Universidade Estadual da Paraíba
Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

INTUIÇÃO MATEMÁTICA

Eudes Erionilde Souza Marinho

Trabalho de Conclusão de Curso

Orientador: Prof. Dr. Gustavo da Silva Araujo

Campina Grande - PB
Setembro/2019

Universidade Estadual da Paraíba
Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

INTUIÇÃO MATEMÁTICA

por

Eudes Erionilde Souza Marinho[†]

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UEPB, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

[†]Bolsista CAPES

M338i Marinho, Eudes Erionilde Souza.
Intuição Matemática [manuscrito] / Eudes Erionilde Souza Marinho. - 2019.
79 p. : il. colorido.
Digitado.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual da Paraíba, Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa , 2019.
"Orientação : Prof. Dr. Gustavo da Silva Araújo , Departamento de Matemática e Estatística - CCT."
1. Cardinalidade infinita. 2. Espaços vetoriais. 3. Lineabilidade. 4. Funções sobrejetivas. I. Título
21. ed. CDD 515.5

Elaborada por Giulianne M. Pereira - CRB - 15/714 BC/UEPB

Universidade Estadual da Paraíba
Centro de Ciências e Tecnologia
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

INTUIÇÃO MATEMÁTICA

por

Eudes Erionilde Souza Marinho

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UEPB, modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Aprovado em 19 de setembro de 2019 por:

Aldo Trajano Lourêdo
Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo - UEPB

Cícero A. da S. Filho
Prof. Dr. Cícero Alfredo da Silva Filho - UESC

Gustavo da Silva Araújo
Prof. Dr. Gustavo da Silva Araujo - UEPB
Orientador

Setembro/2019

Dedicatória

À minha família

Agradecimentos

Agradeço, inicialmente, a Deus.

Aos meus pais, Eider Luiz Marinho e Francisca Ivone de Souza Marinho.

A minha esposa, Thaynara, pela paciência, compreensão e incentivo.

As minhas irmãs, pelo apoio sempre recebido.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Gustavo da Silva Araujo, pelo conhecimento transmitido e dedicação.

Aos professores da banca examinadora, Dr. Aldo Trajano Lourêdo e Dr. Cícero Alfredo da Silva Filho.

Agradeço ao corpo docente do PROFMAT da UEPB de Campina Grande.

Aos meus colegas/amigos do PROFMAT, Ygor, Lairton; em especial, Idalice e Deodorio, esses que são grandes amigos.

As minhas colegas/amigos da Escola Dione Diniz, Daniele e Viviane.

Agradeço à Escola Estadual Professora Dione Diniz Oliveira Dias pelo apoio e pela liberação parcial de minha carga horária semanal para que eu pudesse me dedicar ao PROFMAT.

Por fim, agradeço à Sociedade Brasileira da Matemática (SBM) pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional e à CAPES pela concessão da bolsa.

Resumo

Neste trabalho, apresentamos diversos fatos matemáticos interessantes, os quais mostram que não devemos confiar somente na nossa intuição. Este tema está relacionado a uma área relativamente nova da Matemática, chamada Lineabilidade. Esta área busca a existência de grandes estruturas matemáticas, as quais são compostas de objetos com certas propriedades "patológicas". Após a explanação dos pré-requisitos e conceitos básicos sobre esta teoria, os quais abordam em sua amplitude a Cardinalidade e os Espaços vetoriais de dimensão finita e infinita, discutiu-se alguns exemplos e propriedades de Lineabilidade, nos espaços de sequências e funções. Essa pesquisa é de cunho bibliográfico e qualitativo, por buscar interpretar e analisar os fatos acontecidos durante os episódios fomentados nas investigações de autores que abordam a temática e por envolver questões relacionadas ao ensino da Matemática. Quanto aos instrumentos de levantamento de dados, foram usadas apenas o aporte de artigos e teses contidos em bases de dados, anotações e registros escritos próprios. Portanto, nosso estudo evidencia que o trabalho com aulas que inspirem a intuição e com atividades matemáticas voltadas para esses contextos favorecem novas oportunidades aos discentes ao desenvolverem e divulgarem as suas ideias matemáticas em sala de aula.

Palavras Chaves: Intuição matemática. Cardinalidade. Lineabilidade.

Abstract

In this paper, we present several interesting mathematical facts, which show that we should not rely solely on our intuition. This theme relates to a relatively new area of mathematics called Lineability. This area seeks the existence of large mathematical structures, which are composed of objects with certain "pathological" properties. After explaining the prerequisites and basic concepts about this theory, which deal in their breadth with Cardinality and Finite and Infinite Dimensional Vector Spaces, some examples and Lineability properties are discussed in sequence and functions spaces. This research is of bibliographic and qualitative nature, as it seeks to interpret and analyze the facts that happened during the episodes fomented in the investigations of authors that address the theme and for involving questions related to the teaching of mathematics. As for data collection instruments, we use only the contribution of articles and theses contained in databases, annotations and written records. Therefore, the study shows that working with intuition-inspiring classes and mathematical activities focused on this contexts provide new opportunities for students to develop and disseminate their mathematical ideas in the classroom.

Keywords: Mathematical intuition. Cardinality. Lineability.

Sumário

INTRODUÇÃO

Intuição Matemática é o ato de perceber, discernir ou pressentir coisas, objetivando chegar a uma conclusão sobre algo, independentemente de raciocínio ou de análise.

Para quem começa a estudar Matemática, um questionamento, aparentemente muito difícil de se responder, é suscitado: Como fazer para saber demonstrar qual é a próxima verdade que está ao meu alcance? Nessa perspectiva, a intuição matemática consiste um dos principais recursos na investigação, pois serve de guia da razão humana. Por exemplo, Euclides recorria a figuras para se inspirar em suas descobertas geométricas, bem como para guiar suas demonstrações.

Para Poincaré, "a intuição deve ter um lugar preponderante no ensino da Matemática. Sem ela, os espíritos ainda jovens não teriam meios de ascender ao entendimento da Matemática; não aprenderiam a gostar dela e vê-la-iam apenas como uma vã logomaquia. Além disso, sem a intuição nunca poderiam ser capazes de aplicar a Matemática".

Assim, a Lógica Matemática por si só não basta. A Intuição Matemática deve andar ao lado da lógica, quando estamos diante de algum problema; a intuição tem que conceder o seu papel de complemento, contrapeso ou antídoto da lógica.

Tanto a lógica como a intuição são necessárias ao progresso da ciência, ambas têm seu legítimo papel na criação Matemática. Lógicos e intuitivos realizaram e realizam feitos na Matemática que, talvez, outros não teriam alcançado êxito. Quem conseguiria mensurar o prejuízo científico matemático causado, caso Weierstrass[1] nada tivesse escrito, ou se Riemann[2] não tivesse existido?

Entretanto, é necessário tomar muito cuidado quando estamos diante de um determinado problema, e queremos chegar a alguma conclusão baseada no que nossa intuição diz. Poincaré já afirmava que não é possível obter rigor, nem mesmo certeza, com a intuição. Cada vez mais, percebemos que o rigor não poderia ser introduzido nos raciocínios sem que, em primeiro lugar, entrasse nas definições. Ora, durante muito tempo os objetos estudados pelos matemáticos estavam, em sua maior parte, mal definidos. Pensávamos conhecê-los, porque conseguíamos representá-los com o auxílio dos sentidos e da imaginação. No entanto, a imagem extraída desses objetos era grosseira, não havia uma ideia precisa sobre a qual o raciocínio pudesse incidir.

[1] matemático lógico analítico que viveu entre 1815 e 1897.

[2] matemático intuitivo que viveu entre 1826 e 1866.

Tendo em vista que a intuição, muitas vezes, tem um importante papel de guia para a verdade, considera-se a Intuição Matemática a primeira base de estratégia para resolver uma situação, aparentemente semelhante a outra já vista. Assim, é natural que algumas de nossas intuições, no contexto infinito, seja enganosa. Isso ocorre devido ao primeiro juízo dado sobre uma ideia, com base no que é conhecido e naquilo que já se tem experiência. Com aporte nesses embasamentos, apresentamos a seguir alguns exemplos simples que podem ilustrar tais colocações.

(1) Considere a soma de infinitas parcelas

$$S_1 = 1+2+3+4+5+\cdots.$$

Já é conhecido o processo de acréscimo e, portanto, é natural esperar que a soma S_1 cresça infinitamente. Nesse caso, é exatamente isso o que ocorre. Considere agora a soma

$$S_2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\cdots.$$

Intuitivamente, espera-se o mesmo comportamento da soma S_1 para a soma S_2. No entanto, a soma S_2 resulta 1 (série geométrica). Isso pode ser verificado em parte, com o auxílio de uma calculadora, aumentando, suficientemente, o número de parcelas.

(2) Um outro exemplo é o seguinte: uma lenda conta que um rei perguntou ao inventor do jogo de xadrez o que ele queria como recompensa pela invenção. E o inventor respondeu:

> *"*1 *grão de trigo pela primeira casa,* 2 *grãos pela segunda,* 4 *pela terceira,* 8 *pela quarta,* 16 *pela quinta, e assim por diante, sempre dobrando a quantidade a cada nova casa."*

Como o tabuleiro do xadrez tem 64 casas, o inventor pediu a soma dos primeiros termos da PG: $1,2,4,8,16,32,\ldots$, de razão $q = 2$. Da expressão

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

obtemos

$$S_{64} = 1 \cdot \frac{1-2^{64}}{1-2} = 2^{64}-1.$$

Fazendo esses cálculos, encontraremos o gigantesco número de vinte algarismos:

$$18.446.744.073.709.551.615.$$

Para cultivar tal quantidade de trigo, o rei precisaria de 16 milhões de planetas iguais à Terra.

A Intuição Matemática pode ser estimulada, em um primeiro estágio, por experiências, atividades e manipulações de objetos, assim como por traços no papel e abstrações, em um segundo. Entretanto, deve-se sempre reforçar que a intuição é um instrumento da "invenção", e que somente a lógica é que nos fornece a certeza.

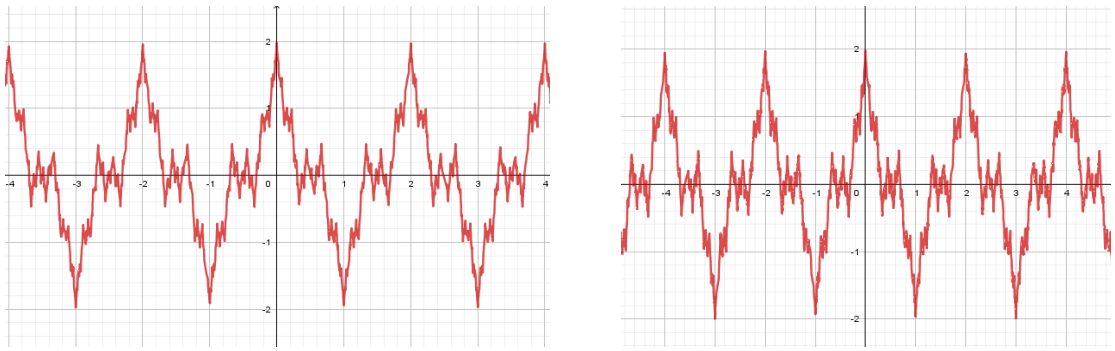
Portanto, o objetivo desse trabalho é apresentar um tema relativamente novo na Matemática, chamado Lineabilidade, que está diretamente relacionado ao que foi discutido acima. Esse tema conecta a Análise e a Álgebra, e tem atraído, ultimamente, a atenção de muitos autores. Grosseiramente falando, chamamos de Lineabilidade a existência de grandes estruturas matemáticas, compostas de objetos com certas propriedades "especiais" (algumas vezes chamadas de propriedades "patológicas").

Os famosos "monstros de Weierstrass" são exemplos clássicos dessa teoria, isto é, sempre que imaginamos uma função contínua $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, muito provavelmente, pensamos em alguma função que, não somente seja contínua, mas também que possa ser diferenciável em muitos pontos $\mathbb{R}$. Entretanto, em 1872, K. Weierstrass construiu uma função contínua que é não-diferenciável em todo ponto do seu domínio. A função: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(3^n \pi x)}{2^n}$$

goza desta propriedade, isto é, é contínua e não-diferenciável em todo ponto de $\mathbb{R}$ (ver Figura 1).

Figura 1: As figuras abaixo representam somas parciais da série acima. A esquerda temos $n = 10$ e $f(x) \approx \frac{\cos(3^0 \pi x)}{2^0} + \cdots + \frac{\cos(3^{10} \pi x)}{2^{10}}$; a direita temos $n = 20$ e $f(x) \approx \frac{\cos(3^0 \pi x)}{2^0} + \cdots + \frac{\cos(3^{20} \pi x)}{2^{30}}$.



Fonte: Produção própria

Funções desse tipo, atualmente, são conhecidas como monstros de Weierstrass. O aparente choque da comunidade Matemática, quando Weierstrass exibiu tal função, ocorreu pelo pensamento geral compartilhado pela maioria dos matemáticos da época. Uma função contínua deve ser diferenciável em um conjunto significante de pontos (até mesmo A. Ampère compartilhava desse pensamento e tentou dar uma justificativa teórica para isto).

Pode-se pensar que, uma vez que um objeto dessa natureza tenha sido encontrado, não há a possibilidade de existir muitos outros. De imediato nos vem a seguinte pergunta: Quantos monstros de Weierstrass existem? Ao contrário do que diz nossa intuição, existem *muitos* objetos dessa natureza. Mais precisamente, em 1966, V. Gurariy mostrou que existe um espaço vetorial de dimensão infinita, onde toda função não-nula deste espaço é contínua e não-diferenciável em todo lugar de $\mathbb{R}$.

No decorrer da nossa caminhada como docente, é perceptível que alguns conteúdos apresentam certas dificuldades de assimilação pelos alunos, dentre estes conteúdo, pode-se destacar a componente curricular de Matemática, cuja temática é alvo de discussões em diversas pesquisas que envolvem o ensino dessa disciplina. Diante dessa incessante preocupação, este trabalho sugere, como um de seus objetivos, analisar os significados produzidos pelos alunos a partir da intuição matemática em aulas que envolvem o raciocínio lógico na resolução de situações problemas.

Essa pesquisa é, portanto, de cunho bibliográfico e qualitativo, por buscar interpretar e analisar os fatos acontecidos durante os episódios fomentados nas investigações de autores que abordam a temática e por envolver questões relacionadas ao ensino da Matemática. Quanto aos instrumentos de levantamento de dados, foram usadas apenas o aporte de artigos e teses contidos em bases de dados, anotações e registros escritos próprios.

A presente Dissertação encontra-se organizada em capítulos, que abordam temas relevantes para o entendimento dessa pesquisa. Inicialmente, antes da apresentação dos mesmos, descrevemos essa pequena introdução que aborda a importância desse estudo para a Matemática.

Nos capítulos 1 e 2, explanaremos todos os pré-requisitos para o estudo de Lineabilidade. Em sequência, no Capítulo 3, daremos ênfase a intuição, bem como aos conceitos sobre teoria da Lineabilidade, discutindo alguns exemplos recentes e suas propriedades nos espaços de sequências e funções.

Finalizamos o trabalho de pesquisa tecendo algumas considerações acerca da importância que esse estudo proporcionou ao longo da caminhada, a partir dos resultados e das análises realizadas. Também apresentamos, ao final desse trabalho, as Referências Bibliográficas que embasaram a pesquisa.

Capítulo 1

NÚMEROS CARDINAIS

Este capítulo foi elaborada a partir das referências bibliográficas [7, 11, 12, 13, 14].

1.1 CARDINALIDADE

No final do século XIX, apareceu a necessidade de compreender melhor os conjuntos infinitos, motivada pelo estudo de funções integráveis: Sabemos que se uma função limitada tem uma quantidade finita de descontinuidades, ela é integrável. E se a quantidade de descontinuidades for infinita? Em alguns casos, a função ainda é integrável, em outros, não!

"Existe, portanto, mais de um tipo de infinito?"

A curiosidade de entender em quais situações a função é integrável ou não é que levou a esta pergunta. Existem, em certo sentido, diferentes tipos de infinitos!

Na pré-história, mesmo antes de conhecer os números ou a escrita, o homem já empregava o processo de contagem. Esse processo consistia basicamente em controlar uma quantidade por meio da comparação com objetos de referência, que em geral eram pequenas pedras ou marcações na rocha, na madeira ou em outros materiais. Em termos modernos, isto corresponde a estabelecer uma correspondência um a um, isto é, uma bijeção entre dois conjuntos. Assim, intuitivamente, percebemos que dois conjuntos têm o mesmo número de elementos se, e somente se, existir uma bijeção entre eles. De fato, a ideia de bijeção é usada para enunciar a própria definição matemática de cardinalidade (ou números de elementos) de um conjunto.

Definição 1.1 *Dois conjuntos A e B são equipotentes se existir uma função bijetora entre eles.*

Notação: Usaremos a notação $A \sim B$ para indicar que A e B são equipotentes, isto é,

$$A \sim B \quad \Leftrightarrow \quad \exists \ f : A \to B \quad \text{bijetiva.}$$

Proposição 1.1 *Dados os conjuntos A, B, e C.*

i) $A \sim A$;

ii) $A \sim B \Rightarrow B \sim A$;

iii) $A \sim B$ *e* $B \sim C \Rightarrow A \sim C$.

