UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PRÓ- REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

RENATA RANIELLY CABRAL DA SILVA

ENSINO E APRENDIZAGEM DE EXPRESSÕES ALGÉBRICAS ATRAVÉS DA EXPLORAÇÃO, RESOLUÇÃO E PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS

CAMPINA GRANDE-PB

2020

RENATA RANIELLY CABRAL DA SILVA

ENSINO E APRENDIZAGEM DE EXPRESSÕES ALGÉBRICAS ATRAVÉS DA EXPLORAÇÃO, RESOLUÇÃO E PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada ao Programa Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Mestra em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Silvanio de Andrade

Campina Grande-PB

2020

S586e Silva, Renata Ranielly Cabral da.
Ensino e aprendizagem de expressões algébricas através da exploração, resolução e proposição de problemas [manuscrito] / Renata Ranielly Cabral da Silva. - 2020.
132 p. : il. colorido.

Digitado.
Dissertação (Mestrado em Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2020.
"Orientação : Prof. Dr. Silvanio de Andrade , Coordenação do Curso de Matemática - CCT."

1. Ensino de Matemática. 2. Expressões algébricas. 3. Problemas matemáticos. 4. Resolução de problemas. I. Título

21. ed. CDD 510.7

Elaborada por Giulianne M. Pereira - CRB - 15/714 BC/UEPB

RENATA RANIELLY CABRAL DA SILVA

ENSINO E APRENDIZAGEM DE EXPRESSÕES ALGÉBRICAS ATRAVÉS DA EXPLORAÇÃO, RESOLUÇÃO E PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada ao Programa Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Mestra em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática.

Aprovada em: 11 de Setembro de 2020

BANCA EXAMINADORA

Silvanio de Andrade

Prof. Dr. Silvanio de Andrade (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Maria Isabelle Silva Dias Yanes

Profª. Dra. Maria Isabelle Silva Dias Yanes
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Tiêgo dos Santos Freitas

Prof. Dr. Tiêgo dos Santos Freitas
Secretaria de Estado da Educação, da Ciência e Tecnologia da Paraíba (SEECT)

Campina Grande-PB

2020

Dedico ao meu Senhor Jesus Cristo, a ele toda honra e toda glória. A minha mãe, ao meu esposo e a minha família. E, em especial aos meus filhos, Rebeca Liz e João Paulo filho.

AGRADECIMENTOS

Jesus eu te agradeço por tudo que o Senhor me proporcionou durante este sonho que está sendo realizado, pelos momentos de alegria e pelos momentos que não suportei e que me pus a chorar, mas que nunca me abandonaste. Agradeço-te por ter me dado muita saúde, coragem e força para enfrentar os desafios dessa minha caminhada.

A minha família que sempre esteve comigo em todas as fases da minha vida, nos momentos de alegria e tristeza. A minha mãe, que sempre acreditou e incentivou nos meus estudos. Ao meu esposo, por estar sempre ao meu lado mesmo nos momentos que eu não podia dá muita atenção. E em especial aos meus filhos Rebeca Liz e João Paulo filho, por ter repartido desde a gestação, a mamãe com o mestrado, com as correrias, com as alegrias e com as angustias.

Aos amigos que construí ao longo da minha vida, e aos que conheci durante o curso. Especialmente aos que fazem parte do Grupo de Estudo e Pesquisa sobre Educação e Pós-Modernidade, que contribuíram de forma significativa nas discussões que envolvem essa pesquisa.

Ao meu orientador, Professor Dr. Silvanio de Andrade, por confiar e acreditar nessa pesquisa, me dando subsídios para que eu pudesse realizá-la.

Aos professores Maria Isabelle Silva Dias Yanes e Tiêgo dos Santos Freitas, que fizeram parte da Banca Examinadora e contribuíram para o engrandecimento desta pesquisa.

Ao Programa Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, pela oportunidade de realizar este sonho, e aos professores que fazem parte deste programa.

Aos meus alunos que contribuíram para concretização desta pesquisa.

Obrigada!

“O êxito de um professor de matemática deve ser medido pela quantidade de alunos que, ao longo da vida, ele ensinou a pensar por si mesmos e não pelo volume de fórmulas que os fez memorizar.” (Gilberto Geraldo Garbi)

RESUMO

O Ensino e Aprendizagem de Álgebra é um desafio para professores e alunos, pois é comum observarmos em nossas salas de aula a insatisfação dos alunos que não conseguem compreender os conteúdos referentes à Álgebra, como também há muitas preocupações por parte de professores que, muitas vezes, não possuem uma metodologia adequada que favoreça o ensino e aprendizagem com mais compreensão. Mediante isso, esta pesquisa buscou identificar e analisar quais contribuições a Metodologia Exploração, Resolução e Proposição de Problemas pode propiciar ao ensino e aprendizagem de expressões algébricas de modo que se torne mais compreensivo para o aluno. A investigação foi realizada com alunos do 8º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública estadual na cidade de Ingá – PB. Eles foram escolhidos por serem alunos da professora/pesquisadora e por observar nas literaturas que, neste ano escolar, os alunos apresentam uma maior dificuldade em relação aos conteúdos de Álgebra. A pesquisa caracteriza-se como qualitativa (ANDRÉ, 1995; BOGDAN; BIKLEN, 1994), na modalidade de pesquisa pedagógica, defendida por Lankshear e Knobel (2008). Para o levantamento de dados, planejamos e utilizamos atividades para o ensino de expressões algébricas que atendessem às recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), da Base Nacional Comum Curricular (2017) e dos autores Friedlander & Arcavi (2017), a partir da Metodologia Resolução de Problemas e com base na Exploração de Problemas, proposto por Andrade, S. (1998, 2017). Os dados foram levantados com base nas análises das produções dos alunos, bem como das anotações realizadas pela professora/pesquisadora durante a realização das atividades. Por meio deles, constatamos a potencialidade da Metodologia Exploração, Resolução e Proposição para o ensino e aprendizagem de Expressões Algébricas, uma vez que era notória a participação ativa dos alunos durante a exploração dos problemas, os quais passaram a refletir, argumentar e justificar suas ideias, favorecendo uma aprendizagem com mais compreensão. Sendo assim, concluímos que o ensino e aprendizagem de Expressões Algébricas, através da Metodologia Exploração, Resolução e Proposição de Problemas, tornou-se mais compreensivo para o aluno.

Palavras-chave: Ensino e aprendizagem. Expressões Algébricas. Exploração. Resolução e Proposição de Problemas.

ABSTRACT

Teaching and Learning Algebra is a challenge for teachers and students, because it is common to observe in our classrooms the dissatisfaction of students who cannot understand the contents related to Algebra, as well as there are many concerns on the part of teachers who often do not have an adequate methodology that favors algebraic teaching and learning. Through this, this research seeks to identify and analyze which contributions the Methodology Problem Exploration, Solving and Posing can provide to the teaching and learning of algebraic expressions in a way that becomes more comprehensive to the student. The investigation was carried out with students from the 8th grade of an elementary school at a state public school in the town of Ingá - PB. They were chosen because they are students of the teacher / researcher and for observing in the literature that, in this school year, students have greater difficulty in relation to the contents of Algebra. The research is characterized as qualitative (ANDRÉ, 1995; BOGDAN; BIKLEN, 1994), in the pedagogical research modality, defended by Lankshear and Knobel (2008, p. 14). For data collection, we plan and use activities for teaching algebraic expressions that meet the recommendations of the National Curriculum Parameters (1998), from the National Common Curricular Base (2017) and from the authors Friedlander & Arcavi (2017), based on the Problem Resolution Methodology, from the perspective of Problem Exploration, proposed by Andrade, S. (1998, 2017). The data were collected based on the analysis of the students' productions, as well as the notes taken by the teacher / researcher during the activities. Through them, we see the potential of the Exploration, Solving and Posing Methodology for teaching and learning Algebraic Expressions, since it was notorious the active participation of students during the exploration of problems, which started to reflect, argue and justify their ideas , favoring learning with more understanding. Thus, we conclude that the teaching and learning of Algebraic Expressions, through the Methodology Problem Exploration, Solving and Posing, became more comprehensive to the student.

Keywords: Teaching and learning. Algebraic Expressions. Problem Exploration. Solving and Posing.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

É comum, como professores de matemática, ouvirmos os alunos questionarem o porquê de terem de estudar Álgebra; qual a importância desse componente para seu cotidiano. O que podemos observar diante das leituras realizadas, é que esses questionamentos estão cheios de insatisfações por parte dos alunos que não conseguem compreender o significado do que estão tendo que aprender, muitas vezes em um curto período de tempo: um amontoado de letras regadas de operações e regras. Sousa, Panossian e Cedro (2014) comentam que, por mais que a Álgebra tenha um importante papel para os estudantes, o seu ensino não tem desenvolvido uma aprendizagem compreensiva e eficaz, surgindo assim várias dificuldades que levam a erros, como mostram os pesquisadores.

Ao iniciar minha trajetória como professora de Matemática da Educação Básica, tanto de escolas públicas como de escolas privadas, percebi muitas dificuldades dos alunos em compreender os assuntos relacionados à Álgebra. Com base nisso, para o trabalho de conclusão do curso de Licenciatura em Matemática, surgiu o interesse em analisar como se processava o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental II, e dos alunos do primeiro ano de curso de graduação em Licenciatura em Matemática. Para coletar os dados referentes a essa pesquisa, foi aplicado um mesmo questionário, tanto para os alunos do 9º ano, como para os da graduação. A partir desse questionário constatamos que a maior parte das dificuldades apresentadas pelos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental eram as mesmas dos alunos de graduação (SILVA, 2011).

Após a pesquisa realizada para conclusão de curso, surgiu a necessidade de buscar alternativas para trabalhar os conteúdos algébricos, de modo que possibilitasse ao aluno um estudo mais compreensivo, provindo assim um interesse em cursar o Mestrado, para poder aprofundar meus conhecimentos enquanto professora e pesquisadora. Ao adentrar no mestrado, me deparei com a disciplina de Resolução de Problemas e Construtivismo Social, bem como com o Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação e Pós-Modernidade (GEPEP), o qual é composto por alunos e ex-alunos do Programa de Pós-Graduação de Ensino de Ciências e Educação Matemática (PPGECEM) da UEPB, os quais ajudaram a nortear esta pesquisa, uma vez que trabalham os conteúdos matemáticos através da Metodologia Resolução de Problemas, na perspectiva da Exploração de Problemas defendida pelo Professor Dr. Silvanio de Andrade (1998, 2017, 2020), que também é coordenador do grupo.

Tomando como ponto de partida as dificuldades vivenciadas ao longo de minha experiência profissional, bem como as registradas nas literaturas, a presente pesquisa buscou trabalhar o conteúdo de Álgebra, em especial as Expressões Algébricas, por meio da Metodologia Exploração, Resolução e Proposição de Problemas, de modo que seu ensino se torne mais compreensivo para o aluno, uma vez que é possível verificarmos a sensação de insatisfação deles em sala de aula por não compreenderem a importância de se estudar Álgebra. Vemos que alguns pesquisadores apontam inúmeros fatores que podem levar os alunos a não compreenderem o ensino da Álgebra e um desses fatores é a carência de reconhecimento da função da variável em determinadas circunstâncias posto que, para cada fase, ela pode ser estudada como fórmula, incógnita ou variável (USISKIN, 1995), dificultando ainda mais a compreensão por parte dos alunos.

Percebemos também que há muitas preocupações por parte de professores que, muitas vezes, não conseguem levar para a sala de aula uma metodologia que favoreça a compreensão do ensino de Álgebra e, consequentemente, não atingem um percentual satisfatório de aprendizagem, deixando uma lacuna no ensino que cresce a cada etapa da Educação Básica, chegando até mesmo ao Ensino Superior (LINS; GIMENEZ, 1997).

Algumas pesquisas apontam que a Álgebra vem sendo um dos instrumentos para o declínio da aprendizagem matemática, pois, segundo Castro (2003), hoje, o ensino da Álgebra faz parte da vida escolar desde o Ensino Fundamental, mas vem apresentando tantos fracassos que pode ser considerado um elemento de exclusão (LINS; GIMENEZ, 1997), dado que grande parte dos alunos não consegue compreendê-la, transformando-a em um simples aglomerado de sinais, símbolos e regras.

Contudo, por mais que o ensino da Álgebra tenha um caráter formal, por ser um tanto abstrata, quando trabalhada com metodologias que possam auxiliar no desenvolvimento do pensamento algébrico, percebe-se um grande avanço desde a linguagem até o entendimento das suas funções. Diante disso, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) afirmam que é preciso inovar nos métodos de ensino:

> Um desenvolvimento mais eficaz, científico e pedagógico exige mudanças na própria escola, de forma a promover novas atitudes no aluno e na comunidade. É preciso mudar convicções equivocadas, culturalmente difundidas em toda a sociedade, de que os alunos são os pacientes, de que os agentes são os professores e de que a escola estabelece simplesmente o cenário do processo de ensino. (BRASIL, 1998, p. 263).

Ainda de acordo com os PCN (BRASIL, 1998, p.76), um dos objetivos do ensino de Álgebra é o desenvolvimento do pensamento algébrico do aluno, através de situações que o levem a “utilizar a linguagem algébrica para representar as generalizações inferidas a partir de padrões, tabelas e gráficos em contextos numéricos e geométricos”. Sobre isso, Ponte (2006) também comenta que a melhor forma de indicar os grandes objetivos do estudo da Álgebra, ao nível escolar, é quando o aluno consegue desenvolver o pensamento algébrico. Para isso, segundo Lins e Gimenez (1997), cabe ao professor pensar seriamente no papel da Álgebra na escola e na formação deste pensamento, de forma a produzir significado ao aluno, ou seja, o ensino de Álgebra só produz significado para o aluno quando este consegue falar a respeito de um objeto.

Com base no exposto, sobre as problemáticas existentes no ensino e aprendizagem da Álgebra, bem como pela busca de metodologias que possibilitem ao aluno um estudo mais aprofundado em relação aos conteúdos algébricos, esta pesquisa foi orientada pela seguinte questão: Que contribuições a Metodologia Exploração, Resolução e Proposição de Problemas pode propiciar ao ensino e aprendizagem de expressões algébricas de modo que se torne mais compreensivo para o aluno?

Para respondermos à nossa questão norteadora, partimos dos seguintes objetivos:

Objetivo Principal:

Identificar e analisar as contribuições que a Metodologia Exploração, Resolução e Proposição de Problemas pode propiciar ao ensino e aprendizagem de expressões algébricas.

Objetivos Específicos:

- Fazer um levantamento e seleção de problemas do conteúdo de expressões algébricas, para realizar uma experiência didática na perspectiva da Metodologia Exploração, Resolução e Proposição de Problemas;
- Identificar as possibilidades e os desafios que a abordagem Metodológica Exploração, Resolução e Proposição de problemas pode trazer para um ensino e aprendizagem de expressões algébricas com mais compreensão para o aluno;
- Descrever e analisar de que forma ocorreu a compreensão dos alunos no estudo de expressões algébricas por meio da Metodologia Exploração, Resolução e Proposição de Problemas.

Para o delineamento desta pesquisa, desenvolvemos uma investigação de cunho qualitativo, uma vez que a pesquisa se interessa mais pelo processo do que pelos resultados. Conforme André (1995), tal pesquisa não trabalha com variáveis ou por amostragem, direcionando-se para observação sobre o que está sendo estudado. Umas das principais abordagens da pesquisa qualitativa é que ela valoriza cada indivíduo dentro da sua realidade. Ela também é flexível e focaliza a realidade de forma complexa e contextualizada de modo que o pesquisador pode interagir com os pesquisados, observando seu comportamento. Ela também abre espaço para que o sujeito a ser pesquisado possa expor seus valores culturais, de modo que, para ser analisado, é necessário levar em consideração suas características. (BONADIMAN, 2007).

O tipo de nossa pesquisa é pedagógica, visto que a pesquisadora é também docente da turma alvo do processo e também por dialogarmos com as ideias defendidas por Lankshear e Knobel (2008, p. 14), os quais comentam que “a pesquisa pedagógica pode contribuir para um ensino e uma aprendizagem de melhor qualidade nas salas de aula”. Porém, os autores nos alertam que, ao assumimos o papel de pesquisadores, “nosso interesse não é buscar por algo que funcione, mas entender como e por que funciona e/ou como pode precisar ser adaptado para funcionar em outras circunstâncias ou aplicar-se a outros casos”. (LANKSHEAR; KNOBEL, 2008, p.19).

Para o desenvolvimento da nossa pesquisa em sala de aula, trabalhamos o conteúdo de expressões algébricas na perspectiva da Metodologia Exploração, Resolução e Proposição Problemas, com base nas pesquisas desenvolvidas por Andrade, S. (1998, 2017).

Os sujeitos da nossa pesquisa foram alunos do 8º ano do Ensino Fundamental, dado que geralmente é nesta série que verificamos que existe o maior currículo algébrico, e que a Álgebra começa a ser vista como mecânica e improdutiva no tocante à produção de significados para os alunos. Os sujeitos escolhidos são alunos da professora e pesquisadora e pertencem a uma escola da rede pública Estadual de Ensino Fundamental situada na cidade de Ingá-PB.

Na tentativa de respondermos às nossas indagações, nosso trabalho está organizado em seis capítulos.

O primeiro capítulo corresponde à introdução do trabalho, onde iniciamos uma pequena discussão sobre algumas problemáticas em relação ao ensino e aprendizagem de Álgebra, bem como destacamos a proposta Metodológica Exploração, Resolução e Proposição de Problemas para o ensino e aprendizagem de expressões algébricas.

No segundo capítulo, intitulado *Álgebra: Do contexto Histórico ao Ensino e Aprendizagem*, trouxemos uma abordagem histórica sobre a evolução da Álgebra, com a contribuição de algumas civilizações. Ainda neste capítulo, debatemos sobre as dificuldades apresentadas pelos alunos, sobre o olhar de Scarlassari (2007) e Booth (1995). Bem como trazemos as concepções de Álgebra e Educação Algébrica, apresentadas por pesquisadores como: Usiskin (1995); Fiorentini, Miorim e Miguel (1993); Lins e Gimenz (1997) e Sousa, Panossian e Cedro (2014). Discorremos também como a Álgebra é abordada nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1998) e na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (2017).

No decorrer do terceiro capítulo, discutimos sobre as diferentes perspectivas no tocante ao trabalho com a Resolução de Problemas (ONUCHIC, 1999; ONUCHIC; ALLEVATO, 2011; ANDRADE, C.; ONUCHIC, 2017; ANDRADE, S., 1998, 2017), trazendo uma pequena abordagem histórica sobre as fases do trabalho com a Resolução de Problemas, até a chegada da Resolução de problemas como uma Metodologia de Ensino.

No quarto capítulo, apresentamos o conceito de Expressões Algébricas, bem como algumas orientações curriculares para o seu ensino e aprendizagem, na visão de Friedlander e Arcavi (2017), dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRAISL, 1998) e da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (2017).

No quinto capítulo descrevemos sobre a trajetória metodológica utilizada para o desenvolvimento desta pesquisa, observando os procedimentos utilizados, as atividades e os sujeitos da pesquisa. E, no sexto capítulo, apresentamos as descrições e as análises das atividades realizadas na perspectiva da Metodologia Exploração, Resolução e Proposição de Problemas à luz das pesquisas desenvolvidas por Andrade, S. (1998, 2017, entre outros).

Finalizamos este trabalho apresentando as considerações finais no sétimo capítulo e, em seguida, as Referências.

2 ÁLGEBRA: DO CONTEXTO HISTÓRICO AO ENSINO E APRENDIZAGEM

A Álgebra é um dos ramos da Matemática que, tradicionalmente, é introduzido no currículo escolar brasileiro no final do terceiro ciclo do ensino fundamental, mais precisamente no 7º ano quando os alunos têm um primeiro contato com os símbolos algébricos. Porém, pesquisadores como Lins e Gimenez (1997), Ribeiro e Cury (2015) defendem que o ensino da Álgebra poderia começar mais cedo, ou seja, ainda nos anos inicias. No entanto, ao lermos os PCN, que é um dos documentos norteadores do ensino brasileiro, verificamos que "embora nas séries iniciais já se possa desenvolver alguns aspectos da álgebra, é especialmente nas séries finais do ensino fundamental que as atividades algébricas serão ampliadas". (BRASIL, 1998, p. 50).

Ao lermos os trabalhos dos pesquisadores e educadores matemáticos como Booth (1995); Lins e Gimenez (1997); Fiorentini, Miguel e Miorim (1993); Ribeiro e Cury (2015); Sousa, Panossian e Cedro (2014), entre outros que estão envolvidos com investigações sobre o ensino e aprendizagem da Álgebra, observamos que se trata de um tema que provoca várias discussões entre pesquisadores, professores e alunos. Para os professores e pesquisadores existe uma busca em solucionar algumas dificuldades apresentadas pelos alunos tanto na educação básica como no ensino superior, já no caso dos alunos, há uma tentativa de compreender o que está sendo ensinado.

Segundo Coelho e Aguiar (2018), o que vemos hoje no ensino da Álgebra é um reflexo de um processo que há anos vem sofrendo, pois continua prevalecendo uma aprendizagem de um conjunto de técnicas e regras para manipulação de símbolos que não expressam significado para os alunos. Bonadiman (2007) reforça que a ênfase que os professores dão ao ensino voltado para as técnicas de manipulação acaba limitando a capacidade do aluno de desenvolver e compreender os conceitos da Álgebra e que, muitas vezes, por falta de preparação por parte dos professores, eles acabam transpondo as inseguranças para os alunos, de modo que termina sendo construída uma barreira na aprendizagem dos assuntos relacionados à Álgebra.

O ensino de Álgebra é exposto em sala de aula mediante as concepções que os professores possuem do que sejam Álgebra e educação algébrica (SOUSA; PANOSSIAN; CEDRO, 2014; BONADIMAN, 2007), influenciando diretamente no ensino e aprendizagem dos conceitos algébricos. Isso favorece o trabalho numa perspectiva de um ensino voltado para repetição de exercícios a partir do qual os alunos utilizam regras para manipularem símbolos, sem que haja a mínima reflexão do que esteja sendo aprendido, levando o aluno a acreditar que a Álgebra se restringe a fórmulas prontas e acabadas.

Conforme os PCN (BRASIL, 1998), a ênfase que os professores dão ao ensino de Álgebra não garante o aprendizado do aluno, visto que as pesquisas em Educação Matemática mostram as dificuldades dos alunos em compreenderem os conceitos algébricos, assim como os resultados das avaliações realizadas pelo governo apontam que os alunos raramente atingem 40% dos itens referente à Álgebra (BRASIL, 1998).

Ribeiro e Cury (2015) trazem em sua pesquisa uma avaliação do rendimento dos alunos referente à avaliação do SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica) de 2011, a qual constatou que, mesmo sendo visível o crescimento no desempenho dos estudantes do ensino fundamental e médio, ainda é muito pouco, considerando uma pontuação que fica na média de 270 dentro de uma escala de 400, o que evidencia uma considerável defasagem na aprendizagem dos alunos. Referindo-se às questões que abordam os conteúdos de álgebra, os autores comentam que:

> No caso especifico da Álgebra, a partir dos resultados apresentados pelo Instituto de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), observa-se que os estudantes não dominam competências como 1) Identificar um sistema de equações do 1º grau que expressa um problema; 2) resolver equações do 1º grau com uma incógnita; 3) resolver problemas que envolvam equação do 2º grau; 4) identificar a relação entre as representações algébrica e geométrica de um sistema de equações do 1º grau; 5) identificar, em um gráfico de função, o comportamento de crescimento/ decrescimento; 6) identificar o gráfico de uma reta dada sua equação; dentre outras. (RIBEIRO; CURY, 2015, p. 58).

Vemos ainda que, após 22 anos da publicação dos PCN de 1998, as pesquisas referentes ao ensino e aprendizagem de Álgebra relatam que não houve uma melhora referente a esse tema. Podemos constatar esse fracasso na aprendizagem quando analisamos os resultados obtidos no site do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), referentes ao SAEB 2017, revelando que os níveis de proficiência dos alunos em relação aos itens de Álgebra continuam sem ultrapassar os 40%. (BRASIL, 2019).

Um dos fatores para o baixo desempenho dos alunos, nos tópicos que se referem à Álgebra nas avaliações nacionais, está muitas vezes relacionado às metodologias de ensino que não permitem que os alunos desenvolvam uma ideia ampla sobre os conceitos algébricos, pois o que vemos é uma reprodução mecânica de regras de manipulação que não produzem significado para os alunos, ocasionando cada vez mais um fracasso na aprendizagem e um ponto de desestímulo e abandono escolar, como nos aponta Lins e Gimenez (1997).

2.1 Um olhar sobre as dificuldades dos alunos em Álgebra

Para que possamos falar em Ensino e Aprendizagem de Álgebra, precisamos falar sobre as dificuldades enfrentadas por professores e alunos, levando a erros que vão se prologando a cada conceito algébrico que é trabalhado em sala de aula. (SCARLASSARI, 2007).

O ensino de Álgebra, pela sua complexidade, tem revelado um alto índice de dificuldades e erros entre os alunos, pois a maneira como o seu ensino está sendo aplicado e assimilado nas escolas pode-se determinar muitas vezes a estrutura do conhecimento algébrico dos alunos. Pinto (1997) constatou em sua pesquisa que os erros cometidos pelos alunos são uma consequência de um ensino voltado para técnicas de manipulação, ou seja, uma valorização dos processos sintáticos. Como o ensino de Álgebra é um tanto formal e exige um pouco mais de abstração, os professores precisam buscar metodologias que possam auxiliar na compreensão dos conceitos algébricos. Porém, o que as pesquisas mostram é que professores, mediante suas concepções sobre o que é Álgebra e educação algébrica, acabam transpondo para os alunos conceitos e procedimentos de forma mecânica sem nenhum significado.

Na pesquisa realizada por Scarlassari (2007), ela constata que exercícios repetitivos e que priorizam a manipulação não favorecem a aprendizagem. Para a pesquisadora, é preciso construir o significado dos conceitos com os alunos, pois assim poderão ser diminuídas as dificuldades apresentadas, como também eles poderão perceber que a Álgebra foi construída em movimento com várias civilizações. Em seu trabalho de pesquisa, a autora se apoia no desenvolvimento de atividades que permitem uma aprendizagem mediada pela construção histórica do conceito, ideia essa que também é defendida por Sousa (2004).

Quando o ensino da álgebra é voltado para um estudo baseado apenas em regras e fórmulas, há a interferência direta na aprendizagem, pois acaba gerando as dificuldades dos alunos que não encontram significado neste estudo. De acordo com Scarlassari (2007), os alunos até conseguem entender os problemas, uma vez que conseguem resolver de outras maneiras sem que seja unicamente pelos símbolos algébricos.

Ao falarmos em dificuldades no ensino de Álgebra, não poderíamos deixar de mencionar a pesquisadora Lesley R. Booth, que desenvolveu uma pesquisa com alunos de 7ª e 8ª séries (atualmente denominado de 8º e 9º anos), com o intuito de verificar os erros cometidos por eles em conteúdos relacionados à Álgebra. De acordo com a pesquisadora, tentar descobrir o que torna a álgebra difícil é identificar os erros cometidos pelos alunos e investigar a origem e razão desses erros. (BOOTH, 1995).

Ao analisarmos a pesquisa realizada por Booth (1995), podemos observar que as dificuldades e os erros dos alunos em sala de aula estavam relacionados a como eles lidam com as atividades de aritmética e as atividades de álgebra; o uso da notação em álgebra; o significado das letras em álgebra e aritmética; os tipos de relações e métodos usados em aritmética.

- O foco das atividades de aritmética e Álgebra

Em relação às atividades de álgebra e aritmética, Booth (1995) comenta que o foco das atividades é diferente, uma vez que, na álgebra, as atividades consistem em estabelecer procedimentos e relações que venham expressar de forma simplificada, podendo chegar a uma expressão do tipo 2x + 6, diferente da aritmética em que se encontra um único valor e apenas numérico. Ainda conforme a autora, os alunos têm dificuldade em aceitar a ausência do fechamento, ou seja, para eles 5a + 2b tem como resultado 7ab.

- Notação e convenções em Álgebra

Conforme Booth (1995), para os alunos, o sinal de igualdade procede a uma resposta numérica trabalhada na aritmética, porém em Álgebra corresponde a uma equivalência. Os alunos também apresentam dificuldades em relação às operações da aritmética e acabam trazendo para a álgebra, como no caso da divisão quando o dividendo é menor que o divisor. Booth (1995) ainda comenta em relação à justaposição na aritmética e na álgebra que, enquanto na aritmética a justaposição está relacionada à adição (59= 50 + 9) na álgebra é relacionada à multiplicação, ou seja, 4b é 4 vezes b. Assim, a autora sugere que inicialmente deveria trazer o sinal da multiplicação como é trabalhado geralmente na aritmética, em que ficaria 4 x b, até os alunos entenderem que se trata de uma multiplicação.

- Letras e Variáveis

A letra em álgebra pode causar confusão para os alunos, pois, conforme Booth (1995), se na aritmética *m* representa a unidade de medida de metros, na álgebra representa a quantidade de metros.

No estudo da álgebra, há uma complexidade em relação às funções que a variável pode assumir. Tendo o aluno que compreender seus processos para adequar a função da variável de acordo com o que for trabalhado, porém, em sua maioria, só identificam-na como incógnita. Outro fator de confusão na aprendizagem é que, para os alunos, letras diferentes só podem representar números diferentes, logo, eles não aceitam que x + y + z = x + p + z, onde y = p. (BOOTH, 1995).

- Os tipos de relações e métodos usados em aritmética.

De acordo com Booth (1995), quando o aluno não compreende os procedimentos realizados na aritmética, o seu desempenho em Álgebra acaba sendo afetado. Como no caso da função dos parênteses que, ao mudar de posição em uma expressão, altera o resultado.

> Nesses exemplos, os resultados mostram que se ignora a necessidade de parênteses. Consequentemente, escrevem-se incorretamente expressões algébricas que necessitam de parênteses (por exemplo, px a + m em vez de p x (a + m)), o que pode acarretar outros erros quando a expressão é simplificada (por exemplo, pxa + m poderá então ser reescrita, erradamente nesse contexto, como pa + m). Nesse caso o erro é fruto menos de concepções algébricas erradas do que de uma visão incorreta da representação aritmética. (BOOTH, 1995, p. 34)

Quando conhecemos as dificuldades e os erros dos alunos, isso nos auxilia a tomarmos decisões de como podemos estruturar o ensino de modo que esses erros sejam vistos como ponto de partida para as atividades trabalhadas em sala de aula. Assim,

> Como o valor dessas observações deve provir do uso que delas se possa fazer para tomar decisões referentes ao ensino e aprendizado de álgebra, devemos indagar o que professor pode fazer para ajudar as crianças a evitar ou corrigir esses problemas. Espera-se que as sugestões feitas aqui possam ir, de alguma maneira, ao encontro dessas necessidades. Além disso, as ilustrações aqui apresentadas podem servir para nos lembrar que algumas ideias aparentemente simples nem sempre são tão simples como podem parecer aos adultos. Um levantamento contínuo do que envolve exatamente o aprendizado de novos tópicos de matemática, acompanhado por uma análise dos erros cometidos pelos alunos e de suas causas, pode nos proporcionar instrumentos extremamente úteis para decidir sobre os meios de ajudar as crianças a melhorarem sua compreensão da matemática. Cabe aos professores e pesquisadores darem os passos que puderem para implementar esses esforços. (BOOTH, 1995, p. 35).

As observações que Booth (1995) traz em sua pesquisa não só servem para verificarmos os erros e as dificuldades que os alunos costumam ter, mas são a base para que possamos nos apoiar nesses erros e dificuldades para, enfim, tomarmos uma postura diferente em sala de aula, ou seja, procurarmos métodos que possam mudar essa realidade.

2.2 Breve histórico do desenvolvimento da Álgebra

Para que possamos compreender melhor o cenário de ensino e aprendizagem da Álgebra, faremos uma abordagem histórica do seu desenvolvimento, posto que, além de ampliar nosso conhecimento, nos possibilitará entender como os conceitos algébricos foram construídos por diversas civilizações e como isso implica na construção de concepções por parte dos alunos e professores. Sobre isso os PCN nos mostram que:

> O conhecimento da história dos conceitos matemáticos precisa fazer parte da formação dos professores para que tenham elementos que lhes permitam mostrar aos alunos a Matemática como ciência que não trata de verdades eternas, infalíveis e imutáveis, mas como ciência dinâmica, sempre aberta à incorporação de novos conhecimentos. Além disso, conhecer os obstáculos envolvidos no processo de construção de conceitos é de grande utilidade para que o professor compreenda melhor alguns aspectos da aprendizagem dos alunos. (BRASIL, 1997, p. 30).

Ribeiro e Cury (2105) fazem uma busca histórica para verificar como os povos concebiam os conceitos de equações e funções e comentam que:

> No caso das equações, por exemplo, podemos considerar que o conhecimento dos desdobramentos desse conceito entre os povos antigos, passando de uma concepção pragmática a outra geométrica e, posteriormente, à estrutural, potencializa a identificação de obstáculos epistemológicos para enfrentar dificuldades manifestadas pelos estudantes no processo de aprendizagem da Matemática escolar. (RIBEIRO; CURY, 2015, p.35).

Outra pesquisa, a partir da qual é possível observar a importância de se fazer um resgate histórico de conceitos algébricos construídos pelas civilizações é a de Souza, Panossian e Cedro (2014) que considera que:

> Não é possível compreender o que é Álgebra sem o acesso ao seu movimento lógico e histórico, sem considerar como se deu seu desenvolvimento ao longo da experiência histórica da humanidade, ou seja, é impossível compreendê-la sem pensar a totalidade, a fluência e a interdependência do conhecimento. (SOUSA; PANOSSIAN; CEDRO, 2014, p. 170).

Ao lermos as pesquisas de Ribeiro e Cury (2015) e a de Silva (2015) constatamos que ao longo da história alguns povos tiveram participação na evolução de conceitos algébricos, provocando ao longo dos séculos várias transformações que, de certa forma, facilitaram o entendimento dessa ciência. Essas transformações começam ainda no período em que se predomina a Álgebra Elementar, na qual as habilidades necessárias consistem na generalização de padrões aritméticos, resolver equações e operações com expressões algébricas, diferente da Álgebra Moderna, que tem seu estudo mais voltado para as estruturas algébricas, tais como grupos, anéis e corpos. (MIGUEL; FIORENTINI; MIORIN, 1992).

Alguns pesquisadores defendem que o desenvolvimento histórico da Álgebra está relacionado à evolução da sua notação algébrica que, conforme Eves (2002) está dividido em três estágios: o retórico, o sincopado e o simbólico.

No estágio retórico (1700 a.C até 250 d.C) não havia os símbolos que conhecemos hoje. Os matemáticos utilizavam, nesta época, as palavras para poderem resolver problemas com características algébricas. O estágio sincopado (250 d.C até entorno de 1500) é marcado pelo grande salto nos estudos da Álgebra, pois os matemáticos da época começam a fazer uso das palavras abreviadas para descrever os problemas algébricos, o que foi sendo aperfeiçoado ao longo dos tempos até chegar ao estágio simbólico (após 1500), no qual surgem os símbolos que ajudariam o manuseio das situações que envolvessem problemas algébricos, favorecendo um grande salto na evolução da Álgebra.

Durante esse percurso de evolução da notação algébrica, atentamos a presença de povos como os Babilônicos, egípcios, gregos, hindus, árabes e europeus, que fizeram parte desse progresso.

De acordo com Eves (2002), por volta do ano 2000 a.C, a aritmética babilônica já havia evoluído para uma álgebra retórica bem desenvolvida. Os babilônios também já conseguiam resolver equações quadráticas, ou pelo método de substituição em fórmulas ou pelo método de completar quadrados. Ainda conforme Eves (2002), os problemas de geometria acabavam levando a problemas algébricos e os babilônicos utilizavam métodos bem sofisticados em comparação a outros povos.

Silva (2015), fundamentada na pesquisa de Baumgart (1992), traz um exemplo de como os babilônicos realizavam seus cálculos algébricos.

> É um exemplo típico dos problemas encontrados em escrita cunciforme, em tábulas de argila que remontam ao tempo do rei Hammurabi (1700 a.C). A explanação, naturalmente, é feita em português; e usa-se a notação decimal indo-arábica em vez da notação sexagesimal cuneiforme.
> Comprimento, largura. Multipliquei comprimento por largura, obtendo assim a área: 252. Somei comprimento e largura: 32. Pede-se comprimento e largura.
> [Dado] 32 soma;
> 252 área;
> [Resposta] 18 comprimento, 14 largura.
> Segue-se do método: Tome metade de 32 [que é 16].
> 16 x 16= 256
> 256 – 252 =4
> A raiz quadrada de 4 é 2.
> 16 + 2 =18 comprimento
> 16 – 2 = 14 largura
> [Prova] Multipliquei 18 de comprimento por 14 largura.
> 18 x 14 = 252 área. (BAUMGART, 1992, p. 4 *apud* SILVA, 2015, p. 101).

Outra civilização que deixou sua contribuição na fase retórica da álgebra, foi a civilização egípcia que, segundo Ribeiro e Cury (2015), alguns problemas encontrados nos

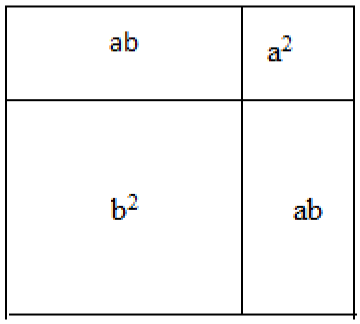
Papiros de Rhind e Moscou apresentam características de ordem prática. Conforme os autores, tais problemas eram resolvidos com auxílio de equações lineares, com uma incógnita. Mais tarde, o método utilizado pelos egípcios fica sendo conhecido na Europa como regra da falsa posição que, segundo Ribeiro e Cury (2015), é o que conhecemos por método de tentativa e erro, o qual vamos atribuindo valores até encontrarmos a raiz que satisfaça.

Eves (2002) traz um exemplo de como os egípcios resolviam problemas utilizando o método da falsa posição. "Assim, para resolver: $x + x/7 = 24$. Assume-se um valor conveniente para x; digamos x=7. Então $x + x/\ 7 = 8$, em vez de 24. Como 8 deve ser multiplicado por 3 para se obter 24, o valor correto de x deve ser 3(7) ou 21." (EVES, 2002, p.73).

Tanto os babilônicos como os egípcios utilizavam a aritmética, na maioria das vezes, para resolver problemas algébricos, os quais, em sua maior parte, estavam relacionados a atividades do cotidiano da civilização.

No decorrer desse desenvolvimento histórico, temos a civilização grega, que utilizava a geometria para resolver problemas algébricos. Conforme Ribeiro e Cury (2015), ela utilizava dois métodos para resolver equações lineares e quadráticas: o método da proporção de dois segmentos e o de cálculo de área, como podemos observar na figura (1) de acordo com Silva (2015).

