UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

THAÍS SILVA ARAÚJO

A ANÁLISE REAL COMO SUBSÍDIO NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

CAMPINA GRANDE- PB
2019

THAÍS SILVA ARAÚJO

A ANÁLISE REAL COMO SUBSÍDIO NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

Produto educacional apresentado ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação matemática, pela Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática

Orientador: Prof. Dr. Silvanio de Andrade.

CAMPINA GRANDE- PB
2019

A659a Araújo, Thaís Silva.
A análise real como subsídio na formação do professor de matemática [manuscrito] / Thaís Silva Araújo. - 2019.
19 p. : il. colorido.

Digitado.

Dissertação (Mestrado em Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2019.

"Orientação : Prof. Dr. Silvanio Andrade , Especialização em Educação Matemática."

1. Números reais. 2. Análise real. 3. Formação de professor. I. Título

21. ed. CDD 371.12

Elaborada por Giulianne M. Pereira - CRB - 15/714 BC/UEPB

THAÍS SILVA ARAÚJO

O TRATAMENTO DOS NÚMEROS REAIS NA DISCIPLINA DE ANÁLISE REAL NA LICENCIATURA: UM OLHAR A PARTIR DOS LIVROS DIDÁTICOS

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Mestrado Profissional, da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.
Área de concentração: Educação Matemática
Orientador: Prof. Dr. Silvanio de Andrade.

Aprovada em 03 de Julho de 2019.

Banca Examinadora:

Silvanio de Andrade

Prof. Dr. Silvanio de Andrade - Orientador
UEPB

Nilza Eigenheer Bertoni

Profª. Nilza Eigenheer Bertonni
UNB

John A. Fossa

Prof. John Andrew Fossa
UFRN/ UEPB

CAMPINA GRANDE- PB
2019

RESUMO

Como cumprimento das exigências do Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba elaboramos e apresentamos este Produto Educacional para obtenção do título de mestre. Esta obra apresenta alguns tópicos do conjunto dos Números Reais utilizados na disciplina de Análise Real do curso de licenciatura em matemática, expondo um elo da matemática superior com a matemática elementar. Apresenta também o uso da história matemática para que esta ferramenta possa possibilitar a compreensão da evolução do formalismo na Análise Real. O material a seguir, condiz em um recorte de alguns materiais sobre a disciplina de Análise Real (MONTEIRO, M. S, ÁVILA, G. Série Matemática na Escola). Na verdade, são apresentados alguns tópicos, onde expõe a ligação da matemática superior com a matemática elementar.Esta proposta de sequência didática tem o objetivo de apresentar um material, envolvendo questões que exploram este universo, oferecendo um suporte para os estudantes da disciplina de Análise Real que serão futuros professores do ensino básico de Matemática.

Palavra chaves: Números Reais; Ensino dos Números Reais; Formação de Professor.

ABSTRACT

In compliance with the requirements of the Master's Program in Teaching of Science and Mathematical Education of the State University of Paraíba we have elaborated and presented this Educational Product to obtain the title of Master. This work presents some topics from the set of Real Numbers used in the Real Analysis course of the undergraduate mathematics course, exposing a link between higher mathematics and elementary mathematics. It also presents the use of mathematical history so that this tool can enable the understanding of the evolution of formalism in Real Analysis. The following material matches a few excerpts from the Real Analysis subject (MONTEIRO, M. S, ÁVILA, G. School Mathematics Series). In fact, some topics are presented, which exposes the link between higher mathematics and elementary mathematics. This proposal for a didactic sequence aims to present a material, involving questions that explore this universe, offering a support to the students of the subject of Analysis. Real that will be future teachers of basic education of mathematics.

Keywords: Real Numbers; Teaching of Real Numbers; Teacher training.

SUMÁRIO

1 PROJETO EDUCACIONAL

1.1 Primeiramente, por que não podemos dividir 5 por 0?

Este capítulo apresenta alguns tópicos do conjunto dos Números Reais utilizados na disciplina de Análise Real do curso de licenciatura em matemática, expondo um elo da matemática superior com a matemática elementar. Apresenta também o uso da história matemática para que esta ferramenta possa possibilitar a compreensão da evolução do formalismo na Análise Real. O material a seguir, condiz em um recorte de alguns materiais sobre a disciplina de Análise Real(MONTEIRO, M. S, ÁVILA, G. Série Matemática na Escola). Na verdade, são apresentados alguns tópicos, onde expõe a ligação da matemática superior com a matemática elementar.