Demonstração. Seja f a função definida por $id : A \to A$, identidade, observe que para cada $f(a) \in A$, temos $a \in A$ e para cada $a_1 \neq a_2$ em A implicará $f(a_1) \neq f(a_2)$, portanto, é uma função bijetiva e, assim, $A \sim A$. Se $A \sim B$, existe uma função bijetiva $g : A \to B$ que admite inversa $g^{-1} : B \to A$, também bijetiva. Logo, $B \sim A$. Se $A \sim B$ e $B \sim C$, então existem funções $g : A \to B$ e $h : B \to C$ bijetivas. A composta de $(h \circ g) : A \to C$ é também bijetiva e assim $A \sim C$. □

A definição de cardinalidade de conjuntos provém do conceito de equipotência, que estão associados à teoria dos conjuntos, pois ao passo que o primeiro indica a quantidade de elementos do conjunto, o segundo, compara, de forma rigorosa, o tamanho destes. A partir dessa constatação, podemos afirmar que os conjuntos finitos são observados pela convicção intuitiva, uma vez que esses são facilmente contados, o que não se aplica para os conjuntos infinitos, pois a quantidade de elementos, neste caso, é bastaste surpreendente.

Definição 1.2 *Para cada conjunto A, vamos associar um elemento x que chamamos de número cardinal do conjunto A, o qual denotaremos por $|A|$. Dois conjuntos A e B são equipotentes se $|A| = |B|$. Neste caso, diremos que os conjuntos A e B têm o mesmo número cardinal, ou seja, os dois conjuntos têm o mesmo número de elementos.*

Cantor mostrou que não existe uma função bijetiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, ou seja, apesar de serem conjuntos infinitos, $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$ não possuem o mesmo número de elementos. Como a função identidade $Id : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é claramente injetiva, a cardinalidade de $\mathbb{N}$ é "menor" que a cardinalidade de $\mathbb{R}$.

Isto nos motiva a dar a seguinte definição. Para analisar a quantidade de elementos em determinados conjuntos, definiremos uma relação de ordem de cardinalidades, assim poderemos afirmar que um determinado conjunto tem mais ou menos elementos do que outro.

Definição 1.3 *Dados dois conjuntos A e B, a cardinalidade de A é menor ou igual que a cardinalidade de B quando existe um $C \subseteq B$ tal que C é equipotente a A, ou seja:*

$$|A| \leq |B| \Leftrightarrow \textit{existe um } C \subseteq B \textit{ tal que } A \sim C.$$

Para o caso que $|A| \geq |B|$ e que a relação $\geq$ é a relação inversa de $\leq$. Naturalmente, se $|B| \leq |A|$ e B não é equipotente a A, então $|B|$ é menor do que $|A|$ e escreve-se $|B| < |A|$ ou pode ser $|A| > |B|$. Isto significa que $|A|$ tem uma quantidade maior de elementos do que $|B|$.

Um resultado muito importante nesta teoria, apesar de bastante simples e intuitivo, é o Teorema de Cantor-Schroder-Bernstein.

Teorema 1.2 (Cantor-Schroder-Bernstein) *Dados dois conjuntos A e B, se* $|A| \leq |B|$ *e também* $|B| \leq |A|$, *então* $|A| = |B| \to A \sim B$.

Demonstração. Queremos mostrar que existem injeções $f : A \to B$ e $g : B \to A$, então existe uma bijeção $\varphi : A \to B$. Com efeito, tomando as injeções $f : A \to B$ e $g : B \to A$, tem-se que $f^* : A \to f(A)$, em que $f^*(x) = f(x)$, é uma bijeção entre A e $f(A) \subset B$. Logo $(f^* \circ g) : B \to f(A)$ é uma injeção. Como $f(A) \subset B$, segue que $|f(A)| = |B|$, ou, em outras palavras, existe uma bijeção $h : f(A) \to B$. Note, então, que $\varphi = (h \circ f^*) : A \to B$ é composição de bijeções e, portanto, bijeção. □

Uma primeira aplicação do resultado acima é o seguinte teorema:

Teorema 1.3 (Sanduíche de Cardinais) *Sejam B, C e D conjuntos. Se* $D \subseteq C \subseteq B$ *e* $D \sim B$, *então* $D \sim C \sim B$.

Demonstração. Como $D \sim B$ existe uma bijeção $f : B \to D$. Como $D \subseteq C$, então $f : C \to D$ é injetiva, ou seja, $|B| \leq |C|$. Como $C \subseteq B$, segue-se que $|C| \leq |B|$. Logo, pelo Teorema de Cantor-Schroder-Bernstein, temos que $C \sim D$ e $D \sim C$. Portanto, $D \sim C \sim B$. □

A seguir, para motivar nosso próximo passo, iremos definir conjuntos enumeráveis e falaremos um pouco sobre um argumento importante desta teoria, chamado "método da diagonal de Cantor".

Definição 1.4 *Dizemos que um conjunto X é enumerável quando é finito ou quando existe uma bijeção* $f : \mathbb{N} \to X$. *No segundo caso, X diz-se infinito enumerável, e pondo* $x_1 = f(1), x_2 = f(2), \ldots, x_n = f(n), \ldots$, *temos* $X = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$. *Cada bijeção* $f : \mathbb{N} \to X$ *é chamada uma enumeração (dos elementos) de X.*

Em seu artigo escrito em 1891, Cantor considerou o conjunto T de todas as sequências infinitas de dígitos binários, isto é, consistindo apenas de zeros e uns. Ele começa com uma prova construtiva do seguinte teorema:

Teorema: Se s_1, s_2, ... , s_n, ... é qualquer enumeração dos elementos de T, então existe sempre um elemento s de T que não corresponde a nenhum s_n na enumeração.

Para provar isso, considere uma enumeração dos elementos arbitrários de T, por exemplo:

$$
\begin{aligned}
s_1 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots) \\
s_2 &= (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots) \\
s_3 &= (0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots) \\
s_4 &= (1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots) \\
s_5 &= (1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, \ldots) \\
s_6 &= (0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, \ldots) \\
s_7 &= (1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, \ldots) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Cantor construiu a sequência s escolhendo seu n-ésimo dígito como um complemento para o n-ésimo dígito de s_n, para cada n. No exemplo citado, isso resulta em:

$$s = (1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, \ldots).$$

Por construção, s difere de cada s_n, uma vez que seus n-ésimos dígitos diferem. Portanto, não é possível s ocorrer na enumeração.

Com base no resultado acima, Cantor, em seguida, usa um argumento indireto mostrando que o conjunto T não é enumerável. Ele assume por contradição que T é enumerável. Em seguida, (todos) os seus elementos podem ser escritos como uma enumeração $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$. Aplicando o teorema anterior a esta enumeração, poderíamos produzir uma sequência s não pertencente à enumeração. No entanto, s é um elemento de T e, portanto, deve estar na enumeração. Isto contradiz a suposição original, assim T deve ser não-enumerável.

Um outro exemplo interessante sobre esse conceito é o conhecido Paradoxo do Hotel Infinito de Hilbert. David Hilbert foi um grande entusiasta das descobertas de Cantor, chegando a afirmar que ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor criou para nós. De acordo com [11], para ilustrar o conceito de infinitude e enumerabilidade, Hilbert imaginou um hotel de infinitos quartos. O Hotel de Hilbert é um hotel que tem uma infinidade enumerável de quartos, este conceito está associado a essa ilustração, sendo estes numerados consecutivamente, com números naturais.

Num determinado dia, o hotel estava com todos os seus quartos ocupados, quando chegou um viajante. A recepcionista logo esclarece:

– Sinto muito, mas não há vagas.

Ouvindo isto, o gerente interveio:

– Podemos abrigar o cavalheiro, sim, senhora.

E a ordena:

– Transfira o hóspede do quarto 1 para o quarto 2, passe o do quarto 2 para o quarto 3 e assim por diante. Quem estiver no quarto n, mude para o quarto $n+1$. Isto manterá todos alojados e deixará disponível o quarto 1 para o recém-chegado.

Logo após, chegou um ônibus com 1000 passageiros, todos querendo hospedagem. A recepcionista tendo aprendido a lição, removeu o hóspede de cada quarto n para o quarto $n+1000$ e acolheu todos os passageiros do ônibus. Mas ficou sem saber o que fazer quando, horas depois, chegou um trem com um infinidade de passageiros (estes passageiros devem ser indexados por $\mathbb{N}$). Desesperada, apelou para o gerente que prontamente respondeu o problema dizendo:

– Passe cada hóspede do quarto n para o quarto $2n$. Isto deixará vagos todos os apartamentos de número ímpar, nos quais serão colocados os novos hóspedes.

– Pesando melhor: mude quem está no quarto n para o quarto $3n$. Os novos hóspedes, ponha-os no quarto de número $3n+2$. Deixando vagos os quartos de número $3n+1$. Assim, sobrarão ainda infinitos quartos vazios e, eu poderei ter sossego por algum tempo.

Neste capítulo, apresentaremos resultados importantes envolvendo conjunto finito e infinito, bem como conjuntos enumeráveis e não-numeráveis. Os resultados precedentes sobre números cardinais fornecem uma visão inicial, intuitiva, porém incompleta do conceito de cardinais. A principal referência para os resultados apresentados neste capítulo é [11].

1.1.1 Conjuntos enumeráveis

Faremos a seguir um estudo mais detalhado sobre conjuntos enumeráveis, os quais já foram definidos na íntegra deste capítulo.

Lembre que um conjunto X diz-se enumerável quando é finito ou quando existe uma bijeção $f:\mathbb{N}\to X$. No segundo caso, X diz-se infinito enumerável. Cada bijeção $f:\mathbb{N}\to X$ é chamada de uma enumeração dos elementos de X.

Exemplo 1 *A bijeção $f:\mathbb{N}\to P$, onde P é o conjunto dos números naturais pares, ou seja, temos $f(n)=2n$, com $n\in\mathbb{N}$, mostra que naturais pares é infinito enumerável. Analogamente, $g:n\mapsto 2n-1$ define uma bijeção de $\mathbb{N}$ sobre o conjunto dos números naturais ímpares, o qual é, portanto, infinito enumerável.*

Pode-se provar que, surpreendentemente, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ têm cardinalidade equivalente.

Teorema 1.4 *O conjunto $\mathbb{Z}=\{\cdots,-2,-1,0,+1,+2,\cdots\}$ dos números inteiros é enumerável.*

Demonstração. Uma bijeção $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ pode ser definida colocando $f(n)=\dfrac{(n-1)}{2}$, se n é ímpar, e $f(n)=\dfrac{-n}{2}$ se n é par. De outra forma, basta notar que a função $h:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$, definida por $h(n)=2n$ quando n é positivo e $h(n)=-2n+1$ quando n é negativo ou zero, é uma bijeção. Logo, $h^{-1}:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ é uma enumeração de $\mathbb{Z}$. □

Antes de apresentarmos o próximo resultado, precisaremos enunciar o seguinte lema:

Lema 1.5 *Todo número natural se decompõe de maneira única como produto de fatores primos.*

Proposição 1.6 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ *é enumerável*

Demonstração. Considere

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ & & (n,m) & \mapsto & 2^n 3^m. \end{array}$$

Tem f injetiva, pois $2^{n_1}3^{m_1} = 2^{n_2}3^{m_2}$, pelo Lema 1.5, implica $(n_1,m_1) = (n_2,m_2)$. Observe que cada par 2^n3^m recebe uma enumeração de $\mathbb{N}$. Logo, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ é enumerável. □

Corolário 1.7 *Sejam X e Y enumeráveis. O produto cartesiano $X\times Y$ é enumerável.*

Demonstração. Como X e Y são enumeráveis, existem funções injetivas $r : X \to \mathbb{N}$ e $s : Y \to \mathbb{N}$. Logo, $g : X\times Y \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, dada por $g(x,y) = (r(x),s(y))$ é injetiva. Pelo resultado anterior, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ é enumerável e o resultado segue. □

Corolário 1.8 *Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ conjuntos enumeráveis. A união $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_n$ é enumerável.*

Demonstração. Como $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ são enumeráveis, existem sobrejeções $f_1 : \mathbb{N} \to X_1, f_2 : \mathbb{N} \to X_2, \cdots, f_n : \mathbb{N} \to X_n, \cdots$.

Defina

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \to & X \\ & & (n,m) & \mapsto & f_n(m). \end{array}$$

e observe que f é sobrejetiva. De fato, dado $x \in X$, temos que $x \in X_n$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Como f_n é sobrejetiva, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x = f_n(m)$, o que prova a sobrejetividade de f.

Como $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ é enumerável, concluímos que X é enumerável. □

Em particular, uma união finita $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cdots \cup X_n$ de conjuntos enumeráveis é também um conjunto enumerável.

Teorema 1.9 *O conjunto $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n}; m,n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}$ dos números racionais é enumerável.*

Demonstração. Com efeito, escrevendo $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$, podemos definir uma função sobrejetiva $f : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^* \to \mathbb{Q}$ colocando $f(n,m) = \frac{m}{n}$. □

Teorema 1.10 *Todo conjunto $X \subset \mathbb{N}$ é enumerável.*

Demonstração. Se X for finito, é enumerável. Se for infinito, definiremos por indução uma bijeção $f : \mathbb{N} \to X$ colocando $f(1), f(2), \ldots, f(n)$ definidos de modo a satisfazerem as seguintes condições:

(i) $f(1) < f(2) < \cdots < f(n)$;

(ii) Pondo $B_n = X - \{f(1), f(2), \ldots, f(n)\}$ temos $f(n) < x$ para todo $x \in B_n$.

Em seguida, percebemos que $B_n \notin \emptyset$ (uma vez que X é infinito), definimos $f(n+1)$ como menor elemento de B_n. Isto completa a definição de $f : \mathbb{N} \to X$, de modo a serem mantidas as condições (i) e (ii) para todo $\mathbb{N}$. Segue-se de (i) que f é injetiva. Por outro lado, (ii) implica que f é sobrejetiva pois se existisse algum $x \in B_n$ para todo n e, portanto, $x > f(n)$, qualquer que fosse $n \in \mathbb{N}$. Então, o conjunto infinito $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$ seria limitado, uma contradição. □

Mais geralmente, tem o seguinte resultado:

Teorema 1.11 *Todo subconjunto infinito de um conjunto enumerável é enumerável.*

Demonstração. Sejam X e Y ambos infinitos e enumeráveis, sendo que $Y \subset X$. Como X é enumerável, podemos fazer a seguinte relação com $\mathbb{N}$: enumere seus elementos e coloque-os em uma sequência $x_1, x_2, x_3, \ldots$, distintos dois a dois ($x_i \neq x_j$ se $i \neq j$). Então, definiremos n_1 como o primeiro natural tal que $a_{n_1} \in Y$ e n_2 como sendo o menor natural que é maior do que n_1 tal que $a_{n_2} \in Y$. Considerando a sequência $n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}$, com $k \in \mathbb{N}$, pertencente a Y, tome n_k como sendo o menor natural que é maior do que n_{k-1} tal que $a_{n_k} \in Y$. Como Y, por hipótese, é um conjunto infinito, assim teremos uma sequência de elementos.

$$Y = (a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots, a_{n_k}, \ldots).$$

Como esses termos são distintos dois a dois, obteremos, assim, uma função bijetiva $f : \mathbb{N} \to Y$ dada por $f(k) = a_{n_k}$. Além disso, como $Y \subset X$ temos $g : Y \to X$, $x_n \mapsto n_k$ e uma bijeção. Portanto, Y é enumerável. □

Uma outra forma de ver isto é observando a seguinte proposição:

Proposição 1.12 *Seja $f : X \to Y$ injetiva. Se Y é enumerável, então X também é. Em particular, todo subconjunto de um conjunto enumerável é enumeráve.*

Demonstração. Considere o caso em que existe uma bijeção $\varphi : Y \to \mathbb{N}$. Então, $\varphi \circ f : X \to \mathbb{N}$ é uma bijeção de X sobre um subconjunto de $\mathbb{N}$, pelo fato que, todo conjunto $X \subset \mathbb{N}$ é enumerável, X é enumerável. No caso particular de $X \subset Y$ é enumerável, tomamos $f : X \to Y$ como sendo a aplicação de inclusão. □

Proposição 1.13 *Seja $f : X \to Y$ sobrejetiva. Se X é enumerável, então Y também é.*

Demonstração. Para cada $y \in Y$, podemos escolher um $x = g(y) \in X$ tal que $f(x) = y$. Isso define uma aplicação $g : Y \to X$ tal que $f(g(y)) = y$, $\forall y \in Y$. Segue daí que g é injetiva. Logo, pela Proposição 1.13, Y é enumerável. □

A existência de um infinito absoluto não pode ser provado matematicamente. Porém quaisquer infinitos de diferente potência podem ser bem ordenados, no sentido de que seus elementos estejam relacionados entre si por uma sucessão. Isso mostra que no conjunto há um primeiro elemento, e que todo ele, exceto o primeiro, tem um antecessor e que, finalmente, para cada elemento do dado conjunto bem ordenado, infinito ou não, há um determinado elemento que é sucessor imediato de todos demais que compõem o conjunto. Sendo assim, cria-se uma ordem de posição para esses. Da mesma forma que existe tantos naturais quanto os pares ou ímpares, podemos provar que existem tantos os números naturais, quanto os inteiros, quanto os racionais. Hoje, essas propriedades dos conjuntos infinitos não são mais vistos como paradoxos.

