor, algumas indagações, como, por exemplo:

- A parte D indica que fração do todo?

- A parte/fração C tem a mesma medida da parte/fração E?

E, assim, é possível promover a exploração e busca por respostas, ao tempo que outras indagações vão sendo geradas.

Desse modo, poderá ser explorado ou reexplorado alguns aspectos da fração, como:

- Partição do todo em partes diferentes, convertendo em partes iguais;
- Conversão e reversão de fração (representação gráfica, extenso e número);
- Fração gráfica representada em número fracionário e vice-versa;

A exploração indagativa poderá gerar a problematização e proposição de problemas, os quais podem ocorrer, inicialmente, de maneira coletiva, uma vez que os alunos podem apresentar insegurança e dificuldade em propor individualmente.

A dificuldade apresentada pelos alunos, ao serem solicitados a problematizarem e proporem um problema, pode está diretamente relacionada com a pouca ou nenhuma experiência de formularem problemas, tendo, até então, a experiência de resolverem problemas propostos apenas pelos livros didáticos e/ou pelo professor, como destaca Andrade (2017):

> temos notado que a Preposição de Problemas parece ser a ferramenta mais difícil de ser trabalhada e desenvolvida nos alunos. Temos observado que isso advém de uma prática de sala de aula que tem sido concentrada

> apenas na resolução de problemas propostos exclusivamente pelo professor e nunca pelos alunos. (ANDRADE, 2017. p. 388).

A partir da exploração coletiva, o professor pode articular a formalização de

A que fração do Tangram exposto no quadro corresponde as partes (peças) A e B?

um problema proposto coletivamente. Por exemplo:

Oportunidade em que se fez exploração e identificação de fração contínua, bem como a relação da fração gráfica com a representação em número fracionário e sua descrição por extenso.

Assim, a fração indicada ou destacada a partir de um todo manipulável pode ser ilustrada na representação gráfica, indicada na representação numérica e descrita por extenso, tornando a compreensão que estas representações são diferentes, mas correspondem a mesma fração.

De acordo com o que nos coloca Bertoni (2009, p.20-21), "centramos a proposta na construção de um número, explicitando a que vem esse número e o que ele quantifica". De modo que se perceba a relação da configuração do número fracionário indicando fração.

Outras proposições podem ser feitas e, caso o tempo para explorá-las não seja viável, estas poderão ser o fio condutor na aula/encontro seguinte, para a retomada exploratória do material manipulável, dando continuidade do ponto que parou e/ou das indagações postas pelos alunos ao apresentarem a ou as soluções encontradas para o problema ou os problemas propostos coletivamente.

Foco metodológico: EE e ERE

- ✓ Explorando e resolvendo o ou os problemas propostos na aula anterior.
- ✓ Explorando, identificando e diferenciando a leitura com denominadores até 9, denominadores potência de 10 e com a nomenclatura de avos.

Exploração feita a partir da retomada verbal do que foi explorado anteriormente, com descrições (socialização) do que e como chegaram à solução do ou dos problemas propostos. Exemplo:

"*Eu dividi todo o Tangram em quatro (4) partes do mesmo jeito das peças (partes) A e B. Daí, será que a resposta é* $\frac{2}{4}$? "

“*Será? Faremos o seguinte: vamos explorar outras possibilidades e, assim, concluiremos se está correta.”*

Após os alunos realizarem outras partições do todo (traçado do Tangram), podem concluir que a medida da peça A é igual a medida da peça B, que a medida da peça A corresponde, por exemplo, a medida das peças E, D e C, que, ao fazerem subdivisões, embora a representação seja diferente, corresponde ao mesmo tamanho, ou seja, encontram equivalências.

Neste ponto, é interessante destacar que:

- A participação direta dos alunos, explicando como estão compreendendo e externando/explanando para os demais é um momento da exploração que pode e deve ser favorecido, pois, além de encorajar os demais a exporem suas ideias, opiniões, desperta o interesse e confiança na aquisição do conhecimento experenciado, como o exemplo destacado a seguir, em que a aluna explica para os demais a conversão da fração D, que corresponde a $\frac{1}{8}$ ou $\frac{4}{32}$ nas representações expostas no quadro.

Figura 6– Explorando subdivisão do Tangram

Fonte: Dados da pesquisa

Mediando a fala externada pela aluna “quatro, trinta e dois avos”, a exploração prossegue em relação à leitura e escrita adequada, isto é, dependendo do contexto, a leitura do denominador é diferente.