Figura 1: Representação Geométrica da Expressão $(a+b)^2$



Fonte: Silva (2015)

De acordo com Baumgart (1992, *apud* Silva, 2015, p. 103), os gregos utilizavam esses métodos por terem dificuldades com números irracionais. Um dos gregos que se destacaram com seus estudos e contribuições para a Álgebra foi Diofanto de Alexandria, o qual, segundo Eves (2002), teve uma importante participação para a fase sincopada da Álgebra, como também teve grande influência entre os europeus.

> Diofanto tinha abreviações para a incógnita, potências da incógnita até o de expoente seis, subtração, igualdade e inversas [...], "incógnita ao quadrado" se indica por Δ^Y, as duas primeiras letras da palavra grega *dunamis* ($\Delta YNAMI\Sigma$) que significa "potência" e "incógnita ao cubo" se denota por K^Y, as duas primeiras letras da palavra grega *Kubos* ($KYBO\Sigma$) que significa "cubo". Facilmente se explicam os símbolos das potências seguintes da incógnita, $\Delta^Y\Delta$ (quadrado-cubo), ΔK^Y (quadrado-cubo) e $K^Y K$ (cubo-cubo). [...]. (EVES, 2002, p.209).

Ainda conforme o autor, Diofanto utilizava para representar o sinal de menos algo parecido com um V invertido com uma bissetriz, e para a adição usava a justaposição. Neste caso da justaposição utilizamos na multiplicação e que, como visto anteriormente, é uma das dificuldades dos alunos levantada por Booth (1995), uma vez que eles confundem 2 + x com 2x.

Eves (2002) traz uma situação de como é a Álgebra apresentada por Diofanto na forma sincopada. "Assim, $x^3 + 13x^2 + 5x$ e $x^3 - 5x^2 + 8x - 1$ se escreveriam, respectivamente, $K^Y \alpha \Delta^Y \iota\gamma\varsigma\varepsilon$ e $K^Y \alpha\varsigma\eta \Lambda \Delta^Y \varepsilon M \alpha$".

Silva (2015) relata que alguns pesquisadores como Baumgart (1992) e Eves (2002) verificam que, por mais que os gregos tivessem um contato com os símbolos algébricos, eles recorriam mais às técnicas geométricas. Ainda conforme a autora, os livros didáticos atuais vêm fazendo o uso da geometria para tornar significativos os conteúdos algébricos.

Sobre a civilização árabe, Ribeiro e Cury (2015) mencionam que eles utilizavam a matemática para resolver problemas relacionados ao comércio, à arquitetura, à astronomia, à geografia e à ótica. Um dos nomes que se destacam entre os povos árabes é o de *Abu 'Abdllãh Muhammad ibn Musa Al-Khwarizmi* a partir do qual, segundo Silva (2015), surgiu a palavra Álgebra entre 813 e 833 d.C., em uma obra conhecida por *Hisabaljarbw 'al-mugabalah*, que mais tarde foi chamada de *Al-jarb* entre os matemáticos e, após algumas traduções, passou para Álgebra.

Ribeiro e Cury (2015) mencionam em sua pesquisa, como *Al-Khwarizmi* propõe resolver por meio de algumas regras equações de 1º e 2º graus.

> A Álgebra de Al-Khwarizmi deixou-nos, como herança, duas expressões que tomaram significados muito fortes e presentes na resolução de equações: al-jabr e al Muqabalah. Al-Jarb é a operação de adicionar a ambos os membros da equação termos iguais; enquanto al Muqabalah é a operação que reduz ou elimina ambos os membros da igualdade. (RIBEIRO; CURY, 2015, p. 33).

Silva (2015) fundamentada em Baumgart (1992) traz o enunciado de uma equação e de sua solução, mostrando como a Álgebra era trabalhada no livro *Al-jarb*.

> Qual deve ser o valor de um quadrado que, quando vinte e um somados a ele, torna-se igual ao equivalente a dez raízes daquele quadrado? Solução: divida ao meio o numero de raízes; a metade é cinco. Multiplique este número por si mesmo; o produto é 25. Subtraia deste o vinte e um que está ligado ao quadrado; o resto é quatro. Extraia sua raiz, ela é dois. Subtraia isto da metade das raízes, que é cinco, o resto é três. Esta é a raiz do quadrado que você procura e o quadrado é nove. Ou você pode somar a raiz à metade das raízes; a soma é sete; essa é a raiz do quadrado que você, procura, e quadrado é mesmo quarenta e nove. (BAUGART, 1992. p. 32, *apud* SILVA, 2015, p. 105).

Ao traduzirmos esse enunciado para nossa linguagem simbólica, teremos:

$$x^2 + 21 = 10x$$

$$x = \frac{10}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-10}{2}\right)^2 - 21}$$

$$x = 5 \pm \sqrt{4}$$

$$x = 3 ou 7$$

Conhecer esse registro nos possibilita enxergar a evolução da Álgebra, bem como verificar o que significa cada símbolo.

O uso da aritmética é bem presente na civilização indiana na qual, conforme Ribeiro e Cury (2015), muitos problemas eram resolvidos de forma intuitiva com o auxílio da aritmética. Nesta civilização, destaca-se a contribuição de dois matemáticos: *Brahmagupta,* em 628 d.C. e *Bhaskara*, 1150 d.C. (SILVA, 2015). *Bhaskara* ficou sendo um dos mais importantes matemáticos hindus por ter conseguido preencher as lacunas da obra de *Brahmagupta*, visto que chegou à fórmula resolutiva da equação polinomial do 2º grau. No Brasil, essa fórmula é muito conhecida pela fórmula de *Bhaskara*. $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2a}$

Baumgart (1992, *apud* Silva, 2015, p. 107) comenta que "os hindus resolviam equações quadráticas pelo método de completar quadrados e aceitavam números negativos e raízes irracionais", chegando a identidades $\sqrt{a \pm b} = \sqrt{\frac{(a + \sqrt{a^2 - b})}{2}} \pm \sqrt{\frac{(a - \sqrt{a^2 - b})}{2}}$ que, conforme Riberio e Cury (2015), podem ser empregadas para encontrar a raiz quadrada de um número racional.

De acordo com os autores, tanto os hindus quanto os árabes demostraram em suas soluções de problemas uma predominância para os cálculos algébricos.

Na obra de Ribeiro e Cury (2015), encontramos que houve na Europa, matemáticos e estudiosos que contribuíram significativamente para o desenvolvimento da Álgebra, como podemos destacar Tartaglia e Cardano que descobriram uma solução algébrica para equação cúbica $x^3 + px^2 = n$, porém Tartaglia contesta Cardano de tê-lo copiado. Assim, um dos que mais se evidencia por sua participação no percurso da evolução algébrica na Europa é François Viete que, segundo o autor, inicialmente atribuiu às vogais representar números supostamente conhecidos, e as consoantes para números desconhecidos. Viéte, diante de suas observações, ficou conhecido como “O pai da Álgebra”. (GUELLI, 1988, *apud* SILVA, 2015. p. 111). Temos também a contribuição de Renè Descartes que deu prosseguimento e aprimoramento aos símbolos algébricos (RIBEIRO; CURY, 2015; SILVA, 2015), além de desenvolver um método para resolver equações, isso devido ao avanço da linguagem algébrica.

2.3 Concepções de Álgebra e de Educação Algébrica

O modo como os professores ensinam Álgebra pode estar muitas vezes relacionado às suas concepções sobre o que é Álgebra. Concepções essas que foram sendo construídas ao longo de sua vida escolar e na sua formação acadêmica e que acaba voltando para sala de aula, como comenta Sousa, Panossian e Cedro (2014).

> Considerando que o ensino de Álgebra está diretamente ligado à concepção de álgebra dos professores, pesquisadores como Fiorentini, Miguel e Miorin (1993) e Usiskin (1988 [1995]) sistematizam tais concepções e nos mostram o quanto elas influenciam o ensino de álgebra, gerando diferentes concepções de educação algébrica. (SOUSA; PANOSSIAN; Cedro, 2014, p. 23).

Os PCN (BRASIL, 1997) também nos mostram a relevância que tem dentro do ensino de Matemática conhecer as concepções do professor em relação aos conteúdos matemáticos e também as concepções de educação. Assim, é de fundamental importância para o professor identificar as principais características dessa ciência, de seus métodos, de suas ramificações e aplicações “como também ter clareza de suas próprias concepções sobre a Matemática, uma vez que, à prática em sala de aula, as escolhas pedagógicas, a definição dos objetos e conteúdos de ensino e as formas de avaliação que estão intimamente ligadas a essas concepções”. (BRASIL, 1997, p.29).

Para que possamos compreender melhor como algumas concepções de Álgebra e Educação Algébrica influenciam no ensino de Álgebra, faremos uma explanação dessas concepções na visão de pesquisadores como Usiskin (1995); Fiorentini, Miguel e Miorin (1993); Lins e Gimenez (1997) e Sousa, Panossian e Cedro (2014), que abordam essa temática e nos ajudam a entender como essas concepções direcionam o trabalho dos professores em sala de aula e, como consequência, a aprendizagem dos alunos, além de que faremos uma reflexão de como essas concepções poderão nos ajudar na nossa postura enquanto professor e pesquisador em sala de aula.

2.3.1 Concepções de Álgebra e Educação Algébrica, conforme Usiskin (1995)

Ao falarmos em concepção de Álgebra, Usiskin (1995) caracteriza a Álgebra de acordo com a compreensão do conceito de variável. Conforme o autor, os alunos desconhecem os papéis que a variável pode assumir, vendo-a apenas como uma representante numérica e que só se apresenta como incógnita. Para ele, "tentar enquadrar a ideia de variável numa única concepção implica uma supersimplifícação que, por sua vez, distorce os objetos da álgebra." (USISKIN, 1995, p. 12).

Para a compreensão da Álgebra, tomando como base as variáveis, Usiskin (1995) apresenta quatro concepções que vão nortear as finalidades do ensino de álgebra, uma vez que, para o autor, "as finalidades da álgebra são determinadas por, ou relacionam-se com, concepções diferentes da álgebra que correspondem à diferente importância relativa dada aos diversos usos das variáveis". (USISKIN, 1995, p. 13)

- *Concepção 1 (Álgebra como aritmética generalizada):* Nesse contexto a variável é utilizada para generalizar padrões (SOUSA; PANOSSIAN; CEDRO, 2014), ou seja, o aluno observa uma dada situação em aritmética e generaliza.
  Ex: $6 + 9 = 9 + 6$, ou seja, temos que $a + b = b + a$, temos aqui a propriedade comutativa.
- *Concepção 2 (A álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas):* Essa situação coloca a variável no papel de incógnita. O aluno se depara com uma situação muitas vezes contextualizada, a qual ele terá que traduzir para uma linguagem matemática, encontrando uma expressão algébrica e que, depois de alguns procedimentos, ele encontrará o valor numérico. Usiskin (1995) nos chama a atenção que nesta situação muitas vezes os alunos não resolvem por meio de expressões algébricas, eles recorrem à aritmética para encontrarem a solução.
  Ex: O dobro de um número mais nove resulta 20. Qual é esse número?
  O autor coloca que neste tipo de situação o aluno tem que simplificar e resolver.
- *Concepção 3 (Álgebra como estudo de relações entre grandezas):* A variável aqui é trazida como argumento (domínio de uma função) ou parâmetro (número que depende de outro). Neste caso a variável realmente irá variar.

Ex: y= x + 3, temos uma função, em que para cada valor atribuído a x, encontraremos um valor para o y.

- *Concepção 4 (Álgebra como estudo das estruturas):* Essa situação traz a variável como símbolo arbitrário, uma vez que não se encaixa nas concepções anteriores. Segundo Usiskin (1995), é nos cursos de ensino superior que temos mais o estudo da variável como estudo das estruturas, o qual envolve estruturas de grupos, anéis, corpos e espaços. Reconhecemos essa concepção quando trabalhamos com polinômios, a partir do qual faremos uso de propriedades matemáticas para manipular, justificar.

  Ex: Fatorar a expressão $2x^2 + 6x - x^2$

Usiskin (1995) nos leva a uma reflexão acerca da importância de conhecermos as diferentes concepções da álgebra, visto que influencia na compreensão de como a Álgebra é apresentada.

> Já não cabe classificar a álgebra apenas como aritmética generalizada, pois ela é muito mais que isso. A álgebra continua sendo um veículo para a resolução de certos problemas, mas também é mais do que isso. Ela fornece meios para se desenvolverem e se analisarem relações. E é a chave para a caracterização e a compreensão das estruturas matemáticas. (USISKIN, 1995, p. 21).

2.3.2 Concepções de Álgebra e Educação Algébrica, conforme Fiorentini; Miorim e Miguel (1993)

Os autores Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) abordam as concepções de Álgebra e Educação Algébrica mediante o desenvolvimento histórico da matemática. Eles classificam as concepções de Álgebra como:

- Processológica: A Álgebra é tida como um conjunto de processos, de técnicas algorítmicas que, mediante uma sequência de passos, consegue-se resolver determinados problemas, desenvolvendo um pensamento sem que necessite de uma linguagem específica para expressar.
- Linguística-estilística: Ela apresenta e enfatiza uma linguagem específica para que possa expressar o pensamento algébrico. Nesta concepção, podemos observar que o pensamento algébrico só se manifesta em consequência à expressão da linguagem e da manipulação dos símbolos.
- Linguístico-sintático-semântica: Podemos dizer que nesta concepção a linguagem também é enfatizada, porém ela tem características mais rigorosas do que a

linguística-estilística, pois existe uma preocupação em tornar significativo cada termo da expressão.

> É apenas quando os signos dessa linguagem específica adquirem o caráter de símbolos, ou seja, é apenas quando se estabelece, ao nível semântico, a sutil e fundamental distinção entre o uso da letra para representar genericamente quantidades discretas ou contínuas, [...]. É a distinção semântica possibilitando o desenvolvimento dessa linguagem ao nível sintático e ampliando, assim, o seu poder instrumental. (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993, p.82-83).

- Linguístico-postulacional: Essa concepção tem as mesmas características que a linguístico-sintático-semântica, uma vez que concebe a Álgebra com uma linguagem simbólica, entretanto ela vai estender “o domínio da Álgebra a todos os campos da Matemática”. (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993, p.83).

Por meio dessas concepções de Álgebra é que os autores apresentam as concepções para Educação Algébrica, que também percorre o desenvolvimento do ensino da Álgebra no Brasil e que ainda tem uma forte influência nas salas de aula.

- Linguístico-pragmática: Ela predominou entre os séculos XIX e XX, com ênfase na linguagem, a qual os alunos teriam que dominar. O ensino era voltado para manipulação e transformação dos símbolos algébricos. Acreditava-se que, quanto mais resolvessem questões mesmo que mecanicamente, conseguiriam adquirir habilidades para se resolver posteriormente alguns problemas, os quais em sua maioria eram artificiais, sem relevância; apenas para que os alunos conseguissem expressar algebricamente o pensamento. Para resolver esses problemas, bastava seguir uma sequência de passos que chegaria à solução.
- Fundamentalista-estrutural: Surge com o movimento da Matemática Moderna e tem como base a concepção linguística postulacional da Álgebra. Nessa concepção de Educação, o aluno teria que justificar cada passagem do transformismo algébrico, pois desta forma acreditava-se que haveria uma compreensão. De acordo com Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), com essa postura de ensino houve uma reorganização dos conteúdos, de maneira que os tópicos algébricos fossem colocados posteriormente aos conteúdos que pudessem justificar cada passagem.
- Fundamentalista-analógica: Essa concepção seria a junção das duas anteriores, uma vez que procurava unir o caráter estrutural da álgebra, ou seja, as técnicas de manipulação dos símbolos, a valorização da linguagem com a parte fundamentalista, que, por sua vez, procurava justificar cada passagem. No entanto, essa justificação

passaria a acontecer de forma analógica, isto é, com o auxílio da geometria, que trabalharia o visual com os alunos.

Segundo os autores, essas três concepções de Educação Algébrica acabam reduzindo a Álgebra a manipulação de símbolos e a valorização da linguagem, não colaborando para uma construção do pensamento algébrico.

Fiorentini, Miorim e Miguel (1993, p. 89) defendem outra concepção que possibilite o desenvolvimento do pensamento algébrico, pois, para eles, “a primeira etapa da Educação Algébrica deve ser o trabalho com situações problemas”. Com isso surge uma quarta concepção, a qual se utiliza de situações problemas e que busca uma relação dialética entre o pensamento e a linguagem. Os autores indicam três etapas que poderão seguir. A ordem que elas aparecem não precisa seguir como regra, podendo fazer em qualquer ordem. A primeira corresponde ao aluno analisar uma situação problema e chegar a uma expressão algébrica. Na segunda etapa, o aluno fará o inverso: sairá da expressão algébrica e lhe atribuirá significado. E, a última etapa corresponde ao transformismo o qual, por meio de manipulação, o aluno chegará a expressões equivalentes.

2.3.3 A concepção de Álgebra e Educação Algébrica, por Lins e Gimenez (1997)

De acordo com os autores, não há um consenso a respeito do que seja pensar algebricamente. Para eles, o que há é um consenso a respeito das divisões na álgebra, como: equações, cálculo literal, funções, expressões algébricas, entre outros.

Lins e Gimenez (1997, p.137) também comentam que a “álgebra consiste em um conjunto de afirmações para as quais é possível produzir significados em termos de números e operações aritméticas, possivelmente envolvendo igualdade ou desigualdade”. Logo, eles defendem que a atividade algébrica precisa produzir significado para o estudo da álgebra.

Segundo os autores, ao ser elaborado um projeto para atender a Educação Algébrica, é necessário compreender dois objetivos centrais: 1) Permitir que os alunos sejam capazes de produzir significados para a Álgebra; 2) Permitir que os alunos desenvolvam a capacidade de pensar algebricamente.

Observamos que, para os autores, a Álgebra deveria ser trabalhada juntamente com a aritmética, pois é uma ideia “infundada” considerar que a álgebra só deve vir após o ensino de aritmética. Eles sustentam que o ensino da álgebra poderia ser iniciado mais cedo, pois esperar que os alunos adquiram maturidade para então terem o contato com a álgebra não garante um bom desenvolvimento.

Vemos que Lins e Gimenez (1997) relatam que a álgebra ainda representa um momento de exclusão no processo de ensino aprendizagem, e que é preciso interligar os conteúdos tanto da educação algébrica quanto de aritmética com o mundo fora da escola.

Para que o ensino venha se tornar mais atrativo e significativo para os alunos, é necessário que os professores estejam engajados em trabalhar com atividades que produzam significados e com isso alcance uma aprendizagem satisfatória. Porém, o que vemos são professores, muitas vezes, que chegam à escola básica, preocupados apenas com sequências de conteúdos que irão ministrar, sem observar se ocorreu de fato a compreensão do que foi ensinado por parte do aluno. É fundamental que os professores se adaptem e aceitem as alternativas de ensino, não ficando apenas submissos à visão dos livros didáticos.

Lins e Gimenez (1997) trazem ainda algumas concepções para educação algébrica que influenciam o ensino em sala de aula.

- Concepção Letrista: É a álgebra voltada para o "cálculo com letras". É uma das concepções mais comuns que ainda se perdura nos livros didáticos, uma vez que a atividade algébrica é muito voltada para a manipulação dos símbolos sem significado.
- Concepção Facilitadora: É quando se utiliza de materiais concretos como balanças e área de figuras geométricas, para tornar o ensino mais compreensivo para os alunos. Porém, os autores relatam que, por mais que se faça uso desses materiais, os alunos não conseguem fazer uma associação do "concreto", com o "formal" da álgebra. Por isso, Lins e Gimenez (1997, p. 108) expressam que "as abordagens facilitadoras baseiam-se, então, na ideia de que uma certa estrutura que é posta em jogo na manipulação de concretos é, depois, por um processo de abstração, transformada em formal."
- Modelagem Matemática: nessa concepção, Lins e Gimenez (1997) comentam que o estudo toma como ponto de partida o "concreto", porém não o "concreto" palpável, facilitador visto anteriormente, mas o concreto real, ou seja, ele aborda um trabalho voltado para o cotidiano, para ser investigado, discutido, levando o aluno a interagir de modo que aprenda o conteúdo a ponto que aplique no mundo fora da escola. Os autores relatam que "de acordo com essas perspectivas, a educação algébrica se dá na medida em que a produção de conhecimento algébrico serve ao propósito de iluminar ou organizar uma situação, como uma ferramenta e não como objeto primário do estudo". (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 109).

2.3.4 Concepções de Álgebra e Educação Algébrica, conforme Sousa; Panossian e Cedro (2014).

As concepções de Álgebra e Educação Algébrica que os professores têm influenciam diretamente no ensino, como comentam os autores Sousa, Panossian e Cedro (2014). Assim como mencionamos anteriormente, as concepções sobre Álgebra e Educação Algébrica na visão de autores como Usiskin (1995); Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) e as de Lins e Gimenez (1997). Sousa, Panossian e Cedro (2014) também fazem uma abordagem sobre essas concepções, porém os autores trazem outra concepção sobre o ensino de álgebra. Eles defendem que a Educação Algébrica não deve ser voltada apenas em ensinar os conceitos algébricos de maneira formal, como também trazem que esses conceitos não devem ser aplicados apenas de forma objetiva.

Para tanto, os autores propõem um ensino tomando como ponto de partida o estudo de conceitos de movimento, fluência, número e álgebra não simbólica; variável e campo de variação presentes na vida fluente, uma vez que eles têm como base de entendimento que a Álgebra descreve os movimentos da prática social. Para a compreensão dessa forma de trabalho, os autores se sustentam na teoria do movimento lógico e histórico. Ou seja, esse movimento é histórico, pois ao observamos as mudanças que ocorreram na linguagem algébrica, tendo a participação de várias civilizações, conseguimos analisar a etapas de desenvolvimento da álgebra, e é lógico pela forma como o pensamento realiza uma reflexão sobre o histórico. (SOUSA, 2018).

Os autores destacam que:

> É necessário então estudar o movimento histórico do conhecimento algébrico e manter o equilíbrio com o seu movimento lógico, pois não se objetiva, aqui, apenas considerar a contribuição aleatória destes elementos, histórico e lógico, para a formação psíquica dos sujeitos, mas sim para a formação de sujeitos sociais, a fim de se humanizar, por meio dos conhecimentos, incluindo-se aí os matemáticos. (SOUSA; PANOSSIAN; CEDRO, 2014, p. 44).

Podemos observar então que é preciso trabalhar o formalismo dos conceitos algébricos, ou seja, a utilização de técnicas de resolução, o trabalho com a linguagem algébrica. Além disso, se faz necessário que sejam trabalhados esses conceitos de forma histórica, observando as contribuições das civilizações, mostrando que os conceitos algébricos foram sendo construídos à medida que o homem foi evoluindo e, assim, poder proporcionar uma real compreensão destes conceitos.

Essa abordagem apresentada por Sousa, Panossian e Cedro (2014) se diferencia das anteriores por considerar que, durante a construção do pensamento algébrico, as conexões internas ou ainda os nexos conceituais do pensamento algébrico, os quais são constituídos de fluência, variável e campo de variação, seriam como elos que podem ligar os conceitos que historicamente foram construídos pelas diversas civilizações. A exemplo do caso da Álgebra em que os conceitos foram sendo construídos ao passo que o homem foi evoluindo. Portanto, os autores afirmam que os nexos conceituais da Álgebra são lógicos e históricos e que se apresentam no movimento do pensamento, tanto daqueles que ensinam, quanto daqueles que aprendem. (SOUSA, 2018).

Sousa, Panossian e Cedro (2014, p. 136) relatam que as "dificuldades apresentadas pelos estudantes com o conhecimento algébrico não estão relacionadas apenas às especificidades destes, mas também aos processos de generalização, abstração e formação de conceitos", e que estes processos deveriam ser construídos teoricamente (movimento lógico-histórico), não só empiricamente (formalização da álgebra).

Compreender o movimento lógico e histórico dos conceitos algébricos pode auxiliar ao professor reconhecer as dificuldades dos estudantes. Portanto, é necessário que o professor conheça as dificuldades deste movimento do pensamento dos estudantes em se apropriar da linguagem algébrica, uma vez que esta foi construída ao longo de séculos por diversas civilizações. Deste modo, o professor deve trabalhar essas dificuldades tomando como base o movimento lógico e histórico da álgebra, e assim tornar o ensino mais compreensivo.

Os autores mostram que, para o professor conseguir perceber o movimento do pensamento dos estudantes, é preciso trabalhar com atividades adequadas e orientadas. Sousa, Panossian e Cedro (2014) mencionam que Moura (1996) chama de atividade orientada aquela "estruturada de forma que os indivíduos possam interagir entre eles, mediados por um conteúdo, negociando significados e tendo como fim a solução coletiva de uma situação-problema" (SOUSA; PANOSSIAN; CEDRO, 2014, p. 132). Os autores comentam que na situação-problema está presente o caráter objetivo do lógico-histórico e que a partir dela pode desencadear todo processo educativo.

Assim, constatamos que, para Sousa, Panossian e Cedro (2014), a Educação Algébrica ao ser estudada pelo movimento lógico e histórico, sendo este ensino mediado pela elaboração de situações problemas, favorece não só ao aluno, mas também ao professor, uma melhor compreensão de todo o movimento do pensamento algébrico, uma vez que será possível observar todo contexto histórico da Álgebra, desde a Álgebra não simbólica (palavras, figuras) até a Álgebra simbólica (letras).

2.4 Álgebra nos documentos oficiais brasileiros: Parâmetros curriculares Nacionais (PCN) e Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

Neste tópico faremos uma descrição de como o ensino de Álgebra é abordado nos documentos oficiais brasileiros: os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de 1997 e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) de 2017. Observando como abordam os conteúdos relacionados à Álgebra e o que diferencia um documento do outro.

2.4.1 Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)

Sabemos que os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) foram elaborados na década de 90, procurando atender às diversidades (regional, cultural e política) do país e de cada região.

> Os Parâmetros Curriculares Nacionais foram elaborados procurando, de um lado, respeitar diversidades regionais, culturais, políticas existentes no país e, de outro, considerar a necessidade de construir referências nacionais comuns ao processo educativo em todas as regiões brasileiras. Com isso, pretende-se criar condições, nas escolas, que permitam aos nossos jovens ter acesso ao conjunto de conhecimentos socialmente elaborados e reconhecidos como necessários ao exercício da cidadania. (BRASIL, 1998, p. 5).

Os PCN organizam o ensino fundamental em quatro Ciclos, e cada ciclo contempla dois anos do Ensino Fundamental. O 1º e 2º Ciclos constam na primeira parte do documento, elaborado em 1997, e correspondem às séries 1ª e 2ª séries (1º Ciclo) e 3ª e 4ª séries (2º Ciclo). Já na segunda parte, publicada em 1998, estão os 3º e 4º ciclos que correspondem à 5ª e 6ª séries (3º Ciclo) e 7ª e 8ª séries (4º Ciclo).

O documento trabalha os conteúdos matemáticos dentro de quatro blocos temáticos, sendo eles: Números e operações (Aritmética e Álgebra); Espaço e Forma (Geometria), Grandezas e medidas (relacionando Aritmética, Geometria e Álgebra) e Tratamento da informação (Estatística). (BRASIL, 1998).

Ao analisarmos os PCN, em relação à Álgebra, podemos constatar que ela está inserida no bloco de Números e operações, porém ocupa um espaço bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização, além de possibilitar que o aluno consiga usar para resolver problemas (BRASIL, 1998). No entanto, esse mesmo documento relata que, por mais que o professor dê toda ênfase nos conteúdos relacionados à Álgebra, os alunos não conseguem atingir nem 40% de acertos nos itens referentes aos tópicos de álgebra. (BRASIL, 1998; BONADIMAN, 2007)

O documento ainda menciona que os professores, para fazer com que os alunos compreendam os conteúdos algébricos, acabam aumentando ainda mais o tempo direcionado a esses conteúdos, deixando muitas vezes de ensinar conteúdos de geometria e de outros ramos que não estão diretamente ligados à Álgebra. De acordo com Brasil (1998), os professores acabam passando exercícios meramente mecânicos, que não possibilitam ao aluno uma aprendizagem compreensiva e que favoreçam o pensamento algébrico.

Conforme Brasil (1998), os professores, para tornar a aprendizagem mais significativa, fazem remanejamento de conceitos que só seriam abordados no ensino médio. Para o documento, é preciso ter clareza da importância do currículo de Álgebra no ensino de Matemática, como também verificar como o aluno compreende esses conteúdos.

Para que o aluno possa compreender os conteúdos e tornar significativo o que está sendo aprendido, os PCN (BRASIL, 1998) propõem que sejam colocadas situações que levem os alunos a construírem noções algébricas pela observação de regularidades em tabelas e gráficos, estabelecendo relações mais eficazes do que desenvolver o estudo da Álgebra apenas enfatizando as manipulações com expressões e equações de uma forma mecânica.

Os PCN (BRASIL, 1998) abordam de forma significativa as diferentes interpretações que a Álgebra pode assumir, dependo da função da letra.

Figura 2-Dimensões da Álgebra conforme os PCN

Fonte: Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998, p.116).

É possível observar que a maneira que o documento aborda os significados da Álgebra vai ao encontro das ideias que Usiskin (1995) apresenta. Porém, os professores em geral não trabalham todas essas concepções, pois privilegiam mais o cálculo algébrico, fazendo com que os alunos saiam do fundamental sem conhecerem as funções da variável, uma vez que para a maioria a letra só assume o papel de incógnita.

Como os PCN dividem as séries por ciclo, com a finalidade de evitar uma excessiva fragmentação de objetivos e conteúdos, viabilizando uma abordagem menos parcelada dos conhecimentos (BRASIL, 1997), os conteúdos e seus objetivos em relação ao ensino de Álgebra estão divididos por ciclos e se apresentam nos ciclos três e quatro, uma vez, que neste documento, o ensino de Álgebra começa a ser trabalhado mais precisamente na 6ª série (atual 7º ano). O quadro 1 apresenta os objetivos em relação ao que o ensino de Álgebra deve visar nesses dois ciclos.

Quadro 1– Objetivos propostos para o ensino de Álgebra.

3º Ciclo (5ª e 6ª séries)	➢ Reconhecer que representações algébricas permitem expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas, traduzir situações-problema e favorecer as possíveis soluções; ➢ Traduzir informações contidas em tabelas e gráficos em linguagem algébrica e vice-versa, generalizando regularidades e identificar os significados das letras; ➢ Utilizar os conhecimentos sobre as operações numéricas e suas propriedades para construir estratégias de cálculo algébrico
4º Ciclo (7ª e 8ª séries)	➢ Produzir e interpretar diferentes escritas algébricas, expressões, igualdades e desigualdades identificando as equações, inequações e sistemas; ➢ Resolver situações-problema por meio de equações e inequações do primeiro grau, compreendendo os procedimentos envolvidos; ➢ Observar regularidades e estabelecer leis matemáticas que expressem a relação de dependência entre variáveis.

Fonte: Adaptado de Brasil (1998, p. 64; p. 81).

Em relação aos conteúdos, Brasil (1998) comenta que eles, ao serem trabalhados de forma variada, favorecem ao aluno uma aprendizagem significativa, como é o caso dos conteúdos relacionados à Álgebra, os quais os PCN propõem que sejam trabalhados através de situações que proporcionem ao aluno desenvolver o pensamento algébrico. E, para que seja possível desenvolver esse pensamento, é necessário que sejam trabalhadas atividades que levem os alunos a:

- Identificar padrões;
- Generalizar situações;
- Observar conteúdos em geometria e encontrar fórmulas que sejam referentes às formas geométricas e fazer generalizações e observar regularidades.

É fundamental que o aluno também saiba fazer os cálculos algébricos, pois, conforme os PCN (BRASIL, 1998, p. 118), "esse trabalho é significativo para que o aluno perceba que a transformação de uma expressão algébrica em outra equivalente, mais simples, facilita encontrar a solução de um problema".

Para tornar os conteúdos de álgebra mais compreensíveis para o aluno, os PCN propõem o ensino voltado para situações problemas, uma vez que:

> As atividades algébricas propostas no ensino fundamental devem possibilitar que os alunos construam seu conhecimento a partir de situações-problemas que confiram significados à linguagem, aos conceitos e procedimentos referentes a esse tema, favorecendo o avanço do aluno quanto as diferentes interpretações das letras. (BRASIL, 1998, p. 120).

No entanto, o documento alerta que no 3º ciclo trabalhem os conteúdos relacionados à Álgebra de maneira que os alunos, por meio de observações de padrões e sequências numéricas, possam generalizar e compreender expressões algébricas, possibilitando explorar as primeiras noções de Álgebra. (BRASIL, 1998). Os PCN ainda trazem que, neste ciclo, devido à complexidade dos conceitos e procedimentos algébricos, é desejável que o aprofundamento em relação às operações algébricas e às equações sejam trabalhados no 4º ciclo. Logo, para os PCN é suficiente que no 3º ciclo:

> Os alunos compreendam a noção de variável e reconheçam a expressão algébrica como uma forma de traduzir a relação existente entre a variação de duas grandezas. É provável que ao explorar situações-problema que envolvam variação de grandezas o aluno depare com equações, o que possibilita interpretar a letra como incógnita. Nesse caso, o que se recomenda é que os alunos sejam estimulados a construir procedimentos diversos para resolvê-las, deixando as técnicas convencionais para um estudo mais detalhado no quarto ciclo. (BRASIL, 1998, p. 68).

No 4º ciclo o trabalho com Álgebra é mais aprofundado, porém não se deve abandonar os trabalhos com a Aritmética. Cabendo ao professor trabalhar com os alunos atividades que possibilitem analisar, interpretar, formular e resolver situações problemas tanto numéricos como algébricos. (BRASIL, 1998).

Sabendo que o 4º Ciclo tem como ponto de partida a "pré-álgebra" trabalhada no ciclo anterior, ela não pode ser trabalhada de forma mecânica, mas explorada por meio de jogos, problemas, generalizações e representações matemáticas. Assim, o trabalho com Álgebra é fundamental para que os alunos compreendam os conceitos de variável e o de função; a representação de fenômenos na forma algébrica e gráfica, bem como a sintaxe da Álgebra. (BRASIL, 1998).

2.4.2 Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

A Base Nacional Comum Curricular para o Ensino Fundamental foi homologada em dezembro de 2017. Trata-se de "um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica". (BRASIL, 2017, p. 5).

De acordo com o documento, ao longo da vida escolar do aluno (Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio), ele deve desenvolver competências que assegurem a formação humana de forma integral, contribuindo para construção de uma sociedade mais justa, democrática e inclusiva (BRASIL, 2017).

Na parte do documento destinado à área de Matemática, a BNCC defende que o Ensino Fundamental deve ter o compromisso com o letramento matemático, "definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente" (BRASIL, 2017, p. 266) e que essas habilidades devem ser desenvolvidas "com base na análise de situações da vida cotidiana, de outras áreas do conhecimento e da própria Matemática" (BRASIL, 2017, p. 266). Sendo elas, conforme a BNCC, trabalhadas por meio de resolução de problemas, de investigação, do desenvolvimento de projetos e da modelagem matemática.

A BNCC foi organizada levando em consideração os diferentes campos que compõem a Matemática, reunindo um conjunto de ideias fundamentais que produzem articulações, entre eles: equivalência, ordem, proporcionalidade, interdependência, representação, variação e aproximação. Sendo elas fundamentais para o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos. (BRASIL, 2017). Com isso, a BNCC propõe cinco unidades temáticas: Números; Álgebra; Geometria; Grandezas e Medidas e Tratamento da informação.

No tocante à Unidade temática Álgebra, o documento traz que o objetivo de seu ensino é o desenvolvimento do pensamento algébrico e, para acontecer esse desenvolvimento, os alunos precisam:

> Identificar regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, bem como criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas, para resolver problemas por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados. (BRASIL, 2017, p. 270).

Nesta unidade temática, as ideias fundamentais da Matemática são: equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade.

Conforme a BNCC (BRASIL, 2017), o trabalho com Álgebra precisa fazer parte do ensino e aprendizagem desde os anos inicias do Ensino Fundamental, com as ideias de regularidade, generalização de padrões e as propriedades da igualdade, porém esse trabalho com a Álgebra nesses anos iniciais do Ensino Fundamental não deve ser com a utilização de letras, e sim com números para que eles possam ir desenvolvendo o pensamento algébrico por meio das ideias propostas. Já nos anos finais do Ensino Fundamental, o estudo será aprofundado e ampliado, levando o aluno a compreender os diferentes significados das variáveis em uma expressão, estabelecer uma generalização de uma propriedade, investigar uma sequência numérica, determinar o valor numérico de uma expressão, resolver problemas com equações e inequações. (BRASIL, 2017).

A BNCC (BRASIL, 2017) traz o estudo da Álgebra para o Ensino Fundamental divido por ano escolar, ou seja, do 1º ano ao 9º ano, com seus objetos de estudo e as habilidades a serem trabalhadas. Conforme o quadro 2, as ideias inicias (regularidade, generalização de padrões e propriedades da igualdade) trabalhadas nos Anos iniciais do Ensino Fundamental serão aprofundadas e ampliadas, de maneira mais formal a partir do 6º ano do Ensino Fundamental.

Quadro 2-Álgebra para os Anos Finais do Ensino Fundamental.

Anos Finais do Ensino Fundamental	Objetos de Conhecimento	Habilidades
		(EF06MA14) Reconhecer

6º Ano	Propriedades da igualdade	que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas.
	Problemas que tratam da partição de um todo em duas partes desiguais, envolvendo razões entre as partes e entre uma das partes e o todo.	(EF06MA15) Resolver e elaborar problemas que envolvam a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, envolvendo relações aditivas e multiplicativas, bem como a razão entre as partes e entre uma das partes e o todo.
7º Ano	Linguagem algébrica: variável e incógnita.	(EF07MA13) Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita. (EF07MA14) Classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na matemática, mas também nas artes e na literatura. (EF07MA15) Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.
	Equivalência de expressões algébricas: identificação da regularidade de uma sequência numérica.	(EF07MA16) Reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes.
	Problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais.	(EF07MA17) Resolver e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas.
		(EF07MA18) Resolver e elaborar problemas que

	Equações polinomiais do 1º grau	possam ser representados por equações polinomiais de 1o grau, redutíveis à forma ax + b = c, fazendo uso das propriedades da igualdade.
8º Ano	Valor numérico de expressões algébricas.	(EF08MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações.
	Associação de uma equação linear de 1º grau a uma reta no plano cartesiano.	(EF08MA07) Associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano
	Sistema de equações polinomiais de 1º grau: resolução algébrica e representação no plano cartesiano. .	(EF08MA08) Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1o grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso.
	Equação polinomial do tipo $ax^2 = b$.	(EF08MA09) Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$.
	Sequências recursivas e não recursivas.	(EF08MA10) Identificar a regularidade de uma sequência numérica ou figural não recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números ou as figuras seguintes. (EF08MA11) Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes.
	Variação de grandezas: diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais.	(EF08MA12) Identificar a natureza da variação de duas grandezas, diretamente, inversamente proporcionais ou não proporcionais, expressando a relação existente por meio de sentença algébrica e

		representá-la no plano cartesiano. (EF08MA13) Resolver e elaborar problemas que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, por meio de estratégias variadas.
9º Ano	Funções: representações numérica, algébrica e gráfica.	(EF09MA06) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.
	Razão entre grandezas de espécies diferentes.	(EF09MA07) Resolver problemas que envolvam a razão entre duas grandezas de espécies diferentes, como velocidade e densidade demográfica.
	Grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais. .	(EF09MA08) Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.
	Expressões algébricas: fatoração e produtos notáveis. Resolução de equações polinomiais do 2º grau por meio de fatorações.	(EF09MA09) Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.