Caros estudantes, vocês como futuros docentes em matemática reconhecem a grande importância dos conceitos do sistema de numeração para o ensino fundamental, desta forma buscamos apresentar o conteúdo citado em uma disciplina de Análise com um olhar pedagógico, para que assim possa fortalecer os conceitos já construídos e desenvolver de forma significativa concepções que subsidiarão a ação pedagógica. Buscamos também desenvolver a importância da Análise na construção do pensar matemático, que antes trabalhávamos com dados indutivos e agora trabalharemos com o formalismo.As demonstrações e os conceitos foram detalhados de forma que contribuam para uma conexão do nível superior com o nível elementar.

A análise real é uma área da análise matemática que estuda o conjunto dos números reais e, principalmente, as propriedades analíticas das funções reais a valores reais.

Afirmamos que para o estudo da disciplina de Análise Real é necessário à presença do formalismo, tendo em vista que, este instrumento proporciona ao licenciando em Matemática, conhecimentos que subsidia o conhecimento matemático.

O que distingue a disciplina de Cálculo Diferencial Integral da disciplina de Análise Real: Em que cálculo o mais importante é aprender a aplicar os conceitos e teoremas (da análise matemática), realizando cálculos. Na análise Real, procura-se desenvolver formalmente toda a teoria que garante o funcionamento daqueles teoremas, fazendo-se uma análise dessa teoria, levando em conta toda a estrutura lógica que interliga tais teoremas. Em certo sentido, em cálculo usam-se os teoremas para fazer contas, e na análise usa-se a lógica para fazer teoremas.

A formação inicial do professor de matemática, busca responder a indagações que surgirão durante o seu percurso de estudo com o conhecimento adquirido na formação escolar, tem-se ainda apenas uma ideia intuitiva do que são os números reais. Às vezes não se tem a familiaridade necessária com esse conceito para poder responder com segurança questões como:

Por que não se extrai raiz quadrada de números negativos, como $\sqrt{-1}$?

Por que não se pode dividir por zero, e escrever $\frac{5}{0}$?

Estas perguntas provavelmente já forma feitas por vocês, mesmo que o seu professor buscasse responde, alguns alunos não ficaram satisfeitos com a explicação. Sabendo que mesmo que a resposta não fosse útil para muitas pessoas, para os futuros matemáticos, e professores de matemática, é preciso oferecer alguma explicação convincente.

Na verdade:

Pode-se, sim, extrair raiz quadrada de números negativos, mas o resultado será um número complexo. Já se alguém quisesse definir a segunda expressão como sendo algum número real (e admita, até você já quis fazer isso, não?), imediatamente seriam deduzidos fatos contraditórios. Um exemplo (talvez um pouco informal) de uma tentativa frustrada de definir essa última expressão, mas que oferece alguma intuição a respeito é:

Se $\frac{5}{0}$ fosse igual a 20, ou seja, $\frac{5}{0} = 20$ então ao multiplicar ambos os membros pelo denominador (às vezes chamado de passar o zero para a direita) seria concluído que $5 = 20$. Nada é mais absurdo que isso!

Sendo assim, já que qualquer tentativa de escolher um valor real para atribuir à expressão $\frac{5}{0}$ leva a uma contradição como a anterior, é muito mais útil deixar tal expressão indefinida, do que estudar uma teoria cheia de contradições!

Desta forma averiguamos, a tamanha importância da disciplina de Análise Real para a formação do professor de Matemática do ensino básico. Apesar da disciplina ainda, apresentar um contexto distante da realidade de um curso de Licenciando em Matemática, é necessário apresentar a relevância da Análise Real, na formação de conceitos matemáticos dos futuros professores.

1.2 Números Naturais

Nesta secção apresentaremos uma breve exposição dos **números naturais**, como também a eficiência do **Princípio de Indução** , como ferramenta das demonstrações no que se refere aos **números naturais**, conhecendo o seu significado e sua importância dentro da estrutura da matemática. Apresentaremos conceitos e propriedades que permeiam este curso até a sua futura sala de aula.