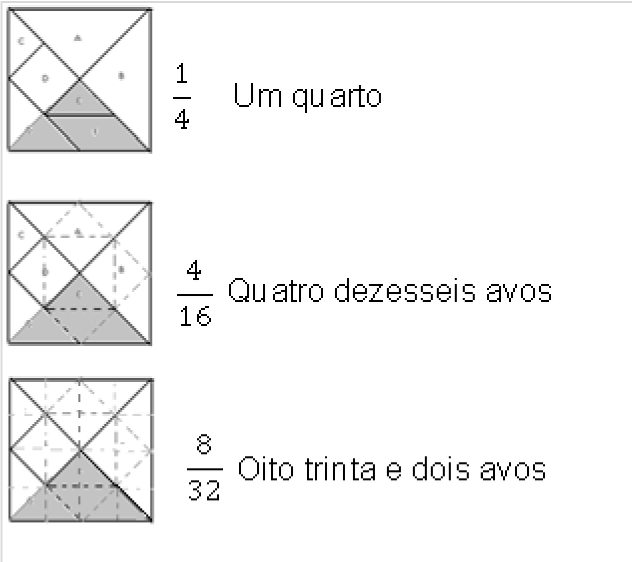
O professor pode estender a exploração questionando e solicitando a representação gráfica, numérica e por extenso de $\frac{1}{4}$ do Tangram, explorando o sentido da palavra referente à fração e o sentido que a mesma poderá ter em outro contexto, por exemplo:

- A palavra “quarto” indica o que na fração?

- Que outro sentido essa mesma palavra poderá ter em outros contextos?

Socializa-se, em seguida, as representações feitas individualmente ou em dupla, de modo que se faça o registro coletivo no quadro da sala de aula, para que visualizem e melhor compreendam as representações realizadas.

Figura 7 – Demonstração de equivalência, leitura e escrita de fração.



Fonte: Produção própria

No caso, o professor poderá realizar a mediação, questionando e articulando as ideias expostas, a fim de tornar viável a identificação adequada da leitura e escrita de fração, quando se trata da leitura do denominador até 9, diferenciando a leitura de frações, cujos denominadores são potencias de 10 ou quando a leitura requeira a nomenclatura de avos.

O registro das explorações realizadas, feito no quadro da sala de aula, constitui-se de momento oportuno para explorar, entre outros aspectos, a leitura e a escrita (gráfica, por extenso e em número) de fração.

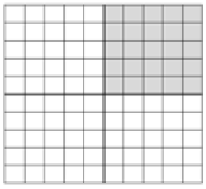
Dependendo do andamento da exploração e da disponibilidade de tempo nesta aula/encontro, ou, ainda, da retomada na aula/encontro seguinte, poderá instigar a exploração para conversão de frações em números decimais, ao explorar a medida de uma fração. Por exemplo:

- Qual a forma do todo (Tangram)? Certamente, identificarão como quadrado.
- Como ficaria se o Tangram fosse particionado em 100 partes iguais?
- A que fração corresponderia 25 dessa partes?

Ao explorarem e visualizarem a ilustração feita por cada aluno ou em dupla, e por já terem explorado anteriormente, de certo, perceberão que 25 partes indica $\frac{1}{4}$.

- Um quarto $\frac{1}{4}$ de 100 é 25. Como fica essa representação em número decimal?

Figura 8 – Exemplo de exploração e conversão: fração ordinária para fração decimal.



$\frac{1}{4}$ Um quarto de 100, equivale a:

$\frac{25}{100}$ Vinte e cinco centésimos, que corresponde a 0,25 centésimos.

Fonte: Produção própria

Oportunidade em que poderá ser explorada, também, a conversão em porcentagem.

A exploração referente à leitura e a escrita de frações poderá ocorrer continuamente ou ser retomada sempre que a exploração de algum outro aspecto da fração assim favorecer.

Fração contínua e fração discreta

Foco metodológico: EE e ERE

- ✓ Fração contínua e fração discreta;
- ✓ Número misto;
- ✓ Explorando o significado de fração **quociente**: partitiva e quotitiva.

Com manuseio do Tangram, entregue individualmente aos alunos, estes formam duplas. Em seguida, questiona-se sobre como deveria ser descrito em número, se pegássemos um Tangram (todo) de um dos alunos com uma parte do Tangram de outro aluno.

Após ouvir as exposições e demonstrações dos alunos, o professor pode verificar, instigar e articular algumas explorações, a exemplo do registro da descrição abaixo:

Figura 9 – Explorando conversão do número fracionário e número misto e vice-versa.

Fonte: Dados da pesquisa

Após algumas explorações, os alunos fazem o registro representando a fração gráfica, numérica, bem como a visualização concreta. Assim, após registrarem e socializarem suas percepções, a exploração segue no sentido de verificar e retomar quando necessário a forma adequada do registro gráfico, numérico e por extenso, viabilizando, dessa forma, a percepção usual do número misto, pois se conclui que há (1) inteiro e um oitavo ($\frac{1}{8}$), tendo em vista que, anteriormente, já haviam identificando cada fração representada por letras em cada parte do Tangram.

