UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

THAÍS SILVA ARAÚJO

O TRATAMENTO DOS NÚMEROS REAIS NA DISCIPLINA DE ANÁLISE REAL NA LICENCIATURA: UM OLHAR A PARTIR DOS LIVROS DIDÁTICOS

CAMPINA GRANDE- PB
2019

THAÍS SILVA ARAÚJO

O TRATAMENTO DOS NÚMEROS REAIS NA DISCIPLINA DE ANÁLISE REAL NA LICENCIATURA: UM OLHAR A PARTIR DOS LIVROS DIDÁTICOS

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Mestrado Profissional, da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática

Orientador: Prof. Dr. Silvanio de Andrade.

CAMPINA GRANDE- PB
2019

A659t Araújo, Thaís Silva.
O tratamento dos números reais na disciplina de Análise Real [manuscrito] : um olhar a partir dos livros didáticos / Thaís Silva Araújo. - 2019.
105 p. : il. colorido.

Digitado.
Dissertação (Mestrado em Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2021.
"Orientação : Prof. Dr. Silvanio de Andrade , Especialização em Educação Matemática."

1. Números reais. 2. Livro didático. 3. Formação docente. I. Título

21. ed. CDD 371.32

Elaborada por Lucas H. A. da Silva - CRB - 15/898 BC/UEPB

THAÍS SILVA ARAÚJO

O TRATAMENTO DOS NÚMEROS REAIS NA DISCIPLINA DE ANÁLISE REAL NA LICENCIATURA: UM OLHAR A PARTIR DOS LIVROS DIDÁTICOS

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Mestrado Profissional, da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.
Área de concentração: Educação Matemática
Orientador: Prof. Dr. Silvanio de Andrade.

Aprovada em 03 de Julho de 2019.

Banca Examinadora:

Silvanio de Andrade

Prof. Dr. Silvanio de Andrade - Orientador
UEPB

Nilza Eigenheer Bertoni

Profª. Nilza Eigenheer Bertonni
UNB

John A. Fossa

Prof. John Andrew Fossa
UFRN/ UEPB

CAMPINA GRANDE- PB
2019

Este trabalho é dedicado a Deus e a toda a minha família, sendo eles os meus alicerces para a felicidade.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por me mostrar que a fé é o maior instrumento para vencer qualquer batalha. Agradeço também, por me fortalecer diversas vezes quando pensei em desistir, por me engrandecer, quando pensei em ser pequena e por me mostrar que o meu limite, sou eu quem traço.

Agradeço ao meu filho (Pedro Arthur), o maior presente da minha vida, que chegou ao mundo ao decorrer desta caminhada e que me inspira a cada olhar. Agradeço ao meu esposo (Walter Rubens), por sempre me incentivar a conquistar os meus sonhos e por me apoiar em todos os momentos, transformando as pedras dos caminhos em escada para a nossa felicidade.

Agradeço a minha mãe (Mª das Neves), por apesar de tantas dificuldades em sua caminha sempre foi a maior referência em minha vida. Agradeço aos meus irmãos (Tamires, Tárcio e Ryan) que demonstram que a nossa cumplicidade faz fortalecer a cada dia nosso amor. Agradeço ao meu pai, que não mediu esforços para me ajudar nesta jornada. Não posso esquecer do meu Tio Erasmo, que perpassa a hierarquia de família, transformando-se em um grande amigo.

Agradeço imensamente ao meu orientador Silvanio Andrade, que em sua simplicidade de pessoa me ajudou a percorrer caminhos que considerava obscuros. Agradeço ao Professor Roger Huanca, que por diversas vezes me instigou a chegar ao presente momento. Agradeço ao meu Professor de graduação, José Luiz Cavalcante, por despertar as minhas primeiras perguntas enquanto educadora matemática. Agradeço ao Professor Joelson Pimentel e a sua esposa, por me ajudarem em momento bastante difícil em minha vida.

Agradeço ao meu cunhado (Thiago), por se prontificar a todo momento a me ajudar. Agradeço a Iara, cunhada (Marília) e Tatiane, por me ajudarem na jornada de mãe, para que eu pudesse realizar os meus estudos, não esquecendo da minha mãe e da minha irmã. Agradeço aos meus amigos de trabalho e da vida (Rafaela, Egnaldo, Marcos, Antônia e Wanderley), por acreditar e me ajudar na realização deste sonho.

Agradeço ao PPGECEM, por oportunizar a realização deste sonho. Agradeço a todos os professores do programa, que contribuíram imensamente para o meu conhecimento. Agradeço aos meus colegas desta instituição, por promover trocas de conhecimentos. Agradeço a Lara, que com o seu lado meigo estava sempre disponível a ajudar.

Agradeço a banca examinadora, nas pessoas da Profª. Dra. Nilza Eigenheer Bertoni e do Prof. Dr. John Andrew Fossa, pelas importantes contribuições que proporcionaram o enriquecimento deste trabalho.

"A alegria não chega apenas no encontro do achado, mas faz parte do processo da busca. E ensinar e aprender não pode dar-se fora da procura, fora da boniteza e da alegria."

(Paulo Freire)

RESUMO

Este trabalho derivou das inquietações surgidas na disciplina Análise Real, do curso de licenciatura em Matemática, tendo em vista que ainda enquanto estudante os objetivos desta não eram perceptíveis aos estudantes, ocasionando, assim, um questionamento quanto aos reflexos do curso de Análise Real na formação docente. Nesta perspectiva, lançamos os nossos olhares para os livros didáticos do ensino superior de Análise Real, já que estes desempenham papel fundamental no processo de ensino-aprendizagem, tanto para os alunos quanto para os professores. Assim, foram analisados três livros didáticos que habitualmente são utilizados nos cursos de licenciatura em matemática, segundo Moreira e Viana (2008), que são Análise Matemática para a Licenciatura – Geraldo Ávila; Análise I – Djairo G. de Figueiredo e Introdução a Análise Real – Elon L. Lima. Esta pesquisa pode ser caracterizada como qualitativa, pois temos como finalidade realizar uma analise descritiva das três obras elencadas, apresentado aspectos que contribuam para o aprendizado do futuro professor de Matemática. Além disso, também pode ser classificada como pedagógica, já que temos como preocupação a matemática que está sendo ensinada aos licenciandos em matemática. Observa-se que os conteúdos que estão sendo ofertados, tanto pelos professores como pelos livros didáticos nessa disciplina, não contribuem efetivamente para a formação do futuro docente. Para o desenvolvimento deste trabalho, dividimos a pesquisa em dois momentos: o primeiro momento compreende as análises das obras, no qual categorizamos os estudos conforme os seguintes tópicos: Prefácio, a organização do capítulo, exemplos, notas históricas, demonstrações e os exercícios; já o segundo momento, consiste nas observações sobre a análise dos livros de Análise Real. Com base nos resultados, constatamos que os s autores Lima e Figueiredo traduzem suas obras voltadas ao bacharelado em matemática, já que os aspectos pedagógicos que auxiliam o futuro docente no desenvolvimento profissional são pouco perceptíveis, apresentando uma Matemática que não é destinada ao licenciando em matemática. Entretanto, o livro de Ávila, voltado, especificamente, para a licenciatura em Matemática, demonstra certas restrições em trabalhar com o rigor e o formalismo, deixando de lado características essenciais da disciplina, trabalhando conceitos numéricos que se distanciam do objetivo do curso. Deste modo, averiguamos nos capítulos vivenciados sobre os Números Reais, que conceitos de grandes utilidades pertencentes a estes não são apresentados, ou pouco trabalhados para a contribuição da formação do professor. Por fim, concluímos que às obras analisadas pouco se aproximam das necessidades dos licenciados em Matemática, pois o material necessário para estes estudantes precisa apresentar aspectos pedagógicos e uma matemática que seja condizente com a realidade do futuro professor de Matemática.

Palavras-chave: Análise Real. Números Reais. Livro didático. Formação de Professor.

ABSTRACT

This work was derived from the concerns that arose in the Real Analysis course of the undergraduate course in Mathematics, considering that even as a student the objectives of this one were not perceptible to the students, thus causing a questioning regarding the reflexes of the Real Analysis in the teacher training. In this perspective, we have looked at the textbooks of Higher Education in Real Analysis, since they play a fundamental role in the teaching-learning process, both by students and by teachers. According to Moreira and Viana (2008), three textbooks that are usually used in undergraduate courses in mathematics are analyzed (Mathematical Analysis for the Degree - Geraldo Ávila, Analysis I - Djairo G. de Figueiredo and Introduction to Analysis Real - Elon L. Lima). This research can be characterized as qualitative, since we have as a purpose to perform a descriptive analysis of the three works listed, presenting aspects that contribute to the learning of the future teacher of Mathematics. In addition, it can also be classified as pedagogical, since we are concerned about the mathematics that is being taught to the licenciandos in mathematics. It is observed that the contents that are being offered by both teachers and textbooks in this discipline do not effectively contribute to the formation of the future teacher. For the development of this work, we divide the research into two moments: the first stage comprises the analyzes of the works, in which we categorize the studies according to the following topics: (Preface, chapter organization, examples, historical notes, ; the second moment, consists of the reflections on the analysis of the Books of Real Analysis. Based on the results, we verified that the books of the authors Lima and Figueiredo translate their works directed to the baccalaureate in mathematics, since the pedagogical aspects that helps the future teacher in the professional development are little perceptible, presenting a Mathematics that is not destined to the licenciando in mathematics. However, Ávila's book, specifically aimed at the degree in Mathematics, shows a fear of working with rigor and formalism, leaving aside the essential characteristics of the discipline, working on numerical concepts that are distant from the objective of the course. Thus, we find that the chapters experienced on the Real Numbers, that concepts of great utilities belonging to these are not presented, or little worked for the contribution of teacher training. Finally, we conclude that the works analyzed do not approach the needs of mathematics graduates, since the material needed for these students needs to present pedagogical aspects and a mathematics that is compatible with the reality of the future teacher of Mathematics.

Keywords: Real Analysis. Real Numbers. Textbook. Teacher Training.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Durante a licenciatura em Matemática, faz-se necessário cursar disciplinas com objetivos mais diferenciados, convergindo na formação de um profissional capaz de atuar em uma era que busca constantemente inovações no processo de ensino, já que a sociedade frequentemente sofre um processo de metamorfose.

Desta forma, é cabível promover uma reflexão quanto à preparação desses profissionais, e verificar se as disciplinas ofertadas durante o curso de graduação estão atingindo as metas a serem cumpridas no processo de formação dos professores. Formar um docente no século XXI não significa habilitar robôs aptos a responderem indagações de exercícios, mas capacitar professores com visões críticas que despertem a veemência dos alunos a novos olhares.

Voltando-nos para a formação do professor de Matemática, podemos perceber que, embora muitas mudanças já tenham sido realizadas quanto à formação destes profissionais, muitos caminhos ainda precisam ser percorridos, tendo em vista ainda o número alarmante de estudantes que possuem as mais diversas dificuldades em compreender a Matemática e os seus propósito,s nos mais diversos níveis de ensino.

Ao cursar a disciplina de Análise Real no curso de licenciatura em Matemática, foi possível perceber o sentimento de incapacidade e inferioridade, que, por vezes, refletiam sobre nós estudantes, fazendo-nos questionar sobre a contribuição da referida disciplina para a formação do futuro docente. Bortoloti(2006), ao discorrer sobre diversos sentimentos dos estudantes diante a disciplina de Análise Real, destaca seis emoções mais frequentes dos estudantes, que prejudicam no processo de aprendizagem da disciplina: insegurança com relação ao domínio do conteúdo; preocupação com o tempo; cobrança pessoal com relação ao próprio desempenho; dificuldade da prova; medo de não corresponder às expectativas do professor; preparação inadequada. Ainda nesta perspectiva, Gomes, Otero- Garcia, Silva e Baroni (2015) ressaltam que os estudantes, ao final da disciplina, não conseguem a aprovação, as palavras como trauma e tortura são mencionadas para descrever a relação com a disciplina.

A cadeira de Análise Real é cursada ao final da graduação, já que busca fazer uma junção dos conteúdos estudados durante a sua formação em especial à cadeira de Cálculo Diferencial Integral, aprimorando o formalismo e o rigor. Existe também uma preocupação em relação à forma como a disciplina vem sendo apresentada aos alunos de licenciatura em Matemática, pois algumas universidades propõem que os cursos de licenciatura e bacharelado em Matemática cursem a disciplina juntos deixando de lado a necessidade e especificidade de cada grupo. É óbvio que os objetivos dos licenciandos e bacharéis divergem quanto ao término do curso, como também quanto ao estudo da disciplina de Análise Real, já que os futuros professores de Matemática têm como uma de suas finalidades, ao término do curso fundamentar os seus conhecimentos para a atuação no campo profissional da educação básica e os bacharéis utilizam a cadeira como subsídio para futuros estudos.

Esta inquietação é derivada da graduação, período em que ao estudar a disciplina percebeu-se que os objetivos não eram tão óbvios, ocasionando um questionamento quanto à aplicação desta na carreira profissional do licenciando, pois a cada aula os conteúdos mostravam-se cada vez mais inatingíveis, impossibilitando o acompanhamento dos conteúdos de forma compreensiva. Repetir e decorar os exercícios e demonstrações dos teoremas eram os métodos utilizados para conseguir a aprovação dos conteúdos. Sabemos que o rigor e o formalismo são características da disciplina, entretanto esses atributos não contribuíam de forma significativa no processo de aprendizagem, ao contrário ocasionavam um sentimento de inaptidão.

Neste sentido, apresentaremos algumas reflexões especiais acerca dos livros didáticos utilizados no ensino da Análise Real, já que este tem desempenhado papel fundamental no processo de ensino-aprendizagem tanto pelos alunos quanto pelos próprios professores, repensando quanto a necessidade de algumas mudanças, que venham a favorecer a aprendizagem. A sequência didática e os conteúdos selecionados não atendiam às necessidades do aluno de licenciatura em Matemática.

O conjunto dos Números Reais apresenta diversos resultados que contribuem imensamente para os estudos dos futuros licenciando em Matemática, porém a forma intuitiva que estes conteúdos são expostos não é suficiente para um estudo aprimorado das propriedades, deste modo a Análise Real trás como finalidade um estudo dos Números Reais, promovendo provas rigorosas que proporcionam alicerces para o futuro docente.

A importância dos Números Reais na disciplina de Análise Real corresponde não somente para subsidiar os estudos dos futuros discentes de um curso de Licenciatura em Matemática, mas o mesmo deve proporcionar uma reflexão sobre a importância deste, para o aprendizado dos estudantes do ensino básico em Matemática.

Desde modo, existe uma preocupação da forma como este conteúdo vem sendo tratado na disciplina de Análise Real, bem como da sua abordagem nos livros didáticos. Isso nos leva a refletir sobre os reflexos da metodologia no contexto da formação do professor de Matemática do ensino básico, tendo em vista que a construção deste conjunto permite aos estudantes desta disciplina permear conhecimentos sobre a atuação profissional.

> Não temos dúvidas que Números Reais é um dos conteúdos que mais contribuem na formação Matemática do futuro professor, além de ser o principal alicerce na Análise Matemática. Porém a abordagem como esse conteúdo é trabalhado divide opiniões entre professores e pesquisadores

> dos cursos superiores de Matemática. Há quem prefira apresentar os Números Reais como sendo um corpo ordenado completo mediante Axiomas, dando um salto na passagem dos números racionais para os números reais. Outros, porém, preferem construir o conjunto dos Números Reais a partir do conjunto dos Números Naturais, explicando detalhadamente cada etapa dessa construção. (FERREIRA; MUNIZ, 2014, p.09).

O número de pesquisas referentes ao ensino de Análise vem crescendo consideravelmente, no entanto ainda é pequeno quanto aos problemas enfrentados. Dentre as principais dificuldades, pode-se destacar o livro didático que, muitas vezes, não tem suprido a necessidade dos futuros docentes do ensino básico. Gomes, Otero- Garcia, Silva e Baroni (2015) abordam que o atual cenário da disciplina de Análise Real pouco mudou desde o seu surgimento como disciplina no Brasil, e no que se refere à produção brasileira de materiais voltados a licenciatura em Matemática, até meados do ano de 2001, eram escassos os trabalhos envolvendo a relação entre licenciatura e a disciplina de análise.

O livro didático, um dos únicos ou o único material de apoio atualmente utilizado no processo de ensino-aprendizagem da Análise Real, não vem proporcionando aos alunos o aprendizado dos conteúdos estudados. A linguagem utilizada pelos autores difere da necessidade dos estudantes, os exemplos e exercícios apresentam algumas semelhanças, entretanto os teoremas e as propriedades vistas em sala de aula aparentam não ter aplicação nos exercícios a serem resolvidos. Não sabemos se isso decorre da metodologia utilizada pelo autor ou pelo fato do conteúdo não condizer com a realidade do estudante.

Sabemos que não é fácil ensinar e aprender Análise Real, pois requer do professor e do aluno muita dedicação e reflexão sobre os temas abordados, isto quer dizer que é natural os alunos saírem da aula com dúvidas e perguntas a serem respondidas. Entretanto, existe uma preocupação quanto a esta falta de compreensão pertinente dos alunos, já que os mesmos não conseguem estabelecer uma coerência entre os assuntos abordados com os tópicos já estudados, refugiando-se aos matérias didáticos(livros didáticos) para o entendimento da disciplina.

Estabelecer uma relação dos conteúdos abordados no ensino superior com o ensino elementar também não é uma tarefa fácil, principalmente no que diz respeito à disciplina de Análise Real, tendo em vista que os conteúdos pertinentes a esta não têm uma aplicação direta na sala de aula do ensino básico, mas busca subsidiar os conhecimentos matemáticos do professor.

Neste segmento, salientamos que os livros didáticos, assim como a formação do professor de Matemática, não devem-se restringir ao conhecimento matemático, já que o ato de ensinar necessita de diversos conceitos que a Matemática por si só não supre a carência. Com base nisso Tardif e Raymond (2000) mostram que as fontes de conhecimentos dos docentes são dinâmicas e variadas não apenas quanto à sua base. Esses saberes, por sua vez, dizem respeito ao acúmulo de experiência de cada professor, seja na vida pessoal, na vivência escolar, nas instituições religiosas e na sociedade de uma maneira geral. Trata-se de uma concepção bastante ampla, visto que os autores procuram relacionar o conhecimento dos docentes com o processo de construção da identidade de cada um. Por isso também, os autores apontam a própria carreira docente como processo formador de conhecimento, posto que, ao iniciar a prática profissional, os professores se deparam com a realidade (ou as realidades) de sua profissão, com seus problemas e limitações e passam a adaptar seu pré-conhecimento a essa realidade, através do que os autores do chamam de “rotinização”. A rotinização do ofício do professor é o processo através do qual ele explora e consolida seu saber-fazer dentro da própria prática de seu trabalho.

Nesta perspectiva, Tardif (2006) analisa a relação entre o tempo e trabalho na construção do saber docente, apontando que o tempo de trabalho desencadeia uma série de saberes, como, o saber trabalhar - no caso do docente, o saber ensinar, transmitir. Daí a importância de sua experiência para a contribuição na construção do conhecimento. No entanto, os saberes ligados ao trabalho são temporais, pois são construídos e dominados progressivamente durante um período de aprendizagem variável, de acordo com cada ocupação. “O desenvolvimento do saber profissional é associado tanto às suas fontes e lugares de aquisição quanto aos seus momentos e fases de construção”.(TARDIF, 2006, p.12). Esta ideia reforça a colocação de Tardif(2006) quando chama o saber docente de saber plural, pois não é constituído apenas pela formação técnica, mas também pela prática diária que vai moldando a atuação do profissional da educação, por isso a relevância da boa relação do profissional com os meios de execução do trabalho, que vai desde o ambiente de trabalho até o acesso à informações que permitam a construção cotidiana do saber (pesquisa/conhecimento).

> Portanto espera-se que na formação dos professores a produção de saberes docentes se aproxime o máximo possível da realidade escolar, sendo provenientes da ’prática e não práticos’, rompendo com o modelo aplicacionista que considera o ambiente escolar o local onde são aplicados os conhecimentos que são produzidos na esfera acadêmica. (CAVALCANTE, 2001, p.24).

A colocação anterior reflete sobre o atual ensino da Análise Real, tendo em vista a necessidade de novas perspectivas que proporcionem uma adaptação dos conteúdos a realidade dos estudantes, já que os aspectos de um curso de bacharelado predominam no que diz respeito ao ao ensino restrito da disciplina.

A Análise Real, quando voltada ao ensino da licenciatura em Matemática, busca realizar um estudo aprimorado dos Números Reais, contudo, diversos professores universitários, bem como livros didáticos, adotam uma metodologia que prioriza conteúdos que não beneficiam o estudante enquanto professor do ensino básico. Deste modo, procuramos analisar este tópico em três livros didáticos: Análise Matemática para a Licenciatura –

Geraldo Ávila, Análise I – Djairo G. de Figueiredo e Introdução à Análise Real – Elon L. Lima, elencados por Moreira e David (2008), quando destacam em suas pesquisas os livros mais utilizados na disciplina de Análise Real por professores universitários.

O licenciando em Matemática estuda os conjuntos numéricos desde o ensino fundamental até a universidade, porém é na disciplina de Análise Real, ao estudar os conjuntos numéricos, que consegue perceber a presença do formalismo e o rigor da Matemática aspectos, que não eram trabalhados anteriormente. Entretanto, esta Matemática vista pelo estudante não é aplicada no seu campo profissional, mas irá contribuir para os seus conhecimentos enquanto professor.

Como já apresentado em outras pesquisas, esta também lança luzes sobre os conteúdos de Números Reais oferecidos na disciplina de Análise Real, tendo em vista que alguns conteúdos não assistem às necessidades do licenciando em Matemática. Esta afirmação provém do fato de que a Análise Real tem como finalidades promover um estudo aprimorado dos Números Reais, porém, ao elaborarem seu livro, diversos autores priorizam conteúdos que não contribuem para a formação do professor.

Esta pesquisa caracteriza-se como qualitativa, já que os objetivos traçados viabilizam realizar uma análise mais profunda, compreendendo dados subjetivos que auxiliaram a responder a questão norteadora deste trabalho. Neste sentido, conforme Ludke e André (2008, p.6), "a pesquisa qualitativa supõe o contato direto e prolongado do pesquisador com o ambiente e a situação que esta sendo investigada."

A preocupação referente ao contexto da sala de aula permite-nos classificar esta pesquisa como pedagógica, pois segundo Lankshear e Colin(2008), uma pesquisa pedagógica é aquela onde existem profissionais atuantes, independente do nível de escolaridade que intervenham, realizando pesquisas para o aprimoramento da sala de aula. Assim, temos como finalidade realizar um estudo sobre os livros didáticos utilizados nos cursos de licenciaturas em Matemática, já que os conteúdos e os recursos (notas históricas, exemplos, linguagem ...) não enriquecem os conhecimentos dos estudantes, tendo em vista que os livros apresentam objetivos adversos para a formação do professor do ensino básico.

1.1 Questões Norteadoras

Como os livros didáticos de Análise Real especificamente o conjunto dos Números Reais, na licenciatura em Matemática, podem estabelecer uma ligação com o trabalho do professor de Matemática no ensino básico? Qual o papel da disciplina Análise Real na licenciatura em Matemática?

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo Geral

- Analisar livros didáticos de Análise Real referente ao conjunto dos Números Reais, utilizados nos cursos de Licenciatura em Matemática, a fim de identificar dificuldades no processo de ensino- aprendizagem.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Promover uma reflexão sobre o papel do livro didático na disciplina da Análise Real voltado ao conjunto dos Números Reais.
- Fragmentar elementos do capítulo dos números reais, com intuito de aprofundar a análise dos livros de Análise Real.
- Identificar as características didáticas apresentadas pelos livros didáticos de Análise Real referente ao conteúdo dos Números Reais.

1.2.3 Momentos da pesquisa

Capítulo 1- Este trabalho consiste em compreender a contribuição do material didático, em especial do livro didático utilizado na disciplina de Análise Real, na compreensão dos conteúdos pelos licenciandos. Buscamos apresentar a metodologia utilizada neste trabalho, bem como apresentar os objetivos desta obra.

Capítulo 2- Este trabalho busca salientar a importância da disciplina de Análise Real, para a formação do licenciando em Matemática, mostrando que a finalidade não é apresentar conceitos que possam ser utilizados na sala de aula do estudante, mas subsidiar conceitos já estudados pelos discentes.

Capítulo 3- O livro didático apresenta-se como um dos principais recursos didáticos utilizados no estudo da matemática, tanto pelo professor como pelo estudante. Na disciplina de Análise Real também não é diferente, tendo em vista que por diversas vezes o professor utiliza aquele recurso para ministrar as suas aulas, o aluno também o utiliza como recurso para a continuação dos seus estudos fora da universidade. Entretanto, alguns docentes utilizam o livro didático para "terceirizar" alguns materiais, isto quer dizer que os professores utilizam como suporte o livro ou livros didáticos para elaboração de matérias didáticos (Lista de questões, apostilas, slides...) para o acompanhamento da disciplina.

Nesse sentindo, dedicamos este capítulo a apresentar uma análise dos três livros didáticos mais utilizados na universidade pelos estudantes, segundo os estudos já ressaltados nesta metodologia.

1.3 Design da Pesquisa

Neste trabalho, nos restringiremos a analisar apenas três livros didáticos do ensino superior, pois não temos como finalidade apresentar dados quantitativos, mas compreender, a partir desta amostra, dados subjetivos que proporcionem conhecimento sobre o atual cenário do ensino dos Números Reais no curso de licenciatura em Matemática.

Percebemos que a quantidade de material analisado é reduzida para a nossa pesquisa, mas a análise derivada desta amostra proporciona uma reflexão sobre aspectos pertencentes aos livros de Análise Real, e, consequentemente contribuirá para a formação do professor de Matemática do ensino fundamental.

> Os pesquisadores que utilizam os métodos qualitativos buscam explicar o porquê das coisas, exprimindo o que convém ser feito, mas não quanti- ~ ficam os valores e as trocas simbólicas nem se submetem a prova de fatos, pois os dados analisados são não métricos (suscitados e de interação) e se valem de diferentes abordagens. (GERHARDT; SILVEIRA, 2009, p.32).

Quanto à análise dos livros didáticos do ensino superior, houve um questionamento sobre o procedimento “como fazer?”. Assim, realizou-se um estudo sobre os três livros didáticos de Análise Real, em especial sobre os Números Reais, refletindo sobre tópicos pertencentes ao material didático que contribuíssem na visualização do material para o entendimento da disciplina, como também destacar aspectos que pudessem ser lapidados para a formação do professor do ensino básico. Assim, quanto ao procedimento adotado, apontamos esta pesquisa como documental, visto que se vale de materiais que não receberam ainda um tratamento analítico, ou que ainda podem ser reelaborados de acordo com os objetos da pesquisa.

Falar sobre o relacionamento desta disciplina com o lado pedagógico, torna-se delicado, tendo em vista que os fundamentos da Análise Real trazem características de uma Matemática superior. Diante deste argumento é que validamos a nossa pesquisa como pedagógica, pois trouxemos um problema derivado do contexto da sala de aula do ensino superior.

> Desse ponto de vista, identificamos os pesquisadores como "profissionais da sala de aula, em todos os níveis, da pré- escola ao ensino superior; envolvidos, individualmente ou em grupos, em investigação automotivada e autogeradora, sistemática e informada, realizada visando aprimorar sua vocação como educadores profissionais"(LANKSHEAR; KNOBEL, 2008, p.18).

