UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO ACADÊMICO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

JESSICA ALMEIDA ARAUJO

AS OPERAÇÕES ARITMÉTICAS FUNDAMENTAIS NA PERSPECTIVA DA EXPLORAÇÃO, RESOLUÇÃO E PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS

CAMPINA GRANDE-PB
2021

JESSICA ALMEIDA ARAUJO

AS OPERAÇÕES ARITMÉTICAS FUNDAMENTAIS NA PERSPECTIVA DA EXPLORAÇÃO, RESOLUÇÃO E PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática

Orientador: Prof. Dr. Silvanio de Andrade

CAMPINA GRANDE – PB
2021

A663o Araujo, Jessica Almeida.
As operações aritméticas fundamentais na perspectiva da exploração, resolução e proposição de problemas [manuscrito] / Jessica Almeida Araujo. - 2021.
159 p. : il. colorido.

Digitado.
Dissertação (Mestrado em Acadêmico em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2021.
"Orientação : Prof. Dr. Silvanio de Andrade , Departamento de Matemática - CCT."

1. Aritmética. 2. Ensino de Matemática. 3. Resolução de problemas matemáticos. 4. Ensino fundamental. I. Título

21. ed. CDD 513.2

Elaborada por Lucas H. A. da Silva - CRB - 15/898 BC/UEPB

JESSICA ALMEIDA ARAUJO

AS OPERAÇÕES ARITMÉTICAS FUNDAMENTAIS NA PERSPECTIVA DA EXPLORAÇÃO, RESOLUÇÃO E PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática

Aprovada em: 29/09/2021.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Silvanio de Andrade- UEPB (Orientador)

Profa. Dra. Maria Betânia Sabino Fernandes (UFCG)

Prof. Dr. Tiêgo dos Santos Freitas (SEECT-PB)

À minha mãe, Naluce, que sempre me apoiou em tudo, ao meu pai, José, e à minha avó, Ceci.

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer, primeiramente, a Deus, que me deu forças para conseguir concluir minha pesquisa, tendo em vista que aparecerem inúmeras adversidades no percurso que quase me fizeram desistir.

Agradeço, também, a minha família, pelo apoio incondicional, uma vez que, nos momentos mais difíceis de minha trajetória, meus familiares se fizeram presentes, sempre dando bons conselhos e apoiando-me em tudo.

Ao meu esposo Fábio, pela paciência e compreensão, dando sempre motivação para que pudesse continuar a prosseguir em minha trajetória acadêmica.

Ao meu amigo João Luiz, pelo apoio de sempre. Temos uma amizade longa, uma vez que fizemos a graduação juntos e, agora, o mestrado.

Ao meu amigo Adriano Alves, pelo apoio e ensinamentos.

Ao meu amigo Hélio, que não está mais presente entre nós, pelo seu apoio em todas as circunstâncias, tanto ruins quanto boas, que se apresentaram ao longo do meu caminho.

Às amizades que construí durante a participação das aulas no mestrado, tais quais destaco: Ana Beatriz, Cícero, Karina e Saul.

Ao meu orientador, pela paciência e pelos bons direcionamentos que me fizeram construir, aos poucos, esta pesquisa.

Aos professores da Banca, por terem aceitado o convite em participar e por terem fornecido várias contribuições que foram de grande valia para a qualificação deste trabalho.

RESUMO

A presente pesquisa visa promover uma aprendizagem reflexiva acerca das Operações Aritméticas Fundamentais via Exploração, Resolução e Proposição de Problemas (ERPP). Caracteriza-se como uma pesquisa qualitativa na modalidade pedagógica e que devido à pandemia do Novo Coronavírus (COVID - 19), teve sua execução de forma remota, por meio do aplicativo Google Meet. Os sujeitos envolvidos são alunos do 6º ano do Ensino Fundamental de uma Escola pública da cidade de Baía Formosa-RN, com os quais realizamos um total de doze encontros, no intuito de trabalhar as ideias/conceitos/significados das Operações Aritméticas Fundamentais via Exploração, Resolução e Proposição de Problemas. O levantamento de dados se deu a partir de conjuntos de problemas, que foram mediados durante os encontros e anotações feitas ao logo do desenvolvimento das aulas. Nas análises desses encontros, evidenciamos que os alunos possuíam dificuldades em interpretar os problemas e apresentaram erros no algoritmo das operações, porém, alguns apresentaram outros possíveis caminhos para se obter a resolução do problema. Destacamos que, quando os alunos foram postos como propositores de problemas, alguns consideraram uma tarefa trabalhosa, já que estavam acostumados a resolverem "contas" e ficaram evidentes as dificuldades acentuadas nas quatro operações, mas ao longo dos encontros, percebemos que houve uma mudança na postura dos alunos, eles passaram a ter mais autonomia, a refletir acerca das suas resoluções para os problemas propostos, e novos problemas foram surgindo, o que nos possibilitou apresentar novas ideias para determinadas operações fundamentais, percebemos ainda, que a participação aumentou e que, com nossa mediação, os alunos puderam construir os conceitos/ideias/significados das operações aritméticas, sem fornecer de forma inicial os conceitos, mas sim problemas que trabalhavam essas ideias. Desse modo, concluímos que, apesar de não ser uma tarefa fácil, é possível trabalhar com a metodologia de Exploração, Resolução e Proposição de problemas, contribuindo para uma aprendizagem reflexiva de conceitos/ideias/significados das Operações Aritméticas Fundamentais. Além disso, propomos novos direcionamentos, que é o trabalho com outros conjuntos numéricos, em especial, o conjunto dos números racionais.

Palavras-Chave: Operações Aritméticas Fundamentais. Conceitos, ideias e significados. Exploração, Resolução e Proposição de Problemas.

ABSTRACT

The current research aims at the promotion of a reflexive learning on Fundamental Arithmetic Operations through Problem Exploration-Solving-Posing (PESP). This work carries out a qualitative research on pedagogical model, in which due to the pandemic of the New Coronavirus (COVID – 19) had its course remotely through the application Google Meet. The subjects involved are students of the 6^{th} grade of the Brazilian Elementary School of a public school in the city of Baía Formosa-RN, Brazil. The research carries out records of 12 meetings on the intent to discuss the ideas/concepts/meaning of Fundamental Arithmetic Operations through Problem Exploration-Solving-Posing. The data gathering was carried out by a group of problems mediated through meetings and based on notes taken by the author on the development of classes. On the analysis of these meetings, it highlights students have difficulties understanding problems and presenting the mistakes on the algorithm of the operations. However, there are some presented solving approaching different perspectives on the problem solving. The research points out students were considered problems posers, while others shared the task was difficult since they were used to only rely on “the math they were used to”. Furthermore, it highlights the basic four operations as the most difficult process. However, throughout the meetings a change is realized on their perspectives towards the experience, in which focused on autonomy, the process of discussing the solving for the new posed problems, as well as new problems were appearing. It was able, on this context, to present new ideas for specific fundamental operations. Moreover, the participation raised and, with the author mediation, students could understand better the concepts/ideas/meanings of arithmetic operations, without presenting on the beginning the concepts, but problems that concern these ideas. Furthermore, it concludes, then, although is not an easy task, it is possible to work with the Problem Exploration-Solving-Posing methodology, contributing to a reflexive learning of concepts/ideas/meanings of Fundamental Arithmetic Operations. Besides, it is posed new directions on this perspective, such as the wok with other numerical sets, the rational numbers.

Keywords: Fundamental Arithmetic Operations. Concepts, ideas, and meanings. Problem Exploring-Solving-Posing.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ESQUEMAS – MAPAS MENTAIS

SUMÁRIO

1 UMA BREVE APRESENTAÇÃO DA NOSSA PESQUISA

De acordo com nossa experiência como docente, atualmente, é possível perceber que muitos alunos estão concluindo o Ensino Fundamental - Anos Finais ainda com dificuldades nas operações aritméticas fundamentais, e isso faz com que eles tenham mais dificuldades em outros conteúdos, como, por exemplo, se o aluno não compreende a operação de multiplicação, terá dificuldades no conteúdo de potenciação.

Nessa perspectiva, a escolha de nossa temática surgiu a partir de duas inquietações, a saber:

- Em nossa graduação, no trabalho de conclusão de Curso (TCC), a nossa pesquisa se fundamentou nas dificuldades que os alunos têm ao resolverem problemas com a operação de Divisão. Visando ir mais além de apenas uma operação, nesta pesquisa, pretendemos ampliar para as quatro operações básicas, pois, ao nosso ver, o aluno tem uma aprendizagem com mais compreensão quando domina as quatro operações.
- Com base em nossa experiência no Ensino Fundamental e Médio, buscamos diversas formas de ensinar e aprender Matemática, com o objetivo de melhorar nossa prática de sala de aula, possibilitando ao aluno uma aprendizagem mais ampla.

Sob essa ótica, Dantas (2014) e Silva (2016), a partir de seus primeiros contatos com uma sala de aula, perceberam que os alunos apresentam dificuldades com relação à aprendizagem da Matemática, especificamente, no que diz respeito ao conteúdo das operações fundamentais.

A partir de suas impressões com relação à sala de aula, Dantas (2014) afirma que:

> Os alunos conseguiam chegar ao 6º ano e sequer sabiam resolver problemas simples que envolviam as quatro operações matemáticas. Além disso, não tinham noção quando apresentava para eles questões cotidianas, em que os mesmos teriam de identificar de qual operação se tratava o problema. (DANTAS, 2014, p.8)

Com base no que Dantas (2014) menciona, podemos perceber que os alunos possuem dificuldades acentuadas no que tange às operações aritméticas fundamentais, pois eles não conseguem extrair de uma situação-problema qual seria a operação empregada em sua resolução.

Nesse sentido, elegemos como **Problemática da Pesquisa** a seguinte questão: Como uma abordagem em sala de aula via Exploração, Resolução e Proposição de Problemas

(ERPP) pode promover uma aprendizagem reflexiva acerca das Operações Aritméticas Fundamentais, levando em consideração as ideias e conceitos de cada operação?

Diante dessa problemática, tomamos como **Objetivo Geral** da nossa pesquisa promover uma aprendizagem reflexiva acerca das Operações Aritméticas Fundamentais por meio da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas (ERPP).

Os **Objetivos Específicos** são:

- Identificar as principais estratégias utilizadas pelos estudantes na resolução e exploração de problemas;
- Propor e explorar problemas com as operações fundamentais para formalização das ideias e significados de cada operação;
- Desafiar os alunos na proposição de problemas e instigá-los a resolvê-los.

Assim, elegemos como sujeitos do estudo alunos do 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública da cidade de Baía Formosa – RN.

A presente pesquisa tem caráter qualitativo na modalidade de pesquisa pedagógica. De acordo com o cenário atual da pandemia do Novo Coronavírus, nossa pesquisa foi executada de forma remota, com um grupo de 19 alunos, num total de doze encontros, por meio do Aplicativo Google Meet.

Após o desenvolvimento dos doze encontros, analisamos e refletimos o levantamento de dados, que se deu por meio de registros dos processos de resoluções dos alunos, gravações dos encontros, observações feitas durante as aulas.

Os **critérios de análise** foram os seguintes: Verificar se os alunos conseguem resolver e explorar os problemas propostos, observando os processos de resoluções que os discentes adotaram para cada problema apresentado, as dificuldades encontradas na proposição de problemas, a organização dos problemas propostos e a coerência no texto do problema elaborado.

Nossa pesquisa está organizada em seis capítulos. No primeiro, dedicamo-nos a fazer uma breve apresentação da nossa pesquisa, a importância da nossa temática, objetivos, problemática, metodologia e como serão os critérios de análise.

No segundo capítulo, trabalhamos a parte da fundamentação teórica, na qual descrevemos sobre o Ensino das Operações Aritméticas Fundamentais: Conjuntos dos Números Naturais versus o conjunto dos números racionais absolutos, as ideias e conceitos das operações fundamentais, as diferentes estratégias do Ensino do Algoritmo da Subtração, as categorias que Vergnaud (2009) define para as relações aditivas, a relação quaternária definida por Vergnaud no ensino da operação de Multiplicação, Divisão com o resto diferente de zero e as expressões numéricas envolvendo as quatro operações.

No terceiro capítulo, nos fundamentamos no quesito Exploração-Resolução-Proposição de Problemas, esclarecendo que esta foi nossa metodologia de ensino. Assim, descrevemos cada uma das três perspectivas, fazendo ligações de uma com a outra.

No quarto capítulo, descrevemos nossa metodologia da pesquisa, a modalidade e tipo, trazendo alguns autores que falam a respeito disso. Também descrevemos o campo onde foi desenvolvido a pesquisa, algumas características dos sujeitos da pesquisa (os alunos) e como se deu o levantamento de dados.

O quinto capítulo foi dedicado ao desenvolvimento da pesquisa, no quesito execução da pesquisa, no qual descrevemos os doze encontros e analisamos os dados levantados durante todos os encontros. Por fim, no sexto capítulo apresentamos as nossas considerações finais, destacando se os objetivos foram alcançados, o que concluímos a partir da nossa intervenção pedagógica.

2 ENSINO DAS OPERAÇÕES ARITMÉTICAS FUNDAMENTAIS: CONJUNTOS DOS NÚMEROS NATURAIS *VERSUS* O CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS ABSOLUTOS

Neste capítulo, iremos descrever as ideias intuitivas que cada operação aritmética possui, mostrando a importância de se trabalhar com as outras ideias além das intuitivas, para uma aprendizagem bem mais reflexiva e mais profunda das operações aritméticas.

Ainda neste capítulo será descrito um tópico referente às operações de Multiplicação e Divisão no universo dos números Naturais e Racionais, mostrando a importância de se trabalhar com esses dois universos, para sanar as dúvidas que os alunos possuem ao resolverem problemas com Multiplicação e divisão, acreditando que sempre na multiplicação o resultado será um número maior e, na divisão, um número menor. No caso, essa ideia é válida nos números naturais, porém, tem restrições nos números Racionais absolutos. Também contemplamos, neste capítulo, as estratégias de resolução com os respectivos algoritmos das operações de adição e subtração, as ideias e conceitos das operações de Multiplicação e Divisão e, por fim, as expressões numéricas com as operações aritméticas fundamentais.

2.1 Ensino das Operações Fundamentais

Desde os primórdios dos tempos, os números são de fundamental importância para as civilizações. Depois das suas representações, surgiram as operações matemáticas, que vão de simples contas de adições a cálculos complexos.

Dantas (2014), ao falar sobre as quatro operações, afirma que:

> As quatro operações que hoje achamos tão simples representaram durante dezenas de séculos algo complexo e destinado à elite. Eram necessários vários anos para dominar os mistérios da divisão e da multiplicação. Os algoritmos marcam um passo importante na democratização do cálculo que por séculos foi privilégio de uma minoria. Os algoritmos das quatro operações que usamos atualmente sofreram alterações motivadas por necessidades históricas e sociais. (DANTAS, 2014, p. 12)

Com base na fala do pesquisador, percebemos que, no passado, as quatro operações eram consideradas como algo complicado, isto é, complexo, em que, quem tinha acesso aos estudos delas eram pessoas da elite. Assim, para aprender a operação de Multiplicação e Divisão, necessitavam-se de muitos anos. Além disso, os algoritmos que usamos hoje para cada operação sofreram inúmeras mudanças no seu aspecto histórico e também social.

Nessa direção, as quatro operações são vistas pelos alunos desde o Fundamental - Anos Iniciais, depois que aprendem os números. Essas operações são vistas de forma superficial. De acordo com Botta (1997), a operação de adição é vista como a ideia de juntar algo, a de subtração, de retirar algo, a de multiplicação, de adicionar algo, por meio de parcelas iguais, e a de divisão, de perceber quantas vezes de alguma coisa cabe em outra. Cada uma das operações mencionadas anteriormente apresentam mais ideias do que os significados intuitivos já mencionados, pois irá depender da situação em que elas estão inseridas.

O ensino das operações fundamentais é, de certa forma, bastante superficial para os alunos, pois, ao se depararem com qualquer situação problema, envolvendo alguma das quatro operações, eles não conseguem associar a qual operação o problema está se referindo, havendo a necessidade de perguntar ao professor, "é de mais, ou de menos, é de vezes ou de dividir". Com nossa experiência no ensino fundamental, percebemos que isso não acontece só no 6º ano, mas também em anos posteriores. Em muitos casos, os alunos não sabem identificar de qual operação se trata o problema, além de não saber operar com o algoritmo (DANTAS, 2014, p. 19).

De acordo com Dantas (2014), no Ensino Fundamental - Anos Iniciais, os professores tem uma preocupação maior com o desenvolvimento da leitura e escrita dos alunos, deixando assim de lado o estudo da matemática. Dessa modo, acabam não dando o aprofundamento devido no estudo desta disciplina.

Silva (2016) nos fala sobre como é o ensino das quatro operações baseando-se nas suas experiências como docente:

> A partir de um olhar reflexivo, percebemos que o trabalho com as operações aritméticas nas aulas de Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental ocorre costumeiramente de forma compartimentalizada e linearmente. Ou seja, no início do ano letivo começam-se atividades pela operação da *adição*, depois vai para a *subtração*, em seguida a *multiplicação* e, no final do ano, estuda-se a *divisão*, sempre de forma isolada, o que, a nosso ver, dificulta nos alunos a realização de soluções com sucesso de problemas envolvendo as quatro operações, levando a perguntas do tipo: professor, a conta é de mais ou de menos? É de vezes ou de dividir? (SILVA, 2016, p. 20)

Com base na fala da pesquisadora, percebemos que o ensino das quatro operações ainda é tradicional, seguindo uma regra de apresentar cada operação de forma isolada, e isso dificulta quando os alunos se deparam com problemas que envolvem as quatro operações, logo, surgem as mesmas dúvidas na identificação de qual operação irá utilitizar para a resolução dos problemas propostos, já que aprenderam as operações de forma isolada.

2.2 O conjunto dos Números Naturais *versus* o conjunto dos números racionais absolutos

No 6º ano do Ensino Fundamental, os alunos vêem primeiro o conjunto dos números naturais e, logo após, passam para os números racionais na forma de fração a/b (com b diferente de zero), considerados operações de divisões. Botta (1997) nos diz que, nas séries iniciais, os alunos têm a noção de que não se pode dividir por um número maior que o dividendo, porém, isso não ocorre quando se trata dos números racionais. Ela ainda acrescenta que:

> Um grande passo para os estudantes compreenderem essa ideia, da divisão com o dividendo menor que o divisor, é a compreensão do surgimento de um número "diferente", expresso como a/b, b $\neq 0$, como solução para a $\div$ b, com a $<$ b e b $\neq 0$ e que torna a divisão sempre possível. (BOTTA, 1997, p. 38).

Analisamos a fala da pesquisadora e percebemos que o número racional, na forma de a/b, com b $\neq 0$, é considerado um número diferente por fugir da ideia inicial que os alunos têm de que só é possível dividir com o dividendo maior que o divisor.

A pesquisadora Albuquerque (2016), por sua vez, nos faz referência à fração como divisão da seguinte forma:

> A fração como divisão é pouco explorada na escola e nos livros didáticos. Poucos alunos compreendem que fração (como parte de um inteiro) pode ser vista como resultado de divisão de certo número de inteiros em partes iguais.
> A ideia de fração se origina da divisão de um único inteiro ou da unidade em partes iguais; a partir dessa divisão a fração pode ser interpretada como sendo parte de um todo. No entanto, a fração pode, também, ser interpretada como sendo a divisão de certa quantidade de inteiros em partes iguais e nesse caso a fração representa uma divisão propriamente dita. (ALBUQUERQUE, 2016, p. 199).

Conforme a fala da pesquisadora, notamos que a fração como uma divisão não tem tido ênfase nas escolas e muito menos em livros didáticos. A autora faz uma relação do conceito de fração, e de sua interpretação como divisão de certa quantidade de inteiros em partes iguais, sendo assim, conclui que a fração, nesse caso, representa uma divisão.

Com relação às operações aritméticas fundamentais no universo do conjunto dos Números Naturais, temos algumas ideias intuitivas que os alunos aprendem, depois que estudam os sistemas de numerações. Conforme Albuquerque (2016), as ideias são as seguintes: Adição - ideia intuitiva de juntar; subtração - ideia intuitiva de retirar; multiplicação - ideia de somas por meio de parcelas iguais e a divisão - ideia de repartir em partes iguais.

Vejamos, agora, no quadro, a seguir, as ideias intuitivas das operações aritméticas fundamentais mencionadas por Albuquerque (2016).

Quadro 1 - Ideias Intuitivas das operações aritméticas fundamentais

Adição	**Subtração**	**Multiplicação**	**Divisão**
Situação–Problema 1 Pedro tem 128 selos, ganhou 97 de seu tio. Quantos selos Pedro tem agora? **Ideia intuitiva**: juntar algo	**Situação-Problema 2** Marta tem R$ 23,00 reais, deu R$ 10,00 a seu irmão. Com quanto Marta ficou agora? **Ideia intuitiva**: retirar algo	**Situação–Problema 3** Cinco meninas têm 3 bonecas cada uma. Quantas bonecas têm ao todo? **Ideia intuitiva**: adicionar algo por meio de parcelas iguais	**Situação–Problema 4** Lucas ganhou 18 carrinhos para dividir com seu primo. Quantos carrinhos cada um ganhou? **Ideia intuitiva**: Repartir em partes iguais

Fonte: Adaptado de Albuquerque (2016)

Com base no quadro 1, percebemos que as ideias intuitivas das quatro operações fazem com que os alunos tenham ideias errôneas das operações posteriores, em outros universos dos conjuntos além dos naturais. Observando a situação-problema 3, percebemos que o resultado será uma quantidade que é maior, e, já na situação- problema 4, o resultado resultará numa quantidade que será menor.

Vamos, agora, nos remeter às operações em que os alunos apresentam mais dificuldades, que são as operações de multiplicação e divisão. Segundo Cunha (1997), a multiplicação é vista pelos alunos como o modo mais rápido de fazer adições repetidas, já a divisão é vista como subtrações sucessivas, “dentre as quatro operações aritméticas, a que mais causa um fracasso na aprendizagem dos nossos alunos é a divisão” (DANTAS, 2014, p. 19).

Com base na pesquisa de Cunha (1994), é percebido que os alunos têm uma ideia errônea de que “na multiplicação aumenta e na divisão diminui”. No conjunto dos números naturais essa ideia não terá problemas, porém, quando partimos para o universo dos números racionais na forma de a/b, com a e b números naturais e a‹ b, tendo que b ≠0, surge logo a problemática: “Será que na multiplicação de números racionais irá aumentar, de fato, o resultado e na divisão irá diminuir?”

Para responder ao questionamento anterior, vamos mostrar algumas situações:

Quadro 2 - Multiplicação com números racionais

1- Situação
$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$
0,5 x 0,3=0,15

Fonte: dados da autora

Observando o quadro 2, percebemos que uma multiplicação com dois números racionais resulta em um número menor do que os fatores que foram multiplicados, logo, a ideia de que, na multiplicação, o resultado dará um número maior não faz sentido, pois notamos que, no universo do conjunto dos números racionais da forma a/b com a e b números naturais, com *a* menor que *b* e com b ≠0, e ocorre o inverso, ou seja, o resultado é menor.

Com relação à multiplicação de frações, Albuquerque (2016) nos diz que:

> É muito importante no ensino de multiplicação de frações levar o aluno a compreender os cálculos que faz, como a operação está sendo realizada, o porquê da resposta obtida e saber interpretá-la. O aluno precisa ter o conhecimento da função dos termos da multiplicação, da relação entre os termos, do significado de uma multiplicação envolvendo frações e do seu resultado, interpretar o produto de duas frações. (ALBUQUERQUE, 2016, p. 184).

Conforme a fala da pesquisadora, percebemos que, ao ensinar a multiplicação de frações, há a necessidade de mostrar para o aluno que não é só resolver de forma mecânica, mas, sim, é preciso entender o significado dessa multiplicação, entender o resultado obtido, a relação entre os termos.

Logo, ao ensinar a operação de multiplicação aos alunos, é interessante mostrar que nem sempre na multiplicação o resultado será um número maior, pois, em outros conjuntos de números, essa ideia pode não funcionar, como aconteceu no conjunto dos números racionais definidos como uma fração a/b com a e b números naturais, em que o *a* é menor que o *b*.

De acordo com Albuquerque (2016), o conceito fundamental que se tem para fração é que ela seria divisões. Assim, toda fração ordinária seria uma divisão, na qual o numerador da fração seria o dividendo e o denominador seria o divisor.

Quadro 3 - Divisão com números racionais

2- Situação
$\frac{1}{2} : \frac{2}{3} = \frac{3}{4}$
0,5: 0,6= 0,8

Fonte: dados da autora.

Observando o quadro 3, percebemos que, ao efetuar uma operação de divisão com números racionais na forma de fração, o resultado dessa operação resulta em um número maior que o dividendo e o divisor, logo, a ideia de que, na divisão, o resultado diminui não se aplica ao conjunto dos números racionais na forma de fração a/b com a e b números naturais, em que *a* é menor que *b* e com $b \neq 0$.

Com base no exposto, Cunha (1994) nos fala o seguinte sobre as concepções que os alunos têm sobre a multiplicação e divisão:

> Acreditamos que os alunos das séries investigadas têm como concepções de multiplicação e de divisão que "multiplicação sempre aumenta e divisão sempre diminui", sendo estas decorrentes de como este saber é ensinado, ou seja, acreditamos que elas sejam decorrentes do modo de como a escola introduz o conceito para os alunos nas séries iniciais e também como ele é reforçado durante toda a vida escolar dos alunos. (CUNHA, 1994, p. 17).

Baseando-nos na fala de Cunha (1994), concluímos que as concepções errôneas que os alunos aprendem são em decorrência de como é ensinado essas operações, uma vez que elas, muitas vezes, são ensinadas de forma meramente superficial, e que, ao introduzir os conceitos, são necessárias explicações mais amplas para não haver interpretações equivocadas dos estudantes, sendo necessário um reforço durante toda a vida escolar.

Com relação ao conjunto dos números naturais, "vemos, pois, que os números naturais não são suficientes para o homem resolver todas as situações práticas do seu dia a dia (ALBUQUERQUE, 2016, p. 132)". Logo, percebemos que o homem não pode ficar apenas fazendo contagens, ele necessita explorar ainda mais outros elementos. Nessa perspectiva, Albuquerque (2016) afirma que:

> Na vida diária, é imprescindível não somente contar objetos individuais, elementos de um conjunto, mas também medir grandezas tais como comprimento, área, volume, peso e tempo. Há, então, a necessidade de ampliar o conceito de número para além dos números naturais. (ALBUQUERQUE, 2016, p. 132).

Com base na fala da pesquisadora, percebemos que, não podemos nos limitar a apenas um conjunto de números, uma vez que o homem não vai passar a vida toda apenas contando objetos, ele irá expandir, isto é, ir além dos números naturais, vai passar a medir, por exemplo: “quer saber o tamanho de um terreno”, ele irá medir também quanto de água cabe em determinado copo, caixa etc, então, há uma necessidade de outros conjuntos de números, como, por exemplo, os números fracionários.

2.3 Ideias e conceitos das operações fundamentais

Neste tópico, iremos descrever os conceitos e ideias que cada uma das operações aritméticas fundamentais possui, por meio de exemplos de situações-problemas para discutir cada respectiva ideia/conceito.

De acordo com Albuquerque (2016), os alunos, nos primeiros anos do Ensino Fundamental, utilizam técnicas de cálculos para resolverem as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, já nos anos Finais do Ensino Fundamental, os alunos estudam, novamente, essas quatro operações, só que, agora, as estudam com mais profundidade, com aspectos novos.

Logo, este tópico irá contemplar os aspectos novos que cada Operação Aritmética Fundamental possui. Esses aspectos novos estão ligados as ideias/significados, “pode-se usar uma mesma operação para resolver diferentes problemas, mas o significado associado à operação pode mudar de um problema para outro. (ALBUQUERQUE, 2016, p. 59)”

2.3.1 Ideias e conceitos das operações de Adição e Subtração

Com relação às ideias/significados/ conceitos das operações fundamentais: **“**Em geral, os diferentes significados das operações não são trabalhados nas escolas e em livros didáticos (ALBUQUERQUE, 2016, p. 58)”. Assim, as operações de adição e subtração não têm uma atenção devida, muitos professores consideram bem mais complexas as operações de multiplicação e divisão, porém, com nossa experiência em sala de aula, percebemos que os alunos tendem a apresentar dificuldades em resolverem problemas com as operações de adição e subtração que apresentem números grandes, e notamos, também, que eles possuem uma grande dificuldade na operação de subtração, quando se tem reserva, a história do "pedir emprestado". Vejamos o que Silva (2016) nos diz a respeito das quatro operações:

> As conexões entre as situações que envolvem as operações aritméticas são tão fortes que elas são apresentadas em dois grupos de ideias/significados. O grupo das ideias/significados das operações de *adição* e *subtração*, e o grupo de ideias/significados das operações de *multiplicação* e *divisão*. (SILVA, 2016, p. 21, grifos da autora)

De acordo com a pesquisadora, vemos que as quatro operações possuem uma ligação forte, e que as ideias e significados que cada operação possui resulta em uma separação de dois grupos, em que são trabalhados mais efetivamente as ideias que cada operação pode apresentar.

A operação de Adição é definida por a + b = c, em que a, b e c são números naturais, sendo a e b são chamadas de parcelas e c soma das parcelas, já a operação de Subtração é definida por a – b = c, em que a é o minuendo, b o subtraendo e c diferença ou resto.

É percebido que os alunos apresentam uma noção intuitiva do que seria a operação de Adição e Subtração. Na operação de adição atribui à ideia de "juntar algo" e na subtração de "retirar algo", porém, essas operações apresentam mais de uma ideia dependendo do contexto ao qual ela está sendo inserida. Silva (2016), nos faz a seguinte reflexão a respeito das ideias intuitivas de cada operação aritmética fundamental:

> Quando o estudo de cada operação se reduz a uma única ideia/significado, estamos limitando a possibilidade de desenvolvimento dos alunos. A aprendizagem desses conhecimentos se constitui como essencial para a vida escolar dos alunos, como também para as diversas situações vividas (SILVA, 2016, p. 12).

Conforme a reflexão da pesquisadora, podemos concluir que é importante trabalhar com as diversas ideias/significados que cada operação aritmética possui, pois trabalhando apenas uma ideia, está de certo modo limitando o processo de aprendizagem do aluno.

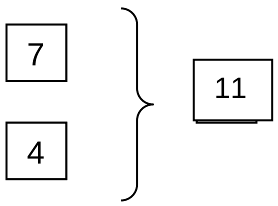
Conforme Vergnaud (2009), os problemas em que suas soluções exigem apenas adições ou subtrações são considerados problemas de tipo aditivo, do mesmo modo ele conceitua as estruturas aditivas como sendo estruturas em que as relações em jogo são formadas apenas por adições ou subtrações.

Vergnaud (2009) apresenta seis grandes categorias das relações aditivas, que são: 1ª categoria: Duas medidas se compõem para resultar em uma Terceira; 2ª categoria: Uma transformação opera sobre uma medida para resultar em outra medida; 3ª categoria: Uma relação liga duas medidas; 4ª categoria: Duas transformações se compõem para resultar em uma transformação; 5ª categoria: Uma transformação opera sobre um estado relativo (uma relação) para resultar em um estado relativo; 6ª categoria: Dois estados (relações) se compõem para resultar em um estado relativo.

Iremos ilustrar, agora, por meio de alguns problemas, as três primeiras categorias, pois estamos trabalhando apenas no universo do conjunto dos números naturais e, a partir da quarta categoria, resulta-se em um número com sinal (relativo), isto é, como, por exemplo: 4 - 9 = -5, que não se enquadra na nossa pesquisa, e descreveremos o princípio correspondente a cada uma das três categorias conforme Vergnaud (2009). Vejamos:

- Primeira Categoria:

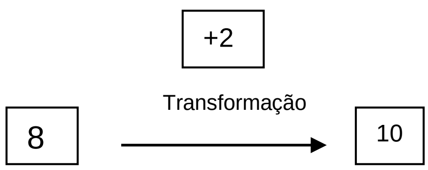
Ana tem 7 rosas brancas e 4 rosas vermelhas. Ela tem, ao todo, 11 rosas.



Dessa foram, temos: 7 + 4 = 11, que compreende a uma adição de dois números naturais que resulta também num número natural, logo temos a composição de duas medidas.

- Segunda categoria:

Exemplo 1: Pedro tinha 8 carrinhos de brinquedo antes do seu aniversário. Ganhou 2 carrinhos no seu aniversário. Ele tem agora 10 carrinhos.



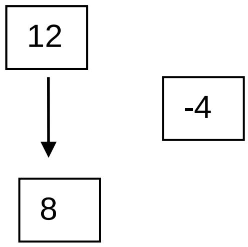
Dessa forma, temos: 8 + (+2) = 10, no qual o 8 e 10 são números naturais e +2 é um relativo, logo, temos uma representação de uma transformação sobre uma medida, o 8 um número natural a +2 a um número relativo.

Exemplo 2: Pedro tinha 8 carrinhos de brinquedo antes do seu aniversário. Perdeu 2 no seu aniversário. Ele agora tem 6 carrinhos.

Logo, temos: 8 + (-2) = 6, no qual 8 e 6 são números naturais e – 2 é um número relativo, temos uma transformação sobre uma medida, o 8, número natural, o -2, um número relativo.

- Terceira Categoria:

Carol tem 12 bonecas. Patrícia tem 4 a menos que Carol. Então, Patrícia tem 8.



Logo, temos: 12 + (-4) = 8, em que temos uma operação de subtração de um número natural com um número relativo.

Botta (1997), com relação ao tratamento que os professores administram no que se refere a essas operações, aponta que:

> Nos livros escolares de matemática das séries iniciais, usados pelos professores para o preparo de suas aulas, vê-se um tratamento diferenciado para as operações adição e subtração, isto é, num primeiro momento cuida-se da adição, depois, da subtração e, quando problemas são colocados, essas operações são realizadas com algoritmos diferentes, que foram trabalhados como independentes. (BOTTA, 1997, p. 17).

Notamos, no que foi exposto pela pesquisadora, que o ensino da operação de adição é visto de forma isolada da operação de subtração, sem haver conexões entre ambas as operações, e que, quando é posto para o aluno resolver problemas que envolvem as duas operações, ele não consegue com êxito, pois só aprendeu a usar uma operação por vez.

Nessa direção, Fuson (1992) no diz que existem quatro situações básicas para a operação de adição e a subtração. Tomamos essas situações como ideias para esses dois tipos de operações, “problemas aditivos e subtrativos são encontrados nos diferentes níveis de escolaridade, e pesquisas feitas mostram que a construção dos diferentes significados leva tempo e que eles são obtidos com o uso dos diferentes procedimentos de solução” (BOTTA, 1997, p. 17).

As quatro situações básicas que Fuson (1992) faz referência com relação às operações de Adição e de subtração são: comparar, combinar, mudar adicionando e mudar subtraindo, e que, na operação de adição, se produz uma soma através de duas parcelas conhecidas, na subtração, por sua vez, se produz uma das parcelas através de uma soma conhecida e da outra parcela também conhecida. Assim, o autor separa as quatro situações em situações aditivas (combinar e mudar adicionando) e situações subtrativas (comparar/equalizar e mudar subtraindo).

Vejamos, a seguir, as distinções de problemas que Fuson (1992) faz com relação às situações aditivas:

Quadro 4 - Situações aditivas

Mudar adicionando	**Combinar fisicamente**	**Combinar Conceitualmente**
Fim oculto 1 - Pedro tinha 3 maçãs. Ana deu a ele mais 5 maçãs. Quantas maçãs Pedro tem agora?	**Total Oculto** 4 - Sara tem 6 donuts com açúcar e 9 donuts simples. Ela colocou todos em um prato. Quantos donuts há sobre o prato?	**Total Oculto** 6- Há 6 meninos e 8 meninas num time de futebol. Quantas crianças estão no time?
Mudança oculta 2- Katia tem 5 canetas. Quantas canetas a mais ela tem que juntar a essas para ficar com 7 canetas?	**Parte oculta** 5- João e Toni ficam com 8 bolinhas quando colocam todas suas bolinhas juntas. João tem 3 bolinhas. Quantas bolinhas tem Toni?	**Parte Oculta** 7- Beatriz tem 14 flores. Oito delas são vermelhas e o restante amarelas. Quantas flores amarelas ela tem?
Começo oculto 3-Bruno ganhou 2 bolachas. Agora ele tem 5 bolachas. Quantas bolachas Bruno tinha no início?		

Fonte: Fuson (1992).

Com base no Quadro 4, é possível perceber que a distribuição das situações aditivas resultou em 7 problemas com aspectos diferentes. Então, nos vem uma indagação: “Como as crianças irão resolvê-los, se eles só conhecem apenas uma ideia intuitiva da operação de adição?”. É interessante trabalhar todas essas situações para que os alunos percebam que existem vários problemas com aspectos diferentes, porém, que se referem à operação de adição.

Analisando os problemas do quadro 4, é possível perceber que: No problema 1, é possível notar que há duas parcelas e que se quer saber o resultado da soma das mesmas, já no problema 2, ela tem o valor de uma parcela e o resultado dessa parcela com a parcela desconhecida, porém, no problema 3, é possível perceber que não sabemos o valor da parcela inicial, temos apenas a soma e o valor da outra parcela, ficando, então, a parcela inicial desconhecida. Assim, temos três problemas referentes à ideia de mudar adicionando, porém, com conjecturas diferentes, logo, o aluno deve saber mais do que operar com o algoritmo da adição para uma resolução com êxito desses problemas.

Ainda com base no quadro 4, com relação aos problemas 4, 5, 6 e 7, surge a ideia de combinar fisicamente e conceitualmente. Assim, temos a seguinte análise: No problema 4, há uma combinação de duas quantidades de comidas, porém, não se sabe a soma final, logo, temos duas parcelas e queremos saber o total de ambas juntas, que, por sua vez, está oculto, já no problema 5, é possível perceber que temos uma parcela e a soma dela com a parcela desconhecida, logo, concluímos que é um problema que trabalha com uma parte oculta, no caso, com uma parcela desconhecida. Com relação ao problema 6, temos duas quantidades que juntas formam um time, no caso, temos duas parcelas com um total oculto, já no problema 7, percebemos que temos o total explícito no problema, e o valor de uma parcela, e queremos saber o valor da outra parcela, que consideramos como uma parcela desconhecida, logo, com esse problema, concluímos que temos uma parte oculta.

Com base nos problemas e nas duas ideias da operação de Adição, Fuson (1992) nos diz que, para resolver o problema em que as duas parcelas são conhecidas, usamos a operação de adição a fim de encontrar a solução do problema, já nos problemas em que sabemos apenas uma parcela e a soma, para se encontrar a solução seria preciso realizar a operação de subtração para encontrar o resultado, logo, o autor frisa que há uma distinção a ser feita na situação-problema e na operação (adição ou subtração) a ser requerida para achar a quantidade desconhecida, isto é, há uma distinção entre a situação-problema e o método de achar a solução do problema.

Discutiremos, agora, as Situações Subtrativas. Fuson (1992) as separa da seguinte forma, a partir da ideia de mudar subtraindo: fim oculto, mudança oculta e começo oculto; a partir da ideia de equalizar: adicionar e subtrair e, por fim, através da ideia de comparar: diferença desconhecida e sentença modificada.

Vejamos, a seguir, alguns dos problemas que Fuson (1992) nos faz referência no quesito situações subtrativas:

Quadro 5 - Situações Subtrativas

Mudar Subtraindo	**Equalizar**	**Comparar**
Fim oculto 1- Joe tinha 8 bolinhas de gude. Ele deu 5 bolinhas para Tom. Quantas bolinhas de gude Joe tem agora?	**Adicionar** 4- Susan tem 8 bolinhas de gude, Fred tem 5. Quantas bolinhas de gude Fred tem que ganhar para ficar com a mesma quantidade de Susan?	**Diferença desconhecida** 6- Joe tem 3 balões. Sua irmã tem 5 balões. Quantos balões a mais sua irmã tem?
Mudança oculta 2- Fred tinha 11 doces. Ele perdeu alguns deles e ficou com 4 doces. Quantos doces Fred perdeu?	**Subtrair** 5- Jane tem 7 bonecas. Ann tem 3 bonecas. Quantas bonecas Jane teria que perder para ficar com o mesmo número de bonecas de Ana?	**Sentença modificada** 7- Luís tem 6 peixinhos ornamentais. Carla tem 2 mais que Luís. Quantos peixinhos tem Carla?
Começo oculto 3-Karen tinha alguns problemas com enunciado. Ela fez 22 deles e ainda tem 79 para resolver. Quantos problemas ela tinha no início?		

Fonte: Fuson (1992).

Observando o quadro 5, podemos perceber que a coluna que traz os problemas que apresentam a ideia de mudar subtraindo. O problema 1 e 2 nos remete a uma ideia de “retirar algo” e o problema 3 de “juntar algo”, apesar do problema apresentar uma estrutura referente a uma subtração, logo, analisando bem os problemas, verificamos as seguintes perspectivas: o primeiro problema apresenta duas parcelas o minuendo (representado pelo valor de 8) e o subtraendo (representado pelo valor 5) e quer descobrir o valor final (resto ou diferença), no caso, o problema seria resolvido com a diferença do minuendo com o subtraendo. Analisando o problema 2 de Fred, observamos que o problema já nos fornece o minuendo no valor de 11 e o resto ou diferença no valor de 4. Para encontrarmos a solução do problema, nesse caso, teríamos que fazer a subtração do minuendo com o resto ou diferença. Observando, agora, o problema 3, não temos o minuendo, temos o subtraendo no valor de 22 e o resto ou diferença no valor de 79, no caso, o valor inicial (minuendo) do problema está oculto, logo, para encontrarmos, teríamos que fazer a operação inversa da subtração, teríamos que somar o subtraendo com o resto ou diferença, para, então, encontrarmos o resultado do minuendo. Observando a análise desses problemas, percebemos que os alunos devem ficar atentos às ideias que os problemas nos fornecem, pois, para resolvê-los, é necessário saber bem mais do que as operações de forma mecânica. Verificamos isso com o problema 3, que está na categoria de problemas de subtração, porém, para resolvê-lo, necessitou-se de uma adição.