Fonte: Adaptado (BRASIL, 2017, p. 302; 306; 312; 316).

De acordo com o documento da BNCC, para o desenvolvimento dessas habilidades é preciso levar em consideração as experiências e os conhecimentos matemáticos vivenciados pelos alunos, assim como fazer uso da linguagem matemática, por meio da linguagem simbólica, da representação e da argumentação. Contudo, é necessário o professor recorrer a diferentes recursos didáticos.

Como apresentado anteriormente, é possível observar que entre os documentos, PCN (BRASIL, 1998) e BNCC (BRASIL, 2017), que norteiam o ensino de Matemática no Brasil, constata-se algumas mudanças referentes ao trabalho com Álgebra, como vemos no quadro 3.

Quadro 3 - Comparação entre os PCN e a BNCC quanto ao ensino de Álgebra.

	PCN	BNCC
Quanto ao bloco temático	Números e operações	Álgebra
Quanto à finalidade	Desenvolver e exercitar a capacidade de abstração e generalização para resolução de problemas.	Desenvolver o pensamento algébrico
Quanto às noções fundamentais	Generalização; Linguagem algébrica; Relação entre duas grandezas.	Equivalência; variação; interdependência; proporcionalidade.
Quanto ao início dos estudos	A partir do 7º ano do Ensino Fundamental	Desde os anos inicias

Fonte: Scremin e Righi (2020, p. 428).

Observamos no quadro 3 que algumas alterações ocorreram de um documento para o outro, porém constamos que os dois documentos defendem o trabalho por meio da Resolução de problemas, levando o aluno a ser protagonista principal de sua aprendizagem.

Com isso, acreditamos que o professor, ao conhecer as diferentes concepções de Álgebra e Educação Algébrica, abordadas neste capítulo, bem como as diretrizes para o trabalho com Álgebra presentes nos documentos oficiais (PCN e BNCC), potencializará seu planejamento de maneira que possa atingir uma aprendizagem com mais compreensão para os alunos.

Diante das concepções de Álgebra e Educação Algébrica, referenciadas neste capítulo e com base nos objetivos traçados para essa pesquisa, seguiremos as concepções apresentadas por Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), no tocante à quarta concepção defendida pelos autores, a qual se utiliza da Resolução de Problemas como instrumento para o ensino de Álgebra, promovendo uma aprendizagem com mais compreensão. Além disso, seguiremos a concepção exposta pelos autores Sousa, Panossian e Cedro (2014), que trazem uma nova abordagem para o ensino de Álgebra em relação a trabalhar com o seu contexto histórico, porém não como uma introdução para o conteúdo, e sim para que possam ser observados os conceitos relacionados à Álgebra, como criação da humanidade levando em conta a fluência, a variável e o campo de variação. Ainda os autores sustentam, para um bom desempenho do ensino e aprendizagem em sala de aula, a utilização de situações problemas que favorecem a concepção defendida por eles, bem como a compreensão por parte dos alunos.

Entendemos ainda que nossa pesquisa atenderá as orientações dos PCN e da BNCC no que diz respeito ao ensino de Matemática voltado para uma aprendizagem com compreensão, bem como aconselha o ensino em sala de aula por meio da Resolução de Problemas. No entanto, na nossa proposta de trabalho iremos além das recomendações desses documentos, visto que trabalhamos na perspectiva da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas defendida por Andrade, S. (1998, 2017), que prevê o trabalho além da solução.

3 A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO METODOLOGIA PARA O ESNINO DE MATEMATICA

Ao falarmos de problemas matemáticos em sala de aula, surgem várias inquietações, tendo em vista que a palavra “problema” já causa incômodo devido à sua semântica e uso no cotidiano, o que se enfatiza quando relacionada a problemas matemáticos. Ao levarmos para a sala de aula problemas matemáticos, observamos essas inquietações nos nossos alunos que, muitas vezes, deixam transparecer um sentimento de angústia diante da situação. Porém, esse sentimento pode se transformar em um desafio a ser vencido quando tomam para si o problema, pois, ao lermos alguns pesquisadores em resolução de problemas matemáticos, eles dizem que “o que pode ser problemas para uns pode não ser problemas para outros”. Mas, o que podemos caracterizar como problemas?

Onuchic e Allevato (2011, p. 81) definem problema como “tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em fazer”. Para Andrade, S. (1998, 2017), problema é algo que “impulsiona uma ação de trabalho reflexivo sobre as ideias matemáticas presentes nas situações impostas por ele”. Para o autor, pode ser um projeto, uma questão, uma tarefa, porém que não se conhece a solução de imediato, e que o aluno precisa querer resolver, ou seja, se envolver com a situação problema, estar de fato engajado. Para Polya (1995), problema é quando nos deparamos com uma questão que não conseguimos resolver com os conhecimentos que detemos.

Os PCN de Matemática trazem problema como “uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado, ou seja, a solução não está disponível de início, no entanto é possível construí-la.” (BRASIL, 1998, p.41). Logo, podemos analisar que cada autor traz sua compreensão do que seja problema, contudo podemos ver que todos apresentam alguns pontos em comum do que seja problema, e como deve ser a postura do indivíduo que decide se envolver na situação problema.

Podemos dizer então que problema é uma situação que não se conhece de imediato os procedimentos para chegar à solução, mas, para que o aluno venha a se envolver no problema, ele precisa ser interessante e desafiante; compreendendo que o que pode ser um problema para um pode não ser para outro, pois vai depender do grau de conhecimento do indivíduo mediante o que o problema pede e que através do problema o aluno se ver num campo de encontros, do que é conhecido com o desconhecido, uma vez que o discente usa os conceitos matemáticos que ele já tem para descobrir novos conceitos.

Sobre como deve ser um problema Polya (1995, p. 4) nos traz que “o problema deve ser bem escolhido, nem muito difícil, nem muito fácil, natural e interessante, e um certo tempo deve ser dedicado a sua apresentação”.

Existem registros de problemas matemáticos desde a Antiguidade, em que povos como egípcios, gregos e chineses já utilizavam a matemática para resolver problemas, registrando-os em papiros (ANDRADE, S., 1998; ONUCHIC, 1999). Porém, a preocupação com o termo Resolução de Problemas é recente. E mais recente ainda é a Resolução de Problemas como Metodologia de Ensino. (ANDRADE, S., 1998). Atualmente, a Resolução de Problemas é um dos tópicos no ensino de matemática que ocupa um lugar de destaque em documentos oficias como os PCN (Parâmetro Curricular Nacional) e a BNCC (Base Nacional Comum Curricular), que não se distinguem muito um do outro em relação ao que se deseja para resolução de problemas. (MORAIS; ONUCHIC; LEAL JUNIOR, 2017).

Ambos os referenciais brasileiros sofreram grande influência do documento do NCTM (*National Council of Teachers of Mathematics),* o qual, conforme Morais, Onuchic e Leal Junior (2017, p. 404), apresenta uma proposta do que deveria ser considerado importante na Educação Matemática, posto que o ensino tenha que levar o aluno a ter a capacidade de pensar e raciocinar matematicamente, ter uma fundamentação útil de conhecimento e habilidades matemáticas. Diante disso, podemos observar que a Resolução de Problemas é de fundamental importância para se atingir esses objetivos.

Para que possamos entender melhor como a Resolução de Problemas ganha espaço no modo de ensinar e aprender, é necessário fazermos uma busca de fatos históricos da resolução de problemas, de maneira que nos ajudará a uma “compreensão mais efetiva das atuais tendências que se configuram para Resolução de Problemas”. (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p.76)

Vemos que a resolução de problemas no campo de ensino da Matemática só começa a ser discutida após o lançamento do livro de Polya em 1945, surgindo um interesse por parte de professores e alunos pela resolução de problemas. Porém, a preocupação estava voltada a ensinar a como se resolver problemas mediante quatro passos que Polya traz no seu livro a “Arte de resolver problemas”.

A história mostra que o ensino com situações problemas era apenas colocado para o aluno resolver o problema mediante alguns passos e técnicas, e que era imprescindível chegar à solução, a qual era o mais importante na resolução de problemas. Em seguida, eram colocados outros problemas com a mesma ideia dos anteriores, os quais o aluno já tinha visto como se resolvia anteriormente, não abrindo espaço para outras formas de se solucionar o problema. (ONUCHIC, 1999).

Com o advento da Revolução Industrial (1920), passou-se a querer que as pessoas soubessem utilizar a matemática no e fora do espaço escolar, logo, começou a mudar a forma de como se ensina e se aprende (ONUCHIC, 1999). Porém, com toda reorientação curricular que houve nesta época, não foi possível atingir a maneira como os professores trabalhavam em sala de aula, fazendo com que a Matemática continuasse a ser uma disciplina de poucos.

Onuchic (1999) nos traz uma análise dos movimentos do ensino da matemática no século XX e que influencia a forma como o professor trabalha a resolução de problemas em sala de aula. Como podemos notar, a fase do ensino era voltado para repetição, o qual o aluno tinha que decorar a tabuada e o ensino se concentrava em técnicas de repetição, não havendo espaço para o diálogo, e os alunos também eram apenas avaliados através de testes. Após essa fase, começa a ser discutido o ensino direcionado para a compreensão, a partir do qual o aluno não deveria mais decorar a tabuada, mas entender o que se fazia. No entanto, a construção do conhecimento ainda era feito pelo professor e o aluno continuava escutando e repetindo. De acordo com a autora, continuava sendo usadas técnicas operatórias para se resolver problemas padrão ou para aprender algo novo. Observa-se que os professores ainda não estavam preparados para as novas ideias que surgiam para o ensino de matemática, pois os hábitos de ensino anteriores continuavam em meio a novos métodos.

Os problemas, até 1950, eram mais voltados para a repetição. Logo, os alunos tinham um problema anterior que servia de base para os demais e, em seguida, era proposto a eles uma grande quantidade de problemas. Ainda na década de 50, de acordo com Andrade, S. (1998), a pesquisa realizada por *Bloom* e *Broder* traz questionamentos sobre o ensino de resolução de problemas, o qual valorizava mais o resultado final do que o processo. Desta forma, em sua pesquisa, buscavam analisar os procedimentos que os alunos executavam para chegar à solução, mudando assim o método de se trabalhar com resolução de problemas, passando a se preocupar mais com o processo de resolução de que com a solução final. Outros pesquisadores como *Post* e *Kilpatrick* também buscaram analisar em sua pesquisa os processos utilizados pelos alunos na solução de problemas. (ANDRADE, S., 1998).

Podemos observar então que até a década de 60, o ensino com resolução de problemas era voltado para a busca da solução. Após essa década, começa a preocupação com o processo de resolver, ou seja, analisar as estratégias utilizadas durante a solução.

Em 1980, o NCTM *(National Council of Teachers of Mathematics)* recomenda que o foco do ensino de matemática deva ser a resolução de problemas (ANDRADE, S., 1998;

MORAIS; ONUCHIC; LEAL JUNIOR, 2017; ONUCHIC, 1999), cujo trabalho é direcionado ao processo de resolução. No entanto, professores continuam focalizando o ensino com resolução de problemas na solução.

Schroeder e Lester (1989), na década de 80, trazem três modos diferentes de se abordar a Resolução de Problemas: 1. Ensinar a resolver problemas; 2. Ensinar sobre resolução de problemas; 3. Ensinar através da resolução de problemas. Observemos o último ponto, que é o ensino de matemática através da resolução de problemas, sendo este o ponto inicial e um modo de conduzir uma aula. Conforme Andrade, S. (1998), é nesta década ainda que a resolução de problemas passa a ser vista como uma metodologia de ensino, através da qual o problema passa a ser o ponto de partida na construção do novo conhecimento.

Assim, surge uma nova maneira de se trabalhar com Resolução de Problemas nas aulas de Matemática, pois o que antes era trabalhado apenas no fim dos conteúdos, passa a ser um ponto inicial e importante na formação de um novo conceito matemático. Sendo que nesse processo de ensino o foco passa a ser no aluno, que terá um papel importante na construção da aprendizagem, uma vez que o professor passa a ser um mediador desta construção.

Segundo Onuchic e Allevato (2005), é na década de 90 que começam as pesquisas tendo como lema a Resolução de Problemas como uma Metodologia de ensino. Ainda nesta década surge no Brasil o Grupo de Trabalho e Estudo em Resolução de Problemas (GTERP), sob a coordenação da Profa. Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic, na UNESP- Rio Claro. O grupo tem como um dos objetivos "buscar o desenvolvimento de estudos que atinjam a sala de aula, tanto sob a perspectiva do aluno quanto do professor, em todos os níveis de escolaridade." (ANDRADE, C.; ONUCHIC, 2017, p. 433).

Ainda sobre a forma de trabalhar dos participantes do GTERP, Andrade, C. e Onuchic (2017) comentam que eles têm trabalhado em Resolução de Problemas com a "Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas" e que procuram desenvolver atividades em que o ensino e a aprendizagem aconteçam ao mesmo tempo, bem como o processo de avaliação que, em vez de acontecer ao final da atividade realizada, passa a acontecer juntamente com o ato de resolver problemas.

Com a Metodologia Resolução de Problemas, o aluno vai aprender Matemática através da Resolução de Problemas, ou seja, o ponto de partida é o problema que, com a busca de resolvê-lo, o aluno acaba aprendendo sobre resolução de problemas, como também a utilizar a matemática necessária para resolver o problema, englobando assim os três pontos defendidos por Schroeder e Lester em 1989, como afirma Alevatto e Onuchic (2014).

Os PCN de Matemática também trazem em seu texto a defesa do Ensino com a Metodologia Resolução de Problemas quando mencionam que, durante o "processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-los" (BRASIL, 1997, p. 32), como também sobre o ensino de Álgebra, como já foi comentado anteriormente, o qual deve ser ministrado através de situações problemas que possibilitem ao aluno construir significado para os conceitos algébricos e para sua linguagem.

Portanto, para o desenvolvimento da nossa pesquisa, a qual busca um trabalho voltado para a compreensão no ensino da Álgebra em especial no conteúdo das expressões algébricas, faremos uso da resolução de problemas por ser um meio poderoso para levar o aluno a desenvolver a sua própria compreensão (ONUCHIC, 1999). Contudo, utilizaremos a Resolução de Problemas como uma Metodologia de ensino por dialogarmos com as ideias de Onuchic (1999), as quais postulam que a matemática não deve ser apenas vista como uma ferramenta para se resolver problemas e sim um caminho de pensar e um organizador de experiências.

O grupo GTERP (Grupo de Trabalho e Estudo em Resolução de Problemas), coordenado pela professora Dra. Lourdes de La Rosa Onuchic, propõe um roteiro que auxilia o professor em sala de aula e que visa "um ensino aprendizagem acompanhado de compreensão e significado através da resolução de problemas" (ONUCHIC, 1999). O roteiro é composto por onze tópicos, explicitando como o professor e aluno podem proceder durante a resolução de problemas (ANDRADE, C.; ONUCHIC, 2017, p. 439).

Atualmente, o termo Exploração de Problemas vem ganhando espaço em meio à resolução de problemas, pois, de acordo com Andrade, S. (2017), o termo resolução de problemas ainda leva o aluno a compreender que o foco de resolver problemas é encontrar apenas a sua solução, diferente de quando falamos em exploração de problemas, que favorece ao aluno entender que todo o processo de solução, de investigação e de envolvimento no problema tem papel importante, e que o resultado final encontrado será parte desse processo. Segundo o autor, à medida que o aluno vai aprofundando no problema, ou seja, ao explorar o problema, ele vai utilizando conceitos matemáticos adquiridos anteriormente, como também vai descobrindo novos conceitos matemáticos.

Conforme Andrade, S. (2017), a expressão Exploração de Problemas vai envolver tanto a resolução de problemas como a proposição de novos problemas, chegando a novas sínteses e a novos resultados. Esse processo vai se desenvolver por meio do movimento

Problema-Trabalho-Reflexões e Sínteses-Resultado (P-T-RS-R), ou seja, é lançado um problema em sala de aula - por parte do professor ou até mesmo do aluno - e que este problema proposto deve ser desejado pelo aluno, sendo ele uma questão, uma tarefa, ou um projeto (ANDRADE, S., 2017). Em seguida, o aluno passa a se envolver no problema e com isso começa a realizar um trabalho sobre ele que, por meio do processo de reflexões e sínteses em sala de aula, junto ao professor e a outros alunos, poderá chegar à solução do problema.

Porém, durante esse processo, que o autor vai chamar de codificação e descodificação, o qual abrange desde o momento em que o aluno passa a solucionar o problema das mais variadas formas até o momento em que ele consegue entender o problema e os conceitos matemáticos envolvidos, pode ocorrer novos problemas, e com isso surgir novas sínteses e novos resultados, uma vez que, "no trabalho de exploração de problemas há um prazer e uma alegria de ir cada vez mais longe, um ir cada vez mais profundo, um ir cada vez mais curioso, há um ir que chega e nunca chega..." (ANDRADE, S., 2017, p. 366).

O autor nos lembra de que, ao falarmos de Exploração de Problemas, não significa que estamos falando de outra linha de pesquisa que não seja a Resolução de Problemas, porém a proposta de trabalho é que se denomina Exploração de Problemas, visto que, ao ser proposto em sala de aula um problema que possa envolver o aluno ao realizar um trabalho, e que num processo de reflexão, síntese e de diálogos realizados entre professor/aluno e aluno/aluno, possa se chegar a uma solução do problema proposto, como também ir além dela. Porquanto, o trabalho com exploração de problemas não se limita ao resultado, podendo surgir novos problemas, novas reflexões, novas sínteses e novos conceitos. (ANDRADE, S., 2017)

Ao trabalhar na perspectiva de Exploração, Resolução e Proposição de Problemas, Andrade, S. (2017) nos sugere que este trabalho não pode se limitar apenas na busca de conceitos matemáticos, mas que também possam ser trabalhados contextos de outras naturezas como a social, a político e a cultural, uma vez que a sala de aula deve ser olhada com toda sua complexidade.

Pensando nisso, em sua pesquisa de mestrado em 1998, Andrade, S. trabalhou com a Resolução, Exploração e Proposição de Problemas, não apenas como uma metodologia de ensino, mas como uma ponte para se trabalhar dentro de uma perspectiva de Educação Progressista, Crítica e Libertadora. Logo, em seu trabalho intitulado "Ensino- Aprendizagem de Matemática via Resolução, Exploração, Codificação e Descodificação de Problemas", o autor procura trazer para sala de aula problemas de cunho sócio-politico-cultural levando em conta todo contexto de uma sala de aula.

Nessa proposta de trabalho com Exploração, Resolução e Proposição de Problemas, o autor defende que é preciso que o professor-pesquisador possa estar verdadeiramente inserido na pesquisa em sala de aula, vivenciando um intenso trabalho, o qual consiste em observar, olhar, descrever e analisar uma sala de aula levando em consideração seus múltiplos aspectos, sabendo que não é um trabalho simples de se realizar, e sim é um trabalho complexo que demanda tempo e que depende de vários fatores como: professor, aluno, escola. (ANDRADE, 2017). Porém, esse trabalho, ao ser realizado em sala de aula por meio da Exploração de Problemas, proporciona aos envolvidos uma viagem que poderá levar a outras viagens. O autor vai dizer que é uma viagem aberta, embora não solta, uma vez que essa viagem é guiada pelo professor, no papel de estimular o aluno a ir além da solução do problema.

Andrade, S. (2017) nos diz que, quando se tem uma experiência que surge a partir do movimento Problema-Trabalho- Reflexões e Sínteses-Solução, chama-se de uma experiência com Resolução de Problemas, a qual engloba o processo e o produto. Já uma experiência que nasce a partir do movimento Problema-Trabalho-Reflexões e Síntese-Resultado tem seu resultado baseado num processo de Codificação que consiste em representar o problema de outra forma, e Descodificação que é quando há um entendimento crítico do problema, ou seja, o que ele significa. Portanto, nesse movimento todo, temos uma Experiência de Exploração de Problemas. Segundo o autor, o termo “resultado” não constava em suas pesquisas iniciais, mas, com as experiências realizadas, ele passou a observar que “a palavra resultados define melhor a finalização da cada processo como um todo” (ANDRADE, S. 2017, p. 368). Contudo, o autor lembra que resultado entra como o refinamento das sínteses realizadas durante o processo do trabalho com Exploração de Problemas.

Acreditamos que o ensino da Álgebra por meio da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas pode se tornar mais compreensivo para o aluno, desde o entendimento das variáveis envolvidas no problema, a compreensão das operações existentes, favorecendo assim o desenvolvimento do pensamento algébrico. Dentro dessa perspectiva os PCN defende que

> Pela exploração de situações-problema, o aluno reconhecerá diferentes funções da Álgebra (generalizar padrões aritméticos, estabelecer relação entre duas grandezas, modelizar, resolver problemas aritmeticamente difíceis), representará problemas por meio de equações e inequações (diferenciando parâmetros, variáveis, incógnitas, tomando contato com fórmulas), compreenderá a “sintaxe” (regras para resolução) de uma equação. (BRASIL, 1998, p. 51).

Os PCN ainda trazem que um dos objetivos do ensino de Matemática é o desenvolvimento do pensamento algébrico e que este deve ocorrer mediante a exploração de situações problemas, assim:

> De acordo com os PCN o ensino de matemática deve visar ao desenvolvimento do pensamento algébrico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a: * reconhecer que representações algébricas permitem expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas, traduzir situações-problema e favorecer as possíveis soluções; * traduzir informações contidas em tabelas e gráficos em linguagem algébrica e vice-versa, generalizando regularidades e identificar os significados das letras; * utilizar os conhecimentos sobre as operações numéricas e suas propriedades para construir estratégias de cálculo algébrico. (BRASIL, 1998, p. 64).

No documento da BNCC (BRASIL, 2017), vamos encontrar que a resolução de problemas é uma das competências específicas de Matemática a partir da qual o aluno será levado à:

> Enfrentar situações-problemas em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados). (BRASIL, 2017, p. 267).

Ainda, o documento da BNCC vai trazer dentro das Habilidades de cada Ano Escolar o processo de resolver e elaborar problemas mediante o conteúdo estudado. A orientação da BNCC sobre a elaboração desses problemas é a de que eles ocorram após a resolução dos problemas, ou seja, “pretende-se que os alunos formulem novos problemas, baseando-se na reflexão e no questionamento sobre o que ocorreria se alguma condição fosse modificada ou se algum dado fosse acrescentado ou retirado do problema proposto”. (BRASIL, 2017, p. 299).

Observamos que a forma como a BNCC trabalha a proposição de problemas acontece apenas após a resolução do problema. No entanto, na perspectiva da Exploração de Problemas defendida por Andrade, S. (2017) e outros estudiosos (CAI *et al*, 2015, entre outros), a proposição começa a aparecer de forma mais explícita, ganhando um espaço maior, uma vez que ela pode ocorrer antes, durante ou depois do problema.

As pesquisas desenvolvidas tomando como base a Proposição de Problemas é algo mais recente no campo da Educação Matemática em relação à Resolução de Problemas. (CAI *et al* , 2015; SILVER *et al*, 2019). No entanto, ela vem ganhando cada vez mais espaço no currículo escolar a nível internacional e vem sendo destaque em eventos na área de Educação Matemática, como no caso do 14th International Congress on Mathematical Education – ICME- 14 (14º Congresso Internacional de Educação Matemática).

De acordo com Silver *et al.* (2019), a Proposição de Problemas, junto com a Resolução de Problemas, faz parte das discussões do Topic Study Group 17- TSG (Grupo de Estudo de Tópico 17) do ICME-14 uma vez que constata-se uma atenção maior de pesquisadores e educadores em relação à formulação de problemas por observarem que, ao se propor problemas, podem ocorrer uma interação maior na resolução de problemas. (CAI *et al*, 2015).

Além disso, segundo Cai (2015), pesquisadores como Einstein defendem que a formulação de um problema interessante pode ser mais importante do que a sua solução. O autor ainda comenta que as pesquisas revelam que nos problemas criados pode-se identificar uma matemática de boa qualidade. Assim, tanto professores como alunos são capazes de propor problemas importantes e interessantes.

Andrade, S. (2017) comenta que a proposição de problemas vai impulsionar a resolução e a exploração e que isso ocorre por meio de perguntas geradoras. O professor passa a instigar o aluno a se envolver cada vez mais no problema, porém, o autor observa que a proposição de problemas não é uma tarefa fácil de se realizar em sala de aula. Por vez essa acontece mais por parte do professor, após um intenso trabalho em sala de aula, ficando a Exploração de Problemas mais voltada à resolução de problemas. Logo, Andrade, S. (2017, p. 388) orienta que “nos primeiros momentos com a exploração de problemas, o professor-pesquisador precisa constantemente impulsionar o trabalho para que os alunos, com sua mediação-refutação, possam ir cada vez mais além da solução do problema”.

Com base no exposto, nossa pesquisa tomou como fundamento para o desenvolvimento deste trabalho todas as possibilidades de ensino e aprendizagem que a Metodologia Exploração, Resolução e Proposição de Problemas pode favorecer ao ensino e aprendizagem de Álgebra, em especial ao conteúdo de Expressões Algébricas. Para tanto, nos respaldamos na proposta do pesquisador Andrade, S. (1998, 2017), o qual traz em suas pesquisas a Exploração de problemas como elemento forte dentro da Metodologia Resolução de Problemas, e que esta também abrange tanto a resolução como a proposição de problemas. Por conseguinte, num processo de codificação e descodificação presentes no trabalho com a Exploração de Problemas, ela favorece ao aluno um estudo mais compreensivo, como também possibilita ao aluno mais autonomia na sua aprendizagem, potencializando, sobretudo, um posicionamento mais crítico diante de suas ações.

4 UM OLHAR SOBRE O ENSINO DAS EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

O ensino de Expressões Algébricas tem um importante papel na aprendizagem da Álgebra, sendo esta, muitas vezes, como a porta de entrada para o ensino de outras vertentes da Álgebra como funções e equações. Porém, pesquisas apontam que, se seu estudo vir concomitante com o ensino de funções, equações, sequências e outros conteúdos, promoverá uma melhor compreensão para os alunos (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009). As expressões Algébricas servem, muitas vezes, para representar de maneira mais geral uma dada situação e seu estudo tem início no terceiro ciclo do ensino fundamental, mas é no quarto ciclo que, de fato, é mais aprofundado de acordo com os PCN, provocando nos alunos várias inquietações, pois é uma saída do trabalho com expressões numéricas para expressões que passam a ter valores desconhecidos representados por letras, chamadas de variáveis. Mas, como podemos efetivamente definir expressões algébricas e como devemos trabalha-las?

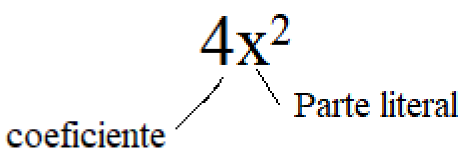
Para Lloyd *et al* (2011), a expressão algébrica é uma frase matemática ou termo que contém números e símbolos literais (variáveis) que são conectados por operações e que, ao substituirmos essas letras por números e efetuarmos as operações indicadas, encontraremos um valor numérico desta expressão. Exemplos de expressões algébricas:

$2x+ 6$

$3z + 2y – 3$

As partes que compõem uma expressão algébrica são chamadas de termos que de acordo com Carvalho (2010, p. 63) “é uma expressão algébrica escrita apenas como um produto ou quociente de números ou variáveis”, e estes são compostos por uma parte literal e um coeficiente.

Figura 3 - Termo Algébrico



Fonte: Acervo da pesquisadora

As expressões algébricas podem ser nomeadas conforme a quantidade de termos (ANDRINI, 2015):

Monômio → $2x^2$ *Binômio* → $0{,}5y - 6$ *Trinômio* → $x^2 - 3x + y$ *Polinômio* → $1{,}5x^2 - 3y + z - 1$

Atribuindo um valor numérico à variável ou às variáveis contidas na expressão e realizando as operações indicadas, encontramos um valor numérico da expressão:

Ex: $2(x + 5) - x$, sendo $x = 3$, teremos:

$$2(3+5)-3$$
$$2.8-3$$
$$16-3$$
$$13$$

Portanto, o valor numérico da expressão, quando x for igual a 3, é 13.

Trabalhar com expressões algébricas requer uma atenção específica do aluno, pois é preciso que ele analise na expressão quais operações estão presentes, para poder operar e assim encontrar outras "expressões equivalentes", pois, conforme Lloyd *et al* (2011), para serem equivalentes, não precisam ter a mesma forma, sendo necessário apenas representar o mesmo valor numérico ao substituir um número na variável. Ex. As expressões 0,3y+ 0,5y e $0{,}8y$ são equivalentes para y = 4? Substituindo no lugar da variável y o número 4, nas duas expressões, teremos:

Expressão algébrica 1		Expressão algébrica 2
$0{,}3y+0{,}5y$		$0{,}8y$
$0{,}3.4+0{,}5.4$	e em,	$0{,}8.4$
$1{,}2+2{,}0$		
$3{,}2$		$3{,}2$

Em vista disso, podemos observar que elas apresentam o mesmo valor numérico para x = 4. Sendo assim, elas podem ser chamadas de expressões equivalentes. Na equivalência de expressões algébricas, podemos fazer uso do sinal de igualdade, que indica que uma expressão é equivalente à outra. Portanto, ao resolvermos a situação acima, teremos 0,3y+ 0,5y = $0{,}8y$. Nesta situação, podemos verificar que 0,8 y é a forma simplificada da expressão algébrica 0,3y + 0,5y, pois, fazendo uso da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição temos, (0,3 + 0,5) y = 0,8 y. A utilização desta propriedade e outras estudadas na aritmética nos ajuda a justificar a equivalência das expressões algébricas. (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009).

Conforme Ponte, Branco e Matos (2009), a autora Kieran (1995) estabelece em sua pesquisa uma distinção entre duas perspectivas da Álgebra, que envolve o trabalho com expressões algébricas. Uma dessas é a processual, a qual o aluno atribui um número às variáveis da expressão e realiza as operações indicadas, encontrando assim o valor numérico da expressão. Como também no estudo de equações, atribui-se um número à variável e verifica-se a igualdade, encontrando assim a raiz da equação. Em ambos os casos, o aluno opera apenas com números após a substituição. A outra perspectiva é a visão da álgebra como estrutural, que também é abordado por Usiskin (1995) e que já comentamos anteriormente. Nesta visão, os alunos têm de fazer as operações indicadas com os símbolos algébricos, até chegarem a expressões equivalentes, e o mesmo acontece nos membros de uma equação, pois, ao fazerem as operações, chegarão a expressões equivalentes em ambos os membros, facilitando no processo de resolução. O autor coloca então que é preciso que o professor faça essa passagem da visão processual para a estrutural, e que esse trabalho aconteça com atividades que tragam significado para o aluno.

De acordo com os autores Friedlander & Arcavi (2017, p.1), para o bom andamento do trabalho com expressões algébricas, é recomendado que alguns objetivos principais estejam presentes durante o ensino e aprendizagem.

> *Correct application and a sound understanding of the laws arithmetic and algebra, as well as respecting the conventions about algebraic notations and the use of parentheses and the order of operations*
> *Reading expressions with comprehension, which implies the analysis of the underlying structure of an expression, including identifying equivalent expressions despite their different appearance*
> *Interpreting parts of an expression (and sometimes the whole expression) as a single entity, and identifying/ recognizing structure, which enables applying algebraic laws for the purpose of achieving a simpler expression*
> *Flexibility of choosing a specific form among several equivalent forms of an expression in order to reveal meaning or explain a property represented by it*
> *Creating expressions in order to represent (a) desired properties, or (b) the general aspect of a geometrical pattern, or (c) a model of real-world phenomena*
> *Viewing expressions as relationships (sometimes functional relationships) between an input (an independent variable) and output (a dependent variable).* [1]

[1] Tradução nossa: Aplicação contínua e bom entendimento das leis aritméticas e álgebra, bem como respeitar as convenções sobre notações algébricas e o uso de parênteses e a ordem das operações.
Ler expressões com compreensão, o que implica a análise da estrutura subjacente de uma expressão, incluindo a identificação de expressões equivalentes, apesar de sua aparência diferente.
Interpretar partes de uma expressão (e às vezes toda a expressão) como uma entidade única, e identificar / reconhecer a estrutura, o que permite aplicar leis algébricas com o objetivo de alcançar uma expressão mais simples.
Flexibilidade de escolher uma forma específica entre várias formas equivalentes de uma expressão, para revelar o significado ou explicar uma propriedade representada por ela.
Criar expressões para representar (a) propriedades desejadas, ou (b) o aspecto geral de um padrão geométrico, ou (c) um modelo de fenômenos do mundo real.
Ver expressões como relacionamentos (às vezes relacionamentos funcionais) entre uma entrada (uma variável independente) e saída (uma variável dependente)

Os PCN também nos trazem alguns conceitos e procedimentos para o trabalho com expressões algébricas, mostrando que:

> Utilização de representações algébricas para expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas e regularidades observadas em algumas sequências numéricas./ Compreensão da noção de variável pela interdependência da variação de grandezas./Construção de procedimentos para calcular o valor numérico de expressões algébricas simples. (BRASIL, 1998, p. 72).

Esse documento traz ainda critérios de avaliação que explicitam as expectativas de aprendizagem, ou seja, os objetivos que se desejam alcançar em determinado conteúdo. Logo, para a parte de álgebra que contempla expressões algébricas, ele coloca que:

> **Utilizar a linguagem algébrica para representar as generalizações inferidas a partir de padrões, tabelas e gráficos em contextos numéricos e geométricos.**
> Por meio deste critério o professor verifica se o aluno é capaz de utilizar representações algébricas para expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas e regularidades observadas em algumas sequências numéricas, assim como construir procedimentos para calcular o valor numérico de expressões algébricas simples. (BRASIL, 1998, p.76, grifos do autor).

Na BNCC que é o novo documento norteador para a Educação Básica, constatamos que, no trabalho com expressões algébricas, os alunos precisam:

> Compreender os diferentes significados das variáveis numéricas em uma expressão, estabelecer uma generalização de uma propriedade, investigar a regularidade de uma sequência numérica, indicar um valor desconhecido em uma sentença algébrica e estabelecer a variação entre duas grandezas. (BRASIL, 2017, p. 270).

Analisamos que tanto os autores Friedlander e Arcavi (2017), como os PCN (1998) e a BNCC (2017) orientam que no ensino com expressões algébricas o aluno seja guiado para compreender: a função da variável; a generalização das propriedades; a utilização da expressão algébrica para representar sequências numéricas, bem como a relação de interdependência entre duas variáveis.

Ao trabalhar com expressões algébricas, o professor precisa conhecer bem sua definição e seus objetivos, ou habilidades a serem alcançadas conforme apresentado anteriormente, pois, de acordo com Carvalho (2010), alguns equívocos com expressões algébricas acabam desfavorecendo a compreensão dos alunos. Um deles é a definição de polinômios que o livro didático traz, sendo este um auxiliador do trabalho do professor em sala de aula e um referencial para os alunos. O autor traz em sua pesquisa uma análise de como as expressões algébricas são abordadas nos livros didáticos abordados pelo Programa

Nacional do Livro Didático (PNLD) e constata que muitos autores trazem o termo Polinômios para ser trabalhado no Ensino Fundamental, quando este deveria aparecer a partir do Ensino Médio, e ampliado e aprofundado no Ensino Superior. Ou seja, de acordo com Carvalho (2010), o que se chama de polinômios, a expressão algébrica com mais de três termos, na verdade é uma expressão algébrica polinomial.

Segundo Carvalho (2010), ao analisar alguns livros didáticos, ele observou que alguns autores não apresentam a definição de expressões algébricas ou até apresentam, porém dando margem a outras definições. Quando se diz que “Expressões matemáticas formadas por letras e símbolos numéricos são chamadas de expressões literais ou, genericamente, expressões algébricas” (CARVALHO, 2010, p. 56), o autor expõe que o texto dá ênfase ao dizer que log(x), sem(x) e 2^x, são expressões algébricas. O autor ainda traz em seu texto as incoerências em definições que estão presentes nos livros didáticos em relação ao que se chama de “termo de uma expressão algébrica”, sendo, na verdade, um binômio. Por fim, ele analisa que há livros que possuem exercícios que não contribuem para a aprendizagem dos alunos.

Ao fazermos uma reflexão sobre o ensino e aprendizagem com expressões algébricas, levando em consideração o que apresentamos anteriormente, percebemos a importância do professor conhecer, estudar e buscar mais informações sobre o que será ensinado, pois ajudará tanto na sua compreensão, como na do aluno e com isso chegar aos objetivos que são propostos para o trabalho com expressões algébricas.

Para um bom desempenho do trabalho com expressões algébricas, acreditamos que é preciso que o professor conheça bem sua definição, mas também se aproprie de metodologias que o auxiliem em sala de aula para ajudar aos alunos compreenderem o conteúdo. Com base nisso, a seguir traremos umas sínteses de pesquisas realizadas com esse tema Álgebra e de metodologias que foram utilizadas para auxiliar no ensino e aprendizagem de expressões algébricas.

4.1 Algumas pesquisas com expressões algébricas

Mencionamos anteriormente, no capítulo 2, as dificuldades na aprendizagem de Álgebra e vimos que a pesquisa realizada por Booth (1995) traz um questionamento com ênfase nos obstáculos que os alunos enfrentam com as atividades envolvendo expressões algébricas. Observamos que a pesquisadora faz uma análise dos erros cometidos pelos alunos, os quais vão desde a compressão do foco da atividade algébrica a como proceder. Os autores Chalouh e Herscovis (1995) também verificam alguns erros cometidos por alunos e constatam que esses erros têm relação de procedimentos que eles trazem da aritmética para álgebra, como a justaposição que difere entre a álgebra e aritmética.