Situação na qual é viável explorar, também, fração contínua e fração discreta e a adição de frações com mesmo denominador.

Como Exemplo da exploração e constatação feita, temos:

Convertendo o número misto $1\frac{1}{8}$, tem -se $\frac{8}{8}+\frac{1}{8}=\frac{9}{8}$, que corresponde a um inteiro mais uma parte de outro inteiro, assim, temos uma fração contínua, que é caracterizada com partes de um ou mais todos.

O professor pode provocar, questionando:

- Se a fração indicada fosse $\frac{1}{3}$ dos 24 Tangrans entregues à turma, como ficaria?

Essa instigação leva os alunos a refletirem e explorarem a situação apresentada. Após algum tempo, os alunos começam a externar suas opiniões, momento no qual se destaca e diferencia os tipos de fração em contínua e discreta, caracterizando esta última em fração por quantidade de grupos.

Assim, no decurso da exploração, os alunos compreendem e diferenciam, descrevendo, inclusive, as suas compreensões, como, por exemplo: $\frac{1}{3}$ de 24 é a divisão dos 24 Tangrans em três grupos, sendo 8 Tangrans em cada grupo, logo, $\frac{1}{3}$ de 24 é 8.

Aritmética de frações

Foco metodológico: EE, EPER e ERE

- ✓ Exploração de adição e subtração de fração (denominadores iguais/diferentes).
- ✓ Exploração, proposição e resolução de problemas com fração;

Aqui, faz-se a retomada verbal do que foi explorado na aula/encontro anterior, dando continuidade a partir do ponto em que parou a aula/encontro, solicita-se que os alunos tentem fazer outras adições, partindo da observação explorada no Tangram.

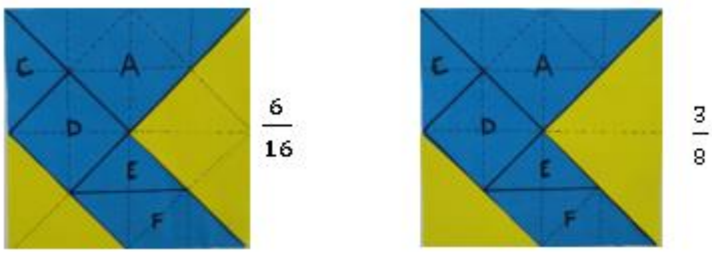
É possível expor e observar um Tangram afixado no quadro, explorando-o e sobrepondo com outra cor as peças descritas, na medida em que os alunos vão fazendo colocações e explorações, de modo que percebam a ideia de adição de frações. Exemplo:

Na exposição feita, os alunos concluíram que a adição da peça (parte) B mais a peça G, na conversão (partes iguais), daria:

$$\frac{2}{16}+\frac{4}{16}=\frac{6}{16}.$$

Assim, se explorou a adição de frações com denominadores iguais. Após outras explorações feitas coletivamente, concluíram que daria pra ser feita de outra maneira, ou seja, $\frac{1}{8}+\frac{2}{8}=\frac{3}{8}$ sendo equivalente a $\frac{6}{16}$.

Figura 10 – Equivalência e adição de frações



Fonte: Dados da pesquisa

Ao manusearem e explorarem o Tangram, o professor poderá instigar para a compreensão de adição com denominadores diferentes ou mesmo os alunos podem questionar e/ou externar que, se a adição fosse de $\frac{1}{8}+\frac{4}{16}$, denominadores diferentes poderiam fazer a equivalência (deixar os denominadores iguais) e, assim, encontrar o resultado, da mesma forma, neste mesmo contexto, pode-se explorar a subtração de fração.

O professor poderá instigar com questionamentos que levem a explorar questões que caracterizam a fração com significado quociente, em termos da divisão do todo e da quota tirada desse todo, ou seja, explorar a fração quociente (partitiva e quotitiva), desafiando os alunos a proporem coletivamente (alunos e professor) um problema.

Ana e Pedro querem dividir igualmente um Tangram entre eles. Como poderão fazer isso?

Diante do desafio e da mediação feita pelo professor podem surgir vários problemas ou apenas um envolvendo o material manipulativo utilizado no momento. Isso é um exemplo de uma proposição feita coletivamente.

Alguns conflitos poderão surgir, inicialmente, mas, ao ir explorando, os alunos começam a compreender e diferenciar que a partição (quantidade de partes que o todo foi particionado) é diferente da cota (quantidade destinada a cada indicação feita), ou seja, se são duas crianças, a cada uma caberá uma cota (mesma quantidade) do todo (Tangram).