Os **números naturais** surgiram a partir de nossa experiência com o mundo físico, entretanto deixaremos claro que o número zero não será utilizado como um número natural, tendo em vista que o zero nunca foi "natural"aliás, levou muito tempo para os matemáticos considerarem o zero como um número, porém com a definição teórica dos conjuntos se tornou conveniente incluir o zero como cardinalidade do conjunto-vazio.

Desde criança utilizamos os **números naturais** para realizarmos comparação de objetos com a escala abstrata, tornando mais precisa a noção de quantidade; esse processo pressupõe, portanto, o conhecimento da sequência numérica.

Existe uma axiomática, idealizada no final do século XIX pelo matemático italiano Giuseppe Peano, que, três axiomas, consegue não só definir a adição e a multiplicação nos naturais, como também deduzir as demais propriedades.

O conjunto dos números naturais é representado pela letra maiúscula $\mathbb{N}$ e estes números são construídos com os algarismos:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9...\}$$

Caros leitores, para uma melhor compreensão do conjunto dos **Números Naturais**, iremos utilizar os famosos **Axiomas de Peano** que subsidiarão todos os seus conceitos e propriedades.

O autor italiano **Giuseppe Peano** introduziu os famosos axiomas de Peano, os quais sustentam diversas construções rigorosas da Álgebra e da Análise. O que motivou seu trabalho foi o desejo de expressar toda a matemática em termos de um cálculo lógico. Em seu Formulaire de Mathématiques, que contém cinco volumes (escrito com a participação de colaboradores) publicados a partir de 1894, desenvolveu uma linguagem formalizada que continha não só a lógica matemática como todos os ramos mais importantes da matemática. Atraiu um grande número de colaboradores e discípulos pelo fato de evitar o uso de uma linguagem metafísica e de introduzir símbolos: tais como $\in$ (pertence a classe de), $\cup$ (soma lógica ou união), $\cap$ (produto lógico ou intersecção) - muitos deles usados até hoje. Para seus fundamentos da Aritmética, ele escolheu três conceitos primitivos - zero, número (que, no contexto, se refere a inteiros positivos), e a relação "é sucessor de- satisfazendo os postulados seguintes:

1.2.1 Axiomas de Peano

Seja $\mathbb{N} \in 0$, o qual chamará do conjunto dos números naturais é caracterizado pelos seguintes axiomas.

Axioma 1.1. Existe um único número natural $1 \in \mathbb{N}$, tal que,

$$1 \neq S(n), \forall n \in \mathbb{N},$$

$1 \in \mathbb{N}$, é o único que não possui sucessor. $(\mathbb{N} - S(\mathbb{N}) = 1)$.

Axioma 1.2. Se $X \subset \mathbb{N}$, tal que, $1 \in X$;

Axioma 1.3. $S(X) \subset X, (\forall n \in X \Rightarrow (n) \in X)$.

Podemos concluir que se um conjunto de números naturais contém o número 1 e, além disso, contém o sucessores de cada um de seus elementos, então esse conjunto coincide com $\mathbb{N}$, isto é, contém todos os números naturais.

Denotaremos os números naturais como $\mathbb{N}$, e utilizaremos a notação *m,n* $\in \mathbb{N}$ para nos referir quer *n,m* são números pertencentes aos naturais.

Faremos o uso das notações $s(n), s(m)$ para os sucessores dos números naturais n, m. Exemplificando teremos que

$$2 = s(1), 3 = s(2), 4 = S(3)...$$

Isto quer dizer ao utilizaremos o termo $s(1)$, estamos representando o sucessor de 1 que é 2.

O Axioma 6.3 pode ser enunciado da seguinte forma. Seja P uma propriedade referente a números naturais. Se P é válida para o número 1 e se supondo P válida para o número n daí resulta que P é válida também para o seu sucessor $S(n)$, então P é válida para todos os números naturais.

Devemos ressaltar a importância do **Princípio de Indução**, já que o mesmo possui grande importância no processo de compreensão dos números naturais.