Ponte, Branco e Matos (2009) abordam que a compreensão do trabalho com expressões algébricas por parte dos alunos envolve diversos aspectos, que vai desde a compreensão do que seja monômio e sua representação até as operações realizadas, visto que muitos não reconhecem "*2x*, como sendo a abreviação de *2 x X*, que x é um monômio de coeficiente 1, e que 4 é um monômio sem parte literal, e que *–x* pode representar um valor positivo se *x < 0*". (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p. 78). Outro aspecto é a falta de compreensão na propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição que é utilizada na simplificação de monômios semelhantes. Há também a dificuldade dos alunos entenderem que 3x + 4 não é 7x, que Booth (1995) diz que é a não aceitação da falta de fechamento, e outro ponto que atrapalha na aprendizagem é dar significado ao trabalho com expressões algébricas.

A adição e multiplicação de monômios e expressões polinomiais provocam várias dúvidas nos alunos, pois entra o processo da propriedade distributiva da multiplicação para a soma de monômios semelhantes, e no caso da soma de expressões polinomiais no uso de parênteses quando este é precedido do sinal de menos. Já, na multiplicação, eles confundem o raciocínio da multiplicação de monômios com a adição, uma vez que, como a parte literal também é multiplicada, eles utilizam a propriedade da multiplicação de potências de mesma base, ou seja, colocam na adição 2x + 3x sendo $5x^2$. Na multiplicação de expressões polinomiais, os alunos vão precisar da propriedade distributiva da multiplicação e da multiplicação de monômios. Por consequência, se esses dois pontos não forem bem entendidos, os alunos não obterão bons resultados na aprendizagem.

Sendo assim, para suprir essas dificuldades e tornar mais compreensivo o trabalho com expressões algébricas, é preciso utilizar atividades em sala de aula que ajudem na aprendizagem dos alunos, como é o caso dos produtos notáveis na multiplicação de binômios, que o professor pode fazer uso de números para exemplificar e fazer um paralelo com as variáveis e a área de figuras geométricas, que ajudam a dar significado. (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009).

Atualmente, podemos observar que algumas pesquisas que se referem ao ensino e aprendizagem da Álgebra procuram trabalhar com expressões algébricas de modo que leve o aluno a compreender as diferenças existentes entre o trabalho com Álgebra e Aritmética, bem como tornar seu estudo entendível para o aluno. Nas pesquisas analisadas, vimos uma variedade de recursos Metodológicos, como o uso de jogos, Resolução de Problemas, uso de

Tecnologias, História da Matemática e material concreto. Esses recursos não só possibilitam ao aluno um estudo significativo, mas também motivador, uma vez que é um conteúdo de caráter abstrato.

Entre as pesquisas analisadas que trazem atividades que procuram tornar o ensino e aprendizagem de expressões algébricas mais significativo e motivador para o aluno, destacamos as pesquisas de cinco autores: Christo (2006), Bonadiman (2007), Bortolette (2014), Ibrahim (2015) e Andrade, L. (2016) pois são os que mais se entrelaçam com os objetivos de nossa pesquisa. Para situar o leitor em relação a essas pesquisas, faremos uma pequena síntese desses trabalhos.

1. O autor Danilo dos Santos Chisto (CHRISTO, 2006) tem como título de sua pesquisa de dissertação: "Introdução da noção de variável em Expressões Algébricas por meio da Resolução de Problemas: uma abordagem dinâmica". Sua pesquisa consiste em desenvolver e avaliar uma proposta de ensino da linguagem algébrica. Para isso faz uso de resolução de problemas verbais, com ênfase na representação simbólica das variáveis independentes e dependentes envolvidas. A pesquisa é realizada com alunos de 6º ano do ensino fundamental II de uma escola pública da cidade de São Paulo. Para o desenvolvimento da pesquisa, ele trabalha com uma sequência de dez atividades que trazem situações diversificadas. Em sua análise, ele constata que os alunos construíram livremente expressões equivalentes, perceberam nas situações que lhes foram apresentadas a existência de uma lei quantitativa de correspondência, identificando e determinando os valores das variáveis dependentes e independentes; construíram e interpretaram expressões algébricas simples das formas ax e ax + b, com x assumindo valores em $\Re_+$. Logo, ele constata que as atividades exploratórias com expressões algébricas foram eficientes para a compreensão de variável.
2. A dissertação de Adriana Bonadiman (BONADIMAN, 2007) tem como título "Álgebra no ensino fundamental: produzindo significados para as operações básicas com expressões algébricas". Na sua pesquisa, a autora trabalha com uma proposta didática para desenvolver um ensino significativo para as operações com expressões algébricas. Para o desenvolvimento da pesquisa, ela faz uso de representações múltiplas, resolução de problemas e matérias manipuláveis. A pesquisa é dividida em duas partes: a primeira enfocou no uso de letras e segunda na produção de significados para as operações com expressões algébricas. A

pesquisa foi realizada com professores e alunos. Com os professores, Bonadiman (2007) realizou entrevistas que serviram para perceber as diferentes concepções dos professores em relação ao ensino e aprendizagem da álgebra, bem como verificou as metodologias utilizadas por eles para, com isso, procurar bibliografias e metodologias diferentes para realizar a pesquisa. Já com os alunos, a autora fez um questionário para saber sobre o desempenho deles com as operações com expressões algébricas. A partir de então verificar os erros cometidos pelos alunos e a forma que eles pensavam para resolver as questões, e diante disso planejar atividades voltadas para a produção de significados para as operações com expressões algébricas. Ela observa, ao final de sua pesquisa, que o estudo contribuiu para o aprimoramento do pensamento algébrico dos alunos, que as atividades conseguiram produzir significados para o estudo com as operações com expressões algébricas e que os alunos adquiriram desenvoltura no uso de letras e compreenderam algumas propriedades (comutativa e distributiva), como também ela verificou que os alunos tiveram uma maior autonomia a frente das atividades, em levantar hipóteses, elaborar e justificar algumas passagens durante as resoluções.

3. A dissertação de Anderson de Abreu Bortoletti (BORTOLETTI, 2014), cujo título é “Introdução às Expressões Algébricas na Escola Básica: variáveis e células de planilhas eletrônicas”, busca introduzir o conteúdo de expressões algébricas por meio de uma sequência didática com alunos do 7º ano do ensino fundamental. Ele inicia a pesquisa com uma atividade de sondagem para verificar o desempenho dos alunos em relação à linguagem algébrica. Para introduzir o trabalho com expressões algébricas, ele utiliza a Resolução de Problemas. A sequência consta com dez atividades, as quais começam com o reconhecimento das variáveis e que ele vai aprofundando esse conhecimento nas atividades seguintes, até perceber que os alunos já podem ir ao computador e programar as planilhas eletrônicas, onde eles utilizaram o conhecimento de variável e fizeram um reconhecimento das células associadas às variáveis. Em seguida, os alunos iam fazendo fórmulas e verificando nas planilhas. O autor comenta que o trabalho com programação de planilhas eletrônicas não faz parte do currículo de Matemática, porém poderia ser naturalmente incorporado. Ao final das atividades, ele constata que os alunos compreenderam o trabalho com variáveis e conseguiram fazer relações, de identificação, com as células das planilhas eletrônicas, como também observa que

os alunos, ao final das atividades, conseguiram escrever uma expressão algébrica que representava uma dada situação, interpretavam corretamente fórmulas e determinavam o valor numérico de expressões algébricas relacionadas à programação de células. Porém, ele percebe que os estudantes não acertaram completamente as questões por apresentarem erros nos cálculos, ou seja, é preciso serem trabalhadas as propriedades de adição e de multiplicação, como também a ordem hierárquica de resolver uma expressão numérica.

4. A pesquisadora Soraia Abud Ibrahim (IBRAHIM, 2015), em sua dissertação, “A Apropriação dos Significados de Polinômios: um estudo na perspectiva da teoria histórico-cultural” procura analisar o significado atribuído pelos alunos do 8º ano do ensino fundamental ao conceito de polinômio, explorando as diferentes concepções de álgebra e de educação algébrica. Para o desenvolvimento da pesquisa ela utiliza uma sequência didática. As atividades dessa sequência contemplam a história da matemática, jogos, *softwares* tecnológicos e resolução de problemas. Essas atividades foram divididas em cinco blocos, os quais podiam ter mais de uma atividade. Para analisar os dados obtidos, ela fez uso da teoria Histórico-cultural, a qual procura explicar o pensamento humano a partir dos indícios externos, partindo do pressuposto de que os alunos vão à escola para se apropriarem dos conhecimentos historicamente construídos pelo Homem. Em algumas atividades realizadas, a pesquisadora verifica que não houve apropriação da proposta da atividade pelos alunos e que eles apresentaram algumas dificuldades entre a adição e multiplicação de polinômios. A autora comenta que a atividade com resolução de problemas facilita a aprendizagem, pois ela contempla várias estratégias para chegar ao pensamento e a linguagem algébrica. Na atividade com o *software Kimplot*, ela percebe que os alunos passaram a pensar e refletir sobre o significado produzido pelos símbolos, levando a um pensar algébrico, ou seja, a atividade teve sentido para o aluno. Ao final das atividades, ela detecta que os alunos compreendiam mais a linguagem algébrica na forma oral do que na forma escrita e que algumas atividades contidas dentro dos cinco blocos não contribuíram para a apropriação dos conceitos de polinômio e variáveis. Logo, ela diz que não conseguiu de fato atingir o lógico-histórico-cultural e que mais pesquisas precisam ser produzidas com base na teoria Histórico-cultural.
5. Para finalizar a análise das pesquisas que foram colocadas em ordem cronológica, temos a de Ludmila Cássia Coelho de Andrade (ANDRADE, L. 2016), que traz

> uma sequência de atividades para o ensino de expressões algébricas, mas que não foram aplicadas com alunos e sim com professores para serem analisadas, discutidas e validadas. A sua dissertação, "Expressões Algébricas na Educação Básica: a validação de atividades de ensino e aprendizagem", foi fundamentada em Lima (2007) e Ribeiro (2012) que comentam sobre as dificuldades dos professores trabalharem com metodologias que ajudem a dar significado aos conteúdos algébricos, como também entrelaçar esses conteúdos a contextos reais dos alunos. A pesquisa foi desenvolvida em um laboratório de Educação Matemática e contou com a presença de oito professores da escola pública do Distrito Federal. Durante as atividades, eles assumiram papeis de estudantes para resolverem as atividades e, em seguida, eles tinham que analisar criticamente as atividades para a validação das mesmas Ao ensino de expressões algébricas. Como resultado, a autora fez alguns apontamentos como: a importância das formações continuadas; do permanente diálogo e troca de experiências entre os professores, que ajuda a aprimorar as metodologias e ações para o ensino de Matemática em especial a Álgebra. Com as análises dos professores em relação às atividades, Andrade, L. (2016) comenta que a possibilitou identificar limitações, potencialidades, discutir e reelaborar as atividades, adaptando-as às necessidades do processo de ensino aprendizagem da Álgebra.

Observamos que as pesquisas apresentadas anteriormente trazem metodologias pertinentes que proporcionam ao aluno um aprofundamento em relação ao ensino de expressões algébricas, como também contribuíram para o planejamento das atividades que foram desenvolvidas nesta pesquisa, a fim de tornar mais compreensivo o ensino e aprendizagem de expressões algébricas por meio da Metodologia Exploração, Resolução e Proposição de Problemas. Para tanto, iremos nesta pesquisa elaborar, aplicar e analisar as atividades com expressões algébricas na perspectiva da Metodologia Resolução de Problemas à luz das pesquisas desenvolvidas por Andrade, S. (1998, 2017) a fim de propiciarmos um estudo motivador, criativo e crítico, como também um estudo que venha ser mais compreensivo para o aluno, o qual possa estar expondo seus argumentos e sendo ativo diante de uma situação problema.

5 DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA

5.1 Metodologia da Pesquisa

Na busca de identificar como, através da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas, o ensino e aprendizagem de Expressões Algébricas se torna mais compreensivo para o aluno, optamos por fazer uma pesquisa qualitativa, pois, nesta busca de tornar mais aprofundado o estudo de expressões algébricas, lemos que o pesquisador Werber (*apud* André, 1995, p. 17) comenta que, ao trabalharmos com a pesquisa qualitativa, "o foco da investigação deve se centrar na compreensão dos significados atribuídos pelos sujeitos às suas ações".

De acordo com Marli André (1995), a abordagem qualitativa não trabalha com variáveis ou por amostragem, direcionando-se para observação sobre o que está sendo estudado. Ainda conforme a autora, tal abordagem também pode ser chamada de "naturalista" por não haver a manipulação dessas variáveis, nem de tratamento experimental e sim analisar os fenômenos existentes em seu ambiente natural. Porém, a autora nos alerta que é preciso ter cuidado para não chamar toda pesquisa de qualitativa, pelo fato de não haver variáveis, pois é a forma que recolhemos os dados e os analisamos que nos direciona ao tipo de pesquisa.

Bogdam e Biklen (1994) dizem que, com essa metodologia, os dados recolhidos são designados por qualitativos, ou seja, ricos em pormenores, descrevendo em cada detalhe os sujeitos e suas ações, como também o local que este está inserido, com toda sua complexidade. Os autores ainda comentam que esses dados são geralmente recolhidos em contextos naturais, sem necessariamente levantar hipóteses ou medir variáveis. Em seu texto, Bogdam e Biklen (1994, p. 47-50) trazem cinco características da investigação qualitativa. São elas: 1) a fonte direta de coleta dos dados é o ambiente natural e o investigador o instrumento principal; 2) É descritiva; 3) Há um interesse maior pelo processo do que pelos resultados ou produtos; 4) Normalmente os dados são analisados de forma indutiva; 5) O significado pelas coisas é importante. Essas características que os autores trazem sobre a investigação qualitativa se relacionam com está pesquisa, pois:

1. A pesquisa aconteceu em uma sala de aula, onde foi observado o comportamento dos sujeitos presente nela, analisando como eles procederam diante das situações impostas. Ou seja, a sala de aula é o ambiente natural dos sujeitos envolvidos como também do pesquisador, e os sujeitos foram avaliados conforme as suas

atitudes. Podemos dizer também que, por meio das observações e anotações do pesquisador, foram retirados os dados desta pesquisa. Logo, podemos dizer que a fonte direta de coleta dos dados é o ambiente natural e o investigador o instrumento principal.

2. Após a coleta de dados - e para que pudéssemos analisar como se procedeu à pesquisa - procuramos descrever os momentos vividos em cada encontro, através de uma descrição rica em detalhes, levando em consideração as ações realizadas pelos sujeitos e pelo pesquisador, observando os diálogos contidos durante os encontros bem como os registros escritos. Portanto, com base nas características por Bogdam e Biklen (1994), dizemos que a pesquisa é Descritiva.
3. Durante a investigação, a preocupação do investigador foi em observar como os sujeitos procederam para realizar as atividades, quais os métodos que utilizaram na resolução de cada problema. Com base nisso, podemos relatar que na pesquisa houve um interesse maior pelo processo do que pelos resultados ou produtos.
4. Ao analisarmos os dados, procuramos observar como se deram as justificativas apresentadas pelos sujeitos diante dos problemas apresentados, como também averiguamos a relação existente entre as contribuições que a metodologia Resolução de Problemas proporcionou ao ensino e aprendizagem das expressões algébricas. Por isso, a pesquisa foi analisada de forma indutiva.
5. Por fim, o significado pelas coisas foi importante, uma vez que, durante o processo da pesquisa, cada detalhe teve sua relevância, desde a base teórica, passando pelo desenvolvimento da pesquisa em campo, até às análises de dados. Cada parte do processo de pesquisa com seus por menores teve sua importância para o caminhar deste trabalho.

Ainda sobre a abordagem qualitativa e dialogando com as características que Bogdam e Biklen (1994) apresentam, André (1995) nos orienta que há uma valorização do entendimento expresso pelo indivíduo dentro de sua realidade, onde o pesquisador ao recolher e analisar os dados coletados não irá mensurar e sim interpretar dentro da realidade do indivíduo, levando em conta o contexto e a complexidade dessa realidade na qual o sujeito está inserido. Segundo a autora, nesse universo de pesquisa, o pesquisador não é neutro, ele precisa se envolver, interagir com os sujeitos pesquisados, visto que essa interação entre pesquisador e pesquisado abre espaço para que o sujeito pesquisado possa expor suas ideias com seus valores culturais, de modo que essas características serão levadas em conta durante as análises dos dados do pesquisador, o qual não buscará hipóteses e sim descobrir ideias.

A abordagem qualitativa apresenta vários tipos de pesquisas, a saber: estudo de caso, pesquisa ação, etnográfica, pedagógica, entre outras. Como a nossa investigação parte da preocupação com o ensino e aprendizagem de Álgebra, em especial as expressões algébricas, procuramos um tipo de pesquisa que atendesse às nossas necessidades enquanto professora e pesquisadora. Portanto, vimos que a pesquisa pedagógica vem ao encontro com nossa proposta de trabalho, que é trazer a resolução de problemas para tornar mais compreensivo o estudo de expressões algébricas, ou seja, traremos para nossa própria sala de aula uma intervenção com o propósito de suprir essas dificuldades de compreensão. Sobre isso Lankshear e Knobel (2008, p. 14) nos falam que "é por meio de sua própria pesquisa que os professores podem ficar atentos ao seu método de ensino, e detectar o que faz com que os alunos tenham um menor rendimento, aprendendo menos do que poderiam". Ainda sobre o que a pesquisa pedagógica pode favorecer, os autores comentam que com a "pesquisa pedagógica, o professor tem a oportunidade de testar a eficácia de intervenções que eles acreditam que possam melhorar os resultados da aprendizagem de alguns, ou mesmo de todos os seus alunos". (LANKSHEAR; KNOBEL, 2008, p. 14).

Para que pudéssemos responder à questão que norteia nossa pesquisa, "Que contribuições a Metodologia Exploração, Resolução e Proposição de Problemas pode propiciar ao ensino e aprendizagem de expressões algébricas de modo que se torne mais compreensivo para o aluno?", elaboramos uma sequência de atividades, que foi aplicada com alunos do 8º ano do ensino fundamental de uma escola estadual, localizada no município de Ingá-PB, da qual a pesquisadora também é professora.

Dos alunos da turma participantes da nossa pesquisa, apenas dois moravam na Zona Rural, logo acabavam chegando atrasados nas primeiras aulas ou tinham que sair mais cedo nas últimas, perdendo algumas partes desses momentos de experiência. Observamos que a maioria dos alunos apresentavam dificuldades em operações básicas na aritmética, o que acaba atrapalhando nas operações com termos algébricos.

5.2 A proposta didática para o desenvolvimento da pesquisa

Nesta seção estão descritas as atividades que foram planejadas para que pudéssemos atingir nossos objetivos. Para tanto, tomamos como base os referenciais teóricos aqui abordados. Em vista disso, utilizamos a Exploração, Resolução e Proposição de Problemas como ponto de partida para o ensino e aprendizagem de expressões algébricas, de forma a tornar o ensino deste conteúdo mais compreensivo para o aluno, uma vez que é uma recomendação dos nossos PCN que:

> A aprendizagem em Matemática está ligada à compreensão, isto é, à apreensão do significado; apreender o significado de um objeto ou acontecimento pressupõe vê-lo em suas relações com outros objetos e acontecimentos. Assim, o tratamento dos conteúdos em compartimentos estanques e numa rígida sucessão linear deve dar lugar a uma abordagem em que as conexões sejam favorecidas e destacadas. O significado da Matemática para o aluno resulta das conexões que ele estabelece entre ela e as demais disciplinas, entre ela e seu cotidiano e das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos. (BRASIL, 1997, p.19).

Para a escolha e elaboração das atividades, procuramos atender às recomendações dos PCN, da BNCC e dos autores Friedlander & Arcavi (2017). Trabalhamos também com base nas concepções de Álgebra e educação algébrica, especificamente a quarta concepção apresentada por Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), bem como a concepção apresentada por Sousa, Panossian e Cedro (2014), pois ao lermos suas pesquisas verificamos que esses autores apontam a importância da Resolução de Problemas na compreensão dos conteúdos algébricos.

Logo, procuramos desenvolver nossa pesquisa por meio da Metodologia Resolução de Problemas, com base na Exploração de Problemas, proposto por Andrade, S. (1998, 2017), uma vez que, conforme o autor, quando estamos explorando um problema, estamos procurando estratégias para resolvê-lo, como também a exploração pode fazer com que surjam novos problemas. Com isso, o processo permite ao aluno pensar, refletir, argumentar e justificar suas ações durante a exploração de problemas.

A fim de desenvolvermos as atividades elaboradas para nossa pesquisa, tivemos dez encontros, cada encontro com duas aulas de 45 min, totalizando 20 horas/ aulas. Essas aulas aconteceram no período de 6/ 11 a 29 /11. A maior parte das atividades foi desenvolvida em duplas, pois tínhamos a intenção de que os alunos pudessem entre si dialogar sobre os problemas e assim viessem a formular estratégias, trocar ideias e com vistas a tornar mais compreensivo o que estavam aprendendo, para que, em seguida, houvesse uma discussão com toda a classe e pudessem chegar a uma solução mais adequada. Ou seja, o objetivo era que eles compreendessem o problema, revisassem conceitos matemáticos vistos anteriormente e, consequentemente, apreendessem novos conceitos.

Como instrumento de levantamento dos dados, utilizamos cinco atividades que foram ocorrendo de acordo com a exploração que acontecia em torno delas. Contudo, algumas atividades necessitaram de mais encontros para a sua execução. Procuramos, então, elaboralas de modo que fossem desafiantes e motivadoras, para que o aluno sentisse necessidade de se engajar cada vez mais.

A seguir apresentamos uma síntese das atividades trabalhadas, as ideias e conceitos abordados e como ocorreu a Exploração dos Problemas.

Atividade 1- Observando e dialogando sobre o contexto histórico da álgebra

Esta atividade foi desenvolvida para que pudéssemos esclarecer as dúvidas dos alunos em relação ao porquê da utilização de letras na Álgebra, e conhecerem o processo de transformação da linguagem algébrica, bem como a contribuição de diversas civilizações para a evolução dos estudos em Álgebra. Para realizarmos essa atividade, não recorremos à perspectiva da Metodologia Exploração, Resolução e Proposição de Problemas; trabalhamos com recortes do contexto histórico da evolução da álgebra, para que os alunos tivessem conhecimento e compreendessem melhor essas transformações.

Atividade 2 - Introduzindo o conceito de expressões algébricas (A disputa entre amigos)

A atividade foi elaborada para que, por meio da Exploração de Problemas, o aluno pudesse compreender a noção de variável, como também criasse uma expressão algébrica para representar a situação. A Exploração do problema ocorreu por meio da Resolução do problema, com a mediação da professora e a interação dos alunos.

Atividade 3 - Trabalhando as expressões algébricas por meio de sequências (Desvendando padrões)

Nesta atividade buscamos trabalhar dentro da perspectiva da Exploração de Problemas de modo que o aluno pudesse compreender a criação de uma expressão algébrica para representar padrões. No decorrer da atividade, a exploração do problema ocorreu tanto pela Resolução do Problema, como pela Proposição de Problemas, que possibilitou aos alunos compreenderem a expressão algébrica criada para representar a sequência, bem como reforçar na compreensão da ideia de variável.

Atividade 4 - Compreendendo a função da variável através da Exploração de Problemas (Vou de táxi)

Por meio da perspectiva da exploração de problemas, nesta atividade os alunos trabalharam na construção de uma expressão algébrica, para generalizar a situação, e com isso visualizarem na expressão algébrica a relação de dependência entre as variáveis contidas na expressão algébrica. No decorrer da exploração do problema, verificamos que os questionamentos levantados pelos alunos e pela professora geraram novos problemas, novas reflexões, novas sínteses e novos resultados.

Atividade 5 – Bingo das Expressões Algébricas

Esta atividade foi trabalhada em quatro partes. Inicialmente, buscamos trabalhar junto aos alunos a linguagem usual e a linguagem algébrica por meio do jogo de bingo, de forma que pudessem compreender as diferenças nas linguagens (simbólica e retórica) e as transformações que ocorreram ao longo da evolução da Álgebra. Na segunda parte da atividade, os alunos escolheram três expressões do bingo para que pudessem somar de modo a obter expressões mais simples (equivalentes). Na terceira parte da atividade, recorremos à proposição de problemas para que os alunos, a partir de uma expressão, criassem um problema que justificasse a utilização das variáveis contidas na expressão. Por fim, foi proposto aos alunos planejar procedimentos que pudessem calcular o valor numérico das expressões algébricas contidas na cartela de bingo.

Com base nas atividades que foram desenvolvidas, procuramos analisar a pesquisa realizada, considerando o problema investigado, os objetivos da pesquisa e buscando estabelecer relações entre o referencial teórico e o material coletado pela professora/pesquisadora, de modo que pudéssemos identificar - por meio da produção escrita dos alunos e dos diálogos ocorridos durante a exploração dos problemas - as contribuições que a Metodologia Exploração, Resolução e Proposição de Problemas pode propiciar ao ensino e aprendizagem de expressões algébricas.

As atividades trabalhadas em sala de aula serão mais bem detalhadas no próximo capítulo.

6 DESCRIÇÃO E ANÁLISES DAS AULAS DESENVOLVIDAS NA PESQUISA

O período de realização desta pesquisa em sala de aula foi entre os dias 6 a 29 de novembro de 2019, onde tivemos 10 encontros com o total vinte aulas, desenvolvidas com alunos do 8º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública estadual. As atividades foram em maior parte realizadas em dupla, para que os alunos pudessem explorar os problemas propostos e encontrar procedimentos e estratégias para solucionar os problemas.

Durante as descrições, consideramos adequado evidenciar alguns diálogos realizados entre aluno e professora/pesquisadora e entre aluno e aluno. Observando por meio deles como ocorreu à exploração dos problemas, bem como perceber a compreensão dos alunos durante a codificação e a descodificação dos problemas, realizados entre a professora e os alunos.

Para discorrermos esses diálogos, preferimos utilizar símbolos que identificassem a fala tanto dos alunos como da professora-pesquisadora. Portanto, utilizamos para alunos (as) $A_{1,}$ A_2, $A_{3,\ldots,}$ $A_{25,}$ tomando como base a ordem dos alunos no diário de classe e, para identificar a fala da professora-pesquisadora, usamos PP. Nas descrições, veremos que alguns alunos, considerados mais desinibidos, aparecem mais nos diálogos, porém a professora-pesquisadora tentou mediar a discussões com todos os alunos, uma vez que, quando um aluno argumentava sobre algo das atividades, a professora procurava dialogar com toda a turma para que todos pudessem compartilhar as dúvidas e assim compreenderem o que estava sendo proposto.

Durante as atividades em sala de aula e com posse dos materiais escritos dos alunos, procuramos analisar se eles conseguiram compreender o problema; como procederam durante a exploração do problema, quais as estratégias e argumentos utilizaram para tentar solucioná-los; quais as dificuldades apresentadas por eles ao tentar resolver os problemas, e quais as contribuições que a Metodologia Exploração, Resolução e Proposição de problemas pode proporcionar na compreensão de expressões algébricas.

A seguir apresentamos a descrição e análise dos encontros, assim como as atividades que foram desenvolvidas na pesquisa.

6.1 O início das discussões: o porquê de letras (x) na álgebra.

Neste tópico está descrito um diálogo que começou com uma inquietação de uma aluna sobre o porquê da utilização da letra em Álgebra. É importante salientar que, no momento em que ocorreu esse diálogo, a professora-pesquisadora ainda não tinha começado a fazer a pesquisa, muito menos a mencionado aos alunos, os quais, no momento, estavam concluindo uma atividade sobre Pontos notáveis do triângulo. Assim, por coincidência, a aluna A_9 fez alguns questionamentos à professora- pesquisadora:

> **A_9** – “Por que temos que estudar com x, professora? De onde vem esse x? Não sei para quê criaram álgebra. É só para confundir a mente da pessoa, nam”.

Comentário: Quando a aluna fez esses questionamentos à professora, foi possível identificar em sua fala uma falta de compreensão sobre álgebra, em específico o porquê da utilização das letras. Nestes questionamentos também é possível analisarmos a insatisfação da aluna em estudar álgebra. Algo que é comum verificarmos em sala de aula enquanto professora, como também enquanto pesquisadora, pois foi possível observar nas literaturas analisadas o desestímulo de muitos alunos com o ensino de álgebra, uma vez que não conseguem compreender o que é ensinado. Como mostra Sousa, Panossian e Cedro (2014, p. 46) “Apesar do papel importante que a álgebra tem na formação dos estudantes, temos percebido que o seu ensino não tem conseguido torná-lo relevante para o desenvolvimento dos sujeitos”.

Vale ressaltar que a turma é composta por alunos do 8º ano do ensino fundamental II, ou seja, os alunos dessa turma, de acordo com o conteúdo curricular proposto pelos PCN, já obtiveram um primeiro contato com a Álgebra no ano anterior (7º ano), pois, de acordo com os PCN, é no 7º ano do ensino fundamental que os alunos farão a:

> Utilização de representações algébricas para expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas e regularidades observadas em algumas sequências numéricas/ Compreensão da noção de variável pela interdependência da variação de grandezas/ Construção de procedimentos para calcular o valor numérico de expressões algébricas simples. (BRASIL, 1998, p. 72)

Porém, por mais que os alunos tenham visto o conteúdo no 7º ano, muitas vezes são aplicados de forma mecânica, por meio de exercícios repetitivos e ainda mediados pela concepção que o professor tem sobre álgebra e educação algébrica, como nos lembram Sousa, Panossian e Cedro (2014), e como vimos no capítulo dois desta pesquisa, influenciando diretamente na aprendizagem dos alunos que não conseguem levar para os anos seguintes este conhecimento.

Na fala da aluna observamos uma curiosidade em saber de onde vem o x, como também uma falta de entendimento no porquê estudá-lo. Diante desse contexto, sentimos a necessidade e a importância de se trabalhar a história da matemática em sala de aula. Neste caso a história da álgebra, como nos sugere Sousa, Panossian e Cedro (2014, p.170), ao mencionar que "Não é possível compreender o que é a álgebra sem o acesso ao seu movimento lógico e histórico, sem considerar como se deu seu desenvolvimento ao longo da experiência histórica da humanidade". Assim, o que os autores propõem não é uma história apenas como recurso motivador para sala de aula, ou seja, a história pela história, mas sim trazer para o aluno e para o professor um resgate de informações, de conceitos que foram construídos por civilizações e que se modificaram à medida que o próprio Homem foi evoluindo.

Retomando a discussão levantada pela aluna A_9 sobre o porquê de letras em Álgebra

Aproveitando a ocasião, a professora pediu a atenção da turma para dialogar sobre os questionamentos levantados pela aluna A_9, sobre o ensino da álgebra. Logo, a professora perguntou aos alunos o que eles lembravam de ter estudado sobre álgebra no 7º ano. No momento, alguns já foram dizendo: "álgebra é muito ruim", outros disseram "é aquilo que tem letra é professora?". Ainda um ou outro disse: "eu não lembro de nada".

Comentário: Observamos que a insatisfação apresentada pela aluna A_9 também era a mesma da maioria dos alunos. Compreendemos também que eles sabiam que, ao estudar com álgebra, utilizamos letras, porém eles não compreendiam o porquê utilizavam letras e o que elas representavam.

Foi então que a professora comunicou à turma que nas próximas aulas eles iriam começar a estudar os conteúdos relacionados à álgebra, iniciando então por Expressões Algébricas, e que iriam estudar numa perspectiva metodológica diferente do que estavam habituados. Além disso, ficou claro que tudo faria parte de sua pesquisa de mestrado a qual buscava trabalhar o ensino de álgebra através da Metodologia Exploração, Resolução e Proposição de Problemas, de modo que eles pudessem aprender de forma mais compreensiva. Por fim, a professora observou que alguns alunos ficaram curiosos em saber como estariam trabalhando esses conteúdos. Após as discussões, os alunos retomaram a atividade que estavam fazendo sobre pontos notáveis no triângulo.

6.2 Atividade 1 - Observando e dialogando sobre o contexto histórico da álgebra.

Após os alunos entrarem na sala de aula e se sentarem, a professora esperou que eles se organizassem para que ela pudesse começar a aula. Quando eles ficaram em silêncio, ela os lembrou de que começariam a estudar sobre álgebra e que eles estariam participando de sua pesquisa. Logo, tudo que os alunos fizessem em sala de aula estaria sendo de grande importância para o enriquecimento da pesquisa, bem como para o prosseguimento avaliativo deles durante o bimestre escolar.

Na ocasião, a professora explicou a eles como ocorreriam as atividades, as quais seriam problemas, na maioria das vezes realizados em duplas, e que, por meio da exploração desses problemas, iriam acontecer diálogos com a professora, como também entre eles e com outras duplas, de modo que pudessem compartilhar as estratégias e as justificativas que tomaram para solucionar o problema, sempre através da mediação e análise da professora.

Enquanto a professora explicava como aconteceriam as atividades, o aluno A_5 foi logo perguntado quanto valeria por respostas corretas. Então a professora respondeu que ela não estaria apenas avaliando o que eles fizessem de certo ou errado, mas sim estaria dando uma atenção maior aos procedimentos que eles utilizariam durante a exploração dos problemas. Neste sentido, a preocupação inicial era que os alunos pudessem de fato se envolver no problema, pois isso é umas das propostas da exploração de problemas como nos orienta Andrade, S. (2017).

A professora, durante o diálogo com os alunos, aproveitou para comentar que era importante que eles não faltassem às aulas, pois em cada atividade realizada eles estariam revendo conteúdos matemáticos anteriores, bem como adquirindo novos conhecimentos matemáticos.

Retomando a discussão sobre o porquê das letras em Álgebra

Após a explicação sobre como procederiam às atividades, a professora retomou ao questionamento feito pela aluna A_9, a qual indagou: “Por que temos que estudar com x, professora? De onde vem esse x?”.

PP: "Vocês lembram-se da pergunta de A_9 sobre por que estudamos com x, pessoal? E que ela me perguntou de onde vem o x. Alguém sabe dizer de onde vem?"

A_{18}: "Ah, professora eu me lembro sim desse conteúdo, eu estudei em equações ano passado".

A_9: "Sim eu também me lembro, quer dizer mais ou menos, mais tu sabe de onde vem esse x?"

A_{18}. "Sei sim, menina, veio lá dos algarismos romanos, eles pegaram o x de lá e saíram usando".

PP. "Quer dizer que eles pegaram o x de lá, e saíram usando na álgebra. Mas, você sabe o que representa o x em algarismos romanos A_{18}?"

A_{18}: "Sei sim, professora, x vale 10 em algarismos romanos."

PP. "Então se x vale 10, ao estudamos o x na álgebra, no caso de equações já que você citou que lembra desse conteúdo, o x só valia 10?"

A_{18}: "Não, ele dava outros resultados também."

A_9. "Oh, menino, cala a boca. Tu não sabe o que tá falando, só confundi a pessoa mais ainda."

PP. "Não A_9, é importante sim que todos falem, se tiver dúvida ou algo para comentar."

A professora então lembrou-lhes que o x estudado nos algarismos romanos é um símbolo utilizado para representar a quantidade 10. Porém, essa letra também é utilizada na Álgebra e nem sempre ela representa o número 10, uma vez que dependerá da situação em que a letra se encontra.

A professora então foi explicar aos alunos e escreveu no quadro a seguinte equação: $x + 2 = 12$, comentando que, neste caso, o x era 10, pois o único número que somado com 2 que daria 12 seria o 10. Porém, ao fazer $x + 3 = 7$, o x neste caso não poderia ser mais 10, e sim 4, pois ao ser somado com 3, seria igual a 7. Sendo aqui o (x) mais conhecido como incógnita, visto que assume um único valor na equação que está sendo trabalhada.

Mas, quando temos $x + 2$, sem ter igual a outro número, não poderemos dizer que x será uma incógnita, pois, neste caso, o x pode ser qualquer número que pode ser somado com 2. Sendo então nesta situação chamado de variável.

Após as explicações realizadas no quadro pela professora os alunos puderam compreender melhor a diferença da letra x utilizada nos algarismos romanos e na Álgebra.

Comentário: Observamos as dificuldades dos alunos em diferenciar o *x* contido nos algarismos romanos e o *x* pertencente à linguagem algébrica. A pesquisadora Lesley R. Booth (1995), em sua pesquisa realizada em 1989, com alunos de 7º e 8º série, já mencionava a dificuldade dos alunos em diferenciar as letras utilizadas na matemática, como no caso da letra *m* que é utilizada para representar metros na aritmética, uma vez que ela é uma unidade de medida de comprimento, a exemplo de: A altura de um prédio é de 30 m. Porém, o *m* na álgebra seve para indicar a quantidade de metros, a exemplo de: Quantos metros um ciclista percorreu durante um tempo de 20 s, com a velocidade média de 30 m/s?

A professora então trouxe para os alunos alguns recortes históricos da álgebra em folha (Anexo A) e os entregou. Em seguida começou a explanar o processo de surgimento da álgebra, assim como as contribuições de algumas civilizações para a evolução dos conceitos algébricos e as fases da notação algébrica (retórica, sincopada e simbólica).

Comentário: Com a explicação da professora, os alunos puderam tirar algumas dúvidas do porquê estudarmos álgebra, e por que utilizamos letras (em questão o *x*). Foi possível observar que, quando o professor trabalha em sala de aula com a história dos conceitos matemáticos, possibilita ao aluno perceber que a Matemática não é uma ciência imutável, e sim uma ciência dinâmica, que foi evoluindo de acordo com o Homem. Sousa, Panossian e Cedro (2014) trazem a Matemática como uma ciência que sofre modificações, que tem um movimento, ou seja, que tem vida. Logo, os autores trazem uma proposta de trabalho para o ensino da álgebra que consiste em trabalhar os conceitos algébricos, observando seu movimento histórico e lógico, como abordamos no capítulo 2 desta pesquisa.

Após as explicações, a professora combinou com os alunos que na próxima aula eles começariam a realizar algumas atividades e que evitassem faltar para não perder as explicações e os pontos referentes às atividades.

6.3 Atividade 2 – Introduzindo o conceito de expressões algébricas

Para a realização dessa atividade utilizamos quatro aulas, sendo dois encontros de duas aulas cada. De início, nosso encontro começou nas duas primeiras aulas, logo a primeira aula começava às 7 h, porém alguns alunos chegavam um pouco atrasados, então a professora esperou mais ou menos 15 minutos para, então, poder iniciar as atividades. Quando findou o tempo de tolerância, a professora observou que todos os alunos haviam chegado, então pediu para que fizessem duplas, porém, como a sala estava com 25 alunos, um grupo ficou com três alunos. Para a formação das duplas, a professora não estipulou quem seriam os participantes, para que eles pudessem ficar mais à vontade, no entanto, alguns alunos não queriam fazer a atividade em dupla, mas a professora conseguiu convencê-los que seria melhor, pois um ajudaria o outro, possibilitando a troca de conhecimento.

Após as duplas estarem formadas, os alunos receberam uma cópia impressa do problema, realizaram a leitura e, em seguida, começaram a resolver a atividade.

ATIVIDADE 2. A DISPUTA ENTRE AMIGOS

Ideia:

Noção de variável, criação da expressão algébrica.

