UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
MESTRADO ACADÊMICO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

LUCAS HENRIQUE VIANA

O PENSAMENTO COMPUTACIONAL E AS SUAS CONEXÕES COM O ENSINO E A APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA

CAMPINA GRANDE
2020

LUCAS HENRIQUE VIANA

O PENSAMENTO COMPUTACIONAL E AS SUAS CONEXÕES COM O ENSINO E A APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito à obtenção do título de mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática.

Orientador: Prof[a]. Dr[a]. Filomena Maria Gonçalves da Silva Cordeiro Moita.

CAMPINA GRANDE
2020

V614p Viana, Lucas Henrique.
O Pensamento computacional e as suas conexões com o ensino e a aprendizagem da Geometria [manuscrito] / Lucas Henrique Viana. - 2020.
238 p. : il. colorido.

Digitado.

Dissertação (Mestrado em Acadêmico em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2020.

"Orientação : Profa. Dra. Filomena Maria Gonçalves da Silva Cordeiro Moita , Departamento de Educação - CH."

1. Geometria. 2. Congruência de triângulos. 3. Pensamento computacional. I. Título

21. ed. CDD 516

Elaborada por Giulianne M. Pereira - CRB - 15/714 BC/UEPB

LUCAS HENRIQUE VIANA

O PENSAMENTO COMPUTACIONAL E AS SUAS CONEXÕES COM O ENSINO E A APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA

Trabalho de Dissertação apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática.

Aprovada em: 10 / 09 / 2020 .

BANCA EXAMINADORA

Filomena Maria Gonçalves da Silva Cordeiro Moita

Profª. Drª. Filomena Maria Gonçalves da Silva Cordeiro Moita (Orientador)

Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Prof. Dr. José Joelson Pimentel de Almeida

Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Rodrigo Lins Rodrigues

Prof. Dr. Rodrigo Lins Rodrigues

Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE)

À minha família, pelo amor, companheirismo e compreensão, DEDICO.

AGRADECIMENTOS

À Deus, que em sua infinita bondade me oportunizou vivenciar importantes momentos, que contribuíram para a minha construção enquanto pesquisador e que são marcados pela presença de pessoas especiais, para as quais eu dedico os meus mais sinceros agradecimentos nos parágrafos a seguir.

Aos meus pais Luis Henrique Viana e Maria José de Oliveira Viana, por todo amor, compreensão, companheirismo e dedicação em me incentivar e me apoiar desde o início de minha jornada estudantil. Também não poderia deixar de agradecê-los por todos os sacrifícios que realizam em seus dias de trabalho, para me proporcionar as melhores condições de vida e de estudo possível. Sem eles dois, não teria chegado à metade dessa jornada.

À minha irmã, Lígia de Oliveira Viana, que desde a época em que estudávamos juntos, compartilha comigo sonhos, vitórias, angústias, entre tantos outros sentimentos que fazem parte de nossas jornadas formativas. Sem o seu amor, companheirismo e compreensão, essa caminhada certamente seria menos leve.

À toda a minha família que contribuiu imensamente na minha construção enquanto pessoa. Presto agradecimento especial aos meus avós Francisca Gonçalves de Oliveira e Paulo Virgínio de Oliveira, exemplos de pessoas de fé e de humildade.

À minha orientadora Dra. Filomena Maria Gonçalves da Silva Cordeiro Moita, que desde 2013 me inspira e me acompanha nas atividades acadêmicas que realizo, proporcionando uma rica aquisição de conhecimentos e experiências que, com toda certeza, me construíram enquanto professor e pesquisador. Agradeço também por todo esforço, paciência e companheirismo, pois poucos são os estudantes que encontram uma mãe acadêmica ao longo de sua caminhada.

Aos professores Dr. José Joelson Pimentel e Dr. Rodrigo Lins Rodrigues, que compuseram a banca examinadora da defesa desta pesquisa desde sua fase de exame de qualificação, trazendo grandes contribuições à sua construção e aplicação.

Aos meus amigos do PPGCEM/UEPB em especial à Tayná Maria Amorim, Jorge Sousa, Diogo Cabral e Paulo Vidal, e aos meus irmãos de EJC, pois quando me sentia sobrecarregado, foram capazes de me compreender e me aconselhar.

Aos demais amigos do grupo de pesquisa em Tecnologia Digital e Aquisição do Conhecimento.

À professora participante da pesquisa, juntamente da direção e funcionários da escola campo, que me receberam com muita educação e solicitude.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pesquisa (CAPES), pelo fornecimento da bolsa de mestrado, que me possibilitou participar de grandes eventos científicos e realizar pesquisas e publicações paralelas a este estudo, que certamente trouxeram contributos científicos em diferentes campos do conhecimento.

À todas as outras pessoas que contribuíram diretamente ou indiretamente na realização deste trabalho.

“Ninguém nasce sabendo Matemática e ninguém nasce sem a capacidade de aprender Matemática”. (BOALER, 2018).

RESUMO

A aprendizagem da Geometria consiste em uma vivência de grande importância para a vida das pessoas, pois permite o desenvolvimento de uma forma específica de enxergar a realidade, de pensar e de resolver problemas. No entanto, nas escolas, nem sempre os conteúdos adotados nos currículos de Geometria são capazes de atender as necessidades dos estudantes, especialmente porque a sociedade demanda deles cada vez mais conhecimentos e habilidades que contribuam na vivência da Cultura Digital. Recentemente, a atenção de muitos professores e pesquisadores têm se voltado para a temática do desenvolvimento do Pensamento Computacional, devido à relação de suas habilidades com as demandas da era digital e também à sua possibilidade de estabelecer conexões com processos de ensino e de aprendizagem de diferentes áreas do conhecimento, como, por exemplo, a Matemática. Considerando essa possibilidade, esta pesquisa foi desenvolvida com o objetivo geral de *pesquisar sobre as conexões do Pensamento Computacional com o ensino e a aprendizagem da Geometria*. A pesquisa foi conduzida sob uma abordagem qualitativa, a partir da perspectiva metodológica da Engenharia Didática, sendo dividida em quatro fases: análises preliminares; análise a priori; experimentação; análise a posteriori e validação. Sua aplicação ocorreu ao longo de cinco encontros com dez estudantes do oitavo ano do Ensino Fundamental de uma escola pública da cidade de Campina Grande (PB), abordando o conteúdo congruência de triângulos. Durante as aulas, foi aplicada uma sequência de cinco atividades, que fizeram uso do *software* GeoGebra, além de triângulos de papel colorido, instrumentos de medição, algumas atividades impressas e um jogo desenvolvido pelos pesquisadores, intitulado Jogo das Congruências. Os resultados obtidos revelaram algumas das diversas conexões que podem ser estabelecidas entre o Pensamento Computacional e a Geometria, em especial, com o conteúdo da congruência de triângulos. Destacamos a ligação entre as habilidades de abstração e reconhecimento das propriedades das figuras geométricas, que foram amplamente utilizadas pelos alunos ao participarem das atividades propostas. Além dessas conexões, os resultados também apontaram para o desenvolvimento de diversas habilidades e estratégias para a verificação da congruência de triângulos que, certamente, os alunos não teriam desenvolvido apenas por meio de atividades escritas, pois puderam a partir da abordagem realizada nesta pesquisa exercitar a criatividade e os pensamentos computacional e geométrico. Ressaltamos que existem inúmeras outras conexões entre o Pensamento Computacional e o ensino e a aprendizagem da Geometria que podem ser contempladas por meio de outros conteúdos, dada a amplitude de temáticas abordadas no currículo de Matemática da escola básica. Portanto, ainda são necessárias novas investigações que evidenciem tais conexões e as utilizem como estratégias pedagógicas para a realização de novas práticas educativas, tanto no campo da Geometria, quanto em outros.

Palavras-Chave: Geometria. Congruência de triângulos. Pensamento computacional.

ABSTRACT

Learning Geometry can be considered a major experience in people's lives because it enables students to develop problem-solving skills and their own perception of reality. However, not always the content presented in school curriculum is sufficient to meet students needs, specially because society has been continuously adapting its demands to fit in a Digital Culture world. Recently many teachers and researchers have been focusing in the development of Computational Thinking, due to its relations to our current digital society and also its possibilities to stablish connections with teaching and learning processes of all areas, including Mathematics. Considering these possibilities, this paper aims to investigate the connections between Computational Thinking and Geometry teaching and learning processes. This research focuses on a qualitative approach based on the methodological perspectives of Didactic Engineering. It was divided into four steps: preliminary analysis, a priori analysis, experimentation and a posteriori analysis and validation. The procedures happened in five meetings with 10 students from 8th grade of a public school in Campina Grande, Paraíba (Brazil). During the classes, five activities were developed using resources such as GeoGebra, colored paper triangles, measuring instruments, printed worksheets and a game developed by the researchers called "Congruence Game". The results obtained revealed that many connections can be stablished between Computational Thinking and Geometry, specially with the content of Congruent Triangles. We demonstrated the relation between abstraction and the recognition of features of geometric figures, abilities widely used by students during the activities. In addition to these connections, the results also show a development of many skills and strategies to verify the congruence between triangles, which certainly students would not have developed through written exercises only. During the research, students were allowed to exercise their creativity, geometrical and computational thinking. We would also like to reinforce that there are many connections between Computational Thinking and the Geometry teaching and learning processes that can be considered with other contents, due to the extent of subjects covered in Mathematic curriculum in middle school. Therefore, other investigations are still necessary to elucidate these connections and to make them pedagogical tools to new educational practices, not only in Geometry but other fields of study as well.

Keywords: Geometry. Triangles congruence. Computational Thinking.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AEE	Atendimento Educacional Especializado
ALA	Ângulo-lado-ângulo
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CAAE	Certificado de Apresentação para Apreciação Ética
CBIE	Congresso Brasileiro de Informática na Educação
CIEB	Centro de Inovação para a Educação Brasileira
CSTA	Computer Science Teachers Association
ED	Engenharia didática
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
IFPB	Instituto Federal da Paraíba
IREM	Instituto de Investigação do Ensino de Matemática
ISTE	International Society for Technology in Education
LAAo	Lado-ângulo-ângulo oposto
LAL	Lado-ângulo-lado
LLL	Lado-lado-lado
NCTM	National Council of Teachers of Mathematics
PC	Pensamento Computacional
PG	Pensamento Geométrico
PIBID	Programa Nacional de Iniciação à Docência
RSL	Revisão Sistemática de Literatura
SBC	Sociedade Brasileira de Computação
TA	Termo de Assentimento
TCLE	Termo de Consentimento e Livre Esclarecido
TEA	Transtorno do Espectro Autista
TDIC	Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação
TSD	Teoria das Situações Didáticas
UEPB	Universidade Estadual da Paraíba
WAlgProg	Workshop de Ensino em Pensamento Computacional, Algoritmos e Programação

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Na escola básica, a aprendizagem da Geometria é uma vivência de fundamental importância para o desenvolvimento estudantil. Por meio de seus diferentes conteúdos, esse importante campo da Matemática possibilita o estabelecimento de associações com temáticas de diferentes áreas do conhecimento, proporcionando também o desenvolvimento de uma forma de pensar única e com muitas aplicações imediatas na vida cotidiana, graças à sua relação com a visualização de objetos representativos, seja no mundo real ou em imagens mentais.

Entretanto, nem sempre o conhecimento geométrico consegue ser desenvolvido com profundidade ao longo das diferentes fases da jornada escolar estudantil. Isto porque diversos fatores como: as práticas pedagógicas dos professores de Matemática e suas formações; as vivências estudantis dentro e fora das escolas; a própria organização e funcionamento do sistema educacional, entre outros, podem influenciar no desenvolvimento do conhecimento geométrico.

Com base nisso, verifica-se que há uma necessidade de novos olhares sobre os processos de ensino e de aprendizagem de Geometria, que permitam uma verdadeira transformação na maneira pela qual professores e alunos vivenciam as temáticas abordadas neste campo do saber matemático.

Em busca de direcionar esses novos olhares pudemos vivenciar, por meio de experiências de ensino, pesquisa e extensão, diferentes possibilidades de conexões entre os processos de ensino e de aprendizagem deste campo da Matemática e algumas teorias e práticas educacionais, a exemplo da *digital game-based learning*[1] e da gamificação.

Entretanto, recentemente, observamos a necessidade de investigação em torno de uma forma específica de pensar, que muito vem atraindo a atenção de professores, pesquisadores e estudantes de diferentes áreas do conhecimento, chamada Pensamento Computacional[2] (PC).

Assim, considerando a pertinência d pesquisa em torno deste tema e outras motivações pessoais, decidimos direcionar o nosso olhar às temáticas do PC e do ensino e aprendizagem de Geometria. A seguir, apresentamos um diálogo preliminar, expressando cada uma das

[1] Termo apresentado por Prensky (2001) em seu livro *Digital game-based learning.*

[2] O termo Pensamento Computacional, que a partir de agora será abreviado pela sigla PC, faz referência à denominação dada por Jeanette Wing no ano de 2006 a um conjunto de habilidades analíticas que compartilham com o pensamento matemático algumas habilidades utilizadas para propor e resolver problemas.

motivações pessoais[3] que provocaram o direcionamento do olhar do pesquisador responsável por esta pesquisa para as temáticas mencionadas.

1.1 DIÁLOGO PRELIMINAR

Esta pesquisa é resultante de minhas experiências nas atividades de ensino, pesquisa e extensão, vivenciadas ao longo da jornada acadêmica que venho trilhando na Universidade Estadual da Paraíba (UEPB) Campus I. Foi por meio da participação em projetos de iniciação científica vinculados ao grupo de pesquisa em tecnologia digital e aquisição do conhecimento (TDAC), que tive a oportunidade de me aproximar de algumas escolas públicas e vivenciar um pouco de suas realidades.

Em contato com essas instituições, pude perceber que havia uma grande dificuldade por parte dos alunos em interpretar algumas propriedades dos objetos geométricos, bem como em estabelecer relações entre eles. Além disso, pude notar também que nem todos os conteúdos do currículo de Geometria eram explorados com profundidade pelos professores, e que a utilização de alguns recursos didáticos nem sempre levava os alunos a participarem das aulas com entusiasmo.

Esta realidade se tornou ainda mais evidente durante minha atividade como monitor no projeto de extensão PROENEM da UEPB, no período de 2014 a 2018. Por meio dessa experiência, percebi que muitos dos alunos que ingressam no programa, oriundos de escolas públicas de diversas cidades do Estado da Paraíba, desconhecem ou pouco estudaram alguns conteúdos de Geometria, tendo como consequência dificuldades em resolver problemas que exijam o conhecimento geométrico e que são frequentes em testes como o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e em cursos superiores de diversas áreas.

Essas experiências me geraram inquietações que provocaram um direcionamento do meu olhar enquanto pesquisador para os problemas que dificultam o aprendizado de Geometria, bem como para as possíveis contribuições que diferentes artefatos analógicos e digitais podem proporcionar aos alunos e professores que vivenciam cenários semelhantes.

Essas inquietações foram aguçadas por meio de minha participação em eventos científicos associados à área de Informática na Educação, seja apresentando trabalhos ou na

---

[3] Adotamos em nosso texto um diálogo na primeira pessoa do plural, dados os esforços conjuntos, realizados por aluno e orientadora. Entretanto, no tópico a seguir, o texto foi redigido em primeira pessoa do singular, tendo em vista seu objetivo de apresentar as motivações pessoais do pesquisador responsável pelo estudo. Nos demais tópicos, retomamos o diálogo na primeira pessoa do plural.

condição de ouvinte. Entre esses eventos, destaco o Congresso Brasileiro de Informática na Educação (CBIE), em suas edições realizadas nos anos de 2017, 2018 e 2019, que promoveu a realização de discussões sobre as contribuições que o uso dos artefatos digitais pode proporcionar à vida das pessoas, especialmente para a juventude que vivencia a Cultura Digital e que tem desenvolvido diferentes habilidades para utilizar e conviver com as tecnologias digitais da informação e comunicação (TDIC).

Entre essas habilidades está o PC, que foi um dos focos de discussão no Workshop de Ensino em Pensamento Computacional, Algoritmos e Programação (WAlgProg), em suas quarta e quinta edições. A partir desses eventos, pude refletir sobre a necessidade de se estabelecer diálogos entre essa forma de pensar e as diferentes áreas do conhecimento e, tendo em vista minhas inquietações sobre o ensino e a aprendizagem de Geometria, senti a necessidade de um aprofundamento sobre as possíveis conexões que poderiam ser estabelecidas entre essas temáticas.

Portanto, é em meio a essas inquietações e diferentes olhares sobre a aprendizagem, com contribuições de diversos atores e autores, que essa pesquisa foi idealizada e desenvolvida. No item a seguir, serão tecidas algumas conexões iniciais sobre as temáticas em foco.

1.2 TECENDO CONEXÕES

Em virtude dos avanços e da popularização do acesso às Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC), as discussões a respeito do seu uso em cenários educacionais vêm ganhando cada vez mais espaço no ambiente acadêmico. A partir dessas discussões, importantes reflexões e mudanças vêm ocorrendo no meio educacional que tem buscado se adaptar às necessidades de sociedade marcada pelas vivências da era digital.

Com isso, vem sendo compreendido por alguns docentes e comunidades escolares que ensinar utilizando exclusivamente recursos como o livro didático e a lousa, empregando-os como simples meios para a exibição de conteúdos, já não se trata mais de uma opção viável para a educação em tempos de cultura digital. Embora, em determinados contextos, e em meio às injustiças e desigualdades vivenciadas em escolas públicas de regiões menos favorecidas economicamente, práticas de ensino como as que foram mencionadas ainda sejam comuns.

De toda forma, seja em um cenário mais favorecido pelas políticas públicas educacionais, ou não, há uma crescente necessidade de mudança nas formas pelas quais os processos de ensino e de aprendizagem se desenvolvem. Para melhor entender essa necessidade, basta observar que uma imagem animada, quando compartilhada em mídias sociais, permite a realização de discussões em tempo real, utilização de outras imagens estáticas e animadas em comentários, reações com figurinhas e *emojis*, entre outros recursos, o que pode proporcionar muito mais interações do que um simples desenho presente em um livro didático, ou realizado e apresentado por um professor em uma lousa.

Observando os diferentes recursos digitais que podem ser utilizados em sala de aula, podemos perceber que, se utilizados com sabedoria, podem proporcionar ricas contribuições ao ensino e à aprendizagem da Matemática. Direcionando o nosso olhar aos softwares de geometria dinâmica, podemos verificar que as suas funcionalidades, como, por exemplo, a visualização de uma figura sob diferentes perspectivas e possibilidade de criar animações com ela, podem servir como importantes aliadas à prática pedagógica dos professores de Matemática.

Destacamos, ainda, que as medições precisas utilizadas nas representações geradas por esses artefatos digitais, muitas vezes, se sobressaem àquelas existentes nos livros didáticos, que por sua vez já sugerem o uso de determinadas aplicações via internet como recursos complementares. Isto porque as representações realizadas na interface virtual dos recursos de geometria dinâmica podem proporcionar um nível de imersão, interatividade e fidelidade na representação de formas geométricas que nem sempre são alcançadas na escola tradicional.

Corroborando com este fato, fazemos menção à quarta competência[4] específica da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), para a área Matemática e suas tecnologias no Ensino Médio, que propõe que o trabalho pedagógico em sala de aula deve levar os alunos a “compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas”. (BRASIL, 2018, p. 538). Além disso, na quarta habilidade específica deste documento é mencionado que os alunos devem “Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática”. (BRASIL, 2018, p. 539).

Levando em consideração essas recomendações e voltando o nosso olhar para o ensino e aprendizagem de Matemática, é possível refletir sobre a necessidade de contemplar o uso de diferentes artefatos analógicos e digitais nas escolas, pois a aprendizagem se mostra como um fenômeno muito além do registro e reprodução de informações escritas.

[4] “Na BNCC, competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho”. (BRASIL, 2018, p. 8).

Dessa forma, práticas que limitam a criatividade e o pensamento estudantil já não possuem mais efeitos positivos no novo quadro pedagógico, que aponta para o uso das TDIC e de metodologias específicas pra possibilitar aos alunos a utilização dos conhecimentos e habilidades advindos dos seus contatos com os *games*, aplicativos, internet e outros recursos.

Entre esses conhecimentos e habilidades, o chamado PC vem recebendo a atenção de pesquisadores do mundo todo, devido sua capacidade de facilitar a resolução de problemas e aquisição de novos conhecimentos em diferentes áreas que, muitas vezes, vão além do que é apreendido nas salas de aula tradicionais.

Pensar computacionalmente significa utilizar estratégias específicas para a resolução de problemas, seja com o uso da tecnologia ou não. Para melhor compreender a ideia do que significa pensar dessa forma, basta imaginar o seguinte caso: um estudante precisa contar a quantidade de dinheiro que conseguiu juntar guardando moedas em um cofre. Qual seria a melhor estratégia que ele poderia utilizar para fazer tal contagem? Usar uma calculadora para somar cada moeda, uma a uma? Agrupar as moedas com os mesmos valores, depois contar o valor que cada grupo possui e em seguida somar essas quantidades? Fazer grupos cuja soma das moedas que pertencem a ele seja um valor específico e igual ao dos demais? Fazer agrupamentos com determinado valor e, em seguida, agrupamentos maiores, contendo os grupos de moedas menores?

Observe que o simples fato de usar a calculadora para realizar somas sucessivas não facilitaria os cálculos deste estudante, porém na medida em que ele observa as moedas e faz agrupamentos com elas para então realizar as somas, seja manipulando os grupos ou apenas visualizando-os, ou ainda fazendo uso estratégico da calculadora, ele estará a pensar computacionalmente.

Percebe-se por meio deste exemplo que o PC possui possibilidades de associação com a Matemática. Destaca-se que independentemente de o PC se associar aos campos de Aritmética, Álgebra ou Geometria, diferentes conteúdos específicos podem ter seu ensino e aprendizagem impulsionados, seja por meio de atividades realizadas com recursos analógicos ou com artefatos digitais.

Vale ressaltar, no entanto, que ao abordar ensino e aprendizagem de Geometria em nossa pesquisa, não desejamos, de forma alguma, limitar as habilidades que compõem o PC. Da mesma forma, também não pretendemos encurralar as habilidades deste importante campo da Matemática às habilidades computacionais. Buscamos desta forma, através das leituras realizadas e das atividades em sala de aula, propor um diálogo a ser estabelecido entre a aprendizagem de Geometria e as habilidades do PC.

Nessa busca, inspirados nas observações anteriormente mencionadas, e em algumas experiências realizadas em escolas públicas da cidade e Campina Grande-PB, com foco no ensino e na aprendizagem de Geometria, levantamos a seguinte questão de pesquisa: *quais conexões podem ser estabelecidas entre o Pensamento Computacional e o ensino e a aprendizagem da Geometria, especificamente no conteúdo da congruência de triângulos?*

Para responder a estes e a outros questionamentos, elaboramos esta pesquisa, cujo objetivo geral é *pesquisar sobre as conexões do pensamento computacional com o ensino e a aprendizagem da Geometria*. Para alcançar tal objetivo, buscaremos, também, a realização dos seguintes objetivos específicos:

- Realizar uma revisão sistemática de literatura, para evidenciar o que vem sendo discutido a respeito da relação de Geometria com o PC;
- Identificar quais são os recursos que vêm sendo utilizados para ensinar Geometria e desenvolver o PC;
- Diagnosticar os problemas relacionados ao objeto de pesquisa deste trabalho em seus aspectos epistemológicos, didáticos e cognitivos;
- Elaborar e aplicar atividades plugadas e desplugadas para ensinar o conteúdo de congruência de triângulos;

Nas seções a seguir, apresentaremos a fundamentação teórica de nosso estudo, que será subdividida em três itens principais: *Ensino e aprendizagem da Geometria Plana; Pensamento Computacional; Engenharia Didática*. Em seguida, é apresentado o *estado da arte*, por meio de uma revisão sistemática de literatura sobre o PC e o ensino e aprendizagem de Geometria. Dando continuidade, apresentamos alguns aspectos da *metodologia* traçada em nossa pesquisa.

Logo depois, seguindo os pressupostos teóricos e as recomendações metodológicas da Engenharia Didática, apresentamos as seções: *análises preliminares*, que discute um pouco sobre os aspectos epistemológicos, didáticos e cognitivos associados à nossa pesquisa e ao seu público-alvo; *Análises a priori*, que apresenta todos os procedimentos seguidos para a elaboração das atividades aplicadas nesta pesquisa; *Experimentação*, onde apresentamos como a parte empírica da pesquisa foi conduzida e como os dados foram coletados; *Análises a posteriori e validação*, etapa na qual apresentamos os dados coletados, analisando-os de acordo com cada atividade aplicada e à luz do quadro teórico adotado. Neste tópico, também apresentamos a validação das conexões que encontramos entre a aprendizagem da Geometria e as habilidades do PC, recorrendo aos dados apresentados e às análises tecidas ao longo do texto. Por fim, apresentamos as nossas considerações finais.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Apresentamos neste item algumas considerações teóricas relacionadas a dois temas aos quais nossa pesquisa está associada: o ensino e a aprendizagem da Geometria Plana e o Pensamento Computacional. Para fundamentar nossas falas, recorremos a autores da área da Educação e, também, autores específicos da área de Educação Matemática, como Boaler (2018), Lorenzato (1995), Pavanello (2004) e Santos e Nacarato (2011).

Com relação ao PC, embasamos nossas discussões em Wing (2006, 2008, 2017), Brackmann (2017), Barr e Stephenson (2011) e BBC Learning (2015), além de outros autores. Buscamos, também, ao longo do item sobre o PC, apontar algumas associações entre o mesmo e a Matemática, por meio de evidências presentes na literatura internacional.

É importante mencionar que, ao longo deste trabalho, nosso diálogo a respeito do PC levará em consideração que ele envolve as seguintes habilidades apresentadas em BBC Learning (2015): decomposição, reconhecimento de padrões, abstração e algoritmos. Tal escolha é motivada pela amplitude de estudos que encontramos na literatura que consideram tais habilidades em suas discussões, a exemplo de Brackmann (2017) e do Currículo de Referência em Tecnologia e Computação (2018). Essa escolha também é inspirada nas conexões que à princípio suponhamos existir entre esta forma de pensar e o conteúdo da congruência de triângulos.

Apesar disso, entendemos que essas habilidades não correspondem à variedade das que se envolvem no processo de desenvolvimento do PC. Por esse motivo, apresentamos também a perspectiva teórica de outros autores que por meio de seus escritos revelam o quão amplo o PC pode ser. No tópico a seguir, iniciamos nossas considerações teóricas tecendo reflexões sobre os processos de ensino e de aprendizagem da Geometria plana.

2.1 ENSINO E APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA PLANA

A aquisição de conhecimentos geométricos é um processo de extrema importância para o desenvolvimento intelectual dos estudantes, com aplicações imediatas em seu cotidiano, ou ao longo prazo em todo seu processo formativo. Tratam-se de conhecimentos estruturadores do saber matemático, que fazem conexões com os seus diversos campos, mencionados por Brasil (2018): números e operações, álgebra, grandezas e medidas e probabilidade e estatística.

Além de possibilitar tais conexões, a Geometria também proporciona àqueles que a estudam o desenvolvimento de uma forma específica de raciocinar, denominada pensamento geométrico (PG). De acordo com Van de Walle (2009), esta forma de pensar está associada à uma sensibilidade sobre as formas e as relações que podem ser estabelecidas entre elas. Para o autor, o PG também envolve a habilidade de visualizar mentalmente formas e objetos, compondo-os, decompondo-os e analisando as suas propriedades de uma maneira confortável. Outra habilidade que vale ser mencionada é a de lidar com descrições e representações de formas geométricas.

Essas habilidades ressaltam a importância da aprendizagem da Geometria, que também é destacada por Fainguelernt (1999, p. 53):

> O estudo da Geometria é de fundamental importância para se desenvolver o pensamento espacial e o raciocínio ativado pela visualização, necessitando recorrer à intuição, à percepção e à representação, que são habilidades essenciais para leitura do mundo e para que a visão da Matemática não fique distorcida.

Assim, ao fazer referência ao pensamento espacial, a autora também aborda habilidades associadas ao pensamento geométrico: intuição, percepção e representação, que tornam as pessoas capazes compreender de forma mais abrangente o mundo em que vivem, e também de estabelecer importantes conexões entre seus saberes e vivências.

O conhecimento geométrico permite o desenvolvimento de capacidades de "abstrair, generalizar, projetar, transcender o que é imediatamente sensível" (PAVANELLO, 2004, p. 4). Essas capacidades devem ser conquistadas e aprimoradas pelos estudantes ao longo do Ensino Fundamental e Médio, favorecendo o desenvolvimento de diversas outras, que serão de grande valor em sua vida acadêmica e profissional.

Em uma perspectiva semelhante, Abrantes (1999) menciona alguns argumentos que ressaltam a importância do ensino da Geometria na escola: a partir dela, é possível ter contato com uma série de objetos e situações, relacionando-os com o mundo real; a Geometria é uma fonte de proposição e resolução de problemas; trata-se de uma área que permite o estabelecimento de conexões com outros campos da Matemática; explorações e investigações geométricas podem ser realizadas em diversos níveis da escola básica e com públicos das mais variadas faixas etárias.

Segundo Van de Walle (2009), os quatro objetivos para o ensino e a aprendizagem da Geometria, previstos no *National Council of Teachers of Mathematics*[5] (NCTM), podem ser brevemente sumarizados por meio dos seguintes temas: Formas e Propriedades, Transformação, Localização e Visualização.

O tema formas e propriedades diz respeito ao estudo das características das formas bidimensionais e tridimensionais e, também, das relações que podem ser estabelecidas entre elas; transformação inclui o estudo de manipulações como translações, reflexões, rotações, e também, o estudo das simetrias, semelhanças e congruências entre figuras geométricas; a localização refere-se aos diversos modos de se detalhar como um objeto está posicionado no plano ou no espaço; visualização inclui o reconhecimento das relações que podem ser estabelecidas entre as formas geométricas e os objetos presentes no mundo real, além da representação e do reconhecimento de objetos geométricos sob diferentes perspectivas. (VAN DE WALLE, 2009).

Resgatando as ideias de Gravina e Santarosa (1998) e associando-as a essas temáticas que devem ser abordadas no ensino da Geometria, destacamos a importância do desenvolvimento de um trabalho onde os estudantes possam visualizar e manipular representações dos objetos geométricos sob diferentes perspectivas. Para isto, é de extrema importância o desenvolvimento de um trabalho que faça o uso de recursos que complementem as atividades propostas nos livros didáticos e permitam aos estudantes exercitarem a sua criatividade.

Diante desses argumentos, podemos refletir sobre a influência da Geometria no desenvolvimento de novos saberes por parte dos estudantes, especialmente por permitir a realização de atividades onde é possível fazer descobertas, conjecturas e experimentos.

Para Lorenzato (1995), esses tipos de atividades possibilitam o desenvolvimento de habilidades como o raciocínio lógico, a dedução, o desenho, e o chamado raciocínio espacial, que "[...] consiste no conjunto de processos que permitem construir representações mentais dos objetos geométricos e suas propriedades" (SMOLE, 2008, p. 45), e que está diretamente relacionado a ações cotidianas como, por exemplo, caminhar em linha reta, comparar distâncias, dirigir, jogar bola ou videogame (GONÇALVES, 2019).

Nesse sentido, o conhecimento geométrico é essencial para a aprendizagem de outros conceitos matemáticos, pois

[5] O Conselho Nacional dos Professores de Matemática foi fundado no ano de 1920, sendo responsável por fornecer diretrizes para o ensino de Matemática nos Estados Unidos e no Canadá, além de realizar estudos e publicações sobre o ensino e a aprendizagem deste componente curricular.

> a Geometria é a mais eficiente conexão didático-pedagógica que a Matemática possui: ela se interliga com a Aritmética e com a Álgebra porque os objetos e relações dela correspondem aos das outras; assim sendo, conceitos, propriedades e questões aritméticas ou algébricas podem ser clarificados pela Geometria, que realiza uma verdadeira tradução para o aprendiz. (LORENZATO, 1995, p. 6-7)

Reconhecendo essas características, bem como as contribuições da aprendizagem da Geometria para o desenvolvimento dos saberes discentes, Moita e Viana (2017, p. 97) destacam que o ensino de conteúdos geométricos "é uma das práticas relacionadas à disciplina de Matemática que mais requisitam materiais didáticos fora do padrão e métodos diferenciados por parte dos docentes".

Na perspectiva dos autores, para explorar a beleza e criatividade das Geometrias Plana e Espacial em sala de aula, os professores precisam propor aos seus estudantes que manipulem formas geométricas, fazendo desenhos, recortes ou dobraduras. Da mesma forma, os professores também precisam instigar os alunos a associarem essas formas com objetos de seu dia a dia, sejam eles reais ou virtuais, de modo que diferentes domínios semióticos possam ser explorados e o senso geométrico seja fortalecido por meio destas interações.

Segundo Winter, Love e Corritore (2018), o conhecimento geométrico pode ser desenvolvido através de diferentes tipos de atividades práticas, sejam elas realizadas durante aulas de desenho, utilizando *games* ou, também, com artes visuais. Os autores apontam ainda que esse conhecimento é durável e pode ser utilizado na resolução de vários tipos de problemas, sejam eles associados à Geometria, ou não.

Além disso, destaca-se que o conhecimento geométrico é de fundamental importância para a compreensão de conteúdos de áreas do conhecimento onde a maioria das informações são visuais, como na química, por exemplo, ao estudar-se a estrutura de uma molécula, ou da tabela periódica. (WINTER; LOVE; CORRITORE, 2018).

Em uma perspectiva semelhante, Cheng e Mix (2014), tendo em vista as contribuições do raciocínio espacial, para a vida das pessoas, buscam evidenciar em seu estudo que ao trabalhar-se as habilidades espaciais de crianças com idade entre seis e oito anos de idade, é possível auxiliar no desenvolvimento de seu conhecimento matemático.

Segundo os autores, quantidades e objetos são representadas em nossas mentes de forma espacial, para exemplificar tal fato, apontam que as pessoas, independentemente de suas idades, costumam remeter aos números como uma linha, que contém essas quantidades ordenadas da esquerda para a direita. Mas também, há pessoas que os imaginam de forma contrária, da direita para a esquerda. (CHENG; MIX, 2014).

Por meio desses apontamentos, podemos refletir que o raciocínio espacial e geométrico são duas habilidades intimamente associadas, uma vez que, ao desenvolver-se atividades que exigem visualização, manipulação, composição e decomposição de figuras e sólidos geométricos, é preciso pensar sobre os movimentos a serem realizados e como cada elemento dos objetos podem se alterar.

Outra contribuição do conhecimento geométrico para a vida das pessoas é destacada na pesquisa de Walker *et al.* (2011), quando consideram que a habilidade de visualização é de extrema importância para os estudos de áreas como Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática, que utilizam do raciocínio espacial e geométrico para resolver problemas. Entretanto, os autores também apontam que apesar dessas contribuições, os currículos escolares ainda exploram esses conhecimentos de forma superficial, limitando as aprendizagens dos alunos, e possivelmente, os conhecimentos dos profissionais que se tornarão futuramente.

Por meio de uma pesquisa com estudantes de artes e psicologia, Walker *et al.* (2011) analisam como as habilidades de visualização em um contexto não-matemático podem conferir uma vantagem no PG. Em conjunto com professores de Matemática, os autores desenvolveram um conjunto de atividades que foram aplicadas aos estudantes das áreas de Artes e Psicologia, que deveriam ser respondidas realizando-se apenas representações mentais, isto é, sem realizar a desenhos ou recorrer a quaisquer objetos.

Os resultados desta pesquisa apontaram que os estudantes de Artes tiveram um melhor desempenho nessas atividades, conseguindo realizar manipulações mentais com maior facilidade e precisão do que os estudantes de Psicologia. Os autores sugerem que as artes visuais podem ser encaradas como um ponto de entrada para a aprendizagem da Geometria, ou como um novo contexto para um conhecimento geométrico mais profundo. (WALKER *et al.*, 2011).

Para Walker *et al.* (2011), os artistas não desenham suas obras magicamente, mas analisam deliberadamente e sistematicamente o espaço e as formas que desejam desenhar, por meio de simples formas, linhas, ângulos e proporções, representando-as por meio dos seus materiais de trabalho.

Além da perspectiva dos autores supracitados, também verificamos também na obra de Kaleff (2016) que na Geometria a visualização envolve um conjunto de operações mentais, sintetizadas pela autora por meio das seguintes ações:

> a) Identificar uma determinada figura plana, isolando-a dos demais elementos de um desenho; b) Reconhecer que as formas geométricas de um

> objeto são independentes de suas características físicas, tais como tamanho, cor e textura; c) Identificar um objeto, ou um desenho, quando apresentado em diferentes posições; d) Produzir imagens mentais de um objeto e visualizar suas transformações e movimentos, mesmo na sua ausência visual; e) Relacionar um objeto a uma representação gráfica ou a uma imagem desse objeto; f) Relacionar vários objetos, representações gráficas ou imagens mentais entre si; g) Comparar vários objetos, suas representações gráficas e suas imagens para identificar diferenças e regularidades entre eles. (KALEFF, 2016, p. 22)

Ao observar essas falas e pensar em como a Geometria vem sendo explorada em sala de aula, é possível perceber sobre o quão distante desta realidade estão algumas das atividades comumente praticadas nas aulas deste componente curricular, especialmente por não darem ênfase às habilidades anteriormente mencionadas. Assim, fica nítido que aprender Geometria por meio de processos de memorização e técnicas operatórias não é o melhor caminho a ser seguido, devendo o professor ser capaz de considerar as vivências e conhecimentos prévios dos alunos, para que possam realizar associações entre os seus conhecimentos de mundo e o saber matemático.

De acordo com as diretrizes propostas na BNCC, o trabalho com a Geometria ao longo da escola básica demanda que sejam levadas em consideração as experiências e os conhecimentos prévios dos alunos, especialmente àqueles associados à Matemática, de modo que sejam desenvolvidas conexões entre esses saberes e os aspectos formais da Geometria. (BRASIL, 2018).

Entre essas experiências e conhecimentos, ressaltamos aqueles associados ao uso das TDIC, que proporcionam ao aluno vivenciar diferentes situações de aprendizagem e que nem sempre são contempladas no ensino de Geometria, especialmente quando ele é desenvolvido sob uma abordagem tradicional.

Considerando essas práticas culturais, que são desenvolvidas através do convívio com os diversos ambientes virtuais acessíveis por meio das TDIC, Moita e Viana (2017) destacam que o conhecimento geométrico também é essencial para compreender e melhor explorar os elementos presentes em *games*, redes sociais, aplicativos de mensagens e outros artefatos digitais.

Dessa forma, é possível estabelecer um diálogo entre o conhecimento geométrico e a cultura digital de modo a atender a crescente necessidade de convívio com as TDIC dentro dos espaços educacionais. Segundo Fainguelernt (1999), essa necessidade não pode ser ignorada por professores e pesquisadores, o que revela a importância do desenvolvimento de trabalhos investigativos que busquem por meio das TDIC novas formas de se enxergar e interpretar os conteúdos curriculares, em nosso caso, destacamos os da Geometria.

A partir dessas considerações, ressaltamos que as TDIC têm muito a contribuir para a aprendizagem da Geometria, entretanto, para que os conhecimentos geométricos sejam desenvolvidos e explorados com profundidade e significância é necessário que esses recursos digitais, bem como os analógicos, sejam aplicados de maneira a não deixar lacunas na construção de conhecimentos dos estudantes.

Para Gonçalves (2010), na mesma medida em que são deixadas lacunas na aprendizagem da Geometria, sérios problemas acabam surgindo no aprendizado dos alunos, pois tornam o estudo improdutivo, resultando em uma formação deficiente de conhecimentos que poderão ser de grande importância no futuro cotidiano acadêmico e profissional desses estudantes.

Observando os escritos de Fonseca *et al.* (2001), podemos destacar dois motivos que podem resultar em uma abordagem superficial dos conhecimentos geométricos por parte de alguns professores: em seu processo formativo, alguns deles, especialmente os habilitados para trabalhar nos anos iniciais do Ensino Fundamental, não tiveram a oportunidade de conhecer os conteúdos deste currículo, nem receberam orientações metodológicas para abordá-lo em sala de aula; esses mesmos professores, em geral, tomam como referência para suas aulas um único livro didático, perdendo a oportunidade de conhecer outros meios de orientação teórica e metodológica.

Fonseca *et al.* (2001, p. 21) destacam ainda que:

> [...] quando se solicita aos professores uma descrição dos conteúdos referentes a números e operações, em geral, ela é feita de maneira minuciosa. Entretanto, quando se trata da discussão dos tópicos de Geometria, estes são relacionados de maneira sumária, sem quaisquer detalhes, dando a impressão de que são poucos trabalhados em sala de aula e que os professores não se sentem à vontade em abordá-los.

Embora seja algo altamente prejudicial à compreensão dos alunos, essa superficialidade na exploração de conteúdos geométricos em sala de aula não se trata de um problema recente, mas que já vem sendo debatido por diversos autores. Pavanello (1989), por exemplo, abordou o abandono do ensino da Geometria nas salas de aula, livros didáticos e documentos que regiam o currículo brasileiro no momento em que publicou seu texto. Felizmente, com o passar dos anos, essa realidade vem se transformando de modo que os livros didáticos e currículos vêm valorizando cada vez mais o conhecimento geométrico e buscando explorá-lo em diferentes contextos educacionais.

Entretanto, apesar dos avanços no ensino de Matemática, ainda há problemas que permanecem a prejudicar o ensino da Geometria. Santos e Nacarato (2011) apontam no primeiro capítulo de seu livro um exemplo desses problemas: alguns estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental não possuem noções do espaço tridimensional, esboçando algumas figuras sem considerar suas características de profundidade.

Esta realidade trata-se de reflexos dos modos pelos quais a Geometria ainda vem sendo abordada em algumas escolas, com foco nas nomenclaturas e classificação de figuras planas, sem a exploração de relações entre elas ou de suas propriedades.

Lorenzato (1995) aponta que o protagonismo que muitas vezes é dado ao livro didático em sala de aula pode vir a limitar os processos de ensino e aprendizagem de conceitos geométricos. Isto ocorre porque além da visualização, é importante que os estudantes possam manipular formas geométricas, construí-las e visualizá-las sob diferentes perspectivas. Por esse motivo, os recursos de geometria dinâmica, como é o caso do GeoGebra[6], vem recebendo tanta visibilidade no cenário acadêmico e escolar.

Aprender Geometria pode não ser uma tarefa fácil, pois exige dos alunos habilidades de visualização, comunicação e funções cognitivas que possuem maior complexidade, se comparadas a outros campos do conhecimento matemático. A efetiva compreensão de um conceito geométrico não requer apenas visualização, mas uma sinergia entre uma compreensão visual e linguística. (GONÇALVES, 2019).

Quando mencionamos a compreensão linguística, nos referimos a todas as suas formas escritas, audíveis, tateáveis, entre outras. Por esse motivo, o ensino de Geometria fadado ao uso exclusivo e excessivo de recursos estáticos, como é o caso dos livros didáticos, não vem gerando tantos resultados positivos em contextos educacionais.

Murari e Barbosa (1992) destacam que em sala de aula e nos livros didáticos, é comum dar-se ênfase ao desenvolvimento da compreensão de que uma forma geométrica possui determinadas propriedades, como, por exemplo: quantidade, tamanho e disposição de lados, ângulos, vértices, entre outros elementos, podendo ser classificada de acordo com os mesmos. Porém, não é dada devida atenção a figuras que não podem ser classificadas, sendo estas muitas vezes compreendidas como formas que não são importantes para a Geometria.

Seguindo essa ideia, os autores mencionam o caso do conteúdo de congruência de triângulos, cujo ensino costuma ocorrer dando-se prioridade ao entendimento dos casos em

[6] Software educativo de matemática dinâmica, desenvolvido por Markus Hohenwarter. Disponível em: https://www.geogebra.org/?lang=pt. Acessado em: 02 abr. 2020.

que é possível saber se dois ou mais triângulos são congruentes observando-se apenas alguns de seus lados e ângulos. Porém, muitas vezes, é esquecido de se abordar que existem outros casos, onde ocorre a não-congruência de triângulos, sendo de grande importância compreender-se visualmente, ou por meio de demonstrações, o porquê de não ser possível gerar-se um triângulo congruente a outro usando-se, por exemplo, apenas as medidas de dois de seus lados e de um ângulo oposto a um deles.

Dessa forma, são necessárias mudanças e reflexões sobre as maneiras pela qual a Geometria vem sendo ensinada nas escolas, pois alguns empecilhos ainda se encontram presentes nas aulas, nos livros e no currículo de matemática. (LORENZATO, 1995).

Entretanto, essas novas abordagens precisam, também, estar de acordo com as demandas educacionais do momento, de modo a provocar resultados significativos na aprendizagem dos estudantes. É de extrema importância que os conteúdos geométricos sejam abordados com o uso de diversos recursos analógicos e digitais disponíveis, comuns ao cotidiano de quem vivencia a cultura digital, possibilitando o desenvolvimento de um trabalho que envolva a geometria dinâmica. (GRAVINA; SANTAROSA, 1996).

Entre as demandas educacionais referidas acima, ressaltamos a necessidade de um trabalho que possibilite aos estudantes pensarem de forma estratégica, estabelecendo conexões entre os conhecimentos geométricos e os objetos de seu dia a dia, como é o caso das tecnologias digitais. Entretanto, para usar tais tecnologias com sabedoria, vêm sendo necessária cada vez mais uma forma específica de se pensar, que permite realizar atividades e resolver problemas com eficácia.

Essa forma de pensar é chamada Pensamento Computacional e, conforme mostraremos no tópico a seguir, envolve o uso de algumas habilidades que muito se associam ao conhecimento matemático e, especialmente geométrico.

2.2 PENSAMENTO COMPUTACIONAL

O Pensamento Computacional (PC) não se se trata de uma temática recente, mas que vêm sendo revisitada ao longo dos últimos anos, especialmente após a pesquisadora Jeannette Wing (2006) ter utilizado esse termo em uma publicação na revista *communications of ACM*, que vem recebendo atenção de diversos professores e pesquisadores a nível global. (MOITA e VIANA, 2019).

A ideia do PC foi introduzida inicialmente por Papert (1980, p. 182), em sua obra M*indstorms: children, computers and powerful ideas*, que abordava o uso do computador nos processos de ensino e aprendizagem infantil. Na perspectiva de Papert, a aprendizagem mecanizada de conceitos, propriedades, fórmulas, entre outros conhecimentos de diferentes áreas, não era suficiente para conduzir os alunos aos objetivos educacionais da época.

Para Papert (1980), ao utilizar os computadores, sendo mediadas pelos professores, as crianças estavam a exercitar e desenvolver seus conhecimentos, especialmente quando utilizavam a linguagem LOGO para movimentar uma tartaruga mecânica e traçar desenhos. Assim, ainda que de forma primitiva, já se falava sobre a importância do uso do computador, e também da lógica de programação, para se resolver problemas de diferentes áreas, sendo estes os primeiros estudos que associavam práticas que estimulam o PC com a aprendizagem.

Ao contrário do que possa parecer, o termo Pensamento Computacional envolve muito mais questões do que o simples fato de saber utilizar um computador, ou determinado *software*. O ato de pensar computacionalmente envolve o uso de artefatos, sejam eles analógicos ou digitais, para propor e resolver problemas de forma eficaz. Por meio de suas habilidades, é possível realizar procedimentos e criar estratégias e ferramentas para facilitar o trabalho humano, bem como sua interação com os recursos digitais.

Entretanto, apesar dos estudos que vêm sendo realizados sobre o PC, como o de Wing (2006), ainda não existe uma definição precisa para o seu conceito, entretanto, diversos pesquisadores vêm buscando estuda-lo em busca de resolver essa e outras questões a ele relacionadas.

Segundo a visão da autora, o PC é um tipo de pensamento analítico, que compartilha com o pensamento matemático alguns métodos comumente usados para elaborar e resolver problemas. Wing (2006) complementa ainda que o PC nos permite pensar estrategicamente sobre como solucionar um problema, utilizando os mais variados artefatos disponíveis, sejam eles analógicos ou digitais.

Ao longo dos anos, Wing vem publicando diversos artigos com o objetivo de disseminar e desenvolver a ideia de PC. Recentemente, no ano de 2017, a autora caracterizou o termo PC como um processo de pensamento envolvido na formulação de um problema e na expressão de suas soluções, de modo que humanos ou computadores possam compreendê-las e reproduzi-las efetivamente. (WING, 2017).

De modo semelhante, o estudo realizado pela *Computer Science Teachers Association* (CSTA) e *International Society for Technology in Education* (ISTE), determina que o PC é um processo de resolução de problemas que contempla ações como: formular resolver e problemas usando o computador e outros artefatos analógicos ou digitais; organizar e analisar dados de forma lógica; automatizar a solução de problemas através de algoritmos (uma série de passos ordenados); identificar, analisar e implementar possíveis soluções de um problema, com o objetivo de encontrar efetivas combinações de passos e recursos; generalizar e utilizar um processo de resolução de problemas para resolver outros (CSTA/ISTE, 2011).

Com um olhar semelhante, Blikstein (2008, s/p) afirma que:

> Pensamento computacional é saber usar o computador como um instrumento de aumento do poder cognitivo e operacional humano – em outras palavras, usar computadores, e redes de computadores, para aumentar nossa produtividade, inventividade, e criatividade.

Buscando ir além do contexto da ciência da computação, Li et al (2020) propõem que o PC trata da busca por diferentes formas de processar informações que, por sua vez, são passíveis de melhoria em sua eficiência, precisão e elegância. Nessa busca, várias estratégias, práticas, aquisições de habilidades e melhorias podem ser desenvolvidas, pois a informação pode ser coletada em diferentes formatos, níveis de abstração e representações. Assim, essas habilidades podem ser aplicadas em diferentes campos do conhecimento, como uma estratégia para modelar e solucionar problemas.

Corroborando com essas definições, Lu e Fletcher (2009) apontam quatro ideias-chave sobre o PC: 1) é uma forma de resolver problemas e de projetar sistemas, estes últimos baseados em conceitos fundamentais da ciência da computação; 2) significa fazer o uso de diferentes níveis de abstração, para compreender e resolver problemas de maneira mais eficiente; 3) significa pensar algoritmicamente e aplicar conceitos matemáticos para desenvolver soluções mais eficientes, justas e seguras; 4) significa entender as consequências de uma solução em pequena e larga escala, não apenas em termos de eficiência, mas também em termos sociais, ambientais e econômicos.

Todas essas ideias-chave estão relacionadas a métodos, como: a redução de um problema complexo em outros menores, a serem resolvidos separadamente para encontrar a solução do maior; a análise e representação de dados, utilizando ferramentas que facilitem sua interpretação; segurança na utilização e alteração de objetos de um sistema grande e complexo sem necessariamente ater-se a todos os seus detalhes; reflexões sobre a eficiência da solução de um problema. (WING, 2006).

Esses métodos vão ao encontro dos escritos de Barr e Stephenson (2011), quando mencionam que ao desenvolver e utilizar habilidades do PC, os alunos usam uma série de conceitos, como abstração, recursão e iteração, para processar e analisar dados e também criar, depurar e estudar sistemas reais e virtuais. Os autores destacam ainda que desenvolver o

PC significa promover o desenvolvimento das habilidades representadas na Figura 1 e que a ele se relacionam.

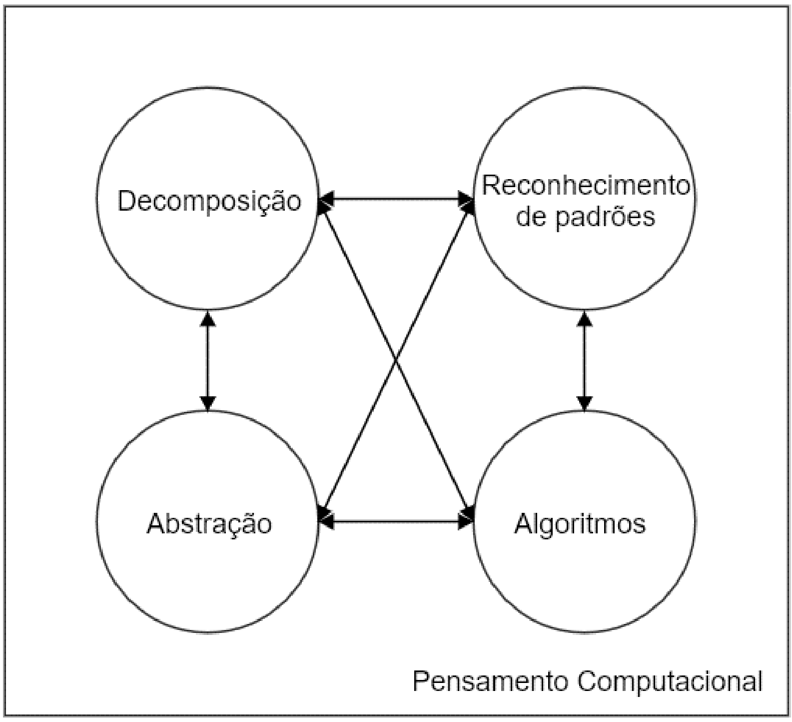
Figura 1 – Habilidades do PC segundo Barr e Stephenson

Fonte: Elaborado a partir de Barr e Stephenson (2011)

A Coleta de dados diz respeito à busca de dados que auxiliem a resolver ou compreender determinado problema; A análise refere-se, à compreensão do sentido destes dados, para que possam ser feitas generalizações que auxiliem na resolução do problema; A representação de dados está relacionada ao uso de gráficos, figuras, tabelas, diagramas, fluxogramas, de modo a ilustrá-los eficientemente; A decomposição refere-se à divisão de um problema em outros menores, para facilitar sua resolução; A abstração está relacionada à compreensão das principais características de um problema; Os algoritmos referem-se à organização e representação de uma série de passos, que podem tornar a resolução de um problema mais prática, bem como de outros problemas que a ele se associem; A automação faz referência ao uso das mais diversas ferramentas analógicas ou digitais para auxiliar a resolução de problemas; Simulação associa-se à alteração de valores de variáveis e teste de possibilidades de resolução de um problema, visando obter novos resultados e inferir novas conclusões sobre sua resolução; A paralelização está ligada à realização de ações em paralelo e, inclusive, em equipe, de modo que ao se encontrar a resolução de determinado problema, ou parte dele, ela possa ser um caminho para a resolução de outros. (BARR; STEPHENSON, 2011).

De maneira semelhante, em BBC Learning (2015) o PC é apresentado como um conjunto de quatro habilidades: decomposição, reconhecimento de padrões, abstração e algoritmos. A Figura 2 representa essas quatro habilidades e como elas se associam, por meio das setas que as interligam.

Figura 2 – Associações entre as habilidades do PC, de acordo com BB Learning (2015)



Fonte: Elaborado pelos autores

Por meio dessa figura, ressaltamos que é possível desenvolver atividades e ações que contemplem cada uma das habilidades do PC de diferentes formas, e seguindo diferentes percursos. Ressaltamos igualmente que o PC, representado pelo quadrado formado pelas bordas da figura, pode contemplar outras habilidades, que ainda não foram estudadas, mas que se fazem presentes nas mais diversas práticas que promovem esta forma de pensar.

Para detalhar cada uma dessas habilidades presentes na Figura 2, seguiremos a perspectiva de autores como Brackmann (2017), que as destaca como pilares do PC e Wing (2006), que popularizou o termo e seus significados. Iremos recorrer, também a exemplos da área da educação, especialmente da Matemática, para melhor expressarmos nossas considerações.

O pilar decomposição diz respeito à fragmentação de uma atividade em outras menores, cujo processo de resolução é mais simples, ou ao menos viável. Essa habilidade é comumente utilizada por programadores, quando se deparam com tarefas complexas e precisam resolvê-las separadamente, de modo que sua atenção gire em torno de problemas específicos que, quando solucionados, resultam ou contribuem na solução do problema maior.

Vale ressaltar que a decomposição não se limita ao campo da ciência da computação, sendo esta também utilizada em diversas outras áreas do conhecimento, como é o caso da Matemática, onde para se resolver problemas e exercícios quase sempre é necessário recorrer a diferentes procedimentos e representações, além da composição e decomposição de figuras e expressões.

Destacamos que a decomposição também facilita o desenvolvimento de trabalhos colaborativos, que por sua vez, conforme aponta McGonigal (2011), envolve esforços cooperativos, coordenativos e cocriativos, na medida em que tarefas complexas podem ser divididas entre as pessoas, ou grupo de pessoas, conforme acontece em alguns *games* digitais.

O pilar reconhecimento de padrões trata do estabelecimento de características que se repetem em determinados objetos ou processos. De acordo com Brackmann (2017), o reconhecimento de padrões é útil em situações em que, por exemplo, uma tarefa é decomposta em outras menores, pois podem existir similaridades entre elas, de modo que o processo de resolução de uma possa contribuir na resolução de outras.

Muito se fala que a Matemática é a ciência dos padrões, apesar de a mesma também envolver algumas irregularidades, como é o caso dos números irracionais e também dos números primos. Mesmo assim, em seus conteúdos, sejam eles relacionados à Aritmética, Álgebra ou Geometria, é comum buscar-se padrões em sequências, figuras, esquemas, entre outros objetos de estudo, para realizar-se generalizações, como em uma progressão geométrica, por exemplo.

Com isso, é possível perceber que essa habilidade de reconhecer padrões está também intimamente ligada ao conhecimento matemático, inclusive, desde os primeiros anos escolares, quando os alunos são desafiados a agrupar objetos com formas, cores ou tamanhos semelhantes.

Esta habilidade também vai além da Matemática e da Ciência da computação, uma vez que as mais diversas atividades humanas requerem o reconhecimento de padrões. Podemos citar como exemplos os campos da música, no qual padrões sonoros são emitidos a partir dos instrumentos, e o da biologia, quando é feita a classificação dos animais ou plantas de acordo com suas características comuns.

O terceiro pilar é a abstração, que para Wing (2006) significa escolher uma representação adequada para um problema ou modelar aspectos relevantes do mesmo para auxiliar sua resolução. Nesse sentido, a habilidade de abstrair não se trata apenas de absorver um determinado conhecimento, mas também representá-lo de diferentes formas.

Barr e Stephenson (2011) apontam diferentes formas pelas quais a abstração pode ser interpretada, por exemplo, no contexto da ciência da computação, ao utilizar-se de *functions* e *procedures* para encapsular um conjunto de comandos que se repetem com frequência. Os autores apresentam também exemplos na área de Matemática, onde a abstração se faz presente ao utilizar-se variáveis em álgebra, assim como ao se identificar e interpretar as informações essenciais para se resolver um problema.

Seguindo a perspectiva de Barr e Stephenson (2011), podemos ainda refletir sobre a presença da abstração no campo da Geometria, quando, por exemplo, ao realizar-se manipulações em formas geométricas, precisamos abstrair suas propriedades e perceber como elas se alteram ou se conservam ao serem manipuladas. Para melhor ilustrar tal situação, tomemos como exemplo a planificação de um cubo sobre um plano, na qual algumas das propriedades dessa forma são mantidas, como a área da superfície que passa a ser a área do polígono formado, e outras não são conservadas, como o volume.

Brackmann (2017, p.40) apresenta também mais um exemplo de abstração em Matemática, capaz de expandir ainda mais a compreensão deste pilar do PC: “A abstração pode ser exemplificada através de histórias infantis que envolvam atividades matemáticas. É necessário ocorrer a abstração das informações pertinentes da história para poder acompanhá-la (...)”. Assim, abstração nos permite lidar com informações complexas, e os recursos computacionais vêm impulsionando cada vez mais as nossas capacidades de fazer isto. (WING, 2017).

Por fim, temos o pilar dos algoritmos, que para Wing (2008) trata-se da abstração de um passo a passo para tomar uma informação ou objeto e produzir outros elementos a partir deles.

Brackmann (2017, p. 41) menciona que:

> Algoritmos devem ser compreendidos como soluções prontas, pois já passaram pelo processo de decomposição, abstração e reconhecimento de padrões para sua formulação. Ao serem executados, seguirão os passos pré-definidos, ou seja, aplicar-se-á solução quantas vezes forem necessárias, não havendo a necessidade de criar um novo algoritmo para cada uma de suas execuções posteriores.

Ainda seguindo a perspectiva de Brackmann (2017, p. 40), destacamos a fala do autor quando menciona que um algoritmo “É um conjunto de regras para a resolução de um problema, como a receita de um bolo; porém, diferentemente de uma simples receita de bolo, pode-se utilizar diversos fatores mais complexos”.

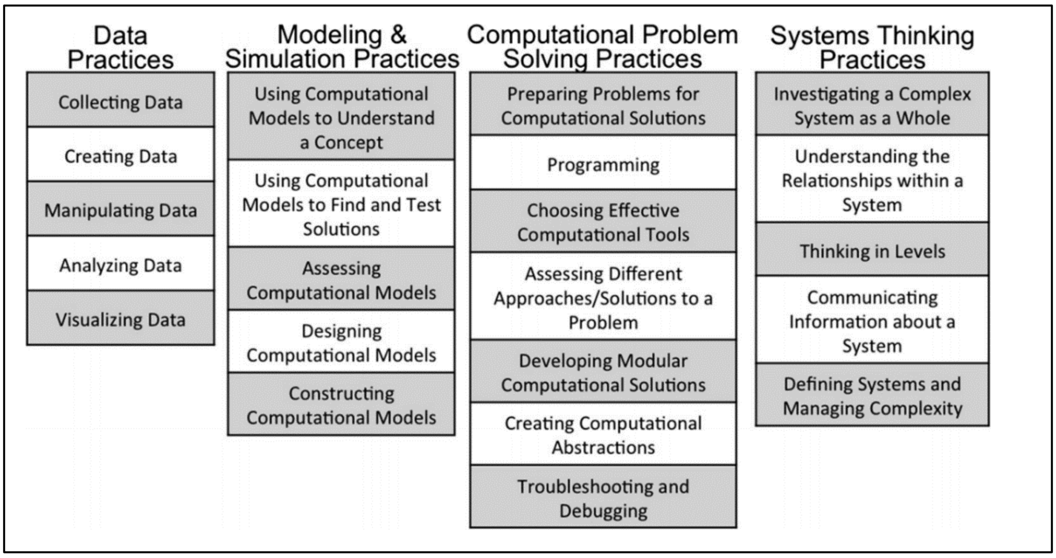
Ao seguir-se uma receita para fazer um bolo, nem sempre utilizamos produtos de uma marca específica, ou exatamente nas mesmas quantidades recomendadas — talvez essa seja a graça de cozinhar, pois assim podemos exercitar nossa criatividade e inteligência. — O mesmo acontece com os algoritmos, sejam eles do campo da computação, ou até mesmo de áreas como a Matemática ou Artes, pois nem sempre um algoritmo como o da soma, por exemplo, é executado de uma única forma.

Podemos perfeitamente, por exemplo, organizar o algoritmo de uma soma com três parcelas e somar os números das unidades, dezenas e centenas de baixo para cima, ao invés de somar de cima para baixo, ou até mesmo decompor essas parcelas e somar as unidades, dezenas e centenas de forma separada, para depois somar todos os resultados obtidos. Há também outros exemplos que a própria História da Matemática nos revela.

Assim, vale destacar a ideia de que os algoritmos na perspectiva do PC não são apenas procedimentos fechados, que devem ser estritamente seguidos, mas que podem também ser construídos e reconstruídos, de acordo com as necessidades de uma situação.

Outros autores também vêm buscando definir o PC e quais seriam suas habilidades, como é o caso de Weintrop *et al.* (2015), que investigaram uma definição para o PC no contexto da Ciência e da Matemática. Em um trabalho com professores dessas duas áreas, os autores propõem uma taxonomia composta por quatro categorias principais (Ver Figura 3), que podemos representar como: práticas com a manipulação de dados, práticas com modelação e simulação; práticas com a resolução de problemas por meio de métodos e recursos computacionais; práticas com “*systems thinking*”, que dizem respeito a uma forma exclusiva de revolver problemas, que permitem trabalhar com grandes quantidades de informações.

Figura 3 – Taxonomia do PC para a área de Ciências e Matemática



Fonte: Weintrop *et al.* (2015, p.135)

Cada uma dessas categorias possui cinco a sete outras práticas a elas associadas, de modo a contemplar as atividades comumente realizadas em Ciências e Matemática. Essa taxonomia permite compreender melhor o quão o PC está também relacionado a outras áreas do conhecimento e nos auxilia a melhor identificar ações que promovem o seu desenvolvimento.

Todos esses autores, com exceção de Brackmann (2017), estão presentes no cenário internacional de pesquisa sobre o PC e possibilitam um olhar aprofundado sobre as especificidades e relações deste tema com outros campos de pesquisa. Pensando no cenário nacional, também podemos destacar algumas publicações que buscaram uma definição e possíveis abordagens para esta temática considerando as particularidades da educação no Brasil.

Na a BNCC, o termo Pensamento Computacional é mencionado, entretanto, apenas como uma referência à área de Matemática e suas tecnologias. Em um trecho, o documento menciona que os processos matemáticos de resolução de problemas, investigação e modelagem

> [...] são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e para o desenvolvimento do pensamento computacional. (BRASIL, 2018, p. 266).

Não consideramos a relação estabelecida entre esses processos com o desenvolvimento do PC como totalmente incorreta, pois, de fato, há diálogos entre a aprendizagem da Matemática e o desenvolvimento do PC. Entretanto, ela é um tanto equivocada, na medida em que o documento não busca estabelecer relações entre as mais diversas outras áreas do conhecimento e esta forma de pensar que, conforme evidenciado na literatura pela própria Wing (2006), não se limita à ciência da computação, ou ciências exatas.

Além da limitação em relação às áreas do conhecimento, a BNCC também encurrala a área da Matemática aos conteúdos de caráter algébrico. Assim, apesar de mencionar os nomes dos diferentes campos deste componente curricular, a base apenas evidencia que

> [...] a linguagem algorítmica tem pontos em comum com a linguagem algébrica, sobretudo em relação ao conceito de variável. Outra habilidade relativa à álgebra que mantém estreita relação com o pensamento computacional é a identificação de padrões para se estabelecer generalizações, propriedades e algoritmos. (BRASIL, 2020, P. 271).

A linguagem algébrica envolve diferentes tipos de pensamento e representação, fazendo pontes com a Aritmética e a Geometria. Pensar em sua abordagem por meio de recursos e metodologias comuns à ciência da computação deve ir muito mais além da linguagem algorítmica, especialmente porque, conforme evidenciam as diversas habilidades do PC anteriormente mencionadas, há outras práticas e habilidades computacionais que precisam ser estudadas e desenvolvidas no contexto educacional.

Porém, ainda há outra limitação no documento: os recursos e atividades mencionados muito se limitam ao uso das tecnologias digitais e à prática de atividades que vêm sendo criticadas por alguns cientistas da computação. Em determinado trecho é apresentado que

> [...] a BNCC propõe que os estudantes utilizem tecnologias, como calculadoras e planilhas eletrônicas, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Tal valorização possibilita que, ao chegarem aos anos finais, eles possam ser estimulados a desenvolver o pensamento computacional, por meio da interpretação e da elaboração de algoritmos, incluindo aqueles que podem ser representados por fluxogramas. (BRASIL, 2018, p. 528)

Acreditamos que a visão do PC que é proposta na BNCC pode causar alguns problemas, especialmente para os professores que, guiados pelas instruções contidas neste documento, podem ter suas práticas pedagógicas dificultadas pela incompreensão da abrangência desta importante forma de pensar.

Em uma carta aberta[7], a Sociedade Brasileira de Computação (SBC) manifestou sua crítica em relação às limitações propagadas pela BNCC em relação ao do PC. No texto, são

---

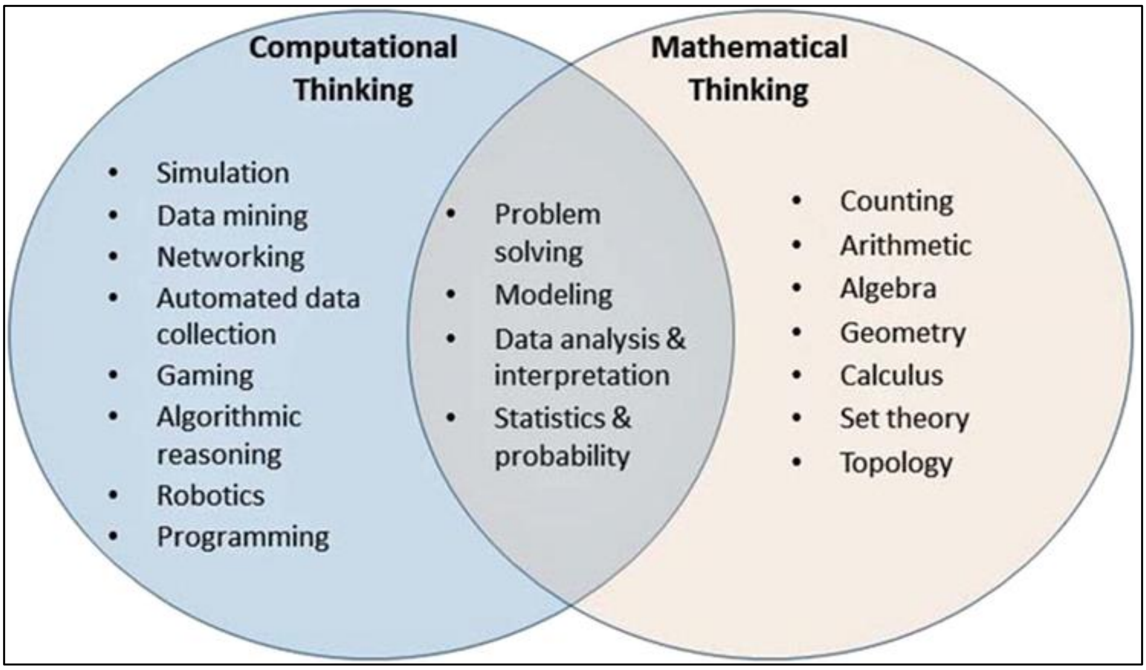
[7] Sociedade Brasileira de Computação. Nota Técnica da Sociedade Brasileira de Computação sobre a BNCC-EF e a BNCC-EM. 2019. Disponível em: https://www.sbc.org.br/institucional-3/cartas-abertas/send/93-cartas-abertas/1197-nota-tecnica-sobre-a-bncc-ensino-medio-e-fundamental. Acessado em: 01 jul. 2020.

apontados alguns equívocos cometidos pelo documento na escolha da linguagem dos fluxogramas, apontando-a como muito específica e inadequada, pois não segue o paradigma da programação estruturada, que é amplamente utilizada no ramo da computação. Assim, iniciar os alunos por meio com o contato com os fluxogramas poderia, de alguma forma, constituir em um fator dificultoso num contato posterior com linguagens de programação mais complexas.

O documento aponta também algumas diferenciações necessárias em relação à compreensão de determinadas habilidades no campo da matemática e da computação, que podem tomar rumos diferentes, como é o caso da abstração. De fato, há diferenciações que precisam ser estudadas e evidenciadas, pois nem todas as habilidades do Pensamento Matemático são contempladas pelo PC, e vice-versa.

Shute, Sun e Asbell-Clarke (2017) apresentam em seu texto um diagrama, adaptado a partir das ideias de Sneider et al (2014), que exibe os conceitos compartilhados entre o Pensamento Matemático e o Computacional, conforme destacado na Figura 4 a seguir:

Figura 4 – Conceitos compartilhados entre os pensamentos computacional e matemático



Fonte: Extraído de Shute, Sun e Asbell-Clarke (2017)

A resolução de problemas, modelagem, análise e interpretação de dados e probabilidade e estatística aparecem no diagrama como conceitos comuns entre as duas formas de pensar, enquanto que outros ou são exclusivos do Pensamento Matemático ou do Computacional.