Teorema 1.14 *Todo conjunto infinito X contém um subconjunto infinito enumerável.*

Demonstração. Note que em uma função injetiva qualquer $f : A \to B$ podemos afirmar que existe uma bijeção entre A e $f(A) \subset B$, haja vista que em $\phi : A \to f(A)$ todo elemento em $f(A)$ é imagem de somente um elemento em A. Portanto, basta definir uma função $f : \mathbb{N} \to X$ injetiva. Para isso, começamos escolhendo, em cada subconjunto não-vazio $A \subset X$, um elemento $x_A \in A$. Em seguida, definimos f por indução. Colocamos $f(1) = x_X$, $f(2) = x_{X-\{f(1)\}}$, etc. Supondo já definidos $f(1), \ldots, f(n)$, escrevemos $A_n = X - \{f(1), \ldots, f(n)\}$. Como X não é finito, A_n não é vazio. Colocaremos então $f(n+1) = x_{A_n}$. Isto completa a definição indutiva da função $f : \mathbb{N} \to X$. Afirmamos que f é injetiva. De fato, dados $m \neq n$ em $\mathbb{N}$ com $m < n$. Então $f(m) \in \{f(1), \ldots, f(n-1)\}$ enquanto que $f(n)$ está no complementar de $\{f(1), \ldots, f(n-1)\}$. Logo $f(m) \neq f(n)$. Portanto, a imagem de $\mathbb{N}$ é um subconjunto infinito enumerável de X. □

1.1.2 Conjuntos não-enumeráveis

Um conjunto infinito não-enumerável é aquele que possui uma infinidade tão imensa de termos que não somos capazes de "registrar" todos eles. O mais famoso exemplo de conjunto não-enumerável é o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$. Não somos capazes de exibir pelo menos uma bijeção entre os reais e os naturais, ou seja, os reais possuem mais elementos que possamos imaginar! Formalmente, temos a seguinte definição.

Definição 1.5 *Um conjunto é não-enumerável quando ele não é enumerável.*

Teorema 1.15 *O conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ é não-enumerável.*

Demonstração. Dados um intervalo limitado, fechado $I = [a,b]$ com $a < b$, e um número real x_0, existe um intervalo fechado, limitado, $L = [c,d]$ com $c < d$, tal que $x_0 \notin L$ e $L \subset I$. Isto pode ser verificado facilmente. Usaremos este fato repetidamente para mostrar que, dado qualquer subconjunto enumerável $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} \subset \mathbb{R}$, podemos encontrar um número real $x \notin X$. Sejam I_1 um intervalo limitado fechado não-degenerado, tal que $x_1 \notin I_1$, I_2 um intervalo no mesmo estilo $x_2 \notin I_2$ e $I_2 \subset I_1$ e assim supondo obtidos os seguintes intervalos na sequência $I_1 \supset I_2 \cdots \supset I_n$ limitados fechados e não-degenerado, com $x_i \notin (1 \leq i \leq n)$, podemos obter $I_{n+1} \subset I_n$ com $x_{n+1} \notin I_{n+1}$. Obtemos uma sequência decrescente $I_1 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$ de intervalos limitados e fechados. Existe um número real x que pertence a todos os I_n. Como $x_n \notin I_n$, segue-se que x não é nenhum dos x_n, assim concluímos que nenhum conjunto enumerável X pode conter todos os números reais. □

Corolário 1.16 *O conjunto dos números irracionais é não enumerável.*

Demonstração. De fato, denotemos por $\mathbb{I}$ o conjunto dos números irracionais. Por absurdo se $\mathbb{I}$ fosse enumerável, então como $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ concluiríamos que $\mathbb{R}$ deveria ser enumerável, pois seria uma união de conjuntos enumeráveis, o que é um absurdo. □

Definição 1.6 *Dados dois conjuntos X e Y, o símbolo $\mathscr{F}(X;Y)$ representa o conjunto de todas as funções $f : X \to Y$.*

Teorema 1.17 *Sejam X um conjunto arbitrário e Y um conjunto contendo pelo menos dois elementos. Nenhuma função $s : X \to \mathscr{F}(X;Y)$ é sobrejetiva.*

Demonstração. Dada $s : X \to \mathscr{F}(X;Y)$ indicaremos com s_x o valor de s no ponto $x \in X$. Dessa forma, s_x é uma função de X em Y. Agora construiremos uma função $f \in \mathscr{F}(X;Y)$ tal que $s_x \neq f$ para todo $x \in X$. Isto é feito escolhendo, para cada $x \in X$, um elemento $f(x) \in Y$, diferente de s_x. Como Y contém pelo menos dois elementos, isto é possível. A função $f : X \to Y$ assim obtida é tal que $f(x) \neq s_x(x)$ e segue que $f \neq s_x$, para todo $x \in X$. Isto posto, $f \notin s(X)$. Portanto, s não é sobrejetiva. □

Ao contrário do que ocorre com o produto cartesiano finito de conjunto enumeráveis, o produto cartesiano infinito de conjunto enumeráveis é não-enumerável, como podemos observa no seguintes resultado:

Corolário 1.18 *Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ conjuntos infinitos enumeráveis. O produto cartesiano $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ não é enumerável.*

Demonstração. Basta considerar o caso em que todos os X_n são iguais a $\mathbb{N}$, pois se são infinito e enumeráveis tem a mesma cardinalidade de $\mathbb{N}$. Neste caso, $\prod X_n = \mathscr{F}(\mathbb{N};\mathbb{N})$, é não-enumerável. □

O argumento usado na demonstração do Teorema 1.17 chama-se "método da diagonal de Cantor". Esse nome deve-se ao caso particular em que $X = \mathbb{N}$. Os elementos de $\mathscr{F}(\mathbb{N};Y)$ são sequências de elementos de Y. Para provar que nenhuma função $\varphi : \mathbb{N} \to \mathscr{F}(\mathbb{N};Y)$ é sobrejetiva, escrevemos $\varphi(1) = s_1, \varphi(2) = s_2, \ldots$ e assim por diante, em que $s_1, s_2, \ldots$ são sequências de elementos de Y. Logo,

$$\begin{aligned} s_1 &= (y_{11}, y_{12}, y_{13}, y_{14}, y_{15}, y_{16}, \ldots) \\ s_2 &= (y_{21}, y_{22}, y_{23}, y_{24}, y_{25}, y_{26}, \ldots) \\ s_3 &= (y_{31}, y_{32}, y_{33}, y_{34}, y_{35}, y_{36}, \ldots) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Em seguida, formamos uma nova sequência $s = (y_1, y_2, y_3, \ldots)$ de elementos de Y simplesmente escolhendo, para $n \in \mathbb{N}$, um elemento $y_n \in Y$ diferente do n-ésimo termo da diagonal: $y_n \neq y_{nn}$. A sequência s não pertence à lista das sequências s_n, pois o n-ésimo termo de s é diferente do n-ésimo termo de s_n. Assim, nenhuma lista enumerável pode esgotar todas as funções em $f(\mathbb{N};Y)$. Um caso particular é o do conjunto de todas as sequências formadas por zeros e uns já visto na introdução deste trabalho.

Proposição 1.19 *Se A é um conjunto infinito e B é finito, dada uma função $f : A \to B$, existe pelo menos um x tal que $f^{-1}(x)$ é um conjunto de cardinalidade infinita.*

Demonstração. Seja $f : A \to B$, com $x \in A$, suponhamos que $f^{-1}(x)$ é finito, para todo $x \in A$, teríamos que $\bigcup_{x \in B} f^{-1}(x)$ é uma união finita de conjuntos finitos, logo, é A é finito, contradição, pois por definição A é infinito. □

1.2 NÚMEROS TRANSFINITOS E ARITMÉTICA CARDINAL

Cantor desenvolveu o seu conceito de infinito real considerando os conjuntos. Para isso, atribuiu cardinalidade. Para esta cardinalidade infinita deu o nome de *números transfinitos* a qual é a forma rígida usada pela matemática para contar o número de elementos de conjuntos infinitos.

Questionava-se sobre a existência de vários números transfinitos, se era possível colocá-los em alguma sequência e se haveria infinito maior do que todos os outros.

Cantor, que era um teórico minucioso, desenvolveu uma aritmética do infinito, isto é, uma extensão para os números que lhe serviam como medida do infinito, para as regras de cálculo que se aplicavam aos números naturais usadas para medir o que é infinito (adição, multiplicação, exponenciação, entre outros). Os resultados a seguir são apresentados de acordo com [11].

Definição 1.7 (Conjuntos das Partes) *Seja A um conjunto qualquer. O conjunto abaixo é chamado de conjunto das partes de A:*

$$\wp(A) = \{X : X \text{ é um subconjunto de } A\}$$

Ainda, sobre o conjunto das partes: $\emptyset$ está no conjunto das partes de A, pois $\emptyset \subset A$. O próprio conjunto sempre está em seu conjunto das partes, pois $A \subset A$. Se A possui n elementos, mostra-se que $\wp(A)$ possui 2^n elementos.

Definição 1.8 *Para qualquer conjunto A, indicamos por*

$$2^A = \{f; f : A \to \{0,1\}\}.$$

Proposição 1.20 *Se A é um conjunto, tal que $A \neq 0$, então $\wp(A) \sim 2^A$.*

Demonstração. Devemos provar que existe uma bijeção entre $\wp(A)$ e 2^A. Para isto, seja $B \subseteq A$ e considere

$$f_B(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in B \\ 0, & \text{se } x \notin B. \end{cases}$$

Defina

$$\begin{array}{rccc} f & : & \wp(A) & \to & 2^A \\ & & B \subseteq A & \mapsto & f_B. \end{array}$$

Vamos provar que f é bijetiva. Dado $g \in 2^A$, seque que

$$g : A \to \{0,1\}.$$

Considere $B \subseteq A$ tal que

$$g(x) = 1, \quad \forall x \in B.$$

Dessa forma, observe que $f(B) = f_B = g$, ou seja, f é sobrejetiva.

Provemos agora que f é injetiva. Considere $B, C \subseteq A$ tais que $B \neq C$. Queremos provar que $f(B) \neq f(C)$, ou seja, $f_B \neq f_C$. Sem perda de generalidade, como $B \neq C$, podemos supor que existe $x \in B \backslash C$. Assim,

$$f_B(x) = 1 \qquad \text{e} \qquad f_C(x) = 0.$$

Logo, $f_B \neq f_C$ e, portanto, f é injetiva. □

Teorema 1.21 *Sejam A e B conjuntos quaisquer. Se $|A| = |B|$, então $|\wp(A)| = |\wp(B)|$.*

Demonstração. Sejam A e B dois conjuntos quaisquer da Proposição anterior temos que $\wp(A) \sim 2^A$ e $\wp(B) \sim 2^B$, caso $A = B = \emptyset$ o resultado é imediato, pois $A = B = \wp(A) = \wp(B) \to \wp(A) \sim \wp(B)$. Para $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$. Seque $\wp(A) \sim 2^A$, mas $|A| = |B|$ implicará que $\wp(A) \sim 2^B$, portanto, $\wp(A) \sim \wp(B)$. □

Teorema 1.22 (Cantor) *$|A| < |\wp(A)|$, para todo conjunto $A \neq \emptyset$.*

Demonstração. Sabemos que a aplicação $f : A \to \wp(A)$ definida por $f(a) = \{a\}$ é injetiva, assim temos que $|A| \leq |\wp(A)|$. Queremos provar que não existe $f : A \to \wp(A)$ sobrejetiva. Para isto recorreremos a Cantor que induziu o conjunto $X = \{x \in A; x \notin f(x)\}$ provando em seguida que não existe qualquer $b \in A$ para o qual se tenha $f(b) = X$. Verificando que não existe qualquer $b \in A$ para o qual se tenha $f(b) = X$. De fato, seja $x \in A$ qualquer. Então, ou $x \notin X$ ou $x \in X$. Se $x \notin X$, da definição de X resulta que $x \in f(x)$ e, portanto, $f(x) \neq X$. Logo, f não é função sobrejetiva. Portanto, $|A| < |\wp(A)|$, para todo conjunto $A \neq \emptyset$. □

1.2.1 Cardinalidade Infinita

Pelo Teorema 1.14, o primeiro cardinal infinito (***transfinito***) é o cardinal de $\mathbb{N}$, usualmente denotado por $\aleph_0$. O símbolo $\aleph$ é a primeira letra do alfabeto hebraico e chama-se ***alef***. Em geral, denotamos os cardinais transfinitos por $\aleph$ com algum índice.

Lembrando que $\aleph_0$ é um cardinal infinito sem possibilidade de comparação com qualquer outro número natural infinito (também cardinal), cuja a sequência transfinita iniciará-se pelos números naturais.

$$0 < 1 < 2 < \cdots < \aleph_0.$$

Os cardinais transfinitos têm uma relação de ordem, $\aleph_0$ é menor do que $\aleph_1$ o qual é menor do que $\aleph_2$, e assim por diante. Iniciada pelos números naturais, a ordem apresenta o seguinte aspecto:

$$0 < 1 < 2 < \cdots < \aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \cdots < \aleph_n < \cdots.$$

Cantor, sempre preocupado em classificar os infinitos, descobriu com assombro que objetos de dimensões diferentes tinham a mesma ordem de infinito, é o caso da cardinalidade de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$. Em termos de tamanho (no sentido dos conjuntos infinitos), uma reta e um plano (ou mesmo um espaço de dimensão n) são considerados idênticos.

Em todo este trabalho iremos assumir a Hipótese do Continuum Generalizada[1].

[1] A Hipótese do Continuum Generalizada afirma que, para qualquer ordinal α, $\aleph_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha}$.

Definição 1.9 *O cardinal* $\aleph_1$ *é definido como cardinal do conjunto* $\wp(A)$*, a qual A é um conjunto cujo cardinal é* $\aleph_0$*.* $\aleph_2$ *é definido com cardinal do conjunto* $\wp(B)$ *em que B é um conjunto cujo número cardinal é* $\aleph_1$*, e assim sucessivamente.*

Pelo Teorema 1.14, sabemos que todo conjunto infinito contém um subconjunto infinito enumerável. Dito de outra forma, temos o seguinte resultado:

Teorema 1.23 *Se X é um conjunto infinito, então* $|\mathbb{N}| \leq |X|$.

1.2.2 Adição de Cardinais

Definição 1.10 *Dado dois cardinais* $\mathfrak{a}$ *e* $\mathfrak{b}$ *tais que* $|A| = \mathfrak{a}$ *e* $|B| = \mathfrak{b}$*, temos que* $|A \cup B| = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ *se* $A \cap B = \emptyset$*. Essa soma de cardinas é única.*

Proposição 1.24 (Propriedades Básicas da Adição de Cardinais)

i *(Associativa).* $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c} = \mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c})$.

ii *(Comutativa).* $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$.

iii *A relação de ordem para adição.* $\mathfrak{a} \geq \mathfrak{b} \Leftrightarrow$ *existe um* $\mathfrak{c}$ *tal que* $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$.

Demonstração. (i) Sejam A, B e C conjuntos, tais que $|A| = \mathfrak{a}$, $|B| = \mathfrak{b}$ e $|C| = \mathfrak{c}$. Segue que $(A \cup B) \cup C = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c}$ e $A \cup (B \cup C) = \mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c})$. Das propriedades dos conjuntos e da definição 1.10, temos $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \therefore (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) + \mathfrak{c} = \mathfrak{a} + (\mathfrak{b} + \mathfrak{c})$.

(ii) Sejam A, e B conjuntos tais que $|A| = \mathfrak{a}$, e $|B| = \mathfrak{b}$. Segue que $A \cup B = \mathfrak{a} + \mathfrak{b} B \cup A = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$. Logo, $A \cup B = B \cup A \therefore \mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}$.

(iii) Sejam A e B conjuntos tais que $|A| = \mathfrak{a}$ e $|B| = \mathfrak{b}$. Se $\mathfrak{a} \geq \mathfrak{b}$, então $|A| \geq |B|$, Considere dois conjuntos C e D, tais que $C \cap D = \emptyset$, $|D| = |B| = \mathfrak{b}$ e $D \subseteq A$. Tomemos o C tal que $C = A - D$. Logo, $A = D \cup C$, em que $|A| = |D| + |C|$. Fazendo $|C| = \mathfrak{c}$. Portanto, $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$. □

Proposição 1.25 *Seja n cardinal finito, temos que* $\aleph_0 + n = \aleph_0$.

Demonstração. Seja n um cardinal finito, temos $n < \aleph_0$ logo, existe um c que $\aleph_0 = n + \mathfrak{c}$. Segue que $\mathfrak{c} = \aleph_0$ ou $\mathfrak{c}$ é cardinal finito. Se $\mathfrak{c}$ é um cardinal finito, então também $n + \mathfrak{c}$ é finito, o que torna-se contraditório, pois $n + \mathfrak{c} = \aleph_0$. Assim, teremos $\mathfrak{c} = \aleph_0$. Portanto, $n + \aleph_0 = \aleph_0$.

Proposição 1.26 *Para cada cardinal* $\mathfrak{a} \geq \aleph_0$ *e para todo cardinal finito n, temos que* $\mathfrak{a} + n = \mathfrak{a}$*. Em particular,* $\aleph_\mathfrak{a} + n = \aleph_\mathfrak{a}$.