A disciplina de Análise Real nos faz refletir sobre a Matemática que está sendo ensinada aos professores de Matemática, já que os conteúdos que estão sendo ofertados, tanto pelos professores como pelos livros didáticos, não contribuem para a formação do futuro docente. A Matemática ofertada, especialmente pelos livros didáticos, não exprime uma preocupação quanto ao lado pedagógico do futuro professor que deve atuar no ensino básico.

O contexto pedagógico parece não existir, os resultados e as demonstrações parecem não ter ligação com os conceitos do ensino básico, existe a necessidade de solucionar um problema que afeta diversos estudantes, e não somente a dificuldade dos licenciandos em compreender a disciplina, o problema consiste no reflexo da disciplina perante a formação do docente.

Para o desenvolvimento deste trabalho, houve uma preocupação em relação ao roteiro da pesquisa, quais as etapas a serem seguidas. Deste modo, inicialmente atentamos para o referencial teórico que subsidiaria a presente pesquisa.

Dentre os autores utilizados, Moreira, Cury e Vianna (2005) se destacam por salientarem a relevância da Análise Real para o futuro professor de Matemática. Os mesmos também ressaltam a preocupação de como essas disciplinas estão sendo ministradas, considerando que os objetivos do curso não condizem com as necessidades dos alunos.

O segundo ponto compreende a realização das análises dos livros didáticos de Análise Real do curso de licenciatura em Matemática, pois este procedimento proporcionou efetivar um estudo da sua estrutura e dos seus objetivos, com o propósito de verificar a ligação dos conteúdos com a realidade dos futuros docentes. Assim, utilizaremos como parâmetro a pesquisa de Moreira e Viana (2016), que apresenta três livros (a saber: Análise Matemática para a Licenciatura – Geraldo Ávila, Análise I – Djairo G. de Figueiredo e Introdução à Análise Real – Elon L. Lima como pioneiros na disciplina de Análise Real em curso de Licenciatura em Matemática.

Neste análise, apresentamos dois momentos. O primeiro momento consiste em apresentar de forma descritiva alguns parâmetros estabelecidos na tabela 1, que se destina a observar aspectos dos livros de Análise Real restritos ao capítulo dos Números Reais

Deste modo, para a realização da análise dos livros didáticos do ensino superior, estabelecemos critérios para que assim pudéssemos aprimorar o capítulo dos números reais com o intuito de verificar aspectos que nos auxiliassem quanto à realização de um estudo mais aprimorado.

Elaboramos uma tabela, contendo tópicos a serem analisados nas três literaturas ressaltadas anteriormente. Os critérios estabelecidos na tabela seguinte decorreram da experiência como estudante da disciplina de Análise Real, conjuntamente por observar que estes aspectos são considerados elementares para a realização do estudo desta disciplina.

O primeiro critério analisado foi o Prefácio do livro, por compreendermos que, neste item, o autor demonstra ao leitor as expectativas do material produzido, como também a justificativa da elaboração daquele material.

Conhecemos também a organização do capítulo dos Números Reais dos livros analisados. Este fato nos levou a manter a nossa indagação do início deste trabalho, questionando quais conteúdos precisam ser ensinados na disciplina de Análise Real. Percebemos que os conteúdos presentes no capítulo dos Números Reais divergem bastante um do outro, nos levando a pensar na existência de um preceito para a construção do livro didático.

Analisar os exemplos presentes ao decorrer do texto do livro didático também foi um critério, tendo em vista que este tópico pode proporcionar ao aluno uma maior compreensão do que foi exposto, bem como compreender a aplicação do conteúdo teórico. Dentro desta vertente, analisou-se a existência da Matemática superior com a Matemática elementar, assim como a apresentação de exemplos para cada tópico exposto pelo livro.

As notas históricas também fizeram parte desta análise, pelo fato de que cada dia vem ganhando mais espaço no âmbito da Matemática, já que a mesma contribui não somente para ter conhecimento sobre a história, mas na compreensão do conteúdo, pois possibilita ao aluno a compreender gradativamente a construção do resultado a ser estudado.

As demonstrações não poderiam deixar de ser analisadas, já que traduzem um dos objetivos da Análise Real. Desta forma, é conveniente conhecer que tipos de demonstrações estão sendo ofertadas por estes livros didáticos, já que a finalidade da licenciatura difere do bacharelado. O ato de demonstrar deve fazer parte da rotina do professor de Matemática, pois acreditamos que a arte de demonstrar deve ser intrínseca ao licenciando de Matemática.

Por fim, lançamos os nossos olhares para os exercícios ofertados pelos os livros analisados. Este fato demonstra a sua relevância, pois esta disciplina exige que o aluno dedique diversas horas à resolução de exercícios, já que os exercícios diferem uns dos outros. Verificamos também se os exercícios apresentados relacionavam-se com o conteúdo exposto anteriormente.

Deste modo, realizou-se a análise de cada livro levando em conta os aspectos presentes na tabela 1. Já o segundo momento consiste em apresentar as nossas considerações sobre estes temas.

Neste momento, apresentaremos as nossas reflexões quanto aos matérias analisados, como também demonstramos características presentes nos livros que são relevantes para o estudo da Análise Real, assim como também realizamos comparações entre os materiais analisados.

Tabela 1 – Critérios para Análise dos Livros Didáticos

1- Prefácio
2 A organização do capítulo dos Números Reais;
3.0 Como os exemplos são utilizados ao decorrer do texto
3.1 Apresenta aspecto que relacione a Matemática superior com a Matemática elementar;
3.2 A cada tópico apresentado existem exemplo para exemplificação;
4- Notas históricas;
5- Demonstrações;
6- Exercícios.

Fonte: Elaborada pela Autora

2 A ANÁLISE REAL NA LICENCIATURA EM MATEMÁTICA: UM OLHAR AO CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS

Frota (2009) destaca que a educação Matemática, desde 1980, vem lançando os seus olhares para o ensino superior, tendo como uma de suas vertentes a formação inicial do professor de Matemática, quanto ao conhecimento necessário para a sua atuação. Neste sentido, os educadores matemáticos questionam as contribuições de algumas disciplinas no curso de licenciatura em Matemática, visto que algumas disciplinas presentes nas grades curriculares não apresentam grandes ou nenhum significado para os estudantes.

Discutir sobre a formação do professor de Matemática implica debater um amplo contexto, porém este trabalho enfatizará o reflexo da disciplina de Análise Real restrito ao conjunto dos Números Reais na sala de aula do ensino básico. Ainda sobre este aspecto, é viável debater sobre o aporte do livro didático utilizado na disciplina de Análise Real como ferramenta na construção do saber matemático do licenciando em Matemática.

Este capítulo busca refletir acerca da contribuição da disciplina de Análise Real com ênfase ao conjunto dos Números Reais na formação do professor do ensino básico de Matemática, considerando o atual cenário da disciplina formação de professor.

Ao planejar sua aula, o professor precisa refletir sobre diversos aspectos que a aula deve abranger, não somente isso, também deve apresentar grande domínio sobre o conteúdo a ser ministrado, isto quer dizer que o docente ao se preparar para ministrar a sua aula deve estudar além do conteúdo que é proposto. É nesta característica que a Análise Real vem demonstrar a sua contribuição para os licenciandos em Matemática.

É válido refletir sobre a contribuição da disciplina de Análise Real na formação do professor do ensino básico de Matemática, neste sentido, buscamos apresentar novos olhares que possam somar no processo de ensino-aprendizagem, pois o contexto deste curso mostra-se bastante distante da realidade destes docentes.

Não podemos negar que é árduo o caminho para o processo de aprendizagem, contudo, não podemos ficar de braços cruzados, já que precisamos de pessoas que saibam Matemática e a saibam bem.

O método de exaustão (repetir diversas vezes o mesmo exercício com o proposito de decorra-lo) utilizado pelos estudantes na busca da compreensão do conteúdo mostra-se irrelevante ao aprendizado, no entanto, a repetição é um dos poucos recursos utilizados pelos alunos na busca da aprovação da disciplina. O montante por muitas vezes apresentado pelos estudantes consiste na busca incansável em compreender o amontoamento de letras contidas no quadro considerado por muitos insignificantes.

A disciplina de Análise Real busca desenvolver habilidades analíticas na resolução de problemas em um sentido mais amplo, ponderando as hipóteses envolvidas e as possíveis ferramentas que poderão ser utilizadas. Segundo Ávila (2001), "[...] aliada a essa tarefa de praticar a arte de enunciar e demonstrar teoremas, o aluno de licenciatura tem na disciplina de Análise: a oportunidade de se familiarizar com uma das partes mais importantes da Matemática[...]"

As palavras Rigor e Formalismo nos transmitem a ideia de "rigidez", ou seja, uma disciplina que utiliza como recurso a Matemática pela Matemática. Este fato nos preocupa, por que o curso de Análise Real ofertado por diversas universidades vem proporcionando este sentimento ao estudante. Neste sentido, exite uma preocupação quanto ao tipo de formação proporcionada aos licenciandos em Matemática, já que muitos licenciandos deixam as universidades sem um pensar crítico, pois grande parte está centrada na resolução e memorização de exercícios. Acreditamos, assim, que o professor em sala de aula está criando barreiras com os métodos utilizados, sendo o rigor uma característica da disciplina de Análise Real que, por vezes, faz confundir o objetivo dos licenciados com os bacharéis em Matemática focalizando apenas o estudo em uma Análise Real mais avançada. De acordo com Otero- Garcia, Baroni e Martines (2013), desde a implantação da disciplina de Análise Real para licenciando em Matemática no Brasil, o curso apresenta características mais voltadas para bacharéis.

As universidades, consideradas cérebro do processo de pesquisa no âmbito educacional, vêm demostrando uma divergência quanto às áreas de pesquisa da Matemática. Atualmente, na academia, o que se percebe é uma rivalidade quanto aos campos de pesquisa,de modo que ministrar a disciplina de educação Matemática torna-se adverso aos conhecimentos dos docentes de Matemática, sendo esse processo recíproco. Isto significa que a educação Matemática e a Matemática em si divergem quanto a formação do professor do ensino básico.

Tais apontamentos derivam do atual cenário da formação inicial dos professores do ensino básico de Matemática, pois em sua grande maioria os alunos saem da graduação com um grande "deficit de integração dos conteúdos"vivenciados durante o curso, ou seja, o processo de integração dos conteúdos matemáticos com os conteúdos pedagógicos não integra-se no processo de ensino, formando assim só mais um docente no campo educacional. Este argumento busca chamar atenção do papel do professor formador dos cursos de licenciatura em Matemática, pois ser professor de uma determinada área de ensino não implica desprezar o papel de outras áreas no processo de formação do discente.

Este tópico proeminente corrobora o nosso trabalho, pois o livro didático contribui significativamente para entrelaçar o elo da Matemática superior com a educação Matemática. Neste sentido, o livro didático da disciplina de Análise Real do curso de licenciatura em Matemática pode atenuar a dificuldade encontrada pelo docente em estabelecer a ligação dos conteúdos desta disciplina com os conteúdos da Matemática básica.

É necessário chamar a atenção do educadores do ensino superior quanto à importância da disciplina de Análise Real no curso de Matemática, considerando que o professor da escola básica precisa conhecer certos conceitos e métodos a partir do ponto de vista da academia. De acordo com Moreira, Cury e Vianna (2005), existe um consenso quanto à obrigatoriedade da disciplina de Análise Real no curso de licenciatura em Matemática, ainda que exista uma dicotomia nas visões dos educadores matemáticos e matemáticos quanto aos objetivos da disciplina. Na visão dos educadores matemáticos, a Análise Real tem como objetivo possibilitar aos graduandos o contato com a Matemática superior, tendo em vista que essa pode ser a única oportunidade para tal. Preocupando-se também com a metodologia adquirida pelos professores, em controvérsia, os matemáticos apresentam a necessidade de estudar a disciplina como forma de favorecer ao futuro professor subsídio para um pensar matemático, tratando-se de familiarizar o licenciando com um método próprio da ciência Matemática.

As habilidades e competências adquiridas ao longo do curso de licenciatura e bacharelado em Matemática possuem finalidades diferentes, visto que o bacharelado objetiva a preparação de profissionais para a carreira de ensino superior e pesquisa ao passo que a licenciatura busca a formação de professores para a educação básica.

Segundo as Diretrizes Curriculares para Cursos de Matemática (BRASIL, 2001), o curso de bacharelado em Matemática garante aos alunos ingressantes uma sólida formação de conteúdos de Matemática, como também uma formação que permita enfrentar desafios decorrentes das rápidas transformações da sociedade, do mercado de trabalho e das condições de exercícios profissionais.A licenciatura, por sua vez, busca desenvolver o papel social do educador, levando-o a refletir sobre o papel da aprendizagem da Matemática na sociedade, como também buscar métodos que possibilitem conhecimento matemático a todos.

É nítida a relação existente entre os cursos de bacharelado e licenciatura em Matemática, no entanto, os objetivos e finalidades de suas profissões serão distintos, haja vista que o processo de formação deve ser diferenciado, embora atualmente diversas universidades utilizem a mesma turma e o mesmo professor para o processo de ensino-aprendizagem das disciplinas intersectadas para ambos os cursos.

Indagar sobre os conhecimentos necessários para o professor de Matemática tem sido uma das preocupações da educação Matemática, neste sentido, buscamos também promover uma reflexão a respeito dos conhecimentos necessários para o docente de Matemática do ensino básico e os saberes decorrentes do curso de licenciatura, já que os objetivos das disciplinas do curso de graduação, muitas vezes, divergem quanto aos objetivos da docência.

Nosso interesse pela disciplina de Análise Real na Licenciatura decorre do fato de acreditarmos na relevância desta cadeira na da construção do conhecimento do licenciando, entretanto, a dificuldade em compreender os conceitos e desenvolver as habilidades que esta disciplina exige vem ganhando cada dia destaque, pois de acordo com as pesquisas o método de ensino adotado pela disciplina não contribui na compreensão.

Em suas pesquisas, Moreira, Cury e Vianna (2005) retratam a influência da comunidade científica no processo de ensino- aprendizagem na licenciatura em Matemática, questionando os docentes sobre a obrigatoriedade da disciplina de Análise Real na formação do profissional. Os professores ressaltaram a importância desta disciplina e a sua relevância quanto ao desenvolvimento do pensar matemático e uma maior maturidade intelectual ao aluno, desenvolvendo métodos e técnicas que venha a favorecer o estudante a adotar uma postura ativa no conhecimento matemático superior.

> Como catalizadores da sociedade do conhecimento, os professores devem ser capazes de construir um tipo especial de profissionalismo, no qual: a) promovam um aprendizado cognitivo profundo; b) sejam comprometidos com uma aprendizagem profissional contínua; c) aprendam a ensinar de modo diferente de como foram ensinados por seus antigos mestres; d)trabalhem e aprendam com os seus pares(em grupos); e)desenvolvam a capacidade de mudar, arriscar e pesquisar; f) construam, nas escolas, organizações de aprendizagem. (PIMENTA, 2002, p. 188).

A arte de ensinar perpassa técnicas e métodos adquiridos na universidade, pois como docentes esperamos que o aprendizado atinja todos os discentes da sala de aula. Entretanto, para que este processo se concretize, faz-se necessário compreender o lado subjetivo de cada aluno, uma vez que trabalhamos com pessoas distintas e, consequentemente, com métodos de aprendizagem diferentes.

Continuamente, como professores, somos desafiados pela sociedade a mudar e adaptar o processo educacional à atual realidade. A inserção da tecnologia na sociedade faz com que repensemos as nossas metodologias, já que os nossos alunos necessitam vivenciar o novo.

2.1 O cenário do Ensino de Análise Real: Um olhar a partir das pesquisas

Esta secção visa esboçar algumas considerações sobre o atual cenário da disciplina de Análise Real. Neste sentido, Otero- Garcia, Baroni e Martins (2013) realizam uma pesquisa bibliográfica sobre a trajetória da disciplina de Análise Real nas respectivas universidades: Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras (FFCL) da Universidade de São Paulo (USP). Este trabalho confirma que poucas mudanças foram vivenciadas no curso de

Análise Real, tendo em vista que grande parte de seus preceitos está mais voltada para o bacharelado em matemática.

Os fundamentos desta disciplina pouco se modificaram para adaptar as necessidades dos licenciando em matemática, como ressaltamos anteriormente, o direcionamento da disciplina, bem como a sua estrutura, pouco contribui para que os conhecimentos derivados desta disciplina contribuíssem para o real objetivo na licenciatura.

> [...] o que entendemos por uma disciplina de análise hoje em dia só começa a ganhar forma na década de quarenta e efetivamente compõe a grade do curso na década de sessenta. Além disso, em ambos os cursos, os conteúdos trabalhados nos atuais cursos de análise, bem como a sua sequência, foram herdados daqueles primeiros cursos que indistintamente tratavam do cálculo e da análise e não sofreram maiores transformações ao longo dos anos. Também, uma vez estabelecidas as disciplinas específicas de análise na década de setenta, sua estrutura geral pouco se alterou até os dias de hoje. (OTERO-GARCIA, 2011, p. 214-215).

O embasamento da disciplina vivenciada na década de setenta difere dos objetivos traçados para a disciplina de Análise Real diante um curso de licenciatura em matemática. Ou seja, será que o material didático, bem como a metodologia utilizada nos dias atuais, se adequariam às décadas anteriores?

A finalidade de um curso de licenciatura em Matemática consiste em formar docentes aptos a atuarem no ensino básico. Desta forma, as instituições de ensino devem ofertar disciplinas que preparem os futuros docentes para o desenvolvimento profissional. Assim, a Análise Real, apesar de apresentar o rigor e o formalismo como características, deve relacionar os seus conceitos às necessidades do professor do ensino.

A disciplina de Análise Real, ao ser direcionada a licenciatura em Matemática, não deve deixar de lado as suas características essencias, mas deve abordar conteúdos voltados a formação de professores do ensino básico. Segundo Otero-Garcia (2011, p.77), "Assim sendo, o curso de Licenciatura em Matemática deve estar voltado para formar o professor com conteúdos, métodos a serem aplicados no ensino básico e pode-se afirmar que isso é possível dentro de cada disciplina estudada, bem como a de Análise Matemática."

Diante de todas as literaturas já utilizadas em consonância com a nossa, percebemos que o número de pesquisas existentes sobre o ensino dos Números Reais na Licenciatura em Matemática ainda é pequeno, quando comparamos com os problemas que esta vem apresentando. O ensino dos Números Reais na Licenciatura apresenta um leque de dificuldades quando nos referimos ao processo de ensino-aprendizagem, pois diversos fatores são destacados a este procedimento.

Neste mesmo sentido, Bolognezi (2006), em sua pesquisa, apresenta um quadro apontando fatores que contribuem para a dificuldade do aprendizado da disciplina, segundo a visão dos estudantes do curso de Licenciatura e Bacharelado em Matemática.

Figura 1 – Fatores que contribuem para o aprendizado dos licenciandos

3.8. Fatores que contribuem para a dificuldade segundo os alunos

	LICENCIATURA	BACHARELADO	LICENCIATURA E BACHARELADO
FATORES QUE CONTRIBUEM PARA A DIFICULDADE APONTADA PELOS ALUNOS E EM PERCENTUAL	• Conteúdo denso, 32%; • Rigor nas demonstrações, 18%; • Falta de preparo no decorrer do curso, 9%; • Pouco tempo/muito conteúdo, 9%; • Professores preocupados com o conteúdo e não com a formação do docente, 32%.	• Falta de empenho dos alunos, 50%.	• Falta de empenho dos alunos, 50%. • Conteúdo denso, 50%.

Fonte: QUESTIONÁRIO APLICADO AOS ALUNOS PELA PESQUISADORA (APÊNDICE I).

Fonte: Bolognezi (2006)

Os alunos de Licenciatura apontaram os seguintes tópicos como fatores que dificultam a aprendizagem da disciplina: Conteúdo denso; Rigor nas demonstrações; falta de preparo no decorrer do curso; Pouco tempo, muito conteúdo; professores preocupados com o conteúdo e não com a formação do docente. Já os estudantes de Bacharelado afirmam a falta de compromisso com a disciplina.

Diante desses resultados, percebemos que um dos fatores que mais se destacam diante os alunos de Licenciatura em Matemática é o grande número de conteúdos apresentados pelo professor, desconsiderando a relevância dos temas para a formação do profissional. Este aspecto traduz a preocupação do docente formador em cumprir a grade curricular estabelecida pelo curso, levando-nos, assim, a refletir sobre a relação quantidade X qualidade que também se acentua na formação do professor, evidenciando que ainda as academias estão bastante preocupadas com os números de conteúdos estudados pelos graduandos e omitindo a qualidade da aprendizagem.

De acordo com os dados fornecidos no quadro, percebemos as relações existentes entre a profundidade que os conteúdos são vivenciados na disciplina e o rigor nas demonstrações, pois a essência destes implica no rigor utilizado no estudo da disciplina, que é característica essencial dela, porém, acreditamos que o problema central traduz a abordagem de conteúdos que não são voltados para a licenciatura em matemática. Assim, Matos (2016) considera que a formação inicial do professor de Matemática deve considerar a diversidade do conhecimento e da experiência matemática, de maneira que o conteúdo do ensino superior esteja articulado às questões que permeiam a prática docente.

Outros estudantes apontam que a falta de preparo é a consequência do insucesso na disciplina, ou seja, que o problema vivenciado hoje pelos estudantes é um reflexo da má lapidação desenvolvida durante o curso. A quantidade de conteúdo e o tempo disponível para "degustar" a disciplina, não são compatíveis para que ocorra a aprendizagem.

Em âmbito geral, percebemos que existem muitas lacunas a serem trabalhadas, já que o atual cenário dos ensino dos Números Reais deve ser modificado para que, assim, possa existir um aperfeiçoamento na formação do professor de Matemática do ensino básico.

2.2 Pesquisas e Reflexões a Respeito dos Livros Didáticos dos Números Reais na disciplina de Análise Real Utilizados nos Cursos de Licenciatura em Matemática

De acordo com as mais diversas literaturas, entre elas o Acervo : revista do Arquivo Nacional (1995) o homem tinha a necessidade de registrar os mais diversos acontecimentos históricos, derivando-se, assim, o surgimento do livro. De acordo com Mendes (2016), os primeiros livros didáticos eram produzidos por fibras de vegetais, tecidos e barro cozido. Entretanto, percebemos as mais diversas formas que os livros vêm se manifestando, tornando-se um instrumento tecnológico de memória humana.

O livro para ser apresentado em seu costumeiro padrão passou por modificações em diversas províncias.Segundo Mendes (2010), na Idade Média, na Europa, o livro sofre os efeitos do excessivo fervor religioso, passando a ser considerado um objeto de salvação. A característica mais marcante da Idade Média é o surgimento de monges copistas, homens dedicados em período integral a reproduzir as obras, herdeiros dos escribas egípcios ou dos libraii romanos. Nos Monastérios era conservada a cultura da Antiguidade. Nessa época, aparecem os textos didáticos destinados à formação dos religiosos.

Mas, a invenção mais importante, já no limite da Idade Média, foi a impressão no século XIV, que consistia originalmente na gravação em blocos de madeira do conteúdo de cada página do livro; os blocos eram mergulhados em tinta, e o conteúdo transferido para o papel, produzindo várias cópias. Mas, foi na China que a máquina impressora passou a provocar uma revolução cultural.

De acordo com as mais diversas literaturas, o livro restringia-se à burguesia e ao clero, acredita-se que o primeiro livro escrito em português buscava traduzir a obra de Sexão de Bernardo de Alcoboça a pedido da rainha Leonor. Registra-se ainda que o primeiro livro impresso no Brasil destinava-se ao clero na busca de evangelizar os índios.

O livro tem as mais diversas finalidades em nosso cotidiano, suprindo a necessidade na busca de lazer, de aventuras, romances, como também de conhecimento científico. Seja qual for a sua finalidade, o livro torna-se um companheiro que dialoga com o pensamento e faz refletir sobre o contexto em que o mesmo está inserido, possibilitando ao leitor ler e reler quantas vezes for necessário.

> O livro é também considerado como um tipo de mídia que pode ser veículo e suporte de difusão de informações; meio capaz de transmitir mensagens; recurso portátil que pode ser lido e relido por pelo menos uma pessoa; artefato tecnológico que pode proporcionar, ao mesmo tempo, aprendizagem \ divertimento, informação \ emoção e conhecimento \ imaginação. (MENDES, 2016, p.27).

A tecnologia vem sendo uma importante aliada no processo educacional, por apresentar diversos recursos que permitem uma leitura prazerosa e cômoda, já que o livro, por maior que seja, pode caber dentro de um celular, por exemplo.

A grade curricular adotada por grande parte das instituições de ensino elenca disciplinas ditas como específicas que não contribuem de forma significativa na formação do docente, por apresentar conteúdos aparentemente sem significado. No entanto, antes de discutirmos a importância da grade curricular, devemos analisar a opção por uma determinada metodologia ou recursos metodológicos, posto que a prática pedagógica deve ser pautada na reflexão e compreensão sobre que papel a Análise Real representa na formação Matemática dos estudantes.

De acordo com Reis (2001), os conteúdos da disciplina de Análise Real já são estudados durante a disciplina de Cálculo Diferencial Integral, isso porque os tópicos fundamentais de um curso de licenciatura em Cálculo são os mesmos de um curso de Análise Real. Todavia, o curso de cálculo Diferencial Integral fundamenta-se em aplicações, ao passo que o curso de Análise trabalha uma perspectiva lógico- formal, com definições rigorosas dos objetos estudados. Neste mesmo sentido, percebe-se que a disciplina de análise real a cada dia vem ganhando mais abstração, no sentido de que as teorias estudadas durante o curso e revistas na disciplina não conseguem ser aplicadas na resolução de problemas. Definições e teoremas, como também as demonstrações realizadas pelos docentes, fazem sentido em sala de aula, no entanto, ao passo em que é cogente ao aluno desenvolver o pensar matemático, o mesmo não consegue enxergar a necessidades da aplicação. Na verdade, nem sempre as demonstrações e definições são compreendidas pelos alunos, pois a cada demonstração realizada não é compreendida a fundamentação existente em cada teorema.

Cabe ressaltar que os conteúdos estudados durante o curso precisam serem vistos sob uma nova ótica, tendo em vista que pesquisas apontam que conceitos e teoremas são compreendidos, mas não apreendidos na resolução de problema. A teoria vivenciada pelos estudantes parece não ser aplicável no processo de demonstração. A teoria estudada consegue uma maior abstração do que da própria realidade.

De acordo com a literatura Matemática, a maioria dos livros utilizados, tanto no curso de licenciatura como de bacharelado em Matemática, apresentam uma sequência de tópicos considerados relevantes para a edificação do conhecimento do estudante. Nesta perspectiva, Bolognezi (2006) apresenta em sua pesquisa de mestrado uma relação de conteúdos vistos no programa da disciplina de Análise Matemática pela universidade abordada.

1. Números Reais;
2. Limite e Continuidade;
3. Derivação;
4. Funções trigonométricas;
5. Integração;
6. Funções Logarítmicas e Exponenciais;
7. Sequências e Séries de Funções.

Moreira, Vianna e Cury (2005) também retratam em seu trabalho uma pesquisa realizada por trinta e um matemáticos em relação à importância da disciplina Análise Real no curso de licenciatura em Matemática. Apresentam também um sumário formado por tópicos considerados relevantes para o curso de Análise.

1. O conjunto dos números reais como corpo ordenado completo;
2. Sequências e séries de números reais;
3. Continuidade de funções reais de variável real;
4. Derivada de funções reais de variável real;
5. Integração (Riemann) de funções reais de variável real. .