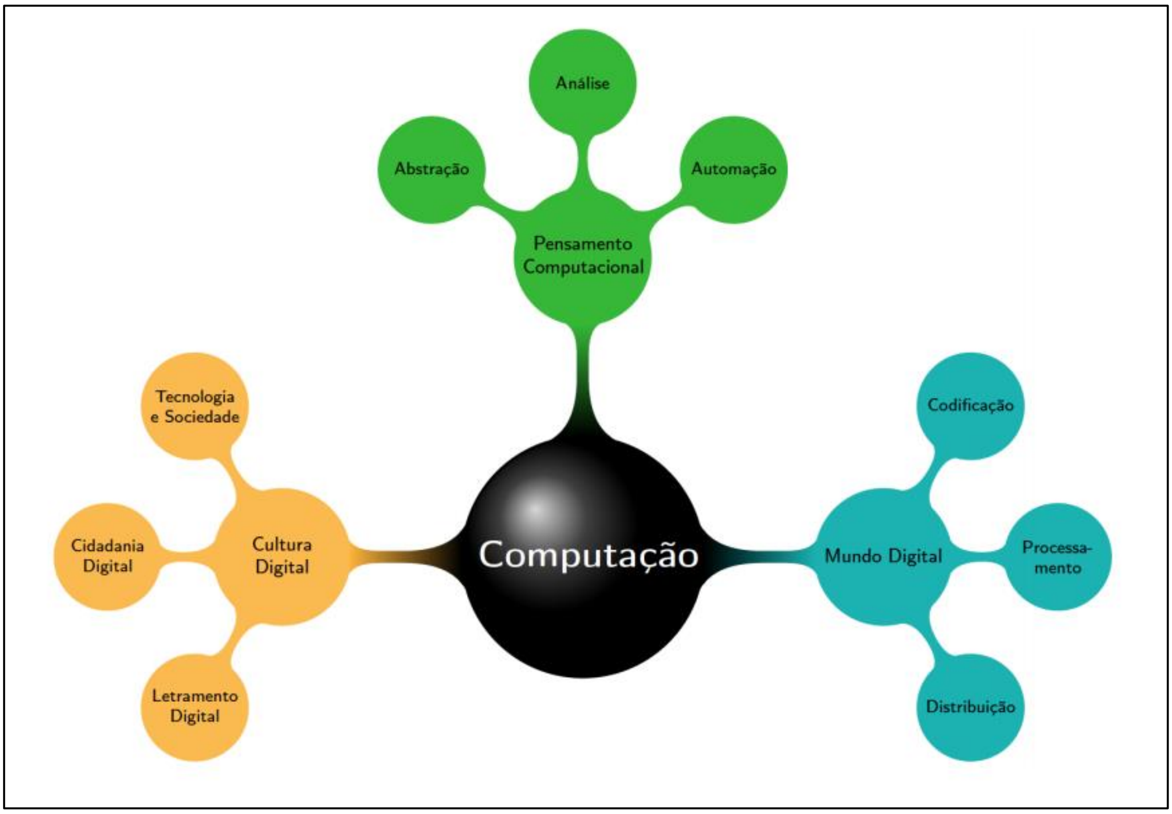
Este diagrama nos permite compreender que apesar da computação ter fortes ligações com a Matemática, há habilidades e conceitos exclusivos de uma área que não correspondem ao de outra. Por esse motivo, há a importância de se investigar e evidenciar quais as conexões que podem ser estabelecidas entre essas áreas, bem como com outros campos do conhecimento.

Além da BNCC, há também outros importantes documentos publicados no cenário nacional, como o Currículo de Referência em Tecnologia e Computação (2018), que foi elaborado pelo Centro de Inovação para a Educação Brasileira (CIEB), e as Diretrizes para ensino de Computação na Educação Básica, publicadas pela SBC (2017).

Esses dois materiais compõem duas referências valiosas quando se fala sobre o PC no cenário nacional e viabilizam a realização de diversos estudos, ao abrirem os olhos de professores, pesquisadores e gestores escolares sobre a abrangência desta forma de pensar.

Iniciando pelas Diretrizes para ensino de Computação na Educação Básica, o PC é definido neste documento como a "[...] capacidade de compreender, definir, modelar, comparar, solucionar, automatizar e analisar problemas (e soluções) de forma metódica e sistemática, através da construção de algoritmos". (SBC, 2017, p. 5). Nessa definição, diferentes habilidades são mencionadas e associadas à resolução de problemas, compondo o eixo Pensamento Computacional que assim como outros dois (Cultura Digital e Mundo Digital), compõem os três eixos para o ensino da computação na Educação Básica, conforme ilustrado na figura a seguir:

Figura 5 – Três eixos para o ensino da computação na Educação Básica



Fonte: Extraído de SBC (2017)

Em cada eixo representado na Figura 5, são tecidas associações com conceitos específicos que expandem nosso olhar sob o impacto da computação na vida das pessoas. Por exemplo, no eixo cultura digital são mencionados os conceitos: tecnologia e sociedade, que refere-se às transformações geradas pela tecnologia digital em nossas formas de estudo, trabalho, entretenimento, ente outros aspectos; Cidadania digital refere-se ao uso responsável da tecnologia por parte das pessoas, tratando temáticas como segurança, comunicação e direito digital; Letramento digital se refere aos multiletramentos, que na perspectiva de Moita, Flor e Viana (2020, p. 747) "está relacionado a dois tipos de multiplicidade presentes nas práticas de letramento na sociedade contemporânea".

Esses três conceitos, que estão associados ao eixo da cultura digital, têm impacto direto na sociedade e, consequentemente em nossas "[...] formas de sentir, pensar, agir, interagir" (MOITA, 2007, p. 21). Além disso, assim como os demais conceitos dos outros eixos representados na Figura 5, eles são capazes de contribuir na cultura, na cidadania, na geração de novos conhecimentos, na melhoria da qualidade de vida, e em outros aspectos.

Voltando nosso olhar ao eixo do Pensamento Computacional, podemos observar que os conceitos e ele associados neste documento (abstração, análise e automação) muito se relacionam às ações desenvolvidas na ciência da computação, apesar de que outras habilidades poderiam ser consideradas, especialmente se pensadas as conexões da mesma com outras áreas do conhecimento.

Neste documento, o PC é caracterizado ainda como "um dos pilares fundamentais do intelecto humano, junto com a leitura, a escrita e a aritmética pois, como estas, serve para descrever, explicar e modelar o universo e seus processos complexos" (SBC, 2017, p. 5). Esta perspectiva nos permite entende-lo ainda mais como uma habilidade fundamental e necessária aos estudantes de uma geração marcada pelo uso e evolução das TDIC.

Em relação ao Currículo de Referência em Tecnologia e Computação (CIEB, 2018), apesar de propor que as etapas da educação básica devem contemplar os mesmos eixos propostos pela SBC (2017), o documento emprega diferentes conceitos para alguns deles, conforme aponta a Figura 6 a seguir:

Figura 6 – Eixos associados ao ensino da computação na Educação básica, segundo o CIEB (2018)

Fonte: Currículo de Referência em Tecnologia e Computação[8]

[8] Disponível em: https://curriculo.cieb.net.br. Acessado em: 01 jul. 2020.

Voltando nosso olhar ao PC, o currículo o caracteriza como um conjunto de quatro habilidades: decomposição, reconhecimento de padrões, abstração e algoritmos, que se assemelham às habilidades propostas em BBC Learning (2015). Apesar das habilidades se diferenciarem, a definição adotada no documento da CIEB se assemelha à da SBC (2017), especialmente por ter se fundamentado nela.

Além destas ideias sobre esses eixos no ensino de computação na educação básica, o currículo da CIEB também disponibiliza, entre outros elementos, sugestões de atividades plugadas e desplugadas para o desenvolvimento do PC e de outras habilidades associadas à computação.

Por se tratar de um documento voltado ao ensino da computação, o currículo da CIEB não contempla em suas atividades, de maneira explícita, suas contribuições para a aprendizagem dos diversos campos da matemática ou de outros componentes curriculares. Dessa forma, é papel dos professores e pesquisadores das diferentes áreas promover o desenvolvimento de pesquisas que, inspiradas nas atividades propostas no currículo, e nas orientações dos diferentes documentos curriculares, proporcionem uma aprendizagem adequada às necessidades dos estudantes da era digital.

Além de todas essas considerações e materiais a respeito do PC, é importante ainda destacar qual a sua importância para os processos de ensino e aprendizagem, especialmente porque muitos trabalhos focam em abordar o PC considerando-o como algo mais associado à ciência da computação, esquecendo-se de suas conexões com outras áreas do conhecimento. (GADANIDIS *et al.*, 2016). Segundo Li et al (2020), o próprio termo “pensamento computacional” pode conduzir à ideia de que esta forma de pensar se relaciona apenas ao uso de computadores por cientistas da computação.

Para Li *et al.* (2020), o PC é uma habilidade de extrema importância não apenas na Ciência da Computação e na Matemática, mas para cada estudante do século XXI. Por esse motivo, há a necessidade de se investigar quais as conexões do PC com as diferentes áreas do conhecimento, como a Matemática, que terá um de seus campos contemplados nesta investigação.

De acordo com Barr e Stephenson (2011), uma das grandes potencialidades do PC é que ele se aplica a qualquer outro tipo de pensamento. A partir dessa ideia, podemos refletir sobre as possíveis conexões deste tipo de pensamento com o raciocínio algébrico, lógico-matemático, geométrico, espacial, linguístico entre outros, que são de extrema importância ao ensino e a aprendizagem de conteúdos de diversas áreas do conhecimento.

Muitas dessas conexões se dão por meio de processos de resolução de problemas. Ressaltamos que esse fato permite o desenvolvimento de trabalhos interdisciplinares e contextualizados com diferentes situações cotidianas, permitindo, por exemplo, abordar a cultura local dos estudantes em sala de aula. Entretanto, para que isso ocorra, é indispensável a formação dos docentes que atuam nas escolas, para que sejam capazes de estimular os alunos a mobilizarem seus diferentes conhecimentos e habilidades ao realizar-se as atividades.

Kale et al (2018, p. 2) apresentam uma perspectiva relevante, quando mencionam que, para integrar o PC em suas práticas pedagógicas, os professores precisam saber mais do que programar. Segundo os autores, é necessário que os profissionais da educação sejam ensinados e que aprendam como o PC pode impulsionar as suas práticas pedagógicas e as aprendizagens de seus alunos. Ressaltamos, no entanto, que essa aprendizagem deve se dar em relação à área do conhecimento em que esse docente atua, de modo que o PC não seja encarado como algo distante, e associado apenas ao campo da ciência da computação.

Ao promover o desenvolvimento do PC em sala de aula, diversos benefícios podem ser alcançados, a curto e longo prazo. Brackmann (2017) destaca em seu trabalho alguns deles: empregos, pois há uma demanda crescente de profissionais qualificados para lidar com conhecimentos relacionados à ciência da computação, entre eles, a programação; compreensão do mundo, pois ao conhecer a lógica de funcionamento dos computadores e sistemas inteligentes, as pessoas passarão a compreender melhor o mundo em que vivem, que é cada vez mais influenciado e dependente dos recursos digitais; transversalidade em diferentes áreas, pois os conhecimento relacionados à computação permitem a formulação e resolução de problemas multidisciplinares; letramento digital, ao utilizar as diferentes tecnologias digitais para criar, se expressar e interagir com o mundo em volta; produtividade, ao saber utilizar as diferentes tecnologias como uma extensão do nosso pensar e agir; inclusão de minorias, na medida em que os trabalhos de computação permitem a participação e colaboração entre pessoas de diferentes raças, culturas, gêneros e características físicas e mentais; diminuição de limitações físicas, pois a computação permite a simulação de diferentes experiências utilizando-se recursos ilimitados, além de conectar as pessoas, independentemente de suas localizações geográficas; trabalhos em equipe, pois a computação permite a realização de atividades de coordenação, cooperação e cocriação, mencionadas por McGonigal (2011).

No entanto, para que benefícios como esses sejam alcançados, alguns desafios precisam ser enfrentados. França e Tedesco (2015) apontam um deles: a necessidade de um currículo que destaque como o PC pode ser inserido nas escolas como um novo componente curricular, ou ainda como ele pode ser abordado nos mais diversos componentes do currículo escolar.

Os autores apresentam ainda outros desafios para uma implementação do estudo do PC nas escolas brasileiras, como: formação pedagógica para que alguns profissionais da ciência da computação possam atuar nas salas de aula; construção de laboratórios de informática e robótica, para trabalhar atividades que estimulem o desenvolvimento do PC; integração do PC a outras atividades escolares de diferentes áreas do conhecimento; formação dos profissionais da educação, sejam eles atuantes ou em processo de formação inicial. (FRANÇA; TESESCO, 2015).

Tendo em vista essas considerações, vale retomar o fato de que o PC não possui definição exata e que ainda não existe um consenso sobre como avaliá-lo. Diante deste fato, as atividades a serem desenvolvidas em nossa pesquisa terão por foco as quatro habilidades apresentadas por BBC Learning (2015), associando-as com o conhecimento geométrico.

Visando também compreender a complexidade temática envolvida nesta busca de conexões entre o PC e a aprendizagem da Geometria, decidimos adotar a Engenharia Didática como metodologia para fundamentar o desenvolvimento de nossa pesquisa, especialmente porque trata-se de um método específico da Educação Matemática que contempla uma série de fases que analisam minuciosamente os fenômenos que precedem a elaboração de atividades e materiais da pesquisa, proporcionando uma adequação ao perfil do público alvo e às suas necessidades educacionais.

Dessa forma, conforme será apresentado no tópico a seguir, na Engenharia Didática, toda a pesquisa é elaborada e conduzida considerando-se as particularidades dos sujeitos envolvidos, permitindo um profundo entendimento dos fenômenos didáticos envolvidos na prática pedagógica desenvolvida. Ao entender esses fenômenos, esperamos também compreender as conexões que podem ser estabelecidas entre o PC e a Geometria.

2.3 ENGENHARIA DIDÁTICA

A Engenharia Didática (ED), origina-se durante o movimento da Didática da Matemática Francesa, iniciado durante estudos realizados no Instituto de Investigação do Ensino de Matemática (IREM), no fim da década de 1960. (VIANA; MOITA, 2019).

Esses estudos visavam, inicialmente, formar professores de Matemática e desenvolver recursos didáticos. Porém, com o avanço dos estudos, diversos conhecimentos passaram a ser descobertos e socializados sobre esse novo movimento, que surgiu em oposição aos modelos clássicos de ensinar Matemática que eram pregados durante outros movimentos, como o Movimento da Matemática Moderna. (FREITAS, 2016).

Segundo Almouloud (2010, p. 14), a Didática da Matemática “[...] é a ciência que tem por objetivo investigar os fatores que influenciam o ensino e a aprendizagem de matemática e o estudo de condições que favorecem a sua aquisição pelos alunos”. Nesse sentido, ela se preocupa em formar e organizar conceitos e teorias que auxiliem a compreender as particularidades do saber matemático.

Entre as diversas teorias desenvolvidas nesse movimento, nos aprofundaremos na Engenharia Didática, que foi introduzido por Guy Brousseau ao discutir as situações de ensino como um modelo de interação específico entre o sujeito e um *milieu* (meio), que pode ser um exercício, um problema, um objeto ou outros recursos. Entretanto, foi Michèle Artigue a responsável por disseminar a ED como uma metodologia de pesquisa. (SOUZA, 2013).

Para Artigue (2015), uma característica essencial da ED, é que, ao contrário de outras práticas da pesquisa educacional, ela não depende da comparação entre grupos de controle e experimental, sua validação é interna e se baseia na comparação entre as análises a priori e a posteriori das situações didáticas desenvolvidas ou observadas.

Essas características são resultantes da fundamentação da ED em outras teorias da Didática da Matemática, como a Teoria das Situações Didáticas (TSD), de Guy Brousseau, podendo a ED ser considerada como um meio para a concretização e avaliação das situações didáticas. Nesta pesquisa, consideraremos apenas as relações da ED com a TSD, especialmente pelo fato delas terem sido abordadas em conjunto nas atividades que serão apresentadas mais adiante.

A TSD tem por foco a interação do sujeito com algum meio, que é mediada por meio de situações estrategicamente planejadas pelo professor, que devem ser capazes de fazê-los tomar ações que os levem a aprender. Para Pais (2002), essa interação entre o professor, o aluno e o saber nos processos de ensino e aprendizagem caracterizam essa teoria.

Esta interação também possibilita o planejamento de práticas pedagógicas que modifiquem as formas pelas quais o aluno tradicionalmente acessa os conhecimentos em sala de aula, exigindo uma mudança de postura por parte do professor, que passará a agir como um mediador do saber. (PAIS, 2002). Assim, o professor deve atuar de forma que os alunos consigam se aproximar do saber a ser apreendido. Para isso, deve promover situações em que eles consigam contextualizar e personalizar o conhecimento. (VIANA; MOITA, 2019).

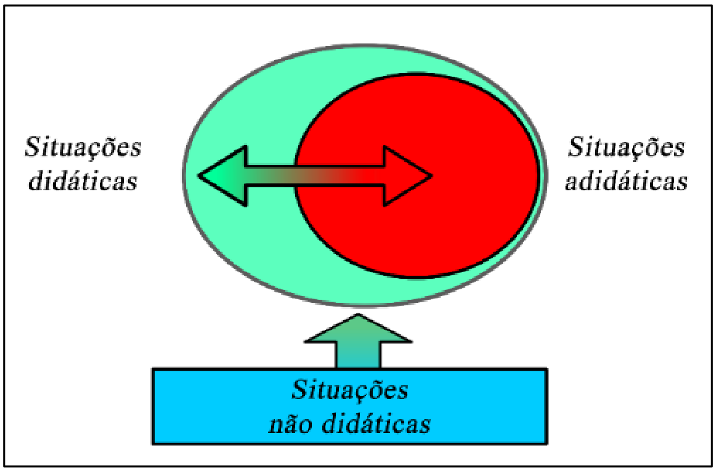
De acordo com Brousseau (1996), existem três tipos de situações: as *didáticas*, *adidáticas* e *não didáticas.* Nas situações didáticas, o professor atua de forma a facilitar e transformar as formas de acesso ao conhecimento pelos alunos, através de um meio estrategicamente escolhido. Dessa forma, quando necessário, ele poderá interferir no processo de construção do conhecimento, auxiliando no desenvolvimento das aprendizagens estudantis.

Já nas situações adidáticas, o professor utiliza a estratégia didática de não interferir no processo de construção de conhecimento por parte do aluno, deixando-o trabalhar de forma independente para que possa construir conhecimentos, que serão formalizados posteriormente.

As situações não didáticas ocorrem quando não há uma intenção didática por parte do professor, que pode escolher um meio sem objetivar a construção de algum tipo de conhecimento pelos alunos.

Para Viana e Moita (2019), essas situações se relacionam entre si, podendo uma situação didática se tornar adidática e vice-versa. Além disso, uma situação não didática pode se tornar didática, na medida em que o professor passa a agir em sala de aula e mediar a aprendizagem dos alunos, porém os autores ressaltam que quando uma situação didática ou adidática se torna não-didática, os objetivos de aprendizagem podem se corromper e o meio utilizado pode se tornar apenas um objeto de distração para ocupar o aluno. A figura a seguir ilustra esse diálogo que pode ocorrer entre os diferentes tipos de situação didática.

Figura 7 – Relações entre os tipos de situação didática



Fonte: Viana e Moita (2019, p.50)

Assim, seguindo a perspectiva da TSD, a ED se preocupa em como a interação do aluno com o meio ocorrerá, subsidiando algumas fases que o professor pode seguir para desenvolver situações didáticas e adidáticas de aprendizagem, e também avaliar a sua metodologia, bem como o desempenho dos alunos antes e depois de sua prática pedagógica. Ou seja, a ED tem por foco a união entre prática pedagógica e investigação.

Para promover esse diálogo, o professor deve realizar um trabalho que, de acordo com os estudiosos da ED, ocorre de maneira similar ao de um engenheiro, que necessita tanto de um sólido conhecimento científico para elaborar seus projetos, como também precisa desenvolver ideias para lidar com problemas práticos, para os quais nem sempre há conhecimentos teóricos ou recursos que guiem suas ações. (ARTIGUE, 1988; MATOS FILHO, 2015).

Em comparação ao trabalho do engenheiro, o do professor também necessita de um apoio em conhecimentos científicos, mas ao mesmo tempo, demanda uma preparação para lidar com situações bem mais complexas do que as que são discutidas pela comunidade acadêmica. Assim, ele precisa, com todo conhecimento e material disponível, lidar com problemas que muitas vezes ultrapassam os limites espaciais da sala de aula e envolvem os diversos contextos socioculturais em que ele e os alunos estão inseridos.

Para lidar com isso, o professor deve fazer algumas escolhas, que para Artigue (2002) podem ser classificadas em macrodidáticas e microdidáticas. As escolhas macrodidáticas estão relacionadas a escolhas globais que orientam a prática pedagógica do professor, estando mais relacionadas à uma visão geral do planejamento feito por ele.

Já as escolhas microdidáticas estão relacionadas a escolhas locais, realizadas a partir do conhecimento que o professor tem sobre o contexto no qual a sua ED se aplicará. Segundo Artigue (2002) é nesse nível onde a TSD se aplica. Assim, aspectos relacionados ao ambiente da sala de aula, ou aos recursos utilizados, como também a postura adotada pelo professor em cada sala de aula, estão relacionadas a escolhas microdidáticas.

Essas escolhas caracterizam cada tipo de ED elaborada ou adaptada por um professor. Sua aplicação enquanto método científico deve contemplar algumas fases, destacadas por autores como Artigue (1988), Almouloud (2008), Berenguer (2010) e Matos Filho (2015). Vale ressaltar que essas fases podem ser, também, alteradas ou complementadas de acordo com os interesses didático-pedagógicos do professor.

A primeira fase de uma ED é chamada *análises preliminares*, na qual são estudadas as principais causas do problema a ser estudado, contemplando seus aspectos epistemológicos, cognitivos e didáticos.

Dessa forma, na dimensão epistemológica, são investigados aspectos relacionados ao próprio conteúdo, ou seja, o professor deve revisitá-lo, de forma a retomar e exercitar seus saberes. É investigada toda a história por trás da evolução do saber em foco, assim como a evolução de seu ensino e aprendizagem ao longo dos anos.

Na dimensão didática são investigadas características do sistema de ensino no qual os sujeitos estão inseridos, assim como do ensino e aprendizagem do conteúdo que será ensinado. Por exemplo, são analisados quais recursos vêm sendo utilizados para ensinar o conteúdo foco da ED a ser aplicada, os recursos que a escola dispõe e as formas pelas quais vêm sendo utilizados na Matemática ou em outros componentes curriculares.

Podem ser analisados, inclusive, os livros didáticos utilizados com os estudantes que serão o público da pesquisa, a fim de melhor compreender como os conhecimentos prévios dos alunos vêm sendo construídos, como o conhecimento a ser contemplado pela ED seria trabalhado por meio deste recurso, e como poderia ser melhor tratado, ou ainda, quais meios lhe proporcionariam uma melhor exploração.

Já na dimensão cognitiva, são investigados aspectos relacionados à construção do conhecimento por parte dos alunos. Segundo Berenguer (2010, p.12), para melhor contemplar tal dimensão durante as análises preliminares de uma ED é preciso a realização de investigações empíricas, que auxiliem “a destacar a formação de ideias das pessoas envolvidas e compreender a realidade em torno da experiência a ser executada”.

Dessa forma, são relevantes questões que levem o professor a melhor compreender a realidade dos estudantes, suas dificuldades, comportamento, conhecimentos prévios, entre outros aspectos. É nesta etapa onde são realizadas as observações em sala de aula, a fim perceber as necessidades dos alunos, sendo relevante também a aplicação de atividades e realização de ações que permitam investigar com profundidade o contexto que a turma representa, ou ainda, os contextos que ali se fazem presentes.

Na segunda fase, chamada concepção e análise a priori, é objetivada a descrição e predição de como as variáveis didáticas escolhidas poderão influenciar nas ações e comportamentos dos estudantes, sendo nesta fase onde são elaboradas as atividades que constituirão a sequência didática.

É nesta fase onde o professor deve realizar as escolhas macrodidáticas e microdidáticas que, a depender do que foi observado na fase de análise preliminar, podem ser determinantes na elaboração de uma ED capaz de conduzir os alunos ao alcance dos objetivos inicialmente determinados pelo professor.

Nessa fase, é de extrema importância que o meio pelo qual os alunos desenvolverão suas aprendizagens seja estrategicamente escolhido e analisado, para que seu uso seja planejado de modo a conduzir os alunos à aquisição de conhecimentos. Assim, o professor deve prever os comportamentos que podem se surgir durante a aula e, também, como ele poderá agir diante de cada um deles.

Por exemplo, em uma atividade que faça o uso de determinado aplicativo via internet em um laboratório de informática, alguns alunos podem optar por acessar outros materiais da *web*, ao invés de realizar a ação desejada. Além de prever esse problema, professor deve ser capaz de resolver ou encontrar alternativas para obstáculos como: mau funcionamento do aplicativo ou equipamentos da escola; desmotivação dos alunos; agitação da turma; horários disponíveis; entre outros.

A partir de tudo isso, devem ser construídas as hipóteses da ED, que serão posteriormente confrontadas com os dados obtidos na fase seguinte, a experimentação.

Na fase de experimentação, são colocadas em prática as situações didáticas planejadas pelo professor. Durante sua execução, os dados devem ser coletados da melhor maneira possível, de modo que na realização da análise a posteriori, seja possível compará-los com os as hipóteses e demais dados coletados na análise a priori.

Dessa forma, deve ser pensado em como serão coletados dados por meio dos materiais com que os alunos irão interagir, de modo a possibilitar a melhor compreensão possível do fenômeno didático que está a ocorrer durante as aulas. Não se deve dispensar o uso de questionários ou entrevistas, sejam elas individuais ou em pequenos grupos.

Na quarta e última fase, chamada análise a posteriori e validação, é feito um confronto entre as observações realizadas na análise preliminar, hipóteses levantadas na análise a priori e dados coletados durante a experimentação, verificando-se através das produções dos estudantes de que forma foi possível contribuir sobre o ensino e a aprendizagem do saber em jogo.

Para Almouloud (2008, p.68) essa fase trata de “(...) uma análise feita à luz da análise a priori, dos fundamentos teóricos, das hipóteses e da problemática da pesquisa”. Assim, são reunidas e confrontadas todas as informações coletadas ao longo da ED, sejam elas dentro ou fora da sala de aula, para validar a sua eficácia.

Diante dessas caracterizações que foram feitas sobre a ED, recorremos à fala de Artigue e Perrin-Glorian (1991), quando asseveram que há uma polissemia de significados atribuídos às práticas que podem ser desenvolvidas a partir dela. Ora a ED é compreendida enquanto ferramenta de pesquisa, ora como meio para o aperfeiçoamento e concretização de práticas pedagógicas em sala de aula.

Essa dualidade consiste em um problema referente às práticas desenvolvidas à luz ED porque elas são desenvolvidas considerando-se as variáveis didáticas associadas à determinado ambiente de pesquisa e essas variáveis não condizem, necessariamente, às de outras realidades, o que pode comprometer a sua reprodutibilidade. Dessa forma, uma ED desenvolvida com objetivos de pesquisa pode não apresentar procedimentos satisfatórios para outras situações cujos objetivos não sejam, necessariamente, acadêmicos, pois há um certo distanciamento entre a situação experimental de uma pesquisa e a ação pedagógica de um professor em sala de aula. Sendo assim, a capacidade de reaplicação de uma ED limita-se às condições nas quais ela foi desenvolvida, necessitando, portanto, das devidas adaptações para outros ambientes em que se deseje aplica-la. (ARTIGUE; PERRIN-GLORIAN, 1991).

Viabilizar espaços para a realização dessas adaptações em uma ED que já foi desenvolvida e aplicada em determinado cenário educacional é, sem dúvidas, um dos grandes desafios deste método. Nesse sentido, a decisão de utilizar a ED em uma pesquisa deve ser pensada sabiamente, pois o trabalho pedagógico guiado pela ED requer, acima de tudo, reflexões. Suas possibilidades podem ser um fator de sucesso para determinada investigação, porém, para outras, uma pedra no caminho.

Em nossa pesquisa, pensamos estrategicamente em utilizar a ED devido sua completude, quando considerados nossos interesses de investigação. No entanto, também foram traçadas rotas alternativas às suas recomendações, em busca da socialização dos métodos e produções deste estudo.

Na próxima seção, apresentamos o estado da arte sobre as relações entre o PC e a Geometria, realizado a partir da leitura de artigos da literatura internacional.

3 ESTADO DA ARTE

Neste item, apresentaremos algumas evidências pesquisadas na literatura estrangeira acerca das conexões que podem ser estabelecidas entre o ensino e a aprendizagem da Geometria e o Pensamento Computacional. Para realizar essa etapa da pesquisa, conduzimos uma Revisão Sistemática de Literatura (RSL), com o intuito de construir um aporte teórico que auxiliasse no aprofundamento e no direcionamento das ações realizadas nesta pesquisa.

Para detalhar a definição e formas de realização de uma RSL, tomaremos por base os pressupostos teóricos e metodológicos de autores como Kitchenham et al (2007) e Galvão, Pansani e Harrad (2015), que discutem algumas indicações para a execução deste tipo de trabalho nas áreas de Engenharia de Software e Saúde, respectivamente. Entretanto, acredita-se que algumas dessas recomendações podem ser aplicadas a outros campos de pesquisa, como é o caso da Educação Matemática.

Para Kitchenham et al (2007), uma RSL constitui-se em uma forma de identificar, avaliar e interpretar as pesquisas que apresentam relevância para uma questão de pesquisa, tópico ou fenômeno de interesse. Por meio de uma série de passos que podem variar em quantidade e formas de execução, o autor de uma RSL busca em diversos meios de divulgação científica, pesquisas que podem trazer evidencias e permitir um aprofundamento sobre algum tema de seu interesse.

Em outras palavras, a RSL é definida como "[...] uma revisão de uma pergunta formulada de forma clara, que utiliza métodos sistemáticos e explícitos para identificar, selecionar e avaliar criticamente pesquisas relevantes, e coletar e analisar dados desses estudos que são incluídos na revisão". (GALVÃO; PANSANI; HARRAD, 2015, p. 335).

Muitas pesquisas começam com uma revisão de literatura, porém nem todas contemplam procedimentos bem determinados ou se baseiam em algum método científico que guie sua realização. A RSL vai um passo além das revisões de literatura, uma vez que utiliza métodos planejados para reunir e avaliar as evidências referentes a um tópico em estudo (KITCHENHAM *et al.*, 2007).

Corroborando com esta perspectiva, Galvão, Pansani e Harrad (2015, p.335) apontam que "Como em toda pesquisa, o valor da revisão sistemática depende do que foi feito, do que foi descoberto, e da clareza do relato". Dessa forma, para que uma pesquisa realizada no formato de uma RSL tenha relevância, é necessário que seja planejada de forma criteriosa, de acordo com os interesses de seu autor.

Pesando nesse planejamento, Kitchenham *et al.* (2007), propõe que uma RSL deve ser elaborada de modo a contemplar três fases distintas: planejamento, condução e relato da revisão.

Na fase de planejamento, o primeiro ponto a ser considerado é a identificação da necessidade da realização da RSL, sua possível importância e se já existem outras semelhantes e atualizadas sobre o tema a ser investigado. Além disso, também devem ser elaboradas e elencadas as perguntas da pesquisa, que de acordo com Kitchenham *et al.* (2007) se tratam de um dos tópicos mais importantes desta fase, pois as perguntas direcionarão toda a metodologia para a realização da RSL.

Para a elaboração dessas questões, de modo a facilitar o desenvolvimento metodológico da RSL, Petticrew e Roberts (2006) propõem um modelo, cuja sigla em inglês é PICOC, que significa população, intervenção, comparação, resultados e contexto. Assim, utilizando o PICOC, diversos aspectos a serem considerados na pesquisa são elencados, como o tipo de população que participaram das pesquisas a serem investigadas e os tipos de intervenções utilizadas.

Além das questões mencionadas, para se iniciar uma RSL é extremamente recomendável o uso de um protocolo de pesquisa que, entre outros benefícios, auxilia a reduzir a possibilidade de vieses na pesquisa, ou seja, evita que ela se torne guiada pelas expectativas do pesquisador e não pelas evidências. (KITCHENHAM *et al.*, 2007).

Para que seja elaborado um protocolo de pesquisa que contribua efetivamente na condução de uma RSL, é necessário que contemple itens como: justificativa da pesquisa; questões; estratégias que serão usadas para encontrar estudos primários, como as bases a serem consultadas e a *string* de busca; critérios e procedimentos para a seleção dos estudos; processos ou checklists para análise da qualidade dos estudos selecionados; estratégias para extração de dados; síntese e discussão dos dados que foram coletados. Além disso, o protocolo deve ser elaborado por todos os autores que participarão da condução da RSL, para que entendam claramente como este processo ocorrerá. (KITCHENHAM *et al.*, 2007).

É importante destacar que a utilização de diferentes bases de dados pode enriquecer grandemente a qualidade de uma RSL, entretanto, podem retornar estudos repetidos, ou seja, que estão indexados em mais de uma das bases utilizadas. Para contornar esta problemática, o uso de ferramentas que auxiliam o gerenciamento de referências, ou ainda, a realização de uma RSL, como a Start[9] ou Parsifal[10], podem auxiliar na remoção automática de estudos duplicados, entre outras funções.

Na fase de condução da RSL, é feita a leitura de alguns elementos dos textos selecionados, para que sejam incluídos ou não na RSL. Para isso, os critérios de inclusão e exclusão servirão como guias, orientando, por exemplo, a inclusão de artigos publicados em determinado idioma, ou que foram publicados em determinado intervalo de tempo, relevante para a temática em estudo.

Após isto, os artigos incluídos são submetidos a uma análise de qualidade. Entretanto, esta análise nem sempre é facilmente realizada, uma vez que de acordo com Kitchenham *et al.* (2007), ainda não há uma definição para ela e também não há uma única forma de realiza-la. Por meio de uma análise de qualidade podemos, entre outras vantagens, avaliar um texto em seus aspectos metodológicos, ou seja, se os objetivos do estudo foram alcançados, se as questões levantadas foram respondidas e se o método utilizado e os resultados apresentados são suficientes para contemplar os objetivos propostos.

Artigos com um sólido referencial teórico e com conteúdos e métodos devidamente esclarecidos, certamente podem contribuir na busca por respostas aos questionamentos levantados nesse processo de revisão sistemática, por esse motivo, a importância da realização e uma análise de qualidade.

Ainda nesta fase de condução, é preciso refletir sobre as possibilidades de vieses na RSL, uma vez que o resultado do estudo pode ser influenciado por uma série de fatores causando impactos como, por exemplo, a ocultação dos resultados negativos relacionados ao tema em questão. Entre esses fatores, destacamos: o tipo de material a ser investigado; a base de dados escolhida para pesquisar os artigos; a *string* de busca; a própria opinião pessoal do autor da RSL sobre determinado tema; entre outros vieses.

Assim, é de extrema importância que os autores tomem medidas, como a participação dos mesmos na seleção de todos os textos, de modo que, quando haja discordâncias, todos possam dialogar e chegar em um consenso sobre utilizar ou não determinado trabalho como parte da RSL.

Por último, na fase de relatar a RSL, é utilizado um formulário de extração de dados previamente elaborado para registrar-se as informações obtidas com a leitura integral dos textos. Neste formulário devem, de acordo com o que é apresentado por Kitchenham *et al.* (2007), ser solicitadas informações como o ano da publicação, título, pesquisador que extraiu

---

[9] Disponível em: http://lapes.dc.ufscar.br/tools/start_tool. Acessado em: 05 jul. 2020.
[10] Disponível em: https://parsif.al. Acessado em: 05 jul. 2020.

os dados, nome da base de dados de onde foi retirado, seguido de pontos que auxiliem a atingir o objetivo da pesquisa e responder aos seus questionamentos.

Com todos os dados que foram extraídos, é feita então uma síntese dos mesmos e tudo é registrado de forma quantitativa (gráficos, tabelas, entre outras formas de representação) ou qualitativa, com descrições gerais do que foi encontrado a respeito de cada tópico do formulário.

Seguindo a estrutura proposta por Kitchenham *et al.* (2007), realizamos uma RSL sobre as temáticas do PC e da aprendizagem da Geometria. Assim, a investigação foi organizada em três fases, que tiveram sua execução facilitada pela ferramenta Parsifal. Optamos pela utilização deste recurso por se tratar de um ambiente online, que possibilitou: o acesso aos dados a qualquer momento; a realização de um trabalho colaborativo por parte dos autores; uma utilização mais intuitiva em relação às outras ferramentas estudadas.

Nos tópicos a seguir, apresentamos o planejamento, condução, análise das evidências coletadas e nossa perspectiva a respeito desta RSL, que foi realizada no período de fevereiro a abril de 2019. Ressaltamos de antemão que por se caracterizar como uma das primeiras etapas concretizadas nesta pesquisa, esta RSL não foi atualizada no decorrer da investigação. No entanto, esta ação será feita em momentos posteriores à mesma, sendo publicada em meios científicos que viabilizem sua visibilidade e impacto acadêmico.

3.1 PLANEJAMENTO E CONDUÇÃO DA RSL

Inicialmente, buscamos determinar o objetivo da RSL: Investigar como o estudo da Geometria vem sendo associado ao desenvolvimento do Pensamento Computacional. A partir dele, elaboramos as seguintes questões que nortearam a realização da pesquisa:

QP. 01 - O que vem sendo discutido a respeito da relação da Geometria com o PC?

QP. 02 - Quais os recursos utilizados para ensinar Geometria e desenvolver o PC?

QP. 03 - Quais as vantagens e as limitações encontradas ao se ensinar Geometria e promover o desenvolvimento do PC?

Logo depois de elaborar esses questionamentos, definimos os critérios de inclusão e exclusão para a seleção de artigos, apresentados no Quadro 1 a seguir.

Quadro 1 – Critérios de inclusão e exclusão utilizados

Critérios de inclusão
Artigos que discutam sobre o desenvolvimento do pensamento computacional por meio da aprendizagem da Geometria.
Artigos que discutam sobre o ensino e a aprendizagem da Geometria por meio do desenvolvimento do pensamento computacional.
Critérios de exclusão
Estudos publicados antes de 2013
Estudos sem texto completo disponível
Textos que não são artigos completos
Outras revisões ou mapeamentos sistemáticos de literatura
Textos duplicados

Fonte: Dados da pesquisa

É importante destacar que a exclusão dos artigos publicados antes de 2013 foi adotada como uma forma de coletar estudos recentes a respeito da temática, publicados há cinco anos, e também considerando que as pesquisas sobre o PC se popularizaram após a publicação de Wing (2006).

Após definir esses critérios, definimos a *string* de busca, que foi pensada de modo a ser a mais genérica possível, para que a maior quantidade de estudos fosse retornada entre as cinco bases de dados escolhidas:

("Computational Thinking" AND "Geometry")

Para realizar a busca, escolhemos cinco bases de dados internacionais, que apresentam relevância nas áreas de informática e educação:

- ACM Digital Library (http://portal.acm.org)
- IEEE Digital Library (http://ieeexplore.ieee.org)
- Science@Direct (http://www.sciencedirect.com)
- Scopus (http://www.scopus.com)
- Springer Link (http://link.springer.com)

Optamos por realizar a RSL em bases de dados internacional pelo fato de não termos encontrado em nossas buscas na literatura nacional artigos científicos que realizassem associações claras entre a aprendizagem da Geometria e o desenvolvimento do PC. Alguns indicavam que determinados conteúdos, como ângulos ou perímetro de figuras geométricas planas estavam presentes na utilização de plataformas específicas, como o Scratch[11], porém seu foco das análises e discussões tecidas não era, de fato, a aprendizagem da Geometria.

Após traçar este planejamento, partimos para a condução da RSL, etapa na qual realizamos inicialmente uma busca manual em cada uma das bases de dados anteriormente citadas, para as quais tivemos que adaptar a string de busca, obedecendo as suas regras e também usando, quando necessário, a busca avançada, que permitiu a combinação das palavras-chave: *Computational Thinking* e *Geometry*.

Os resultados apresentados em algumas das bases de dados foram exportados em arquivos no formato BibTeX, que eram necessários para a importação de dados ao Parsifal, ferramenta utilizada no gerenciamento e condução de nossa RSL. Entretanto, algumas das bases de dados não permitiam exportações nesses formatos. Utilizamos então o *software* Zotero[12] para organizar os dados dos resultados das buscas nessas bases e gerar arquivos BibTeX que foram então exportados ao Parsifal.

Após todos os resultados das pesquisas serem devidamente importados, verificamos que obtivemos um total de 106 artigos. Utilizando a ferramenta de identificação de textos duplicados do Parsifal, encontramos 4 deles, que foram excluídos da seleção, restando assim 102 textos que foram ordenamos por ano, permitindo uma fácil exclusão dos que foram publicados antes de 2013. Removemos então 31 textos e os demais 67 seguiram para a leitura de seus títulos, *abstracts* e palavras-chave.

Dos 67 artigos, a grande maioria foi excluída por não atender aos demais critérios de inclusão e exclusão, sendo que quando haviam dúvidas sobre a sua utilidade ou não para a pesquisa, realizamos uma leitura completa de seu conteúdo. Com isso, apenas 13 artigos seguiram para a análise de qualidade.

Para realizar a análise de qualidade, tomamos por base os critérios apresentados no por Dybå e Dingsøyr (2008), resultando nas perguntas presentes no Quadro 2 a seguir:

Quadro 2 – Perguntas utilizadas para avaliar a qualidade dos estudos selecionados

Critério	**Pontuação**	
O trabalho é baseado em pesquisa empírica?	Sim (1)	Não (0)
Os objetivos da pesquisa estão claros?	Sim (1)	Não (0)
Há uma descrição adequada do contexto no qual a	Sim (1)	Não (0)

[11] Disponível em: https://scratch.mit.edu. Acessado em: 09 jul. 2020.
[12] Software gerenciador de referências. Disponível em: https://www.zotero.org. Acessado em: 05 jul. 2020.

pesquisa foi desenvolvida?		
O desenho da pesquisa é apropriado para atingir seus objetivos?	Sim (1)	Não (0)
Há um grupo de controle para comparar os resultados?	Sim (1)	Não (0)
Os dados foram coletados de modo a responder as perguntas da pesquisa?	Sim (1)	Não (0)
Há uma apresentação clara dos resultados?	Sim (1)	Não (0)
A análise de dados é suficientemente rigorosa?	Sim (1)	Não (0)
A pesquisa apresenta relevância em relação ao ensino e a aprendizagem de Geometria?	Sim (1)	Não (0)

Fonte: Elaborado pelos autores, seguindo as diretrizes de Dybå e Dingsøyr (2008)

Ao longo da análise, os artigos recebiam um ponto caso atendessem à pergunta e zero se não atendesse. Desse modo, os artigos que atingissem pontuações maiores ou iguais a seis e que atendessem à última pergunta foram selecionados para a extração de dados. Fizemos então a leitura completa de todos os treze textos, e dois deles foram excluídos por não atenderem aos critérios de qualidade, restando assim os onze artigos apontados no Quadro 3 a seguir:

Quadro 3 – Relação dos artigos selecionados para a RSL

Título	**Autoria**
Computational what? Relating computational thinking to teaching	Kale *et al.*, 2018
Computational thinking, grade 1 students and the binomial theorem	Gadanidis *et al.*, 2016
Bridging primary programming and mathematics: some findings of design research in England	Bentom *et al.*, 2017
Cultivating computational thinking practices and mathematical habits of mind in lattice land	Pei, Weintrop e Wilensky, 2018
Fractal geometry: enhancing computational thinking with MIT scratch	Vinayakumar, Soman e Menon, 2018
Mobile technologies in the service of students' learning of mathematics: the example of game application A.L.E.X. in the context of a primary school in Cyprus	Kyriakides, Meletiou-Mavrotheris e Prodromou, 2016
Powering knowledge versus pouring facts	Kenderov, 2018

Programming approaches to computational thinking: integrating turtle geometry, dynamic manipulation and 3d space	Kynigos e Grizioti, 2018
Programming driven 3d modeling on the web	Yeh, 2017
The art of the Wunderlich cube and the development of spatial abilities	Winter, Love e Corritore, 2018
The dynamic geometrisation of computer programming	Sinclair e Patterson, 2018

Fonte: Dados da pesquisa

3.2 ANÁLISE DAS EVIDÊNCIAS COLETADAS

Esta fase consiste na análise de todos os dados gerados a partir da leitura dos textos e preenchimento do formulário para extração de dados, que continha as seguintes questões a serem respondidas pelos autores da RSL:

- O que vem sendo discutido a respeito da relação da Geometria com o Pensamento Computacional?
- Quais os recursos que vêm sendo utilizados para o ensino e a aprendizagem da Geometria associado ao desenvolvimento do Pensamento Computacional?
- Que metodologias vêm sendo utilizadas para ensinar Geometria e promover as habilidades do pensamento computacional?
- Quais as vantagens de ensinar Geometria por meio de atividades que estimulam o desenvolvimento do Pensamento Computacional?
- Quais as limitações do ensino de Geometria por meio de atividades que promovem o desenvolvimento do Pensamento Computacional?

A respeito do primeiro item do formulário: *O que vem sendo discutido a respeito da relação da Geometria com o Pensamento Computacional?*, pudemos constatar algumas associações entre este campo da Matemática e esta forma de pensar, que serão destacadas nos parágrafos a seguir.

Partindo do texto de Gadanidis *et al.* (2016), é possível verificar que o PC proporciona novas formas de explorar, representar e enxergar a Geometria. Segundo os autores, há uma conexão natural e histórica entre o PC e a Matemática. Ela reside nas formas em que agimos para lidar com problemas e cálculos matemáticos, que se aproximam das formas pelas quais os cientistas da computação pensam ao resolver problemas de sua área.

Este pensamento vai ao encontro da definição operacional do PC, proposta em CSTA/ISTE (2011), quando é mencionado que o PC contempla ações que muito se assemelham aos métodos utilizados na matemática, como a formulação e resolução de problemas com ou sem o uso de computadores e também a identificação, análise e implementação de possíveis soluções para um problema.

Apesar da resolução de problemas mostrar-se fortemente conectada ao pensamento matemático, ela não é o único foco do currículo da matemática escolar. Por essa razão, há a necessidade de mais pesquisas e ações que investiguem conexões entre o desenvolvimento do PC e os diferentes conteúdos curriculares abordados neste e em outros componentes da escola básica, proporcionando assim aprendizagens transdisciplinares. (KALE *et al.*, 2018; PEI, WEINTROP; WILENSKY, 2018).

Um exemplo de trabalho que contempla essa ideia é o de Carvalho (2018), que observando os problemas de sinalização em um cruzamento próximo à escola em que atuava, e trazendo-os para discussão em sala de aula, conseguiu ensinar conteúdos matemáticos e promover o desenvolvimento do PC. O autor destaca que nesse cruzamento, diversos acidentes de trânsito já haviam ocorrido e, como uma forma de levar seus alunos a refletirem sobre como esse problema poderia ser solucionado, propôs a eles que construíssem a representação de um semáforo funcional para aquele cruzamento, utilizando a plataforma Scratch.

Os alunos tiveram que fazer essas representações de modo que os semáforos se comunicassem, ou tivessem uma perfeita sincronização para, por exemplo, um mostrar a luz verde quando o outro apagar a amarela para mostrar a vermelha. Isso requisitou deles a aprendizagem da lógica de programação do Scratch e, também, sobre os diversos modelos de semáforos e suas formas de funcionamento.

O autor aponta que nessa atividade, em paralelo às construções e discussões realizadas entre professor e alunos, e alunos entre si, diversos conteúdos matemáticos foram exercitados de uma maneira despercebida, sejam eles relacionados a ângulos, noções de lateralidade, unidades de medida de tempo e distância, entre outros, além de alguns fundamentos da lógica matemática, como a ideia de condicional, presente na lógica de programação utilizada no Scratch.

Além disso, vale destacar que a atividade desenvolvida por Carvalho (2018) contemplou aspectos sociais da educação, na medida em que os alunos puderam refletir sobre um problema que afeta as redondezas de sua escola e, também, como solucioná-lo. Esse aspecto da educação matemática revela o poder transformador da educação em geral, pois além de permitir a aprendizagem dos conteúdos clássicos, previstos nos currículos, possibilita também que os alunos se construam enquanto cidadãos conscientes e capazes de pensar criticamente sobre os problemas do mundo em que vivem.

Perspectiva semelhante é defendida por Winter, Love e Corritore (2018), que destacam que processos aparentemente distintos, como codificação e arte estão muito mais entrelaçados do que imaginamos. Assim, ao alterar ou acrescentar parâmetros em um código que gera determinada figura, podemos obter outra completamente distinta e podemos perceber que, conforme determinado parâmetro é alterado, o desenho segue determinado padrão, que pode ser quantificado ou descrito por meio de expressões matemáticas. Isto permite então uma manipulação rápida e precisa dessa figura, que nem sempre é facilmente reproduzida usando-se as mãos e materiais analógicos, revelando uma nova forma de se produzir arte e conhecimentos por meio da tecnologia.

Se por um lado, temos a lógica de programação como forma de se estudar Geometria, por outro lado, também há a possibilidade de por meio da Geometria se aprender a lógica de programação. Sinclair e Patterson (2018) apresentam em seu trabalho a ideia de uma lógica de programação visual, apreendida a partir da manipulação de polígonos em um *software* capaz de criar animações que podem representar comandos computacionais. Para representar comandos como "espere n segundos", por exemplo, os estudantes participantes das atividades aplicadas por eles usaram uma estrutura com círculo que percorre uma rampa por "n" segundos.

Indo além da lógica de programação Yeh (2017) defende que a interação com um *software* de geometria dinâmica permite o desenvolvimento de habilidades relacionadas à visualização, orientação e identificação de relações entre objetos, que se associam aos quatro pilares do pensamento computacional identificados no trabalho de Brackmann (2017).

Nota-se então que há uma associação bem maior entre Pensamento Computacional e Geometria, que não se limita apenas ao uso de linguagens de programação específicas para manipular-se objetos. Isto porque, conforme aponta Wing (2006), pensar computacionalmente significa mais do que ser capaz de programar um aplicativo para computador, trata-se de uma atividade que exige múltiplos níveis de abstração para utilizar-se computadores e sua lógica de funcionamento de uma forma estratégica para representar e solucionar um problema.

Além do que já foi apresentado, o PC pode ainda ser associado a muitos outros tipos de pensamento, conforme apontam Barr e Stephenson (2011). Por esse motivo, para desenvolvê-lo, são necessários trabalhos que ultrapassem a proposição e resolução de problemas com auxílio da linguagem de programação e que se apliquem aos diversos tipos de pensamento que os alunos desenvolvem ou deveriam desenvolver na escola.

Ainda sobre as relações entre o PC e a Geometria, alguns dos autores destacam que há uma lacuna na formação dos professores em geral, que precisam reconhecer a importância e relação do PC com a Geometria antes de trabalhar com ambos em sala de aula. Os cursos formativos geralmente focam em ensinar o que é o PC de uma forma superficial, pois não discutem como integrá-lo nos currículos das disciplinas e como vivenciá-lo em sala de aula. (KALE *et al.*, 2018; BENTOM *et al.*, 2017; VINAYAKUMAR, SOMAN; MENON, 2018).

Com a segunda pergunta: *Quais os recursos que vêm sendo utilizados para o ensino e a aprendizagem da Geometria associado ao desenvolvimento do Pensamento Computacional?,* foi possível identificar e conhecer um pouco sobre os recursos que foram investigados ou aplicados em sala de aula pelos autores que participaram desta RSL, entre eles: Scratch; Robô Programável Dash; Lattice Land; *Game* A.L.E.X; GeoGebra; VIVA *Mathematic with computer*; Competições *Theme of the month*; MALT2 - *machine lab turtle sphere*; VRMATH2; LDraw; *Wunderlich Cube*; *Geometer's Sketchpad*.

No Apêndice A apresentamos uma descrição de cada um desses recursos, que permitem evidenciar ainda mais a ideia de que PC não está associado apenas à lógica de programação, mas pode ser relacionado a diversas outras atividades e conhecimentos, como por exemplo, o *Lattice Land,* utilizado por Pei, Weintrop e Wilensky (2018) e também o sistema de coordenadas utilizado para se desenhar a *wunderlich curve*[13], utilizado por Winter, Love e Corritore (2018).

Acreditamos que práticas como essas possibilitam um amplo panorama de associações entre o PC e a Geometria, permitindo a compreensão e o suporte às novas demandas de aprendizagem dos alunos que vivenciam a era digital. Possibilitam também o desenvolvimento de práticas pedagógicas que utilizem recursos didáticos fora do padrão que é comumente aplicado em abordagens enraizadas nas metodologias tradicionais de ensino. (MOITA; VIANA, 2017).

Quanto a pergunta: "*Que metodologias vêm sendo utilizadas para ensinar Geometria e promover as habilidades do pensamento computacional?",* apesar de nem todos os autores

---

[13] A *Wunderlich Curve*, trata-se de uma coleção de curvas, geradas a partir da rotação de um cubo sob um plano. Cada rotação feita com o cubo, gera um novo contato com o plano, resultando em uma rotação, reflexão ou translação da curva presente na face anterior. Assim, é possível, por exemplo, traçar-se uma curva contínua, contendo nxn vezes as faces do cubo. (WINTER, LOVE E CORRITORE, 2018).

apontarem para o uso de metodologias específicas, suas abordagens apontam para diferentes estratégias que podem ser utilizadas em sala de aula para promover o desenvolvimento do PC.

Categorizamos essas metodologias como atividades plugadas e desplugadas. As desplugadas fizeram o uso de: carimbos para representar figuras geométricas sendo rotacionadas e permitir que os estudantes reconheçam padrões nesses desenhos (BENTON *et al.*, 2017); blocos LEGO® para construir um *Wunderlich Cube* e possibilitar os estudantes visualizassem sua estrutura de uma forma mais detalhada. (WINTER, LOVE; CORRITORE, 2018).

Quanto às atividades plugadas, alguns autores utilizaram metodologias de resolução de problemas, aliadas ao uso do Scratch, como no trabalho de Kale *et al.* (2018) que considerou que estimular habilidades de resolução de problemas por meio deste recurso permite, também, o desenvolvimento de habilidades associadas ao PC.

Kale *et al.* (2018) mencionam diversas estratégias de resolução de problemas, que foram aplicadas com os alunos, como:

- *Load-Reducing*: focada em prevenir que a memória dos alunos se torne sobrecarregada durante a resolução de um problema. Para isso, habilidades básicas para a resolução de problemas complexos são treinadas, para que a atenção dos alunos seja focada em detalhes específicos dos problemas;
- *Scheme-Activation*: estratégia voltada à utilização de conhecimentos obtidos na resolução de problemas que os estudantes foram capazes de resolver anteriormente;
- *Structured Methods*: faz o uso de materiais concretos, para que por meio de sua manipulação, os estudantes consigam compreender conceitos ou processos complexos;
- *Guided-Discovery*: nesta estratégia, são fornecidas algumas instruções específicas, que levam os alunos a pensarem e desenvolverem a resolução para determinados problemas, de modo que não deixem de expressar sua criatividade, raciocínio, intuição, entre outras habilidades;
- *Modeling:* tem por foco a demonstração ou explicação dos passos seguidos na resolução de um problema);
- *Teaching Thinking*: essa estratégia é focada na realização de reflexões com os estudantes, para que a partir delas eles consigam usar sua criatividade, intuição, entre outras habilidades para resolver problemas;

Nota-se que cada uma dessas estratégias se relaciona aos quatro pilares do PC já mencionados anteriormente nesta pesquisa, levando mais uma vez à reflexão das inúmeras conexões que podem ser estabelecidas entre o PC e as mais diversas áreas do conhecimento.

Seguindo a proposta de resolução de problemas, os autores Kyriakides, Meletiou-Mavrotheris e Prodromou (2016) utilizaram o *game* A.L.E.X para que os alunos conduzissem um robô por determinado percurso, dentro do A.L.E.X, usando comandos básicos associados à lógica de programação.

Com método semelhante, Sinclair e Patterson (2018) aplicaram algumas atividades, nas quais estudantes trabalharam em grupos para criar máquinas funcionais usando formas geométricas, e também registrando cada passo que realizaram nessa construção, como uma espécie de algoritmo. Os autores consideram que, utilizando softwares de geometria dinâmica, como foi o caso do *Geometer's Sketchpad*, os estudantes podem compreender ideias iniciais de lógica de programação, entretanto, sem usar linguagens específicas.

Outro método com atividades plugadas diz respeito ao fornecimento de códigos com erros para que os alunos analisem esses comandos, identifiquem quais são seus erros e tentem corrigi-los, de modo que passem a executar a ação que propõem. (BENTON *et al.*, 2017).

Já Pei, Weintrop e Wilensky (2018), aplicaram um currículo, chamado: "*Lattice Land curriculum*", que possui um conjunto de atividades, que fazem o uso de um *software,* chamado *Lattice Land.* O objetivo dos autores era conduzir os alunos ao desenvolvimento de habilidades matemáticas, especialmente associadas à Geometria. Para isso, primeiramente a turma em que atuaram utilizou objetos já criados *Lattice land*, de modo a manipulá-los e sobrescrever os triângulos já existentes. Com o decorrer das atividades, os estudantes aprenderam diferentes métodos para calcular a área de triângulos usando o *Lattice Land*.

Depois, ao lidar com formas irregulares que podiam ser decompostas em triângulos e retângulos, os estudantes que participaram da pesquisa de Pei, Weintrop e Wilensky (2018) conseguiram descobrir a generalização do teorema de Pick, obtendo uma fórmula equivalente ao mesmo. A partir disso, eles puderam criar seus próprios polígonos no programa e calcular as suas áreas por meio dos métodos apreendidos.

Kynigos e Grizioti (2018) utilizaram a *design-based research*[14], para avaliar uma intervenção pedagógica com o *software* MALT2, na qual ao construir figuras bidimensionais e tridimensionais, usando comandos baseados na linguagem Logo e alguns parâmetros

[14] Método baseado no desenho e avaliação de intervenções pedagógicas em sala de aula, com o objetivo de aprimorar um desenho pedagógico inicial. (KNYGOS; GRIZIOTI, 2018).

personalizáveis, os alunos participantes da pesquisa conseguiram gerar animações. De acordo com os autores, fazendo essas construções, os sujeitos mobilizaram habilidades relacionadas à abstração e ao reconhecimento de padrões.

A metodologia utilizada por Kenderov (2018) não contemplou aplicações realizadas em sala de aula, porém seu trabalho diz respeito a uma análise sobre as respostas de alguns alunos para duas competições *online* de Matemática, realizadas na Bulgária. Essas competições são compostas por desafios que podem ser solucionados por estudantes do Ensino Fundamental, seja individualmente, ou com o auxílio de colegas e tutores, representando suas respostas por meio do *software* GeoGebra. Para os autores, ao responder a esses desafios no GeoGebra, os estudantes passam, também, a desenvolver habilidades relacionadas ao PC.

Winter, Love e Corritore (2018) propõem uma abordagem com o *Wunderlich Cube* por meio do *software* LDraw, e também com recursos analógicos, como peças de Lego ou impressões 3D do *Wunderlich Cube*. O método proposto consiste em os estudantes estudarem como montar uma *Wunderlich Curve* de diferentes dimensões, guiando as rotações que o cubo deve fazer sobre um plano, deixando cada um de suas faces marcadas no mesmo. Um fato que chama bastante atenção é que quando os estudantes construíram cubos que geravam curvas incorretas, os autores os chamavam de cubos misteriosos, aproveitando-os para realizar reflexões com a turma, de modo que o erro foi valorizado como parte do processo de ensino e aprendizagem.

Vale destacar os conteúdos específicos da Geometria que foram trabalhados ou mencionados pelos autores em seus textos:

Quadro 4 – Conteúdos específicos da Geometria que foram trabalhados ou mencionados pelos autores

Conteúdo	**Autores**
Formas geométricas e seus respectivos ângulos em um plano cartesiano	Kale *et al.*, 2018
Propriedades de quadrados	Gadanidis *et al.*, 2016
Ângulos	Bentom *et al.*, 2017
Área de triângulos e de polígonos irregulares	Pei, Weintrop e Wilensky, 2018
Fractais	Vinayakumar, Soman e Menon, 2018
Ângulos e áreas de retângulos	Kyriakides, Meletiou-Mavrotheris e Prodromou, 2016

Ângulos, área e volume de formas geométricas	Kenderov, 2018
Ângulos, planificação de um cubo e objetos da Geometria não euclidiana (como o retângulo torcido)	Kynigos e Grizioti, 2018
Manipulação e utilização de formas geométricas como círculos, quadriláteros e segmentos.	Sinclair e Patterson, 2018
Medição de distâncias, ângulos e circunferências.	Sinclair e Patterson, 2018

Fonte: Dados da pesquisa

Esses conteúdos, normalmente estudados ao longo da escola básica, e associados pelos autores ao desenvolvimento do PC nos permitem compreender que é possível envolve-lo em atividades de Geometria, porém a metodologia e recursos utilizados exercem papel fundamental nesse processo, devendo ser escolhidos de acordo com os objetivos do professor e conteúdo a ser trabalhado.

Todos esses conteúdos foram abordados por meio de recursos que possibilitam a visualização em diferentes perspectivas e a manipulação das formas geométricas, levando os alunos a outros níveis de aprendizagens que jamais seriam alcançados com tanta eficácia com o uso exclusivo de recursos estáticos, como livro didático, ou demandariam muito trabalho e tempo para serem representadas em uma lousa.

Na perspectiva de Gonçalves (2019), a compreensão de um conhecimento geométrico requer mais do que a simples visualização, e sim uma sinergia entre compreensão linguística e visual. Acreditamos que os autores dos artigos que compuseram essa RSL, especialmente os que realizaram pesquisas empíricas, conseguiram identificar e relatar por meio de seus textos aspectos que apontam para essa sinergia, especialmente ao apresentarem dados das interações e produções dos sujeitos participantes de seus trabalhos.

Vale destacar que muitos outros conteúdos de Geometria e de outros campos podem ser associados ao desenvolvimento de habilidades do PC, como é o caso da trigonometria, que requer conhecimentos geométricos e algébricos para realizar o estudo do comportamento de funções, requisitando, também, habilidades para abstrair propriedades, ou imaginar como a alteração de determinado parâmetro pode mudar o gráfico da função, ou ainda, construir o gráfico de funções, por meio de algumas informações-chave, obtidas a partir da lei de formação da função em estudo.

Para o item "*Quais as vantagens de ensinar Geometria por meio de atividades que estimulam o desenvolvimento do Pensamento Computacional?"* destacamos algumas reflexões que realizamos a partir da leitura dos artigos que participaram desta RSL.

Para Gadanidis *et al.* (2016), ao ensinar Geometria fazendo-se o uso de ferramentas que possibilitam a mobilização de habilidades relacionadas ao PC, como o *Scratch*, é possível explorar diversos conteúdos que, aparentemente, não seriam compreendidos por alunos que cursam as séries iniciais da escola básica. Os autores conseguem explorar ideias associadas ao Teorema Binomial com estudantes de nível equivalente aos anos iniciais do Ensino Fundamental. Segundo eles, o ambiente dinâmico e visualmente atrativo do *Scratch* permite que os alunos se sintam à vontade para expor e testar suas ideias.

Perspectiva semelhante é defendida por Benton *et al.* (2017), para eles, o *Scratch* permite a manipulação de formas através de comandos que exigem conceitos aprendidos na escola, como ângulos e coordenadas de pontos no plano cartesiano. Além disso, o *Scratch* permite o desenvolvimento de atividades com estudantes que, aparentemente não conseguiriam realizá-las pela baixa idade ou mau desempenho em outras práticas realizadas sob a perspectiva do ensino tradicional, mostrando que por meio desses artefatos digitais, os estudantes são capazes de aprender ideias complexas.

Ressaltamos que para que a concretização dessas aprendizagens requer a utilização de metodologias estratégicas por parte do professor, de modo que consiga direcionar os alunos ao pensamento e construção de significados sobre o que está sendo feito na interface do recurso em utilização.

De acordo com Pei, Weintrop e Wilensky (2018) por meio de recursos digitais, é possível representar a Geometria de diferentes formas, distanciando-se um pouco das representações comumente expostas em livros didáticos, nas quais formas geométricas como os triângulos, por exemplo, costumam ser posicionadas "em pé" em relação à parte de baixo da página do livro, ou seja, sem nenhuma rotação. Este distanciamento permite que os alunos reconheçam padrões sobre essas figuras e percebam que, independentemente de sua rotação e posição no plano ou espaço, o perímetro, área e outras características de figuras congruentes serão mantidas.

Em sua obra, Boaler (2018) menciona alguns problemas que acometem o ensino de matemática, entre eles, determinadas lacunas presentes nos livros didáticos utilizados nos Estados Unidos. Segundo a autora, a maioria dos livros possui apenas exemplos "perfeitos" das formas geométricas, ou as apresentam em versões simplificadas, como, por exemplo, retas paralelas representadas por duas linhas sempre com o mesmo tamanho. Ao se depararem com casos onde retas paralelas são representadas como duas linhas de tamanhos distintos, os alunos acabam por não conseguir caracterizá-las como tal, devido a abstração que fizeram de uma representação incorreta da ideia retas paralelas.

Essa realidade apontada por Boaler (2018) certamente também ocorre em alguns livros e recursos didáticos, onde se fazem presentes certos “vícios” na representação de formas geométricas e expressões matemáticas. Por esse motivo, trabalhos que explorem diferentes tipos de representação e visualização e, também expressões equivalentes às “fórmulas” que comumente são apresentadas em sala de aula, podem levar os alunos a alcançarem outros níveis de compreensão e despertarem diferentes habilidades, como as que se associam ao PC, em discussão nesta pesquisa.

Vinayakumar, Soman e Menon (2018) propuseram aos seus alunos a construção de fractais por meio do *Scratch*, destacando que esses objetos geométricos geralmente podem ser construídos utilizando-se ideias matemáticas complexas, mas também podem ser construídos por meio desse recurso por pessoas que nem mesmo sabem programar, desde que instruídas de maneira correta.

Os autores também mencionam que ao aprender conceitos geométricos utilizando-se recursos como o *Scratch*, os alunos facilmente se familiarizam com sua interface, e não precisam se preocupar com aspectos sintáticos comuns a muitas linguagens de programação, pois os blocos contendo os comandos se conectam logicamente, possuindo mecanismos que impedem os usuários de tentar usar comandos inadequados para determinados blocos. (VINAYAKUMAR, SOMAN; MENON, 2018). Com isso, abstraindo essas características, o aluno pode direcionar a sua atenção para as ideias matemáticas e conhecimentos que estão sendo construídos.

Ideia semelhante é defendida por Kenderov (2018), quando menciona a vantagem de se utilizar o GeoGebra para representar ideias e resoluções de problemas matemáticos. Para os autores, esse recurso permite que problemas complexos possam ser resolvidos sem a necessidade de recorrer a conceitos matemáticos complexos, que não fazem parte do currículo da escola básica. Assim, utilizando-se as ferramentas inteligentes e a interface de fácil operação presente neste recurso, diversas habilidades, incluindo àquelas associadas ao PC, são desenvolvidas, como a abstração, decomposição, reconhecimento de padrões e algoritmos.

Corroborando com essa perspectiva, Kynigos e Grizioti (2018) fazem uso de um recurso baseado na linguagem Logo, que possui uma janela com interface gráfica tridimensional no qual é possível realizar-se animações por meio de códigos. Segundo os autores, essas animações permitem a depuração do código que as geraram, auxiliando assim no desenvolvimento de habilidades associadas à lógica de programação. Vale destacar que, segundo os autores, algumas habilidades associadas ao PC, como a abstração, foram expressas e utilizados pelos alunos como algo além da linguagem de programação. Por exemplo, antes de executar os códigos, os participantes buscavam imaginar as figuras que eles iriam gerar e como ocorreria a alteração de suas formas ao modificar-se o código que as geravam.

Esta habilidade está diretamente relacionada ao PG, que nos permite realizar representações mentais de formas geométricas, seja alterando seu formato, seu tamanho ou as reposicionando, para conseguir resolver problemas (GONÇALVES, 2019). Com isso, fica clara a vantagem de utilizar-se ferramentas computacionais para realizar manipulações em formas, seja via códigos, ou utilizando-se ferramentas visuais: essas ações exigem a abstração e raciocínio sobre os resultados que podem ser obtidos por meio delas, mobilizando assim o pensamento computacional e o geométrico.

Com uma perspectiva semelhante, Sinclair e Patterson (2018) desenvolvem uma atividade utilizando o recurso *Geometer's Sketchpad,* que não utiliza uma linguagem de programação específica, com sintaxes e comandos, mas sim conexões lógicas entre objetos geométricos, que podem executar diferentes funções de acordo com o modo em que são dispostos no ambiente do recurso.

Assim, nas atividades desenvolvidas pelos autores, os estudantes exercitaram sua criatividade e PC, percorrendo um caminho que pouco vêm sendo explorado em algumas práticas desenvolvidas em aulas de Matemática, que exigem, geralmente, apenas a execução de algoritmos e utilização de fórmulas memorizadas. Este trabalho vai ao encontro do que propõe Boaler (2018), quando menciona que os estudantes devem ter a oportunidade e ser capazes de apreciar a criatividade e beleza da Matemática realizando manipulações em formas e objetos, efetuando cálculos mentais, estabelecendo relações ente objetos, descobrindo padrões ou representando-os por meio de generalizações, entre outras atividades.

Por fim, com uma proposta que reúne atividades plugadas e desplugadas, o trabalho realizado pelos autores Winter, Love e Corritore (2018) com o *wunderlich cube* destaca que esse artefato e os padrões bidimensionais, gerados a partir das marcas de suas faces ao tocarem uma superfície enquanto o objeto é rotacionado, proporcionam um rico contexto educacional para desenvolver habilidades espaciais, assim como o pensamento matemático e algorítmico. Isto nos permite refletir o quanto outros recursos matemáticos tridimensionais podem contribuir no ensino e a aprendizagem das geometrias plana, espacial e analítica, permitindo uma melhor compreensão dos elementos, propriedades e relações que podem ser estabelecidas entre os objetos geométricos. Em paralelo a isto, é desenvolvido também o PC, na medida em que os comandos que geram determinadas figuras ou padrões podem ser expressos de diferentes formas, seja com setas, códigos, fluxogramas, e outros tipos de representação.

Dessa forma, por meio de atividades desplugadas, é possível pensar na composição, decomposição, manipulação, ou movimentação, de formas geométricas, seja no plano ou no espaço, utilizando comandos associados à lógica de programação, ou até mesmo em uma linguagem específica. Ao realizar-se essas ações, habilidades do PC, como a decomposição, reconhecimento de padrões, abstração e algoritmos, e habilidades a elas são mobilizadas, em paralelo com as que pertencem ao PG.

Para o último item "*Quais as limitações do ensino de Geometria por meio de atividades que promovem o desenvolvimento do Pensamento Computacional?"* apontamos primeiramente alguns fatores pedagógicos apresentados em alguns dos artigos, que em nossa perspectiva podem vir a limitar o trabalho docente, em seguida, apontamos algumas limitações técnicas.

Benton *et al.* (2017), destacam que ao trabalhar o conteúdo de ângulos usando o *Scratch*, perceberam que alguns alunos estavam apenas estimando os resultados e medições, sem refletir sobre qual a relação entre eles e o que estava sendo proposto nas atividades. Apesar de a tentativa e erro ser um processo importante na resolução de problemas matemáticos, é importante que ela ocorra por meio de processos de ação e reflexão, de modo que os alunos construam conhecimentos por meio dessa interação. Para que isso ocorra, é preciso que o professor assuma uma postura ativa em sala de aula, para que encaminhe seus alunos à uma reflexão profunda sobre as ações que estão a realizar no ambiente virtual em uso.

No trabalho de Pei, Weintrop e Wilensky (2018), o próprio recurso utilizado consistiu em um fator que, de certa forma, restringiu o trabalho com a Geometria, na medida em que não permitia a construção de diferentes formas como um triângulo equilátero, por exemplo. Entretanto, apesar desta limitação, os autores conseguiram explorar diversos conceitos geométricos com profundidade, além de mobilizar conhecimentos algébricos com os estudantes, quando conseguiram descobrir o Teorema de Pick a partir de suas construções no ambiente do Lattice Land.