Possivelmente, após explorar as várias possibilidades, chegarão as possíveis resposta:

- Ana receberá as partes A e B; Pedro receberá as partes C, D, E, F e G;

Ana: $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}$

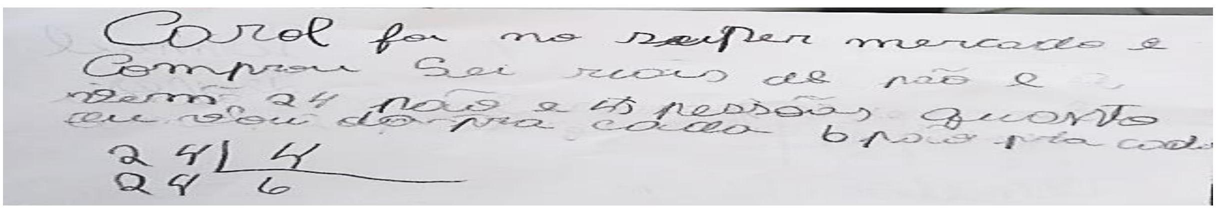
Pedro: $\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$ $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{4}{8}=\frac{2}{4}$

- Ana receberá as partes A, C, E e G; Pedro receberá as partes B, D e F;

Outras combinações podem ser feitas, de modo que percebam e diferenciem a fração partitiva de quotitiva.

Após algumas explorações, o professor poderá desafiar os alunos a proporem (individualmente ou em dupla) um problema (pode ser a partir do material manipulativo explorado ou deixar livre, instigando, ainda mais, a criatividade dos alunos). Posteriormente, faz-se a exploração de um ou mais problemas propostos, oportunidade na qual se pode inferir questões do cotidiano dos alunos, como, por exemplo, a exploração feita em uma das produções da pesquisa de campo:

Figura 11 – Produção do A22 (Exploração e proposição de problemas).



Fonte: Dados da pesquisa

Quando a proposição de A22 foi explorada, alguns questionamentos por parte dos alunos foram sendo colocados, como:

A18: *Faltou desenhar a fração e representar em número fracionário.*

A7: *Em fração, a resposta fica quanto?*

A3: *6 pães é uma parte dos 24 pães?*

PP: *É sim. Mas por que você perguntou?*

A3: *É que pagou seis reais e vai dar 6 pães para cada pessoa. Como assim?*

Após um momento dado para tentarem verificar qual seria a fração, A3 responde:

A3: *6 pães de 24 pães é* $\frac{1}{4}$.

PP: *Como você fez?*

A3: *Desenhei 24 pães e fiz quatro (4) grupos. Cada grupo com seis(6).*

PP: *E os seis reais?*

A3: *Foi o valor pago nos 24 pães.*

PP: *Será que 24 pães custam 6,00?*

A11: *Eu compro 2,00 reais de pão e vem 6 pães.*

PP: *Então, no local que A11 compra o pão, quantos pães seriam com 6,00 reais?*

A4: *18 pães.*

PP: *Como você chegou a essa quantidade?*

A4: *Juntei 6 pães, que é 2,00 reais, mais 6 pães com 2,00 reais, mais 6 pães com 2,00 reais. Daí vai dar 18 pães com 6,00 reais.*

PP: *Jóia. E se A11 for guloso e comer um terço dos 6 pães que compra?*

A20: *Daí divide os 6 pães em 3 grupos com 2 pães em cada grupo. Ele vai comer 2 pães.*

PP: *Como fica essa quantidade em fração?*

A4: *Fica* $\frac{1}{3}$.

Foco metodológico: EE, EPER e ERE

- Explorando fração com significado de **operador.**

A partir de um Tangram exposto no quadro da sala de aula, retoma-se verbalmente aspectos referentes a fração explorada anteriormente em relação à adição e a subtração, em seguida, questiona:

Como vocês acham que seria se, ao invés de somar ou subtrair, precisássemos fazer uma multiplicação de frações?

Após ouvir as colocações dos alunos, o professor poderá expor e desafiar os alunos a explorarem como poderiam realizar a multiplicação dada. Por exemplo, se tivéssemos que multiplicar $\frac{3}{8}$ por $\frac{4}{8}$ como seria?

Ao externar suas ideias, alguns alunos podem associar a multiplicação de numerador por numerador e denominador por denominador como, igualmente, se faz na adição de fração com denominadores iguais. Oportunidade viável para confirmar tal colocação e questionar:

Como seria, no caso da multiplicação com denominadores diferentes? Por exemplo: $\frac{4}{16} \text{x} \frac{1}{2}$?