Ainda no quadro 5, analisando os problemas 4 e 5, que nos remete a ideia de equalizar (adicionar e subtrair), percebemos que: no problema 4 de adicionar, para se obter o resultado, teríamos que realizar uma subtração, pois temos o valor do minuendo (8) e do subtraendo (5), porém, ao lermos o problema, percebemos que ele quer saber o valor que, somado ao subtraendo, encontramos o minuendo (8). Então, realizando a subtração do minuendo (8) com o subtraendo (5), encontramos o valor procurado.

Para finalizarmos a análise do quadro 5, iremos, agora, discutir os problemas 6 e 7 que se referem à ideia de comparar (diferença desconhecida e sentença modificada). No problema 6, percebemos que temos o minuendo (5) e o subtraendo (3). Analisando o problema, percebemos que primeiro aparece o subtraendo e depois o minuendo, e se quer descobrir o valor da diferença (resto). Já o problema 7 sugere uma ideia de resolução por meio da operação inversa da subtração.

Nesse sentido, é importante ressaltar que existem distinções importantes entre os diferentes tipos de problemas de Adição/ Subtração que se refletem nas maneiras como as crianças pensam e resolvem (CARPENTER, 1999, p. 7).

Conforme Carpenter (1999), a classificação dos tipos de Problemas de Adição e Subtração concentram-se nos tipos de ação ou relações descritas nos problemas. Para os problemas de Adição/ Subtração, podem ser identificadas quatro classes de Problemas que são: juntar, separar, parte-todo e comparar.

Carpenter (1999) faz a seguinte descrição das quatro classes de problemas de Adição/Subtração:

> Em problemas de Junção, os elementos são adicionados a um determinado conjunto. Em problemas de Separação, os elementos são removidos, de um determinado conjunto. Problemas Parte-todo envolvem a relação entre um conjunto e seus subconjuntos. Problemas de Comparação envolvem comparações entre dois conjuntos distintos. Os problemas dentro de uma classe envolvem o mesmo tipo de ação sobre quantidades ou relações entre quantidades. Dentro de cada classe, vários tipos distintos de problemas podem ser identificados, dependendo de qual quantia é o desconhecido. (CARPENTER, 1999, p. 7).

Com base na fala do pesquisador, percebemos que, a partir de cada classe de problemas, pode-se surgir novos problemas, e que todas as classes envolvem relações, isto é, ações.

De acordo com Carpenter (1999), temos 4 classes de Problemas de Adição e Subtração, que, ao variar o valor desconhecido dentro de cada tipo de problema, podemos construir 11 tipos de problemas distintos.

Iremos, agora, ilustrar as classes de Problemas de Adição e Subtração e suas respectivas variações por meio de situações-problemas, conforme Carpenter (1999).

✓ Problemas de Junção (conjunto aumentado em uma determinada quantidade)

❖ Resultado desconhecido

Pedro tinha 8 bolinhas de gude. Ganhou mais 2 de seu primo. Quantas bolinhas de gude Pedro tem agora?

Observando o problema, percebemos que temos duas quantidades e que a segunda é associada à primeira, e queremos saber a quantidade final, isto é, o resultado final. Conforme Carpenter (1999), isso é um exemplo de problema que é usado por professores na introdução da operação de Adição. Vejamos, agora, sua solução:

8 bolinhas de gude (quantidade inicial) + 2 bolinhas de gude (segunda quantidade) = 10 bolinhas de gude (quantidade final)

❖ Mudança desconhecida

Pedro tinha 8 bolinhas de gude. Ganhou algumas bolinhas de gude de seu primo. Agora, ele tem 10 bolinhas de gude. Quantas bolinhas de gude Pedro ganhou de seu primo?

Neste problema, notamos que temos a quantidade inicial e a quantidade final e queremos encontrar a segunda quantidade que está relacionada com a primeira quantidade (inicial), logo, percebemos uma mudança no aspecto do problema, em que para resolvê-lo teríamos que realizar uma subtração. Vejamos:

8 bolinhas + algumas bolinhas(?) = 10 bolinhas
10 bolinhas (total) – 8 bolinhas (quantidade inicial) = 2 algumas bolinhas que compreende a quantidade que o primo de Pedro deu a ele.

❖ Início desconhecido

Pedro tinha algumas bolinhas de gude. Ganhou 2 bolinhas de gude de seu primo. Agora, ele tem 10 bolinhas de gude. Quantas bolinhas de gude Pedro tinha antes de ganhar as duas de seu primo?

Analisando o problema, percebemos que não temos a quantidade inicial, temos apenas a segunda quantidade e a quantidade final (resultado final), logo, para resolver esse problema, iremos utilizar a operação de subtração. Vejamos:

Algumas bolinhas (?) + 2 bolinhas (segunda quantidade) = 10 bolinhas (quantidade final)
10 bolinhas (quantidade final) – 2 bolinhas (segunda quantidade) = 8 bolinhas (quantidade inicial).

✓ Problemas de Separação (Quantidade inicial diminuída ao invés de aumentada)

❖ Resultado desconhecido

Michele tinha 9 canetas. Ela deu 3 canetas para Maria. Quantas canetas Michele ainda tem?

Com base no problema, percebemos que temos a quantidade inicial, e que é retirada uma quantidade dela, no caso, queremos saber o resultado final após a retirada. Vejamos:

9 canetas – 3 canetas = ? (resultado final ou quantidade final)

Logo, temos como resultado 6 canetas (quantidade final)

- ❖ Mudança desconhecida

Michele tinha 9 canetas. Deu algumas canetas para Maria. Ficando, então, com 6 canetas. Quantas canetas Michele deu a Maria?

Neste problema, percebemos que temos a quantidade inicial, que é retirada uma quantidade não mencionada no problema, e a quantidade final. Vejamos:

9 canetas (quantidade inicial) – algumas canetas (quantidade removida) = 6 (Quantidade final ou resultado final)
9 (quantidade inicial) – 6 (quantidade final) = 3 (quantidade removida)

- ❖ Início desconhecido

Michele tinha algumas canetas. Deu 3 canetas a Maria. Ficando então com 6 canetas. Quantas canetas Michele tinha no início?

Analisando o problema, percebemos que a quantidade inicial não foi mencionada no problema, apenas foi mencionada a quantidade removida e a quantidade final. Vejamos:

Algumas canetas(?) – 3 (quantidade removida) = 6 (quantidade final)
6 (quantidade final) + 3 (quantidade removida) = 9 (quantidade inicial)

Com base na resolução do problema, notamos que, para saber a quantidade inicial, utilizamos a operação de adição para solucionar o problema. Observando os problemas de junção e separação, vemos que eles são parecidos em alguns aspectos, porém, no de junção, a quantidade inicial é aumentada, já nos problemas de separação, a quantidade inicial é diminuída.

- ✓ Problemas de Parte-Todo (Relação entre um conjunto e seus dois subconjuntos disjuntos, os subconjuntos assumem funções equivalentes)

De acordo com Carpenter (1999), só existem dois tipos de problemas de Parte-todo, pois, nestes problemas, não há ação direta e não há mudança ao longo do tempo, como ocorre nos problemas de Junção e Separação, já que, como um conjunto não está sendo unido, logo, os dois subconjuntos assumem papel de funções equivalentes no problema.

❖ Todo desconhecido

8 meninos e 5 meninas estavam treinando Futsal. Quantas crianças estavam treinando Futsal?

Observando o problema, percebemos que temos duas quantidades (duas partes) e queremos saber a quantidade final (o todo). Vejamos:

8 (parte 1) + 5 (parte 2) = 12 (o todo)

❖ Parte desconhecida

12 crianças estavam treinando Futsal. 8 eram meninos e o resto eram meninas. Quantas meninas estavam treinando Futsal?

Analisando o problema, percebemos que temos o valor do todo e uma parte do mesmo, e queremos encontrar a outra parte do todo, no caso, a parte 2. Vejamos:

8 meninos (parte 1) + meninas (parte 2) = 12 (todo)
12 (todo) – 8 meninos (parte 1) = 5 meninas (parte 2)

Observando a resolução do problema, notamos que, para encontrar a parte 2 do todo, foi necessário retirar do todo a parte 1.

✓ Problemas de Comparação (Um conjunto é comparado a outro, um conjunto é rotulado como de referência e o outro conjunto comparado)

❖ Diferença Desconhecida

Lucas tem 4 figurinhas. Fred tem 12 figurinhas. Fred tem quantas figurinhas a mais do que Lucas?
4 figurinhas (Conjunto de Referência)

12 figurinhas (Conjunto Comparado)
8 figurinhas a mais que Lucas (Diferença)

Analisando o problema, percebemos que temos o conjunto de Referência e o conjunto comparado e queremos encontrar a diferença, logo, temos o seguinte cálculo: 12 – 4 = 8. Encontramos a solução do problema realizando uma operação de subtração.

❖ Conjunto Comparado Desconhecido

Lucas tem 4 figurinhas. Fred tem 8 figurinhas a mais que Lucas. Quantas figurinhas tem Fred?

4 figurinhas (Conjunto de Referência)
8 figurinhas a mais que Lucas (Diferença)
12 figurinhas (conjunto comparado)

Observando o problema, percebemos que queremos encontrar o conjunto comparado, para isso iremos somar o conjunto referência com a diferença, logo, temos: 4 + 8 = 12.

❖ Conjunto de Referência desconhecido

Fred tem 12 figurinhas. Ele tem 8 figurinhas a mais que Lucas. Quantas figurinhas Lucas tem?
12 figurinhas (conjunto comparado)
8 figurinhas (Diferença)
4 figurinhas (Conjunto de Referência)
Logo, temos 12 figurinhas – 8 figurinhas = 4 figurinhas (O conjunto de Referência)

Além desses tipos de problemas, temos também as sentenças numéricas. Vejamos o que Carpenter (1999) nos diz a respeito:

> Outra maneira de pensar sobre as distinções entre certos tipos de problemas é considerar sentenças numéricas que podem ser usadas para representá-los. Isso é particularmente útil com problemas de Junção e separação. Os três termos, além de sentenças numéricas de adição e subtração, como 5 + 2 = 7 e 8 -3 = 5, correspondem a três quantidades nos problemas de Junção e Separação. Como ocorre com os

> problemas com enunciados, qualquer um dos termos pode ser o desconhecido, gerando uma sentença numérica que corresponde a um determinado problema de Junção e Separação. (CARPENTER, 1999, p. 10).

Analisando o que o pesquisador propõem em sua fala, percebemos que, nos problemas com enunciados e problemas com sentenças numéricas, temos o mesmo princípio de três quantidades, em que uma delas é a desconhecida, isso quando se fala dos problemas de Junção e Separação.

Quadro 6 - Problemas de Junção/ Separação: Correspondência de Sentença Numérica

Desconhecido	Junção	Separação
Resultado desconhecido	5 + 2 = $\square$	8 – 3 = $\square$
Mudança desconhecida	5 + $\square$ = 7	8 - $\square$ = 5
Início Desconhecido	$\square$ + 2 = 7	$\square$ - 3 = 5

Fonte: (CARPENTER, 1999, p. 10).

Observando o quadro 6, percebemos que temos os três tipos de Problemas de Junção e os três tipos de Problemas de Separação, a única diferença é que, no quadro, eles estão apenas representados por sentenças numéricas, mas, em ambos os casos, sempre uma das quantidades é a desconhecida.

No próximo tópico, veremos algumas estratégias (processos de resolução) dos Problemas de Adição e Subtração, com seus respectivos tipos de Algoritmos.

2.3.2 Diferentes estratégias de ensino do algoritmo das operações de Adição e Subtração

Os alunos utilizam diversos processos de resoluções para, enfim, chegarem às soluções dos problemas de Adição e Subtração. Carpenter (1999) enfatiza dizendo que:

> As distinções entre os tipos de problemas são refletidas nos processos de solução das crianças, para as estratégias mais básicas, as crianças usam objetos físicos (contadores) ou dedos para modelar diretamente a ação ou relações descritas nos problemas. Com o tempo, as estratégias das crianças se tornam mais abstratas e eficientes. As estratégias de modelagem direta são substituídas por estratégias de contagem mais abstratas, que por sua vez são substituídas por fatos numéricos. (CARPENTER, 1999, p. 15).

Conforme o que foi exposto pelo pesquisador, percebemos que as crianças utilizam de estratégias (processos de resoluções) mais básicas, como contar nos dedos para obter solução de um problema, até estratégias mais robustas, isto é, estratégias mais abstratas, que substituem a estratégia básica de utilizar objetos físicos para fatos numéricos, munidos, assim, de estratégias mais eficientes e rápidas, utilizando, por exemplo, sentenças numéricas para representar um determinado problema.

Segundo Moraes (2015), além do algoritmo convencional da operação de Adição, temos outras estratégias do uso do algoritmo que são: Algoritmo da Adição, usando a expansão na Base 10, e Método das somas parciais. Vejamos, a seguir, um exemplo de cada algoritmo mencionado na pesquisa de Moraes (2015):

✓ Algoritmo Convencional

Figura 1 - Algoritmo Convencional da Adição

$$\begin{array}{cccc} & {}^{1}1 & 4 & 7 \\ + & 2 & 7 & 1 \\ \hline & 4 & 1 & 8 \end{array}$$

Fonte: Moraes (2015, p. 18).

No ensino da Operação de Adição, vemos sempre a utilização do Algoritmo Convencional, porém, sem a descriminação dos algoritmos, isto é, o que representa as unidades, dezenas, centenas etc., os alunos vão resolvendo a operação de forma automática. Com base na Figura 1, devemos somar primeiro os números que representam as unidades, no caso o 7 + 1, que dá 8. Depois, deve-se somar os algarismos das dezenas 4 + 7, que dá 11. Como o 4 e 7 representam dezenas, temos 40 + 70, que dá 110, logo, temos uma dezena e uma centena, é colocado 1 abaixo do 4 e 7, e é adicionado 1 às centenas, isto é, 100, logo, temos 100 + 200 + 100 = 400, isto é, 1+ 2 + 1= 4, no caso, o 4 é colocado abaixo do 1 e 2.

✓ Algoritmo da Adição usando a expansão da base 10

$235 = 2.10^2 + 3.10 + 5$

$178 = 1.10^2 + 7.10 + 8$

Com base na pesquisa de Moraes (2015), temos a seguinte explanação desse algoritmo: $235 + 178 = 2.10^2 + 3.10 + 5 + 1.10^2 + 7.10 + 8 = 2.100 + 3.10 + 5 + 1.100 + 7.10 + 8 = 200 + 30 + 5 + 100 + 70 + 8$, organizando por centenas, dezenas e unidade temos:

$(200 + 100) + (30 + 70) + (8 + 5) = 300 + 100 + 12 = 400 + 12 = 400 + 10 + 2 = 412$.

Neste algoritmo, percebemos que, primeiro, é feito a decomposição dos números utilizando a base 10 para representá-los, e é feita a soma do 235 com o 178, obedecendo a ordem dos algarismos.

- ✓ **Métodos das Somas Parciais**

Figura 2 - Método das Somas Parciais

100	+	40	+	7
200	+	70	+	1
300	+	110	+	8

Fonte: Moraes (2015, p. 25).

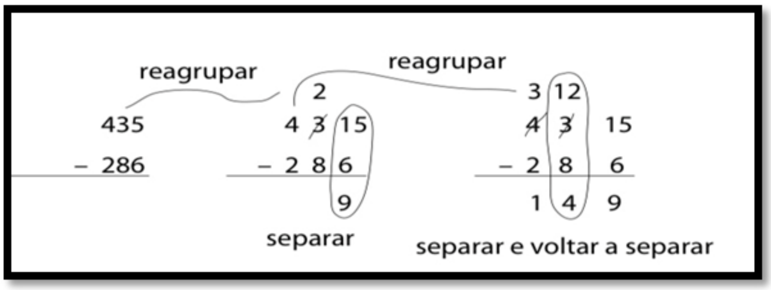
Conforme Moraes (2015), o método de somas parciais é uma estratégia de resolução em que envolve a decomposição dos números. Observando a figura 2, percebemos que temos os números 147 e 271, decompostos em centenas, dezenas e unidades, o resultado da adição desses dois números também está decomposta, que forma o seguinte número 418.

Ao ensinar a operação de subtração nas escolas, é comum ver apenas o ensino do algoritmo comum ou habitual, como ocorre com a operação de adição, temos, assim, com esse algoritmo, apenas uma estratégia de resolução de uma operação de subtração, porém, além do algoritmo habitual, segundo Loureiro (2004), temos as estratégias da utilização do algoritmo que são: diferenças parciais e o algoritmo alternativo, que, em inglês, é designado “adding up”. Traduzindo-se para o português seria adição de baixo para cima.

Vejamos, agora, exemplos de cada algoritmo mencionado por Loureiro (2004):

❖ **Algoritmo Habitual ou comum**

Figura 3 - Algoritmo Convencional da Subtração

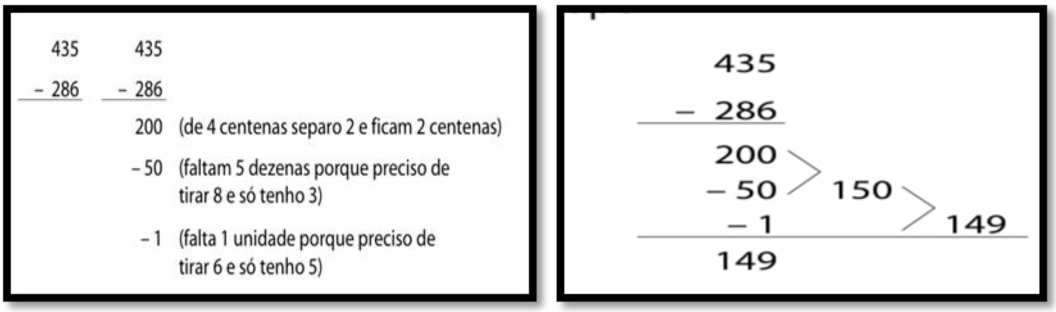


Fonte: Loureiro (2004, p. 25).

Esse algoritmo é conhecido pelos alunos como a operação que “pede emprestado”, como, por exemplo, do 5 não posso tirar 6, logo, se tira um do 3, assim, o 5 se torna 15 e é possível agora retirar 6. Como retirou-se um do três, esse três é riscado e se torna 2. Esse procedimento continua até a finalização da operação.

❖ **Algoritmo de diferenças parciais**

Figura 4 - Algoritmo diferenças parciais



Fonte: Loureiro (2004, p. 25).

Observando o exemplo, é possível perceber que, para a resolução da operação proposta, foram separadas as unidades de cada ordem uma por uma. Segundo Loureiro (2004), essa estratégia não obedece à escrita do sistema de numeração decimal.

❖ Algoritmo adding up (adição de baixo para cima)

Figura 5 - Algoritmo adding up

286	4
290	10
300	100
400	+ 35
435	**149**

Fonte: Loureiro (2004, p. 25).

Com relação a esse algoritmo, Loureiro (2004) diz o seguinte:

> Este algoritmo fundamenta-se na adição como operação inversa da subtração. O que fizemos foi obter o número que somado com 286 dá 435. Esta adição foi feita com significado e grande sentido numérico. Este algoritmo é a formalização do procedimento antigo para obter trocos. (LOUREIRO, 2004, p. 25).

Conforme o que Loureiro (2004) nos diz, esse tipo de algoritmo é usado para obter trocos. Se pararmos para analisar, ainda hoje é utilizado nos mercadinhos, por ser um procedimento mais simples, pois calcula-se o resultado de uma operação de subtração por meio de adições, que, ao nosso ver, com nossa experiência em sala de aula com alunos do ensino fundamental, percebe-se que é bem mais fácil eles resolverem operações de adições do que subtrações.

Até o momento, foram mencionados alguns algoritmos da subtração. Vale salientar que existem mais além daqueles que abordamos na pesquisa, porém, para o nosso estudo, esses três algoritmos nos proporcionam uma reflexão interessante e significativa da operação de subtração.

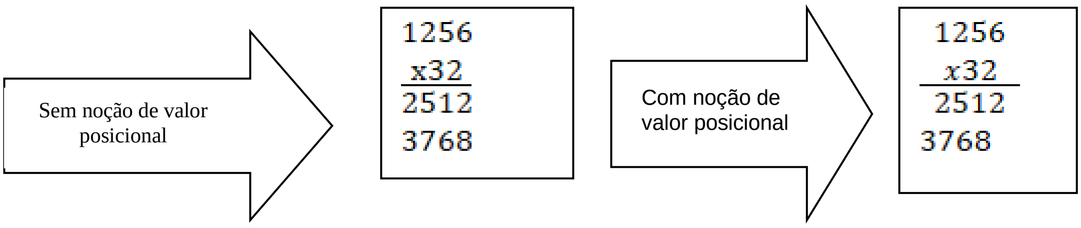
De acordo com Carpenter *et al.* (1999), a operação de Adição e Subtração traz consigo uma estrutura que pode ser entendida para a operação de Multiplicação e Divisão.

2.4 Ideias e conceitos das operações de Multiplicação e Divisão

Neste tópico, descreveremos as ideias/conceitos que a operação de Multiplicação e divisão possuem, além das ideias intuitivas de cada uma das duas operações. Trazemos exemplos para ilustrar cada ideia e mostramos, também, a relação do valor posicional dos algarismos na resolução de operações que envolvem multiplicações. Além disso, refletimos sobre as ideias de Vergnaud (2009), quando se discute acerca de problemas do tipo multiplicativo.

2.4.1 Ideias e conceitos da Operação de Multiplicação

Com base em nossa experiência na docência, percebemos que, das Operações Aritméticas Fundamentais, as que os alunos apresentam mais dificuldades e dúvidas são as operações de Multiplicação e Divisão. Na de multiplicação, eles apresentam dificuldades em resolver problemas que possuam grandes quantidades. Percebe-se que eles não têm noção do valor posicional que cada algarismo ocupa, por exemplo, confunde-se qual algarismo representa as unidades, dezenas, centenas etc. Observemos um erro comum cometido pelos alunos:



Com base nos exemplos mostrados, é possível perceber que os alunos ainda não entendem o porquê de deixar o espaço abaixo do 2 vazio no cálculo do número 3 vezes o 1256. Logo, esse erro é comum. Se os alunos tivessem uma noção de que, no número 32, o valor posicional do 3 seria da dezena e, o do 2, unidades, faria mais sentido o espaço vazio.

Com relação às estratégias que os alunos usam para resolverem problemas de Multiplicação e Divisão, Carpenter *et al*. (1999) nos fala que:

> Tal como acontece com os problemas de Adição e Subtração, as crianças inicialmente resolvem problemas de multiplicação e divisão modelando diretamente a ação e os relacionamentos descritos nos problemas. Com o tempo, essas estratégias de modelagem direta são substituídas por estratégias mais eficientes, com o uso de fatos numéricos. (CARPENTER *et al*., 1999, p. 34).

De acordo com o que os pesquisadores mencionaram, percebemos que, de início, as estratégias que as crianças usam para resolver problemas de multiplicação e divisão são de modelagem direta. Eles usam objetos físicos para lhes auxiliar nas contagens dos cálculos.

Com o passar do tempo, eles deixam essa estratégia e passam a adotar estratégias mais eficientes, isto é, no caso da estratégia de modelagem direta, quando os valores são pequenos, são fáceis de serem representados, mas, quando as quantidades são grandes, a estratégia de usar fatos numéricos seria mais eficaz e mais rápida.

Segundo Vergnaud (2009), os problemas de multiplicação e divisão se encaixam nos problemas do tipo multiplicativo, isto é, na categoria das relações multiplicativas. Uma das relações importantes, que é utilizada para introduzir o conteúdo de multiplicação no ensino básico e que forma a maioria dos problemas multiplicativos, é uma relação quaternária, isto é, uma relação que envolve quatro medidas e não uma relação ternária, por isso ela não é bem representada pela escrita habitual da multiplicação: a x b = c, pois ela apresenta apenas três termos. Nesse sentido, iremos, a partir daí, discutir a noção do que seria uma multiplicação.

A primeira grande forma de relação multiplicativa é uma relação quaternária entre quatro medidas: duas quantidades são medidas de certo tipo e as duas outras medidas de outro tipo. (VERGNAUD,2009, p. 239)

Vejamos, agora, alguns exemplos da relação quaternária:

Quadro 7 - Exemplos de relação quaternária

Exemplo 1: Tenho 3 pacotes de iogurte. Há 4 iogurtes em cada pacote. Quantos iogurtes eu tenho? **Exemplo 2**: Minha mãe quer comprar tecido a R$ 24,80 o metro para fazer um vestido e um paletó. Ela necessita de 3,50 metros de tecido. Quanto ela deverá gastar?

Fonte: Vergnaud (2009, p. 239).

Observando o quadro 6, percebemos que os exemplos mostram, claramente, uma relação quaternária em ambos os problemas. Temos quatro quantidades, duas de certo tipo e outras duas de outro tipo. Vejamos, a seguir, o esquema:

Quadro 8 - Esquema da relação quaternária

Exemplo 1	**Exemplo 2**
Pacotes----- iogurtes	Metros--------- reais
1------------ 4 3------------ X	1--------------- 24,80 3,50----------- X

Fonte: Vergnaud (2009, p. 240).

Com base em Vergnaud (2009), percebemos, no quadro 8, que o esquema mostra dois exemplos que fazem correspondência entre dois tipos de quantidades (os pacotes de iogurtes e os iogurtes, os metros de tecido e o preço do tecido). Logo, concluímos que a correspondência mostrada no quadro nos remete à ideia de isomorfismos de dois tipos de medidas (relação quaternária) no exemplo 1(Números de pacotes e iogurtes) e no exemplo 2 (metros de tecidos e o preço do tecido).

Para complementar a explicação da noção de multiplicação, Vergnaud (2009) traz uma explanação do que seria o "Produto de medidas", este e outro tipo de relação. Essa forma de relação consiste numa relação ternária entre três quantidades, das quais uma é o produto das duas outras ao mesmo tempo no plano numérico e no plano dimensional (VERGNAUD, 2009). Vejamos, a seguir, um exemplo que contempla esse tipo de relação:

Quadro 9 - Exemplo de um produto de medidas

Exemplo 1:
3 rapazes e 4 moças querem dançar. Cada rapaz quer dançar com cada moça e cada moça, com cada rapaz. Quantos seriam os casais possíveis?

Fonte: Vergnaud (2009, p. 253).

Segundo Vergnaud (2009), para se representar de forma satisfatória essa relação, é interessante se usar a tabela cartesiana, pois a noção de produto cartesiano explica a estrutura da relação de produtos de medidas. Analisando o exemplo 1, ele tomou com R o conjunto de rapazes, R= {a, b, c} e M o conjunto de moças, M = {f. g, h}. O conjunto C dos casais possíveis é o produto cartesiano do conjunto de rapazes pelo conjunto de moças, C= RxM, assim como mostra a tabela cartesiana a seguir:

Figura 6 - Tabela cartesiana

		M			
		f	g	h	i
R	a	(a, f)	(a, g)	(a, h)	(a, i)
	b	(b, f)	(b, g)	(b, h)	(b, i)
	c	(c, f)	(c, g)	(c, h)	(c, i)

Fonte: Vergnaud (2009, p. 254).

Com relação à figura 6 da tabela cartesiana, Vergnaud (2009) diz o seguinte: “um casal consiste na associação de um elemento do primeiro conjunto com um elemento do segundo. O número de casais é igual ao produto do número de rapazes pelo número de moças” (VERGNAUD, 2009, p. 255).

Quadro 10 - Relação ternária (Produtos de Medidas)

X casais = 3 rapazes x 4 moças	
Para os números	para as dimensões
X= 3 x 4	casais= rapazes x moças

Fonte: Vergnaud (2009, p. 255).

Com base no quadro 10, podemos perceber que o conceito de produto de medidas foi bem aplicado, pois temos três quantidades que estão dispostas ao mesmo tempo no plano numérico e no plano dimensional.

De acordo com Albuquerque (2016), no Ensino Fundamental, é interessante ampliar a ideia de Multiplicação como soma de parcelas iguais, mostrar para os alunos outras vertentes, tais como: o raciocínio multiplicativo que é construído, desenvolvido a partir de algumas competências, isto é, relações entre duas variáveis, duas grandezas etc. Albuquerque (2016) ainda nos diz que:

> A multiplicação é uma ferramenta muito necessária para contagem de elementos em situações especiais embora nem sempre se tem a consciência disso. O uso que dela fazemos para realizar contagens, de certa forma, associam-na a diferentes significados” (ALBUQUERQUE, 2016, p. 88).

Albuquerque (2016) traz, em sua pesquisa, cinco tipos de contagem envolvendo a operação de Multiplicação. Vejamos:

- **Contagem de agrupamento de objetos com a mesma quantidade de elementos**

Exemplo: Paulo tem 3 pacotes de biscoitos, cada pacote contém 9 biscoitos. Quantos biscoitos Paulo tem?

Neste exemplo, percebemos que a multiplicação é usada para se obter a quantidade total de biscoitos, em que cada pacote contém a mesma quantidade de biscoitos, logo, percebemos que se trata de uma adição de parcelas iguais.

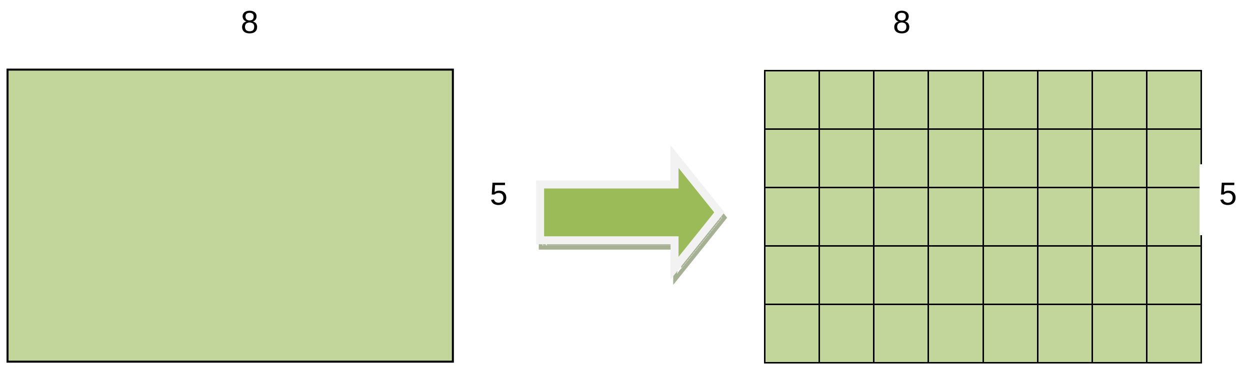
- **Contagem de objetos arrumados ou estruturados em forma retangular**

Exemplo: Uma sala de aula possui as cadeiras dispostas em 7 fileiras, com 6 cadeiras em cada fila. Quantas cadeiras há na sala?

Observando este exemplo, notamos que a multiplicação é realizada para a contagem de objetos dispostos em forma retangular, multiplicando a quantidade de fileiras e pela quantidade de cadeiras em cada fileira.

- **Contagem de unidades de área em figuras retangulares**

Exemplo: Pedro tem um terreno medindo 5cm de largura e 8cm de comprimento. Qual área desse terreno?



Neste exemplo, é possível perceber que a multiplicação é usada para se calcular a área de uma figura retangular, na qual temos a largura x comprimento (5cm x 8cm). Observando a representação do terreno em unidades, contando todas, também obtemos a área do terreno procurada no problema.

- **Contagem das diferentes maneiras de combinar objetos**

Conforme Albuquerque (2016), a operação de multiplicação é usada para se obter a contagem de possibilidades.

Exemplo: Paulo foi a uma lanchonete e observou o cardápio. A lanchonete oferecia três tipos de sucos e 5 tipos de pastéis. Quantas possibilidades Paulo tem para fazer esse lanche escolhendo um pastel e um suco?

Neste exemplo, temos dois conjuntos de naturezas distintas. No primeiro conjunto, os três tipos de sucos e, no segundo conjunto, 5 tipos de pastéis, que podem ser combinados resultando em 15 possibilidades distintas.

- **Contagem variadas no estabelecimento de suas proporções**

A multiplicação é usada quando temos quantidades (associadas às grandezas) dadas por uma relação em que a unidade de contagem de uma grandeza está associada a uma quantidade ou valor da outra (ALBUQUERQUE, 2016, p. 90).

Exemplo: Quantos chocolates há em 12 caixas, se cada caixa contém 12 chocolates?

Este exemplo traz uma relação de duas grandezas de naturezas diferentes, isto é, 12 chocolates por caixa. Temos uma relação que envolve quatro quantidades, na qual temos uma quantidade desconhecida. Vejamos:

Caixas	chocolates
1	12
12	x

Conforme os estudos de Greer (1992), os problemas de multiplicação podem ser gerados a partir de algumas situações, que são: grupos iguais, comparação multiplicativa, produto cartesiano e área. Vejamos, a seguir, alguns exemplos de situações em que a operação de multiplicação se enquadra, nos baseando na pesquisa de Greer (1992), Botta (1997) e Silva (2016):

- **Situação de grupos iguais**

"5 meninos têm 3 carrinhos cada um. Quantos carrinhos tem no total?"
5 x 3 = 3+3+3+3+3= 15

Analisando o problema, temos que o número de meninos é o multiplicador e o número de carrinhos o multiplicando, logo, o multiplicador diz o número de vezes que o multiplicando irá se repetir, essa é ideia mais simples ao ensinar a operação de multiplicação.

- **Comparação multiplicativa**

"Pedro tem 7 vezes mais carrinhos do que João. João tem 5 carrinhos. Quantos carrinhos tem Pedro?"

Analisando esse problema, percebemos que temos, claramente, um problema de multiplicação, em que há uma comparação na quantidade de carrinhos de Pedro e João. Seguindo uma linha de proporção, um carrinho de João equivale a 7 de Pedro.

- **Produto Cartesiano (Raciocínio Combinatório)**

"Paulo quer ir à festa da escola, porém está em dúvida no look, ele tem 8 camisas e 4 calças. Quantas combinações seriam possíveis para compor o look de Paulo?"

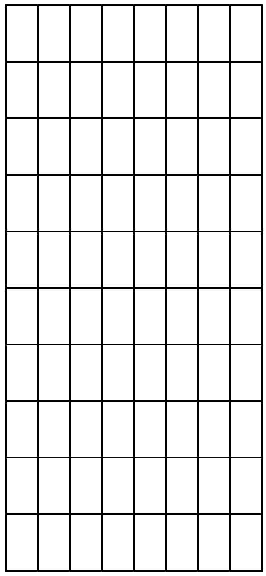
Com base em Silva (2016), problemas como esse são facilmente resolvidos pelos alunos, apesar de se tratar de anos iniciais do Ensino Fundamental, eles resolvem por meio de desenhos, limitando a resolução. Temos um problema de multiplicação 8 x 4, de forma geral, um problema a x b, em que o **a** representa o conjunto de camisas e o **b** o conjunto de calças.

- **Configuração retangular (Área retangular)**

"Em uma sala de cinema, as poltronas estão dispostas em 10 fileiras e 8 colunas. Quantas poltronas havia na sala de cinema?"

Essa situação se configura como uma situação de multiplicação do tipo configuração retangular que nos remete também à ideia de área. Quando se fala nas fileiras e colunas, nos remete à figura geométrica de um retângulo.

Sala de Cinema



10

8

Observando o exemplo da sala de cinema, percebemos que o formato da sala se assemelha a uma figura geométrica retangular. Para resolver o problema das quantidades de poltronas, temos que a área de uma região retangular é **a x b**. De modo geral, o **a** representa a base e o **b** a altura, logo, para a resolução do problema, teríamos 8 x 10.

Com base nas ideias da operação de Multiplicação, percebemos que trabalhando-as de forma em que os alunos percebam a diferença que existe em cada situação que envolve a operação de multiplicação, e que, se enquadrada em uma respectiva ideia, formalizamos, assim, uma aprendizagem mais ampla e contextualizada.

2.4.2 O ensino da Operação de Divisão: ideias e conceitos

De acordo com nossa experiência com o ensino das quatro operações no ensino fundamental, é percebido que, das quatro operações, as que os alunos apresentam mais dificuldades é a operação de Divisão. Nesse sentido, as pesquisas de Dantas (2014) e Silva

(2016) apontam as dificuldades que os alunos têm quando se deparam com esse tipo de operação.

Dantas (2004) faz o seguinte relato:

> Dentre as quatro operações aritméticas, a que mais causa um fracasso na aprendizagem dos nossos alunos é a divisão. Esta é uma operação que pode envolver a idéia de distribuição equitativa (repartição em partes iguais) ou de medida (quantas vezes uma quantidade cabe em outra). Em muitos casos, os alunos não sabem identificar de qual operação se trata o problema, além de não saber operar com o algoritmo. (DANTAS, 2004, p. 19)

Com base no relato da pesquisadora, é possível perceber que, de fato, a operação de divisão é a que causa mais problemas levando em consideração as outras operações, e que os alunos não conseguem identificar em um problema qual seria a operação adequada para resolver. Muitas vezes, os alunos recorrem a desenhos ou fazem contas nos dedos para poderem conseguir alguma solução para o problema proposto.

Com relação às divisões realizadas no dia a dia por crianças ou até mesmo adultos a pesquisadora Albuquerque (2016) nos diz que:

> No dia a dia, as divisões espontâneas feitas por crianças e muitas vezes por adultos, quase sempre desrespeitam as condições matemáticas para a divisão. Se uma criança vai repartir um chocolate com outra, dificilmente ela dividirá em duas partes exatamente iguais. (ALBUQUERQUE, 2016, p. 101).

De acordo com a fala da pesquisadora, percebemos que, nas divisões realizadas no dia a dia, não se respeita, de certa forma, as devidas normas para aquelas divisões, e isso pode acarretar futuros problemas, pois, no dia a dia, quando se vai dividir um chocolate, ele não sairá divido em partes iguais, sempre um vai ficar com um pedaço maior, e, nos livros didáticos, tomamos como conceito inicial de que a divisão seria repartir um todo em partes iguais.

Nessa direção, percebe-se que a divisão é uma das operações que traz mais dificuldade, talvez, porque há muitos aspectos nela envolvidos e, possivelmente, muitos deles não são conscientizados pelos alunos nem pelos professores no momento que se realizam operações que envolvem a divisão (ALBUQUERQUE, 2016).

Albuquerque (2016) ainda sinaliza que existem três aspectos essenciais e que precisam ser considerados em uma divisão de um todo, a saber: a natureza do todo, as características das partes e as características do resto.

Com base na pesquisa de Albuquerque (2016), iremos explanar esses três aspectos essenciais na divisão de um todo:

A natureza de um todo

O todo apresenta duas naturezas: a discreta e a contínua. Conforme Albuquerque (2016), um todo é discreto quando se trata de um conjunto contável, em que não se podem partidos, pois, se forem partidos, suas características são alteradas, já o todo contínuo pode ser dividido muitas vezes sem modificar sua natureza, e suas partes podem ser divididas novamente.

As características das partes de um todo

As partes de um todo podem ser iguais ou desiguais. De acordo com Albuquerque (2016), numa divisão em partes iguais, em que o todo é discreto, as partes em que esse todo foi dividido devem apresentar o mesmo número de elementos, vale ressaltar que, nessa divisão, não pode haver a quebra de partes dos elementos do todo.

As características do Resto

Após a divisão do todo, percebemos se a divisão é exata ou não exata. Se a divisão for exata, o resto sempre será zero, mas, se a divisão não for exata, sempre haverá resto que será sempre diferente de zero.

Nessa direção, segundo Greer (1992), a operação de divisão apresenta, além da ideia intuitiva de dividir em partes iguais, a ideia quotatita e a ideia de divisão cartesiana. Nos baseando na pesquisa de Botta (1997), Silva (2016) e Greer (1992), temos as seguintes explanações das ideias da operação de divisão:

Divisão de partilha ou divisão partitiva

A divisão partitiva, consiste em dividir um todo em partes iguais, é a ideia de divisão que é mais ensinada nas escolas. A nosso ver, com a nossa prática docente, percebemos que os alunos compreendem mais essa ideia de divisão. Muitos utilizam, inclusive, como recurso para conseguir chegar a um resultado as pictografias.

Exemplo 1: *Patrícia tem 25 chocolates e quer dividir igualmente com seus 4 primos. Quantos chocolates cada criança ganhou?*

Divisão quotativa

A divisão quotativa, nos remete a ideia de dividir em “quotas”, isto é, em grupos. Vejamos um exemplo, a seguir, que irá nos nortear com relação a esse tipo de divisão.

Exemplo 2: *Paulo tem 36 refrigerantes e quer embalados em caixas que comportam 6 refrigerantes. Quantas caixas são necessárias para que Paulo guarde todos os refrigerantes*?

Observando o problema de Paulo, percebemos, claramente, que não mais se trata de uma divisão de partes iguais, mas, sim, de uma divisão que envolve medidas: “quantas caixas comportam” aquela quantidade de refrigerantes.

Divisão cartesiana

Esse tipo de divisão se assemelha ao produto cartesiano que vimos na operação de Multiplicação e segue o mesmo princípio, porém, se resolve utilizando a operação inversa que é a divisão.

Exemplo 3: *Uma sala de cinema possui 150 poltronas organizadas em 15 fileiras. Qual seria a quantidade de colunas em que essas poltronas estavam organizadas?*

Nesse problema, já temos a quantidade de poltronas, que, ao contrário do problema de multiplicação que queríamos encontrar essa quantidade x, observa-se, claramente, que, para resolvê-lo, há a necessidade de utilizar uma operação de divisão.

Além dos tipos de ideias de Divisão que mencionamos anteriormente, temos a “*divisão com resto diferente de zero*” no universo dos números naturais, que os alunos não compreendem ao certo o que fazer com aquele resto. Vejamos, a seguir, alguns exemplos:

Exemplo 4: *Paulo, Pedro e Junior trabalham na feira vendendo laranjas. Eles dividem igualmente o que ganham, quando dividem entre os três e sobra algum valor, eles dão ao irmão mais novo de Paulo. Num certo dia de vendas, conseguiram ganhar R$ 95,00 reais. Dividindo igualmente entre os três, quanto cada um recebeu? E o irmão mais novo de Paulo quanto ganhou?*

Exemplo 5: *Um centro esportivo municipal tinha 225 bolas de basquete para distribuir igualmente entre as 27 escolas de basquetes mantidas pela prefeitura. Quantas bolas de basquete cada escola ganhou? (Fonte: Bianchini, 2018).*

Observando os exemplos 4 e 5, percebemos que temos duas situações que envolvem divisões com resto diferente de zero ou divisão não exata. No exemplo 4, é possível perceber que o resto também faz parte da resposta, já no exemplo 5, isso não ocorre. Assim, se não for trabalhada de forma clara os diferentes aspectos de cada situação, podem surgir diversas dúvidas. Com nossa experiência em sala de aula, percebemos que, quando se trata de uma divisão não exata, os alunos sempre fazem a seguinte pergunta "O que faço com o resto?". Dependendo do contexto, ele é inserido na solução do problema proposto ou não, vai depender do enunciado do problema.