No trabalho de Sinclair e Patterson (2018), os alunos usaram um tipo de linguagem de programação visual para resolver problemas e, consequentemente, desenvolver algumas habilidades associadas ao PC. A limitação desta abordagem estava no fato de que os comandos que comumente fazem parte de algumas linguagens de programação, não foram usados nos projetos desenvolvidos pelos estudantes. Assim, apesar de as ações desenvolvidas por eles envolverem conceitos computacionais, os aspectos sintáticos da programação não foram envolvidos.

Há também alguns fatores técnicos que podem limitar o trabalho docente, a depender da realidade socioeconômica do local onde as atividades serão aplicadas. Por exemplo, Sinclair e Patterson (2018), utilizaram um recurso pago e conseguiram realizar as atividades desejadas em sala de aula. Entretanto, a reprodução desta abordagem em outras instituições de ensino, especialmente as que são da rede pública brasileira, pode se tornar inviável, pois nem sempre a realidade financeira destes locais permite a aquisição deste e de outros materiais pagos.

O trabalho de Winter, Love e Corritore (2018) também esbarra na questão financeira, quando menciona a utilização de impressões tridimensionais do *wunderlich cube*. Porém, os autores também apresentam a possibilidade de se construir e manipular esse objeto por meio do *software LDraw*, que é gratuito e permite a construção de representações virtuais do *wunderlich cube*.

Apesar dessas limitações, especialmente as que esbarram em custos financeiros, ainda existem muitos recursos gratuitos que permitem a exploração de conceitos geométricos e também o desenvolvimento do PC, conforme os que foram utilizados pelos demais autores. Além disso, vale a pena mencionar a possibilidade da realização de trabalhos com atividades desplugadas que, entre outras vantagens, permitem a utilização de materiais recicláveis, conforme é proposto por Brackmann (2017), embora o autor não tenha trabalhado com temas da Geometria.

3.3 NOSSA PERSPECTIVA

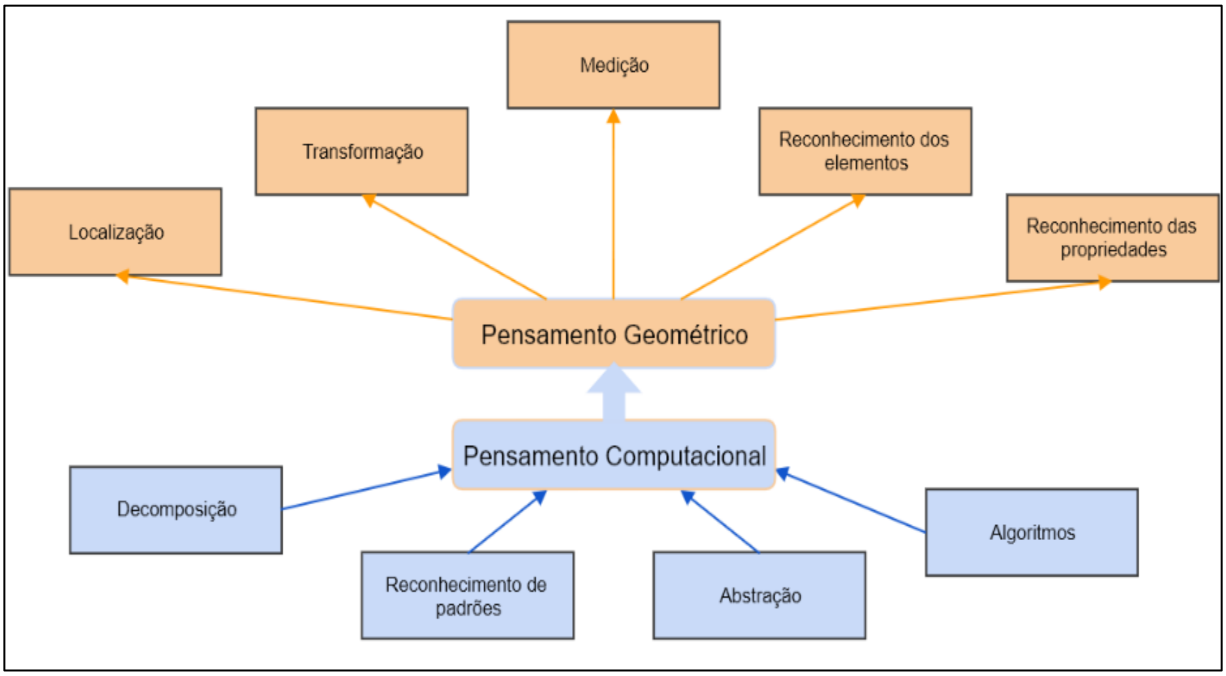
Por meio da leitura dos onze artigos, selecionados para compor esta RSL, pudemos levantar evidências sobre algumas conexões entre o ensino e a aprendizagem da Geometria plana e o PC, das quais destacamos que:

- Utilizando comandos e ferramentas computacionais, é possível desenvolver novas formas de se pensar e de realizar representações geométricas;
- A Geometria permite o desenvolvimento do PC, sem a utilização de linguagens de programação específicas;

- Ao ensinar Geometria fazendo-se o uso de ferramentas computacionais ou de sua lógica de funcionamento, é possível explorar diversos conteúdos complexos de maneira simples e lúdica;
- As quatro habilidades do PC se relacionam diretamente com o PG, que por sua vez também envolve habilidades que se conectam ao PC;

O diagrama presente na Figura 8, a seguir, ilustra essas conexões, associando as quatro habilidades do PC a alguns temas gerais para o ensino de Geometria, que foram adaptados a partir de Van de Walle (2009):

Figura 8 – Conexões entre o PC e alguns temas da Geometria



Fonte: Elaborado pelos autores

No diagrama da Figura 8, o PC é representado pelo retângulo de cantos arredondados em azul, para o qual partem cada uma de duas quatro habilidades descritas por BBC Learning (2015). Já o PG é representado pelo retângulo de cantos arredondados em laranja, do qual derivam setas que representam os temas trabalhados em Geometria.

Por meio desse diagrama, representamos que podemos utilizar ações como a decomposição, reconhecimento de padrões, abstrações e criação de algoritmos, para pensar computacionalmente e, também, geometricamente, na medida em que usamos essas ações para compreender as formas e suas propriedades, realizar transformações em figuras, localizar objetos no plano e no espaço e, visualizar objetos sob diferentes perspectivas.

Todas essas conexões evidenciam a possibilidade de se realizar trabalhos em sala de aula, onde a manipulação física, digital e mental de representações de formas geométricas promove o desenvolvimento de habilidades relacionadas à resolução de problemas, composição e decomposição, abstração, reconhecimento de padrões e algoritmos, todas elas associadas ao PC.

Essas conexões serão devidamente exploradas no decorrer da pesquisa, como um embasamento para desenvolver e aplicar atividades que permitam a aprendizagem do conteúdo congruência de triângulos, que foi abordado em sala de aula em nossa pesquisa.

4 METODOLOGIA

Tendo em vista o referencial teórico adotado neste estudo, e também a necessidade de procedimentos bem delineados para lidar com as temáticas envolvidas nele, procuramos fundamentar nossa metodologia em autores que contribuíram para a compreensão dos fenômenos que registramos e analisamos à luz das teorias adotadas.

Nesta perspectiva considerando-se que a pesquisa em Educação Matemática se configura pela busca de compreensões e interpretações de fenômenos didáticos registrados a partir de diferentes instrumentos, encontramos na pesquisa qualitativa um caminho para alcançar o cumprimento dos nossos objetivos. (BICUDO, 1993).

Neste caminho, pudemos traçar rotas a partir da perspectiva teórica de Bogdan e Biklen (1994), quando mencionam que a pesquisa qualitativa possui natureza descritiva e busca registrar, analisar e representar os dados em toda sua riqueza. Além de ser caracterizada como descritiva, esta modalidade de pesquisa parte da ideia de que nada é trivial, ou seja, que todos os acontecimentos que ocorrem em sala de aula, em seus mínimos detalhes, podem consistir em importantes evidências para compreender-se os fenômenos do objeto de estudo.

No traçar dessas rotas, nos guiamos pelos pressupostos teóricos e pelas recomendações metodológicas da Engenharia Didática, que proporcionaram a realização de uma caminhada não-linear, na qual a cada decisão tomada sempre verificávamos as informações coletadas ao longo do percurso, com o objetivo de moldar um trajeto que possibilitasse a aprendizagem estudantil e o alcance dos objetivos que almejamos. Essa caminhada se intersecta com a descrição dada por Bogdan e Biklen (1994, p.51), quando dizem que: “o processo de condução de uma investigação qualitativa reflete uma espécie de diálogo entre os investigadores e os respectivos sujeitos [...]”. (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 51).

Nesse sentido, considerando as características da pesquisa qualitativa e da ED, realizamos nossa jornada de campo em uma escola pública da rede estadual da cidade de Campina Grande. O público-alvo envolvido na pesquisa foi constituído por dez estudantes do oitavo ano do Ensino Fundamental, com faixa etária compreendida entre treze e dezessete anos.

Para preservar a identidade dos sujeitos da pesquisa, seguimos as recomendações éticas para a realização de pesquisas em ambientes educacionais, além do que foi proposto no projeto de pesquisa submetido e aprovado[15] pelo comitê de ética do Centro Universitário UNIFACISA, da cidade de Campina Grande-PB.

Dessa forma, antes de iniciar as observações em sala de aula, solicitamos aos alunos que assinassem o Termo de Assentimento (TA) e aos seus pais ou responsáveis que também o assinassem, junto do Termo de Consentimento e Livre Esclarecido (TCLE), cujos modelos podem ser consultados nos Apêndices B e C. Também entregamos um convite[16] para que os alunos participassem das aulas, com objetivo motivá-los a solicitar aos seus pais a leitura e assinatura dos termos necessários.

Tendo a autorização dos pais e aceitação da participação na pesquisa por parte da professora de matemática da turma, as observações foram realizadas ao longo de quatro encontros, com duração média de duas horas-aula cada um, e as atividades foram aplicadas em um total de cinco encontros. Neles, os alunos trabalharam individualmente, em duplas e em grupos, de acordo com cada atividade desenvolvida.

Vale destacar que para preservar a identidade dos estudantes, manteremos ao longo deste trabalho a numeração atribuída durante a fase em que as observações que foram realizadas (A1, A2, A3...).

O tema trabalhado nas aulas em que atuamos foi congruência de triângulos, conteúdo previsto na grade curricular referente ao nível de ensino em que os estudantes se encontravam, e que seria o próximo item a ser trabalhado pela professora. Utilizamos em nossa abordagem algumas atividades analógicas, que demandaram o uso de triângulos de papel e de folhas para registrar algumas respostas. Também aplicamos o *software* GeoGebra e, em outros momentos, um jogo analógico por nós desenvolvido e nomeado como *jogo das congruências*.

Para registrar as interações entre os alunos, assim como suas respostas e dúvidas, recorremos a gravações de áudio e de vídeo, seguindo as recomendações éticas e permissões concebidas pelos pais dos alunos no TCLE. Além disso, também utilizamos algumas atividades escritas, que permitiram aos alunos registrar de diferentes formas as suas compreensões sobre a congruência de triângulos e, também, demonstrar algumas de suas habilidades associadas ao PC.

A análise dos dados foi tecida a partir das orientações metodológicas da ED, que recomenda a realização de um comparativo entre o que se observou nas análises preliminares, as hipóteses levantadas e os resultados obtidos nas análises a posteriori. Para complementar

---

[15] Certificado de Apresentação para Apreciação Ética (CAAE): 04909218.0.0000.5175.

[16] Ver Apêndice D

nossa abordagem, seguimos também algumas das orientações de Bogdan e Biklen (1994) para a categorização de alguns dos resultados.

Nas seções seguintes, serão apresentados o nosso percurso metodológico e os resultados produzidos ou alcançados, para isso, faremos menção à cada etapa da ED enquanto seções deste texto. Nas análises preliminares, apresentaremos como as primeiras observações em campo foram realizadas, contemplando aspectos epistemológicos, cognitivos e didáticos envolvidos nas fases iniciais da pesquisa. Na etapa de análises a priori, mostraremos como cada atividade foi elaborada e como sua aplicação foi planejada. Na experimentação, explicaremos como essas atividades foram aplicadas e nas análises a posteriori buscaremos analisar cada um dos dados coletados, confrontando-os com o que foi estudado nas etapas anteriores, a fim de validar as conexões identificadas entre o PC e a aprendizagem de Geometria.

5 ANÁLISES PRELIMINARES

Seguindo a metodologia proposta, apresentamos a seguir as nossas primeiras observações e análises, buscando compreender as dimensões epistemológica, didática e cognitiva envolvidas no fenômeno em estudo.

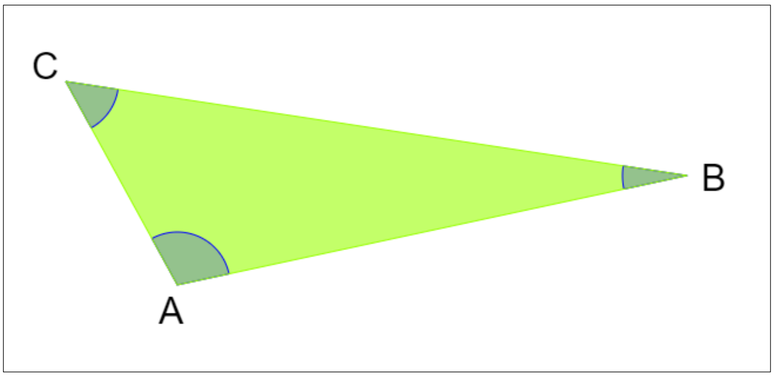
5.1 DIMENSÃO EPISTEMOLÓGICA

Para analisar a dimensão epistemológica do conteúdo congruência de triângulos, recorremos a autores como Barbosa (2006) e Rezende e Queiroz (2010), para verificar quais axiomas, definições, teoremas e corolários que esses autores apresentam para introduzir tal conceito no contexto da Geometria Euclidiana Plana.

A seguir, apresentaremos um pequeno resgate deste importante conceito matemático. Desde já, destacamos que não recorreremos a provas e demonstrações matemáticas, uma vez que este não é o objetivo desta pesquisa.

De acordo com Rezende e Queiroz (2010), por triângulo compreendemos um polígono de três lados. Dessa forma, um triângulo ABC, denotado por ΔABC, tem por elementos: três vértices, que são os pontos A, B e C; três lados, que são os segmentos AB, BC e CA; três ângulos, denotados por $\hat{A}, \hat{B}$ e $\hat{C}$, ou ainda $A\hat{B}C, B\hat{C}A\ e\ C\hat{A}B$, conforme é ilustrado na Figura 9 a seguir:

Figura 9 – Representação de um triângulo



Fonte: Elaborado pelos autores

Observando-se as medidas dos lados de um triângulo, podemos classifica-lo como:

- Triângulo equilátero, que possui seus três lados com a mesma medida;
- Triângulo isósceles, que possui dois de seus lados com a mesma medida;
- Triângulo escaleno, que possui seus três lados com medidas diferentes;

Além disso, também podemos classificar os triângulos de acordo com as amplitudes de seus ângulos internos:

- Triângulo retângulo, que possui um ângulo reto, ou seja, cuja amplitude é de 90º;
- Triângulo acutângulo, que possui três ângulos agudos, ou seja, com amplitude menor que 90º;
- Triângulo obtusângulo, que possui um ângulo obtuso, ou seja, cuja amplitude é maior que 90º
- Triângulo equiângulo, que possui seus três ângulos com mesma amplitude;

Antes de introduzir a congruência de triângulos, exploraremos um pouco sobre a ideia de congruência. De antemão, é importante destacar que utilizaremos o símbolo ≡ para indicar a congruência entre dois ou mais elementos.

Considerando alguns axiomas sobre a medição de ângulos e segmentos de retas apresentados por Barbosa (2006), podemos dizer que:

- Dois segmentos são congruentes quando possuem a mesma medida, ou seja, AB ≡ CD quando $\overline{AB} = \overline{CD}$;
- Dois ângulos são congruentes quando possuem a mesma amplitude, ou seja, $\hat{A} \equiv \hat{B}$ quando $\hat{A} = \hat{B}$;

De acordo com Barbosa (2006), as mesmas propriedades da igualdade de números passam a valer para a congruência de segmentos e de ângulos e, "como consequência, um segmento é sempre congruente a ele mesmo e dois segmentos, congruentes a um terceiro, são congruentes entre si. O mesmo valendo para ângulos". (BARBOSA, 2006, p. 45).

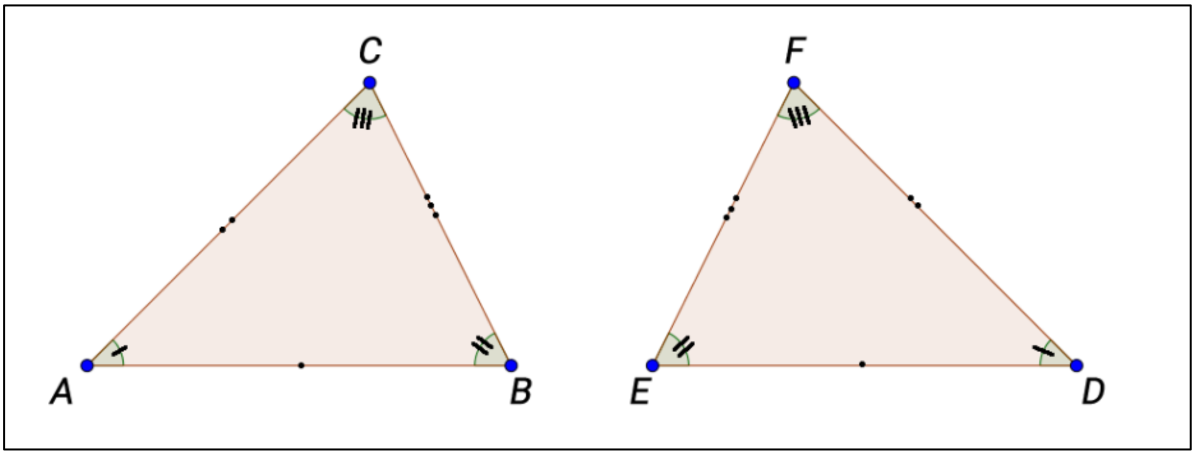
A partir dessa conclusão do autor, podemos entender que a relação de congruência também é uma relação de equivalência, possuindo assim, propriedades reflexiva, simétrica e transitiva. Com isso, podemos estabelecer relações de equivalência entre ângulos e entre segmentos de reta, como por exemplo, determinando um representante para um conjunto de segmentos congruentes, pertencentes a uma classe de equivalência. Rezende e Queiroz (2010, p. 31), corroboram com essa ideia, quando dizem que: "a congruência entre figuras planas satisfaz as propriedades: reflexiva, simétrica e transitiva".

Quanto à congruência de triângulos, os mesmos autores definem que: "Dois triângulos são congruentes se for possível definir uma correspondência entre seus vértices de modo que sejam congruentes os pares de lados correspondentes e também sejam congruentes os pares de ângulos correspondentes". (REZENDE; QUEIROZ, 2010, p.32).

Assim, dados dois triângulos ABC e DEF (Ver Figura 10), cujos vértices *A*, *B* e *C*, correspondem, respectivamente, com *D*, *E* e *F*, dizemos eles são congruentes se as seguintes relações de congruência ocorrem: $\hat{A} \equiv \hat{D}$, $\hat{B} \equiv \hat{E}$, $\hat{C} \equiv \hat{F}$, AB ≡ DE, $BC \equiv$ EF e $CA \equiv$ FD. Denotamos tal congruência por $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$.

A figura abaixo ilustra essa correspondência. Nela, todos os lados e ângulos congruentes foram destacados com os mesmos símbolos.

Figura 10 – Exemplo de triângulos congruentes



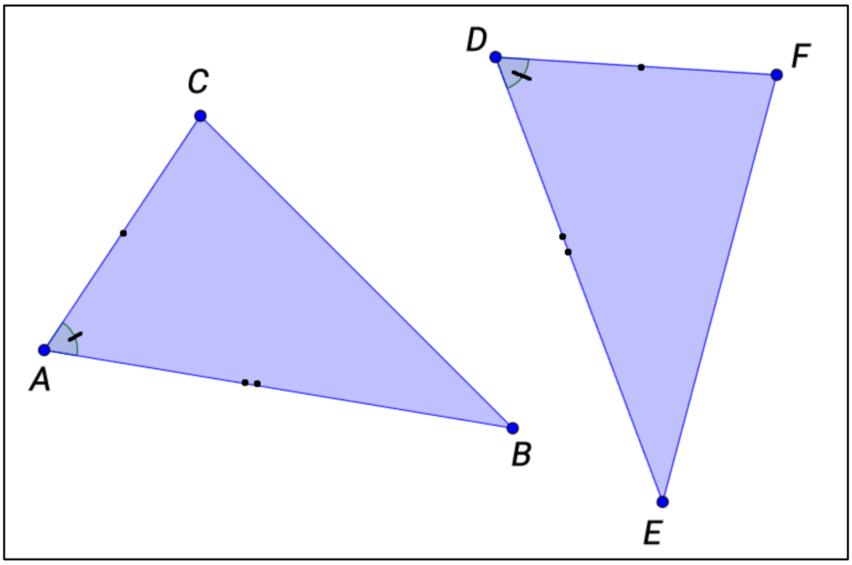
Fonte: Elaborado pelos autores

Seguindo a definição de triângulos congruentes apresentada, para verificarmos a congruência entre dois triângulos, seria necessário observar a congruência de cada um de seus seis elementos anteriormente mencionados. Porém, por meio de alguns resultados conhecidos como casos de congruência, podemos verifica-las de uma maneira mais prática.

O primeiro caso de congruência entre triângulos é apresentado por Barbosa (2006) e Rezende e Queiroz (2010, p. 33-35, 47) como um axioma, a partir do qual decorrem todos os outros demais casos, conforme mostrado a seguir. Vale ressaltar que, seguindo as críticas apresentadas no referencial teórico sobre o ensino e a aprendizagem da Geometria, buscamos representar os triângulos das figuras seguintes em diferentes posições e rotações.

- *Primeiro caso de congruência entre triângulos*: Dados dois triângulos ABC e DEF, dizemos que $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$ se $AC \equiv$ DF, $\hat{A} \equiv \hat{D}$ e $AB \equiv$ DE. Este caso é conhecido por lado-ângulo-lado (LAL).

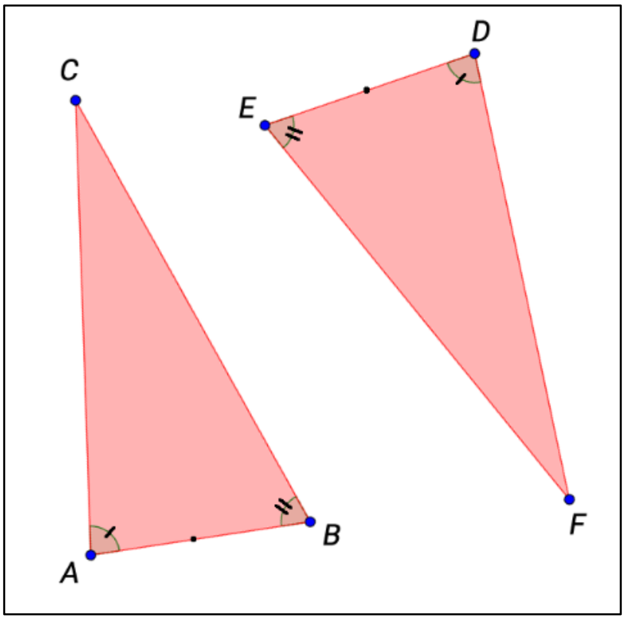
Figura 11 – Primeiro caso de congruência



Fonte: Elaborado pelos autores

- *Segundo caso de congruência entre triângulos:* Dados dois triângulos ABC e DEF, dizemos que $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$ se $\hat{A} \equiv \widehat{D}$, AB ≡ DE e $\hat{B} \equiv \hat{E}$. Este caso é conhecido por ângulo- lado-ângulo (ALA).

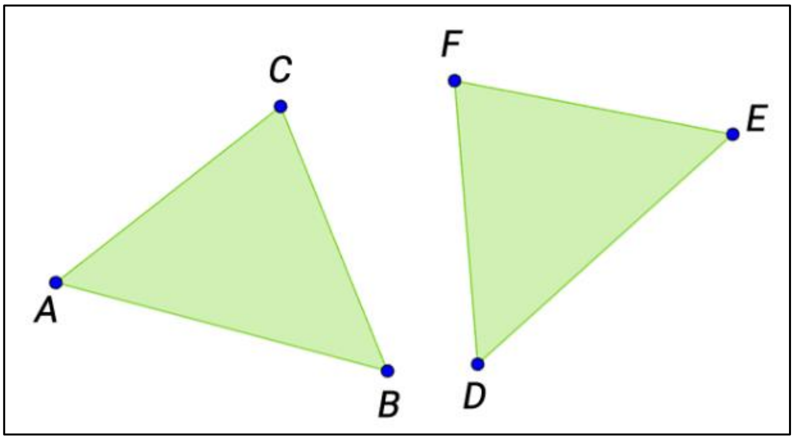
Figura 12 – Segundo caso de congruência entre triângulos



Fonte: Elaborado pelos autores

- *Terceiro caso de congruência entre triângulos:* Dados dois triângulos ABC e DEF, dizemos que $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$ se eles possuem os três pares de lados correspondentes congruentes, ou seja, AB ≡ DE, BC ≡ EF e CA ≡ FD. Este caso é conhecido por lado-lado-lado (LLL).

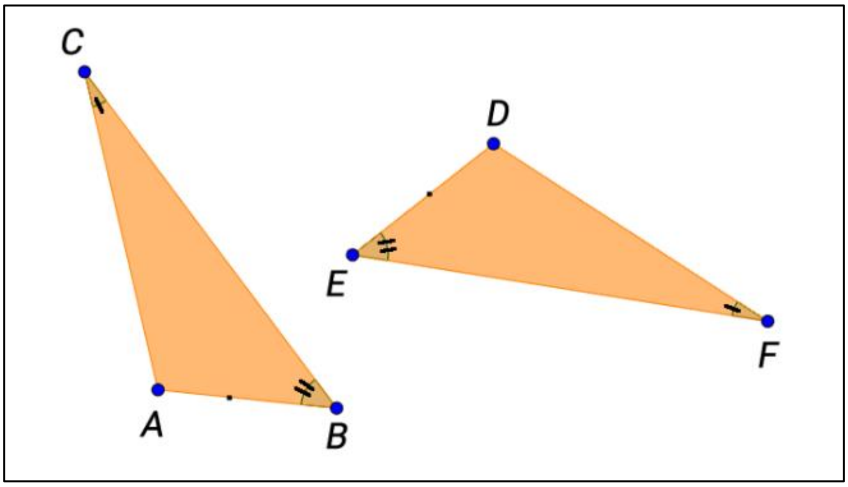
Figura 13 – Terceiro caso de congruência entre triângulos



Fonte: Elaborado pelos autores

- *Quarto caso de congruência entre triângulos:* Dados dois triângulos ABC e DEF, dizemos que $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$ se$AB \equiv DE$, $\hat{B} \equiv \hat{E}$ e $\hat{C} \equiv \hat{F}$. Este caso é conhecido por lado-ângulo-ângulo oposto (LAAo).

Figura 14 – Quarto caso de congruência entre triângulos



Fonte: Elaborado pelos autores

Feitas essas considerações associadas aos fatores epistemológicos, partimos no próximo tópico para a dimensão didática do contexto no qual a pesquisa foi desenvolvida.

5.2 DIMENSÃO DIDÁTICA

Neste item, buscamos apresentar os resultados obtidos através da observação do livro didático da turma, de modo a compreender ainda mais o contexto em que a congruência de triângulos seria lecionada, caso não realizássemos nossa pesquisa com os alunos. Além disso, apresentamos também os resultados da entrevista semiestruturada, que foi realizada com a professora de matemática da turma, tendo em vista conhecer um pouco mais sobre sua prática pedagógica.

O livro de adotado pela escola para o Ensino Fundamental faz parte da coleção V*ontade de Saber Matemática*, escrito por Joamir Souza e Patrícia Moreno Pataro, e editorado pela FTD. O mesmo se encontra em sua terceira edição e trata-se de uma obra recomendada pelo Plano Nacional do Livro Didático para os anos de 2017, 2018 e 2019.

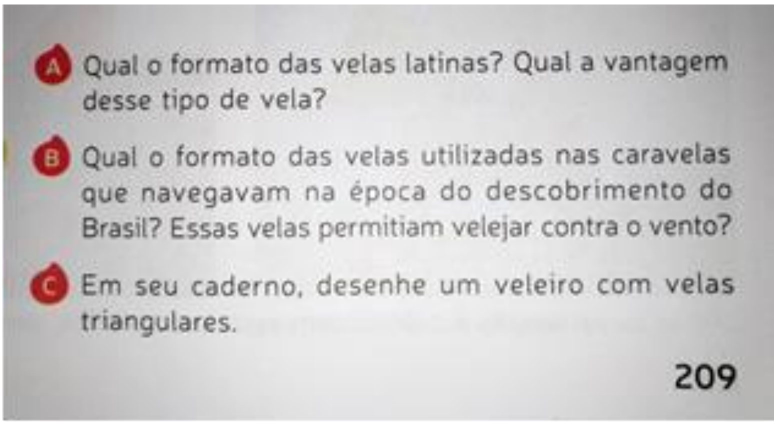
A obra está dividida em doze capítulos, e nas duas primeiras páginas de cada um há exemplos de situações que apresentam e contextualizam o tema a ser estudado com a realidade, contendo imagens visualmente atrativas, pequenos textos e algumas perguntas que ajudam os estudantes a melhor compreenderem sua relação com o cotidiano. Além disso, ainda nessas duas páginas, sempre há links com sugestões de sites onde os estudantes podem obter mais informações sobre o assunto a ser estudado.

Para continuar nossa análise, tomaremos por base o capítulo 10, que fala sobre a temática dos triângulos. O mesmo inicia-se com a imagem de um barco com velas latinas e apresenta um pequeno texto que, por meio de um exemplo histórico, explica a vantagem de se utilizar esse tipo de velas, que possuem formatos triangulares e auxiliam na condução de embarcações, ainda que façam um percurso contra a força do vento.

Logo depois, há um link[17], que de acordo com os dados apresentados no livro, foi acessado em 29 de abril de 2015, porém, ao checarmos, verificamos que o mesmo se encontra indisponível. Além disso, são apresentados, também alguns questionamentos, voltados a instigar a curiosidade dos alunos em relação ao conteúdo a ser estudado, conforme exibimos na Figura 15 a seguir:

[17] http://eba.im/hps67y. Acessado em: 5 jul. 2020.

Figura 15 – Perguntas apresentadas no início do capítulo 10



A Qual o formato das velas latinas? Qual a vantagem desse tipo de vela?

B Qual o formato das velas utilizadas nas caravelas que navegavam na época do descobrimento do Brasil? Essas velas permitiam velejar contra o vento?

C Em seu caderno, desenhe um veleiro com velas triangulares.

209

Fonte: Sousa e Pataro (2015, p. 209)

Observando essas perguntas, podemos refletir sobre a sua importância, em conjunto com todas as informações apresentadas neste início de capítulo, que instigam os alunos a melhor enxergarem a Geometria em seu cotidiano. Além disso, destacamos que essas perguntas se distanciam da forma pela qual algumas atividades matemáticas comumente são propostas, pois não focam necessariamente na realização de cálculos. Por exemplo, o item *c* propõe que seja desenhado um barco com velas triangulares, o que auxilia na contextualização do saber em foco, na medida em que os alunos podem desenhar triângulos de diferentes tipos e em diferentes posicionamentos, correspondendo às velas de seus barcos veleiros.

Dando continuidade, são apresentados os elementos que constituem um triângulo, e também utilizadas algumas notações que serão mantidas ao longo do capítulo, como ΔABC para referir-se a um triângulo com vértices nos pontos A, B e C. Por conseguinte, de forma breve, são apresentados os tipos de triângulos de acordo com as medidas de seus lados ou ângulos internos, o que é seguido por uma discussão sobre a propriedade da rigidez de um triângulo.

Analisando a apresentação feita pelos autores, podemos apontar que exploração da classificação dos triângulos poderia ser mais aprofundada, de modo que o estudante pudesse realizar atividades práticas, como recortes, construções com palitos, ou canudos, ou medições, com réguas e outros instrumentos geométricos, podendo visualizá-los sob diferentes perspectivas e também exercitar a sua criatividade. Vale ressaltar que essa classificação é de grande importância e será utilizada ao longo dos demais capítulos.

Destacamos que a obra não apresenta o caso de triângulos equiângulos, que são um caso particular de triângulos acutângulos, possuindo três ângulos com as mesmas medidas, todas elas, obviamente, menores do que 90 graus.

Depois, é explorada a condição de existência de um triângulo, com exemplos onde é utilizado um compasso para fazer construções que conduzam os alunos à sua compreensão. Também é mostrado que essa condição pode ser verificada através da relação: e*m um triângulo, a medida de um lado qualquer é menor que a soma das medidas dos outros lados*.

Em sequência, são apresentadas dez atividades, que envolvem os conteúdos já estudados. Entre essas atividades, a terceira propõe a construção de um triângulo com palitos de sorvete, mas sem retomar as reflexões sobre a rigidez do mesmo, ou ainda, sobre sua condição de existência.

Já na quinta atividade, é proposta a verificação dos tipos de triângulos usando-se um pedaço de papel retangular, por meio do qual é possível verificar se os triângulos possuem algum ângulo com amplitude maior que o ângulo de 90º formado por dois lados adjacentes da folha, o que o caracterizaria como obtusângulo. Caso possuíssem algum ângulo interno cuja amplitude é equivalente ao ângulo formado pelos lados adjacentes da folha retangular, o triângulo seria retângulo e, se tivessem os três ângulos internos com amplitude menor do que o ângulo formado pelos lados adjacentes da folha, seria acutângulo.

Há também uma atividade de cálculo mental, onde observando três medidas, os alunos têm de verificar se elas são suficientes para constituir as medidas dos lados de um triângulo, usando a ideia da condição de existência, apresentada anteriormente. Também são apresentadas outras atividades, que são próximas do ensino habitual desse conteúdo.

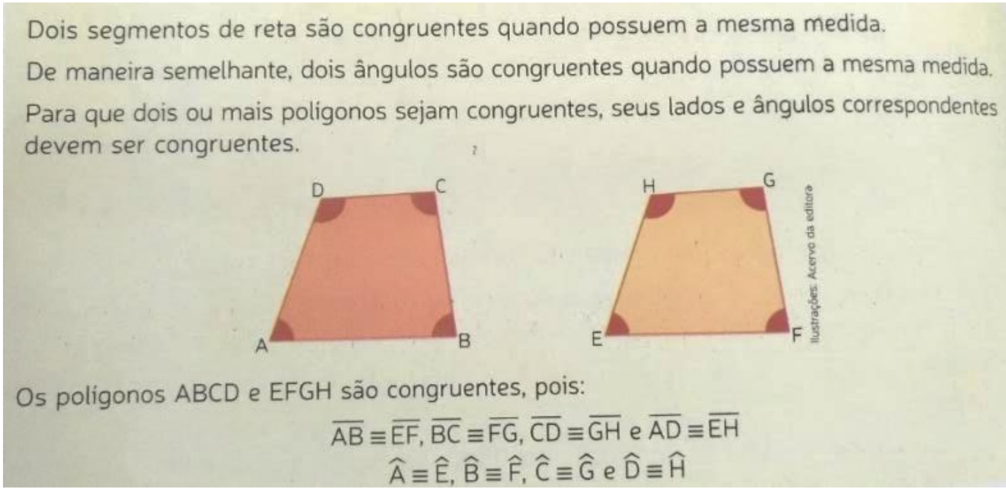
Em seguida, é apresentado o conteúdo dos ângulos internos e externos de um triângulo, com ênfase para a ideia de que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180º.

Por conseguinte, são apresentadas dezesseis atividades, das quais a última propõe uma contextualização com a realidade, abordando o tema da acessibilidade a locais públicos para pessoas cadeirantes. Ao longo do texto contido nessa questão, é apresentada uma razão que permite calcular qual a inclinação máxima para que uma rampa seja acessível aos cadeirantes.

Em virtude disso, são apresentados quatro itens, onde dois fazem com que os alunos reflitam com maior profundidade sobre a importância das rampas de acesso e de sua correta inclinação. Os outros dois itens são, um voltado à classificação do ângulo que a rampa deve fazer com a base, e outro voltado ao cálculo aproximado do comprimento horizontal mínimo de uma rampa de altura 50 cm.

Após essa temática, que envolveu ângulos e triângulos, é apresentada a congruência de figuras, que se inicia com uma situação onde a ideia de congruência é introduzida pelo método da superposição de objetos geométricos planos. Logo depois, retomando-se a definição de segmentos de reta congruentes e ângulos congruentes, é introduzida a congruência de polígonos, conforme é exibido na Figura 16 a seguir:

Figura 16 – Apresentação da ideia de congruência de polígonos



Dois segmentos de reta são congruentes quando possuem a mesma medida.

De maneira semelhante, dois ângulos são congruentes quando possuem a mesma medida.

Para que dois ou mais polígonos sejam congruentes, seus lados e ângulos correspondentes devem ser congruentes.

Os polígonos ABCD e EFGH são congruentes, pois:

$\overline{AB} \equiv \overline{EF}$, $\overline{BC} \equiv \overline{FG}$, $\overline{CD} \equiv \overline{GH}$ e $\overline{AD} \equiv \overline{EH}$

$\hat{A} \equiv \hat{E}$, $\hat{B} \equiv \hat{F}$, $\hat{C} \equiv \hat{G}$ e $\hat{D} \equiv \hat{H}$

Fonte: Souza e Pataro (2015, p.220)

A maneira pela qual esses conceitos são introduzidos é breve e não proporciona uma boa visualização, ou compreensão das equivalências que devem existir entre cada um dos lados e ângulos correspondentes.

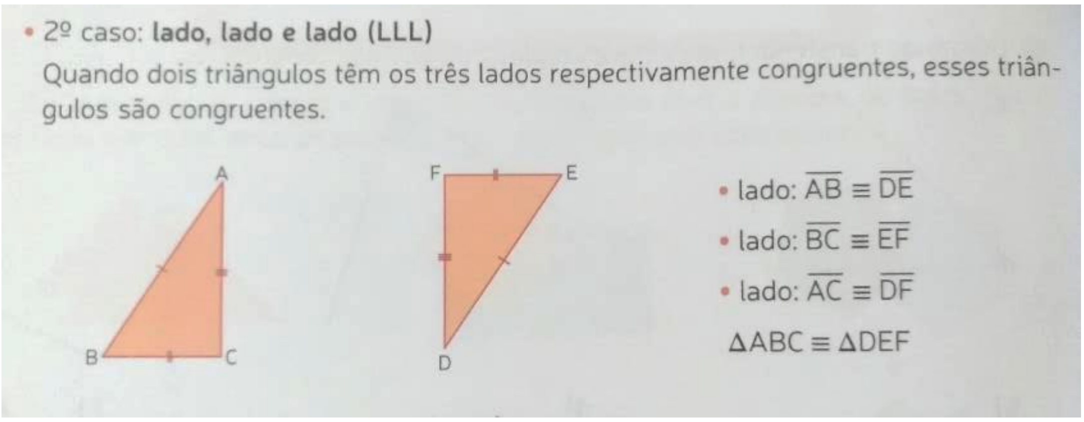
Depois desta explicação inicial, é proposta uma atividade com três questões: as duas primeiras solicitam o agrupamento de polígonos e ângulos congruentes, estes últimos precisam ser verificados com o auxílio de um transferidor; a terceira questão envolve o cálculo do perímetro de alguns polígonos congruentes.

Nessas atividades, o que mais chama a atenção em relação à abordagem da congruência de polígonos, é a maneira como elas conduzem os alunos à percepção de que figuras congruentes entre si compartilham as mesmas medidas de lados e ângulos, ainda que nem sempre essas medidas estejam informadas. Isso fica evidente, por exemplo, no primeiro item da terceira questão no qual o aluno precisa entender que, em figuras congruentes, as medidas que são conhecidas em uma também estão presentes em lados ou ângulos correspondentes da outra.

Após isto, finalmente, é apresentada a temática da congruência de triângulos, que se inicia com um breve esclarecimento de que para se verificar que dois triângulos são congruentes, não é necessário analisar as medidas dos três lados e dos três ângulos, sendo necessário apenas analisar apenas três dessas medidas. A partir dessa ideia, são introduzidos os quatro casos de congruência contendo algumas imagens e informações sobre cada um dos pares de lados e ângulos congruentes, além das siglas para cada caso.

Analisando a forma pela qual o conteúdo é apresentado, destacamos os diferentes posicionamentos em que os triângulos foram representados. Por exemplo, no segundo caso (LLL), é mostrado um triângulo e outro congruente a ele, porém rotacionado em torno de um eixo horizontal, conforme é mostrado a seguir na Figura 17:

Figura 17 – Triângulos em diferentes posições na representação do segundo caso de congruência de triângulos



Fonte: Souza e Pataro (2015, p. 222)

Apesar disso, ressaltamos que também seria importante expor figuras sob rotações menos regulares, isto é, que não se alinhem perfeitamente com as margens do livro, evitando a ideia de que um triângulo deve estar sempre posicionado como se estivesse “em pé”. Este tipo de abordagem, de acordo com Boaler (2018), permitiria que os estudantes aprendessem algo além das versões mais simples das ideias matemáticas, exigindo um nível mais aprofundado de abstração e um estabelecimento de relações entre as figuras em suas mais variadas formas e posições.

Um fato interessante é que o livro apresenta apenas um exemplo de não congruência, composto por dois triângulos com três ângulos internos congruentes, mas com medidas dos lados correspondentes incongruentes. Ressaltamos a importância de uma abordagem que apresente ambos os casos por meio da fala de Boaler (2018, p. 40):

> Os professores de matemática também devem pensar sobre a amplitude e a abrangência da definição que estão mostrando e, às vezes, isso é melhor ilustrado por *exemplos do que não é.* Ao aprender uma definição, com frequência é muito útil ver exemplos que satisfazem a definição quanto outros que não a satisfazem, em vez de apresentar apenas uma série de exemplos perfeitos.

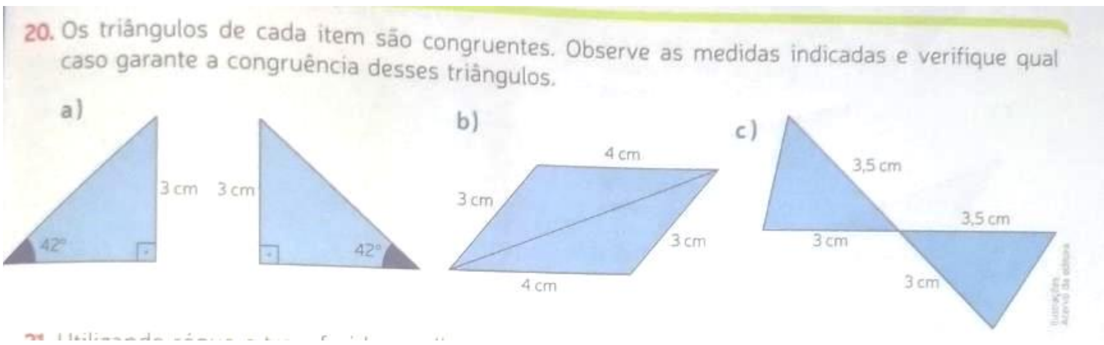
Há, também, outros aspectos que poderiam ser contemplados nesta parte teórica do livro, como, por exemplo, esclarecimentos de que em casos como no lado-ângulo-lado ou no ângulo-lado-ângulo, os elementos devem aparecer exatamente nessa ordem, sendo o ângulo adjacente aos dois lados no primeiro caso e, no segundo, o lado adjacente aos dois ângulos, que ficam um em cada extremidade deste lado, para que os alunos compreendam que em situações como: lado-lado-ângulo, ou ângulo-ângulo-lado, por exemplo, não é possível garantir que há uma relação de congruência entre os triângulos.

Isso poderia ser mostrado tanto a partir de figuras, quanto de atividades práticas onde os próprios alunos, ao realizarem construções, seja utilizando kits geométricos, ou recursos computacionais, descobririam tais restrições.

Logo depois dessa abordagem teórica, são apresentadas oito atividades, que no livro correspondem às questões 20 a 27. Analisaremos cada uma delas nos itens a seguir.

- Na primeira atividade (20), é solicitado que, observando alguns triângulos dispostos de diferentes formas, e com algumas de suas medidas de lados e ângulos fornecidas, os alunos identifiquem quais deles são congruentes, conforme mostra a Figura 18. Destacamos os itens b e c, que apresentam figuras sob diferentes disposições, sendo no item b, triângulos com um lado comum, e no item c triângulos com um par de ângulos opostos pelo vértice.

Figura 18 – Primeira atividade do conteúdo de congruência de triângulos



Fonte: Souza e Pataro (2015, p. 223)

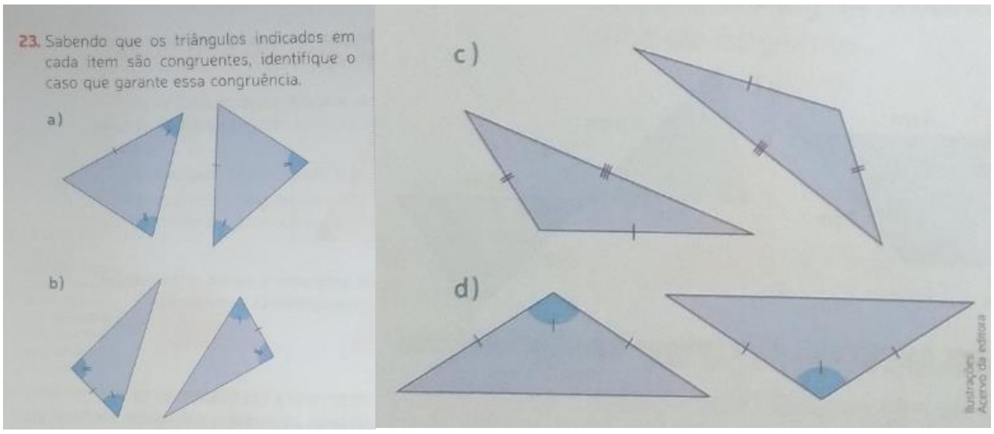
Acreditamos que atividades com essas proporcionam a associação da congruência a outros conteúdos anteriormente estudados, não se limitando à comparação de triângulos em posições simples, o que proporciona o exercício do pensamento geométrico estudantil.

- A segunda atividade (21) propõe que os estudantes usem régua e transferidor para realizar medições em triângulos, identificando quais deles são congruentes. Ressaltamos, no entanto, que outros instrumentos poderiam ser sugeridos, como o compasso, por exemplo, que é comumente associado apenas à criação de circunferências, mas pode ser usado, também, para comparar as medidas de segmentos de uma forma precisa, mas sem quantificá-las, necessariamente.

- Na terceira atividade (22), são apresentados seis triângulos dispostos em uma malha quadriculada, e é solicitado que os estudantes verifiquem pares são congruentes. Um aspecto interessante desta questão, é que ela abre espaço para discussões em sala de aula. Além disso, possibilitam que os estudantes elaborem diferentes estratégias para realizar as verificações, como, por exemplo, utilizar compassos para verificar as medidas das laterais dos triângulos. Outra estratégia que podem utilizar é utilizar os lados de cada quadrado da malha como unidades de medida, mas sem esquecer que eles possuem medidas menores que as suas diagonais.

- Na quarta questão (23), são destacados os pares de lados e ângulos congruentes de alguns triângulos e é solicitado em cada item que sejam identificados os casos de congruência a qual eles se associam. Um aspecto interessante desta atividade é que os casos não aparecem na ordem em que foram apresentados na parte teórica do livro. Apesar de parecer um fato simples, e até mesmo óbvio, este cuidado evita a memorização dos casos de congruência apenas pelos nomes ou siglas, fazendo com que os alunos sintam a necessidade de estudá-los com maior profundidade, compreendendo o que cada um propõe.

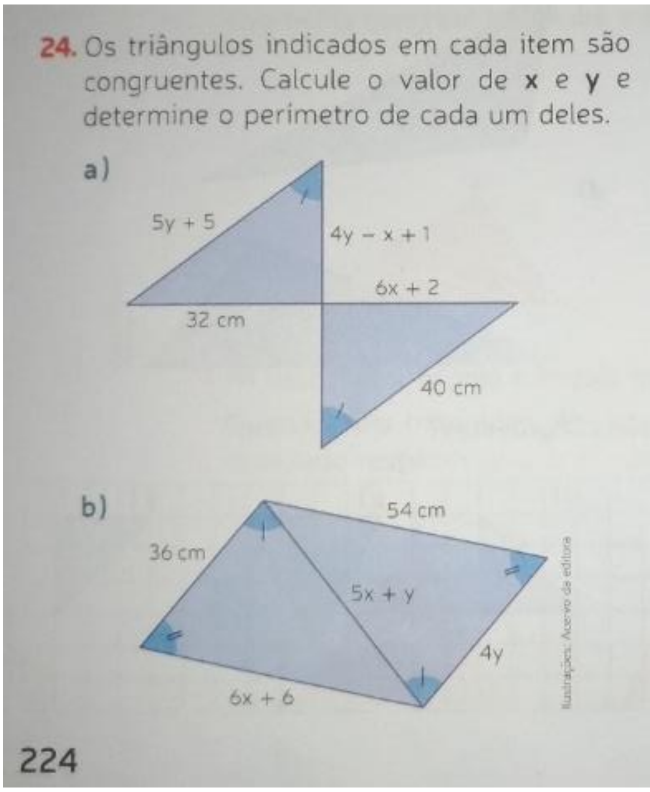
Figura 19 – Quarta atividade do conteúdo de congruência de triângulos



Fonte: Souza e Pataro (2015, p. 224)

- Na quinta questão (24), são mostrados em cada um de seus dois itens, pares de triângulos congruentes, entretanto, com algumas medidas de seus lados expostas em forma de expressões com duas variáveis, conforme exibido na Figura 20 a seguir.

Figura 20 – Quinta atividade do conteúdo de congruência de triângulos

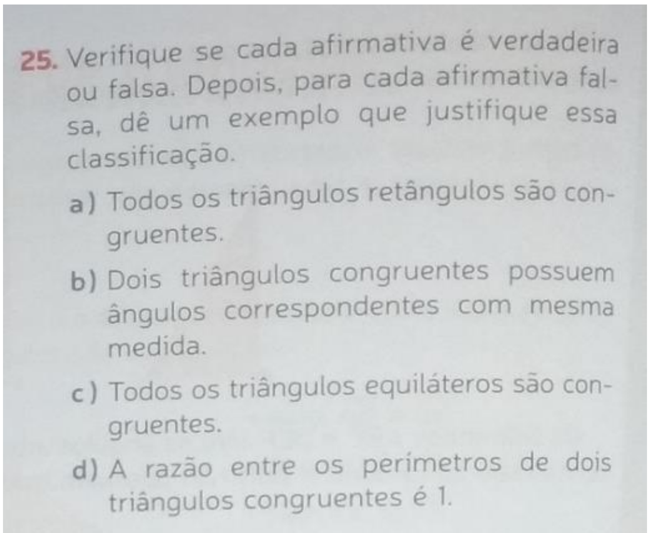


Fonte: Souza e Pataro (2015, p.224)

Observando essas figuras, e utilizando os casos de congruência, os alunos podem estabelecer relações entre os lados correspondentes e igualar a medida de um com a expressão que representa a medida de outro, encontrando assim os valores para x e y, solicitados na atividade. Trata-se de uma tarefa importante, na medida em que associa Álgebra e Geometria, uma conexão que nem sempre é bem explorada em sala de aula, a não ser em conteúdos que naturalmente a envolvem, como os da Geometria Analítica.

- A sexta atividade solicita que os estudantes verifiquem qual das quatro afirmações apresentadas são verdadeiras ou falsas, justificando as suas respostas, conforme mostra a Figura 21. Um ponto interessante é que esta questão vai além da simples associação a cada caso de congruência, fazendo com que os alunos retomem às definições estudadas e construam exemplos para melhor verificar a veracidade de cada caso apresentado.

Figura 21 – Sexta atividade do conteúdo de congruência de triângulos



25. Verifique se cada afirmativa é verdadeira ou falsa. Depois, para cada afirmativa falsa, dê um exemplo que justifique essa classificação.

a) Todos os triângulos retângulos são congruentes.

b) Dois triângulos congruentes possuem ângulos correspondentes com mesma medida.

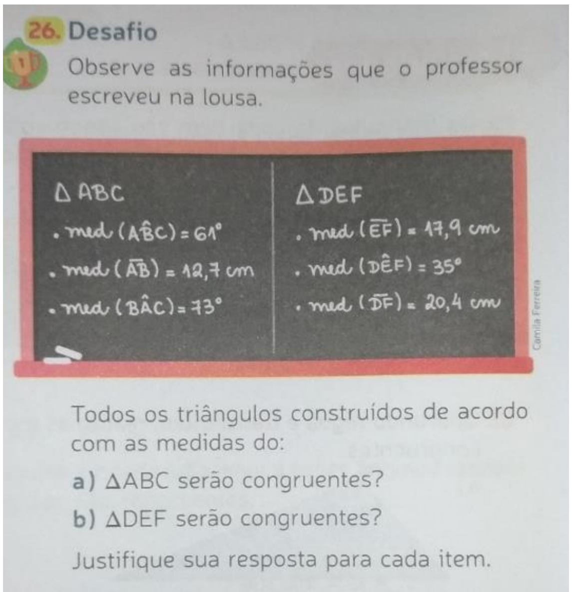
c) Todos os triângulos equiláteros são congruentes.

d) A razão entre os perímetros de dois triângulos congruentes é 1.

Fonte: Souza e Pataro (2015, p.224)

- Na sétima atividade, é apresentada uma situação onde um professor escreve informações sobre dois triângulos em uma lousa e é questionado em seguida se é possível construir-se outros triângulos congruentes aos quais as informações disponibilizadas pelo professor se referem, solicitando-se, também, que os alunos justifiquem suas respostas. Este desafio trata-se da única atividade deste tópico sobre congruência que explora a temática como relações de equivalência, através da ideia de classes de congruência, ainda que isto não esteja explícito em seu comando.

Figura 22 – Sétima atividade do conteúdo de congruência de triângulos



26. Desafio

Observe as informações que o professor escreveu na lousa.

ΔABC
- med$(A\hat{B}C) = 61°$
- med$(\overline{AB}) = 12,7$ cm
- med$(B\hat{A}C) = 73°$

ΔDEF
- med$(\overline{EF}) = 17,9$ cm
- med$(D\hat{E}F) = 35°$
- med$(\overline{DF}) = 20,4$ cm

Todos os triângulos construídos de acordo com as medidas do:

a) ΔABC serão congruentes?

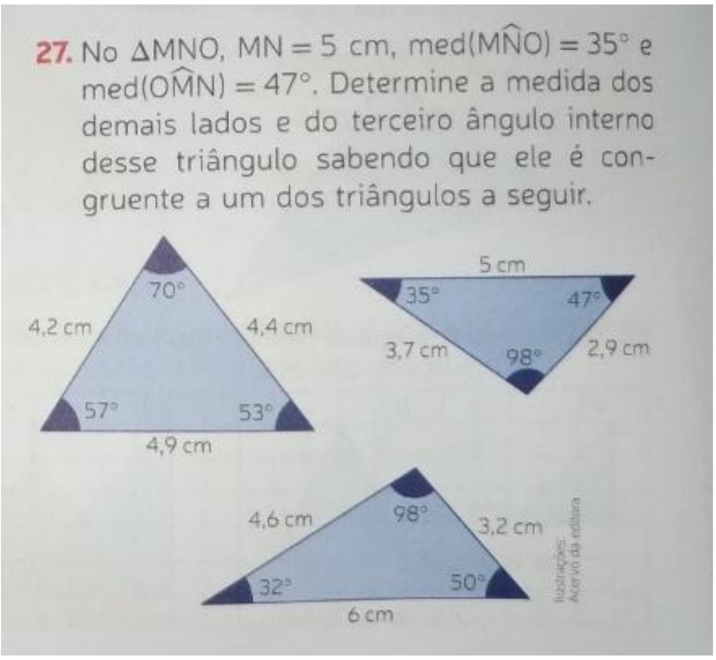
b) ΔDEF serão congruentes?

Justifique sua resposta para cada item.

Fonte: Souza e Pataro (2015, p.224)

- Na oitava atividade, são fornecidas as medidas de um ângulo, de um lado adjacente a ele e de outro ângulo adjacente ao lado, para que os estudantes verifiquem quais são as suas demais medidas. Para isso, terão que observar três triângulos com todas as suas medidas de lados e ângulos informadas, para verificar qual deles é congruente ao triângulo mencionado no comando da questão, conforme mostra a Figura 23 seguir.

Figura 23 – Oitava atividade do conteúdo de congruência de triângulos



27. No ΔMNO, MN = 5 cm, med$(M\hat{N}O) = 35°$ e med$(O\hat{M}N) = 47°$. Determine a medida dos demais lados e do terceiro ângulo interno desse triângulo sabendo que ele é congruente a um dos triângulos a seguir.

Fonte: Souza e Pataro (2015, p. 224)

Essa atividade muito contribuiu no aprimoramento da dinâmica adotada em um dos encontros de nossa pesquisa, na qual elaboramos um jogo de cartas. Acreditamos que por meio da comparação das medidas, formatos e propriedades dos triângulos, os alunos podem formular diferentes estratégias que facilitam a identificação da congruência de quaisquer triângulos, como se fossem algoritmos, o que muito se associa aa alguns dos pilares do PC.

Ao final do capítulo, também são apresentadas algumas questões para revisão, que seguem perspectivas semelhantes às anteriormente analisadas. Por fim, vale destacar que, apesar da variedade de atividades oferecidas para este tópico, o mesmo ainda carece de exemplos e exercícios que associem o conteúdo de congruência de triângulos a situações cotidianas, ou ainda, problemas que levem os estudantes a desenharem triângulos congruentes, fazendo o uso de diversas ferramentas, sejam elas analógicas ou digitais.

De maneira geral, verifica-se que o livro didático de Matemática adotado na instituição campo de nossa pesquisa é atual, explora bem o conteúdo da congruência de triângulos e possui atividades que levam os alunos a aprofundar suas aprendizagens por meio de diferentes tipos de questões.

Verificamos nas questões 2, 4, 5, 7, 8 diferentes abordagens que inspiraram a criação das atividades que realizamos no decorrer dos encontros, com destaque para a quinta atividade, que proporcionou um diálogo entre pensamento algébrico e geométrico.

Além disso, ao longo da exploração teórica do conteúdo da congruência de triângulos, foi possível notar algumas faltas que pudemos contemplar no planejamento e execução de nossas atividades, como foi o caso dos triângulos não congruentes, ou com medidas insuficientes para garantir sua congruência por meio dos casos em estudo.

Ainda contemplando ações associadas à dimensão didática das análises preliminares, realizamos uma entrevista semiestruturada com a professora de matemática que atua nesta turma, a fim de: conhecer melhor a sua prática pedagógica; compreender as ações que já vinham sendo desenvolvidas com a turma; obter informações sobre o comportamento, características e dificuldades dos alunos.

Com 41 anos de idade e quase 20 anos de serviço no setor educacional, a professora é formada em Licenciatura em Matemática, possui especialização em Ensino de Matemática Básica e em Coordenação Pedagógica e mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

A professora relata que já atuou no setor público e privado, ministrando aulas para estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental e, também, de todo o Ensino Médio. Além disso relata que já trabalhou com o Ensino Superior, ministrando aulas para estudantes de

Pedagogia. Atuou também ministrando formações para professores de Matemática de uma empresa que fazia parte, ensinando-os a utilizar pedagogicamente alguns materiais presentes no laboratório de ensino de Matemática de escolas públicas.

Observando todas essas experiências, podemos inferir que a professora possui uma vasta experiência pedagógica e, consequentemente, um olhar mais aberto para a realização de práticas que se diferenciam da forma de ensino tradicionalmente praticada nas aulas de Matemática. Conforme detalharemos mais adiante, a mesma costuma praticar com os alunos jogos e atividades no espaço do laboratório de ensino de matemática da escola.

Ao ser questionada pela quantidade de estudantes que frequentam a turma participante de nossa pesquisa, a professora precisou verificar em sua lista de presença, pois, segundo ela, há uma rotatividade muito grande de alunos, por motivos de desistência ou transferência escolar.

Observando que a professora acessava um portal[18] pelo celular, que continha todos os dados de seus alunos e registros de suas aulas, questionamos o que ela acha do mesmo:

> **Pesquisador**: *Essa plataforma é fácil de usar?*
> **Professora:** *Eu gosto. Porque eu não sou aquele professor que acumula. Aí eu já fiquei aperriada porque eu não fiz a chamada lá (sala de aula foco da nossa pesquisa). Porque eu faço registro de aula e frequência na sala de aula. Eu não levo esse serviço para fazer em casa não.*

Nota-se que, em virtude de sua formação e trabalho pedagógico, a professora possui facilidade em utilizar tal recurso, o que parece ser um sinal positivo a respeito de suas concepções e aceitação do uso de diferentes recursos dentro e fora da sala de aula.

Quanto à quantidade de alunos, a professora respondeu que em média quatorze frequentam suas aulas e que, no máximo, teve dezessete deles presentes em dias de avaliação, sendo que há 22 pessoas matriculadas ao todo.

A professora também comenta que há um grande problema no horário de suas aulas, que no bimestre passado eram todas nos dois primeiros horários das segundas, quartas e quintas-feiras. Segundo ela, alguns alunos costumam chegar apenas no segundo horário, perdendo muitas vezes as explicações dos conteúdos, ou o tempo para responder as avaliações. A docente acrescenta ainda que, felizmente o problema foi um pouco amenizado,

---

[18] O portal Saber é um site de domínio da Secretaria de Educação do Estado da Paraíba (SEDUC-PB) no qual, entre outras funcionalidades, os professores devem registrar dados sobre suas aulas, além da frequência e avaliação dos seus alunos. Disponível em: https://portalsaber.com.br. Acessado em: 07 ago 2020.

porque seus horários nas segundas-feiras foram modificados, assim, as aulas passaram a ser as duas últimas, sendo este o dia mais adequado para a realização de avaliações.

Ao ser indagada se já trabalhou com a turma em anos anteriores, a professora informou que não, pois era outro professor que trabalhava com seus alunos no sétimo ano, porém, ministrou aulas para alguns deles no sexto ano, onde costumava trabalhar alguns conteúdos por meio de jogos analógicos.

A professora acrescentou:

> ***Professora***: *esse ano eu tô meia rebelde, tô só quadro, quadro, quadro (risos)... Eu entrei um pouco desmotivada esse ano, assim, porque foi muito problema, e... a escola trocou de direção, aí estava meio caótico, aí você fica desmotivada. Porque você precisa das coisas, não tem, você precisa de uma chave, ninguém sabe onde está, aí assim, você fica desestimulada... E em questão assim, de disciplinas dos alunos, os alunos estão achando que podem fazer o que querem, assim, tá um pouco complicado. Aí você traz para um laboratório, é toda uma responsabilidade.*

Por meio dessa fala, nota-se a influência que o ambiente escolar, externo à sala de aula, exerce sobre a prática pedagógica dos professores e, consequentemente, sobre a aprendizagem dos alunos, que podem sofrer com os problemas organizacionais e administrativos da instituição. Porém, apesar disso, a professora ainda segue desenvolvendo atividades com jogos, contando com o auxílio de quatro estudantes de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal da Paraíba (IFPB), que participam do Programa Nacional de Iniciação à Docência (PIBID), e realizam investigações em sua sala de aula.

Foi questionado, também, a respeito do que a professora acha sobre o comportamento da turma na qual a pesquisa seria aplicada:

> **Pesquisador:** *O que você me diria sobre o comportamento da turma? São agitados, ou rebeldes...*
> **Professora:** *Não, eles são tranquilos. Eu sinto às vezes uma falta de interesse, mas em relação a comportamento, dá para você trabalhar tranquilamente com eles, você vê que eles não são tão barulhentos, nem trabalhosos. As meninas é que gostam de falar um pouco exaltadas, aí você vai lá e "baixa o volume maria chiquinha". Mas não são ruins de trabalhar não. Às vezes eu fico preocupada porque eles estão muitos bitolados a estar no celular, e isso são em todas as turmas, não é restrito a eles não né. O aluno tá muito focado em celular.*

Por meio dessa fala, a professora alega que a turma não é muito agitada, ou barulhenta, e que costuma realizar as atividades propostas, quando motivada a fazê-las. Também é possível perceber que, como em muitas salas de aula, há um problema quanto ao uso indevido de *smartphones* durante os horários de aula, o que parece preocupa-la.

Quando questionada a respeito das maiores dificuldades da turma, a professora informou detalhes que foram de grande importância para a verificação que as atividades que estávamos a planejar buscavam atender as necessidades dos alunos e respeitavam suas limitações, conforme pode ser confirmado no trecho de diálogo a seguir:

> **Pesquisador:** *Em relação aos conteúdos de Matemática, qual as maiores dificuldades que a turma possui?*
> **Professora:** *Acho que principalmente, por incrível que pareça, as operações. Eu tenho turma de terceiro ano, a deficiência é a mesma é incrível isso.*
> **Pesquisador:** *Operações com números inteiros?*
> **Professora:** *Principalmente, e equação do primeiro grau. Pronto, esse meu oitavo ano, como tem alunos que foram do alumbra, a professora do alumbrar é uma professora polivalente, então ela não tinha formação em Matemática. Então eles não viram equação do primeiro grau. Aí tô trabalhando em Geometria com ângulos complementares, suplementares né, aí eu boto equação no meio da história. Aí eu meio que tenho de começar do zero, porque tem aluno ali que não viu.*

A partir dessa resposta, podemos notar que a turma possui dificuldades em conteúdos básicos que, geralmente, são fontes de dúvidas e medo entre alunos de todos os anos do Ensino Fundamental e Médio. Segundo a professora, um dos motivos que pode ter causado essa dificuldade é a participação de alguns alunos no programa Alumbrar, pelo fato de que a docente responsável por realizar seu acompanhamento não possuía formação específica em Matemática.

O projeto Alumbrar é voltado para estudantes que possuem idade avançada para o ano que estão cursando na escola, tendo por objetivo fornecer aulas que façam o uso de processos, métodos, procedimentos e materiais que motivem os alunos a aprender e os levem a avançar de ano, de modo que consigam ingressar no Ensino Médio no tempo adequado.

O Alumbrar faz o uso de uma metodologia de ensino inspirada no programa Telecurso 2000, chamada Telessala, que tem origem nos anos de 1970 e 1980, no Brasil. Assim, em uma sala de aula com equipamento de TV ou projetor, os alunos assistem a aulas com acompanhamento de um professor, que recebe uma formação pedagógica para isto.

Apesar da intencionalidade positiva do programa, notamos que os alunos que estudam na turma participante da nossa pesquisa não conseguiram progredir, voltando para o Ensino Fundamental Regular e, ainda, com dificuldades na compreensão de conteúdos matemáticos considerados fundamentais. Esses fatos apontam para a necessidade de reflexões sobre as possibilidades e limitações, vantagens e desvantagens de programas que, como este, buscam auxiliar na superação da defasagem relacionada à idade e nível escolar em que os estudantes se encontram.

Ainda na entrevista, foi questionado sobre quais os recursos que a professora costuma utilizar ao ministrar suas aulas, dos quais ela mencionou materiais como o tangram e jogos produzidos pela empresa Mind Lab[19], que possuía parcerias com a escola. Por meio dessa parceria, foi possível a aquisição de uma série de recursos que vinham sendo utilizados para realizar competições entre os alunos, tendo em foco a aprendizagem de alguns conteúdos que possuíam dificuldades. Segundo a professora, atualmente os materiais são utilizados para a aplicação de atividades e pesquisas com os estudantes do PIBID.

De maneira geral, podemos destacar que por meio dos dados coletados nesta entrevista, e também, na análise do livro didático utilizado pela professora com os alunos, obtivemos informações de grande importância para o desenvolvimento do trabalho pedagógico que realizamos, o que possibilitou considerar facilidades ou dificuldades relacionadas à aprendizagem da Matemática, bem como outras particularidades da turma, complementadas com as observações realizadas durante as aulas, que serão destacadas no tópico seguinte.

5.3 DIMENSÃO COGNITIVA

Para contemplar a dimensão cognitiva de nossas análises preliminares, realizamos algumas observações em sala de aula, registrando em caderno de campo as características de comportamento e de aprendizagem da turma, especialmente no que diz respeito à geometria plana.

Nossas observações foram realizadas em um período de doze horas/aula, distribuído no período de 09 a 19 de setembro de 2019. Inicialmente, a professora apresentou o pesquisador à turma, explicando sua função, bem como para que serviriam as observações a serem registradas.

Durante esse período, foi possível verificar que a escola campo desta investigação está situada em uma região de alta vulnerabilidade social onde a grande maioria de seus alunos enfrenta problemas relacionados a pobreza, além da violência que os persegue nos locais onde residem, nos arredores da escola e dentro da mesma.

---

[19] Disponível em: https://www.mindlab.com.br. Acessado em: 05 jul. 2020.

Essa realidade também se faz presente na turma participante da investigação, que contou com a presença de apenas dez dos 22 alunos matriculados na turma. Por meio dessa diferença, podemos confirmar os problemas de evasão mencionados pela professora ao longo da entrevista anteriormente realizada.

Semanalmente, a turma possui seis aulas de Matemática, que ocorrem nas segundas, quartas e quintas, sendo as duas últimas aulas na segunda-feira e as duas primeiras nas quartas e quintas feiras. Essas aulas são ministradas pela professora de acordo com o tipo de conteúdo a ser estudado: nas segundas-feiras são desenvolvidas atividades e estudados conteúdos relacionados ao campo da álgebra, comumente chamada pelos alunos de ‘matemática’; nas quartas-feiras, são estudados conteúdos relacionados à Geometria; nas quintas-feiras são desenvolvidas práticas com jogos matemáticos, ministradas em conjunto com os alunos de licenciatura que participam do PIBID.

Ressaltamos que essa organização das aulas de Matemática adotada pela professora pode parecer uma importante alternativa para a abordagem de diferentes conteúdos deste componente curricular, no entanto, separar aulas de Matemática em Álgebra e Geometria pode conduzir os alunos à uma compreensão de que a Geometria trata de um conjunto de conteúdos à parte da Matemática, ou ainda, ao achismo de que não há relações entre os temas que são estudados em cada aula.

Outro problema que pode ocorrer em decorrência desta separação adotada pela professora é o entendimento de que as atividades realizadas por meio dos jogos sejam apenas para se divertir e preencher o tempo das aulas, não tendo tanta importância quanto dos demais dias. Apesar disso, verificamos que os alunos lidam bem com os jogos educativos e, conforme apresentaremos mais adiante, a professora desenvolve algumas ações para evitar que pensamentos como esses se tornem comuns entre os alunos.

No que diz respeito à estrutura física da escola, há um laboratório de ensino de matemática, um de robótica, uma biblioteca e uma sala voltada ao Atendimento Educacional Especializado (AEE). Desses ambientes, a professora da turma costuma utilizar o laboratório de ensino de Matemática, especialmente nas quintas-feiras, quando são desenvolvidas atividades em conjunto com os licenciandos do PIBID.

Entretanto, há um problema de acesso a esse espaço, pois professores de outros componentes curriculares costumam acessá-lo para exibir filmes durante as aulas, devido ao projetor fixo que possui. Esse problema acaba por gerar alguns imprevistos, como aconteceu no dia em que foi realizada a entrevista com a professora: outra pessoa estava a usar o espaço do laboratório para exibir filmes para alunos de outra turma, em um horário que já havia sido reservado com a diretoria, que gerencia os horários de acesso aos laboratórios.

Feitas essas considerações e partindo para as observações que de fato foram registradas durante as aulas, destacamos inicialmente um problema relacionado ao atraso de alguns dos alunos nas aulas que ocorrem nos primeiros horários, iniciadas às 13:00. Percebemos que a professora sempre está presente pontualmente na sala de aula, porém é com dez a quinze minutos depois que a maioria da turma está presente em sala. Além disso, são perdidos mais alguns minutos esperando e ordenando que os alunos se sentem e se organizem, para que assim a aula se inicie.