Socializadas opiniões, ideias, dúvidas, desafiando a realizarem a multiplicação de frações com denominadores diferentes, levando-os, pois, a concluírem que a multiplicação de fração por fração se dá de forma direta, isto é, multiplica-se numerador por numerador e denominador por denominador, com os denominadores sendo iguais ou diferentes.

Assim, podem concluir que: $\frac{4}{16} \text{x} \frac{1}{2} = \frac{4}{32}$.

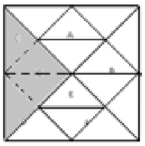
Temos, aqui, uma outra situação, ou seja, foi dada a fração em número e, posteriormente, solicita-se que os alunos tentem representar, graficamente, o processo feito pelo algoritmo. Salientamos que o importante é desafiar o aluno a representar a fração ou o algoritmo com fração, realizando, de modo concreto, gráfico, numérico e por extenso.

Para explorar visualmente a multiplicação das frações realizada, mais uma vez, utilizamos o traçado do Tangram, representando, graficamente, o processo operatório, ou seja, a descrição passo a passo, no quadro da sala da sala de aula, de modo coletivo.

Assim, os alunos poderão perceber o porquê do resultado obtido, visualizando a transformação que ocorre, isto é, que há uma ampliação e, posteriormente, uma redução, para se chegar ao resultado final. Vejamos:

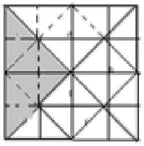
Figura 12 – Demonstração do passo a passo do resultado obtido na multiplicação de $\frac{4}{16} \times \frac{1}{2}$

1º Passo: Cada um dezesseis avos $\frac{1}{16}$ divididos por um meio $\frac{1}{2}$



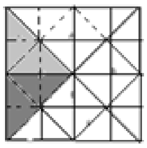
$\frac{4}{16}$ Quatro dezesseis avos

2º Passo: O todo fica com 32 partes, cada parte sendo $\frac{1}{32}$. A fração $\frac{4}{16}$ equivalente a $\frac{8}{32}$.



$\frac{8}{32}$ Oito trinta e dois avos

3º Passo: Toma-se $\frac{1}{2}$ de $\frac{8}{32}$ que corresponde a $\frac{4}{32}$



Um meio de $\frac{8}{32}$ oito trinta e dois avos, corresponde a :

$\frac{4}{32}$ quatro trinta e dois avos.

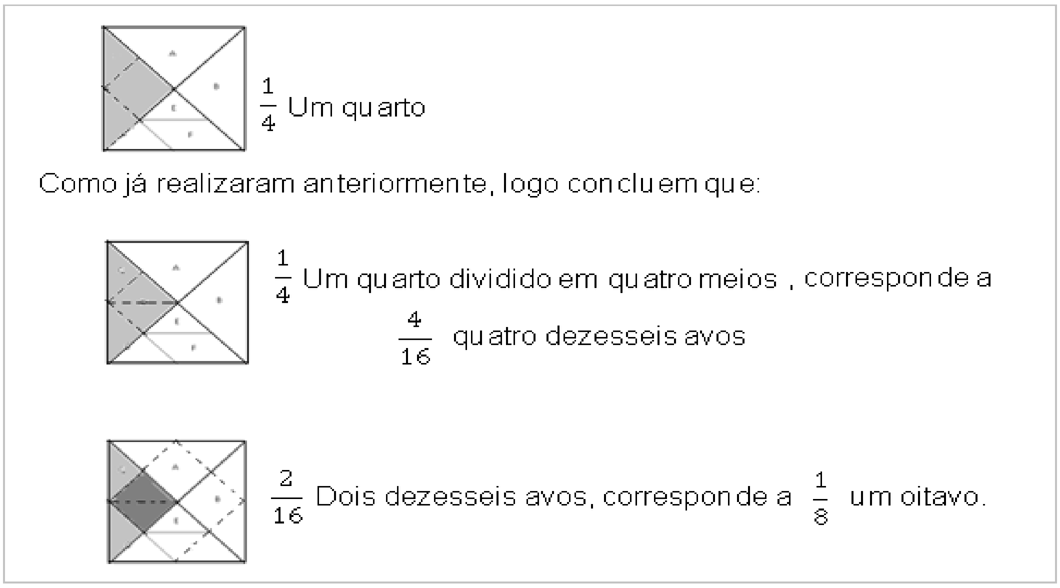
Fonte: Produção própria

Outro exemplo de fração com significado de operador pode ser explorado, após várias explorações de multiplicações de frações ou mesmo no decurso poderá surgir, por parte dos alunos, outras indagações, por exemplo: *Como podemos dividir fração por fração? Na divisão de fração por fração, faz do mesmo jeito da multiplicação?*

Caso questionamentos do tipo não surjam, o professor, enquanto articulador e mediador, poderá oportunizar, questionando e/ou lançar um desafio, sugerindo uma divisão de fração por fração, a exemplo de:$\frac{1}{4} \div \frac{4}{2}$.