Demonstração. Seja $\mathfrak{a} \geq \aleph_0$, então $\mathfrak{a} = \aleph_0 + \mathfrak{c}$, em que c é um cardinal. Acrescentando o cardinal n em ambos os lado, $\mathfrak{a} + n = (\aleph_0 + \mathfrak{c}) + n = \mathfrak{c} + (\aleph_0 + n) = \mathfrak{c} + \aleph_0 = \mathfrak{a}$. □

Proposição 1.27 *Para todo cardinal* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a} + 1 = \mathfrak{a}$ *se, e somente se* $\mathfrak{a} \geq \aleph_0$

Demonstração. Se $\mathfrak{a} \geq \aleph_0$, então $\mathfrak{a} + 1 = \mathfrak{a}$. Por outro lado, se $\mathfrak{a} + 1 = \mathfrak{a}$, seja A um conjunto de cardinalidade, $\mathfrak{a}$ e b são elementos tal que $b \notin A$. Isto posto, $|A \cup \{b\}| = |A| + |\{b\}| = \mathfrak{a} + 1 = \mathfrak{a} = |A|$. Consequentemente $A \cup \{b\}$ é equipotente ao próprio subconjunto A, o que implicará que A é um conjunto infinito. Portanto, $\mathfrak{a} = \mathfrak{a} + 1 = |A \cup \{b\}| \geq \aleph_0$. □

Teorema 1.28 (Hessemberg) $\aleph_\alpha + \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$.

Demonstração. Sejam os conjuntos disjuntos A e B, tais que $|A| = \aleph_\alpha$ e $|B| = \aleph_\alpha$ e ainda $A \cup B = C$. Suponhamos $|C| \geq \aleph_{\alpha+1}$ da definição 1.9 temos uma contradição, pois $|C| = \aleph_\alpha$, portanto, $\aleph_\alpha + \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$. □

Proposição 1.29 $\aleph_\alpha + \aleph_\beta = \aleph_{\max(\alpha,\beta)}$.

Demonstração. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\alpha \leq \beta$, segue que, $\aleph_\alpha + \aleph_\beta \leq \aleph_\beta + \aleph_\beta$, do Teorema 1.28, de fato, temos $\aleph_\alpha + \aleph_\beta \leq \aleph_\beta$. □

1.2.3 Multiplicação de Cardinais

Definição 1.11 *Dados dois cardinais* $\mathfrak{a}$ *e* $\mathfrak{b}$ *tais que* $|A| = \mathfrak{a}$ *e* $|B| = \mathfrak{b}$, *temos que* $|A \times B| = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$. *Esta multiplicação de cardinais é única.*

Proposição 1.30 (Propriedades Básicas da Multiplicação de Cardinais)

i *(Associativa).* $\mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{c}$.

ii *(Comutativa).* $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a}$.

iii *Distributividade da multiplicação em relação à soma.* $\mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c}$.

Demonstração. (i) Sejam A, B e C conjuntos tais que $|A| = \mathfrak{a}$, $|B| = \mathfrak{b}$ e $|C| = \mathfrak{c}$. De imediato, temos os resultados $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$, implicando que $\mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}) \cdot \mathfrak{c}$.

(ii) Como $A \times B \sim B \times A$. Segue que, $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a}$.

(iii) Como $A \times (B \times C) = (A \times B) \cup (A \times C)$. Logo, $\mathfrak{a} \cdot (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} + \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{c}$. □

Corolário 1.31 (Hessemberg) $\aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$.

Demonstração. Sejam os conjuntos A e B, tais que $|A| = \aleph_\alpha$ e $|B| = \aleph_\alpha$ e ainda $A \times B = C$. Suponhamos $|C| \geq \aleph_{\alpha+1}$ da definição 1.9 e do Teorema 1.2 temos uma contradição. Assim $|C| = \aleph_\alpha$, portanto, $\aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$ □

Corolário 1.32 $\aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = \aleph_{\max(\alpha,\beta)}$

Demonstração. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\alpha \leq \beta$, segue que, $\aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta \leq \aleph_\beta \cdot \aleph_\beta$, do Teorema 1.31, temos $\aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta \leq \aleph_\beta$, como queríamos mostrar. □

Proposição 1.33 *Se n é um cardinal finito e $n > 0$, então $n \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$*

Demonstração. $\aleph_\alpha = 1 \cdot \aleph_\alpha \leq n \cdot \aleph_\alpha$. Observamos que $n \leq \aleph_0 \leq \aleph_\alpha$, segue que $n \cdot \aleph_\alpha \leq \aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$, portanto, $n \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$, assim como queríamos mostrar. □

Corolário 1.34 $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

Demonstração. Como $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$, implicará diretamente que $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$. □

1.2.4 Exponenciação de Números Cardinais

Lembrando que para qualquer conjunto A, definimos

$$2^A = \{f; f : A \to \{0,1\}\}.$$

Geralmente, temos a seguinte definição:

Definição 1.12 *Dados dois conjuntos A e B, definamos $A^B = \{f; f : B \to A\}$.*

Definição 1.13 *Dados dois cardinais $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ tais que $|A| = \mathfrak{a}$ e $|B| = \mathfrak{b}$, temos que $|A^B| = \mathfrak{a}^\mathfrak{b}$. importante ressaltar que esta exponenciação é única.*

Proposição 1.35 (Propriedades Básicas da Exponenciação de Cardinais)

i. $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}} = \mathfrak{a}^\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a}^\mathfrak{c}$.

ii. $\left(\mathfrak{a}^\mathfrak{b}\right)^\mathfrak{c} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}$.

iii. $(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})^\mathfrak{c} = \mathfrak{a}^\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{b}^\mathfrak{c}$.

Demonstração. (i) Sejam os conjuntos A, B e C sendo que $|A| = \mathfrak{a}$, $|B| = \mathfrak{b}$, $|C| = \mathfrak{c}$ e $B \cap C = \emptyset$. Sabemos que $|B \cup C| = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$. Vamos mostrar que os conjuntos $A^B \times A^c$ e $A^{B \cup C}$ são equipotentes. Com isso, associamos a cada par f, g de funções $f \in A^B$ e $g \in A^C$ a função $f \cup g \in A^{B \cup C}$. Esta associação estabelece uma equipotência entre os conjuntos $A^B \times A^C$ e $A^{B \cup C}$. Logo, $\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}} \cdot \mathfrak{a}^{\mathfrak{c}}$.

(ii) Sejam A, B e C conjuntos com cardinalidade respectivamente $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ e $\mathfrak{c}$. Queremos mostrar que $A^{B \times C} \sim \left(A^B\right)^C$. Para uma função dada $f : B \times C \to A$ e um elemento dado $a \in C$, existe uma função $f^a : B \to A$ definida por $f^a(b) = (b, a)$ para todo $b \in B$. A função $g : A^{B \times C} \to \left(A^B\right)^C$, que associa a cada $f \in A^{B \times C}$ a função $h \in \left(A^B\right)^C$, dada por $h(a) = f^a$ para todo $a \in C$ é uma bijeção. Assim, $\left(\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}\right)^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}$.

(iii) Sejam A, B e C conjuntos com cardinalidade, respectivamente, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ e $\mathfrak{c}$. A função $f : (A \times B)^C \to A^C \times B^C$ é bijetiva. Assim, $(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{a}^{\mathfrak{c}} \cdot \mathfrak{b}^{\mathfrak{c}}$. □

Proposição 1.36 *Para todo cardinal finito* $0 < n$, *temos que* $\aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha^n = \aleph_\alpha$.

Demonstração. Por indução em n. Fazendo $n = 1$, temos que

$$\aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha.$$

Suponhamos agora que a igualdade seja verdadeira para algum $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha^n = \aleph_\alpha.$$

Pela hipótese de Indução, para $n + 1$, obtemos que

$$\aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha^{n+1} = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha^n \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha^n = \aleph_\alpha.$$

□

Corolário 1.37 *Para todo cardinal* $\mathfrak{a}$, *temos que* $\mathfrak{a} < 2^{\mathfrak{a}}$.

Demonstração. Seja A tal que $|A| = \mathfrak{a}$. como $|\wp(A)| = 2^{|A|}$, temos $|A| < |\wp(A)|$. Logo, $\mathfrak{a} < 2^{\mathfrak{a}}$. □

Proposição 1.38 *Se* $n \geq 2 \Rightarrow n^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha}$ *tal que* $\beta \leq \alpha \Rightarrow \aleph_\beta^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha}$.

Demonstração. Se $n \geq 2$ e $\beta \leq \alpha$ então $2^{\aleph_\alpha} \leq n^{\aleph_\alpha} \leq \aleph_\beta^{\aleph_\alpha}$, pela monotonicidade da exponenciação, temos que $2^{\aleph_\alpha} \leq (2^{\aleph_\alpha})^{\aleph_\alpha}$, desde que $\aleph_\beta \leq \aleph_\alpha \leq 2^{\aleph_\alpha}$. Isto posto, temos que $2^{\aleph_\alpha} \leq 2^{\aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha}$. Portanto, Se $n \geq 2 \Rightarrow n^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha}$ tal que $\beta \leq \alpha \Rightarrow \aleph_\beta^{\aleph_\alpha}$. □

Teorema 1.39 $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Demonstração. Usando o Teorema de Cantor-Schroder-Bernostein, é suficiente apresentarmos que $2^{\aleph_0} \leq \aleph_1$ e $2^{\aleph_0} \geq \aleph_1$. Note que $\aleph_0 = |\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$ acarreta que $2^{\aleph_0} = |\wp(\mathbb{Q})|$. Considere $f : \mathbb{R} \to \wp(\mathbb{Q})$, definida por $f(a) = \{x \in \mathbb{Q}; x < a\} \subset \mathbb{Q}$, para cada $a \in \mathbb{R}$. Se a e b são números reais distintos, podemos supor que $a < b$. Logo, existe $r \in \mathbb{Q}$, tal que $a < r < b$, implicando assim que $r \in f(b)$ e $r \notin f(a)$, mostrando dessa maneira que $f(a) \notin f(b)$. Consequentemente, f é uma função injetiva. Logo, $\aleph_1 = |\mathbb{R}| \leq |\wp(\mathbb{Q})| = 2^{\aleph_0}$. Por outro lado, a função $g : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$, definida por $g(h) = 0,h(0)h(1)h(2)\ldots \in \mathbb{R}$ é injetiva. Assim, $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. □

Corolário 1.40 $\aleph_0 < \aleph_1$.

Demonstração. Temos $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ e $|\mathbb{N}| < \wp(|\mathbb{N}|) = 2^{|\mathbb{N}|} = \aleph_1$. Logo, $\aleph_0 < \aleph_1$. □

Corolário 1.41 *Considere os conjuntos* $\mathbb{R}$ *e* $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. *Se* $Y = \mathbb{R} - X$, *então* $|Y| = |\mathbb{R}|$.

Demonstração. Seja $|Y| = a$. Como $\mathbb{R} = Y \cup X$ e $Y \cap X = \emptyset$ seque que $\aleph_1 = |\mathbb{R}| = |Y \cup X| = a + n = a$. Logo, $a = \aleph_1$, implica $|Y| = \aleph_1$. □

Proposição 1.42 *Se* A *é um subconjunto enumerável de* B *e* $|B| = \aleph_1$, *então* $|B - A| = \aleph_1$.

Demonstração. Seja A um conjunto enumerável $|A| \leq \aleph_0 < \aleph_1$. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que $|A| = \aleph_0$. Do teorema 1.28 temos $\aleph_1 - \aleph_0 = \aleph_1 + \aleph_1 - \aleph_0$. Por outro lado, $n \leq \aleph_1 - \aleph_0 \leq \aleph_1$, no qual n é a cardinalidade finita. Portanto, $|B - A| = \aleph_1$. □

Cantor é uma referência quanto ao estudo de cardinalidade. Ele provou que existem infinitos cardinais transfinitos, maiores que a cardinalidade do conjunto dos números reais.A partir esse pensamento, ele mostrou que para qualquer conjunto não vazio A, $|A| < |\wp(A)|$ do qual obtivemos a relação $|\mathbb{R}| < |\wp(\mathbb{R})|$, ou seja, $\aleph_1 < \aleph_2$, sendo $\aleph_2 = 2^{\aleph_1}$. Com isso, obtemos um novo cardinal transfinito estritamente superior aos anteriores, isto é, $\aleph_1 < \aleph_2 < \aleph_3 < \cdots$.

A partir do Teorema de Cantor, concluímos que $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$. Assim, afirmamos que o conjunto $\wp(\mathbb{N})$, cuja cardinalidade é $2^{\aleph_0}$, é não-enumerável. Isso significa que, enquanto $\mathbb{N}$ é infinito e enumerável, o conjunto $\wp(\mathbb{N})$ tem quantidade muito maior de elementos, então, ele é infinito e não-enumerável.

Em vista desse teorema, temos a relação de ordem $\aleph_0 < 2^{\aleph_0} < 2^{2^{\aleph_0}} < 2^{2^{2^{\aleph_0}}} < \cdots$. Cantor mostrou que a cardinalidade é dada por meio da correspondência entre o conjunto

dos números transfinitos e dos naturais. Se temos infinitos naturais, logo, teremos infinitos cardinais transfinitos.

Reconhecendo a Infinitude de Deus, Cantor desenvolveu o seu conceito de Infinito Absoluto, esclarecendo que os números transfinitos apresentam uma grandeza muito maior do que se acredita ter, pois, assim como Deus é infinitamente inexplicável, assim é a infinitude desses números.

Os conceitos matemáticos inovadores propostos por Cantor na Teoria dos Conjuntos são reconhecidos como uma mudança de paradigma de maior importância para todos aqueles que se aprofundam nessa teoria. Foi ele quem formulou a "hipótese do continuum"e afirmou que não existem conjuntos de cardinalidade intermediária entre $\aleph_0$ e $\aleph_1$.

Apesar da descoberta dos paradoxos da teoria dos conjuntos, Cantor nunca duvidou da verdade absoluta do seu trabalho. Na sua teoria, ele foi apoiado por Dedekind, Weierstrass, Hilbert, Russell e Zermelo.

Sobre o trabalho de Cantor, Hilbert descreveu que era *"o melhor produto de gênio matemático e uma das realizações supremas da atividade humana puramente intelectual"*.

Capítulo 2

ESPAÇOS VETORIAIS DE DIMENSÃO FINITA E INFINITA

Este capítulo foi elaborado a partir das referências bibliográficas [3, 8, 9, 10].

Um dos conceitos básicos em álgebra linear é o espaço vetorial, bem como as noções fundamentais de subespaço, de base e de dimensão. A noção comum de vetores como objetos com tamanho, direção e sentido, juntamente com as operações de adição e multiplicação por números reais forma a ideia básica de um espaço vetorial.

Definição 2.1 *Seja $\mathbb{K}$ um subconjunto dos números complexos $\mathbb{C}$. Diremos que $\mathbb{K}$ é um corpo se forem satisfeitas as seguintes condições:*

(a) Se x e y são elementos de $\mathbb{K}$, então $x+y$ e xy são também elementos de $\mathbb{K}$.

(b) Se $x \in \mathbb{K}$, então $-x$ também é um elemento de $\mathbb{K}$. Se, além disso $x \neq 0$, então x^{-1} é um elemento de $\mathbb{K}$.

(c) Os elementos 0 e 1 são elementos de $\mathbb{K}$.

Observe que $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$, ambos são corpos. Denotamos por $\mathbb{Q}$ o conjunto dos números racionais, que é o conjunto de todas as frações m/n, e que possui inteiro com $n \neq 0$. Não é difícil verificar que $\mathbb{Q}$ é um corpo. $\mathbb{Z}$ não é um corpo, pois não satisfaz a condição (b) descrita acima. De fato, se n é um inteiro diferente de zero, então $n^{-1} = 1/n$ não é um inteiro, exceto no caso trivial de $n = 1$ ou $n = -1$. Por exemplo, $\frac{2}{3}$ não é inteiro.

O fato essencial a respeito de um corpo é o de ser um conjunto de elementos que pode ser adicionados e multiplicados, de uma forma que a adição e a multiplicação satisfaçam as regras primárias da aritmética, sendo possível dividir por elementos diferentes de zero.

Sejam $\mathbb{K}$ e $\mathbb{L}$ corpos. Suponha que $\mathbb{K}$ esteja contido em $\mathbb{L}$, podemos afirmar que $\mathbb{K}$ é um subconjunto de $\mathbb{L}$. Então, dizemos que $\mathbb{K}$ é subcorpo de $\mathbb{L}$. Consequentemente, cada

um dos corpos que estamos considerando é um subcorpo de $\mathbb{C}$, números complexos. Em particular, podemos dizer que $\mathbb{R}$ é um subcorpo de $\mathbb{C}$, e que $\mathbb{R}$, é de $\mathbb{R}$.

Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Os elementos de $\mathbb{K}$ serão também denominados de números, se o contexto for claro quanto ao $\mathbb{K}$, ou chamados de escalares.

Um espaço vetorial V sobre o corpo $\mathbb{K}$ é um conjunto de objetos que podem ser somados e multiplicados por elementos de $\mathbb{K}$, de forma que a soma de dois elementos de V ainda seja um elemento de V, assim, o produto de um elemento de $\mathbb{K}$ é um de V. A definição de Espaço Vetorial será definida com mais detalhes ao decorrer das seções seguintes deste trabalho.

Em matemática, a dimensão de um espaço vetorial V é a cardinalidade, ou seja, o número de vetores, de uma base de V sobre o seu corpo de escalares. Às vezes, é chamada de dimensão de Hamel (de Georg Hamel) ou de dimensão algébrica para distingui-la de outros tipos de dimensão.

Veremos que todo espaço vetorial tem uma base, e todas as bases de um espaço vetorial têm a mesma cardinalidade; consequentemente, a dimensão de um espaço vetorial é definida unicamente.