Essa observação nos permitiu adaptar a realização de nossas atividades posteriores, dosando a quantidade de ações a serem desenvolvidas de acordo com o espaço de tempo que tínhamos disponível em cada aula.

Partindo para a descrição do perfil e do comportamento dos alunos, destacamos que passaremos a utilizar neste tópico e nos demais itens deste trabalho asas siglas de A1 a A13 para nomear cada sujeito. Essas siglas significam Aluno 1, Aluno 2, e assim sucessivamente, sendo esta uma forma de preservar as suas identidades.

Ressaltamos que apesar de a pesquisa ter sido realizada com apenas dez alunos, em nosso primeiro dia de observação haviam treze na turma. No entanto, três deles não frequentaram as aulas nos demais dias. Como mantivemos a numeração adotada inicialmente, seguiremos sem mencionar os alunos representados pelas siglas A3, A8 e A12.

O Quadro 5 a seguir ilustra a distribuição dos estudantes na sala, onde a cor verde representa os do sexo masculino e as de cor laranja, do feminino. Os espaços de cor cinza representam as cadeiras vazias, pois a sala possui capacidade para comportar 40 alunos.

Quadro 5 – Organização da sala e distribuição dos alunos

Professora	Lousa			
	A4	A5	A8	A9
	A7	A6		
A1				A10
A2				A11
A3			A12	A13

Fonte: Dados da pesquisa

Em geral, tanto no laboratório de ensino de matemática, quanto em sala de aula, os alunos com maior afinidade costumam sentar-se próximos, entretanto, sem motivo aparente, sempre os do sexo masculino costumam sentar-se distantes das do sexo feminino. Ressaltamos que não é nossa intenção adentrar em investigações sobre as relações de gênero e as implicações delas sob a aprendizagem estudantil, no entanto, destacar essa organização da sala de aula é importante para a compreensão da formação dos três grupos que posteriormente foram escolhidos pela turma.

Para detalhar a sequência de observações realizadas, apresentamos a seguir um pequeno resumo do que registramos nos dias 09, 11, 12 e 18 de setembro no caderno de campo e, também, algumas considerações.

- No dia 09 de setembro, segunda-feira, a professora iniciou a aula com a correção, em conjunto com a turma, da prova realizada na semana anterior. Durante a correção, apenas os sujeitos A5 e A7 participavam, seja fazendo perguntas, ou respondendo aos questionamentos da professora, embora nem sempre de maneira correta.

Em uma conversa com a turma, ela destacou que o grande problema dos alunos estava na interpretação dos comandos das atividades, alertando que não é admissível responder-se a uma questão de matemática sem fazer a leitura do que ela propõe.

Nesse dia, a sala estava relativamente silenciosa, enquanto que o barulho vinha mais do ambiente externo e das outras salas de aula. Sempre que um aluno, ou grupos de alunos passavam pelo corredor, o barulho ecoava pela sala, prejudicando, de certa forma, a concentração da turma, que se distraía com frequência.

Seguindo com a correção, a professora alerta mais uma vez para uma outra dificuldade que os alunos possuíam: localizar pontos no plano cartesiano. Entre os erros mencionados, a marcação de pontos fora do eixo x ou y, quando na verdade, deveriam estar sobre eles foi um dos mais frequentes entre toda a turma.

Por volta das 17h, apesar de uma parte dos alunos se mostrarem exaustos, A4, A5, A6 e A7 começaram a conversar em voz alta, tentando, também, comentar assuntos paralelos com a professora para distraí-la de modo que não se realizassem mais as correções. Porém a professora, procurou sempre a melhor forma de interagir com essas alunas e finalizar o que havia planejado. Próximo das 17:30, a aula se encerrou.

As informações coletadas nesse primeiro dia apontam para a necessidade de se estabelecer diálogos com os alunos ao se abordar os conteúdos teóricos, para que se sintam envolvidos e possam expressar suas dúvidas. Apontam também para o cuidado que se deve ter em relação aos horários, onde a partir das 17:00 notou-se que o desempenho da turma já não era mais o mesmo do início da aula. Esses apontamentos foram todos analisados e visados ao se elaborar as atividades desta pesquisa, para que as aulas fossem realizadas da melhor maneira possível.

- No dia 11 de setembro, quarta-feira, a aula inicia-se por volta de 13:20, com os dez alunos em sala. A professora começa explicando o que seria feito durante as duas aulas, em seguida, a mesma separa A4, A5 e A6, que mesmo assim ainda continuaram a conversar por um período.

Depois, com a turma mais calma, é realizada a correção da prova de Geometria, que abordou o tema Ângulos. Toda a turma começa a copiar as perguntas e respostas em seu caderno, junto com a professora, que as escreve na lousa. Enquanto as questões eram corrigidas em conjunto com a turma, apenas A5 e A7 costumavam responder as indagações realizadas. Apesar disso, ainda era possível perceber que a maioria dos demais alunos ainda possuíam dúvidas em relação a algumas nomenclaturas, como: ângulos internos, externos e correspondentes. Ao iniciar-se a segunda aula, A2 entrou na sala, porém sem trazer caderno, lápis, ou qualquer outro tipo de material. Parecia agitado e passou o resto da aula conversando com A13.

Passados alguns minutos da segunda aula, a professora acabou por se equivocar ao escrever a resposta de uma das atividades, devido ao barulho de A4 e A5, que tentavam sempre desviar sua atenção. Nesse momento, ela separa A4 de A5 trocando-as de lugar e, assim, as duas passam a fazer mais silêncio.

Após as correções, inicia-se a abordagem teórica do conteúdo de ângulos colaterais. Em meio as explicações, A5 faz uma pergunta referente ao que seriam ângulos suplementares, a professora faz um desenho na lousa e tenta explica-la. Ao questionar se a mesma havia entendido, a aluna afirma que não, e a professora faz o mesmo desenho novamente e tenta explicar com outras palavras, mas a A5 parecia ainda não ter entendido, apesar de ter afirmado com um tom de incerteza que entendeu.

Encerrada a abordagem teórica e explicação do conteúdo, a professora escreve na lousa duas atividades para a turma, e logo depois, realiza a chamada, utilizando um aplicativo para celular, que funciona como uma caderneta digital, e possui algumas funcionalidades que permitem o registro de aulas, da frequência dos alunos e de suas notas. A aula encerra-se com a correção destas atividades.

Nesse segundo encontro, importantes impressões emergem sobre a turma: a necessidade de certo cuidado com as conversas paralelas de A4 e A5; dificuldades com algumas nomenclaturas comuns aos conteúdos de Geometria, que fazem referência à temas previamente estudados; importância e necessidade da utilização de diferentes representações ao tentar esclarecer as dúvidas da turma.

- No dia 12 de setembro, quinta-feira, a aula foi realizada no laboratório de ensino de matemática, com os alunos do PIBID. Neste dia, a professora precisou se ausentar da sala, e as atividades ficaram por conta dos estudantes de licenciatura. Nesse dia, estavam presentes no laboratório nove estudantes e com eles foi aplicado um jogo educativo.

Os alunos se empenharam em conseguir resolver os desafios do jogo, tanto pelo fator lúdico, quanto pela participação nas atividades que, segundo a professora, também somariam pontos para uma das avaliações do bimestre.

Ao longo dessa aula, pudemos notar alguns aspectos que deveríamos dedicar certa atenção quando fôssemos trabalhar com o jogo que planejávamos. Entre eles, destacamos: a necessidade de se esclarecer todas as regras e formas de utilizar o jogo; fornecimento de guias impressos; revisão do conteúdo antes do jogo; importância de prestar auxílio aos grupos, verificando se as jogadas realizadas realmente estão sendo válidas. Todas essas observações foram consideradas nas atividades realizadas posteriormente, contribuindo de forma significativa no envolvimento com a turma e compreensão de suas necessidades pedagógicas.

- No dia 18 de setembro, segunda-feira, estiveram presentes todos os dez alunos. Nesta aula, foi feita uma revisão sobre o conteúdo de ângulos formados por duas retas paralelas e uma transversal. A5 e A7 mais uma vez eram as alunas que interagiam com a professora, respondendo aos seus questionamentos e compartilhando algumas dúvidas, enquanto que o resto da turma permaneceu em silêncio, copiando no caderno conteúdo que era escrito na lousa.

No segundo horário, foram feitos alguns exemplos que envolviam a ideia de ângulos suplementares. A5 e A6 apresentaram algumas dúvidas sobre o que a ideia significava, especialmente porque o exemplo feito na lousa possuía um ângulo em uma posição na qual elas não estavam acostumadas a visualizar.

Depois, a professora foi fazendo exemplos mais complexos e apenas A7 conseguia acompanhar suas explicações e foi a primeira a responder todas as atividades propostas ao final da aula, que encerrou-se por volta de 17:30.

Lançando nosso olhar sobre todas as aulas, podemos obter um panorama geral sobre alguns aspectos cognitivos da turma que, apesar de seus problemas relacionados ao comportamento e horários de chegada, apresenta certa curiosidade em aprender, especialmente quando são utilizados jogos e outros tipos de recursos que proporcionem sua interação e criatividade.

Vale destacar as necessidades que verificamos, especialmente na aula realizada no laboratório de ensino de Matemática, como: fornecimento de materiais para auxiliar os alunos a relembrarem as regras dos jogos durante seu uso; agendamento de horários com a diretoria da escola para utilizar este espaço; cuidados com as chaves; horários de entrada e saída dos alunos; entre outros detalhes.

Todas essas observações guiaram o desenvolvimento de nossa pesquisa, auxiliando na determinação de variáveis macrodidáticas e microdidáticas. Assim, buscamos nos atentar a alguns fatos, como o conhecimento prévio de alguns alunos sobre ângulos e congruências (de segmentos e ângulos), bem como suas dificuldades, como, por exemplo, na identificação e interpretação dos ângulos quando posicionados em locais diferentes dos quais eles costumam visualizar no livro e atividades propostas em sala de aula. Consideramos também que a turma possui maior facilidade em trabalhar com jogos e materiais manipuláveis, conforme evidenciado na observação das atividades aplicadas pelos estudantes do PIBID.

Assim, nas análises a priori, buscamos desenvolver atividades que além de abordar o tema congruência de triângulos fossem capazes de valorizar os conhecimentos prévios da turma, auxiliar no esclarecimento de suas dúvidas e superação de dificuldades, conforme será abordado na próxima seção.

6 ANÁLISES A PRIORI

Nesta fase, levando em consideração os dados obtidos na fase anterior, elaboramos as hipóteses desta pesquisa, levando em consideração aspectos referentes às características da turma e também as conexões que poderão ser estabelecidas entre a Geometria Plana e o PC. Destacamos a seguir cada uma dessas hipóteses:

- É possível estabelecer conexões entre o PC e o ensino e a aprendizagem da Geometria;
- A aprendizagem do conteúdo de congruência de triângulos envolve o desenvolvimento de habilidades associadas ao PC;
- O jogo das congruências possibilita uma fixação do conteúdo de congruência de triângulos;

Para validar essas hipóteses, elaboramos quatro atividades que abordavam a temática da congruência de triângulos, considerando especialmente as observações coletadas nas fases anteriores da ED, que revelaram a preferência dos alunos por jogos analógicos. Entre essas atividades, também realizamos um momento de exposição dialogada sobre os casos de congruência.

Nos subitens a seguir, detalharemos como cada uma dessas ações foram planejadas, assim como seus objetivos e possíveis associações com as habilidades do PC, tomando por base as que foram apontadas por BBC Learning (2015).

6.1 ATIVIDADE 1 – VERIFICANDO A CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS PELA DEFINIÇÃO

A elaboração desta atividade se deu por meio da adaptação do material publicado por Murari e Barbosa (1992), que propõem práticas que auxiliam a abordar as temáticas de congruência e não congruência de triângulos. Apesar de se tratar de um trabalho desenvolvido há quase vinte anos, percebemos que a metodologia apontada pelos autores apresenta diversas conexões com o PC, que se tornam evidentes através das ações propostas, que levam os alunos a pensar geometricamente e computacionalmente.

Para a elaboração dos materiais desta atividade, seguimos algumas das orientações dos autores em relação às medidas das figuras, realizando também algumas adaptações. Todos os triângulos usados nessa atividade foram elaborados no GeoGebra e impressos[20] utilizando-se papel do tipo 120g/m² (O modelo se encontra disponível no Apêndice E). Após gerados via impressão, os materiais foram recortados com precisão, de modo que não perdessem propriedades como o tamanho dos lados, ou medida dos ângulos dos triângulos.

Além dos triângulos, também foram preparadas algumas folhas de registros (cujo modelo se encontra disponível no Apêndice F), destinadas à representação de algumas informações solicitadas durante a atividade.

Foi requisitada à direção da escola a utilização de materiais de desenho geométrico como transferidor, par de esquadros, régua e compasso que, em nosso caso, existiam em quantidade suficiente no laboratório de ensino de Matemática da escola, de modo que todos os alunos puderam utilizá-los.

A atividade consistiu na medição dos lados e ângulos dos triângulos de mesma cor e verificação de quais eram congruentes. Para todos os pares, as duplas deveriam anotar na folha de registros informações como: cor dos pares, número de lados e ângulos congruentes, quantidade de elementos congruentes, se os triângulos coincidiam por superposição e qual foi o método utilizado pela dupla para verificar tal congruência.

Portanto, o objetivo geral dessa atividade foi motivar os alunos a aprenderem diferentes formas de utilizar os recursos de medição para verificar a congruência de triângulos por meio da sua definição. Além disso, pretendeu-se também conduzir os alunos à percepção de que, independentemente de sua cor ou posicionamento no espaço, duas figuras congruentes não alteram suas propriedades.

Ao ser elaborada, esta atividade também visou o desenvolvimento de algumas ações que mobilizassem habilidades associadas ao PC, como:

- Reconhecimento de padrões, ao tentar verificar quais triângulos possuem o mesmo formato e, também, ao organizá-los de acordo com suas cores;
- Abstração, ao rotacionar, movimentar e sobrepor as figuras, para verificar quais características possuem em comum e que seriam relevantes para garantir sua congruência;
- Abstração, ao utilizar ferramentas do kit geométrico para mensurar as medidas dos lados e ângulos internos dos triângulos, deixando de lado outros aspectos como a cor, por exemplo;

[20] Em caso de reaplicação deste material, ressaltamos a importância de não alterar a quantidade de páginas por folha, para que as propriedades dos triângulos sejam preservadas.

- Algoritmos, quando os alunos tiveram que elaborar, ao final da atividade, um passo a passo para verificar a congruência de triângulos;

Também podemos destacar algumas habilidades do PC, previstas no trabalho de Barr e Stephenson (2011) que em nossa perspectiva podem ser mobilizadas nesta atividade, como: coleta, análise e representação de dados, pois os participantes terão que anotar todas as informações que obtiveram por meio da manipulação dos triângulos na folha de registros. Também supomos que essa prática poderia auxiliar no desenvolvimento da paralelização, na medida em que a turma poderá verificar, em paralelo, a congruência dos lados e dos ângulos, sobrepondo alguns dos triângulos.

Na etapa de análise a posteriori, confrontaremos todas essas suposições com as nossas observações e registros, verificando quais delas de fato se concretizaram, ou ainda, quais outras associações entre o PC e a aprendizagem da Geometria podem ser evidenciadas.

6.2 ATIVIDADE 2 – CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS E RELAÇÕES DE EQUIVALÊNCIA

Na segunda atividade, ainda seguindo e adaptando a proposta de Murari e Barbosa (1992), propomos que os alunos agrupassem alguns triângulos conforme regras que seriam delimitadas ao longo da aula, como, por exemplo, agrupar os triângulos que eram equiláteros, isósceles ou escalenos, verificando as relações que podiam ser estabelecidas entre os elementos de cada grupo. Dessa forma, a atividade teve por objetivo levar a turma a compreender que a congruência de triângulos é uma relação de equivalência.

Enquanto materiais, utilizamos alguns triângulos, cujas medidas foram adaptadas de Murari e Barbosa (1992), conforme pode ser verificado no material presente no Apêndice G[21]. Também foram utilizados dez grupos de sete saquinhos de cor escura, para que cada dupla formada no dia da aplicação das atividades pudesse utilizá-los para agrupar os triângulos conforme as características solicitadas. Em conjunto com esses materiais, os alunos ainda usaram os mesmos objetos de desenho geométrico da atividade do encontro anterior.

Seguindo a proposta de Murari e Barbosa (1992), essas atividades foram aplicadas visando que os alunos:

- Percebam o que são classes e relações de equivalência;

---

[21] Ressaltamos as mesmas recomendações feitas para o material anterior quanto à sua impressão e recorte

- Compreendam o que significa o representante de uma classe de equivalência;
- Descubram que a relação de congruência entre triângulos é uma relação de equivalência;
- Compreendam o que significa o representante de uma classe de triângulos congruentes;
- Aprendam a classificar os triângulos de acordo com as características de seus lados ou de seus ângulos internos;

Junto a esses objetivos estão as habilidades do PC, que esperávamos ser mobilizadas na medida em que os alunos realizam ações, como:

- Manipular e organizar os triângulos de acordo com suas diferentes propriedades referentes aos lados, ângulos e cores. Para isso, eles devem realizar ações como: a decomposição do monte de triângulos em classes de equivalência; reconhecimento de padrões entre os triângulos, seja em relação ao seu formato, cores ou congruência;

- Alterar com segurança os elementos de um agrupamento de triângulos, reconhecendo-os como pertencentes a uma classe de equivalência. Para realizar tais ações, a turma deve abstrair as propriedades de cada uma das classes formadas, comum aos triângulos que nela estiverem presentes;

- Desenvolver estratégias para agrupar os triângulos com facilidade, que funcionarão como algoritmos, que poderão ser utilizados em todas as outras atividades;

6.3 ATIVIDADE 3 – APRENDENDO OS CASOS DE CONGRUÊNCIA POR MEIO DO GEOGEBRA

Este momento consistiu em uma pausa entre as atividades, para o estudo dos casos de congruência, com a utilização e criação de algumas das representações sugeridas por Murari e Barbosa (1993), entretanto utilizando o *software* GeoGebra.

As representações dinâmicas tiveram por objetivo conduzir aos alunos à percepção e aprendizagem de que existem outras formas de se verificar a congruência entre triângulos, sem a necessidade de buscar todas as suas medições. Para isso, foram preparadas algumas situações explicando os casos de congruência e alguns de não congruência, tomando por base o que propõe Boaler (2018), quando menciona a importância de mostrar exemplos onde determinadas propriedades matemáticas funcionam e quando não funcionam.

Os comandos destas atividades foram elaborados utilizando-se a plataforma *Canva*[22], para qual foram exportadas algumas imagens dos ícones do GeoGebra e avatares elaborados a partir do aplicativo *Bitmoji*[23]. Assim, por meio desses recursos, foi desenvolvido um conjunto de slides com orientações para a descoberta dos casos de congruência entre triângulos.

Para melhor detalhar as ações sugeridas aos alunos, precisamos destacar que como foram extraídas de uma obra publicada por Murari e Barbosa em 1993, as atividades tiveram que passar por algumas adaptações, especialmente porque a proposta dos autores é voltada ao uso de materiais analógicos, como régua, compasso e transferidor. (MURARI; BARBSOA, 1993).

Segundo os autores, o principal objetivo destas atividades é “descobrir quantas e quais medidas é suficiente conhecer para ter um representante de uma classe de congruência de triângulos e os "casos" de congruências de triângulos”. (MURARI; BAROSA, 1993, p. 47). Nesse sentido, eles propõem uma série de construções nas quais são investigadas todas as possibilidades de comparação entre os elementos correspondentes de dois triângulos, a fim de verificar sua congruência, chegando, até mesmo, a analisar a ideia de que é possível triângulos com cinco pares de elementos congruentes não apresentarem uma relação de congruência.

Entretanto, como a proposta de Murari e Barbosa é um tanto extensa, dada a investigação de quantas e quais medidas são suficientes para verificar se dois triângulos podem ou não ser congruentes, também ajustamos a quantidade de casos estudados. Adaptamos ainda a linguagem utilizada, para que se adequasse à realidade da turma na qual aplicamos a nossa pesquisa.

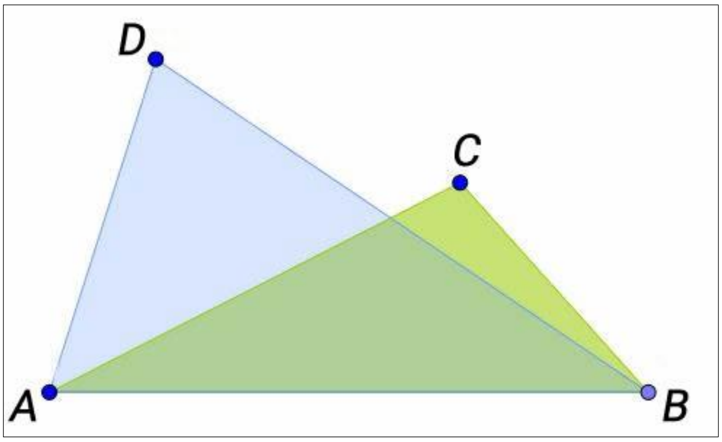
Dessa forma, as atividades iniciaram com os itens 3 e 4 da proposta dos autores, que corresponderam às nossas construções 1 e 2, sendo estas utilizadas como uma forma de os alunos conhecerem um pouco sobre as ferramentas do GeoGebra. Nesses itens, realizamos mudanças em algumas das medidas e também nas perguntas que eram direcionadas aos alunos, de modo a facilitar a compreensão do que era proposto. Como a complexidade das construções não era tão grande comparada aos demais, percebemos que elas foram adequadas para este primeiro contato com as ferramentas que seriam usadas.

Na figura a seguir, é possível observar uma imagem representativa da construção 1:

---

[22] Plataforma on-line de design gráfico, destinada à criação de diversos tipos de conteúdo visuais. Disponível em: https://www.canva.com. Acessado em: 05 mai. 2020.
[23] Aplicativo voltado à construção, personalização e compartilhamento de avatares. Disponível em: https://www.bitmoji.com. Acessado em: 05 mai. 2020.

Figura 24 – Imagem da representação utilizada na construção 1



Fonte: Adaptado de Murari e Barbosa (1993)

No caso apresentado na Figura 24 é possível observar, por exemplo, que apesar de terem o lado AB em comum, os triângulos ABC e ABD não são congruentes. Por meio dos passos seguidos na construção desse caso e das discussões traçadas, este item pretendeu conduzir os alunos à compreensão de que saber apenas a medida de um dos lados não é suficiente para verificar se dois triângulos possuem uma relação de congruência ou, em outras palavras, que se dois triângulos possuem *apenas* um par de lados em comum, eles não são congruentes.

Logo depois, a atividade segue para o sétimo item da proposta de Murari e Barbosa (1993), que correspondeu à terceira construção de nossa atividade e contemplou, também, adaptações nas medidas dos ângulos e nos questionamentos direcionados aos alunos. Na sequência, foram adaptados os itens de número onze, doze e treze, que corresponderam às Construções 4, 6 e 5 de nossa atividade.

Ressaltamos que na Construção 6 foi necessária a proposição de passos diferentes dos que foram elaborados por Murari e Barbosa (1993), pois os autores apresentam o caso LAAo como derivado do caso ALA através da ideia de que a soma dos ângulos internos em um triângulo deve ser 180º, entretanto fomos um pouco além, levando os alunos à entenderem o funcionamento deste caso de congruência por meio da elaboração e manipulação dos triângulos.

Dessa forma, este item específico foi proposto por meio de dois triângulos já construídos no GeoGebra e a turma foi conduzida a alterar as medidas de um desses triângulos. Especificamente, os alunos precisaram observar se quando as medições de um lado, um ângulo e um ângulo oposto a esse lado de um triângulo eram iguais as de outro, que correspondiam com elas, eles passariam a ser congruentes.

Em relação às ferramentas do GeoGebra, nossa atividade fez utilização de: ‘círculo dados centro e raio’, para simular o compasso quando determinada a medida de sua abertura em cm; ‘ponto’, para marcar determinados locais no plano, ou pertencentes às semirretas ou segmentos de já desenhados; ‘intersecção entre dois objetos’, quando necessária a marcação de pontos de intersecção entre os objetos; ‘segmento’, ‘segmento com comprimento fixo’ e ‘semirreta’; ‘polígono’, para desenhar os triângulos; ‘ângulo’ e ‘ângulo com amplitude fixa’, que simularam o uso do transferidor.

Acreditamos que a utilização do GeoGebra e de suas ferramentas possibilitou algumas vantagens para esta atividade, como a exploração de habilidades associadas ao PC, com destaque para a abstração. Destacamos que essa atividade também foca no exercício de habilidades de visualização e de representação de figuras e ideias geométricas sob diferentes medidas e posicionamentos.

Entretanto, apesar das vantagens, também nos deparamos com algumas limitações, que levaram à adaptação dos passos propostos por Murari e Barbosa (1993). Por exemplo, a ferramenta ‘segmento de reta com comprimento fixo’, do GeoGebra, gera um segmento sempre na horizontal, o que poderia gerar limitações na compreensão dos alunos, fazendo-os entender que os casos de congruências funcionariam apenas em triângulos em determinada posição. Para contornar essa limitação, foi sugerido que a turma buscasse rotacionar esses segmentos, evitando assim a aprendizagem dos casos de congruência com triângulos sempre em uma única posição.

Ainda no GeoGebra, alguns passos acabaram por se tornar mais curtos, ou extensos, dada a necessidade da seleção e alteração de alguns parâmetros nas figuras, como o destaque que um ângulo deveria ser construído no sentido horário, ou anti-horário, e clicando-se em alguns pontos em determinada ordem. Caso essas instruções não fossem seguidas pelos alunos, as construções propostas não funcionariam.

Por exemplo, Murari e Barbosa (1993, p. 61) propõem para o caso Lado, Lado, Lado o seguinte diálogo:

> 01. Vamos ver agora o caso que vocês estavam esperando. Conhecemos as medidas dos 3 lados. Anotem: 8 cm, 6 cm e 7 cm.
> 02. Desenhem com a régua um segmento de 8 cm. Coloquem nomes nos extremos: A e B.

03. Com auxílio da régua abram o compasso na medida 6 cm. Façam um arco de circunferência com centro em A.
04. Com auxílio da régua abram o compasso na medida 7 cm. Façam centro em B e tracem o arco de circunferência, cruzando o outro arco.
05. Marquem no cruzamento o nome do ponto: C.
06. Tracem AC e BC.

Em nossa proposta, esses passos foram transformados em:

01. Construa um segmento de reta AB com 8 cm;

02. Agora, com a ferramenta círculo dados centro e raio, clique em A e faça uma circunferência de 6cm;

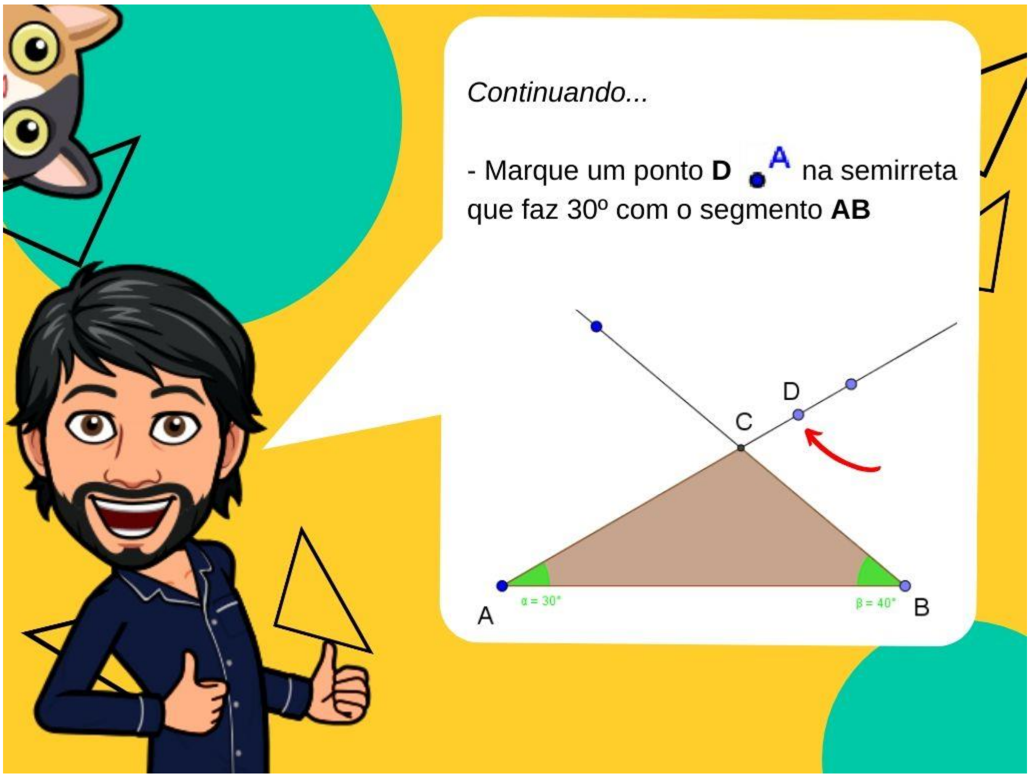
03. Faça o mesmo com o ponto B, e construa uma circunferência de 7cm;

04. Agora, com a ferramenta interseção de dois objetos clique no local onde as duas circunferências coincidem;

05. Construa o triângulo ABC;

Em cada um desses passos, além das adaptações realizadas, adicionamos os ícones de cada ferramenta do GeoGebra, para também auxiliar a turma, conforme demonstra a Figura 25 a seguir:

Figura 25 – Recorte dos slides a serem usados pelos alunos



Fonte: Elaborado pelos autores

Após a criação de todas essas adaptações, e antes de aplicar a atividade com a turma, passamos para uma depuração de cada uma das construções propostas, buscando investigar não apenas eventuais equívocos, mas possíveis ambiguidades nas instruções que adaptamos. Assim, buscamos deixar essas instruções em uma linguagem mais clara possível, dadas as dificuldades relacionadas à Geometria e interpretação de comandos de atividades que os estudantes haviam apresentado nas aulas que observamos nas fases anteriores da ED.

Preparamos também uma folha com exemplos e um resumo dos casos de congruência, conforme pode ser visualizado no Apêndice H. A mesma foi entregue com o objetivo de auxiliar os alunos para que pudessem se preparar para a aula seguinte.

6.4 ATIVIDADE 4 – JOGO DAS CONGRUÊNCIAS

Essa atividade consistiu na aplicação do jogo das congruências, que tem por objetivo conduzir os alunos à utilização dos casos de congruência discutidos e aprendidos na aula anterior. O jogo das congruências é composto por 79 cartas, que possuem grupos com funções específicas. Sete delas são chamadas cartas objetivo, pois possuem imagens de triângulos dos mais variados tipos, quanto aos seus lados (equiláteros, isósceles, escalenos) e ângulos (acutângulo, obtusângulo e retângulo). Os triângulos presentes nessas cartas possuem todas as medidas de seus lados e ângulos destacadas, para que os jogadores as visualizem ao compará-las com as outras cartas do jogo.

Para cada uma das sete cartas objetivo, há outras seis cartas, chamadas “cartas de congruência”, que contém triângulos congruentes à elas. Entretanto, os triângulos presentes nessas cartas possuirão apenas algumas medidas de lados e ângulos, que permitirão aos alunos verificar se eles são congruentes ou não ao de suas cartas objetivo, através dos casos de congruência anteriormente estudados.

Além dessas cartas, haverá, também, dez cartas com penalizações, sendo quatro com a mensagem *passe a vez* e quatro com a mensagem *o próximo colega deverá passar a vez.* As outras duas cartas desse grupo de penalizações possuirão a mensagem: *pegue uma carta de cada colega, coloque na mesa e misture com as demais, embaralhando*-as.

Também existirão quatro cartas que inverterão o sentido do jogo, alterando a ordem dos jogadores, além de duas cartas coringas, que serão consideradas como triângulos congruentes ao que o jogador possui em sua carta objetivo, dando-lhe mais chances de vencer.

O jogo ainda terá quatorze cartas chamadas cartas incongruentes, porque não terão medidas suficientes para comprovar sua congruência com qualquer uma das demais 49 cartas do jogo.

O layout para reprodução do jogo se encontra disponível no Apêndice I. Para sua impressão, recomendamos as mesmas orientações das atividades 1 e 2, tanto em relação ao tipo de folha, quanto em relação à manutenção de suas dimensões.

As regras do jogo são:

- Podem participar do jogo uma quantidade de duas a quatro pessoas;
- No início, deverão ser formados dois montes de cartas, sendo um deles com as cartas objetivo e o outro com as demais;
- Em seguida, cada jogador receberá uma carta objetivo e deverá permanecer com ela até o fim do jogo;
- Deverá ser escolhido um jogador para iniciar o jogo, que seguirá no sentido horário;
- Cada jogador, em sua vez, deverá retirar uma carta de congruência do monte, comparando-a com a sua carta objetivo ou, se preferir, com as outras que possui em mãos, de modo que ele verifique se ela é congruente ou não à classe de congruência representada pelas suas cartas;
- Caso alguma carta de congruência retirada do monte possua um triângulo congruente ao da carta objetivo do jogador, ele deverá ficar com ela em seu baralho. Esse triângulo será congruente a todos os outros que ele possui em mãos, pois fazem parte da mesma classe de equivalência;
- Caso alguma carta de congruência retirada do monte não possua um triângulo congruente ao da carta objetivo do jogador, ele deverá devolvê-la. Ao fazer isso, deve posicioná-la com a face que possui o triângulo virada para baixo em um terceiro monte, que ficará com as cartas que não serviram aos jogadores que as retiraram;
- Entre as cartas de congruência há seis que possuem triângulos com incógnitas em algumas de suas medidas. Para adicionar essas cartas em seu baralho, os jogadores terão que responder aos seus colegas qual o valor que deverá ser atribuído à incógnita para que o triângulo representado na carta seja congruente aos que estão nas outras cartas que ele possui em mãos. Seus colegas, por sua vez, deverão verificar se ele acertou ou não.
- Sempre que um jogador ficar com uma carta de congruência, seus colegas deverão verificar se sua escolha foi correta ou não. Caso um jogador equivocadamente pegue uma carta de congruência com um triângulo incongruente ao de sua carta objetivo, e adicione

ao seu baralho, ele deverá devolvê-la ao terceiro monte, junto de uma das cartas que possui em sua classe de equivalência (exceto a carta objetivo);

- Ao se deparar com a carta “Pegue uma carta de cada colega, coloque na mesa e misture com as demais, embaralhando-as”, o jogador não poderá pegar a carta objetivo de seus colegas;
- Vencerá o primeiro jogador que obtiver as seis cartas com triângulos congruentes ao de sua carta objetivo, e a partida será encerrada.

Espera-se que ao utilizar o jogo das congruências, os alunos exercitem o seu pensamento computacional na medida em que realizem ações como:

- Reconhecer padrões entre as cartas presentes no jogo;
- Elaborar estratégias para verificar a congruência de quaisquer triângulos (algoritmos);
- Abstrair as propriedades dos triângulos contidos nas suas classes de equivalência;

Vale ressaltar que os triângulos presentes nas cartas de congruência foram posicionados de diferentes formas (rotacionados ou refletidos em relação ao da carta objetivo) e seus lados e que ângulos foram destacados, de modo a permitirem a identificação de cada caso de congruência, exigindo, no entanto, que o aluno pense geometricamente, para verificar se os triângulos apresentam ou não informações suficientes para provar tal característica.

6.5 ATIVIDADE 5 – FINAL

Nesta última atividade, realizada de maneira escrita abordando todos os conteúdos apreendidos nas aulas anteriores, objetivamos levar os alunos a aplicarem os conhecimentos que foram construídos ao longo da nossa pesquisa, como uma forma de prepara-los para as futuras atividades que encontrarão ,seja em livros didáticos, exames de avaliação, ou em outros materiais com conteúdos associados. (Ver apêndice J).

Essas atividades foram elaboradas de acordo com as observações que realizamos na literatura sobre o tema da congruência de triângulos e também foram baseadas nas que analisamos no livro didático utilizado pela professora com a turma. A partir das questões presentes nela esperávamos que as seguintes habilidades do PC fossem mobilizadas:

- Algoritmos, ao utilizarem as estratégias que elaboraram para verificar a congruência de triângulos durante o uso do jogo das congruências, assim como os casos de congruência que aprenderam durante as outras aulas;
- Abstração, ao observarem propriedades específicas nos triângulos representados nas imagens da atividade;
- Abstração, ao verificar a congruência de triângulos usando-se a ideia de relações de equivalência;
- Abstração, ao representarem os casos de congruência por meio de desenhos;

7 EXPERIMENTAÇÃO

Nesta fase, aplicamos a engenharia didática desenvolvida, realizando também a coleta de todas as informações relevantes para a análise a posteriori e validação. Relatamos nesta seção como cada uma das atividades apresentadas anteriormente foram aplicadas ao longo dos cinco encontros realizados, destacando também, as adaptações que se fizeram necessárias no decorrer das aulas.

No primeiro encontro, iniciamos retomando alguns conceitos geométricos com a turma, envolvendo temáticas como: elementos de um triângulo, congruência entre segmentos de reta e entre ângulos. Verificamos ainda se a turma possuía habilidade em utilizar materiais de desenho geométrico, como régua, compasso, transferidor e esquadros.

Para realizar essa retomada, foi exibida uma imagem com a representação de um triângulo, de tamanho suficiente para que todos da turma visualizassem características como as medidas dos seus lados e a amplitude de seus de ângulos internos. A partir disso, perguntamos aos alunos a respeito do que cada um desses elementos significava para eles, de modo que fosse possível compreender suas respostas e esclarecer eventuais erros ou dúvidas.

Logo depois, ainda neste primeiro encontro, a turma foi organizada em duplas, que receberam um conjunto de 22 triângulos, que formam onze pares, conforme o modelo disponível no Apêndice E. Com esses materiais, as duplas foram conduzidas a utilizar os instrumentos de medição entregues no início da aula para verificar quais pares de triângulos eram congruentes, escrevendo na folha de registros todos os detalhes solicitados, como: cor dos pares de triângulos, quantidade de pares de lados congruentes, quantidade de pares de ângulos congruentes, quantidade total de elementos congruentes e métodos utilizados.

Ao final da atividade, foi solicitado aos estudantes que escrevessem um passo a passo, contando quais ações realizaram na atividade para verificar a congruência ou não congruência dos triângulos. A aula foi concluída com uma discussão, que oportunizou aos alunos compartilharem com seus colegas, e com o pesquisador, suas estratégias para a verificação das congruências entre os pares de triângulos, a maneira pela qual preencheram suas folhas de registros, as suas dúvidas e também os seus erros.

No segundo encontro, as duplas da aula anterior foram mantidas e a aula foi dividida em cinco momentos. Para melhor detalhá-los explicaremos cada um nos tópicos a seguir:

- No primeiro momento do segundo encontro, iniciamos solicitando que as duplas organizassem os triângulos de acordo com suas cores, colocando cada conjunto de triângulos em um dos saquinhos. Feitas essas ações, foi pedido que cada dupla misturasse os saquinhos, de modo que não fosse mais possível saber qual a cor dos triângulos que eles continham.

Em seguida, um membro de cada dupla foi convidado a retirar um triângulo de um saquinho aleatório. Foram então direcionados os seguintes questionamentos para toda a turma: *1) Qual a cor do triângulo retirado? 2) É possível saber as cores dos demais triângulos desse saquinho? Por quê?*

Depois, as duplas foram convidadas a retirar um outro triângulo, de outro saquinho, respondendo aos questionamentos: *1) vocês retiraram o mesmo triângulo? 2) Qual a cor desse triângulo? É a mesma do anterior? 3) Precisamos retirar quantos triângulos de um saquinho para saber a cor dos demais que estão dentro dele? Por quê?*

Por conseguinte, foi realizada uma discussão, para que os alunos compreendessem que os triângulos foram separados em classes e que os elementos de cada uma delas possuem determinada característica em comum, nesse caso a cor.

- No segundo momento do segundo encontro, a turma foi orientada a retirar todos os triângulos dos saquinhos, espalhando-os na mesa. Depois, todos tiveram que colocar em um saquinho os triângulos que possuem os três lados com a mesma medida (equiláteros), em outro os que possuem dois lados com a mesma medida (isósceles) e em outro os que possuem os três lados com medidas distintas (escalenos). Para melhor fazer tal separação, foi sugerido que eles buscassem estabelecer conexões com os métodos que aprenderam na Atividade 1 e que buscassem por padrões entre as figuras.

Depois, de maneira semelhante ao momento anterior, um membro de cada grupo foi convidado a retirar um triângulo de cada saquinho. Por conseguinte, as duplas discutiram junto com o pesquisador sobre quantos lados congruentes os triângulos que eles retiraram do saquinho possuíam.

Dessa forma, foram feitos os questionamentos: *1) Qual a quantidade de lados congruentes que os triângulos dos demais saquinhos possuem? Por quê? 2) Qual a cor do triângulo que vocês retiraram? 3) Se vocês retirassem outro triângulo do mesmo saquinho em que foi retirado o primeiro, eles teriam a mesma cor? Por quê? 4) Quantos triângulos precisamos retirar de cada saquinho para saber que eles possuem algo em comum? Por quê? O que eles possuem em comum?*

Após essa discussão, foi informado para a turma que qualquer um desses triângulos, que foram retirados de cada saquinho, pode ser chamado como representante de sua classe de equivalência, ou seja, ele representa os demais triângulos de seu saquinho, pois possui uma característica comum a eles (quantidade de lados). Também foi perguntado se o triângulo de um saquinho poderia ser utilizado para representar o de outro e solicitado que as duplas apresentassem suas justificativas. Foi questionado ainda se os alunos perceberam algum padrão entre os triângulos, porém, ninguem havia encontrado ainda.

Devido ao tempo pra execução da aula, que já se encontrava bem avançado em relação à quantidade de ações que os alunos ainda iriam fazer e, também, em razão da dificuldade dos mesmos em retomar as ideias de ângulos agudos, retos, obtusos e rasos, tivemos que cancelar o terceiro momento, que exigia conhecimento desse conteúdo. Segundo a professora, os alunos ainda não tinham aprendido com profundidade quis eram as diferenças entre os tipos de ângulos (agudo, reto, obtuso e raso).

- No quarto momento do segundo encontro, foi retomada com a turma a definição de triângulos congruentes e, depois, solicitado que retirassem todos os triângulos dos saquinhos para organizá-los, desta vez, de acordo com sua congruência.

Após terminarem, iniciou-se um momento de diálogo onde perguntou-se quais estratégias eles utilizaram para classificar os triângulos e coloca-los em cada saquinho. E assim, cada uma das duplas foi explicando os métodos utilizados.

Dando continuidade, os alunos foram convidados a retirar um triângulo de um saquinho quaisquer e responder: *1) quais as medidas dos lados desse triângulo? E de seus ângulos internos? 2) ele possui as mesmas medidas dos demais triângulos que estão no mesmo saquinho que ele? Por quê? 3) este triângulo é congruente aos demais do seu saquinho? Por quê?*

Após esse diálogo, foi esclarecido para a turma que um triângulo pode representar os demais de sua classe, pois eles possuem características equivalentes, sendo nesse caso, a congruência de lados e ângulos. Além disso, foi explicado que como todos os triângulos presentes dentro de um saquinho possuem as mesmas medidas dos lados e dos ângulos correspondentes, eles são congruentes, diferente do que ocorreu nas outras atividades, pois eles possuíam apenas alguma propriedade em comum que não era suficiente, ou adequada, para garantir tal relação. Após essas discussões, partimos para o último momento da aula.

- No quinto momento do segundo encontro, foi projetada a imagem de três triângulos congruentes e questionado aos alunos: *se o primeiro triângulo é congruente ao segundo, e o segundo ao terceiro, como garantir que o primeiro é congruente ao terceiro?*

Apesar de a turma se encontrar agitada, ansiosa pelo fim da aula, alguns alunos conseguiram compreender a pergunta e apresentar respostas próximas da ideia de que a congruência de triângulos é uma relação de equivalência.

No terceiro encontro, foi abordada a temática dos casos de congruência entre triângulos, visando que os alunos aprendessem cada um deles e percebessem, também, que seria possível verificar se dois triângulos são ou não são congruentes, observando-se apenas algumas de suas medidas.

. Conforme descrito nas análises a priori, os alunos construíram e utilizaram algumas representações dinâmicas no GeoGebra, por meio das quais puderam realizar algumas reflexões sobre cada um dos casos onde ocorre a congruência e outros onde não é possível verificar a sua existência.

As atividades referentes a este encontro foram realizadas no laboratório de informática da escola. Durante sua aplicação, os alunos foram organizados de acordo com as duplas da atividade anterior, ficando cada uma em um computador.

Inicialmente alguns alunos sentiram dificuldades em utilizar os computadores, alguns deles sequer já tinham usado um mouse na vida, pois sua maior interação era com dispositivos de toque de tela, como *smartphone* e *tablet*. Foi necessário então garantir que todos soubessem usar os periféricos, aproveitamos esse momento para fazer um pequeno exercício com as ferramentas do GeoGebra que seriam usadas.

Nesse exercício, explicamos para a turma como abrir um novo projeto e salvá-lo, bem como propomos a realização de construções com as ferramentas que seriam usadas durante as aulas: ‘ponto’, ‘intersecção entre dois objetos’, ‘segmento’, ‘segmento com comprimento fixo’, ‘semirreta’, ‘polígono’, ‘círculo dados centro e raio’, ‘ângulo’ e ‘ângulo com amplitude fixa’. Por meio desse exercício, a turma pôde se familiarizar com a interface e algumas das ferramentas do GeoGebra.

Dando continuidade, avançamos para as construções iniciais, sempre prestando suporte para a turma, quando solicitado. Apesar das dificuldades de alguns alunos em utilizar os computadores e interpretarem as instruções dadas nos slides, o seu desempenho como um todo foi considerado satisfatório, com apontamentos de melhoria em sua interação com os computadores, e de aprofundamentos em seus conhecimentos geométricos.

Ao final da aula, foi exibida uma síntese de todos os casos, e os alunos receberam um pequeno resumo (Ver Apêndice H), contendo imagens e explicações de cada caso de congruência. Todos deveriam estudar essa síntese, para que na próxima aula pudessem utilizar o jogo das congruências com eficácia.

No quarto encontro, foi aplicado o jogo das congruências, que levou toda a turma a aplicar os conhecimentos adquiridos em aulas anteriores sobre a temática da congruência de triângulos.

No começo da aula, informamos aos alunos que as duplas seriam desfeitas e os organizamos em três grupos, sendo o grupo 1 composto pelas alunas A5, A6 e A7, o grupo 2 composto pelos alunos A10, A11 e A13, e o grupo 3 composto por A1 e A2. Os demais alunos, A4 e A9, não estavam presentes.

Em seguida, foram apresentadas todas as regras do jogo e os alunos tiveram a oportunidade de levantar suas dúvidas sobre o conteúdo a ser abordado. Dando continuidade, foi entregue um baralho para cada grupo, uma folha contendo as regras do jogo e outra contendo descrições de cada caso de congruência, para que os alunos pudessem retomar ideias quando estivessem com dúvidas.

Encerradas as explicações, foi dado início ao jogo, onde foi possível perceber que os alunos se sentiram muito mais envolvidos do que nos momentos anteriores, devido suas experiências prévias com este tipo de recurso pedagógico. Observamos que fatores como: competitividade, recompensas, rankings, cooperativismo, entre outros, fortemente presentes nos jogos digitais de entretenimento também estavam envolvidos na jogabilidade do jogo das congruências, possibilitando um maior envolvimento da turma, até mesmo dos alunos mais desatentos.

Nessa atividade, buscamos registrar os diálogos estabelecidos em cada grupo, assim como as estratégias desenvolvidas por eles ao tentarem verificar se duas cartas eram congruentes ou não. Para isso, utilizamos três câmeras, localizadas próximo às mesas em que cada grupo estava.

Ao final da aula, os baralhos foram recolhidos e sugeriu-se que os alunos utilizassem as folhas que entregamos com cada caso de congruência para se preparar para o último encontro, que teve por foco a aplicação de uma atividade escrita.

Foram também anunciadas as pontuações dos alunos, de acordo com o ranking representado no Quadro 6 a seguir:

Quadro 6 – Ranking da turma

Jogador	Pontuação
A2	5
A5	2
A1, A6, A10, A11, A13	1

Fonte: Dados da pesquisa

Cada vitória acumulava um ponto para o aluno vencedor. Vale ressaltar que a pontuação do A2 atingiu valores maiores que os demais devido suas estratégias para verificar a congruência de triângulos, sendo ele o que menos deixou cartas congruentes passarem despercebidas. Este aluno também anotou todos os casos de congruência em seu caderno enquanto jogava, sendo esta uma forma de memorizar todo o conteúdo, segundo ele. Os demais alunos também desenvolveram estratégias específicas para memorizar os casos de congruência ou quando não era possível estabelecer relações de congruência, fato que resultou na identificação de diversas conexões entre o conteúdo em estudo e o PC, conforme será explanado nas análises a posteriori.

No quinto encontro, os alunos receberam atividades impressas, que abordaram a temática da congruência de triângulos e foram respondidas individualmente. Durante a aplicação destas atividades, os alunos solicitaram por diversos momentos ajuda do pesquisador para melhor compreender o que deveria ser feito em cada item, sendo este um reflexo de sua dificuldade em interpretar o comando textual de algumas atividades que foi relatado pela professora em sua entrevista.

Apesar de se tratar de uma atividade escrita, percebemos que a mesma também foi capaz de mobilizar habilidades que se associam o PC, conforme será evidenciado no item a seguir que reúne a análise dos dados coletados em todas as atividades realizadas na pesquisa.

8 ANÁLISE A POSTERIORI E VALIDAÇÃO

Para validar as conexões identificadas, seguindo o percurso metodológico da ED, confrontaremos os resultados obtidos com os dados coletados nas análises preliminares e com as ações e as habilidades associadas à Geometria e ao PC que esperávamos ser desenvolvidas pelos alunos em cada uma das atividades realizadas.

Para processar os dados coletados nas quatro principais atividades desta pesquisa utilizamos o *software MaxQDA*[24], em sua versão de testes. A utilização desse recurso possibilitou a organização e fácil visualização dos dados, que foram transcritos e classificados de acordo com as seguintes habilidades do PC e do PG:

- Decomposição
- Reconhecimento de padrões
- Algoritmos
- Abstração
- Transformação
- Medição
- Reconhecimento das propriedades
- Reconhecimento dos elementos

A partir dessas classificações, foram gerados dados qualitativos e quantitativos, que culminaram na geração de algumas categorias de análise e de informações gráficas, que foram cruciais para a compreensão das conexões investigadas nesta pesquisa. A elaboração de tais categorias apoiou-se nos pressupostos teóricos de Bogdan e Biklen (1994), sendo distribuídas em:

- Reconhecimento das características, elementos e propriedades dos triângulos;
- Elaboração de conjecturas sobre a congruência ou não congruência de triângulos;
- Comparação, manipulação e medição de triângulos;

Por meio das categorias de análise, iremos refletir sobre os resultados alcançados em cada uma das atividades da pesquisa, utilizando, também, os registros coletados nas fases

[24] O MaxQDA é um software para a análise de dados qualitativos advindos de textos, entrevistas, transcrições, revisões de literatura, gravações de voz, vídeos, entre outras fontes. Por meio de suas ferramentas é possível transcrever, codificar, categorizar e representar informações qualitativas de diferentes maneiras. Disponível em: https://www.maxqda.com. Acessado em: 05 jul. 2020.

anteriores da ED desenvolvida, para se observar a evolução da turma quanto à aprendizagem de conceitos da Geometria associados à temática congruência de triângulos.

Nesse sentido, os resultados serão apresentados nos itens a seguir, de acordo com cada uma das atividades aplicadas, destacando-se as falas e produções dos alunos, assim como algumas inferências a respeito das conexões que pudemos estabelecer entre o PC e o PG.

8.1 VERIFICANDO A CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS PELA DEFINIÇÃO

Conforme mencionado nas análises preliminares, o objetivo geral desta atividade foi motivar os alunos a aprenderem diferentes formas de utilizar os recursos de medição para verificar a congruência de triângulos por meio da definição. De maneira geral, a turma apresentou boa receptividade para esta atividade, apesar de suas dificuldades em: utilizar os instrumentos de medição, identificar os elementos dos triângulos e também elaborar estratégias para tornar essa medição mais prática.

Além dessas dificuldades, a turma também enfrentou desafios ao registrar as informações solicitadas, confundindo muitas vezes a quantidade de lados e ângulos congruentes com as suas respectivas medidas.

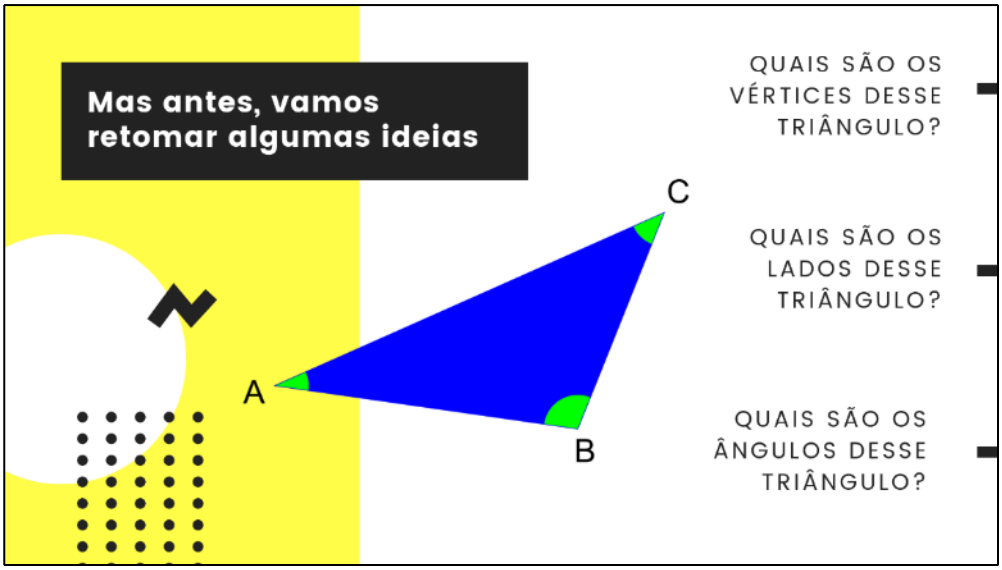
No decorrer da atividade, grande parte dos alunos preferiu utilizar o método da superposição de triângulos para verificar sua congruência, recorrendo aos instrumentos de medição apenas quando haviam dúvidas ou discordâncias entre os membros das duplas.

No subtópico a seguir, destacaremos as informações coletadas através das falas e produções dos alunos, evidenciando também as conexões entre o PC e a aprendizagem do conteúdo estudado. Vale ressaltar que os nomes dos alunos, presentes nos diálogos transcritos, foram substituídos por seus identificadores, definidos na fase de análises preliminares desta pesquisa (A1, A2, A4, A5, A6, A7, A9, A10, A11, A13).

8.1.1 Categoria 1

Neste subtópico, destacamos os dados que se associam à categoria 1: reconhecimento das caraterísticas, elementos e propriedades dos triângulos. Logo no início desta atividade, realizamos uma retomada sobre alguns conceitos a respeito dos elementos de um triângulo, conteúdo em que alguns dos alunos apresentavam dificuldades. Para auxiliá-los, utilizamos a imagem representada na Figura 26:

Figura 26 – Imagem utilizada para retomar a ideia dos elementos de um triângulo



Fonte: Elaborado pelos autores

O trecho de diálogo a seguir retrata a abordagem feita com a turma, bem como a participação dos alunos, que sentiram algumas dificuldades ao nomear os elementos do triângulo exibido.

> **Pesquisador** *Primeiramente, eu gostaria que vocês me dissessem quais são os vértices desse triângulo representado na imagem.*
> **A5** *B?*
> **Pesquisador** ‘*Quais são os vértices*’*, são mais de um.*
> **A5** e **A1** *A, B e C?*
> **Pesquisador** *A, B e C, justamente as extremidades. Exato.*
> **Pesquisador** *E os lados quais seriam?*
> **A5** *A e B?*
> **Pesquisador** *A e B? É assim que fala?*
> **A2** *É não.*
> **Pesquisador** *E como é?*
> **A2** *Também não sei.*

A partir disso é explicado para a turma que existem duas notações para se identificar os lados de um triângulo, que são: ou letras maiúsculas, que utilizam os indicadores dos vértices que se encontram em cada uma das extremidades dos segmentos que compõem os lados dos triângulos, ou uma letra minúscula do alfabeto para cada lado. Apesar disso, no decorrer da pesquisa, pudemos notar que a turma ainda apresentou dificuldades em representar os lados de um triângulo. Em muitos casos, os alunos escreviam ou falavam, por exemplo, “A e B” para identificar o lado AB.

Dando continuidade, após as explicações, a turma é questionada em relação aos ângulos da figura apresentada. Como no dia em que esta atividade foi aplicada, a professora da turma se fez presente, ela também auxiliou os alunos a retomarem algumas ideias sobre os triângulos, conforme é destacado a seguir:

> **Pesquisador** *Gostaria de saber também onde é que estão os ângulos desse triângulo.*
> **Professora** *Nessa figura, eles estão de que cor?*
> **A13** e **A2** *Verde.*
> **Professora** *Então vocês sabem o que é aquela parte verde ali?*
> **A13** *É o ângulo.*
> **Professora** *E o nome dele lá?*
> **A13** *ABCA.*
> **A2** *ABC.*
> **Pesquisador** *Como podemos representar esse ângulo? Usamos apenas uma letra?*
> **A2** *E bota um acento.*
> **Pesquisador** *Exato, bem lembrado.*

A partir desse diálogo, observou-se que os estudantes estavam acostumados a utilizar a notação simples, onde é indicado apenas o vértice do ângulo. Como utilizamos outra notação em nossas atividades, onde também são indicados os lados do ângulo, explicamos para todos como utilizá-la. Dessa forma, na Figura 26, por exemplo, o ângulo que os alunos representariam, por exemplo, como $\hat{A}$ poderia ser representado, também, como $C\hat{A}B$.

A seguir, destacamos um breve diálogo traçado no momento em que foi explicado aos alunos sobre tal notação:

> **Pesquisador** *Então se eu fosse me referir a esse ângulo aqui ($A\hat{B}C$), como é que eu chamaria ele?*
> ***A2*** *ACB!*
> **Pesquisador** *ACB? Preste atenção, será que não falta algo?.*
> **A5** *Né ABC não?*
> **Pesquisador** *Prestem atenção nas letras envolvidas. Partimos de que vértice? Em que vértice do triângulo está o vértice do ângulo?*
> **A6** *BCA?*
> **A13** *ACB!*
> **A5** *ABC.*
> **Pesquisador** *Vejam, fazemos o seguinte percurso: A...B...C... e o circunflexo fica aqui no B, indicando que o vértice do ângulo está em B. Então prestem atenção nessa notação, porque nas outras aulas, vocês farão atividades em que aparecem essas notações. Então se tiver alguma dúvida, pode ficar à vontade para falar, para perguntar e a gente vai esclarecendo, certo?*

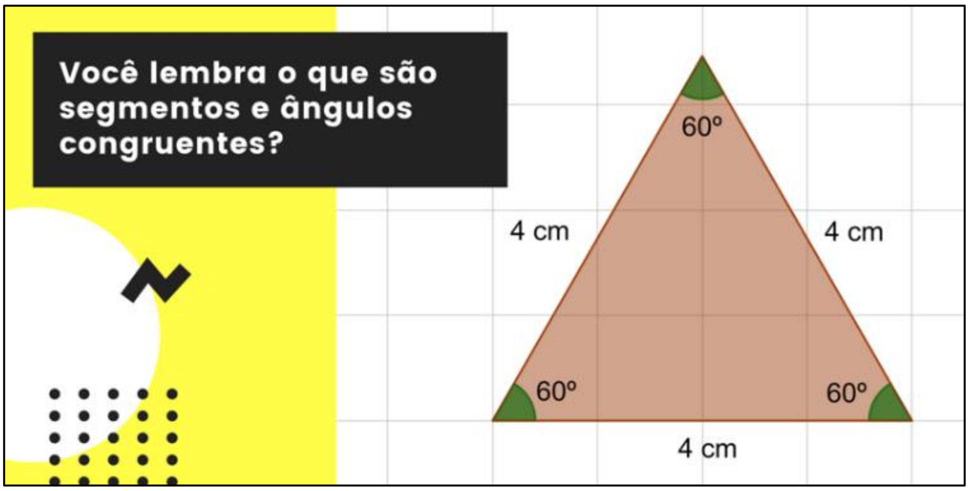
Apesar dos esforços para revisitar esta temática da notação de ângulos, os alunos ainda apresentaram dificuldades em retomar ou aprender outras ideias associadas, levando à realização de algumas adaptações na execução da atividade, conforme será esclarecido mais adiante.

8.1.2 Categoria 2

Dando continuidade, neste subtópico, apresentaremos alguns dados que se associam à categoria 2 - elaboração de conjecturas sobre a congruência ou não congruência de triângulos. Durante a retomada, levamos em consideração o que foi observado na fase de análises preliminares, na qual verificamos por meio das observações e da entrevista com a professora da turma que alguns alunos compreendiam a ideia de ângulos e segmentos congruentes.

Assim, tendo em vista essas informações, projetamos a imagem a seguir:

Figura 27 – Imagem utilizada para retomar a ideia de ângulos e segmentos congruentes



Fonte: Elaborado pelos autores

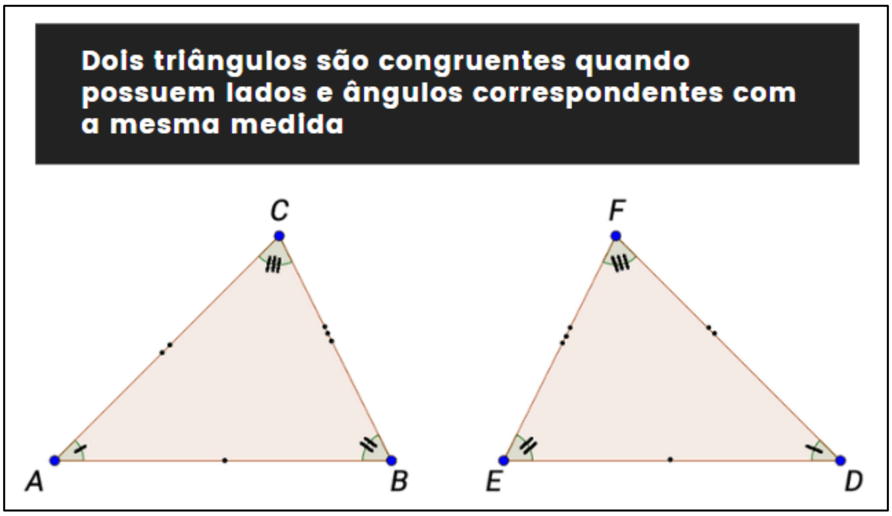
A partir dessa imagem, estabelecemos o seguinte diálogo:

> **Pesquisador** *Tenho outra pergunta para vocês. Sabem o que são segmentos congruentes?*
> <silêncio>
> **Pesquisador** *A4, você lembra o que são segmentos congruentes?*
> **A4** *<silêncio>*
> **Pesquisador** *Congruentes, esse nome traz alguma coisa na cabeça de vocês?*
> **A5** *A mesma medida*
> **Pesquisador** *Olha aí ela se lembrou. Segmentos congruentes são aqueles que têm a mesma medida. Da mesma forma, que segmentos congruentes possuem a*

mesma medida, os ângulos congruentes também têm a mesma medida. Então, por exemplo, nesse triângulo aqui da imagem (Figura 27), esses três ângulos seriam congruentes?
A5 *Sim.*
Pesquisador *Justamente. E esses lados aqui, também seriam congruentes porque possuem a mesma medida.*
Pesquisador *Mas esse assunto que a gente vai ver: Congruência de triângulos, o que será que quer dizer?*
<silêncio>
Pesquisador *Então, dois triângulos são congruentes quando possuem todas as suas medidas de lados e ângulos internos congruentes.*
A2 *Faz sentido.*

Iniciamos neste diálogo a construção da ideia de triângulos congruentes, partindo da noção de lados e ângulos congruentes, que já era de conhecimento da turma, devido ao que foi estudado em aulas anteriores à nossa pesquisa. Para dar continuidade a este momento, é apresentada a seguinte figura:

Figura 28 – Definição de congruência de triângulos apresentada para a turma



Fonte: Elaborado pelos autores

Por meio da imagem representada na Figura 28, iniciamos um diálogo a respeito da congruência de triângulos, tomando como ponto de partida a ideia da correspondência entre lados e entre ângulos, conforme representado no trecho a seguir:

Pesquisador *Dois triângulos são congruentes, quando possuem lados e ângulos correspondentes com a mesma medida.*
...
Pesquisador *Olha só gente, quando eu falo aqui lados e ângulos correspondentes, o que será que isso significa?*

A5 *Que corresponde à mesma medida?*
Pesquisador *Quase isso. Vamos olhar aqui para esse lado AC (Figura 28). Será que tem outro lado parecido com ele?*
A5 *Tem, AB.*
A2 *FD.*
Pesquisador *No outro triângulo.*
A5 *Não, tem!*
A2 *FD.*
A5 *Né DF não?*
...
Pesquisador *Pessoal, A2 falou que esse lado AB é correspondente a esse lado FD. Vamos utilizar uma régua para verificar.*
...
Pesquisador *Então, aqui deu 57cm, vamos verificar se FD também possui a mesma medida.*
...
Pesquisador *Vejam só, deu 57 cm também. Nesse caso, o lado AB é congruente ao lado FD. Mas para garantir que eles se correspondem, precisamos verificar, também, se os pares de ângulos adjacentes a eles possuem as mesmas medidas.*
...
Pesquisador *Olhando para esse ângulo aqui, podemos dizer que ele corresponderia com qual desses outros ângulos?*
A5 *Com aquela letra do outro lado.*
A4 *Com a letra B.*
Pesquisador *Entendeu A2?*
<silêncio>
Pesquisador *Esse ângulo aqui seria qual no outro triângulo?*
A2 *Seria... deixa eu ver... D?*
A5 *D e o quê? A2?*
Pesquisador *Como foi a notação que eu ensinei a vocês?*
A2 *Espera, seria. CÂB*
Pesquisador *CÂB iria corresponder com quem?*
A2 $F\hat{D}E$.
Pesquisador *Muito bem!*
...
Pesquisador *Observe que esses dois triângulos são congruentes, porque cada um dos lados correspondentes entre eles possuem as mesmas medidas, e os ângulos também.*
...
Pesquisador *Mas atenção: quando vocês estiverem fazendo as atividades, não somente olhem assim: "ah esse aqui parece". Porque às vezes tem uma diferença mínima e você não percebe, e acaba por achar que dois triângulos são congruentes, enquanto que na verdade há diferenças entre seus elementos. Por isso é sempre importante observar se as medidas estão indicadas, ou utilizar os instrumentos de medição para verifica-las, quando possível.*
...
Pesquisador *Então, alguma dúvida até agora? Tá dando para entender direitinho?*
A5 *Tá.*
A2 *Tá.*

Neste trecho, podemos verificar a construção da ideia da congruência de triângulos entre os alunos, especialmente A2 e A5 que participam ativamente da discussão, compartilhando suas dúvidas e respostas para as perguntas feitas pelo pesquisador.

Ao passo em que esses conhecimentos são construídos pelos alunos, algumas habilidades associadas ao PC começam a emergir, como por exemplo algoritmos, quando os eles elaboram um modelo de verificação da congruência de triângulos, que seria pela medição de seus lados e ângulos correspondentes. Alguns podem iniciar medindo os lados, outros os ângulos, ou ainda, fazendo outros tipos de verificação, sejam visuais ou com o auxílio de objetos.

Com o decorrer da atividade, ocorreram mais situações de elaboração de conjecturas a respeito da congruência de triângulos. No trecho a seguir, é possível perceber que, mesmo sem conhecer os casos de congruência entre triângulos, a dupla formada por A1 e A2 conseguiu elaborar uma conjectura a respeito da não congruência de triângulos.

> **Pesquisador** *A1 e A2, vocês estão com alguma dúvida?*
> **A1** *Esse triângulo com números é pra fazer o quê?*
> **Pesquisador** *O que será que esses números indicam?*
> **A1** *As medidas?*
> **Pesquisador** *Isso, então será que precisamos medir novamente esses lados com números?*
> **A2** *Não*
> **Pesquisador** *Então quer dizer que podemos olhar para esses números e já saber se esses triângulos são congruentes ou não?*
> **A1** *Se não tiver nenhum número igual não é né?*
> **Pesquisador** *Exato. Nesse caso eles possuem quantas medidas em comum?*
> **A1** *Um*
> **Pesquisador** *Então eles são congruentes?*
> **A1** *Não*
> **Pesquisador** *Por quê?*
> **A1** *Porque só tem um lado e não dá para botar um em cima do outro.*

Nesse diálogo, é possível notar que os alunos conseguem economizar tempo ao utilizar a ideia de que: se dois triângulos não possuem nenhum lado com mesma medida, eles não são congruentes. Com isso, deixam de verificar via superposição, porque não haveria a possibilidade que esses triângulos fossem congruentes.

Para realizar conjecturas como essa, é necessário que os alunos mobilizem habilidades de abstração, observando as propriedades relevantes das figuras e relacionando-as. Apesar de parecer uma ideia simples e até mesmo óbvia, as demais duplas não expressaram ideias semelhantes nesta atividade.

No trabalho de Murari e Barbosa (1992), é destacado um caso de nãocongruência de triângulos, que pode ser correlacionado com o pensamento desta dupla: triângulos sem nenhum par de lados em comum. Além disso, os autores também apresentam outros casos de não congruência, como os triângulos que possuem apenas um par de lados em comum, ou então os que apresentam somente dois pares de lados com a mesma medida.

Apesar de A1 e A2 não terem explorado os outros dois casos apresentados acima, nota-se que a dupla estava a exercitar habilidades que se associam ao desenvolvimento do PC, visto que abstrair as características de um problema para tornar a sua resolução mais simples, ou para resolver problemas semelhantes, é uma característica dessa forma de pensar. Isto se torna ainda mais evidente ao observarmos o que diz Wing (2006) sobre a abstração, caracterizando-a como um processo de modelagem de aspectos relevantes de um problema, de modo a auxiliar sua resolução.

8.1.3 Categoria 3

Dando continuidade, apresentaremos neste subtópico, os dados que se associam à categoria 3 - comparação, manipulação e medição de triângulos. O diálogo a seguir foi recortado de um momento em que as alunas A4, A5 e A6 apresentam uma dúvida, referente ao movimento de reflexão de um triângulo:

> **A5** *Ei, vem cá.*
> **A6** *E se for assim? Lembro que tu mostrou que eles podem estar invertidos. (sic.)*
> **Pesquisador** *Tente sobrepô-los. Lembre que vocês podem rotacionar e refletir esses triângulos.*
> **A4** *Mas a gente pode colocar uma parte colorida de frente com a outra?*
> **Pesquisador** *Podem sim*
> **A4** *Então era isso, eles se encaixam desse jeito!*

Nesse caso, as alunas estavam com dúvida se poderiam utilizar a superposição para verificar se dois triângulos seriam congruentes, colocando o lado colorido de um de frente ao do outro. Isso ocorreu, porque os triângulos possuíam uma face colorida e a sua parte de trás em branco, gerando algumas dúvidas sobre se essas faces coloridas poderiam ser posicionadas uma de frente para a outra.