Conforme as pesquisas apresentadas acima, existe um encadeamento quanto aos conteúdos a serem ministrados na disciplina, no entanto, percebe-se que os trabalhos apresentam resultados distintos. A sequência utilizada pelos autores difere quanto aos conteúdos e a ordem. Questionar sobre a melhor sequência a ser utilizada é válido, como também questionar qual dessas sequências é a melhor a ser seguida.

A Análise Real é uma disciplina que se fundamenta no conhecimento matemático do futuro professor do ensino básico, ainda que não seja uma disciplina de aplicação direta na prática docente, buscando realizar uma conexão entre a Matemática do ensino superior com a Matemática do ensino básico.

A disciplina de Análise Real deveria propiciar aos estudantes uma "autonomia Matemática", que permite aos estudantes consolidar e formalizar uma junção de conhecimentos trazidos pelas disciplinas cursadas durante o curso, prezando por demonstrações rigorosas e por um raciocínio bem articulado.

O livro didático assume papel fundamental na disciplina de Análise Real, visto que este recurso é utilizado como importante instrumento na construção do conhecimento. Porém, o que vem sendo discutido é a utilização deste recurso que vem proporcionando aos estudantes uma dependência quanto aos conteúdos estudados e aos exercícios a serem resolvidos. Essa dependência questionada não se restringe apenas aos métodos utilizados pelos alunos, mas também pelo professor.

O rigor e argumentação utilizados pelo professor formador diferem da linguagem utilizada pelo futuro professor com os seus alunos. Qual o significado do conjunto dos números reais no curso de licenciatura em Matemática? Questionar acerca desse fator nos faz refletir sobre a compreensão desta disciplina na sua carreira profissional, bem como as contribuições da mesma em seu cotidiano.

Os professores ministrantes da disciplina de Análise Real, como qualquer outro docente, trazem consigo as suas crenças e metodologias desenvolvidas no decorrer do curso de formação. A característica do curso de Análise Real apresenta, geralmente, os mesmos aspectos em relação ao professor, notas de aulas, sequências didáticas, como também as atividades a serem desenvolvidas no processo de ensino e aprendizagem. Ser um bom docente não significa apenas ter conhecimento matemático e sim saber aplicá-lo de forma adequada para que possa provocar uma maior compreensão dos alunos.

A tecnologia a cada dia vem ganhando mais espaço na sociedade e na educação. Atualmente, diversos aplicativos foram criados com intuito de uma melhor compreensão de conteúdos matemáticos que têm como finalidade o tracejado do gráfico na compreensão das definições e teoremas.

3 OS NÚMEROS REAIS NOS LIVROS DIDÁTICOS DE ANÁLISE REAL

3.1 As Contribuições do Livro Didático de Análise Real para o conhecimento dos Números Reais

O livro didático é importante em qualquer nível de ensino, constituindo-se como instrumento de capacidade em definir conceitos e organizar conteúdos, servindo de referência para a elaboração de estratégias de ensino, bem como para direcionar uma sequência didática a ser planejada pelo professor, que tem toda a liberdade de dar outros enfoques dentro do assunto, bem como acrescentar, modificar, complementar e também inserir novos problemas de acordo com as necessidades surgidas e com o desenrolar do conteúdo.

Nesta perspectiva, o modo como o professor lida com o livro didático é que favorece o processo de aprendizagem dos estudantes. Desse modo, que professor e alunos podem juntos construir um saber que não decorre apenas da simples transmissão de informações contidas no livro didático, mas, através de uma convivência mútua, na qual ambos têm o seu papel ativo: o professor como orientador e facilitador da aprendizagem, e o aluno como descobridor, através de suas indagações e questionamentos.

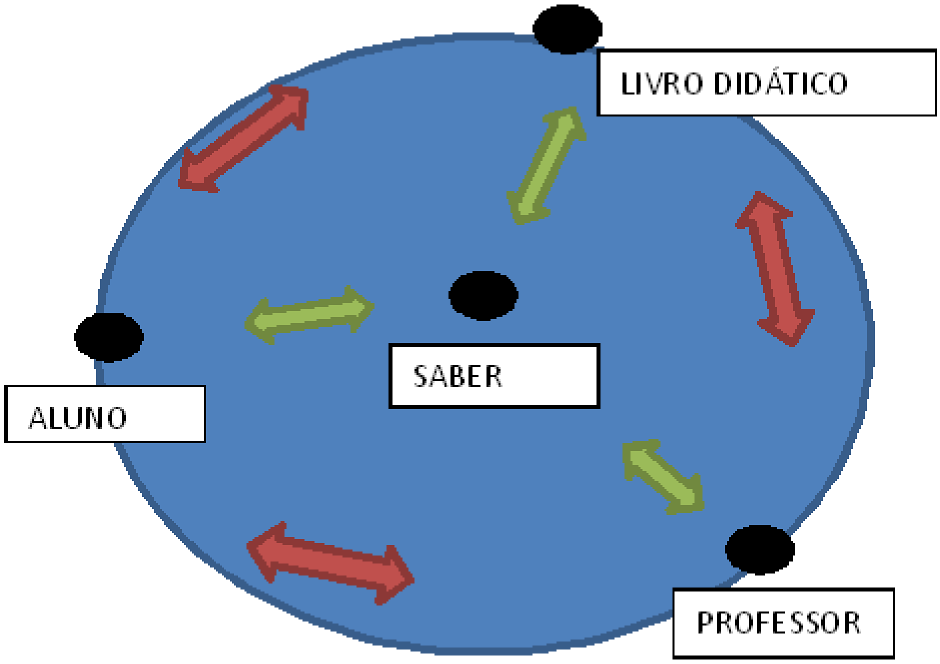
É necessário refletir sobre a contribuição deste material no processo de ensino-aprendizagem tendo, em vista que este recurso tem grande valia para os professores no processo de ensino e na elaboração da aula, como também para os alunos que, muitas vezes o utilizam como único recurso didático.

Um problema a ser destacado está no ato da utilização do livro didático, pois os alunos e professores não concebem este material como um processo dialético, uma troca de ideias entre autores e interlocutores, mas consentem o que está escrito como verdade, deixando de lado o senso crítico ou até mesmo não realizando uma reflexão sobre a intenção do autor em escrever uma determinada observação, por exemplo.

Buscando definir a principal função do Livro didático, delineamos que ele propõe aguçar e desenvolver o pensamento dos alunos quanto às diversas concepções do que está escrito. Nesse sentido, interessa-nos compreender as contribuições do livro na prática do professor de Matemática que podem contribuir no processo de ensino-aprendizagem da Análise Real no ensino superior.

Ao discutir sobre o capítulo dos Números Reais no livro didático de Análise Real de Análise Real em um curso de licenciatura em Matemática, convém falarmos de quatro elementos importantes para a validação do material didático. Entende-se por validação a utilização do livro didático no processo de ensino-aprendizagem, com a finalidade de

Figura 2 – Troca de conhecimentos: Aluno, sabe,Livro didático e Professor



Fonte: Elaborada pela Autora.

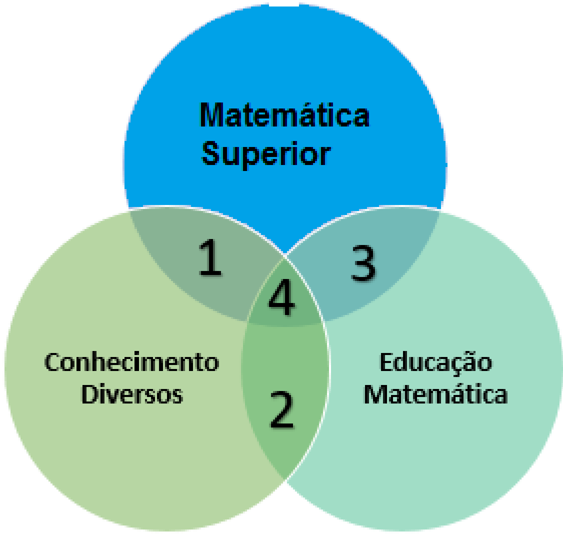
discutir as ideias apresentadas pelo autor do livro.

Os quatro elementos ressaltados no parágrafo anterior e apresentados também na figura 3.1, abordam o processo de aprendizagem com o recurso do livro didático. Cada sujeito (Livro didático, aluno, professor) apresenta sua particularidade e sua contribuição em busca do saber. A finalidade da figura apresentada é apresentar o processo educacional decorrente da troca de conhecimento, em uma sala de aula ou não. Assim, esses sujeitos interagem proporcionando conhecimento, onde cada participante contribui de forma significativa de acordo com a sua especificidade.

O aluno, ao conduzir-se ao curso de Análise Real, traz conhecimentos derivados de outras disciplinas que, possivelmente o subsidiará na compreensão dos conteúdos da disciplina. O professor, um mediador do conhecimento, tem a incumbência de proporcionar aos estudantes um leque de informações que necessitam de um recurso para o processo de troca de saberes. O livro didático, recurso de grande utilidade para esta disciplina, deve apresentar um estudo aprimorado dos números reais, com reflexos de uma Matemática voltada para o ensino básico. O SABER, na verdade, é um produto da troca de conhecimentos aluno, professor e livro didático.

A partir de agora, voltaremos os nossos olhares para os requisitos necessários da elaboração de um livro de Análise Real. Cabe esclarecer que este tópico não busca apresentar conteúdos para a criação do livro, mas trazer à tona aspectos subjetivos inerentes ao livro de Análise principalmente no tópico Números Reais voltados ao ensino do curso de licenciatura em Matemática. Acreditamos assim, que qualquer livro didático necessita atender a alguns requisitos, pois um livro não compreende apenas em conteúdo específico, mas abrange uma diversidade que ajuda a compreender o conteúdo estabelecido.

Figura 3 – Características essenciais que devem estar presentes nos livros didáticos de um curso de Licenciatura em Matemática



Fonte: Elaborada pela Autora.

Do ponto de vista da educação Matemática, um livro didático pode restringir-se apenas a conteúdos específicos, mas deve apresentar uma diversidade de assuntos que auxiliem na compreensão da Matemática na sociedade. Desta forma, acreditamos que para a construção de um livro de Números Reais voltado para o docente do ensino básico deve haver uma ligação do que é estudado e do que é vivenciado pelo educando.

Em decorrência das diversas literaturas e reflexões, a imagem 3.2 tenta expressar um esquema necessário para a construção do material didático de Análise Real. Assim, o esquema ilustrado busca apresentar um englobamento de três conjuntos (os conteúdos da Matemática superior, da Educação Matemática e os diversos conteúdos - Aplicabilidade da Análise Real no ensino básico), considerados importantes para a elaboração do material didático de Análise Real.

1. A Matemática e os conhecimentos diversos: Este ponto representa uma das principais dificuldades encontradas pelos alunos, pois durante a graduação dedicam boa parte do tempo às disciplinas da Matemática superior e, muitas vezes, não conseguem relacionar a aplicabilidade daquele conteúdo na sociedade, ocasionando a indagação "para quê

estudar este conteúdo?". Salientamos que a Análise Real não possui uma aplicabilidade direta nos conteúdos do ensino básico, porém, na disciplina o aluno estuda conceitos que permitem aprimorar o seu conhecimento enquanto professor. Um estudante da disciplina de Análise Real não irá utilizar aqueles conceitos exatamente na sala de aula do ensino básico, mas, certamente, terá mais propriedade na abordagem dos conteúdos. (Os conhecimentos adquiridos sobre o conjunto dos Números Reais, adquirido na disciplina de Análise Real serão apenas subsídio para a sua atuação como docente.)

2. Neste segundo tópico, apontamos a relação existente entre a educação Matemática e os conhecimentos diversos. Este ponto se destaca pelo fato da educação Matemática acreditar que a Matemática não, restringe às quatro paredes da escola, mas considera que a Matemática está em todos os lugares do nosso cotidiano. Esta visão deve fazer parte da formação do professor, tendo em vista que as considerações que os atuais alunos do ensino básico têm sobre a Matemática é decorrente do que o professor traduz ao aluno.

3. A ligação estabelecida na figura não é o que realmente acontece, já que estes campos de estudos ainda se mostram distantes um do outro. Falamos isto de forma hipotética, porém quando discorremos sobre os Números Reais, acreditamos que os docentes da Matemática superior defendem a necessidade de um estudo mais abrangente da Matemática científica e os educadores matemáticos acreditam na necessidade de um olhar pedagógico para esta disciplina. Entretanto, o que falamos com propriedade é que algo deve ser feito sobre o ensino de Análise Real, pois o aproveitamento da disciplina está sendo pequeno se comparado ao a que poderia ser.

4. Na realidade este item expressa a união entre todos os pontos aqui citados, pois acreditamos que qualquer livro de Matemática utilizado em qualquer disciplina deve apresentar este encadeamento, já que esta junção possibilita a formação de um livro que proporcione a criticidade Matemática.

3.2 A Transição do Cálculo para a Análise Real

É primordial a realização do estudo do Cálculo, para que posteriormente possamos realizar uma erudição mais aprofundada referente ao ensino da Análise Real. Nesse segmento, cabe ressaltar a importância da transição do Cálculo para Análise, já que apresenta uma diferenciação não somente nas questões históricas, mas também por motivações científicas e pedagógicas. Faz-se necessário considerar o amadurecimento progressivo do estudante que apreende os conceitos do Cálculo de maneira intuitiva para, em um estágio posterior, retornar aos mesmos conceitos, dessa vez vestidos a rigor.

Existia uma necessidade quanto a uma formulação rigorosa do cálculo, de acordo com Evens (2009), pois o cálculo tinha uma grande aplicabilidade no cotidiano dos matemáticos, porém os mesmos manipulavam os processos analíticos de uma maneira quase cega, guiados, em sua maioria, pela intuição, carecendo de um entendimento real dos seus fundamentos. Diversos matemáticos dispuseram a busca pela formalidade e, apesar das diversas tentativas que vieram a fracassar, contribuíram para outros resultados.

Segundo Evens (2009) o cálculo surgiu no século XVII, por um desenvolvimento gradativo, tendo como percursos: Kepler (1571-1630), em que sua linha de pesquisa era calcular o volume dos tonéis, tendo como apoio o livro de Galileu (1564-1642), intitulado Diálogos sobre Duas novas Ciências, que contém diversas ideias da nova Matemática. Também, não podemos deixar de ressaltar alguns matemáticos que contribuíram para a primeira fase, tais como: Pierre de Fermat (1601-1663), René Descartes (1638-1675), Issac Barrow (1630-1677), James Gregory (1638-1675), entre outros, que tiveram importância significativa. No tocante à transição do cálculo para Análise trabalhada por Cauchy (1789 – 1857), Weierstrass (1815 – 1897) defendeu a necessidade de que o sistema de números reais fosse tornado rigoroso, o que veio a concretizar com Dedekind (1831 -1916) e Peano (1858 – 1932), que mostraram como o sistema dos números reais pode ser deduzido de um conjunto de postulado para o sistema dos números naturais.

Um dos resultados principais, concentra-se no Teorema Fundamental do Cálculo que estabelece a importante conexão entre o Cálculo Diferencial e o Cálculo Integral. Entretanto, foram Newton e Leibniz os precursores, que independentemente exploraram essa conexão e desenvolveram o Cálculo. Em particular, eles perceberam que o Teorema permitia encontrar a área de uma figura plana de uma forma muito fácil, sem a necessidade de se calcular a soma de áreas de um número indeterminadamente grande de retângulos, mas sim usando a antiderivada da função envolvida.

Como um professor formador pode contribuir no processo de ensino-aprendizagem dos Números Reais a um licenciando em Matemática? Quanto a intuição utilizada no ensino de Cálculo deve ser deixada de lado no ensino de Análise? O rigor utilizado no ensino de Análise Real deve prevalecer no ensino?

O perfil atualmente encontrado pelo professor formador de Análise Real condiz com um matemático que traz consigo suas crenças e opiniões que venham a contribuir no processo de aprendizagem do aluno. No entanto, como já foi dito neste trabalho, existe uma preocupação quanto à dificuldade encontrada pelos alunos na compreensão dos conceitos da Análise Real, já que o método utilizado no processo de ensino não tem uma especificidade quanto ao processo de ensino-aprendizagem.

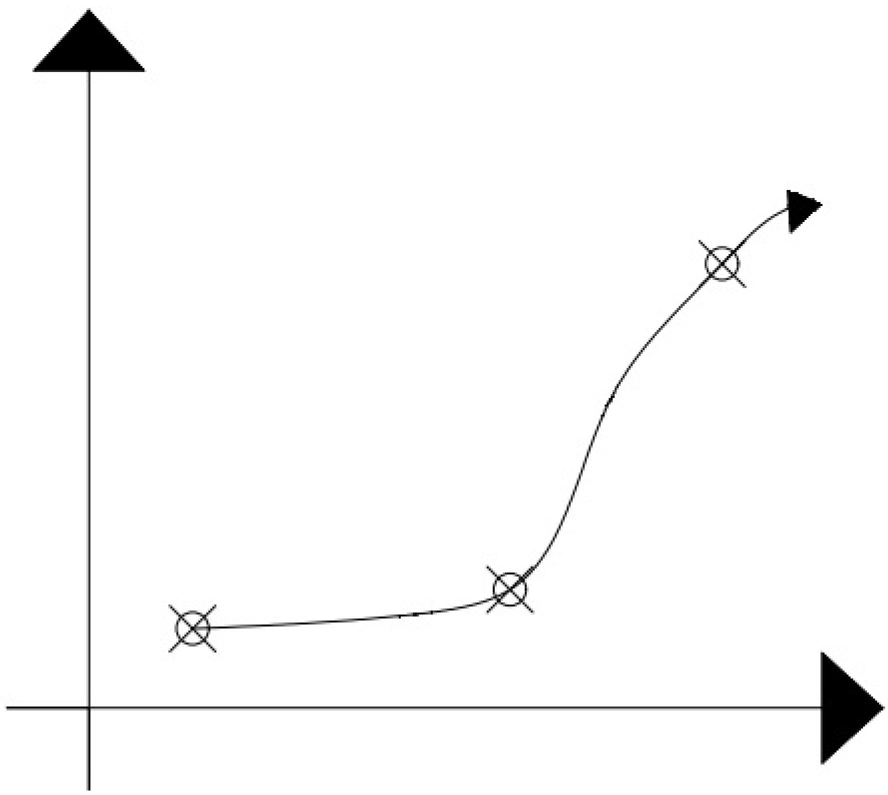
Ao entrar na graduação, o aluno traz consigo conhecimentos matemáticos que tendem a contribuir para sua formação. Logo após, ele passa a ter seus primeiros contatos com a Matemática elementar, como também a Matemática dita como avançada.

Por Matemática avançada, entende-se aquela que é ensinada nas universidades e que reflete em sua estrutura os aspectos considerados essenciais do conhecimento matemático produzido pelos matemáticos profissionais; em especial, aqueles relacionados a objetos construídos a partir de definições e a noção de prova.

Geralmente, as instituições de ensino ofertam disciplinas básicas, se tornam coadjuvantes no pensar matemático, são elas: Matemática Básica I; Matemática Básica II; Matemática Básica III; Matemática Básica IV; Matemática Básica V; Cálculo Diferencial; Cálculo Integral e Série; Cálculo Vetorial; Funções de Várias Variáveis; Equações Diferenciais Ordinárias; Álgebra Linear I; Estruturas Algébricas; Introdução à Teoria dos Números; Introdução à Lógica Matemática; História da Matemática; Desenho Geométrico; Tópicos de Geometria I; Tópicos de Geometria II; Introdução à Probabilidade; Análise Real; Física Geral I; Física Geral II; Laboratório no Ensino de Matemática I; Laboratório no Ensino de Matemática II.

Os autores que realizam estudos sobre o ensino de Análise Real enfatizam a conexão existente entre o cálculo e análise real, até mesmo pelo seu contexto histórico, contudo a disciplina de análise real é estudada geralmente no último período do curso, proporcionando aos alunos uma ligação não somente com as disciplinas de cálculo diferencial integral, mas também com as outras disciplinas estudadas no decorrer do curso.

Figura 4 – O pensar matemático.



Fonte: Elaborada pela Autora.

De acordo com a figura 4, podemos observar o crescimento do pensar matemático que se dá de forma gradativa, tendo como ponto de partida os conhecimentos trazidos pelos alunos, e que são criticados pela maioria dos professores de Matemática. A dificuldade trazida pelos alunos em sua formação básica refletirá de forma negativa no processo de ensino e aprendizagem na graduação, implicando uma missão dialética dos professores nas universidades, já que os mesmos terão que cumprir os objetivos da disciplina e ao mesmo tempo suprir as dificuldades dos estudantes.

O segundo ponto da figura 4, indica os primeiros contatos do aluno com a Matemática superior, em que são apresentados a diversos conceitos e exemplos que retratam as diversas aplicações da Matemática no cotidiano. Não é objetivo deste trabalho tratar as dificuldades encontradas pelos alunos no curso de Cálculo Diferencial Integral, no entanto para compreendermos o processo de aquisição do pensar matemático é válido refletir sobre a metodologia utilizada pelos professores nesta disciplina que vem acarretando um grande número de reprovação, segundo pesquisa.

Os alunos finalmente chegam ao terceiro ponto, onde os mesmos, que antes trabalhavam com as ideias intuitivas passam a ter o primeiro contato com a Matemática formal ligada ao rigor. Nesta perspectiva são apontados diversos fatores que dificultam no processo de ensino-aprendizagem dos Números Reais, em um curso de Análise Real.

Crenças trazidas pelos alunos: Um dos fatores que inibe o processo de aquisição é derivado das crenças trazidas pelos estudantes de Matemática, que, desde os seus primeiros contatos com outros alunos já da graduação, transferem um sentimento de angústia e insatisfação da disciplina estudada.

Metodologia de ensino: De acordo com Moreira, Cury e Vianna (2005) a disciplina de Análise Real é um dos pilares para os futuros estudos dos bacharéis em Matemática, no entanto, a metodologia utilizada pelo professor ministrante da disciplina de Análise Real é a mesma para os bacharéis e os licenciados, não apresentando uma especificidade no processo de aprendizagem, pois cada curso possui objetivo e significados diferentes.

Livros Didáticos: Os livros didáticos em suas diversas situações atuam como aliados do ao processo de ensino-aprendizagem. No entanto, a elaboração ou metodologia utilizada pelo livro, pode apresentar alguns aspectos negativos ao aprendizado do aluno. O material didático quando não direcionado à finalidade de um grupo de estudo, como muitas vezes é o caso da disciplina de análise, manifesta sensação de inferioridade, pois a sua formalidade e o rigor excessivamente utilizado não condizem com as necessidades dos alunos.

O afeto dos alunos perante a disciplina: É comum e ao mesmo tempo preocupante o cenário vivenciado pelos estudantes do curso de licenciatura em Matemática, visto que os mesmos que dedicam diversas horas para as disciplinas específicas do curso não atribuem a mesma importância às disciplinas pedagógicas. Visto que para a formação de um professor em Matemática não é necessário apenas saber manusear números mas desenvolver estratégicas que possibilitem uma compreensão do que está sendo estudado.

Dificuldades dos alunos: As instituições de ensino apontam como uma das principais dificuldades no processo de ensino-aprendizagem a deficiência trazida pelos alunos desde o ensino básico que influi na metodologia de forma direta a metodologia de ensino dos professores de Matemática, impossibilitando o professor de apresentar novos conceitos, como em ensinar aos alunos o que eles deveriam já ter aprendido.

Avaliação: O processo que ocorre entre a intuição e o formalismo faz com que os alunos sintam muita dificuldade no processo de aquisição de significado. Entretanto, o método avaliativo desta disciplina consiste na aplicação de prova, onde as questões são meras repetições de exercícios vistos ou vivenciados nos livros didáticos.

4 ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS

A análise dos livros didáticos possibilitou-nos identificar pontos auspiciosos que contribuem no processo de aprendizagem, mas também detectar pontos que não favorecem a aquisição do conhecimento. Iremos utilizar como parâmetro a pesquisa de Moreira e Viana (2016), que aponta os três livros didáticos mais indicados a um curso de Análise Real na licenciatura de Matemática pelos docentes Análise Matemática para a Licenciatura – Geraldo Ávila, Análise I – Djairo G. de Figueiredo e Introdução à Análise Real – Elon L. Lima.

Para a construção dos Números Reais, faz-se necessário um estudo dos conjuntos numéricos e suas diversas propriedades, porém, percebe-se a ausência de definições e conceitos quanto aos conjuntos numéricos, além de uma carência de demonstrações, visto que esses conteúdos são primordiais tanto na formação quanto no desenvolvimento profissional do professor.

Cabe, então, repensar os conteúdos a serem ministrados em um curso de Análise Real, visto que são de grande importância para o aluno os conteúdos vivenciados em sala, pois buscam fundamentar os seus conhecimentos, como também será um dos poucos momentos que alguns alunos entram em contato com a Matemática superior (Exemplo: Por que a multiplicação de dois números reais negativos terá como resultado um número real positivo). Atualmente, os livros didáticos apresentam uma divergência em relação a alguns pontos, enfatizando determinados conteúdos e deixando outros a desejar.

Apesar do livro didático ser uma das ferramentas mais utilizadas pelos alunos, não cabe responsabilizar os autores pela elaboração de um roteiro que garanta a aprendizagem dos estudantes, pois cada aluno possui a sua especificidade no processo de aprendizagem, como também existe a necessidade de todos os estudantes buscarem os mais diversos recursos didáticos que ofertem novas informações, já que a Matemática a cada dia vem apresentando novos resultados.

No entanto, não podemos deixar de avaliar um dos materiais didáticos mais utilizados no processo de ensino-aprendizagem, tanto pelos alunos como pelos professores. Os livros de Análise Real, em sua maioria, apresentam uma linguagem direcionada aos bacharéis em Matemática. Apresentam também conteúdos que não vêm contribuir de forma significativa para os licenciados muitas vezes de forma descontextualizada aplicando os cálculos pelos cálculos.

A análise Matemática busca esclarecer conceitos que desde sempre eram tidos como verdade, tendo como exemplo os conjuntos numéricos e suas propriedades. Neste mesmo sentido, busco apresentar conceitos do ponto de vista analítico, que realiza uma ligação da Matemática superior com a Matemática elementar.

Este tópico tenta explicitar uma conexão entre a Matemática superior e a Matemática elementar. Questionando também como os alunos do curso superior em licenciatura em Matemática identificam os conceitos estudados na graduação nos conceitos do ensino básico.

Perguntar, questionar e duvidar, poucos fizeram e fazem parte do nosso ciclo de estudo, principalmente no que diz respeito à disciplina de Matemática, visto que o professor assume um “autoritarismo de conhecimento”, mesmo que ele não queira adotar essa postura, existe uma cultura em que o docente não erra, como também a Matemática nunca terá equívoco, já que esta é a disciplina da verdade. Neste contexto, a Análise Real, com o rigor e o formalismo, expostos de maneira errônea, faz justificar as afirmativas anteriores.

O conjunto dos números naturais é apresentado aos alunos sempre da mesma forma com conceitos históricos que buscam justificar o seu surgimento, em seguida, são expostas as propriedades do conjunto aceitas sem nenhum questionamento. Desta forma, a disciplina de Análise Real, que se apresenta como uma disciplina de exatas, traz uma essência metodológica que auxilia no processo de ensino-aprendizagem..A disciplina não pode ser vivenciada igualitariamente no ensino básico, mas subsidia professores a promover reflexões sobre indagações já vivenciadas como também duvidar de conceitos que nunca foram questionados. Podemos exemplificar a formação do conjunto dos Números Naturais, a sequência dos números não são aleatórios, existe uma teoria na construção dos elementos.