Objetivo:

Trabalhar por meio da exploração do problema de forma que o aluno compreenda a utilização da variável e a construção da expressão algébrica.

Em uma loja* da cidade, o dono colocou uma máquina para seus clientes jogarem. O jogo funcionava da seguinte forma: o jogador tinha que comprar uma ficha que custava RS 1,00. Ao iniciar o jogo na máquina, ela sorteava um número, e em seguida, realizava a operação, liberando um novo número, que seria para poder receber um prêmio de acordo com as regras estabelecidas.

- Saída de número entre 0 e 10→5,00 reais
- Saída de número a partir de 10 →7,00 reais
- Saída de número menor ou igual a 0 → não ganha
- Saída de número maior ou igual a 20→ não ganha

Carlos e Lucas decidiram jogar e verificar quem ganhava mais dinheiro. Eles realizaram cinco rodadas. A tabela a seguir mostra os números sorteados por rodada.

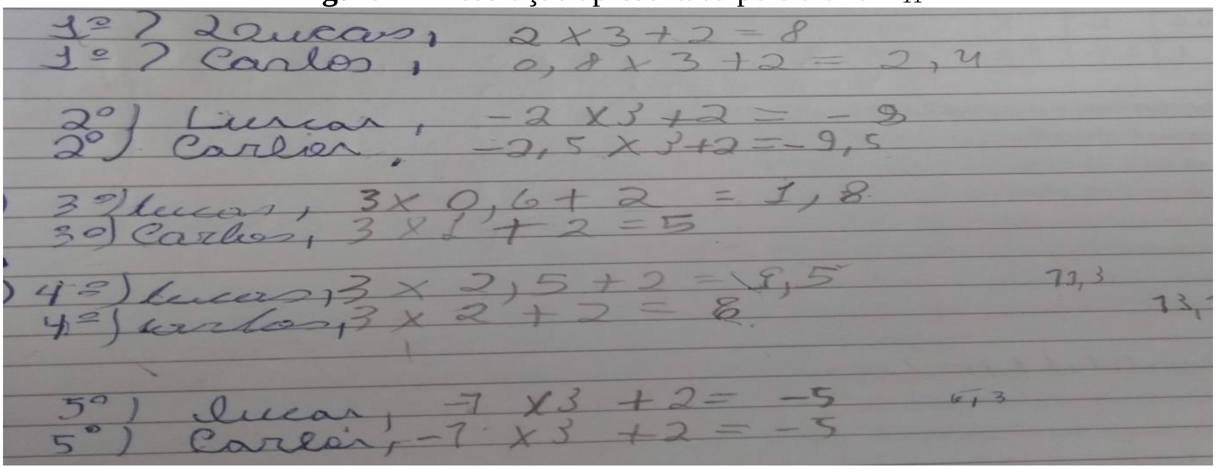
Rodadas	1º	2º	3º	4º	5º
Lucas	2	-2	0,6	2,5	-1
Carlos	0,8	-2,5	1	2	-1

a) Observando os números sorteados por Lucas e Carlos, quais foram os números gerados em cada rodada por eles?
b) Quais os pontos de Lucas e Carlos?
c) Quanto Lucas e Carlos ganharam em dinheiro?
d) Se entrasse nessa máquina um número x, qual seria o novo número gerado?
e) Se entrasse na máquina y, qual seria o novo número gerado?
f) Lucas tirou outro número e colocou na máquina e não mostrou a Carlos, mas disse que o novo número gerado era 14. Qual número ele colocou na máquina?
g) Carlos também tirou um número e não mostrou a Lucas. Mas, disse que o novo número gerado foi 11. Qual o número que ele colocou na máquina?

*loja fictícia

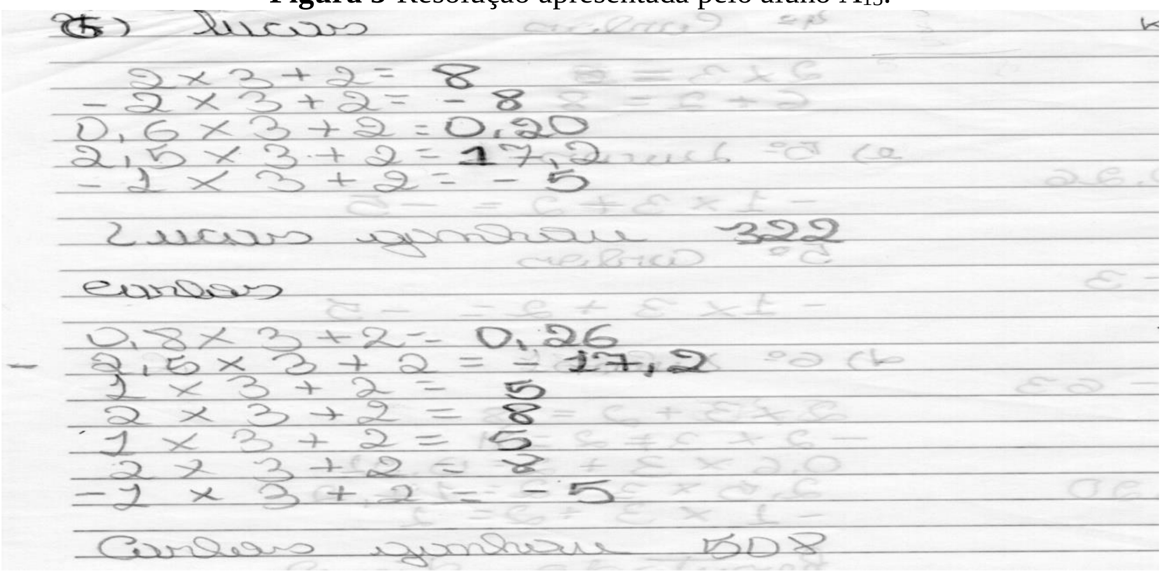
Comentário: Nesta primeira atividade, os alunos precisavam observar as regularidades numéricas a partir dos dados organizados em tabela, porém, por mais que a professora tenha sugerido a eles que fossem organizando os valores encontrados em uma tabela, eles não acataram e decidiram fazer à sua própria maneira. Foi possível constatar que a maioria foi fazendo o item "a" desta atividade, calculando os valores de cada jogador por rodada, como vemos na figura 4, no entanto uma dupla fez os cálculos por jogador, como identificamos na figura 5.

Figura 4 - Resolução apresentada pelo aluno A_{11}



Fonte: Acervo da pesquisadora

Figura 5-Resolução apresentada pelo aluno A_{13}.



Fonte: Acervo da pesquisadora

O trabalho com exploração de problemas favorece um ensino mais dinâmico, ou seja, o aluno é livre para pensar que caminho poderá trilhar para chegar à resolução do problema e poder ir além dela, e esse caminho que vai sendo trilhado acaba contribuindo para sua compreensão e o desenvolvimento de ideias e conceitos.

No primeiro item “a” desse problema, os alunos deveriam pegar o número sorteado por cada jogador, multiplicar por três e somar o resultado com dois. Observando assim a regra para se resolver uma expressão numérica, que também serve para resolver expressões algébricas. Porém, constatamos muitas dificuldades dos alunos em compreender a ordem de se resolver essas operações, como também verificamos que os alunos apresentaram dificuldades em fazer cálculos com números inteiros, como a relação de sinais vista na multiplicação e a adição com números inteiros. Observamos também as dificuldades deles em relação às operações com os números decimais, como podemos ver no diálogo abaixo.

> **A_7**: “Professora, como faço para multiplicar com vírgula?”
>
> **PP:** “Você pode multiplicar normalmente, mas no resultado não se esqueça de colocar a vírgula.”
>
> **A_7:** “Como assim professora, não entendi!”.
>
> Como outros alunos também disseram que não conseguiam fazer os cálculos com decimais, então à professora decidiu chamar a atenção de todos.
>
> **PP**: “Pessoal, prestem atenção aqui em mim. Será que 3 vezes 8 é igual a 3 vezes 0,8?”
>
> **A_{23} “**Eu acho que não professora.”
>
> **PP:** “Por que você pensa que não?”
>
> **A_{23}**: “Porque 3 vezes 8 é 24, mas 3 vezes 0,8 é 2,4.”
>
> **PP:** “Muito bem A_{23}. Mas, por que tem gente que acaba colocando 3 vezes 0,8 sendo 24?”
>
> **A_7:** “Porque se esquece de colocar a vírgula. Mas, como faço para colocar essa vírgula mesmo professora?”
>
> **PP**: “Quando multiplicamos o 3 com o 8, significa que o 8 vai ser somado 3 vezes, ou seja, 8 +8+8 que dá 24, então ao fazermos 3 vezes 0,8, também somamos 0,8 + 0,8 + 0,8 que dá 2,4.”
>
> **A_7:** “Então basta somarmos.”
>
> **PP:** “Neste caso fica fácil visualizarmos a soma, porém teremos números maiores que 3, aí o melhor modo é fazer pelo algoritmo da multiplicação. Então, você

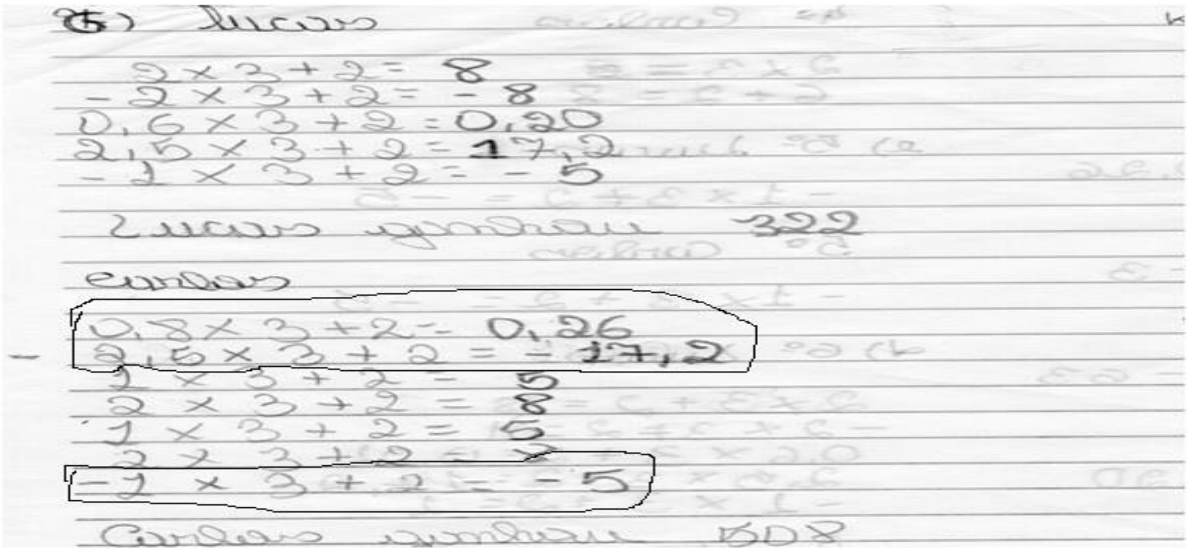
arma a conta como se fosse números inteiros e no final, você coloca a vírgula contando as casas da direita para esquerda. A quantidade de casas que você vai deslocar a vírgula vai depender da quantidade de casas que tem após a vírgula dos números que serão multiplicados.”

A$_7$: “Ah! entendi professora, vou tentar aqui e depois lhe mostro.”

PP: “Lembrando pessoal que essa regra é na multiplicação, na adição lembrem-se de colocar vírgula abaixo de vírgula para poder somar ou subtrair.”

Logo após as explicações, os alunos foram tentar fazer as multiplicações que tinham com números decimais. Porém, alguns apresentaram dificuldades em somar número inteiro com número decimal, como observamos na figura 6, em que o aluno não respeita a posição da vírgula ao realizar as somas, como também não faz a relação de sinais durante a adição.

Figura 6 - Resolução apresentada pelo aluno A$_{13}$.



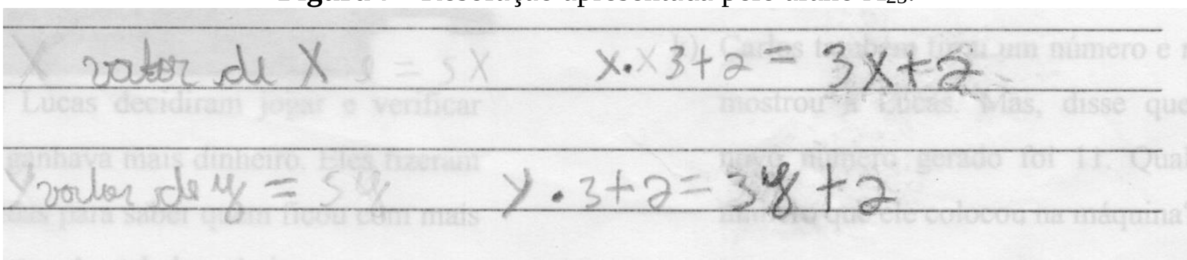
Fonte: Acervo da pesquisadora

Comentário: Por mais que a professora realizasse várias intervenções entre as duplas de como tinham que realizar os cálculos de multiplicação e adição, constatamos que as duplas não conseguiram fazer a adição com números positivos e negativos, chegando a valores errados de saída da máquina. Vimos em Booth (1995) que, quando o aluno não compreende bem os procedimentos realizados na aritmética, o seu desempenho em Álgebra acaba sendo afetado.

No item “b” desta atividade os alunos tinham que observar os números gerados por cada jogador e verificar entre que números eles tinham ficado para saber quanto ganharia em dinheiro que, no caso, seria a resposta da letra “c”. Durante esse item “b” os alunos não apresentaram muita dificuldade, uma vez que, era apenas visualizar entre que números o novo número gerado estava. Porém, observamos que a maioria dos alunos não tinham conseguido realizar os cálculos corretamente com os números negativos e nem com os decimais no item “a”, portanto os valores que seriam convertidos em dinheiro na maioria não estavam corretos.

Nas letras “d” e “e”, os alunos deveriam utilizar as variáveis x e y e operar na máquina como vinham fazendo com os números, e assim chegar a uma expressão algébrica que representasse a relação de entrada e saída da máquina. Como podemos ver na figura 7.

Figura 7 - Resolução apresentada pelo aluno A_{23}.



Fonte: Acervo da pesquisadora

Durante o diálogo a seguir, é possível constatar que alguns alunos conseguiram identificar o que fariam com a letra, como também o que ela passaria a representar ao ser encontrada a expressão.

> **PP:** “E aí ,pessoal, já responderam a letra ‘d’?”
> **A_{11}:** “Eu já professora, achei fácil.”
> **PP**: “Achou? Que bom! Então, como devemos proceder?”
> **A_{11}:** “Professora, eu entendi que tenho que pegar o x, multiplicar com 3 e em seguida somar com 2.”
> **PP:** “Mas, o que significa esse x mesmo?”.

Neste momento, o aluno A_{18} foi logo intervindo e respondeu: “agora eu sei, o x representa um número desconhecido, que aqui no problema é qualquer número que entra na máquina”.

> **PP:** “Muito bem, pessoal. E no item ‘e’?”.

A_7: “Faremos do mesmo jeito, só que em vez de entrar o x vai entrar o y, que também representa um número qualquer.”

Comentário: Mesmo com os diálogos envolvendo toda a sala, a partir dos quais os alunos iam expondo seus argumentos para que todos ouvissem, ainda houve alguns alunos que não compreenderam como tinham que trabalhar com as letras x e y. Eles não entendiam como teriam que multiplicar e somar. Porém, a professora fez outras mediações junto às duplas que não compreendiam para que assim pudessem seguir com a atividade. No entanto, quando os alunos se depararam com a expressão 3x + 2, começaram novamente as discussões, “professora 3x + 2 é 5x?”.

PP: “O que significa 5x, para vocês?”
A_{23}: “5x (pensativo). Sei lá, que eu tenho 5x.”
PP: “Sim, tá certo. Mas, como você pode representar isso, venha expor aqui no quadro.”
A_{23}: “Acho que 5x é x + x + x+ x +x, não é isso.”
PP: “É sim, A_{23}.”

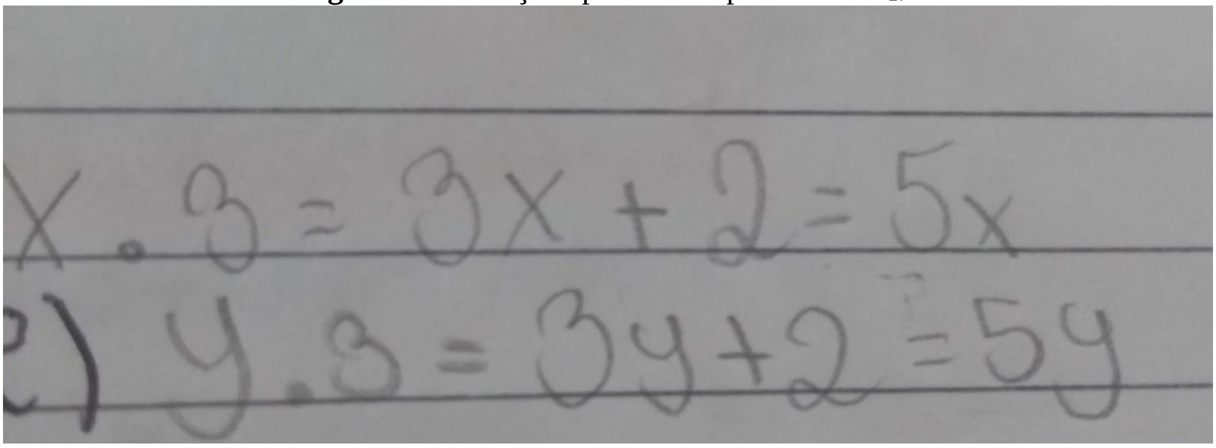
Neste momento a professora mediou junto à turma, dialogando sobre o procedimento realizado pelo aluno e comentou que o procedimento que o aluno A_{23} havia feito era uma soma de parcelas iguais, ou seja, tínhamos uma multiplicação de 5 vezes o x que, neste caso, era representado pela justaposição, ficando assim 5x.

Continuando o diálogo...

A_{23}: “Ah tá, entendi.”
PP: “Então, quando dizemos 3x + 2, teremos 5x?”
Alunos: “Não.”
PP: “Então como podemos representar 3x + 2, usando o raciocínio que o aluno A_{23} usou para representar 5x?”
A_{11}: “Professora é fazendo x+ x+x + 2?”
PP: “Isso ai.”
A_{11}: “Então eu deixo como resultado 3x + 2.”
PP: “Isso mesmo.”

Comentário: Após o diálogo que ocorreu entre a professora e os alunos A_{11} e A_{23}, outros alunos puderam compreender que 3x + 2 não corresponde 5x. No entanto, alguns alunos não tiveram essa mesma compreensão e acabaram fazendo 3x+ 2= 5x. Como vemos na figura 8:

Figura 8-Resolução apresentada pela aluna A_{17}.



Fonte: Acervo da pesquisadora

Ao analisarmos o registro da aluna A_{17} na figura 8, vemos a dificuldade em não conseguir compreender que uma expressão algébrica nem sempre, ao simplificar, chegará a um único termo. Sobre isso Booth (1995) já comentava que vários casos podem ser analisados nesta situação, como: a ausência do fechamento, e com isso a não aceitação da expressão algébrica como resposta quando ficar com mais de dois termos; as notações da aritmética como o sinal de mais e a igualdade levando o aluno a tender a um único termo.

Nos itens “f” e “g” os alunos teriam que encontrar o número de entrada tendo o número de saída. Nesses itens, os alunos também apresentaram um pouco de dificuldade em compreender e logo foram solicitando a presença da professora. Então, a professora pediu para que eles tivessem calma e refizessem a leitura do processo que a máquina realizava quando entrava um número, prestando mais atenção nas operações que o número realizava ao entrar.

A_9: “Já li professora.”

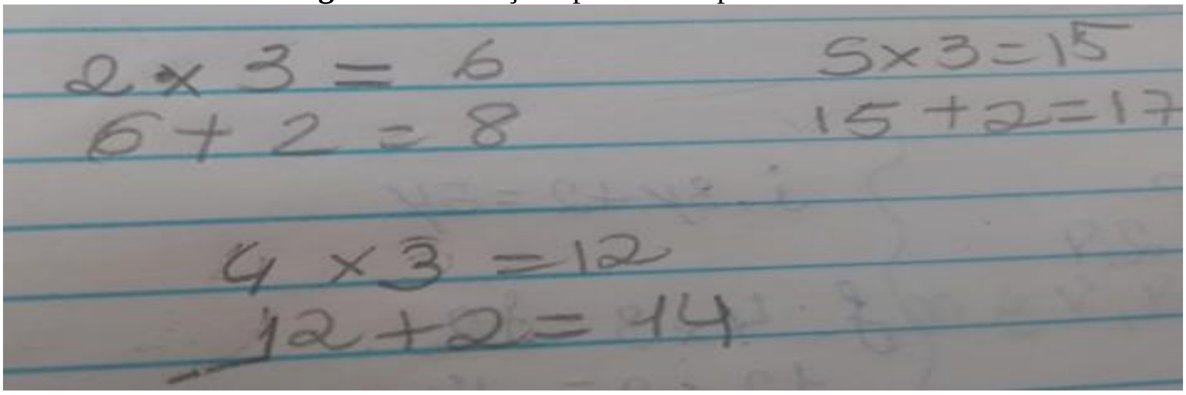
PP: “E o que você vai fazer para encontrar o número que entrou tendo o número de saída?”

A_9: “Vou ficar tentado aqui, pegar um número qualquer multiplicar por 3 e somar com 2 para ver se vai dar 11.” (figura 9)

PP: “Se você acha que assim pode conseguir...”.

Comentário: Depois que a aluna A_9 comentou que faria por tentativa, como mostra a figura 8, outros alunos também decidiram seguir o mesmo raciocínio e foram fazer por tentativa e erro, não parando para observar que da saída para entrada bastava fazer a operação inversa de como se apresentava na máquina.

Figura 9-Resolução apresentada pela aluna A_9.



Fonte: Acervo da pesquisadora

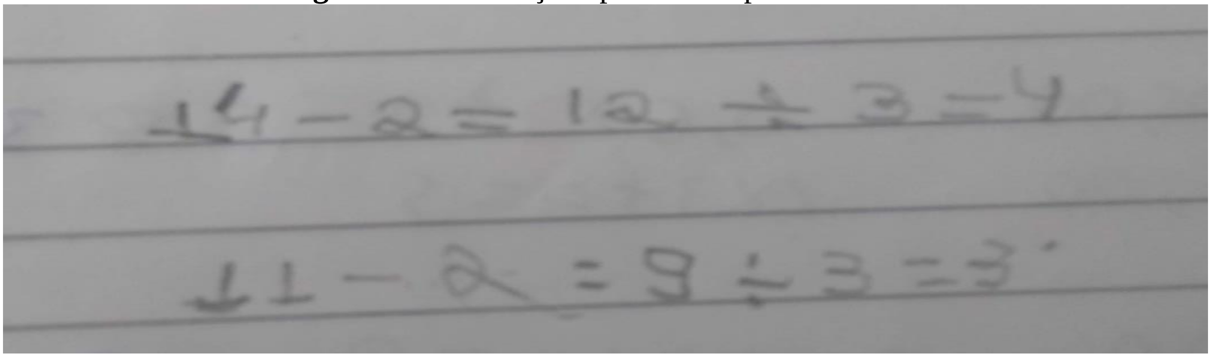
Passando alguns minutos, o aluno A_{23} percebeu como poderia realizar os itens “f” e “g” pelas operações inversas. Então se dirigiu à professora e falou que iria pegar o número de saída, tirar 2 e o resultado dividir por 3.

PP: “Faça, então, para ver se dará certo.”

A_{11}: “Deu certo sim, professora, eu fiz aqui.” (risos)

Após o aluno A_{23} ter percebido que fazendo as operações inversas chegaria mais rápido ao resultado, os outros alunos também puderam fazer essa mesma constatação como vemos na figura 10.

Figura 10 - Resolução apresentada pelo aluno A_7.



Fonte: Acervo da pesquisadora

Outros alunos também conseguiram perceber o que o aluno A_{23} observou, e logo começaram a tentar fazer, seguindo o mesmo raciocínio. Então a professora aproveitou o momento e falou que isso era possível, pois ele tinha feito as operações inversas, no caso a subtração era a operação inversa da soma e a divisão da multiplicação, e lembrou-os da importância de entender as operações inversas, pois servem de base para resolver equações.

Quando todos terminaram, a professora perguntou aos alunos o que eles tinham aprendido com aquela atividade. E, logo, alguns foram falando: “vimos que o x representa um número desconhecido”, “a expressão 3x+2 representa a situação geral da máquina”, “que 3x + 2 não é 5x”. Com todas essas observações dos alunos, a professora pôde dialogar sobre a utilização da variável no problema que foi trabalhado em sala de aula, como também definir o que era expressão algébrica; os termos da expressão algébrica; classificação da expressão de acordo a quantidade de termos (monômio, binômio, trinômio e polinômio), e também sobre soma de monômios. Após o término da atividade e as explicações da professora, os alunos puderam compreender melhor o que era expressão algébrica, variável e soma de monômios.

Nesta primeira atividade foi possível analisar um avanço considerável na aprendizagem dos alunos em relação ao que representa a letra na álgebra, como também sobre o que é uma expressão algébrica e como podemos trabalhar com ela. Constatamos que o trabalho com a Metodologia Exploração, Resolução e Proposição de Problemas propicia um ambiente mais acessível ao diálogo entre alunos e professora, bem como entre aluno e aluno, gerando um conhecimento compartilhado pois percebemos que durante as discussões, quando um aluno tirava dúvidas ou defendia seus argumentos diante da atividade, outros alunos iam interagindo a ponto de poderem compreender também o problema. Sobre isso Andrade, S. (2017, p. 370) defende que durante a exploração do problema “o trabalho feito por um aluno pode ajudar na compreensão do problema por parte de outro aluno...”.

Com essa atividade já foi possível observar uma diferença na postura de muitos alunos que antes eram mais calados, durante a exposição dos conteúdos e das atividades realizadas em sala, passando a interagir e participar mais das aulas, sendo, assim, construtores de seu próprio conhecimento, uma vez que, ao trabalharmos com a exploração de problemas, a atividade passa a ser mais atraente ao aluno, sendo nítido o seu interesso e o engajamento durante a resolução do problema, passando a buscar meios para solucionar, e com isso formando argumentos para o que está sendo realizado, à medida que também vai revendo conceitos anteriores e chegando a novos.

6.4 Atividade 3 - Trabalhando as expressões algébricas por meio de sequências

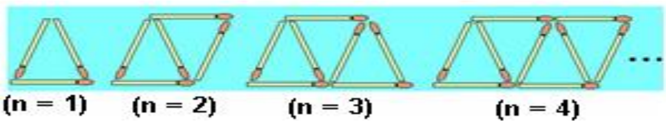
Para a realização desta atividade tivemos dois encontros, no total de quatro aulas. No primeiro encontro estavam presentes na sala de aula 21 alunos, os quais já sabiam que tinham que formar duplas, porém, sobrou um aluno que não quis entrar em nenhuma dupla, preferindo assim realizar a atividade sozinho. Após os alunos se separarem em duplas, foi entregue a atividade impressa e, em seguida, a professora pediu para que eles realizassem uma primeira leitura individual.

ATIVIDADE 3. DESVENDANDO PADRÕES

Ideia: Noção de Variável e Criação de uma expressão algébrica

Objetivos: Representar em forma de expressão algébrica a regularidade da sequência através da Exploração, Resolução e Proposição de problemas.

1) As figuras mostradas abaixo estão organizadas dentro de um padrão que se repete.



Fonte: https://profwarles.blogspot.com/2013/05/questoes-por-descritor.html
Observando a sequência quantos palitos terão na:

a) 5º posição?
b) 6º posição?
c) 7º posição?
d) 10º posição?
e) 15º posição?
f) 100º posição?
g) Mantendo essa disposição, como podemos representar com uma expressão algébrica a quantidade de palitos para uma posição qualquer.

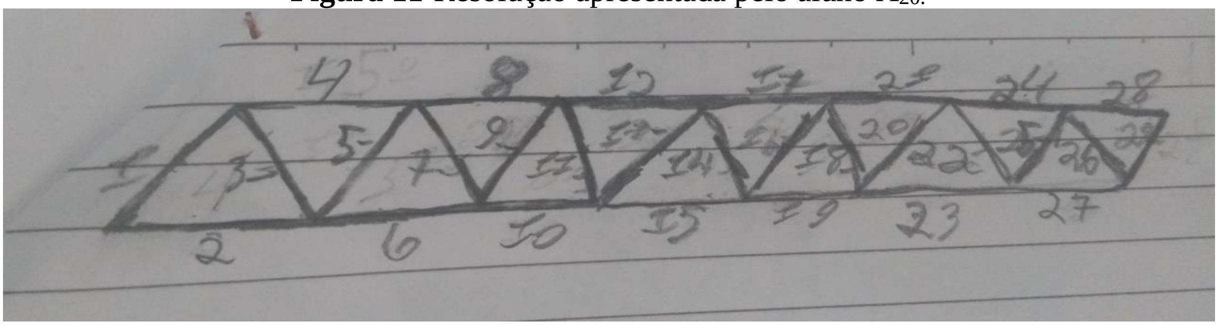
Nesta terceira atividade buscamos trabalhar com sequências por acreditarmos que este tipo de atividade pode contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico, uma vez que ressalta a ideia de trabalharmos a percepção de regularidades (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993). Além disso, a sequência pode favorecer a compreensão da formação da expressão algébrica. No entanto, Sousa, Panossian e Cedro (2014) fazem uma ressalva sobre o trabalho com sequências, uma vez que este pode não propiciar ao aluno um entendimento do que seja a função da variável e da expressão algébrica encontrada. Logo, acreditamos que esta atividade elaborada na perspectiva da exploração, resolução e proposição de problemas, favoreceu esse entendimento.

Posterior a leitura, os alunos começaram a convocar a presença da professora para tirar algumas dúvidas sobre a atividade. Ela então explicou que eles tinham que observar a sequência e, em seguida, explorá-la por meio da figura apresentada respondendo às perguntadas solicitadas. A professora também comunicou que, ao descobrirem a quantidade de palitos nos primeiros itens da atividade, registrassem o raciocínio que tiveram para chegar a essa quantidade, por mais que parecesse óbvio o resultado inicial, uma vez que o registro realizado poderia os ajudar na construção do pensamento algébrico.

Após as explicações, os alunos foram tentando resolver os primeiros itens do problema, sem apresentarem tantas dificuldades, por mais que eles tivessem que registrar como chegaram à solução.

Analisando os registros dos alunos referentes aos cinco primeiros itens da atividade, constatamos que uns seguiram o raciocínio de continuar descobrindo a quantidade de palitos desenhando as figuras seguintes como vemos na figura 11.

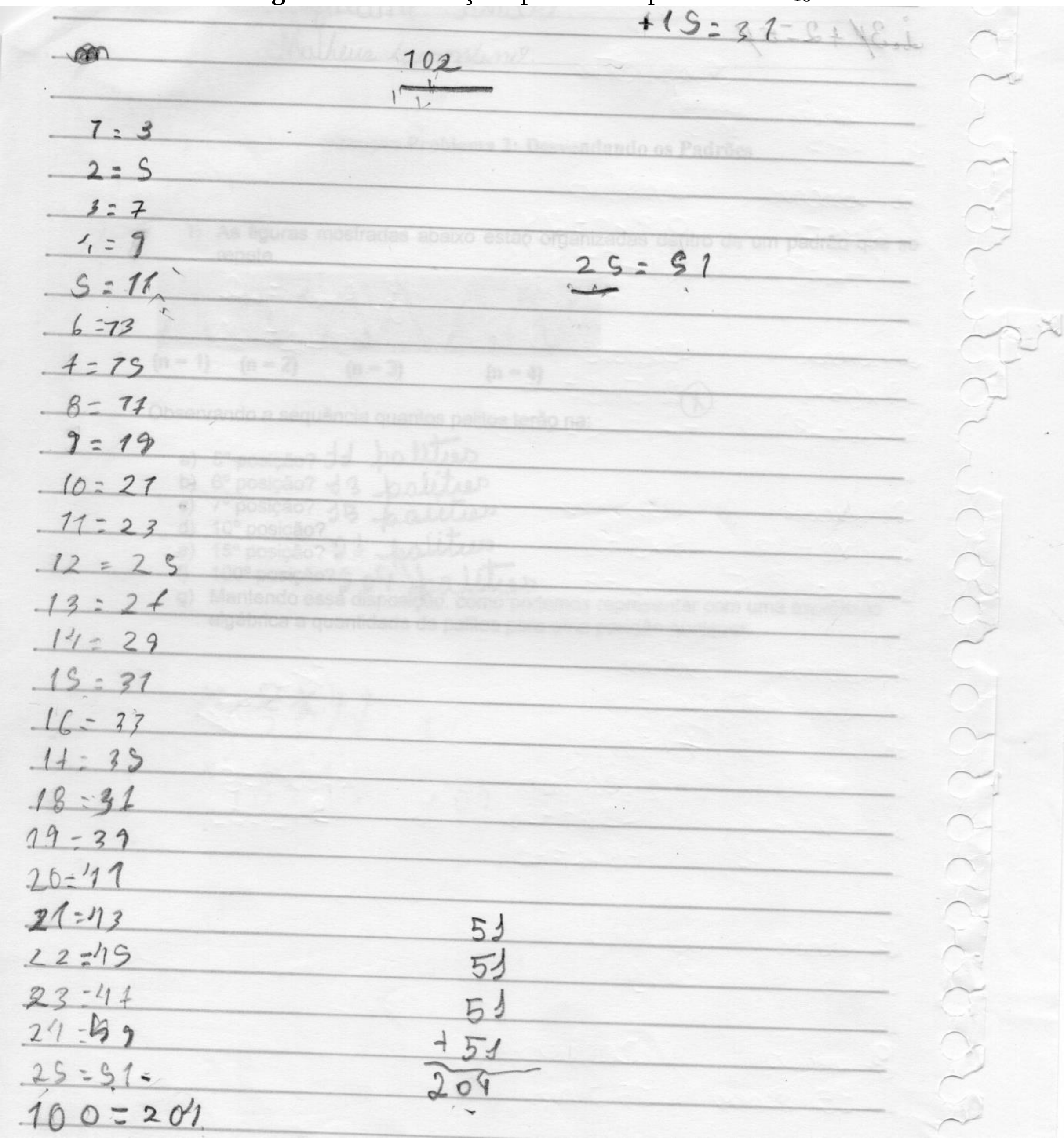
Figura 11-Resolução apresentada pelo aluno A_{20}.



Fonte: Acervo da pesquisadora

Porém, outros preferiram fazer uma relação entre a posição e a quantidade de palitos apresentados em cada posição, como mostra a figura 12.

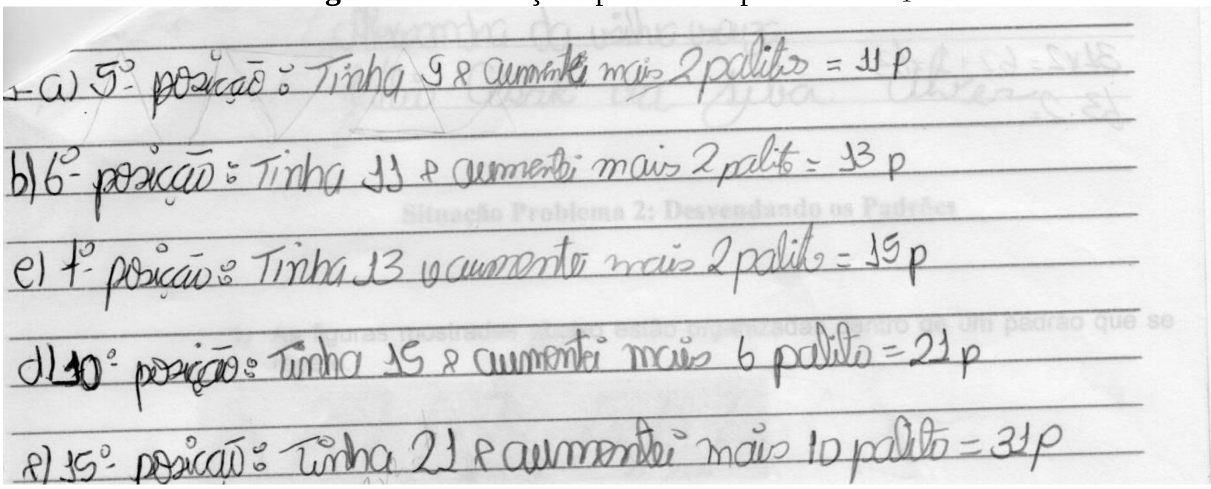
Figura 12– Resolução apresentada pelo aluno A_{18}.



Fonte: Acervo da pesquisadora.

Outros alunos ainda constataram que, de uma posição para outra, iam aumentando de 2 em 2. Então, eles pegavam a quantidade de palitos da posição anterior e somavam com 2.

Figura 13-Resolução apresentada pela aluna A_1.


1-a) 5º posição: Tinha 9 e aumentei mais 2 palitos = 11 p
b) 6º posição: Tinha 11 e aumentei mais 2 palito = 13 p
c) 7º posição: Tinha 13 e aumentei mais 2 palito = 15 p
d) 10º posição: Tinha 15 e aumentei mais 6 palito = 21 p
e) 15º posição: Tinha 21 e aumentei mais 10 palito = 31 p

Fonte: Acervo da pesquisadora

Entretanto, quando chegaram aos itens “d” e “e” os alunos começaram a apresentar um pouco de dificuldades, logo, a professora perguntou como eles iam fazer para solucionar esses itens. Alguns alunos foram imediatamente respondendo que seguiriam o que estavam fazendo. Ou seja, uns iriam continuar desenhando, tomando como base as posições anteriores, outros somando de dois em dois.