2.1 ESPAÇO VETORIAL

Exemplo 2 *O conjunto dos vetores do espaço.*

$$V = \{(x_1, x_2, x_3); \quad x_i \in \mathbb{R}\}$$

Considere um sistema de coordenadas dado por três retas orientadas, perpendiculares duas a duas. Uma vez fixada uma unidade de comprimento, cada ponto P do espaço estará identificado com a terna de números reais x, y, z, dando suas coordenadas. Aqui os vetores também são dados por segmentos orientados com ponto inicial na origem e existe uma correspondência biunívoca entre vetores e pontos do espaço, na qual cada vetor $\overrightarrow{OP}$ associa seu ponto final $P = (a, b, c)$. Deste modo, o vetor $v = \overrightarrow{OP}$ costuma ser denotado pelas coordenadas de P.

$$v = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \text{ ou } v = (a, b, c).$$

A origem fixada para o espaço vetorial representará o vetor nulo $(0, 0, 0)$. Assim, se chamamos de V o conjunto de vetores no espaço, podemos identificar

$$\begin{aligned} V &= \{(x_1, x_2, x_3); \quad x_i \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Exemplo 3 *No lugar de ternas de números reais, consideremos como vetores n-uplas de números reais,*

$$V = \mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n); \quad x_i \in \mathbb{R}\},$$

e se $u = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, $v = (y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n)$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \cdots, x_n + y_n) \text{ e } \lambda u = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \ldots, \lambda x_n).$$

Neste caso, perdemos, é claro, a visão geométrica de "vetores", pois saímos de um espaço de dimensão 3 da geometria e passamos a um espaço de dimensão n. Apesar disso, podemos trabalhar com estes espaços da mesma maneira que em $\mathbb{R}^3$.

Vejamos o caso: $n = 5$. *Assim,*

$$V = \mathbb{R}^5 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) : \quad x_i \in \mathbb{R}\}.$$

Se

$$u = (2, 0, 1, -1, 1)$$

e

$$v = (1, 0, 2, 1, 1)$$

então

$$\begin{aligned} u - 2v &= (2, 0, 1, -1, 1) - 2(1, 0, 2, 1, 1) \\ &= (2, 0, 1, -1, 1) - (2, 0, 4, 2, 2) \\ &= (0, 0, -3, -3, -1). \end{aligned}$$

Observe que, neste caso, o vetor nulo é $(0, 0, 0, 0, 0)$.

As n-uplas de números reais, ou equivalentes, matrizes-linhas $1 \times n$, *ou matrizes-colunas* $n \times 1$, *aparecem naturalmente na descrição de muitos problemas que envolvem várias variáveis. Como um exemplo para determinar a posição de uma barra no espaço, precisamos das coordenadas cujas extremidades* $A = (a_1, a_2, a_3)$ *e* $B = (b_1, b_2, b_3)$. *Assim, sua coordenada será dada por* $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3)$ *e estaremos trabalhando com espaço vetorial* $\mathbb{R}^6$.

Exemplo 4 *Seja* $\mathbb{R}^\infty$ *o conjunto das sequências infinitas* $u = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$, *de números reais. O elemento zero de* $\mathbb{R}^\infty$ *é a sequência* $0 = (0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$, *formada por infinitos zeros e o inverso da sequência* $u = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ *é*

$$-u = (-a_1, -a_2, -a_3, \ldots, -a_n, \ldots).$$

As operações de adição e multiplicação por um número real são definidas por:

$$\begin{aligned} u + v &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \ldots, a_n + b_n, \ldots). \\ \lambda u &= (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3, \ldots, \lambda a_n, \ldots) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Com essas operações, $\mathbb{R}^\infty$ *é um espaço vetorial.*

Exemplo 5 *$\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ é o conjunto de todas as funções reais definidas em um intervalo I,*

$$\mathscr{F}(I,\mathbb{R}) = \{f : I \to \mathbb{R}; \quad f \text{ é função}\}.$$

Sejam f e g funções desse conjunto, definem-se a soma $f+g : I \to \mathbb{R}$ por

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x), \quad x \in I$$

e o produto de $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ por $\lambda \in \mathbb{R}$ como a função $\lambda \cdot f : I \to \mathbb{R}$ dada por

$$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda[f(x)], \quad x \in I.$$

Com essas operações, o conjunto $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, cuja a função nula é o vetor nulo desse espaço.

Exemplo 6 *$V = M_{(m,n)}$ é o conjunto das matrizes reais $m \times n$ com a soma e produto por escalar usuais, sendo esse um espaço vetorial.*

$$V = M(m,n) = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} : a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, \ldots, a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn} \in \mathbb{R} \right\}.$$

Observe que esse espaço vetorial identifica-se com

$$V = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, \ldots, a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}) = \mathbb{R}^{m \times n}$$

em que $d = m \times n$ é a dimensão de V, ou
seja, $V = \mathbb{R}^d$, segue o caso do exemplo 3.

Exemplo 7 *Considere P_n o conjunto dos polinômios com coeficientes reais, de grau menor ou igual a n, incluindo o zero, isto é,*

$$P_n = \{p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0; \quad a_i \in \mathbb{R} \quad e \quad n \geq 0\}.$$

O conjunto P_n é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, no qual as operações são a soma de polinômios e a multiplicação desses por números reais. Especificamente, sejam $p(x) = a_r x^r + \cdots + a_0$ e $q(x) = b_m x^m + \cdots + b_0$,ambos serão dois elementos de P_n. Vamos assumir que $r \leq m$. Definimos, então, a soma de

$$(p+q)(x) = b_m x^m + \cdots + b_{r+1} x^{r+1} + (a_r + b_r) x^r + \cdots + (a_0 + b_0).$$

Além disso, se $\lambda \in \mathbb{R}$, o produto escalar de λ por $p(x)$ será por definição, o polinômio

$$(\lambda \cdot p)(x) = (\lambda a_r) x^r + \cdots + (\lambda a_0).$$

Exemplo 8 *V é um conjunto das matrizes 2×2, cujos elementos são números complexos. As operações são adição de matrizes e multiplicação destas por números complexos.*

Exemplificando:

$$\begin{bmatrix} 3+i & 0 \\ 4 & -i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2+i & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5+i & 0 \\ 6+i & 0 \end{bmatrix}$$

$$(1+i)\begin{bmatrix} i & 2 \\ 1-i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i-1 & 2+2i \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Os espaços complexos aparecem, por exemplo, no estudo de sistemas de equações diferenciais.

Exemplo 9 *Considere a adição em $\mathbb{C}$ dada por $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$ e a multiplicação de um número real por um número complexo dada por $\lambda(a+bi)=\lambda a+\lambda bi=(a+bi)\lambda$, mostre que $\mathbb{C}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.*

$z\in\mathbb{C}$ se $z=x+yi$, com $x,y\in\mathbb{R}$.

• Sejam $u=a+bi$ e $v=c+di$, com $a,b,c,d\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} u+v &= (a+bi)+(c+di) \\ &= \underbrace{(a+c)}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{(b+d)}_{\in\mathbb{R}} i \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

• Seja $\lambda\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \lambda u &= \lambda(a+bi) \\ &= \underbrace{(\lambda a)}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{(\lambda b)}_{\in\mathbb{R}} i \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

2.2 SUBESPAÇO VETORIAL

Em muitas casos, é necessário verificar dentro de um espaço vetorial V, subconjuntos W que continuem sendo espaços vetoriais. Tais conjuntos são chamados de Subespaços Vetoriais de V, os quais terão a seguinte definição.

Definição 2.2 *Seja V um espaço vetorial. Um Subespaço Vetorial de V é um subconjunto $W\subset V$ com as seguintes propriedades:*

(i) $0\in W$;

(ii) $\forall u,v\in W \Rightarrow (u+v)\in W$;

(iii) $\forall u\in W,\ \lambda\in\mathbb{K}\Rightarrow \lambda u\in W$.

Observação 2.1 *Sejam V um espaço vetorial e W um subconjunto não vazio de V, dizemos que W é subespaço vetorial de V, ou simplesmente um subespaço. Se W, com as operações de adição em V e de multiplicação de vetores de V por escalares, for um espaço vetorial, poderemos destacar dois exemplos de subespaços de um espaço V, chamados de triviais, a citar o conjunto $\{0\}$, que é o vetor nulo, e o espaço inteiro V.*

Exemplo 10 *Consideremos o conjunto $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ definido no exemplo 5. Seja $\mathscr{G}(I,\mathbb{R})$ o conjunto formado pelas funções reais definidas em um intervalo I, tal que essas funções sejam contínuas,*

$$\mathscr{G}(I,\mathbb{R}) = \{f : I \to \mathbb{R}; \quad f \text{ é contínua}\}.$$

Temos que $\mathscr{G}(I,\mathbb{R})$ é um subespaço de $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$. De fato, o vetor nulo do espaço $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ é a função nula, a qual é contínua e, portanto, pertence a $\mathscr{G}(I,\mathbb{R})$. Além disso, se f e g são funções reais contínuas, a soma $(f+g)(x)$ será uma função real contínua e se $\lambda \in \mathbb{R}$, o produto escalar de λ por f, será a função real λf que também é uma função contínua.

Exemplo 11 *Considere P_{n_0} como o conjunto dos polinômios com coeficientes reais, de grau menor ou igual a n, em que $p(0) = 0$. Note que P_{n_0} é um subconjunto de P_n definido no exemplo 7. Geometricamente, os elementos do subespaço P_{n_0} caracterizam-se pelo fato de seus gráficos intersectarem a origem do sistema cartesiano. Como exemplo, podemos citar as funções polinomiais $p_1(x) = x^3 + 3x$ e $p_2(x) = 2x$, pois são elementos de P_{n_0}.*

Exemplo 12 *Seja $V = M_n(\mathbb{R})$, o conjunto das matrizes reais quadradas de ordem n, com a soma e o produto escalar usuais, e W o subconjunto das matrizes triangulares superiores, implica que W é um subespaço vetorial de V. De fato, é possível afirmar que a soma de matrizes triangulares superiores ainda é uma matriz triangular superior, assim como o produto de uma matriz triangular por um escalar real.*

2.3 COMBINAÇÃO LINEAR

Vamos comentar uma das características de um espaço vetorial que é a obtenção de novos vetores a partir de vetores dados.

Definição 2.3 *Seja V um espaço vetorial real (ou complexo), $v_1,\ldots,v_n \in V$ e $a_1,a_2,\ldots,a_n$ os números reais (ou complexo). Então, o vetor*

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$$

é um elemento de V ao qual chamaremos de combinação linear $v_1,v_2,\ldots,v_n$.

Exemplo 13 *Sejam os vetores $v = \{-1,5,5\}$, $v_1 = \{0,1,3\}$ e $v_2 = \{1,-3,1\}$. v é uma combinação linear dos vetores v_1 e v_2.*

De fato,

$$\begin{aligned} v &= 2v_1 - 1v_2 \\ &= 2(0,1,3) - 1(1,-3,1) \\ &= (0,2,6) + (-1,3,-1) \\ &= (-1,5,5). \end{aligned}$$

Exemplo 14 *O vetor $v = (4,3,-6)$ não é combinação linear dos vetores $v_1 = (1,-3,2)$ e $v_2 = (2,4,-1)$.*

Deve-se verificar que não existem escalares a e b, com $a,b \in \mathbb{R}$ tais que: $v = av_1 + bv_2$.

Utilizando o procedimento análogo ao do exemplo anterior,

$$\begin{aligned} (4,3,-6) &= a(1,-3,2) + b(2,4,-1) \\ &= (a,-3a,2a) + (2b,4b,-b) \\ &= (a+2b,-3a+4b,2a-b). \end{aligned}$$

Desta última igualdade, obtemos o sistema:

$$\begin{cases} a+2b = 4 \\ -3a+4b = 3 \\ 2a-b = -6. \end{cases}$$

O sistema é impossível, o que comprova não poder o vetor v ser escrito como combinação linear de v_1 e v_2.

2.3.1 Subespaços Gerados

Definição 2.4 *Um subespaço gerado por um conjunto de vetores $\alpha = \{v_1, v_2 \ldots, v_n\}$ é o conjunto de todos os vetores V que são combinações lineares dos vetores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \in V$.*

$$W = G(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \{v \in V \,|\, v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n\}, \quad com \quad a_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n.$$

Observação 2.2 *A notação de $G(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ informa que o conjunto W é o conjunto gerado por $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Não devemos confundir com o próprio conjunto gerador $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Ou seja, $G(v_1, v_2)$ é um conjunto com infinitos vetores formados da combinação deles e $\{v_1, v_2\}$ é um conjunto com apenas dois vetores.*

Exemplo 15 *Sejam $V = \mathbb{R}^3$ e $v \in V$ (sendo $v \neq 0$, 0 é o vetor nulo), então $[v] = av$, com $a \in \mathbb{R}$, é a reta que contém o vetor v, pois se trata do conjunto de todos os vetores com a mesma direção de v que tem origem em (0,0).*

Exemplo 16 *Vamos encontrar o subespaço de* $\mathbb{R}^3$ *gerado pelos vetores* $v_1 = (1,-2,-1)$ *e* $v_2 = (2,1,1)$. *Seja* $W = G(v_1, v_2)$. *Tomamos* $v = (x,y,z)$ *em* $\mathbb{R}^3$. *Temos que* $v \in W$ *se, e somente se, existirem números reais* a_1 *e* a_2 *tais que*

$$v = a_1 b_1 + a_2 v_2,$$

ou, equivalente, se, e somente se, o sistema linear

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 = x \\ -2a_1 + a_2 = y \\ -a_1 + a_2 = z \end{cases} \tag{2.1}$$

tem solução.

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 = x \\ -2a_1 + a_2 = y \\ -a_1 + a_2 = z \end{cases} \sim \begin{cases} a_1 + 2a_2 = x \\ 5a_2 = 2x + y \\ 3a_2 = x + z \end{cases} \sim \begin{cases} a_1 + 2a_2 = x \\ 5a_2 = 2x + y \\ 0 = x + 3y - 5z. \end{cases}$$

Portanto, (2.1) tem solução se, e somente se, $x + 3y - 5z = 0$. *Assim,* $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x + 3y - 5z\}$.

2.3.2 Dependência e Independência Linear

Um conjunto finito de vetores α gera um dado espaço vetorial V se cada vetor em V pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores de α. Em geral, pode haver mais de uma maneira de expressar um vetor em V como uma combinação linear de vetores de um conjunto gerador.

Exemplo 17 *Seja* $\mathbb{R}^3 = G(v_1, v_2, v_3, v_4)$, *no qual* $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,1,0)$, $v_3(1,0,1)$ *e* $v_4 = (1,0,1)$. *Note que*

$$(4,2,1) = 1v_1 + 2v_2 - 1v_3 + 1v_4$$

e também que

$$(4,2,1) = -1v_1 + 2v_2 + 0v_3 + 2v_4.$$

Nesta seção, estudaremos condições sobre as quais cada vetor de V pode ser escrito de uma única maneira como combinação linear dos elementos de um conjunto gerador.

Definição 2.5 *Sejam* $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *vetores em um espaço vetorial* V. *Dizemos que os vetores* $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *são linearmente independentes* (LI), *ou simplesmente independentes, se a equação*

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n = 0$$

é satisfeita somente se quando $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$. Caso exista algum $a_i \neq 0$, dizemos que os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são linearmente dependentes (LD) ou simplesmente dependentes. O conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é dito ser independente ou dependente se os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são independentes ou dependentes, respectivamente.

Observação 2.3 *Se um dos vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ é o vetor nulo, digamos $v_1 = 0$, então os vetores são dependentes, pois*

$$1v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n = 1 \cdot 0 + 0 + \cdots + 0 = 0$$

e o coeficiente de v_1 não é zero. Por outro lado, qualquer vetor nulo v é, por si só, independente, pois se $av = 0$, então $a = 0$.

Teorema 2.1 *$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é LD se, e somente se, um desses vetores for uma combinação dos outros.*

Demonstração. Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *LD* e

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_jv_j + \cdots + a_nv_n = 0$$

Segundo a definição dada, um dos coeficientes deve ser diferente de zero. Suponhamos que $a_j = 0$. Então

$$v_j = -\frac{1}{a_j}(a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_{j-1}v_{j-1} + a_{j+1}v_{j+1} + \cdots + a_{n-1}v_{n-1})$$

e portanto

$$v_j = -\frac{a_1}{a_j}v_1 - \frac{a_2}{a_j}v_2 - \cdots - \frac{a_{n-1}}{a_j}v_{n-1}.$$

Logo, v_j é uma combinação linear dos vetores.
Por outro lado, se tivermos $\{v_1, v_2 \ldots, v_j, \ldots, v_n\}$ tal que para algum j,

$$v_j = b_1v_1 + \cdots + b_{j-1}v_{j-1} + b_{j+1}v_{j+1} + \cdots + b_{n-1}v_{n-1},$$

temos

$$b_1v_1 + b_2v_2 + \cdots + b_jv_j + \cdots + b_nv_n = 0 \quad \text{com} \quad b_j \neq 0 \quad \text{e,}$$

concluí-se que: $\{v_1, v_2, \ldots,\}$ é *LD*. □

Essa proposição também é equivalente a: Um conjunto de vetores é *LI* se, e somente se, nenhum for uma combinação linear dos outros.