No decorrer deste texto, diversas vezes foi utilizado o termo pensar matemático, não tendo como finalidade nos restringir no estudo da Matemática pela Matemática, mas do pensar duvidoso que busca solucionar, questionar e verificar a veracidade de certas afirmações. Neste seguimento, a dificuldade é explícita no processo de inserção do "porquê"na boca dos alunos, já que os mesmos estão acostumados a aceitar o que vem dos livros, da Matemática e dos professores como verdade absoluta.

Desenvolver o pensar matemático não é fácil, isso requer tempo e diversas horas de dedicação, posto que é árduo o processo de aprendizagem, pois exige uma ligação de conceitos já estudados com os novos conceitos. Em outras literaturas, o desenvolver dessas habilidades nas demonstrações acarreta um sentimento de angústia e incapacidade, pois os mesmos conseguem compreender a teoria mas não consegue aplicá-la.

Este capítulo destina-se apresentar a análise do capítulo de números reais nos livros de Análise Real, levando em consideração critérios estabelecidos na tabela 1 da metodologia, onde acreditamos que os tópicos elencados na tabela podem proporcionar uma reflexão sobre os livros didáticos que atualmente estão sendo utilizados nas disciplinas de Análise Real.

Este fragmento também possibilitará compreender a forma como o capítulo dos Números Reais está sendo abordada pelos literários, posto que a finalidade da disciplina de Análise Real busca aprimorar conhecimentos sobre os Números Reais, visto que algumas obras apresentam conteúdos que não estão voltados para os cursos de licenciaturas.

Neste sentido, os próximos parágrafos destinam-se a apresentar a análise dos livros dos seguintes autores: Elon Lages Lima, Djaro Guedes Figueiredo e Geraldo Severo de Souza.

O primeiro tópico a ser tratado corresponde ao Prefácio, onde busca-se identificar o diálogo existente entre o autor e o leitor da obra. Posteriormente, verificou-se como está organizado o capítulo dos Números Reais, se o conteúdos selecionados pelos autores do livros analisados coincidem.

Nessa discussão, é válido analisar os exemplos dos livros didáticos, tendo em vista que estes fortalecem e ajudam a compreender o que foi exposto pelo livro didático. Assim, cabe perguntar como os exemplos são utilizados no livro didático, como também indagar sobre a existência da ligação da Matemática superior com a Matemática elementar, e se nos materiais analisados existem exemplos para cada tópico apresentado.

Ao longo desta pesquisa, não poderíamos deixar de verificar a presença das notas históricas no livro de Análise Real, também consideradas importantes para o aprendizado do estudante. Outro ponto que demonstra a sua relevância refere-se aos exercícios propostos pelo literário em sua obra. Este item merece uma grande atenção, já que os exercícios permitem ao alunos testarem, errarem, pensarem e indagarem sobre tudo aquilo que foi estudado durante a disciplina de Análise Real. Assim, o processo de ponderamento de cada livro obedecerá à ordem listada anteriormente.

4.1 Livro Didático 1 (Curso de Análise- Elon Lages Lima)

4.1.1 Prefácio

O livro do autor Elon Lages Lima trouxe inúmeras contribuições quanto à literatura Matemática. Entretanto, almejamos realizar uma análise das concepções desta obra no cenário da educação Matemática, mais especificamente, na formação do professor de Matemática do ensino básico.

Sabemos da relevância do livro didático no processo de ensino-aprendizagem, porém voltaremos os nossos olhares em compreender aspectos que dificultam a assimilação dos conteúdos da disciplina de Análise Real no que diz respeito ao material estudado. Esta preocupação condiz que "Ao estudar o livro, o aluno está sendo conduzido pela mão do autor."(LIMA, 2004, Prefácio)

A importância de analisarmos os prefácios dos livros consiste em compreendermos as ideias centrais das obras analisadas, pois o autor irá expor as suas expectativas ao produzir este recurso didático.

O autor a que nos referimos apresenta um prefácio contendo algumas recomendações para que ocorra a compreensão do conteúdo apresentado. Uma de suas primeiras orientações é a experiência de dois semestres no curso de Cálculo, pois assim os estudantes terão subsídio para apreender a disciplina de Análise Real.

Consideramos que o livro de Análise Real deve apresentar características contundentes para o grupo ao qual é destinado, proferimos isto por acreditarmos que um livro de Análise Real não pode atender as necessidades de um curso de licenciatura e bacharelado ao mesmo tempo, já que os mesmos apresentam objetivos diferentes. Neste segmento, o autor Lima (2004) não aponta para quem o material é destinado, induzindo-nos a acreditar que aquele material atenderá a qualquer aluno que sinta a necessidade de estudar Análise Real.

Uma das grandes dificuldades dos alunos do curso de Análise Real é aplicar as definições e teoremas nos exercícios propostos pelo livro, pois, de acordo com Lima (2004, Prefácio), "Os livros ensinam a usar conceitos e proposições, desfazendo mal- entendidos, ajudam a fixar na mente ideias novas, dão oportunidade para explorar."

Os últimos parágrafos destinam-se a apresentar um guia na ministração da disciplina, pois ele estabelece alguns critérios para iniciar os estudos.

> Ao adotar este livro num curso, o professor deve considerar a possibilidade de omitir o Cap. I, que contém apenas generalidades sobre o conjuntos e funções. Se os alunos já estudaram antes coisas, o curso podeiniciar pelo Cap. II, servindo o Cap I apenas para recordar certas definições, se necessário. Também o Cap II pode ser omitido, se os alunos, se os alunos já tiveram aprendido s teoria dos números naturais e as diferenças entre conjunto finito, enumerável e não- enumerável (num curso de Àlgebra, por exemplo). Assim para alunos com tal experiência, a leitura deste livro pode começar no Cap III, onde são introduzidos os números reais (LIMA, 2004, Prefácio).

De acordo com a citação acima, percebemos a atribuição e a significância de cada conteúdo para o literatos, contradizendo os objetivos da disciplina, já que a mesma sublima o aprimoramento dos conjuntos dos números reais e as suas funções reais.

4.1.2 A organização do Capítulo dos Números Reais

Em sua obra, para tratar dos Números Reais, Lima (2004) considera necessário tratar outros temas que possam auxiliar na compreensão do conteúdo. Assim, dedica um capítulo voltado para conjuntos e funções (Conjuntos, operações entre conjuntos, funções, composição de funções, Famílias e Exercícios); e elabora um capítulo destinado aos Conjuntos finitos, Enumeráveis e Não- Enumeráveis (Números naturais, Boa ordenação e o segundo princípio de Indução, Conjuntos finitos e infinitos, Conjuntos enumeráveis e Conjuntos não- enumeráveis), para posteriormente tratar sobre os números reais.

Em âmbito geral, Lima (2004) considera importante trabalhar alguns temas que serão relevantes para a compreensão dos números Reais. Esta característica faz com que o seu trabalho se diferencie dos demais, por oferecer um leque de informações que pode contribuir para a compreensão dos números reais que é a principal temática.

O autor, ao abordar os conjuntos numéricos, como as funções e o segundo princípio de indução, apesar de já fazer parte do conhecimento do aluno, ajuda com que o estudante possa compreender as características dos números reais.

> Como as noções de corpo e de corpo ordenado possuem interesse algébrico próprio, apresentamos os axiomas dos números reais por etapas, deixando em último lugar a existência do SUP, precisamente o axioma não- algébrico, aquele que desempenhará o papel mais importante nos capítulos seguintes. (LIMA, 2004 p.59)

Desse modo, apresentamos a tabela 2, que visa apresentar o roteiro estabelecido por Elon para a apresentação do capítulo dos Números Reais, onde apesar de restringir a poucos tópicos abrange um grande dimensionamento de resultados.

Tabela 2 – Sequência do livro didático do capítulo dos Números Reais- Elon Lages Lima

Corpos
Corpos ordenados
Números Reais
Exercícios

Fonte: Elaborada pela Autora

4.1.3 Exemplos

Lima (2004) utiliza uma linguagem mais cientifica do que os outros autores, porém, dispõe de um embasamento teórico mais amplo.

O livro "Curso de Análise"apresenta um leque de exemplos. Isto é verificável já nas primeiras páginas do capítulo quando o autor define Corpo e, em seguida apresenta exemplos, conforme destacamos:

> Definição: Um Corpo ordenado é um corpo K no qual destacou um subconjunto P contido K, chamado o conjunto dos elementos positivos de K, tal que as seguintes condições são satisfeitas:

> P1: A soma e o produto de elementos positivos são positivos. Ou seja, $x, y \in P \rightarrow x + y \in P$ e $x.y \in P$.
>
> P2: Dado $x \in K$, exatamente uma das três alternativas seguintes:
>
> $x = 0$, ou $x \in P$ ou $-x \in P$.
>
> (LIMA, 2004, p.65).
>
> Exemplo: $\mathbb{Q}$ é um corpo ordenado, no qual o conjunto P é formado pelos números racionais p/q tais que $p.q \in \mathbb{N}$. (Intuitivamente, isto significa que os inteiros p e q têm "o mesmo sinal").(LIMA, 2004, p.66).

Como ressaltado anteriormente, esta obra traz um grande número de exemplos, porém, o mesmo utiliza uma linguagem que, por vezes, não demonstra proximidade com a realidade de um estudante de Licenciatura em Matemática, apesar de apresentar um exemplo a cada tema exposto.

Acreditamos que o autor em algumas linhas preliminares, do exemplo exposto ressaltasse, por exemplo; Um corpo será ordenado quando houver uma ordem entre seus elementos, isto é, comparando dois deles, pudermos dizer qual é o maior. Intuitivamente, equivale a dizer que o maior será aquele em que, a diferença entre ele e o outro será positiva. Mas o que é positiva em um corpo qualquer ? para justificar formalmente temos que ter um subconjunto de elementos que serão os elementos positivos do corpo.

No final, ainda teria o mesmo poderia acrescentar as razões que da existência do conjunto dos positivos satisfizesse as condições p1 e P2.

Quanto à ligação da Matemática superior com a Matemática elementar, não encontramos aspectos que demonstrassem esta preocupação, porém averiguamos que o autor acentua o conteúdo da Matemática superior buscando apresentar diversos exercícios e demonstrações.

4.1.4 Notas Históricas

Embora saibamos da contribuição dos conceitos históricos para a compreensão dos Números Reais na disciplina de Análise Real,, não encontramos nenhuma nota histórica nos capítulos analisados desta obra. O autor, no capítulo correspondente aos conjuntos finitos, enumeráveis e Não- enumeráveis, ressalta Cantor para justificar a descoberta da diversidade de conjuntos infinitos, entretanto, delimita a este fato.

4.1.5 Demonstrações

As demonstrações caracterizam o livro, já que são apontadas como um dos principais recursos da Análise Real. Constatamos, ainda, que as demonstrações presentes neste livro utilizam uma linguagem científica, exigindo dos estudantes grandes subsídios de outros conteúdos para compreender o segmento da demonstração.

Percebemos que o autor, ao utilizar como recurso o formalismo e o rigor, deixa evidenciar a importância destes componentes para o aprendizado do aluno, pois todas as demonstrações englobam estes recursos. Estas afirmativas ressaltam que o autor em suas colocações não se sente intimidado em expor o conteúdo, porém acreditamos que a linguagem e a metodologia utilizada nas demonstrações não condizem com os objetivos da licenciatura em Matemática.

Neste mesmo segmento, é cabível falar sobre algumas observações que o autor faz ao decorrer no texto. Compreendemos que estes tópicos surgem com a intenção de alertar o estudante acerca de algumas particularidades como:

Exemplificação sobre os exemplos presentes no livro Curso de Analise

> O princípio da Boa Ordenação não se aplica imediatamente ao conjunto $\mathbb{Z}$ dos inteiros. Existem conjuntos não- vazios de números inteiros que não possuem um menor elemento. O próprio $\mathbb{Z}$ é um deles: qualquer que seja $n \in \mathbb{Z}$, o inteiro $n-1$ é menor do n, logo existe um inteiro n_0 menor do que todos os outros. Também o conjunto $A = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, \ldots\}$dos inteiros pares, ou seja $A = \{2n; n \in \mathbb{Z}\}$, não possui um menor elemento. Em geral $X \subset \mathbb{N}$ for um conjunto infinito de números naturais, então o conjunto $-X = -n; n \in X$ é um conjunto não- vazio de números inteiros que não possui elemento mínimo. (LIMA, 2004, p.70).

Entretanto, podemos constatar o seguinte: *se um conjunto não- vazio $X \subset \mathbb{Z}$ for limitado inferiormente, isto é, se existir algum $a \in Z$ tal que $a < x$ para todo $x \in X$, então X possui um elemento mínimo.*

Ainda sobre esta exemplificação, percebemos o quanto ela nos ajudou a compreender o conteúdo que quer ser transmito pelo autor, apresentando uma exemplificação numérica para que assim os leitores pudesse melhor visualizar.

4.1.6 Exercícios

A palavra exercício nos faz refletir sobre o ato de colocar em prática tudo aquilo que foi vivenciado. E quando nos referimos aos Números Reais, falamos sobre a aplicação de toda teoria estudada à sobre os diversos resultados que a mesma proporciona.

O livro do professor Elon traz uma quantidade expressiva de exercícios a serem praticados pelos estudantes. O autor aglutina a sua lista de exercícios variando o grau de dificuldades, acreditamos que esta metodologia tem como finalidade aprimorar o desenvolvimento do pensar matemático dos estudantes.

O rigor e o formalismo também categorizam as sequências das listas de exercícios deste autor, percebemos isto até mesmo quando o autor trabalha conteúdos rotineiros nas suas listas de questões:

Exercício do livro do Elon (2004, p.87):

1− Dados a, b, c, d num corpo K, sendo b e d diferentes de zero, prove:

- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$
- $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d}$

Acreditamos que o autor deveria realizar comentários, antes e depois do exercício, como:

- Alertar os alunos que essas fórmulas foram definidas como as operações soma e multiplicação no conjunto dos números racionais, e que agora não poderão ser usadas de modo geral, pois não se sabe se valerão para quaisquer reais.
- Para a demonstração, os alunos devem usar a caracterização dada pelo autor aos números reais e às suas operações, ou usar propriedades que valem em qualquer corpo, inclusive o dos reais, e também elementos da lógica matemática, como:
- Provar uma igualdade entre duas expressões numéricas pode ser feita mostrando que a soma de um dos membros com o oposto aditivo do outro que dá zero
- Interpretar o traço de divisão e como multiplicação pelo inverso do divisor.

Percebemos que o livro de Elon (2004) apresenta um grande embasamento teórico, bem como oferta um número expressivo de exercício para que assim o estudante se debruce sobre os estudos. Porém, indagamos sobre o perfil a que este material é destinado.

4.2 Livro Didático 2(Análise I- Djairo Guedes de Figueiredo)

4.2.1 Prefácio

Djairo Guedes de Figueireido, graduado em Engenharia Civil, possui o grau de Master of Science (1958) e Doctor of Philosphy (1961). Em seu livro, apresenta dois prefácios (Primeira edição e segunda edição). A segunda edição, a qual estamos analisando, passou por diversas modificações. Na verdade, esta obra teve origem do trabalho de conclusão de curso denominado Funções Reais, posteriormente, o texto foi expandido e constituiu um dos cursos do 9º Colóquio Brasileiro de Matemática, e juntamente com outras alterações chegou-se à forma presente.

O literato destina o livro aos alunos da graduação da universidade que ele compõe. E também ressalta que existe a necessidade dos alunos já terem cursado a disciplina de

Cálculo Diferencial Integral de funções reais de uma variável, uma vez que a disciplina será uma continuidade do que os alunos já vivenciaram, pois utilizará a linguagem exigida a rigor pela disciplina. Acredita-se que a disciplina de Análise é um embasamento para diversos ramos da Matemática, pois a mesma proporciona conhecimentos que serão suportes para futuros estudos.

Segundo Djaro, um dos aspectos que diferencia o seu trabalho dos demais é uma continuação do curso de cálculo, como também o fato de apresentar exercícios que buscam solidificar os conhecimentos adquiridos ao decorrer da disciplina.

4.2.2 Organização do Capítulo dos Números Reais

Para iniciar o capítulo dos Números Reais, o autor considera importante ressaltar o estudo dos conjuntos e das funções, visto que pertencem aos fundamentos da Matemática moderna. Apesar do mesmo fazer uma explanação sobre estes conteúdos, por considerar necessário apenas definir alguns termos que serão necessários para estudos futuros.

Posteriormente, o autor busca um diálogo com o leitor quando fala dos números racionais, expondo que os números racionais nada mais são do que as frações aritméticas do curso do primeiro grau. “Quando lhe ensinaram a operar com frações, a rigor, o que estavam fazendo era definir as operações de adição e multiplicação.” (FIGUEÍREDO, 1996, p.9)

Os Números Reais tratam de diversos resultados que são de grandes importâncias para o contexto do estudante, como, por exemplo: o valor absoluto, a desigualdade triangular e a desigualdade de Bernoulli. Porém, estes tópicos, quando apresentados, são exposto como exercícios ou de forma ampla para o estudante, deixando lacunas para a formação d professor.

Assim, o literato utiliza estes tópicos para a compreensão dos estudantes perante os números reais.

4.2.3 Exemplos

O capítulo de Números Reais, na disciplina Análise Real, apresenta conteúdos bastante complexos que necessitam de uma exemplificação, para que o aluno possa compreender o que foi mencionando anteriormente. No livro do Figueiredo, este fato chamou atenção tendo em vista que em determinado momento, quando o autor começa a apresentar a seção de Ínfimo e Supremo, existem denominações que podem confundir o entendimento do aluno, por a sua denominação não condizer com o seu significado. Esta características diferenciam dos demais, quando o autor utiliza um exemplo para mostrar a ideia de ínfimo e outro exemplo para mostrar que um determinado conjunto não tem ínfimo.

Tabela 3 – Sequência didática utilizada para apresenta os Números Reais- Djaro Guedes

Conjunto e funções,
Números racionais,
INF e SUP,
Números reais,
Desigualdades,
Sucessões numéricas,
Propriedades de limite,
Exemplos de Sucessões,
Sucessões monótonas,
O Teorema de Bolzano- Weierstrass,
O critério de Cauchy,
Séries numéricas,
Representação decimal,
Conjuntos enumeráveis.

Fonte: Elaborada pela Autora

Quanto à ligação da Matemática superior com a Matemática elementar, o autor traz um exemplo sobre os números Racionais, ressaltando que existe dificuldade por parte dos alunos em visualizarem os Números Racionais na reta, porém os racionais são obtidos por subdivisões adequadas do segmento da unidade. Se imaginar os números racionais marcados sobre a reta, iremos ver que eles formam um subconjunto da reta, que é denso. Exemplificando que a hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles não é comensurável com os catetos, isto é, se os catetos têm comprimento igual a um, então a hipotenusa não é racional.

Como em qualquer outra disciplina, o grau de dificuldade em compreender os conteúdos vai aumentando ao decorrer das aulas. Os exemplos podem auxiliar os estudantes a compreender gradativamente os conteúdos apresentados pelos livros didáticos. Neste segmento, em cada tópico apresentado, é exposto algum exemplo que embasa a assimilação do conteúdo.

4.2.4 Notas Históricas

Sabemos da contribuição das notas históricas no processo didático do ensino da Análise Real, já que a mesma possibilita ao estudante tomar conhecimento histórico sobre aquele determinado assunto, bem como compreender o desenvolvimento da temática até os dias atuais.

A presente literatura apresenta breves contextos históricos relacionados aos comentários do próprio autor, o qual, nas primeiras páginas do seu trabalho, justifica a opção de considerar os Números Reais como um corpo ordenado, ressaltando o postulado de Dedekind na realização de seus estudos, e acrescentando a difícil missão em demonstrar a existência de um corpo nas condições estabelecidas. O contexto histórico o qual autor apresenta, delimita a pequenos fragmentos, isto é, existe um restringimento da apresentação do contexto histórico exibindo pequenas discussões sobre o processo gradativo daquele conteúdo.

4.2.5 Demonstrações

Uma das peculiaridades da disciplina de Análise Real são as demonstrações, pois é este processo que exige do aluno um conhecimento amplo do que está sendo demonstrado. Em outras palavras, o rigor e o formalismo, características novas para o estudante, dificultam o processo de aprendizagem.

Deste modo, o processo de ensino-aprendizagem exige cautela, tendo em vista o difícil ato de aprender e lecionar esta disciplina. Compreendemos que os livros didáticos devem estar preocupados com as demonstrações, pois como este fator é um dos empecilhos para o aprendizado dos estudantes, é necessário atentar para recursos que possam proporcionar uma maior compreensão.

O livro trabalhado, em suas demonstrações, apresenta o rigor e o formalismo como características, porém um fator a ser destacado é que, por diversas vezes, ao realizar as demonstrações, o autor consegue estabelecer um elo de conversa com o leitor. Isto quer dizer que nas demonstrações não ficam limitadas as “letras”, mas existe uma justificar cada tópico escrito.

Apesar de o autor conseguir manter um diálogo com o leitor, o mesmo não apresenta um leque de demonstrações, deixando uma lacuna quanto a este tópico. Esta particularidade se faz importante por sabermos que a demonstração é uma das principais dificuldades do aluno.

4.2.6 Exercícios

Como já ressaltado anteriormente neste trabalho, a disciplina de Análise Real requer que os alunos exercitem bastante o que foi estudado. Assim, o autor disponibiliza diversas questões (exercícios) a serem respondidas a cada subseção. A estrutura do questionário constitui-se de questões semelhantes, em se tratando de um menor grau complexidade, mas também apresenta questões que demandam um maior raciocínio do estudante.

Quanto aos exercícios do livro didático, o próprio autor comenta em seu prefácio a contribuição deles para o aprendizado do aluno, propondo uma grande variedade de exercícios, sendo este um dos destaques do seu livro, remetendo para a secção de exercícios a proposições e propriedades que não são demonstradas ao decorrer do texto.

Nos exercícios foram exploradas proposições e propriedades dos números reais com ênfase nas demonstrações de desigualdades. O conjunto dos números reais foi explorado levando em consideração os seguintes aspectos: enquanto corpo; corpo ordenado e finalmente enquanto corpo ordenado completo. Ou seja, todo corpo não- vazio de números reais, limitado superiormente, possui supremo.

4.3 Livro Didático 3 (Análise Matemática para Licenciatura-Geraldo Ávila)

4.3.1 Prefácio

Ávila (2008), que tem como uma de suas propostas trazer um livro de Análise Real voltado para graduação em licenciatura em Matemática, busca iniciar o seu trabalho de forma contextualizada, transmitindo a ideia de que os números reais fazem parte do cotidiano, objetivando com o capítulo dos Números Reais introduzir alguns tópicos que serão necessários para o estudo, dentre eles a chamada propriedade do supremo.

Ávila (2008), em seu livro "Análise para Licenciatura", afirma apresentar alguns aspectos que diferem o seu trabalho dos demais, visto que costumeiramente são utilizados livros que tem um maior direcionamento ao curso de bacharelado em Matemática. Em seu livro, verifica-se a ausência de certos tópicos considerados de pouca relevância para o estudo de um licenciando em Matemática como, por exemplo: continuidade uniforme e a teoria da integral e a equicontinuidade. Ele apresenta um capítulo dedicado a alguns conceitos dos números reais ditos importantes para a formação do professor de Matemática.

O livro, primordialmente, apresenta uma linguagem diferenciada dos demais trabalhos utilizados pelas universidades, até mesmo pelo próprio título, e transmite uma ideia de diálogo, apresentando objetivos e significados que, por diversas vezes, estão implícitos tanto na sala de aula como nos livros didáticos. Nesta perspectiva o exemplar apresenta uma sequência didática cujo estudo de determinado assunto é justificado a cada ponto.

4.3.2 Organização do Capítulo dos Números Reais

Para a construção dos Números Reais, faz-se necessário um estudo quanto a esse sistema numérico e suas diversas propriedades. No trabalho em análise, percebemos a ausência de definições e conceitos quanto aos conjuntos numéricos, como também uma carência de demonstrações, visto que esses conteúdos são primordiais na formação e no desenvolvimento profissional do professor.

Tabela 4 – Sequência do livro didático do capítulo dos Números Reais- Geraldo Ávila

Supremo e ínfimo de um conjunto;
Exercícios;
Sugestões e soluções;
Desigualdade do triângulo;
O princípio de indução e a desigualdade de Bernoulli Exercícios;
Sugestões e soluções;
Notas históricas e complementares;
$\mathbb{Q}$*éumconjuntoenumerável*;
Oconjunto$\mathbb{R}$*nãoéenumerável*;
Os números reais, de Eudoxo a Dedekind;
Definição de corpo;

Fonte: Elaborada pela Autora

4.3.3 Notas Históricas

Ao realizar uma breve leitura do livro do Ávila, já podemos perceber a principal característica desta obra (Notas históricas) e a sua importância para a compreensão do conteúdo.

> **Grandezas incomensuráveis**
>
> Historicamente, a primeira evidência da necessidade dos números irracionais ocorre com a ideia de 'incomensurabilidade', que explicaremos logo adiante. Comecemos lembrando que na Grécia antiga, os únicos números reconhecidos como tais eram os números naturais $2, 3, 4$, etc. O próprio 1 não era considerado número, mas a 'unidade', a partir da qual se formava os números. As 'frações só apareciam indiretamente, na forma de razão de duas grandezas, como, por exemplo, quando dizemos que o volume de uma esfera está para o volume do cilindro reto que a circunscreve como' 2 está para 3. Os números que hoje chamamos de 'irracionais' também não existiam na Matemática grega. Assim como as frações, eles iriam aparecer indiretamente, também como razões de grandezas da mesma espécie, como comprimentos, áreas ou volumes; e, ao que parece, foram descobertos no século V a.C. Não sabemos se essa descoberta foi feita por um argumento puramente numérico, pode ser que os gregos tenham utilizado alguma construção geométrica, como a que vamos descrever adiante, envolvendo a diagonalidade o lado de um quadrado. (ÁVILA, 2001, p.09).

O contexto histórico sobre determinado teorema, por exemplo, nos situa sobre o desenvolvimento da construção do determinado conceito. O fator histórico nos levar a refletir gradativamente sobre determinado estudo, proporcionando ao estudante ter contato com as possíveis dúvidas que grandes estudiosos também tiveram. Neste sentido, Ávila (2001), ao falar sobre grandes incomensuráveis, realiza uma abordagem histórica sobre este processo.

Ao afirmarmos que o contexto histórico é importante para Análise Real, não buscamos apenas concordar com a literatura, mas o exemplo a seguir nos faz comparar como os outros autores abordam este conceito. Neste tópico, ressaltamos a relação existente entre os exemplos e o contexto histórico, por percebermos que, por vezes, o autor não distingue em seu texto a especificidade de cada artifício.

4.3.4 Exemplos

O processo de exemplificação é de suma importância para o estudo dos números reais, pois faz com que o estudante possa compreender a aplicação do conteúdo em um determinado contexto. Vale ressaltar que, por diversas vezes, o autor faz uso dos exemplos para compreender determinada definição, como é o caso da enumerabilidade dos números racionais.