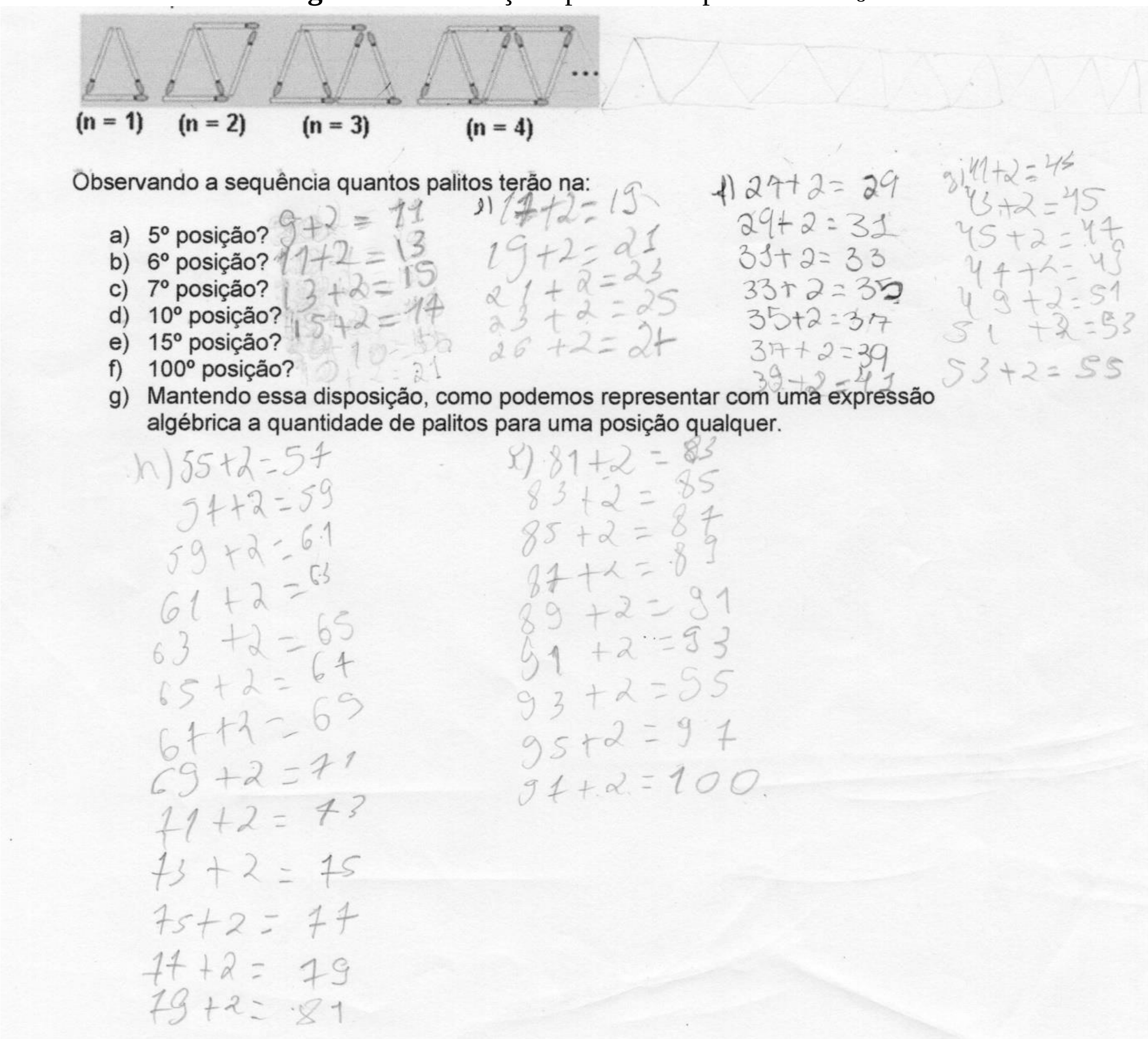
A figura 13 é a solução apresentada pela aluna A_1. Observamos que no item “d” a aluna colocou: “Tinha 15 e aumentei mais 6 palitos = 21 p”. A professora então pediu que ela explicasse porque ela havia colocado que tinha 15 e aumentado 6.

> **A_1**: “Professora! O 15 eu peguei da ultima posição que eu sabia (7º posição), e como eu quero saber da posição 10, eu contei que da posição 7 para 10 são três casas, ou seja, 3 vezes 2 é 6. Logo, eu somei o 15 com o 6.”

Observamos que a aluna A_1 manteve o mesmo raciocínio para encontrar a quantidade de palitos na posição 15 no item “e”.

Percebemos, durante as mediações, que a maioria dos alunos seguiu o raciocínio exposto na figura 14. No entanto, alguns alunos só foram seguindo esse raciocínio até a posição 15, logo, ao chegarem ao item “f” que pedia a quantidade de palitos na 100º posição, viram que a única posição que eles sabiam anteriormente era a posição 15, e não queria sair somando um por um como fez a aluna A_8. Começaram então a pensar outras estratégias para solucionar, uma vez que foram percebendo o trabalho que daria se eles tivessem que desenhar da 15º posição a 100º posição como apresentado na figura 10 ou até mesmo se fosse somando por posição.

Figura 14-Resolução apresentada pela aluna A_8.

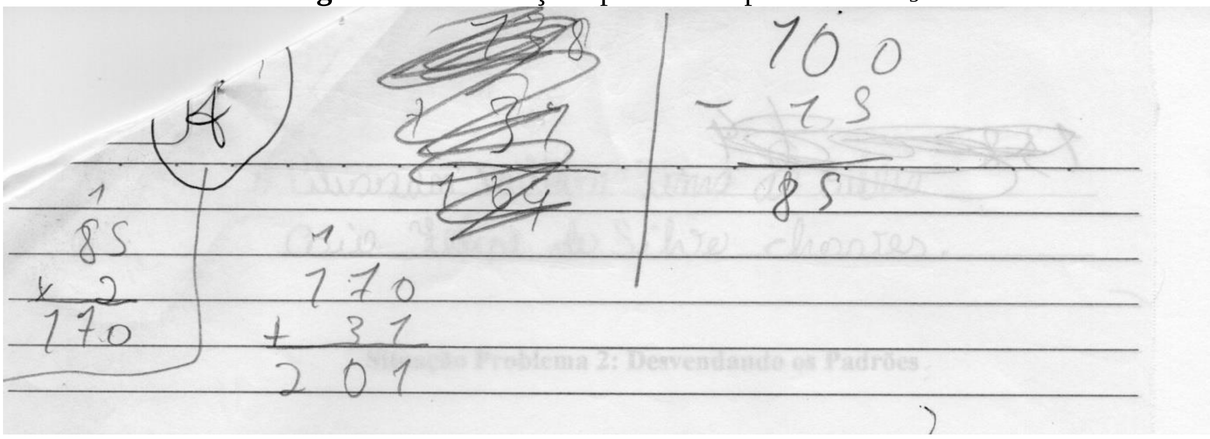


Fonte: Acervo da pesquisadora.

Depois de alguns minutos dados pela professora para que os alunos respondessem ao item “f”, cada um pode falar das estratégias que assumiram para responder o item “f”, como podemos ver no dialogo entre a professora e os alunos A_5 e A_2:

> **A_5**: “Professora! Acho que encontrei o da posição 100.”
>
> **PP:** “Hum, e como foi que você fez?”
>
> **A_5**: “Bem, eu encontrei a posição 15 na anterior (item e). Então eu peguei o 100 tirei 15, chagando a 85, aí eu peguei o 85 e multipliquei por 2, dando 170 que é quantidade de palitos nesta posição 85. Daí para encontrar a 100º posição eu somei a quantidade de palitos da posição 15, que é 31 mais o da posição 85 que é 170, aí cheguei a 201 palitos.”

Figura 15– Resolução apresentada pelo aluno A_5.



Fonte: Acervo da pesquisadora

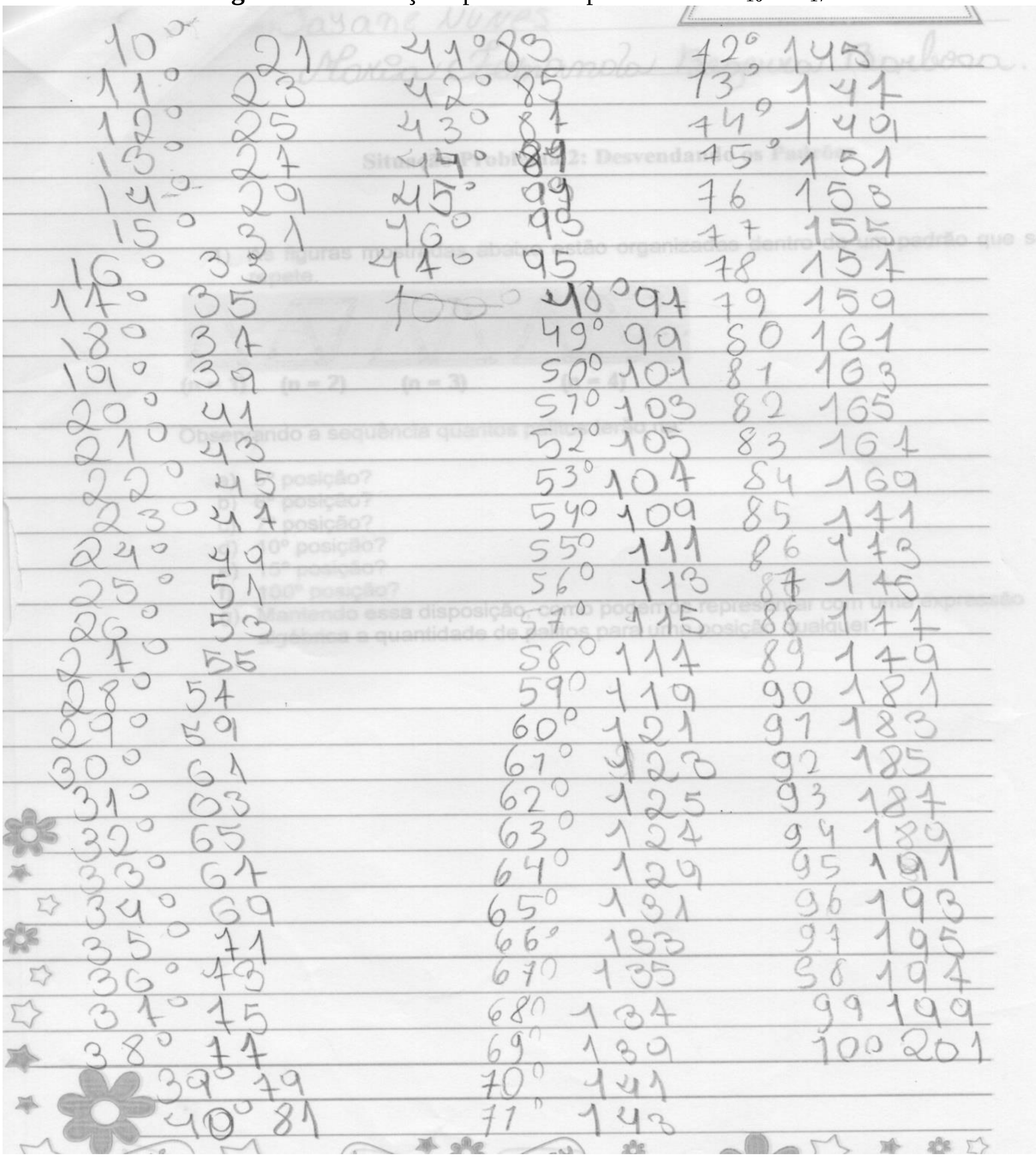
Comentário: Analisando os cálculos apresentados pelo aluno A_5, percebemos que segue o mesmo raciocínio levantado pela aluna A_1, porém a justificativa que ele dá difere da justificativa apresentada pela aluna A_1, uma vez que ele considera a quantidade de palitos da posição 15 sendo 31 e a quantidade de palitos da posição 85 sendo 170.

> **PP:** "É uma boa justificativa A_5. Mas, por que na posição 85, você apenas multiplicou a posição por 2?"
>
> **A_5**: "Por que está aumentando de dois (2) em dois (2) professora."
>
> **PP**: "Certo, estão aumentando de dois (2) em dois (2), então de acordo com esse raciocínio que você teve para encontrar quantidade de palitos da posição 85, você poderia ter pegado o 100 e multiplicado por 2 também."
>
> **A_5**: "É mais daria então 200, e assim deu 201."
>
> **PP**: "Então, qual está certo: 200 ou 201?"
>
> **A_5:** "Eita, professora! Agora deu um nó na minha cabeça."
>
> **PP**: "Então reveja o esse seu raciocínio, e pense como você pode representá-lo algebricamente."

Vimos durante as discussões em sala de aula que alguns alunos apresentaram muitas dificuldades para chegar à quantidade de palitos na posição 100, e outros não conseguiram responder.

As alunas A_{10} e A_{17} mostraram sua estratégia para chegar à posição 100, como vemos na figura 16:

Figura 16-Resolução apresentada pelas alunas A_{10} e A_{17}.



Fonte: Acervo da pesquisadora

Observamos que as alunas fizeram todas as posições até a 100º, somando sempre a anterior com 2.

> **PP: "**Meninas, vocês tiveram um trabalhão!"
>
> **A_{17}:** "Ah, professora! Mas achamos é o que importa."
>
> **PP:** "Tudo bem, mas será que não conseguem pensar em uma maneira menos trabalhosa?"
>
> **A_{10}:** "Sei lá, nós preferimos fazer assim, achamos mais fácil."

PP: “E se fosse a posição 1000?”.

Após os questionamentos da professora, as alunas ficaram pensando. E depois disseram que iria dar muito trabalho. Foi então que a professora pediu para que elas tentassem fazer de outra maneira. Constatamos que outros alunos também foram seguindo o mesmo raciocínio das alunas A_{10} e A_{17}, porém não tiveram disposição de escrever todas as somas, partindo para outras estratégias, ou parando de responder.

Comentário: Um dos problemas de trabalharmos utilizando apenas a aritmética é que chega um momento que acaba ficando inviável realizar os cálculos, como no caso do item “f”, por isso que, ao partirmos para a generalização, observando o que acontece na relação entre as variáveis envolvidas, conseguimos encontrar uma expressão algébrica que possibilita resolver de forma rápida a situação, porém o aluno deve compreender a construção dessa expressão algébrica e o porquê chegamos a uma dada expressão.

Após alguns alunos exporem para a professora e para a turma como haviam procedido para solucionar o item “f”, ela solicitou que dessem continuidade à atividade e se empenhassem em encontrar uma expressão algébrica que representasse o raciocínio que eles tiveram para encontrar as posições dos itens anteriores. Aqueles alunos que não haviam encontrado a quantidade de palitos da posição 100, foram orientados a tentarem responder o item “g” pois eles poderiam encontrar uma expressão que representasse a situação apresentada, e que poderia ajudá-los a resolver o item “f”. No entanto, os alunos foram logo indagando à professora como poderiam fazer para encontrar a expressão algébrica. Foi então que a professora os lembrou da atividade anterior (Disputa entre amigos), na qual eles haviam tinham chegado a uma expressão algébrica que representava o processo de operação da máquina.

Depois que a professora retomou a atividade realizada anteriormente, os alunos foram logo perguntando:

A_{23}: “Professora, como faremos? Pois na máquina bastava agente pegar o número de entrada realizar a operação que tinha na máquina e encontrava o número de saída. Mas aqui só temos a posição e quantidade de palitos.”
PP: “Então vocês terão que verificar qual operação será realizada para estabelecer uma relação entre a posição da figura e a quantidade de palitos.”

A_{11}: “Então eu pego o número da posição faço uma conta com ele para chegar à quantidade de palitos?”

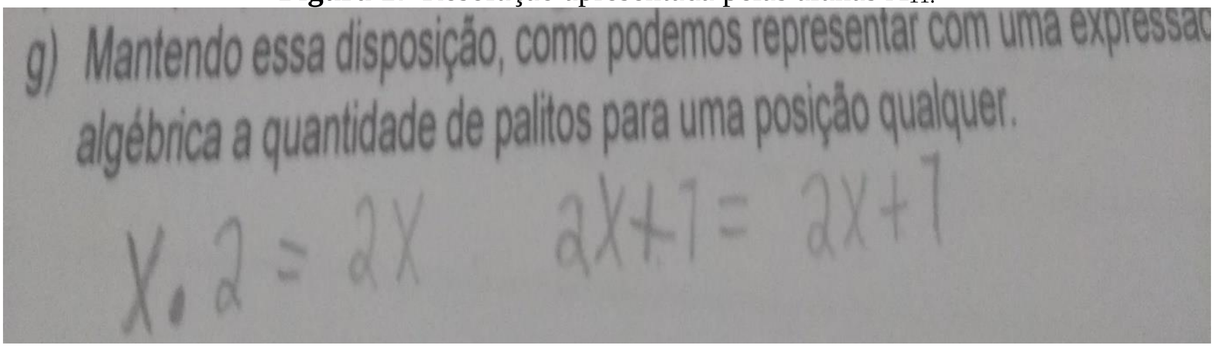
PP: “Isso mesmo, lembrando que a operação que você realizar para a primeira posição tem que valer para todas.”

Comentário: Observamos que quando os alunos são orientados a encontrar uma expressão algébrica que possa representar a situação e assim facilitar os cálculos, eles ainda apresentam dificuldades. Por mais que a professora retorne a situações vividas anteriormente, a maioria não conseguiu compreender inicialmente como expressar algebricamente a situação. Porém, depois do diálogo que ocorreu entre os alunos A_{23} e A_{11} com a professora, e da exploração do problema, mediante a proposição de novos problemas, de novas sínteses e novos resultados pelos alunos e pela professora, os outros alunos foram compreendo a relação entre a posição da figura e quantidade de palitos. Sobre isso Andrade (2017, p.370) comenta que “O trabalho feito por um aluno pode ajudar na compreensão do problema por parte de outro aluno e quando o aluno codifica ou descodifica um problema dado ele também passa a ter uma melhor compreensão do mesmo”.

Continuando o diálogo...

A_{11}: “Professora, Encontrei a operação! Temos que pegar a posição multiplicar por dois e soma com um.” (figura 17).

Figura 17-Resolução apresentada pelas alunas A_{11}.



Fonte: Acervo da pesquisadora.

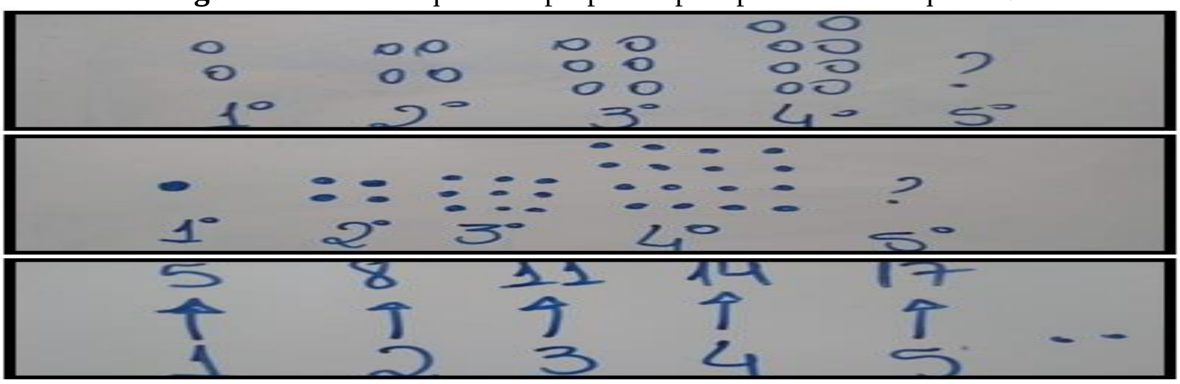
Posterior à descoberta do aluno A_{11}, os outros alunos logo começaram a compreender o processo que deveriam fazer para encontrar a quantidade de palitos. Como também encontraram a expressão algébrica que generalizava a situação problema. Em seguida, a professora voltou para o item “f” e perguntou se com a expressão encontrada na “g” eles poderiam resolver a “f”. Alguns foram logo respondendo o resultado que seria 201, porém a professora falou que aquele resultado eles já sabiam, “mas, como fazíamos para encontra-lo de acordo com a expressão algébrica?”. Neste momento o aluno A_{11} disse: “pegamos o 100 multiplicamos por 2 e somamos com 1”. Após a explicação e apresentação do aluno A_{11} de como tinha encontrado a expressão, os outros alunos foram compreendendo como resolver o item “f”.

A professora aproveitou que os alunos haviam compreendido a relação existente entre a posição e a quantidade de palitos e voltou a perguntar: “E como podemos fazer para encontrar a quantidade de palitos na posição 1000?” Com a expressão encontrada, um aluno foi logo respondendo: “Ah, professora, agora é fácil, basta fazer 2 vezes o 1000 e somar com 1, então dá 2001”. Neste momento a professora constatou que os alunos haviam compreendido a relação existente entre as variáveis do problema.

A professora aproveitou para reforçar a importância de entender a relação existente em uma sequência para chegar a uma expressão algébrica, pois facilita no processo de encontrar os itens seguintes da sequência.

Aproveitando o momento da compreensão dos alunos em relação à construção da expressão algébrica que representava a sequência, bem como da ligação entre as variáveis contidas na expressão, a professora voltou a explorar o problema propondo novos problemas no quadro, como vemos na figura 18, para que os alunos encontrassem a expressão algébrica que representasse a situação.

Figura 18-Novas sequências propostas pela professora no quadro.



Fonte: Acervo da pesquisadora.

Na proposição de novos problemas com sequências, os alunos estavam mais confiantes de como poderiam encontrar a expressão algébrica que representasse a sequência. No entanto, de início, eles sempre começavam a responder por tentativa, porém a professora os lembrava de que o que fosse realizado na primeira posição teria que servir para todas. Logo, eles foram conseguindo verificar as operações que iriam realizar e em seguida encontravam a expressão. Ao término da atividade e das discussões, a professora voltou a dialogar com os alunos, retomando o conceito de expressão algébrica, tomando como base a expressão encontrada no problema. Também voltou a falar sobre o que era variável e a relação existente entre as variáveis contida na atividade.

Comentário: Durante essa segunda atividade, constatamos um melhor desempenho dos alunos em relação ao envolvimento com o problema, bem como observamos que sempre procuravam argumentos para justificar o raciocínio que estavam tendo. Constatamos que durante a exploração do problema, o processo de codificação por parte dos alunos apresentou-se de maneiras variadas, facilitando na descodificação do problema, levando o aluno a compreender melhor a construção da expressão algébrica que representasse a sequência, bem como a função das variáveis envolvidas. Vimos que, após a solução do problema, a professora propôs novos problemas, encaminhando os alunos para mais um processo de P-T-RS-R, que favoreceu ainda mais no entendimento dos alunos em relação à utilização da expressão algébrica.

6.5 Atividade 4 - Compreendendo a função da variável através da Exploração de Problemas

Mais uma proposta de atividade foi levada à turma e aconteceu durante dois encontros com quatro aulas. O primeiro encontro aconteceu nas duas últimas aulas (5ª e 6ª aula), onde neste dia, estavam presentes 20 alunos, porém dois alunos ficaram até 11h, pois eles precisam pegar o ônibus que os levavam até suas casas, visto residirem na zona rural de Ingá. Porém, eles ainda puderam participar ativamente durante a exploração do problema, e o segundo encontro ocorreu nas duas primeiras aulas (1ª e 2ª aula). Mais uma vez a turma foi dividida em duplas e a professora entregou uma folha contendo o problema para cada aluno que logo iniciou a atividade com uma leitura individual.

ATIVIDADE 4. VOU DE TAXI

Ideia: Noção de variável pela interdependência da variação entre grandezas.

Objetivo: Aprofundar o conceito de expressões algébricas e a noção de variável através da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas

Um Taxista cobra 5,00 reais por quilômetros percorridos, mais uma taxa fixa de 10,00 reais. Com base nessa informação, responda os itens abaixo.

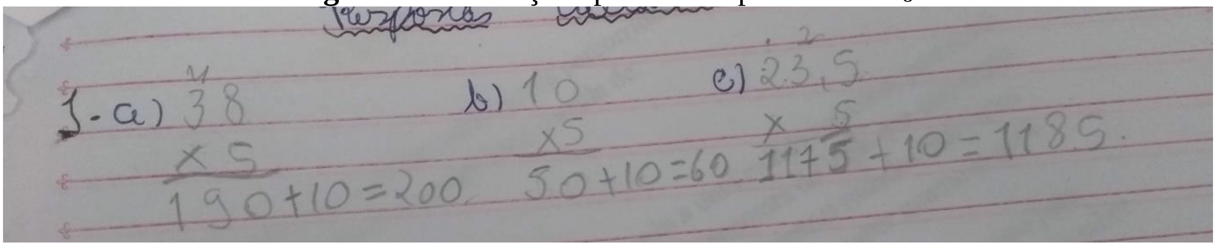
a) Quanto ele ganhará numa corrida, se percorrer 38 km?
b) Quanto ele ganhará numa corrida, se percorrer 10 km?
c) Quanto ele ganhará numa corrida, se percorrer 23,5 km?
d) Um passageiro contratou o taxista para leva-lo a uma cidade próxima, porém ele não sabe há quantos quilômetros essa cidade se encontra do local que eles estão. O taxista explicou que ele cobra 5,00 reais por quilômetros rodados mais uma taxa fixa de 10,00 reais. Represente por meio de uma expressão algébrica como o passageiro fará para saber quanto pagará pela viajem.
e) Depois de realizar 7 corridas , o taxista olha para o velocímetro do carro para poder verificar quantos quilômetros andou e em seguida faz as contas para saber quanto ele recebeu pelas corridas. Sabendo que ele percorreu neste dia 125 km, quanto ele recebeu por essas corridas?

A escolha dessa atividade se deu tanto para trabalharmos a interdependência entre as variáveis, quilômetros e valor, (FRIEDLANDER; ARCAVI, 2017; BRASIL, 1998; BRASIL, 2017). Como também pelo motivo da utilização de táxis (transporte alternativo) pelos moradores da cidade para se deslocar para cidades vizinhas, como no caso da cidade de Campina Grande-PB, que é uma cidade suporte devido ao comércio, bancos, hospitais, entre outros. Porém, por mais que seja um problema que aborda algo que faça parte da vida real deles, os dados apresentados no problema são de caráter fictício, uma vez que a BNCC (2017) relata que as situações problemas podem ser imaginadas.

Durante a realização desta quarta atividade, os alunos também tinham que perceber que a variável, ou número desconhecido, não podia assumir qualquer valor, observando que os possíveis números teriam que estar definido num intervalo de um conjunto numérico. Sousa, Panossian e Cedro (2014) comentam que muitas vezes os alunos trabalham com as variáveis sem conhecer o campo de variação.

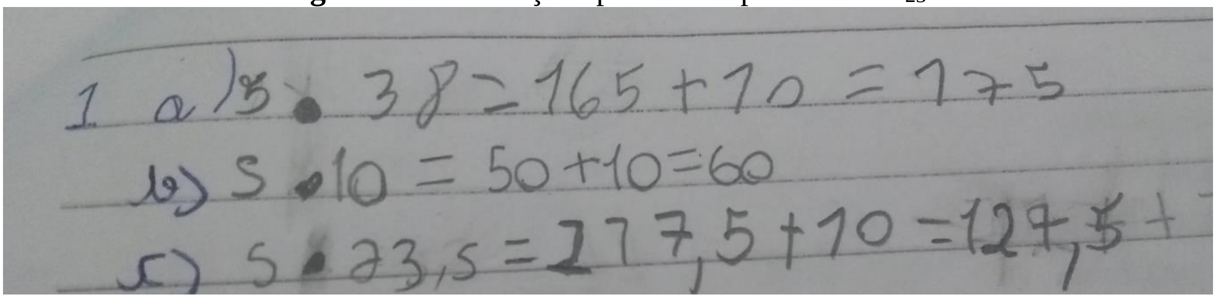
Neste problema levado à turma, esperava-se que, nos três primeiros itens, os alunos escrevessem uma expressão numérica para saber o valor que pagaria pela corrida de táxi, porém não era regra, uma vez que, por trabalharmos por meio da Exploração de Problemas, os alunos são livres para codificá-lo conforme compreendem, logo tivemos diferentes formas de solução, como vemos nas figuras 19 e 20.

Figura 19-Resolução apresentada pelo aluno A_8.



Fonte: Acervo da pesquisadora.

Figura 20 - Resolução apresentada pelo aluno A_{23}.

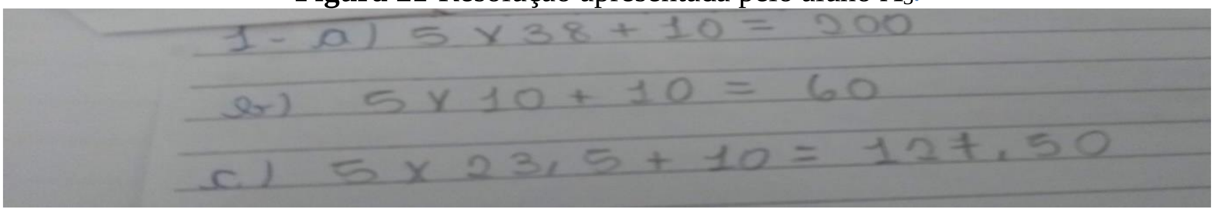


Fonte: Acervo da pesquisadora.

Comentário: Observamos que uma parte dos alunos organizou sua escrita e seus cálculos de acordo com a sequência das operações que apareceram no problema, sem que escrevesse a expressão numérica (5.38 + 10). Vemos que o resultado não está errado, porém o raciocínio utilizado por esses alunos acaba levando a erros durante a simplificação de expressão algébrica.

Constatamos também que outros alunos conseguiram responder escrevendo a expressão numérica como mostra a figura 21.

Figura 21-Resolução apresentada pelo aluno A_3.



Fonte: Acervo da pesquisadora.

Nos itens “a”, “b” e “c” deste problema, verificamos que todos os alunos conseguiram resolver sem que apresentasse dificuldades. Como podemos perceber no diálogo abaixo.

> **PP:** “E aí pessoal, conseguiram encontrar o valor que será pago.”
> **A_{23}:** “Ah, professora, muito fácil. Se ele cobra 5,00 reais por quilômetro, agente pega os 5,00 reais multiplica pelos quilômetros e depois soma com os 10,00 reais.”
> **PP:** **“**E esses 10,00 reais, é também cobrado por quilômetros rodados?”
> **A_{23}**: “Não, professora, é um valor que ele cobra por corrida. Se ele fizer outra corrida ai sim ele aumenta 10,00 reais.”
> **PP:** “Ah tá, entendi.” (risos).

Outros alunos também se manifestaram durante o diálogo, mostrando que tinham compreendido da mesma forma que o aluno $A_{23.}$ Logo após os alunos solucionarem os três primeiros itens do problema, a aluna A_{10}, replicou o fato dos valores cobrados pelo taxista serem altos, “Vichi, que taxista caro é esse professora, eu vou daqui para Campina e são 10,00 reais”. A professora explicou que aquele problema era uma situação criada por ela, neste momento o aluno A_{23} também questionou a aluna $A_{10,}$ sobre os gastos que o taxista tinha com o carro, “Sim, e ele não tem que colocar gasolina não? E a manutenção do carro?”.

Comentário: Com os questionamentos levantados pelos alunos percebemos que a exploração do problema continuou por meio da proposição de novos problemas, de novas sínteses e novos resultados (ANDRADE, S., 2017).

> **PP**: “Pessoal no item “a” ele recebeu 200,00 reais pela corrida. Podemos dizer que esse valor é o lucro dele?”
> **A_{11}**: “Não, no caso tem que tirar o que ele gastou com a gasolina.”
> **A_{23}**: “Mas, vai depender também de onde ele abasteceu o carro.”
> **PP**: “Então vamos dizer que onde ele abasteceu o carro com gasolina e estava R$ 4,40. Como devemos calcular?”
> **A_9: “**Vai depender de quantos quilômetros o carro dele faz com 1 litro de gasolina.”
> **PP:** “Mas vamos pensar que seja um carro que faça 15 km com 1 litro de gasolina.”

A_{23}: "É... pode ser."

Ficou estabelecido entre os alunos de quanto ficaria o valor da gasolina e quantos quilômetros o taxista fazia com 1 litro de gasolina. A professora, então, se dirigiu ao quadro para fazer os cálculos.

PP: "Então ele gasta em média R\$ 11,00 de gasolina. E tirando dos 200,00 reais os R\$ 11,00 de gasolina, ele ficou com R\$ 189,00. Tá muito bom." (risos).

A_{11}: "Professora, a senhora tá esquecendo que se ele foi para algum lugar ele vai voltar. Então vai gastar mais gasolina."

A_{6}: "Mas, se ele pegou outra corrida voltando."

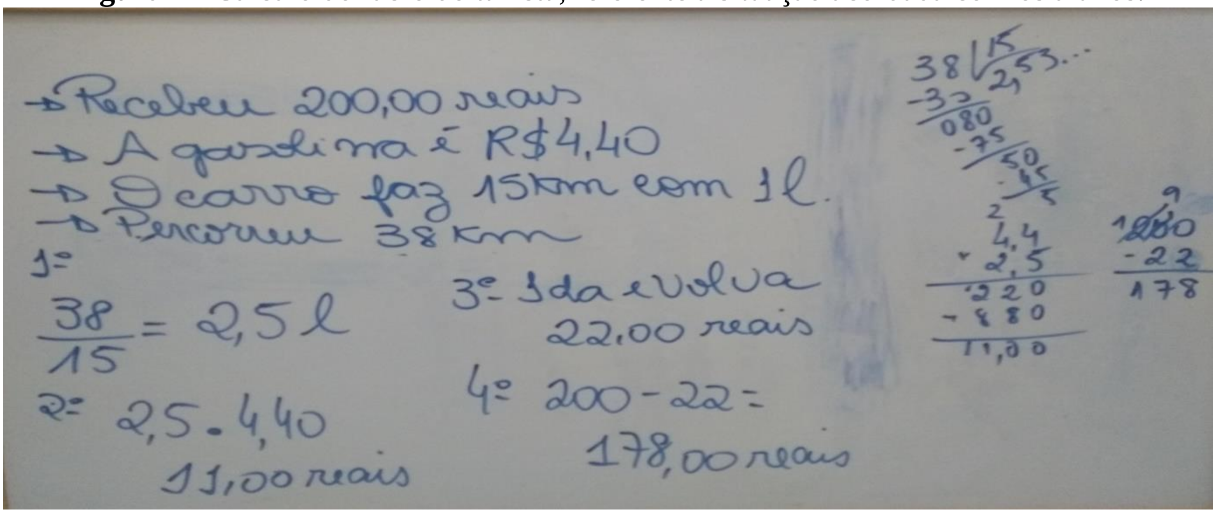
Nesse momento os alunos ficaram pensando sobre a possibilidade de o taxista ter pegado uma corrida voltando.

PP: "Vamos dizer que ele não pegou corrida voltando, então ele percorreu no total, 76 km. Logo, gastou o dobro de R\$11,00, sendo então R\$22,00. Portanto o lucro dele foi de R\$178,00."

A_{10}: "Eu não disse que esse taxista era caro."

PP: "Lembrando que esses valores do problema são fictícios."

Figura 22-Cálculo do lucro do taxista, referente à situação acordada com os alunos.



Fonte: Acervo da pesquisadora.

Durante o diálogo em torno do lucro do taxista, outros problemas foram sendo formulados diante dos questionamentos levantados pelos alunos. “E se o carro dele fosse a gás, ou se ele abastecesse com álcool”, “E o gasto com a manutenção do carro”, “Se uma pessoa pegar o taxista e percorrer apenas 800 m”. Feitos esses questionamentos por parte dos alunos, como também pela professora, começaram a surgir novos problemas, novas reflexões, novas sínteses e novos resultados.

Com os questionamentos levantados em sala de aula, a professora juntamente com os alunos, propôs novos problemas em conformidade com o problema inicial, ou seja, considerando que o taxista cobra R$ 5,00 por quilômetros percorridos e uma taxa fixa de R$ 10,00. Levando em consideração que a aula já estava terminando, a professora colocou os problemas propostos como atividade para casa.

Quadro 4 – Problemas propostos pela professora com o auxílio dos alunos.

1º	Quanto o taxista vai lucrar numa corrida de 60 km, caso ele abasteça com álcool. Sabendo que o carro faz em média 10 km/l e o preço do álcool é de R$ 3,90.
2º	O taxista faz a manutenção do carro a cada 5000 km percorrido, pagando o valor de R$ 120,00. Em uma corrida de 80 km quanto ele deve retirar para a manutenção?
3º	Quanto uma pessoa vai pagar caso percorra 800 m?

Fonte: Organizado pela pesquisadora.

Comentário: Durante a proposição de novos problemas, observamos que os meninos questionavam mais do que as meninas, devido ser um assunto que muitas vezes eles estão mais atentos do que as meninas. Constatamos também que, quando o trabalho caminha através da exploração de problemas, é um ir que nunca chega. (ANDRADE, 2017).

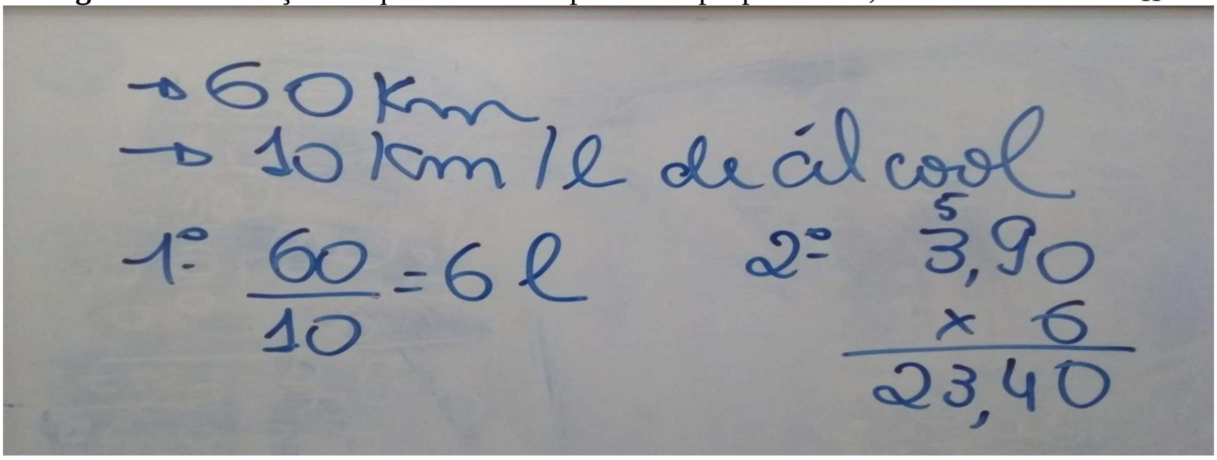
Após a exploração dos três primeiros itens do problema, a aula acabou. Logo, ficou para outro encontro os alunos concluírem os itens “d” e “e”.

Continuação do problema, Vou de Taxi.

Para a conclusão da atividade quatro, tivemos mais um encontro com duas aulas, em que os alunos deram prosseguimento à atividade. Mas, antes que eles retomassem a atividade, a professora os lembrou da discussão realizada no encontro anterior, juntamente com os problemas propostos que foram para casa. No entanto, a maioria dos alunos não respondeu a atividade que foi para casa. Logo, a professora pediu para os que tinham respondido socializassem com a turma como tinham feito para responder. Devido o tempo da aula, cada um que tinha respondido falou como tinham realizado os procedimentos para chegarem à solução e a professora foi anotando no quadro.