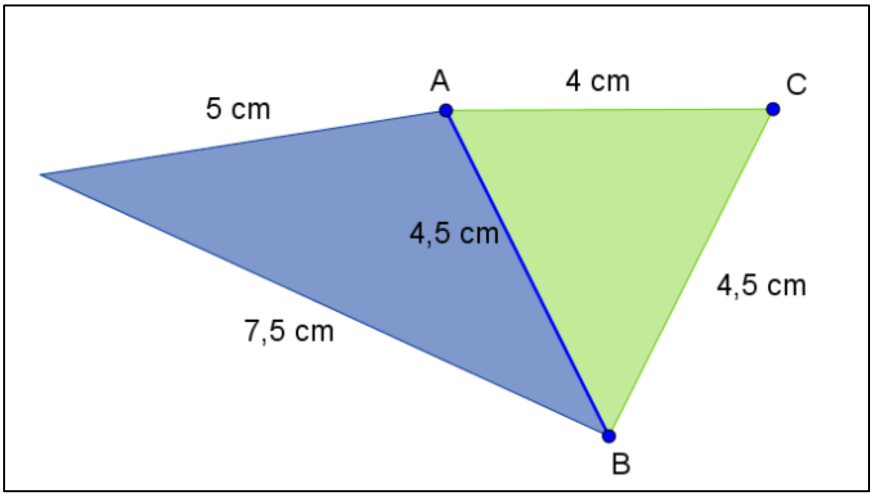
Com isso, podemos notar que um dos objetivos da atividade estava começando a ser alcançado: a percepção de que independentemente de sua posição no espaço, cor, ou transformações sofridas (rotação, translação, reflexão), uma figura pode ser congruente à outra.

Momentos depois, os alunos A1 e A2 apresentam dúvidas e, também, aprendem uma nova ideia sobre a manipulação de triângulos, com o intuito de verificar a congruência entre os lados:

> **A2** *Professor, vem cá!*
> **A1** *Esse aqui tem só um lado, olha.*
> **Pesquisador** *Quais são os lados que você percebeu que têm o mesmo tamanho?*
> **A1** *Esse. Não é não?*
> **Pesquisador** *Sim, nesse caso esses dois triângulos já possuem um par de lados congruentes, ou seja, com a mesma medida. Será que têm outros?*
> **A1** *Acho que não.*
> **Pesquisador** *Será que se eu, por exemplo, botar esse lado aqui com esse lado aqui, ou esse lado com esse outro lado aqui, encontrarei mais lados com as mesmas medidas?.*
> **A1** *E pode? Eles não têm os mesmos números nesses ângulos.*
> **Pesquisador** *Mas você pode usar um lado para medir outro, verificando se é maior, menor, ou igual. Mesmo que não sejam lados correspondentes, eles podem ter as mesmas medidas.*
> **A2** *Ah, entendi.*

Observamos a partir desse diálogo que habilidades como os algoritmos se mostram eficazes na resolução dessa atividade. Nota-se que os alunos poderiam, por exemplo, utilizar um dos lados de um triângulo para comparar com cada um dos demais lados de outro, ainda que esses triângulos fossem incongruentes. Esse tipo de ação seria importante pelo fato de a atividade questionar quantos pares de lados e ângulos os objetos possuíam em comum. A Figura 29 a seguir exemplifica esta situação:

Figura 29 – Representação de dois triângulos incongruentes, mas que possuem algumas medidas em comum



Fonte: Elaborado pelos autores

Observe que o lado AB é comum aos dois triângulos, ou seja, é congruente, embora os triângulos sejam incongruentes. Além disso, o lado AB do triângulo em azul é congruente aos lados AB e BC do triângulo verde.

Por esse motivo, a estratégia apreendida por A1 e A2 pode ser compreendida como um tipo de algoritmo, pois pode ser aplicada em quaisquer pares de triângulos, a fim de verificar quais de seus lados são congruentes, facilitando o trabalho de medição, mesmo sem fazer o uso de instrumentos específicos, como a régua por exemplo.

Momentos depois, as alunas A4 e A11 apresentam dúvidas na medição dos lados dos triângulos, conforme transcrito a seguir:

Pesquisador *A11, você está entendendo direitinho esta atividade?*
A11 *Não, não estou entendendo não.*
Pesquisador *E você A4?*
A4 *(acena que não).*
Pesquisador *Vamos tentar fazer com o compasso... Veja só, eu posso abrir o compasso do tamanho desse lado, e levar a sua medida para onde quiser. Vamos verificar então se essa medida está presente no outro triângulo de mesma cor... Então, esse lado corresponde com a medida da abertura do compasso?*
A11 *Sim, com esse.*
Pesquisador *Então eles têm pelo menos um par de lados com a mesma medida. Vamos verificar os outros... Vou colocar aqui ó, neste outro lado desse primeiro triângulo, e vamos levar essa medida ao outro triângulo, verificando se ela se faz presente em algum de seus lados... Dá certo nesse lado?*
A4 e **A11** *(Acenam com a cabeça dizendo não).*
Pesquisador *E agora, dá certo? (comparando com outro lado do segundo triângulo)*
A11 *Não.*
Pesquisador *Falta agora só um, vamos verificar esse outro lado. Deu certo?*
A11 *Em nenhum.*
Pesquisador *Falta mais algum lado?*
A11 *Esse daqui (terceiro lado do primeiro triângulo)*
Pesquisador *Tente verificar...*
...
Pesquisador *Deu certo em algum dos lados?*
A11 *(Acena novamente que não).*
Pesquisador *Então qual é a quantidade de pares de lados congruentes?*
A11 *Um.*
Pesquisador *Então aqui na folha de registros, você vai colocar essa quantidade. Nesse caso, você coloca a cor dos triângulos que verificou e que esses triângulos só possuem um lado congruente, entenderam?*
Pesquisador *Aí vamos tentar os ângulos agora.*
A11 *No caso é....*
A4 *Com aquele negócio ali, olha.*
Pesquisador *Com o transferidor.*

...
Pesquisador *Ainda com esses triângulos vermelhos, vocês irão verificar os ângulos. A11, sabe usar o transferidor?*
A11 *(Acena com incerteza dizendo que sim)*
Pesquisador *Mais ou menos né?*
A11 **(***Acena que sim)*
Pesquisador *E você A4?*
A4 *Nunca usei.*
Pesquisador *Deixa eu mostrar como funciona. Vamos colocar aqui, olha. Colocamos essa pontinha aqui (vértice do ângulo no centro do transferidor), vamos verificar mais ou menos qual seria a medida desse ângulo. Seria?*
A11 *60?*
Pesquisador *60. Aí a gente pega esse outro aqui ó e verifica se tem algum ângulo de 60. Esse aqui tá em 60?*
A11 *Tá.*
Pesquisador *Então ele já tem quantos ângulos congruentes?*
A11 *Três*
Pesquisador *Não, ângulos*
A11 *Dois (a aluna contou o par como dois)*
Pesquisador *Um, eles têm um ângulo em comum. Verifiquem aí se têm mais.*

Nesse trecho, podemos ver que de maneira semelhante a A1 e A2, a dupla composta por A4 e A11 aprende a realizar a medição dos lados das figuras sem o uso de réguas. No entanto, enquanto A1 e A2 precisavam mover os triângulos para comparar os lados, a dupla formada por A4 e A11 transportou a medida de um lado para outro com auxílio de um compasso, sendo essa também uma importante estratégia de medição, bastante utilizada na construção manual de desenhos geométricos.

Associando essa estratégia de medição com o PC, podemos encará-la também como um algoritmo, na medida em que o procedimento de transportar a medida de um lado de um triângulo pode ser reaplicado várias vezes em quaisquer triângulos. Além de servir para transportar essas medidas, o compasso também pode ser usado para quantifica-las, seja de maneira comparativa (maior que, menor que, ou igual), ou verificando o tamanho da abertura em centímetros, colocando-a sob uma régua.

Em outra situação, o aluno A13, que ficou sem dupla neste dia, apresentou dificuldades em aplicar o método da superposição. Dificuldade semelhante foi sentida por alguns de seus colegas, que achavam que dois triângulos eram congruentes apenas por seus lados possuírem tamanhos próximos, sem coincidirem. Além disso, outros alunos também apresentaram dificuldades ao achar que determinados triângulos não eram congruentes apenas pelo fato de não coincidirem de imediato por superposição, enquanto que, na verdade, os triângulos eram congruentes, mas precisavam ser rotacionados ou refletidos para se sobreporem perfeitamente.

É possível notar uma dessas situações no diálogo a seguir:

> **Pesquisador** *A13, como está indo a atividade?*
> **A13** *Tô entendendo nada aqui.*
> **Pesquisador** *Beleza. Esse triângulo que você está na mão consegue sobrepor o outro da mesma cor que ele, ou não?*
> **A13** *Tá dando certo.*
> **Pesquisador** *Certinho? Se sim, eles são congruentes.*
> ***A13*** *Acho que não, porque com a régua tem uma diferença bem pouquinha, mas por superposição eles são congruentes.*
> ***Pesquisador*** *Vamos testar.*
> *(A13 coloca um triângulo preto em cima do outro)*
> ***Pesquisador*** *Tem que dar certinho, não pode ficar sobrando não. Olha aí atrás como é que está (estava sobrando). Se você ficar com dúvida, aí você pode pegar, por exemplo, o transferidor para verificar as medidas dos ângulos.*

Na maior parte do tempo, as duplas trabalharam em conjunto para medir e comparar os triângulos, porém houveram momentos em que se fez necessário um trabalho individual de cada componente, de modo a tornar o processo de verificação da congruência de triângulos mais prático, conforme pode ser verificado no diálogo a seguir:

> **A4** *Vê se tá certo*
> **Pesquisador** *Cadê o triângulo amarelo? Me explica como vocês fizeram para verificar, colocaram um em cima do outro?*
> **A4** *Aham.*
> **Pesquisador** *Deu certo?*
> **A4** *Aham.*
> **Pesquisador** *Quando dá certo por superposição, os triângulos possuem três pares de lados correspondentes iguais e três pares de ângulos correspondentes iguais. Então na tabela, onde você indicou o par de triângulos amarelos, você teria que colocar que ele tem 3 lados iguais e 3 ângulos iguais, entendeu?*
> <silêncio>
> **Pesquisador** *Vamos fazer o seguinte, A10 pega um triângulo e A4 pega outro de mesma cor que ele.*
> ...
> **Pesquisador** V*ejam as medidas dos lados com a régua e comparem se há medidas iguais, anotando na folha caso tenham.*
> ...
> **A4** *Aqui deu 3, aqui deu 4,5 e aqui deu 3,5*
> **Pesquisador** *E A11, encontrou quais medidas?*
> **A11** *Aqui deu 5,4*
> **Pesquisador** *Tem algum lado medindo 5,4 em seu triângulo, A4?*
> **A4** *Pera, Pera aí visse. Vai ser esse aqui, maiorzinho (sic).*

...
A4 *Não, não tem.*
A11 *Aqui deu 5*
A11 *Achei um de 3,2*
A4 *Peraí 3 vírgula.... Não deu não.*
Pesquisador *Nenhum deu certo? Então eles têm zero lados congruentes. Verifiquem os ângulos.*
A4 *Os ângulos e os outros?*
Pesquisador *Para verificar os ângulos você pode tentar tanto por superposição, quanto pelo transferidor.*
A4 *Vamos de transferidor.*
...
A4 *Achei sessenta e aqui quarenta.*
A11 *Eu acho que aqui deu sessenta, ó.*
Pesquisador *Será que tem algum de sessenta nesse outro?*
A4 *Tem eu já medi, deu sessenta!*
Pesquisador *Então já tem um de sessenta. Vamos ver se tem outros com a mesma medida.*
A4 *Aqui? .... Deu 70*
Pesquisador *Tem um ali que dá isso mesmo, 60, 70...*
A4 *E agora?*
Pesquisador *Deu 55 né?*
A11 *Uhum.*
Pesquisador *Aí vocês também vão olhar as medidas desses ângulos menores dos dois triângulos, certo?*

Neste diálogo, podemos perceber a importância e necessidade da decomposição na resolução de atividades e problemas matemáticos, especialmente neste caso, onde os alunos trabalharam em duplas, ou grupos. Por meio desta estratégia, a tarefa de medição se tornou mais fácil e prática para a dupla, que passou a verificar com mais eficácia se os triângulos eram congruentes.

Também houveram momentos em que os alunos aprenderam a desenvolver estratégias para verificar as medidas dos lados e ângulos dos triângulos, seja por meio de suas dúvidas ou com os questionamentos feitos pelo pesquisador. No trecho a seguir, A4 apresenta uma dúvida e acaba por descobrir uma maneira mais prática, de verificar se os ângulos internos dos triângulos eram congruentes:

A4 *Ei, como é que eu faço para medir esse daqui? Só a pontinha né?*
Pesquisador *Você pode colocar um em cima do outro, para ver se coincide, certo, aproximando as pontas?*
A4 *Assim?*
Pesquisador *Isso.*

> **A4** *Mas serve para todos?*
> **Pesquisador** *Isso, inclusive se não desejar usar o transferidor, você pode continuar comparando os ângulos assim.*

Da mesma forma que estava a realizar a superposição para verificar se os triângulos eram congruentes, A4 também passou a usar essa estratégia para verificar se os ângulos eram congruentes, ainda que os triângulos não fossem. Como a atividade solicitava a quantidade de pares de lados e ângulos congruentes, ainda que os triângulos não fossem congruentes, a estratégia da aluna mostrou-se bastante eficaz, dispensando o uso do transferidor.

Esta estratégia remete à habilidade da criação, uso e adaptação de algoritmos, faz parte de um dos pilares do PC. Dessa forma, ainda que não tenha ocorrido de maneira semelhante ao uso de *softwares*, ou outros recursos de aprendizagem da lógica de programação, as alunas desenvolveram uma maneira prática de verificar a congruência dos ângulos internos de dois triângulos. A4 e A11 conseguiram simplificar um processo que seria bem mais demorado se feito por meio do uso de ferramentas como o transferidor.

Ao final da atividade, foi solicitado que os estudantes escrevessem um passo a passo de como estavam agindo para verificar a congruência dos triângulos, remetendo à um algoritmo. Destacamos a seguir algumas de suas respostas escritas:

A1 e A2 – Eu começei pelo superposição e quando não deu certo eu medi pela régua (sic)
A4 e A11 – Usamos todos os métodos
A5 e A6 – Primeiro eu fiz a superposição das figuras, depois eu usei a régua, depois eu usei o tranferidor e no final o compaço. (sic)
A9 – Superposição depois no transferidor depois eu usei a regua (sic)
A13 – Primeiro começei superposição mais não é sempre que conseguimos fazer superposição... (sic)

Ainda que as respostas dos alunos não revelem necessariamente o passo a passo que de fato seguiram, seja por dificuldade em expressá-los ou ainda pela não compreensão do comando deste item da atividade, podemos verificar que o método da superposição foi um dos mais utilizados por eles, enquanto que o transferidor foi menos adotado, dada a sua complexidade de uso e a pouca experiência da turma com o mesmo.

Além disso, em diálogos anteriores, podemos identificar algumas descobertas realizadas pelos alunos, como, por exemplo, o momento em que A13 percebeu que a superposição pode revelar também a congruência de alguns lados ou ângulos presentes em triângulos incongruentes.

Um fato interessante é que apenas uma das duplas fez o uso do compasso para transportar a medida do lado de um triângulo para próximo do lado de outro triângulo. Acreditamos que a pouca utilização deste material deve-se à necessidade que os alunos sentiram em quantificar as medidas desses elementos, pois a abstração de que determinada abertura do compasso pode ter sido tomada como uma medida para verificar se um lado é maior ou menor que outros pode ter sido encarada como algo novo, ou até mesmo complexo para a turma.

8.1.4 Discussão

Nesta atividade, pudemos perceber importantes associações entre o PC e a aprendizagem do conteúdo foco desta pesquisa. As duplas foram capazes de desenvolver estratégias para verificar de forma prática a congruência ou não congruência de triângulos, mesmo sem conhecer ainda os casos de congruência.

Apesar das dificuldades iniciais, e da carência de experiências anteriores com o uso de instrumentos de medição — como foi o caso dos transferidores — os alunos apresentaram uma evolução satisfatória, especialmente se considerarmos o resultado mencionado no parágrafo anterior.

Em meio às respostas, dúvidas e erros dos alunos, diversos conhecimentos geométricos foram mobilizados, a exemplo das transformações com figuras geométricas. Vale ressaltar também que a atividade permitiu o desenvolvimento de um trabalho cooperativo e coordenativo, no qual as duplas precisaram realizar ações em conjunto para agilizar o término da atividade. Um exemplo dessas ações foi o auxílio prestado aos colegas que apresentavam dúvidas, de modo que as duplas compartilharam as suas estratégias de verificação da congruência de triângulos.

Inicialmente, esperávamos o desenvolvimento de algumas ações que relacionariam o PC e a Geometria. Algumas foram consolidadas pela turma, enquanto outras que não eram esperadas também se fizeram presentes ao longo da atividade. Dessa forma, baseando-se no que foi inicialmente suposto, as seguintes associações com o PC foram mobilizadas entre os alunos:

- Decomposição, ao realizarem a verificação das medidas dos triângulos de maneira cooperativa;

- Reconhecimento de padrões, ao tentar verificar quais triângulos possuíam o mesmo formato e, também, ao organizá-los de acordo com suas cores;
- Abstração, ao rotacionarem, movimentarem e sobreporem as figuras, para verificar quais características possuíam em comum;
- Abstração, ao utilizarem ferramentas do kit geométrico para mensurar medidas específicas dos triângulos;
- Abstração e algoritmos ao desenvolverem estratégias para verificar com maior facilidade a congruência dos triângulos, focando em aspectos-chave;
- Algoritmos, quando tiveram que representar de forma escrita, ao final da atividade, o passo a passo que seguiram para verificar a congruência dos triângulos;

8.2 CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS E RELAÇÕES DE EQUIVALÊNCIA

Esta segunda atividade objetivou possibilitar que os alunos desenvolvessem a noção de relações de equivalência e a compreensão de que a congruência de triângulos também é uma relação de equivalência, além de outros objetivos específicos desta pesquisa.

Inicialmente, pudemos perceber que os estudantes apresentaram dúvidas em relação ao real objetivo da aula, dada a facilidade de executar os comandos inicialmente solicitados pelo pesquisador. Entretanto, com a progressão da profundidade das perguntas que eram realizadas, os mesmos passaram a encarar a atividade com maior seriedade.

É importante desatacar que nesse dia, um novo aluno frequentou as aulas, e por esse motivo, formamos o trio A1, A2 e A14, apesar de A14 não ter frequentado os outros momentos da pesquisa.

No decorrer da aula, pudemos evidenciar que as aprendizagens e técnicas desenvolvidas pelos alunos no encontro anterior, quanto à verificação da congruência de triângulos, e também de medição, continuaram a ser utilizadas pelas duplas, facilitando a execução de algumas das ações que eram solicitadas.

Vale ressaltar que a atividade não foi aplicada em sua totalidade, dada a dificuldade da turma em retomar alguns conceitos sobre as propriedades e classificações dos triângulos, especialmente quanto aos seus ângulos internos.

Apesar disso, pudemos verificar ao longo do encontro um aprofundamento por parte dos alunos em relação à compreensão da congruência de triângulos e, também, pudemos evidenciar por meio dos diálogos e ações realizadas por eles algumas conexões entre a aprendizagem deste conteúdo e as habilidades do PC, conforme será apresentado nos próximos subitens.

8.2.1 Categoria 1

Neste subtópico, serão apresentados os dados que se relacionam à categoria 1: reconhecimento das características, elementos e propriedades dos triângulos.

No início desta atividade foi solicitado que os alunos organizassem os triângulos que receberam, agrupando-os de acordo com suas cores. Assim, eles deveriam, por exemplo, colocar todos os triângulos azuis em um saco, os verdes em outro e assim por diante, independentemente de suas medidas.

Após todas as duplas agruparem os triângulos, pediu-se que escolhessem um saquinho qualquer e retirassem um triângulo de dentro dele e, logo depois, que argumentassem se seria possível saber a cor dos demais triângulos que estavam dentro do saquinho escolhido. Todos responderam, afirmando que seria possível.

Dando continuidade, realizamos o seguinte diálogo:

> ***Pesquisador*** *Vamos para o próximo item. Escolha outro saco qualquer, que não seja o que vocês já pegaram, e retirem outro triângulo.*
> *...*
> ***Pesquisador*** *E aí, qual foi a cor dessa vez?*
> *(os alunos mencionam as cores)*
> ***Pesquisador*** *Azul, laranja, verde... Por que não foi a mesma cor?*
> ***A5*** *Por que você mandou tirar de outra?*
> ***Pesquisador*** *Sim, mas não poderia ser a mesma cor?*
> ***A5*** *E podia?*
> ***Pesquisador*** *Por que será que não posso tirar uma cor igual à dos outros sacos?*
> ***A4*** *Porque foi do mesmo saco.*
> ***Pesquisador*** *O que vocês fizeram para que não houvessem cores diferentes em um saco?*
> ***A4*** *Colocamos por cor.*
> ***Pesquisador*** *Exatamente, vocês a princípio organizaram por cores. Então as cores dos triângulos que estão dentro de um saco não serão as mesmas de outro.*
> *...*
> ***Pesquisador*** *Agora, sem pensar nas cores, observem os triângulos. Eles foram os mesmos?*
> ***A6*** *Foi o mesmo*
> ***Pesquisador*** *Como você sabe que é o mesmo?*
> *(A6 mostra as peças, uma em cima da outra)*
> ***Pesquisador*** *Por superposição, você vê que é o mesmo, é isso? Certo, eles são congruentes.*
> *(Outros alunos mostram que retiraram triângulos com formatos totalmente diferentes)*

Pesquisador *Então, algumas pessoas tiraram os mesmos triângulos, outras não. E por que será que isso acontece?*
(incompreensível)
Pesquisador *Mas vocês organizaram os triângulos de acordo com o que eles são parecidos?*
A4 *Não, só foi por cor.*
Pesquisador *Isso, não nos preocupamos com formatos, apenas com as cores.*
...
Pesquisador *Então gente, chamaremos cada um desses grupos formados pelas cores de classe de equivalência. Desse jeito, por exemplo, a cor amarela representará a classe de equivalência dos triângulos amarelos.*
...
Pesquisador *E também, todo triângulo dentro do saco que representa a classe de equivalência azul vai ter qual propriedade?*
Turma *Cor azul.*

Por meio desse diálogo, construímos com a turma a ideia de classes de equivalência, onde os alunos puderam perceber que o agrupamento de triângulos pela característica cor gerou classes de equivalência, cada uma contendo triângulos de uma só cor.

Apesar de parecer algo extremamente simples, essa construção foi de fundamental importância para que chegássemos na ideia de que a congruência de triângulos é uma relação de equivalência, conforme será evidenciado por meio dos diálogos posteriores.

No trecho a seguir, é introduzida a ideia de representante de classes de equivalência:

Pesquisador *Vamos focar agora na seguinte questão: Quantos triângulos eu preciso retirar de um saquinho para saber a cor dos demais que estão dentro dele?*
A5 *Dois.*
A7 *Tem que tirar um.*
Pesquisador *Por que só um?*
A7 *Porque você tirou um vai estar vendo a cor.*
Professora *Isso, justamente porque eles estão separados por cores. Observem que qualquer triângulo que vocês retirarem de um saquinho, poderá ser chamado de "representante da classe de equivalência". Aí vocês podem perguntar: "Como assim professor?". A resposta é simples: que um só triângulo pode representar a cor de todos os outros que estão no mesmo saco que ele. Porque eles têm uma propriedade em comum que é a....*
A7 *Cor.*
Pesquisador *Então, por exemplo, se A11 pegasse esse saco aqui e retirasse só um triângulo, esse triângulo de cor laranja pode ser chamado de representante de classe de equivalência, porque ele pode representar os triângulos de seu saco, que também serão de cor laranja.*
Professora *É como nas salas de aula, cada grupo tem o seu representante.*
Pesquisador *Exato.*
Professora *Quando tem reunião vai todo mundo? Vai o representante da sala.*
A7 *Sou eu no caso.*

> **Pesquisador** *E o representante de sala possui algo em comum com seus colegas, que é pertencer ao Oitavo ano, turma C.*

A ideia de classes de equivalência aproxima-se de habilidades do PC, como a abstração e o reconhecimento de padrões, na medida em que o representante de uma classe possui características comuns aos seus equivalentes, permitindo o seu uso para representar qualquer elemento presente na classe, levando em consideração, nesse caso, a característica cor.

Com isso, uma característica comum a um conjunto de triângulos pode ser abstraída e representada por meio de um único, equivalente aos demais da classe. Essa ideia foi bastante utilizada pelos alunos em encontros posteriores, embora que sem considerar necessariamente toda complexidade das classes de equivalência, o que facilitou a verificação da congruência entre triângulos.

Dando continuidade, seguimos para o próximo item da atividade, solicitando antes que as duplas retirassem todos os triângulos dos saquinhos. Por conseguinte, a turma foi orientada a agrupar os triângulos em três grupos: equiláteros, isósceles ou escalenos. A seguir, apresentamos um recorte do diálogo entre o pesquisador e uma aluna, que expressa que está percebendo um padrão entre os triângulos:

> **Pesquisador** *Agora, a gente vai usar os instrumentos de medição, certo? E vocês vão organizar da seguinte forma: em um dos sacos, vocês irão colocar os triângulos que possuem três lados com a mesma medida, certo? Em outro...*
> **A7** *E os quatro são do mesmo tamanho.*
> **Pesquisador** *Os quatro o quê?*
> **A7** *Os triângulos com as quatro cores.*
> **Pesquisador** *Isso mesmo.*

Nesse diálogo, é perceptível que a aluna já consegue notar um padrão entre os triângulos, em relação à suas cores: para cada formato de triângulo existem outros quatro congruentes a ele, com outras três cores diferentes. Essa percepção revela a sua capacidade de reconhecer padrões, que se destacou em relação aos seus demais colegas.

Toda a turma iniciou este item agrupando os triângulos equiláteros, seguidos pelos isósceles e escalenos. Entretanto, quando foi solicitado que separassem os triângulos escalenos, a dupla formada por A7 e A13 apresentou a seguinte ideia:

> **Pesquisador** *Agora vocês devem separar os que não tem nenhuma medida igual*
> **A7** *Que é todo torto.*

Pesquisador *Como assim?*
A7 *Só em olhar, você já vê que tem as medidas diferentes.*
Pesquisador *Só em olhar tu já vê né?*
A7 *É porque, olha, esse aqui é mais compridão, esse aqui vai quase até a metade dele. Esse aqui já é menor, entendeu?*

A partir desse diálogo, vale destacar que A7 mais uma vez apresenta em suas falas ideias que posem ser associadas ao reconhecimento de padrões, quando diz que há triângulos que nem precisavam ser medidos, pois era visualmente perceptível que eles eram escalenos. Vendo a importância da estratégia da aluna, decidiu-se passa-la para toda a turma, explicando que nem todos os triângulos precisavam ser medidos para serem classificados.

Após esse momento e quando os alunos já haviam classificado todos os triângulos, foi então solicitado que as duplas retirassem um triângulo de cada saco e realizado um diálogo, cujos recortes são apresentados a seguir:

Pesquisador *Pessoal, gostaria que vocês retirassem apenas um triângulo de cada saco.*
A7 *Qualquer um triângulo?*
Pesquisador *Sim, e apenas um de cada saco.*
A5 *Não entendi.*
A7 *O professor quer um que tem 3 igual, dois igual e nada igual (sic)*
...
Pesquisador *Agora que todos já retiraram, escolham um desses três triângulos.*
...
Pesquisador *Escolheram? Quantos lados congruentes ele tem?*
A7 *Repete.*
Pesquisador *Quantos lados congruentes, ou seja, quantos lados com a mesma medida ele têm?*
(a turma responde, 3, 2 ou nenhum)
Pesquisador *Como é que vocês sabem que tem 3 lados iguais ou não?*
A7 *Porque a gente sabe de qual saco é.*
Pesquisador *Se vocês fossem lá no mesmo saco onde pegaram o triângulo que está em mãos nesse momento e retirassem outro triângulo, ele teria qual característica?*
A7 *A mesma, medida de lados.*
Pesquisador *Por quê?*
A7 *Porque todos que tá nesse saquinho tem a mesma medida de lados.*
Pesquisador *Então vejam que temos em mãos um representante de uma classe de equivalência. Além disso, os outros dois triângulos que vocês retiraram inicialmente também são representantes de suas respectivas classes.*
...
Pesquisador *Vejam também que desta vez nós não estamos mais olhando para a característica cor, por isso temos cores variadas em cada saquinho.*

Nesse diálogo, retornamos a ideia de classes de equivalência, entretanto observando outras características, diferentes das cores. A7 continua participando constantemente das discussões, expressando suas conclusões a partir das ações solicitadas, enquanto o resto da turma observava atentamente o que era discutido.

No próximo subtópico, damos continuidade à observação dos diálogos realizados na aula, porém observando outras ações realizadas com os triângulos.

8.2.2 Categoria 2

Dando continuidade, serão apresentados neste subtópico os dados que se associam à categoria 2: comparação, manipulação e medição de triângulos. No diálogo a seguir, destacamos uma situação onde os alunos apresentaram aparente desinteresse em realizar a medição dos triângulos, classificando-os apenas de acordo com sua intuição. Com o objetivo de instiga-los a verificar precisamente as medidas dos triângulos, especialmente daqueles que possuíam pouca diferença em relação à medida de seus lados, foi sugerido que cada membro ficasse responsável por agrupar os triângulos de determinado tipo. A seguir, apresentamos um recorte do diálogo estabelecido com os alunos:

> **Pesquisador** *A1?*
> **A1** *Já fiz tudinho já.*
> **Pesquisador** *Esses triângulos aqui são de qual tipo?*
> **A1** *Os que tem lados iguais.*
> **Pesquisador** *Certo. E os que tem as 3 diferentes, já fizeram?*
> **A14** *Tá aqui ó, tamo fazendo agora. O que não tem nenhuma né? Igual? (sic)*
> **Pesquisador** *Exato.*
> **A14** *Esse daqui não tem nenhuma medida igual.*
> **Pesquisador** *Aí você já dá pra seu colega que ficou com os escalenos.*
> **A1** *Esse daqui também é outro que não tem nada igual.*
> **Pesquisador** *A1, você já verificou?*
> **A1** *Não, só de olhar né professor (risos).*
> **Pesquisador** *Não, mas você tem que ter certeza, não adianta olhar e fazer por fazer.*
> **A14** *Esse daí tem dois igual meu filho, olhe aí direito.*
> **Pesquisador** *A14, como podemos verificar que esse triângulo do seu colega A1 tem dois lados de medidas iguais?*
> **A14** *Aqui ó, dá pro caba ver (sic).*
> **Pesquisador** *Só de ver você já percebe? Mas tem uns como esse aqui que não são.*
> **Pesquisador** *A1, me mostra aí, usando a régua, quais são as medidas desse triângulo.*
> **A1** *Ó, esse lado...*
> **Pesquisador** *Tem quanto?*
> **A1** *4,2*

Pesquisador *Certo, e o outro?*
A1 *4,1*
Pesquisador *São dois lados com a mesma medida?*
A1 *Não*
Pesquisador *E dava para perceber visualmente?*
A1 *Não*
Pesquisador *Então como é que você tinha certeza no início da atividade?*
(Silêncio)
Pesquisador *Nem sempre dá para saber por intuição, tenham cuidado.*

Por meio desse diálogo, ressaltamos para a equipe a necessidade de se verificar com precisão todas as medidas dos lados e ângulos dos triângulos para verificar se, de fato, são congruentes. Além de A1, A2 e A14, outras duplas também apresentaram eventuais equívocos ao mal posicionar os triângulos quando estavam a sobrepô-los, ou ao arredondar as medidas dos lados e ângulos quando estavam a utilizar os instrumentos de medição.

A ação do pesquisador foi fundamental nesses momentos, guiando a turma para que utilizasse os instrumentos de medição de maneira correta e levassem as medições a sério. A partir dessa situação, ressalta-se a importância da ação do professor, de modo que atue em alguns momentos proporcionando situações didáticas que levem os alunos a compreenderem o real sentido e importância do que está sendo estudado.

A partir dessa intervenção, os alunos A1, A2 e A14 passaram a verificar as medidas com maior precisão, recorrendo aos métodos de superposição para verificar apenas se os triângulos tinham grandes diferenças que podiam ser verificadas de maneira visual, partindo para o uso dos instrumentos de medição quando era necessário verificar precisamente as medidas dos lados e ângulos dos triângulos.

8.2.3 Categoria 3

Encerrando a apresentação dos dados referentes à segunda atividade, neste subtópico serão apresentados os dados que se associam à nossa terceira categoria de dados: elaboração de conjecturas sobre a congruência de triângulos.

O último item consistiu em os alunos agruparem os triângulos, dessa vez, de acordo com a congruência deles. No decorrer desse item, verificamos que diversas habilidades associadas ao PC foram mobilizadas entre os alunos ao desenvolverem estratégias para a verificação da congruência.

A seguir, apresentamos recortes dos diálogos realizados entre o pesquisador e a turma, com participações esporádicas da professora, que culminaram no reconhecimento de padrões entre os triângulos.

Pesquisador *Agora, vocês irão verificar quais triângulos são congruentes, de modo que cada conjunto de triângulos congruentes deverá ficar em um saquinho distinto.*
A5 *Pode fazer por sup... aquele negócio?*
Pesquisador *Por superposição? Pode sim.*
A5 *Mas tem alguns que dá poucos centímetros de diferença.*
Pesquisador *Para ter certeza, verifique com a régua e transferidor.*
...
A5 *É congruente sim.*
Pesquisador *Então você já pode colocar em um saco.*
A4 *Mas tem que ser da mesma cor?*
Pesquisador *Não, eles apenas precisam ser congruentes.*
...
A5 *É quantos? É só dois né? (sic)*
Pesquisador *Não sei. Todos os que forem congruentes devem ficar em um mesmo saco. Esses quatro aqui, que vocês separaram são congruentes?*
A5 *Aqui*
Pesquisador *Muito bem, vocês já fizeram uma classe, continuem verificando e busquem por padrões.*

Até o momento, toda a turma seguia buscando verificar os triângulos congruentes, um a um, recorrendo quase sempre ao método da superposição. Entretanto, com o decorrer da atividade algumas duplas começaram a perceber padrões entre as figuras:

A7 *ô professor, eu descobri a charada, vai botar tudim dentro, porque tudim tem os par. (sic)*
A5 *Não é não.*
A7 *É sim.*
Pesquisador *A7, essa é sua estratégia, termine e espere os demais colegas responderem, tá certo? Se ela der certo, beleza, depois nós compartilhamos com a turma.*

A Figura 30 a seguir mostra a estratégia elaborada por A7 e A13 no momento em que o diálogo acima foi estabelecido:

Figura 30 – Dupla A7 e A13 organizando os triângulos por congruência

Fonte: Dados da pesquisa

Na Figura 30, é possível notar que os alunos utilizaram a sobreposição e agruparam cada um dos triângulos de acordo com a sua congruência, sendo um verde, um laranja, um azul e um roxo para cada classe de equivalência, que foram colocados em pilhas. A estratégia da dupla além de facilitar a execução da atividade, facilitou a visualização dos diferentes triângulos que eles tinham na mesa, sendo essa uma importante forma de pensar computacionalmente.

As ações realizadas por esta dupla se associam com o pilar da decomposição, uma vez que foram capazes de agrupar os triângulos de acordo com sua congruência, dividindo um problema maior (organizar os triângulos por congruência) em diversas atividades menores (agrupar os triângulos de mesmo formato em pilhas). Dessa forma, a própria maneira como empilharam os triângulos na mesa também consiste em uma forma de decompor a tarefa.

Além disso, essas ações também se associam ao reconhecimento de padrões, pois a dupla foi capaz de utilizar a percepção de que em cada classe de congruência a ser construída deveria possuir um triângulo de cada cor. A dupla também usa a abstração, ao visualizar cada monte de triângulos, sabendo que os triângulos presentes no topo são representantes dos demais, remetendo à ideia de representantes de classes de equivalência.

Em relação à habilidade de algoritmos, a dupla deixa mais evidente seu raciocínio no diálogo a seguir:

> **A4** *A7, a gente fez igual a tu*
> **A7** *Porque olha, são 6 tamanhos diferentes*.
> <incompreensível>
> **A7** *Mas sabe o que é eu e A13 tava fazendo? Pega por cor. São 6 desenhos. (sic).*

A4 *Eu sei, cada um tem.*
A7 *Aí cada formato tem que ter 4 cores diferentes, um azul, um laranja, um vermelho e um verde.*
...
Pesquisador *Pessoal, deixa A7 explicar o que ela descobriu, escutem só.*
A7 *São 6 formatos diferentes de triângulo, cada triângulo dos seis tem em 4 cores diferentes: azul, a verde, a laranja e a vermelha. Aí vai ter quatro deles nos 6.*
A5 *Não acredito.* (risos).
A1 *Nois sabia já*. (sic).
A7 *Então pronto, é só medir os tamanhos e ver.*
A4 *Eu entendi.*
A7 *Ó, tem 6 formatos diferentes.*
Pesquisador *Exatamente pessoal, vejam que há quatro triângulos de cada formato, um de cada cor. Tipo para esse aqui (azul), existe um amarelo, um laranja e um verde. Entenderam?*

Em meio a um diálogo entre A4 e A7, foi solicitado que A7 falasse de sua estratégia para toda a turma, para que percebessem que havia um padrão entre os triângulos. Todos ficaram fascinados com a descoberta de A7. Ao falar de sua estratégia, a aluna deixa claro que seguiu uma espécie de algoritmo para realizar a atividade. Nesse caso, o algoritmo utilizado por ela pode ter partido da ideia de que para cada tipo de triângulo, haviam outros 3 de cores distintas. Apesar de A7 não ter relatado sua ideia através de nenhuma expressão matemática ou código, é notável que ela a tomou como “regra” para realizar a atividade.

De acordo com a definição de algoritmos, seguindo a perspectiva do PC defendida por Wing (2008), esta habilidade está associada com o ato de abstrair um passo a passo, ou representá-lo de diferentes formas. Nesse caso, A7 tenta representar de forma oral, comunicando aos seus colegas o “passo-a-passo” que realizou.

Dando continuidade e de maneira semelhante aos itens anteriores, solicitamos que os alunos realizem algumas ações com os triângulos que colocaram nos seis sacos:

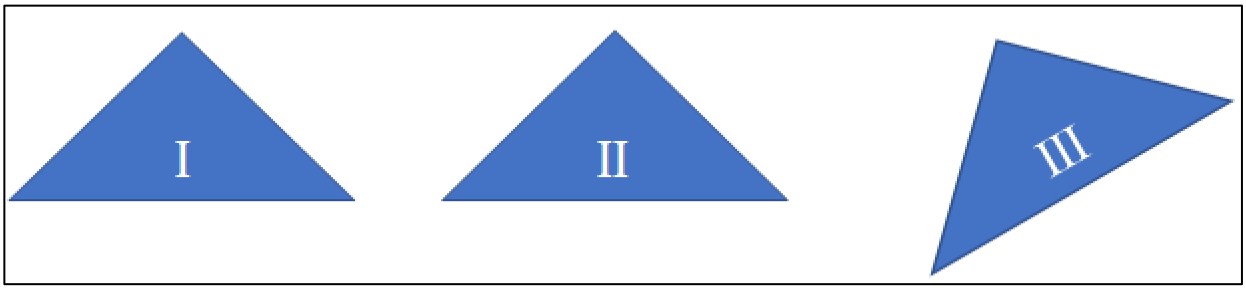
Pesquisador *Retirem um triângulo de cada um desses sacos... Esses triângulos que vocês retiraram são todos congruentes?*
A7 *Não*
A5 *Não*
A2 *Não*
A1 *Não*
Pesquisador *Por que eles não são congruentes?*
A5 *Porque cada um tá dentro de uma sacola diferente*
A2 *Esse tem 3 lados iguais e esse tem dois* (em uma sacola, se encontravam triângulos equiláteros congruentes, em outra, triângulos congruentes que a aluna achava que eram isósceles).
Pesquisador *Porque vocês criaram classes de equivalência. Cada classe possui triângulos com lados e ângulos com a mesma medida. Então em cada saco, só há*

triângulos congruentes uns aos outros. Mas se eu comparar os triângulos de um saco com os de outros sacos, eles serão todos congruentes?
A7 *Não, porque vão ter medidas diferentes*
Pesquisador *Exatamente.*

A partir desse diálogo, fica evidenciamos a compreensão por parte da turma de que se um triângulo não é congruente a outro, estando cada um em uma classe diferente, então nenhum dos triângulos de uma classe será congruente aos de outra. Todo esse raciocínio envolve a habilidade de abstração, e mostra que a turma a esse ponto já se mostrava capaz de observar apenas as características relevantes de um sistema, olhando para o todo, sem a necessidade de observá-lo detalhadamente. Nesse caso, os alunos apenas observaram um representante de cada classe de equivalência e efetuaram conclusões sobre toda a classe.

Por conseguinte, chegamos ao momento final da aula, onde o maior objetivo era levar os alunos a concluírem que a congruência de triângulos é uma relação de equivalência. Apesar de a turma já apresentar ideias relacionadas a isso, era necessário formalizar esta ideia. Assim, foi feito um desenho na lousa, conforme representado na Figura 31 a seguir:

Figura 31 – Representação da figura utilizada no último item do segundo encontro



Fonte: Dados da pesquisa

A partir dessa figura, estabelecemos o seguinte diálogo:

Pesquisador *Observem o desenho que fiz na lousa. Se vocês se depararem com três triângulos, como esses representados aqui, e verificarem que esse é congruente a esse (primeiro e segundo) e que esse é congruente a esse (primeiro e terceiro). Como é que vocês fariam para verificar a congruência desse segundo com o terceiro?*
A7 *Pegava o anterior (segundo) e via esse (terceiro), pra ver se tem a mesma medida.*
Pesquisador *A2, sua colega, A7 disse que você podia ver se esse (segundo) é congruente a esse (terceiro) né isso? Mas como é que a gente vai saber se todos são congruentes?*
A2 *Medindo também.*

Pesquisador *Será que precisa medir tudo?*
A7 *Não, porque se o primeiro é congruente, tem a mesma medida que o segundo e ao medir o primeiro com o terceiro, se for o mesmo, os três tem a mesma medida. É como se fossem da mesma classe de equivalência.*
Pesquisador *Exatamente.*

Vale destacar que o terceiro triângulo foi disposto de maneira diferente dos demais, com o objetivo de provocar a turma a perceber que independentemente de seu posicionamento, triângulos congruentes conservam suas propriedades e, consequentemente, sua congruência.

A partir do diálogo apresentado e da representação dos triângulos, é institucionalizado o saber em foco e finalizada a aula. Apesar de nem toda a turma ter participado da discussão, os alunos se mostraram atentos a esse momento, enquanto que A2 e A7 tentaram compreender e participar, seja complementando as falas do professor, expondo suas dúvidas ou conclusões. Nesse sentido, a partir das conclusões de A7, é formalizada a ideia de que a congruência de triângulos é uma relação de equivalência.

8.2.4 Discussão

Analisando os resultados alcançados nesta segunda atividade, é possível verificar as importantes ações e conjecturas que foram desenvolvidas pelos alunos ao verificarem a congruência de triângulos sem utilizar os casos de congruência que ainda seriam aprendidos. Esta forma de iniciar o trabalho com o conteúdo trabalhado nestas aulas consistiu em uma importante estratégia, na medida em que toda a turma foi motivada a testar suas ideias e procedimentos, além de poder aprender a partir de seus erros.

Assim como na atividade anterior, é importante ressaltar a cooperação e compartilhamento de ideias entre as duplas, que em um trabalho conjunto puderam aprender diferentes ideias sobre a verificação da congruência de triângulos, desenvolvendo estratégias que foram de grande importância nos momentos posteriores da pesquisa.

Para esta atividade, esperávamos que a turma: percebesse o que são as classes e relações de equivalência; compreendesse o que significa o representante de uma classe de equivalência; descobrisse que a congruência entre triângulos é uma relação de equivalência; compreendesse o que significa o representante de uma classe de triângulos congruentes; aprendesse a classificar os triângulos de acordo com as características de seus lados ou de seus ângulos internos.

Podemos evidenciar por meio dos diálogos destacados anteriormente e das reflexões tecidas ao longo do tópico que essas compreensões foram desenvolvidas entre a turma, com uma participação ativa de A7, que participou ativamente das atividades.

Com relação ao PC, esperávamos a mobilização de suas habilidades por meio das seguintes ações: manipulação e organização dos triângulos de acordo com suas diferentes propriedades referentes aos lados, ângulos e cores; alteração com segurança dos elementos de um agrupamento de triângulos, reconhecendo-os como pertencentes a uma classe de equivalência; desenvolvimento de estratégias para agrupar os triângulos com facilidade, utilizando-as como algoritmos.

Destacamos a seguir como as habilidades do PC que foram identificadas nas ações e falas dos alunos:

- Decomposição: quando os alunos tiveram que decompor o monte com os triângulos em diversas classes de equivalência, considerando suas cores, medidas dos lados, ou congruência;
- Reconhecimento de padrões: ao perceberem que há seis classes de triângulos congruentes, com quatro elementos cada uma;
- Reconhecimento de padrões: ao perceberem que cada classe de equivalência deve possuir um triângulo azul, laranja, verde e vermelho, congruentes entre si;
- Abstração: ao focarem a atenção no que representa cada classe de equivalência e não necessariamente em cada um de seus elementos, facilitando a organização dos triângulos;
- Abstração: ao compartilharem com os colegas suas estratégias para verificar a congruência entre os triângulos, que focavam em características específicas deles para agrupá-los em classes de equivalência;
- Abstração: ao estabelecerem relações entre os triângulos representados na lousa, conforme mostrado na Figura 31, a fim de compreender que a congruência de triângulos é uma relação de equivalência;
- Abstração: ao realizar ações para verificar quais características específicas os triângulos possuíam em comum, seja rotacionando, movimentando ou sobrepondo-os, ou ainda utilizando os instrumentos do kit geométrico;
- Algoritmos: ao elaborarem estratégias para a verificação das medidas dos lados e dos ângulos de um triângulo, que poderiam ser repetidas em outros;

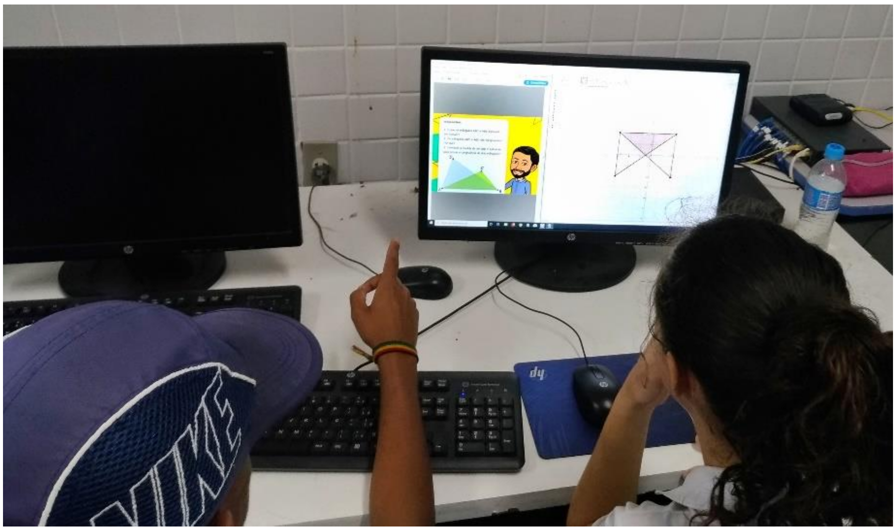
8.3 APRENDENDO OS CASOS DE CONGRUÊNCIA POR MEIO DO GEOGEBRA

Esta atividade objetivou conduzir os alunos à aprendizagem dos casos de congruência utilizando o GeoGebra, além de focar também em outros objetivos específicos desta pesquisa. Seus dados, coletados a partir das observações do pesquisador e gravações de voz, além de capturas de telas dos computadores utilizados pelas duplas se encaixam na categoria: elaboração de conjecturas sobre a congruência ou não congruência de triângulos.

De um modo geral, os alunos conseguiram realizar as construções propostas e, por meio das perguntas contidas nos slides e realizadas pelo pesquisador, conseguiram compreender cada um dos casos de congruência. Além disso, também se atentaram para a ideia de que esses casos consistem em situações específicas, cada um com suas particularidades como, por exemplo, o caso LAL, no qual os dois lados precisam ser adjacentes à um ângulo comum.

Para detalhar a interação das duplas, apresentamos a seguir o registro de dois alunos interagindo com o GeoGebra em uma janela do computador, enquanto que visualizavam as orientações dos slides em outra (Figuras 32). Em paralelo a isto, também teceremos algumas reflexões sobre as ações e construções realizadas por eles e as habilidades do PC que podem ter sido mobilizadas nessa interação.

Figura 32 – Alunos interagindo com o GeoGebra (à direita) e visualizando as instruções do slide (à esquerda)



Fonte: Dados da pesquisa

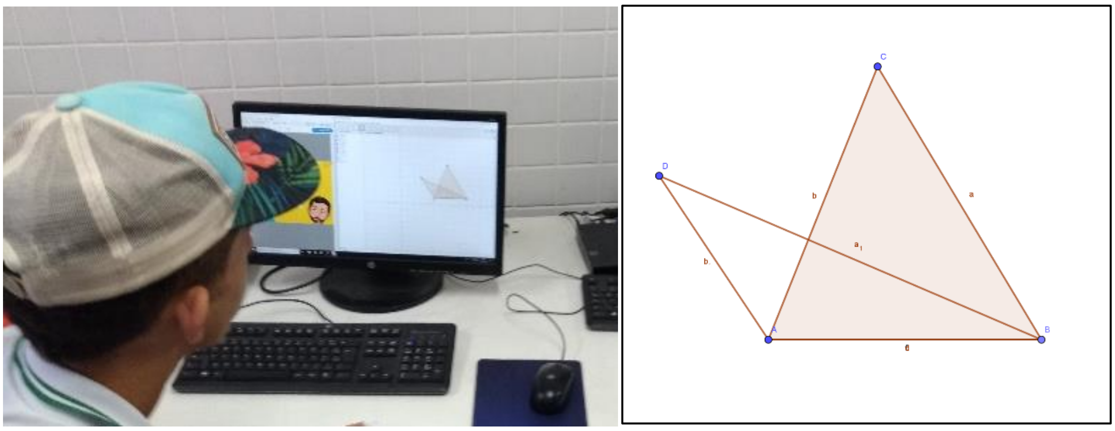
Na Figura 32, é possível observar o cumprimento de uma importante orientação que fizemos para a turma: os alunos sempre deveriam buscar modificar o posicionamento dos triângulos, para que pudessem explorá-los em diferentes rotações. Nesse caso, a dupla fez a sua construção em uma posição invertida em relação à construção inicial, o que a princípio gerou certa dúvida entre seus componentes e demais alunos da turma.

Entretanto, com algumas orientações do pesquisador, a dupla continuou com a construção na posição em que se encontrava, o que acabou por mobilizar diferentes habilidades geométricas, como é o caso da visualização e suas operações mentais (KALEF, 2016) e também exigiu outras habilidades que vão além do conhecimento geométrico, em especial àquelas que se associam ao PC, conforme propõe a nossa atividade.

Dessa forma, lançando nosso olhar sob a construção feita pela dupla, e pensando nas quatro habilidades do PC (decomposição, reconhecimento de padrões, abstração e algoritmos), podemos verificar que eles utilizaram muito de suas habilidades de abstração, focando nos detalhes essenciais para a construção e entendimento dos casos de congruência, além do reconhecimento de padrões, ao compreenderem cada vez mais o funcionamento das ferramentas do GeoGebra. Também podemos associar algumas de suas ações à habilidade algoritmos, quando foram capazes de compreender e seguir uma sequência de passos para a construção das representações dos casos de congruência e dos casos onde não se é possível verificar a congruência dos triângulos.

A Figura 33 apresenta uma das construções realizadas por outra dupla, que apesar de neste item não ter alterado significativamente as posições dos triângulos, conseguiu realizar as construções que esperávamos e obter a conclusão de que dois triângulos que possuem apenas um lado em comum não são congruentes.

Figura 33 – Aluno interagindo com o GeoGebra e captura de tela de sua construção



Fonte: Dados da pesquisa

Outras conclusões foram desenvolvidas por estes e outros alunos, que encontraram no GeoGebra, uma forma intuitiva e criativa de aprender e exercitar conhecimentos geométricos, além de praticar algumas habilidades associadas ao PC, com destaque para:

- A abstração dos elementos e propriedades envolvidos em cada um dos casos de congruência, para verifica-los com eficácia, focando a atenção nos que realmente importam;
- O reconhecimento de padrões, quando tiveram que entender as funcionalidades das ferramentas do GeoGebra, inclusive, de ferramentas que criam os mesmos objetos, porém por meio de parâmetros distintos;
- Os algoritmos, quando foram capazes de abstrair cada uma das instruções fornecidas na atividade, executando-as sistematicamente;
- Os algoritmos quando foram capazes de compreender as nomenclaturas dos elementos geométricos, fortemente utilizadas na atividade;
- A decomposição das instruções fornecidas na atividade, pois a turma pôde realizar as construções em partes, para não gerar equívocos no posicionamento dos itens e no seguimento da ordem em que os comandos deveriam ser realizados;

8.4 JOGO DAS CONGRUÊNCIAS

Após a turma aprender sobre os casos de congruência e alguns de não congruência, partimos neste encontro para a atividade com o jogo das congruências. Inicialmente, as duplas foram desfeitas e os alunos foram dispostos em três grupos, que tiveram seus diálogos e ações capturados por meio de gravações de vídeo.

Para melhor descrever o desempenho desses grupos, categorizá-los e apresentar algumas considerações sobre suas ações, recortes de seus diálogos foram transcritos e dispostos nos quadros disponíveis no Apêndice K, L e M. Vale ressaltar que buscamos preservar algumas marcas de oralidade dos alunos e do pesquisador.

Para melhor tecer nossas reflexões e também não intervir no fluxo das ideias, estratégias e habilidades desenvolvidas pelos grupos ao jogar, não utilizaremos neste item as categorias de análise para agrupar os resultados, entretanto, a categorização dos diálogos pode ser consultada nos quadros presentes nos Apêndices K, L e M.

Voltando nosso olhar para as atividades desempenhadas pelo grupo 1, podemos apontar alguns aspectos relevantes a respeito das conexões que podem ser identificadas entre o PC, o ensino e a aprendizagem da Geometria. Primeiramente, destacamos a interação e cooperativismo entre as alunas que compunham tal grupo, que transcendeu o aspecto competitivo do jogo, tornando-o como um real meio de aprendizagem, fato que também ocorreu com os outros grupos.

A colaboração trata-se de uma ação fundamental ao processo de aprendizagem, especialmente para alunos que constantemente costumam interagir com colegas dentro e fora da escola fazendo uso das TDIC. Para McGonigal (2011), em ambientes digitais como nos *games*, os jovens costumam trabalhar de maneira coordenativa, cooperativa e cocriativa, e reflexos dessa atividade são levados a outros espaços, como é o caso das escolas.

Moita (2007) aponta a colaboração como aspecto fundamental para o desenvolvimento de aprendizagens, assim, nota-se que por meio de ações que permitam aos alunos trabalhar dessa forma, também é possível impulsionar a aprendizagem da Matemática, tornando-a algo mais comum e acessível a todos.

Nesse sentido, permitir a colaboração entre os alunos foi um fator determinante na realização da atividade. Por meio dessa colaboração, também pudemos averiguar a novas maneiras pelas quais as habilidades do PC foram mobilizadas entre a turma, pois passaram de algo individual para habilidades maiores, desempenhadas em grupo.

Outro ponto relevante está presente na progressão dos métodos utilizados pelas alunas para verificar a congruência dos triângulos, partindo da tentativa de superposição para uma percepção visual das características e elementos dessas figuras, unida à verificação dos casos de congruência apresentados durante a aula anterior.

Em meio à essa progressão, também pudemos notar que as atividades realizadas pelos alunos apresentam relações com as habilidades do PC. Por exemplo, a verificação visual da semelhança entre um triângulo e outros, que envolve a habilidade de reconhecer padrões e de abstração. Observamos então indícios que o PC pode estar muito mais associado à Matemática do que imaginamos, nesse caso, especialmente, encontramos mais uma das evidências de suas conexões com a aprendizagem de Geometria, que em sua essência envolve muitas habilidades visuais.

Além dos casos de congruência, novas conclusões foram surgindo sobre casos em que os triângulos não são congruentes, conforme deduzimos no comentário da linha 4 do Apêndice K a respeito do raciocínio de A5: ‘se dos ângulos conhecidos em um triângulo, mais de um deles possuir medidas diferentes em relação aos ângulos de outro triângulo, esses triângulos não serão congruentes’.

Conforme destacamos também na linha 5 do quadro presente no Apêndice K, A5 expressa mais uma conclusão a respeito da congruência de triângulos, quando menciona “*Não tem lado não, é ângulo, ângulo, ângulo*”, ao se referir que não dava para garantir a congruência entre dois triângulos presentes em suas cartas, porque as medidas informadas eram insuficientes. A partir disso, é possível perceber que, mesmo sem intenção, a aluna deduz uma importante conclusão: para verificar a congruência entre dois triângulos, seguindo os casos de congruência, seria necessário ao menos a medida de um dos lados.

Posteriormente, A7 apresenta conclusão semelhante, conforme pode ser verificado na linha 6 do quadro presente no Apêndice K, ao mencionar “*tem que ter a medida do lado*”. Ao realizar essas conclusões, certamente as alunas não precisaram se preocupar com outras características dos triângulos, verificando apenas o que era relevante, sendo essa uma forma de abstração, habilidade fortemente associada ao PC.

No Apêndice K, em sua sétima linha, é apresentada a fala de A6, quando percebe ao observar o triângulo da sua carta objetivo, que o da sua carta de congruência possuía apenas uma das medidas de seus ângulos informada e que se diferenciava de todos os ângulos do triângulo de sua carta objetivo. A partir disso, a aluna conclui que os triângulos não são congruentes. Destacamos a associação desse raciocínio com o PG e, também, com o PC, uma vez que a aluna focou nas medidas dos triângulos, verificando que eles não eram congruentes apenas porque uma das medidas da carta de congruência não correspondia com qualquer outra medida da sua carta objetivo.

Conceitos geométricos se fazem presentes na atitude desta aluna que, certamente, percebeu que se ao menos um dos ângulos de um triângulo for alterado, todas as suas outras medidas também seriam afetadas. Dessa forma, não era possível que os outros dois ângulos do triângulo de sua carta de congruência fossem da mesma medida que os do triângulo da sua carta objetivo, pois a soma dos ângulos internos seria alterada, passando a ser mais, ou menos, de 180 graus, e seria impossível que a figura de sua carta de congruência fosse um triângulo.

Essa habilidade desempenhada por A6 se assemelha com a abstração e também com outras decorrente dela e dos outros pilares do PC, como é o caso da depuração, que consiste na verificação de erros em códigos e é parte fundamental do processo de aprendizagem da programação. (KYNIGOS; GRIZIOTI, 2018).

O segundo grupo apresentou, de maneira semelhante ao primeiro, importantes estratégias para verificar a congruência de triângulos. Inicialmente, destacamos a dúvida de A10, transcrita na linha 1 do quadro presente no Apêndice L:

> **A10** *Professor, me ajuda aqui. Se nesse tem 30º e 30º e nessa outra (carta objetivo) só tem 30º. Eles são iguais?*
> **Pesquisador** *Tem alguma medida diferente?*
> **A10** *Eu acho que não.*
> **Pesquisador** *Qual a medida desse lado?*
> **A10** *4,5*
> **Pesquisador** *Tem algum lado* nessa outra carta *com 4,5? (carta objetivo).*
> **A10** *Não, só tem 4.*
> **A10** *Ah então não serve, porque são diferentes, não dá pra usar LLL..*

Essa dúvida de A10 se assemelhou com a de A6 (ver linha 7 do Apêndice K). Ambas as alunas tiveram dúvidas quando encontraram cartas de congruência com triângulos que para elas possuíam formatos semelhantes, mas com ao menos uma medida diferente em relação às da carta objetivo, que possuía um triângulo com todas as medidas de lados e ângulos informadas. Essas cartas possuíam então triângulos incongruentes ao da carta objetivo, pois conforme a definição de congruência de triângulos, é preciso que essas figuras possuam igualdade entre as medidas de lados e ângulos que se correspondam. Nesse caso, A6 foi capaz de perceber essa ideia facilmente, enquanto que A10 necessitou de auxílio do pesquisador para compreende-la.

Esse auxílio prestado revela mais uma vez a necessidade de atuação do professor em determinados momentos, de modo a proporcionar situações didáticas que levem os alunos a desenvolverem ideias suficientes para aprender o conteúdo em estudo. Conforme aponta a TSD, em situações didáticas de ensino, o professor atua de forma a facilitar e transformar as formas de acesso ao conhecimento pelos alunos, através de um meio estrategicamente escolhido, que em nosso caso foi as cartas do jogo. (BROUSSEAU, 1996).

A13, que também fazia parte desse segundo grupo, apresenta importantes estratégias ao longo do jogo, que lhe permitiram jogar com agilidade, e compreender quando os triângulos das cartas que retirava do monte eram congruentes ou incongruentes ao de sua carta objetivo. Algumas de suas importantes percepções, apresentadas no quadro presente no Apêndice L foram: verificar que todos os casos de congruência envolvem ao menos três elementos de um triângulo (LLL, LAL, ALA, LAAo); cartas com pouca semelhança visual não são congruentes.

Por meio dessas conclusões, e de outras jogadas, A13 mostra sua capacidade de pensar geometricamente e, também computacionalmente, pois identificamos correlações entre suas ações e as habilidades do PC. Podemos destacar como um exemplo dessa capacidade o momento em que o aluno verifica que é necessária a igualdade das medidas de ao menos três dos elementos de um triângulo para verificar a sua congruência, ele está a utilizar habilidades de reconhecimento de padrões e abstração, quando passa a aplicar essa ideia em jogadas posteriores. Outras conexões podem ser verificadas nas linhas 2, 3 e 5 do Apêndice L.

Entretanto, algumas dificuldades também surgiram entre o grupo. Um exemplo foi quando acharam que ter a medida dos três ângulos de um triângulo seria suficiente para garantir sua congruência com outros e, também, o esquecimento de que, em alguns casos, os lados e ângulos dos triângulos deveriam ser adjacentes, conforme pode ser verificado na linha 5 Apêndice L.

Em relação ao terceiro grupo, apesar de ser formado por apenas duas pessoas, pudemos perceber que A1 e A2 se destacaram na realização da atividade, por conseguir assimilar os casos de congruência com rapidez.

Inicialmente o aluno A2, que já havia escrito todos os casos de congruência em seu caderno antes de o jogo iniciar, percebe que se ao menos uma das medidas dos lados do triângulo de sua carta de congruência for diferente de qualquer outra medida dos lados do triângulo de sua carta objetivo, esses triângulos não serão congruentes, sendo o mesmo válido também para os ângulos.

Conforme é apresentado na linha 1 do Apêndice M, esse raciocínio se estabeleceu por meio do seguinte diálogo:

> **A2** *Ei, professor. Nesses daqui só tem um lado com tamanho.*
> **Pesquisador** *Qual caso de congruência podemos usar?*
> ***A2*** *Acho que LAL.*
> **Pesquisador** *Vamos fazer assim, coloca aqui em cima para que A1 também possa ver, e vamos observar com calma.*
> ...
> **Pesquisador** *Quais são as medidas conhecidas?*
> **A2** *Vintão.*
> **Pesquisador** *E as outras?*
> **A2** *40 e esse outro.*
> **Pesquisador** *Tem 120º no outro?*
> **A2** *Eita, tem não. Aí não é congruente né? Porque tipo tá diferente?*
> **Pesquisador** *Exato. Pela definição de congruência de triângulos, já sabemos que eles não são congruentes.*
> **A2** *Com os lados dava também?*

> **Pesquisador** *Sim, se tiver um lado que não seja de mesma medida que nenhum outro lado de outro triângulo, não tem como ser congruente.*

Acreditamos que essa percepção foi uma das principais estratégias utilizadas por este aluno para jogar com rapidez. Fazendo uma ponte com as habilidades do PC, é possível verificar que A2 utiliza da abstração para focar em aspectos chave dos triângulos, que são relevantes para a verificação de sua congruência. (BARR; STEPHENSON, 2011). Nesse caso, ele verificava se ao menos uma das medidas do triângulo de sua carta de congruência corresponde com alguma das medidas informadas no da carta objetivo que, conforme destacamos anteriormente, possuía todas as medidas disponíveis.

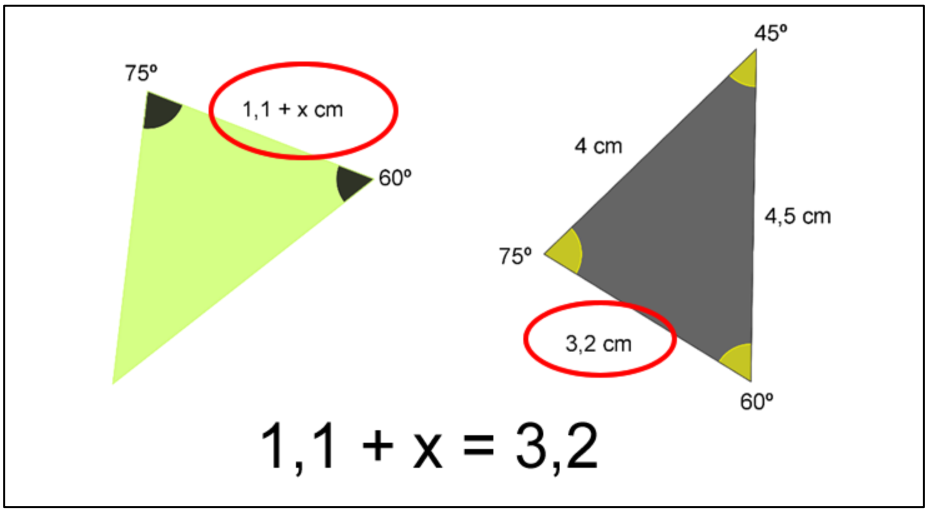
Assim como transcrevemos e comentamos no Apêndice M, A2 ainda apresenta outras estratégias, como a verificação visual do formato dos triângulos das cartas, de modo a descartar a maioria das que possuíam triângulos incongruentes ao de sua carta objetivo apenas num primeiro olhar, o que auxiliou tanto ele quanto seu colega A1 a jogarem rapidamente, sendo esta uma forma de reconhecer padrões e abstrair propriedades.

Ainda em relação ao aluno A2, destacamos na linha 8 do quadro presente no Apêndice M, que ele e seu colega sempre solicitavam auxilio do pesquisador para verificar se as suas respostas para os triângulos com variáveis em suas medidas estavam corretas. Enquanto A2 e A1 faziam isso os alunos dos demais grupos costumavam descartar a carta, achando que os triângulos não eram congruentes, mesmo que possuíssem semelhança visual em seus formatos.

Apesar deste tipo de atividade ser comum nas questões de Geometria livro didático da turma e, também, nos exercícios trabalhados pela professora, ainda verificamos tal resistência por parte de alguns alunos em compreender este diálogo entre Geometria e Álgebra, enquanto que outros conseguiram assimilar com facilidade.

O ponto mais importante dessas cartas com variáveis em suas medidas é que para adicioná-las em seu conjunto de cartas, os alunos deviam resolver uma equação do primeiro grau, igualando a expressão presente no lado que possuía uma variável em suas medidas com a medida do lado do triângulo de sua carta objetivo, correspondente ao mesmo, conforme mostra a Figura 34 a seguir:

Figura 34 – Triângulos de uma carta de congruência com variável (à esquerda) e de sua respectiva carta objetivo (à direita)



Fonte: Elaborado pelos autores

O trabalho com álgebra, conforme aponta Wan de Walle (2009), é uma das grandes dúvidas entre os alunos do Ensino Fundamental, especialmente no tópico equações do primeiro grau. Geralmente, alguns professores ensinam seus alunos a utilizarem algoritmos para transpor um valor ou variável de um membro para outro da equação, até encontrar o valor da variável em questão.

Apesar disso, notamos que A1 e A2 ao invés de recorrer a estes procedimentos ou, até mesmo, escrever seu raciocínio em papéis para facilitar a resolução, foram capazes de imediatamente pensar em quanto faltava no valor dado para que os lados dos triângulos tivessem medidas iguais. Nesse caso, esse valor em falta seria justamente o da variável.

Acreditamos que a Geometria pode ter sido uma ponte para a prática desta forma de pensar, e ressaltamos assim a contribuição do desenvolvimento do PG para outras formas de pensar. Nesse caso, fica evidente a contribuição ao Pensamento Algébrico.

Indo além da matemática, também destacamos a conexão do PG com o PC, pois os alunos foram capazes de deixar de lado os algoritmos comumente utilizados para se resolver uma equação do tipo, e elaborar estratégias mais práticas para encontrar o valor da variável x.

De maneira geral, observando o desempenho dos três grupos, podemos averiguar que este jogo foi uma maneira lúdica de possibilitar que os alunos aprendessem os casos de congruência, além de outras ideias, que podemos considerar como casos de não congruência, que certamente os ajudarão ao se realizar futuras atividades e exames.

Entre esses casos de não congruência, estão:

- Triângulos sem nenhuma semelhança visual;
- Triângulos que divergem em ao menos uma das medidas de seus lados ou ângulos correspondentes;
- Triângulos com lados e ângulos de mesma medida, porém não adjacentes (por não ser possível utilizar os casos LAL e ALA);

Ressaltamos que achado semelhante é apontado por Murari e Barbosa (1993), que apresenta exemplos de cada caso de não congruência de triângulos.

Em sintonia com essas habilidades relacionadas ao PG, estavam presentes também àquelas associadas ao PC, das quais esperávamos a princípio que os alunos: reconhecessem padrões entre as cartas do jogo; elaborassem estratégias para verificar a congruência entre quaisquer triângulos; abstraíssem as propriedades dos triângulos representados nas cartas.

Conforme foi mostrado ao longo deste tópico, outras habilidades associadas ao PC também foram surgindo enquanto os alunos jogavam e pensavam geometricamente, das quais destacamos:

- Reconhecimento de padrões, ao observar os triângulos com possibilidade de serem congruentes aos das cartas objetivo;
- Elaboração de estratégias para verificar a congruência dos triângulos por meio da abstração dos casos de congruência e de uma verificação procedural de seus elementos;
- Verificação de características-chave nos triângulos, relevantes para a verificação de sua congruência com outros, que remete à habilidade de abstração;
- Abstração dos casos em que os triângulos não são congruentes;

8.5 ATIVIDADE FINAL

Para proceder à apresentação da análise desta atividade, utilizaremos os subitens a seguir para agrupar as respostas fornecidas pelos alunos em cada uma das questões, identificando as conexões percebidas entre as suas respostas, a Geometria e o PC. Ao longo das reflexões de cada item, também associaremos os resultados obtidos às categorias propostas.

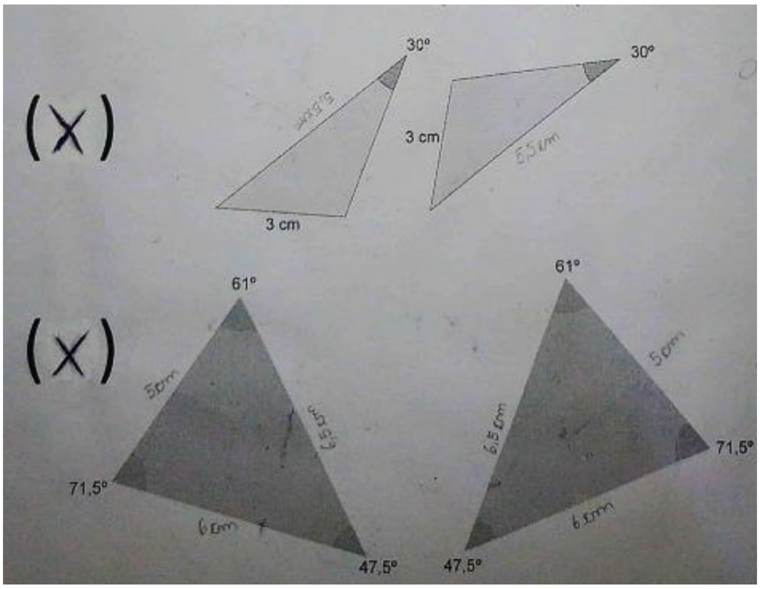
Primeira questão

Neste item, foi solicitado que os alunos identificassem as alternativas que apresentavam triângulos congruentes, fazendo uso dos casos de congruência que aprenderam nas aulas anteriores e, também, dos instrumentos de medição que foram fornecidos. Além disso, foi indicado que eles escrevessem, ao final da atividade, quais foram os casos de congruência que conseguiram identificar.