Exemplo 18 *Os vetores $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (0,1,0)$ e $v_3(0,0,1)$ são independentes, pois a equação*

$$a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = 0,$$

equivalente a esta

$$a_1(1,0,0) + a_2(0,1,0) + a_3(0,0,1),$$

e é satisfeita somente se $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

Exemplo 19 *Vamos verificar se os vetores* $v_1 = (1,1,9)$, $v_2 = (2,-1,3)$ *e* $v_3 = (-1,1,1)$ *são independentes ou dependentes. A equação*

$$a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = 0$$

é dada por

$$a_1(1,1,9) + a_2(2,-1,3) + a_3(-1,1,1) = (0,0,0)$$

ou, equivalentemente, é dada por pelo sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 - a_3 = 0 \\ a_1 - a_2 + a_3 = 0 \\ 9a_1 + 3a_2 + a_3 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Assim, os vetores v_1, v_2 *e* v_3 *são independentes, se e somente se, o sistema (1) tiver somente a solução trivial; ou são dependentes, se o sistema tiver uma solução não trivial.*

Segue que:

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 - a_3 = 0 \\ a_1 - a_2 + a_3 = 0 \\ 9a_1 + 3a_2 + a_3 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} a_1 + 2a_2 - a_3 = 0 \\ 3a_2 - 2a_3 = 0 \\ -15a_2 + 10a_3 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} a_1 + 2a_2 - a_3 = 0 \\ 3a_2 - 2a_3 = 0 \\ 3a_2 + 10a_3 = 0 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} a_1 + 2a_2 - a_3 = 0 \\ 3a_2 - 2a_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} a_1 + 2a_2 - a_3 = 0 \\ 3a_2 - 2a_3 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} a_1 + 2a_2 - a_3 = 0 \\ 3a_2 = 2a_3. \end{cases}$$

Observamos que o sistema é possível e indeterminado, SPI, ou seja, há várias solução para (1), não somente a trivial. Como exemplo, podemos escrever $(1,1,9) - 2(2,-1,3) - 3(-1,1,1) = (0,0,0) \to (1,1,9) = 2(2,-1,3) + 2(1,-1,1)$. *Assim temos* $v_1 = a_2v_2 + a_3v_3$. *Concluímos que* v_1, v_2 *e* v_3 *são linearmente dependentes.*

2.4 BASE E DIMENSÃO

Nesta seção, iremos apresentar um dos conceitos mais importantes no estudo da estrutura de espaço vetorial, o de base,o qual será bastante útil nos estudos seguintes desse trabalho. Iniciaremos revendo a definição de gerador.

Sejam W um subespaço do espaço vetorial V e A um subconjunto de V. Afirmamos que W é um subespaço gerado por A, ou que A é um conjunto gerador para W, se tivermos

$$W = \left\{ u \in V; \quad u = \sum_{i=1}^{n} k_i v_i \quad \text{onde} \quad k_i \in \mathbb{K}, v_i \in A, \quad \forall i = 1,2,3,\ldots,n \right\},$$

ou seja, um subespaço de W é gerado por A se todo elemento de W for uma combinação linear de elementos de A. Neste caso, denotaremos W por $G(A)$. Não é difícil provar que $G(A)$ é o menor subespaço que contém A.

Em geral, um espaço vetorial possui muitos conjuntos geradores, sendo o menor deles a nos interessar no conjunto gerador. Cada elemento de V se escreve de maneira única como combinação linear dos elementos deste conjunto gerador, ou seja, vetores LI.

Definição 2.6 *Seja α um conjunto de vetores de um espaço vetorial V. Diremos que α é uma base de Hamel (ou, simplesmente, base) de V se as seguintes condições forem verificadas:*

(i) *α é linearmente independente;*

(ii) *$V = G(\alpha)$.*

Assim, para verificar se um conjunto de vetores α é uma base de um vetor V, devemos verificar se α gera V e se α é LI.

Exemplo 20 *Considere $\mathbb{R}^2$ como espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. O conjunto $\{(1,0)(0,1)\}$ é gerador de $\mathbb{R}^2$, pois se $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, então*

$$(a,b) = a(1,0) + b(0,1) \quad com \quad a,b \in \mathbb{R}.$$

Além do mais, temos que o conjunto $\alpha = \{(1,0),(0,1)\}$ é LI. Portanto, α é base de $\mathbb{R}^2$, chamada base canônica do $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 21 *Seja $P(\mathbb{R})$ o conjunto dos polinômios com coeficientes em $\mathbb{R}$. O conjunto $\beta = \{1,x,x^2,\ldots,x^n,\ldots\}$ é 0 gerador de $P(\mathbb{R})$ visto como um dos espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. De fato, qualquer elemento de $P(\mathbb{R})$ é da forma*

$$p(x) = \alpha_0(1) + \alpha_1(x) + \alpha_2(x^2) + \cdots + \alpha_n(x^n),$$

para algum $n \in \mathbb{N}$ e $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ coeficientes reais. Além disso, β é LI e, portanto, uma base para $P(\mathbb{R})$.

Lema 2.2 (Lema de Zorn) *Seja A um conjunto parcialmente ordenado tal que toda cadeia tenha pelo menos um cota superior, então A tem um elemento maximal.*

A partir deste resultado, podemos demonstrar o teorema da Base de Hamel.

Teorema 2.3 (Base de Hamel) *Todo espaço vetorial admite uma base de Hamel.*

Demonstração. Considere o conjunto A cujos elementos são subconjuntos de vetores linearmente independentes de V. Note que A não é vazio, pois, por exemplo, se $v \in V$ não é nulo, então o conjunto $\{v\}$ formado pelo elemento v é LI. Consideremos a relação de ordem dada pela inclusão de conjuntos em A, isto é, $B \leq C$; e se $B \subseteq C$. Suponha que $\{I_n\} \in A$ seja uma cadeia em A, então $\bigcup_n I_n \in A$, pois um conjunto finito $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset \bigcup_n I_n$, então certamente existe n_0, tal que

$$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset I_{n_0}$$

Como I_{n_0} é formado por vetores linearmente independentes, podemos concluir que $\bigcup_n I_n$ é um conjunto de vetores linearmente independentes. Pelo Lema de Zorn, existe um elemento maximal em A, digamos I_m. Afirmamos que I_m é uma base de Hamel, efetivamente

Dado $v \neq I_m$, suponha que para qualquer combinação linear da forma

$$\lambda v + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$$

ou seja,

$$v = -\frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$

Isso mostra que todo elemento de V pode ser escrito como combinação linear de elementos de I_m. □

2.4.1 Dimensão

Definição 2.7 *A cardinalidade de uma base de um espaço vetorial não-nulo V é chamado de dimensão de V e denotamos por $\dim V$. Convencionamos que se V é o espaço vetorial nulo, então $\dim V = 0$. Se existe uma base finita de V com n elementos, dizemos que a dimensão de V é finita; caso contrário, a dimensão de V será infinita.*

Exemplo 22 *Seja V o espaço vetorial de todos os polinômios p de grau $\leqslant 5$ tais que $p(1) = 0$. Seja $p(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$ um polinômio neste espaço. Como*

$$p(1) = 0$$

segue que

$$a + b + c + d + e + f = 0.$$

Observe que

$$a = -b - c - d - e - f$$

tem 5 variáveis livres. Logo, $\dim(V) = 5$*, portanto, dimensão finita.*

Exemplo 23 (O conjunto dos Polinômios) *$P(\mathbb{R})$ é o espaço de todos os polinômios, de qualquer grau, com coeficientes reais. Uma base para isso é o conjunto $\{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$.*

De fato, $\alpha = \{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\}$ é um conjunto linearmente independente infinito de $P(\mathbb{R})$, pois dado um subconjunto finito β de α,

$$\beta = \{(x^{n_1}, \ldots, x^{n_k}); \quad n_i \in \mathbb{R}\}$$

e coeficientes $a_{n_1}, \ldots, a_{n_k}$ reais, teremos

$$p(x) = a_{n_1}x^{n_1} + \cdots + a_{n_k}x^{n_k} = 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, somente quando $a_{n_1} = \cdots = a_{n_k} = 0$. Além disso, todos os polinômios de $P(\mathbb{R})$ podem ser escritos como uma soma finita de combinações lineares de elementos de α. Logo, o conjunto da base de $P(\mathbb{R})$ é infinito com cardinalidade equivalente ao $\mathbb{N}$, portanto, dim $P(\mathbb{R}) = |\mathbb{N}|$.

Exemplo 24 *Seja X um conjunto não vazio arbitrário. O conjunto de todas as funções $f : X \to \mathbb{K}$ é um espaço vetorial com as definições habituais da soma de funções e do produto de função por escalar. Esse espaço tem dimensão infinita, se X for um conjunto com infinitos elementos. Em geral, não é possível exibir uma base do espaço $\{f : X \to \mathbb{R}\}$, se X tiver infinitos elementos.*

Exemplo 25 *Seja l o conjunto de todas as sequências (x_n) de elementos do corpo $\mathbb{K}$. Esse espaço vetorial de dimensão infinita é um caso particular do exemplo anterior, uma vez que uma sequência nada mais é do que uma aplicação com domínio igual ao conjunto dos naturais. Algumas vezes denota-se esse espaço por $\mathbb{K}^\infty$, ao invés de l.*

Exemplo 26 *Seja l_0 subespaço de l, formado por todas as sequências (x_i) tais que $x_i = 0$, exceto talvez para um número finito de índices i. Podemos exibir facilmente uma base do espaço l_0: dada por $\{l_1, \ldots, l_n, \ldots\}$, em que l_i denota a sequência cujos termos são todos iguais a 0, exceto o i-ésimo, que é igual a 1. Verifique que l_0 é isomorfo ao espaço $\mathbb{K}[t]$, isto é, existe uma bijeção linear $T : \mathbb{K}[t] \to l_0$.*

Teorema 2.4 *Sejam V um espaço vetorial e $\{v_1, \ldots, v_n\}$ um conjunto de elementos que geram V. Então, dentre esses elementos podemos extrair uma base para V.*

Demonstração. Se o conjunto $\{v_1, v_2, v_3 \ldots, v_{n-2}, v_1, v_n\}$ for *LI*, então, por definição já é uma base para V.
Agora, se o conjunto é *LD*, então existem escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ não todos nulos, tais que:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_{n-1} v_{n-1} + \alpha_n v_n = 0$$

Considere, por exemplo, que $\alpha_n \neq 0$, então podemos dividir a equação por α_n e isolar v_n:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_n}v_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_n}v_2 + \cdots + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}v_{n-1} + v_n = 0 \quad \Rightarrow \quad v_n = -\frac{\alpha_1}{\alpha_n}v_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_n}v_2 - \cdots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}v_{n-1}$$

Assim, afirmamos que v_n é uma combinação linear dos demais elementos,pois podemos extrair v_n do conjunto, que ele continua gerando V. Fazendo esse mesmo processo uma quantidade finita de vezes, obteremos um subconjunto de $\{v_1,\ldots,v_r\}$ formado por r elementos *LI* $(r \leq n)$ que ainda geram V, ou seja, formam uma base para V. □

Teorema 2.5 *Seja V um espaço vetorial gerado por um conjunto finito de n elementos $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Então, qualquer conjunto linearmente independente em V possui no máximo n elementos.*

Demonstração. Considere um subconjunto de V, com m elementos $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$, com $m > n$. Vamos mostrar que W é *LD*. Assim, qualquer conjunto *LI* possui, no máximo, n elementos.

Como $\{v_1,\ldots,v_n\}$ gera V, podemos extrair desse conjunto uma base para V. Seja $\{v_1,\ldots,v_r\}$ esta base. Então, existem escalares α_{ij}, com $i = 1,2,\ldots,r$ e $j = 1,2,\ldots,m$, tais que:

$$w_j = \alpha_1 j v_1 + \cdots + \alpha_i j v_i + \cdots + \alpha_r j v_r. \tag{2.2}$$

Consideremos agora a combinação linear nula de $w_1,\ldots,w_m$:

$$\beta_1 w_1 + \cdots + \beta_m w_m = 0. \tag{2.3}$$

Substituindo as relações de (2.2) em (2.3) obtemos:

$$\beta_1(\alpha_{11}v_1 + \cdots + \alpha_{r1}v_r) + \cdots + \beta_m(\alpha_{1m}v_1 + \cdots + \alpha_{rm}v_r) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (\beta_1\alpha_{11} + \beta_2\alpha_{12} + \cdots + \beta_m\alpha_{1m})v_1 + \cdots + (\beta_1\alpha_{r1} + \beta_2\alpha_{r2} + \cdots + \beta_m\alpha_{rm})v_r = 0.$$

Como $\{v_1,\ldots,v_r\}$ é uma base para V , então este conjunto é *LI*. □

2.5 ESPAÇO NORMANDO E BASE DE SCHAUDER

As bases de Hamel dos espaços normados de dimensão infinita têm pouca utilidade, pois, entre outros motivos, em geral, elas não são enumeráveis. Além disso, para certos espaços de dimensão infinita, o conjunto de infinitos vetores canônicos não é uma base de Hamel, pois existem vetores pertencentes a este espaço que não podem ser escritos como uma combinação linear finita dos vetores canônicos.

Para exemplificar, podemos mencionar o espaço c_0 de todas as sequências de escalares que convergem para zero, ou seja, fixado $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,

$$c_0 = \{(a_k)_{k=1}^{\infty} : a_k \in \mathbb{K} \text{ para todo } k \in \mathbb{N} \text{ e } a_k \to 0\}.$$

Não é difícil provar que c_0 é um espaço vetorial com as operações usuais de sequências. Em c_0, o correspondente conjunto de vetores canônicos não é uma base de Hamel, pois existem vetores pertencentes a este espaço que não podem ser escritos como uma combinação linear finita dos vetores canônicos. Por outro lado, cada vetor $x \in c_0$ pode ser aproximado por combinações lineares finitas destes elementos, formando assim um outro tipo de base, a Base de Schauder, a qual definiremos mais adiante. Estes fatos, associados à necessidade de uma definição de base que requeira uma topologia, nos levou a definição de espaços vetoriais normados.

Definição 2.8 *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Uma norma em V é uma aplicação $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_+$ tal que para quaisquer $u, v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ se tenha:*

(i) $\|u\| \geq 0 \quad e \quad \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$;

(ii) $\|\lambda u\| = |\lambda|\|u\|$;

(iii) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Um espaço normado V é um espaço vetorial no qual está definido uma norma.

Nesta seção, todos os espaços vetoriais que iremos considerar serão espaços normados.

Exemplo 27 *Consideremos o espaço euclideano $\mathbb{R}^n$. Vamos mostrar que, a aplicação*

$$x \in \mathbb{R}^n \to \|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \in \mathbb{R}$$

é uma norma em $\mathbb{R}^n$, em que $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. O primeiro e o segundo axioma da definição de norma são triviais.

(i) $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \geq 0$, *por definição.*

Além disso,

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_k = 0 \quad \forall k \in \{1, 2, 3, \cdots, n\}$$

ou seja,

$$\|x\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$$

(ii) $\|\lambda \cdot x\| = \left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda \cdot x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\lambda^2 \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

Logo,

$$\|\lambda \cdot x\| = |\lambda|\|x\|.$$

(iii) Considere em $\mathbb{R}^n$ produto interno usual. Então por definição, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$, temos

$$\begin{aligned}\|x+y\| &= \langle x+y, x+y\rangle \\ &= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2|\langle x,y\rangle| + \|y\|^2,\end{aligned}$$

aplicando a desigualdade de Cauchy-Schawarz, obtemos

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\|y\|,$$

assim,

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\ &\leq (\|x\| + \|y\|)^2\end{aligned}$$

Extraindo a raiz quadrada em ambos os lados da desigualdade acima, chegamos ao resultado desejado. Logo,

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Portanto, como as condições da definição de norma são satisfeitas, e $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial, acabamos de provar que $\mathbb{R}^n$ é um espaço normado com esta norma.

Exemplo 28 *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a \leq b$. Seja $\mathscr{C}([a,b])$ o conjunto de todas as funções contínuas de $[a,b]$ em $\mathbb{R}$, isto é,*

$$\mathscr{C}([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R}; \quad f \text{ é contínua}\},$$

que é um subespaço vetorial de $\mathscr{F}([a,b],\mathbb{R})$ definido no exemplo 8. Para cada $f \in \mathscr{C}([a,b])$, façamos

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|dt.$$

Vamos verificar que $\|\cdot\|_1$ é norma de $\mathscr{C}([a,b])$. Sejam $f, g \in \mathscr{C}([a,b])$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então,

(i) $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|dt \geq 0$ por definição de módulo.
Além disso, como f é contínua em $[a,b]$ e $|f(t)| \geq 0$ para todo $t \in [a,b]$,

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|dt = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |f(t)| = 0 \quad \forall t \in [a,b].$$

Assim, segue que

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|dt = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(t) = 0 \quad \forall t \in [a,b].$$

(ii) Como

$$\|\lambda \cdot f(x)\|_1 = \int_a^b |\lambda \cdot f(x)|dt = |\lambda| \int_a^b |f(x)|dt,$$

segue que

$$\|\lambda \cdot f(x)\|_1 = |\lambda| \|f(x)\|_1.$$

(iii) Segue da desigualdade triangular para o módulo e de propriedades de integral que

$$\begin{aligned} \|f(x)+g(x)\|_1 &= \int_a^b |f(x)+g(x)|dt \\ &\leq \int_a^b |f(t)|+|g(t)|dt \\ &= \int_a^b |f(x)|dx + \int_a^b |g(x)|dt = \|f(x)\|_1 + \|g(x)\|_1. \end{aligned}$$

Portanto, como as condições da definição de norma são satisfeitas temos que o espaço vetorial $\mathscr{C}([a,b])$, com a norma $\|\cdot\|_1$ é um espaço normado.

Exemplo 29 *Podemos estabelecer outro tipo de norma no espaço vetorial $\mathscr{C}([a,b])$, definido no exemplo anterior. Para cada $f \in \mathscr{C}([a,b])$, façamos,*

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|.$$

Pala definição de norma, afirmamos que (i) e (ii) são satisfeitos e o resultado, imediato.