2.5 Expressões numéricas envolvendo as quatro operações

Com base em nossa experiência como docente no ensino Fundamental, percebemos que os alunos possuem uma dificuldade acentuada em relação ao conteúdo de expressões numéricas, pois, para poder resolver um problema que envolve mais de uma operação, é necessária a construção da ideia de resolução, formalizando, assim, uma expressão utilizando símbolos matemáticos.

Com base em sua experiência na docência, Ottes (2016) nos fala que:

> Mesmo com a pouca experiência que possuo como professora de Matemática, da Educação Básica, já percebo que expressões numéricas é um dos conteúdos que os alunos têm maior dificuldade. O educando acaba se confundindo em meio a tantas regras, sem saber quais devem usar primeiro. (OTTES, 2016, p. 10).

Analisando a fala da pesquisadora, percebemos que o conteúdo das expressões numéricas é considerado um conteúdo que os alunos têm mais dificuldades, tendo em vista que, nos livros didáticos, este conteúdo é visto após se ensinar as quatro operações de forma isolada, uma por vez, até chegar nas expressões numéricas, nas quais se trabalha com as quatro operações em conjunto.

Como são mencionadas nos livros didáticos, as regras para se resolver uma expressão numérica levando em consideração apenas as quatro operações básicas são as seguintes:

primeiro, se resolve divisão e multiplicação, na ordem em que aparecerem, depois, se resolve as adições e subtrações também pela ordem em que aparecem.

Geralmente, aquilo que é dado como regra, que devemos "decorar", não entendemos, logo, não há aprendizado. Aquilo que conseguimos trazer para mais próximo da realidade do aluno se torna de mais fácil compreensão (OTTES, 2016).

Nesse sentido, quando se trabalha com as expressões numéricas através de problemas, é interessante ver como os estudantes organizam as ideias na montagem de suas próprias expressões para, só então, chegar à solução do problema proposto. "As expressões numéricas podem ser vistas como a transposição da linguagem natural à linguagem matemática" (OTTES, 2016, p. 16).

Exemplo: *Um ciclista, ao correr sempre à mesma velocidade, gastou 8 horas para percorrer 392 quilômetros. No primeiro dia, ele correu 5 horas. No segundo dia, terminou a corrida. Quantos quilômetros o ciclista percorreu no segundo dia? (Fonte: Bianchini, 2006)*

Primeiro, vamos descobrir quantos quilômetros tem em uma hora:

392: 8 = 49

No primeiro dia, o ciclista correu 5 horas. isso equivale a:

49 x 5 = 245

Como no segundo dia terminou a corrida, faltaram, então, 3 horas. Assim, temos:

392 – 245 = 147 quilômetros

Ou poderia ter feito da seguinte maneira:

3 x 49 = 147

Logo, montando a expressão numérica, temos: 392 - (392:8) x 5= 147

Ou 392: 8 x 3 = 147

Observando o exemplo, percebemos a transposição da língua natural para a linguagem matemática. Primeiro, se monta o esquema com os dados fornecidos no problema, de acordo com a interpretação dos dados que ele apresenta, para, depois, formalizá-lo em uma expressão numérica.

De acordo com que foi exposto neste capítulo, percebemos a importância de o professor trabalhar com as várias ideias, isto é, vários significados de cada operação aritmética. Cabe ao professor mediar situações em que os alunos percebam as várias vertentes que as operações possuem, não se limitando apenas nas ideias intuitivas, mostrando, por meio de situações-problemas, outras ideias de cada operação. Isso faz com que haja um aprofundamento desse conteúdo que é de grande importância para os estudantes que estudam no Ensino Fundamental Anos Iniciais e estudam novamente no 6º ano do Ensino Fundamental anos finais. Então, é de grande valia um aprofundamento mais amplo.

3 EXPLORAÇÃO-RESOLUÇÃO-PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS EM UMA NOVA PERSPECTIVA DO ENSINO E APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA

Neste capítulo, apresentaremos uma explanação acerca da importância de se trabalhar com a metodologia da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas no Ensino e Aprendizagem da Matemática, favorecendo, assim, uma aprendizagem mais ampla de conceitos matemáticos para os alunos.

As operações aritméticas fundamentais é um tópico da matemática em que os alunos possuem muitas dificuldades, e que, quando não é abordado de forma ampla e profunda, agrava ainda mais, acarretando mais dúvidas.

Para que o aluno tenha uma aprendizagem que favoreça uma ligação com o seu próprio cotidiano a respeito dos conceitos relacionados às quatro operações, destacamos uma abordagem na sala de aula via Exploração, Resolução e Proposição de Problemas.

De acordo com Onuchic e Allevato (2011), a implementação da Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas exige uma nova postura do professor e dos alunos. Cabe ao professor escolher o problema adequado para aquele determinado conteúdo e conceitos a serem construídos. Ele deixa de ser o centro das atividades, passando a ser um mediador, transmitindo para os alunos a responsabilidade de atingir aquela determinada aprendizagem.

Em nosso estudo, escolhemos problemas que contemplassem as ideias/significados das operações aritméticas fundamentais, no entanto, na apresentação dos problemas, não se fala sobre o tipo de ideia/significado empregado naquele determinado problema, isto é, essas ideias são construídas pelos alunos a partir de nossa mediação, no caso, percebemos, então, uma mudança de postura ao abordar determinado conteúdo, sem fornecer seu conceito primeiro, mas, sim, passamos a construí-lo a partir de problemas propostos como ponto de partida.

A metodologia Resolução de problemas tem caráter motivador, pois com ela é possível desenvolver o raciocínio lógico e dedutivo do aluno, porém, o professor deve saber a melhor forma de trabalhar com essa metodologia, pois não é só propor uma situação com determinado assunto e fazer outras parecidas para que os alunos respondam. É necessário que os problemas ajudem os estudantes a desenvolverem a capacidade de pensar, sem mecanizar o uso do algoritmo, sendo esta uma maneira incorreta de se trabalhar a resolução de problemas em sala de aula (ANDRADE, 2011).

Dessa forma, Onuchic e Allevato (2005) dizem que o problema é o ponto de partida e orientação para a aprendizagem e os professores, através e durante a resolução dos problemas, devem fazer conexões entre diferentes ramos da Matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos.

Em nossa pesquisa, percebemos a importância de ver os processos de resoluções dos alunos, para entender, assim, como o aluno pensou para chegar aquela determinada solução para o problema proposto. Abrimos sempre diálogos para entender os diversos processos de resoluções utilizados pelos alunos, pois, assim, eles perceberão que um problema pode ter vários caminhos para uma determinada solução, não se limitando apenas em memorizar um processo de resolução como sendo o único capaz de determinar a solução daquele problema.

Com relação ao Ensino da Matemática através da Resolução de Problemas, Melo e Justulin (2019) assinalam que:

> O ensino da Matemática se faz presente durante toda a Educação Básica, e uma das formas de apresentá-lo é por meio da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, que coloca o aluno como parte integrante do processo de ensino-aprendizagem, agindo de forma ativa na construção do próprio conhecimento. (MELO; JUSTULIN, 2019, p. 124).

Com base no exposto, percebemos a importância de se trabalhar conceitos matemáticos por meio da Metodologia da Resolução de Problemas, pois coloca o aluno de forma ativa na construção de seu próprio conhecimento.

Nesse sentido, Boavida et al (2008) nos faz referência a uma classificação simples dos tipos de problemas, ele diz que os problemas podem ser de cálculo, problemas de processo e problemas abertos. As autoras definem os Problemas de Cálculo como problemas em que o aluno lê o enunciado e verifica qual a operação será mais adequada para resolvê-lo, já os problemas de Processo são definidos como problemas em que não se pode resolver apenas com a operação adequada, pois eles possuem enunciados mais complexos, que requerem uma leitura mais atenta e reflexiva, e não tem solução óbvia, eles favorecem o desenvolvimento do pensar matemático dos alunos. Por fim, as autoras definem problemas abertos como problemas investigativos, pois possuem mais de um caminho para solucioná-los e apresentam mais de uma resposta correta. Assim, para resolvê-los, os alunos terão que explorá-lo muito bem.

Em nosso estudo, trabalhamos com diversos problemas, uns simples, nos quais, com o cálculo adequado se chegava na solução do problema, além de propomos um problema que exigia um pouco mais de atenção dos alunos, como, por exemplo: “uma mulher comprou um objeto, e recebeu um determinado troco”. No problema, queríamos saber as maneiras que ela poderia estar conferindo esse troco (ver problema 6, no Anexo A). Percebemos, então, que esse problema apresentava mais de uma solução, o processo de resolução adotado pelo aluno iria ser de acordo com seu entendimento do problema.

Nessa perspectiva, vemos que a prática do professor de Matemática em sala de aula deve ter como principal foco a compreensão do aluno, e isso pode acontecer quando o aluno é colocado numa situação de Resolução de problemas. Dessa forma, Onuchic (2004) diz que:

> Esta posição baseia-se na observação de que a compreensão aumenta quando: o aluno é capaz de relacionar uma determinada ideia matemática a uma grande variedade de contextos; o aluno consegue relacionar um dado problema a um grande número de ideias matemáticas implícitas nele; o aluno consegue construir relações entre as várias ideias matemáticas contidas num problema. (ONUCHIC, 2004, p. 222)

Muitos professores afirmam que trabalham com a metodologia Resolução de Problemas em sala de aula. No entanto, percebe-se que eles seguem o mesmo esquema de ensino conceitos-exemplos-atividades. A prática atual que vem sendo discutida em nível mundial em relação a essa metodologia consiste em inverter esse modelo, iniciando com um problema que tenha por finalidade a construção dos conceitos através das experiências vivenciadas pelos alunos durante a resolução do problema, valorizando os seus conhecimentos prévios.

Quando o professor inicia o ensino de algum conteúdo com um Problema é interessante, pois faz com que o aluno reflita sobre as possíveis formas de solucioná-lo, mudando, assim, a forma antiga de ensinar, em que o problema era só proposto no final, e parecido com outros que o professor já havia ensinado durante a explanação do determinado conteúdo. Desse modo, o aluno deixa de ser um mero reprodutor de fórmulas e cálculos, pois não é qualquer problema que pode gerar o senso crítico e reflexivo do estudante. A escolha desse problema deve ser cautelosa e inserida na realidade. Em nosso estudo, sempre iniciávamos o ensino das operações aritméticas fundamentais por meio de problemas, para, assim, formalizar as ideias/significados que cada operação apresenta, procurávamos sempre apresentar problemas do cotidiano, para, assim, despertar o interesse e a curiosidade dos alunos em estar buscando possíveis soluções.

Nessas condições, Boavida et al (2008) nos diz o seguinte com relação ao ensino tradicional da Resolução de Problemas:

> Tradicionalmente, quando se fala em resolução de problemas no ensino da Matemática, pensa-se em problemas que têm um enunciado definido e estruturado, uma e apenas uma solução e um processo de resolução pré-determinado que conduz à resposta certa ou errada. Contudo, como se referiu, um problema pode ser

> colocado num sentido mais aberto, suscitando nos alunos a procura de diferentes métodos e caminhos, e não apenas de uma resposta. (BOAVIDA et al, 2008, p. 16).

Baseando-nos no exposto, podemos dizer que, no ensino tradicional da Resolução de Problemas, o foco era apenas chegar a uma resposta correta, na qual o aluno só tinha um caminho a trilhar para poder acertar ou errar o problema proposto. O autor ainda afirma que o problema deve ser colocado em um sentido aberto, no qual o aluno procure meios, estratégias para solucioná-lo sem aquelas noções pré-definidas, fazendo, assim, com o que o aluno não foque só na resposta, mas, sim, no processo que fez com que chegasse nela.

O ensino-aprendizagem de Matemática baseado nesta perspectiva ainda não é tão recorrente em sala de aula. Nessa direção, os PCN (BRASIL, 2006, p. 81) ratificam essa ideia, ao dizer que: “ainda pouco explorada em nossos sistemas de ensino, transfere para o aluno, em grande parte, a responsabilidade pela sua própria aprendizagem, na medida em que o coloca como ator principal desse processo”.

Com base em Andrade (2017), o ensino-aprendizagem da Matemática sempre se inicia através de um problema, no qual os alunos aprendem e entendem aspectos importantes de um conceito ou ideias matemáticas, por meio da exploração, resolução e da proposição de novos problemas, porém, esses aspectos e conceitos importantes não surgem de apenas um problema, mas, sim, de um conjunto de problemas.

A Resolução de Problemas em sala requer uma nova postura do professor, não é só jogar uma situação-problema e esperar que a mágica aconteça. Na verdade, vai exigir do docente a capacidade de mediar discussões que possam fazer o aluno pensar sobre o seu próprio fazer. Percebemos este fato na execução de nossa pesquisa, na qual apresentávamos o problema para os alunos e aguardávamos os alunos solucionarem. Após isso, sempre iniciávamos discussões com o intuito de saber como o aluno chegou aquela determinada solução, quais processos de resolução adotou. Nesse sentido, foram feitas sempre indagações acerca dos resultados encontrados pelos alunos, fazendo sempre mediações, para, assim, fazer com o que os alunos reflitam e não resolvam de forma mecanizada.

Sob essa ótica, Leal Junior e Onuchic (2016) fazem a seguinte afirmação com relação à Resolução de Problemas:

> Quando pensamos a Resolução de Problemas como algo efetivamente prático, temos que pensar em toda sua composição. Os problemas devem ser inventados de modo a chamar os alunos à sua resolução e a construir seu conhecimento através dele. Cabe ao professor, o exercício de conhecer o cenário onde atuará bem como seus atores. (LEAL JUNIOR; ONUCHIC, 2016, p. 27-28)

Assim, podemos perceber como é importante o professor saber o cenário em que o seu aluno está inserido, para, assim, propor problemas que vão de acordo com a realidade dos seus alunos, a fim de ter uma proposta de resolução de problemas real envolvida com o cotidiano daquele aluno. Por exemplo, se a maioria dos alunos estão envolvidos com pesca, os pais, familiares trabalham, que tal propor problemas que reflitam essa realidade, para, então, construir o conhecimento através dessas vivências?

Em busca de ir além da resolução de problemas, temos a *Exploração de Problemas*, que visa ir de forma mais profunda no problema, não se limitando apenas na solução em si. De acordo com Andrade (2011),

> No trabalho de exploração de problemas, há um prazer e uma alegria de ir cada vez mais longe, um ir cada vez mais profundo, um ir cada vez mais curioso, há um ir que chega e nunca chega, um ir que pode sempre ir, um ir que sempre se limita ao contexto do aluno, do professor, da Matemática, da escola ... e por isso pode ir outra vez e mais outra vez. (ANDRADE, 2011, p. 1-2)

O pesquisador diz que o professor deve seguir o seguinte modelo: **Problema-Trabalho-Reflexões e Síntese (P-T-RS)**. Inicialmente, é dado um problema aos alunos e eles realizam um trabalho sobre ele. Em seguida, professor e alunos juntos, discutem o trabalho feito num processo de reflexões e síntese, chegando, por fim, à solução do problema, a novos conteúdos, a novos problemas, à realização de novos trabalhos, à novas reflexões e novas sínteses.

Em nosso estudo, estávamos interessados nos processos de resoluções e não nas soluções para entendermos, de fato, o caminho que o aluno usou para chegar na possível solução do problema. Dessa forma, em nossa pesquisa, a exploração do problema partia de nós, porque ficávamos provocando os alunos a irem além da solução do problema. Através do problema inicial, eram postos novos problemas, apresentando, assim, outras novas ideias/significados das operações aritméticas fundamentais.

No entanto, Andrade (2011) salienta que a resolução de problemas com o foco na exploração vai muito além da busca por soluções, vai mais fundo, fazendo com que haja um interesse e uma curiosidade maior do aluno.

Andrade (2017) nos faz a seguinte reflexão com relação à Resolução e a exploração de Problemas:

> Gostaríamos aqui de esclarecer que falar em exploração de problemas pode parecer que estaríamos contra a linha de pesquisa Resolução de Problemas, mas não é isso. É que as abordagens iniciais de resolução de problemas, principalmente as da década de 80, limitavam-se apenas à busca da solução do problema. O processo se limitava

> apenas à solução do problema, nunca ia além do problema inicialmente dado. (ANDRADE, 2017, p. 358).

A resolução de problemas tem sido pensada como um processo por busca das soluções do problema. Mas, como diz Andrade (2017), é necessário ir além dessa busca de soluções, pois o problema pode ser explorado em níveis cada vez mais profundo e, com isso, irá surgir novas dúvidas, perguntas, e, assim, consequentemente, podem chegar a novos conteúdos, novos problemas. Então, podemos dizer que a Exploração de Problemas é uma forma de ampliar a Resolução de Problemas.

De acordo com Andrade (2017), um problema é uma tarefa, em que o aluno não sabe de imediato a solução e exige um trabalho a ser realizado. O professor atua como um mediador nesse processo, que problematiza e desperta, num processo de ação-reflexão, o interesse do aluno de tentar resolver o problema e ir além da resolução, procurando novos e diferentes caminhos.

No trabalho da Exploração de Problemas, temos também a proposição de problemas, que pode ocorrer antes, durante e depois do problema e da resolução do problema. Ela pode ocorrer tanto antes como durante e depois do processo de resolução e exploração de problemas. Mas o ideal é que ela seja sempre o ponto de partida de todo esse processo. E quando pensamos em exploração de problemas sempre pensamos a proposição de problemas como uma ferramenta presente em todo o processo. É necessária essa tomada de consciência. (ANDRADE, 2017). O pesquisador ainda completa, mencionando que:

> (...) a exploração, a resolução e a proposição de um problema se desenvolve a partir do movimento Problema-Trabalho-Reflexões e Sínteses-Resultado (P-T-RS-R), cujo enunciado do problema ou situação-problema traz sempre algo novo a ser explorado no contexto de uma sala de aula e o planejamento do trabalho é sempre aberto, não fechado, embora não solto, podendo ganhar vários formatos e explorações ao longo do trabalho desenvolvido pelo aluno, aluno(s)-aluno(s), aluno(s)-professor, etc. (ANDRADE, 2017, p. 357).

Durante o desenvolvimento de nosso estudo, percebemos a importância de estar encorajando os alunos a proporem seus problemas, tendo em vista que estão acostumados a resolverem “contas” (isso é descrito com mais detalhes no capítulo 5). Como não possuem costume em elaborar problemas, aguardam sempre o professor indicar o problema a ser trabalhado. Para o aluno, propor seu próprio problema se torna uma tarefa difícil. Percebemos isso quando solicitamos que os alunos elaborassem seus próprios problemas, observamos, assim, uma dificuldade em elaborar um texto com coerência e clareza de seus problemas.

Para Chica (2001), o aluno, durante a proposição de problemas, assume um papel muito relevante em sala de aula, já que:

> Nesse processo, aproxima-se a língua materna e matemática, as quais se completam na produção de textos e permitem o desenvolvimento da linguagem específica o aluno deixa de ser um resolvedor para ser um propositor de problemas vivenciando o controle sobre o texto e as ideias matemáticas. (CHICA, 2001, p. 151).

De acordo com Silveira (2016), no trabalho em sala de aula com a proposição de problemas, o aluno está diante de uma atividade que estimula sua capacidade de pensar, que tem um caráter motivador e desafiador em busca da interpretação da realidade que está sendo descrita.

Chica (2001) nos salienta com relação às primeiras propostas de formulação de problemas. Segundo a autora:

> As primeiras propostas de formulação de problemas devem ser planejadas com muito cuidado, uma vez que as crianças demonstram dificuldades em realizar tal tarefa por estarem acostumadas a somente resolver problemas. Os alunos devem ter contato com diferentes tipos de problemas para resolver antes de propormos que criem seus próprios problemas. (CHICA, 2001, p. 153).

Conforme a pesquisadora, para a formulação de problemas, é necessário que aconteça uma preparação antes, pois os alunos estão acostumados a serem apenas resolvedores de problemas, por isso, no início da formulação de problemas, sentirão dificuldades em elaborar seus próprios problemas.

Segundo Silver (1994), a proposição de problemas ocorre tanto na geração de novos problemas, como também na reformulação de um problema proposto.

Chica (2001), menciona que, a partir de um problema dado, é possível criar outros questionamentos, isto é, outros problemas, ela ainda nos diz, que podemos trabalhar com a formulação de problemas a partir de uma operação.

Chica (2001), ainda trás em sua pesquisa duas propostas para se trabalhar a formulação de problemas a partir de uma operação, que são:

> Dando apenas o nome da operação ou a própria operação em si, com os números estabelecidos, que não precisa ser necessariamente uma só, mas várias ou até mesmo uma expressão numérica.
> Além da elaboração do texto de um problema, quando propomos esse tipo de atividade a ênfase está em verificar se os alunos compreendem as ideias matemáticas relacionadas às operações. Isto significa que se a operação dada é, por exemplo, uma adição, o texto do problema deve envolver as ideias de juntar ou de acrescentar quantidades. (CHICA, 2001, p.168)

Analisando essas propostas/maneiras de trabalho com a formulação de problemas a partir de uma operação, que além dos alunos usarem sua criatividade para criarem os textos, é possível perceber se eles compreendem ou não, os conceitos matemáticos envolvidos nas operações dadas.

Sob a ótica de Chica (2001), a formulação de problemas é bem mais complexa do que só resolver um problema, pois é necessário lidar com três vertentes, que são: dificuldades na linguagem matemática, na linguagem materna e na junção de ambas. “Para o professor, a formulação de problemas é um instrumento de avaliação o tempo todo, pois fornece indícios de que os alunos estão ou não dominando os conceitos matemáticos. (CHICA, 2001, p.173)

Com relação à criação de problemas enquanto expansão de horizontes matemáticos, Jurado (2016, p. 327) diz que: “um problema inicialmente criado com um propósito pode realmente abrir possibilidades didáticas e matemáticas muito interessantes.”

Nessa direção, Boavida (2008) nos faz referência à ligação que há na formulação e na resolução de problemas destacando que:

> Numa perspectiva educacional, formular e resolver problemas é uma componente essencial de fazer Matemática e permite o contacto com ideias matemáticas significativas. É, também, uma oportunidade de envolver os alunos, desde muito cedo, em questões de modelação matemática que, tradicionalmente, são consideradas como tópicos de Matemática mais avançada. (BOAVIDA, 2008, p. 14).

Dessa forma, temos a ligação entre a formulação e a resolução de problemas, o que fornece uma oportunidade de o próprio aluno utilizar as ideias matemáticas adquiridas, e isso é importante, pois possibilita ao aluno ter mais autonomia desde cedo na formulação de problemas e na resolução.

Segundo Jurado (2016), a criação de problemas está ligada à resolução de problemas, e apresenta um grande potencial no ensino e aprendizagem da Matemática. Há um desenvolvimento matemático a partir de quem os cria, e, por sua vez, abre-se o horizonte matemático, para que os alunos e professores possam modificar as informações, podendo, assim, propor novos requisitos para os problemas criados inicialmente.

Quando se coloca o aluno como o propositor de problemas, muda-se, de certa forma, o hábito de aulas em que só o professor é o propositor de problemas e o aluno é um mero resolvedor. Não é uma tarefa fácil tanto para o aluno quanto para professor, pois, de certo modo, sai da sua zona de conforto. De início, os alunos podem estranhar ou até mesmo apresentar diversas dificuldades por não estarem habituados a essa prática.

Sob essa ótica, Silva (2016) nos faz um breve relato de como foi a utilização da Proposição como metodologia de ensino em sua pesquisa:

> Na proposição de problemas os alunos foram se desenvolvendo gradativamente, nos primeiros encontros percebemos os equívocos gramaticais e o desagrado de alguns em ter que criar problemas, eles argumentavam ser trabalhoso, ter de pensar na pergunta e na resposta. Com o passar dos encontros começaram a sinalizar

> autonomia, segurança, criatividade e interesse na proposição dos problemas. Alguns deles se preocupavam mais com o valor numérico, mas explicávamos que o problema precisava envolver um contexto. (SILVA, 2016, p. 154).

Diante do exposto, percebemos que, de início, foi trabalhoso utilizar a proposição de problemas, já que os alunos também apresentavam problemas na ortografia, e que pensar em um contexto e solução para os alunos foi considerado como um aspecto de "mais coisas" para se pensar, porém, com o passar dos encontros, percebeu-se uma desenvoltura melhor dos alunos na parte da proposição de problemas. Eles sentiram mais interesse, mas a pesquisadora menciona alguns que só se preocupavam com o valor numérico, esquecendo de envolver o contexto, que é o se deseja na proposição de problemas. Com isso, é notável a necessidade de se trabalhar sempre que possível com essa metodologia de ensino, o que possibilita o desenvolvimento da criatividade e desenvoltura do aluno.

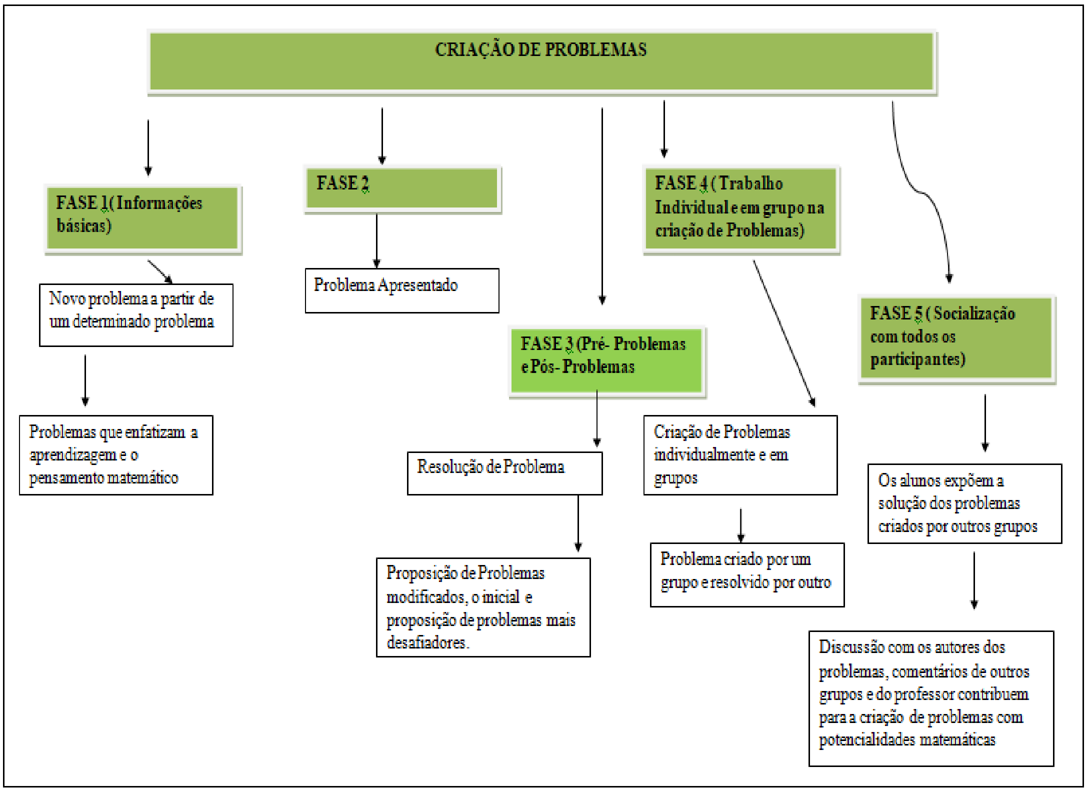
Conforme Jurado (2016), os professores precisam avaliar a qualidade de atividades matemáticas e ter a capacidade de modificar essas atividades matemáticas a fim de torná-las mais enriquecedoras para as aulas.

A proposição não ocorre só no final de uma intervenção pedagógica, em que chega a vez do aluno propor o problema. No início, quando o professor propõe um determinado problema para os alunos encontrarem uma possível solução, temos a proposição inicial, com a mediação adequada, há uma exploração de um problema a ponto de surgir novos problemas a partir daquela inicial. Assim, temos a proposição no meio, e, por fim, quando solicitamos que os alunos criem seus próprios problemas, temos a proposição no final, logo, percebemos a seguinte tríade referente à proposição de Problemas: Proposição no início – Proposição no meio – Proposição no final.

Em nossa pesquisa, o ponto de partida para a construção dos conceitos/ideias das operações aritméticas fundamentais foram problemas, que nós propomos para os alunos solucionarem e daí fazermos uma discussão a ponto de surgir novos problemas, e houve um momento da proposição final, em que o próprio aluno iria propor seus próprios problemas, a partir de seus conhecimentos matemáticos.

Jurado (2016) descreve uma estratégia que permite a reflexão na criação de problemas matemáticos. Tal estratégia se apresenta em cinco fases. Vejamos:

Esquema 1 - Mapa Mental (Criação de Problemas)



Fonte: Adaptado da pesquisa de Jurado (2016).

Analisando o esquema 1, que Jurado (2016) propõe para a criação de Problemas, podemos concluir que há a criação de um novo problema a partir de um inicial, depois, apresenta-se o problema, logo em seguida, é feita a resolução desse problema, após a resolução do problema, passa-se para a proposição de problemas, modificando o problema inicial, na qual há a proposição de problemas mais desafiadores, logo em seguida, é proposto que os alunos criem problemas individualmente e em grupos, o problema criado por um grupo é resolvido pelo outro grupo, por fim, os alunos expõem as soluções dos problemas criados por outros grupos e há uma discussão com os autores dos problemas, em que essa discussão é mediada pelo professor.

Percebemos, então, esse esquema de Jurado (2016) em nossa pesquisa, tendo em vista que fornecemos um problema inicial para o aluno que, no caso, foi uma sentença numérica (problema inicial), exemplo 5 + 4 = $\boxed{}$, a partir dela os alunos proporam novos problemas. Contemplamos, assim, a fase 1 do esquema de criação de problemas de Jurado (2016). Após os alunos proporem os problemas, eles leram para a turma seus respectivos problemas, isso seria a fase 2, após lerem os problemas, pedimos para que eles tentassem solucioná-los, contemplamos, assim, a fase 3. Após isso, escolhemos alguns problemas de alguns alunos e solicitamos que os outros alunos os resolvessem (Fase 4), por fim, era feita a socialização das soluções encontradas pelos estudantes, eram iniciadas discussões com as soluções que os alunos encontraram para o problema com seus respectivos autores (Fase 5).

Como descrevemos no capítulo 2, há a necessidade de o professor trabalhar com as ideias/significados das operações aritméticas por meio de uma metodologia em que haja uma aprendizagem mais ampla dessas ideias. Nesse sentido, destacamos a metodologia da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas, que favorece um ensino e aprendizagem desse conteúdo de extrema relevância no ensino da Matemática no Ensino Fundamental, uma vez que, através desta metodologia, desafia-se os alunos a resolverem problemas, não se limitando apenas à solução. Além da resolução do problema, há a exploração dele, também temos a proposição de problemas, na qual se estimula os alunos a criarem seus próprios problemas, assim, por meio dessa metodologia, é dado mais sentido ao conteúdo estudado. No capítulo seguinte, iremos detalhar a descrição metodológica da pesquisa, tendo em vista que iremos descrever os sujeitos da pesquisa, o campo onde a pesquisa foi desenvolvida, como ela foi desenvolvida, dentre outros aspectos.

4 DESCRIÇÃO METODOLÓGICA DA PESQUISA

Neste capítulo, iremos descrever o tipo da pesquisa, a modalidade, o campo, os sujeitos envolvidos e os instrumentos que utilizamos para o levantamento de dados.

O tipo da pesquisa escolhido foi a de pesquisa qualitativa na modalidade pedagógica. Com relação ao campo, a descrição foi sucinta, já que a pesquisa aconteceu de forma on-line. Os sujeitos da pesquisa foram alunos do 6º ano do Ensino Fundamental - Anos Finais. Utilizamos 11 conjuntos de problemas, nos quais trabalhamos empregando a metodologia da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas.

4.1 Pesquisa qualitativa na modalidade pedagógica

A pesquisa qualitativa se faz presente em muitos estudos de diferentes disciplinas, conforme Yin (2016), ele nos traz cinco características que considera relevante para definir uma pesquisa qualitativa que são: Estudar o significado da vida das pessoas, nas condições da vida real; representar as opiniões e perspectivas das pessoas, isto é, dos participantes do estudo; abranger as condições contextuais em que as pessoas vivem; contribuir com revelações sobre conceitos existentes ou emergentes que podem ajudar a explicar o comportamento social humano e esforçar-se por usar múltiplas fontes de evidência em vez de se basear em uma única fonte. (Yin, 2016).

De acordo com Yin (2016), com relação à metodologia com a abordagem qualitativa, o pesquisador destaca alguns procedimentos que caracterizam a pesquisa com cunho qualitativo, tais quais ele destaca: O uso de delineamentos mais flexíveis, validar o estudo, selecionar amostras a serem estudadas; A coleta de dados de “Campo”, ele destaca um trabalho que analisa o resultado da aplicação da pesquisa, observando as fotografias, diários, etc; A análise de dados não numéricos e as interpretações dos resultados do estudo.

Baseando-nos nas características e procedimentos de uma pesquisa qualitativa, destacados pelo pesquisador Yin (2016), nossa pesquisa se caracteriza como uma pesquisa qualitativa, na medida em que descrevemos todos os aspectos, tanto dos sujeitos envolvidos na pesquisa quanto no que se refere ao campo onde está pesquisa foi desenvolvida, analisamos os dados a partir de observações, processos de resoluções dos alunos nos conjuntos de problemas que propomos no desenvolvimento deste estudo. Sob essa ótica, em sua pesquisa, Carvalho *et al*. (2019) nos diz que:

> Portanto, numa pesquisa de cunho qualitativo, a interpretação do pesquisador apresenta uma importância fundamental. Afinal, não se trata apenas de um conjunto de informações fechadas cujo valor numérico é o único aspecto a ser levado em consideração, devido à própria natureza do fenômeno investigado. (CARVALHO et al., 2019, p. 29)

Sob a ótica dos pesquisadores, vemos que uma pesquisa de natureza qualitativa leva em consideração as informações em seus aspectos gerais, e não em seu valor numérico, mas, sim, a partir de uma forma de interpretar as informações do fenômeno investigado. Nessa direção, “a pesquisa qualitativa se preocupa com aspectos da realidade que não podem ser quantificados, centrando-se na compreensão e explicação da dinâmica das relações sociais” (FONSECA, 2002, p. 20).

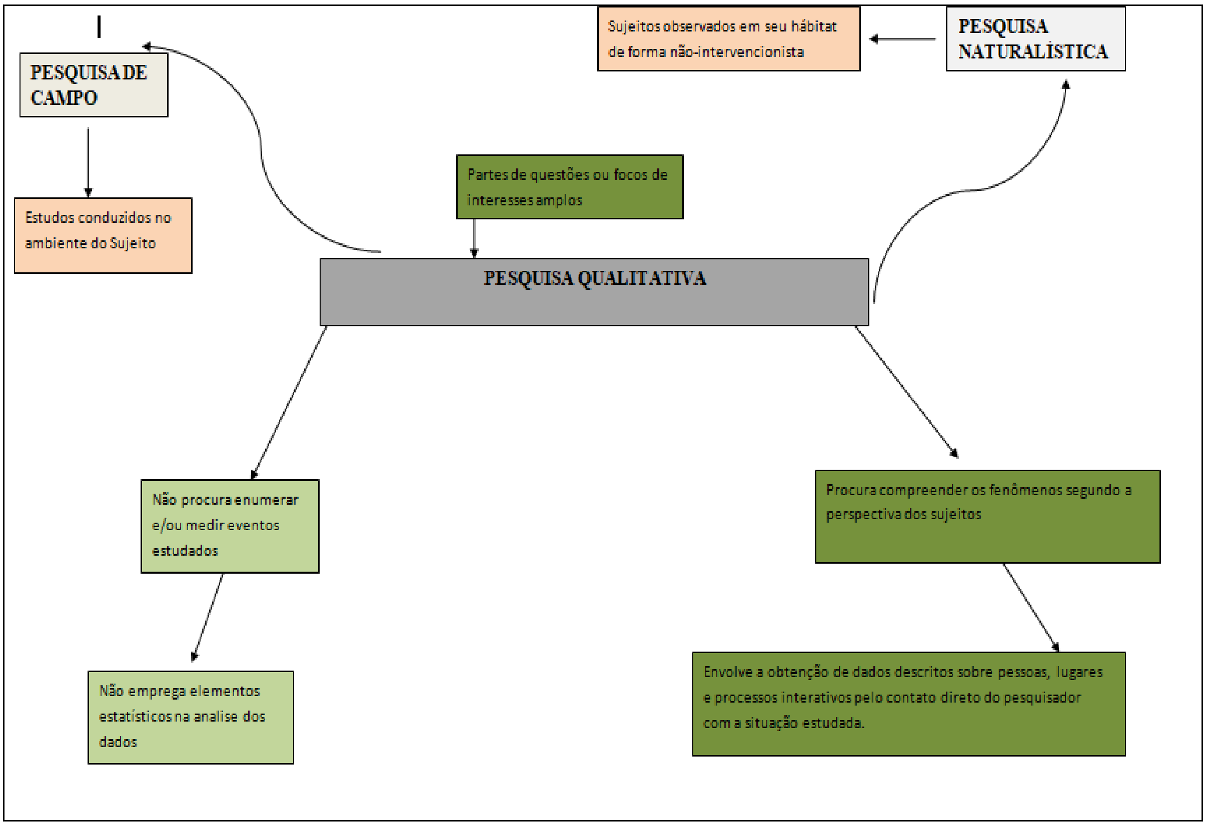
Com relação à natureza qualitativa de uma pesquisa, Minayo (2001) nos diz que:

> A pesquisa qualitativa responde a questões muito particulares. Ela se preocupa, nas ciências sociais, com um nível de realidade que não pode ser quantificado. Ou seja, ela trabalha com o universo de significados, motivos, aspirações, crenças, valores e atitudes, o que corresponde a um espaço mais profundo das relações, dos processos e dos fenômenos que não podem ser reduzidos à operacionalização de variáveis. (MINAYO, 2001, p. 21 - 22)

Observando e analisando o argumento da pesquisadora, notamos que uma pesquisa qualitativa envolve a interpretação de significados, atitudes etc. Esse tipo de pesquisa não está preocupado em quantificar dados, mas, sim, em entender a realidade, as relações sociais.

Partindo de questões amplas que vão se aclarando no decorrer da investigação, o estudo qualitativo pode, no entanto, ser conduzido através de diferentes caminhos (GODOY, 1995, p. 22):

Esquema 2 - Mapa Mental (Pesquisa Qualitativa)



Fonte: Adaptação da pesquisa de Godoy (1995).

Observando o esquema 2, percebemos que de acordo com Godoy (1995) a pesquisa qualitativa também pode ser conhecida como uma pesquisa de campo e pesquisa naturalística, que apresenta alguns aspectos a diferenciando de uma pesquisa quantitativa, tais quais destacamos: a enumeração de eventos que não ocorre numa pesquisa qualitativa e o não emprego de dados estatísticos, mas, sim, a descrição sobre pessoas, lugares e processos.

Nessa perspectiva, o pesquisador Godoy (1995, p. 62-63) traz as características básicas de uma pesquisa qualitativa, que são:

- ✓A pesquisa qualitativa tem o ambiente natural como fonte direta de dados e o pesquisador como instrumento fundamental.
- ✓A pesquisa qualificativa é descritiva, onde os dados aparecem em forma de transcrições de entrevistas, anotações de campo, fotografias, desenhos, e outros tipos de fontes.
- ✓O significado que as pessoas dão às coisas e à sua vida é a preocupação essencial do investigador.
- ✓Pesquisadores utilizam o enfoque indutivo na análise de seus dados.

Percebemos, assim, essas características fazendo parte da nossa pesquisa, uma vez que temos a sala de aula como ambiente em que fizemos as observações e levantamos os dados, podemos dizer também que nossa pesquisa é descritiva, pois fizemos as descrições de tudo que ocorreu durante nossa execução da pesquisa, tanto descrevemos os sujeitos envolvidos, como também descrevemos todos os aspectos observados durante todas as aulas administradas no decorrer do desenvolvimento de nossa pesquisa. Levamos em consideração as dúvidas que os alunos apresentaram na realização das atividades propostas, além de analisarmos como os alunos chegaram a determinado resultado, que caminho utilizaram, para, assim, entendermos o que levou o aluno a trilhar aquele caminho de resolução dos problemas propostos durante a aplicação de nossa pesquisa.

Com relação à metodologia de uma pesquisa de caráter qualitativo, Godoy (1995) diz que “do ponto de vista metodológico, a melhor maneira para se capturar a realidade é aquela que possibilita ao pesquisador ‘Colocar-se no papel do outro’, vendo o mundo pela visão dos pesquisadores” (GODOY, 1995, p. 61).

Quanto à modalidade da pesquisa, esta se caracteriza como uma pesquisa pedagógica. Conforme Lankshear e Knobel (2008), numa pesquisa pedagógica o pesquisador é o próprio professor da sala de aula, tendendo a buscar entender fenômenos e criar alternativas para melhorar sua prática em sala de aula. Nossa pesquisa foi caracterizada como pedagógica, pois a turma que estava sendo investigada era a nossa própria turma. Passamos a perceber, então, que os alunos apresentam dificuldades acentuadas em relação às operações aritméticas fundamentais. Por essa razão, buscamos alternativas para melhorar nossa prática em sala de aula, observando como ocorre o fenômeno já descrito anteriormente, através de nossas observações e mediações.