Explorando a partir da representação gráfica, solicita-se que os alunos tentem subdividi r$\frac{1}{4}$ do todo (Tangram).

Figura 13 – Compreendendo a inversão da divisão de fração em multiplicação de fração e o resultado obtido.



Fonte: Produção própria

Percebe-se que foi dividido um quarto do Tangram ao meio e depois ao meio novamente, isto é, um quatro foi dividido duas vezes.

Ao manusearem visualmente, os alunos podem concluir o porquê da inversão de operação, notando que ocorre uma multiplicação (ampliação) da quantidade de partes, sendo convertida $\frac{1}{4} \div \frac{4}{2}$ por $\frac{1}{4} \times \frac{2}{4} = \frac{2}{16}$.

Este significado requer explorações contínuas e em múltiplos contextos, dado a complexidade e ações a serem realizadas. Deste modo, sugere-se que sejam realizadas com alunos a partir do 5º ano, explorando materiais manipulativos diversos, paralelamente á realização da operação usual, de modo que estes, gradativamente, se familiarizem e melhor compreendam este significado.

Foco metodológico: EE, EPER e ERE

- Explorando fração com significado de **número**;

Como já mencionado, a cada aula/encontro é importante que seja realizada a retomada (verbal e, por vezes, prática) da exploração feita na aula/encontro anterior.

Assim, na pretensão de oportunizar explorações referentes à fração com significado de número, podem-se aproveitar as colocações dos alunos, por exemplo, retomando a exploração feita em relação ao significado parte-todo, pode-se indagar se $\frac{1}{2}$, corresponde à metade de um 1 inteiro e se um inteiro é representado pelo número 1.

- Quanto é $\frac{1}{2}$ de 1 ?

Tal situação, aos alunos de 5º ano, pode causar alvoroço e inquietações do tipo: "*Como posso saber a metade de 1?", "Tem que ser metade de uma coisa, para partir."*

Nessa situação, se faz necessário associar a divisão do número ao Sistema Decimal, estudado pelos alunos desde as séries anteriores e, assim, explorar, também, a ideia de número decimal.

Desse modo, pode-se partir da observação e manuseio de uma régua. Após observarem a distribuição dos números na régua, os alunos passam a descrever verbalmente o que perceberam, como descrito a seguir:

"*O zero(0), depois 1, depois 2... e entre cada número tem uns tracinhos!"*

- Quantos tracinhos há entre um número e outro?

"*Tem dez (10) tracinhos*".

Esses tracinhos correspondem ao quê?

Observem que, entre um número e outro, há os tracinhos. Imagine que cada grupo de tracinhos corresponde a um número da régua.

"*Cada número é como se fosse um inteiro?"*

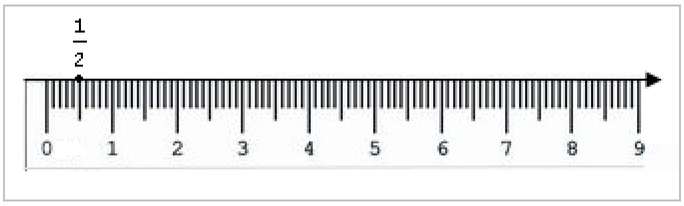
"*Quer dizer que do zero (0) até o um(1) é um inteiro e depois do um (1) até o dois (2)é outro inteiro?*

"Sim. E cada número, na sequência da reta, pode ser dividido e indicado uma parte do todo, ou seja, uma fração."

A analogia feita a parte-todo foi um meio no qual julga-se viável para que os alunos tenham noção da possibilidade de particionar um número, tendo em vista que a ação de particionar um número é bastante abstrata.

Explora-se a compreensão da disposição dos números na régua, transpondo, para uma reta numérica (representação gráfica), em que os alunos são desafiados e encorajados a identificar e destacar, na reta, a fração indicada: $\frac{1}{2}$ de 1.

Figura 14 – Representação na reta numérica: $\frac{1}{2}$ de 1.



Fonte: Produção própria

Após a exploração e socialização da representação feita na reta numérica, pode-se explorar a representação decimal, questionando sobre a metade do número um (1) não ser um inteiro, desafiando os alunos a imaginarem e a explorarem possibilidades de fazer a representação da metade do número 1 de outra forma, podendo, inclusive, associar ao valor monetário (REAL), uma vez que, nesta faixa etária, os alunos já possuem compreensão de valor monetário, no caso, Real (parte inteira) e centavos (partes menores que 1 Real).