(iii) Note que,

$$|(f+g)(t)| = |f(t)+g(t)| \leq |f(t)|+|g(t)| \quad \forall t \in [a,b]. \tag{2.4}$$

Além disso, como para todo $t \in [a,b]$,

$$|f(t)| \leq \sup_{t\in[a,b]} |f(t)| \quad e \quad |g(t)| \leq \sup_{t\in[a,b]} |g(t)|,$$

segue que,

$$|f(t)|+|g(t)| \leq \sup_{t\in[a,b]} |f(t)| + \sup_{t\in[a,b]} |g(t)| \quad \forall t \in [a,b]. \tag{2.5}$$

Logo, de (2.4) e (2.5),

$$\sup_{t\in[a,b]} |(f+g)(t)| \sup_{t\in[a,b]} |f(t)| + \sup_{t\in[a,b]} |g(t)| \quad \forall t \in [a,b].$$

Portanto, $\|\cdot\|_\infty$ é uma norma em $\mathscr{C}([a,b])$, e assim, $\mathscr{C}([a,b])$ é um espaço normado com esta norma.

Exemplo 30 *Fixamos $p \in [1,\infty)$. Seja l^p o conjunto de todas as sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, tais que $\sum_{n=o}^{\infty} |x_n|^p$ converge. Considere a soma e a multiplicação por escalar definidas de modo usual. Para $p \geq 1$ e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, façamos*

$$\|x\| = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \in \mathbb{R}.$$

Provemos que l^p também é um espaço normado com esta norma.

Os axiomas i) e ii) da definição de norma são de fácil verificação. Quanto ao iii), como o caso em que $p = 1$ é imediato, nos restringiremos ao caso em que $p > 1$. Para demonstrá-la, vamos utilizar as desigualdades de Hölder e de Minkowski. Inicialmente, vamos estabelecer a seguinte desigualdade auxiliar:

Se $0 < \lambda < 1$ e $a, b \geq 0$, então

$$a^{\lambda} b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1-\lambda) b.$$

De fato, podemos nos restringir ao caso em que $0 < a < b$. Consideremos a seguinte aplicação derivável

$$t \in [a,b] \to t^{1-\lambda} \in \mathbb{R}.$$

Pelo teorema do valor médio, existe $t \in [a,b]$ tal que

$$b^{1-\lambda} - a^{1-\lambda} = (1-\lambda).$$

Como $t > a$, temos $t^{-\lambda} < a^{-\lambda}$, então

$$b^{1-\lambda} - a^{1-\lambda} < (1-\lambda) a^{-\lambda} (b-a).$$

Multiplicando ambos os lados desta última desigualdade por a^{λ}, obtemos

$$a^{\lambda} b^{1-\lambda} \leq \lambda a + (1-\lambda) b,$$

como desejamos. Provemos a desigualdade de Hölder. Seja $q \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=o}^{n} x_k$, $\sum_{k=0}^{n} y_k \in \mathbb{K}$, então

$$\sum_{k=0}^{n} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=0}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=0}^{n} |y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Vamos considerar o caso em que

$$\sum_{k=0}^{n} |x_k| > 0 \quad e \quad \sum_{k=0}^{n} |y_k| > 0,$$

pois, se algum desses termos for nulo, a desigualdade é claramente satisfeita. Para cada $0 < k < n$*, façamos*

$$a_k = \frac{|x_k|^p}{\sum_{i=0}^{n} |x_i|^p} \quad e \quad b_k = \frac{|y_k|^q}{\sum_{i=0}^{n} |y_i|^q}.$$

Fazendo $\lambda = \frac{1}{p}$ *e aplicando a desigualdade que provamos anteriormente, temos*

$$\frac{|x_k|}{\left(\sum_{i=0}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}} \frac{|y_k|}{\left(\sum_{i=0}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} \frac{|x_k|}{\sum_{i=0}^{n} |x_i|^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_k|}{\sum_{i=0}^{n} |y_i|^q}$$

para cada $k = 0, 1, \ldots, n$*. Como a desigualdade acima, vale para cada* $k = 0, 1, \ldots, n$*, ela também é válida para o somatório, com k variando de 0 até n,*

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{|x_k|}{\left(\sum_{i=0}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}} \frac{|y_k|}{\left(\sum_{i=0}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \right) \leq \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{p} \frac{|x_k|}{\sum_{i=0}^{n} |x_i|^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_k|}{\sum_{i=0}^{n} |y_i|^q} \right)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\left(\sum_{i=0}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=0}^{n} |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \sum_{k=0}^{n} |x_k y_k| &\leq \frac{1}{p} \frac{1}{\sum_{i=0}^{n} |x_i|^p} \sum_{k=0}^{n} |x_k|^p + \frac{1}{p} \frac{1}{\sum_{i=0}^{n} |y_i|^q} \sum_{k=0}^{n} |y_k|^q \\ &\leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \end{aligned}$$

Logo,

$$\sum_{k=0}^{n} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=0}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=0}^{n} |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

como queríamos demostrar.

A seguir, provemos a desigualdade de Minkowski.

Se $n \in \mathbb{N}$*,* $\sum_{k=0}^{n} x_k$*,* $\sum_{k=0}^{n} y_k$ *com* x_k*,* $y - k \in \mathbb{K}$*, então*

$$\left(\sum_{k=o}^{n} |x_k + y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=o}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=o}^{n} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Quando $\sum_{k=o}^{n} |x_k + y_k|^p = 0$*, a desigualdade acima é claramente satisfeita. Vamos considerar o caso em que* $\sum_{k=o}^{n} |x_k + y_k|^p > 0$*. Temos*

$$\sum_{k=o}^{n} |x_k + y_k|^p = \sum_{k=o}^{n} \left(|x_k + y_k|^{p-1} |x_k + y_k| \right).$$

Aplicando a desigualdade triangular, temo que $|x_k+y_k| \leq |x_k|+|y_k|$, *e*

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}|x_k+y_k|^p &\leq \sum_{k=0}^{n}|x_k+y_k|^{p-1}|x_k| + \sum_{k=0}^{n}|x_k+y_k|^{p-1}|y_k| \\ &\leq \left(\sum_{k=0}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=0}^{n}|x_k+y_k|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &+ \left(\sum_{k=0}^{n}|y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=0}^{n}|x_k+y_k|^{(p-1)q}\right)^{\frac{1}{q}},\end{aligned}$$

sendo a última desigualdade válida pela a de Holder. Como $(p-1)q = p$, *vem*

$$\sum_{k=0}^{n}|x_k+y_k|^p \leq \left(\sum_{k=0}^{n}|x_k+y_k|^p\right)^{\frac{1}{q}}\left[\left(\sum_{k=0}^{n}|x_k|^p\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{k=0}^{n}|y_k|^p\right)^{\frac{1}{q}}\right].$$

Multiplicando ambos os lados da desigualdade acima por

$$\left(\sum_{k=0}^{n}|x_k+y_k|^p\right)^{-\frac{1}{q}},$$

obtemos o resultado desejada.

Após estes resultados, podemos demonstrar o axioma iii). Primeiramente, observe que se $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^p$, *então,*

$$\|x\| = \left(\sum_{n=0}^{\infty}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{N}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

e

$$\|y\| = \left(\sum_{n=0}^{\infty}|y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{N}|y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Pela desigualdade de Minkowski,

$$T_N = \left(\sum_{n=0}^{N}|x_n+y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=0}^{N}|x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=0}^{N}|y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

ou seja

$$T_N = \left(\sum_{n=0}^{N}|x_n+y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|x+y\|.$$

Logo, a sequência T_N *é limitada e como seus termos não são negativos, ela é uma sequência monótona não decrescente. Portanto, a sequência* T_N *é convergente, ou seja, o limite de* T_N *existe*

$$\lim_{N\to\infty} T_N = \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{N}|x_n+y_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|x+y\|.$$

Como $T_N \leq \|x\| + \|y\|$, para cada $N \in \mathbb{N}$, então

$$\lim_{N\to\infty} T_N \leq \|x\| + \|y\|,$$

ou seja,

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

□

Definição 2.9 *Uma base de Schauder de um espaço V é uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em V, em que, a cada vetor $x \in V$, associa-se uma única sequência de escalares $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{K}$ de forma que*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n := \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \alpha_n x_n$$

Dessa maneira, se $\mathscr{B} = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma base de Schauder de um espaço V, dado um vetor x de V, x pode não ser uma combinação linear de elementos de $\mathscr{B}$, mas deve ser uma combinação linear infinita "no sentido de que cada vetor de V é aproximado por combinações lineares finitas de $\mathscr{B}$".

Note que o conceito de base de Hamel faz sentido em qualquer espaço vetorial, mesmo que este não seja um espaço normado. No entanto, para bases de Schauder, é necessário que estejamos tratando de espaços normados, pois queremos que cada vetor v do espaço seja aproximado "por combinações lineares finitas. Assim, para podermos falar em aproximado", precisaremos de alguma noção de distância, que neste caso é a norma. De fato,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$$

se

$$\lim_{N\to\infty} \|x - \sum_{n=1}^{N} \alpha_n x_n\| = 0.$$

Definição 2.10 *Fixamos $p \in [1,\infty)$. Seja l^p o conjunto de todas as sequências $(x_n) \in n$ de elementos de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, tais que $\sum_{n=o}^{\infty} |x_n|^p$ converge.*

Exemplo 31 *A base de Schauder do espaço $l^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, é dada por*

$$\mathscr{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots\} \subset \mathbb{R}^{\infty},$$

em que

$$v_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$$

é a sequência infinita cujo n-ésimo termo é 1 *e os demais são iguais a zero.*

De fato, para qualquer elemento $x \in l^p(\mathbb{R})$ *da forma* $x = (x_1, x_2, \ldots)$ *temos*

$$x = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots,$$

pois

$$\lim_{k\to\infty} \|x - (x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n)\| = \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{i=k+1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\lim_{k\to\infty} \sum_{i=k+1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

e como $x \in l^p(\mathbb{R})$, *então*

$$\|x\|_p^p = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$$

pelo que $\|x\|_p^p = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p$ *é o resto de uma série convergente, logo tende para zero quando* $k \to \infty$, *e assim provamos que cada elemento* $x \in l^p(\mathbb{R})$, *pode ser escrito como combinação linear (infinita) de elementos de* $\mathscr{B}$. *Vamos provar que esta maneira de escrever é única. Suponhamos por absurdo que o vetor x possa ser escrito de duas maneiras distintas, isto é,*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n v_n \quad e \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n v_n$$

no qual $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$, *então*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n v_n = \sum_{n=1}^{\infty} v_n v_n$$

ou seja,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n - \beta_n) v_n = 0.$$

Segue que,

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n - \beta_n) v_n \right\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n - \beta_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0.$$

Logo, $|\alpha_n - \beta_n| = 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *e então todo n natural. Portanto, todo vetor* $x \in V$ *se exprime de modo único.*

Exemplo 32 *O conjunto* $\mathscr{B} = \{v_1, \ldots, v_n, \ldots\} \subset \mathbb{R}^\infty$ *também é base de Schauder para o espaço* c_0 *de todas as sequências de elementos de* $\mathbb{R}$ *convergindo para zero, com a norma* $\|\cdot\|_\infty$.

De fato, para qualquer elemento $x \in c_0$ *da forma* $x = (x_1, x_2, \ldots)$ *temos*

$$x = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_k v_k$$

pois,

$$\lim_{k\to\infty} \|x - (x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_k v_k)\| = \lim_{k\to\infty} \left\| \sum_{i=k+1}^{\infty} x_i v_i \right\| = \lim_{k\to\infty} \left(\sup_{k+1 \le i \le \infty} (|x_i|) \right).$$

Como x é uma sequência de elementos de $\mathbb{R}$ convergindo para zero, então, quando $k \to \infty$, os x_i tendem a zero. Logo,

$$\lim_{k\to\infty}\left(\sup_{k+1\leq i\leq\infty}|x_i|\right)=0.$$

Portanto, todo elemento $x \in c_0$, pode ser escrito como combinação linear (infinita) de elementos de $\mathscr{B}$.

Vamos provar sua unicidade. Suponhamos por absurdo que o vetor x possa ser escrito de duas maneiras distintas, isto é,

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n v_n \quad e \quad x=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n v_n$$

as quais $\alpha_i\beta_i \in \mathbb{R}$, então

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n v_n=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n v_n$$

ou seja

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n-\beta_n)v_n=0.$$

Segue que,

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n-\beta_n)v_n\right\|=\sup_{1\leq n\leq\infty}|\alpha_n-\beta_n|=0$$

Logo, $|\alpha_n-\beta_n|=0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e assim $\alpha_n=\beta_n$ para todo n natural. Portanto, todo vetor $x \in V$ se exprime de modo único.

Capítulo 3

A INTUIÇÃO A PARTIR DO ESTUDO DA LINEABILIDADE

Este capítulo foi elaborada a partir das referências bibliográficas [2, 4, 6, 15].

Vimos na introdução deste trabalho alguns exemplos simples que indicam que a nossa intuição pode nos levar a várias perguntas instigantes. Neste capítulo, veremos diversos outros fatos matemáticos interessantes que mostram que não devemos confiar na nossa intuição.

Este tema está relacionado a uma área relativamente nova de pesquisa, chamada Lineabilidade, que conecta Análise e Álgebra e tem atraído ultimamente a atenção de muitos autores. Esta área busca a existência de grandes estruturas matemáticas compostas de objetos com certas propriedades "patológicas".

Os capítulos anteriores ofereceram ferramentas para nos aprofundarmos no estudo introdutório dessa área. Após apresentarmos os conceitos básicos sobre esta teoria, discutiremos alguns exemplos recentes e propriedades de lineabilidade nos espaços de sequências e funções.

3.1 NÃO CONFIE NA SUA INTUIÇÃO

Daremos nesta seção alguns outros exemplos simples que mostram que não devemos confiar fielmente em nossa intuição.

3.1.1 Desafio da Altura da Corda

Considere um campo de futebol com 100m de comprimento por 50m de largura. Um jogador decide amarrar uma corda inelástica em cada extremidade do comprimento desse campo, para isso ele fixa as pontas da corda em cada uma das traves, de modo que a corda fique totalmente esticada e tocando o gramado (note que a corda possui exatamente 100m). Depois, a esta corda é acrescentado 1m, ficando assim com um comprimento total de 101m.

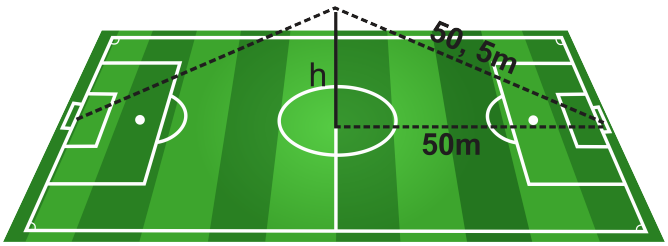
Como a corda ficou frouxa o jogador decide ir até o centro do gramado e levantar a corda até que a mesma fique novamente esticada. Pergunta-se: quantos centímetros, ou metros, o jogador terá que levantar a corda para que ela fique totalmente esticada?

Será que o jogador deverá erguer a corda somente alguns centímetros do gramado até que a mesma fique esticada?

Como o acréscimo foi apenas 1 metro, se nos deixarmos levar por nossa intuição, seremos levados a crer que a altura necessária para que a corda fique totalmente esticada não deva ser tão grande e que o jogador deve, no máximo, levantar somente alguns centímetros. Mas se fizermos os cálculos, veremos que o jogador nem sequer conseguirá atingir a altura necessária, pois não existem seres humanos com aproximadamente 7 metros! Isso mesmo, a corda deverá egue-se a uma altura de aproximadamente 7 metros acima do gramado até que ela fique totalmente esticada.

Para a resolução deste problema usaremos o Teorema de Pitágoras. Formaremos o seguinte triângulo retângulo: a metade do campo é um dos catetos, que tem exatamente 50m. A hipotenusa é a metade da corda, que neste momento tem um comprimento total de 101m, logo a metade ficará com 50,5m. A altura procurada é exatamente a altura do triângulo relatado que chamaremos de h, no caso o outro cateto (ver Figura 3.1).

Figura 3.1: Campo



Fonte: Produção própria

Agora resolvendo o problema,

$$
\begin{aligned}
&50,5^2 = 50^2 + h^2 \\
&\Rightarrow h^2 = 50,5^2 - 50^2 \\
&\Rightarrow h^2 = 2550,25 - 2500 \\
&\Rightarrow h = \sqrt{50,25} \\
&\Rightarrow h \approx 7,09.
\end{aligned}
$$

3.1.2 Desafio da Escolha

Suponha que uma pessoa está participando de um programa de televisão e lhe é fornecido a possibilidade de escolher entre 3 portas. Atrás de uma das portas existe um carro e atrás das demais não existe prêmio algum. O participante escolhe um porta, digamos a porta 1, e o apresentador abre outra porta, digamos a porta 3, revelando que não há nada atrás dela e, então, oferece ao participante a oportunidade de trocar de porta. O que é mais vantajoso?

Trocar ou não a porta escolhida?

Será que devemos confiar em nosso palpite inicial e permanecer na porta que escolhemos inicialmente? Será que tanto faz trocar ou não? Já que temos duas portas uma está com o prêmio e a outra não. Será que é mais vantajoso não trocar? Já que uma das portas foi aberta então a possibilidade da escolha ter sido a certa é maior.