Nessa direção, no que tange à pesquisa pedagógica, Lankshear e Knobel (2008), apontam que:

> De forma alternativa, a pesquisa pedagógica propicia aos professores a oportunidade de testar a eficácia de intervenção que eles acreditam que possam melhorar os resultados da aprendizagem de alguns, ou mesmo de todos os alunos. Onde as intervenções têm sucesso, os professores que conduziram a pesquisa original, e outros que dela tomem conhecimento, podem conseguir implementar e adaptar-se essas intervenções, para obter a melhoria dos resultados, para além do cenário original. (LANKSHEAR & KNOBEL, 2008, p.14)

Analisando a fala dos pesquisadores, percebemos a importância da pesquisa pedagógica, na qual o professor pode estar testando novos métodos de ensino no momento de suas intervenções pedagógicas. Vale ressaltar ainda que, quando outros professores tomarem conhecimento dessas intervenções, também podem adaptar tais métodos em sua sala de aula.

Vejamos, agora, o que Lankshear e Knobel (2018, p. 19) nos falam sobre como deve ser a postura de um professor pesquisador:

> Neste sentido, um pesquisador sério não está meramente interessado em “algo que funcione”, mas em entender como e por que funciona e/ou como pode precisar ser adaptado para funcionar em outras circunstâncias ou aplicar-se a outros casos. Isso significa querer entender “o que faz as coisas acontecerem” em educação.

Com base na fala dos pesquisadores, percebemos que o papel do professor vai além do interesse por meios que funcionem. Devemos, assim, observar como funcionam e como podem ser adaptados para outras realidades. Às vezes, propomos atividades para uma determinada turma que, se não for modificada, não fará sentido em outra turma, pois temos turmas com realidades diferentes. Dessa forma, a postura de um professor-pesquisador é de um professor que procura entender o porquê das coisas funcionarem ou não.

4.2 Campo da pesquisa

Tendo em vista o cenário que estamos atualmente vivendo da pandemia do Novo Coronavírus, não foi possível realizar nossa pesquisa de forma presencial, logo, fizemos de forma virtual, com a sala de aula virtual através do Aplicativo Google Meet.

Como nossa sala de aula foi virtual, nem todos os alunos conseguiram participar por problemas com internet na sua localidade, ou, até mesmo, por não possuírem celulares ou computadores.

4.3 Os alunos

Os sujeitos da nossa pesquisa foram alunos do 6º ano do Ensino Fundamental de uma Escola Estadual da Cidade de Baía Formosa- RN. A turma é composta por 41 alunos, porém só 19 alunos participaram da pesquisa, levando em consideração os problemas que mencionamos anteriormente no tópico campo de pesquisa. A faixa etária dos alunos são de 11 a 13 anos. A maioria são oriundos de escolas particulares, 25% dos alunos são da zona rural, em que a internet ainda está chegando a suas comunidades. Tentamos, ao máximo, entrar em contato com todos os alunos, conseguimos os contatos de alguns, porém, eles argumentaram que não poderiam participar das aulas por problemas com a internet, muita instabilidade. Nessas circunstâncias, infelizmente, não conseguimos abranger nossa pesquisa para todos os alunos da turma, mas, vale salientar o momento em que vivemos da pandemia. Assim, estamos fazendo o que é possível nesse período crítico em que estamos passando.

No decorrer da pesquisa, esses alunos foram identificados pela letra A. Como 19 alunos participaram da pesquisa, enumeramos esses alunos do 1 ao 19, e, para preservar identidade deles, utilizamos a seguinte nomenclatura: A1, A2,..., A19, e o professor-pesquisador identificamos na pesquisa por PP (Professor-Pesquisador).

4.4 Levantamento de dados

O levantamento de dados dessa pesquisa ocorreu por meio de 12 encontros (aulas que ministramos) na turma do 6º ano. Fizemos anotações de todo o desenvolvimento das aulas, e os registros dos alunos nas resoluções das atividades se deu através do aplicativo Whatsapp no qual eles responderam as atividades, tiraram as fotos do caderno e nos enviaram. Além disso, disponibilizamos também o WhatsApp para que eles tirassem dúvidas, pois sempre tem alguns alunos que apresentam timidez de falar durante a aula.

A nossa intervenção pedagógica ocorreu por meio de 12 encontros com duração de 1 hora e 40 minutos cada, exceto o primeiro encontro, que só durou 50 minutos. Finalizamos nossa pesquisa totalizando 23 aulas de 50 minutos. Esses encontros nos possibilitaram refletir sobre as dificuldades que os alunos encontram ao resolverem problemas com as quatro operações e também acerca do processo de ensino- aprendizagem via Resolução, Exploração e Proposição de Problemas.

O desenvolvimento da ação pedagógica da pesquisa foi por meio de atividades que eram feitas individualmente, pois, como foi realizada de forma remota, não foi possível fazer atividades em duplas ou grupos.

A ação pedagogia ocorreu durante as aulas regulares, os alunos que não participaram não foram prejudicados, pois entraram num plano de reinserção, eles passaram para a série seguinte, porém, com pendência no ano anterior. No caso, eles têm o ano todo para tentar recuperar a aprendizagem do ano em que não conseguiram participar das aulas, e nem das atividades, no entanto, alguns alunos conseguiram realizar as atividades por meio de um portfólio que deixamos na escola a cada bimestre, todavia, esses alunos que só realizaram as atividades por meio do portfólio não foram inseridos na pesquisa, pois as atividades desenvolvidas necessitavam da participação ativa do aluno, compartilhávamos os problemas aos poucos durante o desenvolvimento das aulas e os alunos solucionavam os problemas, tiravam a foto do caderno e nos enviava, para, então, iniciarmos diálogos acerca das soluções encontradas pelos alunos.

5 DESCRIÇÕES E ANÁLISES DOS ENCONTROS

Nesse tópico, iremos descrever como foi o desenvolvimento da nossa pesquisa, fazendo análises e reflexões acerca das 23 aulas, realizadas durante os 12 encontros, e do primeiro encontro que só durou 50 minutos, no caso, uma aula. Destacamos diálogos e as soluções apresentadas pelos alunos para os problemas propostos.

Apresentamos também neste tópico, o trabalho com a Exploração, Resolução e Proposição de Problemas, as dúvidas recorrentes dos alunos, nossas indagações acerca das soluções encontradas para os problemas propostos, para que assim eles pudessem refletir e tirar suas próprias conclusões, assim construir os conceitos/ideias das operações aritméticas fundamentais. Vejamos a seguir um quadro que resume os nossos 12 encontros:

Quadro 11- Resumo/Prévia dos 12 encontros

ENCONTROS	PROBLEMAS	OBJETIVOS	CONTEÚDOS	RESUMO DOS ENCONTROS (OBSERVAÇÕES FEITAS DURANTE AS AULAS)
1º	-	Perceber como é a turma; Dialogar sobre as possíveis dúvidas que os alunos têm com relação às operações aritméticas fundamentais; Apresentar nossa proposta de trabalho;	-	Neste encontro poucos alunos participaram; Os alunos demonstravam timidez; Fizemos uma indagação acerca das operações aritméticas fundamentais, quais das operações apresentavam dificuldades;
2º	6	Verificar as possíveis dificuldades que os alunos possuem ao resolverem situações-problemas relacionadas ao conteúdo das Quatro Operações Aritméticas Básicas; Trabalhar problemas de Adição com a ideia de Combinar, Problemas de Subtração com a ideia de Comparar, Problemas de Multiplicação com a ideia de Comparação Multiplicativa e Problemas de Divisão com a ideia quotativa.	As operações Fundamentais	19 alunos participaram; Compartilhamos os problemas um por vez, para que os alunos tentassem resolvê-los; Após terem solucionado os problemas propostos, enviavam via WhatsApp, seus processos de resoluções;
3º	4	Compreender a ideia de Multiplicação e Divisão, considerando o conjunto dos números naturais e racionais positivos por meio da Exploração e Resolução de Problemas.	As operações de Multiplicação e Divisão (Conjunto dos números Naturais e racionais positivos)	Apresentávamos um problema por vez, aguardávamos os alunos solucionarem e iniciávamos diálogos com intuito do aluno refletir a solução encontrada.
4º	4	Compreender, na operação de Adição, a ideia de mudar adicionando; na operação de Subtração, a ideia de mudar subtraindo; na multiplicação, a	As operações de Adição, Subtração e Multiplicação	Propomos os problemas inicias para que os alunos tentassem solucioná-lo, e diante de nossas indagações, propomos novos problemas a partir dos iniciais, com intuito de

		ideia de comparação multiplicativa.		trabalhar outras ideias das operações aritméticas fundamentais.
5º	2	Mediar situações-problemas com o intuito de trabalhar a exploração e a resolução de problemas com as ideias e conceitos de cada operação, tais quais podemos destacar: na Adição, a ideia de combinar adicionado, na subtração, a ideia de comparação e, na multiplicação, a ideia de Área retangular.	As operações de Adição, Subtração e Multiplicação	Apresentamos dois problemas para que os alunos tentassem solucioná-lo. Iniciamos diálogos acerca das soluções encontradas, com intuito de explorar o problema e não limitar só na solução
6º	3	Compreender as ideias de produto cartesiano (Raciocínio combinatório) e divisão cartesiana e quotativa, trabalhando com a Exploração e a Resolução de Problemas.	As operações de Multiplicação e Divisão	Foram propostos três problemas. Exploramos os problemas Iniciamos diálogos.
7º	2	Propor problemas que envolvam a Operação de Adição com suas respectivas ideias e conceitos através de Sentenças Numéricas	Operação de Adição (Sentença numérica)	Solicitamos que os alunos elaborassem problemas a partir de uma sentença numérica. Apresentaram dúvidas e receios com relação à proposição de Problemas. Alguns alunos ajudaram os outros na elaboração dos problemas. Selecionamos alguns problemas para que os alunos solucionassem e iniciamos diálogos.
8º	2	Propor problemas que envolvam a Operação de Subtração com suas respectivas ideias e conceitos através de Sentenças Numéricas.	Operação de Subtração (Sentença numérica)	Solicitamos que os alunos elaborassem problemas a partir de uma sentença numérica. Os alunos compartilharam seus problemas.
9º	1	Propor e explorar problemas que envolvam a Operação de Multiplicação com suas respectivas ideias e conceitos através de Sentenças Numéricas	Operação de Multiplicação (Sentença numérica	Solicitamos que os alunos elaborassem problemas a partir de uma sentença numérica. Os alunos apresentaram dúvidas na hora de propor problemas com a operação de Multiplicação.
10º	1	Propor e explorar problemas que envolvam a Operação de Divisão, com suas respectivas ideias e conceitos através apenas das operações dadas.	Operação de Divisão(Sentença numérica)	Solicitamos que os alunos elaborassem problemas a partir de uma sentença numérica. Os alunos resolveram os problemas criados pelos colegas.
11º	2	Mediar a exploração e resolução de problemas em situações que envolvam a operação de divisão com o resto diferente de zero	A operação de Divisão com o resto diferente de zero	Propomos dos problemas com intuito de trabalhar a divisão não exata com os alunos, os alunos solucionaram os problemas e iniciamos diálogos para que eles refletissem os resultados encontrados.
12º	1	Explorar e mediar situações problemas que envolvam as quatro operações em expressões	Expressões numéricas com as operações aritméticas	Compartilhamos um problema com os alunos, eles apresentaram dificuldades em compreender o enunciado. Iniciamos diálogos com intuito de

		numéricas.	fundamentais	explorarmos o problema, para que os alunos refletissem suas soluções.

Fonte: Autora

5.1 Primeiro Encontro - 20/10/2020 – 1 aula de 50 minutos

Tomamos como objetivo desse primeiro encontro perceber como é a turma, fazermos um diálogo sobre as possíveis dúvidas que eles têm com relação às operações aritméticas fundamentais e apresentar nossa proposta de trabalho. Vale ressaltar que, devido à pandemia, não tivemos contato presencial com a turma, apenas enviávamos atividades pela plataforma da escola e por meio do grupo do Whatsapp. Argumentamos que, além deles estarem participando das aulas regulares, também estavam participando da nossa pesquisa de mestrado.

Neste primeiro encontro, tivemos o contato inicial com a turma. Foi à primeira aula que eles tiveram durante a pandemia, pois estavam realizando atividades de Portfólios. De início, fizemos um grupo no WhatsApp para termos um contato com a turma, lembrando que a pesquisa foi conciliada com as aulas regulares da turma, porém a maioria dos contatos eram de telefones dos pais desses alunos, logo, foi mencionado os problemas que tinham com relação à internet e que os filhos não tinham celulares, nem computadores. Como as aulas agora iriam ser on-line, então, surgiram esses problemas relatados pelos alunos e pais.

No nosso primeiro encontro, só participaram 4 alunos. Disponibilizamos o link da aula no grupo, esperamos 15 minutos para podermos começar a aula, porém, poucos participaram. Junto com os alunos, a coordenadora da escola participou também desse encontro para dar suporte. Logo, esse primeiro encontro foi só de diálogo com os alunos, pois, como a quantidade era pequena, a coordenadora conversou com a diretora, e sugeriram que nós não ministrássemos nenhum conteúdo nesse momento, pois iriam fazer uma reunião on-line com os pais para tentar ver com eles uma maneira dos filhos estarem assistindo as aulas remotamente. Antes de iniciar as aulas on-line, os alunos estavam fazendo atividades postadas todas as semanas nos grupos de WhatsApp. Então, dialogamos sobre elas, se estavam com dificuldades em resolver as atividades e se tinham acesso a elas.

Durante nosso diálogo, percebemos que os alunos demonstravam timidez, poucos interagiram, foi um encontro angustiante, logo fizemos a seguinte indagação: “Quais das quatro operações vocês têm mais dificuldades?”. Depois que fizemos essa pergunta, ninguém se pronunciou, porém, repetimos a pergunta e apenas uma aluna respondeu no chat falando que tinha dificuldade na operação de divisão. Percebemos, nesse encontro, pouca interação por parte dos alunos. Ao final do diálogo que anteriormente descrevemos, mencionamos que trabalharíamos com eles um conjunto de problemas, que forneceriam dados para nossa pesquisa de mestrado.

Logo, foi preciso aguardar alguns dias para podermos ter o segundo encontro, pois esse encontro dependia da reunião que a direção da escola iria ter com os pais, para, então, retomarmos os encontros futuros.

5.2 Segundo Encontro – 10/11/2020 – 2 aulas de 50 minutos

Após a reunião com os pais, conseguimos retomar nossos encontros semanais. Novamente, disponibilizamos o link no grupo dos alunos, eles não estavam participando das aulas porque não tinham celulares ou não sabiam utilizar o Google Meet, os pais ficaram acordados de emprestarem os celulares aos filhos para poderem assistir às aulas, a coordenadora pedagógica explicou aos pais como funcionavam as aulas no Google Meet, e pediu para que eles repassassem as informações para os filhos.

Os objetivos deste segundo encontro foram os seguintes: verificar as possíveis dificuldades que os alunos possuem ao resolverem situações-problemas relacionadas ao conteúdo das Quatro Operações Aritméticas Básicas; trabalhar problemas de Adição com a ideia de Combinar, Problemas de Subtração com a ideia de Comparar, Problemas de Multiplicação com a ideia de Comparação Multiplicativa e Problemas de Divisão com a ideia quotativa. O conteúdo trabalhado nesse encontro foi o seguinte: As operações Fundamentais. A seguir, iremos descrever como foi nosso segundo encontro.

Depois de termos disponibilizado o link, abrimos a aula no Google Meet e aguardamos alguns minutos até que os alunos entrassem na aula. Ficamos ansiosos para saber se a reunião surtiu efeito e se entraria uma quantidade maior de alunos na aula. Para nossa surpresa, entraram 19 alunos na aula, todos animados, pois estavam revendo os colegas, mesmo que a distância, eram vários microfones ligados e câmeras também. Enquanto aguardávamos mais alunos entrarem na aula, eles ficaram conversando entre si.

Explicamos aos alunos que compartilharíamos a nossa tela com uma apresentação em slides de um conjunto de problemas e que eles iriam resolvê-los em seus cadernos e, posteriormente, tirariam as fotos das resoluções das atividades para podermos acompanhar o desenvolvimento deles durante a realização destas, e que, se tivessem dúvidas, poderiam falar no microfone ou no chat, ou, até mesmo, nos enviar via WhatsApp. Fizemos a leitura das atividades propostas e aguardamos os alunos solucionarem os problemas propostos:

Leiam as atividades propostas:

1- *Rafael nasceu no ano de 1992 e seu irmão mais velho tem o dobro de sua idade em 2020.*

a-) Qual a idade do irmão de Rafael no ano de 2020?
b-) Em que ano o irmão de Rafael nasceu?

Neste problema, podemos trabalhar a ideia de comparação na operação de subtração, tendo em vista que comparamos as idades dos dois irmãos. Fuson (1992) nos diz que problemas como esse se referem a problemas do tipo comparativo, sentença modificada, na qual é sugerida a solução, e trabalha com a noção de dobro na multiplicação.

2- Pedro e Paulo são irmãos. Pedro possui 18 carrinhos e resolveu guardá-los juntos com os do seu irmão Paulo. Sabendo que ele tem 23 carrinhos, quantos carrinhos os dois têm ao todo?

Este problema nos remete a ideia de combinar na operação de Adição. Segundo Fuson (1992), essa combinação seria fisicamente o total oculto, é configurado como um tipo de problema simples que não requer muito cálculo.

4- *Ana tem R$ 54,00 reais. Seu irmão tem R$108,00. Quantos reais o irmão de Ana tem a mais que ela?*

Este problema nos remete a ideia de comparar na subtração. Percebemos que temos uma quantidade maior, que está sendo comparada a uma quantidade inferior.

5- *Quantos garrafões de 5 litros são necessários para engarrafar 315 litros de água? (Fonte: Giovanni, 2002).*

Nesta situação-problema, podemos trabalhar com a ideia de Divisão quotativa, "que significa determinar quantas subcoleções ou subquantidades de um dado tamanho estão contidas numa coleção ou numa quantidade (BOTTA, 1997, p. 21).

5- Lucas é vendedor de frutos do mar, e fez uma dinâmica de sempre vender o quilo do camarão com o valor três vezes maior do que o preço do peixe albacora. O preço do peixe albacora está custando agora R$11,00. Por quanto Lucas está vendendo o camarão?

Este é um problema que envolve claramente o cotidiano dos alunos, pois a maioria trabalha com vendas de frutos do mar. Conforme Leal Junior e Onuchic (2016), é interessante problemas que chamem a atenção dos alunos, e é importante que o professor conheça o cenário em que os alunos estão inseridos, para poderem propor situações problemas mais adequadas àquela vivência.

Podemos trabalhar com esse problema a ideia de Comparação multiplicativa. Segundo Botta (1997), podemos perceber que, neste problema, há uma correspondência de “muitos para um”, em que temos 3 quilos de Albacora para um quilo de camarão. O conceito de relação quaternária que é definido por Vergnaud (2009) como uma relação multiplicativa que relaciona quatro quantidades, duas de um tipo e outras duas de outro tipo, logo, neste problema, temos duas espécies de quantidades (preço da albacora e preço do camarão).

6- Para pagar um fogão que custava R$563,00, Maria deu ao caixa R$600,00 reais e recebeu de troco R$37,00 reais. Como ela pode conferir o troco? (Fonte: Adaptação de Leonardo, 2010).

A partir dessa situação-problema, podemos trabalhar com diferentes maneiras de resolução da Operação de Subtração. Podemos utilizar a ideia de Separação com o resultado desconhecido. Com relação à resolução do problema, o aluno pode optar por resolver utilizando o algoritmo usual de subtração, ou por meio da Operação de Adição. Segundo Loureiro (2004), calcula-se o resultado de uma operação de subtração por meio de adições, essa maneira é usada para se obter trocos, e é vista, principalmente, em mercadinhos.

A aplicação dessas atividades teve como objetivo principal verificar as possíveis dificuldades que os alunos possuem ao resolverem situações-problemas envolvendo as ideias que cada uma das quatro operações apresenta. Depois que fizemos a leitura das situações propostas, fornecemos um tempo para que os alunos resolvessem, e falamos que, se tivessem dúvidas, poderiam abrir o microfone e falar, digitar no chat ou falar via WhatsApp. Durante a realização das atividades, alguns alunos dialogaram conosco. Vejamos o diálogo:

A1: Professora, não entendi essa questão. A idade do irmão de Rafael é 28?

PP: Faça a leitura novamente do enunciado da questão.

A2: Já sei, a idade de Rafael é 56.

PP: Prestem atenção na letra “a”. Queremos saber a idade do irmão de Rafael e não dele.

A1: 2020 menos 1992 dá 28, idade do irmão de Rafael.

PP: Observe o detalhe do dobro na questão.

A3: Já sei professora, o irmão de Rafael tem 56 anos.

Analisando o diálogo, percebemos que muitos alunos apresentavam dificuldades na leitura dos enunciados das situações-problemas, muitas vezes foram necessários momentos de diálogos para que eles pudessem entender, muitos argumentaram que gostam mais de resolver contas. Notamos que eles não têm o hábito de estudarem por meio de situações-problemas.

Recebemos as respostas das atividades propostas durante a aula para podermos analisar, enviaram via WhatsApp, porém, dois alunos não conseguiram enviar, pois falaram que a câmera do seu celular não estava boa, outro falou que sua internet estava lenta, ficaram de nos enviar as atividades à tarde, e, realmente, enviaram, aceitamos só dessa vez, pois, à medida que os alunos resolvem os problemas, nos enviam suas respectivas soluções.

Análise das respostas que os alunos obtiveram ao resolver o Problema 1

1-*Rafael nasceu no ano de 1992 e seu irmão mais velho tem o dobro de sua idade em 2020***.**

a-) Qual a idade do irmão de Rafael no ano de 2020?

b-) Em que ano o irmão de Rafael nasceu?

Quadro 12 - Resoluções do Problema 1

Problema 1	**Resposta com cálculos**	**Resposta sem cálculos**	**Não respondeu**	**Errou a resolução**	**Acertou a resolução**
A	**5**	**14**	**0**	**2**	**17**
B	**8**	**11**	**0**	**1**	**18**

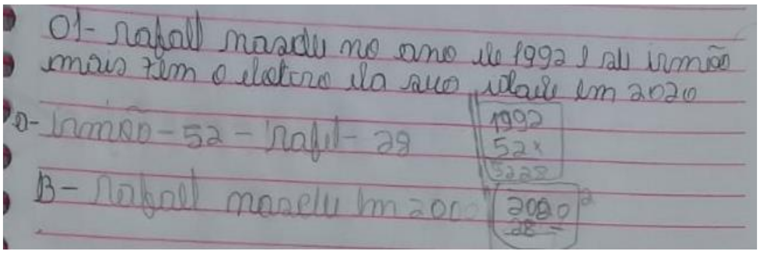
Fonte: dados da autora.

Analisando o quadro 12, percebemos que muitos alunos, ao responderem o problema 1, tanto na letra A quanto na letra B, nos enviaram apenas a solução do problema, poucos erraram a questão. Observando as atividades realizadas por eles, percebemos que alguns possuíam dificuldades em operar com subtração com reservas, em que há a necessidade de “pedir emprestado”, um termo que eles sempre usam. Os alunos nos mandaram áudios perguntando o seguinte: “Professora, eu tenho 2020 menos 1992, não estou conseguindo resolver eu sei que de cabeça dá 28, mas não estou conseguindo resolver a conta”. Após esse áudio, outros alunos nos mandaram vídeos mostrando as suas possíveis resoluções, e que não estavam conseguindo chegar a solução do problema. Em um dos vídeos enviados por eles, estava o seguinte questionamento: “2020 menos 1992, de zero não posso tirar dois, logo, peço emprestado ao 2 ficando agora dez menos 2, que dá 8, o que antes era dois passou a ser um, de um não posso tirar 9, logo, vou pedir emprestado ao outro 2, pois de zero não dá, e agora, professora, o que vou fazer com esse zero? Não dá pra resolver”.

Com base na transcrição do vídeo, percebemos as dificuldades que alguns alunos possuem ao resolver a operação de subtração com reserva. Percebemos, logo, que a compreensão que alguns alunos tem do sistema posicional, não é suficiente para entender o Algoritmo.

Com relação à letra **a** do Problema 1, obtivemos várias soluções que tinham como resposta o valor de 56, porém, houve algumas que encontram como resposta o número 52. Vejamos a resolução da aluna A4:

Figura 7 - Resolução da letra **a** e **b** do problema 1 realizado pela aluna A4.

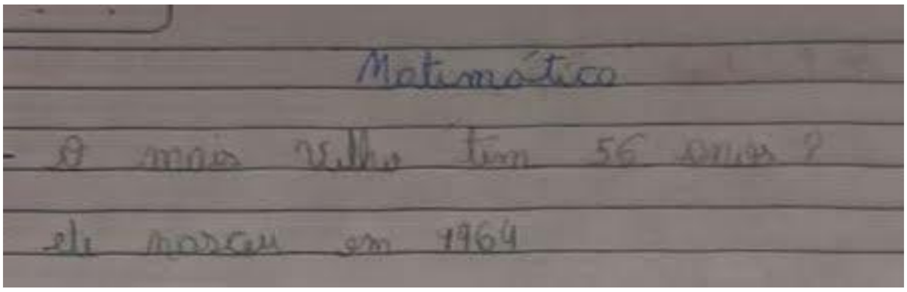


Fonte: Acervo da autora.

Analisando a figura 7, percebemos que a aluna tem dificuldade em armar o algoritmo da operação de subtração, e que ela respondeu certo a idade de Rafael, porém, a do irmão, que era o dobro da dele, ela colocou 52. Percebe-se que ela tem dificuldades também na operação de multiplicação. Observando, agora, a letra **b** do problema percebemos que ela não conseguiu encontrar a solução, tentou fazer, porém, não teve êxito, uma vez que montou a operação de subtração incorretamente, notamos também que ela pode ter feito o cálculo mentalmente e não soube formalizar a solução por meio do Algoritmo.

Com relação à resolução do problema sem o processo de resolução, 14 resolveram a letra “a” apenas com as soluções e 11 resolveram a letra “b” apenas com a solução. Como não solicitamos a exigência dos cálculos, os alunos, possivelmente, podem ter resolvido mentalmente. Vejamos:

Figura 8 - Resolução do Problema 1 realizado pelo aluno A10

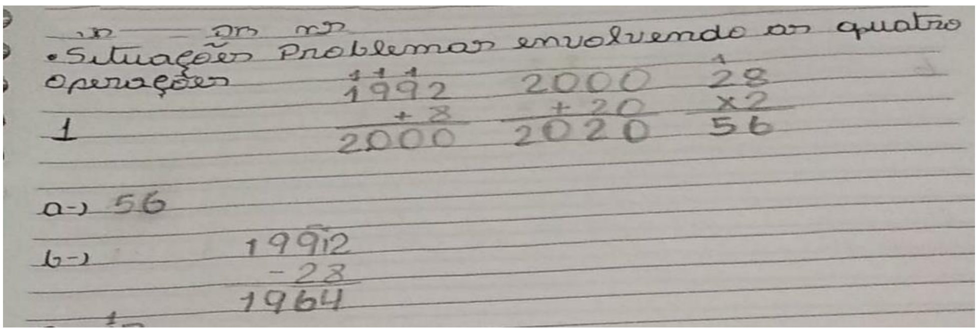


Fonte: Acervo da autora.

Observando a figura 8, percebemos que o aluno colocou apenas os resultados obtidos por ele ao realizar a resolução do problema, porém, do jeito que está escrito não dá para saber o caminho de resolução que ele tomou para, então, chegar àquela solução do problema proposto.

Vejamos, agora, outras soluções que alguns alunos obtiveram ao resolverem o problema proposto:

Figura 9 - Resolução do Problema 1 realizado pelo aluno A8



Fonte: Acervo da autora.

Com base na figura 9, percebemos que o aluno, para resolver a letra “a” do problema, ao invés de usar a operação usual de subtração, como alguns de seus colegas fizeram, utilizou a de somas parciais. Segundo Loureiro (2004), ele utilizou um meio alternativo para resolver um problema de subtração, empregando o algoritmo de *adição de baixo para cima,* um método antigo que até hoje é utilizado para se obter trocos. Esse procedimento é visto em mercadinhos. Já na letra “b”, a maioria dos seus colegas fez a subtração do ano de 2020 menos 56 para se obter o ano em que o irmão de Rafael nasceu, porém, o discente resolveu retirando 28 anos a idade de Rafael do ano de 1992, e obteve o ano de 1964, que corresponde ao ano em que o irmão de Rafael nasceu. Assim, o aluno chegou à solução do problema, porém utilizou outra maneira para resolver a questão. A resolução de Problemas oferece um cenário natural para os alunos apresentarem várias soluções do problema ao seu grupo ou classe e aprenderem matemática (CAI; LESTER, 2003).

Análise das respostas que os alunos obtiveram ao resolver o Problema 2

2-Pedro e Paulo são irmãos. Pedro possui 18 carrinhos e resolveu guardá-los juntos com os do seu irmão Paulo. Sabendo que ele tem 23 carrinhos, quantos carrinhos os dois têm ao todo?

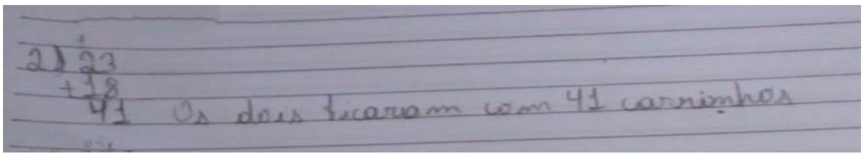
Quadro 13 - Resoluções do Problema 2

	Resposta com cálculos	**Resposta sem cálculos**	**Não respondeu**	**Errou a resolução**	**Acertou a resolução**
Problema 2	**8**	**11**	**0**	**2**	**17**

Fonte: dados da autora

Percebemos, na questão 2, que poucos alunos erraram a resolução do problema proposto. Observamos, ainda, que a maioria sabe somar. Vejamos a resolução do aluno A12:

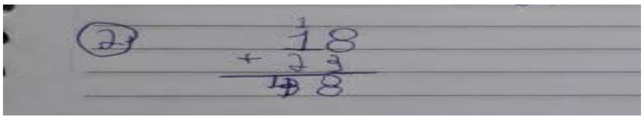
Figura 10 - Resolução do Problema 2 realizado pelo aluno A12



Fonte: Acervo da autora.

Analisando a figura 10, percebemos que o aluno utilizou a operação adequada e conseguiu resolvê-la, encontrando a resposta correta do problema em questão. Seis alunos fizeram dessa forma a sua resolução. Observando as resoluções de outros alunos, percebemos que alguns não sabem somar. Vejamos a resolução do aluno A5:

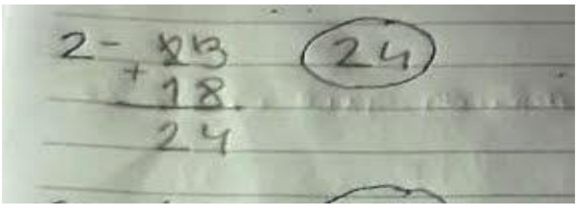
Figura 11 - Resolução do Problema 2 realizado pelo aluno A5



Fonte: Acervo da autora.

Com base na resolução do aluno A5, apresentada da figura 11, percebemos que o aluno utilizou o algoritmo correto, porém, errou na hora de resolvê-lo. Foram 2 alunos que cometeram esse erro. Já outros alunos resolveram esse problema utilizando o algoritmo correto, porém, fizeram baseados em outra operação. Vejamos a resolução do aluno A10, que exemplifica esse fato:

Figura 12 - Resolução do Problema 2 realizado pelo aluno A10



Fonte: Acervo da autora.

Na resolução do aluno A10, percebemos que ele utilizou a operação adequada para o problema proposto, porém, resolveu o problema como se fosse uma subtração. Percebemos, então, que ele não entendeu o enunciado do problema, ou pode não saber diferenciar as operações.

Análise das respostas que os alunos obtiveram ao resolver o Problema 3

3-Ana tem R$ 54,00 reais. Seu irmão tem R$108,00. Quantos reais o irmão de Ana tem a mais que ela?

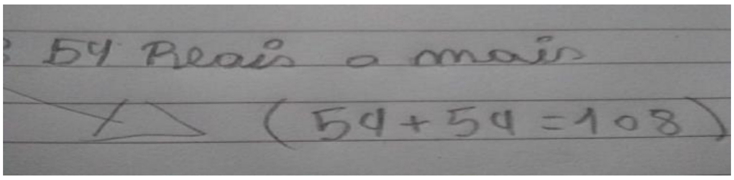
Quadro 14 - Resoluções do Problema 3

	Resposta com cálculos	Resposta sem cálculos	Operação Adequada com Cálculo incorreto	Não respondeu	Errou a resolução	Acertou a resolução
Problema 3	**13**	**6**	**0**	**0**	**1**	**18**

Fonte: dados da autora.

Durante a nossa análise das resoluções que os alunos fizeram com relação ao problema 3, percebemos que poucos responderam sem a utilização do cálculo, e que a maioria conseguiu chegar à solução do problema proposto. Vejamos a resolução que a aluna A7 fez para o problema em questão:

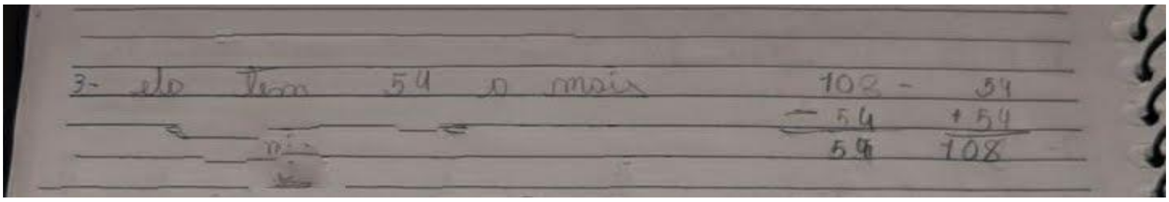
Figura 13 - Resolução do Problema 3 realizado pela aluna A7



Fonte: Acervo da autora.

Observando a resolução da aluna A7, mostrada na figura 13, notamos que ela não utilizou a operação de Subtração, que era a mais indicada para resolver o problema proposto. Não se sabe como ela encontrou o 54, contudo, ela pode ter feito mentalmente, já que o problema é simples, porém, ela somou 54 e 54, chegando em 108. Entretanto, se fosse outro problema em que os valores fossem diferentes, ela teria errado a questão, por exemplo: "*Ana tem R$ 52,00 reais. Seu irmão tem R$108,00. Quantos reais o irmão de Ana tem a mais que ela?*". Logo, a maneira como ela fez não se aplicaria em problemas como este, pois, se ela fizesse 52 mais 52, não chegaria em 108. Um aluno resolveu o problema em questão utilizando dois procedimentos. Vejamos a resolução do aluno A9:

Figura 14 - Resolução do Problema 3 realizado pelo aluno A9



Fonte: Acervo da autora.

Analisando os caminhos que o aluno tomou para resolver o problema, notamos que ele utilizou a operação de Subtração primeiro para encontrar a diferença entre o valor que o irmão de Ana tinha com o valor dela. Percebemos também que o aluno, ao encontrar o resultado, fez uma espécie de prova somando os dois valores para verificar se estava correta a solução encontrada por ele.

Análise das respostas que os alunos obtiveram ao resolver o Problema 4

6- *Quantos garrafões de 5 litros são necessários para engarrafar 315 litros de água? (Fonte: Giovanni, 2002).*

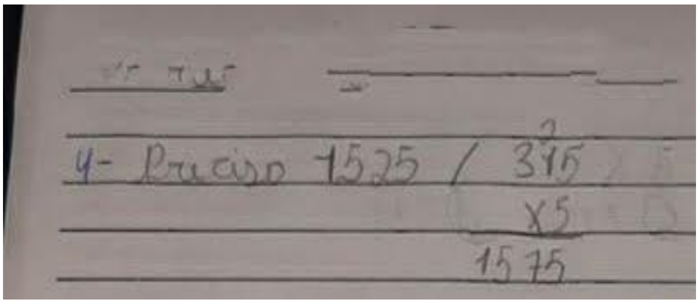
Quadro 15 - Resoluções do Problema 4

	Resposta com cálculos	**Resposta sem cálculos**	**Não respondeu**	**Errou a resolução**	**Acertou a resolução**
Problema 4	**9**	**4**	**6**	**8**	**5**

Fonte: dados da autora.

Percebemos, neste problema 4, que alguns alunos não responderam. Como eles mencionaram que, das quatro operações, as que eles possuíam mais dúvidas eram as de multiplicação e divisão, percebemos que, por se tratar de um problema que envolve divisão, muitos erraram e também muitos não conseguiram resolvê-la. Vejamos, agora, como o aluno A15 fez para resolver:

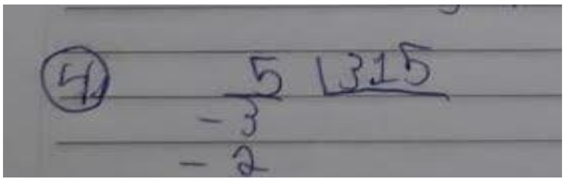
Figura 15 - Resolução do Problema 4 realizado pelo aluno A15



Fonte: Acervo da autora.

Com base na resolução do aluno A15, percebemos que ele utilizou uma operação inadequada para resolver o problema proposto, uma vez que, ao invés de utilizar a operação de divisão, utilizou a de multiplicação. Notamos, pois, que os alunos não têm o hábito de ler, mais de uma vez, os problemas propostos. Quando fizemos a leitura, sugerimos, também, que eles lessem se sentissem dúvidas com relação ao enunciado do problema. No que se refere ao algoritmo, percebemos que vários alunos cometeram erros ao fazê-lo. Vejamos como a aluna A2 fez esse problema:

Figura 16 - Resolução do Problema 4 realizado pela aluna A2



Fonte: Acervo da autora.

Ao analisarmos a resolução da aluna A2, percebemos que, ao armar a operação de divisão, a aluna se atrapalhou colocando como se o 5 fosse o dividendo e o 315 o divisor. Notamos também que a aluna apresentou diversos erros ao tentar realizar a resolução do problema. Assim, vemos que muitos alunos apresentaram dúvidas com relação à operação de divisão. Segundo Silva (2016), para que a aprendizagem da Divisão aconteça, é necessário que os alunos desenvolvam a compreensão do algoritmo da divisão, dos conceitos e das ideias inseridas em determinas situações problemas.

Análise das respostas que os alunos obtiveram ao resolver o Problema 5

5-Lucas é vendedor de frutos do mar, e fez uma dinâmica de sempre vender o quilo do camarão com o valor três vezes maior do que o preço do peixe albacora. O preço do quilo do peixe albacora está custando agora R$11,00 reais. Por quanto Lucas está vendendo o quilo do camarão?

Quadro 16 - Resoluções do Problema 5

	Resposta com cálculos	Resposta sem cálculos	Não respondeu	Errou a resolução	Acertou a resolução
Problema 5	**9**	**10**	**0**	**1**	**18**

Fonte: dados da autora.

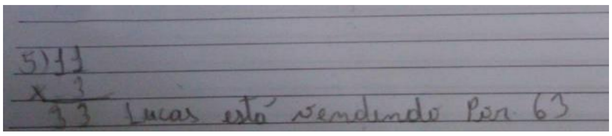
Analisando o Problema 5, percebemos que nem todos conseguiram chegar a resposta correta do problema, porém, alguns ainda não utilizaram cálculos para resolverem o problema proposto. Vejamos as resoluções dos alunos A13, A17 e A18:

Figura 17 - Resolução do Problema 5 realizado pelo aluno A13

Fonte: Acervo da autora.

Ao analisarmos a maneira como o aluno fez para chegar à solução, percebemos que ele utilizou o conceito de soma de parcelas iguais. Segundo Botta (1997), esse é um método intuitivo de resolver um problema de multiplicação.

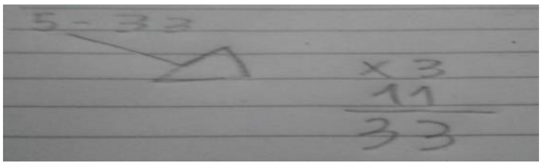
Figura 18 - Resolução do Problema 5 realizado pelo aluno A17



Fonte: Acervo da autora.

Observando a maneira como o aluno fez, percebemos que ele usou o algoritmo usual da multiplicação, porém, errou na hora de fornecer a solução para o problema em questão, haja vista que ele fez o cálculo e encontrou 33, contudo, para finalizar o problema, disse que Lucas estaria vendendo por 63, demonstrando uma contradição.

Figura 19 - Resolução do Problema 5 realizado pelo aluno A18



Fonte: Acervo da autora.

Analisando a resolução do aluno A18, percebemos que ele montou a operação de multiplicação invertendo a ordem do multiplicador pelo multiplicando, chegando, assim, ao valor 33, que é a resposta do problema proposto.

Análise das respostas que os alunos obtiveram ao resolver o Problema 6

6-Para pagar um fogão que custava R$563,00, Maria deu ao caixa R$600,00 reais e recebeu de troco R$37,00 reais. Como ela pode conferir o troco?

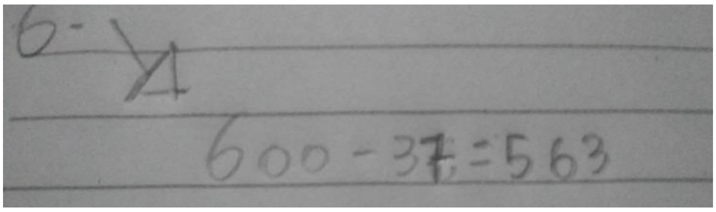
Quadro 17 - Resoluções do Problema 6

	Resposta com cálculos	**Resposta sem cálculos**	**Não respondeu**	**Errou a resolução**	**Acertou a resolução**
Problema 6	**17**	**2**	**0**	**3**	**16**

Fonte: dados da autora

Analisando o quadro 14 e o problema 6, notamos que o próprio problema já remete à ideia de que existem vários caminhos para se encontrar a solução e que vai depender da interpretação o caminho escolhido pra solucionar o problema. Conforme Boavida (2008), problemas que apresentam mais de um caminho para solucioná-lo e mais de uma resposta, podem ser chamados de “Problemas abertos”. Vejamos, agora, como o aluno A15 e A19 fizeram para solucionar o problema proposto:

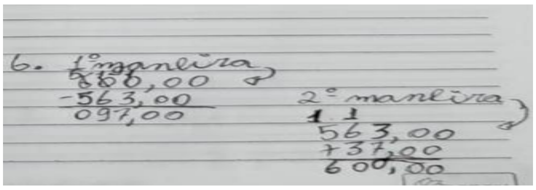
Figura 20 - Resolução do Problema 6 realizado pelo aluno A15



Fonte: Acervo da autora.