Exemplo 1.1. Prove por indução que

Demonstração. Passo base: Para $n = 1, 1^2 = 1$ e

$$\underline{n(n+1)(2n+1)}6 = \frac{1.2.3}{6} = 1.$$

O passo base é verdadeiro. Passo indutivo: se a fórmula é verdadeira para $n = k$, $k \geq 1$ então deve ser verdadeira para $n = k + 1$. Hipótese indutiva:

$$1^2 + 2^2 + ... + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}, k \geq 1$$

Deve-se mostrar que: :

$$1^2 + 2^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Sabe-se que:

$$\begin{aligned}
1^2+2^2+\ldots+k^2+(k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2 \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6} \\
&= \frac{(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]}{6} \\
&= \frac{(k+1)[2k^2+k+6k+6]}{6} \\
&= \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}
\end{aligned}$$

■

Exemplo 1.2. Prove por indução matemática que

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2, n\geq 1$$

Demonstração. Passo base: Para $n=1, 1=1^2$. O passo base é verdadeiro.
Passo indutivo: se a fórmula é verdadeira para $n=k, k\geq 1$ então deve ser verdadeira para $n=k+1$.

Hipótese indutiva:

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)=k^2, k\geq 1$$

Deve-se mostrar que:

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2, k\geq 1$$

Sabe-se que:

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+(2k+1)=(k+1)^2$$

■

Exercício 1.1. Use o Principio da Indução Matemática para provar que:

$$1+3+5+7+...+(2n\breve{\ }1)=n^2, n=1,2,3,\ldots$$

Exercício 1.2. Sabemos das Progressões Aritméticas que:

$$1+2+3+...+n=\frac{2n}{(n+1).}$$

Prove esse resultado por indução.

Exercício 1.3. Prove que $P(n) : 2^{2n} - 1$ é divisível por 3 para $n \geq 1$.

Exercício 1.4. Dados os números naturais a e b, com $a < b$, prove que existe um numero natural m tal que $a + m = b$.

Exercício 1.5. Um elemento a Î IN chama-se antecessor de b Î IN quando se tem a < b mas não existe $a \in \mathbb{N}$ tal que $a < c < b$. Prove que, exceto 1, todo numero natural possui um antecessor.

1.2.2 Números Racionais

Como o leitor bem sabe, os números racionais costumam ser representados por frações ordinárias, representação essa que é única se tornarmos as frações em forma irredutível e com denominadores positivos. Vamos considerar a conversão de frações ordinárias em decimais, com vistas a entender quando a decimal resulta ser finita ou periódica. Como sabemos, a conversão de urna fração ordinária em decimal se faz dividindo-se o numerador pelo denominador. Se o denominador da fração em forma irredutível só contiver os fatores primos de $10(2e/ou5)$, a decimal resultante será sempre finita; e é assim porque podemos introduzir 'fatores 2 e 5 no denominador em número suficiente para fazer esse denominador uma potência de 10. Exemplos:

$$\frac{8}{5} = \frac{2 \times 8}{2 \times 5} = \frac{16}{10} = 1,6$$
$$\frac{27}{36} = \frac{3^3}{2^2 \ldots 3^2} = \frac{3}{2^2} = \frac{3 \times 5^2}{5^2 \times 2^2}$$

Você deve ter notado que, depois de simplificada ao máximo, se a fração resultante, p e q tem denominador que se fatora em potências de 2 ou de 5, então, multiplicando-se por potências de 2 ou de 5 convenientes, esse denominador pode ser transformado em uma potência de 10. Consequentemente, esse racional tem uma representação decimal finita, isto é, uma representação na forma decimal com uma quantidade finita de casas decimais depois da vírgula.

O que acontece se o denominador de uma fração irredutível contiver algum fator primo diferente de 2 e 5?

Observe que não é possível multiplicar denominador e numerador por um número inteiro de forma a transformar o denominador em uma potência de 10. Por quê? Bem, isso é consequência do Teorema Fundamental da Aritmética, conhecido pelos alunos desde o Ensino Fundamental. Esse teorema nos ensina que "qualquer número natural pode ser escrito como produto de fatores primos, de modo único a menos da ordem dos fatores ". Sendo assim, qualquer potência de 10 se fatora, de modo único, como produto de potências de 2 e potências de 5.

No caso geral, p o demos dizer que, se um racional se escreve, na forma de fração irredutível, como p e q contém algum fator distinto de 2 e de 5, então:

- (i) é impossível transformar o denominador em uma potência de 10, o que torna a representação infinita;
- (ii) os possíveis restos da divisão de p por q são $1, 2, 3, \ldots, q-1$. (Note que o resto da divisão nunca é igual a 0.)