> É surpreendente que o conjunto $\mathbb{Q}$ seja equivalente a vários de seus subconjuntos próprios, mais surpreendente é que o conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais também seja equivalente a $\mathbb{N}$, isto é, seja enumerável. Para provar isso é suficiente trabalhar com o conjunto $\mathbb{Q}_+$ dos racionais positivos. Começamos reunindo as frações em grupos, cada grupo contendo aquelas que são irredutíveis e cuja soma do numerador com o denominador seja constante. Por exemplo,
>
> $$\frac{1}{6}; \frac{2}{5}; \frac{3}{4}; \frac{4}{3}; \frac{5}{2}; \frac{6}{1}$$
>
> é o grupo das frações com numerador e denominador somando 7, enquanto
>
> $$\frac{1}{7}; \frac{3}{5}; \frac{5}{3}; \frac{7}{1}$$
>
> é o grupo correspondente à soma 8. Observe que cada grupo desses tem um número finito de elementos. Basta então escrever todos os grupos, um após outro, na ordem crescente das somas correspondentes, e enumerar as frações na ordem em que aparecem. É claro que todos os números racionais aparecerão nessa lista. (ÁVILA, 2001, p.15).

De acordo com este exemplo, podemos averiguar a relevância do exemplo para a compreensão do conteúdo. Apesar de o autor ter omitido a demonstração, pudemos compreender a ideia central da proposição. Diante de tal afirmação, sabemos da contribuição das demonstrações para o conhecimento matemático, porém, por vezes, os exemplos facilita a compreensão do conteúdo estudado.

Ainda decorrente dos exemplos do livro de Ávila (2001), destacamos a preocupação do escritor em conectar a Matemática superior com a Matemática elementar. Este ponto mostra-se relevante, pois a disciplina de Análise Real, por trazer preceitos de uma disciplina de cunho didático, deve apresentar temas que abordem a realidade do futuro professor do ensino fundamental de Matemática.

Os exemplos deste material por ora confundem-se como corpo do texto, tendo em vista que as exemplificações utilizadas por vezes são numéricas, o que gera uma confundem-se a maioria dos exercícios não adere a forma numérica.

> **Números Irracionais**
>
> O primeiro número irracional com que nos familiarizamos ainda no ensino fundamental é o número π , razão do comprimento de uma circunferência pelo seu diâmetro -".Mas, como a demonstração da irracionalidade desse número está fora do alcance da Matemática do ensino fundamental e médio, o aluno é apenas informado de que a expansão decimal desse número é infinita e não periódica. Um pouco mais tarde, ainda no ensino fundamental, o aluno trava conhecimento com os radicais, e, novamente, é apenas informado de que números como $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ etc., são números irracionais (embora esteja perfeitamente ao seu alcance entender a demonstração de irracionalidade de; 2 que fizemos atrás, bem como outras demonstrações dadas nos exercícios).(ÁVILA, 2001, p.16).

Esse "aprendizado"dos números irracionais pode deixar no aluno a impressão de que números irracionais são o π e alguns radicais; e ele talvez até forme a ideia de que o conjunto desses números seja bem reduzido, no máximo enumerável. Mas isto não é verdade, trata-se de um conjunto infinito e não enumerável.

Um fator relevante nesta obra é o fato de autor conseguir relacionar o contexto histórico com a sua definição, proporcionando ao leitor a compreensão da "linguagem Matemática", que, por vezes, não é tão clara. Esta afirmação pode ser vista no exemplo a seguir:

As contribuições das notas históricas são bastante significativas para o estudante, pois discutem algumas ideias de Georg Cantor, que foi o fundador da teoria dos conjuntos e o primeiro a demonstrar que existem infinitos de diferentes ordens. Também são discutidos alguns paradoxos que surgiram no início da teoria dos conjuntos, o que possibilita ter uma visão geral do processo de construção dos conceitos matemáticos.

4.3.5 Demonstrações

A palavra demonstração torna-se palavra chave quando nos referimos ao ensino de Análise Real, tendo em vista que a mesma tem como recurso apresentar formalmente aspectos da Matemática superior.

Uma peculiaridade do presente livro analisado, ao abordar os números reais no requisito demonstração, apresenta alguns conceitos de forma sutil que não utilizam com tanta precisão esta ferramenta, uma contradição já que o autor ressalta tamanha importância das demonstrações na disciplina de Análise Real, pois, de acordo com suas ideologias, "não é permitido a um professor de Matemática não conseguir desenvolver provas e demonstrações em sala."(Ávila, 2001, prefácio)

Como já foi ressaltado, ao decorrer deste trabalho, a disciplina de Análise apresenta-se como alicerce para os licenciandos em Matemática, por ofertar diversos recursos que possibilitam o contato direto com a Matemática superior, proporcionando uma reflexão quanto aos conteúdos estudados durante o curso e uma concretização dos conceitos matemáticos no processo de demonstração.

> **$\sqrt{2}$ é número irracional**
>
> Parece que o primeiro número irracional a ser descoberto foi $\sqrt{2}$. Em geral, é difícil saber se um dado número é irracional ou não, como é o caso do número π, cuja demonstração de irracionalidade não é simples. Bem mais fácil é demonstrar que o número $\sqrt{2}$ é irracional. Vamos fazer essa demonstração raciocinando por absurdo.
>
> Se $\sqrt{2}$ fosse racional, haveria dois inteiros positivos p e q, tais que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, sendo $\frac{p}{q}$ uma fração irredutível, isto é, p e q primos entre si, ou seja, eles, não têm divisor comum maior do que 1. Elevando essa igualdade ao quadrado, obtemos $2 = p^2/q^2$, donde
>
> $$p^2 = 2q^2$$
>
> (1.1)
>
> Isso mostra que p^2 é par, donde concluímos que p também é par (se p fosse ímpar, p^2 seria ímpar), digamos $p = 2r$, com r inteiro. Substituindo na Eq. (1.1), obtemos:
>
> $$4r^2 = 2q^2, \text{ ou } q^2 = 2r^2$$
>
> Daqui concluímos, como no caso de p,que o número q também deve ser par. Isto é absurdo, pois então p e q são ambos divisíveis por 2 e $\frac{p}{q}$ não é fração irredutível. O absurdo a que chegamos é consequência da hipótese que fizemos no início, de que $\sqrt{2}$ fosse racional. Somos, assim, forçados a afastar essa hipótese e concluir que $\sqrt{2}$é irracional. (ÁVILA, 2001, p.08).

O autor, ao utilizar as demonstrações, buscava apresentar de forma clara e cautelosa, para que não ficasse dúvida aos leitores sobre o procedimento. Ávila (2001), ao fazer um estudo sobre os números irracionais, demonstra de que não existe número racional cujo quadrado seja 2.

4.3.6 Exercícios

Acredita-se que, por mas que um livro didático faça uma boa abordagem sobre Análise Real, é necessário que o aluno busque responder os exercícios indicados pelo livro, já que este processo contribuirá para que ele coloque em prática tudo aquilo que foi vivenciado durante o estudo.

Deste modo, ao logo do capítulo Números Reais são apresentados diversos exercícios relacionados aos números racionais com ênfase na fração geratriz, como também voltado aos números irracionais. Igualmente trata dos números reais com destaque para demonstrações com cortes e densidade dos racionais e irracionais.

4.4 Uma reflexão sobre os livros analisados

Como já apresentado durante a metodologia, posteriormente à análise dos livros didáticos, apresentaríamos uma secção destinada às nossas expectativas quantos aos critérios estabelecidos na tabela 1.

Todos os critérios estabelecidos na tabela 1 justificam-se por compreendermos que cada tópico listado nos ajudará a responder a pergunta norteadora do nosso trabalho.

4.4.1 Prefácio

A análise do material iniciou-se com a observação dos aspectos do prefácio, tendo em vista que este tópico é destinado ao autor, que descreve todas as suas expectativas na produção do material perante a compreensão do leitor, possibilitando um diálogo entre o autor e leitor.

Este tópico possibilitou compreender o tipo de material analisando. Ou seja, neste item, encontramos de forma ampla a justificativa da elaboração de cada material, a formação do autor, os conteúdos que o autor considera relevante perante aquela disciplina e algumas vezes o procedimento com que tratara os conteúdos.

Neste sentido, sabemos que a formação do autor reflete no material que ele produz. Assim, neste parágrafo, apresentamos algumas reflexões sobre a formação inicial dos autores, como também sobre os seus estudos posteriores. O professor Elon Lages Lima, um dos principais autores da Análise Real, por dedicar grande parte de sua vida com estudos referentes a este ramo da Matemática, possui bacharelado em Matemática, e fez pós- graduação na universidade de Chicago, onde obteve os graus de Mestre e Doutor (ph. D). Entretanto, o professor Djaro Guedes Figueiredo não tem formação em Matemática, apenas em Engenharia Cívil, onde obteve os graus de Master of Science e Doctor of Philosophy. Quanto ao professor Geraldo Ávila, ele não expõe esta informação em sua obra.

Frente a essas informações, questionamos como estes professores podem compreender as necessidades dos alunos do curso de Licenciatura. Podemos ainda questionar como estes escritores podem estar lecionando em um curso de formação de professores de Matemática, uma vez que as suas formações não os preparam para este ato. Estes argumentos não busca afirmar que os seus livros não são adequados aos licenciandos em Matemática, mas busca propor uma reflexão sobre as obras que costumeiramente são utilizadas no ensino da disciplina de Análise Real.

Ainda nos referindo ao paragrafo anterior, indagamos sobre as dificuldades existentes do licenciandos na referida disciplina, já que os cursos ofertados, em sua grande maioria, podem apresentar diversos aspectos de um bacharelado em Matemática. Destacamos ainda a hipótese de que nem todo professor ou aluno adere um livro didático para o estudo desta disciplina, porém os matérias didáticos utilizados por estes, em um âmbito geral são derivados destes livros, o que ainda demonstra características de um curso de bacharelado.

O livro de Ávila (2001), especialmente, apresenta um prefácio que nos chama atenção, quando o autor diferencia o seu trabalho do demais, apontando que o seu material busca aprimorar conteúdos voltados ao licenciando, enfatizando o desenvolvimento de ideias e aspectos históricos da disciplina.

> Difere no conteúdo, por não incluir tópicos mais especializados, como a continuidade uniforme, a teoria da integral e a equicontinuidade, de interesse maior no bacharelado e secundário na licenciatura; mais difere também por incluir, no capítulo 1, uma apresentação de certos tópicos sobre os números reais, relevantes nos cursos de licenciatura. Uma terceira diferença esta na maneira de apresentação dos vários assuntos, maior atenção ao desenvolvimento das ideias e aspectos históricos da disciplina (ÁVILA, 2001, prefácio).

Nesta secção, é cabível falarmos sobre a relação existente entre os autores Elon e Ávila, ao dedicarem um espaço no seu prefácio salientando a importância da dedicação dos alunos ao estudo perante a disciplina, pois ter bons materiais e bons professores não significa ter um bom aprendizado, já que o curso necessita de muita reflexão e muito estudo.

> Por isso mesmo não espere que o livro seja completo, sem lacunas a serem preenchidas pelo leitor; do contrário, esse leitor será induzido a uma situação passiva, quando o mais importante é desenvolver habilidades para o trabalho independente, despertando a capacidade de iniciativa individual e a criatividade. (ÁVILA, 2001, prefácio).

Ainda neste tópico, os três autores entram em um consenso quando apontam a contribuição dos exercícios para o aprendizado da disciplina. Ressaltam que os exercícios têm a missão de ensinar conceitos e proposições, desfazendo mal- entendidos, ajudando a fixar na mente ideias novas, apresentando aplicações dos teoremas, demonstrando e informando o leitor sobre resultados adicionais que não foram expostos ao decorrer do texto.

isto quer dizer, não basta realizar

> Os exercícios lhe fornecem o ensejo de caminhar mais solto e, assim, ir ganhando independência. Para quem esta convencido da importância de resolver os exercícios deste livro, um esclarecimento: eles variam muitos em seus graus de dificuldade. Não se desencoraje se não conseguir resolver alguns (ou muitos) deles. É que vários são difíceis mesmos. Volte a eles depois, quando tiver lido mais do livro e sentir confiante (LIMA, 2004, prefácio).

Este parágrafo nos faz refletir sobre a "maturidade"necessária aos estudantes perante os exercícios de Análise Real, isto quer dizer que não basta realizar uma quebreve leitura do conteúdo, é necessário rescrever o que foi dito pelo autor, rabiscar, e visualizar detalhes omitidos durante o corpo do texto. Tentar refazer exercícios não significa retrocesso, mas aprimorar o que foi estudado. Nesse sentido, Medeiros (2005) aponta o pragmatismo dos alunos em quererem aprender rapidamente o que é exposto pelo professor, comparando o aprendizado com uma mercadoria que se consome sem que a produza e se compreenda.

Djaro, no prefácio do seu livro, não demonstra uma preocupação quanto ao diálogo com leitor, mas, resume os seus prefácios (ele apresenta dois prefácios referente às duas edições dos livros) a uma breve justificativa da elaboração daquele trabalho e da necessidade do estudante ter cursado as disciplinas de Cálculo diferencial e integral, porém ressalta que a sua obra busca despertar o senso crítico do discente.

Ao decorrer deste trabalho, já expressamos a contribuição da disciplina para o professor do ensino básico de Matemática, contudo, os professores Djaro Guedes e Elon, não expõem em suas obras as suas opiniões sobre este fato. O professor Geraldo Ávila traz uma afirmação forte sobre a importância do estudo da disciplina de Análise Real para a licenciatura.

> [...] um dos objetivos principais de um curso de Análise é a prática em demonstração. Enunciar e demonstrar teoremas é uma das ocupações centrais de todo professor estudioso da Matemática, não sendo admissível que alguém que pretende ensinar Matemática sinta-se deficiência neste mister. Daí uma das principais razões de uma disciplina de Análise nos cursos de Licenciatura. (ÁVILA, 2001, prefácio).

Diante dos três livros elencados para o desenvolvimento desta pesquisa, a pesquisadora já tinha conhecimento sobre o livro do Elon Lages Lima durante a graduação, entretanto, buscou-se evitar qualquer consideração prévia da análise. Durante a apresentação do prefácio, Djaro Guedes expressou que inicialmente o seu livro surgiu do Trabalho de Conclusão de Curso, que teve como orientador o Professor Elon Lages Lima. Este fato contribuiu para acreditar que os livros desses dois autores fossem semelhantes, porém o que nos chama atenção é que eles apresentam traços semelhantes, entretanto a obra final difere bastante uma da outra.

Ainda neste contexto, os livros didáticos, quando elaborados para qualquer nível de ensino, devem direcionar o público-alvo.. Desta forma, averiguamos que Geraldo Ávila é o único autor dos livros analisados que direciona restritamente o livro para o curso de licenciatura em Matemática, ao passo que o autor Djaro Guedes conduz este material para os alunos do final da graduação da universidade em que ele leciona (podemos compreender este fato, já que a realidade de cada universidade é única). Neste caso, questionamos o porquê de outras universidades também aderirem a esta obra.

> Este é um livro de Análise Matemática, uma das áreas mais básicas da Matemática. Analistas, geômetras ou matemáticos aplicados necessitam desse embasamento para prosseguir seus estudos nas áreas respectivas. Esse é um curso que segue o curso de Cálculo das nossas universidades. Contém parte substancial daquele curso apresentado de modo cuidadoso dentro do rigor imprescindível para os cursos de Matemática. (FIGUEIREDO,1996, prefácio).

Decorrente desta citação, podemos atentar para alguns fatos. Primeiramente, o autor ressalta que é um livro de Análise Matemática, porém a licenciatura tem como finalidade promover um estudo sobre a Análise Real, contudo esta é um ramo da análise Matemática que lida com o conjunto dos números reais, ou seja, existe um restringimento quando falamos de Análise Real. O segundo ponto relevante é que a obra é remetida ao curso de Matemática, porém questionamos: de licenciatura, de bacharelado ou ambos? Quanto ao autor Elon, o mesmo deixa tais aspectos omissos.

O prefácio apresenta aspectos subjetivos de cada autor, sendo um ambiente reservado para um diálogo entre o autor e o leitor. Deste modo, para melhor compreender a expectativa do material produzido perante a formação do licenciando em Matemática, estabelecemos alguns critérios para a realização da análise dos prefácios destas obras específicas.

4.4.2 A organização do capítulo dos Números Reais

Este tópico demonstra a sua importância quando, ao comparar livros didáticos de Análise Real, percebemos a divergência que existe em relação à seleção dos conteúdos para a compreensão dos Números Reais.

Sabemos que cada autor, ao escrever o seu material, julga a significância de cada conteúdo para a compreensão do leitor. Porém, o que estamos analisando é que certos tópicos considerados muito importantes são apresentados de maneira sutil por outros. Por exemplo, ao iniciar o capítulo dos números reais se faz necessário realizar um estudo dos conjuntos numéricos. A esse respeito, Ávila faz uma breve explanação sobre os conjuntos numéricos, ao passo que Elon apresenta diversas propriedades deste tema.

Um tópico não abordado no livro do Ávila é o produto cartesiano entre dois conjuntos A e B, definido como o conjunto:

$$A \times B = \{(a, b); a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

Figura 5 – Empecilhos na aprendizagem da Análise Real

Critério	Autores das Obras Analisadas		
	Lima	Figueiredo	Ávila
Justificativa da Obra	Não apresenta	O mesmo argumenta como elaborou o material	Não apresenta
O livro é destinado a licenciatura em matemática	Não especifica a quem o material é destinado	A alunos ao final da graduação e início de pós-graduação, em cursos de Matemática e áreas afins.	Destinado a Licenciatura em Matemática
Considera relevante o estudo prévio do CDI	Considera relevante o Estudo do CDI	Considera relevante o Estudo do CDI	Considera relevante o Estudo do CDI
Justifica a necessida em estudar Análise Real	Não apresenta	Não apresenta	Apresenta parágrafos que justificam a importância da Análise Real.
Estabelece um diálogo com o leitor	Diálogo com o estudante, como deverá realiza o estudo da disciplina	Não apresenta	Apresenta uma ampla conversa com o leitor

Fonte: Elaborada pela Autora

O produto cartesiano é fundamental quando se quer definir o que é uma função. O conceito de função somente é abordado no livro do Ávila no início do capítulo, após uma rápida abordagem histórica. O autor define função como uma "lei" que associa a cada elemento de um conjunto um único elemento de outro. Uma forma mais precisa de definirmoss função é através de relações. Uma relação de um conjunto A em um conjunto B é, basicamente, um sub-conjunto qualquer do produto cartesiano $A \times B$. Uma função f pode ser definida como um tipo de relação, que no texto aparece com o nome de "gráfico" da função, definido da seguinte maneira:

Definição 4.1. Uma função f: $A \to B$ é uma relação na qual todo elemento do conjunto A figura em um único par ordenado.

Em outras palavras, temos duas condições essenciais:

- Para qualquer$a \in A$, existe um par ordenado(a, b) na relação.
- Se (a, b_1) e (a, b_2) pertencem à relação, então $b_1 = b_2$.

A este único elemento $b \in B$ tal que (a, b) pertença à relação denominamos $f(a)$, ou seja, o valor da função f no elemento a. Também denotamos

$$f\colon A \to B.$$
$$a \to f(a)$$

É importante não confundir a função em si com o valor da função em um determinado elemento do domínio. Muito embora utilizemos abusos de linguagem como "seja a função $f(x)$" ou "seja a função $f = f(x)$", estas frases não devem ser tomadas como corretas, devemos ter sempre em mente que elas são apenas abreviações para uma ideia muito mais precisa que o que elas veiculam.

A primeira coisa a se notar é que o Elon formula os axiomas de Peano a partir do número 1, enquanto a maioria dos autores formula os mesmos axiomas a partir do número 0, que é mais "natural" para definir a operação soma nos naturais como tendo elemento neutro aditivo. A formulação dos axiomas de Peano a partir do 0 fica:

1 . Existe um conjunto não vazio $\mathbb{N}$ e uma função injetiva $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,que associa a cada $n \in \mathbb{N}$ um elemento $as(n) \in \mathbb{N}$ um elemento denominada "sucessor".

2 . Existe um único elemento 1 no conjunto $\mathbb{N}$, tal que $1 \in s(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

3 . Se um subconjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ é tal que $0 \in A$ e $s(A) \subseteq A$ (isto é, se $n \in$ A). Então $s(n) \in A$), então $A = \mathbb{N}$.

O livro não atenta para este fato, mas realmente são quatro as proposições equivalentes em $\mathbb{N}$:

- Axioma 3 de Peano: Se um subconjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ é tal que $0 \in A$ e $s(A) \subseteq A$ (isto é, se $n \in A$ então $s(n) \in A$), então $A = \mathbb{N}$.
- Princípio da Boa Ordem: Todo subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ possui um menor elemento.
- Primeiro Princípio de Indução: Se $A(n)$ é uma afirmação para cada número natural $n \in \mathbb{N}$ tal que:

a) $A(0)$ é verdadeira.

b) Sempre que $a(n)$ for verdadeira, tivermos que $a(s(n))$ também é verdadeira. Então $A(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

- **Segundo Princípio de Indução:** Se $A(n)$ é uma afirmação para cada número natural $n \in \mathbb{N}$ tal que:

a) $A(0)$ é verdadeira.

b) Sempre que $a(k)$ for verdadeira para todo $0 \leq k \leq n$, tivermos que $a(s(n))$ também é verdadeira. Então $A(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$

Os autores Djaro e Ávila não utilizam os conjuntos numéricos como suporte para o ensino dos números reais, salientamos que estudar os conjuntos numéricos é de suma importância, não somente por o aluno compreender as propriedades destes conjuntos, mas por aprimorar o conhecimento referente aos Axiomas de Peano, já que estes axiomas sustentam diversas teorias.

De acordo com as tabelas apresentadas anteriormente sobre o conjunto dos números reais, percebemos que existe uma grande divergência, pois alguns autores atribuem uma maior significância a certos tópicos e outros apenas realiza uma breve explanação.

Quanto a este tópico, destacamos que Geraldo Ávila é receoso quanto à quantidade de tópicos apresentados por ele, restringindo-se a poucos conteúdos dos números reais. Entretanto, Elon e Djaro, apresentam um leque de tópicos quanto aos números reais. Porém, questionamos: quais os conteúdos que devem ser abordados para o ensino dos números reais?

Não temos como finalidade apresentar os conteúdos considerados "importantes"para o estudo dos Números Reais, entretanto, acreditamos que os livros possam apresentar semelhanças entre estes temas.

4.4.3 Exemplos

Uma das principais características de um livro de Matemática são os exemplos que eles trazem. Neste sentido, buscamos o significado da palavra exemplo, quer dizer:: tudo que pode ou deve ser imitado; modelo. Isto é, nos livros o autor busca aplicar os conteúdos estudados.

Os exemplos nos livros didáticos auxiliam o aluno a compreender o que foi definido ou apresentado, já que, por vezes, a forma como o material didático apresenta alguma definição não fica claro ao aluno. Então, cabe aos exemplos demonstrar a aplicação do conteúdo e parcialmente explicar o que não foi compreendido.

Costumeiramente, os livros didáticos utilizam exemplos afins para que os alunos compreendam o que foi exposto em definição ou em teorema e, por conseguinte, consiga responder exercícios semelhantes ao exemplo apresentado. Porém, nas disciplinas de Análise Real, um exemplo não contribuirá tanto para que o aluno possa responder a outras indagações, visto que o exemplo não será modelo para responder outras indagações, pois a Análise Real exige que o aluno tenha conhecimento do material teórico para conseguir responder as perguntas.

Quanto ao Livro do Elon, caracteriza-se como um livro que traz inúmeros exemplos para o entendimento do conteúdo, porém estes exemplos são distantes das necessidades do licenciando em Matemática.

Djaro, ao apresentar a sua obra, utiliza diversos artifícios para que ocorra a compreensão por parte do leitor. Porém, o mesmo ao decorrer de cada tópico restringe-se a expor um único exemplo, deixando, assim, lacunas em explorar conceitos que viabilizem relacionar a Matemática superior com a Matemática elementar.

Ao falarmos do livro Análise para licenciatura, de Ávila, percebemos que o autor, ao tentar produzir um material voltado ao ensino da licenciatura em matemática, ocasionalmente, distancia-se do sentido de estudar Números Reais na disciplina de ,Análise, quando aborda o tema por um rigor substancial dedutivo e não por uma linguagem simbólica formal. Falamos isto, pois o autor, ao decorrer do seus textos, faz o uso de exemplos numéricos distantes do real sentido da Análise Real.

É muito difícil em uma disciplina com a de Análise Real conseguir relacionar a Matemática superior com a Matemática elementar, pois não podemos nos restringir à demonstrações, como também não abusar de "exemplos numéricos", mas deve existir uma mesclagem. A título de exemplo, Monteiro (s/d), em suas notas de aulas, faz a seguinte abordagem:

Definição 4.2. Um corpo é um conjunto K munido de duas operações, adição e multiplicação, que satifaz os seguintes axiomas:

- Adição

(A1) A adição é associativa: $(x+y)+z = x+(y+z), \forall x, y, z \in K$.

(A2) A adição é comutativa: $x+y = y+x, \forall x, y \in K$.

(A3) Existe um elemento 0 tal que$0+x = x, \forall x \in K$.

(A4) Para cada $x \in K$ existe em K um elemento oposto, indicado por $-x$ tal que $x+(-x) = 0$.

(M1) A multiplicação é associativa:$(xy)z = x(yz), \forall x, y, z \in K$.

(M2) A multiplicação é comutativa: $xy = yx, \forall x, y \in K$.

(M3) Existe um elemento 1 tal que $1x = x, \forall x \in K$.

(M4) Para cada $x \in K$ tal que $x \neq 0$ existe um elemento inverso, indicado por $x^{-1} \in K$ tal que $x.\, x^{-1} = 1$.

(D) Distributiva: $x(y+z) = xy + xz, \forall x, y, z \in K$.

Observemos que o conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ dos números naturais satisfaz apenas os axiomas **(A1), (A2), (A3), (M1), (M2), (M3) e (D)**. O conjunto $\mathbb{Z}$ dos inteiros, satisfaz todos os axiomas, exceto **(M4)**. O conjunto $\mathbb{Q}$ satisfaz os nove axiomas e, portanto, é um corpo. Os axiomas **(A1)** e **(M1)** garantem que a adição e a multiplicação de uma quantidade finita de números estão bem definidas, isto é, não há ambiguidade.

Por exemplo, $x + y + z$ denota tanto $(x + y) + z$ como $x + (y + z)$, já que são iguais. Da mesma forma, $x+y+z+w = ((x+y)+z)+w = (x+(y+z)+w) = x+((y+z)+w) = x + (y + (z + w)) = (x + y) + (z + w)$. A subtração é definida como $x - y = x + (-y)$ e a divisão é dada por $x \div y = x.\, y^{-1}$.

Com esses nove axiomas, é possível demonstrar outras importantes propriedades que costumamos ensinar aos alunos e que são essenciais para se resolver equações.

- (P1) *Cancelamento por adição* Se $a + b = a + c$ então $b = c$.

  Demonstração Suponha $a + b = a + c$. Então:

$$\begin{aligned} b &\overset{(A3+A2)}{=} 0 + b \overset{(A4)}{=} b + [a + (-a)] \overset{(A1)}{=} (a + b) + (-a) \overset{(hipótese)}{=} \\ &= (a + c)(-a) \overset{(A2)}{=} c + [a + (-a)] \overset{(A4)}{=} c + 0 \overset{(A3+A4)}{=} c \end{aligned}$$

- (P2) *cancelamento na multiplicação:* Se $c \neq 0$ e $ac = bc$ então $a = b$.

  Demonstração: exercício.

- (P3) *o produto de qualquer número por* 0 *é* 0.

  Demonstração Se a é um número qualquer do corpo K então $a.\, 0 = a.\, (0 + 0) = a.\, 0 + a.\, 0$. Podemos escrever

$$0 + a.\, 0 = a.\, 0 + a.\, 0$$

e, usando o cancelamento $(P1)$, chegamos $a.\, 0 = a.\, 0$.