As respostas para este item se relacionam à categoria comparação, manipulação e medição de triângulos, mas também revelam um pouco sobre a percepção que os alunos desenvolveram em relação à congruência de triângulos, uma vez que eles demonstraram diferentes estratégias e algumas de suas dificuldades ao longo das resoluções.

Na Figura 35 a seguir, destacamos as respostas de uma aluna que demonstrou por meio de alguns registros a estratégia que utilizou para resolver a atividade.

Figura 35 – Registros de A7 para o primeiro item da quinta atividade



Fonte: Dados da pesquisa

Além desses registros, A7 também escreveu que: "*a figura D pode ser (LLL) e a figura C é LAA*", registrando assim os casos de congruência que utilizou para responder a atividade.

Analisando as respostas de A7, podemos destacar inicialmente que ela nomeou os quatro pares de figuras presentes na atividade com letras de A à D, para melhor facilitar a representação de suas respostas. Apesar de não ter identificado todas as figuras que eram congruentes, verificamos nos itens C e D, representados na Figura 35, e na resposta escrita da aluna, que ela realizou algumas medições para verificar a congruência entre os triângulos.

No item C (primeiro par de triângulos da Figura 35), é possível verificar que A7 mediu os lados maiores de ambos os triângulos e percebeu que os dois possuem as mesmas medidas. Porém, a partir do que foi registrado de maneira escrita posteriormente percebe-se que a aluna também deve ter verificado a medida do terceiro lado (que não possuía medida informada), identificando assim que os dois triângulos são congruentes pelo caso LLL. Não descartamos também a possibilidade de ela ter deduzido que, consequentemente, o terceiro lado deveria ter a mesma medida em ambos os triângulos, o que não consiste um método seguro, tendo em vista que, por exemplo, o ângulo adjacente aos lados de 3,3 cm e 5,5 cm poderia ter amplitude diferente em ambos os triângulos, sem que as medidas descobertas por A7 fossem alteradas.

A partir dessa última possibilidade, destacamos que a intuição tem o seu papel e importância no desenvolvimento do PG, conforme aponta Fainguelernt (1999), somando-o à visualização, percepção e representação. Apesar disso, essa forma de raciocínio não pode ser um único fator na verificação da congruência entre dois ou mais triângulos, conforme demonstra a nossa reflexão sobre as respostas de A7.

Logo depois, no par de triângulos da parte inferior da Figura 35, verificamos que a aluna mediu todos os três lados do triângulo, podendo verificar por meio de todos os casos de congruência, ou pela própria definição de triângulos congruentes que eles comtemplariam esta característica. Porém, de acordo com o registro feito pela aluna, ela verificou a congruência pelo caso LAAo.

Enquanto A7 apresentou registros nos triângulos e de forma escrita, os demais alunos apenas marcaram as alternativas ou apresentaram os registros escritos.

Partindo para as respostas dos demais alunos, destacamos que A10 acertou todos os casos, marcando todos os pares que apresentavam triângulos congruentes, nos quais pôde identificar os casos LLL e LAL. Já os alunos A1, A2, A4, A5 e A13, de modo semelhante à A7, marcaram apenas os dois últimos pares de triângulos como congruentes e fizeram os seguintes registros:

A1 – *"usei a régua na figura e ela é lado, lado, lado"*
A2 – *"(ALA, LAAo)"*
***A4* –** *"Na letra (D) LLL e na (C) LAL"*
A5 – "*Letra 'C' LAL Letra 'D' LAAo*"

Além desses alunos, A9 acertou todas as respostas, registrando que identificou os casos LAL e LLL, enquanto que A6 marcou o primeiro e último par, registrando a seguinte fala “eu encontrei (na primeira) o caso LLL utilizando a régua” e, por fim, a aluna A10 que marcou todas as alternativas, escrevendo logo depois que identificou os casos “1. LLL, 2. LAL, 3. LLAo, 4 AAA”.

A partir desses registros, observamos que o segundo par de triângulos foi marcado apenas por duas alunas, A9 e A10. Possivelmente, por não apresentarem nenhuma medida indicada, os demais alunos podem ter sentido alguma dúvida sobre como proceder nesse item específico. Ou ainda, dada a diferença de posicionamento de indicação de um de seus ângulos, a turma pode ter considerado, por meio de uma análise apenas visual, que os triângulos não seriam congruentes.

Recorrendo mais uma vez à fala de Fainguelernt (1999, p. 53) ressaltamos que o PG é resultado de um conjunto de habilidades lógicas e sensoriais que dão sentido aos objetos de estudo da Geometria, não podendo ser resumidas apenas à intuição, ou visualização, pois assim, o conhecimento matemático é distorcido e falsas ideias podem ser formadas.

Possivelmente, esses alunos podem ter desconsiderado a ideia de realizar medições, ou ter se confundido por conta do posicionamento dos triângulos, o que pode ter dificultado a sua interpretação e consequente resposta a esse item da atividade. Assim, verificamos a necessidade de um trabalho mais profundo e duradouro, que conduza à turma ao preenchimento das lacunas presentes no desenvolvimento de suas habilidades de medição e visualização.

Ainda nessa questão, observamos que uma aluna relatou, de maneira equivocada, ter utilizado a medida dos três ângulos para verificar que um dos pares de triângulos eram congruentes, o que sabemos que não é possível, pois dois triângulos incongruentes podem ter as mesmas medidas em seus três ângulos internos correspondentes. Em comparação à atividade anterior, onde a maioria dos alunos ainda recorria a este caso, pode-se considerar que o fato de apenas esta aluna ter insistido em utilizá-lo revela que a turma, de fato, compreendeu em sua grande maioria que este caso não é suficiente para garantir a congruência entre triângulos.

Lançando um olhar sobre todas as respostas, podemos evidenciar algumas conexões com as habilidades do PC:

- Reconhecimento de padrões: ações associadas ao reconhecimento de padrões podem ter sido mobilizadas quando os alunos foram capazes de perceber que as figuras possuem alguma semelhança visual, ou que seria necessário realizar apenas a medição de um ou dois de seus elementos para verificar sua congruência por determinado caso já apreendido. Por exemplo, no último par de triângulos eram fornecidas todas as medidas dos ângulos, sendo necessário apenas que os alunos realizassem a medição de um lado em um triângulo e de seu lado correspondente no outro, para garantir a congruência entre os dois por meio dos casos ALA ou LAAo.

- Abstração: a habilidade de abstração associa-se ao direcionamento da atenção aos aspectos que são relevantes para a resolução de um problema, mas sem deixar de considerar o todo. (WING, 2006). Acreditamos que a abstração mostrou-se relevante aos alunos quando eles foram capazes de observar que algumas medidas dos triângulos já estavam informadas, sendo necessário apenas medir mais algumas para verificar a congruência dos pares de triângulos por meio de algum caso específico, ou ainda, quando não aproveitaram essas medidas e preferiram medir todos os lados, procedimento que para eles pode ter sido mais simples para aplicar o caso LLL;
- Algoritmos: os algoritmos consistem em passos a serem utilizados para resolver um problema, que podem ser reaplicados ou modificados para se solucionar outros problemas posteriores. (BRACKMANN, 2017). Conforme mencionamos ao longo da quarta atividade, esta habilidade se associa ao fato de os alunos seguirem algum passo-a-passo ou processo para verificar a congruência de triângulos, seja, por exemplo, verificando visualmente o formato das figuras para depois observar as suas medidas, ou verificando imediatamente se essas medidas se assemelham. Dessa forma, apesar de nem todos os alunos terem registrado como fizeram para verificar a congruência, mas sim os casos que encontraram, ainda podemos perceber por meio de anotações, como as de A7, os procedimentos que eles seguiram.

Segunda questão

Neste item, os alunos deviam representar de maneira escrita o que entendem por congruência de triângulos. Verificamos que cada aluno apresentou uma resposta diferente, revelando características únicas de sua compreensão sobre a temática estudada, como também alguns equívocos, conforme destacamos nas respostas transcritas a seguir:

A1 – *“Que eles tem que ser da mesma forma” (sic).*

A2 – “*Eu sei que pra saber se um triangulo e congruentes tem que medir e ve se os lados são iguais”.* (sic).

A4 – “*Que devemos verificar os triângulos pra ver se eles tem o mesmo tamanho*”

A5 – *"Que quando dois triângulo for congruente qualque caso serve". (sic).*
A6 – "*Eu entendi que o triangulo pra ser congruente tem que ter os três lado iguais".* (sic).
A7 – "*Que as formas dos triângulos não define os ângulos e nem os lados".* (sic).
A9 – "*Eu entendi que para um triângulo ser congruente ele tem que ter as mesmas medidas".*
A10 – "*Eles necessitam ter lados e ângulos iguais para poder ser congruente*" (sic).
A13 – "*Quando lados e ângulos tem mesma medida ai são congruentes".* (sic).

Observamos por meio dessas respostas que este item estava mais relacionado à segunda categoria: elaboração de conjecturas sobre a congruência ou não congruência de triângulos, portanto, sua análise será tecida nesta perspectiva.

Quando considerada a definição da congruência de triângulos ou até mesmo os casos de congruência que foram estudados, as respostas apresentadas pelos alunos A2, A5, A6, A7, A10 e A13 podem ser encaradas como adequadas ao que foi solicitado. Entretanto, apenas A10 e A13 se referiram à definição de congruência de triângulos que foi apresentada à turma no início dos cinco encontros que realizamos, especialmente por se referirem à necessidade de lados e ângulos correspondentes possuírem as mesmas medidas.

Já os alunos A2 e A6, se referiram apenas às medidas dos lados, o que não remete à definição de triângulos congruentes, apesar de fazer referência a um dos casos de congruência (LLL). No entanto, considerando o desempenho dos alunos nas atividades anteriores, percebemos que eles podem ter sentido dificuldades em representar seu raciocínio de maneira escrita.

Destacamos que um fato preocupante aparece na escrita desses dois alunos. A2 escreveu: "*Eu sei que pra saber se um triangulo e congruentes tem que medir e ve se os lados são iguais..."* e *A6* escreveu *"Eu entendi que o triangulo pra ser congruente"*. Observamos nessas respostas que eles se referem apenas a um triângulo e não a dois ou mais, parecendo então que estão verificando essas medidas em apenas um triângulo, o que seria totalmente equivocado, pois um equilátero poderia ser erroneamente chamado de "congruente". Apesar de um triângulo equilátero ter lados congruentes, essa seria uma ideia completamente distorcida do que são triângulos congruentes, pois a congruência de triângulos é uma relação que deve ser estabelecida entre pelo menos dois triângulos.

Apesar disso, esse equívoco pode ter surgido apenas na maneira em que A2 e A6 representaram sua compreensão de maneira escrita, pois como mencionado anteriormente, os dados das atividades antecedentes à esta, mostram que ambos os alunos conseguiram verificar de maneira adequada quando dois triângulos eram congruentes.

No caso de A5, que escreveu que quando dois triângulos são congruentes, qualquer caso poderia ser utilizado, consideramos sua resposta como correta porque, além de fazer referência aos quatro casos de congruência, sua resposta também envolve a ideia de que todas as medidas de lados e ângulos correspondentes devem ser iguais.

Com relação à A7, consideramos sua resposta como parcialmente correta, pelo fato de ter registrado com suas palavras algo que remete ao que foi apreendido em relação à congruência dos triângulos: "*Que as formas dos triângulos não define os ângulos e nem os lados".* (sic). Em alguns momentos das atividades anteriores, foi discutida a ideia de que alguns triângulos podem possuir semelhança visual, mas serem incongruentes devido a diferenças milimétricas em suas medidas. Com isso, entendemos que a resposta de A7 faz referência a esses momentos e também revela que ela compreende a necessidade de se verificar ou medir os lados e ângulos dos triângulos para verificar se são congruentes.

De maneira oposta a A7, o sujeito A1 que os triângulos devem possuir o mesmo formato para serem congruentes, enquanto que A7 ressalta que a observação das formas não é suficiente para garantir a congruência. Dessa forma, podemos considerar que há equívocos na resposta de A1, pois triângulos com formatos visualmente semelhantes podem ser incongruentes.

A sujeito A4 diz que devemos verificar se os triângulos possuem o mesmo tamanho. Consideramos a sua resposta como incompleta, porque a palavra 'tamanho' pode ser associada a quaisquer das medidas dos triângulos, porém, nos questionamos: à quais medidas A4 se refere? Em que ordem?

Por fim, a aluna A9 apresentou em sua resposta que um triângulo congruente deveria ter as mesmas medidas. Nesse caso, conforme destacamos ao analisar as respostas de A2 e A6, verificamos que A9 em seu registro confunde a ideia de triângulos congruentes com um triângulo do tipo equilátero, que possui todas as medidas de seus lados e ângulos congruentes. Apesar disso, conforme pode ser visto nos dados da questão 1, A9 foi a única aluna a marcar corretamente as alternativas que continham pares de triângulos congruentes, podendo seu erro estar presente apenas na forma em que representou sua compreensão.

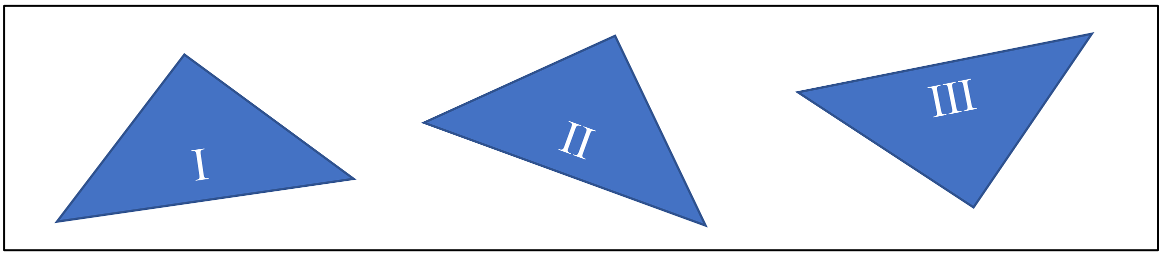
De maneira geral, podemos considerar que esta questão revelou importantes dados sobre a compreensão dos alunos a do tema estudado, assim como sobre suas formas de aprendizagem. Por meio dela, foi possível evidenciar que a maioria da turma consegue registrar de forma escrita o que compreendeu sobre a congruência de triângulos, especialmente quando é considerando o percurso individual de cada um em aulas anteriores.

Fazendo uma ponte entre os registros feitos pelos alunos ao responderem essa questão e as habilidades do PC, destacamos sua associação com a abstração e algoritmos, pois ao responde-la os alunos deviam escrever, com suas palavras e de uma maneira geral, como compreendem a congruência de triângulos. Isso fez com que esses eles retomassem todos os casos de congruência apreendidos durante as aulas, estratégias que elaboraram e a própria definição da congruência de triângulos, que foi apresentada e discutida no início das atividades.

Terceira questão

Neste item, foi abordada a ideia de que a congruência de triângulos é uma relação de equivalência, por meio do seguinte comando: "*Na figura a seguir, os triângulos I e II são congruentes. Sabe-se também que o triângulo II é congruente ao triângulo III. Podemos dizer, sem verificar, que os triângulos I e III são congruentes?"*. A Figura 36 a seguir representa a figura presente na atividade, que solicitava, também, que os alunos justificassem sua resposta, seja ela afirmativa ou não.

Figura 36 – Triângulos presentes na terceira questão da atividade 5



Fonte: Elaborado pelos autores

Destacamos inicialmente que essa ideia já havia sido trabalhada em outros momentos, entretanto, os triângulos estavam posicionados de uma forma diferente (ver Figura 31). Nesse caso, os alunos deveriam partir da ideia de que os triângulos I e II eram congruentes, assim como II e III também eram, para, por transitividade, perceber que I e III também deveriam ser, já que os lados de I seriam congruentes aos seus correspondentes em II, que também seriam em III, uma vez que II e III eram congruentes. O mesmo é válido para os ângulos.

As respostas fornecidas pelos alunos se enquadram na categoria elaboração de conjecturas sobre a congruência ou não congruência de triângulos. Apresentamos a seguir a transcrição de cada uma delas:

A1 – *Sim, por causa que tem todas as medidas ingual (sic).*
A2 – *Porque todos os lados e ângulos são iguais.*
A4 – *Porque virando o triângulo ele vai ficar da mesma forma que I e II.*
A5 – *O triangulo I e II são ingual e por logico o III também (sic).*
A6 – *Sim, porque os três triangulo tem os três lados iguais. (sic).*
A7 – *Porque eles tem a mesma medidas. (sic).*
A9 – *Porque I e II são congruentes e II e III tambem e III e I também pode ser congruentes.* (sic).
A10 – *Porque temos que medir para saber se são.*
A13 – *Sim, porque eles tem a mesma medida LAL. (sic).*

Destacamos inicialmente a resposta de A9, que conseguiu expressar em sua resposta um pouco do que foi debatido no fim da segunda atividade, onde havíamos trabalhado a ideia de que a congruência de triângulos é uma relação de equivalência. Esta foi, portanto, a resposta que mais se aproximou da definição apresentada e discutida.

A5 traz em sua resposta elementos que apontam a sua compreensão de que a congruência de triângulos é uma relação de equivalência, apesar de que algumas palavras utilizadas não são as mais adequadas para evidenciar isto. De toda forma, é importante destacar que, durante sua resolução, a aluna solicitou ajuda ao pesquisador, afirmando que sabia o que a atividade queria, mas não conseguia escrever. Foi sugerido então que fosse feito algum desenho ou esquema que auxiliasse a sua representação, entretanto ela preferiu escrever com suas palavras.

Nesse caso, na resposta fornecida por A5, é utilizada a palavra ‘igual’ para referir-se à congruência. No entanto, durante as aulas, ressaltamos que essa palavra não é adequada para indicar que dois triângulos possuem as mesmas medidas de lados e ângulos correspondentes. A expressão “por lógico” refere-se à relação de transitividade, que era a chave para a resolução deste item. Assim, apesar de não ter utilizado palavras que indicassem precisamente a sua compreensão sobre a relação discutida na atividade, podemos considerar por meio do diálogo que foi estabelecido com a aluna e do seu percurso nas aulas anteriores, que ela compreendeu de fato a ideia, porém não conseguiu expressá-la adequadamente.

Os alunos A1, A2, A6 e A7 apresentaram respostas semelhantes entre si, ao apontarem que os triângulos da atividade seriam congruentes porque teriam as mesmas medidas. Lançando nosso olhar para as respostas individuais, mais especificamente para a de A2, notamos que ele diz que todos os lados e ângulos dos triângulos da atividade são iguais.

Apesar de ter registrado a sua resposta desta forma, observamos que enquanto resolvia este item o mesmo não realizou nenhuma medição que o auxiliasse a chegar à tal conclusão.

Entretanto, considerando a definição de triângulos congruentes, que requer a igualdade entre as medidas de lados e ângulos correspondentes, nota-se que a resposta de A2 não foi suficiente para justificar sua ideia. O mesmo acontece com A1, A6 e A7, que não deixam claro em suas respostas como chegaram à conclusão de que os triângulos I e III têm as mesmas medidas.

Além de A2, vale destacar também a resposta de A6, que ao responder este item utilizou régua para verificar as medidas dos triângulos. A princípio, sua resposta pode parecer incorreta, porque a aluna aponta que os três triângulos possuem os três lados iguais, o que faz parecer que A6 entendeu que todos os triângulos eram equiláteros. Porém, conforme observado durante a aplicação da atividade, a aluna utilizou uma régua para verificar os lados correspondentes de cada triângulo, verificando assim, pelo caso LLL a sua congruência.

Apesar de não ter sido construída a partir da ideia de que a congruência de triângulos é uma relação de equivalência, a resposta de A6 não pode ser considerada como totalmente incorreta. Percebemos a este ponto, e considerando as análises anteriormente tecidas, a importância e a necessidade de avaliar os conhecimentos estudantis não somente por meio de respostas, mas considerando todo o processo de aprendizagem.

Por fim, temos a resposta de A4, que aponta a ideia que se o triângulo III fosse rotacionado, ficaria no mesmo formato que I e II. Nessa resposta, ficam evidentes alguns problemas que, mesmo com a realização das atividades, ainda persistiram em sua compreensão sobre a congruência de triângulos e outros conceitos geométricos. Podemos destacar, por exemplo, que a aluna deixa transparecer na resposta deste item a sua concepção de que as figuras apenas se tornariam congruentes se fossem rotacionadas, como se a rotação alterasse as formas e consequentes medidas dessas figuras.

A partir dessa resposta, podemos refletir sobre uma das lacunas que podem dificultar o desenvolvimento do Pensamento Geométrico estudantil: nem sempre as atividades e exemplos abordados nas aulas de Geometria levam os alunos a irem além da identificação das medidas e elementos das figuras, prendendo-se a fórmulas prontas que pouco estimulam a criatividade e aprendizagem estudantil. Por esse motivo, é importante que as atividades de Geometria também instiguem os alunos a: estabelecer relações entre figuras; buscar por padrões entre objetos; representar figuras e objetos de diferentes formas; visualizar representações sob diferentes perspectivas; compor e decompor objetos; entre outras ações.

De maneira geral, podemos destacar que nem todos os alunos conseguiram elaborar representações escritas que retratassem as suas compreensões sobre o fato de que a congruência de triângulos é uma relação de equivalência. Acreditamos que devido ao teor abstrato desta ideia, muitas dúvidas podem ter surgido entre a turma, sendo esta questão a mais difícil da atividade final.

Parafraseando os escritos de Walker et al. (2011) e Gonçalves (2010), justificamos a importância de atividades que requisitem diferentes níveis de compreensão por parte dos alunos em relação ao conteúdo em foco, porque, quando limitados à observação superficial das representações geométricas, eles acabam por ter sua aprendizagem limitada à uma Geometria improdutiva. Por esse motivo, procuramos contemplar em nossa pesquisa atividades que permitissem um 'ir além' no desenvolvimento das aprendizagens.

Observando o desempenho dos alunos nesta atividade em específico e voltando o nosso olhar para as habilidades do PC, podemos refletir sobre como elas se conectam às ações desempenhadas pela turma ao responder este item da atividade final:

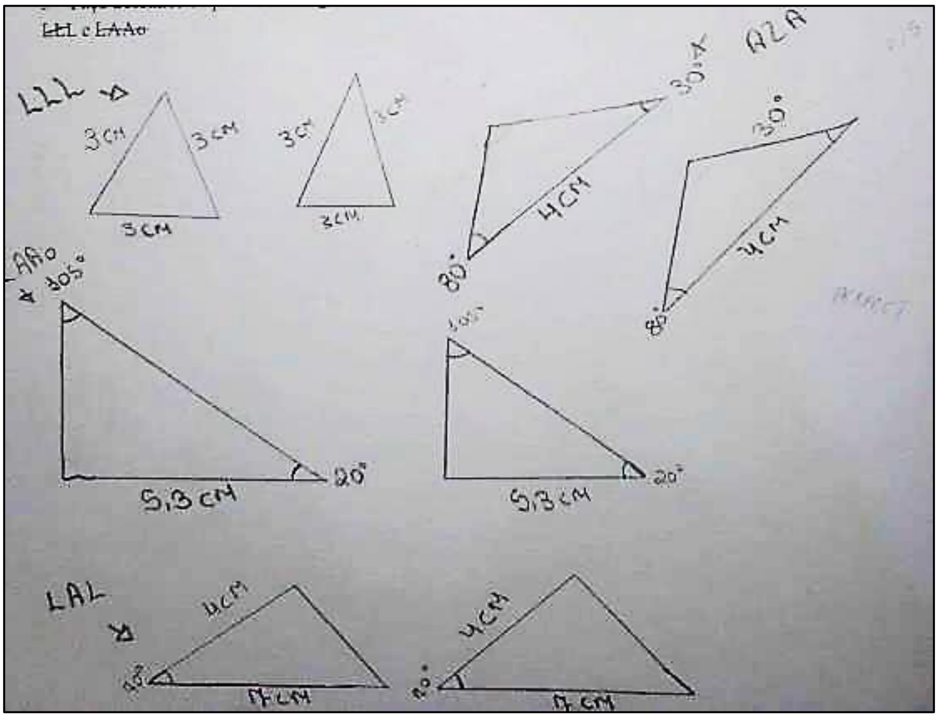
- Reconhecimento de padrões: ao responder essa questão, era necessário que os alunos percebessem e conseguissem registrar em suas folhas que todos os triângulos eram congruentes, pois possuem as mesmas propriedades;
- Abstração: Uma das definições para a habilidade de abstração está na ideia de se "resumir" a resolução de um problema, focando nas principais características do mesmo, sem se preocupar com outras, que imediatamente são interpretadas e "guardadas" na memória (WING, 2006). Nesse sentido, os alunos estavam a mobilizar a habilidade de abstração quando precisaram ignorar as medições dos triângulos e focar no fato de que se os triângulos I e II são congruentes, assim como II e III também são, então I e III também serão.

Questão 4

Neste item, foi solicitado aos alunos que realizassem desenhos de pares de triângulos para representar cada caso de congruência estudado nas aulas anteriores. As respostas fornecidas por eles se assemelham em alguns aspectos, podendo ser inseridas na categoria reconhecimento das características, elementos e propriedades dos triângulos.

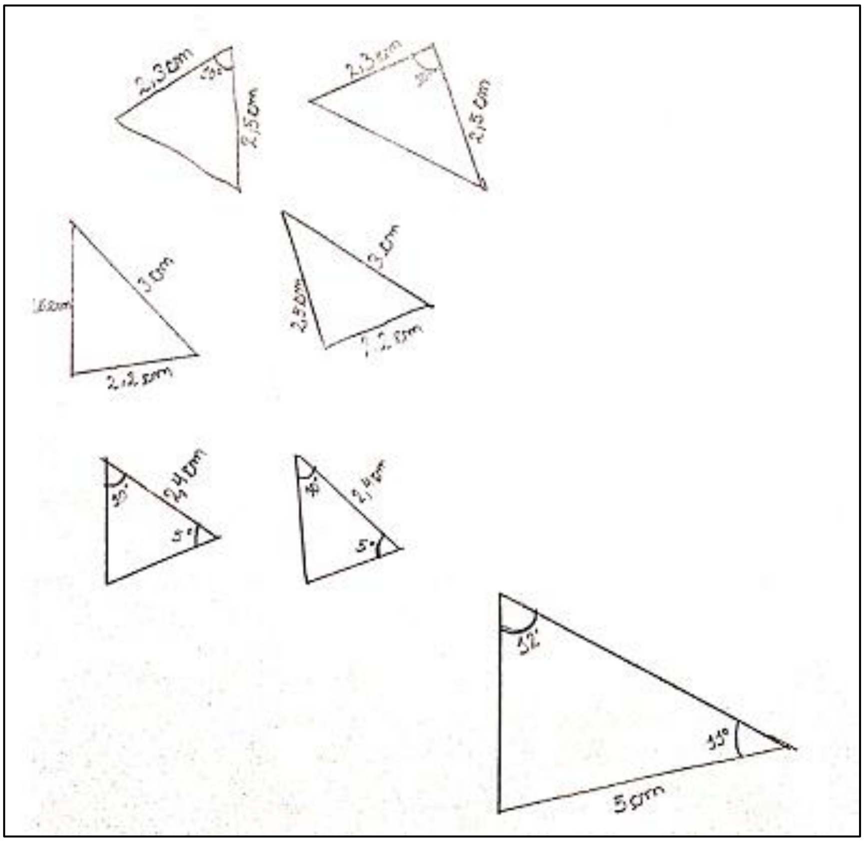
A princípio, iremos agrupar as respostas dos alunos conforme algumas características das representações feitas por eles. A1, A2, A6, A7 e A13 utilizaram a régua para realizar seus desenhos, porém, conforme mostram as Figuras 37 e 38, apenas A6 e A7 escreveram as medidas dos lados dos triângulos que desenharam.

Figura 37 – Resposta de A6 para a quarta questão da quinta atividade



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 38 – Resposta de A7 para a quarta questão da quinta atividade



Fonte: Dados da pesquisa

Observando as respostas das alunas, podemos destacar que ambas se preocuparam com as medidas dos triângulos que desenharam. Porém, as medidas dos ângulos foram inseridas de maneira aleatória, o que causou, por exemplo, a representação errônea de que um ângulo mede 11º, enquanto na verdade, de acordo com a abertura do vértice do triângulo em que se encontra, deveria medir ao menos o triplo desse valor (ver Figura 38), ou ainda, a representação de um ângulo de 105º em um local onde deveria estar um ângulo agudo (ver Figura 37).

Apesar disso, e das pequenas diferenças em relação aos formatos dos triângulos, uma vez que os ângulos não foram considerados, nem medidos, A6 consegue trazer representações dos quatro casos de congruência, indicando os elementos que devem ser observados em cada caso. Na representação feita pela aluna, também é possível perceber que os triângulos sempre estão posicionados da mesma forma que seus respectivos pares, isto é, sem nenhuma rotação ou reflexão em relação ao outro.

Seguindo a perspectiva de Pei, Weintrop e Wilensky (2018) e de Boaler (2018), verifica-se que esta limitação na representação feita pela aluna é reflexo da forma pela qual as formas geométricas costumam ser apresentadas em algumas atividades e exames de Geometria: geralmente com formas regulares e em posições que pouco variam.

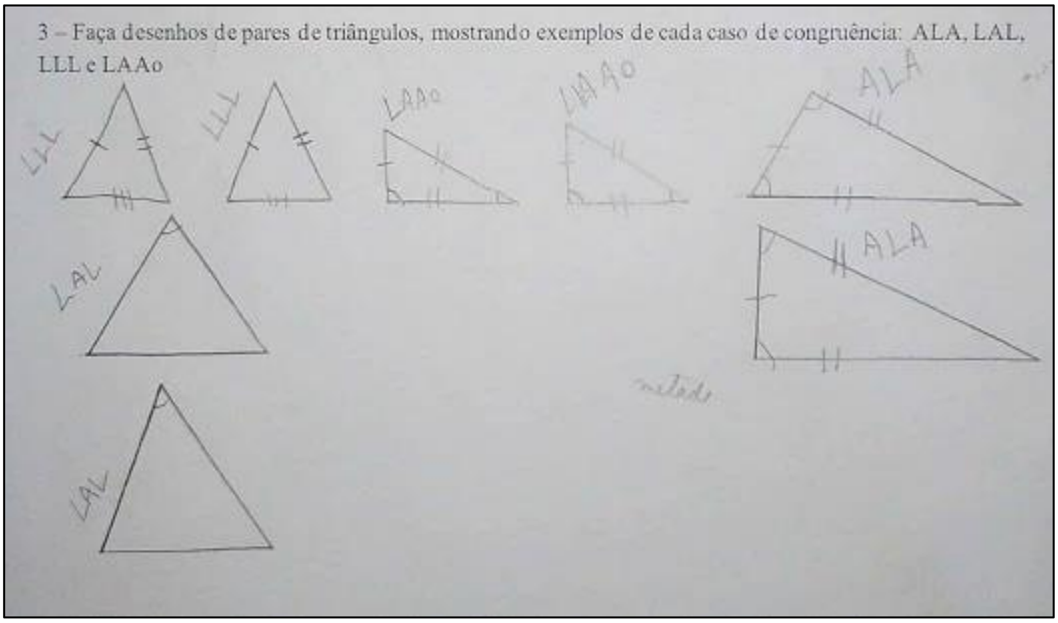
Entretanto, mesmo que os pares de triângulos representados por A6 estejam posicionados de maneiras iguais, verifica-se que o par de triângulos da parte superior direita de seu desenho se encontra em posições diferentes das comumente vistas em atividades de Geometria. Essa característica indica de certa forma um progresso, tanto em sua maneira de enxergar o formato dos triângulos, como também de realizar representações geométricas, o que pode ser um reflexo da forma pela qual as atividades foram desenvolvidas nesta pesquisa.

De maneira semelhante à A6, a representação feita por A7 também contempla esses diferentes posicionamentos, além de uma indicação correta dos elementos a serem observados em cada caso. Vale destacar também que as alunas desenharam triângulos isósceles e escalenos, mostrando que sua visão sobre os triângulos e suas representações também apresentam progressos.

Um pouco diferente das respostas de A6 e A7, as respostas dos demais alunos revelam que nem todos conseguiram realizar representações utilizando-se medidas reais, ou até mesmo utilizando instrumentos de medição para de representar os lados e ângulos desejados. Assim, foi comum em suas resoluções a presença de pares de triângulos com formatos levemente diferentes para representar os casos de congruência.

Logo adiante, na Figura 39, é possível observar a resposta de A13, que optou por utilizar somente uma régua para desenhar alguns dos pares de triângulos solicitados. Verifica-se em sua representação que nenhuma das medidas dos lados ou dos ângulos foram indicadas numericamente, porém o aluno tenta indicar simbolicamente em algumas dessas figuras quais elementos se correspondiam.

Figura 39 – Resposta de A13 para a quarta questão da quinta atividade



Fonte: Dados da pesquisa

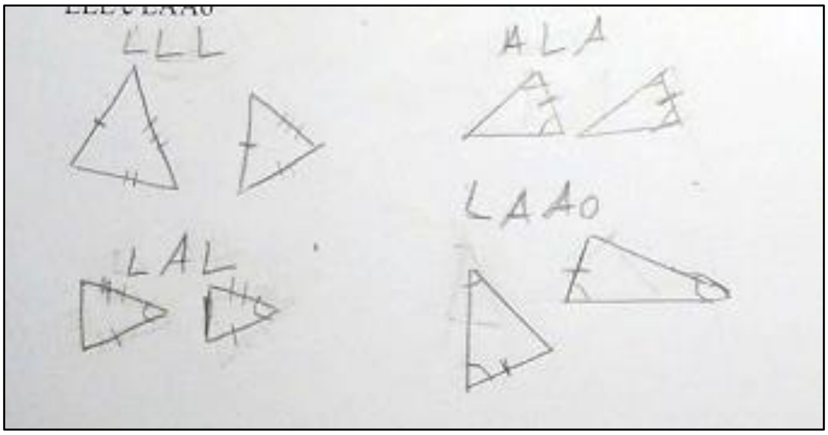
Na representação feita por A13 alguns dos elementos correspondentes foram indicados corretamente, como no caso LLL. Entretanto, nos demais triângulos, apesar de identificar as siglas referentes à cada caso, há a ausência ou excesso de elementos indicados, não permitindo uma boa interpretação do que este aluno entende por cada caso de congruência. Por exemplo, será que no caso ALA ele considerou que o lado deveria ser adjacente aos dois ângulos? E no caso LAL, a quais lados ele se refere?

A13 esteve presente em todas as atividades desenvolvidas durante a aplicação da pesquisa, e destacou-se por conhecer todos os casos de congruência quando utilizava o jogo das congruências. Porém, percebe-se em suas respostas para esta questão que o mesmo ainda possui dificuldades em representar esse conhecimento de maneira escrita ou desenhada.

Vale ressaltar que, diferentemente de A6 e A7, o aluno A13 optou por desenhar os triângulos nas posições usualmente vistas em materiais didáticos, mas podemos ver, também que o mesmo desenhou em suas representações triângulos equiláteros, isósceles e escalenos.

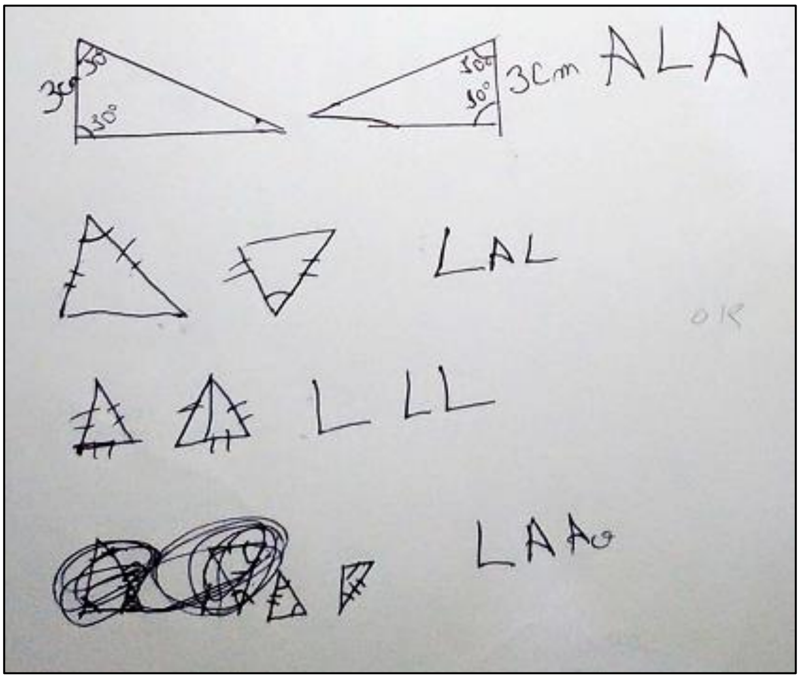
Nas Figuras 40 e 41 a seguir, destacamos as respostas de A4 e A5, que não utilizaram a régua em praticamente todas as suas representações, com exceção do caso ALA indicado na Figura 40.

Figura 40 – Resposta de A4 para a quarta questão da quinta atividade



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 41 – Resposta de A5 para a quarta questão da quinta atividade



Fonte: Dados da pesquisa

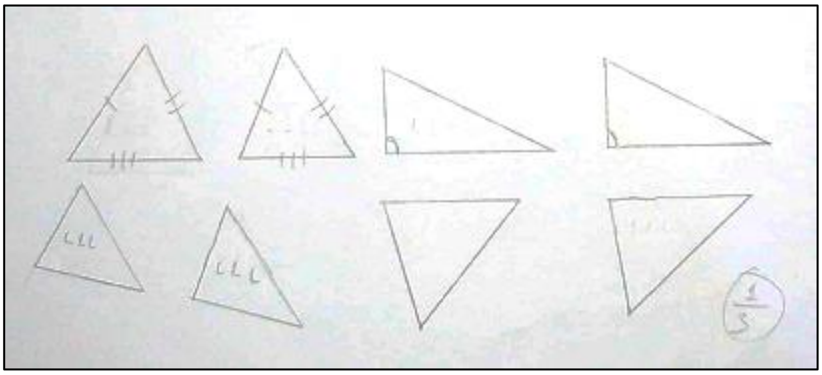
Nota-se nos desenhos registrados por A4 e A5 que as duas conhecem bem os casos de congruência e que elas conseguiram representar cada um deles em suas respostas. Entretanto, de maneira semelhante aos alunos cujas respostas foram analisadas anteriormente, há problemas nos formatos dos pares de triângulos desenhados, e nas medidas indicadas por A5.

Apesar disso, podemos destacar algumas características positivas nas representações feitas pelas alunas. Por exemplo, A4 e A5 representam quase todos os pares triângulos em posições diferentes entre si e, também, em relação às margens das folhas. Assim, além de conseguir representar os casos de congruência de diferentes formas, as alunas também conseguiram enxergar que os triângulos congruentes podem ser posicionados de diferentes maneiras, conservando suas propriedades, que era um dos objetivos de nossas atividades.

Os demais alunos (A1, A2 e A9) também apresentaram em suas representações algumas características positivas e limitações. Iniciando por A1, verificamos semelhanças entre as figuras por ele desenhadas, já que utilizou uma régua para fazê-las.

Entretanto, nas representações de A1, há apenas no primeiro par de triângulos a indicação dos pares de lados e ângulos correspondentes que seriam congruentes. Nos demais, não há uma indicação correta dos elementos de cada caso de congruência ou dos pares de elementos correspondentes, conforme mostra a Figura 42 a seguir:

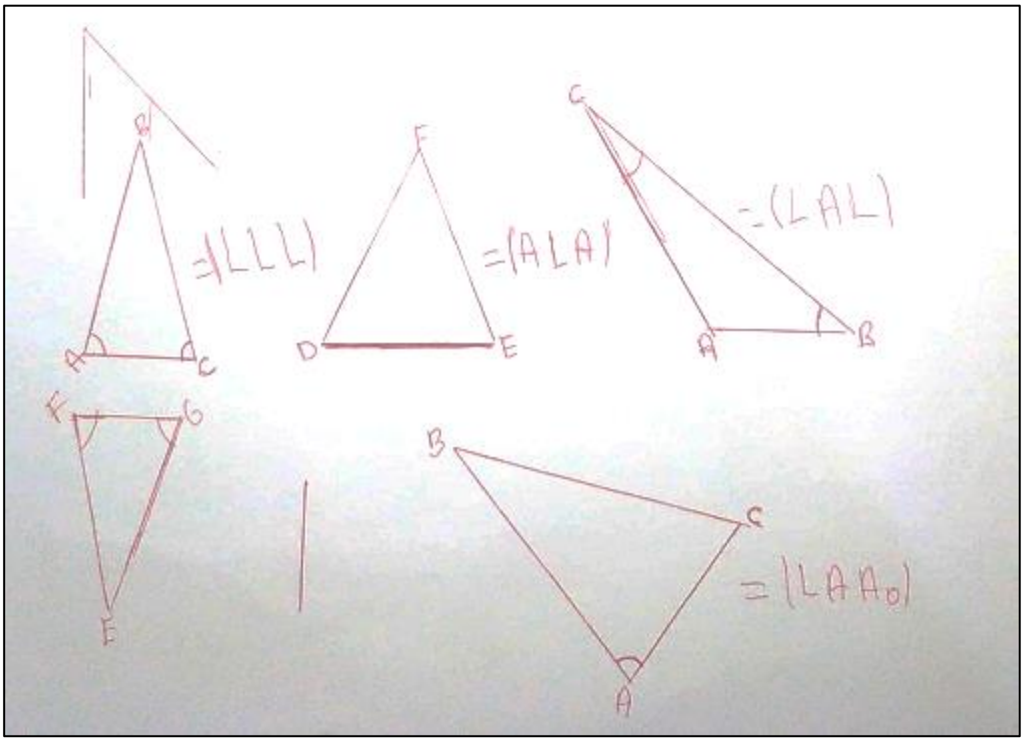
Figura 42 – Resposta de A1 para a quinta questão da quinta atividade



Fonte: Dados da pesquisa

Já nos desenhos registrados por A2, verifica-se um problema semelhante ao de A1, uma vez que os elementos de cada caso de congruência não foram destacados corretamente. Além disso, o aluno não desenhou os pares de cada triângulo, ficando apenas um para representar cada caso de congruência, conforme pode ser visto na Figura 43 a seguir:

Figura 43 – Resposta de A2 para a quarta questão da quinta atividade



Fonte: Dados da pesquisa

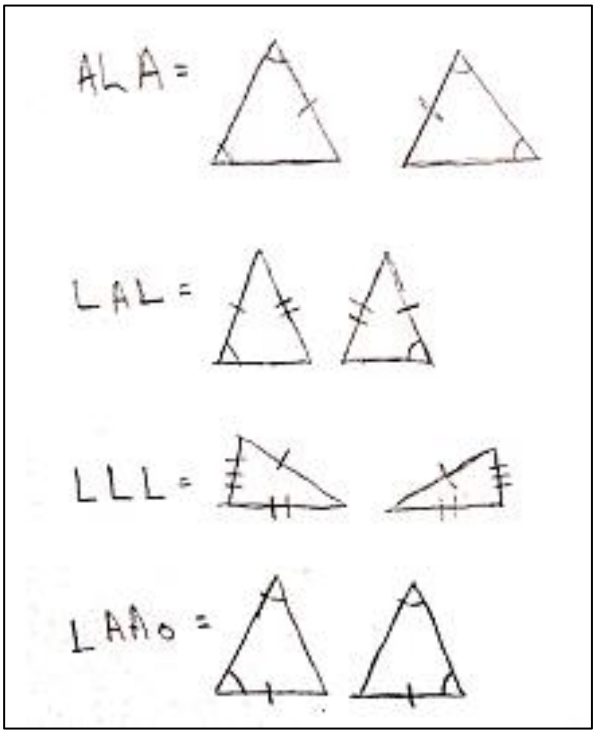
Entretanto, não se pode deixar de destacar que os desenhos registrados por A2 apresentam triângulos em diferentes posições, se distanciando também das representações comumente feitas em algumas salas de aula e materiais didáticos.

Apesar disso, as representações feitas por esse aluno apresentam limitações no que diz respeito à congruência de triângulos, pois conforme apresentado na fase de análises preliminares desta pesquisa, onde foi discutido sobre o conteúdo a ser trabalhado, a congruência de triângulos é uma relação que deve ser estabelecida entre dois ou mais, triângulos. Nesse caso, A2 fez apenas um triângulo para cada caso, apontando apenas os elementos que devem ser observados em um triângulo, sem outro para que eles fossem comparados.

Mesmo com essa limitação, ao considerar o desempenho do aluno nas atividades anteriores, percebemos que esse problema pode ter ocorrido apenas por sua dificuldade em representar um conteúdo que foi apreendido e praticado por meio de representações prontas, sendo esse o único momento onde a turma precisou registrar seus conhecimentos por meio de desenhos.

Na Figura 44, logo abaixo, são apresentadas as representações feitas por A9, que mesmo sem ter utilizado régua parece ter se preocupado com a semelhança dos formatos dos triângulos. Entretanto, ao observar as indicações de pares de lados e ângulos correspondentes entre os triângulos, podemos perceber que a aluna não compreendeu que nos casos ALA, os ângulos devem ser adjacentes ao lado e em LAL, os lados adjacentes ao ângulo.

Figura 44 – Resposta de A9 para a quarta questão da quinta atividade



Fonte: Dados da pesquisa

Apesar das dificuldades que alguns alunos enfrentaram ao realizar suas representações nesta atividade, acreditamos que ela consistiu em uma forma de revelar importantes detalhes sobre a sua compreensão a respeito da congruência de triângulos, bem como dos casos de congruência estudados.

Observando as respostas fornecidas, podemos perceber que mesmo com limitações em suas representações, os alunos mobilizaram habilidades que se associam ao PC. Podemos citar como exemplo a abstração, que foi mobilizada quando a turma precisou desenhar os triângulos e direcionar a atenção para os detalhes que seriam pertinentes à sua representação. Alguns alunos abstraíram as medidas, outros o posicionamento, enquanto que outros fizeram representações com todos os detalhes possíveis.

Como a atividade não solicitava a presença das medidas, notamos que a atitude de alguns dos alunos de não se preocupar com as medidas, procurando apenas fazer as representações e indicar adequadamente qual caso estava sendo indicado em cada par de triângulos também pode ser entendida como uma forma de abstrair tais elementos. Apesar disso, é importante frisar que é possível que os alunos tenham esquecido de destacar as medidas, ou até mesmo tenham sentido dificuldade em desenhar os triângulos considerando cada uma delas, optando assim por fazer desenhos com medidas quaisquer, conforme ocorreu nas representações feitas por A6 e A7.

De maneira geral, observando os resultados alcançados com esta atividade, podemos destacar que a turma apresentou um bom desempenho, especialmente quando observada a sua criatividade e senso geométrico ao elaborar os desenhos desta última questão, e também ao se considerar as habilidades associadas ao PC que foram mobilizadas em cada item.

Apesar disso, ressaltamos que, mesmo com todas as ações pedagógicas desenvolvidas, algumas lacunas que ainda persistiram em suas concepções sobre a congruência de triângulos, ou em seu conhecimento geométrico. Portanto, os dados revelam, sobretudo, a importância e necessidade de atividades posteriores, que ajudem a turma a retomar os conceitos apreendidos, relacionando-os com outros conhecimentos geométricos. Revelam também a necessidade do esclarecimento de algumas dúvidas que eles possuem sobre conteúdos prévios, como a classificação de triângulos quanto aos seus lados e ângulos. Além disso, é indispensável que sejam trabalhadas as habilidades de interpretação, argumentação e representação, essenciais à aprendizagem da Matemática.

Esse *feedback* foi fornecido à professora da turma, que já estava à par de algumas das dificuldades dos alunos, porém também passou a conhecer outras que ainda se escondiam em meio à tantos desafios que ela e a turma vivenciam diariamente.

Com relação ao PC, percebemos que as seguintes habilidades forma mobilizadas entre os alunos:

- Decomposição, ao particionarem a construção dos triângulos e representação dos casos de congruência da maneira que lhes pareceu mais prática;
- Abstração, ao direcionarem a atenção aos aspectos relevantes para a construção dos triângulos que representariam os casos de congruência;

No tópico a seguir, lançamos um olhar geral sobre as atividades que desenvolvemos, evidenciando as conexões que podem ser identificadas entre as ações realizadas pelos alunos, o pensamento computacional e o geométrico.

8.6 VALIDAÇÃO DAS CONEXÕES IDENTIFICADAS

Para validar as conexões identificadas nesta pesquisa, recorreremos às habilidades apresentadas no início desta seção, sendo quatro delas associadas ao PC: decomposição, reconhecimento de padrões, algoritmos e abstração. Além de outras quatro associadas ao PG: transformação, medição, reconhecimento das propriedades e reconhecimento dos elementos dos triângulos estudados.

É importante destacar que não consideramos nesta validação os dados da atividade 3, que não foram codificados nem categorizados de maneira semelhante às atividades anteriores. Apesar desse momento ter contribuído para a construção dos conhecimentos abordados na pesquisa, optamos por não analisar os seus dados minuciosamente, pois somavam mais de 10 horas de extensas gravações de áudio e vídeo, com diálogos que se sobrepunham e que levariam um tempo significativo para serem todos transcritos e codificados. Assim, priorizamos as demais atividades que, com um tempo total de gravações semelhante, trouxeram dados referentes às falas e produções dos alunos, que foram cruciais para a o alcance do objetivo da pesquisa.

Entretanto, destacamos que futuramente, em outras produções, pretendemos expandir a análise desta atividade específica, bem como elaborar um produto educacional sobre sua aplicação, contendo orientações metodológicas para sua adaptação e replicação.

As demais atividades tiveram seus dados transcritos utilizando o *software* MaxQDA, por meio do qual buscamos codificar trechos das falas dos alunos e algumas de suas produções escritas, classificando-as de acordo com as habilidades do PC e da aprendizagem da Geometria. Essa codificação gerou alguns dados quantitativos, referentes à quantidade de vezes em que cada habilidade era mobilizada nas atividades e que seriam utilizados para verificar quais delas eram mais utilizadas em cada uma das ações desenvolvidas com a turma.

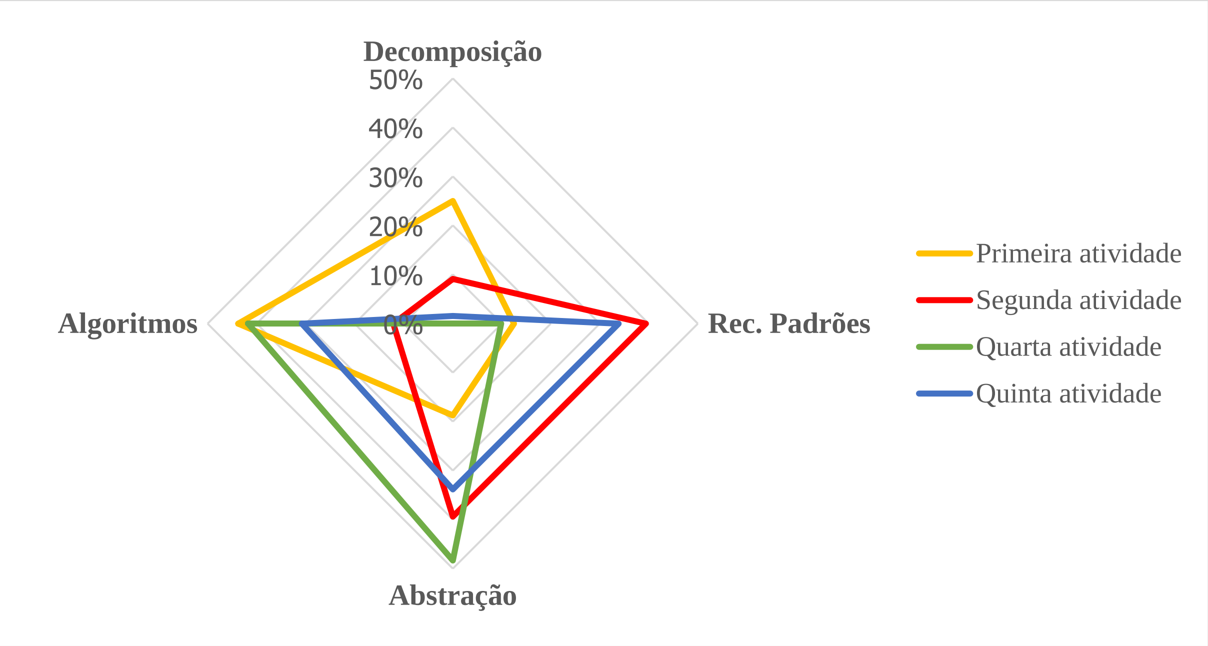
Entretanto, ao comparar as quantidades obtidas, percebemos que pelo fato de algumas atividades serem mais longas do que outras e seus dados terem sido coletados a partir de diferentes fontes, obtivemos grandes diferenças de ocorrência. Dessa forma, nessa comparação inicial, obtivemos, por exemplo, que a habilidade de abstração foi associada às falas e produções dos alunos 44 vezes na quarta atividade, e apenas três vezes na primeira.

Assim, decidimos que essa contagem não seria interessante para comparar a ocorrência das habilidades, pois geraria uma falsa impressão de que uma atividade que mobilizou muitas vezes determinadas habilidades seria mais importante do que as outras.

Para contornar esse problema, exportamos os dados do MaxQDA para o *software* *Excel*[25]. A partir desse *software*, dispomos os dados referentes às habilidades do PC em uma planilha e, em outra, os dados referentes às do PG. Em cada planilha, pudemos analisar, por atividade, o percentual em que cada habilidade foi mobilizada. A partir disso, geramos dois gráficos de superfície, conforme mostram as Figuras 45 e 46.

A Figura 45 a seguir refere-se às habilidades do Pensamento Computacional. Nela, o quão mais distante do centro do losango, maior a associação da habilidade do PC com as ações desenvolvidas em cada atividade.

Figura 45 – Associação das atividades com cada habilidade do PC



Fonte: Elaborado pelos autores

A partir da Figura 45, podemos verificar que cada atividade apresentou diferentes tipos de conexão com as habilidades do PC. Nesse caso, a primeira atividade, representada pelas linhas amarelas, apresentou um percentual de conexão maior com a habilidade de algoritmos, seguido pelas habilidades de decomposição e abstração. Além disso, nesta atividade, houveram menos associações com a habilidade de reconhecimento de padrões, isto porque as ações desenvolvidas pelos alunos estavam mais associadas à medição e comparação dos triângulos com seus respectivos pares.

---

[25] Aplicativo para criação, edição e compartilhamento de planilhas, desenvolvido pela *Microsoft*.

A maior conexão desta atividade com a habilidade algoritmos explica-se pelo fato de que os alunos tiveram de criar suas próprias estratégias para verificar e comparar as medidas dos triângulos, e expressá-las de forma escrita no formato de um passo a passo. Acreditamos que essa característica foi um fator determinante no bom desempenho da turma nas atividades posteriores, nas quais puderam aplicar suas estratégias em diversas situações. Acreditamos que esta característica se aproxima do conceito da habilidade algoritmos que é defendido por estudiosos que debatem o PC, como Wing (2006) e Brackmann (2017).

Ainda na Figura 45, observa-se que a segunda atividade, representada na cor vermelha, apresenta conexões mais associadas às habilidades de reconhecimento de padrões e abstração, além de decomposição e algoritmos em um percentual menor. As ações desenvolvidas pela turma se associaram à observação de que os triângulos podiam ser agrupados em classes de equivalência conforme era orientado pelo pesquisador, porém usando-se diferentes estratégias, que foram desenvolvidas pelos alunos. Podemos citar como exemplo dessas estratégias a ideia de A7 e A13, quando reconheceram que os triângulos poderiam ser organizados em seis quartetos, cada um composto por elementos congruentes.

Com relação à quarta atividade, cujos percentuais estão destacados na cor verde na Figura 45, verificamos que as ações realizadas pelos alunos estão mais associadas às habilidades de abstração e algoritmos. De fato, para utilizar o jogo das congruências, cada jogador teve de retomar os casos de congruência apreendidos, observando características-chave em seus baralhos, que os auxiliaram a desenvolver diversas estratégias realizar as verificações entre os triângulos.

Essa conexão com a abstração e os algoritmos é fator predominante em muitas atividades matemáticas, porque conforme apontam Gadanidis et al. (2016), há uma conexão natural e histórica entre Matemática e PC. Ela pode e deve ser ampliada por meio de novos recursos, sejam eles analógicos ou digitais, conforme fizemos com o jogo das congruências, que também levou a turma a desempenhar ações relacionadas ao reconhecimento de padrões.

A quinta atividade foi pensada como uma forma de investigar se os alunos conseguiriam aplicar em uma atividade escrita alguns dos conhecimentos construídos por eles em aulas anteriores. De acordo om os dados coletados, os alunos não conseguiram um desempenho extraordinário em sua resolução, mas conseguiram expressar algumas ideias relevantes sobre o tema estudado, conforme apresentado nas análises do item 8.5. Diante desses resultados nesta atividade específica, percebe-se que ainda se faz necessário um aprofundamento, ou retomada de conteúdos prévios, que seja capaz de motivar os alunos a preencher algumas lacunas que ainda dificultam sua aquisição de conhecimentos geométricos.

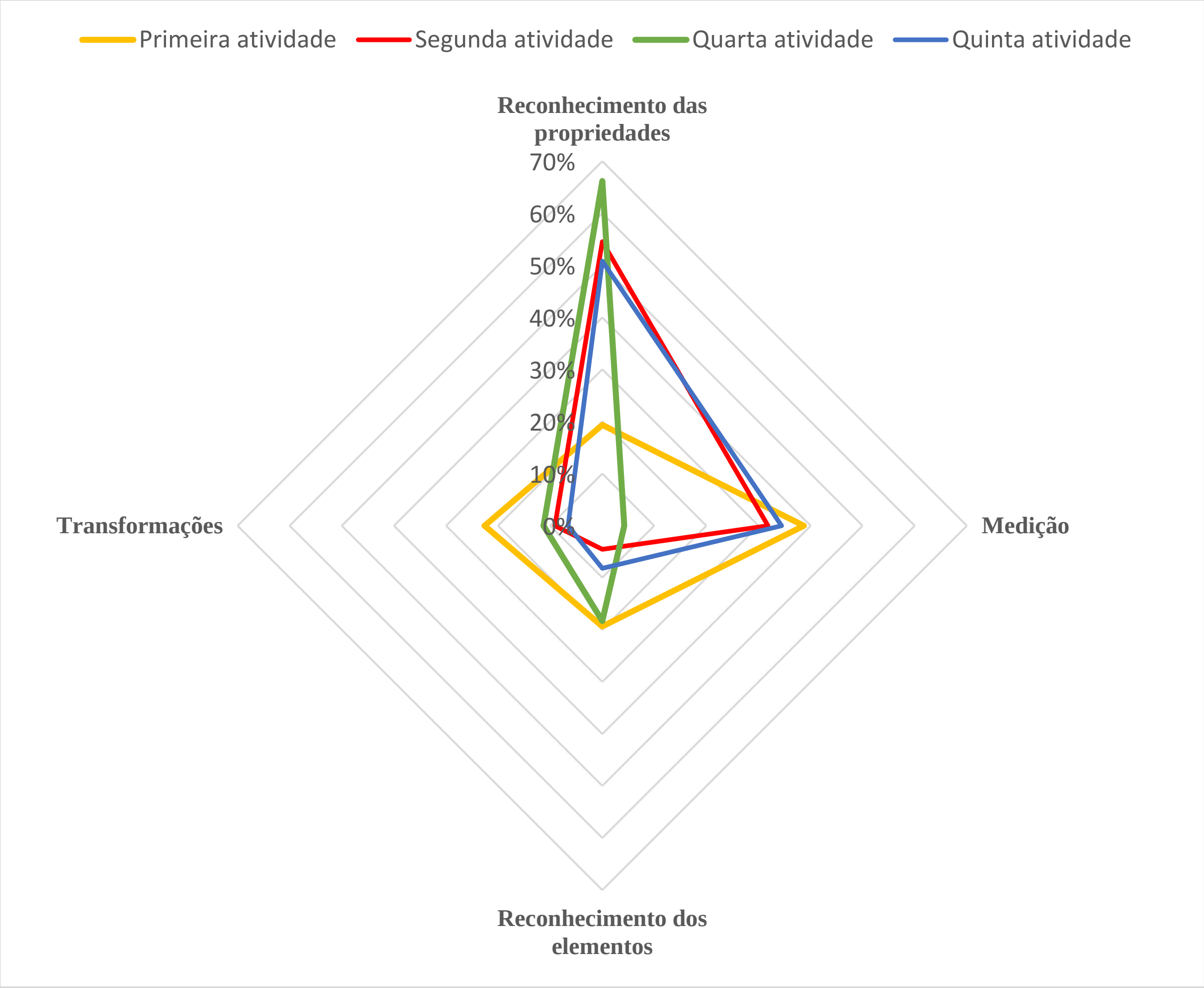
Os percentuais de associação das habilidades do PC com as ações desenvolvidas nesta atividade se encontram representados na Figura 45 acima, em cor azul. De acordo com esses dados, as habilidades de reconhecimento de padrões, abstração e algoritmos se tornaram mais evidentes. De todos os registros feitos na atividade, destacamos as diferentes representações dos casos de congruência de triângulos que foram construídas pela turma, sejam elas desenhadas ou escritas.

De maneira geral, comparando os tipos de dados coletados nesta atividade, percebemos que a representação escrita foi a mais dificultosa para alguns alunos, que nem sempre conseguiram expressar corretamente suas ideias. Este fato aponta que as atividades matemáticas e, especialmente, as de Geometria, devem ir além das representações escritas ou prontas, pois o exercício da criatividade e do raciocínio também pode ser contemplado por meio de outras ações e representações. (BOALER, 2018).

Ao contemplar essas características, certamente as atividades matemáticas podem impulsionar ainda mais a aprendizagem dos alunos, especialmente quando considerada a possibilidade da utilização de outras habilidades, advindas de experiências cotidianas e do contato com os conteúdos de diferentes áreas do conhecimento.

Na Figura 46 a seguir, destacamos as conexões entre as ações realizadas pelos alunos em cada uma das atividades com as habilidades referentes à aprendizagem da Geometria que foram adotadas nesta pesquisa. Sua organização foi feita de maneira semelhante à Figura 45, portanto, o quão mais distante do centro do losango, maior o percentual de associação da atividade com determinada habilidade localizada nos extremos do losango.

Figura 46 – Associação das atividades as habilidades da aprendizagem da Geometria



Fonte: Elaborado pelos autores

A partir da Figura 46, podemos verificar que a segunda, quarta e quinta atividades apresentaram uma conexão mais evidente com a habilidade de reconhecimento das propriedades das formas geométricas, o que se dá pelo fato de que a temática congruência de triângulos envolve a verificação constante das relações entre os pares de lados e ângulos correspondentes entre os triângulos, a fim de determinar se essas figuras possuem ou não uma relação de congruência.

Na primeira atividade, representada pelas linhas amarelas, observa-se que a habilidade de medição foi a mais associada às ações dos alunos, o que se dá pelo fato de todos terem utilizado com frequência os materiais do kit geométrico para verificar se os lados e ângulos correspondentes dos triângulos entregues na atividade possuíam medidas congruentes.

Além da medição, as outras habilidades, reconhecimento das propriedades, reconhecimento dos elementos e transformações, também foram associadas às ações dos alunos, nesta primeira atividade, porém em percentuais menores. Entre elas destacamos a habilidade de transformações, que foi mobilizada especialmente quando a turma utilizou as estratégias de superposição ou aproximação entre os lados dos triângulos, realizando então constantes rotações e reflexões nessas figuras.

Destacamos a importância da liberdade que os alunos tiveram em escolher os métodos que mais lhes pareciam convenientes para comparar os lados e ângulos, que foi empregada como uma estratégia adidática de aprendizagem, conforme propõe a TSD. Essa característica pedagógica, proporciona autonomia, na medida em que os alunos podem elaborar suas próprias estratégias para realizar as atividades, e antagonismo em relação ao protagonismo assumido por alguns professores que seguem abordagens associadas ao ensino tradicional da matemática. (VIANA; MOITA, 2019).

Dessa forma, os alunos puderam assumir posturas ativas durante a atividade, empregando seus diferentes saberes e experiências na construção de estratégias para o reconhecimento das propriedades e verificação da congruência dos triângulos.

Na segunda e quinta atividades, que estão representadas, respectivamente, pelas linhas de cor vermelha e azul na Figura 46, se destacaram as ações de medição e reconhecimento das propriedades das formas geométricas. A medição foi amplamente utilizada nos momentos em que a turma precisou utilizar os instrumentos fornecidos para verificar precisamente se os lados e ângulos dos triângulos eram todos congruentes. Já o reconhecimento das propriedades foi fator determinante na segunda atividade quando a turma precisou elaborar estratégias para agrupar as figuras com maior rapidez.

Na quarta atividade, representada pela cor verde nas linhas da Figura 46, houve uma maior associação entre as ações realizadas pelos alunos e o reconhecimento de propriedades. Isto ocorreu porque, diferente das atividades mencionadas anteriormente, no jogo das congruências não foram utilizados instrumentos de medição e a superposição já não podia mais ser utilizada com tanta eficiência. Nesse caso, era necessário reconhecer as propriedades das figuras para verificar que, por exemplo, determinado ângulo de um triângulo possui a mesma medida que o de outro, mas que visualmente os dois triângulos possuem formatos muito diferentes, não tendo chance de serem congruentes.

Essa habilidade de reconhecer as propriedades das formas geométricas é fator determinante na aprendizagem de muitos conteúdos da Geometria, e em suas associações com outras áreas do conhecimento. Esse reconhecimento deve ocorrer por meio da visualização e manipulação, que nem sempre é possibilitada quando o ensino e aprendizagem é limitado à recursos estáticos e que não podem ser visualizados sob diferentes perspectivas.

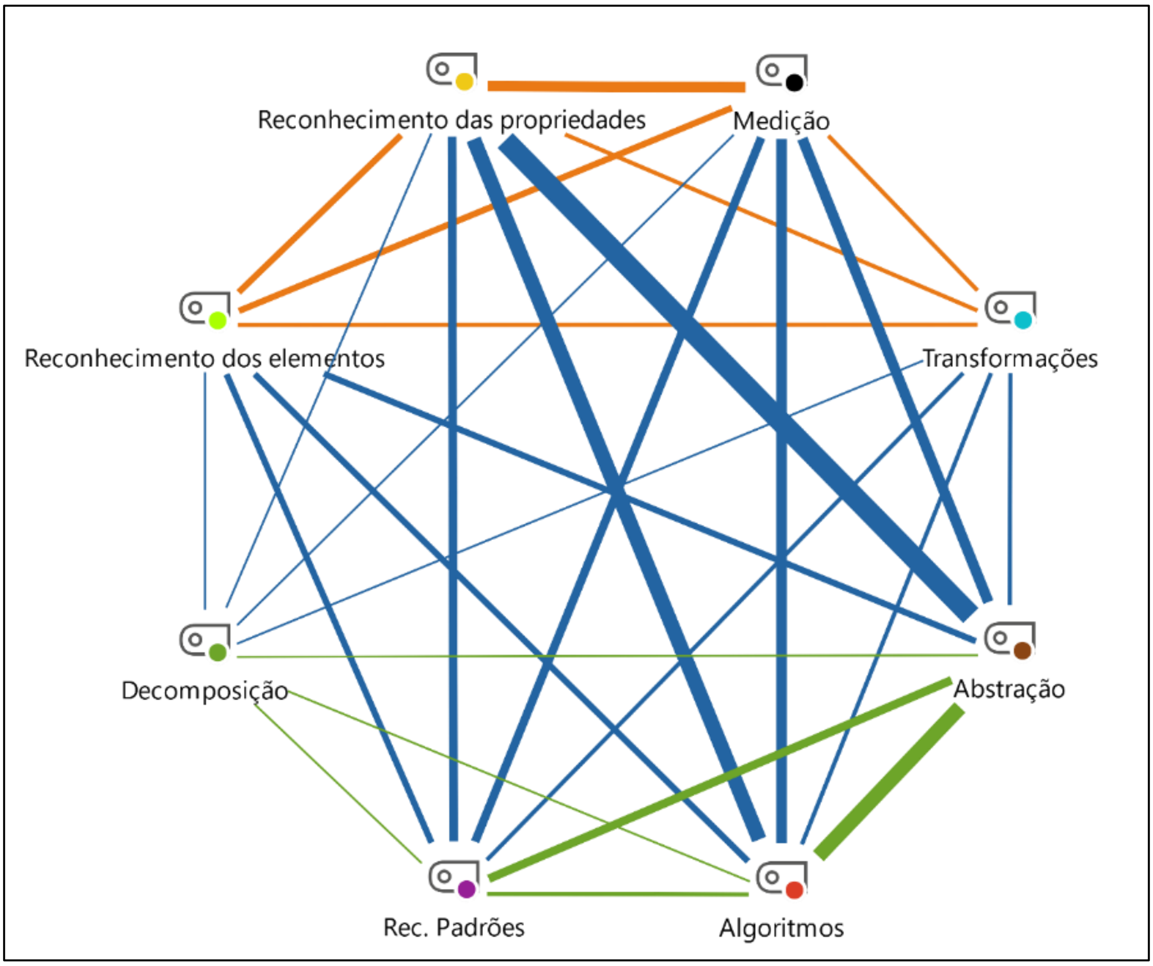
(LORENZATO, 1995). Ressaltamos então a necessidade de mais atividades que, como o jogo das congruências, possibilitem a construção de aprendizagens por meio da descoberta, da visualização, da manipulação e do brincar.

Tendo essas conexões evidenciadas, realizaremos a seguir algumas reflexões sobre como essas habilidades do PC e do PG se conectam. Vale ressaltar que, diante da versatilidade das atividades que podem ser realizadas no ensino e aprendizagem da Geometria, diferentes conexões podem ser identificadas a depender do conteúdo abordado. Nesse caso, estamos considerando os dados coletados na aplicação das atividades desta pesquisa, referentes à abordagem do conteúdo da congruência de triângulos.

Para elaborar uma imagem representativa das conexões que se estabeleceram entre as habilidades do PC e da aprendizagem da Geometria, utilizamos a ferramenta MaxMaps, do MaxQDA, que permite a criação de diagramas utilizando-se as informações quantitativas dos códigos gerados, em nosso caso, as habilidades do PC e da aprendizagem da Geometria.

No MaxMaps, recorremos ao item modelos prontos, sendo o modelo com coocorrência de códigos o que melhor representou as conexões que identificamos. Para melhorar tal representação, utilizamos as cores laranja para as conexões entre habilidades da Geometria, verde entre as do PC e azul para representar as conexões entre ambas. Além disso, a espessura das linhas foi ajustada de acordo com a quantidade de conexões identificadas, sendo as habilidades que apresentaram até 10 conexões representadas com espessura 1, até 20 com espessura 2 e assim sucessivamente, conforme a Figura 47 a seguir:

Figura 47 – Representação das conexões entre as habilidades do PC e do PG



Fonte: Elaborado pelos autores por meio do MaxQDA

Na Figura 47, nota-se que a maior conexão, representada pela linha mais espessa, está entre a abstração e o reconhecimento das propriedades, duas habilidades que muito foram utilizadas pelos alunos ao longo da realização das atividades, e que muito têm a ver com o PC e com a Matemática.

Essa conexão se deu em diferentes momentos, nos quais os alunos precisaram reconhecer e abstrair as propriedades das figuras, direcionando sua atenção aos aspectos relevantes dos triângulos para verificar se apresentavam uma relação de congruência, seja utilizando os casos específicos, ou as estratégias aprendidas nas atividades iniciais.