Portanto, sendo uma divisão infinita e apenas uma quantidade finita de restos possíveis, a partir de algum momento, algum resto irá se repetir. A partir daí, irá aparecer um período no quociente. Assim, concluímos que a representação decimal de um número racional, se não for finita, será necessariamente periódica. Com a discussão acima podemos concluir que a representação decimal de qualquer número racional é finita ou é infinita e periódica.

Exercício 1.6. Realize a divisão $\frac{5}{7}, \frac{1}{7}, \frac{9}{7}$, e posteriormente anote as suas considerações, embasada nas observações acima.

Exercício 1.7. O número $\frac{1}{17}$, tem representação decimal finita, infinita, periódica ou infinita e não periódica?

Exercício 1.8. Reescreva os resultados encontrados anteriormente, buscando generalizar o resultado obtido a todas as frações que apresenta o denominador primo diferente de 2 e 5.

1.2.3 Conjunto Finito, Infinito, Enumerável e Não- Enumerável

O estudo sistemático dos conjuntos, que acabou levando a uma teoria axiomática desse campo de estudos, começou com Georg Cantor $(1845-1918)$, por volta de 1872. Nessa época, Cantor estava iniciando sua carreira profissional e se ocupava do estudo da representação de funções por meio de séries trigonométricas. Isto fez com que ele investigasse os conjuntos de pontos de descontinuidade de . tais funções, os mais simples dos quais são conjuntos com apenas um número. finito de pontos. Mas o aparecimento de conjuntos cada vez' mais complica-' dos acabou levando Cantor a investigar conjuntos infinitos em sua generalidade. Nesse .estudo ele introduziu um conceito simples, que logo se revelaria da maior importância - o conceito de equivalência de conjuntos. Segundo Cantor, dois conjuntos são equivalentes, ou têm a mesma cardinalidade, ou a mesma potência, quando é possível estabelecer uma correspondência que leve elementos distintos de um conjunto em elementos distintos do outro, todos os elementos de um e do outro conjunto sendo objeto dessa correspondência. Em termos precisos, a correspondência de que estamos falando chama-se bijeção..

Observe que é essa noção de equivalência que dá origem ao conceito abstrato de número natural. De fato, o que faz uma criança de quatro ou cinco anos ele idade constatar que numa cesta há três laranjas, noutra três maçãs, e noutra ainda três ovos? Ela chega a essas conclusões - mesmo sem perceber - por constatar que é possível "casar"os elementos de qualquer uma dessas cestas com os elementos de qualquer outra de maneira biunívoca. É essa abstração dos elementos concretos dos conjuntos equivalentes ele diferentes objetos que nos leva a formar a noção de número natural, um fenômeno que ocorre muito cedo em nossas vidas.

Não é raro encontrarmos exemplos equivocados de conjuntos infinitos, como “a quantidade de grãos de areia na praia” ou a “quantidade de estrelas no céu”. Acontece que essas quantidades, embora muito grandes, são finitas! Um exemplo de conjunto infinito é o conjunto dos números naturais: mesmo tomando-se um número natural n muito grande, sempre existe outro maior, por exemplo, seu sucessor $n + 1$, ou também o dobro de n, $2n$, ou ainda seu triplo $3n$.

Existem diferentes tipos de infinito! Desde crianças aprendemos a contar... O que é contar ? Se dermos a uma criança um pacote com 5 lápis e pedirmos a ela que conte, no fundo o que ela faz é estabelecer uma bijeção entre os lápis e o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Outra situação corriqueira é comparar quantidades de dois conjuntos. Imagine que estamos em uma sala com muitas cadeiras e várias pessoas. Se alguém perguntar se há mais cadeiras ou mais pessoas, não há necessidade de se contar quantas são as cadeiras, quantas são 1 as pessoas. Ao invés disso, podemos pedir a todos que se sentem. Se sobrarem cadeiras vazias, há mais cadeiras. Se sobrarem pessoas em pé, há mais pessoas! Assim pudemos responder rapidamente à pergunta feita, sem a necessidade de contar cada conjunto. Do ponto de vista da matemática, o que foi feito? Ao pedirmos para as pessoas que se sentem, estamos estabelecendo uma função que a cada pessoa associa a cadeira onde ela se sentou. Se essa função for bijetora, o número de cadeiras e de pessoas é o mesmo!