Como consequência de $(P3)$, vemos que não existe um número 0^{-1} que satisfaz $0.\, 0^{-1} = 1$. Consequentemente, não existe $\frac{a}{0}$, ou seja, divisão por 0 é sempre indefinida.

- (P4) *se um produto é* 0 *então um dos fatores é* 0.

  Demonstração: Suponha $a.\, b = 0$ Se $a \neq 0$ então, pelo axioma $M4$, existe a^{-1} e $a^{-1}.\, (ab) = a^{-1}$

Usando $M1$ e $P3$, obtem-se $(a^{-1}.\, a).\, b = 0$ e, por $M3$, conclui-se que $b = 0$.

Pode acontecer que $a = 0$ e $b = 0$. Essa possibilidade não é excluída quando dizemos "$a = 0$ ou $b = 0$". Em Matemática, a palavra "ou" é sempre usada no sentido de "um ou outro,ou ambos".

A propriedade $(P4)$ é usada frequentemente na resolução de equações. Por exemplo, se quisermos resolver a equação $(x^2 - 7x + 10)$ podemos, por $(P4)$, concluir que ou equação é equivalente a $(x-5)(x-2) = 0$, cujas soluções são $x = 5$ ou $x = 2$.

- (P5) *regras de sinais*: $(-a)b = -(ab) = a(-b)$ e $(-a)(-b) = ab$.

Para poder entender como demonstrar a regra de sinais (você nunca teve curiosidade de saber por que elas valem?) precisamos entender o significado do que se quer provar. Por exemplo, para provarmos que $(-a)b = -(ab)$, o que vamos fazer é provar que " $(-a)b$ é o oposto de ab ". Agora fica fácil: de acordo com o axioma $A4$, basta somar ab e ver que o resultado é nulo. De fato, como $(-a)b + ab \overset{(D)}{=} [(-a)+a].\, b = 0.\, b \overset{P3}{=} 0$, concluímos que $(-a)b$ é o oposto de ab.

A igualdade $-(ab) = a(-b)$ é provada de modo análogo. (Faça como exercício!)

Finalmente, como $(-a)(-b) + [-(ab)] = (-a)(-b) + (-a)b = (-a)[(-b)+b] = (-a).\, 0 = 0$, temos que $\{(-a)(-b) + [-(ab)]\} + (ab) = 0 + (ab)$. Com isso, obtemos $(-a)(-b) = ab$.

Assim, o fato que o produto de dois números negativos é positivo é uma consequência dos axiomas de corpo.

Um outro exemplo da propriedade distributiva é o funcionamento do algoritmo de multiplicação entre dois inteiros, que aprendemos na escola. Por exemplo, as contas são nada mais do que uma maneira prática de escrever as propriedades distributivas das multiplicações de 4 unidades por 3 unidades e 2 dezenas, na primeira conta:

$$23.\, 4 = (20+3).\, 4 \overset{(D)}{=} 20.\, 4 + 3.\, 4 = 80 + 12 = 80 + (10+2) \overset{(A1)}{=} (8+1).\, 10 + 2 = 90 + 2 = 92$$

e, na segunda conta, completando com o produto de 5 dezenas por 3 unidades e 2 dezenas:

$$23.\, 54 = 23.\, (5.\, 10 + 4) \overset{(D)}{=} 23.\, 5.\, 10 + 23.\, 4 = \ldots$$

$$= 115.\, 10 + 90 + 2 \overset{(D)}{=} (115+9).\, 10 + 2 = 1242$$

A questão apresentada traz conteúdos rotineiros do professor em sala de aula, entretanto, apresenta-se em uma linguagem mas formal que auxiliará o futuro professor na sala de aula.

4.4.4 Notas Históricas

O campo histórico não consiste em apresentar uma história sobre algum teorema, mas uma construção gradativa daquele resultado, ali estudado, que pode contribuir para uma melhor compreensão do aluno.

Quanto a este contexto das notas históricas, já ressaltamos diversas vezes a sua contribuição para o ensino, em especial ao ensino de Análise Real. Assim, diante dos livros analisados, destacamos o livro de Geraldo Ávila, onde enfatou seja, busca-seou seja busca manter um cruzamento das ideias.

O autor Djaro, ao decorrer do seu trabalho, dedica alguns trechos do capítulo para o contexto histórico do conteúdo estudado. Não existe uma maior preocupação como no livro de Geraldo Ávila, mas percebemos que as notas históricas que ele apresenta de forma descritiva, facilita a assimilação do conteúdo que o autor busca expor.

O texto do autor Elon revela a sua preocupação quanto ao conteúdo a ser ministrado, porém, o mesmo não considera relevante a utilização do contexto histórico da disciplina para o aluno. Esta afirmativa decorre do fato do escritor não utilizar o contexto histórico para o aprendizado do aluno.

Geraldo Ávila

Dedekind e os números reais

Vários matemáticos do século XIX cuidaram da construção dos números reais, dentre eles Richard Dedekind, Karl Weierstrass, Charles Méray e Georg Cantor. Mas as teorias dos números reais que permaneceram foram a de Dedekind e a de Cantor. Não faremos uma exposição tecnicamente detalhada, antes vamos nos concentrar nas ideias de Dedekind, procurando dar uma boa compreensão de todo o seu trabalho, principalmente da propriedade de completude dos números reais.

Richard Dedekind (1831-1916) estudou em Côttingen, onde foi aluno de Gauss e Dirichlet. Em 1858, tornou-se professor em Zurique, transferindo-se em 1862 para Braunschweig (ali Brunswíck), sua terra natal, onde permaneceu pelo resto de sua vida.

Dedekind, apud Avila(1985), conta que no início de sua carreira em 1858, quando teve de ensinar Cálculo Diferencial, percebeu a falta de uma fundamentação adequada para os números reais, principalmente quando teve de provar que uma função crescente e limitada tem limite. Conta também que foi buscar inspiração para sua construção dos números reais na antiga e engenhosa teoria das proporções de Eudoxo. Assim, em 1887, ele escreve: "... e se interpretamos número como razão de duas grandezas, há de se convir que . Tal interpretação já aparece de maneira bem clara na célebre definição dada por Euclides sobre igualdade de razões. "Aí reside a origem de minha teoria (...) e muitas outras tentativas de construir os fundamentos dos números reais".

Cortes de Dedekind:

> Observe que a definição de Eudoxo associa, a cada par de grandezas, digamos (A, B), dois conjuntos de pares (m, n) de números naturais: o conjunto E ("E"de esquerda) dos pares para os quais $mB < nA$ (que fariam $m/n < A/B$ se A/B tivesse significado numérico) e o conjunto D ("D"de direita) dos pares para os quais mB > nA (que fariam AI B < mf n. se A.I B tivesse significado numérico).
>
> Inspirando-se na definição de Eudoxo, Dedekind parece ter notado que o procedimento do sábio grego leva a uma separação dos números racionais em dois conjuntos. Assim, qualquer número racional r efetua um "corte"ou separação de todos os demais números racionais no conjunto E dos números menores do que r e no conjunto D dos números maiores do que r; O próprio número r pode ser incluído como o maior elemento de E ou o menor elemento de D.
>
> Mas, além desses 'cortes' , há outros, como exemplifica o clássico caso de $\sqrt{2}$ O processo de encontrar a raiz quadrada de 2 conduz à separação dos números racionais em dois conjuntos: o conjunto E das raízes quadradas aproximadas por falta (aí incluídos o zero e os racionais negativos), e o conjunto D das raízes aproximadas por excesso. Só que agora esse corte não tem elemento de separação; de fato, que o conjunto das raízes por falta não tem elemento máximo e o conjunto das raízes por excesso não tem elemento mínimo. No modo de ver de Dedekind, o número irracional $\sqrt{2}$ deve ser criado como elemento de separação entre os conjuntos desse corte. Dedekind generaliza esse procedimento, primeiro definindo corte de maneira geral, no conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais.(Ávila, 2001, p.29)

Djaro Guedes:

> Somente a título de ilustração, fazemos alguns comentários sobre o método de Dedekind.
>
> **C**ortes de Dedekind. O método consiste em partir o corpo ordenado $\mathbb{Q}$ dos números racionais e construir um corpo do seguinte modo: primeiramente, um subconjunto A dos racionais é chamado um *corte*, se as três condições seguintes são satisfeitas; (i) A é não- vazio e não contém todos os racionais; (ii) se $r \in A$, se $s < r$, então $s \in A$; (iii) dado $r \in A$, existe $t \in A$ tal que $r < t$. Considere o conjunto C de todos os cortes. (Um elemento de C é um subconjunto de $\mathbb{Q}$) Em C, pode-se definir operações de adição e multiplicação e provar que,com essas operações, C é um corpo. Define-se também uma relação de ordem e prova-se, então, que C é um corpo ordenado. Finalmente, demonstra-se que esse corpo satisfaz o postulado de Dedekind. Observe que, seguindo essa apresentação, o dito postulado deve ser chamado de Teorema de Dedekind! Exemplo de um corte: o conjunto A formado pelos números racionais negativos e pelos racionais positivos r tais que $r^2 < 2$. O leitor poderá produzir facilmente outros exemplos. (FIGUEIREDO, 1996, p.85).

4.4.4.1 Nossas reflexões

Ao analisarmos esses dois autores, percebemos a divergência entre eles. A princípio, é necessário destacar que não apresentamos toda a sequência utilizada pelo autor Gerlado Ávila, por considerarmos que não teria utilidade para o nosso estudo. Porém, averiguamos novamente como os autores se diferenciam nas abordagens temáticas. Djaro Guedes é bastante sucinto ao falar sobre os cortes de Dedekind, diferentemente do Geraldo Ávila, que realiza uma abordagem profunda, apresentando anteriormente um contexto histórico em que trabalha a relação de Dedekind e os números reais.

Todo este contexto serve para compreendermos a importância do contexto histórico para o entendimento do estudante para estudos futuros. Dialogamos isto, pois a forma como Geraldo Ávila trata este conteúdo nos faz entender gradativamente a compreensão do Teorema de Dedekind.

Ávila apresenta este contexto para que, posteriormente, pudesse definir o que seria corte e, consequentemente, apresenta o teorema de Dedekind, expondo o demonstração correspondente a este. Ao realizar o estudo, verificamoss que a metodologia de Geraldo Ávila nos fez compreender com mais facilidade, apesar do Djaro buscar apenas realizar alguns comentários.

4.4.5 Demonstrações

A palavra Demonstração torna-se um Paradigma para a disciplina de Análise Real, tendo em vista a contribuição da disciplina em oportunizar o aluno a ter um contato direto com a demonstração, já que ao decorrer do curso ele trabalhava demonstrações de forma intuitiva.

A seguir, faremos uma comparação dos autores Geraldo Ávila e Elon Lages Lima, quando definem Conjuntos finitos e infinitos.Buscávamos realizar uma comparação entre os três autores, contudo, Djaro Guedes não aborda este tópico durante capítulo dos números Reais.

Geraldo Ávila

Conjuntos finitos e infinitos

> O estudo sistemático dos conjuntos, que acabou levando a uma teoria axiomática desse campo de estudos, começou com Georg Cantor (1845-1918), por volta de 1872. Nessa época, Cantor estava iniciando sua formação profissional e se ocupava do estudo da representação de funções por meio de séries trigonométricas. Isto fez com que ele investigasse os conjuntos de pontos de descontinuidade de tais funções, os mais simples dos quais são conjuntos com apenas um número finito de pontos. Mas o aparecimento de conjuntos cada vez' mais complicados acabou levando Cantor a investigar conjuntos infinitos em sua generalidade. Neste Estudo ele introduziu um conceito simples, que logo se revelaria da maior importância o conceito de *equivalência de conjuntos.*
>
> Segundo Cantor, dois conjuntos são equivalentes, ou têm a mesma cardinalidade ou a mesma potência, quando é possível estabelecer uma correspondência que leve elementos distintos de um conjunto em elementos distintos do outro, todos os elementos de um e do outro conjunto sendo objeto dessa correspondência. Em termos precisos, a correspondência de que estamos falando chama-se bijeção. Escreveremos $A \leftrightarrow B$ para indicar que existe uma bijeção entre A e B. .

Observe que é essa noção de equivalência que dá origem ao conceito abstrato de número natural. De fato, o que faz uma criança de quatro ou cinco anos de idade constatar que numa cesta há três laranjas, noutra três maçãs, e noutra ainda três ovos? Ela chega a essas conclusões - mesmo sem perceber – por constatar que é possível "casar"os elementos de qualquer uma dessas cestas com os elementos de qualquer outra de maneira biunívoca. É essa abstração dos elementos concretos dos conjuntos equivalentes de diferentes objetos que nos leva a formar a noção de número natural, um fenômeno que ocorre muito cedo em nossas vidas.

Assim, denotando com F_n o conjunto dos primeiros números naturais, $F_n = \{l, 2, 3, \dots n\}$, é precisamente o fato de um conjunto A ser equipotente tente a F_n que nos faz dizer que A tem n elementos, ou tem o mesmo número de elementos que F_n.Daí definirmos: *um conjunto A se diz finito quando existe um número natural n tal que A seja equipotente ao conjunto F_n.*

Um conjunto se diz infinito quando não for finito.

No caso de conjuntos finitos, serem equivalentes corresponde a terem o mesmo número de elementos, de sorte que o conceito de cardinalidade é o recurso natural para estender, a conjuntos infinitos, o conceito de 'número de elementos de um conjunto'.

Diz-se que dois conjuntos quaisquer A e B têm a mesma cardinalidade, ou o mesmo número de elementos, se eles forem equipotentes. Como se vê, essa definição, no caso de conjuntos finitos, não traz nada de novo; mas estende, para conjuntos infinitos, a noção de 'número de elementos de um conjunto'. Tais números são os chamados *números transfinitos.*(ÁVILA, 2001, p.14)

Elon Lages Lima

Conjuntos finitos e infinitos

Neste parágrafo, indicaremos pelo símbolo I_n o conjunto $\{1, \dots, n\}$ dos números naturais desde 1 até n. Mais precisamente, dado $n \in \mathbb{N}$, temos

$$I_n = \{p \in \mathbb{N}; 1 \leq p \leq n.\}$$

Um conjunto X chama-se *finito* quando é vazio ou quando existe, para algum $n \in \mathbb{N}$, uma bijeção

$$\varphi \colon I_n \to X.$$

No primeiro caso, diremos que X tem zeros elementos. No segundo caso, diremos que $n \in \mathbb{N}$, é o *número de elementos de X*, ou seja, que X possui n elementos.

Os seguidores fatos decorrem imediatamente das definições:

a) Cada conjunto I_n é finito e possui n elementos;

b) se $f \colon X \to Y$ é uma bijeção, um dos conjuntos é finito se, e somente se, o outro é.

Intuitivamente, uma bijeção $\varphi \colon I_n \to X$. significa uma *contagem* dos elementos de X. Pondo $\varphi(1) = x_1, \varphi(2) = x_2, \dots, \varphi(n) = x_n$, temos $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Esta é a representação ordinária de um conjunto finito.

> Para que o número de elementos de um conjunto não seja uma noção ambígua, devemos provar que existe duas bijeções $\varphi\colon I_n \to X$ e $\psi\colon I_m \to X$, então $m = n$. Considerando a função composta $f = \psi^{-1} \circ \psi\colon I_n \to I_m$, basta então provar que se existe uma bijeção $f\colon I_n \to I_m$, então tem-se que $m = n$. Para fixar ideias, suponhamos $m \leq n$. Daí $I_m \subset I_n$. A unicidade do número de elementos de um conjunto finito será, portanto, uma consequência da proposição da proposição mais geral seguinte:

Teorema 4.1. *Seja $A \subset I_n$. Se existir uma bijeção $f : I_n \to A$,então $A = I_n$.*

Demonstração. Usaremos indução em n. O resultado é óbvio para $n = 1$. Suponhamos que ele seja válido para um certo n e consideremos uma bijeção $f\colon I_{n+1} \to A$. Ponhamos $a = f(n+1)$. A restrição de f a I_n fornece uma bijeção $f'\colon I_n \to A - \{a\}$. Se tivermos $A - \{a\} \subset I_n$, então, pela hipótese de indução, concluiremos que $A - \{a\} = I_n$, donde $a = n+1$ e $A = I_{n+1}$. Se, porém, não for $A - \{a\} \subset I_n$, então deve-se ter $n+1 \in A - \{a\}$. Neste caso, existe $p \in I_{n+1}$ tal que $f(p) = n+1$. Então definiremos uma nova bijeção $g\colon I_{n+1} \subset I_n$. Logo, pela hipótese de indução, $A - \{n-1\} = I_n$. Isto conclui a demonstração.(LIMA, 2004, p.42)

□

4.4.5.1 Nossas Reflexões

Segundo o professor Geraldo Ávila, ao elaborar o livro de Análise Real para licenciatura com propósito de um curso introdutório de análise para alunos de licenciatura em Matemática, realiza uma apresentação mais elementar. Muitas vezes, as demonstrações são simplificadas, escondendo algumas refinamentos formais que ocorrem quando analisamos com cuidado e rigor. Salientamos a importância das demonstrações no estudo de Números Reais, porém percebemos nesta literatura uma preocupação do autor em dar muitos exemplos numéricos e ficar em casos particulares, evitando generalizações e abstrações sempre que possível. Obviamente, esta pode ser uma boa estratégia quando se pretende apresentar pela primeira vez os conceitos de análise a um aluno de licenciatura, mas, certamente, o autor poderia ser mas ousado em termos de abstrações.

Enquanto pesquisadores, atentamos para a forma como os autores tratam os conteúdos, o aprofundamento dos temas. Discutimos isso pois, decorrente dos exemplos acima, verificamos que o literato Geraldo Ávila faz uma abordagem buscando um diálogo entre o autor e o leitor, uma conversa intuitiva, já o professor Elon traz o formalismo como característica em sua colocação, levando-nos a questionar: até que ponto o formalismo e o rigor devem prevalecer na disciplina de Análise Real para um curso de licenciatura em Matemática?

Ao tentar responder a indagação anterior, refletimos sobre alguns pontos: O objetivo da disciplina para a licenciatura em Matemática, as contribuições de um curso de Análise Real para a formação do professor de Matemática do ensino básico e o atual cenário desta disciplina no processo de ensino-aprendizagem.

Ou seja, todas as estas reflexões nos levam a afirmar que o rigor e o formalismo devem se fazer presentes na disciplina de Análise Real, que são características elementares da disciplina, não obstante a finalidade desta disciplina não restringir-se a isso. O objetivo que a mesma traz consigo possibilita que o estudante tenha um olhar pedagógico, compreendendo que um professor de Matemática não deve saber apenas de Matemática.

Imaginemos que para construir a casa dos nossos sonhos, é necessário um projeto, materiais de construção, pedreiros, engenheiro etc. Também assim é o nosso processo de formação, para sermos o professor que idealizamos necessitamos de outras pessoas e de outros recursos, pois o saber advém da partilha do conhecimento.

O livro didático do ensino superior deve abranger estas mesmas características, tendo em vista que a demonstração traduz como um dos principais significados, porém não resume a isso. O livro, especialmente direcionado à formação de professor de matemática, deve levar em conta que o saber não é a principal missão do professor, mas saber ensinar a saber retrata esta missão.

Elon, ao tratar sobre conjuntos finitos e infinitos, traz diversos resultados, como também várias demonstrações sobre este tema, enquanto Geraldo Ávila substitui as demonstrações por notas históricas. Não queremos afirmar que as notas históricas não são importantes para as demonstrações, todavia esta deve ser um complemento para as demonstrações, ao contrário do Elon, que delimita o processo de demonstrar a letras, esquecendo a importância do diálogo neste procedimento.

> O recurso que quase exclusivo às técnicas algébricas, cujo objetivo em Matemática é o de reduzir a linguagem, economizá-la, impede a construção da generalização e das abstrações Matemáticas pelo aluno. A abstração é algo a ser atigido no ensino da Matemática. O uso precoce e exclusivo de tais técnicas, porém, induz comumente o aluno ai automatismo segundo as regras de um jogo, com a não apreensão das operações efetuadas sobre os números e a não apreensão dos significados matemáticos presentes nos problemas que se pretende resolver. (MEDEIROS, 2005 p.20)

Ainda nesta secção, trataremos a forma como os autores apresentam a definição dos conjuntos enumeráveis, como também expõem alguns teoremas.Exibiremos, assim, o cruzamento das ideias do três livros analisados.

Elon Lages Lima - Conjuntos Enumeráveis

> Um conjunto X diz-se *enumerável* quando é finito ou quando existe uma bijeção $f\colon \mathbb{N} \to X$. No segundo caso X diz-se *infinito enumerável* e, pondo-se $x_1 = f(1), x_2 = f(2), \ldots, x_n = f(n), \ldots$, tem-se $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Cada bijeção $f \ldots \mathbb{N} \to X$ chama-se uma enumeração (dos elementos) de X.

Teorema 4.2. *Todo conjunto infinito X contém um subconjunto infinito enumerável.*

Demonstração. Basta definir uma função injetiva $f\colon \mathbb{N} \to X$. Para isso, começamos escolhendo em cada subconjunto não- vazio $A \subset X$, um elemento $x_A \in A$. Em seguida, definimos f por indução. Pomos $f(1) = x_x$ e, supondo já definidos $f(1), \ldots, f(n)$, escrevemos $A_n = X - \{f(1), \ldots, f(n)\}$. Como X não é finito, A_n não é vazio. Poremos $f(n+1) = x_{A_n}$. Isto completa a definição intuitiva da função $f\colon \mathbb{N} \to X$. Afirmamos que f é injetiva. Com efeito, dados $m \neq n$ em $\mathbb{N}$ tem-se, digamos

$m < n$. Então $f(m) \in \{f(1), \ldots, f(n-1)\}$ enquanto que $f(n) \in C\{f(1), \ldots, f(n-1)\}$. Logo $f(m) \neq f(n)$. A imagem $f(\mathbb{N})$ é, portanto, um subconjunto infinito enumerável de X. □

Teorema 4.3. *Seja X um conjunto enumerável. Se $f\colon X \to Y$ é sobrejetiva, então, Y é enumerável.*

Demonstração. Existe $g\colon Y \to X$ tal que $f \circ g = id_y$. Logo f é uma inversa à esquerda de g, e portanto, g é injetiva. Segue-se que Y é enumerável, decorrente do teorema anterior. □

Teorema 4.4. *Sejam X, Y conjunto enumeráveis. O produto cartesiano $X \times Y$ é enumerável.*

Demonstração. Existem funções injetivas $\varphi\colon X \to \mathbb{N}$ e $\psi\colon Y \to \mathbb{N}$. Logo $g\colon X \times Y \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, dada por $g(x,y) = (\varphi(x), \psi(y))$ é injetiva. Assim sendo pelo corolário(*Um subconjunto de um conjunto enumerável é enumerável. Ou: se $f\colon X \to Y$ é injetiva e Y é enumerável, então X é enumerável.*) □

Teorema 4.5. *Sejam X, Y conjuntos enumeráveis. O produto cartesiano $X \times Y$ é enumerável.*

Demonstração. Existem funções injetivas $\varphi\colon X \to \mathbb{N}$ e $\psi\colon Y \to \mathbb{N}$. Logo $g\colon X \times Y \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, dada por $g(x,y) = (\varphi(x), \psi(y))$ é injetiva. Assim sendo pelo corolário ressaltado anteriormente, basta provar que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável. Para definimos a função $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, onde $f(m,n) = 2^m . 2^n$. Pela unicidade da decomposição em fatores primos, f é injetiva, donde fornece uma bijeção de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sobre o conjunto enumerável $f(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$ □

(LIMA, 2004, p.48)

Djaro Guedes- Conjuntos Enumeráveis

Um conjunto A é *enumerável*, se for possível definir uma bijeção $f\colon \mathbb{N} \to A$.

Exemplo 4.1. O conjunto dos números pares {2,4,6,...} é enumerável; basta tomar $f(n) = 2n, n \in \mathbb{N}$

Exemplo 4.2. O conjunto, $\mathbb{Z}$ dos inteiros $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ é enumerável; basta tomar $f(1) = 0, f(2n) = n$ e $f(2n+1) = -n$

Exemplo 4.3. Um subconjunto qualquer $\mathbb{N}$ é finito ou enumerável. A função f nesse caso é a ordem natural em $\mathbb{N}$. (A rigor, a possibilidade de definir tal função decorre do chamado Princípio da Boa Ordenação dos Inteiros. Ver [16].

Exemplo 4.4. Usando o exemplo anterior temos: seja B um subconjunto de um conjunto enumerável, então B é finito ou enumerável.

Exemplo 4.5. O conjunto $\mathbb{Q}^*$ dos racionais positivos é enumerável. Demonstraremos que o conjunto F de todos os $p/q, p, q \in \mathbb{N}$ é enumerável. Como $\mathbb{Q}^+ \subset \mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}^+$ não é finito segue do exemplo 4.4.5.1 que $\mathbb{Q}$ é enumerável. Para ver se F é enumerável, basta olhar a tabela

Seguindo-se as setas, obtém-se uma ordenação do conjunto F; e a função $f\colon \mathbb{N} \to F$, neste caso, será assim definida: $f(n) =$ n-ésimo elemento de F.

Observação 4.1. A união de um conjunto finito A com um conjunto enumerável B é enumerável. De fato, sejam

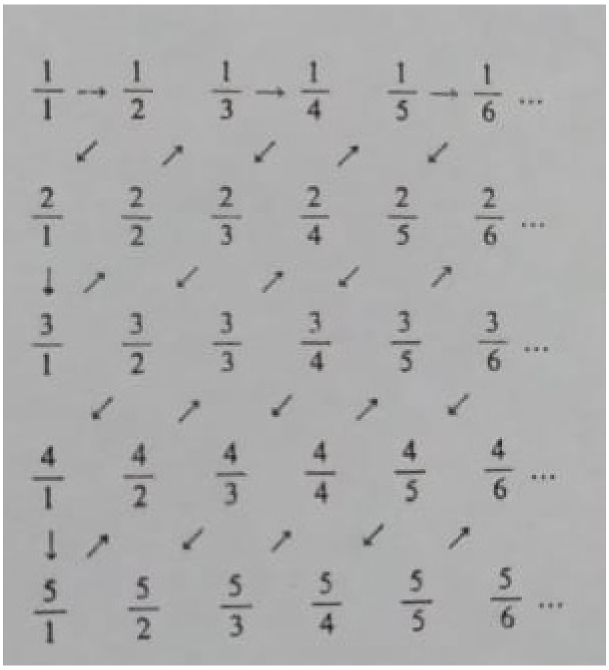
$$A = \{a_1, \ldots, a_p\} \text{ e } B = \{b_1, b_2, \ldots\}$$

então, $A \cup B$ é enumerável, pois podemos definir $f\colon \mathbb{N} \to A \cup B$ como se segue

$$f(x) = \begin{cases} a_n, & ,se \quad 1 \leq n \leq p \\ a_{n-p}, & ,se \quad p+1 \leq n. \end{cases}$$

(FIGUEIREDO, 1996, p.45)

Figura 6 – Ordenação do Conjunto F



Fonte: Figueiredo (1996,p.45)

Geraldo Ávila- Conjuntos Enumeráveis

> O primeiro conjunto infinito com que nos familiarizamos é o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais. Chama-se conjunto enumerável a todo conjunto equivalente à $\mathbb{N}$.
>
> Um dos primeiros fatos surpreendentes que surge na consideração de conjuntos infinitos diz respeito à possibilidade de haver equivalência entre um conjunto e um seu subconjunto próprio. Por exemplo, a correspondência $n \mapsto 2n$, que ao 1 faz corresponder 2, ao 2 faz corresponder 4, ao 3 faz corresponder 6, etc., estabelece equivalência entre o conjunto elos números naturais e o conjunto elos números pares positivos. Veja: o conjunto elos números pares positivos é um subconjunto próprio do conjunto $\mathbb{N}$; no entanto, tem a mesma cardinalielade que $\mathbb{N}$, ou seja, o mesmo número de elementos. Este fenômeno é uma peculiaridade dos conjuntos infinitos e em nada contradiz o que já sabemos sobre conjuntos finitos .'(ÁVILA, 2001, p.15)

4.4.5.2 Nossas Reflexões

Neste momento, não buscamos apenas apresentar um teorema e refletir somente sobre a demonstração correspondente, mas buscamos perpassar esta ideia, apresentando de forma ampla como os autores expõem o conteúdo dos Conjuntos Enumeráveis, a fim de compreender a profundidade que eles abordam o conteúdo e as características presentes durante o corpo do texto. Argumentamos isto,por acreditarmos que o ato de demonstrar não condiz somente em utilizar teoremas, corolários que justifiquem a ideia que está querendo ser provada, mas o corpo em que está presente.