Seguido à ligação entre essas habilidades, há a conexão entre algoritmos e reconhecimento das propriedades, que se deu através dos passos que os alunos seguiam para verificar se os triângulos eram congruentes em cada atividade. A princípio, todos precisavam verificar por superposição ou medindo cada um dos elementos dos triângulos do par selecionado, mas com o decorrer das atividades, novas estratégias foram sendo descobertas e utilizadas como um algoritmo de verificação.

A partir dessas conexões, é possível verificar que a abstração é uma habilidade comum entre o conteúdo da congruência de triângulos e o PC. Além disso, considerando-se o que foi evidenciado na revisão sistemática da literatura, podemos evidenciar que ela também é fator comum entre a Geometria e o PC, uma vez que habilidades de visualização, manipulação, composição e decomposição de formas, entre outras associadas à aprendizagem da Geometria, muito utilizam da capacidade de abstrair elementos e propriedades.

Nesse sentido, ressaltamos que talvez essa seja a conexão mais forte e evidente entre essas duas formas de pensar, que é complementada pelas outras habilidades a elas associadas.

Na Figura 47, também é possível observar que das conexões entre as habilidades da Geometria, destacadas em cor laranja, houveram maiores conexões entre o reconhecimento dos elementos, reconhecimento das propriedades e a medição, com destaque para a conexão entre essas duas últimas.

Essa conexão deu-se especialmente na quinta atividade, onde a turma precisou ao longo de seus itens utilizar as medições informadas, ou realiza-las, para estabelecer conexões entre as propriedades das figuras apresentadas ou que foram construídas.

Ainda na Figura 47, porém destacados apenas na cor verde, é possível visualizar as conexões entre as habilidades do PC, onde as linhas que interligam a abstração, o reconhecimento de padrões e os algoritmos apresentam uma maior espessura, com destaque para os algoritmos e a abstração. Ressaltamos que duas habilidades estão intimamente associadas, uma vez que a elaboração de um algoritmo, seguindo a perspectiva do PC, exige a abstração de passos e padrões.

Todas essas conexões corroboram o que foi apresentado em nosso referencial teórico e evidenciam o que foi apresentado na Figura 2, na qual demonstramos o fato de ser possível percorrer diferentes caminhos em atividades que promovem o desenvolvimento de habilidades do PC, partindo de uma habilidade para outras.

Além disso, essas ligações também ressaltam a conexão natural e histórica que existe entre o PC e a Matemática, que é apontada por Gadanidis *et al.* (2016). Com isso, destacamos novamente que é possível se estabelecer diferentes diálogos entre o PC e a Geometria, porém, alertamos para a necessidade de que eles contemplem não apenas aspectos técnicos associados aos conceitos computacionais, mas que visem primeiramente a aprendizagem estudantil, para que os alunos enxerguem na Geometria uma nova forma de pensar e de aprender.

Nas análises a priori, levantamos as seguintes hipóteses: é possível estabelecer conexões entre o pensamento computacional e o ensino e a aprendizagem da Geometria; a aprendizagem do conteúdo de congruência de triângulos envolve o desenvolvimento de habilidades associadas ao PC; o jogo das congruências possibilita uma fixação do conteúdo de congruência de triângulos. Diante dos dados analisados e conexões identificadas, especialmente neste presente item, podemos apontar todas as hipóteses como válidas.

9 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O conhecimento geométrico é elemento de fundamental importância à aprendizagem da Matemática e de outros componentes curriculares. Ainda que em determinadas situações escolares seja explorado de maneira superficial, sem considerar suas potencialidades de mobilizar habilidades de visualização e representação, o conjunto de conteúdos previstos no currículo de Geometria da escola básica possibilita o estabelecimento de conexões imediatas com a vida estudantil.

Em busca de investigar essas conexões, identificamos no Pensamento Computacional um conjunto de habilidades que pareciam envolver-se nas da aprendizagem da Geometria, motivando-nos a conduzir este estudo, que teve por objetivo geral *pesquisar sobre as conexões do pensamento computacional com o ensino e a aprendizagem da Geometria.*

Conforme destacado no início da pesquisa, não tentamos por meio desse estudo, de forma alguma, dizer que o PC e a Matemática, em especial no seu campo da Geometria, contemplam as mesmas habilidades, pois sabemos que há diferenciações até mesmo na forma em esses campos de investigação interpretam algumas habilidades, como é o caso da abstração. Dessa forma, considerando que há distanciamentos e também algumas aproximações entre as diferentes habilidades envolvidas na Geometria e no PC, investigamos possíveis conexões entre eles.

Nessa caminhada investigativa, a Engenharia Didática nos serviu como rota, permitindo através de suas quatro etapas a identificação de importantes aspectos sobre o *locus* da pesquisa, sujeitos envolvidos e, sobretudo, sobre as conexões em foco.

Encontramos nos jogos e atividades analógicas uma importante estratégia para motivar os sujeitos da pesquisa, que costumavam utilizá-los no espaço do laboratório de ensino de matemática da escola. Assim, foi desenvolvido e adaptado um conjunto de cinco atividades, das quais destacamos o jogo das congruências como um importante recurso à aprendizagem do conteúdo da congruência de triângulos.

Por meio dessas cinco atividades, buscamos encontrar respostas para nossa questão de pesquisa: *quais conexões podem ser estabelecidas entre o Pensamento Computacional e o ensino e a aprendizagem da Geometria, especificamente no conteúdo da congruência de triângulos?*

Em resposta a este questionamento, verificamos a partir da interação dos alunos entre si e com o material aplicado, que eles estavam atuando como sujeitos ativos dos seus processos de aprendizagem, mobilizando as seguintes habilidades associadas ao PC:

decomposição, reconhecimento de padrões, algoritmos e abstração. Além de outras quatro associadas à aprendizagem da Geometria: transformação, medição, reconhecimento das propriedades e reconhecimento dos elementos dos triângulos estudados.

Ao analisar os dados coletados a partir das interações anteriormente mencionadas, identificamos fortes conexões entre as habilidades de reconhecer as propriedades das figuras geométricas com as de algoritmos e abstração. Também verificamos que as práticas de medição e reconhecimento dos elementos de figuras geométricas se associam com reconhecimento de padrões, abstração e algoritmos. Transformações foi a habilidade com menor associação, entretanto é preciso ressaltar que esses dados são reflexos das atividades que desenvolvemos e do desempenho da turma, podendo essas conexões serem verificadas em diferentes níveis se realizadas com outros recursos e contextos educacionais.

Como colação de nossa pesquisa, retornaremos à escola-campo para socializar os principais resultados com a professora participante, e também iremos depositar cópias do jogo das congruências no laboratório de ensino de matemática, com todos os itens necessários para que os professores possam utilizá-los em suas aulas sobre a congruência de triângulos.

Como contribuições à comunidade acadêmica destacamos que, certamente, existem outras conexões entre o PC e a Geometria, que precisam ser evidenciadas em novos estudos que as utilizem como estratégias pedagógicas nos mais diversos cenários educacionais. Essas estratégias devem, sobretudo, valorizar os conhecimentos dos alunos, advindos de suas vivências no contexto da Cultura Digital, e também oportunizar a utilização da criatividade, para que os alunos possam conhecer a beleza da aprendizagem da Matemática que, conforme evidenciado na literatura, possui uma conexão histórica com o PC.

Além do estudo sobre essas estratégias pedagógicas, é preciso também uma análise criteriosa das associações do desenvolvimento do PC com a mobilização de conhecimentos sociais, culturais, socioemocionais, entre outros, de modo que sejam analisadas as contribuições do aprimoramento do PC em outros contextos de aprendizagem, além da Matemática.

Recortes dos achados teóricos e empíricos deste estudo já foram divulgados em eventos e em capítulos de livro, enquanto outros se encontram no prelo. Pretendemos expandir essas contribuições acadêmicas, por meio da publicação de novos recortes em outros meios acadêmicos, em especial com a publicação de nossos produtos educacionais.

Como trabalhos futuros, pretendemos em nosso doutorado dar continuidade à esta pesquisa, por meio de aprofundamentos teóricos e empíricos, investigando novas conexões entre PC e a Geometria, de modo a contemplar outros conteúdos e promover o desenvolvimento de diferentes habilidades por meio do uso de recursos que permitam a prática de atividades plugadas e desplugadas.

Por fim, enfatizamos que há uma emergência de mais estudos que ampliem os horizontes do que se sabe sobre o PC, investigando o seu desenvolvimento com públicos de diferentes características, nos mais variados contextos educacionais e contemplando conteúdos de outros campos do conhecimento, além da Matemática.

REFERÊNCIAS

ABRANTES, P. Investigações em geometria na Sala de Aula. *In*: VELOSO, E.; FONSECA, H.; PONTE, J. P.; ABRANTES, P. (org.). **Ensino da geometria no Virar do Milênio**. Lisboa: Defcul, p. 51-62, 1999.

ALMOULOUD, S. A.; COUTINHO, C. Q. S. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19/ANPEd 1**. Revista Eletrônica de Educação Matemática**. V3.6, 2008. p.62-77.

ALMOULOUD, Saddo Ag. Fundamentos da didática da matemática. 1ª ed. Curitiba: Editora UFPR, 2010.

ARTIGUE, M. Ingénierie didactique. **Recherches en didactique des mathématiques**, v. 9, n. 3, p. 281-308, 1988.

ARTIGUE, M.; PERRIN-GLORIAN, M. Didactic Engineering, Research and Development Tool: Some Theoretical Problems Linked to This Duality. **For the Learning of Mathematics**, v. 11, n 1, p. 13-18, 1991. Disponível em: http://www.jstor.org/stable/40248001.Acessado em: 26 out. 2020.

ARTIGUE, M. Ingénierie didactique: quel rôle dans la recherche didactique aujourd'hui?. **Les dossiers des sciences de l'éducation**, v. 8, n. 1, p. 59-72, 2002.

ARTIGUE, M. Perspectives on Design Research: The Case of Didactical Engineering. *In*: **Approaches to qualitative research in mathematics education**. Springer, Dordrecht, 2015. p. 467-496.

BARBOSA, J. L. M. **Geometria euclidiana plana**. Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

BARR, V.; STEPHENSON, V. Bringing computational thinking to k-12: what is involved and what is the role of the computer science education community? **ACM Inroads**, v. 2, n. 1, p. 48–54, 2011.

BBC LEARNING, B. What is computational thinking?, 2015. Disponível em: http://www.bbc.co.uk/education/guides/zp92mp3/revision. Acessado em: 05 mai. 2020.

BENTON, L. *et al*. Bridging primary programming and mathematics: Some findings of design research in England. **Digital Experiences in Mathematics Education**, 3(2), 2017, p. 115-138.

BERENGUER. M. I. S. A aplicação da engenharia didática no Ensino das ciências exatas. 2010. 36F. Trabalho de conclusão de curso (Especialização em docência no ensino superior) - Universidade Candido Mendes, Rio de Janeiro, 2010.

BICUDO, M. A. V. Pesquisa em educação matemática. **Pró-posições**, v. 4, n. 1, p. 18-23, 1993.

BLIKSTEIN, P. (2008). O pensamento computacional e a reinvenção do computador na educação. Disponível em: http://www.blikstein.com/paulo/documents/online/ol_pensamento_computacional.html. Acesso em: 05 mai. 2020.

BOALER, J. **Mentalidades matemáticas:** estimulando o potencial dos estudantes por meio da matemática criativa, das mensagens inspiradoras e do ensino inovador. Porto Alegre: Penso, 2018.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto editora, 1994.

BRACKMANN, C. P. Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na educação básica. 2017. 226f. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Programa de pós-graduação em Informática na Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2017.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: Ministério da Educação, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br. Acesso em: 02 mai. 2019.

BROUSSEAU, G. Fundamentos e Métodos da Didáctica da Matemática. *In*: BRUN, J. **Didática das Matemáticas**. Tradução de: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

CARNEIRO, V. C. G. **Engenharia didática**: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de matemática. Zetetike, v. 13, n. 1, p. 87-120, 2005.

CARVALHO, F. J. R. de. **Introdução à programação de computadores por meio de uma tarefa de modelagem matemática na educação matemática**. 2018. 133 f. Dissertação (Mestrado em Ensino) - Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Foz do Iguaçu, 2018.

Centro de Inovação para a Educação Brasileira. Currículo de Referência em Tecnologia e Computação. Disponível em: http://curriculo.cieb.net.br/assets/docs/Curriculo_de_Referencia_em_Tecnologia_e_Computacao.pdf . Acesso em: 22 set. 2019.

CHENG, Y.; MIX, K. S. Spatial training improves children's mathematics ability**. Journal of Cognition and Development**, v. 15, n. 1, p. 2-11, 2014.

CSTA/ISTB. Operational Definition of Computational Thinking for K–12 Education, 2011. Disponível em: http://www.iste.org/docs/ct-documents/computational-thinking-operational-definition-flyer.pdf. Acesso em 02 mai. 2020.

DYBA, T.; DINGSOYR, T. Empirical studies of agile software development: a systematic review. **Information and Software Technology**, v.50, pp.833-859, 2008.

FAINGUELERNT, E. K. **Educação matemática**: representação e construção em geometria Porto Alegre: Artmed, 1999

FONSECA, M. C. F. R. *et al.* **O ensino de geometria na escola fundamental**: três questões para formação do professor dos ciclos iniciais Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

FRANÇA, R.; TEDESCO, P. Desafios e oportunidades ao ensino do pensamento computacional na educação básica no Brasil. *In*: **Anais dos Workshops do Congresso Brasileiro de Informática na Educação**. 2015. Disponível em: https://www.br-ie.org/pub/index.php/wcbie/article/view/6331. Acesso em: 01 jul. 2020.

FREITAS, J. L. M. Teoria das situações didáticas. *In*: **Educação Matemática: uma (nova) introdução**. São Paulo: EDUC, 2016. p. 77-111.

GADANIDIS, G. *et al.* Computational thinking, grade 1 students and the binomial theorem. **Digital Experiences in Mathematics Education**, 3(2), 2017, p. 77-96.

GALVÃO, T. F.; PANSANI, T. S. A.; HARRAD, D. Principais itens para relatar Revisões sistemáticas e Meta-análises: A recomendação PRISMA. **Epidemiologia e Serviços de Saúde**, v. 24, p. 335-342, 2015.

GONÇALVES, M. M. A importância do conhecimento geométrico aliado ao uso da Realidade Aumentada. **Actas de Diseño**, v. 10, p. 98-102, 2010.

GONÇALVES, M. T. S. S. Pensamento Geométrico: Geometria não euclidiana no ensino secundário. 2019. 233f. Tese (Doutorado em Didática da Matemática) – Faculdade de ciências, Universidade da Beira Interior, Covilhã, 2019.

GRAVINA, M. A.; SANTAROSA, M. L. Aprendizagem de Matemática em Ambientes informatizados. Congresso Iberoamericano de Informática Educativa, 4., 1998, Brasília. **Anais...** Brasília, v. 1, 1998.

KALE, U *et al.* Computational What? Relating Computational Thinking to Teaching. **TechTrends**, 62(6), 2018, p. 574-584.

KALEFF, A. M. M. R. **Vendo com as mãos, olhos e mente:** recursos didáticos para laboratório e museu de educação matemática inclusiva do aluno com deficiência visual. Niteroi-RJ: CEAD / UFF, 2016.

KENDEROV P.S. Powering Knowledge Versus Pouring Facts. *In*: Kaiser G*et al.* (Org) **Invited Lectures from the 13th International Congress on Mathematical Education**, 2018, p 289-306.

KITCHENHAM, B., *et al.* **Guidelines for Performing Systematic Literature Reviews in Software Engineering**. Keele Univ./Durham University Joint Report. 2007.

KYNIGOS, C.; GRIZIOTI, M. Programming Approaches to Computational Thinking: Integrating Turtle Geometry, Dynamic Manipulation and 3D Space. **Informatics in Education**, 17(2), 2018, p. 321-340

KYRIAKIDES, A. O.; MELETIOU-MAVROTHERIS, M.; PRODROMOU, T. Mobile technologies in the service of students' learning of mathematics: the example of game application ALEX in the context of a primary school in Cyprus. **Mathematics Education Research Journal**, 28(1), 2016, p. 53-78.

LI, Y. *et al.* Computational Thinking Is More about Thinking than Computing. **Journal for STEM Education Research**. 3, 2020, p. 1–18.

LORENZATO, S. Por que não ensinar Geometria? **A educação matemática em revista.** Blumenau, n. 04, p. 03-13, 1995.

LU, J. J.; FLETCHER, G. H. L. Thinking about computational thinking. *In*: **ACM SIGCSE Bulletin**. ACM, 2009. p. 260-264.

MATOS FILHO, M. A. S. **Engenharia didática**. Estácio Recife**.** Recife, 2015.

MCGONIGAL, J. **Reality is broken**: Why games make us better and how they can change the world. Penguin, 2011.

MOITA, F. M. G. S. C. **Game on**: jogos eletrônicos na escola e na vida da geração @. Campinas-SP: Alínea, 2007.

MOITA, F. M. G. S. C.; VIANA, L. H. Missão Polyedros: um diálogo entre a arte analógica e a digital e o ensino de geometria espacial através de atividades gamificadas. **Cibertextualidades**, n. 8, p. 93-104, 2017.

MOITA, F. M. G. S. C; VIANA, L. H. Um estudo sobre as conexões entre o desenvolvimento do pensamento computacional e o ensino da Geometria. *In*: Workshop de Ensino em Pensamento Computacional, Algoritmos e Programação. 5., 2019. Brasília. **Anais dos Workshops do Congresso Brasileiro de Informática na Educação**. Brasília: SBC, 2019. p. 208-218. Disponível em: https://br-ie.org/pub/index.php/wcbie/article/view/8962. Acesso em: 27 abr. 2020. doi: 10.5753/cbie.wcbie.2019.208.

MOITA, F. M. G. S. C; FLOR, M. R. G. VIANA, L. H. O software GCompris e os multiletramentos no cenário escolar. Debates em Educação, Maceió, v. 12, n. 27, p. 744-761, jun. 2020. ISSN 2175-6600. Disponível em: <https://www.seer.ufal.br/index.php/debateseducacao/article/view/8794>. Acesso em: 05 jul. 2020. doi:https://doi.org/10.28998/2175-6600.2020v12n27p744-761.

MURARI, C.; BARBOSA, R. M. Um Ensaio Metodológico sobre a Congruência e não Congruência de Triângulos (parte I). **Bolema-Boletim de Educação Matemática**, v. 7, n. 8, p. 68-82, 1992.

MURARI, C.; BARBOSA, R. M. Um ensaio metodológico sobre a congruência e não-congruência de triângulos (parte II). **Bolema-Boletim de Educação Matemática**, v. 8, n. 9, p. 47-63, 1993.

PAIS, L. C. **Didática da matemática**: Uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

PAPERT, S. **Mindstorms**: Children, computers, and powerful ideas. Basic Books, Inc., 1980.

PAVANELLO, R. M. **O abandono de ensino de geometria**: uma visão histórica. 1989. 196f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1989.

PAVANELLO, R. M. Por que ensinar/ aprender geometria? *In:* ENCONTRO PAULISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7., 2004, São Paulo. Anais... São Paulo: USP, 2004. Disponível em: http://www.miltonborba.org/CD/Interdisciplinaridade/Anais_VII_EPEM/mesas_redondas/mr21-Regina.doc. Acesso em: 07 de mai. 2020.

PEI, C., WEINTROP, D., & WILENSKY, U. Cultivating Computational Thinking Practices and Mathematical Habits of Mind in Lattice Land. **Mathematical Thinking and Learning**, 20(1), 2018, p. 75-89.

PETTICREW, M.; ROBERTS, H. Systematic reviews in the social sciences: a practical guide. **European Psychologist**. 11, 2006, 244–245.

PRENSKY, M. **Digital Game-Based Learning**. Nova York: McGraw-Hill Education, 2001a.

REZENDE, E. Q. F.; QUEIROZ, M. L. B. **Geometria euclidiana plana e construções geométricas**. Editora da UNICAMP, 2010.

SANTOS, C. A.; NACARATO, A. M. **Aprendizagem em geometria na educação básica**: a fotografia e a escrita na sala de aula. Belo Horizonte: Autêntica, 2014.

SHUTE, V. J.; SUN, C.; ASBELL-CLARKE, J. Demystifying computational thinking. **Educational Research Review**, v. 22, 2017. p. 142-158.

SINCLAIR, N.; PATTERSON, M. The Dynamic Geometrisation of Computer Programming. **Mathematical Thinking and Learning**. 2018.

SMOLE, K.et. al. **Jogos de Matemática**: de 1º a 3º ano. Porto Alegre: Artmed, 2008.

SNEIDER, C.; STEPHENSON, C.; SCHAFER, B.; FLICK, L. Computational Thinking in High School Science Classrooms: Exploring the Science "Framework" and "NGSS". **Science Teacher**, v. 81, n. 5, 2014. p. 53-59.

Sociedade Brasileira de Computação. Nota Técnica da Sociedade Brasileira de Computação sobre a BNCC-EF e a BNCC-EM. 2019. Disponível em: https://www.sbc.org.br/institucional-3/cartas-abertas/send/93-cartas-abertas/1197-nota-tecnica-sobre-a-bncc-ensino-medio-e-fundamental. Acessado em: 01 jul. 2020.

Sociedade Brasileira de Computação. Diretrizes para ensino de Computação na Educação Básica. 2017. Disponível em: https://www.sbc.org.br/educacao/diretrizes-para-ensino-de-computacao-na-educacao-basica. Acessado em: 01 jul. 2020.

SOUZA, C. A. Influências da engenharia didática francesa na educação matemática no brasil: a circulação e a apropriação de ideias. **Actas del VII CIBEM**, v. 2301, n. 0797, 2013 p. 7575-7582.

SOUZA, J.; PATARO, M. P. Vontade de saber Matemática. 3 ed. São Paulo: FTD, 2015.

VIANA, L. H.; MOITA, F. M. G. S. C. A teoria das situações didáticas e os games nos processos de ensino e aprendizagem. *In*: MOITA, F. M G. S. C., Viana, L. H. (Orgs). **Teorias e práticas docentes no ensino de ciências e educação matemática.** Curitiba: Editora CRV, 2019. p. 43-56.

VAN DE WALLE, John A. **Matemática no ensino fundamental**. Artmed Editora, 2009.

VINAYAKUMAR, R.; SOMAN, K. P.; MENON, P. Fractal Geometry: Enhancing Computational Thinking with MIT Scratch. 9th International Conference on Computing, Communication and Networking Technologies (ICCCNT), Bangalore, 2018, p. 1-6.

WALKER, C. M. *et al.* Visual thinking: Art students have an advantage in geometric reasoning. **Creative Education**, v. 2, n. 01, p. 22, 2011.

WEINTROP, D. *et al.* Defining computational thinking for mathematics and science classrooms. **Journal of Science Education and Technology**, v. 25, n. 1, p. 127-147, 2016.

WING, J. M. **Computational thinking**. Communications of the ACM, v. 49, n. 3, p. 33-35, mar. 2006.

WING, J. M. Computational thinking and thinking about computing. **Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, v. 366, n. 1881, p. 3717–3725, 2008.

WING, J. M. Computational thinking's influence on research and education for all. **Italian Journal of Educational Technology**, v. 25, n. 2, p. 7-14, 2017.

WINTER, V. & LOVE, B. CORRITORE, C. The art of the Wunderlich cube and the development of spatial abilities. **International Journal of Child-Computer Interaction**. 18, 2018, p. 1-7.

YEH, A. Programming driven 3D modeling on the web. *In*: **Proceedings of the 22nd International Conference on 3D Web Technology**. ACM, 2017.

APÊNDICES

APÊNDICE A – DESCRIÇÃO DOS RECURSOS UTILIZADOS PELOS AUTORES DOS TRABALHOS DA RSL

Recurso	Descrição	Autores que utilizaram
Scratch	O Scratch é um rico ambiente de programação que permite aos seus usuários criarem *games*, histórias, desenhos, entre outras possibilidades agrupando blocos que representam comandos de linguagem de programação. Assim, este recurso permite que as pessoas conheçam o mundo da computação ainda que não tenham experiência alguma com a programação. Vinayakumar, Soman e Menon (2018)	Kale *et al.*, 2018; Gadanidis *et al.*, 2016; Bentom *et al.*, 2017; Vinayakumar, Soman e Menon, 2018
Robô programável Dash	O Dash é um robô programável que tem por objetivo ensinar crianças a partir de cinco anos a programar.	Gadanidis *et al.*, 2016
Lattice Land	Lattice Land é um recurso que permite aos estudantes explorarem conceitos geométricos por meio da manipulação de polígonos desenhados ligando-se pontos, de forma semelhante a um Geoplano[26] bidimensional.	Pei, Weintrop e Wilensky, 2018
Game A.L.E.X	O A.L.E.X é um jogo educativo voltado à condução de um robô por um caminho via conceitos básicos e lógica de programação. Os comandos básicos do *game,* como *turn left, turn right* ou *go forward*, podem auxiliar crianças a partir de seis anos na aprendizagem de noções de movimento, direção e Geometria. Kyriakides, Meletiou-Mavrotheris e Prodromou (2016)	Kyriakides, Meletiou-Mavrotheris e Prodromou, 2016
Geogebra	O GeoGebra é um software de matemática dinâmica que contempla recursos relacionados a diferentes campos da Matemática que se aplicam aos mais variados níveis de ensino. Este *software* possui também uma vasta comunidade de usuários que criam e compartilham, diariamente, conteúdos relacionados a diferentes áreas do conhecimento.	Kenderov, 2018
VIVA Mathematic with computer	O VIVA MC trata-se de uma competição, na qual participam estudantes de alguns dos anos iniciais do ensino fundamental e dos anos finais do mesmo. A competição é dividida em duas fases, sendo a primeira de livre acesso para os	Kenderov, 2018

[26] Criado pelo matemático inglês Calleb Gattegno, o Geoplano bidimensional, que atualmente pode ser analógico ou digital, consiste em uma malha pontilhada onde é possível ligar-se seus pontos de modo a formar polígonos.

	estudantes interessados e a segunda apenas para aqueles que obtiveram resultado satisfatório na primeira. Todos participam da competição de maneira on-line e têm 60 minutos para resolver os desafios propostos. Para encontrar respostas para esses desafios, os estudantes precisam criar modelos computacionais utilizando o GeoGebra. Os desafios mais difíceis vêm acompanhados de exemplos semelhantes para que os competidores tenham alguma ideia de como resolvê-lo. Não há limitações quanto ao uso de livros, pesquisas na internet ou até mesmo dicas de colegas e professores, entretanto, apenas dois por cento dos participantes conseguem enviar respostas consideradas satisfatórias. Kenderov (2018).	
Theme of the month	O Theme of the month – TM é uma competição que no início de cada mês divulga uma lista de desafios a serem resolvidos pelos seus participantes até o fim do mês. De modo semelhante ao VIVA MC, para alguns desafios, os participantes recebem arquivos auxiliares para o GeoGebra, que os auxiliam a explorar o problema proposto, porém em outros eles têm de encontrar a solução sem auxílios, propondo modelos no GeoGebra que a representem. Kenderov (2018).	Kenderov, 2018
MALT2 - machine lab turtle sphere	O MALT2 trata-se de uma aplicação online baseada na linguagem Logo, que permite a criação, exploração e manipulação dinâmica de modelos geométricos tridimensionais por meio de comandos de programação. Em relação à linguagem Logo e as demais aplicações que fazem seu uso, o MALT2 se destaca por: suportar a utilização de comandos que permitem o personagem se mover no plano 3D, como, por exemplo, *roll right* que faz o mesmo girar em torno de si mesmo no sentido horário por uma determinada quantidade de graus; Permite a animação de modelos tridimensionais criados nele mesmo, por meio do uso de *sliders* que representam variáveis inseridas nos códigos escritos pelo usuário, reforçando o processo de abstração; Utiliza uma "câmera" periscópica para que o usuário consiga visualizar suas criações, permitindo que o mesmo desenvolva as suas habilidades de visualização espacial.	Kynigos e Grizioti, 2018
VRMATH2	O VRMath 2.0 utiliza tecnologias 3D e ideias da web 2.0 para proporcionar suporte ao Ensino e a aprendizagem da matemática, especialmente da Geometria. Este recurso é baseado na linguagem Logo, porém, dada sua	Yeh, 2017

	interface tridimensional, alguns elementos foram modificados, removidos ou adicionados, como por exemplo: não são necessários comandos para controle da janela na qual o objeto se moverá; foi adicionado o comando *jump*, para que o objeto se mova até determinado local acima ou abaixo dela sem deixar os rastros. É possível também criar e manipular objetos geométricos por meio de comandos de programação.	
LDraw	LDraw é um conjunto de programas gratuitos que permite a criação de modelos com peças LEGO® virtuais. Por meio dessa ferramenta, é possível representar modelos criados fisicamente, ou planejar modelos antes de construí-los com peças reais, fazer animações por meio de sequências de imagens construídas e modificadas com as peças LEGO®. Ao contrário do LEGO® real, as peças nesse *software* são ilimitadas e possuem diversos tipos e cores, possibilitando a criação de diversos tipos de objetos. O *software* apresenta diversas ferramentas que permitem além da personalização de objetos, a sua visualização sob diferentes perspectivas.	Winter, Love e Corritore, 2018
Wunderlich Cube	*Wunderlich Cube* é um cubo cujas superficies contém imagens de reflexões de uma letra S que, quando rolado, pode gerar a chamada *Wunderlich curve*, descoberta por Walter Wunderlich. Esta curva envolve quadrados de tamanho 3^n x 3^n, compostos por uma sequência de letras S interligadas ponta a ponta. Por meio da rotação deste cubo, é possível formar-se diferentes sequências de comandos que o direcionam para onde deve girar, como uma espécie de plano cartesiano.	Winter, Love e Corritore, 2018
Geometer’s Sketchpad	O Geometer’s Sketchpad é um *software* que permite construir figuras geométricas, com a possibilidade de animá-las.	Sinclair e Patterson, 2018

APÊNDICE B – TCLE PARA OS PAIS OU RESPONSÁVEIS

TERMO DE CONSENTIMENTO E LIVRE ESCLARECIDO (TCLE)

Convidamos o (a) seu/sua filho (a) menor de idade que está sob sua responsabilidade para participar, como voluntário (a), da pesquisa **Pensamento computacional desplugado: uma estratégia para o ensino e aprendizagem de geometria plana**. Esta pesquisa é de responsabilidade do pesquisador Lucas Henrique Viana, e-mail: lucas_henriqk@hotmail.com, telefone: (83) 98711-5039.

Os objetivos do estudo são:
Objetivo geral – Investigar as contribuições do pensamento computacional desplugado como uma estratégia para o ensino e aprendizagem de geometria plana;
Objetivos específicos – Verificar quais as possibilidades e limitações do Pensamento Computacional no ensino e aprendizagem da geometria plana; desenvolver, aplicar e compartilhar com o professor envolvido novas metodologias para o ensino de Polígonos; utilizar abordagens plugadas e desplugadas no processo de ensino e aprendizagem;

Os motivos que justificam a realização deste estudo são algumas observações feitas pelo pesquisador durante sua jornada acadêmica, em atividades de estágio, iniciação científica e extensão, que apontaram para uma grande lacuna existente no ensino de geometria nas escolas, especialmente nos anos finais do Ensino Fundamental. Essas lacunas vêm gerando dificuldades de aprendizagem entre os alunos, conforme evidenciado no referencial teórico estudado. Observando a necessidade de trabalhos que reforcem o ensino e aprendizagem da geometria e a associação de temas como o Pensamento Computacional com o com a matemática, este projeto de pesquisa foi elaborado em busca de auxiliar os processos de ensino e aprendizagem de geometria, utilizando-se a abordagem do Pensamento Computacional Desplugado.

Seu filho (a) ou responsável participará desta pesquisa por um período de 02 meses, durante algumas aulas de matemática a serem cedidas pelo professor responsável por sua turma.

Esta pesquisa será desenvolvida sob uma abordagem qualitativa, tomando por base alguns pressupostos teóricos e metodológicos da engenharia didática. A escolha deste método deve-se a sua característica de interligar ação e investigação na prática educativa, permitindo a validação interna dos métodos utilizados sem a necessidade de aplicação de um pré-teste ou pós-teste.

O público-alvo da pesquisa serão estudantes do sexto ano do Ensino Fundamental de uma escola pública da rede estadual da cidade de Campina Grande, que será o *locus* das investigações. Também será requisitada a participação do professor que ensina o componente curricular de matemática na escola, que terá papel fundamental no planejamento das atividades.

Como materiais para coleta e análise de dados, serão utilizados: caderno de campo, gravações de áudio, fotos, polígonos feitos com papel cartão, um jogo de cartas a ser adaptado pelo autor, questionários impressos, assim como observações em aula e entrevistas semiestruturadas com o professor de matemática participante, a fim de se obter informações sobre sua didática, o perfil geral dos estudantes e o seu cotidiano escolar.

Além desses materiais, de grande importância para a execução da pesquisa, serão utilizados o *software* GeoGebra para uma representação mais rigorosa de alguns polígonos e suas características e também o *software Scratch*, no qual os participantes realizarão atividades matemáticas elaboradas a partir das necessidades do ambiente escolar ou da comunidade vizinha, com o objetivo de propor soluções para problemas reais.

Durante a aplicação do estudo, os alunos receberão o TCLE e TA para que seus pais ou responsáveis leiam e assinem, concordando ou não com a participação deles. Dias depois, serão recebidos todos os papéis, e identificados os alunos autorizados a participar da pesquisa. Assim, os alunos que que receberem autorização poderão responder os questionários e o pesquisador poderá acompanhar por alguns dias as aulas do professor de matemática, a fim de conhecer o perfil, comportamento e conhecimentos prévios da turma.

Após essas observações, será solicitado ao professor que os alunos autorizados a participar da pesquisa possam se deslocar da sala de aula, enquanto os demais permanecerão assistindo as suas aulas. Assim, em um primeiro momento serão aplicadas algumas atividades em laboratório de informática (plugadas), onde todos poderão experimentar o software Scratch e também resolverem alguns problemas a partir dele. Com isso será possível verificar o que esses alunos conhecem sobre esse recurso e o que já são capazes de fazer nele, assim como seus conhecimentos sobre a geometria plana.

Todos os dados gerados nessa etapa por meio do scratch serão salvos, analisados e utilizados para a elaboração dos próximos desafios.

Em um segundo momento, já em uma sala de aula, ou outro espaço cedido pela escola, serão aplicadas com os participantes as atividades analógicas (desplugadas) voltadas ao desenvolvimento do Pensamento Computacional e do conhecimento geométrico.

Serão então trabalhados conceitos de área, perímetro e volume por meio de atividades como a criação e interpretação de fluxogramas, jogos e problemas contextualizados com a realidade da escola. Por exemplo, poderia ser desenvolvida, com auxílio do professor, uma atividade onde os estudantes tenham que elaborar um algoritmo que guie uma pessoa desde a portaria da escola até a sua sala de aula, utilizando-se comandos como: ande n passos para frente, vire 90 graus para a direita ou vire 90 graus para a esquerda.

Todos os procedimentos de resolução e discussões geradas durante a aula serão registrados por meio de fotografias, anotações em caderno de campo, e também por meio dos escritos dos alunos.

Finalizada esta etapa, será feita, em um terceiro momento, mais uma atividade em laboratório de informática com o uso do Scratch, com desafios mais complexos, mas ainda na perspectiva do desenvolvimento do pensamento computacional e do conhecimento geométrico.

Após a realização da experimentação, será dado início a fase de análise a posteriori e validação, ou seja, análise dos dados, que será realizada pelo pesquisador, comparando as variáveis didáticas e hipóteses levantadas nas fases anteriores da pesquisa e a progressão dos alunos no decorrer dos três momentos da experimentação, conforme o quadro metodológico da Engenharia Didática.

Vale ressaltar que, durante toda a pesquisa, a identidade dos sujeitos será totalmente preservada, e os mesmos estarão livres de riscos à sua integridade física e intelectual, sendo todas as situações didáticas aplicadas com finalidades de pesquisa, respeitando as diretrizes da Resolução 466/12 CNS/MS.

A pesquisa pode oferecer riscos aos participantes, entre eles está o risco mínimo das imagens ou gravações serem publicadas por eventual quebra de sigilo ou confidencialidade. Entretanto, todos os dados da pesquisa serão mantidos sob sigilo ético. Dessa forma, não será divulgada nenhuma informação sobre o meu nome, ou de meus colegas e professor, nem da instituição onde estudo, seja no trabalho de dissertação, ou qualquer outra publicação oriunda deste projeto.

É possível também que os alunos ou professor envolvido sintam-se constrangidos em responder alguma pergunta do questionário sobre seu perfil ou atividade a ser elaborada no decorrer do projeto, entretanto, todos terão absoluta liberdade de recusar-se a participar de qualquer atividade a ser aplicada.

Fui informado (a) também que a pesquisa poderá trazer benefícios, como:
- Desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático;
- Socialização de conhecimentos e interação;
- Levantamento de discussões interdisciplinares;
- Desenvolvimento do Pensamento Computacional;

Por meio deste termo, o pesquisador garante:

- Que a participação do seu filho (a) ou responsável é inteiramente voluntária e não remunerada;
- Que seu filho (a) ou responsável não sofrerá nenhum tipo de prejuízo ou penalização, caso não aceite participar do estudo;
- Que do seu filho (a) ou responsável poderá se recusar a responder qualquer pergunta ou atividade, assim como também recusar-se a me submeter a algum procedimento;
- O menor terá acompanhamento/ assistência durante a realização da pesquisa;
- Que seu filho (a) ou responsável não terá nenhuma despesa por participar desta pesquisa e que também não receberá nenhum pagamento. As despesas se houverem ficarão sob responsabilidade do pesquisador Lucas Henrique Viana. Entretanto, caso seu filho (a) ou responsável necessite se deslocar por causa exclusivamente da pesquisa, ou tenha algum prejuízo financeiro devido a participação do estudo, será ressarcido.
- Caso ocorra algum dano comprovadamente decorrente da participação de seu filho (a) ou responsável na pesquisa, ele será indenizado;
- Você poderá retirar o consentimento ou interromper a participação de seu filho (a) ou responsável a qualquer momento se assim o desejar;
- Assinando este termo de consentimento livre e esclarecido, você estará permitindo a participação de seu filho (a) ou responsável na pesquisa;
- As atividades serão realizadas apenas após consentimento;
- As informações coletadas serão utilizadas apenas para a pesquisa e poderão ser divulgadas em eventos e publicações científicas;

Em caso de dúvidas relacionadas aos aspectos éticos deste estudo, o Sr(a) poderá consultar CEP/CESED localizado na Rua: Argemiro de Figueirêdo, 1901 – Central de Atendimento ao Aluno – Ao lado do Teatro Facisa, Bairro: Itararé. E-mail: cep@unifacisa.edu.br – telefone: (83)2101.8857. De: Segunda a Sexta-feira das 09:30h às 17h e das 18h às 22h.

Caso aceite que seu/sua filho(a) participe deste estudo rubrique as folhas e assine ao final deste documento que está em duas vias. Uma via para o Sr(a) e a outra do pesquisador(a).

Campina Grande, ____ de _________________ de __________

Assinatura do responsável legal pelo menor

Assinatura do pesquisador

APÊNDICE C – TERMO DE ASSENTIMENTO PARA OS ALUNOS

TERMO DE ASSENTIMENTO

Eu ____menor, estou sendo convidado (a) a participar da pesquisa **intitulada Pensamento computacional desplugado: uma estratégia para o ensino e aprendizagem de geometria plana**. Que tem como pesquisador responsável Lucas Henrique Viana, e-mail: lucas_henriqk@hotmail.com, telefone: (83) 98711-5039.

Os motivos que justificam a realização deste estudo são algumas observações feitas pelo pesquisador durante sua jornada acadêmica, em atividades de estágio, iniciação científica e extensão, que apontaram para uma grande lacuna existente no ensino de geometria nas escolas, especialmente nos anos finais do Ensino Fundamental. Essas lacunas vêm gerando dificuldades de aprendizagem entre os alunos, conforme evidenciado no referencial teórico estudado. Observando a necessidade de trabalhos que reforcem o ensino e aprendizagem da geometria e a associação de temas como o Pensamento Computacional com o com a matemática, este projeto de pesquisa foi elaborado em busca de auxiliar os processos de ensino e aprendizagem de geometria, utilizando-se a abordagem do Pensamento Computacional Desplugado.

Os objetivos do estudo são:

Objetivo geral - Investigar as contribuições do pensamento computacional desplugado como uma estratégia para o ensino e aprendizagem de geometria plana;

Objetivos específicos - Verificar quais as possibilidades e limitações do Pensamento Computacional no ensino e aprendizagem da geometria plana; desenvolver, aplicar e compartilhar com o professor envolvido novas metodologias para o ensino de Polígonos; utilizar abordagens plugadas e desplugadas no processo de ensino e aprendizagem;

Esta pesquisa será desenvolvida sob uma abordagem qualitativa, tomando por base alguns pressupostos teóricos e metodológicos da engenharia didática. A escolha deste método deve-se a sua característica de interligar ação e investigação na prática educativa, permitindo a validação interna dos métodos utilizados sem a necessidade de aplicação de um pré-teste ou pós-teste.

O público-alvo da pesquisa serão estudantes do sexto ano do Ensino Fundamental de uma escola pública da rede estadual da cidade de Campina Grande, que será o *locus* das investigações. Também será requisitada a participação do professor que ensina o componente curricular de matemática na escola, que terá papel fundamental no planejamento das atividades.

Como materiais para coleta e análise de dados, serão utilizados: caderno de campo, gravações de áudio, fotos, polígonos feitos com papel cartão, um jogo de cartas a ser adaptado pelo autor, questionários impressos, assim como observações em aula e entrevistas semiestruturadas com o professor de matemática participante, a fim de se obter informações sobre sua didática, o perfil geral dos estudantes e o seu cotidiano escolar.

Além desses materiais, de grande importância para a execução da pesquisa, serão utilizados o *software* GeoGebra para uma representação mais rigorosa de alguns polígonos e suas características e também o *software Scratch*, no qual os participantes realizarão atividades matemáticas elaboradas a partir das necessidades do ambiente escolar ou da comunidade vizinha, com o objetivo de propor soluções para problemas reais.

Durante a aplicação do estudo, os alunos receberão o TCLE e TA para que seus pais ou responsáveis leiam e assinem, concordando ou não com a participação deles. Dias depois, serão recebidos todos os papéis, e identificados os alunos autorizados a participar da pesquisa. Assim, os alunos que que receberem autorização poderão responder os questionários e o pesquisador poderá acompanhar por alguns dias as aulas do professor de matemática, a fim de conhecer o perfil, comportamento e conhecimentos prévios da turma.

Após essas observações, será solicitado ao professor que os alunos autorizados a participar da pesquisa possam se deslocar da sala de aula, enquanto os demais permanecerão assistindo as suas aulas. Assim, em um primeiro momento serão aplicadas algumas atividades em laboratório de informática (plugadas), onde todos poderão experimentar o software Scratch e também resolverem alguns problemas a partir dele. Com isso será possível verificar o que esses alunos conhecem sobre esse recurso e o que já são capazes de fazer nele, assim como seus conhecimentos sobre a geometria plana.

Todos os dados gerados nessa etapa por meio do scratch serão salvos, analisados e utilizados para a elaboração dos próximos desafios.

Em um segundo momento, já em uma sala de aula, ou outro espaço cedido pela escola, serão aplicadas com os participantes as atividades analógicas (desplugadas) voltadas ao desenvolvimento do Pensamento Computacional e do conhecimento geométrico.

Serão então trabalhados conceitos de área, perímetro e volume por meio de atividades como a criação e interpretação de fluxogramas, jogos e problemas contextualizados com a realidade da escola. Por exemplo, poderia ser desenvolvida, com auxílio do professor, uma atividade onde os estudantes tenham que elaborar um algoritmo que guie uma pessoa desde a portaria da escola até a sua sala de aula, utilizando-se comandos como: ande n passos para frente, vire 90 graus para a direita ou vire 90 graus para a esquerda.

Todos os procedimentos de resolução e discussões geradas durante a aula serão registrados por meio de fotografias, anotações em caderno de campo, e também por meio dos escritos dos alunos.

Finalizada esta etapa, será feita, em um terceiro momento, mais uma atividade em laboratório de informática com o uso do Scratch, com desafios mais complexos, mas ainda na perspectiva do desenvolvimento do pensamento computacional e do conhecimento geométrico.

Após a realização da experimentação, será dado início a fase de análise a posteriori e validação, ou seja, análise dos dados, que será realizada pelo pesquisador, comparando as variáveis didáticas e hipóteses levantadas nas fases anteriores da pesquisa e a progressão dos alunos no decorrer dos três momentos da experimentação, conforme o quadro metodológico da Engenharia Didática.

Vale ressaltar que, durante toda a pesquisa, a identidade dos sujeitos será totalmente preservada, e os mesmos estarão livres de riscos à sua integridade física e intelectual, sendo todas as situações didáticas aplicadas com finalidades de pesquisa, respeitando as diretrizes da Resolução 466/12 CNS/MS.

Fui informado (a) que a pesquisa pode oferecer riscos aos participantes, entre eles está o risco mínimo das imagens ou gravações serem publicadas por eventual quebra de sigilo ou confidencialidade. Entretanto, foi destacado que todos os dados da pesquisa serão mantidos sob sigilo ético. Dessa forma, não será divulgada nenhuma informação sobre o meu nome, ou de meus colegas e professor, nem da instituição onde estudo, seja no trabalho de dissertação, ou qualquer outra publicação oriunda deste projeto.

Foi mencionado também que seria possível que os alunos ou professor envolvido sintam-se constrangidos em responder alguma pergunta do questionário sobre seu perfil ou atividade a ser elaborada no decorrer do projeto, entretanto, todos terão absoluta liberdade de recusar-se a participar de qualquer atividade a ser aplicada

Fui informado (a) também que a pesquisa poderá trazer benefícios, como:

- Desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático;
- Socialização de conhecimentos e interação;
- Levantamento de discussões interdisciplinares;

- Desenvolvimento do Pensamento Computacional;

O pesquisador (a) me garantiu:

- Que a minha participação é inteiramente voluntária e não remunerada;
- Que não sofrerei nenhum tipo de prejuízo ou penalização, caso não aceite participar do estudo;
- Que poderei me recusar a responder qualquer pergunta, como também recusar-se a me submeter a algum procedimento;
- Que terei acompanhamento/ assistência durante a realização da pesquisa;
- Que não terei nenhuma despesa por participar desta pesquisa e que também não receberei nenhum pagamento. As despesas se houverem ficarão sob responsabilidade do pesquisador Lucas Henrique Viana. Entretanto, caso necessite me deslocar por causa exclusivamente da pesquisa, ou tenha algum prejuízo financeiro devido a participação do estudo, serei ressarcido.
- Caso ocorra algum dano comprovadamente decorrente de minha participação na pesquisa serei indenizado (a).
- Fui informado que o meu responsável poderá retirar o consentimento ou interromper a minha participação a qualquer momento se assim o desejar.
- Tendo o consentimento do meu responsável já assinado, declaro que aceito participar do estudo.
- Fui esclarecido que as atividades serão realizadas apenas após consentimento.
- Fui informado que as informações coletadas serão utilizadas apenas para a pesquisa e poderão ser divulgadas em eventos e publicações científicas.

Em caso de dúvidas com respeito aos aspectos éticos deste estudo, eu poderei consultar: CEP/CESED situado na Av: Senador Argemiro de Figueirêdo, 1901 – Itararé CEP 58.411-020 Telefone: (83)2101.8857 e-mail: cep@unifacisa.edu.br
Desta forma tendo o consentimento do meu responsável já assinado**, aceito participar do estudo,** declaro ter recebido uma via deste termo de assentimento assinado pelo pesquisador responsável.

Campina Grande, ____ de _________________ de ____

____

Assinatura do menor

____

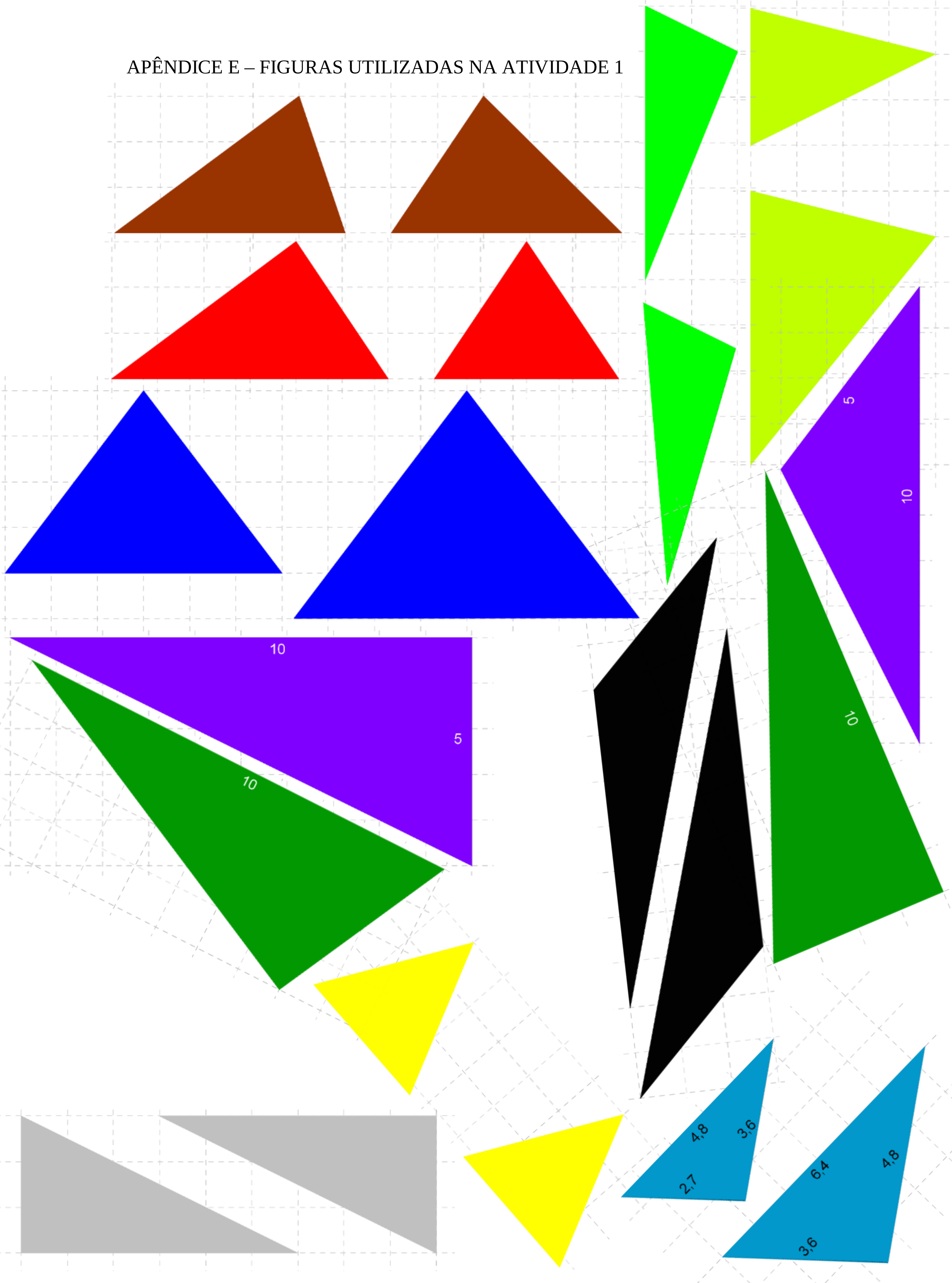
Assinatura do responsável legal pelo menor

____

Assinatura do pesquisador

APÊNDICE D – CONVITES PARA PARTICIPAR DA PESQUISA

APÊNDICE E – FIGURAS UTILIZADAS NA ATIVIDADE 1



APÊNDICE F – FOLHA DE REGISTROS

Numeração da dupla: ____

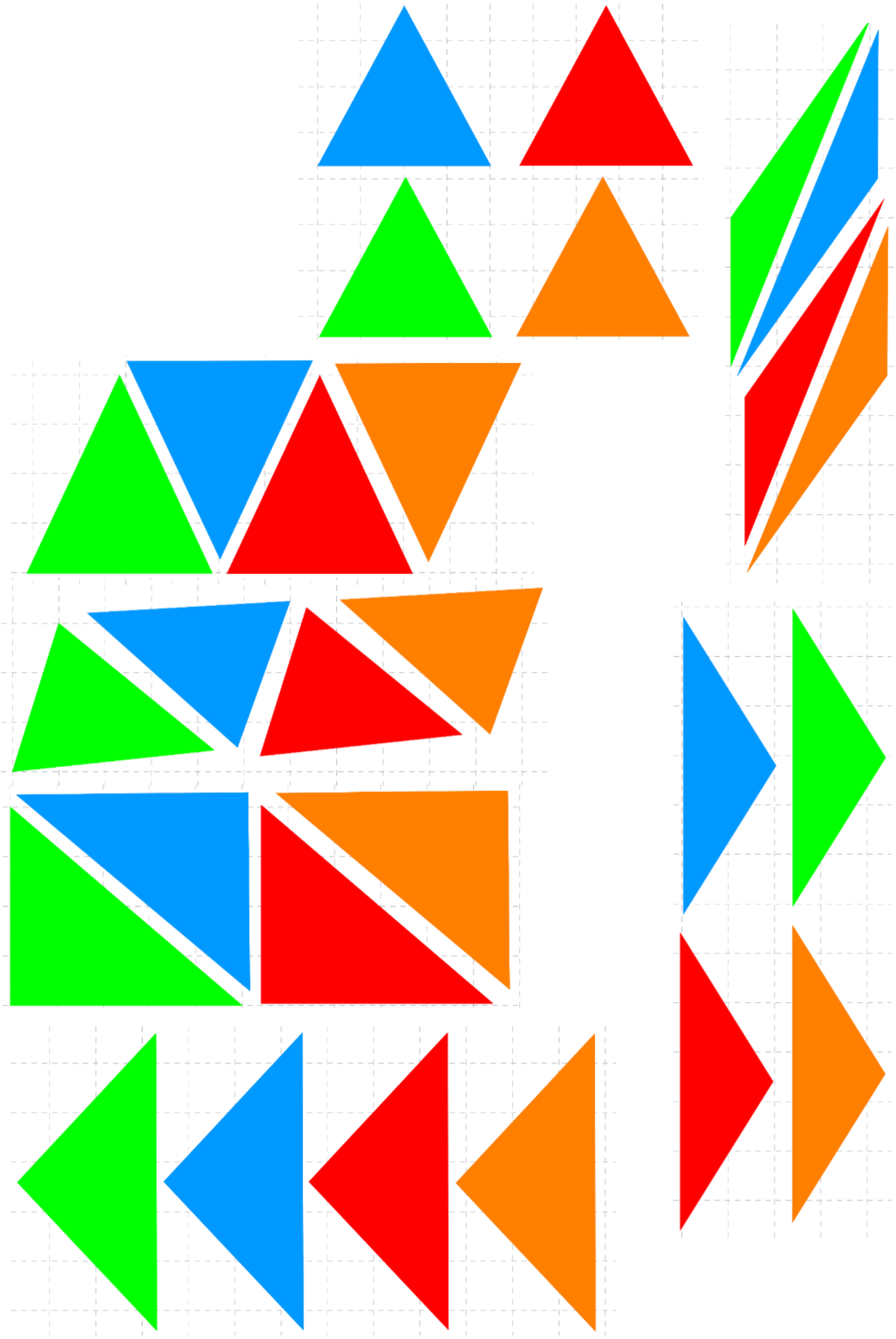
	Cor dos triângulos	Número de lados congruentes	Número de ângulos congruentes	Total	O par coincide por superposição?	Descrição do método utilizado (ex: superposição e medição com transferidor...)
1.						
2.						
3.						
4.						
5.						
6.						
7.						
8.						
9.						
10.						
11.						

Algoritmo:

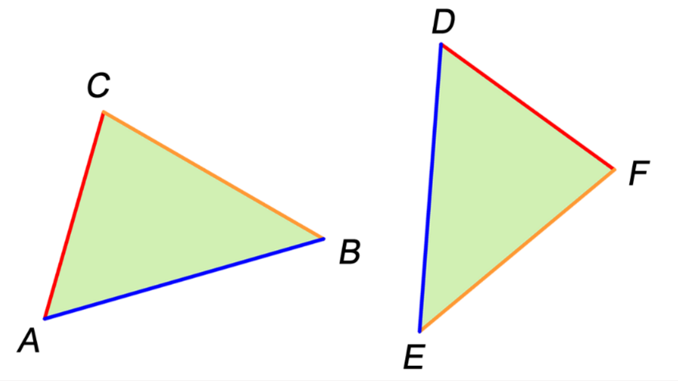
____

____

APÊNDICE G - FIGURAS UTILIZADAS NA ATIVIDADE 2



APÊNDICE H – CASOS DE CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS



Lado – Lado – Lado (LLL)

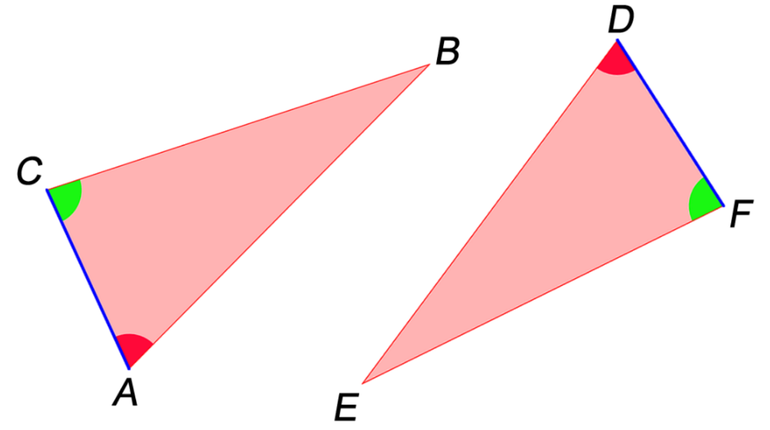
Ocorre quando dois triângulos possuem três lados correspondentes com as mesmas medidas.

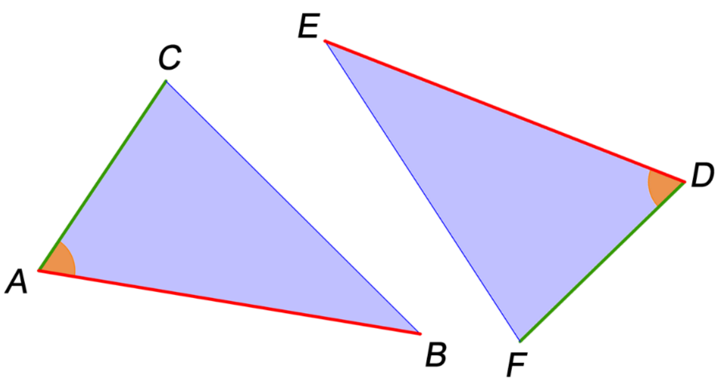
$$AB \equiv DE \,, CA \equiv FD \,, EF \equiv BC$$

Ângulo – Lado – Ângulo (ALA)

Ocorre quando dois triângulos possuem um ângulo, um lado e um ângulo correspondentes com as mesmas medidas.

$$B\hat{C}A \equiv E\hat{F}D \,, CA \equiv FD \,, C\hat{A}B \equiv F\hat{D}E$$





Lado – Ângulo – Lado (LAL)

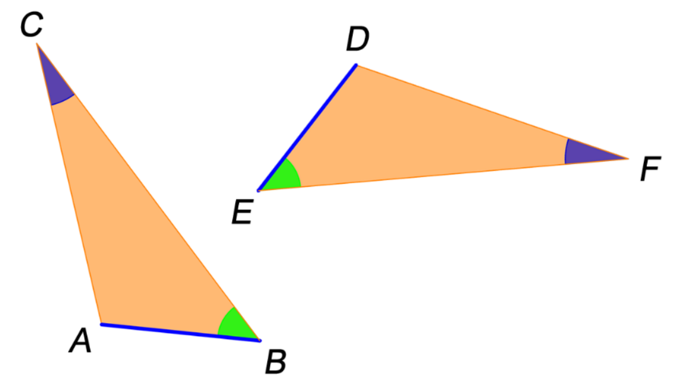
Ocorre quando dois triângulos possuem um lado, um ângulo e um lado correspondentes com as mesmas medidas.

$$CA \equiv FD, C\hat{A}B \equiv F\hat{D}E, AB \equiv DE$$

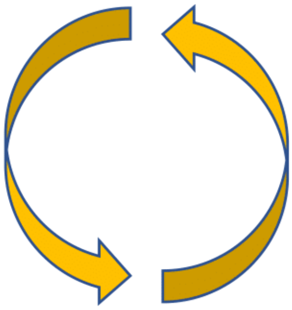
Lado – Ângulo – Ângulo oposto (LAAo)

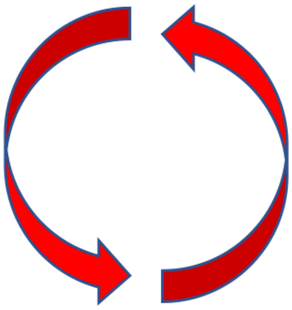
Ocorre quando dois triângulos possuem um lado, um ângulo e um ângulo oposto correspondentes com as mesmas medidas.

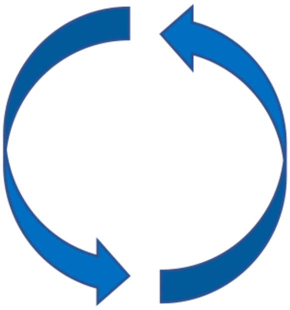
$$AB \equiv DE, A\hat{B}C \equiv D\hat{E}F, B\hat{C}A \equiv E\hat{F}D$$

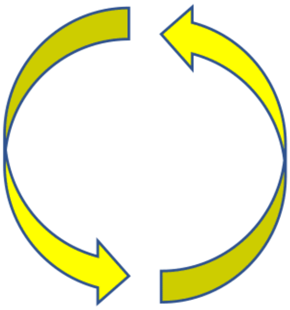


APÊNDICE I – JOGO DAS CONGRUÊNCIAS









Passe
a vez

Passe
a vez

Passe
a vez

Passe
a vez

Pegue uma carta de cada colega, coloque na mesa e misture com as demais, embaralhando-as

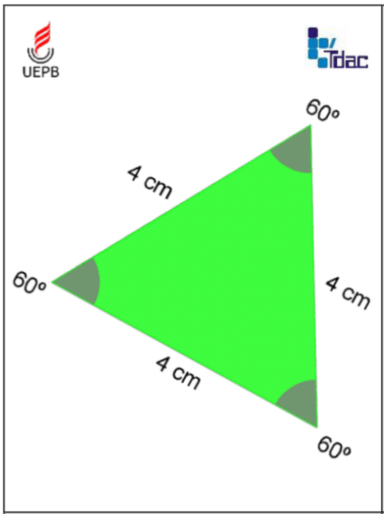
Pegue uma carta de cada colega, coloque na mesa e misture com as demais, embaralhando-as