A função é injetora, pois estamos subentendendo que só pode ter uma pessoa em cada cadeira. Se a função não for sobrejetora, há cadeiras sobrando. Alguém poderia argumentar sobre a possibilidade de haver pessoas em pé. Nesse caso, não está estabelecida uma correspondência que a cada elemento do domínio associa um no contra- domínio. Matematicamente, a função não estaria bem definida. O que é feito no estudo de conjuntos infinitos é basicamente encontrar uma função bijetora para comparar o conjunto alvo de nosso estudo com outro já conhecido.

Para o nosso propósito, quanto ao número de elementos de um conjunto, é necessário a penas distinguir três tipos de conjuntos: os finitos, os enumeráveis e os não-enumeráveis. A noção de conjunto enumerável está estreitamente ligada ao conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, em que os empregamos para a contagem dos conjuntos finitos, mostrando como eles podem ser considerados como números cardinais e completando, portanto, sua descrição.

Um professor vai aplicar uma prova e não tem certeza se a sala destinada a este feito tem um número suficiente de cadeiras para acomodar os alunos. Ele pode contar as cadeiras e os alunos e comparar os resultados para obter a resposta. Uma alternativa óbvia a este método é pedir aos alunos que se acomodem e três coisas podem acontecer ao final do processo:

- (i) existem alunos de pé e toda s as cadeiras estão ocupadas;
- (ii) existem cadeiras livres e todos os alunos estão sentados;
- (iii) todos os alunos estão sentados e todas as cadeiras estão ocupadas.

No primeiro, caso tem que o número de alunos é maior que o de cadeiras; no segundo caso, ocorre o contrário e, finalmente, no terceiro eles são iguais. Obtemos, assim, a resposta à pergunta “qual conjunto tem mais elementos?” sem necessariamente conhecer os números de elementos dos conjuntos envolvidos. Estas considerações motivam a seguinte definição.

1.2.4 Hotel de Hilbert

David Hilbert foi grande entusiasta das descobertas de Cantor, chegando a afirma que “ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor criou para nós”. Para ilustrar o conceito de infinitude e enumerabilidade, Hilbert imaginou um hotel de infinitos quartos. Vamos explorara ideia de Hilbert com uma do se (extra) de ficção.

O Hotel de Hilbert fica ao bordo do Mar Mediterrâneo, em Saint Tropez, na badalada Cote d’Azur. Seu edifício, cinza e branco, construído em 1925 é um belo exemplo do estilo art-déco dos anos 20 e 30 do século XX. Grande e confortável, o hotel tem uma infinidade enumerável de quartos suficientes para hospedar clientes dos mais diversos gostos. O gerente, o próprio David Hilbert, é um homem muito gentil, de barba bem tratada que nunca é visto sem seus óculos e chapéu branco.

Como é alta temporada, o hotel está lotado. Porém, o painel localizado em sua entrada informa que há vagas disponíveis! Chega um homem de camiseta florida, carregando uma pequena e elegante valise marrom. Ele pede um quarto a Hilbert que responde:

– Apesar de o hotel estar completamente lotado, providenciarei um quarto vazio para o senhor. Aguarde um minuto, por favor. Aproveitando que os hóspedes são muito solícitos, pelo alto-falante, Hilbert se dirige a eles:

– Perdoem-me por incomodá-los. Gostaria de pedir a cada um de vocês que troque de quarto. Quem está ocupando o quarto n passará ao quarto $n+1$. Grato p ela compreensão. E o cliente, satisfeito, se instala no quarto número 1.