Concluindo-se, por fim, que a metade de 1 é 0,5. Posteriormente, outras explorações e representações seguem de acordo com o ritmo de apropriações da turma, ou mesmo da disponibilidade e objetivos em relação à fração com significado de número.

É importante destacar que a fração com significado de número se mostrou de grande conflito ao entendimento dos alunos do 5º ano, participantes da pesquisa.

Acreditamos que isso tenha ocorrido não apenas pela exigência cognitiva abstrata que tal significado demanda, mas, também, pelo tempo disponibilizado para explorar tal significado. Diante disso, sugere-se que as explorações e vivências sejam oportunizadas e intensificadas com este significado, para obtenção de maior e melhor êxito.

Diferenciando fração e razão na configuração do número fracionário.

Foco metodológico: EE, EPER e ERE

- ✓ Explorar a configuração do número fracionário, representando fração;
- ✓ Explorar a configuração do número fracionário, representando razão.

Para que se tenha maior entendimento da configuração do número fracionário indicando fração, se faz necessário compreender que este número, por vezes, não representa fração, mas, sim, razão.

Pode ser retomada uma das aulas/encontros explorados anteriormente ou mesmo aproveitar a exploração realizada, instigando e estendendo para explorar e diferenciar a configuração do número fracionário, indicado fração e indicando razão. Por exemplo, no momento da exploração realizada em relação à fração contínua e fração discreta.

- Se a fração indicada fosse $\frac{1}{3}$ dos 24 Tangrans entregues na turma, como ficaria?

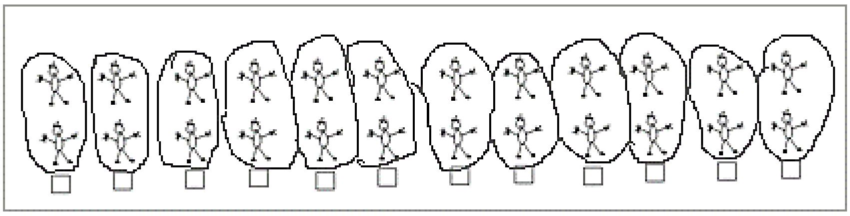
Após os alunos explorarem, eles concluem que a fração discreta se dá pelo agrupamento de quantidades, compreendendo que $\frac{1}{3}$ de 24 corresponde a 8 Tangrans. E, portanto, $\frac{1}{3}$ é a fração indicada no todo de 24 Tangrans.

Podem-se instigar os alunos perguntando:

- Como seria a distribuição se tivéssemos apenas 12 Tangrans para 24 crianças?

Pela experiência anterior, os alunos, certamente, farão grupos, desenhando e tentando visualizar a quantidade de Tangrans para as crianças.

Figura 15 – Exemplo de possível representação feita pelos alunos.



Fonte: Produção própria

Após socializarem, eles concluem que é um Tangram para cada duas crianças. Pode-se pedir que os mesmos representem a situação em número fracionário, socializando, em seguida, o que os alunos fizeram (individualmente ou em dupla). E, assim, é possível que eles percebam e explorem as possibilidades de resposta adequada, visualizando, na configuração do número fracionário, a comparação de grandezas de natureza diferente, concluindo que a exploração feita trata-se de uma razão.

$$\frac{24 \text{ Crianças}}{12 \text{ Trangans}} \qquad \frac{24 \div 12}{12 \div 12} = \frac{2}{1} \; \frac{\text{Crianças}}{\text{Trangans}}$$

Nas explorações realizadas, pode-se perceber a diferença da representação do número fracionário representando fração, cuja característica tem como base parte-todo, diferenciando da configuração do número fracionário representando razão, cuja caracteriza tem como base parte-parte.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, S. Um caminhar crítico e reflexivo sobre Resolução, Exploração e Proposição de Problemas Matemáticos no Cotidiano da Sala de Aula. *In*: ONUCHIC, L. R.; JUNIOR, L. C. L.; PIRONEL, M. (Orgs.). **Perspectivas para Resolução de Problemas.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017, p.355-395.

ANDRADE, S. **Ensino-Aprendizagem de Matemática via resolução, exploração, codificação e descodificação de problemas**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1998.

BERTONI, N.E. A Construção do Conhecimento sobre o Número Fracionário. **Bolema– Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v.21. n º 31, p.209-237, 2008

BOTTA, L.S. **Números racionais e raciocínio proporcional**: considerações sobre o ensino aprendizagem. 1997. 185 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de MESQUISTA, Rio Claro, 1997.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática, SEF/MEC. Brasília: DF, 1997.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. 3ª versão. Brasília: Ministério da Educação. 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_20dez_site.pdf. Acesso em: 21 mar. 2018

CAI, J. & LESTER, F. (2010). Why is teaching with problem solving importantto student learning? **Research Brief,** 14, 1–6.