Ao observar a maneira como o aluno A15 resolveu o problema, podemos entender que, para conferir o troco de 37 reais, ele pensou da seguinte forma: pegou o valor que foi dado ao caixa que, no caso, foram 600 reais e tirou o valor do troco, no caso, 37 reais, o resto que sobrou seria o valor pago pelo fogão, logo, conseguiu conferir se o troco estava correto.

Figura 21 - Resolução do Problema 6 realizado pelo aluno A19



Fonte: Acervo da autora.

Analisando o caminho que o aluno A19 tomou para chegar à resolução, percebemos que ele utilizou duas maneiras para conferir o troco, a primeira igual à do aluno A15, mostrado anteriormente na figura 20, porém, percebemos que ele montou a operação corretamente, entretanto, o resultado encontrado não foi 37, ele errou ao efetuar a operação, já na segunda maneira, ele utilizou a operação de Adição para verificar se o troco estava correto, no caso, ele pegou o valor do fogão e somou com o troco. Se desses 600 reais, que foi o valor que foi dado ao caixa, o troco estaria correto, no caso, ele obteve o valor de 600 reais e comprovou que o valor que foi dado pelo caixa estava correto.

5.3 Terceiro Encontro – 16/11/2020 – 2 aulas de 50 minutos

O objetivo deste encontro foi compreender a ideia de Multiplicação e Divisão, considerando o conjunto dos números naturais e racionais positivos por meio da Exploração e Resolução de Problemas e o conteúdo trabalho foi as operações de Multiplicação e Divisão (Conjunto dos Números Naturais e Racionais Positivos).

De início, colocamos o link da aula no grupo dos alunos, e aguardamos eles entrarem na aula. Neste dia, só entraram 17 alunos, os outros dois avisaram que não iriam participar da aula, um porque iria ao médico e o outro à cidade de Natal.

Após esperarmos o tempo de 5 minutos de tolerância para que os estudantes entrassem na aula, iniciamos o nosso terceiro encontro, começamos cumprimentando a turma, depois explicamos que as nossas aulas consistiriam em apresentações de situações-problemas, as quais eles tinham um determinado tempo para resolverem, para, assim, iniciarmos uma discussão coletiva acerca da Resolução dos problemas.

Os problemas foram postos em slides separados, no caso, neste encontro, foram trabalhados 4 problemas, colocados um por vez para que os alunos pudessem ler, fazer perguntas e tentar resolver aquele determinado problema, antes de partir para o próximo problema.

1- *Problema 1: Mariana reservou* $\frac{3}{5}$ *do jardim para plantar rosas. Ela resolveu que em* $\frac{2}{3}$ *desse canteiro as rosas plantadas seriam brancas. A parte do jardim ocupada pelo canteiro de rosas brancas corresponde a quanto do jardim? (Fonte: Bianchini(2018)).*

Neste problema 1, trabalhamos a ideia/significado da multiplicação de fração (número racional positivo).

Neste problema, pedimos que os alunos tentassem resolvê-lo e, se tivessem algum questionamento durante a resolução, nos perguntasse no chat, no WhatsApp ou falando no microfone. Não demorou muito para que os alunos começassem a fazer perguntas:

A2: Professora, tá difícil...

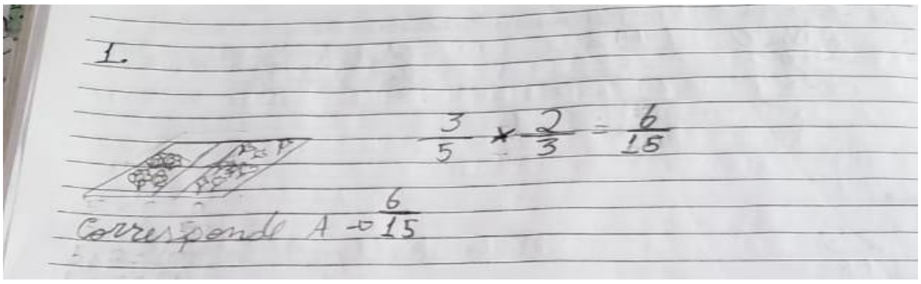
PP: Leia com atenção o problema.

A3: Também tou achando ruim de fazer...

PP: Veja o que o problema pede...

Após esse pequeno diálogo, os alunos voltaram a tentar resolver o problema. Fornecemos um tempo de 15 minutos para que eles tentassem resolver. Passado esse tempo, perguntamos se eles já tinham conseguido resolver, alguns disseram que tentaram, mas não sabiam se estava correto, outros disseram que não conseguiram resolver de nenhum jeito. Vejamos, a seguir, algumas soluções feitas pelos alunos.

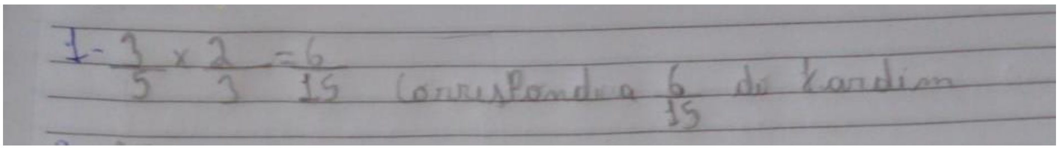
Figura 22 - Resolução do Problema 1 realizado pelo aluno A11



Fonte: Acervo da autora.

Analisando a solução apresentada pelo aluno A11, percebemos que ele tentou representar a situação descrita no problema por meio de um desenho, porém, ele chegou no resultado utilizando a multiplicação de frações. Perguntamos ao aluno como ele chegou nessa solução, ele falou o seguinte: “o problema do jardim dá duas frações, vejo que deve ser feito uma fração dentro da outra”. Logo, percebemos que o aluno foi vago na sua explicação, isto é, não forneceu argumentos que justificasse a solução encontrada.

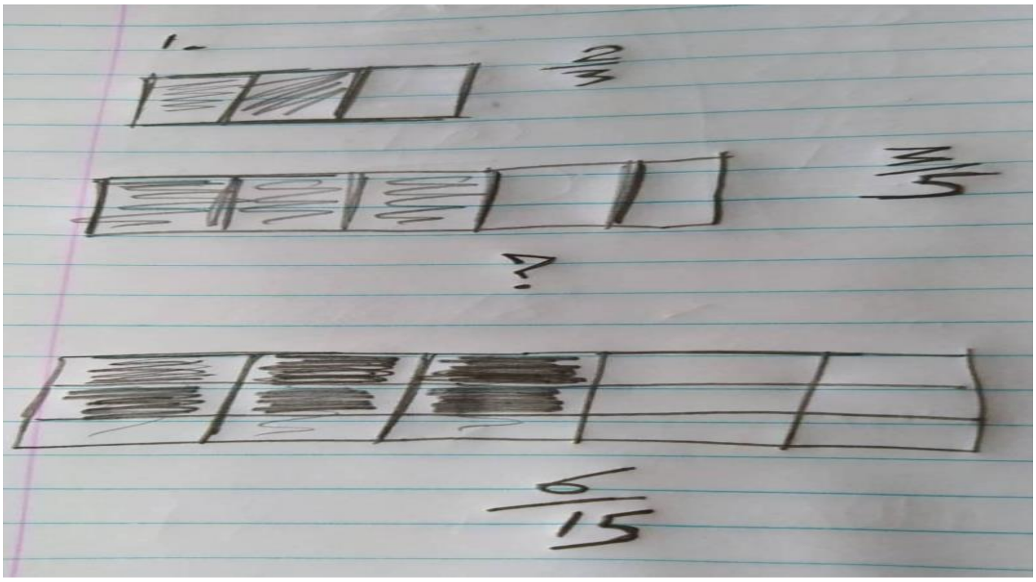
Figura 23 - Resolução do Problema 1 realizado pelo aluno A12



Fonte: Acervo da autora.

Observamos como o aluno realizou a resolução do problema. Percebemos que ele resolveu multiplicando as frações mencionadas no problema. Quando indagamos como ele fez para chegar na solução, ele falou o seguinte: “multipliquei” e ficou em silêncio.

Figura 24 - Resolução do problema 1 realizado pela aluna A3



Fonte: Acervo da autora.

A resolução da Aluna A3 foi diferente dos demais. Ela resolveu o problema por meio de desenhos. Perguntamos a ela como ela chegou nesse resultado, ela explicou da seguinte forma: “Professora, eu desenhei as duas frações do problema, depois desenhei o jardim todo”. Nós indagamos a ela: “Como você soube que teria que dividir o terreno em 15 pedaços e pintar 6?”. A aluna respondeu: “bom, prof, eu peguei 3 de debaixo do 2 e o 5 de debaixo do 3 e multipliquei, aí descobri que teria que dividir em 15, e pintei 6 porque 2 vezes 3 é 6, tá aí minha conta, tá certo Prof?”. Com base nesse diálogo, percebemos que a aluna também utilizou multiplicação de frações.

De acordo com Albuquerque (2016), ao ensinar multiplicação que envolva frações (números racionais positivo), é interessante mostrar ao aluno a relação dos termos, para, assim, ele entender o significado daquela multiplicação, e não resolvê-la de forma mecânica, sem ter a consciência do que se está fazendo.

Após os alunos explicarem suas resoluções, exploramos mais um pouco o problema, fizemos o seguinte questionamento: a parte do jardim ocupada pelo canteiro de rosas brancas é maior ou menor do que a área destinada para plantar rosas? Fornecemos um tempo de 6 minutos para que eles pensassem na solução. Se passaram os minutos, então perguntamos se eles teriam conseguido solucionar o problema, alguns falaram que tentaram, a maioria das respostas foram que a parte do jardim ocupada pelas rosas brancas era maior, pois 6/ 15 era maior que 3/5. Então, indagamos se eles teriam certeza do que estavam falando, alguns falaram que acreditavam que era assim, sugerimos que eles transformassem as frações em números decimais, e que comparassem os dois valores das respectivas frações. Prontamente, um aluno resolveu e explicou sua solução. Vejamos o diálogo:

A15: Fiz assim, professora: 6/ 15 é igual 0,4 e 3/5 é igual a 0,6.

PP: O que você observa com esses resultados?

A15: Deixa eu pensar...

A16: Diz logo que tu não sabe...

PP: Calma, gente, deixe ele pensar.

A15: 0,4 é maior que 0,6 né professora?

PP: Você acha que é?

A15: Numa prova 0,4 vale menos que 0,6...

A17: Tu sabe muito de número quebrado, tu só tira nota baixa em História.

PP: Gente, vamos parar com isso e respeitar o colega...

PP: O que você conclui com esse 0,4 e 0,6?

A15: Que o maior é 3/5...

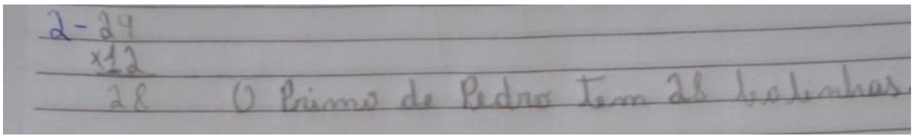
Observando o diálogo, percebemos que exploramos o problema que, a princípio, era uma multiplicação, para um problema de comparação, levando o aluno a também trabalhar com transformação de um número racional positivo (fração) para a sua forma de representação decimal. Conforme Albuquerque (2016), o conceito fundamental que se tem de fração é que ela seria divisões nas quais toda fração ordinária seria uma fração, o numerador seria o dividendo e o denominador o divisor. Percebemos isso quando os alunos foram fazer a transformação de um número fracionário em um número decimal, eles utilizaram esse princípio de que fração seria divisões. Após a resolução do Problema 1 e a exploração do mesmo, passamos para o problema 2.

2- *Pedro tem 24 bolinhas de gude e seu primo tem 12 vezes a mais. Quantas bolinhas o primo de Pedro tem?*

Neste problema, trabalhamos a ideia/significado de comparação na operação de Multiplicação. Temos 1 para 12, no caso, se Pedro tiver uma bolinha seu primo terá 12, se ele tiver 2 bolinhas seu primo 24, e assim por diante.

Neste problema, fornecemos um tempo menor do que o do primeiro problema, aguardamos a leitura dos alunos e a possível solução. Vejamos, a seguir, algumas soluções dos alunos.

Figura 25 - Resolução do Problema 2 realizado pelo aluno A14

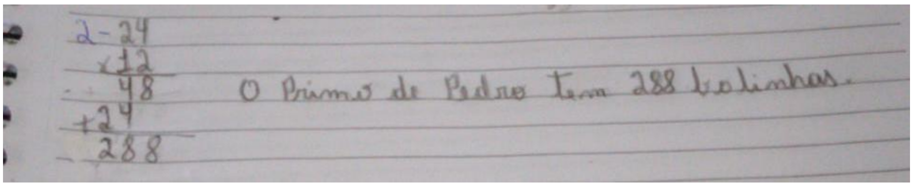


Fonte: Acervo da autora.

Observando a figura 25, percebemos que o aluno indicou que o problema se resolveria a partir de uma operação de multiplicação, porém efetuou a operação incorretamente, logo, iniciamos um diálogo com o aluno para saber como ele fez para chegar naquele resultado.

PP: Como você fez pra encontrar 28 bolinhas?
A14: Eu multipliquei, professora.
PP: Como você fez essa multiplicação?
A14: multipliquei 2 por 4 e 1 por 2, aí achei 28, tá certo?
PP: Infelizmente, você efetuou a operação de forma errada. Vamos ver como seus colegas resolveram.

Figura 26 - Resolução do problema 2 realizado pelo aluno A10



Fonte: Acervo da autora.

Analisando a resolução do aluno A10, percebemos que ele usou a operação de multiplicação, utilizando o algoritmo convencional. Perguntamos ao aluno como ele fez para chegar naquele resultado de 288 bolinhas. Vejamos o que ele falou:

A10: Professora, eu vi que Pedro tem 24 bolinhas e seu primo tem 12 vezes a mais, aí eu armei a conta 24 vezes 12, achei o 288.

PP: Observem, pessoal, como nosso colega resolveu o problema, e, agora, tentem resolver esse questionamento: “Se Pedro tem 24 bolinhas e seu primo tem 12 a mais, quantas bolinhas o primo de Pedro tem?”

A11: Fácil, é só somar.

PP: Qual seria a solução?

A10: 36 bolinhas.

Conforme Onuchic e Allevato (2011), na resolução de problemas, o professor tem a função de mediador, analisa e incentiva os alunos a irem em busca da solução daquele determinado problema, de forma colaborativa.

Na parte final do diálogo anterior, o professor-pesquisador explorou o problema, trazendo um novo conceito/ideia semelhante ao problema inicial, porém, agora, envolvendo a ideia de Juntar da operação de adição. De acordo com Andrade (2017), com a exploração do problema, surgem novas perguntas, novas dúvidas, e, assim, chega-se a novos conteúdos e novos problemas.

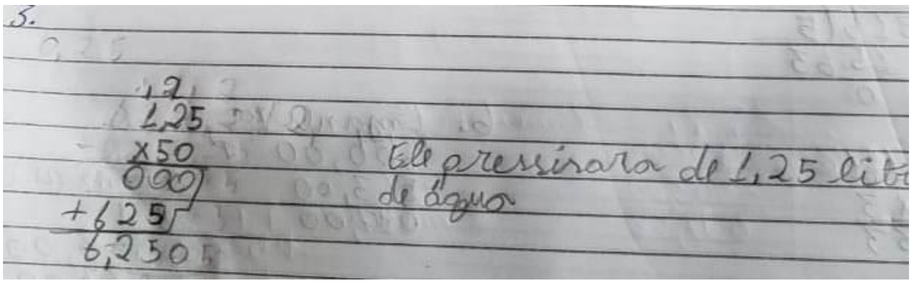
Após o questionamento, passamos ao problema 3. Novamente fornecemos um tempo para que os alunos lessem o problema e, possivelmente, tentassem resolvê-lo.

3- *Para encher um aquário, Eduardo está usando um copo com capacidade de 0,25 litro. Nesse aquário, cabem 12,5 litros. Determine quantos copos cheios de água Eduardo precisará para encher o aquário. (Fonte: Bianchini (2018))*

Neste problema trabalhamos a ideia/significado de divisão de frações (número racional positivo).

Ao lerem o problema, os alunos já indagaram que era difícil de resolvê-lo, pedimos que eles lessem o problema novamente, um perguntou se era para multiplicar, então, nós, prontamente, pedimos para que ele lesse o problema com mais atenção. Vejamos algumas soluções dos problemas.

Figura 27 - Resolução do Problema 3 realizado pelo aluno A18



Fonte: Acervo da autora.

Analisando a resolução do problema, percebemos que o aluno não entendeu bem o que o problema queria saber, logo, começamos um diálogo. Vejamos o diálogo:

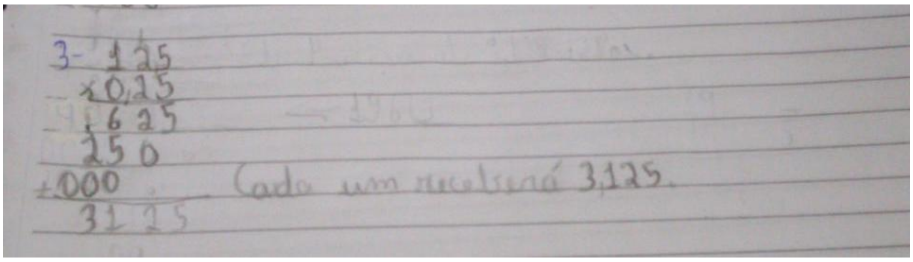
PP: Como você fez pra encontrar esse 1,25?

A18: eu multipliquei 1,25 vezes 50.

PP: E esse 50, como você encontrou?

A18: Não lembro.

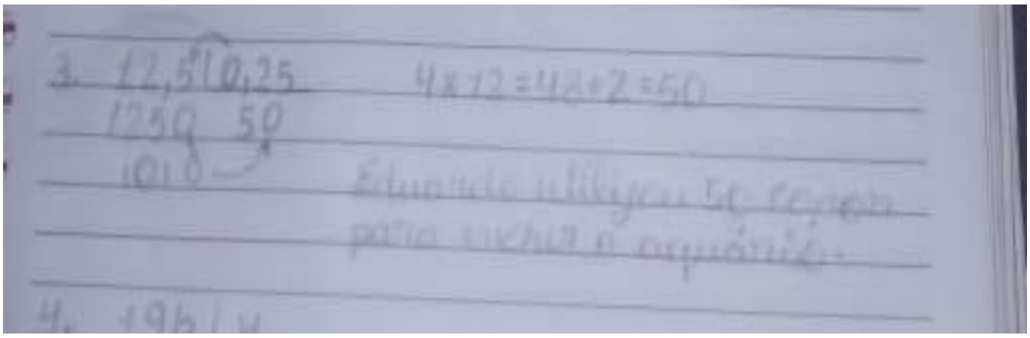
Figura 28 - Resolução do Problema 3 realizado pelo aluno A9



Fonte: Acervo da autora.

Ao observar a resolução do aluno A9, perguntamos como ele fez para resolver o problema, ele falou que multiplicou 1,25 por 0,25.

Figura 29 - Resolução do Problema 3 realizado pelo aluno A7



Fonte: Acervo da autora.

Analisando a figura 29, percebemos que aluno resolveu de forma correta o problema, achando 50 copos. Vejamos nosso diálogo com ele e a turma:

PP: Como você fez para encontrar os 50 copos?

A7: Peguei 12,5 e dividi por 0,25.

PP: Bom, pessoal, vamos mudar a capacidade do copo de 0,25 para 0,50. Quantos copos seriam necessários agora?

A11: Vixe, agora ficou pior.

PP: Como vocês resolveriam?

A7: 12,5 divido por 0,50.

PP: Vou dar mais um tempo pra vocês resolverem.

A14: Já sei, 625.

PP: Alguém mais fez e encontrou outro resultado?

A10: O meu deu 25 copos.

A11: O meu também.

A9: Não consegui fazer.

PP: Como você fez pra encontrar os 25 copos, aluna A10?

A10: Fiz a divisão de 12,5 por 0,50 aí deu 25, aí multipliquei por 0,50, aí deu 12,5.

PP: Observamos algumas soluções apresentadas por vocês para o problema. Qual solução seria a correta? E por quê?

A10: 25 copos, tia, porque testei 25 vezes 0,50 deu 12,5.

PP: Vocês concordam?

A turma mencionou que sim.

De acordo com Cunha (1994), os alunos têm concepções erradas em mente, pois acreditam que "na multiplicação sempre aumenta e na divisão diminui". No problema 1 e 3, que apresentamos para os alunos, isso ocorre de forma contrária, pois trabalhamos com números racionais positivos **a/b**, em que b é diferente de zero, e em que **a** é menor que **b**.

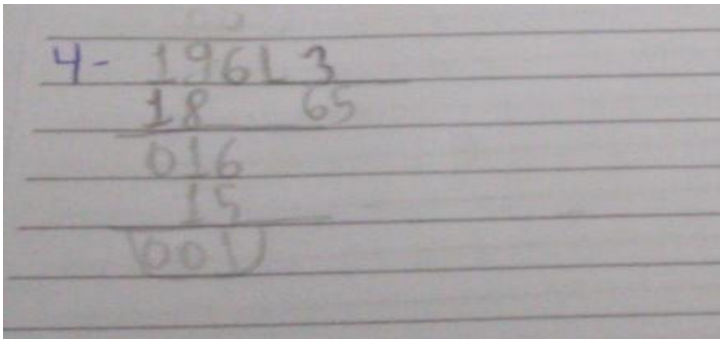
Depois da resolução do problema 3 e discussão dele, passamos, agora, para o último problema do encontro.

4- *Luiz e suas três irmãs receberam um terreno de herança que mede 196 m^2, e vão repartir igualmente entre os quatro. Quantos metros quadrados cada um irá receber do terreno?*

Neste problema, trabalhamos com ideia/significado de partir em partes iguais, isto é, ideia partitiva na operação de divisão. Conforme Albuquerque (2016), essa é a ideia intuitiva que os alunos têm da operação de divisão.

Apresentamos o problema 4 para os alunos, pedimos para que eles tentassem resolvê-lo. Alguns alunos, ao lerem o problema, falaram logo que já sabiam resolver. Uma aluna perguntou se podia desenhar. Nós, prontamente, falamos que ficassem à vontade para resolver o problema. Vejamos algumas soluções:

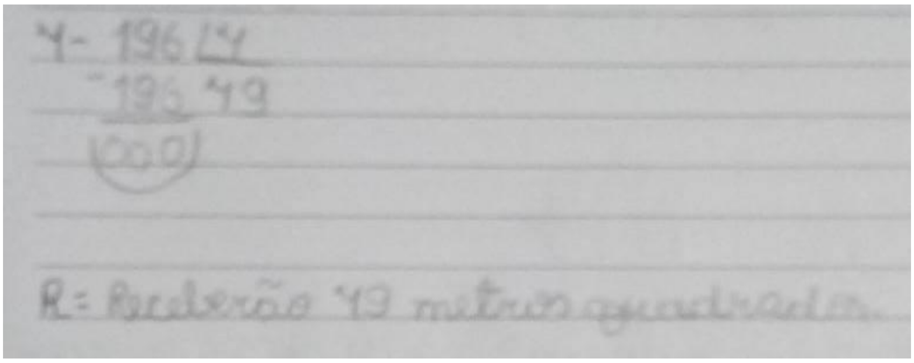
Figura 30 - Resolução do Problema 4 realizado pelo aluno A12



Fonte: Acervo da autora.

Observamos a resolução do Problema 4, mostrado na figura 30. Percebemos que a aluna dividiu apenas por 3. Logo, perguntamos como ela chegou naquela solução, ela nos falou o seguinte: “Professora, eu peguei a herança de 196 e dividi pelas três irmãs”. Em seguida, indagamos o porquê do irmão não está fazendo parte dessa herança. Ela nos falou que não prestou atenção.

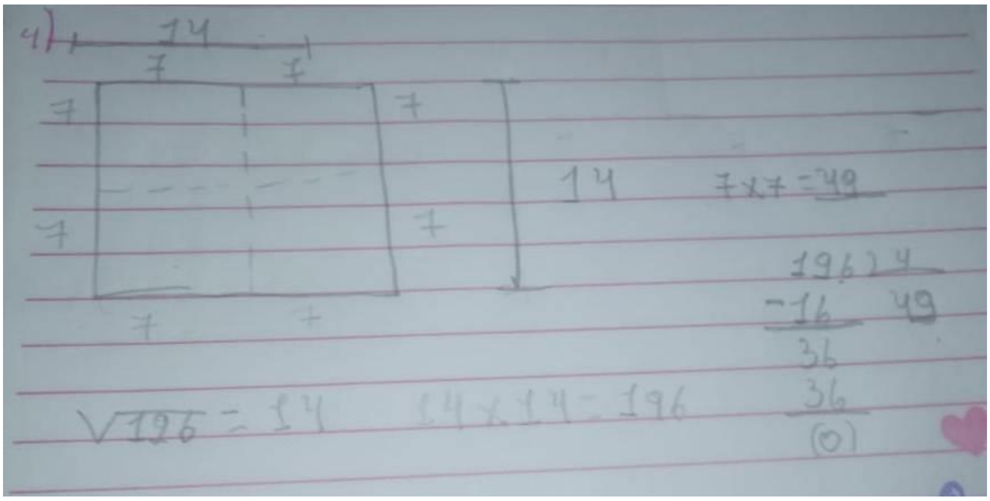
Figura 31 - Resolução do Problema 4 realizado pelo aluno A16



Fonte: Acervo da autora.

Analisando a resolução feita pelo aluno A16, percebemos que ele acertou a resolução do problema, logo, perguntamos como ele fez para chegar naquele resultado. Ele nos falou o seguinte: “dividi 196 para Luiz e as três irmãs, aí deu 49 para cada. Logo, perguntamos se alguém teria feito diferente. Então, a aluna A15 nos enviou sua resposta pelo WhatsApp.

Figura 32 - Resolução do Problema 4 realizado pela aluna A15



Fonte: Acervo da autora.

Analisando a solução da aluna A15, percebemos que ela também chegou na solução correta do problema, porém, usou desenhos, operações de divisão, multiplicação, raiz quadrada. Logo, perguntamos como ela chegou na solução do problema. Ela nos falou o seguinte: “desenhei um desenho do terreno e dividi em 4 pedaços, aí dividi 196 por 4, aí deu 49, cada um ganhou 49 de herança.”

Após a resolução da questão, fizemos o seguinte questionamento: Se o terreno de 196 m^2 tivesse que ser divido por 5 herdeiros, quanto cada um iria receber do terreno em m^2?

Fornecemos um tempo para a resolução do problema, logo, alguns alunos começaram a falar:

A12: Dá pra resolver, não vai sobrar.

PP: Veja bem o problema.

A13: Pode sim, o meu deu 39,2.

PP: Como você fez pra resolver?

A13: Eu só dividi.

A12: Mas, professora, pode dá 39,2 de terreno.

PP: Se é uma herança, ela deve ser repartida igualmente ou pode sobrar?

A16: Igual, prof, senão o povo briga.

Analisando o diálogo, percebemos a importância de se trabalhar com a natureza do todo. Segundo Albuquerque (2016), as partes de um todo podem ser iguais ou desiguais. No problema que formulamos após a resolução da questão 4, as partes do todo teriam que ser iguais. Nessa divisão, o todo seria contínuo já que poderíamos dividir o todo, isto é, o terreno muitas vezes sem modificar sua natureza, e suas partes poderiam ser divididas novamente.

Logo, após nosso diálogo, finalizamos o encontro. Consideramos bem proveitoso, os alunos participaram mais, mostraram como fizeram as soluções, abriram o microfone e falaram.

5.4 Quarto Encontro – 23/11/2020 – 2 aulas de 50 minutos

O objetivo deste encontro foi compreender, na operação de Adição, a ideia de mudar adicionando; na operação de Subtração, a ideia de mudar subtraindo; na multiplicação, a ideia de comparação multiplicativa, e os conteúdos trabalhados foram as operações de Adição, Subtração e Multiplicação.

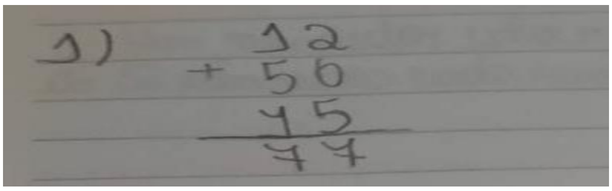
Nesse sentido, disponibilizamos, novamente, o link da aula no grupo dos alunos, e aguardamos a entrada deles na aula, 19 alunos estavam presentes no encontro. Iniciamos o encontro cumprimentando a turma e compartilhamos a tela do nosso computador com o primeiro problema a ser trabalhado naquela aula.

1- Paulo tinha R$ 12,00 reais, ganhou R$ 50,00 de mesada de seu pai, aparou a grama da sua tia e ganhou mais R$15,00 reais. Quanto Paulo tem agora?

Neste problema, trabalhamos com a ideia/significado de mudar adicionando na operação de Adição, na qual o valor desconhecido seria o total. Segundo Carpenter *et al*. (1999), esse tipo de problema é usado para introduzir a operação de Adição, em que o todo é desconhecido.

Disponibilizamos um tempo de 10 minutos para que os alunos lessem o problema e tentasse encontrar uma solução. Após a finalização desse tempo, pedimos para que eles enviassem suas respostas para o WhatsApp. Vejamos algumas das soluções dos alunos:

Figura 33 - Resolução do Problema 1 realizado pelo aluno A2



Fonte: Acervo da autora.

Analisando a figura 33, percebemos que o aluno conseguiu chegar no resultado. Como se trata de um problema de Adição, todos conseguiram chegar ao mesmo resultado do problema. Tentando ir mais longe na questão, fizemos as seguintes indagações: 1º - Se Paulo, agora, resolvesse comprar uma caixa de chocolate no valor de R$ 8,50 reais, quanto lhe restaria de mesada? Disponibilizamos um tempo de 5 minutos para que eles tentassem resolver a indagação, logo, começaram a falar: "– Que fácil, é só tirar de 77 os 8,50". Prontamente, perguntamos: - E, agora, quanto ele ficou de mesada? A maioria falou 68,50, perguntamos se eles tinham certeza, logo, um aluno falou que se somasse 68,50 mais o 8,50 encontraria os 77 da mesada. Após eles terem respondido a primeira indagação, passamos para a segunda: 2º - Se Paulo, agora, resolvesse pegar o que restou da mesada após a compra da caixa de chocolate e dividisse igualmente com seus quatro irmãos, quanto cada um iria ganhar? Disponibilizamos um tempo de 10 minutos, observando as indagações feitas, isto é, os novos problemas que surgiram a partir da exploração do problema inicial. Conforme Andrade (2017), chegamos a novos conteúdos, neste caso, passamos da operação de Adição, para uma de multiplicação e divisão, apenas explorando, fazendo algumas alterações no problema inicial ou também chamado de problema gerador. O tempo se passou e logo começamos um diálogo com os alunos:

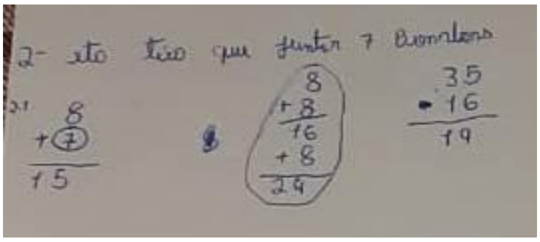
PP: Bom, gente, encontraram alguma solução?
A17: Sim, professora, cada um ficou com 13,50 e sobrou 3 reais.
PP: Alguém mais fez e encontrou outro resultado?
A13: Eu, o meu deu 13,70.
PP: Alguém mais encontrou outra solução?
A5: O meu também deu 13,70.
PP: Como vocês fizeram para encontrar esses 13,70?
A13: Dividimos o 68,50 por 5, aí achamos o 13,70.
PP: Se você multiplicar o 13,70 por 5, que valor vocês encontram? Pensem aí.
A10: Dá 68,50.
PP; O que vocês podem concluir com isso?
A5: Que 13,70 é quanto cada um vai ganhar de dinheiro, né, tia?
PP: Isso mesmo, pessoal.

Concluímos o problema 1, e, prontamente, apresentamos o segundo problema para que os estudantes pudessem ler e conseguissem encontrar uma solução. Vejamos o problema:

2- Rita tem 8 bombons. Quantos bombons ela terá que juntar a esses para ficar com 15 bombons?

Neste problema, trabalhamos com a ideia/significado de equalizar adicionando na operação de subtração. Após apresentar o problema, aguardamos até que os estudantes terminassem de resolver. Esse problema foi rapidamente solucionado pelos alunos. Vejamos, agora, algumas soluções:

Figura 34 - Resolução do Problema 2 realizado pelo aluno A16



Fonte: Acervo da autora.

Analisando a resolução que o aluno A16 fez, percebemos que ele chegou na solução do problema, usou a operação de Adição. Depois da nossa observação da figura 34, iniciamos um diálogo com o aluno e a turma. Vejamos:

PP: Me explique como você fez para chegar na solução do problema.

A10: Posso explicar o meu?

PP: Aguarde o colega falar, depois você fala, tá bem?

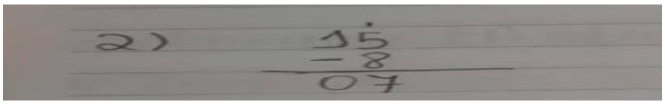
A10: Tá, prof.

A16: Professora, eu vi que tinha que somar um valor ao 8 pra da 15, aí fiz a conta, fiz algumas contas e vi que 8 mais 7 dá 15, no caso, ela precisa de mais 7 bombons.

PP: Alguém mais fez diferente?

A4: Eu, tia.

Figura 35 - Resolução do Problema 2 realizado pelo aluno A4



Fonte: Acervo da autora.

Na figura 35, temos a resolução do aluno A4. Em sua resolução, ele utilizou uma subtração diferente do colega anterior, logo, iniciamos um diálogo:

PP: Como você pensou?

A4: Professora, peguei o total, que era 15, e tirei o que ela já tinha, o 8, aí ficou 7 faltando pra dá os 15.

PP: Alguém mais fez diferente?

A12: Eu fiz do jeito dele.

A8: Eu também.

Com base nos diálogos e soluções apresentadas pelos alunos, conforme Onuchic e Allevato (2011), os alunos tentaram buscar soluções para o problema a partir de suas interpretações.

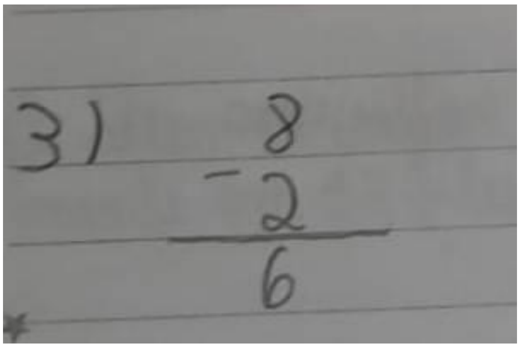
Como o problema foi de fácil entendimento pelos alunos, passamos para o próximo problema. Vejamos, agora, o problema 3:

3- Marcos tinha 8 canetas. No caminho para a escola, perdeu duas canetas. Quantas canetas Marcos tem agora?

Neste problema, trabalhamos a ideia/significado de Mudar Subtraindo com o resultado desconhecido na operação de Subtração.

Disponibilizamos um tempo de 6 minutos para que os alunos lessem e tentasse resolver o problema. Por ser um problema simples, rapidamente conseguiram solucioná-lo. Vejamos algumas soluções.

Figura 36 - Resolução do Problema 3 realizado pelo aluno A1



Fonte: Acervo da autora.

Observando a solução do aluno A1, percebemos que todos os alunos resolveram o problema dessa forma, utilizando a operação de subtração. Assim, após observar as resoluções dos alunos, iniciamos um diálogo:

PP: Como você chegou ao 6?

A1: Tia, como ele tinha 8 canetas, perdeu 2, aí ficou com 6, fiz uma conta de tirar.

PP: Alguém fez diferente?

A16: Fiz igual.

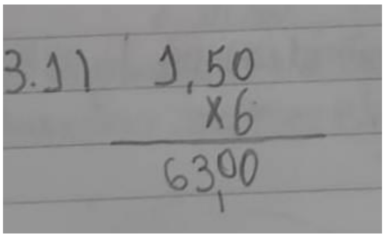
A8: Eu também.

PP: Se Marcos, agora, resolvesse vender cada caneta que sobrou por R$ 1,50 cada, qual seria o valor total que receberia se vendesse todas?

Tentando irmos além da solução. Conforme Andrade (2017), explorar o problema é uma forma de ampliar a resolução de problemas, a exploração do problema partiu de nós, uma vez que propomos um novo problema baseando-nos no problema gerador, isto é, no problema inicial das canetas, porém, mudando a ideia/significado, passando para a operação de Multiplicação com a ideia de grupos iguais.

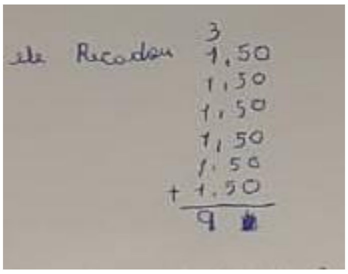
Depois de feita a indagação, fornecemos um tempo para que os alunos lessem e resolvessem o problema. Vejamos algumas das soluções apresentadas pelos estudantes:

Figura 37 - Resolução do Problema 3 realizado pelo aluno A12



Fonte: Acervo da autora.

Figura 38 - Resolução do Problema 3 realizado pelo aluno A19

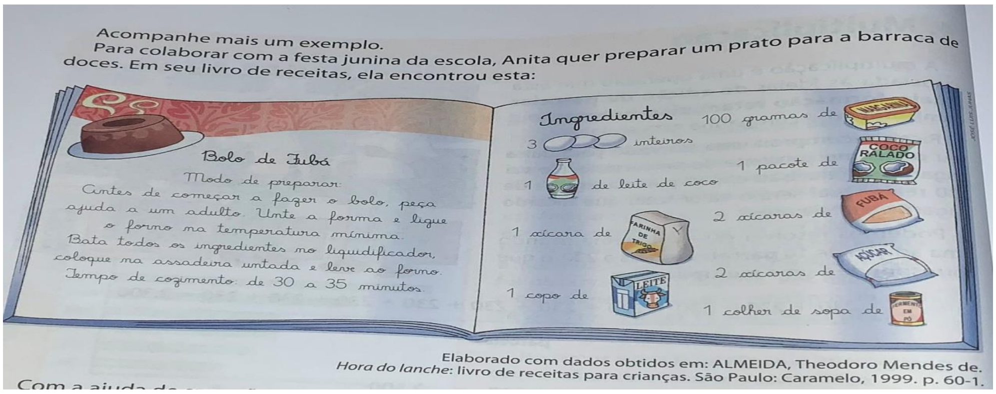


Fonte: Acervo da autora.

Analisando a figura 37 e 38 percebemos, que o aluno A12 tentou resolver o problema através da operação de multiplicação, porém, errou no resultado, já o aluno A19 resolveu utilizando a operação de Adição. Após analisarmos as respostas dos alunos, iniciamos, novamente, um diálogo. Vejamos:

PP: Aluno A12, como você fez pra chegar ao 63?
A12: Eu multipliquei 1,50 vezes 6.
PP: Esse 63 não é um valor muito alto não?
A19: Professora, ele se atrapalhou nas contas, vou dizer como eu fiz.
PP: Diga como foi que você pensou.
A19: Se uma caneta é 1,50 e Marcos tem 6, eu peguei repeti o 1,50 seis vezes e somei, aí deu 9.
PP: Alguém fez diferente?
A7: Eu fiz do jeito de A12, mas o meu deu 9.
PP: Bom, pessoal, qual seria a solução correta? E por quê?
A19: 9, porque se somar 6 vezes 1,50 dá 9.
PP: Concordam com a resposta da colega?
A turma rapidamente respondeu que sim.

Após a discussão do problema, passamos para o último problema daquele encontro. Vejamos o problema:


Acompanhe mais um exemplo.
Para colaborar com a festa junina da escola, Anita quer preparar um prato para a barraca de doces. Em seu livro de receitas, ela encontrou esta:

Bolo de Fubá
Modo de preparar:
Antes de começar a fazer o bolo, peça ajuda a um adulto. Unte a forma e ligue o forno na temperatura mínima.
Bata todos os ingredientes no liquidificador, coloque na assadeira untada e leve ao forno.
Tempo de cozimento: de 30 a 35 minutos.

Ingredientes
3 inteiros
1 de leite de coco
1 xícara de
1 copo de
100 gramas de
1 pacote de
2 xícaras de
2 xícaras de
1 colher de sopa de

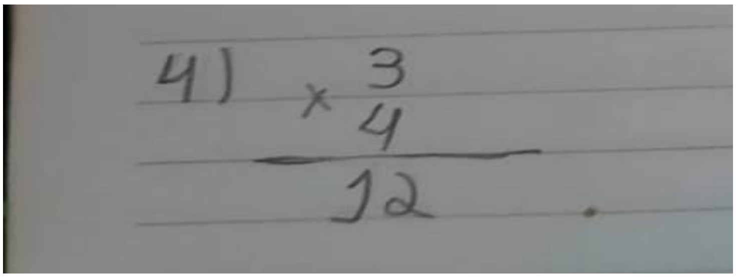
Elaborado com dados obtidos em: ALMEIDA, Theodoro Mendes de. *Hora do lanche*: livro de receitas para crianças. São Paulo: Caramelo, 1999. p. 60-1.

Com a ajuda de sua mãe, Anita fará 4 bolos. De quantos ovos ela precisará?
Fonte: (BIANCHINNI, 2006, p. 52)

Neste problema, trabalhamos com ideia/significado de contagem variada no estabelecimento de suas proporções. Conforme Albuquerque (2016), temos quantidades associadas às grandezas dadas por uma relação, isto é, um bolo está para 4 ovos, assim como 12 ovos está para 3 bolos.

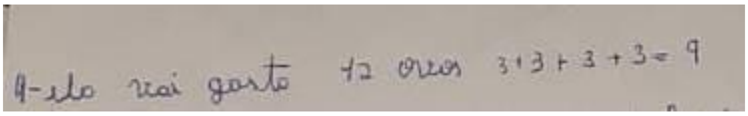
Depois de apresentar o problema 4, solicitamos que os alunos lessem o problema e tentassem resolver. Alguns argumentaram que não estavam entendo, pedimos para que eles lessem com mais atenção o problema, rapidamente as respostas do problema foram chegando em nosso WhatsApp. Vejamos algumas dessas soluções:

Figura 39 - Resolução do Problema 4 realizado pelo aluno A10



Fonte: Acervo da autora.