> **A11**: "Professora, nessa primeira questão eu fiz parecido com que fizemos com a gasolina. Eu peguei os 60 divide por 10, chegando a 6 litros. Que ele vai utilizar, ai eu multipliquei esse valor por R$ 3,90. Que deu R$23,40." (Figura 23)

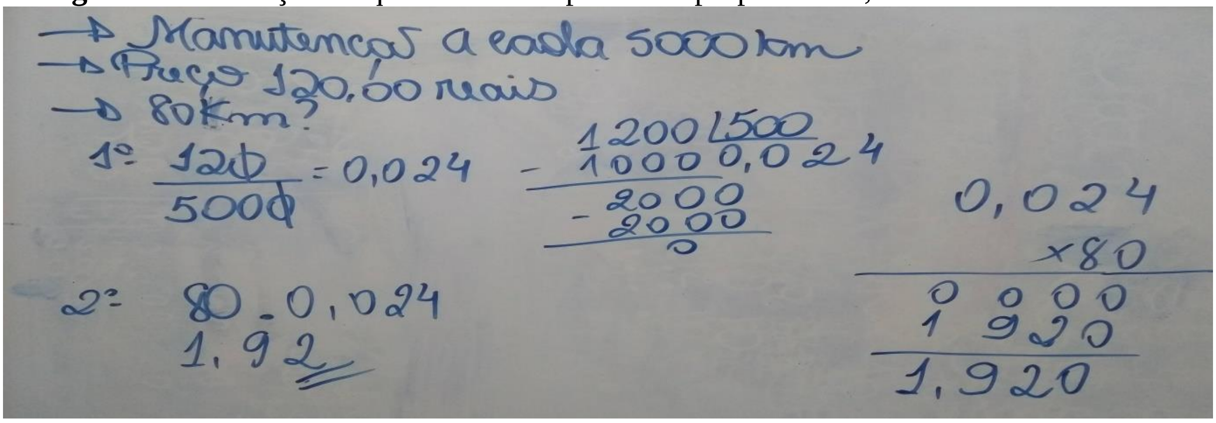
Figura 23-Resolução no quadro sobre o problema proposto nº 1, conforme o aluno A11.



Fonte: Acervo da pesquisadora

> **A10: "**Professora, não sei se está certo. Mas, como ele paga R$ 120,00 pelos 5000 km percorridos, eu dividi os 120 por 5000, aí deu 0,024, em seguida multipliquei esse valor por 80, que deu R$ 1,92." (Figura 24)

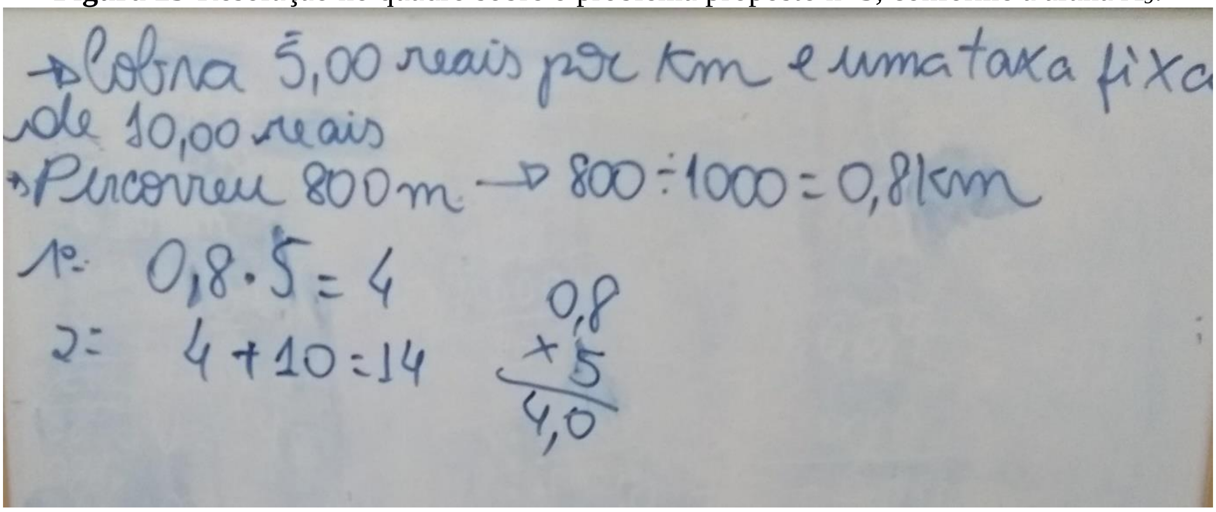
Figura 24-Resolução no quadro sobre o problema proposto nº 2, conforme a aluna A10.



Fonte: Acervo da pesquisadora.

A$_9$: "Professora, aqui na questão está em metros, aí a senhora disse que tinha que transformar para quilômetros, aí ficou 0,8 km. Em seguida multipliquei esse valor por R$ 5,00, deu R$ 4,00, e tinha os R$ 10,00 para somar, ficando R$ 14,00." (Figura 25)

Figura 25-Resolução no quadro sobre o problema proposto nº 3, conforme a aluna A$_9$.



Fonte: Acervo da pesquisadora.

Após a solução no quadro e as discussões em torno dos problemas que foram para casa, os alunos voltaram ao item "d" do problema inicial, o qual era solicitado que expressassem como o taxista fazia para cobrar a seus passageiros. Observamos um pouco de dificuldade de como eles iam representar essa expressão.

A$_{11}$: "Como assim, professora?"

PP: "Se eu pegar esse taxi, como vou fazer para saber quanto vou pagar?"

A_{11}: "Vai pegar os quilômetros que vai andar multiplicar por 5 e o resultado somar com os 10,00 reais."

PP: "Hum, e caso ande mais alguns quilômetros. Vou pagar o mesmo valor?".

Alunos: "não."

PP: "Ah, tá. Então o que vocês observam que sempre está mudando?".

A_9: "Os quilômetros rodados e o valor a ser pago."

PP: "Podemos dizer então que temos duas variáveis, não é isso."

A_{11}: "É sim. No caso duas letras, professora."

A_{23}: "Então eu posso utilizar o V para valor, e Q para quilômetro."

PP: "Pode sim. Como ficará expressa algebricamente essa situação."

A_{11}: "Professora, eu coloquei assim: V= 5q + 10."

PP: "Isso mesmo, temos aí uma expressão algébrica que representa essa situação."

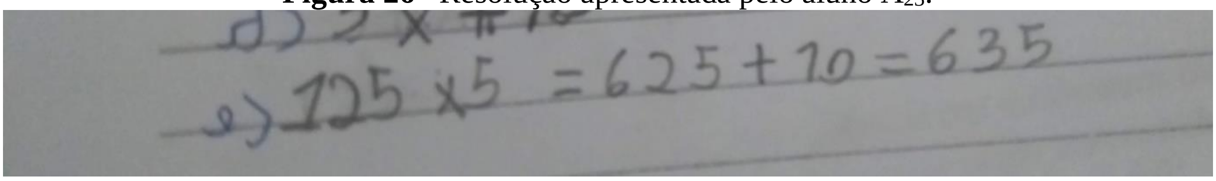
A partir dos diálogos ocorridos entre a professora e os alunos, vimos que conseguiram chegar a uma expressão que representasse a situação problema. Após os alunos chegarem à expressão e compreenderem seu processo de construção, a professora resolveu explorar no quadro um pouco mais a expressão encontrada pelos alunos, identificando com eles a variável dependente e a independente, como orienta os PCN (BRASIL, 1998) ao trabalharmos com expressões algébricas.

A professora provocou também uma discussão com os alunos sobre os possíveis números que poderiam ser colocados na variável "Q". "Pessoal, podemos colocar qualquer número no lugar dos quilômetros?". Neste momento a turma parou um pouco para pensar, quando a aluna A_9 falou: "Como assim professora? A senhora está falando de número negativo?". Logo, a professora foi comentando que sim. E alguns da turma foram logo observando que não podia, pois, com se tratava de distância, não se tinha medidas negativas.

Comentário: Observamos que os itens “a”, “b” e “c” desta atividade os alunos conseguiram ter um bom desempenho e encontrar as soluções, como também sabiam justificar as estratégias que utilizaram. E que, ao explorar o problema por meio da proposição de novos problemas, puderam fazer novas reflexões, novas sínteses e obter novos resultados, proporcionando uma maior compreensão do problema. Também constatamos que, ao chegar ao item “d”, a maioria apresentou um pouco de dificuldade em escrever uma expressão algébrica, porém era possível observar que eles entendiam que a situação do taxista era “pegar os quilômetros percorridos multiplicar por cinco e somar com dez”, no entanto eles não conseguiam ver de imediato que poderiam utilizar as letras para representar os quilômetros e o valor a ser pago. Contudo, durante a exploração do problema e dos diálogos entre a professora e os alunos, eles foram podendo verificar essa possibilidade de utilização das letras e então chegar à expressão algébrica. Percebemos também que quando a professora os provocou em relação, a saber, se poderia colocar qualquer número no lugar da variável “Q”, alguns puderam logo perceber que sendo a variável “Q” os quilômetros a ser percorrido, não poderia assumir valores negativos, por se tratar de uma unidade de comprimento. Vemos assim a importância de se trabalhar o campo de variação como nos lembram os autores Sousa, Panossian e Cedro (2014).

Posterior à explicação, os alunos voltaram a terminar o problema, chegando ao item “e”. Neste item os alunos tinham que verificar quanto o taxista havia recebido ao final do dia, após realizar sete corridas no total de 125 km. Para este item eles tinham que observar que os 125 km percorridos não foram em apenas uma corrida, mas sim em sete, ou seja, não seria somado apenas com 10,00 reais, e sim com 7 vezes o 10. Logo, os alunos foram apresentando muitas dificuldades em compreender como poderiam resolver. Verificamos que alguns foram logo resolvendo tomando como base os primeiros itens, não parando para observar que o taxista tinha realizado sete corridas, e que cada uma era 10,00 reais, como vemos na figura 26.

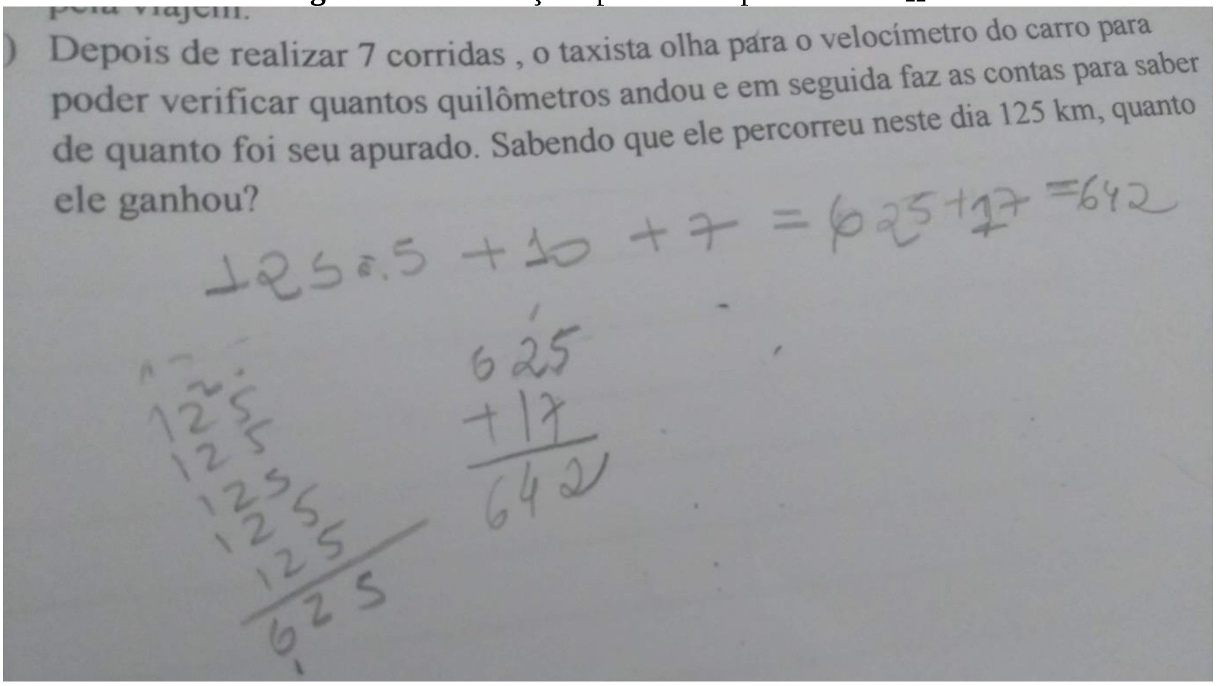
Figura 26– Resolução apresentada pelo aluno A_{23}.



Fonte: Acervo da pesquisadora.

Observamos, na figura 27, que outros alunos realizaram o processo de cálculo inicialmente como os primeiros itens, porém pegaram o sete e somaram ao final do resultado.

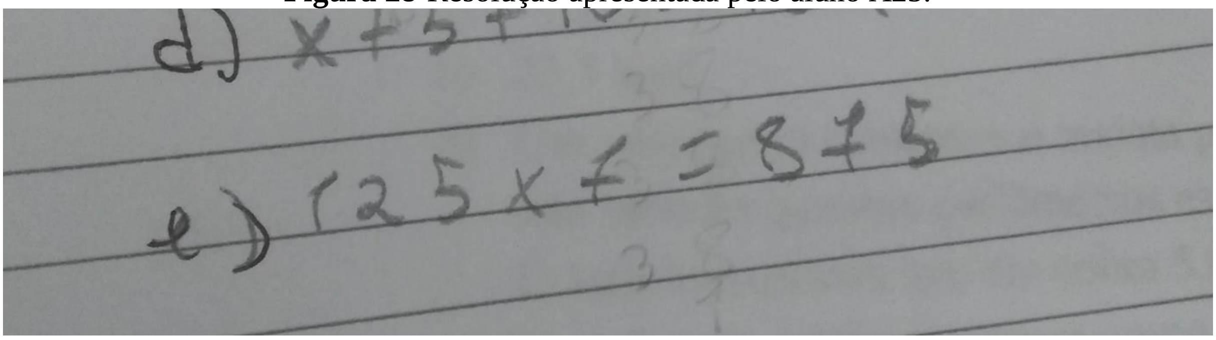
Figura 27 - Resolução apresentada pelo aluno A_{22}.



Fonte: Acervo da pesquisadora.

Outros ainda resolveram o item mudando totalmente o problema em questão, pois em vez de multiplicar os quilômetros por 5, multiplicaram por 7.

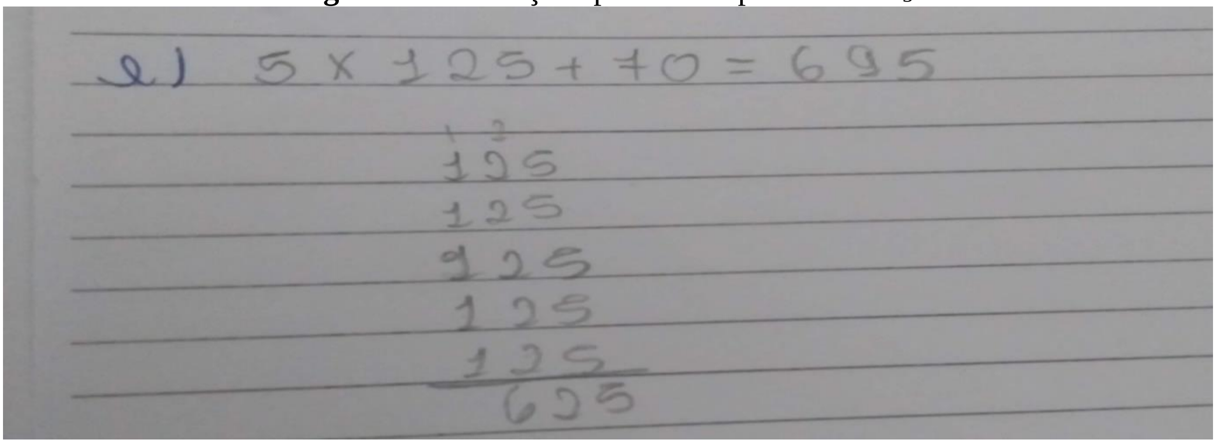
Figura 28-Resolução apresentada pelo aluno A25.



Fonte: Acervo da pesquisadora.

Após o aluno A_{25} terminar essa questão a professora o questionou sobre o que significa esse 125 vezes o 7. Porém, ele ficou em silêncio pensando, em seguida a professora perguntou quanto o taxista cobrava por quilômetro, e logo ele falou que era 5,00 reais, por vez a professora continuou em indagar o aluno sobre o que representava o sete no problema, e pediu para que ele lesse novamente o item “e”, e quando releu o problema pode perceber que o sete representava a quantidade de viagens realizadas. Então o aluno A_{25} constatou que o processo de resolução não estava correto. Observamos também que outros alunos perceberam que não poderiam somar apenas com os 10,00 reais, pois o taxista tinha realizado sete corridas, ou seja, teriam que somar com 70,00 reais, conforme evidenciado na figura 29.

Figura 29-Resolução apresentada pelo aluno A_3.



Fonte: Acervo da pesquisadora.

A professora então continuou o diálogo para que outros alunos explicassem como procederam para chegar à solução, como vemos abaixo.

> **A$_5$:** “Bem, eu peguei e multipliquei 125 por 5 e somei o resultado com 10.”
> **A$_{10}$:** “Professora, eu posso falar o meu?”
> **PP:** “Pode sim.”
> **A$_{10}$:** “Eu fiz o que A_5 fez, mas no final eu somei com 7.”
> **PP:** “Somou com sete, por quê?”
> **A$_{10}$:** “Oxe, porque ele fez sete corridas.”

Quando os alunos A_5 e A_{10} apresentaram seus resultados, a professora perguntou a turma se mais alguém tinha feito diferente. Alguns disseram que tinham feito como o aluno A_5, não levando em consideração as sete corridas realizadas. Em seguida, a professora pediu que o aluno A_{11} relatasse como havia procedido a sua solução e ele foi logo justificando: “Professora, eu peguei multipliquei 125 por 5 e depois somei com 70”. Neste momento, a professora questionou o porquê de ter somado com 70 e ele justificou que: “como o taxista havia feito sete corridas, não podia ser somado apenas com 10, pois ele cobrava 10,00 reais a cada corrida, então seriam 70,00 reais". Com a explicação de A_{11}, os outros alunos foram compreendendo o que tinham feito de errado em seus procedimentos.

Comentário: Observamos que o trabalho com a Metodologia Exploração, Resolução e Proposição de Problemas permitiu aos alunos, por meio dos debates que ocorreram em sala de aula, fazerem uma reflexão sobre as estratégias que utilizaram, bem como verificar que por meio do processo de codificação e decodificação realizadas por outros alunos compreenderem seus próprios erros. Constatamos, durante os diálogos, um envolvimento da turma em querer expor como fizeram para resolver o problema, demostrando assim compreenderem a função da variável e da expressão algébrica encontrada.

6.6 Atividade 5 – Bingo das Expressões Algébricas

Ideia: Leitura das expressões algébricas com compreensão, Valor numérico.

Objetivos: Trabalhar a linguagem algébrica e o valor numérico das expressões algébricas através da Exploração de Problemas

Esta atividade chamada "Bingo das Expressões Algébricas", realizada na perspectiva da Exploração de Problemas, foi executada em quatro etapas. Inicialmente, começamos com o jogo do bingo, que instigou muito os alunos em participar e que, por meio dessa atividade, pudemos trabalhar a linguagem algébrica na forma oral, e na forma escrita, contribuído para a compreensão de número desconhecido (variável) e da expressão algébrica contida nas cartelas. Em seguida, trabalharam a simplificação de expressões algébricas polinomiais, observando os termos semelhantes na expressão e realizando as operações indicadas. Posteriormente, os alunos foram conduzidos a propor problemas a partir de uma expressão algébrica contida na cartela. E, na última etapa, eles calcularam o valor numérico das expressões algébricas contidas na tabela.

Como a atividade estava dividida em quatro etapas, foram necessários três encontros com seis aulas no total. Para iniciar, a professora distribuiu as cartelas aos alunos e, em seguida, explicou-lhes como funcionava o jogo, avisando-os que, para ganhar o bingo, teriam que completar uma linha da cartela e que a professora sortearia uma expressão algébrica e falaria na linguagem usual, sendo que eles teriam que marcar na linguagem algébrica caso tivessem na cartela.

Durante o jogo era perceptível a motivação dos alunos, como também eram notórias as dúvidas em relação à transformação da linguagem usual para a algébrica. Uma das dúvidas estava relacionada à apresentação do número desconhecido quando estivesse em forma de potência ou em forma de fração. Porém, no decorrer do jogo, a professora ia sanando as dúvidas. A cada expressão chamada pela professora era possível ver a aflição dos alunos em ter a expressão algébrica em sua cartela.

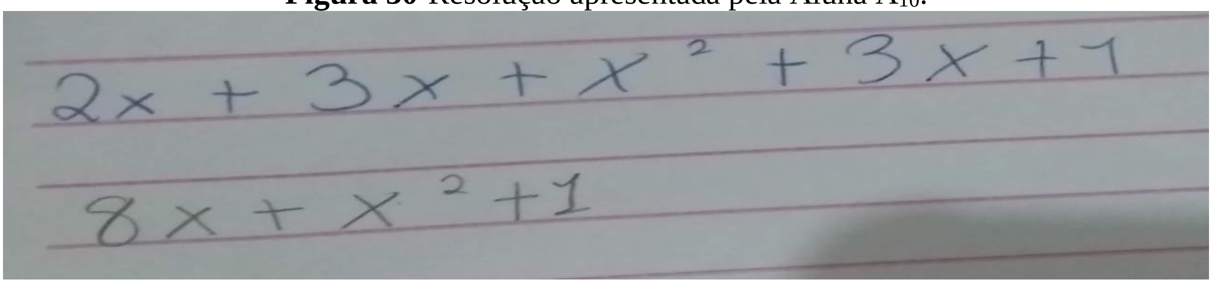
Em um dado momento do jogo, quando a professora falou a expressão, “o dobro de um número mais seu triplo”, o aluno A_{11} disse que seria 2x+ 3x, porém a aluna A_9 observou que 2x+3x seria o mesmo que 5x e que ela poderia marcar também. A professora então aproveitou para falar que 5x era a expressão algébrica na forma reduzida de 2x+3x, logo elas eram equivalentes. Após essa observação da aluna A_9, a cada expressão chamada pela professora os alunos tentavam verificar em sua cartela se tinham uma expressão equivalente.

Depois de algumas expressões pronunciadas pela professora, o aluno A_{14} conseguiu completar uma linha. A professora então pegou a cartela para conferir e verificou que estava correta. Logo, o aluno A_{14} ganhou no bingo e foi presenteado com uma caixa de chocolate que, para a surpresa de todos, dividiu com os colegas de sala.

Ao término do bingo, a professora comentou com os alunos a importância da linguagem algébrica e as transformações que ocorreram ao longo dos anos, passando da linguagem usual a simbólica que conhecemos hoje, favorecendo para o avanço da álgebra e para a manipulação de seus termos.

Após as discussões sobre a linguagem algébrica, a professora começou a segunda etapa da atividade com os alunos. Nesta etapa, os alunos tinham que escolher uma coluna e adicionar os termos das expressões algébricas polinomiais. Era perceptível a confiança que os alunos já tinham em resolver as adições com as expressões algébricas polinomiais, sendo capazes de explicar o que poderia ser adicionado ou não nas expressões algébricas, uma vez que precisavam verificar se haviam termos semelhantes para poder simplificar.

Figura 30-Resolução apresentada pela Aluna A_{10}.



Fonte: Acervo da pesquisadora.

Comentário: No decorrer das duas primeiras etapas da atividade, a maior parte dos alunos não demonstrou muitas dificuldades, conseguindo desempenhar com compreensão o que se pedia. Ao serem questionados sobre como fariam para adicionar as expressões algébricas polinomiais, eles falavam com compreensão que somariam aqueles que tivessem a mesma parte literal.

Quando os alunos terminaram a segunda etapa da atividade, a professora pediu aos alunos que escolhessem uma expressão na cartela e propusessem um problema cujo resultado fosse a expressão escolhida por eles. Pois, assim como nos sugere alguns pesquisadores como Fiorentine, Miguel e Miorin (1993), o aluno pode gerar um problema a partir da expressão algébrica e com isso tornar mais compreensiva a sua aprendizagem.

Observamos que alguns alunos, ao proporem o problema, demonstraram que compreenderam de fato a função da variável, ou seja, o que ela pode representar na expressão algébrica.

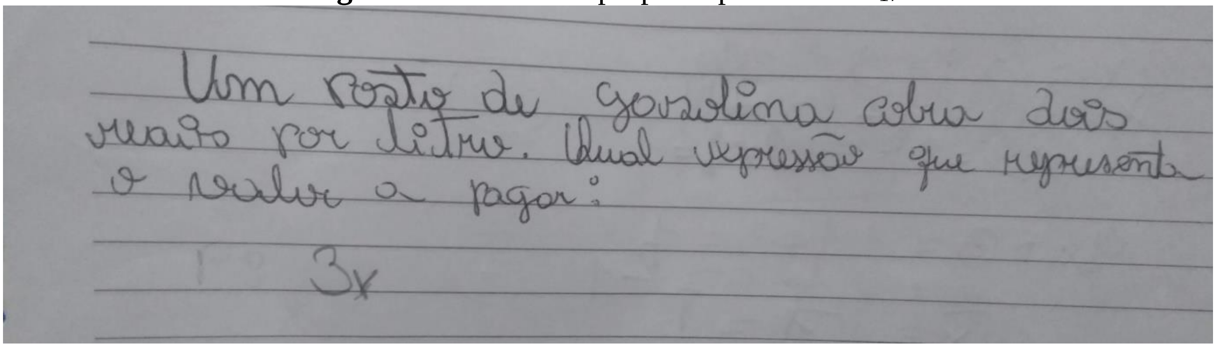
Quadro 5 – Problemas propostos pelos alunos.

Aluno	**Problema**	**Expressão Algébrica**
A_1	A minha mãe tem o dobro da minha idade menos um. Qual a expressão representa a situação?	2x -1
A_4	Uma empresa de limpeza cobra R$ 4,00 por produto, mais uma taxa fixa de R$ 2,00 por entrega. Que expressão representa o valor cobrado?	4x+2
A_6	Uma loja de brinquedo esta em promoção. A promoção é de R$ 3,00 por cada brinquedo. Qual o valor que representa o valor a pagar?	3x
A_9	Um dono de vacas cobra R$ 5,00 por litro de leite. Qual expressão representa o valor a pagar?	5x
A_{10}	Um posto de gasolina cobra R$ 2,00 por litro. Qual é a expressão que representa o valor a pagar?	2x
A_{11}	Em uma loja de tecido cada metro é R$ 5,00. Se uma pessoa levar uma quantidade de metros, quanto ela vai pagar?	5x
A_{20}	Em uma escola passou uma quantidade de alunos. Qual a expressão que representa essa quantidade?	x

Fonte: Organizado pela pesquisadora.

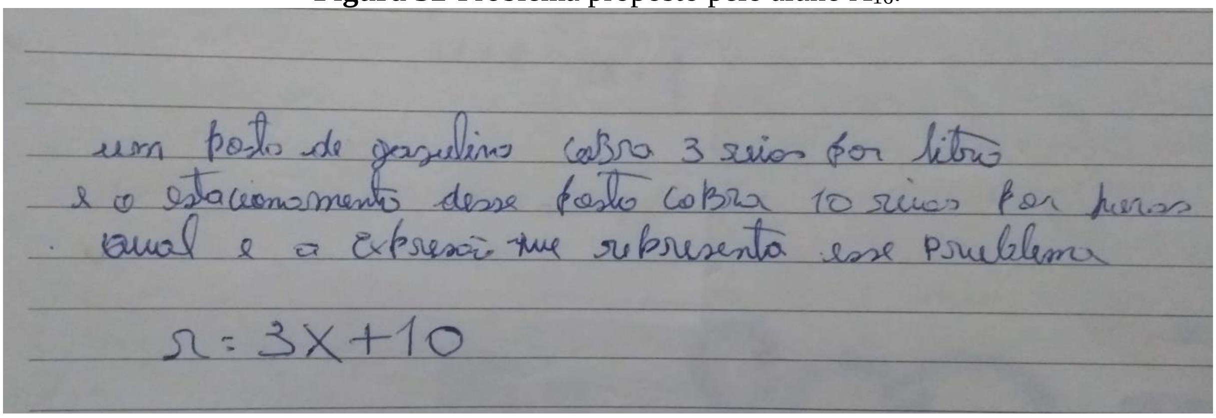
Depois que cada aluno propôs seus problemas, foi realizada uma plenária, na qual cada aluno falava seu problema proposto e a expressão algébrica que representava aquela situação. Durante as apresentações, a professora ia questionando sobre a expressão algébrica apresentada, para verificar se realmente a variável representava o que eles haviam proposto no problema. Com isso, pudemos constatar que alguns alunos não conseguiram propor os problemas e outros, ao propor, não associava com a expressão algébrica escolhida como visualizamos na figura 31 ou elaboravam o problema sem colocar todos os dados. (figura 32).

Figura 31 - Problema proposto pela aluna A_{17}.



Fonte: Acervo da pesquisadora.

Figura 32-Problema proposto pelo aluno A_{16}.

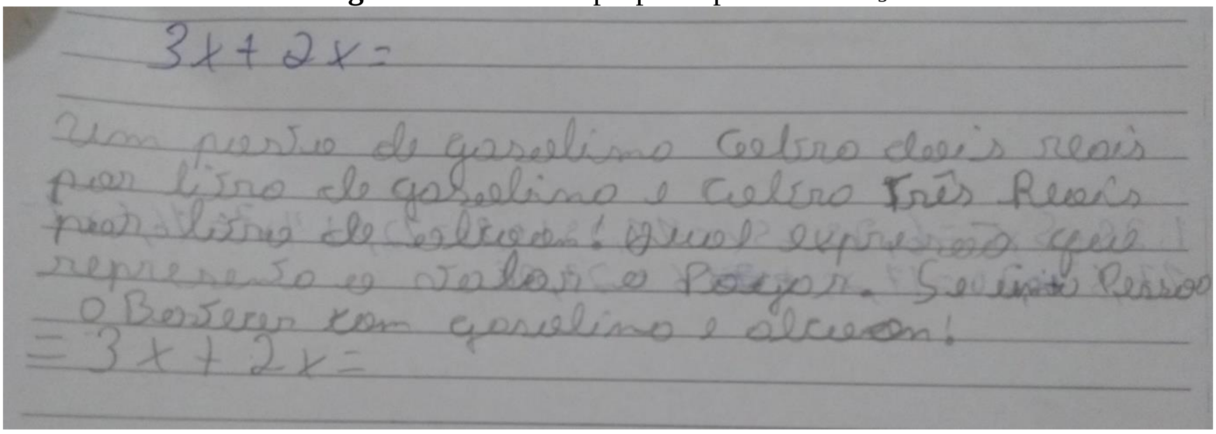


Fonte: Acervo da pesquisadora.

Comentário: Nesta etapa da atividade proposta aos alunos, percebemos a dificuldade que eles tinham em propor os problemas, uma vez que não faz parte da rotina de atividades deles proporem o problema e sim resolver os problemas, ou então apenas resolver exercícios repetitivos, sem exigir uma reflexão. Andrade, S. (2017) analisa que, na maioria das pesquisas com a Exploração de Problemas, a parte mais difícil de trabalhar com os alunos é a proposição de problemas. De acordo com o autor, ele observa que “isso advém de uma prática de sala de aula que tem sido concentrada apenas na resolução de problemas oriunda de problemas propostos pelo professor e nunca pelos alunos”. (ANDRADE, S., 2017, p. 388).

Um dos problemas que nos chamou mais atenção foi o do aluno A_5, que propôs o seguinte problema: “Um posto de gasolina cobra dois reais por litro de gasolina e cobra três reais por litro de álcool. Qual a expressão que representa o valor a pagar se uma pessoa abastecer com gasolina e álcool?” figura 33.

Figura 33-Problema proposto pelo aluno A_5.



Fonte: Acervo da pesquisadora.

Podemos analisar que o problema proposto pelo aluno é relevante, pois é possível constatar que houve uma compreensão em relação ao que ele queria representar com as variáveis, no caso os litros de gasolina e de álcool, porém, o mesmo não conseguiu demonstrar isso com a expressão algébrica 3x + 2x, uma vez que o aluno atribui a mesma letra para os dois combustíveis. Logo, a professora o questionou:

> **PP**: “A_5, o que você quer expressar com esse problema?”
> **A_5:** “Que a gasolina o litro é 2,00 reais e o álcool é 3,00 reais, e se a pessoa abastecer com álcool e gasolina vai gerar essa expressão.”
> **PP:** “Então você quer dizer que na expressão 2x representa, os litros da gasolina vezes 2. Mas, o que significa 3x?d.”
> **PP:** “Quer dizer que “x” representa tanto os litros da gasolina como do álcool?”.
> **A_5:** “Sim.”
> **PP:** “Mas o álcool e a gasolina são os mesmos combustíveis?”
> **A_5:** “Não, professora.”

PP: "Mas quando você coloca o "x" para os dois fica como se representassem a mesmo combustível. Quando você escreve a expressão 3x + 2x, é o mesmo que 5x. Lembra que são equivalentes, que a A_9 na hora bingo observou."

A_5: "Não, professora, não era isso que eu queria mostrar. No caso eu tenho que colocar 2 letras."

PP: "Isso mesmo."

A_5: "Então eu vou escrever 3x + 2y. Onde "x" representa o álcool e "y" a gasolina."

PP: "E aí, pessoal, vocês acham que agora está certa a expressão apresentada por A_5?"

Alunos: "Acho que sim."

Diante da expressão algébrica apresentada por A_5 e do problema proposto por ele, a professora propôs um novo problema para os alunos: "Uma pessoa abasteceu o carro com álcool e gasolina. Sabendo que ela pagou 30,00 reais para abastecer o carro com os dois combustíveis, quantos litros ela pode ter colocado de álcool e gasolina?".

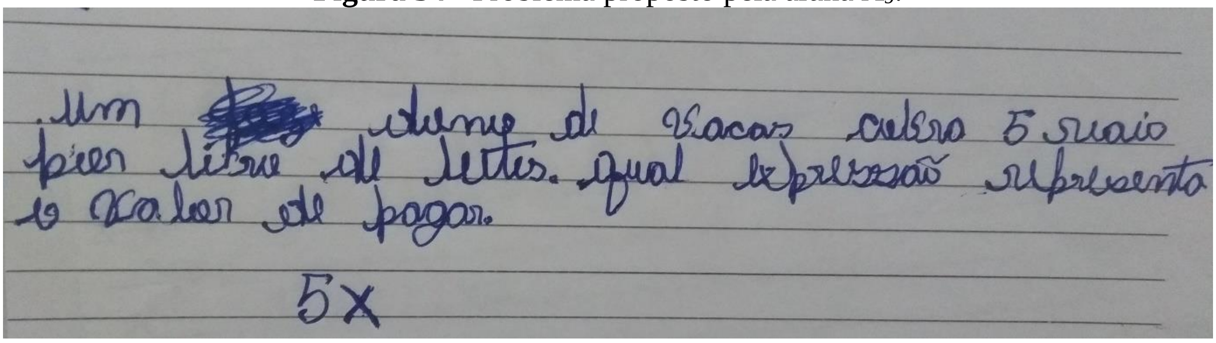
Comentário: A intenção do problema proposto pela professora não era trabalhar com os alunos o conceito de equações com duas variáveis, por mais que o trabalho através da Exploração de Problemas nos permita rever conceitos vistos anteriormente, como também caminhar para novos conceitos, porém, neste problema, a professora desejava que eles aprofundassem o conceito da letra como variável, pois teríamos várias possibilidades de combinarmos os litros de gasolina e álcool na expressão algébrica.

A frente do novo problema proposto pela professora, foi dado um tempo para que os alunos pensassem como poderiam resolver. Após o tempo estimado, a professora perguntou como eles responderam. A aluna A_9 perguntou se podia abastecer só com gasolina, a professora falou que não, pois o problema dizia que a pessoa tinha abastecido com os dois combustíveis. Logo, alguns alunos foram falando quantos litros tinham colocado de cada combustível. "Eu coloquei 6 litros de álcool e 6 litros de gasolina, pois 3 vezes 6 dá 18, e 2 vezes 6 dá 12, aí somando dá 30", falou o aluno A_{23}. Porém o aluno A_5 disse que tinha colocado: "8 litros de álcool e 3 litros de gasolina, pois 3 vezes 8, daria 24 e 2 vezes 3 daria 6, somando dá 30". Outras possibilidades foram sendo apresentadas pelos alunos, porém observamos que os valores atribuídos pelos alunos para os litros de álcool e gasolina não tinha números decimais. Logo, a professora os questionou sobre a possibilidade de colocar os números decimais, e eles disseram que ficaria mais complicado de resolver. Diante disso a professora fez alguns exemplos no quadro interagindo com a turma.

Comentário: Observamos nas soluções apresentadas pelos alunos que eles não caminharam para resolver o problema por meio de uma equação e sim resolveram por tentativa. Também não era o propósito da professora que eles caminhassem para o conceito de equações com duas variáveis. Porém, ela, ao final das soluções apresentadas pelos alunos, demonstrou no quadro como eles poderiam resolver por meio de uma equação, quando fixassem um valor para uma das letras e falou o que seria equações com duas variáveis e que eles aprofundariam mais esse conceito posteriormente.

Após a professora ter exemplificado no quadro com os números decimais, bem como ter comentado sobre equações com duas variáveis, ela perguntou se a expressão 3x + 2y estava na cartela de bingo, logo o aluno A_5 disse que não, pois o que tinha era 3x + 2x. Em seguida, a professora fez outra pergunta: “Se a expressão 3x + 2y estivesse na cartela, como poderíamos ler na linguagem usual?”. Uns alunos responderam como sendo “o triplo de um número mais o dobro de outro número”, e outros disseram a soma do triplo de um número com o dobro de outro número”. A professora então comentou que estariam certas as duas maneiras. Porém ela voltou a perguntar sobre a expressão 3x + 2x, se alguém tinha formulado um problema com essa expressão, quando a aluna A_9 disse que ela tinha criado, no entanto, utilizou a expressão na forma simplificada, como mostra a figura 34.