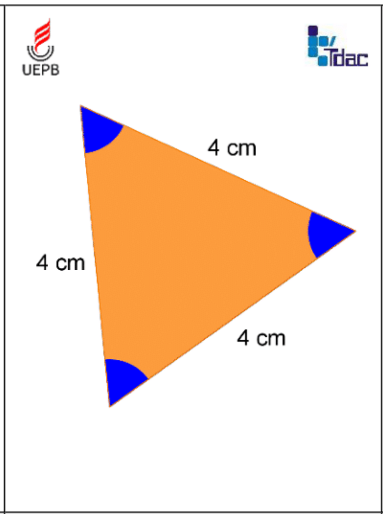
O próximo colega deverá passar a vez

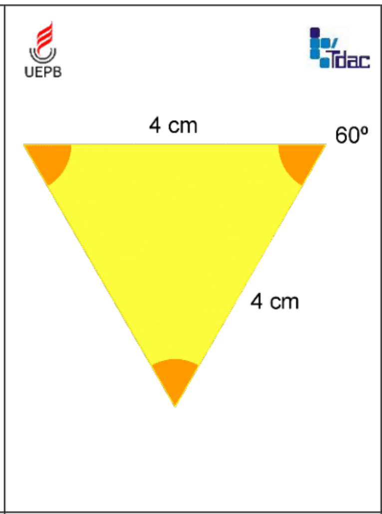
O próximo colega deverá passar a vez

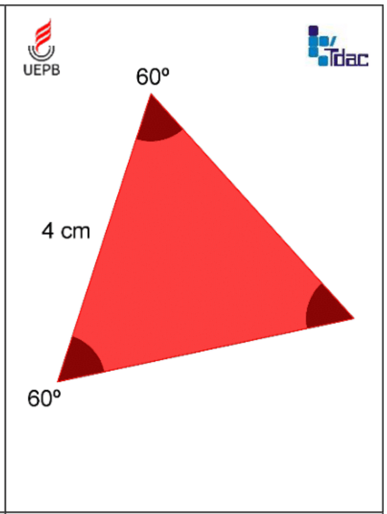
O próximo colega deverá passar a vez

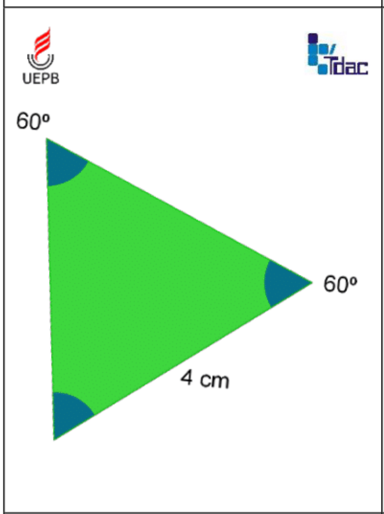
O próximo colega deverá passar a vez

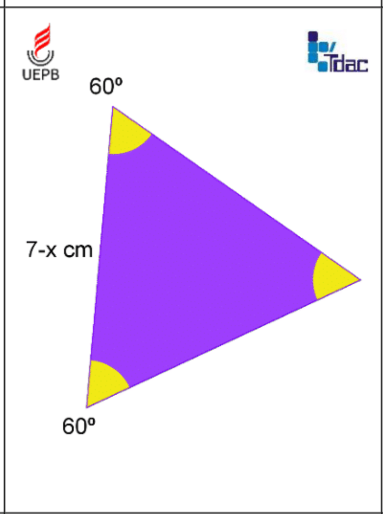

60º
4 cm
60º
4 cm
4 cm
60º

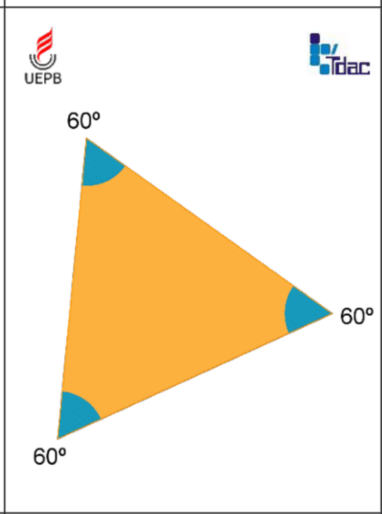

4 cm
4 cm
4 cm

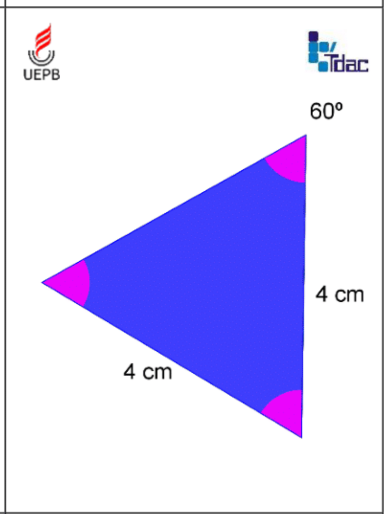

4 cm
60º
4 cm

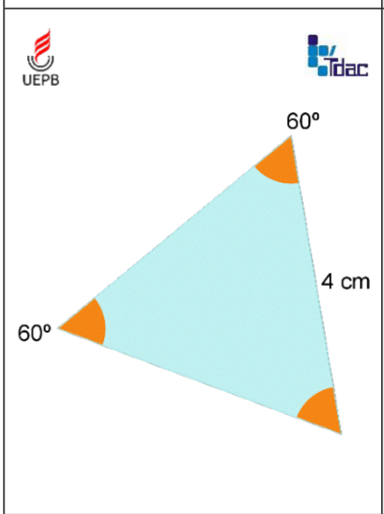

60º
4 cm
60º

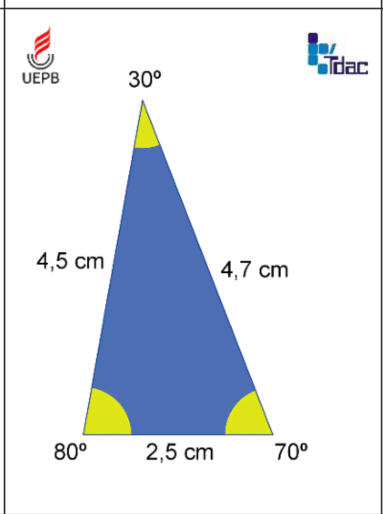

60º
60º
4 cm

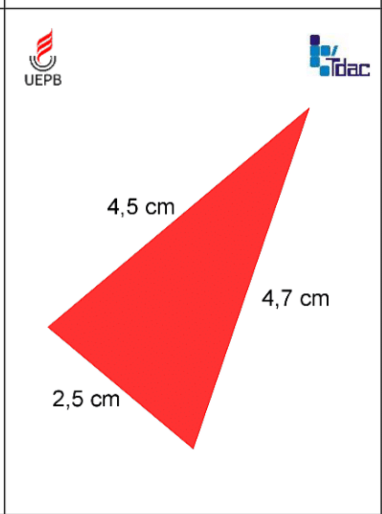

60º
7-x cm
60º

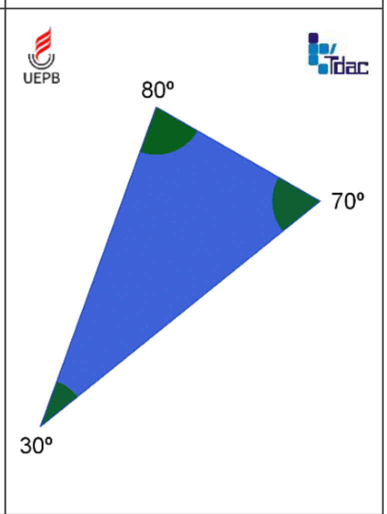

60º
60º
60º

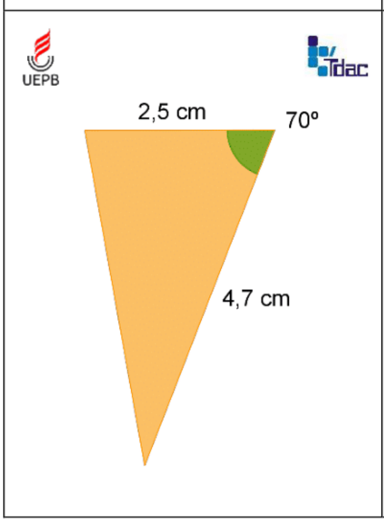

60º
4 cm
4 cm

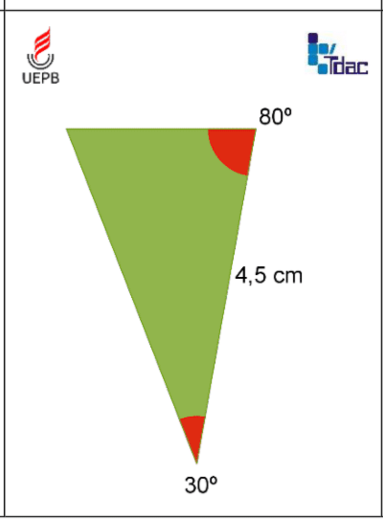

60º
4 cm
60º

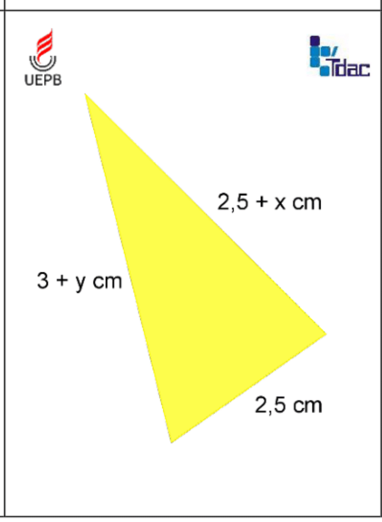

30º
4,5 cm
4,7 cm
80º
2,5 cm
70º

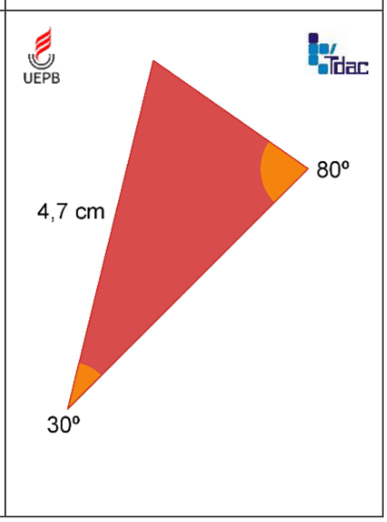

4,5 cm
4,7 cm
2,5 cm

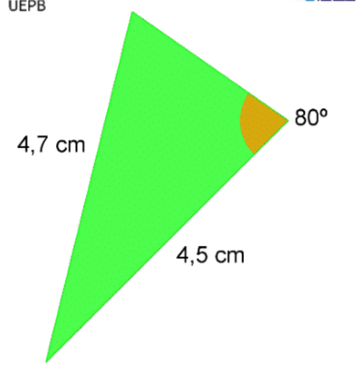

80º
70º
30º

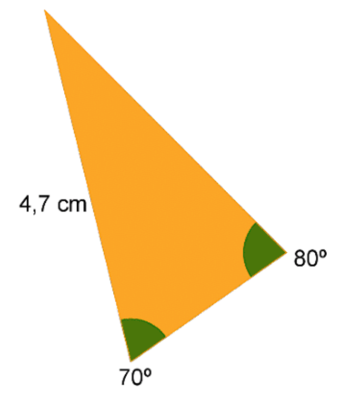

2,5 cm
70º
4,7 cm

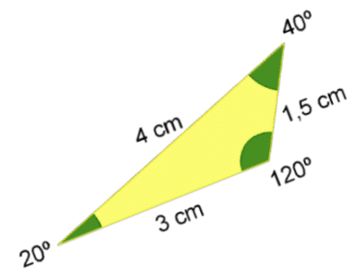

80º
4,5 cm
30º

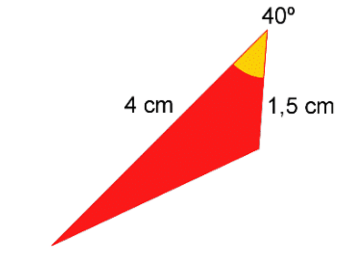

2,5 + x cm
3 + y cm
2,5 cm

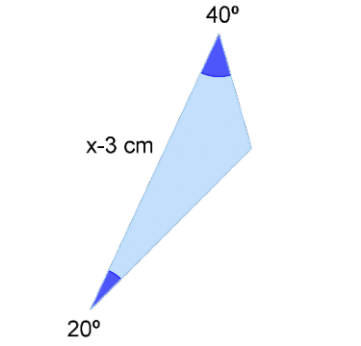

80º
4,7 cm
30º

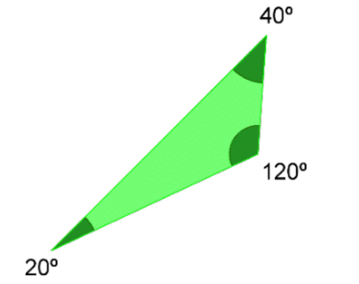

80º
4,7 cm
4,5 cm

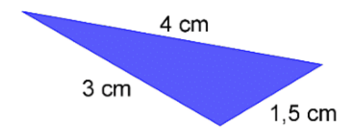

4,7 cm
80º
70º

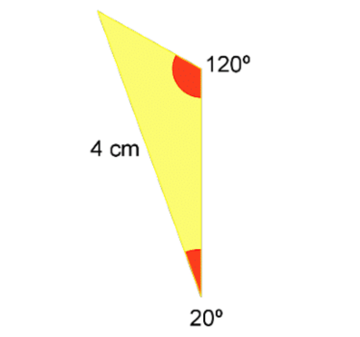

40º
4 cm
1,5 cm
120º
3 cm
20º

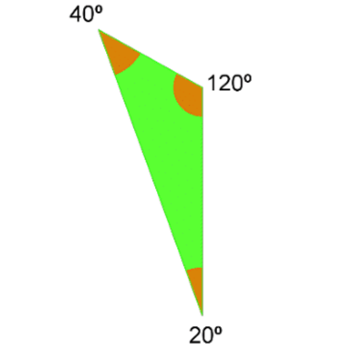

40º
4 cm
1,5 cm

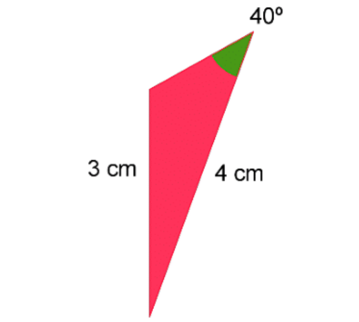

40º
x-3 cm
20º

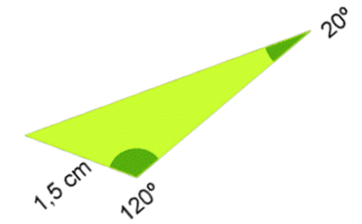

40º
120º
20º

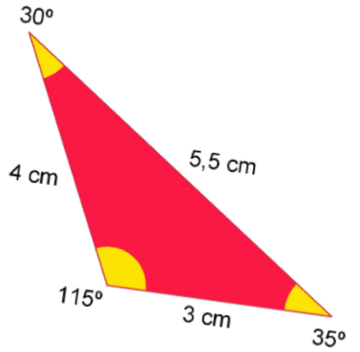

4 cm
3 cm
1,5 cm

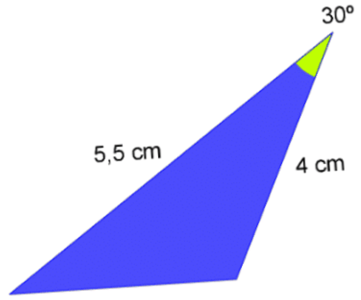

120º
4 cm
20º

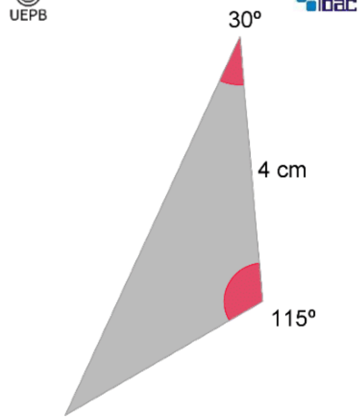

40º
120º
20º

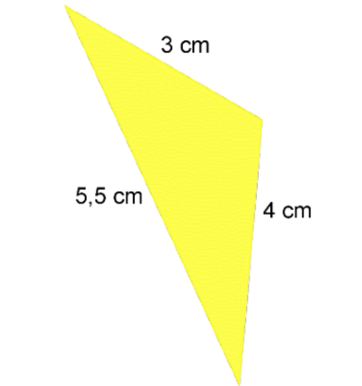

40º
3 cm
4 cm

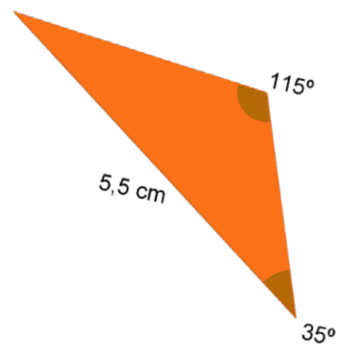

20º
1,5 cm
120º

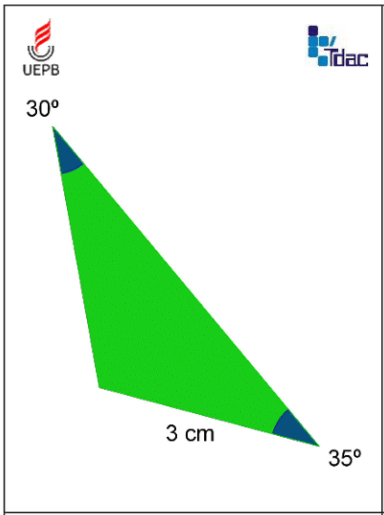

30º
4 cm
5,5 cm
115º
3 cm
35º

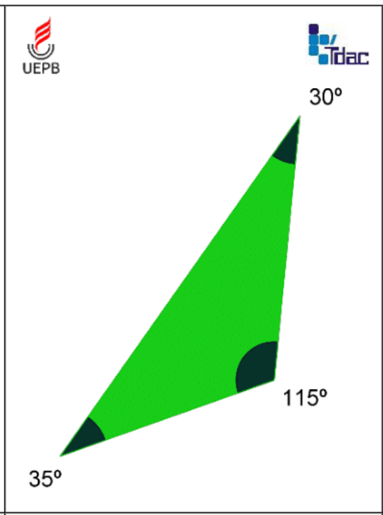

30º
5,5 cm
4 cm

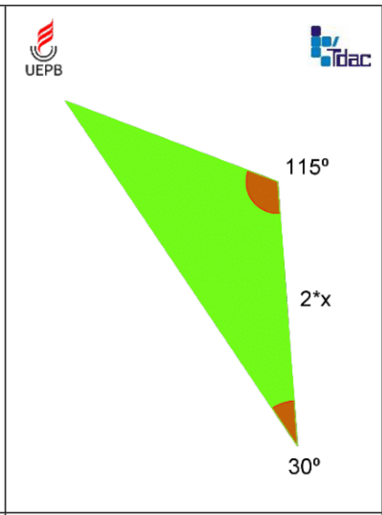

30º
4 cm
115º

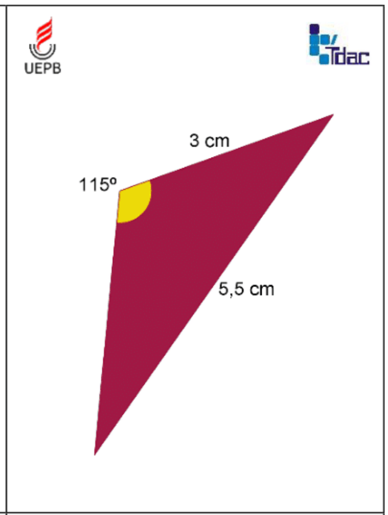

3 cm
5,5 cm
4 cm

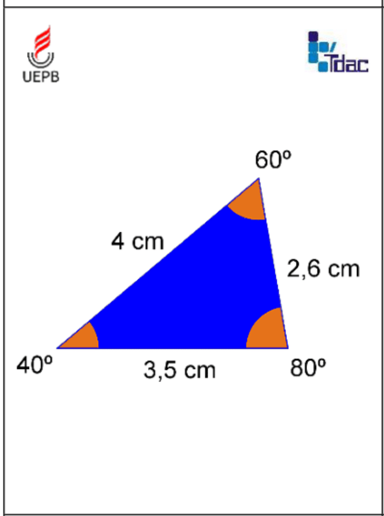

115º
5,5 cm
35º

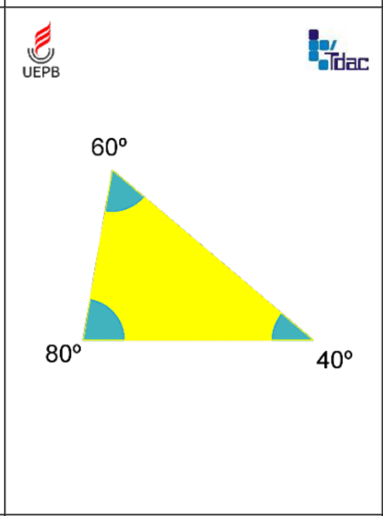

30º
3 cm
35º

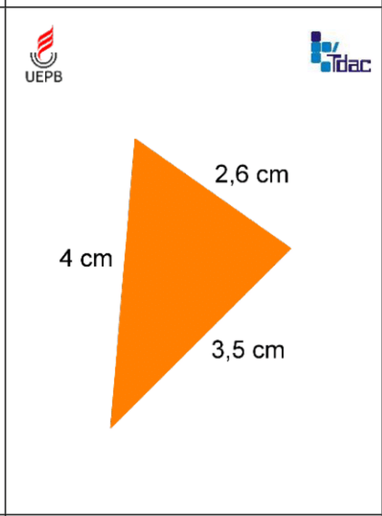

30º
115º
35º

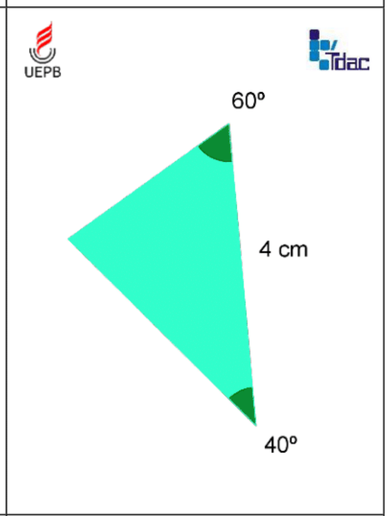

115º
2*x
30º

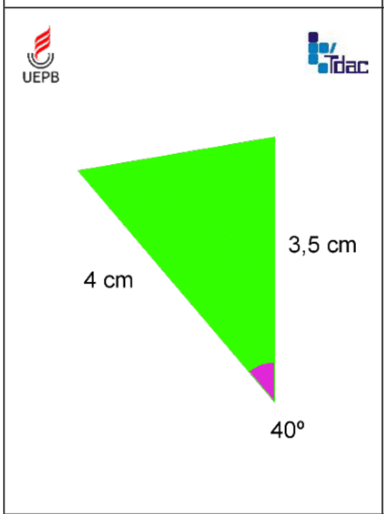

3 cm
115º
5,5 cm

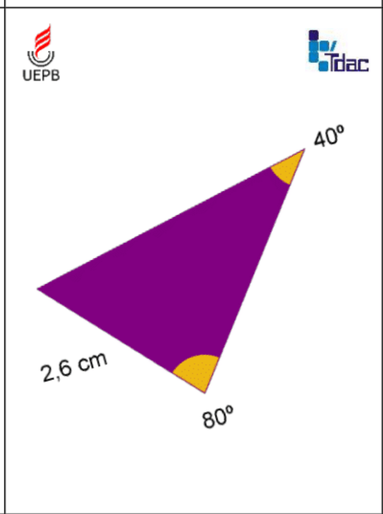

60º
4 cm
2,6 cm
40º
3,5 cm
80º

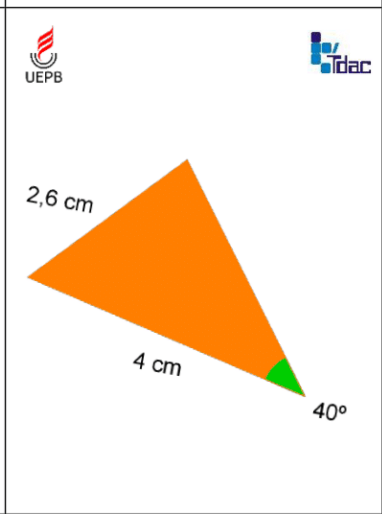

60º
80º
40º

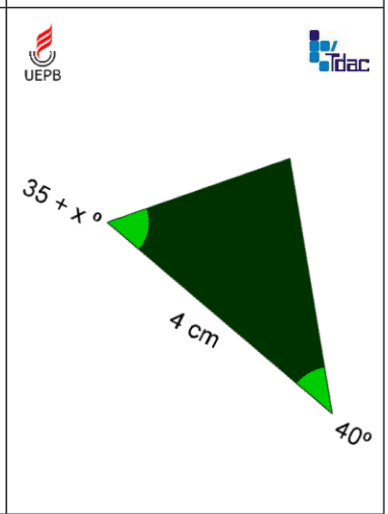

2,6 cm
4 cm
3,5 cm

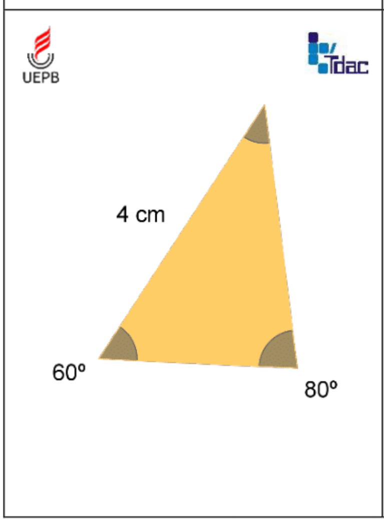

60º
4 cm
40º

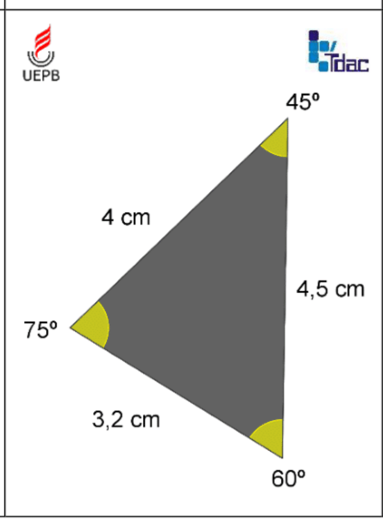

3,5 cm
4 cm
40º

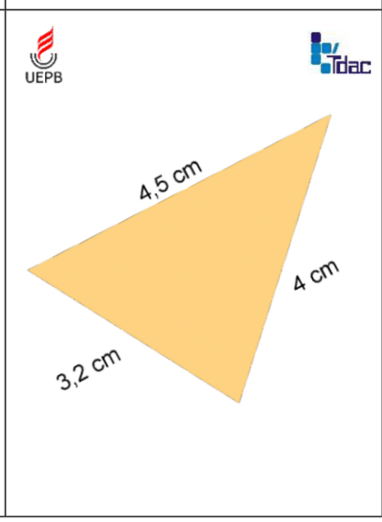

40º
2,6 cm
80º

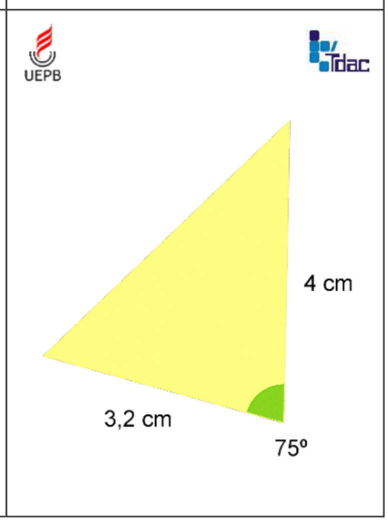

2,6 cm
4 cm
40º

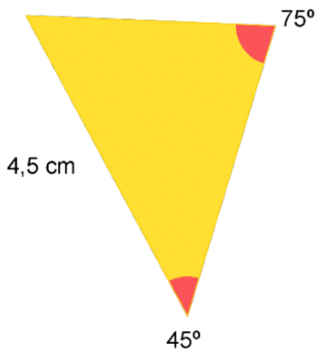

35 + x º
4 cm
40º

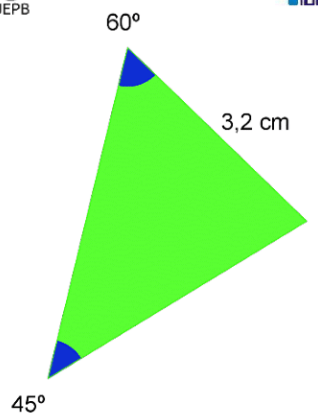

4 cm
60º
80º

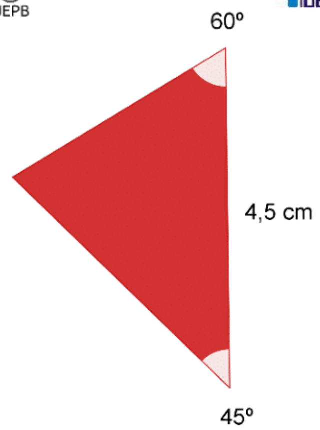

45º
4 cm
4,5 cm
75º
3,2 cm
60º

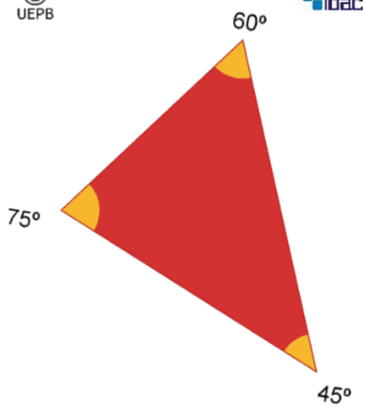

4,5 cm
4 cm
3,2 cm

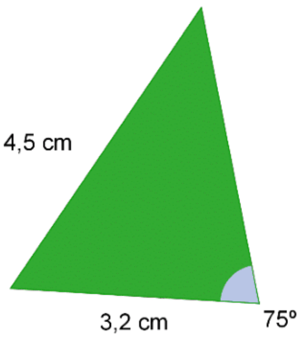

4 cm
3,2 cm
75º

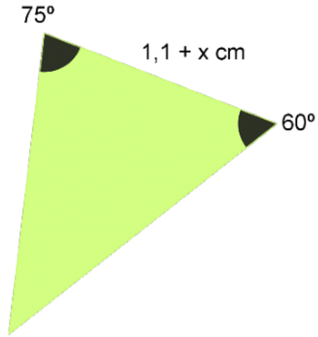


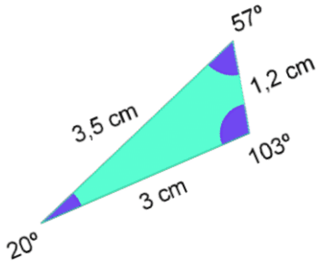


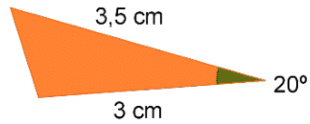


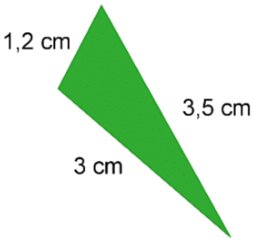


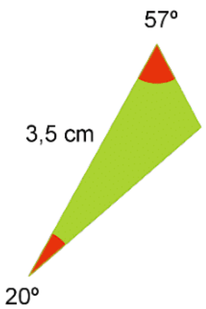


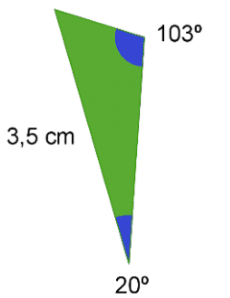


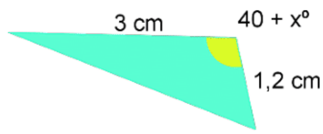


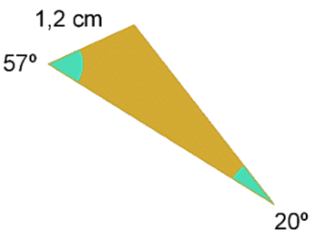


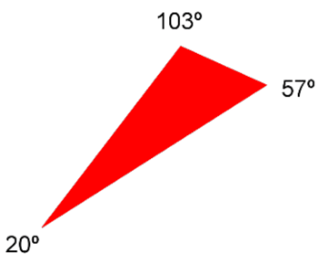


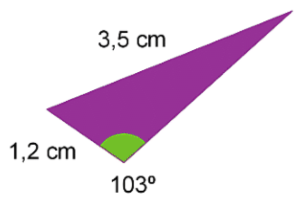












CARTA NÃO UTILIZADA NO JOGO

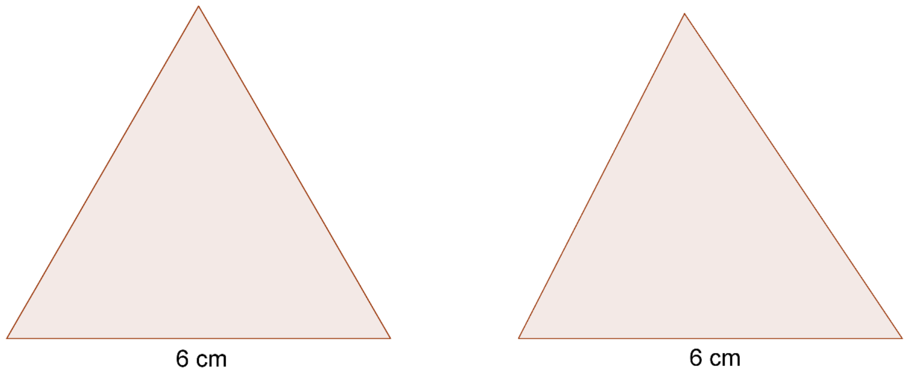
APÊNDICE J – ATIVIDADE FINAL

Nome: ____

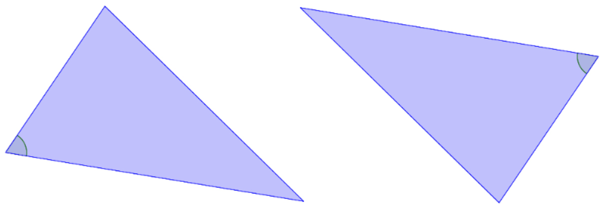
Atividade

1 – Verifique e marque as alternativas que apresentam triângulos congruentes. Utilize os instrumentos de medição e os casos de congruência que você aprendeu.

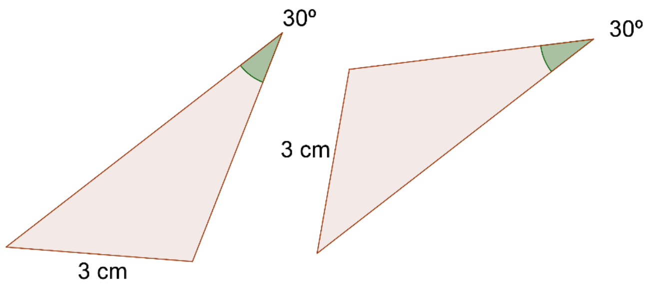
( )



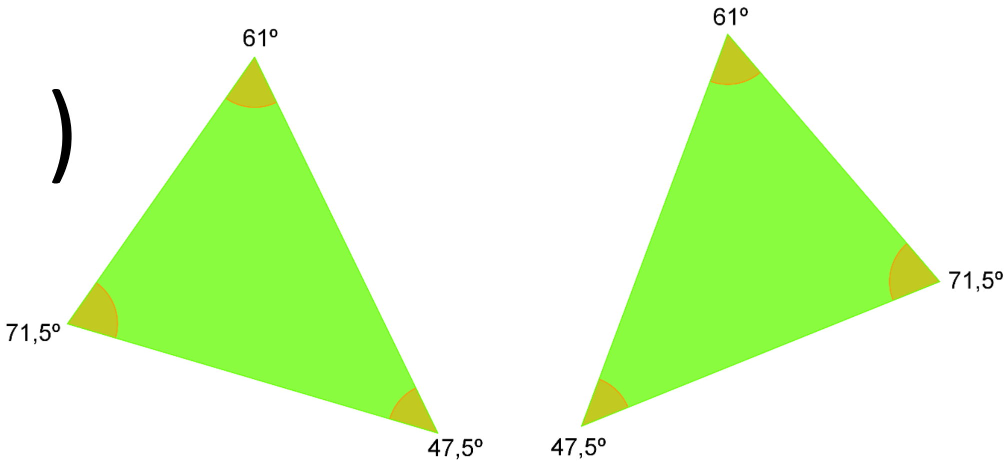
( )



( )



( )



Descreva os procedimentos ou casos de congruência que você identificou na atividade anterior:

____

____

____

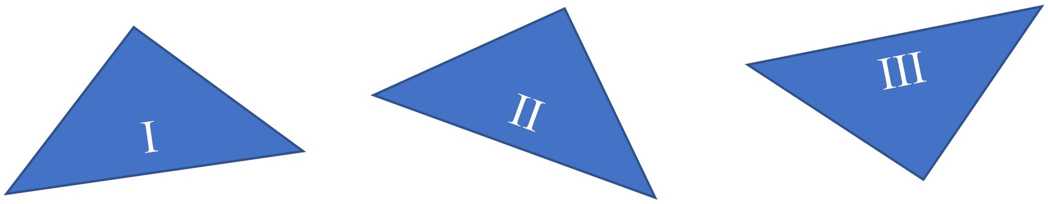
2 – O que você entende por congruência de triângulos?

____

____

____

3 – Na figura a seguir, os triângulos ***I*** e ***II*** são congruentes. Sabe-se também que o triângulo ***II*** é congruente ao triângulo ***III***. Podemos dizer, sem verificar, que os triângulos ***I*** e ***III*** são congruentes?



SIM (   )   NÃO (   )

Por quê?____

____

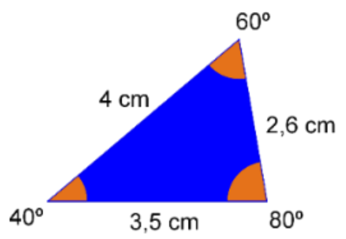
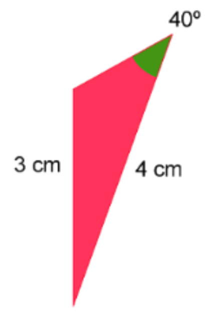
3 – Faça desenhos de pares de triângulos, mostrando exemplos de cada caso de congruência: ALA, LAL, LLL e LAAo

APÊNDICE K – RECORTES DE ALGUNS DIÁLOGOS REALIZADOS PELO PRIMEIRO GRUPO

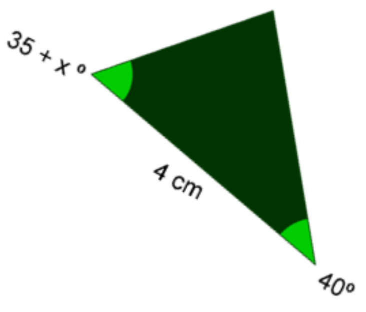
Grupo 1 (A5, A6 e A7)				
Nº	Diálogo	Categoria	Comentário	Conexões com o PC
1	**A5** *A7, olha aqui se é (congruente)* **A7** *É não* **A5** *Eu já li aqui na folha, mas não entendi. Deixa eu ver aqui do lado ó (A5 coloca os triângulos lado a lado e depois vai girando-os de modo a deixar os lados de tamanho próximo perto um do outro, ignorando os valores das medidas)* **A5** *45, 45 ; 60, 60, só aqui que é 65. Ô professor... Vem cá, por favor. Aqui não tem ó? Não é congruente?* *(A5 aponta para a sua carta objetivo e a de congruência que pegou)* **Pesquisador** *Tem alguma medida aqui em comum?* **A5** *Tem: essa (ângulo), essa (ângulo), essa (lado) e não tem essa (lado)* **Pesquisador** *Em qual caso se encaixaria? Tem lado, lado, lado. Todos os lados são de medidas iguais?* **A5** *Não* **Pesquisador** *Não tem como saber né? Porque só tem a medida desse lado aqui.* **Pesquisador** *Aí, vamos ver os outros casos né? Qual outro caso tem aqui?* **A5** *Lado, ângulo, Lado* **Pesquisador** *Aqui teria que ter as medidas de dois lados né? Não vai ter como saber (em uma das figuras só havia a medida de um dos lados).* **Pesquisador** *E ângulo, lado, ângulo?* **A5** *Vai ser esse coisa com o ângulo oposto* **Pesquisador** *Você acha que dá certo? Me mostra onde fica o ângulo oposto* **A6** *É não* **A5** *Lado, ângulo ângulo oposto* **Pesquisador** *E aqui também da mesma forma (aponto para o outro triângulo).* **A5** *Lado, ângulo, ângulo oposto* **Pesquisador** *Então você acabou de achar um caso de congruência* *(A5 comemora)* **A5** *Eu ganheeei*	Comparação, manipulação e medição de triângulos	Nesse diálogo, A5 apresenta dúvidas sobre como verificar a congruência dos triângulos. A princípio, a aluna tenta rotacionar e aproximar as duas cartas para verificar se os triângulos contidos nelas apresentam alguma semelhança visual. Apesar de não ser uma estratégia válida para definir se dois triângulos são congruentes ou não, a verificação realizada por A5 pode ter sido útil ao ajudá-la a dispensar a comparação de triângulos que não possuíam semelhanças visuais, e que certamente não teriam muitas medidas congruentes. Após verificar visualmente por meio dessas estratégias, a aluna passa a verificar se seria possível utilizar algum dos casos de congruência estudados.	As ações realizadas por A5 revelam associações com a habilidade de abstração, quando a aluna utiliza a visualização para identificar propriedades relevantes dos triângulos.
2	**A5** *Tem nada a ver*	Elaboração de	Nesse diálogo,	De modo

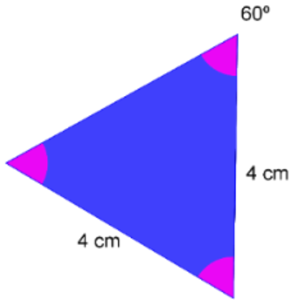
	(A5 percebe que o triângulo da carta de congruência que retirou do monte não tem chance de ser congruente ao de sua carta objetivo, visualizando apenas o seu formato, A6 confirma) **A6** *Tem não.* **A5** *Ô professor, olha só... não é congruente não? Porque ó, tem um ângulo de 60, aí tem 4cm, mas tem outro ângulo de 60 (carta de congruência) e aqui (carta objetivo) só tem um ângulo de 60.* *(A aluna nota que o triângulo presente na sua carta de congruência possui medidas totalmente diferentes dos sua carta objetivo)* **Pesquisador** *Tem uns que a gente pensa que é, mas não é. Veja que nesse (triângulo da carta de congruência), os 3 lados são da mesma medida. Mas só que nesse outro (carta objetivo), é tudo diferente (triângulo escaleno). Se a gente tentasse sobrepor, não ia dar certo* **A5** *Ia não, porque esse aqui é menor, esse aqui é maior e esse aqui é igual (A5 coloca uma carta em cima da outra, para imaginar a sobreposição)*	conjecturas sobre a congruência de triângulos	podemos verificar que A5 continua a utilizar a estratégia que elaborou sobre a verificação da congruência de triângulos, entretanto, quando parte para a verificação das medidas, percebe que elas são totalmente diferentes, exceto em um ângulo de 60º. Com isso, por intermédio do pesquisador, ela vai aperfeiçoando a sua estratégia, na medida em que tenta imaginar a sobreposição dos dois triângulos, o que exigiu bastante de seu pensamento geométrico. Com isso, apesar de ela não ter percebido que os triângulos possuíam formatos distintos, o ato de imaginar a sua sobreposição a serviu como uma importante estratégia para A5 ao longo do jogo.	semelhante ao diálogo anterior, o fato de a aluna ter desenvolvido uma estratégia para a verificação da congruência dos triângulos, imaginando a sua sobreposição, relaciona-se com a habilidade abstração.
3	**A5** A que eu peguei tem 45 graus, não tem nada a ver com essa carta aqui *(A carta de congruência que A5 retirou do monte possuía um ângulo de 45 graus, enquanto sua carta objetivo não tinha. Dessa forma, logo descartou a carta incongruente)*	Elaboração de conjecturas sobre a congruência de triângulos	Neste item, ao invés de verificar os formatos, como fez nos momentos citados anteriormente, A5 iniciou pela a verificação das medidas dos triângulos. Ao perceber que o triângulo de sua carta de congruência não apresentava medidas em comum com o de sua carta objetivo, ela descartou a carta. Trata-se de uma estratégia	Abstração, ao buscar identificar dados relevantes para a verificação da congruência, ou não congruência entre os triângulos das cartas.

			interessante, pois a aluna evolui, verificando desta vez se as medidas apresentavam correspondência, antes de partir para a verificação dos casos de congruência.	
4	**A5** *Ei, se em uma carta tiver todos os ângulos iguais?* ***Pesquisador*** *Vamos ver* *(a carta objetivo de A5 tinha os seguintes ângulos: 60º, 45º e 75º, enquanto que a carta que ela pegou tinha três ângulos de 60º)* **Pesquisador** *Me mostra aí* **A5** *Aqui é 60 e aqui é 45* **Pesquisador** *Podem ser congruentes?* **A5** *Ah, já sei. Não podem, porque tem esses dois aqui diferentes* *(Nesse caso dois dos ângulos de 60º não correspondiam com os de 45º e 75º da carta objetivo)*	Elaboração de conjecturas sobre a congruência de triângulos	Neste diálogo, A5 mostra que estava com dúvidas, porque o triângulo da carta que pegou possuía três ângulos com as mesmas medidas, enquanto que na sua carta objetivo havia apenas um ângulo com essa medida. Sendo questionada pelo pesquisador, ela chega à uma importante conclusão, que poderia ser entendida como uma releitura dos casos ALA e LAAo: se dos ângulos conhecidos em um triângulo, mais de dois deles possuírem medidas diferentes em relação aos ângulos de outro triângulo, esses triângulos não serão congruentes.	Com ajuda do pesquisador, a aluna percebe que os ângulos dos triângulos presentes nas cartas possuem medidas distintas, o que indica que não são congruentes. A mesma passa a adotar essa ideia ao longo do jogo, sendo essa habilidade de elaborar estratégias para verificar mais facilmente a congruência ou não congruência de triângulos, associadas às habilidades de abstração e de algoritmos.
5	**A7** *Achei outraaaa... Olha professor, 30, 115 e 35...* **Pesquisador** *Que caso é esse?* **A7** *Esse, eu acho que é, LAL* **Pesquisador** *Calma, vamos verificar. Quais são as medidas que você tem nesse aqui (carta de congruência)?* **A5** *Nela não tem lado não, é ângulo, ângulo, ângulo* **A7** *30, 115 e 35* **Pesquisador** *É isso que eu tava querendo te chamar atenção. Aqui só tem 3 ângulos. Existe algum caso de congruência com 3 ângulos?* **A7** *Como assim?* **Pesquisador** *Veja na folha*	Elaboração de conjecturas sobre a congruência de triângulos	Nesse trecho, o pesquisador destaca que as medidas dos três ângulos, ainda que sejam iguais, não são suficientes para se verificar a congruência entre dois triângulos. Apesar da explicação, as alunas insistem em considerar esse caso como válido no decorrer da atividade.	Por meio desse diálogo, observamos associações entre a fala de A5 e a habilidade do reconhecimento de padrões, pois a aluna percebe que em todos os casos de congruência é utilizada a medida de ao menos um lado.

	A7 *Não tem não* **Pesquisador** *Por esse motivo, você não pode ficar com essa carta. A informação das medidas dos 3 ângulos não é suficiente para garantir que esse triângulo é congruente ao de sua carta objetivo.* **A5** *Aí quando for AAA não pode?* **Pesquisador** *Isso* **A5** *E quando for LLL?* **Pesquisador** *Aí pode.*		Vale destacar que A5 ainda comenta "*Não tem lado não, é ângulo, ângulo, ângulo*", indicando que para aplicar-se os casos de congruência, seria necessário saber algumas medidas e se entre elas não houver, ao menos, a medida de um dos lados, não seria possível determinar se dois triângulos são congruentes. A ideia da aluna parece interessante, pois com a medida de um lado e de dois ângulos seria possível verificar a congruência por meio dos casos ALA ou LAAo.	
6	**A6** *Esse aqui tem dois coisa, aqui e aqui (ângulos de 40º e lados que medem 4 cm)*   **A5** *Tem algum diferente?* **A6** *Só esse de 3 cm* **A5** *Deve ser LAL* **A7** *Mas tem um dos lados que não é igual* **A5** *Ah, se aqui tivesse um 3,5...* **A6** *Ah, agora eu tô entendendo. Os 3 lados de cá sempre tem que ter aqui né? Pode ser em qualquer canto.*	Elaboração de conjecturas sobre a congruência de triângulos	Neste item, A6 nota que dois triângulos podem ser congruentes, mesmo quando um é resultante da rotação ou reflexão do outro. Logo depois, A7 destaca "*tem que ter a medida do lado*" ao conversar com suas colegas. Essa fala remete exatamente à conclusão que tecemos anteriormente a partir da fala de A5, apontando que para verificar-se a congruência entre dois triângulos, é necessário ter-se a medida de ao menos um dos lados, além dos ângulos. Entretanto, é importante destacar que tendo apenas as medidas dos lados, também é possível	Por meio deste diálogo, podemos destacar associações entre o pensamento de A7 e as habilidades de abstração e algoritmos, quando a aluna percebe que ao menos um dos lados do triângulo da carta objetivo deveria corresponder com outro da carta de congruência.

	(A6 se refere à posição do triângulo, que pode estar rotacionado ou refletido em relação ao outro, de modo que as medidas correspondentes apareçam em diferentes posições). **A7** *É, pode ser em qualquer canto, mas se tiver só os da ponta (ângulos) não vale, porque não tem a medida dos lados. Tem que ter a medida do lado. Tem que ter tipo dois ângulos e um lado igual.*		verificar a congruência, pelo caso LLL. Observe que nas figuras os dois triângulos possuem as medidas 40º e 4 cm em comum, porém não são congruentes, o que poderia ter sido notado visualmente pelas alunas, devido a diferença em seus formatos.	
7	*(A6 retira uma carta do monte)* **A6** *Aqui tem 20º e na minha não tem* **A7** *Pronto, aí você já vê e já descarta*	Elaboração de conjecturas sobre a congruência de triângulos	Nesse item, A6 percebe que se no triângulo de uma carta há um ângulo que não equivale a nenhum outro ângulo conhecido do de outra carta, esses triângulos não serão congruentes, sendo essa mais uma importante estratégia para a verificação da não congruência entre dois triângulos.	De maneira semelhante ao que foi destacado nos itens anteriores, para desenvolver essas estratégias de verificação rápida da não congruência entre triângulos, os alunos precisam utilizar habilidades associadas ao PC, como a abstração e os algoritmos.
8	**A7** *Ó, se tiver assim já não vale (AAA)* **A5** *Por quê?* **A7** *Por que não tem lado para comprovar*	Elaboração de conjecturas sobre a congruência de triângulos	Nesse momento, é possível perceber que A7 segue usando como uma regra a ideia de que ter apenas a medida dos ângulos não é suficiente para garantir que dois triângulos são congruentes. A mesma justifica que não tem a medida de nenhum lado, ideia advinda de descobertas anteriores.	Podemos notar neste diálogo que A7 segue utilizando suas ideias que funcionaram ao verificar a congruência de triângulos como regras. O conjunto de regras que essa aluna vem elaborando acaba por gerar uma espécie de algoritmo, seguido por ela ao verificar os triângulos. Além disso, na medida em que ela usa esses algoritmos, passa a abstrair ideias e características dos triângulos, focando apenas em seus

				aspectos relevantes.
9	**A7** *Ai, eu achei outra carta, professor, ó: 5,5 cm; 115º; 35 cm, tudo igual nelas duas*. **Pesquisador** *Que caso de congruência você usaria?* **A7** *Ângulo, ângulo, lado?* **Pesquisador** *Estudamos algum caso com esse nome?* **A7** *Então é ângulo, lado, ângulo?* **Pesquisador** *Lembra que as medidas têm que ser "vizinhas"?* **A7** *Ah*. **Pesquisador** *Mas tem um caso aí que talvez dê certo, tenta verificar aqui na folha*. **A7** *Deixa eu ver, então vai ser esse aqui LAAo*. **Pesquisador** *Me mostra aí onde é que estão as medidas correspondentes*. **A7** *Lado, ângulo, ângulo oposto (A7 aponta para cada uma das medidas correspondentes em cada triângulo)*. **Pesquisador** *Exato*.	Reconhecimento das características, elementos e propriedades dos triângulos	Nesse diálogo, A7 havia esquecido que os lados e ângulos devem ser adjacentes nos casos LAL e ALA.	Apesar de A7 ter suas ideias sobre como verificar a congruência, seu passo à passo possuía um equívoco, relacionado à verificação da adjacência dos lados e ângulos. Dessa forma, sua fala aponta associações com a habilidade de algoritmos, apesar do equívoco que destacamos.
10	**A7** *Professor, assim vale? Igual àquele que eu peguei né? (carta com variáveis nas medidas)*.  **Pesquisador** *Qual deve ser a medida de x nesse caso?* **A6** *Pode ser um valor para dar 80 ou para dar 60*. **A7** *É*. **Pesquisador** *Mas olha, esse ângulo aqui de 80 tá vizinho aos lados 3,5 e 2,6*. **A7** *Então tem que ser um valor para dar 60*. **Pesquisador** *É, tem que ser um valor que somado com 35 resulte em 60. Que valor teria de ser esse?* **A5** *30?* **Pesquisador** *35 + 30 dá quanto?*	Comparação, manipulação e medição de triângulos	Ao elaborar o jogo das congruências, levamos em consideração alguns detalhes que observamos na fase de análises preliminares. Ao consultar o livro didático da turma, e notamos que algumas atividades traziam associações entre Geometria e Álgebra, o que também era mencionado na literatura consultada. Por esse motivo, criamos cartas como a da figura ao lado, nas quais era necessário atribuir um valor a uma ou mais variáveis presentes nas medidas dos lados ou ângulos dos triângulos, para assim verificar se eles poderiam ser	Podemos destacar nas falas de A6 e A7 sua facilidade em realizar cálculos mentais para verificar qual deveria ser o valor da variável *x*. Essa facilidade mostra conexões com a habilidade de abstração que, conforme destacamos no quadro teórico sobre o PC, envolve o direcionamento da atenção à aspectos-chave de um sistema ou processo, permitindo um melhor entendimento de seu funcionamento. Com isso, na medida em que as alunas são capazes de descobrir o valor da variável *x* sem utilizar algoritmos,

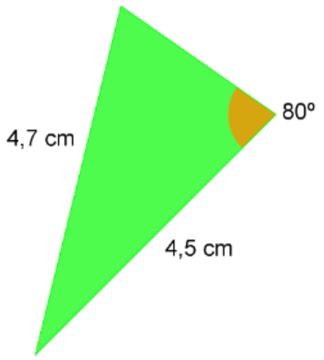
	A6 *Tem que ser 25.* **Pesquisador** *Exatamente, com isso teríamos ângulos correspondentes de mesma medida entre esse triângulo e o de sua carta objetivo. Que caso seria esse, A6?* **A6** *ALA.* **Pesquisador** *Isso.*		congruentes à uma carta objetivo. Destacamos a facilidade com a qual as alunas executam cálculos mentais para verificar o valor da variável, pois em outras atividades de álgebra, é comum alunos recorrerem a algoritmos escritos que nem sempre facilitam seu raciocínio.	ou caneta e papel, mostram um pouco sobre sua capacidade de abstração. Sem realizar isso, elas poderiam ter feito, por exemplo, a escrita de uma equação em um pedaço de papel, igualando a expressão 45 + x, com o valor do ângulo correspondente da carta objetivo, para descobrir o valor de x, o que levaria mais tempo.
11	(A6 pega uma carta e diz que ganhou) **Pesquisador** *A6, me mostra suas cartas, para que eu possa verificar, por favor.* ... **Pesquisador** *A6, você não ganhou ainda.* **A6** *Por quê?* **Pesquisador** *Quais são as informações que a gente tem aqui?* **A6** *Lado, Lado, Ângulo oposto.* **Pesquisador** *Existe esse caso? Lado, Lado, Ângulo oposto?*  **A5** *Aham.* **Pesquisador** *Verifiquem na folha* (A7 verifica). **A6** *Existe, é o último.* **Pesquisador** *Vejam com calma, Lado, Lado, ângulo oposto.* **A5** *NÃO.* **A7** *Tem mesmo não. Existe Lado, ângulo, ângulo oposto.* **Pesquisador** *Mas aqui não tá nessa ordem. Aqui está separado.* **A7** *Ah, esse lado teria que estar aqui, ou esse ângulo de 60 aqui* (um dos	Elaboração de conjecturas sobre a congruência de triângulos	Notamos aqui que, apesar de as alunas já terem memorizado os casos de congruência, as siglas utilizadas para representar cada um ainda estavam a causar dúvidas, levando-as a verificar que dois triângulos seriam congruentes por meio de casos de congruência que não existem, como é o caso do LLAo. Diante dessa situação, ressaltamos a importância da visualização de exemplos dinâmicos de cada caso de congruência, para que os alunos consigam compreender características desses casos, que nem sempre conseguem ser expressas de maneira textual, e muito menos por meio de abreviações.	Neste item, destacamos a habilidade de A7 em imaginar modificações nos triângulos, ou na forma pela qual as suas medidas são apresentadas, sendo esta uma importante forma de abstração, na medida em que ela realiza com segurança manipulações na figura, tendo em mente as propriedades que se alteram ou que se mantêm.

	lados deveria estar adjacente ao ângulo de 60, ou o ângulo de 60 deveria estar no vértice onde os dois lados com as medidas informadas se encontram). **Pesquisador** *Nesse caso, A6 não ganhou ainda.* **A7** *Pode continuar o jogo?* **Pesquisador** *Pode.*			

APÊNDICE L – RECORTES DE ALGUNS DIÁLOGOS REALIZADOS PELO SEGUNDO GRUPO

Grupo 2 (A10, A11 e A13)				
Nº	Diálogo	Categoria	Comentário	Conexões com o PC
1	**A10** *Professor, me ajuda aqui. Se nesse tem 30º e 30º e nessa outra (carta objetivo) só tem 30º. Eles são iguais?* **Pesquisador** *Tem alguma medida diferente?* **A10** *Eu acho que não.* **Pesquisador** *Qual a medida desse lado?* **A10** *4,5* **Pesquisador** *Tem algum lado* nessa outra carta *com 4,5? (carta objetivo).* **A10** *Não, só tem 4.* **A10** *Ah então não serve, porque são diferentes, não dá pra usar LLL..*	Elaboração de conjecturas sobre a congruência de triângulos	Nesse trecho, A10 questiona se o fato de os triângulos possuírem algumas medidas em comum, seria suficiente para provar a congruência ente eles. A partir disso, é apresentada para ela a ideia de que se um triângulo tiver uma medida que não se corresponda com nenhuma medida do triângulo da carta objetivo, os triângulos não serão congruentes.	Por meio da ideia apresentada o aluno foi capaz de reconhecer padrões entre os triângulos e verificar quando não é possível garantir a congruência entre um das cartas de congruência com outro de uma carta objetivo, pelo fato de possuírem ao menos uma medida incomum.
2	**A13** Tem que ser 3 coisa né professor?	Elaboração de conjecturas sobre a congruência de triângulos	Aqui o aluno se refere que todos os casos de congruência envolvem 3 elementos. Verificamos que esta pergunta revela, na verdade, uma estratégia adotada por ele, visto que se um triângulo de uma carta de congruência que possui três elementos em comum com o triângulo de uma carta objetivo, eles provavelmente serão congruentes, a depender da disposição dos elementos e desde que não sejam apenas ângulos. Enquanto jogava, A13 descartava as cartas que possuíam triângulos com menos de três elementos em comum com o da carta sua.	A13 apresenta uma importante percepção sobre os casos de congruência, o que acabou lhe servindo como uma ótima estratégia de jogo. Essa percepção está relacionada à habilidade de reconhecer padrões, na medida em que ele foi capaz de perceber que todos os casos de congruência envolvem três medidas e, também, ao observar que todas as cartas de congruência do jogo apresentam apenas três elementos. Com isso ele passou também a abstrair as informações das cartas com uma maior rapidez, analisando apenas àquelas que possuíam triângulos com três medidas em

				comum com o da sua carta objetivo. Assim, detectamos neste trecho associações com o reconhecimento de padrões, abstração e algoritmos.
3	**A13** *Professor, quando tem o x, faz o quê?* **Pesquisador** *Me mostra aqui, vamos ver com as colegas.* **A13** *Mas tipo elas não se parecem, o formato é diferente.* **Pesquisador** *Verdade. Se desse certo, você iria verificar se há algum valor para x que torne o resultado da operação indicada nesse lado igual à medida de um dos lados de sua carta objetivo.*	Elaboração de conjecturas sobre a congruência de triângulos	Neste diálogo, apesar das dúvidas apresentadas por A13 sobre como proceder com as cartas que possuem variáveis em suas medidas, fica evidente mais uma estratégia usada por ele: verificar a semelhança visual dos formatos dos triângulos presentes nas cartas.	Quando A13 mostra que está a observar a semelhança visual dos triângulos, sua fala aponta associações com a habilidade de abstração, pois foi capaz de focar nos detalhes mais fáceis para perceber incoerências.
4	**A10** *Eu acho que esse é congruente.* **Pesquisador** *Qual o caso?* ... **Pesquisador** *Vamos ver aqui na folha. O primeiro caso é LLL, tem que ter 3 lados de medidas iguais.* **A10** *Não é.* **Pesquisador** *Vamos lá, esse lado tem 3,2, aqui tem quanto?* **A10** *3,2* **Pesquisador** *Já tem um igual né. Vamos ver mais, aqui tem 4,5* **A10** *E o outro também.* **Pesquisador** *Veja que temos 3 lados com medidas iguais, dá certo nesse primeiro caso?* **A10** *Dá.* **Pesquisador** *Então você pode ficar com a carta, porque é congruente.*	Reconhecimento das características, elementos e propriedades dos triângulos	Neste momento, apesar de A10 supor inicialmente que os triângulos eram congruentes, a mesma ainda não sabia identificar por meio de qual caso de congruência seria possível garantir essa relação. Com a intervenção do pesquisador, a mesma passou a melhor observar as medidas e verificar que o caso de congruência adequado seria LLL.	Não verificamos nenhuma conexão explícita das habilidades do PC com as ações realizadas pela aluna neste diálogo.
5	**A13** Ganhei de novo, professor! **Pesquisador** Deixe eu ver suas cartas ... **Pesquisador** Calma, que caso de congruência seria esse aqui? **A13** Oxente professor, aqui ó. 4,7 cm; 4,5 cm e 80 graus.	Elaboração de conjecturas sobre a congruência de triângulos	A dificuldade de A13 em relação à interpretação de que os lados e ângulos devem ser adjacentes nos casos LAL e ALA ainda persistia. Nesse caso, optamos por explica-lo o	Por meio desse diálogo, ressaltamos que nem sempre os padrões reconhecidos ou abstrações realizadas implicam em pensamentos coerentes com o

	 **Pesquisador** Me diz o nome desse caso, olhando pela folha **A13** Vai ser... **A10** Lado, lado e ângulo **A13** É, lado, ângulo, lado **Pesquisador** LAL? Olha só, para utilizar o caso LAL, teríamos que ter medidas adjacentes, ou seja, juntas **A13** E é como essa daí? **Pesquisador** Esse carta aqui é incongruente. Porque não tem como você garantir por meio de algum caso de congruência que esse triângulo (carta de congruência) é congruente a esse (carta objetivo). Nesse caso, você devolve ao monte.		motivo dessa necessidade.	conteúdo em estudo. Dessa forma, nem sempre quando os alunos conseguem aplicar as habilidades associadas ao PC para resolver uma atividade, quer dizer que as suas respostas estarão corretas. Apesar disso, destacamos a importância dessa forma de pensar no processo de resolução de atividades.
6	**A10** *Pronto professor, ganhei já.* **Pesquisador** *Vamos verificar... Essa carta aqui não é congruente.* **A10** *Sério?* **Pesquisador** *É porque não é possível garantir a congruência de dois triângulos verificando-se apenas as medidas de seus lados. Sempre verifiquem aqui na folha, certo?* **A10** *Mas por quê?* **Pesquisador** *Deixa eu explicar o porquê, vejam aqui no quadro. Esses dois triângulos aqui possuem 3 ângulos iguais, porém possuem lados de medidas diferentes. Dessa forma, não tem como você garantir que esses dois triângulos possuem medidas iguais. Então o jogo deve continuar.*	Elaboração de conjecturas sobre a congruência de triângulos	Assim como a maioria dos alunos, por existir o caso LLL, A10 acaba por confundir as siglas dos casos de congruência, achando que AAA também seria um. Para esclarecê-la sobre o motivo de AAA não ser um caso de congruência é feita uma ilustração na lousa de dois triângulos isósceles com as mesmas medidas em seus ângulos correspondentes, porém com lados de medidas maiores.	Nesse caso, nota-se que sozinha, a habilidade de reconhecer padrões não é suficiente para detectar os casos de congruência, especialmente se os alunos não tiverem ciência dos quatro casos possíveis. Acreditamos que a estratégia desenvolvida anteriormente pelo grupo, ao verificar a quantidade de números fornecida e se esses números disponibilizados na carta de congruência também se fazem presentes na carta objetivo pode também ter sido uma das causas desse erro. Nesse caso, os alunos precisariam

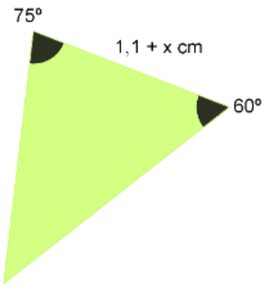
				seguir um passo a passo mais completo, que inicie com a verificação dos das medidas e formatos dos triângulos, e siga com a verificação dos casos de congruência. Fazendo uma ponte com a habilidade de algoritmos, eles precisaram de um algoritmo mais completo, que não os levassem a tal erro. Identificamos também associações com a habilidade de abstração, devido à sua característica de verificar os aspectos relevantes em uma situação para resolvê-la, nesse caso, as medidas das figuras presentes nas duas cartas.
7	**A10** Professor, e agora? Eu ganhei? **Pesquisador** Vamos ver... Por que você acha essa carta aqui é congruente? **A10** Porque tem aqui e aqui **Pesquisador** Verificando de acordo com a folha, esse triângulo seria congruente ao de sua carta objetivo? **A10** *Ei* A11, tu acha que não é não? **A11** Eu esqueci o nome, deve ser ângulo, ângulo, ângulo. **Pesquisador** Tá certo? **A10** Sei lá **Pesquisador** O que foi que eu falei sobre esse caso? **A10** Eita, está errado **Pesquisador** Isso, não tem como garantir que esses lados têm a mesma medida. Lembra do desenho que fiz ali no quadro, A11? **A11** Eita, é mesmo. **Pesquisador** Quando vocês verem esse caso AAA, já descartam porque não dá para verificar por nenhum caso de congruência.	Elaboração de conjecturas sobre a congruência de triângulos	Apesar da explicação feita anteriormente, A10 e A11 seguiam com dúvidas em relação às cartas onde eram fornecidas apenas as medidas dos ângulos dos triângulos. Após essa segunda intervenção, elas passam a descartar essas cartas.	Podemos destacar novamente que o ato de reconhecer os números presentes nas cartas não é suficiente para verificar a congruência entre os triângulos das cartas, sendo necessário um passo a passo mais completo que levasse os alunos a verificarem as medidas que eram fornecidas. Nesse caso, encontramos associações com as habilidades de algoritmos e abstração.

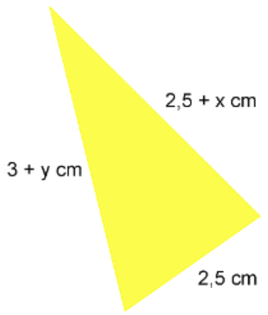
APÊNDICE M – RECORTES DE ALGUNS DIÁLOGOS REALIZADOS PELO TERCEIRO GRUPO

Grupo 3 (A1 e A2)				
Nº	Diálogo	Categoria	Comentário	Conexões com o PC
1	**A2** *Ei, professor. Nesses daqui só tem um lado com tamanho.* **Pesquisador** *Qual caso de congruência podemos usar?* **A2** *Acho que LAL.* **Pesquisador** *Vamos fazer assim, coloca aqui em cima para que A1 também possa ver, e vamos observar com calma.* ... **Pesquisador** *Quais são as medidas conhecidas?* **A2** *Vintão.* **Pesquisador** *E as outras?* **A2** *40 e esse outro.* **Pesquisador** *Tem 120º no outro?* **A2** *Eita, tem não. Aí não é congruente né? Porque tipo tá diferente?* **Pesquisador** *Exato. Pela definição de congruência de triângulos, já sabemos que eles não são congruentes.* **A2** *Com os lados dava também?* **Pesquisador** *Sim, se tiver um lado que não seja de mesma medida que nenhum outro lado de outro triângulo, não tem como ser congruente.*	Elaboração de conjecturas sobre a congruência de triângulos	Nesse trecho, destacamos que A2 percebe que se houverem medidas no triângulo da carta de congruência que não se encontram no da carta objetivo (que possui todas as suas medidas de lados e ângulos informadas), seria impossível que eles fossem congruentes.	Verificamos aqui que ao perceber que em todas as cartas candidatas a serem congruentes à carta objetivo, as medidas dos triângulos devem ser iguais, A2 passa a verificar mais rapidamente suas cartas. Dessa forma, o aluno tem em mãos um a passo a passo aplicável à verificação da congruência todas as cartas do jogo. Ainda que possa ser associado à habilidade de algoritmos, seriam necessários mais passos para uma verificação eficaz da congruência entre os triângulos. Além disso, destacamos que o aluno utiliza habilidades associadas à abstração ao focar nos aspectos relevantes para verificar a congruência das figuras, verificando de imediato se as medidas condizem.
2	**A2** *Olhaaa.* (A2 fica rotacionando as cartas para entender se possuem formatos parecidos). **A2** *1,2 cm; 3,5 cm; 3cm. EITA PROFESSOR, deu certo demais, olha.* **Pesquisador** *Isso, você achou uma pelo caso LLL.*	Comparação, manipulação e medição de triângulos	Destacamos aqui a ação de A2 ao rotacionar as cartas, para verificar se os triângulos presentes nelas possuem formatos parecidos. Acreditamos que esse seria um reflexo da atividade anterior, onde a turma podia manipular os triângulos, encostando seus lados, ou sobrepondo-os. Ao	Acreditamos que a ação de A2 apresenta conexões com a habilidade de algoritmos, quando o aluno inicia verificando o formato dos triângulos das cartas, para depois observar suas medidas e identificar se é possível garantir a congruência desses triângulos, um procedimento que pode

			verificar que as cartas possuem formatos parecidos, A2 parte para a verificação de suas medidas e percebe que os três pares de lados correspondentes possuem as mesmas medidas.	ser aplicado a qualquer par de cartas do jogo.
3	**A2** *Peguei uma aqui quase igual. Olha, 57º; 1,2 cm... Eitaaaa, é ângulo, lado e ângulo, notei agora.*	Elaboração de conjecturas sobre a congruência de triângulos	A esse ponto, A2 imediatamente já direcionando sua atenção às medidas dos triângulos para verificar se elas possibilitam a associação com algum caso de congruência.	Ao observar apenas os aspectos relevantes dos triângulos para a verificação de sua congruência por meio dos casos que ele memorizou, A2 utiliza habilidades que podem ser associadas à abstração.
4	(A1 também usa a estratégia de girar as cartas e coloca-las lado a lado) **A1** *Aqui dá certo, ajuda aqui.* **A2** *Olha, ângulo, lado, ângulo.* **A1** *Eita é mesmo ó, tenho que ver essas coisas.*	Comparação, manipulação e medição de triângulos	A1 utiliza uma estratégia semelhante à de A2 no início do jogo, aproximando as cartas e realizando rotações, para que os triângulos ficassem em posições semelhantes, embora ainda tenha dificuldades em relação aos casos de congruência	Percebemos neste diálogo que A2 utiliza habilidades associadas à abstração para auxiliar seu colega indo diretamente nas medidas e identificando o caso de congruência
5	**A2** *A minha eu vejo logo, porque é bem pequenina. A pessoa só faz olhar assim e pelo tamanho já sabe se é ou não.*	Elaboração de conjecturas sobre a congruência de triângulos	A2 destaca que pelo formato do triângulo presente em sua carta, já é possível descartar a grande maioria das cartas incongruentes a ela no jogo, sendo essa uma estratégia utilizada por ele para jogar com mais rapidez	Novamente, podemos associar essa ação de A2 com a habilidade de abstração, visto que ele consegue focar nas características relevantes dos triângulos presentes nas cartas, descartando rapidamente àquelas que possuem triângulos que não se assemelham ao da sua carta objetivo. Além disso, podemos também associar à habilidade de algoritmos, considerando que nesse momento ele inicia a sua verificação observando os

				formatos dos triângulos.
6	**A1** Eu ganhei. **A2** Mentira. **A1** Olha aí, eu ganhei. (A1 mostra suas cartas e vai girando-as para que os triângulos fiquem na mesma posição do de sua carta objetivo, de modo a facilitar a visualização do colega) **A1** Professor! **Pesquisador** Vamos verificar se ganhou mesmo. 30º e 30º; 35º e 35º; 3 cm e 3 cm. Que caso de congruência seria esse? **A1** Eita, esse é... ALA. **Pesquisador** *Mas v*eja que não dá certo, porque o lado não é adjacente aos dois ângulos. **A1** Então é LAL. **A2** Teria que ter um lado, um ângulo e um lado. Aí não tem. **Pesquisador** Exato. **A2** Eu acho que é LAAo. **A1** Isso, é mesmo. **Pesquisador** Vamos ver aqui, temos um lado, um ângulo adjacente e... **A2** Ângulo oposto. **Pesquisador** Isso mesmo. **A2** Olha aí, tá certo.	Comparação, manipulação e medição de triângulos	Neste diálogo, é importante destacar a colaboração entre A1 e A2, que assim como as demais equipes, eles competiam entre si, mas também se ajudavam. Além disso, A2 mostra sua compreensão sobre os casos de congruência, quando fala para A1 que não é o caso LAL e que poderia ser LAAo.	Nesse caso, ficam evidentes as habilidades de A2 em reconhecer os casos de congruência, sendo capaz de abstrair com facilidade as características relevantes em cada triângulo para verificar sua congruência com os das cartas objetivo.
7	**A2** *Olha.. 45º... Eita. professor, vem cá.* **Pesquisador** *Deixa eu ver aqui. Essa carta tá errada (AAA)* **A2** *Tá não.* **Pesquisador** *Então qual é o caso de congruência?* **A2** *É... ALA.* **Pesquisador** *E onde está a medida do lado?* **A2** *Não tem.* **Pesquisador** *Só tem 3 ângulos* **A2** *Oxente professor, mas se é igual?* **Pesquisador** *Não existe um caso de congruência que garanta que esses triângulos possuam as mesmas medidas, veja na folha. Veja que eu poderia manter a medida desses ângulos e alterar o tamanho dos lados. O formato dos triângulos seria o mesmo, mas as medidas dos lados não* ***A2*** *Nossa, é mesmo, você tinha mostrado ali.*	Elaboração de conjecturas sobre a congruência de triângulos	Nesse trecho, os alunos podem ter se guiado apenas pelos elementos em comum entre o triângulo da carta de congruência e o triângulo da carta objetivo, como se as iniciais desses elementos fossem suficientes para garantir a congruência entre os dois triângulos.	De maneira semelhante ao que ocorreu com A10 (Apêndice L, linha 10), somente a habilidade de reconhecer medidas em comum entre as figuras não é suficiente para detectar os casos de congruência, especialmente se os alunos não tiverem ciência dos quatro casos possíveis. Nesse caso, encontramos associações com as habilidades de algoritmos e abstração, apesar da ressalva sobre a necessidade de entender e compreender cada caso de congruência.

8	***A2** Ô Professor, isso aqui é o que, pelo amor de Deus? 1,1 + x cm?*  **Pesquisador** *Aqui mede 3,2 (carta objetivo). Para que nessa outra carta, a medida também seja 3,2, você tem que somar 1,1 com quanto?* **A2** *Teria que somar 2,1* **Pesquisador** *Exatamente. Agora que você sabe a medida, qual caso de congruência pode garantir que esses dois triângulos são congruentes?* **A2** *Deixa eu ver aqui... É ALA?* **Pesquisador** *Muito bem, você encontrou mais uma carta congruente.* **A2** *Então eu ganhei. Veja aí, olha.* **Pesquisador** *Verdade, você ganhou.*	Comparação, manipulação e medição de triângulos	Nos grupos anteriores, foram poucos os alunos que solicitaram ajuda para entender essas cartas que possuíam expressões com variáveis nas medidas dos lados dos triângulos. Acreditamos que isso pode ter ocorrido por dois motivos: ou os alunos descartavam imediatamente as cartas, por verificar que não haviam medidas em comum, ou descartavam por não saber o que fazer. No caso de A2 e A1, sempre que se deparavam com essas cartas ou solicitavam ajuda ou discutiam entre si qual seria o valor da variável. Isso aponta que a dupla além de ter adquirido conhecimento sobre os casos de congruência, também foi capaz de trabalhar com as variáveis, igualando-as com as medidas dos lados correspondentes para descobrir seus valores.	O diálogo entre A2 e o pesquisador revelam a capacidade do A2 em realizar cálculos mentais para verificar qual deveria ser o valor da variável *x*. Percebe-se por meio dessa capacidade algumas conexões com a habilidade de abstração, na medida em que o aluno é capaz de descobrir o valor da variável *x* sem utilizar algoritmos usuais para se resolver equações do primeiro grau, ou também caneta e papel para realizar anotações ou operações. Isso revela um pouco sobre sua capacidade de abstração e de realizar algoritmos.
9	**A1** 75;60 e 45. Ô professor, vem cá... **Pesquisador** Oi **A1** Esse daqui dá errado porque só tem os ângulos lá né? **Pesquisador** A1, você entendeu o que eu falei? **A1** Sim, sim. É tudo igual, mas quem garante que os lados têm a mesma medida né? **Pesquisador** Exatamente	Elaboração de conjecturas sobre a congruência de triângulos	Nesse diálogo, A1 revela sua compreensão de que ter em mãos apenas as medidas dos pares de ângulos correspondentes de um triângulo não é suficiente para garantir que ele é congruente a outro	Nesse caso, encontramos associações com a habilidade de abstração.
10	(A2 pega uma carta e fica observando e girando para comparar o formato de seu triângulo com o de sua carta	Comparação, manipulação e medição de triângulos	Nesse diálogo, A2 mostra mais uma vez a sua compreensão quanto ao uso das	De maneira semelhante ao que relatamos na linha 9 desse quadro, A2 apresenta um

	objetivo) **A2** Ei Professor, de novo ó, aquela carta lá. **Pesquisador** AAA? **A2** Não, acho que LLL. **Pesquisador** Tem algum X? **A2** É sim.  **Pesquisador** Então tem que dizer o valor de x. **A2** Então eu já ganhei né (a carta)? **A1** Não, nem venha, tem que me dizer. Responda aí, pra ficar 4,7 precisa de quanto? **A2** Pra ficar 4,7 precisa de 1,7 cm. Aqui pra ficar 4,5 precisa de 2 cm. E aqui (lado de 2,5cm) já é igual nas duas, então é LLL. **Pesquisador** Ok.		variáveis. Além disso, ele consegue imediatamente verificar, por meio das medidas fornecidas e pela comparação dos formatos das cartas que elas poderiam ser congruentes por meio do caso LLL.	raciocínio que pode ser associado à habilidade de abstração.
11	**Pesquisador** Me diz aí, quais são as estratégias que vocês estão usando para ganhar tanto? **A2** Eu vejo os lados. **A1** As regras também né, a gente vai lendo. **Pesquisador** Só as regras? Vocês também estão se orientando por cores ou algo do tipo? **A1** Sim, também, e olhando os lados. **A2** Não, mas eu fico olhando também os graus.	Elaboração de conjecturas sobre a congruência de triângulos	Observando a quantidade de vezes e rapidez que A2 estava vencendo o jogo, foi questionado a ele e ao seu colega quais estratégias estavam a utilizar. Basicamente, A2 diz que estava a verificar os lados e ângulos, verificando também as “regras”, que seriam os casos de congruência. Notamos que ao longo do jogo, A2 consultava poucas vezes as folhas com as descrições dos casos de congruência, porque ele foi o único aluno que, no início do jogo, parou para ler e relembrar todos os casos, apesar de termos feito essa revisão no início da aula. Essa atitude favoreceu	Observamos aqui que as estratégias mencionadas por A1 e A2 mostram relação com o reconhecimento de padrões, ao verificar quais triângulos se assemelham aos que possui em mãos, além da abstração, quando verificam características específicas dos triângulos para verificar a congruência. As ações dos alunos também apontam para algoritmos que cada um seguia para verificar se de fato os triângulos eram congruentes.

			grandemente seu desempenho no jogo, sendo ele um dos alunos com maior facilidade em identificar os triângulos congruentes.	