Figura 40 - Resolução do Problema 4 realizado pelo aluno A9



Fonte: Acervo da autora,

Ao analisar as figuras 39 e 40, percebemos que os dois alunos foram por caminhos diferentes, porém chegaram na mesma solução. Observando a figura 40, notamos que o aluno utilizou a ideia intuitiva da operação de Multiplicação por meio da ideia/significado de grupos iguais. Conforme Greer (1992), problemas de multiplicação podem ser gerados a partir de algumas situações, em que destacamos nesse problema os grupos iguais. Vejamos, agora, o diálogo que iniciamos a partir desse problema:

PP: Gostaria de saber como vocês, A10 e A9, chegaram à solução do problema.

A9: Eu somei 4 vezes o 3. Um bolo precisa de 3 ovos, aí 4 bolos precisam de 12.

A10: Eu fiz de vezes, tia, um bolo, 3 ovos, aí fiz 3 vezes 4, aí deu 12.

PP: Com base no enunciado da questão anterior, se eu tivesse 60 ovos, quantos bolos daria para eu fazer?

A1: Agora, complicou, professora.

PP: Pensem um pouco mais.

A12: 3 vezes 20 dá 60. Professora, é 20 bolos.

PP: Alguém pensou diferente?

A8: Eu fiz assim 60 divido por 3. 60 total de ovos, um bolo precisa de 3, aí dividi, deu 20.

PP: Bom, turma, é 20 mesmo a quantidade de ovos?

A4: Sim, 20 vezes 3 dá 60.

PP: Concordam com esse resultado?

A turma mencionou que sim.

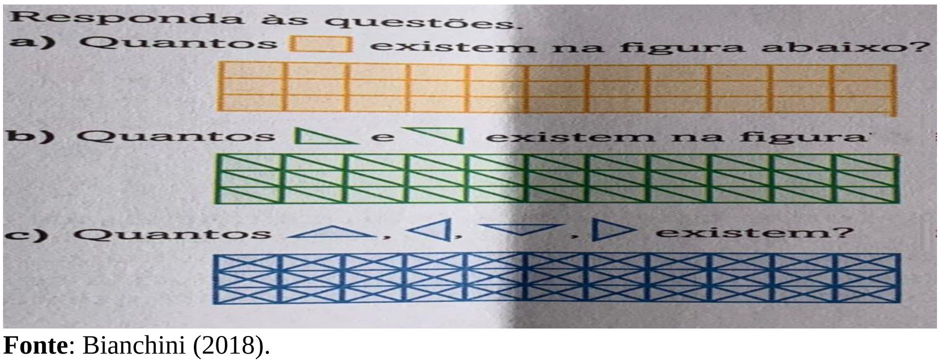
Após a discussão do problema novo, feito a partir do enunciado do problema 4, finalizamos mais um encontro, com uma boa participação dos alunos.

5.5 Quinto Encontro – 30/11/2020 – 2 aulas de 50 minutos

O objetivo deste quinto encontro foi mediar situações-problemas com o intuito de trabalhar a exploração e a resolução de problemas com as ideias e conceitos de cada operação, tais quais podemos destacar: na Adição, a ideia de combinar adicionado, na subtração, a ideia de comparação e, na multiplicação, a ideia de Área retangular, e os conteúdos trabalhados foram as operações de Adição, Subtração e Multiplicação.

Novamente, compartilhamos o link da aula no grupo para que os alunos pudessem entrar, porém, tivemos um problema com a nossa internet. Avisamos no grupo dos alunos usando nossos dados móveis que, se a internet não voltasse num período de 30 minutos, a aula seria cancelada. Ficamos aguardando a internet voltar, ela voltou com 20 minutos, logo, iniciamos a aula com 20 minutos de atraso, contudo, prolongamos a aula por mais 20 minutos. Cumprimentamos a turma e iniciamos a aula com uma situação-problema compartilhada através de slides, para que os alunos pudessem ler e, consequentemente, solucionar o problema.

1-

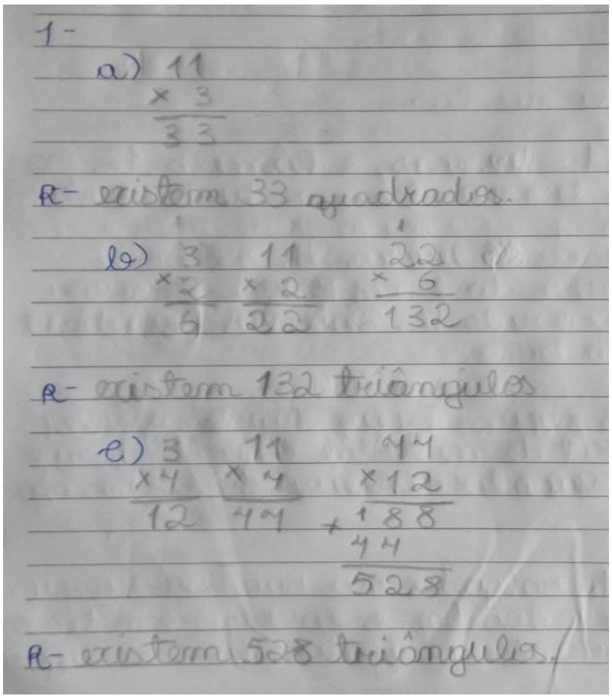


Fonte: Bianchini (2018).

Neste problema de Multiplicação, trabalhamos com a ideia de área retangular, tipo **a x b**, em que **a** seria o comprimento e **b** a largura.

Aguardamos os alunos lerem o problema e fornecemos um tempo de 15 minutos para que os alunos lessem e resolvessem o problema proposto. Vejamos algumas soluções dos alunos:

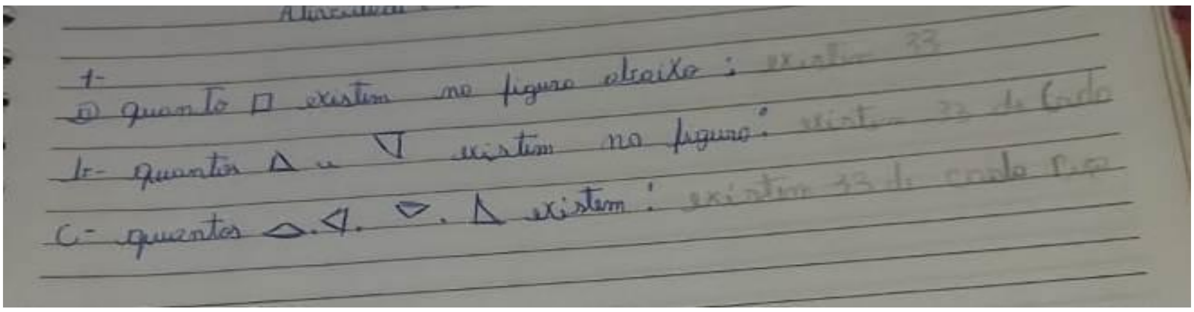
Figura 41 - Resolução do Problema 1 realizado pelo aluno A12



Fonte: Acervo da autora.

Analisando a figura 41, percebemos que, para solucionar o problema proposto, o aluno A12 optou por realizar operações de multiplicação e utilizou o algoritmo usual da operação de multiplicação.

Figura 42 - Resolução do Problema 1 realizado pelo aluno A8



Fonte: Acervo da autora.

Na figura 42, percebemos que o aluno não utilizou nenhum algoritmo para solucionar o problema, apenas colocou a resposta. Vejamos, a seguir, um diálogo acerca das resoluções dos alunos:

PP: A12, como você fez para encontrar 33 quadrados na letra “a”?

A12: Tia, eu contei 3 quadradinhos em pé e 11 deitados, aí fiz 3 vezes 11, deu 33.

PP: Alguém fez diferente e gostaria de compartilhar conosco sua resolução?

A8: Eu, professora, fiz assim: contei todos os quadradinhos, aí deu 33.

PP: Alguém mais fez diferente?

A10: Eu fiz igual ao A12, é mais fácil.

A9: Eu também fiz igual a ele.

PP: E a alternativa “b”, como vocês fizeram?

A8: Eu contei 33 de cada figura.

PP: E, no total, tem quantos?

A8: Total tem 66.

PP: Alguém fez diferente?

A12: Eu multipliquei, tia, 3 em pé foi divido em dois pedaços, aí dá 6 no total, aí os 11 foram divididos em 2 também, aí fiz 11 vezes 2 deu 22, aí fiz 22 vezes 6 deu 132.

PP: Alguém achou outro resultado?

A5: O meu deu 66.

PP: Como você fez?

A5: Contei todos.

PP: Qual seria a solução correta?

A5: 66, tia, eu contei um por um.

PP: E a letra “c”, como vocês fizeram?

A12: Eu fiz assim, tia, mas acho que tá errado.

PP: Pode falar sua resposta.

A12: Eu vi que cada quadradinho foi dividido em 4 partes, aí tem três em pé, aí multipliquei 3 vezes 4, tem 11 deitados divididos em 4 pedaços, aí fiz 11 vezes 4, depois peguei 44 e fiz vezes 12, aí deu 528.

PP: Alguém fez diferente?

A8: Eu contei 33 de cada figura.

PP: No total, tem quantas?

A8: Deixa eu somar, prof.

A7: 132.

PP: Certo! Alguém mais fez diferente?

A3: O meu deu 132, contei igual a ele.

PP: Qual seria a solução correta: 528 ou 132? E por quê?

A8: Tia, eu acho que é 132, porque se fizermos 4 vezes 33 dá 132.

PP: Explique melhor esse 33 vezes 4.

A8: Tendo 33 pedaços de cada tipo aí são 4 tipos, multiplicando, dá 132 no total.

PP: Concordam com o colega?

A turma argumentou que sim, e que todos tinham feito desse jeito.

Com base no diálogo, percebemos que o aluno A8 contou todos os quadrados do desenho. Segundo Albuquerque (2016), ele utilizou a contagem de unidades em áreas de figuras retangulares.

Depois de todo nosso diálogo sobre a questão 1, fizemos mais algumas explanações da questão. Vejamos:

PP: Bom, pessoal, se eu fosse calcular a área de um terreno retangular de 7 metros de comprimento por 2 de largura, qual seria a área desse terreno?

A12: Vixe, que difícil.

PP: Pensem como vocês poderiam resolver.

Se passaram, exatamente, 4 minutos, logo, um dos alunos falou:

A5: A resposta é 9.

PP: Por que 9?

A5: 7 mais 2, nove.

PP: Alguém pensou de outra forma?

A8: 18, tia.

PP: Como você fez?

A8: Somei dois 2 e dois 7, aí deu 18.

PP: No caso, você não encontrou a área, mas, sim, o perímetro, e área qual seria?

A8: Vou pensar mais.

A19: Já sei, 14.

PP: Como você chegou a essa conclusão do 14?

A19: Igual a tarefa passada, eu desenhei o terreno, aí coloquei 2 e 7, aí multipliquei os dois.

PP: Alguém fez diferente?

A turma ficou em silêncio!!!!

A8: Dá 14, né, tia?
PP: Isso

Observando esse diálogo, vemos que os alunos tiveram dúvidas na hora de resolver o problema, apontaram várias soluções incorretas, porém, mediamos a discussão até que eles chegassem na solução do problema. Com base em Onuchic e Allevato (2011), ao se trabalhar com a metodologia da Resolução de Problemas, o professor deve ter o cuidado de observar a discussão e tentar mediá-la, para que os alunos consigam chegar à solução do problema, com base em suas reflexões acerca do problema proposto.

Após Exploração e Resolução do problema 1, compartilhamos o segundo problema e último desse encontro.

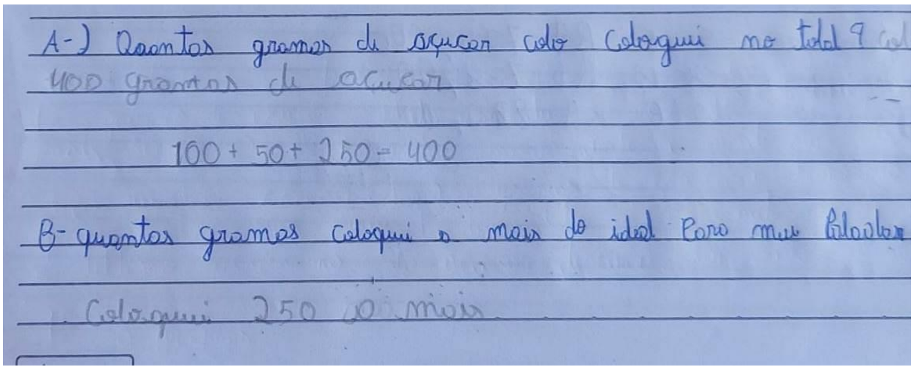
2- Ao fazer uma jarra de limonada, coloquei 100 gramas de açúcar. Experimentei e não gostei. Coloquei, então, mais 50 gramas. Experimentei, novamente, e ainda não estava boa. Resolvi acrescentar 250 gramas de açúcar. A limonada ficou gostosa, mas muito doce. Cheguei à conclusão de que o último acréscimo de açúcar deveria ter sido apenas de 150 gramas.

a-) Quantas gramas de açúcar coloquei no total?
b-) Quantos gramas coloquei a mais do que o ideal para meu paladar?
Fonte: Bianchini (2018)

Neste problema, trabalhamos a ideia/significado de comparação na operação de Subtração. Na letra "a" do problema, trabalhamos também a ideia/significado de Juntar na operação de Adição.

Após a apresentação do problema para os alunos, aguardamos até que eles encontrassem alguma solução para o problema proposto e fornecemos um tempo de 8 minutos. Não demorou muito para surgir as indagações dos alunos. Vejamos algumas indagações: "É para somar?", "É de tirar?" etc., logo, pedimos para que eles lessem com mais atenção o problema, passando-se do tempo fornecido para a resolução.

Figura 43 - Resolução do Problema 2 realizado pelo aluno A11



Fonte: Acervo da autora.

Analisando a figura 43, percebemos que o aluno A11 resolveu a letra “a” do problema por meio de adições, já na letra “b”, ele colocou apenas a solução sem cálculos. Vejamos, a seguir, um diálogo acerca desse problema:

PP: Como você pensou para chegar naquela solução?

A11: Somei as gramas de açúcar que a mulher lá ia colocando no suco, aí deu 400.

PP: Alguém fez diferente?

A8: Eu fiz o cálculo de cabeça, aí deu 400.

A7: O meu também deu 400.

Outros alunos mencionaram que as respostas deles também havia dado 400.

PP: E a letra “b”, como você pensou?

A11: Olhei o problema e achei que ela colocou 250 a mais de açúcar no suco.

PP: Alguém fez diferente?

A5: Eu, professora, o meu deu 100.

PP: Como você pensou pra chegar nesse 100?

A5: Ela fala que deveria ter colocado só 150 no último, e o último ela colocou 250, aí ficou doce, tirei 150 de 250, aí deu 100.

PP: Alguém pensou diferente?

A3: O meu deu 100, pensei do jeito de A5.

Outros alunos mencionaram que seus resultados também foram 100, com o intuito de explorar o problema, fizemos algumas indagações:

PP: Com base no enunciado do problema 2, se, no lugar de fazer uma jarra de suco, fosse fazer três jarras, quantas gramas de açúcar seriam necessárias para as três no total?

Deixamos os alunos pensarem por um certo tempo.

PP: Qual foi a solução que encontraram?

A2: 1200 gramas.

PP: Como você pensou?

A2: A primeira jarra deu 400, aí são três, agora, fiz 400 vezes 3.

PP: Alguém mais fez diferente?

A1: Eu fiz assim: coloquei 100 três vezes, 50 três vezes e 250 três vezes e somei tudo, aí deu 1200.

PP: Alguém mais fez diferente?

A1: O meu deu 1200, fiz do jeito de A1.

Outros alunos falaram que encontram 1200 como solução do problema proposto.

Segundo Andrade (2011), a resolução de problemas com o foco na exploração vai muito além da busca por soluções, vai mais fundo, despertando o interesse do aluno em ir além. Assim, neste problema, a exploração partiu do professor-pesquisador, uma vez que indagamos os alunos com um novo problema que surgiu a partir do primeiro, que, no caso, para solucioná-lo, os alunos utilizaram outras ideias, como a de grupos iguais referentes à operação de Multiplicação. Finalizamos, então, o nosso 5º encontro.

5.6 Sexto Encontro – 07/12/2020 – 2 aulas de 50 minutos

O objetivo deste sexto encontro foi compreender as ideias de produto cartesiano (Raciocínio combinatório) e divisão cartesiana e quotativa, trabalhando com a Exploração e a Resolução de Problemas, e os conteúdos trabalhados foram as Operações de Multiplicação e Divisão.

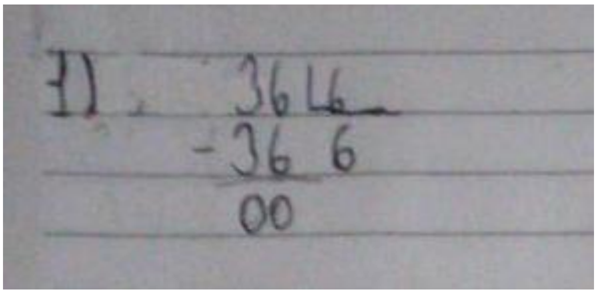
De início, postamos o link da aula no grupo dos alunos e aguardamos a entrada deles na aula. Cumprimentamos os alunos assim que entravam na sala virtual. Enquanto aguardávamos o restante da turma entrar, uma mãe abriu o microfone e falou que a filha estava doente e que não iria participar da aula. Aguardamos alguns minutos e o restante da turma entrou e iniciamos nosso sexto encontro. Cumprimentamos, agora, toda a turma, e, novamente, falamos que iríamos compartilhar alguns problemas a fim de que eles pudessem resolvê-los, para, assim, iniciarmos discussões acerca dos problemas propostos.

1- Paulo tem 36 refrigerantes e quer embalá-los em caixas que comportam 6 refrigerantes. Quantas caixas serão necessárias para que Paulo guarde todos os refrigerantes?

Neste problema, trabalhamos com a ideia/significado de quotativa da operação de Divisão.

Compartilhamos o primeiro problema com os alunos e aguardamos que eles fizessem a leitura e tentassem resolver. Fornecemos um tempo de 8 minutos. Durante esse tempo, ficávamos perguntando se estavam conseguindo fazer, se tinham alguma dúvida, porém, ficaram em silêncio.

Figura 44 - Resolução do Problema 1 realizado pelo aluno A2



Fonte: Acervo da autora.

Observando a figura 44, percebemos que o aluno, para resolver o problema proposto, usou o algoritmo da divisão, um método longo. Perguntamos ao aluno A2 como ele fez para solucionar o problema. Ele falou que, quando leu o problema, percebeu que era uma divisão, em que tinha 36 refrigerantes para colocá-los em caixas de 6 refrigerantes. Então, ele concluiu que precisaria de 6 caixas para embalar todos os refrigerantes. Por ser um problema simples e uma divisão exata, os alunos não apresentaram dúvidas na resolução do problema. Com o intuito de irmos além do problema, fizemos a seguinte indagação: se Paulo, agora, tivesse 108 refrigerantes e quer embalá-los em caixas que comportam 6 refrigerantes, quantas caixas seriam necessárias para que Paulo guardasse todos os refrigerantes? Fornecemos um tempo de 12 minutos para os alunos analisassem o problema e, posteriormente, resolvessem. Após ter se passado o tempo, iniciamos o diálogo com os estudantes:

PP: Conseguiram resolver?

A2: Aguarde um minuto, estou terminando.

PP: Enquanto A2 termina, quem mais fez e gostaria de compartilhar como pensou para resolver o problema?

A3: Eu, professora.

PP: Pode falar.

A3: Eu fiz a conta: 108 divido por 6, aí deu 18.

A4: Prof, eu fiz a soma de 6 em 6 até dá 108, aí foram 18 seis.

PP: Aluno A4, desse jeito que você fez não deu muito trabalho não?

A4: Deu sim, professora, mas gosto de fazer assim.

PP: Alguém mais fez diferente?

A3: Eu fiz assim, 108 é 3 vezes o 36. Como achei 6 para o primeiro 36, aí só multipliquei 6 vezes 3, aí achei 18.

PP: Alguém mais fez?

A9: o meu deu 18, dividi 108 por 6, fiz a conta no caderno, tia.

Outros alunos falaram que encontraram 18, porém, um aluno falou conosco no WhatsApp e disse que não tinha conseguido fazer a atividade, pois não sabia dividir. Situação bem delicada, ele ainda falou que só sabia somar e subtrair, porém, se fosse subtração que tinha que subir número, isto é, subtração com reserva, ele não sabia fazer. Finalizamos a exploração e resolução do problema, logo, apresentamos para os estudantes o segundo problema.

Com base no diálogo, percebemos que alguns alunos apresentaram dúvidas ao resolver problemas envolvendo a operação de divisão. Segundo Albuquerque (2016), a operação de Divisão é uma das operações que traz mais dificuldades devido a muitos aspectos nela envolvidos.

De acordo com Melo e Justulin (2019), o ensino-aprendizagem por meio da resolução de problemas favorece uma mudança na qual coloca o aluno como parte integrante no processo de ensino e aprendizagem.

2- De quantas maneiras posso calçar meus pés tendo três pares de tênis e cinco pares de meias diferentes?

Fonte: Bianchini (2018)

Neste problema, trabalhamos a ideia/significado de Raciocínio combinatório na operação de multiplicação. Conforme Albuquerque (2016), neste tipo de problema, a operação de multiplicação é usada para obter a contagem de possibilidades.

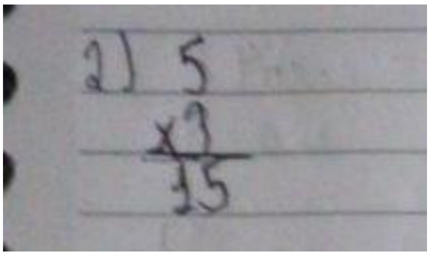
Fornecemos um tempo de 12 minutos para que os alunos fizessem a leitura do problema e, possivelmente, chegassem a uma solução.

Figura 45 - Resolução do Problema 2 realizado pelo aluno A12

Fonte: Acervo da autora.

Observando a figura 45, percebemos que o aluno A2 optou por ilustrar o problema para encontrar a possível solução. Ele desenhou 3 pares de tênis com cores diferentes e, ao lado deles, as meias dos 5 tipos diferentes. A partir do seu desenho, concluiu que seriam 15 combinações. Nessas condições, Silva (2016) nos diz que esses problemas são facilmente resolvidos por alunos, apesar de se tratar do Ensino Fundamental, eles resolvem por meio de desenhos, limitando a resolução.

Figura 46 - Resolução do Problema 2 realizado pelo aluno A9



Fonte: Acervo da autora.

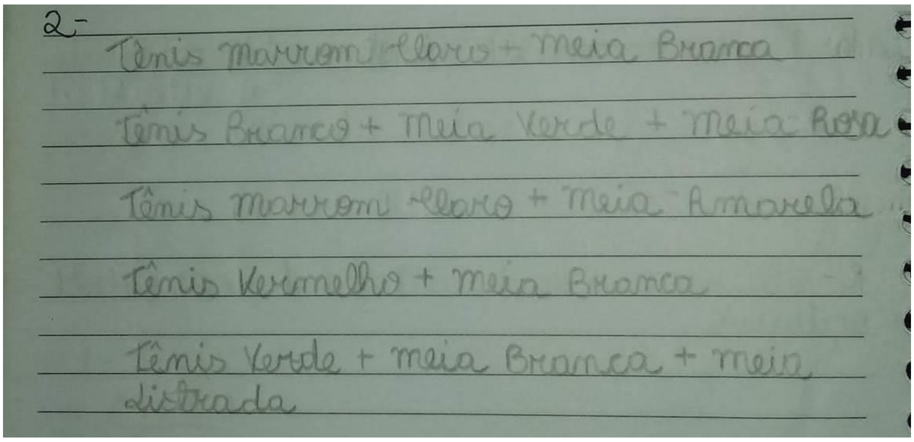
Analisando a Resolução do aluno A9, mostrada na figura 46, percebemos que ele foi direto, utilizou o algoritmo da multiplicação e resolveu o problema proposto.

Figura 47 - Resolução do Problema 2 realizado pelo aluno A19

Fonte: Acervo da autora.

Com base na figura 47, percebemos que o aluno A19 resolveu o problema por meio do algoritmo da multiplicação e por meio de ilustração. Ele desenhou três pares de tênis com cores diferentes e cinco pares de meias com cores diferentes e fez a ligação do par de tênis com cada meia diferente, chegando à solução de que seriam 15 pares diferentes.

Figura 48 - Resolução do Problema 2 realizado pelo aluno A7



Fonte: Acervo da autora.

Observando a figura 48, percebemos que o aluno não utilizou algoritmo nem desenhos para solucionar o problema, apenas usou palavras, tais quais: tênis marrom claro, meia branca etc., porém, ele não chegou na quantidade correta de possibilidades, e notamos, também, que ele colocou 5 pares de tênis diferentes, não três, como é mencionado no problema. Após nossa análise das soluções dos alunos, iniciamos uma discussão. Vejamos esta discussão:

PP: Bom, pessoal, me falem como vocês chegaram na solução do problema.

A9: Eu fiz assim, multipliquei 5 vezes 3, aí deu 15 combinações.

PP: Explique melhor sua resolução.

A9: Eu pensei: são 5 pares de meias diferentes e 3 tênis diferentes, aí 5 vezes 3 dá 15 combinações.

PP: Alguém fez diferente?

A7: Eu coloquei o nome de 5 tênis diferentes e coloquei as meias diferentes.

PP: Mas quantas combinações você encontrou?

A7: deixa eu ver.

PP: Ok.

A7: 7, professora.

PP: Você observou que, no problema, são apenas três tênis com cores diferentes e 5 meias diferentes, logo, não dá só 7 possibilidades.

A7: É mesmo, tia, errei.

PP: Alguém mais fez?

A12: Eu desenhei 3 pares de tênis de cores diferentes e 5 meias de cores diferentes, aí coloquei essas meias para cada tênis, aí deu, professora, 15 combinações.

PP: Alguém mais gostaria de compartilhar sua resolução?

A9: O meu deu 15.

PP: Poderia nos dizer como chegou a essa solução?

A9: Só sei que deu 15.

PP: Certo.

Conforme Boavida (2008), tradicionalmente, o foco da resolução de problema era só chegar na solução. Entretanto, como percebemos no diálogo anterior, fizemos indagações para saber como o aluno chegou àquela determinada solução, gerando dúvidas, novas perguntas, fazendo, assim, os alunos refletirem suas soluções diante daquele determinado problema.

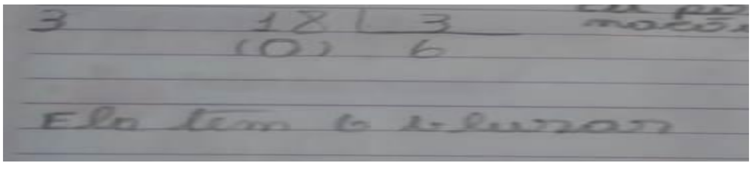
Após a Exploração e Resolução do Problema 2, passamos para o problema 3 e último desse encontro.

3- Fernanda tem 18 possibilidades de combinações de calças e camisetas para ir malhar, e sabe-se que ela tem 3 calças. Quantas camisetas ela tem?

Neste problema, trabalhamos com a ideia/significado de divisão cartesiana, que segue o mesmo princípio do raciocínio combinatório, porém, com a operação inversa.

Novamente, fornecemos um tempo para que os alunos lessem e tentassem resolver problema proposto.

Figura 49 - Resolução do Problema 2 realizado pelo aluno A9



Fonte: Acervo da autora.

Observamos a figura 49 e verificamos que o aluno resolveu o problema por meio de uma divisão, em que o algoritmo utilizado foi o método breve. A maioria dos alunos resolveram dessa forma, outros desenharam as combinações e verificaram a quantidade de camisetas pedidas no problema. Vejamos um diálogo acerca do problema:

PP: Todos conseguiram resolver o problema?

A2: Sim, professora.

A8: Sim.

PP: Como vocês pensaram?

A7: Professora, eu dividi 18 por 3, aí deu 6.

PP: Alguém pensou diferente?

A8: Eu, tia, desenhei as 18 combinações e contei as camisas, aí deu 6 também.

PP: Alguém fez diferente?

A9: O meu também deu 6, fiz como A7.

Outros alunos falaram que também encontraram 6.

PP: Se eu tivesse 10 calças e 8 camisetas, quantas combinações poderia fazer?

A8: Vou pensar, tia.

PP: Vou aguardar vocês tentarem resolver o problema.

A9: Já, professora.

PP: Como você fez?

A9: Eu multipliquei 10 por 8, aí deu 80.

PP: Alguém mais fez diferente?

A7: Ainda estou terminando, professora, estou desenhando as combinações.

PP: Tudo bem. Alguém mais fez diferente?

A18: Eu multipliquei 10 por 8, como A9 fez.

Após a discussão do Problema 3, finalizamos o encontro. Vale salientar que esse foi o último encontro de 2020, retomamos os encontros em 2021 com a mesma turma, pois o ano letivo de 2020 da escola se encerrou em março de 2021.

5.7 Sétimo Encontro – 08/02/2021 – 2 aulas de 50 minutos

Após o período de recesso dos alunos, retomamos nossos encontros, do mesmo jeito que estávamos fazendo em 2020. A turma continuou com 19 alunos participando ativamente das aulas remotas no Google Meet.

O objetivo deste sétimo encontro foi propor problemas que envolvam a Operação de Adição com suas respectivas ideias e conceitos através de Sentenças Numéricas, e o conteúdo trabalhado foi a operação de Adição (Sentença Numérica).

Como é feito em todos os encontros, postamos o link da aula no grupo dos alunos e aguardamos a entrada deles na aula. Os 19 alunos compareceram na aula, os mesmos alunos que haviam participado dos encontros do ano de 2020, cumprimentamos os alunos e falamos que, na aula daquele dia, eles que iriam propor problemas. De início, não compreenderam bem essa ideia deles próprios formularem problemas, mas expliquei que, no ano de 2020, nos seis encontros que tivermos, nós trazíamos os problemas prontos para eles resolverem. Agora, seria a vez de eles proporem os problemas. Compartilhamos a tela do computador com a atividade de Proposição de Problemas desse sétimo encontro.

1- Proponha situações problemas para as seguintes operações:

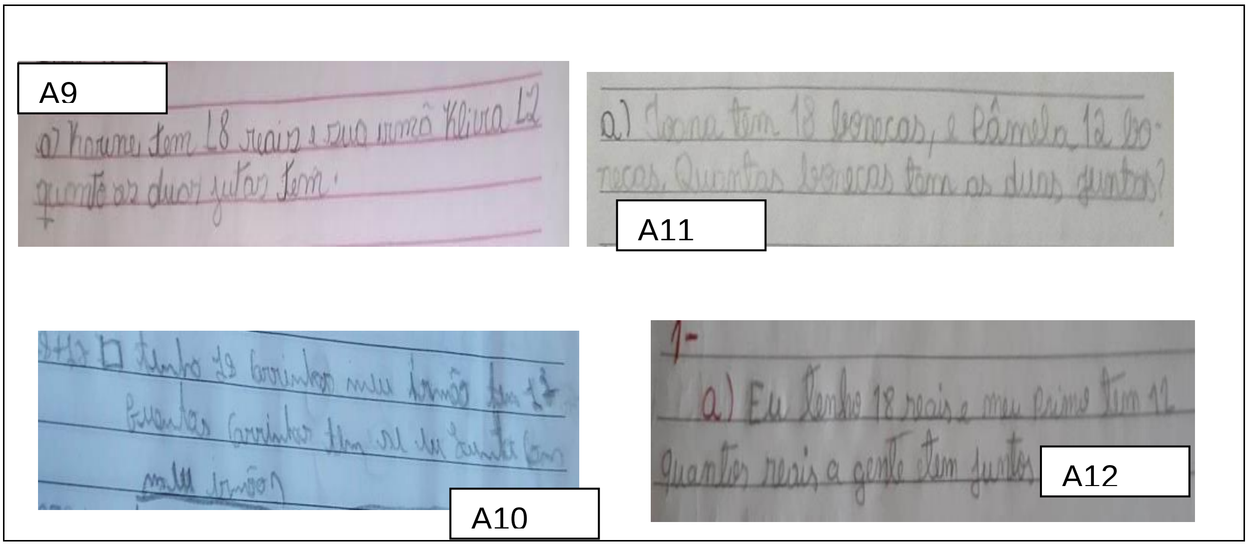
a-) $18 + 12 = \square$
b-) $\square + 8 = 26$

Conforme Cartenter *et al*. (1999), temos 11 tipos de problemas distintos referentes à operação de Adição e Subtração, em que há sempre um valor desconhecido. Além desses 11 tipos de problemas, temos as sentenças numéricas, que têm o mesmo princípio que um problema com enunciado.

Na letra “a”, trabalhamos com a ideia de propor problema, com o significado de juntar da operação de Adição com o final oculto, já na letra “b)”, trabalhamos a operação de adição com significado de junção, porém, com a mudança desconhecida.

Disponibilizamos um tempo para que eles pensassem em um problema. Logo, alguns ficaram em dúvida e nos enviaram as respostas das sentenças numéricas, porém, falamos para a turma que não queríamos as respostas, mas, sim, que criassem uma história em que envolvesse essa sentença numérica. Alguns falaram que agora é que tinham entendido o que era pra fazer, solicitamos que os alunos criassem um problema por vez, pois iríamos trabalhar os problemas criados. Passou-se o tempo que fornecemos para que eles elaborassem o problema. Vejamos alguns problemas que os alunos criaram.

Figura 50 - Problemas elaborados pelos alunos A9, A10, A11 e A12



Fonte: Acervo da autora.

Na Figura 50, temos 4 problemas elaborados pelos alunos, nos quais só fornecemos a sentença de $18 + 12 = \square$. Como participaram do encontro 19 alunos, foram elaborados 19 problemas, cada um com uma história diferente. De acordo com Jurado (2016), a criação de problemas está ligada com a resolução de problemas, e apresenta um grande potencial no ensino e aprendizagem da matemática. Após os alunos elaborarem esse primeiro problema, solicitamos que eles falassem para os colegas os seus problemas, depois que todos falaram seus problemas, iniciamos um diálogo.

PP: Foi difícil elaborar o problema?

A7: No início foi, tia, eu tava resolvendo a conta.

A8: É ruim de pensar numa história, é mais fácil resolver contas.

PP: Vamos discutir alguns problemas. Como todos foram feitos a partir da sentença, eles têm a mesma ideia.

A2: Tá certo, professora.

PP: O problema da aluna A11, como vocês resolveriam?

A7: Juntando 18 mais 12, dá 30, professora.

PP: Alguém fez diferente?

A1: Fiz do mesmo jeito, dá 30.

PP: Se na hora que Joana foi juntar as bonecas com Pâmela percebeu que havia contado errado e, na verdade, ela não tinha 18 bonecas, mas, sim, 14, se fosse juntar as bonecas de Joana e Pâmela, quantas bonecas teriam no total? Vou deixar vocês pensarem.

A19: Já fiz, professora.

PP: Como você pensou?

A19: Fiz assim, eu já tinha achado 30 bonecas, quando juntei 18 e 12, aí eu só tirei 4 de 30, aí deu 26 bonecas.

PP: Alguém fez diferente?

A8: E tirei 4 de 18, aí deu 14, aí juntei 12, aí deu 26.

PP: Alguém mais fez diferente?

A3: O meu deu 26 também, fiz do jeito de A8.

PP: O problema do aluno A12, como vocês resolveriam?

A6: Fácil, professora, junto 18 e 12, dá 30 reais.

PP: E se eu tenho 18 reais em moedas de 1 real e meu primo tem 12 reais de moedas de 1 real, e iremos juntar as moedas para trocar no supermercado, sabendo que ganhamos 0,10 centavos a cada 3 reais em moedas, quanto receberemos no total após a troca? Vou deixar vocês pensarem.

A8: Dá trabalho, professora, já deu preguiça.

PP: Tente fazer, deixe a preguiça de lado.

A9: Já fiz o meu deu, 31 real.

PP: Como você fez?

A9: Quando junto 12 e 18, dá 30, aí já dá 30 reais, aí 3 moedas ganho 10 centavos, desenhei as moedas de três até chegar em 30, e fui somando os 10 centavos, aí deu 1 real.

PP: Alguém fez diferente?

A7: Não consegui fazer, tá muito difícil.

PP: Alguém mais conseguiu fazer?

A8: Eu desenhei todas as moedas e liguei três moedas a uma de 10 centavos, aí deu 31 real.

PP: Alguém mais consegui fazer?

A3: Estou com dificuldade de fazer, depois que A8 disse já sei como vou fazer.

PP: E se eu tenho 18 reais em moedas de 1 real e meu primo tem 12 reais de moedas de 1 real, e iremos juntar as moedas para trocar no supermercado, porém, pedimos para que o caixa desse apenas em notas de 2 reais e de 10 reais, como eu poderia receber esse dinheiro? Vou deixar vocês pensarem.

A4: Bom, tia, acho que pode ser 2 notas de 10 reais e 5 de 2.

PP: Tem mais algum jeito de receber esse troco?

A8: Uma nota de 10 reais e 10 de 2.

PP: Alguém pensou de outra forma?

A11: Dá pra receber tudo de 10, aí é 3, e tudo de 2 aí dá 15.

PP: Aluno A11, não podemos fazer dessa forma, pois temos que ter notas de 2 reais e de 10.

A8: Então, só pode de 2 jeitos.

Após a discussão da primeira sentença com os respectivos problemas criados pelos alunos, solicitamos que eles elaborassem, agora, um problema para a sentença “b”.

Percebemos, nos problemas formulados inicialmente pelos alunos, que eles fizeram igual à primeira sentença, só que falamos para eles que a sentença “b” era diferente, pois não havia a quantidade inicial para ser somada.

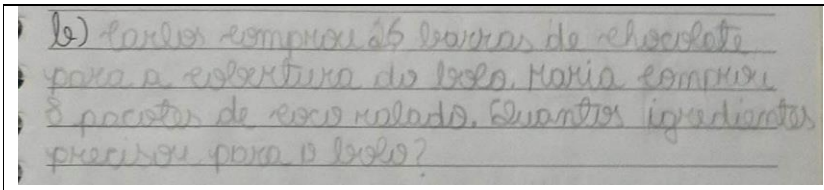
PP: Todos conseguiram elaborar o problema?

A8: Estou terminando, professora.

PP: Quem conseguiu e gostaria de compartilhar o problema conosco?

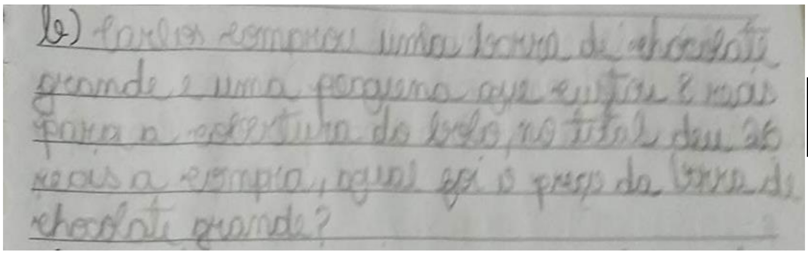
Vários alunos falaram seus problemas, porém identificamos que alguns dos problemas não estavam de acordo com a sentença numérica em questão. Logo, colocamos o problema no slide e solicitamos ajuda dos outros alunos para tentar organizar as ideias do problema, antes perguntamos se o aluno gastaria que os colegas o ajudassem, ele falou que seria muito boa a ajuda.

Figura 51 - Problema Inicial e Final elaborado por A12



b) Carlos comprou 26 barras de chocolate para a cobertura do bolo. Maria comprou 8 pacotes de coco ralado. Quantos ingredientes precisou para o bolo?

Problema Inicial de A12



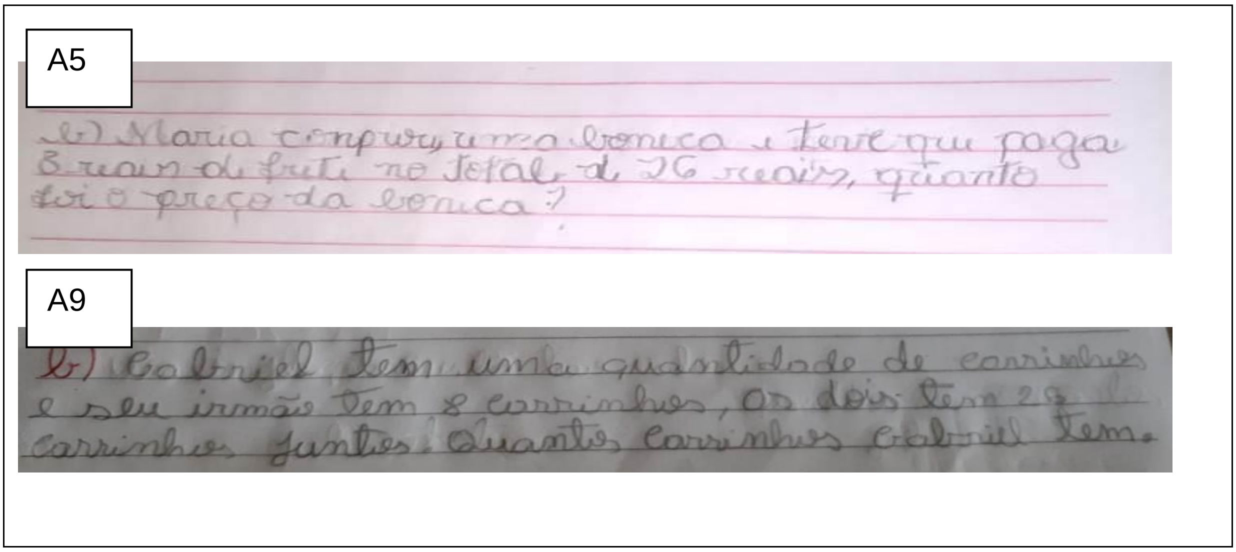
b) Carlos comprou uma barra de chocolate grande e uma pequena que custou 8 reais para a cobertura do bolo, no total deu 26 reais a compra, qual foi o preço da barra de chocolate grande?