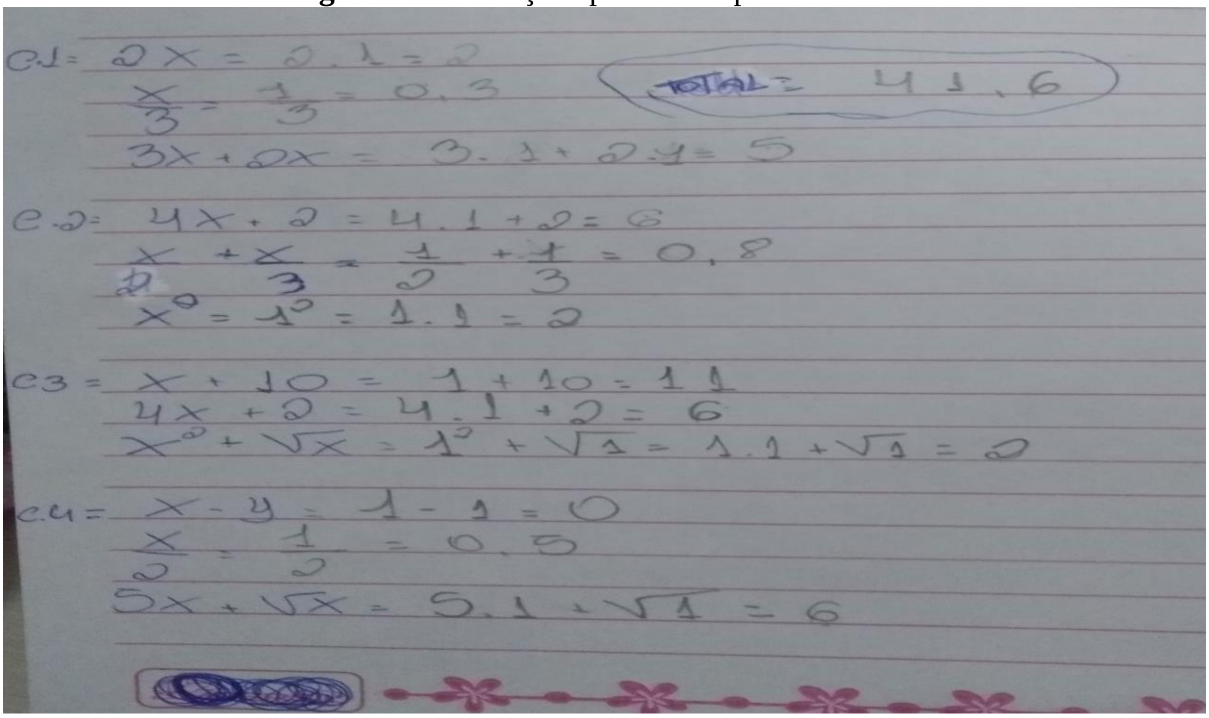
Figura 34 - Problema proposto pela aluna A_9.



Fonte: Acervo da pesquisadora.

Posterior à apresentação dos problemas propostos pelos alunos e às observações realizadas pela professora, os alunos foram para a quarta etapa da atividade na qual se trabalhou o valor numérico de cada expressão algébrica e, em seguida, de toda a cartela. Para tanto, a professora solicitou que eles atribuíssem 1 às variáveis x e y, (no bingo só havia essas duas variáveis), em todas as expressões algébricas contidas na cartela, encontrando assim seus valores numéricos. Inicialmente, os alunos fizeram as substituições nas expressões e em seguida tinham que realizar as operações. Algumas dúvidas foram surgindo após os alunos fazerem as substituições e se depararem com as expressões numéricas pois tinham que prestar atenção à ordem das operações. Como alguns alunos ainda apresentavam dúvidas em relação à resolução das expressões numéricas, a professora revisou com eles as regras para se resolver uma expressão numérica, consequentemente, muitos conseguiram concluir com êxito a atividade com vemos na figura 35.

Figura 35-Resolução apresentada pela aluna A4.



Fonte: Acervo da pesquisadora.

Após os alunos determinarem o valor numérico das expressões algébricas contidas na cartela do bingo, a professora se dirigiu ao quadro para tirar algumas dúvidas e fazer algumas correções das soluções apresentadas pelos alunos. E, com isso, pudemos finalizar a atividade e a nossa pesquisa em sala de aula.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao terminarmos nossa pesquisa faz-se necessário refletirmos sobre todo o percurso que vivenciamos ao longo de nossa jornada, desde a motivação, passando pela fundamentação até as análises. Logo, o presente trabalho surgiu da inquietação em verificar ao longo de nossa carreira docente as dificuldades dos alunos em compreenderem os conteúdos relacionados à Álgebra. Com isso, buscamos uma metodologia que promovesse um ensino e uma aprendizagem com mais profundidade. Assim, nos deparamos com a proposta metodológica de Schroeder e Lester (1989) que traz o ensino de Matemática através da Resolução de Problemas, colocando o problema matemático como ponto de partida. Com base nessa proposta, trabalhamos em sala de aula à luz das pesquisas desenvolvidas por Andrade, S (1998, 2017), o qual desenvolve em sala de aula o Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Metodologia Exploração, Resolução e Proposição de Problemas. Essa metodologia não está a par da linha de pesquisa Resolução de Problemas, porém esta perspectiva defendida pelo autor traz como carro chefe a Exploração de Problemas e proporciona um trabalho em sala de aula, indo além da solução problema.

Com base no exposto e refletindo sobre o encaminhamento que deveríamos tomar na nossa pesquisa, nos deparamos com a seguinte questão: Que contribuições a Metodologia Exploração, Resolução e Proposição de Problemas pode propiciar ao ensino e aprendizagem de expressões algébricas de modo que se torne mais compreensivo para o aluno?

Decidimos por trabalhar dentro da Álgebra o conteúdo “Expressões Algébricas”, uma vez que é por meio dele que o espaço para o entendimento de outros conteúdos algébricos é aberto, assim como é também através dele que se iniciam as dificuldades dos alunos em compreenderem a função da variável, a utilização da expressão algébrica, entre outros conceitos.

Diante de nossa questão norteadora, traçamos nosso objetivo principal o qual foi identificar e analisar as contribuições que a Metodologia Exploração, Resolução e Proposição de Problemas pode propiciar ao ensino e aprendizagem de expressões algébricas, e alguns objetivos específicos que nos ajudaram no direcionamento desta pesquisa.

Portanto, para desenvolvermos nossa pesquisa, utilizamos o método da pesquisa qualitativa, uma vez que procuramos observar, descrever e analisar nos mínimos detalhes o delineamento do nosso trabalho, considerando os pressupostos da pesquisa pedagógica, a partir da qual o professor/pesquisador pesquisa sua própria sala de aula.

Após as leituras realizadas sobre o Ensino e Aprendizagem de Álgebra e fundamentada na Metodologia Resolução de Problemas, na perspectiva da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas (ANDRADE, S. 1998, 2017), iniciamos um levantamento e seleção de problemas relacionados ao conteúdo de expressões algébricas para realizarmos nossa experiência em sala de aula, baseando-nos nas concepções de Álgebra e Educação Algébrica adotada pelos autores Fiorentini, Miorin e Miguel (1993) e de Sousa, Panossian e Cedro (2014), como também nos norteamos pelos documentos oficias brasileiros, a saber: PCN (BRASIL, 1998) e BNCC (BRASIL, 2017).

Nossa pesquisa foi desenvolvida com alunos do 8º ano do Ensino Fundamental, de uma escola pública localizada na cidade de Ingá-PB, a qual a pesquisadora era também professora. Trabalhamos em sala de aula cinco atividades, na perspectiva da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas de forma que o aluno compreendesse a função da variável; o valor numérico das expressões; a utilização da expressão algébrica para representar sequências numéricas, bem como a relação de interdependência entre duas variáveis.

No início de nossa pesquisa em sala de aula, procuramos responder a um questionamento levantado por uma aluna, sobre o "por que a utilização de letras em Álgebra". Para tanto levamos recortes sobre o percurso histórico da Álgebra, de forma que os alunos observassem a evolução da linguagem algébrica, assim como a contribuição de algumas civilizações para que ocorresse essa evolução. Além disso, procuramos desenvolver essa atividade sob o ponto de vista dos autores Sousa, Panossian e Cedro (2014), os quais propõem um trabalho com a história da Matemática, de forma que seja observado todo um contexto de criação humana, de fluência, de movimento. Portanto, por meio dessa atividade, os alunos puderam observar que a utilização das letras não é aleatória, posto que elas não estão ali ao acaso, mas sim por uma necessidade humana de representar um valor desconhecido, favorecendo a uma evolução da Álgebra concomitante à evolução humana. Por meio dessa atividade e com as discussões em sala e aula, foi possível perceber que os alunos não haviam compreendido em anos anteriores a função da variável, utilizando apenas como um símbolo sem significado.

A partir da segunda atividade começamos a trabalhar problemas que proporcionassem ao aluno compreender a função da variável, a utilização de uma expressão algébrica para generalizar padrões, o valor numérico de uma expressão e a relação de interdependência de duas variáveis.

A maioria das atividades foi desenvolvida em duplas para que houvesse um diálogo entre eles, e que pudessem troca ideias, formular estratégias e, em seguida, socializar com os demais da sala de aula, colaborando para compreensão dos conceitos algébricos.

No primeiro problema proposto, intitulado “A disputa entre amigos”, os alunos estranharam a forma de se trabalhar as ideias algébricas por parte da professora, uma vez que estavam acostumados a inicialmente o professor explicar no quadro o conceito e, em seguida, passar listas de exercícios, os quais eles teriam que responder sozinhos ou esperarem a correção da atividade por parte do professor. Logo, em posse da atividade proposta a eles, foi explicado que teriam que explorar o problema e que, por meio dessa exploração, iriam surgindo novos conceitos algébricos, bem como a necessidade de revisitação de conceitos matemáticos estudados anteriormente.

Constatamos na primeira atividade que o trabalho com a Metodologia Exploração de Problemas não é uma tarefa fácil de realizar, uma vez que os alunos não estão habituados a esse método de trabalho, posto que exige deles capacidades para ler, interpretar, refletir, argumentar e justificar o percurso e resultados. Portanto, nessa primeira atividade, os alunos se apresentaram receosos de como poderiam explorar o problema, porém, com a mediação da professora junto a eles, observamos uma interação maior entre as duplas e entre os demais da turma pois, à medida que um aluno levantava um questionamento sobre o problema, a professora tentava mediar esse questionamento com todos os demais da sala de aula, de forma que eles refletissem juntos, e assim aparecessem argumentos que justificassem o que estava sendo questionado, promovendo a compreensão da ideia algébrica proposta no problema.

No decorrer das demais atividades, fomos percebendo uma postura diferente dos alunos, pois passaram a ser mais ativos durante as explorações dos problemas, passando a se expressarem mais, a dialogar uns com os outros e com a professora de maneira que queriam expor seus argumentos e justificá-los. Diante disso, verificamos que a metodologia Exploração, Resolução e Proposição de Problemas proporciona um ambiente favorável para diálogos e reflexões, levando o aluno a ser mais participativo na construção da sua aprendizagem.

Pudemos verificar que, através do processo de codificação e descodificação (Andrade, S., 2017), chegamos à construção das ideias e conceitos sobre expressões algébricas, por parte dos alunos, proposta durante as atividades. Essas ideias e conceitos foram sendo apreendidos pelos alunos com compreensão, pois, a cada atividade desenvolvida, realizamos questionamentos que ajudassem o aluno a refletir sobre a função da variável no problema, bem como da expressão algébrica utilizada para representar determinada situação.

Durante o processo de resolução dos problemas, vislumbramos tanto os avanços dos alunos, quanto as dificuldades ao explorarem os problemas. Os avanços se deram em relação à participação mais ativa, segurança em argumentar, questionar, refletir e justificar as ideias trabalhadas. Porém, observamos também as dificuldades dos alunos à mediada que iam explorando os problemas, como as que Booth (1995) constata em seu trabalho realizado em 1989, evidenciando que esses obstáculos atrapalham uma aprendizagem com compreensão, principalmente quando o ensino de Álgebra é voltado para manipulação de letras.

Por isso, pensando em um ensino de Álgebra com mais profundidade, nos inclinamos para a metodologia Exploração, Resolução e Proposição de Problemas, defendida por Andrade, S. (1998, 2017), através da qual, por meio do movimento Problema-Trabalho-Reflexões e Sínteses-Resultado, verificamos a construção da aprendizagem dos alunos em relação às ideias inicias sobre expressões algébricas.

Corroboramos a fala de Andrade (2017) no que diz respeito ao trabalho com exploração, resolução e proposição de problemas, pois, de acordo com o autor, no primeiro momento manifesta-se mais a resolução, em seguida a exploração e só depois a proposição. Andrade (2017) ainda expõe que, nas pesquisas orientadas por ele, “a Proposição de Problemas parece ser a ferramenta mais difícil de ser trabalhada e desenvolvida nos alunos.” Sobre isso pudemos vivenciar em nossa pesquisa, pois a maioria dos questionamentos realizados no decorrer das atividades partia da professora.

Percebemos que tanto a Exploração, quanto Resolução e a Proposição estimularam significativamente a construção da aprendizagem dos alunos, mostrando que, durante o processo de busca pelo resultado do problema, não se tem uma ordem do que pode acontecer primeiro, ou seja, uma pode impulsionar a outra; ocorrendo inicialmente a exploração do problema e, consequentemente, o surgimento de novos problemas para, depois, chegar à resolução do problema inicial. Contudo, por meio de cada etapa pudemos verificar seus benefícios no processo de apropriação da aprendizagem dos alunos.

Com isso, podemos dizer que o uso da Resolução dos problemas nos proporcionou analisar como os alunos conseguiam representar algebricamente os problemas, quais as estratégias que utilizaram e quais dificuldades tiveram durante a resolução. Já a Exploração dos problemas favoreceu um aprofundamento no problema, proporcionado diálogos entre a professora e os alunos posto que, por meio desses diálogos, os alunos podiam argumentar e justificar suas estratégias. Por conseguinte, através do trabalho com a Proposição de problemas, proposto tanto pela professora, quanto pelos alunos, foi possível verificar que tal método proporcionou aos alunos a organização do seu pensamento, por meio do processo de reflexão e sínteses, favorecendo a compreensão das ideias propostas no problema inicial. Lembramos que no processo de exploração, resolução e proposição o trabalho não acontece dissociando uma fase da outra e que a exploração e a resolução, aliadas à proposição de problemas, favoreceram a construção do pensamento algébrico dos alunos.

É valido destacar que o ensino e aprendizagem de Matemática, através da Metodologia Exploração, Resolução e Proposição de Problemas, requer uma postura diferenciada do professor, o qual assume um papel importante durante todo o trabalho de exploração, pois, conforme Andrade, S. (2017, p. 388), "o professor-pesquisador precisa constantemente impulsionar o trabalho para que os alunos, com sua mediação-refutação, possam ir cada vez mais além da solução do problema".

Observamos em nossa pesquisa que o trabalho através da Metodologia Exploração, Resolução e Proposição de Problemas alcançou os alunos com dificuldades e potencializou o aprendizado daqueles que já se destacam, posto que se tornaram multiplicadores do conhecimento ao trocarem ideias com os demais colegas. Assim, comprovamos que trabalhar apenas em busca da solução não é o mesmo que trabalhar na perspectiva da exploração, pois levar o aluno a percorrer um processo apenas para chegar à solução é resolver o problema, porém levar o aluno a novos caminhos, novos problemas, novas sínteses e novos resultados é explorar o problema.

Diante disso, concordamos com as ideias adotadas por Andrade, S. (2017), no que diz respeito ao trabalho através da Exploração de Problemas, pois, durante a atividade 4 denominada "Vou de Táxi", pudemos vivenciar um pouco do que o autor expressa:

> No trabalho de exploração de problemas há um prazer e uma alegria de ir cada vez mais longe, um ir cada mais profundo, um ir cada vez mais curioso, há um ir que chega e nunca chega, um ir que pode sempre ir, um ir que sempre se limita ao contexto do aluno, do professor, da Matemática, da escola...e por isso pode ir cada vez e mais outra vez....(ANDRADE, 2017, p. 366).

Caminhando para o encerramento de nossas considerações, e refletindo sobre todo o percurso que vivemos antes, durante e depois da pesquisa, estamos cientes de que o campo da Álgebra é vasto e que grandes são as dificuldades apresentadas pelos alunos, contudo, gostaríamos de expressar a satisfação de trabalhar com a Metodologia Exploração, Resolução e Proposição de Problemas, uma vez que esta pode contribuir para um ensino e aprendizagem de expressões algébricas com mais compreensão, dada a oportunidade nos concedida enquanto docente de refletirmos sobre nossa prática, de modo a considerar que houve uma mudança significativa na nossa postura concernente à condução da aula. Deste modo, enquanto pesquisadores, salientamos o desejo de continuarmos aprofundando cada vez mais nossos estudos dentro da Educação Matemática, em especial a Educação Algébrica, com o auxílio da Metodologia Exploração, Resolução e Proposição de Problemas.

REFÊRENCIAS

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que Através da Resolução de Problemas? In: ONUCHIC, L. R. et al. (Orgs). **Resolução de problemas**: teoria e prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014.

ANDRADE, C. P.; ONUCHIC, L. R. Perspectivas para a Resolução de Problemas no GTERP. In: **Perspectivas para resolução de problemas** / Lourdes de La Rosa Onuchic, Luiz Carlos Leal Junior, Marcio Pironel, (organizadores). – São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017, p. 433-466.

ANDRADE, L. C. C. de. **Expressões algébricas na educação básica**: Validação de atividades de ensino e aprendizagem. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade de Brasília. Brasília, 2016.

ANDRADE, S. de. **Ensino-Aprendizagem de matemática via resolução, exploração, codificação e descodificação de problemas**. Dissertação de Mestrado – Universidade Estadual Paulista, UNESP - Rio Claro, 1998.

ANDRADE, S. Um caminhar crítico reflexivo sobre Resolução, Exploração e Proposição de Problemas Matemáticos no Cotidiano da Sala de Aula. In: **Perspectivas para resolução de problemas** / Lourdes de La Rosa Onuchic, Luiz Carlos Leal Junior, Marcio Pironel, (organizadores). – São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017, p. 355-395.

ANDRE, M. E. D. A. de. **Etnografia da prática escolar**. Campinas-SP: Papirus, 1995 (Série Prática Pedagógica).

ANDRINI, A.; VASCONCELLOS, M. J. **Praticando Matemática 8.** São Paulo-SP: Editora do Brasil, 2015.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, Sari Knopp. **Investigação qualitativa em educação**. Tradução Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Porto: Porto Editora, 1994.

BONADIMAN, A. **Álgebra no ensino fundamental**: produzindo significados para as operações básicas com expressões algébricas. Dissertação de Mestrado. UFGRS. Programa de Pós-graduação em ensino de matemática. 2007.

BOOTH, L. R. Dificuldades das crianças que se iniciam em Álgebra. In: COXFORD, Arthur F.;SHULTE, Albert P. **As ideias da álgebra**. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995, p. 23-37.

BORTOLLETI, A. A. **Introdução às expressões algébricas na escola básica**: variáveis e células de planilhas Seletrônicas. Dissertação de Mestrado (Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2014.

BRASIL, S. E. F. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: matemática. Brasília-DF. MEC/SEF. 1998.

BRASIL, S. E. F. **Parâmetros curriculares nacionais**: matemática. Brasília-DF. MEC/SEF. 1997.

BRASIL, Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Relatório SAEB , 2017. [recurso eletrônico]. – Brasília, 2019. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/documents/186968/484421/RELAT%C3%93RIO+SAEB+2017/fef63936-8002-43b6-b741-4ac9ff39338f?version=1.0>. Acesso em 2 de setembro 2019.

BRASIL, Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. SAEB- Evidências da Edição,2017. http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=94161-saeb-2017-versao-ministro-revfinal&category_slug=agosto-2018-pdf&Itemid=30192

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Versão Final. Brasília: MEC, 2017. Disponível em:http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=79601-anexo-texto-bncc-reexportado-pdf-2&category_slug=dezembro-2017-pdf&Itemid=30192. Acesso em: 07 jun 2020.

CASTRO, M. R. **Educação Algébrica e Resolução de problemas**, 2003. Disponível em: <http://cdnbi.tvescola.org.br/resources/VMSResources/contents/document/publicationsSeries/110456EducacaoAlgebricaResolucaoProblemas.pdf>. Acesso em: 10 agosto 2018.

CAI, J.; HWANG, S.; JIANG, C.; SILBER, S. Problem-Posing Research in Mathematics Education: Some Answered and Unanswered Questions**. In: Mathematical Problem Posing, Research in Mathematics Education,** Springer, New York, NY, p. 3-34.

CHALOGH, L.; HERSCOVICS, N. Ensinando expressões algébricas de maneira significativa. In: COXFORD, Arthur F.;SHULTE, Albert P. **As ideias da álgebra**. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995, p. 37- 48.

CHRISTO, D. S. **Introdução da noção de variável em expressões algébricas por meio da resolução de problemas**: uma abordagem dinâmica. Dissertação de Mestrado (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

COELHO, F., & AGUIAR, M. A história da Álgebra e o pensamento algébrico. Estudos Avançados, v. 32 n. 94, 171-187. Disponível em https://doi.org/10.1590/s103-40142018.3294.0013 acesso em: 30 jan de 2019.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2002.

FIORENTINI, D., MIORIM, M. A. & MIGUEL, A. Contribuições para um repensar... a Educação Algébrica Elementar, In: **Pro-Posições**, Revista Quadrimestral da Faculdade de Educação. Unicamp, vol. 4. nº1[10]. Campinas: Cortez Editora, 1993.

FRIEDLANDER, A., & ARCAVI, A. **Tasks and Competencies in the Teching and Learning of Algebra.** Natiional Council of Teachers of Mathematics (NCTM), p. 1-15, 2017.

IBRAHIM, S. A. **A apropriação dos significados de polinômios**: um estudo na perspectiva da teoria histórico-cultural. Dissertação de Mestrado (Mestrado em Educação) – Universidade de Uberaba, Uberaba, 2015.

LANKSHEAR, C.; KNOBEL, M. **Pesquisa pedagógica**: do projeto à implementação. Tradução Magda França Lopes. Porto Alegre: Artmed, 2008.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas: Papirus, 1997.

LLOYD, G. M.; HERBEL-EISENMANN, B.; STAR, J. R. **Developing essencial understanding of expressions, equations, and functions for teaching mathematics in grades 6-8**. National Council of Teachers of Mathematics, 2011.

MIGUEL, A.; FIORENTINI, D.; MIORIM, M.A. Álgebra ou Geometria: Para onde Pede o Pêndulo? **Pró-Posições**, v. 3, n 1(7), p.39-54, mar. 1992.

MORAIS, R. S.; ONUCHIC, L. R.; LEAL JUNIOR, L.C. Resolução de Problema, uma matemática para ensinar? . In: **Perspectivas para resolução de problemas** / Lourdes de La Rosa Onuchic, Luiz Carlos Leal Junior, Marcio Pironel, (organizadores). – São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017, p. 397-432.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. In**: Boletim de Educação Matemática** (BOLEMA), v.25, N. 41, DEZ. 2011. Universidade estadual Paulista - Campus de Rio Claro. Ed. Comemorativa 25 anos.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V**. Pesquisa em educação matemática**: concepções e perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999.

PINTO, R. A. **Erros e dificuldades no ensino de Álgebra**: o tratamento dado por professores de 7º série em aula. Dissertação de Mestrado (Educação Matemática) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas, 1997.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**: um novo aspecto do método matemático / G. Polya (1945); tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo._2. Reimpr.- Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PONTE, J. P. **Números e álgebra no currículo escolar**, 2006. Disponível:< http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/4525/1/06-Ponte%28Caminha%29.pdf>Acessado em: 08 mar. De 2019.

PONTE, J. P.; BRANCO, N; MATOS, A. **Álgebra no Ensino Básico**. Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC, 2009.

RIBEIRO, A. J.; CURY, H. N. **Álgebra na formação do professor:** explorando os conceitos de equação e função. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2015.

SANTOS, E.V.; ANDRADE, S. Resolução, Exploração e Proposição de Problemas nos anos iniciais do ensino fundamental: contribuições para o ensino e aprendizagem da combinatória. **Revista de Educação Matemática**, São Paulo, SP, v. 17, 2020, p.01-22.

SCARLASSARI, N. T.. **Um estudo de dificuldades ao aprender álgebra em situações diferenciadas de ensino em alunos da 6ª série do ensino fundamental**. 2007. 149 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – UNICAMP, Campinas, 2007.

SCREMIN, G.; RIGHI, F. P. Ensino de álgebra no ensino fundamental: uma revisão histórica dos PCN à BNCC. **Ensino em Re-Vista**, v. 27, n. 2, p. 409-433, 28 abr. 2020.

SILVA, R.R.C. **O desenvolvimento do Raciocínio Algébrico**. UEPB, Campina Grande, PB. 2011.

SILVA, M. G. **Potencialidades da atividade de estudo no desenvolvimento do pensamento e da linguagem dos alunos dos anos finais do ensino fundamental**. Dissertação (Mestrado em Educação)- Universidade de Uberaba, Uberaba, 2015.

SILVER et al. **Problem Posing and Solving in Mathematics Education.** In: The 14th International Congress on Mathematical Education. Disponível: http://www.icme14.org/static/en/index.html>. Acesso em: agosto de 2020.

SOUSA, M. DO C. O movimento lógico-histórico enquanto perspectiva didática para o ensino de matemática. **Revista Obutchénie**, v. 1, n. 4, p. 40-68, 23 maio 2018.

SOUSA, M. C.; PANOSSIAN, M. L; CEDRO, W. L. **Do movimento lógico e histórico à organização do ensino**: o percurso dos conceitos algébricos/ Maria do Carmo de Sousa, Maria Lúcia Panossian, Wellington Lima Cedro.- Campinas, SP: Mercado de Letras, 2014.

SOUSA, M. DO C. **O ensino de álgebra numa perspectiva lógico-histórica**: um estudo das elaborações correlatas de professores do ensino fundamental. Tese de doutorado (Educação Matemática) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas, 2004.

USISKIN, Z. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (orgs.). **As ideias da Álgebra**. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995, p.9-22.

ANEXO A

Atividade 1- Observando e dialogando sobre o contexto histórico da Álgebra

A Álgebra é um ramo da Matemática que foi criada há milénios com a participação de algumas civilizações, como os: babilônicos, egípcios, gregos, hindus, árabes e europeus, que fizeram parte do progresso da Álgebra. No início utilizava-se muito a Álgebra para resolver problemas que envolviam quantidades desconhecidas. Um dos problemas mais antigos que se conhece está no papiro de Rhind, que é um documento egípcio.

Cada civilização tinha uma forma de resolver os problemas relacionados à Álgebra. Alguns pesquisadores comentam que tanto os babilônicos como os egípcios utilizavam a aritmética, na maioria das vezes, para resolver problemas algébricos, os quais, em sua maior parte, estavam relacionados a atividades do cotidiano da civilização. No caso da civilização grega, eles utilizavam a geometria para resolver problemas algébricos, devido às dificuldades que eles tinham em trabalhar com os números Irracionais. Um dos Um dos gregos que se destacaram com seus estudos e contribuições para a Álgebra foi Diofanto de Alexandria.

Outra civilização que se destaca é a árabe, que utilizavam a matemática para resolver problemas relacionados ao comércio, à arquitetura, à astronomia, à geografia e à ótica. Um dos nomes que se destacam entre os povos árabes é o de *Abu 'Abdllãh Muhammad ibn Musa Al-Khwarizmi* a partir do qual, surgiu a palavra Álgebra entre 813 e 833 d.C., em uma obra conhecida por *Hisabaljarbw 'al-mugabalah*, que mais tarde foi chamada de *Al-jarb* entre os matemáticos e, após algumas traduções, passou para Álgebra.

O uso da aritmética também é bem presente na civilização indiana na qual, muitos problemas eram resolvidos de forma intuitiva com o auxílio da aritmética. Nesta civilização, destaca-se a contribuição de dois matemáticos: *Brahmagupta*, em 628 d.C. e *Bhaskara*, 1150 d.C. *Bhaskara* ficou sendo um dos mais importantes matemáticos hindus por ter conseguido preencher as lacunas da obra de *Brahmagupta*, visto que chegou à fórmula resolutiva da equação polinomial do 2º grau. No Brasil, essa fórmula é muito conhecida pela fórmula de *Bhaskara*. $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2a}$.

Encontramos na Europa, matemáticos e estudiosos que contribuíram significativamente para o desenvolvimento da Álgebra, como podemos destacar Tartaglia e Cardano que descobriram uma solução algébrica para equação cúbica $x^3 + px^2 = n$, porém

Tartaglia contesta Cardano de tê-lo copiado. Assim, um dos que mais se evidencia por sua participação no percurso da evolução algébrica na Europa é François Viete, que inicialmente atribuiu às vogais representar números supostamente conhecidos, e as consoantes para números desconhecidos. Viéte, diante de suas observações, ficou conhecido como "O pai da Álgebra". Temos também a contribuição de Renè Descartes que deu prosseguimento e aprimoramento aos símbolos algébrico, além de desenvolver um método para resolver equações, isso devido ao avanço da linguagem algébrica.

Durante a evolução da Álgebra vamos observar que sua notação algébrica passou por três estágios: o retórico, o sincopado e o simbólico.

No estágio retórico (1700 a.C até 250 d.C) não havia os símbolos que conhecemos hoje. Os matemáticos utilizavam, nesta época, as palavras para poderem resolver problemas com características algébricas. O estágio sincopado (250 d.C até entorno de 1500) é marcado pelo grande salto nos estudos da Álgebra, pois os matemáticos da época começam a fazer uso das palavras abreviadas para descrever os problemas algébricos, o que foi sendo aperfeiçoado ao longo dos tempos até chegar ao estágio simbólico (após 1500), no qual surgem os símbolos que ajudariam o manuseio das situações que envolvessem problemas algébricos, favorecendo um grande salto na evolução da Álgebra.

Abaixo temos uma situação problema trabalhada durante os estágios retóricos e sincopados e em seguida traduzido para linguagem simbólica atual.

> Qual deve ser o valor de um quadrado que, quando vinte e um somados a ele, torna-se igual ao equivalente a dez raízes daquele quadrado? Solução: divida ao meio o numero de raízes; a metade é cinco. Multiplique este número por si mesmo; o produto é 25. Subtraia deste o vinte e um que está ligado ao quadrado; o resto é quatro. Extraia sua raiz, ela é dois. Subtraia isto da metade das raízes, que é cinco, o resto é três. Esta é a raiz do quadrado que você procura e o quadrado é nove. Ou você pode somar a raiz à metade das raízes; a soma é sete; essa é a raiz do quadrado que você, procura, e quadrado é mesmo quarenta e nove.

Ao traduzirmos esse enunciado para nossa linguagem simbólica, teremos:

$$x^2 + 21 = 10x$$
$$x = \frac{10}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-10}{2}\right)^2 - 21}$$
$$x = 5 \pm \sqrt{4}$$
$$x = 3ou7$$

Conhecer esse registro nos possibilita enxergar a evolução da Álgebra, bem como verificar o que significa cada símbolo.

ANEXO B

Atividade 5 – Bingo das Expressões Algébricas

Ideia: Leitura das expressões algébricas com compreensão, Valor numérico.

Objetivos: Trabalhar a linguagem algébrica e o valor numérico das expressões algébricas através da Exploração de Problemas

PEÇAS DO BINGO

x	2x	3x	4x	5x
X^2	X^3	$\sqrt{X}$	$\frac{X}{2}$	$\frac{X}{3}$
$\frac{X}{4}$	$\frac{X}{5}$	X + 1	X + 2	X + 10
2x -1	2X -3	2X + 4	3x+ 10	3x + 1
4x + 2	4x+ 5	3x+ 2x	$3x + x^2$	$4x + \sqrt{X}$
$2X + \frac{x}{2}$	$3X + \frac{x}{3}$	$5x + \sqrt{X}$	$X^3 - 3$	$X^2 + 1$
$X^2 + x^3$	$2x^2$	$\frac{X}{2} + 2$	$\frac{X}{5} + 1$	$\frac{X}{2} + \frac{x}{3}$
$x^2 + \frac{X}{2}$	4x +3	$X^2 + \sqrt{X}$	X + y	X . y
X - y	$\frac{X}{y}$			

CARTELAS DO BINGO

BINGO: EXPRESSÃO ALGÉBRICA			
X	4X	X + 2	X + Y
X.Y	3X + 10	4X + 2	2X + $\frac{X}{2}$
3X + 2X	X^2	$\sqrt{X}$	$5X+\sqrt{X}$

BINGO: EXPRESSÃO ALGÉBRICA			
2X	4X	2X + 4	X.Y
3X + X^2	3X + 10	4X + 5	$\frac{X}{2}$
3X + 1	X^2	X^2 + $\sqrt{X}$	$5X+\sqrt{X}$

BINGO: EXPRESSÃO ALGÉBRICA			
5X	4X	2X- 3	X + Y
$\frac{X}{Y}$	$\frac{X}{2}+\frac{X}{3}$	4X + $\sqrt{X}$	$2X+\frac{X}{2}$
3X + X^2	X^3	$X^2+\sqrt{X}$	$4X+\sqrt{X}$

BINGO: EXPRESSÃO ALGÉBRICA			
$2X^2$	4X +2	X + 1	X - Y
$\frac{X}{3}$	$\frac{X}{5}+1$	4X + 2	$\frac{X}{5}$
3X + 10	3X + X^2	$X^2+\sqrt{X}$	$5X+\sqrt{X}$

BINGO: EXPRESSÃO ALGÉBRICA			
4X	X	X + 2	2X -1
$\frac{X}{3}$	$\frac{X}{Y}$	$2X^2$	$\frac{X}{5}$
3X + 1	3X + X^2	$\sqrt{X}$	$5X+\sqrt{X}$

BINGO: EXPRESSÃO ALGÉBRICA			
5X	2X	4X + 3	X +Y
$\frac{X}{4}$	$\frac{X}{5}+1$	2X + 4	$\frac{X}{2}$
3X + 10	3X + X^2	$X^2+\sqrt{X}$	$\frac{X}{2}+2$

BINGO: EXPRESSÃO ALGÉBRICA			
X	5X	$2X^2$	X - Y
$\frac{X}{4}$	$\frac{X}{2}+\frac{X}{3}$	4X + 5	$\frac{X}{5}$
3X + 2X	$3X + X^2$	$X^2 + X^3$	$5X+\sqrt{X}$

BINGO: EXPRESSÃO ALGÉBRICA			
5X	X + 1	$3X + \frac{X}{3}$	X + Y
$\frac{X}{4}$	$\frac{X}{2}$	4X + 2	$\frac{X}{5}$
X + 2	$3X + X^2$	$X^2 + X^3$	$\sqrt{X}$

BINGO: EXPRESSÃO ALGÉBRICA			
3X	5X	$X^2 + 1$	X. Y
$\frac{X}{3}$	$\frac{X}{2}+\frac{X}{3}$	X+ 2	$\frac{X}{4}$
$2X^2$	$3X + X^2$	$X^2 + X^3$	$4X+\sqrt{X}$

BINGO: EXPRESSÃO ALGÉBRICA			
X^3	X	$3X + \frac{X}{3}$	$X^2 + 1$
$\frac{X}{4}$	$\frac{X}{2}$	4X + 5	$\frac{X}{5}$
X + 2	3X + 2X	$X^2 + X^3$	$\sqrt{X}$

BINGO: EXPRESSÃO ALGÉBRICA			
5X	2X + 4	$\frac{X}{3}$	X + Y
$\frac{X}{4}$	$\frac{X}{2}$	4X + 2	4X + 3
X + 2	X^2	$X^2 + X^3$	$5X+\sqrt{X}$

BINGO: EXPRESSÃO ALGÉBRICA			
3X	2X - 1	$\frac{X}{3}$	X + Y
X +1	$\frac{X}{2}$	4X + 5	$\frac{X}{5}$
X + 10	$3X + X^2$	X^3	$\sqrt{X}$

BINGO: EXPRESSÃO ALGÉBRICA			
2X	X + 1	3X	X - Y
$\frac{X}{2}+2$	$\frac{X}{2}$	4X + 2	$\frac{X}{5}$
X	$3X + X^2$	X^2	2X -3

BINGO: EXPRESSÃO ALGÉBRICA			
5X	X + 10	$\frac{X}{3}$	$\frac{X}{Y}$
$\frac{X}{4}$	$\frac{X}{2}$	4X + 2	$\frac{X}{5}$
X + 2	3X	$X^2+ X^3$	$4X+\sqrt{X}$

BINGO: EXPRESSÃO ALGÉBRICA			
5X	2X - 1	$\frac{X}{2}$	$\frac{X}{Y}$
$\frac{X}{4}$	$\frac{X}{2}$	3X + 2X	$\frac{X}{5}$
2X -3	3X	X^2	$5X+\sqrt{X}$

BINGO: EXPRESSÃO ALGÉBRICA			
2X	X + 1	$\frac{X}{5}$	$\frac{X}{Y}$
$\frac{X}{4}$	$\frac{X}{2}+2$	4X + 2	$\frac{X}{3}$
2X -3	3X	$X^2+ X^3$	$4X+\sqrt{X}$

BINGO: EXPRESSÃO ALGÉBRICA			
2X	3X + 1	$\frac{X}{5}$	x.y
$\frac{X}{4}$	$x^2+\frac{X}{2}$	4X + 2	$\frac{X}{3}$
2X + 4	3X	$X^2+ X^3$	$4X+\sqrt{X}$

BINGO: EXPRESSÃO ALGÉBRICA			
3x	X + 1	X^3-3	$\frac{X}{Y}$
$\frac{X}{4}$	2x -1	4X + 5	$\frac{X}{3}$
2X + $\frac{x}{2}$	5X	$X^2+ X^3$	$5X+\sqrt{X}$

BINGO: EXPRESSÃO ALGÉBRICA			
X	X + 1	$\frac{X}{5}$	$\frac{x}{2}+2$
$\frac{X}{4}$	X + y	4X + 5	$\frac{X}{3}$
2X + 4	3X	X^3	$\sqrt{X}$

BINGO: EXPRESSÃO ALGÉBRICA			
2X	3X + 1	$\frac{X}{5}$	x.y
$\frac{X}{4}$	$x^2+\frac{X}{2}$	4X + 2	$\frac{X}{3}$
2X + 4	3X	X^2+X^3	$4X+\sqrt{X}$

BINGO: EXPRESSÃO ALGÉBRICA			
2X	3X + 1	$\frac{X}{5}$	X^3
$\frac{X}{5}$	$x^2+\frac{X}{2}$	4X + 2	$\frac{X}{3}$
2X + 4	3X	X + 10	$4X+\sqrt{X}$

BINGO: EXPRESSÃO ALGÉBRICA			
4X	3X + 1	$\frac{X}{5}$	x.y
$\frac{X}{4}$	$x^2+\frac{X}{2}$	4X + 2	X+1
2X + 4	2X	X^2+X^3	$4X+\sqrt{X}$

BINGO: EXPRESSÃO ALGÉBRICA			
X	3X	4X + 3	X + Y
X.Y	X + 10	2X -3	3X + 1
3X + 2X	X^2	$\sqrt{X}$	$4X+\sqrt{X}$

BINGO: EXPRESSÃO ALGÉBRICA			
X	2X	X + 1	X + Y
X^3- 3	2X + $\frac{X}{2}$	2X -3	4X + 5
3X + 2X	X^2	5X + $\sqrt{X}$	$4X+\sqrt{X}$