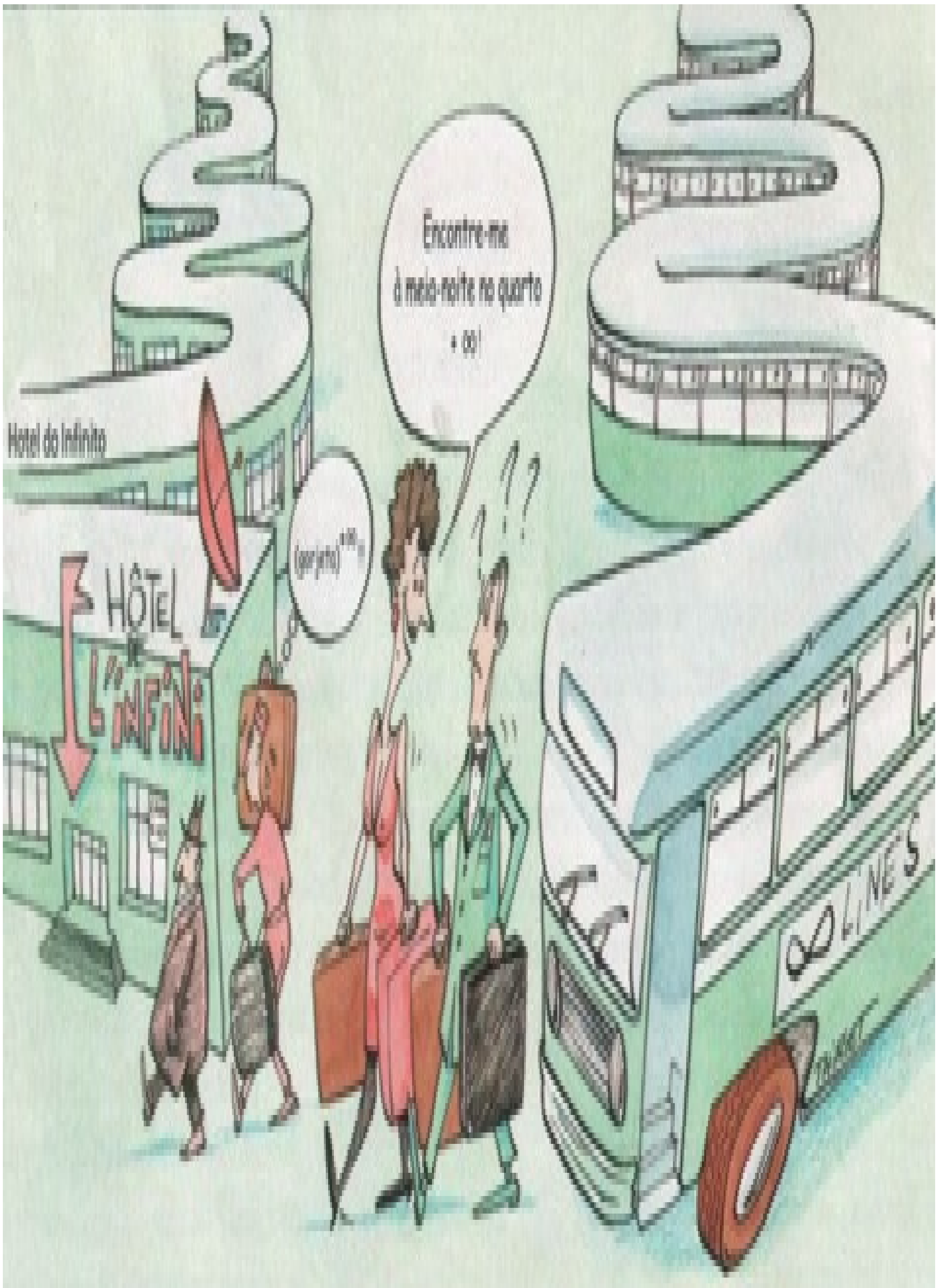

Figura 1 – O que é o infinito?

A época é de muita procura. Chega um ônibus de excursão com uma infinidade enumerável de cadeiras. Todas estão ocupadas mas, de acordo com as estritas normas de segurança do lugar, ninguém viaja em pé. O animador do grupo, facilmente reconhecível por sustentar uma pequena fâmula vermelha com a marca da agência, dirige-se a Hilbert solicitando os quartos que havia reservados para seus clientes.

Confirmando a reserva, Hilbert solicita um minuto para providenciar os quartos. Novamente pelo alto-falante, dirige-se aos hóspedes:

– Perdoem-me por incomodá-lo s outra vez. Peço novamente que troquem de quarto, desta vez, obedecendo a seguinte regra: quem estiver ocupando o quarto n mudará para o quarto $2n$. Mais uma vez, agradeço a compreensão.

Hilbert informa ao animador que ele seu grupo podem acomodar-se. Quem está na cadeira m ocupará o quarto $2m - 1$.