Problema Final de A12

Fonte: Acervo da autora.

Observando a figura 51, percebemos que, no problema inicial de A12, havia erros na história que o aluno criou, e, se prestarmos bem atenção, esse problema inicial consistia no mesmo princípio da sentença “a”, somar 26 mais 8, logo, os colegas o ajudaram a refazer o problema de acordo com a sentença “b”, e o aluno A12 chegou no seu Problema Final. Vejamos, agora, outros problemas elaborados pelos alunos. É importante salientar que, conforme Silveira (2016), o trabalho com a proposição de problemas estimula o aluno a pensar, e a buscar interpretar a realidade que está sendo descrita.

Figura 52 - Problemas elaborados pelos alunos A5 e A9



Fonte: Acervo da autora.

Observando a figura 49, percebemos que os alunos A5 e A9 criaram um problema que correspondia à sentença $\square + 8 = 26$. Temos histórias diferentes, porém, que chegam a uma mesma resolução. Todos os alunos falaram os problemas que haviam elaborado. Selecionamos alguns para explorarmos. Como todos os problemas eram baseados na sentença numérica que nós fornecemos, não faria sentido, e também não teríamos tempo para explorar todos os problemas criados.

PP: Como vocês resolveriam o problema de A5?

A7: Deixe um tempo para gente pensar, professora.

PP: Certo.

PP: A5, você conseguiu resolver o problema?

A5: Sim, professora, eu fiz assim: 8 mais que valor dá 26, aí fui testando, aí deu certo: 18.

PP: Alguém pensou diferente?

A9: Eu fiz assim, 26 tirei 8, aí deu 18.

PP: Alguém mais fez diferente?

A5: O meu deu 18.

PP: Como você fez?

A5: Tirei 8 de 26.

PP: Se Maria tivesse comprado duas bonecas pagando um frete de 8 reais, sabendo que as bonecas com o frete ela pagou 26 reais, quanto custou cada boneca? Pensem um pouco.

A2: Professora, ela pagou dois fretes de 8?

PP: Não, foi só um frete para as duas.

A7: Acho que é 9.

PP: Como você pensou para chegar nesse 9?

A7: Peguei 26, tirei 8, aí deu 18 das duas bonecas, aí dividi por 2, deu 9.

PP: Alguém mais fez?

A18: Eu fiz assim, na outra questão deu 18 pra uma boneca, aí dividi por 2, deu 9.

A12: O meu deu 9.

A4: O meu também.

PP: Como vocês fizeram?

A12: Igual a A18.

A4: Eu também.

Com a discussão do problema proposto, finalizamos o sétimo encontro. Foi bem proveitoso ver os alunos, agora, assumindo o papel de propositores de problemas. Nessa perspectiva, como Chica (2001) nos diz, eles deixam de ser apenas resolvedores e passam a ser propositores de problemas, utilizando sua língua materna para escrever as histórias nas quais utilizam sua imaginação e criatividade.

5.8 Oitavo Encontro – 15/02/2021 – 2 aulas de 50 minutos

O objetivo deste oitavo encontro foi propor problemas que envolvam a Operação de Subtração com suas respectivas ideias e conceitos através de Sentenças Numéricas, e o conteúdo trabalhado foi a operação de Subtração (Sentença Numérica).

Novamente, disponibilizamos o link da aula no grupo dos alunos, e aguardamos que todos entrassem. Após a entrada de todos os alunos na aula, cumprimentamos a todos, e falamos que a aula seria uma continuação da anterior, que iríamos compartilhar a letra “**c**” e “**d**” para que eles pudessem elaborar problemas através das sentenças numéricas.

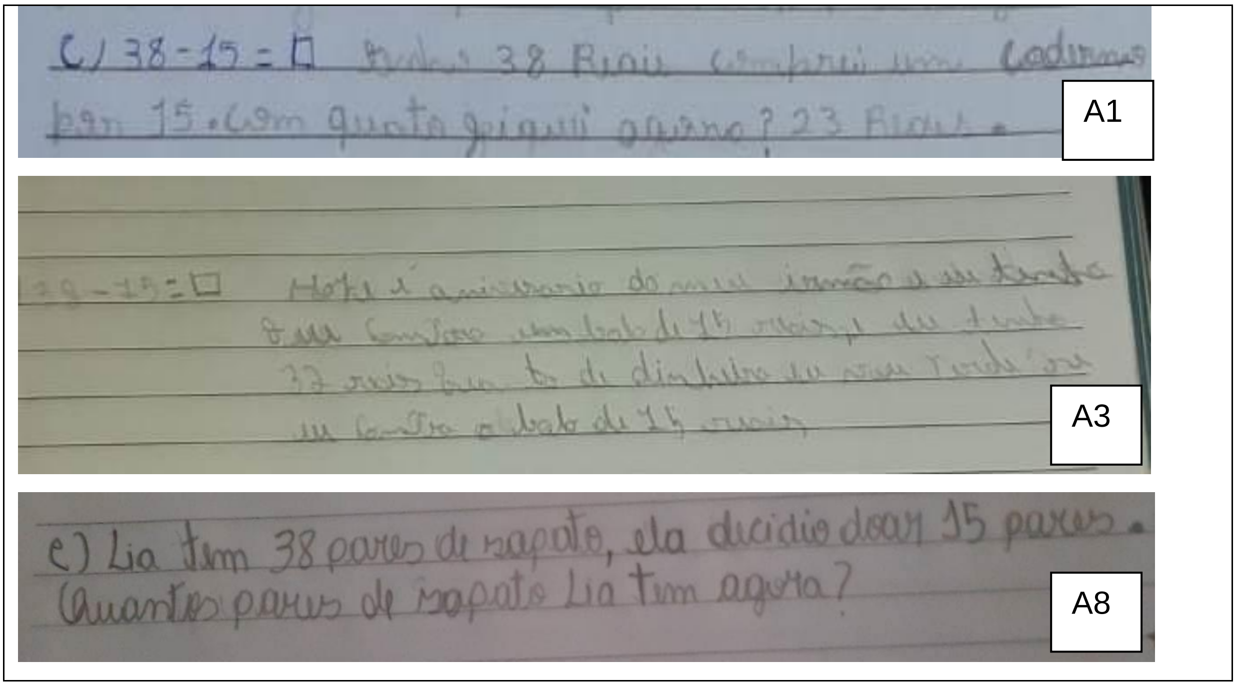
c-) $38 - 15 = \square$
d-) $\square - 26 = 12$

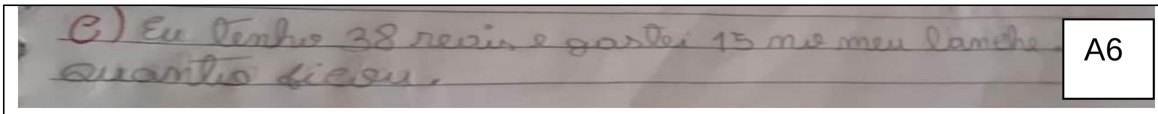
Na letra “c”, trabalhamos com a proposição de problemas, através da ideia/significado de Separação com fim oculto, já na letra “d”, com a ideia/significado de Separação com Mudança desconhecida.

Solicitamos que os alunos elaborassem primeiro um problema para a sentença de letra “**c**”, pois iríamos trabalhar do mesmo modo que fizemos no sétimo encontro. Fornecemos um tempo para que eles criassem os seus problemas, alguns alunos nos perguntaram se era pra fazer parecidos com os problemas da aula passada, falamos que seria do mesmo modo, porém, agora, não se trata mais de adições.

Após algum tempo, solicitamos que os alunos falassem os problemas elaborados, foi interessante ver a desenvoltura dos alunos ao falarem seus problemas, formularam problemas com histórias interessantes, em que muitos problemas refletem o próprio cotidiano desses alunos. Vejamos alguns dos problemas elaborados pelos alunos:

Figura 53 - Problemas elaborados pelos alunos A1, A3, A8 e A6





Fonte: Acervo da autora.

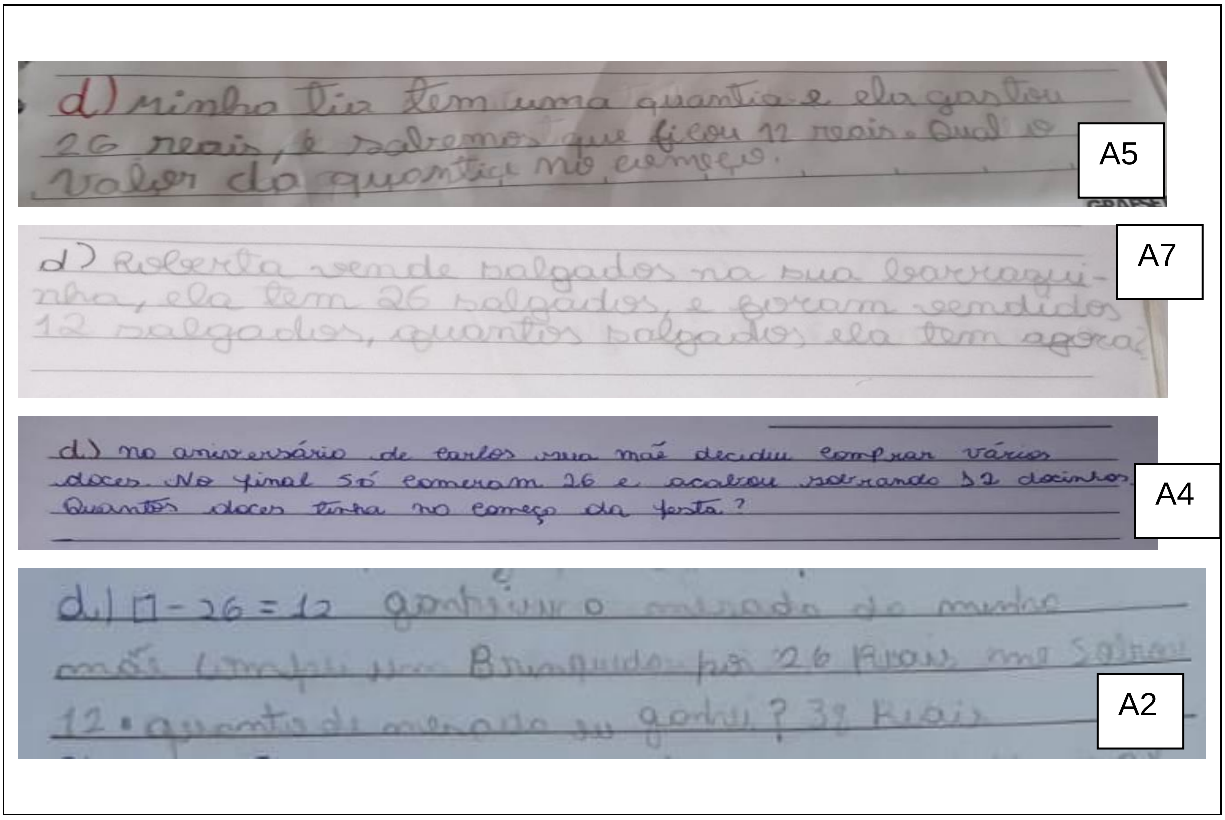
Observando a figura 53, percebemos que os alunos criaram problemas de acordo com a sentença numérica “**c**”. Foram problemas bem criativos, alguns alunos já elaboravam os problemas com suas soluções. Como foram elaborados muitos problemas, resolvemos escolher um para discutirmos. Vejamos o diálogo:

PP: Como vocês resolveriam o problema da aluna A6?
A7: Vai deixar um tempo pra gente pensar?
PP: Sim, pensem e tentem resolver.
A8: Já fiz.
PP: Como você fez?
A8: Peguei o 38 e tirei 15, aí deu 23.
PP: Alguém fez diferente?
A9: Eu fiz assim também.
Outros alunos falaram que encontram como resposta 23.
PP: Se tenho 38 reais, gastei 15 com lanche e depois comprei uma caixa de chocolate por 9 reais, quanto ainda tenho de dinheiro? V ou deixar vocês pensarem.
A12: Já fiz, o meu deu 4.
PP: Como você pensou?
A12: Peguei o que deu em 38 tirando 15, que deu 23, aí tirei 9, deu 4 de resto.
PP: Alguém pensou diferente?
A9: Eu só peguei o que deu na pergunta de antes e tirei 9, aí deu 4, quase igual a de A12, professora.
PP: Alguém mais fez diferente?
A2: O meu deu a mesma coisa, fiz do jeito deles.

Após a Exploração e Resolução do Problema do aluno A6, partimos, agora, para a elaboração de problemas que contemplassem a sentença de letra “**d**”. Fornecemos um tempo para que os alunos elaborassem os seus respectivos problemas, eles ficaram com dúvidas nesta sentença, queriam elaborar problemas no mesmo esquema do primeiro, porém falamos que a sentença “**d**” era diferente da “**c**”. Logo, uma aluna falou que, no caso, teria que fazer igual a letra “**b**”, pois o começo não tinha, falamos que era desse jeito mesmo que a colega falou.

Aguardamos um tempo para que todos elaborassem seus problemas. Após esse tempo, solicitamos que os alunos falassem os problemas que criaram. Vejamos, a seguir, alguns problemas formulados pelos alunos.

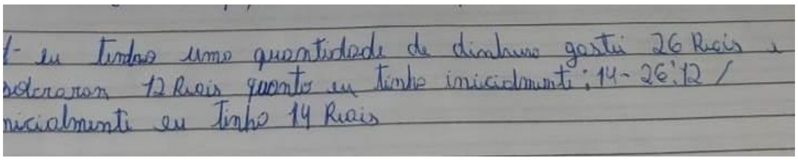
Figura 54 - Problemas elaborados pelos alunos A2, A4, A5 e A7



Fonte: Acervo da autora.

Analisando a figura 54, percebemos que a aluna A7 elaborou seu problema no formato da letra “**c**”**,** em que o desconhecido era o resultado, já na sentença da letra “**d**”**,** como já foi mencionado, o desconhecido era o valor inicial, logo, sugerimos que poderíamos melhorar o problema da aluna A7. Colocamos o problema dela no compartilhamento de tela e solicitamos aos colegas que ajudassem a deixar o problema de acordo com a sentença, logo, os colegas começaram ajudar, e o problema da aluna A7 foi corrigido, ficando da seguinte forma: *Roberta vende salgados em sua barraquinha. Ela vendeu 26 salgados, e ainda tinha sobrado 12. Quantos salgados ela tinha no início?* Observando os problemas dos alunos A2, A4 e A5, todos foram criados conforme o que foi pedido, criaram histórias envolvendo dinheiro e doces, os outros problemas elaborados pelo resto da turma também foram bem criativos. Após os alunos falarem seus problemas, e ajudarem a consertar os problemas dos colegas, solicitamos que cada um resolvesse seus problemas.

Figura 55 - Resolução do Problema criado pelo aluno A11

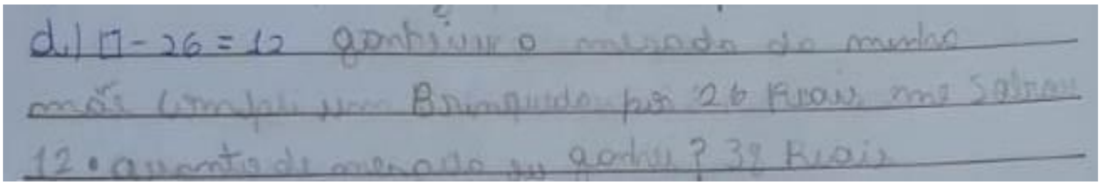


1- eu tinha uma quantidadi de dinheiro gastei 26 Reais e sobraram 12 Reais quanto eu tinho inicialmenti; 14-26:12 /
inicialmenti eu tinho 14 Reais

Fonte: Acervo da autora.

Analisando a resolução do problema que A11 fez, percebemos que ele colocou como valor inicial o 14, pois, no pensamento dele, 14 mais 12 daria 26, logo, ele não resolveu corretamente o seu problema.

Figura 56 - Resolução do Problema criado pelo aluno A1



d.) □ - 26 = 12

Brinquedo por 26 Reais

38 Reais

Fonte: Acervo da autora.

Observando a figura 56, percebemos que o aluno chegou ao valor correto, o 38, porém, como ele só colocou o resultado, perguntamos como ele havia pensado para, então, chegar àquela solução. Ele falou que somou 26 mais 12, que deu 38, depois, fez 38 menos 26, que deu 12. Notamos, então, que ele usou, para resolver o problema, a operação de adição e, para confirmar a resposta, uma operação de subtração. O resto da turma falou como fez suas resoluções, alguns resolveram conforme o aluno A11, e outros como o aluno A1. Indagamos os alunos com as respostas apresentadas por eles para os problemas, até que eles chegassem na solução correta, que seria o 38, assim, finalizamos o oitavo encontro, falamos para os alunos que, no próximo encontro, iríamos trabalhar, agora, com a operação de multiplicação.

Para o desenvolvimento dessa aula, nos fundamentamos na estratégia de Jurado (2016) para a criação de problemas. Na primeira fase, os alunos criaram problemas a partir de um problema inicial; na segunda fase, os alunos apresentaram os problemas criados; na terceira fase, resolveram os problemas criados, a criação foi feita individualmente, porém, para os problemas que não estavam de acordo com o problema inicial, fizemos uma criação de problemas em grupos com o intuito de ajudar os colegas com dificuldades; na última etapa, os alunos socializaram suas soluções, para possíveis questionamentos e iniciamos uma discussão com a turma.

5.9 Nono Encontro – 22/02/2021 – 2 aulas de 50 minutos

O objetivo deste nono encontro foi propor e explorar problemas que envolvam a Operação de Multiplicação com suas respectivas ideias e conceitos através de Sentenças Numéricas, e o conteúdo trabalhado foi a operação de Multiplicação (Sentença Numérica).

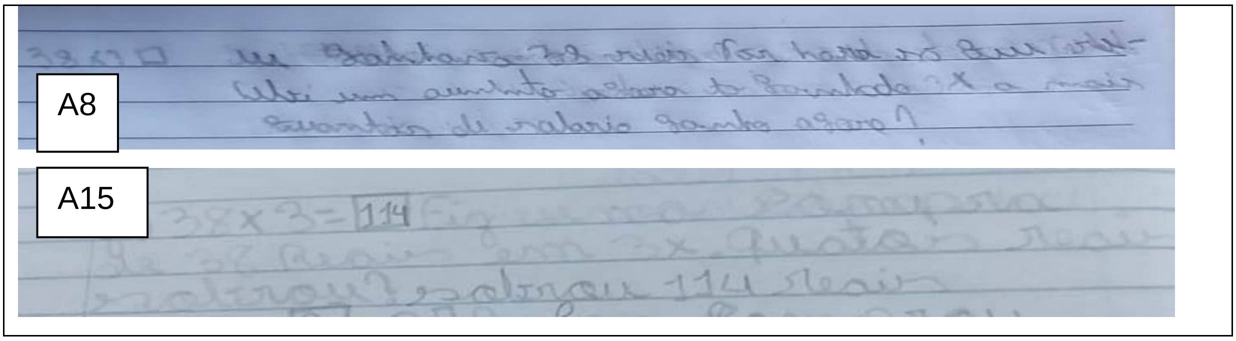
Novamente, postamos o link da aula no grupo dos alunos e aguardamos todos entrarem. Após isso, perguntamos aos alunos se lembravam do que havíamos dito na aula anterior, isto é, sobre o que iríamos estudar neste nono encontro. Alguns falaram que não lembravam, já outros mencionaram a Operação de Multiplicação, logo, explicamos que essa aula seria como as outras: iríamos colocar uma sentença numérica para que eles elaborassem problemas, com base nesta sentença.

e-) 38 x 3= $\square$

Nesta letra “e”, a ideia/significado trabalhada foi a de grupos iguais na multiplicação, a ideia intuitiva da multiplicação.

Fornecemos um tempo para que os alunos elaborassem seus respectivos problemas. Após passado um tempo, solicitamos que os alunos lessem seus problemas, alguns mencionaram que tiveram dificuldades em elaborar os problemas, pois pensar e criar uma história com essa sentença não é uma tarefa fácil.

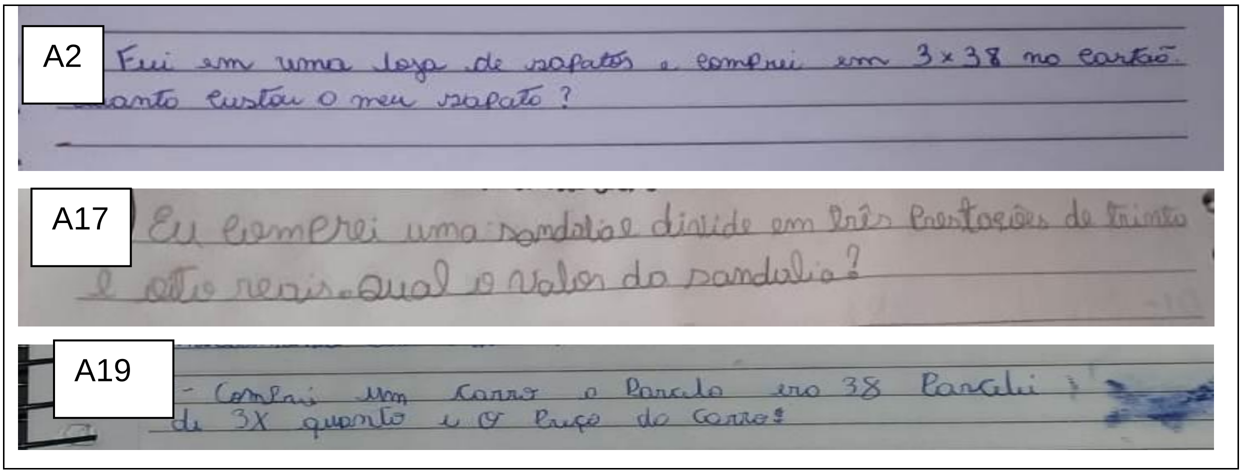
Figura 57 - Problemas elaborados pelos alunos A8 e A15



Fonte: Acervo da autora.

Analisando a figura 57, percebemos que os alunos A8 e A15 obtiveram dificuldades na hora de elaborar os problemas com a sentença fornecida. No problema de A8, o indagamos: quando você pergunta quanto de salário ele ganha agora, seria por mês, semana? Você não deixou claro no seu problema, você falou que ele passou a ganhar 3 vezes o que ganhava, que, no caso, em uma hora, ganhava-se 38 reais. Desse modo, pedimos aos colegas para o ajudarem a arrumar seu problema. Já o problema de A15 estava de acordo com a sentença, porém, a pergunta que o aluno fez de “quantos reais sobrou” não ficou de acordo com o enunciado do seu problema. Solicitamos que os colegas também o ajudassem a arrumar seu problema. Observamos que foram muitos alunos que não conseguiram formular o problema corretamente.

Figura 58 - Problemas elaborados pelos alunos A2, A17 e A19

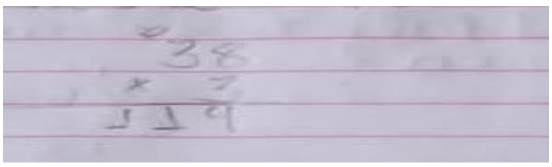


Fonte: Acervo da autora.

Observando a figura 55, percebemos que os alunos elaboraram corretamente de acordo com a sentença numérica que fornecemos. Notamos que a maioria dos problemas tinha uma história de compras parceladas e que se queria sempre saber o preço do objeto em questão.

Após criados os problemas, solicitamos que os alunos resolvessem seus problemas, para, depois, iniciarmos uma discussão acerca de alguns problemas, pois, como foram elaborados 19 problemas, não exploramos todos, haja vista que o tempo era curto para explorar os problemas de toda a turma.

Figura 59 - Resolução do Problema do aluno A17



Fonte: Acervo da autora.

Analisando a figura 59, percebemos que o problema do aluno A17 foi resolvido por meio de uma operação de multiplicação, na qual o aluno armou a conta e a efetuou por meio do Algoritmo usual da multiplicação. Alguns alunos não conseguiram resolver seus problemas, pois os discentes tinham dificuldades em multiplicações. Esses alunos nos falaram, via WhatsApp, que não compreendiam bem a operação de multiplicação. Desse modo, iniciamos um diálogo com os alunos:

PP: Todos conseguiram resolver seus problemas?

A9: Eu sim, professora.

A1: Eu não consegui, já falei pra senhora no WhatsApp.

PP: Bom, como vocês resolveriam o problema de A2? Por favor, A2, leia seu problema novamente.

A2: certo, professora.

O aluno A2 leu seu problema, com calma para que os colegas entendessem.

PP: Agora, tentem resolver o problema. Vou dar um tempo para vocês resolverem.

A5: Já fiz, o meu deu 114.

PP: Como você pensou?

A5: Eu repeti 3 vezes o número 38 e, depois, somei. Pra mim, é mais fácil a conta de mais do que de multiplicar.

PP: Alguém fez diferente?

A8: Eu armei a conta e deu 114.

PP: Vamos supor que vou comprar uma sandália e vou parcelar o valor dela. Sabendo que a sandália custa 160 reais e quero parcelar em parcelas de 20 reais, determinem a quantidade de parcelas. Vou deixar vocês pensarem um pouco e tentarem resolver.

A7: É pra fazer 160 vezes 20?

PP: Leia o problema com atenção, A7.

A8: Já fiz, deu 8 parcelas.

PP: Como você pensou?

A8: Fiz 160 dividido por 20, aí deu 8.

A12: Fiz assim também, prof.

PP: Alguém pensou diferente?

A18: Eu fui ver qual número eu multiplico por 20 pra dar 160, aí achei 8.

A9: Eu não consegui fazer de jeito nenhum.

PP: Você tentou de quais formas?

A9: Tentei multiplicar, aí não deu certo. Vou mandar como fiz no seu WhatsApp.

Para ir além da Proposição, exploramos alguns problemas com o intuito de criar novas situações. Segundo Andrade (2017), o foco de ir mais fundo não se limita apenas a solucionar o problema. Nesse sentido, havíamos solicitado que eles elaborassem o problema e, depois, resolvessem, logo, houve a necessidade de trabalharmos, também, com a exploração de problemas.

O aluno enviou sua resposta e percebemos que ele fez sua resolução utilizando o algoritmo usual da multiplicação, porém, não conseguiu resolver, pois o aluno demonstrou não dominar a operação de multiplicação. Assim, finalizamos o nosso nono encontro. Notamos inúmeras dificuldades dos alunos ao se depararem com problemas e sentenças numéricas que envolvem a operação de multiplicação.

5.10 Décimo Encontro – 01/03/2021 – 2 aulas de 50 minutos

O objetivo deste décimo encontro foi propor e explorar problemas que envolvam a Operação de Divisão, com suas respectivas ideias e conceitos através apenas das operações dadas, e o conteúdo trabalhado foi a operação de Divisão (Sentença Numérica).

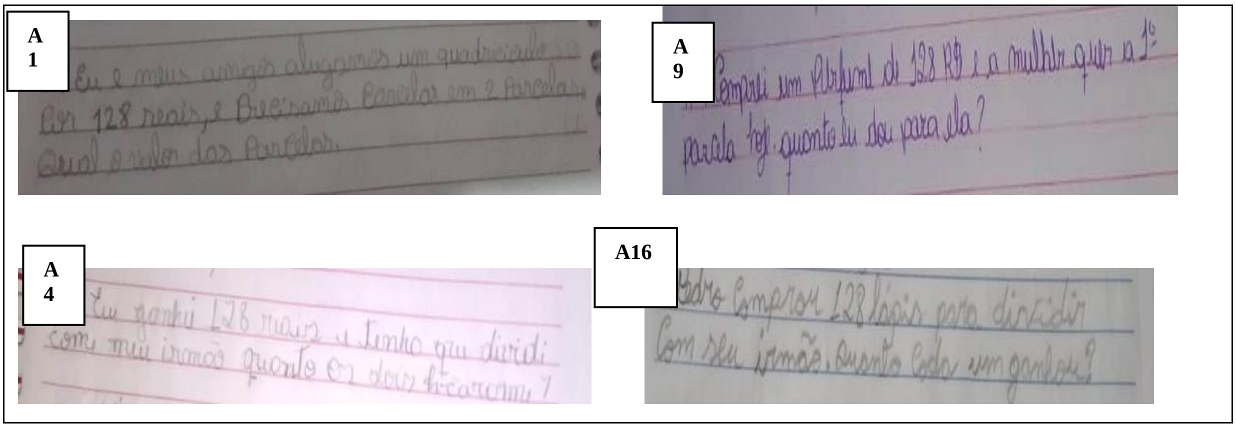
Inicialmente, postamos o link no grupo dos alunos, aguardamos a entrada de todos na aula, cumprimentamos a todos, e explicamos que, neste encontro, iria ser trabalhado a operação de Divisão. Muitos não gostaram do conteúdo, alegando dificuldades nessa operação. Nessas condições, mencionamos que, como foi feito nos outros três encontros anteriores a esse, eles iriam propor os problemas, só que, dessa vez, eles iriam nos enviar seus respectivos problemas e nós iríamos fazer uma troca, por exemplo, o aluno A3 iria resolver o problema de A6, e assim por diante. Pedimos que eles não se identificassem ao enviarem os problemas.

f-)128 : 2 = $\boxed{}$

Nesta sentença, o enunciado criado deveria ter, em si, a ideia/significado de dividir partes iguais, ideia partitiva da operação de Divisão.

Compartilhamos, no slide, a sentença numérica “**f**”, para que os alunos elaborassem os problemas e nos enviassem. Fornecemos um tempo para que eles criassem os problemas. Vejamos alguns dos problemas elaborados pelos alunos:

Figura 60 - Problemas elaborados pelos alunos A1, A4, A9 e A16



Fonte: Acervo da autora.

Observando a figura 60, temos alguns dos problemas elaborados pelos alunos. Percebemos que, na elaboração desses problemas, com base na sentença numérica "**f**", os alunos foram mais ágeis, rapidamente, nos enviaram seus respectivos problemas. Alguns ainda demoram elaborar, mencionaram que estavam sem ideia, aguardamos mais uns instantes para que eles criassem os problemas. Após todos elaborarem seus problemas, enviamos, aleatoriamente, os problemas para os alunos, a fim de que eles não resolvessem seus próprios problemas, mas, sim, o de algum colega. Solicitamos que cada um lesse o problema que havia pegado e que, agora, iriam tentar resolver o problema. Fornecemos um tempo para eles, alguns conseguiram resolver rapidamente seu problema, outros, como tinham dificuldades na operação de divisão, demoraram mais um tempo, outros resolveram mentalmente e não realizaram cálculos com o algoritmo da divisão. Todos falaram suas respectivas respostas. Assim, tomamos o problema do aluno A4, mostrado na figura 57, para explorarmos um pouco mais, a fim de não ficar apenas no resultado, para gerar possíveis reflexões nos alunos. Logo, iniciamos um diálogo:

PP: Bom, pessoal, tentem resolver o problema de A4.

Colocamos o problema de A4 na tela do computador, para que todos pudessem ler e, consequentemente, resolver, porém, o aluno que havia pegado o problema já havia o resolvido. Pedimos para que ele ficasse em silêncio, a fim de que os colegas tentassem resolvê-lo.

A7: Tia, posso resolver de cabeça?

PP: Fiquem à vontade para resolver da forma que considerarem melhor.

A7: Tá bom.

A9: Já fiz.

PP: Como você resolveu?

A9: Eu dividi 128 por 2, aí deu 64.

PP: Você fez mentalmente ou realizou algum cálculo?

A9: Eu montei a conta e resolvi.

A10: Fiz, professora, também.

PP: Como você fez?

A10: Montei a conta, aí deu 64.

PP: E se eu tivesse que dividir 256 chocolates para os alunos de uma escola, sabendo que cada aluno recebeu 8 chocolates, quantos alunos receberam os chocolates?

A5: Eita, prof, agora, sei não fazer não.

PP: Leia o problema com atenção, A5.

A8: Professora, é pra dividir 256 por 8 é?

PP: Observe o problema e veja se seria isso mesmo.

A8: Eu acho que é sim, tem 256 chocolates no total, cada um ganhou 8, é só dividir.

PP: Vou fornecer mais tempo pra vocês resolveram.

A8: Eu já fiz o meu, deu 32.

PP: Como você fez?

A8: Eu montei a conta de 256 dividido por 8, e fui fazendo a divisão.

A10: O meu deu 34, professora.

PP: Analise novamente o problema e veja se é isso mesmo.

A9: O meu de 32, fiz igual a A8.

A12: Eu também.

Através da troca de problemas, os alunos puderam ver diferentes problemas criados apara aquela determinada sentença numérica. Segundo Chica (2001), a proposição de problemas tem um caráter importante, pois os alunos precisam usar de toda sua criatividade para produzirem os enunciados dos problemas que façam sentido para o leitor, ligando, assim, conceitos matemáticos com a língua materna.

Com base na resolução dos alunos que nos enviaram via WhatsApp, neste problema, percebemos que alguns resolveram de forma incorreta. Foi quase a terça parte dos alunos que não tiveram êxito na resolução do problema, até fizeram um textinho no final da atividade argumentando que tinha dificuldades na operação de divisão desde o fundamental - Anos Iniciais. Finalizamos, então, nossa décima aula. Percebemos, neste encontro, que elaboraram o problema mais rápido, porém demoraram na resolução.

5.11 Décimo Primeiro Encontro – 08/03/2021 – 2 aulas de 50 minutos

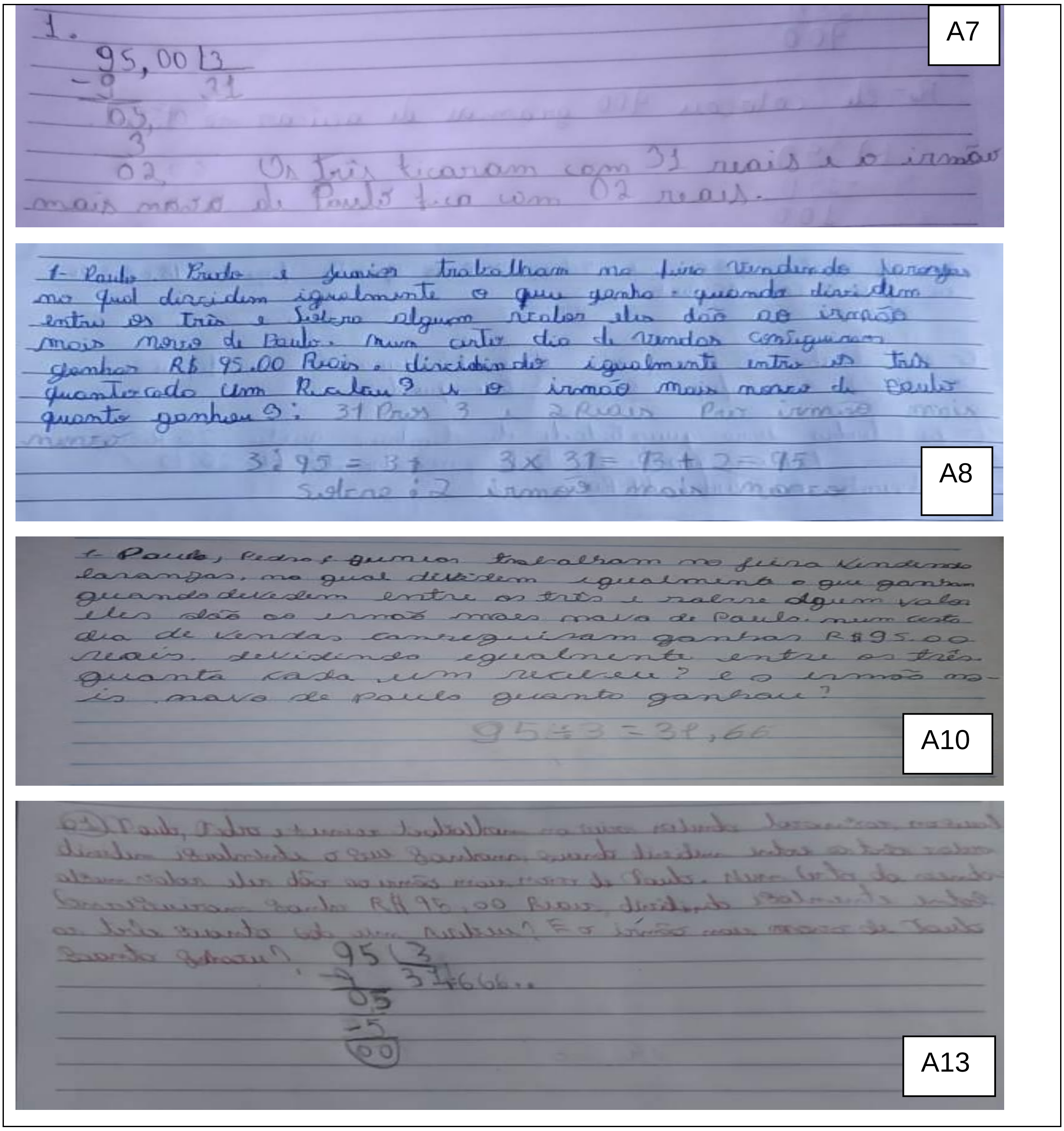
O objetivo deste décimo encontro foi mediar a exploração e resolução de problemas em situações que envolvam a operação de divisão com o resto diferente de zero, e o conteúdo trabalhado foi a operação de Divisão com o resto diferente de zero.

Novamente, postamos o link do encontro no grupo dos alunos e aguardamos todos entrarem para iniciarmos. Quando todos entraram, cumprimentamos a turma e mencionamos que, na aula de hoje, nós compartilharíamos os problemas para que eles lessem e tentassem resolver. Vejamos, a seguir, o primeiro problema trabalhado neste encontro:

1- *Paulo, Pedro e Junior trabalham na feira vendendo laranjas. Eles dividem igualmente o que ganham. Quando dividem entre os três e sobra algum valor, eles dão ao irmão mais novo de Paulo. Num certo dia de vendas, conseguiram ganhar R$ 95,00 reais. Dividindo igualmente entre os três, quanto cada um recebeu? E o irmão mais novo de Paulo quanto ganhou?*

Compartilhamos o problema 1 e fornecemos um tempo para que eles lessem com atenção e tentassem resolvê-lo. Muitos alunos ficaram em dúvida com relação ao enunciado do problema. Assim, solicitamos que eles lessem novamente e prestassem mais atenção. Se passou o tempo fornecido e eles pediram mais um pouco de tempo, então, aguardamos mais um pouco. Vejamos, agora, algumas soluções apresentadas pelos alunos para o problema:

Figura 61 - Processos de resoluções do problema 1 realizados pelos alunos A7, A8, A10 e A13



Fonte: Acervo da autora.

Analisando a figura 61, percebemos que o aluno A7, para chegar ao resultado da operação, montou o algoritmo da divisão e realizou o cálculo. Após isso, falou a quantidade que cada um recebeu, já o aluno A8 resolveu sem algoritmo, montou a sentença de forma incorreta colocou 3: 95, porém, chegou ao resultado correto e ele ainda fez uma prova para saber se sua resposta estava correta. Ele multiplicou o valor encontrado por 3 e somou com o que sobrou, chegando ao valor 95, que era o total que foi dividido. Os alunos A10 e A13 não perceberam que a divisão não era exata, A10 só montou a sentença numérica e A13 fez por meio do algoritmo usual da multiplicação. Após analisarmos as respostas encontradas pelos alunos, iniciamos um diálogo:

PP: Conseguiram fazer?

A9: Sim, prof.

A10: Também.

A1: Tentei, não sei se tá certo.

Outros alunos também falaram que conseguiram resolver.

PP: Como vocês pensaram para chegar na solução?

A10: Eu dividi até chegar ao zero.

PP; Então, A10, quanto cada um recebeu?

A10: 31,666....

PP: E o irmão mais novo ganhou nada não?

A10: Eita, foi mesmo, tia, me atrapalhei.

PP: 95 dividido por 3 dá uma divisão exata?

A9: Não, professora, sobra.

PP: Alguém fez diferente e gostaria de compartilhar sua solução?

A7: Fiz assim: 95 dividi por 3, montei a conta, aí deu 31 e sobrou, cada um recebeu 31 e o irmão mais novo 2.

PP: Alguém fez diferente?

A3: O meu também deu 31 e sobrou 2, tia.

PP: Se agora eles tivessem conseguido ganhar 96 reais e fosse dividir para os três, quanto cada um iria ganhar? E o irmão mais novo iria ganhar alguma coisa?

Fornecemos um tempo para que eles pensassem, passou o tempo e eles pediram para aumentar mais um pouco o tempo, então, aguardamos finalizarem.

PP: Creio que todos já encontraram a solução do problema. Alguém gostaria de falar sua solução?

A8: O meu deu 31 de novo, tia. Fiz assim: dividi 96 por 3, aí deu 31 e não sobrou nada.

PP: Você tem certeza de que realmente é 31? Analise um pouco o enunciado e sua resposta.

A8: Eita, tia, dividi errado, vou ajeitar.

PP: Alguém mais fez?

A7: O meu deu 32, eu dividi 96 por 3 aí deu 32, deu 32 para cada e o irmão pequeno ganhou nada.

PP: Qual procedimento você usou pra resolver?

A7: Não entendi, prof.

PP: Você fez algum cálculo ou fez a solução mentalmente?

A7: Montei a conta, mandei pra senhora já.

PP: Eu já vi, só pedi pra você explicar para os colegas que não viram.

A1: O meu também deu 32 e não sobrou nada.

Outros alunos argumentaram que encontraram a mesma resposta.

PP: Observando o problema inicial e esse segundo, o que vocês podem concluir?

A9: Sei não, tia.

A4; Professora, no problema 1, o menino mais novo ganhou 2 reais.

PP: Por que será que ele ganhou 2 reais?

A5: Porque sobrou.

PP: No segundo problema, sobrou alguma coisa?

A19: Não.