CAI, J. et al. Problem-Posing Research in Mathematics Education: Some Answered and Unanswered Questions. In: SINGER, F. M.; ELLERTON, N. F.; CAI, J. (ed). **Mathematical Problem Posing, From Research to Effective Practice**. Nova York: Springer Science + Business Media, 2015. p. 3-34.

DRECHMER, P.A.O; ANDRADE, S.V.R. **Os cinco significados da fração**. *In*: CIAEM-IACME, 13. 2011. **Anais** [...]. Recife, Brasil, 2011. Disponível em:<http://xiii.ciaem-redumate.org> Acesso em: 15 set. 2019.

FREUDENTHAL, H. **Didactical phenomenology of mathematical Structures**. Kluwer Academic Publishers New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow.Cap.5, p.133-177.Disponível em: <http://gpdmatematica.org.ar/wp-content/uploads/2015/08/Freudenthal_Didactical_Phenomenology_of_Mathematical_Structures1983.pdf> Acesso em: 23 fev.2019.

MAGINA, S. CAMPOS, T. M. M**.** A fração nas perspectivas do professor e do aluno dos dois primeiros ciclos do ensino fundamental. **Bolema:** Boletim de Educação Matemática, Rio Claro (SP), v. 21, n. 31, p. 23-40, 2008.

MOUTINHO, L.V. **Fração e seus diferentes significados:** um estudo com alunos dos 4ª e 8ª séries do ensino fundamental. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

MOREIRA, P.C; FEREIRA, M.C.C. A Teoria dos Subconstructos e o Número racional como Operador: das estruturas algébricas às cognitivas. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, Rio Claro(SP), v. 21, n. 31, p.103-127, 2008.

SANTOS, S.F.**O uso do Tangram como proposta no Ensino de Frações**. Dissertação (Mestrado)- Universidade Federal de Goiás, Unidade Acadêmica Especial de Ciências Exatas e Tecnológicas, PROFMAT - Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional, Jataí, 2019.

SILVA, M.J.F. **Sobre a introdução de números fracionários**. 1997. 245 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de MATEMÁTICA) – Pontifícia Universidade católica de São Paulo, PUC, São Paulo, 1997.

SILVA, M. J. F. **Investigando saberes de professores do ensino fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série**. Tese de Doutorado – PUC, São Paulo, 2005. 302f.

VASCONCELOS, I.C.P. **A Compreensão das relações numéricas: um estudo com crianças brasileiras e portuguesas do 4º ano da Educação Básica.** Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Faculdade de Educação, Porto Alegre BR-RS, 2015.

APÊNDICE – Atividade diagnóstica II

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
Mestrado profissional

Pesquisa: Ensino e Aprendizagem de Fração via Exploração, Proposição e Resolução de Problemas Matemáticos.

Escola Municipal:____

Turma: 5º ano A - manhã Data:_____/_______/_____.

Aluno(a):____

- Leitura informativa:

Festas juninas

As festas juninas homenageiam três santos católicos: Santo Antônio (no dia 13 de junho), São João Batista (dia 24) e São Pedro (dia 29). No entanto, a origem das comemorações nessa época do ano vem de diversos povos da antiguidade, como os celtas e os egípcios, que realizam danças e festejos em que comemoram a fartura nas colheitas. "Na Europa, os cultos à fertilidade, em junho, foram reproduzidos até por volta do século 10. Como a igreja não conseguia combatê-los, decidiu cristianizá-los, instituindo dias de homenagens aos três santos no mesmo mês", diz a antropóloga Lucia Helena Rangel, da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP).

O curioso é que os índios que habitavam o Brasil antes da chegada dos portugueses também faziam importantes rituais durante o mês de junho. Eles tinham várias celebrações ligadas à agricultura, com cantos, danças e muita comida. Com a chegada dos jesuítas portugueses, os costumes indígenas e o caráter religioso dos festejos juninos se fundiram. É por isso que as festas tanto celebram santos católicos como oferecem uma variedade de pratos feitos com alimentos típicos dos nativos. Já a valorização da vida caipira nessas comemorações reflete a organização da sociedade brasileira até meados do século 20, quando 70% da população viviam no campo. Hoje, as grandes festas juninas se concentram no Nordeste, com destaque para as cidades de Caruaru (PE) e **Campina Grande** (PB).

A dança (quadrilha junina), a música (forró, coco, xaxado...), os pratos típicos como pamonha, canjica e outros, as brincadeiras (pescaria, subi no pau de sebo...) e enfeites com bandeirolas e símbolos rústicos são mantidos em alguns locais onde ocorre estes festejos.

Adaptado de Super. Interessante. ***Cíntia Cristina da Silva.***