Fim do verão e o hotel se esvaziam. Outra excursão chega. O animador, com bandeira amarela, é menos experiente que seu colega e não reservou os quartos antecipadamente pois acreditava em baixa ocupação no outono. O ônibus está cheio mas, novamente, não há pessoas em pé. Além disto, para cada número real há uma cadeira no ônibus com aquele número! Surpreendentemente, Hilbert informa que, apesar do hotel estar completamente vazio, não há vagas suficientes para acomodar a todos. E, amavelmente, sugere o Hotel Real que é maior que o seu.

Indicaremos pelo símbolo I_n conjunto $1, 2, ..., n$ dos números naturais, desde 1 até n. Mais precisamente, dado $n \in \mathbb{N}$, temos $I_n = p \in \mathbb{N}; 1 \leq p \leq n$.

Definição 1.1. Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $F_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

•

(a) Um conjunto A é finito se existir uma função bijetora de F_n em A, para algum n. Dizemos, nesse caso, que A tem n elementos. Consideramos o vazio um conjunto finito.

(b) A é infinito se A não for finito.

(c) A é enumerável se A $\mathbb{N}$.

(d) A é não enumerável se A não for finito nem enumerável.

(e) A é no máximo enumerável se A for finito ou enumerável.

Exemplo 1.3. O exemplo mais simples de conjunto enumerável é o que serve de modelo para essa ideia é o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais. O conjunto $P = \{2, 4, 6, \ldots\}$ dos números pares também é enumerável. Neste caso, é fácil ver que a função $f : \mathbb{N} \Rightarrow P$ dada por $f(n) = 2n$ é bijetora.

1.2.5 Conjuntos enumeráveis e Não- Enumeráveis

O primeiro conjunto infinito com que nos familiarizamos é o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais. Chama-se conjunto enumerável a todo conjunto equivalente a $\mathbb{N}$.

Um dos primeiros fatos surpreendentes que surge na consideração de conjuntos infinitos diz respeito à possibilidade de haver equivalência entre um conjunto e um seu subconjunto próprio. Por exemplo, a correspondência $n \mapsto 2n$, que ao 1 faz corresponder 2, ao 2 faz corresponder 4, ao 3 faz corresponder 6, e assim sucessivamente.

Estabelece equivalência entre o conjunto números naturais e o conjunto dos números pares positivos. Veja: o conjunto elos números pares positivos é um subconjunto próprio do conjunto $\mathbb{N}$; no entanto, tem a mesma cardinalidades que $\mathbb{N}$, ou seja, o mesmo número de elementos. Este fenômeno é uma peculiaridade dos conjuntos infinitos e em nela contradiz o que já sabemos sobre conjuntos finitos.

Exercício 1.9. Usando apenas a definição de enumerabilidade, demonstre que se B é um conjunto finito e C, um conjunto enumerável então $B \cup C$ é enumerável.

Exercício 1.10. Usando apenas a definição de enumerabilidade, demonstre que se F e G são conjuntos enumeráveis então $F \cup G$ é enumerável.

Exercício 1.11. Seja $\mathrm{P}_n(\mathbb{Z})$ o conjunto de todos os polinômios de grau menor ou igual a n e com coeficientes inteiros. Prove que $P_n(\mathbb{Z})$ é enumerável.

Sugestão: Verifique que $P_n(\mathbb{Z})$ é equivalente a $\{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ldots \times \mathbb{Z}\}\overline{\{n+1\}}$

Exercício 1.12. Seja $P(\mathbb{Z})$ o conjunto de todos os polinômios com coeficientes inteiros. Prove que $P(\mathbb{Z})$ é enumerável.

Exercício 1.13. O conjunto dos números irracionais é enumerável?

Exercício 1.14. Prove que se $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$ então o intervalo $[a, b]$ é um conjunto não enumerável.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, G. **Análise Matemática para Licenciatura**. Editora Edgard Blucher Ltda. São Paulo, 2001. Nenhuma citação no texto.

LIMA, E. L. **Curso de Análise**. volume 1. Rio de Janeiro: IMPA, 2004. Nenhuma citação no texto.

MONTEIRO, M. S. **Notas de aula - MAT0315 - Introdução à Análise Real** - IME-USP (s/d). Nenhuma citação no texto.

Série Matemática na Escola. Hotel de Hilbert. file:///C:/Users/Tha Nenhuma citação no texto.