Observando de forma ampla como os autores apresentam os conjuntos enumeráveis, destacamos as diferenças em abordar o mesmo conteúdo, levando em consideração que cada autor tem uma forma de expor o seu pensamento, mas o que salientamos é o distanciamento não somente na apresentação, mas no conteúdo por completo.

Devemos salientar que não expomos por completo a ideia do Elon, pois o mesmo apresenta diversos resultados, que não seriam convenientes ser apresentados, todavia retratamos alguns trechos que transmitem as principias convicções do escritor.

Entrelaçando as ideologias dos três autores, podemos perceber a divergência existente entre eles quanto ao modo de expor o conteúdo proposto. Neste sentido, o professor Elon, mas uma vez, apresenta como característica nas suas demonstrações o rigor e o formalismo, exibe também um leque de teoremas e corolários que busca fortalecer o conhecimento do estudante. Porém, o que indagamos é se todo este material ofertado é relevante para a formação do professor do ensino básico.

Quanto a estrutura do trabalho, o literário apresenta a definição, seguido de um exemplo, e, posteriormente, exibe diversos teoremas e corolários. Quanto ao fator histórico, o mesmo é deixado de lado, como também a conexão das ideias do ensino superior com o ensino básico. Enfatizando ainda sobre as demonstrações, percebemos que não existe uma conversa do escritor com o leitor, a linguagem científica prevalece durante todo o corpo do texto.

O autor Djaro Guedes apresenta algumas semelhanças quanto ao autor ressaltado anteriormente, porém quando nos referimos aos conjuntos enumeráveis, percebemos a relação existente com autor Geraldo Ávila, tendo em vista que, ao apresentar qualquer definição, também utiliza como recursos exemplos números para que, assim, o leitor não restrinja-se somente a exemplos abstratos.

O contexto histórico também não está relacionado aos conjuntos enumeráveis, entretanto o livro utiliza como artifício exemplos numéricos que não são de costume deste escritor, assim como apresenta uma tabela que diferencia os exemplos que rotineiramente estamos acostumados ao ver nos livros didáticos do ensino superior de Matemática.

Geraldo Ávila, ao definir os conjuntos enumeráveis, apresenta uma linguagem mais acessível a um estudante de licenciatura em Matemática, dizemos isto por acreditarmos que os estudantes de licenciatura não têm subsídio para uma linguagem tão científica. Evidenciamos, ainda, o fato do autor utilizar exemplos numéricos que nos faz enxergar o contexto em que a definição foi aplicada, porém, por mais que seja importante o processo de contextualização da disciplina, não podemos deixar de lado as características do ensino dos Números Reais.

A estrutura do livro de Geraldo Ávila, quanto a este tópico, consiste em apresentar a definição e, posteriormente, dialoga sobre a enumerabilidade dos conjunto do racionais (exemplo este que já apresentamos durante este trabalho). Assim, questionamo-nos sobre exemplos analíticos que não fazem parte em nenhum momento, já que eles são cobrados na secção dos exercícios.

> Quantas e quantas vezes, ao final de uma demonstração a pergunta mais comum entre colegas era: 'reminou a demonstração'? O que estava demonstrando? Por que estava demonstrando? O carácter psicológico da demonstração não era levado em consideração. Quando algo está demonstrado? Demonstrável é o que pode sr visto, captado. E isso, não era enfatizado como importante. O aluno não era convidado a vivenciar o 'ver claro' daquilo que estava sendo demonstrado. (MEDEIROS, 2005 p.15)

Uma reflexão a ser proposta é o questionamento de como as demonstrações vêm sendo apresentadas, e quais as contribuições destas para a formação do professor de Matemática. Propomos esta reflexão por acreditarmos que uma das maiores dificuldades dos estudantes na disciplina de Análise Real está no ato de compreender e demonstrar, parece não ter muito sentido aquelas diversas letras no quadro. Assim, é primordial que existam mudanças quanto a esta lacuna, pois saber demonstrar também é uma tarefa de um professor de Matemática.

.

4.4.6 Exercícios

Por fim, comentaremos sobre os exercícios propostos pelos livros didáticos analisados. Os exercícios não tem somente a finalidade de refletir o que foi estudado na sala de aula, mas ele perpassa este pensamento, buscando levar o aluno a indagar o que está sendo questionado.

Devemos destacar que todos os livros didáticos do ensino superior de Números Reais analisados apresentam um grande número de exercícios a serem explorados pelos alunos. Destacamos também a preocupação dos autores em destinar um espaço dos seus livros para respostas e sugestões das atividades propostas, esta fato mostra a sua relevância por sabemos a complexidade em responder os exercícios sugeridos pelos livros. Apesar de nem todos os exercícios contemplarem as necessidades dos estudantes de licenciatura em Matemática, este artifício contribui para que os leitores possam direcionar o seu raciocínio perante a atividade.

Falamos ainda sobre a atribuição dos autores perante os alunos ao responderem o máximo de exercícios para o aprendizado do conteúdo. Temos que concordar com os escritores, quando eles realizam esta abordagem, tendo em vista que para o aprimoramento da compreensão da Análise Real é necessário que os alunos dediquem boa parte do seu tempo a responderem exercícios, pois, diferentemente de outras disciplinas, não existem modelos a serem seguidos, sendo assim, é imprescindível a reflexão sobre o ato de demonstrar. Entretanto, não concordamos quando os escritores preconizam listas de questões que não refletem em sua formação.

Os autores Elon e Djaro ofertam listas de exercícios compatíveis com a teoria abordada em seu livros, ou seja, com aspectos científicos que influenciama diretamente na aprendizagem dos estudantes.

> Nenhuma palavra era dita, nenhum questionamento levantado sobre esses modo de fazer e de pensar. Nada se perguntava sobre o objetivo e o significado desta atividade que se chama Matemática. Havia subjacente a ideia de fazer Matemática, sem refletir-se sobre essa ação. havia uma preocupação com as respostas a serem obtidas, com os modos de procedimentos já estabelecidos, de uma forma tal que não se permitia um distanciamento das palavras usadas para que não se pudesse captar as ideias a elas subjacentes.(MEDEIROS, 2005, p.14)

O posicionamento acima justifica a não utilidade dos exercícios quando não são propostos para os licenciandos em Matemática, os mesmos impossibilitam os alunos a pensarem, refletirem sobre o que está sendo estudado, utilizando simplesmente a Matemática pela Matemática.

Os exercícios ou as listas de exercícios que são retiradas dos livros têm grande importância para os alunos, já que as provas são elaboradas semelhantes aos exercícios que foram propostos, ocasionando um estudo repetitivo dos exercícios em aprender a responder e não a como responder.

O livro do Geraldo Ávila, apesar de apresentar diversos exercícios numéricos, mescla a sua lista de exercício quando expõe algumas atividades que trabalham a generalização, contudo, concebemos que esse autor deveria utilizar o rigor e formalismo como ferramentas para o ensino da disciplina, já estes são indispensáveis para o ensino da Análise Real. Proferimos isto por acreditar que não se pode começar a provar teoremas sobre números reais, sem que se tenha deixado claro sobre o que exatamente está sendo falado, ou seja, esta particularidade é o que especifica a disciplina. Diferencialmente, o cálculo tem como finalidade aprender a aplicar conceitos e teoremas (da análise Matemática), realizando cálculos. Já na análise, procura-se desenvolver formalmente toda a teoria que garante o funcionamento daqueles teoremas, fazendo-se uma análise dessa teoria, levando em conta toda a estrutura lógica que interliga tais teoremas. Em certo sentido, em cálculo usam-se os teoremas para fazer contas, e na análise usa-se a lógica para fazer teoremas.

4.4.7 Encontros e Desencontros

Quanto à apresentação do conjunto dos Números Reais, percebemos que todos os autores expõem este conjunto como um corpo ordenado, todavia diferenciam um dos outros quando nos referimos à abordagem que cada autor utiliza ao trabalhar este conjunto. Djaro Guedes é o autor que mais se distancia da realidade dos estudantes da licenciatura em Matemática, tendo em vista que, ao realizar a abordagem dos Números Reais, realiza uma breve explanação dos conjuntos numéricos, não apresentando os axiomas de Peano, já que estes desempenham grande papel no que se refere a formação do professor de Matemática. Já o autor Ávila realiza uma breve explanação sobre os conjuntos numéricos, contudo utiliza os axiomas de Peano na realização dos estudos. O professor Elon prefere construir o conjunto dos Números Reais a partir do conjunto dos Números Naturais, explicando detalhadamente cada etapa dessa construção.

As propriedades vivenciadas pelas obras analisadas desencontram em seus mais diversos aspectos, tanto pelo enaltecimento que cada autor atribui, como pelos artifícios utilizados para a compreensão do conteúdo. O autor Elon ousa quando falamos sobre o leque de resultados trabalhados perante os Números Reais, porém a falta de didática e a preocupação sobre a contribuição da disciplina perante a formação do professor de Matemática do ensino básico faz com que esta obra não atribua significado a um docente do ensino básico. O livro do Djaro Guedes, durante o capítulo dos Números Reais, trabalha aspectos que pouco contribuem para o aprendizado do estudante, deixando de lado ou trabalhando de forma superficial pontos essências ao conhecimento da temática (Conjuntos numéricos). O autor Ávila deixa evidenciar a sua preocupação quanto à conexão dos conteúdos da Matemática superior com a Matemática elementar, apresentando resultados dos Números Reais voltados ao ensino da Matemática como, por exemplo, em seu livro realiza a abordagem dos números racionais.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho tem como principal objetivo refletir sobre o papel do livro didático do ensino superior na disciplina de Análise Real na licenciatura em matemática e as suas implicações pedagógicas para o professor de Matemática do ensino básico.

O capítulo dos Números Reais, específica do curso de Matemática, apresenta uma divergência quanto as necessidades do curso de licenciatura, haja vista que grande parte dos matérias didáticos utilizados nesta, trazem características de um curso de bacharelado em Matemática.

As análises dos livros didáticos utilizados costumeiramente pelos cursos de licenciatura em Matemática, nos fizeram refletir sobre o tipo de formação que os docentes em Matemática do ensino básico estão recebendo, aspirando, que o tópico de Números Reais tende a fundamentar os conceitos matemáticos que serão utilizados no desenvolvimento profissional do futuro docente.

Os estudos realizados sobre os livros de Análise Real que habitualmente são utilizados nos cursos de licenciatura, nos fizeram perceber a carência de materiais voltados a esta modalidade. Tendo em vista que, apesar da disciplina ter como peculiaridade o rigor e o formalismo, os mesmos não demonstram preocupações quanto as características pedagógicas de um curso de licenciatura em Matemática.

A conexão entre o "saber matemático"e o "saber pedagógico"deve se fazer presente na formação do professor em Matemática, já que estas competências proporcionam aos docentes aperfeiçoarem os seus conhecimentos, às necessidades dos estudantes, isto é, não basta restringir-se aos conhecimentos matemáticos, bem como aos conhecimentos pedagógicos, é necessário entrelaçar os saberes para que assim o ato de ensinar seja efetivado. Deste modo, acreditamos que os livros didáticos também devem apresentar estas características, porém o resultado da nossa pesquisa constatou a ausência destas conexões.

Nossa pesquisa realizou as análises das seguintes obras: Análise Matemática para a Licenciatura – Geraldo Ávila, Análise I – Djairo G. de Figueiredo Introdução a Análise Real – Elon L. Lima, nas quais onde buscamos apontar aspectos presentes nas literaturas que dificultassem, bem como contribuíssem na formação do professor do ensino básico de Matemática.

Os autores dos referidos livros trazem características intrínsecas que consideram relevantes para o estudo dos Números Reais. Desta forma, para a realização de um estudo mais aprofundado, categorizamos o capítulo analisado dos livros, em cinco partes, onde observamos: Prefácio, a organização do capítulo, exemplos, notas históricas, demonstrações e os exercícios. Este método condiz por acreditarmos que a particularidade nos proporciona a realização de um estudo mais específico, como também nos permite entrelaçar as semelhanças e as diferenças presentes nestes materiais.

O livro Análise Matemática para licenciatura traz como proposta uma Matemática voltada para as necessidades do futuro docente em Matemática do ensino básico. Desta forma, percebemos a cautela do autor em apresentar os conteúdos dos Números Reais, porém, o excesso de "cuidado"em apresentar um conteúdo que não seja condizente com a realidade dos estudantes, faz com que o literário fuja das características primordiais da disciplina.

No prefácio, bem como em todo corpo do texto, o autor consegue manter um diálogo com o leitor, buscando elencar a realidade do futuro professor com a Matemática superior. As notas históricas tornam-se características primordiais do livro, tendo em vista que este recurso é utilizado ao longo do capítulo.

Porém, ressaltamos a dificuldade do escritor em trabalhar as demonstrações, já que o mesmo utiliza o contexto histórico para justificar o resultado apresentado, entretanto, o rigor e o formalismo, aspectos primordiais desta disciplina, pouco aparecem neste contexto. Os exercícios e os exemplos, em sua grande maioria, são numéricos, o que em nada contribui para o objetivo da disciplina, já que esta permite ao estudante ter um contanto maior com a Matemática superior.

Estas afirmativas não têm como finalidade manifestar que a Matemática é a essência da disciplina, mas que é fundamental que o rigor e o formalismo estejam presentes ao decorrer do estudo. O contexto pedagógico apresenta-se presentes durante todo o texto o que específica esta das outras duas obras analisadas

O livro do Djaro Guedes de Figueiredo mostra um grande distanciamento dos conteúdos necessários para a formação do futuro professor do ensino básico em Matemática. A linguagem científica é primordial em seu trabalho, apesar do mesmo utilizar pequenos recortes históricos, mas este artefato pouco contribui para a compreensão do estudante perante a disciplina, tendo em vista que o autor ao empregar as notas históricas, não tem a preocupação em demonstrar que aquele contexto se estende na construção de outros resultados.

Em relação às demonstrações, percebemos que o autor busca estabelecer um diálogo com o leitor, porém, não explora este recurso com tanta propriedade, já que são apresentadas poucas demonstrações ao decorrer do texto. Existe a presença de diversos exemplos, contudo sentimos a falta destes exemplos serem explorados na perspectiva da Análise Real, a partir de um "diálogo científico". A organização dos tópicos foi um dos critérios que mais nos chamou atenção, pelo fato de que o autor apresentou tópicos muitos distante da realidade dos estudantes, e que pouco tiveram relação com as outras obras.

Quanto ao conteúdo a ser analisado, nos limitamos ao capítulo dos Números Reais, tendo em vista que a Análise Real tem como objetivo, promover um estudo sobre o conjunto dos números reais, bem como, estes conteúdos refletem diretamente no processo de ensino do futuro docente.

O conjunto dos Números Reais, precisa abranger tópicos que relacionem-se com o ensino básico, já que a finalidade da disciplina compromete-se em fortalecer o conhecimento do futuro licenciando em Matemática. Entretanto, esta característica não é apresentada ao decorrer das analises dos livros. Os autores preferencialmente abordam questões que pouco contribui para a formação do professor de matemática, apresentando aspectos voltados ao bacharelado.

A disciplina de Análise Real permite ao licenciando um dos poucos contatos com a Matemática superior, contudo este motivo não induz esquecer os objetivos da disciplina perante as necessidades do professor do ensino básico. Esta consideração nos nos inspira a falar sore a obra do professor Elon Lages Lima, tendo em vista que o autor prioriza os aspectos matemáticos, deixando a desejar características que contribua para a compreensão do estudante de licenciatura.

De fato, percebemos que a obra do Professor Elon Lages Lima apresenta uma maior preocupação quanto ao número de conteúdos a ser trabalhados, expondo diversos resultados que a disciplina permeia. Não julgamos este aspecto como negativo para a aprendizagem, mas questionamos se todos aqueles conteúdos são necessários para o futuro docente. Salientamos também sobre as diversas demonstrações utilizadas para tratar os números reais, todavia, o excesso da linguagem científica utilizada por ele não contribui para a assimilação do aluno, levando em consideração que este tipo de linguagem não é habitual a estes estudantes.

Os exemplos sempre são utilizados para demonstrar a aplicabilidade de um resultado, contudo percebemos a preocupação do autor com este artefato, ao expor um grande número de exemplos para que os estudantes pudessem ter uma visão ampla do que foi tratado. Quanto ao contexto histórico, o escritor não considera esta ferramenta relevante, não fazendo o uso deste artifício para o estudo da disciplina. Os exercícios concretizam o seu pensar, tendo em vista que o literário argumenta que para ocorrer a compreensão da disciplina se faz necessário exercitar bastante as atividades.

Diante de todo o contexto, concluímos que nenhuma das obras analisadas atendem as necessidades de um curso de licenciatura em Matemática. Especificamente, duas das obras elencadas (– Djairo G. de Figueiredo Introdução a Análise Real – Elon L. Lima) traduzem um cenário específico de um curso de bacharelado em Matemática deixando de lado aspectos primordiais para o entendimento dos estudantes (Notas históricas, Linguagem adequada aos licenciados, ligação da Matemática superior com a Matemática do ensino básico...), direcionando os alunos a uma Matemática que não condiz a sua realidade. O rigor e formalismo empregados nestas obras evidenciam o quanto estes artefatos são importantes para os autores em apresentar a disciplina de Análise Real, os mesmos não demonstram uma preocupação quanto à concepção do estudante perante a disciplina. Os resultados e as demonstrações apresentados tumultuam também a compreensão da obra, já que a forma e os conteúdos não são destinados àquela modalidade.

Por sua vez, o livro analisado do Geraldo Ávila, apesar de apresentar o título da sua obra voltado à licenciatura em Matemática, não trata a Análise Real e nem os Números Reais com os seus aspectos fundamentais, ou seja, apesar de apresentar um ótimo contexto histórico para a compreensão dos conceitos de Análise Real, não fundamenta os seus teoremas com as características necessárias do rigor e do formalismo.

O autor apresenta um cuidado perante os resultados derivados da disciplina, porém, tais cuidados fazem com que ele tenha receio do rigor e do formalismo para as apresentações dos conteúdos. Ainda nesta perspectiva, sabemos da importância em relacionar a Matemática do ensino básico com a Matemática superior, porém o ato de relacionar não significa tornar implícito a essência da Análise Real, tendo em vista que o rigor e o formalismo proporcionam uma visão mais ampla da Matemática superior.

Desta forma, concluímos que, enquanto pesquisadores, devemos explorar os materiais didáticos que estão sendo utilizados para o ensino-aprendizagem da Análise Real, já que estes demonstram particularidades a serem revistas e modificadas para um melhor aproveitamento da disciplina. Defendemos esta ideia por acreditarmos que esta não é apenas mais uma disciplina a ser estudada durante a graduação, mas que esta permite ao estudante de licenciatura ultrapassar fronteiras, conhecer novos horizontes e fortalecer os seus argumentos enquanto professor de matemática do ensino básico.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, G. **Análise Matemática para Licenciatura**. Editora Edgard Blucher Ltda. São Paulo, 2001. Nenhuma citação no texto.

BARON, M. E.; BOS, H.J.M. **Curso de História da Matemática:** Origens e Desenvolvimento do Cálculo. Brasília: Universidade de Brasília, 1985. Nenhuma citação no texto.

BOLOGNEZI, R. A. L. **A disciplina de matemática na formação de professores de matemática para o ensino médio**Dissertação(mestrado)- Pontifíca Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2006. Nenhuma citação no texto.

BORTOLOTI, R. D. M. O Comportamento Emocional e a Avaliação da Disciplina Análise Real: Tecendo Algumas Considerações. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3., 2006, Águas de Lindóia. **Anais...** Águas de Lindóia: SBEM, 2006. Nenhuma citação no texto.

BRASIL. Conselho Nacional de Educação. Parecer CNE/CES 1.302/2001, de 6 de novembro de 2001. **Institui as Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura**. Brasília: CNE, 2001. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf . Acesso em: 18 de março de 2018. Nenhuma citação no texto.

CAVALCANTE, N. I. dos S. **Formação inicial do professor de matemática [manuscrito]** : a (in)visibilidade dos saberes docentes . Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática), Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual da Paraíba, 2011. Nenhuma citação no texto.

FERREIRA, M. dos S; MUNIZ, T. O. M. **O ensino de análise:** contribuições e perspectivas na formação do professor de matemática. Joinvile/ SC- 2014. Nenhuma citação no texto.

FIGUEIREDO, D. G. **Análise I**. 2ª Edição.Rio de Janeiro: LTC- Livros Técnicos Científicos Editorias- S.A. 1996. Nenhuma citação no texto.

FROTA, M. C. R; NASSER, L (Orgs.). **Educação matemática no ensino superior**: pesquisas e debates. Recife: SBEM, 2009. Nenhuma citação no texto.

GERHARDT ,T. E; SILVEIRA, D. T. **Métodos de pesquisa** – Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009. Nenhuma citação no texto.

GOMES, D. O; OTERO-GARCIA, S. C; SILVA, L. D; BARONI, R. L. S. Quatro ou Mais Pontos de Vista sobre o Ensino de Análise Matemática. vol.29 **Bolema** [**online**]. 2015. Nenhuma citação no texto.

LANKSHEAR, C. KNOBEL, M. **Pesquisa pedagógica**: do projeto de implementação. Tradução de Magda França Lopes- Porto Alegre: Artmed, 2008. Nenhuma citação no texto.

LIMA, E. L. **Curso de Análise**. volume 1. Rio de Janeiro: IMPA, 2004. Nenhuma citação no texto.

LÜDKE, M.; ANDRÈ, M. E. D. A. **Pesquisa em Educação**: Abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf . Acessado em: 18 de março de 2018. Nenhuma citação no texto.

MATOS, D. **A cultura matemática mobilizada por licenciando no contexto de uma disciplina de Análise Real** – Rio de Janeiro, 2016. Nenhuma citação no texto.

MEDEIROS, F. de M. **Por uma Educação Matemática com intersubjetividade.** In: Bicudo, M. A. V (org). Educação Matemática. 2. Ed. São Paulo: Centauro, 2005. Nenhuma citação no texto.

MENDES, H. do L. **Livro didático (de matemática):** discussões, reflexões e histórias.Capa > v. 9, n. 1 (2016). Nenhuma citação no texto.

MENDES, L. C. **Evoluções das tecnologias da escrita: de seu surgimento ao hipertexto** – São Paulo: L. C. Mendes, 2010. Nenhuma citação no texto.

MONTEIRO, M. S. **Notas de aula - MAT0315 - Introdução à Análise Real** - IME-USP (s/d). Nenhuma citação no texto.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. **A Formação Matemática do Professor: licenciatura e prática docente escolar**. Belo Horizonte: Autêntica, 2008. Nenhuma citação no texto.

MOREIRA, P. C.; CURY, H. N.; VIANNA, C. R.Por que análise real na Licenciatura? **Zetetiké**, Campinas, SP, v.13, n. 23, p. 11-42, jan./jun. 2005. Nenhuma citação no texto.

MOREIRA, P. C; VIANNA, C. R; Por Que Análise Real na Licenciatura? Um Paralelo entre as Visões de Educadores Matemáticos e de Matemáticos. **Bolema** [**online**]. 2016, vol.30, n.55, pp.515-534. ISSN 0103-636X. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a11. Nenhuma citação no texto.

MOREIRA, P. C. e VIANNA, C. R.Por Que Análise Real na Licenciatura? Um Paralelo entre as Visões de Educadores Matemáticos e de Matemáticos. **Bolema** [**online**]. 2016, vol.30, n.55, novembro de 2001. Institui as Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Nenhuma citação no texto.

OTERO- GARCIA, S. C; BARONI, R. L S; MARTINES, P. T. Uma trajetória da disciplina de Análise e o seu papel para a formação do professor de matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.15, n.3, pp 692- 717, 2013. Nenhuma citação no texto.

OTERO-GARCIA, S. C. **Uma Trajetória da Disciplina de Análise e um Estado do Conhecimento sobre seu Ensino.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2011. Nenhuma citação no texto.

PIMENTA, S. G. **Docência no ensino superior** – São Paulo: Cortez, 2002. Nenhuma citação no texto.

REIS, F. S. **A Tensão entre Rigor e Intuição no Ensino de Cálculo e Análise: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos.** Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2001. Nenhuma citação no texto.

TARDIF, M; RAYMOND, D. Saberes, tempo e aprendizagem do trabalho no magistério. **Educ. Soc.** [**online**]. 2000, vol.21, n.73, pp.209-244. ISSN 0101-7330. http://dx.doi.org/10.1590/S0101-73302000000400001 Nenhuma citação no texto.

TARDIFF. M. **Saberes docentes e formação profissional.** Petrópolis, RJ: Vozes, 6ª edição. 2006. Nenhuma citação no texto.

.1 APÊNDICE- PRODUTO EDUCACIONAL

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CAMPUS I
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

THAÍS SILVA ARAÚJO

A ANÁLISE REAL COMO SUBSÍDIO NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

CAMPINA GRANDE- PB
2019

THAÍS SILVA ARAÚJO

A ANÁLISE REAL COMO SUBSÍDIO NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

Produto educacional apresentado ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação matemática, pela Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento às exigências para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática

Orientador: Prof. Dr. Silvanio de Andrade.

CAMPINA GRANDE- PB
2019

A659a Araújo, Thaís Silva.
A análise real como subsídio na formação do professor de matemática [manuscrito] / Thaís Silva Araújo. - 2019.
19 p. : il. colorido.

Digitado.

Dissertação (Mestrado em Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2019.

"Orientação : Prof. Dr. Silvanio Andrade , Especialização em Educação Matemática."

1. Números reais. 2. Análise real. 3. Formação de professor. I. Título

21. ed. CDD 371.12

Elaborada por Giulianne M. Pereira - CRB - 15/714 BC/UEPB

THAÍS SILVA ARAÚJO

O TRATAMENTO DOS NÚMEROS REAIS NA DISCIPLINA DE ANÁLISE REAL NA LICENCIATURA: UM OLHAR A PARTIR DOS LIVROS DIDÁTICOS

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Mestrado Profissional, da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.
Área de concentração: Educação Matemática
Orientador: Prof. Dr. Silvanio de Andrade.

Aprovada em 03 de Julho de 2019.