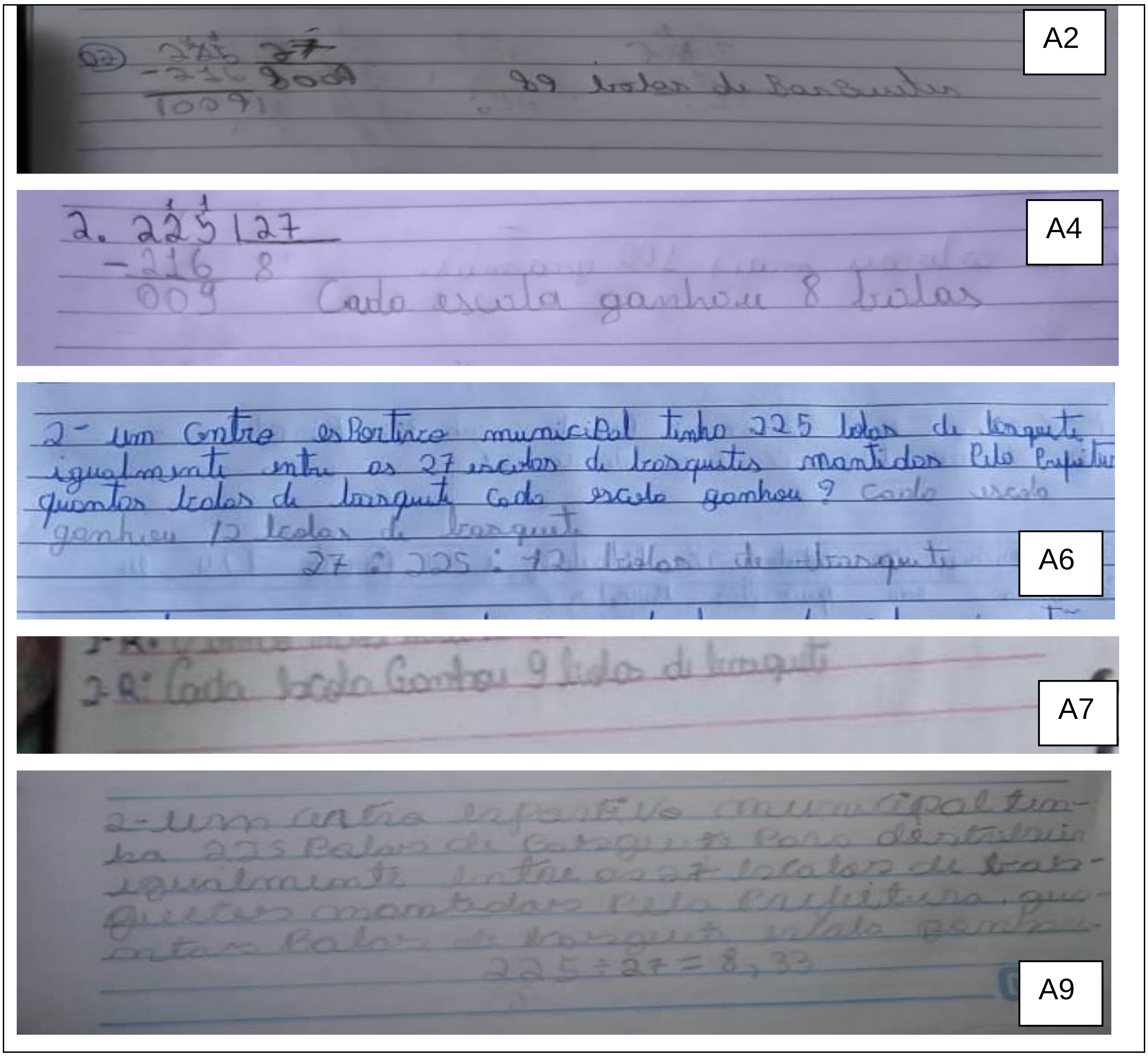
De acordo com Albuquerque (2016), é interessante, na divisão de um todo, verificar três aspectos, como: a natureza do todo, as características das partes desse todo e as características do resto. Logo, percebemos que, esse problema 1 se trata de uma divisão não exata, em que o resto é diferente de zero, e observamos que a parte do todo apresenta as características de partes iguais, e a sobra seria do irmão mais novo, no caso, o resto.

Após a resolução do Problema, juntamente com a exploração dele, após a discussão, passamos para o segundo problema e último deste encontro.

2- *Um centro esportivo municipal tinha 225 bolas de basquete para distribuir igualmente entre as 27 escolas de basquetes mantidas pela prefeitura. Quantas bolas de basquete cada escola ganhou? (Fonte: Bianchini, 2018)*

Solicitamos que os alunos lessem o problema e tentassem resolvê-lo. Para isso, fornecemos um tempo. Vejamos algumas das soluções apresentadas pelos alunos para esse problema:

Figura 62 - Resolução do Problema 2 realizados pelos alunos A2, A4, A6, A7 e A9



Fonte: Acervo da autora.

Analisando a figura 62, notamos que o aluno A2 encontrou a solução para o problema por meio do algoritmo da Operação de Divisão Usual, porém o resultado não ficou correto. Já o aluno A4 também utilizou o algoritmo usual da Divisão, e fez de forma correta, encontrando o resultado correto do problema. O aluno A6 fez sua solução por meio de uma sentença numérica, porém a fez ao contrário colocando como dividendo o número 27, também encontrou uma solução incorreta para o problema, já o aluno A7 não fez nenhum cálculo escrito, apenas colocou o resultado e também ficou incorreto, por fim, o aluno A9 fez a divisão chegando a um resultado decimal, também encontrou uma solução incorreta para o problema. Desse modo, percebemos muitos erros dos alunos neste problema, poucos conseguiram chegar ao resultado correto. Depois de analisarmos todas as respostas dos alunos, que, no caso, não foram só essas 5, mas, sim, 19, iniciamos um diálogo com os alunos:

PP: Todos conseguiram resolver o problema?
A2: Sim, professora.
A7: Eu também, só não sei se acertei.
Outros falaram também que resolveram o problema.
PP: Como vocês pensaram?
A2: Eu dividi 225 por 27, aí deu 89.
PP: Como assim, 89? Não é muito não?
A2: Eu fiz a conta, aí não dava, coloquei 8 e zeros e juntei 80 mais o resto e deu 89.
PP: Alguém fez diferente?
A9: Eu fiz assim, tia, dividi 225 por 27, deu 8 bolas e sobraram 9.
PP: Observe, A2, que, na resolução de A9, o resto não foi somado para dar o resultado.
A3: Posso falar como fiz?
PP: Pode sim.
A3: Eu fiz assim: dividi 225 por 27, aí deu 8,333..., aí coloquei 9.
PP: Tinha bolas suficientes pra você arredondar para 9?
A3: É mesmo, tia.
PP: Se você arredondou, o que aconteceu com a quantidade total de bolas?
A3: Aumentou.
PP: Alguém fez diferente?
A12: O meu dividi 225 por 27, aí deu 8,333...
PP: Você já viu alguém receber 8,333 de bolas? Você pode repartir as bolas?
A1: Pode não, tia.
A5: No caso, prof, a resposta só pode ser 8 bolas para cada escola.

Conforme Andrade (2011), foi trabalhado, nestes problemas, a resolução de problemas com o foco na exploração, em que não nos limitamos à resolução. Buscamos outros questionamentos para irmos mais fundo.

Após a resolução e exploração do problema, finalizamos o encontro. Como os problemas envolveram operação de Divisão, os alunos tiveram mais dificuldades, porém conseguiram chegar ao resultado através de nossa exploração.

5.12 Décimo Segundo Encontro – 15/03/2021 – 2 aulas de 50 minutos

O objetivo deste encontro foi explorar e mediar situações problemas que envolvam as quatro operações em expressões numéricas, e os conteúdos trabalhados foram as expressões numéricas com as operações aritméticas.

Novamente, postamos o link no grupo dos alunos, iniciamos o encontro mencionando para os alunos que este seria nosso último encontro e último dia letivo de aula referente ao ano letivo de 2020, que na próxima semana eles iriam realizar atividades para consolidar o Bimestre. Compartilhamos o problema para que os alunos pudessem ler e tentassem resolvê-lo.

1- *Daniel deseja comprar um carro que custa, à vista, 35000,00 reais. No pagamento a prazo, seu preço passa a ser 43.850 reais, sendo 6000,00 reais de entrada mais 50 prestações iguais. Sabendo que Daniel vai comprar a prazo, determine: (Fonte: Bianchini, 2018)*

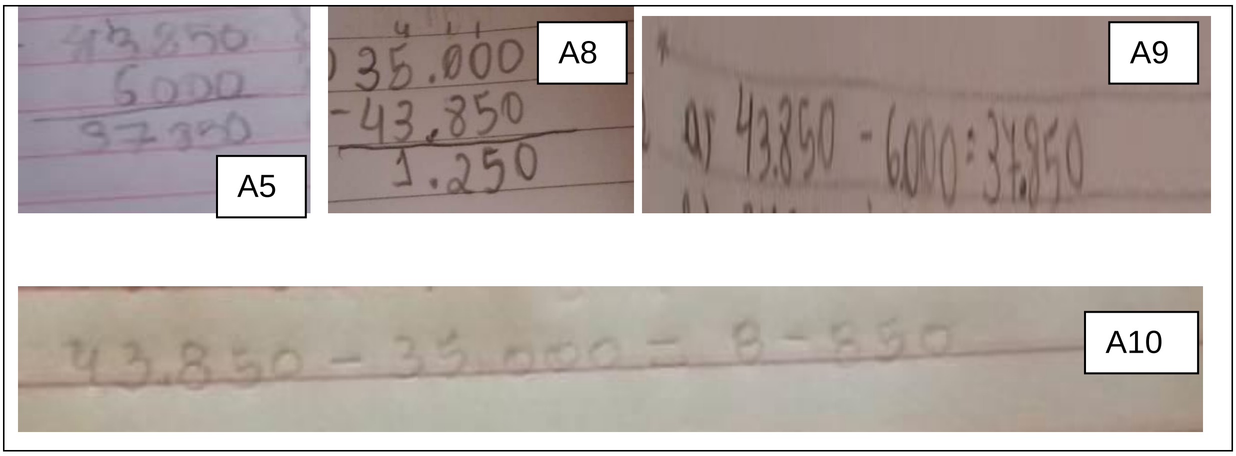
a-) A diferença entre o preço à vista e o total a prazo;

b-) O valor de cada prestação;

c-) Uma expressão numérica que dê o valor de cada prestação.

Sugerimos que os alunos resolvessem aos poucos as alternativas da questão. Resolvessem primeiro a letra “a”, para discutirmos, só depois, passassem para “b” e, por fim, a “c”. Fornecemos um tempo para que os alunos pensassem e, consequentemente, resolvessem o problema. Alguns logo perguntaram o que seria a palavra diferença no enunciado da letra “a”. Então, mencionamos um exemplo relacionando duas idades, 34 e 12. Perguntamos qual seria a diferença de idades. Então, falaram que seria 22. Vejamos algumas respostas dos alunos para a letra “a” do problema.

Figura 63 - Resolução do Problema 1 letra (a) realizados pelos alunos A5, A8, A9 e A10



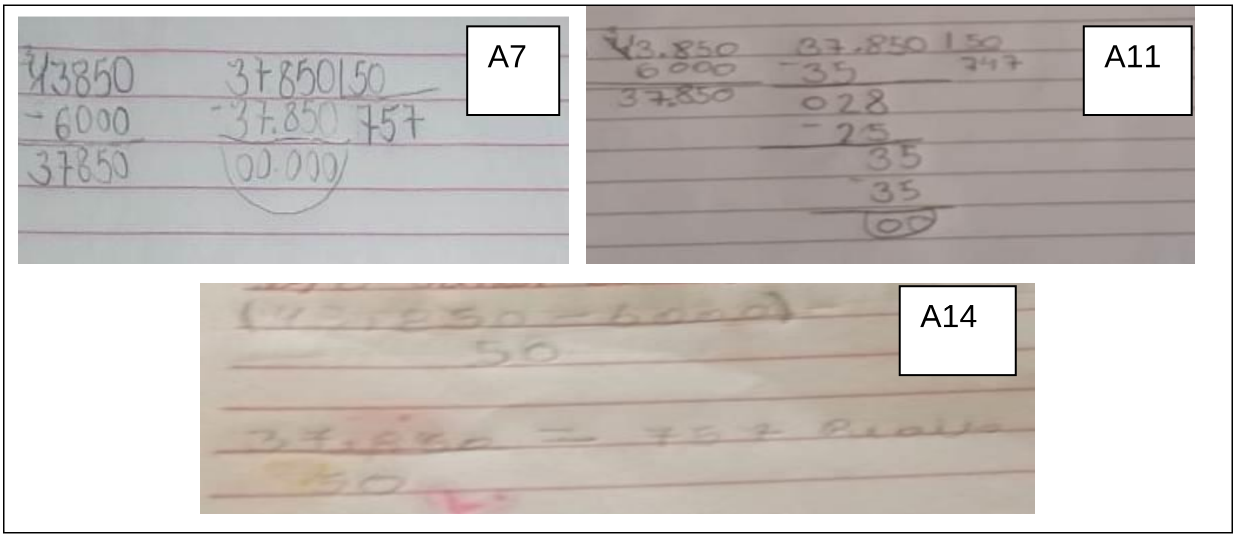
Fonte: Acervo da autora.

Analisando a figura 63, percebemos que os alunos resolveram o problema de formas diferentes, porém, apenas A10 conseguiu chegar à solução correta do problema. O aluno A5 resolveu por meio da operação de subtração e fez o cálculo utilizando o algoritmo usual da subtração. O aluno A8, por sua vez, tentou também resolver através da operação de subtração, contudo usou os dados ao contrário, pois o minuendo deveria ser o 43850 e o subtraendo o 35000, devido à essa troca, o aluno fez a resolução do problema de forma incorreta. Já os discentes A5 e A9, ao nosso ver, não compreenderam a letra “a” do problema. Após analisarmos todas as soluções dos alunos, percebemos que alguns se atrapalharam na resolução. Então, iniciamos um diálogo:

PP: Todos conseguiram encontrar alguma solução pra letra “a”?
A7: Sim, prof.
A9: Eu também.
PP: Falem como vocês pensaram.
A8: Eu fiz assim: peguei o valor a prazo, que é de 43850, e tirei o valor à vista, aí deu 8850.
PP: Alguém pensou diferente?
A9: Eu, tia, fiz assim: peguei o 43850 e tirei 6000, aí deu 37850.
PP: Esse 6000 representa o que no enunciado do problema?
A1: O valor que ele deu de entrada.
PP: O que queremos encontrar na letra “a”?
A6: Tia, a diferença do preço à vista com o a prazo.
PP: Então, como poderíamos resolver o problema?
A8: Do jeito que fiz, né, tia?
PP: Isso.

Após as soluções apresentadas pelos alunos e depois do nosso diálogo, pedimos para que eles tentassem resolver, agora, a letra “b”. Para isso, fornecemos um tempo. Vejamos algumas soluções envidas pelos alunos:

Figura 64 - Resolução do Problema 1 letra (b) realizados pelos alunos A7, A11 e A14



Fonte: Acervo da autora.

Analisando a figura 64, percebemos que os três alunos conseguiram resolver o problema através de um raciocínio parecido, porém, o aluno A11 errou o resultado, deveria ser 757, ele colocou 747, ele pode ter se atrapalhado. Notamos que, nas resoluções, os alunos, primeiro, fizeram a subtração do 43850 menos o 6000, dividiram o resultado por 50. Vejamos, agora, um pequeno diálogo acerca das soluções encontradas pelos alunos:

PP: Todos conseguiram resolver?

A19: Sim, professora.

A8: Eu consegui.

PP: Como vocês pensaram?

A3: Eu fiz assim: peguei 43850 e tirei 6000, aí deu 37850, peguei esse número e dividi por 50.

PP: Alguém pensou diferente?

A12: Eu fiz assim também.

A2: Eu também.

PP: Agora, tentem resolver a letra “c”.

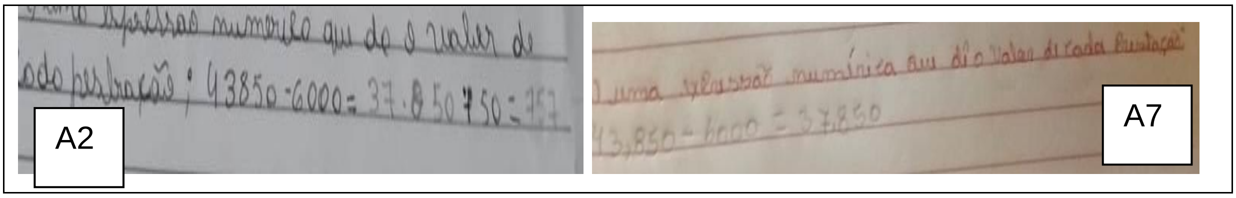
A3: Já respondemos, deu 757.

PP: Bem, a letra “c” não quer o resultado.

A1: Professora, a expressão numérica era como a gente fazia no 5º ano, tinha um monte de conta junta, aí tínhamos que resolver, né?

PP: Isso. Vou fornecer um tempo para que vocês pensem na solução.

Figura 65 - Resolução do Problema 1 letra “c” realizados pelos alunos A2 e A7



Fonte: Acervo da autora.

Analisando a figura 65, percebemos que os alunos A2 e A7 tentaram encontrar a expressão, porém fizeram contas soltas, nenhum dos alunos conseguiu chegar na expressão numérica. Logo, exploramos o problema para que eles pudessem chegar nessa expressão. Vejamos o diálogo:

PP: Vocês conseguiram resolver?

A2: Eu não consegui, é muito difícil.

A8: Eu consegui.

A9: Eu também.

PP: Como vocês pensaram?

A8: Eu fiz a conta de 43850 menos 6000 e dividi por 50, a mesma coisa, tia, da letra “b”.

PP: Bom, pessoal, vocês acham que ele encontrou uma expressão numérica?

A2: Não, tia, a expressão tem várias contas juntas para chegar em uma resposta.

PP: Certo. Como ficaria essa letra “c”?

A1: 43850 – 6000, sem o resultado.

PP: Só? Dá pra vocês encontrarem o valor da prestação que vocês mostraram na letra “b”, que foi 757?

A2: Não, tia, falta o resto.

PP: Então, como ficaria?

A8: Já sei. 43850 – 6000 : 50, agora, tá certo.

PP: Será?

A8: Pela regra da expressão numérica, resolve quem primeiro?

A2: Sei não.

A3: Nem eu.

PP: Só revisando: seria a operação de divisão ou multiplicação. Tentem resolver a expressão do colega com base nisso.

A15: Dividir logo 6000: por 50, né, tia?

PP: Isso.

A1: Deu 120.

PP: Agora, continuem.

A9: Tira de 43850 dos 120. Oxe, professora, deu um valor muito grande.

PP: Vocês encontram os 757?

A10: Não, professora, deu 43730.

PP: Como poderíamos resolver esse problema? Falem um pouco como é uma expressão numérica que vocês lembram?

A8: Um monte de conta junta.

PP: Certo, mais o que?

A7: Uns difíceis com uns negócios separando as contas.

PP: No caso, as chaves, parênteses e colchetes.

A7: Acho que é isso aí.

PP: Numa expressão com esses três símbolos, resolvemos quem primeiro?

A2: Sei não.

A9: Também não.

PP: Seria os parênteses.

A6; Eita, é mesmo.

PP: Se eu colocasse os parênteses nessa expressão 43850 – (6000 : 50)?, como vocês resolveriam?

A19: Sei não, tia.

PP: Pensem.

A1: A conta separada tia.

PP: Resolvendo, será que você encontra 757?

A12: Não, tia, a gente fez e deu um número grande, só não tinha esse negócio separando.

PP: E se eu mudasse o lugar dos parênteses, ficando assim (43850 – 6000): 50, como ficaria o resultado? Pensem.

A1: Muito fácil, tia. Faço logo o que tá separado com esse negócio que a senhora falou aí, dá 37850, aí divido por 50, aí dá 757, pronto, terminei. No caso, tia, essa é expressão numérica, trabalho da gota.

PP: Bom, pessoal, finalizamos os encontros. Gostaria de saber o que acharam das nossas aulas dessa forma?

A2: No começo, me perdi.

A7: Achei difícil, a senhora botava o problema e a gente tinha que resolver.

A9: A senhora perguntava muito sobre os problemas. Mas achei bom.

A19: Gostei de fazer problemas. No começo, foi difícil, mas consegui fazer os problemas, foram aulas diferentes.

A12: Eu já tinha estudado na outra escola esse assunto e também fiz problema, mas a senhora perguntava muito dos problemas que a gente fazia.

Conforme Ottes (2016), o trabalho com expressões numéricas por professores na educação básica não é fácil, pois os alunos acabam se perdendo em meio a tantas regras. No problema em questão que trabalhamos, formalizamos o problema por meio de uma expressão numérica para que eles pudessem encontrar o valor da parcela através de nossa mediação, pois os alunos não conseguiram sozinhos, e não lembravam das regras de resolução de uma expressão numérica envolvendo as quatro operações fundamentais.

Outros alunos falaram também suas impressões com relação às aulas. A maioria considerou difícil no início, contudo, depois consideraram as aulas interessantes, como eles falaram, aulas diferentes.

A partir de todos os encontros, percebemos uma mudança de postura dos alunos, no início apresentaram timidez, estavam meio acanhados, porém com o passar dos encontros apresentaram maiores participações, e através de nossa mediação conseguiram refletir as suas próprias soluções e não esperar o professor falar a resposta correta, buscamos sempre nossos encontros, ir além da solução do problema, com novas indagações, para assim conseguir construir os conceitos/ideias das operações aritméticas fundamentais. Finalizamos, então, nossos encontros.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante do cenário que estamos vivendo atualmente, nossa pesquisa precisou ser adaptada para essa realidade. Não foi uma tarefa fácil, tendo em vista que nossa proposta inicial era trabalhar de forma presencial com uma turma de 6º Ano, porém, não foi possível, e optamos por um plano B para executá-la. Logo, percebemos que trabalhar com o ensino remoto tem seus desafios, uma vez que há alunos que não tem acesso à internet, que possuem problemas de conexões, além de estarmos em um cenário de aula diferenciado para os alunos.

Na primeira aula, apareceram inúmeros problemas, além da internet, alunos que não queriam abrir suas câmeras, falar no microfone, contudo, nos encontros posteriores, eles foram se acostumando com a nova realidade e mudaram suas posturas. Com base no conjunto de problemas de sondagem, percebemos que os alunos possuem dificuldades acentuadas nas operações aritméticas fundamentais, tanto no entendimento do enunciado quanto na parte do algoritmo.

Durante os encontros, percebemos uma boa desenvoltura dos alunos. A maioria conseguiu solucionar os conjuntos de problemas propostos. Conseguimos explorar esses problemas com o intuito de aprofundar os conceitos/significados, para não “resolver” por “resolver”, sem um propósito bem definido.

No momento em que os alunos passaram a propor seus problemas, não estavam acostumados com essa prática, alguns preferiam fazer “contas”, ao invés de criarem problemas. De início, eles consideraram que era difícil criar um problema. Mas no decorrer dos encontros, entretanto, começaram a se familiarizar e a ter mais criatividade na elaboração dos problemas, e até ajudaram outros colegas a reformularem seus problemas.

Percebemos que muitos alunos possuem dificuldades nas operações de Multiplicação e Divisão, tendo em vista que apresentam dúvidas no algoritmo dessas operações, tanto em armar a operação quanto em como resolvê-la.

Na operação de Divisão, quando o resto é diferente de zero, os alunos apresentaram dúvidas em relação ao que fazer com o resto, mas, por meio de nossa exploração, isso ficou bem mais claro para os alunos.

Os discentes já possuíam dificuldades com as operações aritméticas fundamentais, porém, essas dificuldades ficaram mais acentuadas quando se depararam com expressões numéricas envolvendo as quatro operações. Dessa forma, os alunos apresentaram dúvidas ao interpretar o enunciado do problema. Contudo, com nossa exploração, conseguiram chegar à expressão numérica solicitada no problema, que envolvia o conteúdo de expressões numéricas com as operações aritméticas fundamentais.

Portanto, os objetivos propostos em nossa pesquisa foram alcançados, uma vez que, de certo modo, os alunos conseguiram solucionar os problemas propostos com a nossa mediação, conseguindo chegar a outras ideias/significados de cada operação aritmética. Foi interessante a troca de lugar com o aluno, ao invés do professor propor o problema, os alunos o fizeram, criaram problemas interessantes, criativos, e conseguiram adquirir autonomia para auxiliar os colegas na elaboração e na formulação de seus problemas. No final dos encontros, os alunos falaram que consideraram uma experiência nova, diferenciada e que, de início, foi complicada, porém, conseguiram participar ativamente dos encontros.

Diante do que abordamos no decorrer de nossa pesquisa, percebemos que houve uma mudança na postura dos alunos, passaram a ter mais autonomia, a refletir as suas soluções para os problemas propostos no decorrer dos encontros. Do primeiro até o décimo segundo encontro, percebemos que a participação aumentou, e que com nossa mediação, os alunos puderam construir os conceitos/ideias das operações aritméticas, sem fornecemos de forma inicial os conceitos, mas sim apenas os problemas, que trabalhavam essas ideias, destacamos assim, as contribuições que nossa pesquisa proporcionou para os alunos.

No decorrer de alguns encontros, percebemos a limitação de ter sido de forma remota, pois alguns alunos nos enviaram suas dúvidas, e consequentemente sentimos que não conseguimos ajudá-los como se estivéssemos frente a frente. Notamos que se os encontros tivessem acontecido de forma presencial, teríamos aproveitado melhor o tempo, e teríamos percebido incompreensões que de forma remota não conseguimos.

De acordo com o que mencionamos até o momento, percebemos que não foi fácil trabalhar com a metodologia Exploração, Resolução e Proposição de problemas foi uma experiência desafiadora. Percebemos durante a execução de nossa pesquisa que, realmente, alguns alunos apresentam dificuldades ao se depararem com problemas que envolvem Multiplicação e Divisão, porém, observamos, também, alunos com dificuldades nas operações que envolvem Adição e Subtração, tanto na interpretação dos problemas quanto no uso correto do algoritmo. Desse modo, concluímos que, apesar de não ser uma tarefa fácil, é possível trabalhar com a metodologia de Exploração, Resolução e Proposição de problemas, contribuindo para uma aprendizagem reflexiva de conceitos/ideiais/significados das Operações Aritméticas Fundamentais, além disso, propomos novos direcionamentos, nesse ínterim, que é o trabalho com outros conjuntos numéricos, em especial, com o conjunto dos números racionais, trabalhado nesta pesquisa de forma sucinta.

REFERÊNCIAS

ALBUQUERQUE, I. M. B. **Os números e suas operações Fundamentais:** uma discussão sobre Ensino e Aprendizagem. – Campina Grande. EDUFCG, 2016.

ANDRADE, J. **Atividades para aulas de Matemática do Ensino Fundamental:** Aprender resolvendo, resolver aprendendo. Vol. 2. João Pessoa: Ed. Universitária, UFPB, 2011.

ANDRADE, S. **Ensino-aprendizagem de matemática via exploração de problemas e o uso do laboratório de Ensino de Matemática**. XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil, UFPE, 2011.

ANDRADE, S. Um caminhar crítico refexivo sobre Resolução, Exploração e Proposição de Problemas Matemáticos no Cotidiano da Sala de Aula. *In*: ONUCHIC, L.; JUNIOR, L.; PIRONEL, M. (Orgs.). **Perspectivas para resolução de problemas**. Livraria da Física, 2017, p. 355-395.

BIANCHINI, E. **Manual do Professor**. 9.ed. São Paulo: Moderna, 2018.

BOAVIDA, A. *et al*. **A experiência Matemática no ensino** básico. Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico. Lisboa: Ministério da Educação – Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular, 2008.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação:** uma introdução à teoria e aos métodos. Tradução Maria J. Alvarez, Sara B. Santos e Telmo M. Baptista. Porto (Portugal): Porto Editora, 1994.

BOTTA, L. S. **Números racionais e raciocínio proporcional:** considerações sobre o ensino-aprendizagem. (Mestrado em Ensino e Aprendizagem da Matemática e seus fundamentos filosóficos - científicos), Rio Claro: IGCE – Campus de Rio Claro, Universidade Estadual Paulista, 1997.

BRASIL. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**. Brasília, DF: MEC, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

CARPENTER, T. *et al*. **Chapter 2**: Addition and Subtraction problem types.In author (Eds.), Children’s mathematics: Cognitively guided instruction (PP.7-14). Portsmouth, NH. Heineman, 1999.

CARPENTER, T. *et al*. **Chapter 3:** Addition and Subtraction: Children’s solution strategies. In author (Eds.), Children’s mathematics: Cognitively guided instruction (PP.15-32). Portsmouth, NH. Heineman, 1999.

CARPENTER, T. *et al*. **Chapter 4**: Multiplication and Division.In author (Eds.), Children’s mathematics: Cognitively guided instruction (PP.33-53). Portsmouth, NH. Heineman, 1999.

CARVALHO, L. *et al*. **Metodologia Científica:** Teoria e Aplicação na Educação a Distância, Petrolina- PE, 2019.

CHICA, C. H. Por que formular problemas? *In*: SMOLE, K. C. S.; DINIZ, M. I. S. V. **Ler, escrever e resolver problemas:** habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001, p. 151-173.

CUNHA, M. C. C. **As Operações de Multiplicação e Divisão junto a alunos de 5ª e 7ª séries**. (Mestrado em Ensino de Matemática). Universidade Católica de São Paulo (PUC) – SP, 1997.

DANTAS, S. F. S. **Uma análise das dificuldades apresentadas por alunos do 6º ano no uso das quatro operações fundamentais** (Monografia Curso de Licenciatura em Matemática), CES/UFCG/ Campus de Cuité- PB, 2014.

FONSECA, J. J. S. **Metodologia da pesquisa**. Curso de Especialização em Comunidades Virtuais de Aprendizagem- Informática Educativa, UECE, 2002.

FUSON, K. C. Research on Whole number addition and subtraction. *In*: GROUWS, D. A. (Ed.). **Handbook of research on mathematics teaching and learnig**. New York: Macmillan, 1992, p. 143-275.

GODOY, A. S. Pesquisa qualitativa: tipos fundamentais. **Revista de Administração de Empresas**, v. 35, n. 3, p. 20-29, 1995.

GREER, B. Multiplication and division as models of situations. *In*: GROUWS,D. A. (Ed). **Handbook of research on mathematics teaching and learnig**. New York: Macmillan, 1992. p. 276-295.

JURADO, U. M, **Craición de problemas**: su pontecialidades em La enseñanza y aprendizaje de lãs Matemátics. Cuardernos de Investigación y Formación em educación Matemática, 2016, Año 11, Número 15. pp 321 – 331. Costa Rica.

LANKSHEAR, C.; KNOBEL, M. **Pesquisa pedagógica:** do projeto à implementação. Porto Alegre: Artmed, 2008.

LOUREIRO, C. **Em defesa da utilização da calculadora:** algoritmos com sentido numérico. *In*: Educação e Matemática, nº 77, Março/Abril, 2004.

MELO, M.C.P, JUSTULIN, A.M. **Resolução de Problemas:** um caminho para o ensino da Matemática. Ens. Tecnol. R., Londrina, V.3, n-1, p.112-128, jan./jun. 2019.

MINAYO, M.C.S. **Pesquisa Social**: Teoria, Método e Criatividade. 18 ed. Petrópolis: Vozes, 2001.

MORAES, E. C. L. **Revisitando os Algoritmos para Operações Aritméticas Fundamentais**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática. Brasília, 2015.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Orgs.) **Educação Matemática**: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2005. p. 212-231.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. **Pesquisa em Resolução de Problemas:** caminhos avanços e novas perspectivas. BOLEMA: Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, SP, v. 25 núm. 41, p. 73-98, 2011.

OTTES, A. B. **Expressão Numérica:** A Hierarquia das quatro operações. (Mestrado em educação Matemática e Ensino de Física), UFSM, Santa Maria-RS, 2016.

SILVA, S.V.P. **Ideias/significados da multiplicação e divisão:** o processo de aprendizagem via resolução, exploração e proposição de problemas por alunos do 5º ano do Ensino Fundamental. (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). UEPB, Campina Grande, Paraíba, 2016.

SILVEIRA, A. A. **Análise Combinatória em sala de aula:** uma proposta de ensino-aprendizagem via resolução, exploração e proposição de problemas. (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). UEPB, Campina Grande, 2016.

SILVER, E.A. **On mathematical problem posing**. For the Learning of Mathematics, Edmonton, V. 14, p. 19 – 88, Fev. 1994.

VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade:** problemas do ensino da matemática na escola elementar. Tradução Maria Lucia Faria Moro; revisão técnica Maria Tereza Carneiro Soares. Curitiba: Ed. Da UFPR, 2009.

YIN, R.K. **Pesquisa qualitativa do início ao fim**. Tradução: Daniel Bueno; Revisão técnica: Dirceu da Silva. – Porto Alegre: Penso, 2016.

ANEXOS

ANEXO A – CONJUNTO DE PROBLEMAS 1

1- Rafael nasceu no ano de 1992 e seu irmão mais velho tem o dobro de sua idade em 2020**.**

a-) Qual a idade do irmão de Rafael no ano de 2020?

b-) Em que ano o irmão de Rafael nasceu?

2- Pedro e Paulo são irmãos, Pedro possui 18 carrinhos e resolveu guardá-los juntos com os do seu irmão Paulo, sabendo que ele tem 23 carrinhos. Quantos carrinhos os dois tem ao todo?

3- Ana tem R$ 54,00 reais. Seu irmão tem R$108,00. Quantos reais o irmão de Ana tem a mais que ela?

4- Quantos garrafões de 5 litros são necessários para engarrafar 315 litros de água? (Fonte: Giovanni, 2002)

5- Lucas é vendedor de frutos do mar, e fez uma dinâmica de sempre vender o quilo do camarão com o valor três vezes maior do que o preço do peixe albacora. O preço do quilo do peixe albacora está custando agora R$11,00 reais. Por quanto Lucas está vendendo o quilo do camarão?

6- Para pagar um fogão que custava R$563,00, Maria deu ao caixa R$600,00 reais e recebeu de troco R$37,00 reais. Como ela Pode conferir o troco? (Fonte: Adaptado de Leonardo, 2010)

ANEXO B – CONJUNTO DE PROBLEMAS 2

1- Mariana reservou $\frac{3}{5}$ do jardim para plantar rosas, ela resolveu que em $\frac{2}{3}$ desse canteiro as rosas plantadas seriam brancas. A parte do jardim ocupada pelo canteiro de rosas brancas corresponde a quanto do jardim?(Fonte: Bianchini(2018)).

2- Pedro tem 24 bolinhas de gude e seu primo tem 12 vezes a mais essa quantidade. Quantas bolinhas o primo de Pedro tem?

3- Para encher um aquário, Eduardo está usando um copo com capacidade de 0,25 litro. Nesse aquário cabem 12,5 litros. Determine quantos copos cheios de água Eduardo precisará para encher o aquário. (Fonte: Bianchini(2018))

4- Luiz e suas três irmãs receberam um terreno de herança que mede 196 m^2, e vão repartir igualmente entre os quatro. Quantos metros quadrados cada um irão receber do terreno?

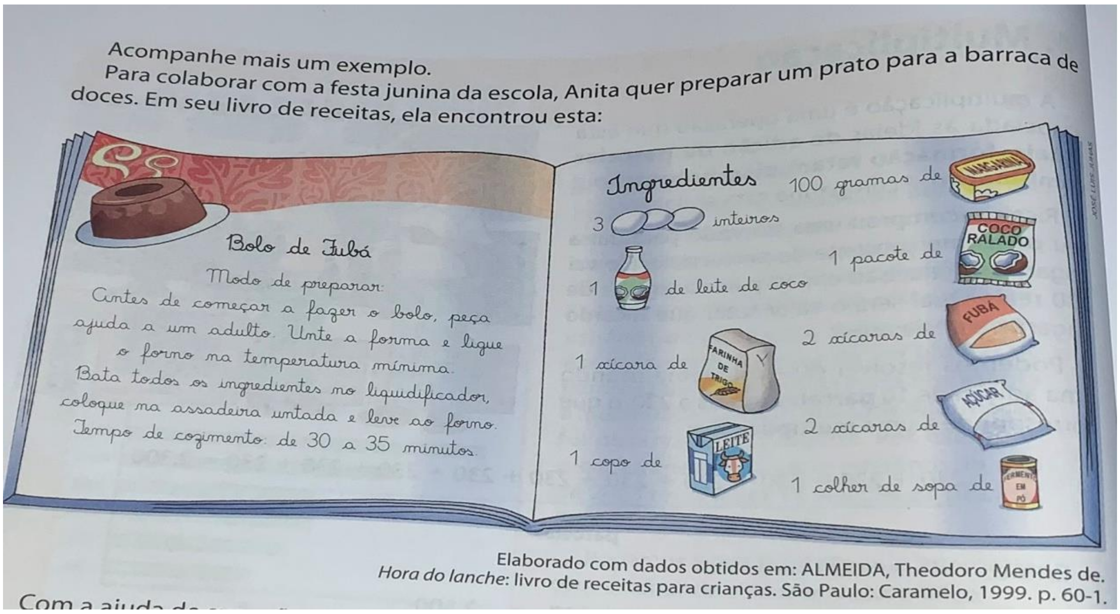
ANEXO C – CONJUNTO DE PROBLEMAS 3

1- Paulo tinha R$ 12,00 reais, ganhou R$ 50,00 de mesada de seu pai, aparou a grama da sua tia e ganhou mais R$15,00 reais. Quanto Paulo tem agora?

2- Rita tem 8 bombons. Quantos bombons ela terá que juntar a esses para ficar com 15 bombons?

3- Marcos tinha 8 canetas no caminho para a escola perdeu duas canetas. Quantas canetas Marcos tem agora?

4-



Acompanhe mais um exemplo.

Para colaborar com a festa junina da escola, Anita quer preparar um prato para a barraca de doces. Em seu livro de receitas, ela encontrou esta:

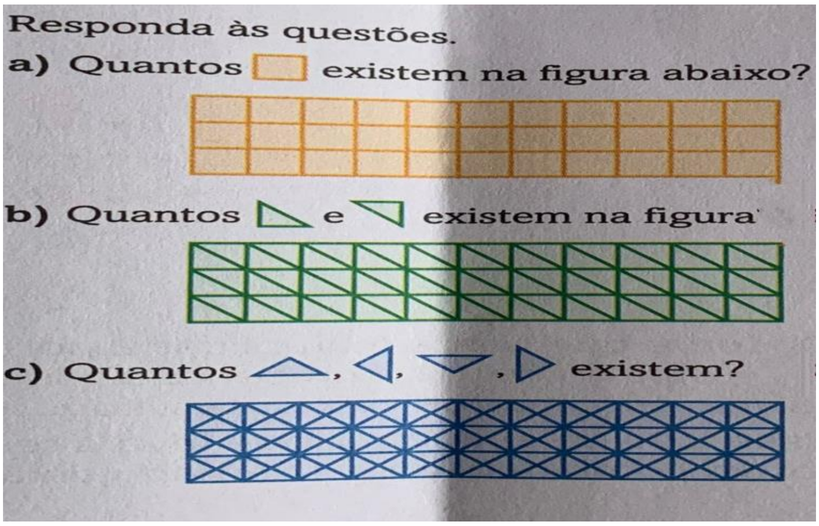
Elaborado com dados obtidos em: ALMEIDA, Theodoro Mendes de. *Hora do lanche*: livro de receitas para crianças. São Paulo: Caramelo, 1999. p. 60-1.

Com a ajuda de sua mãe , Anita fará 4 bolos. De quantos ovos ela precisará?

Fonte: (BIANCHINNI, 2006, p.52)

ANEXO D – CONJUNTO DE PROBLEMAS 4

1-



Fonte: Bianchini(2018)

2- Ao fazer uma jarra de limonada, coloquei 100 gramas de açúcar. Experimentei e não gostei. Coloquei, então, mais 50 gramas. Experimentei novamente e ainda não estava boa. Resolvi acrescentar 250 gramas de açúcar. A limonada ficou gostosa, mais muito doce. Cheguei à conclusão de que o último acréscimo de açúcar deveria ter sido apenas de 150 gramas.

a-) Quantas gramas de açúcar colo coloquei no total?

b-) Quantos gramas coloquei a mais do que o ideal para meu paladar?

Fonte: Bianchini(2018)

ANEXO E – CONJUNTO DE PROBLEMAS 5

1- Paulo tem 36 refrigerantes e quer embalados em caixas que comportam 6 refrigerantes. Quantas caixas são necessárias para que Paulo guarde todos os refrigerantes?

2- De quantas maneiras posso calçar meus pés tendo três pares de tênis e cinco pares de meias diferentes? Fonte: Bianchini (2018)

3- Fernanda tem 18 possibilidades de combinações de calças e camisetas para ir malhar, e sabe-se que ela tem 3 calças. Quantas camisetas ela tem?

ANEXO F – CONJUNTO DE PROBLEMAS 6

1- Proponha situações problemas para as seguintes operações:

a-) 18 + 12 = $\square$
b-) $\square$+ 8 = 26
c-) 38 – 15 = $\square$
d-) $\square$ - 26 = 12
e-) 38 x 3= $\square$
f-)128 : 2 = $\square$

ANEXO G – CONJUNTO DE PROBLEMAS 7

1-Paulo, Pedro e Junior trabalham na feira vendendo laranjas, no qual dividem igualmente o que ganham, quando dividem entre os três e sobra algum valor eles dão ao irmão mais novo de Paulo. Num certo dia de vendas conseguiram ganhar R$ 95,00 reais, dividindo igualmente entre os três quanto cada um recebeu? E o irmão mais novo de Paulo quanto ganhou?

2- Um centro esportivo municipal tinha 225 bolas de basquete para distribuir igualmente entre as 27 escolas de basquetes mantidas pela prefeitura. Quantas bolas de basquete cada escola ganhou?(Fonte: Bianchini, 2018)

ANEXO H – CONJUNTO DE PROBLEMAS 8

1- Daniel deseja comprar um carro que custa á vista 35000,00 reais. No pagamento a prazo, seu preço passa a ser 43.850 reais, sendo 6000,00 reais de entrada mais 50 prestações iguais. Sabendo que Daniel vai comprar a prazo, determine: (Fonte: Bianchini, 2018)

a-) uma expressão numérica que dê o valor de cada prestação;

b-) o valor de cada prestação;

c-) a diferença entre o preço á vista e o total a prazo.