Banca Examinadora:

Silvanio de Andrade

Prof. Dr. Silvanio de Andrade - Orientador
UEPB

Nilza Eigenheer Bertoni

Prof^a. Nilza Eigenheer Bertonni
UNB

John A. Fossa

Prof. John Andrew Fossa
UFRN/ UEPB

CAMPINA GRANDE- PB
2019

RESUMO

Como cumprimento das exigências do Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba elaboramos e apresentamos este Produto Educacional para obtenção do título de mestre. Esta obra apresenta alguns tópicos do conjunto dos Números Reais utilizados na disciplina de Análise Real do curso de licenciatura em matemática, expondo um elo da matemática superior com a matemática elementar. Apresenta também o uso da história matemática para que esta ferramenta possa possibilitar a compreensão da evolução do formalismo na Análise Real. O material a seguir, condiz em um recorte de alguns materiais sobre a disciplina de Análise Real (MONTEIRO, M. S, ÁVILA, G. Série Matemática na Escola). Na verdade, são apresentados alguns tópicos, onde expõe a ligação da matemática superior com a matemática elementar.Esta proposta de sequência didática tem o objetivo de apresentar um material, envolvendo questões que exploram este universo, oferecendo um suporte para os estudantes da disciplina de Análise Real que serão futuros professores do ensino básico de Matemática.

Palavra chaves: Números Reais. Ensino dos Números Reais. Formação de Professor.

ABSTRACT

In compliance with the requirements of the Master's Program in Teaching of Science and Mathematical Education of the State University of Paraíba we have elaborated and presented this Educational Product to obtain the title of Master. This work presents some topics from the set of Real Numbers used in the Real Analysis course of the undergraduate mathematics course, exposing a link between higher mathematics and elementary mathematics. It also presents the use of mathematical history so that this tool can enable the understanding of the evolution of formalism in Real Analysis. The following material matches a few excerpts from the Real Analysis subject (MONTEIRO, M. S, ÁVILA, G. School Mathematics Series). In fact, some topics are presented, which exposes the link between higher mathematics and elementary mathematics. This proposal for a didactic sequence aims to present a material, involving questions that explore this universe, offering a support to the students of the subject of Analysis. Real that will be future teachers of basic education of mathematics.

Keywords: Real Numbers. Teaching of Real Numbers. Teacher training.

SUMÁRIO

1 PROJETO EDUCACIONAL

1.1 Primeiramente, por que não podemos dividir 5 por 0?

Este capítulo apresenta alguns tópicos do conjunto dos Números Reais utilizados na disciplina de Análise Real do curso de licenciatura em matemática, expondo um elo da matemática superior com a matemática elementar. Apresenta também o uso da história matemática para que esta ferramenta possa possibilitar a compreensão da evolução do formalismo na Análise Real. O material a seguir, condiz em um recorte de alguns materiais sobre a disciplina de Análise Real(MONTEIRO, M. S, ÁVILA, G. Série Matemática na Escola). Na verdade, são apresentados alguns tópicos, onde expõe a ligação da matemática superior com a matemática elementar.

Caros estudantes, vocês como futuros docentes em matemática reconhecem a grande importância dos conceitos do sistema de numeração para o ensino fundamental, desta forma buscamos apresentar o conteúdo citado em uma disciplina de Análise com um olhar pedagógico, para que assim possa fortalecer os conceitos já construídos e desenvolver de forma significativa concepções que subsidiarão a ação pedagógica. Buscamos também desenvolver a importância da Análise na construção do pensar matemático, que antes trabalhávamos com dados indutivos e agora trabalharemos com o formalismo.As demonstrações e os conceitos foram detalhados de forma que contribuam para uma conexão do nível superior com o nível elementar.

A análise real é uma área da análise matemática que estuda o conjunto dos números reais e, principalmente, as propriedades analíticas das funções reais a valores reais.

Afirmamos que para o estudo da disciplina de Análise Real é necessário à presença do formalismo, tendo em vista que, este instrumento proporciona ao licenciando em Matemática, conhecimentos que subsidia o conhecimento matemático.

O que distingue a disciplina de Cálculo Diferencial Integral da disciplina de Análise Real: Em que cálculo o mais importante é aprender a aplicar os conceitos e teoremas (da análise matemática), realizando cálculos. Na análise Real, procura-se desenvolver formalmente toda a teoria que garante o funcionamento daqueles teoremas, fazendo-se uma análise dessa teoria, levando em conta toda a estrutura lógica que interliga tais teoremas. Em certo sentido, em cálculo usam-se os teoremas para fazer contas, e na análise usa-se a lógica para fazer teoremas.

A formação inicial do professor de matemática, busca responder a indagações que surgirão durante o seu percurso de estudo com o conhecimento adquirido na formação escolar, tem-se ainda apenas uma ideia intuitiva do que são os números reais. Às vezes não se tem a familiaridade necessária com esse conceito para poder responder com segurança questões como:

Por que não se extrai raiz quadrada de números negativos, como $\sqrt{-1}$?

Por que não se pode dividir por zero, e escrever $\dfrac{5}{0}$?

Estas perguntas provavelmente já forma feitas por vocês, mesmo que o seu professor buscasse responde, alguns alunos não ficaram satisfeitos com a explicação. Sabendo que mesmo que a resposta não fosse útil para muitas pessoas, para os futuros matemáticos, e professores de matemática, é preciso oferecer alguma explicação convincente.

Na verdade:

Pode-se, sim, extrair raiz quadrada de números negativos, mas o resultado será um número complexo. Já se alguém quisesse definir a segunda expressão como sendo algum número real (e admita, até você já quis fazer isso, não?), imediatamente seriam deduzidos fatos contraditórios. Um exemplo (talvez um pouco informal) de uma tentativa frustrada de definir essa última expressão, mas que oferece alguma intuição a respeito é:

Se $\dfrac{5}{0}$ fosse igual a 20, ou seja, $\dfrac{5}{0} = 20$ então ao multiplicar ambos os membros pelo denominador (às vezes chamado de passar o zero para a direita) seria concluído que $5 = 20$. Nada é mais absurdo que isso!

Sendo assim, já que qualquer tentativa de escolher um valor real para atribuir à expressão $\dfrac{5}{0}$ leva a uma contradição como a anterior, é muito mais útil deixar tal expressão indefinida, do que estudar uma teoria cheia de contradições!

Desta forma averiguamos, a tamanha importância da disciplina de Análise Real para a formação do professor de Matemática do ensino básico. Apesar da disciplina ainda, apresentar um contexto distante da realidade de um curso de Licenciando em Matemática, é necessário apresentar a relevância da Análise Real, na formação de conceitos matemáticos dos futuros professores.

1.2 Números Naturais

Nesta secção apresentaremos uma breve exposição dos **números naturais**, como também a eficiência do **Princípio de Indução** , como ferramenta das demonstrações no que se refere aos **números naturais**, conhecendo o seu significado e sua importância dentro da estrutura da matemática. Apresentaremos conceitos e propriedades que permeiam este curso até a sua futura sala de aula.

Os **números naturais** surgiram a partir de nossa experiência com o mundo físico, entretanto deixaremos claro que o número zero não será utilizado como um número natural, tendo em vista que o zero nunca foi "natural"aliás, levou muito tempo para os matemáticos considerarem o zero como um número, porém com a definição teórica dos conjuntos se tornou conveniente incluir o zero como cardinalidade do conjunto-vazio.

Desde criança utilizamos os **números naturais** para realizarmos comparação de objetos com a escala abstrata, tornando mais precisa a noção de quantidade; esse processo pressupõe, portanto, o conhecimento da sequência numérica.

Existe uma axiomática, idealizada no final do século XIX pelo matemático italiano Giuseppe Peano, que, três axiomas, consegue não só definir a adição e a multiplicação nos naturais, como também deduzir as demais propriedades.

O conjunto dos números naturais é representado pela letra maiúscula $\mathbb{N}$ e estes números são construídos com os algarismos:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9...\}$$

Caros leitores, para uma melhor compreensão do conjunto dos **Números Naturais**, iremos utilizar os famosos **Axiomas de Peano** que subsidiarão todos os seus conceitos e propriedades.

O autor italiano **Giuseppe Peano** introduziu os famosos axiomas de Peano, os quais sustentam diversas construções rigorosas da Álgebra e da Análise. O que motivou seu trabalho foi o desejo de expressar toda a matemática em termos de um cálculo lógico. Em seu Formulaire de Mathématiques, que contém cinco volumes (escrito com a participação de colaboradores) publicados a partir de 1894, desenvolveu uma linguagem formalizada que continha não só a lógica matemática como todos os ramos mais importantes da matemática. Atraiu um grande número de colaboradores e discípulos pelo fato de evitar o uso de uma linguagem metafísica e de introduzir símbolos: tais como $\in$ (pertence a classe de), $\cup$ (soma lógica ou união), $\cap$ (produto lógico ou intersecção) - muitos deles usados até hoje. Para seus fundamentos da Aritmética, ele escolheu três conceitos primitivos - zero, número (que, no contexto, se refere a inteiros positivos), e a relação "é sucessor de- satisfazendo os postulados seguintes:

1.2.1 Axiomas de Peano

Seja $\mathbb{N} \in 0$, o qual chamará do conjunto dos números naturais é caracterizado pelos seguintes axiomas.

Axioma 1.1. Existe um único número natural $1 \in \mathbb{N}$, tal que,

$$1 \neq S(n), \forall n \in \mathbb{N},$$

$1 \in \mathbb{N}$, é o único que não possui sucessor. $(\mathbb{N} - S(\mathbb{N}) = 1)$.

Axioma 1.2. Se $X \subset \mathbb{N}$, tal que, $1 \in X$;

Axioma 1.3. $S(X) \subset X, (\forall n \in X \Rightarrow (n) \in X)$.

Podemos concluir que se um conjunto de números naturais contém o número 1 e, além disso, contém o sucessores de cada um de seus elementos, então esse conjunto coincide com $\mathbb{N}$, isto é, contém todos os números naturais.

Denotaremos os números naturais como $\mathbb{N}$, e utilizaremos a notação *m,n* $\in \mathbb{N}$ para nos referir quer *n,m* são números pertencentes aos naturais.

Faremos o uso das notações $s(n), s(m)$ para os sucessores dos números naturais n, m. Exemplificando teremos que

$$2 = s(1), 3 = s(2), 4 = S(3)...$$

Isto quer dizer ao utilizaremos o termo $s(1)$, estamos representando o sucessor de 1 que é 2.

O Axioma 6.3 pode ser enunciado da seguinte forma. Seja P uma propriedade referente a números naturais. Se P é válida para o número 1 e se supondo P válida para o número n daí resulta que P é válida também para o seu sucessor $S(n)$, então P é válida para todos os números naturais.

Devemos ressaltar a importância do **Princípio de Indução**, já que o mesmo possui grande importância no processo de compreensão dos números naturais.

Exemplo 1.1. Prove por indução que

Demonstração. Passo base: Para $n = 1, 1^2 = 1$ e

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{}6 = \frac{1.2.3}{6} = 1.$$

O passo base é verdadeiro. Passo indutivo: se a fórmula é verdadeira para $n = k$, $k \geq 1$ então deve ser verdadeira para $n = k + 1$. Hipótese indutiva:

$$1^2 + 2^2 + ... + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}, k \geq 1$$

Deve-se mostrar que: :

$$1^2 + 2^2 + ... + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Sabe-se que:

$$\begin{aligned}
1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} \\
&= \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6} \\
&= \frac{(k+1)[2k^2 + k + 6k + 6]}{6} \\
&= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}
\end{aligned}$$

■

Exemplo 1.2. Prove por indução matemática que

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2, n \geq 1$$

Demonstração. Passo base: Para $n = 1, 1 = 1^2$. O passo base é verdadeiro.
Passo indutivo: se a fórmula é verdadeira para $n = k, k \geq 1$ então deve ser verdadeira para $n = k + 1$.

Hipótese indutiva:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1) = k^2, k \geq 1$$

Deve-se mostrar que:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1) + (2k+1) = (k+1)^2, k \geq 1$$

Sabe-se que:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1) + (2k+1) = k^2 + (2k+1) = (k+1)^2$$

■

Exercício 1.1. Use o Principio da Indução Matemática para provar que:

$$1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n\breve{}1) = n^2, n = 1, 2, 3, \ldots$$

Exercício 1.2. Sabemos das Progressões Aritméticas que:

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{2n}{(n+1).}$$

Prove esse resultado por indução.

Exercício 1.3. Prove que $P(n) : 2^{2n} - 1$ é divisível por 3 para $n \geq 1$.

Exercício 1.4. Dados os números naturais a e b, com $a < b$, prove que existe um numero natural m tal que $a + m = b$.

Exercício 1.5. Um elemento a Î IN chama-se antecessor de b Î IN quando se tem a < b mas não existe $a \in \mathbb{N}$ tal que $a < c < b$. Prove que, exceto 1, todo numero natural possui um antecessor.

1.2.2 Números Racionais

Como o leitor bem sabe, os números racionais costumam ser representados por frações ordinárias, representação essa que é única se tornarmos as frações em forma irredutível e com denominadores positivos. Vamos considerar a conversão de frações ordinárias em decimais, com vistas a entender quando a decimal resulta ser finita ou periódica. Como sabemos, a conversão de urna fração ordinária em decimal se faz dividindo-se o numerador pelo denominador. Se o denominador da fração em forma irredutível só contiver os fatores primos de $10(2e/ou5)$, a decimal resultante será sempre finita; e é assim porque podemos introduzir 'fatores 2 e 5 no denominador em número suficiente para fazer esse denominador uma potência de 10. Exemplos:

$$\frac{8}{5} = \frac{2 \times 8}{2 \times 5} = \frac{16}{10} = 1,6$$

$$\frac{27}{36} = \frac{3^3}{2^2 \ldots 3^2} = \frac{3}{2^2} = \frac{3 \times 5^2}{5^2 \times 2^2}$$

Você deve ter notado que, depois de simplificada ao máximo, se a fração resultante, p e q tem denominador que se fatora em potências de 2 ou de 5, então, multiplicando-se por potências de 2 ou de 5 convenientes, esse denominador pode ser transformado em uma potência de 10. Consequentemente, esse racional tem uma representação decimal finita, isto é, uma representação na forma decimal com uma quantidade finita de casas decimais depois da vírgula.

O que acontece se o denominador de uma fração irredutível contiver algum fator primo diferente de 2 e 5?

Observe que não é possível multiplicar denominador e numerador por um número inteiro de forma a transformar o denominador em uma potência de 10. Por quê? Bem, isso é consequência do Teorema Fundamental da Aritmética, conhecido pelos alunos desde o Ensino Fundamental. Esse teorema nos ensina que "qualquer número natural pode ser escrito como produto de fatores primos, de modo único a menos da ordem dos fatores ". Sendo assim, qualquer potência de 10 se fatora, de modo único, como produto de potências de 2 e potências de 5.

No caso geral, p o demos dizer que, se um racional se escreve, na forma de fração irredutível, como p e q contém algum fator distinto de 2 e de 5, então:

- (i) é impossível transformar o denominador em uma potência de 10, o que torna a representação infinita;
- (ii) os possíveis restos da divisão de p por q são $1, 2, 3, \ldots, q-1$. (Note que o resto da divisão nunca é igual a 0.)

Portanto, sendo uma divisão infinita e apenas uma quantidade finita de restos possíveis, a partir de algum momento, algum resto irá se repetir. A partir daí, irá aparecer um período no quociente. Assim, concluímos que a representação decimal de um número racional, se não for finita, será necessariamente periódica. Com a discussão acima podemos concluir que a representação decimal de qualquer número racional é finita ou é infinita e periódica.

Exercício 1.6. Realize a divisão $\frac{5}{7}, \frac{1}{7}, \frac{9}{7}$, e posteriormente anote as suas considerações, embasada nas observações acima.

Exercício 1.7. O número $\frac{1}{17}$, tem representação decimal finita, infinita, periódica ou infinita e não periódica?

Exercício 1.8. Reescreva os resultados encontrados anteriormente, buscando generalizar o resultado obtido a todas as frações que apresenta o denominador primo diferente de 2 e 5.

1.2.3 Conjunto Finito, Infinito, Enumerável e Não- Enumerável

O estudo sistemático dos conjuntos, que acabou levando a uma teoria axiomática desse campo de estudos, começou com Georg Cantor $(1845-1918)$, por volta de 1872. Nessa época, Cantor estava iniciando sua carreira profissional e se ocupava do estudo da representação de funções por meio de séries trigonométricas. Isto fez com que ele investigasse os conjuntos de pontos de descontinuidade de . tais funções, os mais simples dos quais são conjuntos com apenas um número. finito de pontos. Mas o aparecimento de conjuntos cada vez' mais complica-' dos acabou levando Cantor a investigar conjuntos infinitos em sua generalidade. Nesse .estudo ele introduziu um conceito simples, que logo se revelaria da maior importância - o conceito de equivalência de conjuntos. Segundo Cantor, dois conjuntos são equivalentes, ou têm a mesma cardinalidade, ou a mesma potência, quando é possível estabelecer uma correspondência que leve elementos distintos de um conjunto em elementos distintos do outro, todos os elementos de um e do outro conjunto sendo objeto dessa correspondência. Em termos precisos, a correspondência de que estamos falando chama-se bijeção..

Observe que é essa noção de equivalência que dá origem ao conceito abstrato de número natural. De fato, o que faz uma criança de quatro ou cinco anos ele idade constatar que numa cesta há três laranjas, noutra três maçãs, e noutra ainda três ovos? Ela chega a essas conclusões - mesmo sem perceber - por constatar que é possível "casar"os elementos de qualquer uma dessas cestas com os elementos de qualquer outra de maneira biunívoca. É essa abstração dos elementos concretos dos conjuntos equivalentes ele diferentes objetos que nos leva a formar a noção de número natural, um fenômeno que ocorre muito cedo em nossas vidas.

Não é raro encontrarmos exemplos equivocados de conjuntos infinitos, como “a quantidade de grãos de areia na praia” ou a “quantidade de estrelas no céu”. Acontece que essas quantidades, embora muito grandes, são finitas! Um exemplo de conjunto infinito é o conjunto dos números naturais: mesmo tomando-se um número natural n muito grande, sempre existe outro maior, por exemplo, seu sucessor $n + 1$, ou também o dobro de n, $2n$, ou ainda seu triplo $3n$.

Existem diferentes tipos de infinito! Desde crianças aprendemos a contar... O que é contar ? Se dermos a uma criança um pacote com 5 lápis e pedirmos a ela que conte, no fundo o que ela faz é estabelecer uma bijeção entre os lápis e o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Outra situação corriqueira é comparar quantidades de dois conjuntos. Imagine que estamos em uma sala com muitas cadeiras e várias pessoas. Se alguém perguntar se há mais cadeiras ou mais pessoas, não há necessidade de se contar quantas são as cadeiras, quantas são 1 as pessoas. Ao invés disso, podemos pedir a todos que se sentem. Se sobrarem cadeiras vazias, há mais cadeiras. Se sobrarem pessoas em pé, há mais pessoas! Assim pudemos responder rapidamente à pergunta feita, sem a necessidade de contar cada conjunto. Do ponto de vista da matemática, o que foi feito? Ao pedirmos para as pessoas que se sentem, estamos estabelecendo uma função que a cada pessoa associa a cadeira onde ela se sentou. Se essa função for bijetora, o número de cadeiras e de pessoas é o mesmo!

A função é injetora, pois estamos subentendendo que só pode ter uma pessoa em cada cadeira. Se a função não for sobrejetora, há cadeiras sobrando. Alguém poderia argumentar sobre a possibilidade de haver pessoas em pé. Nesse caso, não está estabelecida uma correspondência que a cada elemento do domínio associa um no contra- domínio. Matematicamente, a função não estaria bem definida. O que é feito no estudo de conjuntos infinitos é basicamente encontrar uma função bijetora para comparar o conjunto alvo de nosso estudo com outro já conhecido.

Para o nosso propósito, quanto ao número de elementos de um conjunto, é necessário a penas distinguir três tipos de conjuntos: os finitos, os enumeráveis e os não-enumeráveis. A noção de conjunto enumerável está estreitamente ligada ao conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, em que os empregamos para a contagem dos conjuntos finitos, mostrando como eles podem ser considerados como números cardinais e completando, portanto, sua descrição.

Um professor vai aplicar uma prova e não tem certeza se a sala destinada a este feito tem um número suficiente de cadeiras para acomodar os alunos. Ele pode contar as cadeiras e os alunos e comparar os resultados para obter a resposta. Uma alternativa óbvia a este método é pedir aos alunos que se acomodem e três coisas podem acontecer ao final do processo:

- (i) existem alunos de pé e toda s as cadeiras estão ocupadas;
- (ii) existem cadeiras livres e todos os alunos estão sentados;
- (iii) todos os alunos estão sentados e todas as cadeiras estão ocupadas.

No primeiro, caso tem que o número de alunos é maior que o de cadeiras; no segundo caso, ocorre o contrário e, finalmente, no terceiro eles são iguais. Obtemos, assim, a resposta à pergunta "qual conjunto tem mais elementos?" sem necessariamente conhecer os números de elementos dos conjuntos envolvidos. Estas considerações motivam a seguinte definição.

1.2.4 Hotel de Hilbert

David Hilbert foi grande entusiasta das descobertas de Cantor, chegando a afirma que "ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor criou para nós". Para ilustrar o conceito de infinitude e enumerabilidade, Hilbert imaginou um hotel de infinitos quartos. Vamos explorara ideia de Hilbert com uma do se (extra) de ficção.

O Hotel de Hilbert fica ao bordo do Mar Mediterrâneo, em Saint Tropez, na badalada Cote d'Azur. Seu edifício, cinza e branco, construído em 1925 é um belo exemplo do estilo art-déco dos anos 20 e 30 do século XX. Grande e confortável, o hotel tem uma infinidade enumerável de quartos suficientes para hospedar clientes dos mais diversos gostos. O gerente, o próprio David Hilbert, é um homem muito gentil, de barba bem tratada que nunca é visto sem seus óculos e chapéu branco.

Como é alta temporada, o hotel está lotado. Porém, o painel localizado em sua entrada informa que há vagas disponíveis! Chega um homem de camiseta florida, carregando uma pequena e elegante valise marrom. Ele pede um quarto a Hilbert que responde:

– Apesar de o hotel estar completamente lotado, providenciarei um quarto vazio para o senhor. Aguarde um minuto, por favor. Aproveitando que os hóspedes são muito solícitos, pelo alto-falante, Hilbert se dirige a eles:

– Perdoem-me por incomodá-los. Gostaria de pedir a cada um de vocês que troque de quarto. Quem está ocupando o quarto n passará ao quarto $n + 1$. Grato p ela compreensão. E o cliente, satisfeito, se instala no quarto número 1.

Figura 1 – O que é o infinito?

A época é de muita procura. Chega um ônibus de excursão com uma infinidade enumerável de cadeiras. Todas estão ocupadas mas, de acordo com as estritas normas de segurança do lugar, ninguém viaja em pé. O animador do grupo, facilmente reconhecível por sustentar uma pequena fâmula vermelha com a marca da agência, dirige-se a Hilbert solicitando os quartos que havia reservados para seus clientes.

Confirmando a reserva, Hilbert solicita um minuto para providenciar os quartos. Novamente pelo alto-falante, dirige-se aos hóspedes:

– Perdoem-me por incomodá-lo s outra vez. Peço novamente que troquem de quarto, desta vez, obedecendo a seguinte regra: quem estiver ocupando o quarto n mudará para o quarto $2n$. Mais uma vez, agradeço a compreensão.

Hilbert informa ao animador que ele seu grupo podem acomodar-se. Quem está na cadeira m ocupará o quarto $2m - 1$.

Fim do verão e o hotel se esvaziam. Outra excursão chega. O animador, com bandeira amarela, é menos experiente que seu colega e não reservou os quartos antecipadamente pois acreditava em baixa ocupação no outono. O ônibus está cheio mas, novamente, não há pessoas em pé. Além disto, para cada número real há uma cadeira no ônibus com aquele número! Surpreendentemente, Hilbert informa que, apesar do hotel estar completamente vazio, não há vagas suficientes para acomodar a todos. E, amavelmente, sugere o Hotel Real que é maior que o seu.

Indicaremos pelo símbolo I_n conjunto $1, 2, ..., n$ dos números naturais, desde 1 até n. Mais precisamente, dado $n \in \mathbb{N}$, temos $I_n = p \in \mathbb{N}; 1 \leq p \leq n$.

Definição 1.1. Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $F_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

-

(a) Um conjunto A é finito se existir uma função bijetora de F_n em A, para algum n. Dizemos, nesse caso, que A tem n elementos. Consideramos o vazio um conjunto finito.

(b) A é infinito se A não for finito.

(c) A é enumerável se A $\mathbb{N}$.

(d) A é não enumerável se A não for finito nem enumerável.

(e) A é no máximo enumerável se A for finito ou enumerável.

Exemplo 1.3. O exemplo mais simples de conjunto enumerável é o que serve de modelo para essa ideia é o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais. O conjunto $P = \{2, 4, 6, \ldots\}$ dos números pares também é enumerável. Neste caso, é fácil ver que a função $f : \mathbb{N} \Rightarrow P$ dada por $f(n) = 2n$ é bijetora.

1.2.5 Conjuntos enumeráveis e Não- Enumeráveis

O primeiro conjunto infinito com que nos familiarizamos é o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais. Chama-se conjunto enumerável a todo conjunto equivalente a $\mathbb{N}$.

Um dos primeiros fatos surpreendentes que surge na consideração de conjuntos infinitos diz respeito à possibilidade de haver equivalência entre um conjunto e um seu subconjunto próprio. Por exemplo, a correspondência $n \mapsto 2n$, que ao 1 faz corresponder 2, ao 2 faz corresponder 4, ao 3 faz corresponder 6, e assim sucessivamente.

Estabelece equivalência entre o conjunto números naturais e o conjunto dos números pares positivos. Veja: o conjunto elos números pares positivos é um subconjunto próprio do conjunto $\mathbb{N}$; no entanto, tem a mesma cardinalidades que $\mathbb{N}$, ou seja, o mesmo número de elementos. Este fenômeno é uma peculiaridade dos conjuntos infinitos e em nela contradiz o que já sabemos sobre conjuntos finitos.

Exercício 1.9. Usando apenas a definição de enumerabilidade, demonstre que se B é um conjunto finito e C, um conjunto enumerável então $B \cup C$ é enumerável.

Exercício 1.10. Usando apenas a definição de enumerabilidade, demonstre que se F e G são conjuntos enumeráveis então $F \cup G$ é enumerável.

Exercício 1.11. Seja $\mathrm{P}_n(\mathbb{Z})$ o conjunto de todos os polinômios de grau menor ou igual a n e com coeficientes inteiros. Prove que $P_n(\mathbb{Z})$ é enumerável.

Sugestão: Verifique que $P_n(\mathbb{Z})$ é equivalente a $\{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \ldots \times \mathbb{Z}\}\overline{\{n+1\}}$

Exercício 1.12. Seja $P(\mathbb{Z})$ o conjunto de todos os polinômios com coeficientes inteiros. Prove que $P(\mathbb{Z})$ é enumerável.

Exercício 1.13. O conjunto dos números irracionais é enumerável?

Exercício 1.14. Prove que se $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$ então o intervalo $[a, b]$ é um conjunto não enumerável.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, G. **Análise Matemática para Licenciatura**. Editora Edgard Blucher Ltda. São Paulo, 2001. Nenhuma citação no texto.

LIMA, E. L. **Curso de Análise**. volume 1. Rio de Janeiro: IMPA, 2004. Nenhuma citação no texto.

MONTEIRO, M. S. **Notas de aula - MAT0315 - Introdução à Análise Real** - IME-USP (s/d). Nenhuma citação no texto.

Série Matemática na Escola. Hotel de Hilbert. file:///C:/Users/Tha Nenhuma citação no texto.