Vamos analisar duas estratégias:

1. O participante seleciona uma porta e, se lhe é fornecida a oportunidade de trocar de porta, ele recusa.

2. O participante seleciona uma porta e, se lhe é fornecida a oportunidade de trocar de porta, ele sempre troca a porta escolhida.

Utilizando a estratégia 1, o participante ganhará o carro com probabilidade 1/3, já que em 1/3 das vezes a porta que ele escolheu terá o carro como o prêmio.

Utilizando a estratégia 2, o participante somente ganhará o carro se, a princípio, escolher uma porta que não contém o carro como prêmio, o que ocorre em 2/3 das vezes, ou seja, a probabilidade de ganhar com a estratégia 2 é 2/3 e, portanto, duas vezes maior do que utilizando a estratégia 1.

Observação 3.1 *O problema descrito acima é conhecido como o problema de Monty Hall. Ele surgiu a partir de um concurso televisivo dos Estados Unidos chamado "Let's Make a Deal", exibido na década de 1970.*

Observação 3.2 *Este desafio pode ser lançado para motivar a introdução do conteúdo de porcentagem, nas turmas do 9º ano ou da 3ª série médio, e probabilidade, 2ª série médio.*

3.1.3 Desafio da Espessura do Papel

Um desafio bastante conhecido é o seguinte: quantas vezes se pode dobrar uma folha de papel do tipo A4? Essa folha tem 210mm de largura, 297mm de altura e 0,074mm de espessura.

Você pode até conseguir dobrar 7 ou 8 vezes, mas nada além disso. Porém, o nosso desafio será um pouco diferente. Suponhamos que se pode dobrar a folha 50 vezes, a qual espessura essa folha chegará?

A nossa intuição nos leva a supor que não teremos um valor muito grande, ou até mesmo que teremos um valor próximo ao valor inicial, ou seja, próximo de 0,074mm.

Para resolver esse desafio, usaremos as propriedades exponenciais. Outra forma de resolvê-lo seria usando uma PG.

Observe o seguinte comportamento:

1. Primeira dobra: $2 \times 0,074mm$, a folha terá duas vezes a espessura inicial;
2. Segunda dobra: $2 \times 2 \times 0,074mm$, a folha terá duas vezes a espessura anterior;
3. Terceira dobra: $2 \times 2 \times 2 \times 0,074mm$, a folha terá duas vezes a espessura anterior;

$$\vdots$$

50. Quinquagésima dobra: $\underbrace{2 \times \cdots \times 2}_{50} \times 0,074mm$.

$$\vdots$$

n. n-ésima dobra: $\underbrace{2 \times \cdots \times 2}_{n} \times 0,074mm$.

Deduzimos a fórmula a seguir: na n-ésima dobra, a espessura da folha será

$$\underbrace{2 \times \cdots \times 2}_{n} \times 0,074 = 2^n \times 0,074mm.$$

Para $n = 50$, ou seja, 50 dobras.

$$\begin{aligned} 2^{50} \times 0,074 &= 83.316.593.106.354,176\text{mm} \\ &= 83.316.593.106,354176\text{m} \\ &= 83.316.593,106354176\text{Km} \\ &\approx 83.316.593\text{Km}. \end{aligned}$$

Qual é a distância da Terra à Lua? É 384.440km, ou seja, essa distância encontrada ultrapassa a distância da terra à lua.

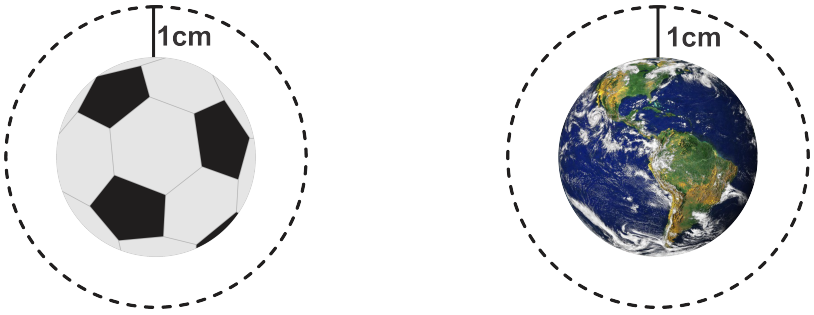
Qual é a distância da Terra ao Sol? É 149.600.000Km, ou seja, com mais uma dobra ultrapassa a distância da Terra ao Sol.

3.1.4 Desafio da Circunferência

Suponha uma bola de futebol com dimensões oficias para o campo de futebol. Nesta bola, é passada uma linha sob sua circunferência, ou seja, o comprimento da linha é a da circunferência da bola. Após isto, essa linha é suspensa com uma altura de 1 centímetro em todo seu contorno, formando uma nova circunferência.

Agora, suponhamos o formato do planeta terra totalmente esférico como o da bola citada anteriormente. Semelhante ao caso da bola, sob a Terra será passada uma linha ao seu redor, a linha terá o comprimento da circunferência da Terra. Após isso, essa linha é suspensa exatamente 1 centímetro em todo o seu contorno (ver Figura 3.2).

Figura 3.2: À esquerda, a imagem da bola, à direita, a imagem da Terra.



Fonte: Produção própria

Finalmente nossa pergunta:

Em qual caso a quantidade de linha acrescida foi maior para "afastá-la" a uma distância de 1cm de sua superfície, foi maior, o da bola ou da Terra?

O nosso pensamento intuitivo pode nos levar a seguinte dedução: como a circunferência da Terra é bem maior do que a da bola, será preciso um comprimento maior para que a nova circunferência fique suspensa a um centímetro da Terra se comparado ao comprimento necessário para que a nova circunferência da bola fique a um centímetro desta.

Mas, será que isto é verdade?

Recorreremos aos nossos cálculos matemáticos: Calculado o aumento da circunferência em cada caso.

Caso bola: lembre-se de que o cálculo do comprimento de uma circunferência é dado por $C = 2\pi r$, em que C é o comprimento e r, o raio. Definiremos $C_{0,b}$ e $r_{0,b}$ comprimento e raio da linha, respectivamente, antes de ser suspensa. $C_{1,b}$ e $r_{1,b}$ comprimento e raio da linha , respectivamente, após ser suspensa.

Observe que após a suspensão da linha, o diâmetro da nova circunferência da bola

sofre um acréscimo de 2 centímetros, isso implicará $r_{1,b} = r_{0,b} + 1$, assim

$$\begin{aligned} C_{1,b} &= 2\pi r_{1,b} \\ &= 2\pi(r_{0,b} + 1) \\ &= 2\pi r_{0,b} + 2\pi. \end{aligned}$$

Calculando o acréscimo

$$\begin{aligned} C_{1,b} - C_{0,b} &= 2\pi r_{0,b} + 2\pi - 2\pi r_{0,b} \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

Portanto, devemos acrescentar 2πcm à linha que envolvia a bola para que ela se afastasse 1 centímetro de toda a superfície da bola.

Caso Terra: Definiremos $C_{0,t}$ e $r_{0,t}$ comprimento e raio da linha, respectivamente, antes de ser suspensa. $C_{1,t}$ e $r_{1,t}$ comprimento e raio da circunferência da linha, respectivamente, após ser suspensa.

Observe que, podemos usar a mesma estratégia para o cálculo do comprimento da circunferência suspensa sob a Terra. Como $r_{1,b} = r_{0,b} + 1$, concluímos que

$$\begin{aligned} C_{1,b} &= 2\pi r_{1,b} \\ &= 2\pi(r_{0,t} + 1) \\ &= 2\pi r_{0,t} + 2\pi. \end{aligned}$$

Calculando o acréscimo

$$\begin{aligned} C_{1,t} - C_{0,t} &= 2\pi r_{0,t} + 2\pi - 2\pi r_{0,t} \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

O acréscimo também foi de 2πcm, para nossa surpresa!

Em nossas contas, consideramos um raio arbitrário e chegamos ao mesmo resultado, ou seja, não importa se fizermos a situação proposta em uma bola, um limão, a Terra, Júpiter ou o Sol, sempre teremos o mesmo resultado.

3.1.5 Desafio da Mistura

Vamos expor uma situação hipotética.

Temos dois recipientes; um com Água Tônica e outro com Gin, cada recipiente tem 200 mililitros.

Serão realizados dois procedimentos com essas duas substâncias:

1. É retirado 40mL do recipiente que contém Tônica e colocado no recipiente que contém Gin, formando assim uma mistura de Tônica e Gin.

2. Após isso, do recipiente que tem a mistura de Gin e Tônica é retirado 40mL e colocado no recipiente que contém a Tônica 100% pura. Voltando assim os dois recipientes com o mesmo volume de 200mL cada, porém, em nenhum deles têm mais substância pura, mas sim misturas.

Vamos ao nosso questionamento:

Em qual recipiente há mais mistura, isto, é em qual copo tem mais líquido do outro tipo? De outra forma: Há mais Gin no recipiente que era 100% Tônica ou tem mais Tônica no recipiente que era Gin puro?

Nossa intuição nos leva acreditar que tenha mais Tônica no recipiente que tinha Gin puro, do que Gin no recipiente que tinha somente Tônica. Isto acontece porque neste primeiro caso foi acrescentado Gin puro, e no segundo caso foi acrescentado uma mistura de Gin e Tônica, ou seja, neste caso menos Tônica. Será que é verdade isso?

Analisando a quantidade de misturas em cada recipiente, chamaremos de recipiente 1 o que tem inicialmente Tônica, e de recipiente 2 o que tem inicialmente Gin:

i) Vamos encontrar a quantidade de Gin no recipiente 1, seja 200 mL de Tônica e retirando 40 mL implicará que o Tônica ficará com $\frac{160}{200} = \frac{4}{5}$ do 200 mL e $\frac{1}{5}$ é de mistura de Tônica e Gin, mas qual a porcentagem de Gin? Segue que, da mistura inicial formada $\frac{200}{240} = \frac{5}{6}$ de Gin. Implicará que há $\frac{5}{6}$ de Gin em 40 mL em todo o recipiente que contém 200 mL, e que 40 mL equivale a $\frac{1}{5}$, implicando que $\frac{1}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$ de Gin em todo o recipiente.

ii) vamos encontrar a quantidade de Tônica no recipiente 2, seja 200 mL de Gin e é colocado 40 mL de Tônica, teremos $\frac{40}{240} = \frac{1}{6}$ de Tônica em todo o recipiente.

Concluímos que em ambos os casos a quantidade da substância que foi acrescentado nos recipientes foi de $\frac{1}{6}$.

3.1.6 Desafio Matemático da Poupança

Um professor de Matemática questiona um aluno para ele escolher uma das seguintes opções: No período de um ano, que todo dia seja depositado em sua conta os seguintes valores: R$0,01 no primeiro dia, R$0,02 no segundo dia, R$0,04 no terceiro dia, R$0,08 no quarto dia, R$0,16 no quinto dia, assim sempre dobrando a quantidade a cada dia. Ou prefere que diariamente seja depositado em sua conta a quantia de R$1.000.000.000,00 no primeiro dia, R$2.000.000.000,00 no segundo, R$3.000.000.000,00 no terceiro, R$4.000.000.000,00 no quarto, R$5.000.000.000,00 no quinto, isto no mesmo período. Nas seguintes condições, ele só poderá ter acesso ao valor depois de um ano e ficará com o valor da diferença, ou seja, se escolher o menor valor terá que pagar o que faltar, caso escolha o maior valor, ficará no lucro.

No primeiro caso: Como o ano tem 365 dias, será depositado a soma dos primeiros termos da PG: 0,01; 0,02; 0,04; 0,08; 0,16; 0,32; ..., de razão $q = 2$:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = 0{,}01 \cdot \frac{1-2^{365}}{1-2} = (2^{365}-1) \cdot 0{,}01.$$

Fazendo esse cálculo, encontraremos o imenso valor de:

R$751.533.626.487.626.632.924.633.790.972.587.848.760.218.415.650.662.358.626.
333.110.890.306.888.036.674.701.908.383.679.483.125.984.970.219.192,31.

No segundo caso: Como o ano tem 365 dias, será depositado a soma dos primeiros termos da PA: 1.000.000.000, 2.000.000.000, 3.000.000.000, 4.000.000.000, 5.000.000.000, de razão $r = 1.000.000.000$. O termo da posição 365 é dado por:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r = 1000000000 + (365-1) \cdot 1000000000.$$

No último dia do ano, será depositado a quantia de R$ 365.000.000.000,00. Calculado o valor da soma dos primeiros termos da PA, temos

$$\begin{aligned} S_{365} &= \frac{a_1 + a_{365}}{2} \cdot 365 \\ &= \frac{1.000.000.000 + 365.000.000.000}{2} \cdot 365 \\ &= 66.795.000.000.000{,}00. \end{aligned}$$

Portanto, a diferença é dada por:

R$751.533.626.487.626.632.924.633.790.972.587.848.760.218.415.650.662.358.626.
333.110.890.306.888.036.674.701.908.383.679.483.125.984.970.219.192,31
$-66.795.000.000.000{,}00.$

Dessa forma, escolhendo o primeiro caso daremos um lucro de:

R$751.533.626.487.626.632.924.633.790.972.587.848.760.218.415.650.662.358.626.
333.110.890.306.888.036.674.701.908.383.679.483.059.189.970.219.192,31.

3.2 COMO DESENVOLVER ESTA ABORDAGEM EM SALA DE AULA?

Como vimos anteriormente, não é possível confiar totalmente em nossa intuição, porque esta algumas vezes pode nos enganar. Deixaremos algumas sugestões de como aplicar conteúdos matemáticos que se ligam a tal abordagem na nossa prática diária de sala de aula.

3.2.1 Sugestões para aplicação

A Matemática é uma disciplina que trabalha com o exato, e o tema explorado neste trabalho reforça isso. Para comprovar que em alguns casos a nossa intuição é falha, pensou-se na aplicação de uma oficina ou de um mini projeto pedagógico que relaciona a abordagem teórica à prática, visando a exploração do aprendizado dos discentes, de modo que estes percebam que, através dos cálculos e dados matemáticos aprendidos, chegarão a resultados muito mais eficientes. Tais atividades poderão ser desenvolvidas tanto com alunos do Ensino Fundamental, quanto para os do Ensino Médio, utilizando recursos ou objetos do cotidiano escolar, para alcançar resultados eficazes.

No primeiro momento, o professor deverá abordar o conceito matemático que irá trabalhar, esclarecendo-o com a utilização de exemplos imagéticos no programa Power Point, orientando aos alunos que não podemos confiar totalmente em nossa intuição, pois ela, algumas vezes, poderá ser falha. Após as explanações, o docente deverá propor uma atividade desafiadora que consiste na resolução de questões problemas, em que os alunos resolverão as questões apenas seguindo a intuição, que podem ser os desafios citados neste trabalho, bem como ver outros semelhantes a estes.

A partir da abordagem teórica, o professor poderá propor aulas práticas utilizando as questões problemas para comprovar que os resultados, que supostamente foram encontrados facilmente, podem não ser tão certos como se havia imaginados. Para esta atividade, o professor poderá explorar teoricamente regras e cálculos matemáticos e a interpretação de dados. Buscando comprovar a teoria aplicada, o docente desenvolverá estratégias de como analisar os estudos de caso, com a utilização de recursos físicos do dia a dia, como réguas, trenas, objetos das mais variadas formas geométricas, corda, entre outros, para construir os dados e conceitos matemáticos necessários para verificar o se os resultados coincidiram ou não.

Como as tecnologias digitais têm propiciado uma nova maneira de as pessoas buscarem novas formas de conhecimento, sugerimos também uma outra forma de aplicar essa abordagem teórica, que consiste em o professor sugerir o uso das ferramentas tecnológicas presentes na vida dos alunos, a citar o uso do aplicativo Geogebra, encontrado na Play Store do celular, ou no soft dos computadores. Nesta aula, o professor pedirá aos discentes para baixarem o aplicativo e mostrará exemplos virtuais para comprovar que as explicações e exemplos ofertados podem ser recriados a partir da construção de imagens que reforcem que a nossa intuição não é totalmente segura, explorando, também, diversos conceitos para a solução dos desafios e problemas matemáticos do dia a dia.

Após a construção concreta dos conceitos, o docente observará quais alunos obtiveram mais êxito nas citadas aulas e demonstraram mais domínio no conteúdo, para que estes sejam alunos multiplicadores, ou seja aqueles que ajudarão aos colegas a desenvolverem a compreensão de tais abordagens, e juntamente com o docente, criarem mais possibilidades de estudos e análises de casos semelhantes aos que foram citados neste trabalho com o intuito

de comprovar que nossa intuição não é 100% segura.

Com o auxílio de tais atividades, o professor levará os alunos a questionarem se realmente podemos confiar em nossa intuição, mostrando até que ponto ela poderá ser positiva ou negativa, possibilitando a estes maneiras de como comprovar os resultados, que inicialmente tinham sido construídos facilmente, mas que poderão apresentar resultados divergentes, assim, o docente ofertará sugestões para os alunos se aprofundarem nos conceitos matemáticos.

3.3 LINEABILIDADE

Atualmente, chamamos de "lineabilidade" a existência de grandes estruturas algébricas (espaços vetoriais de dimensão infinita) compostas de objetos matemáticos com certas propriedades "patológicas". Este tema é uma área relativamente nova da matemática que conecta análise e álgebra e tem atraído ultimamente a atenção de muitos autores. Nesta seção, apresentaremos os conceitos básicos sobre esta teoria, a discussão de algumas propriedades e alguns exemplos recentes dessa nova abordagem.

Ao longo da história, sempre existiram objetos matemáticos que contradiziam a intuição de matemáticos famosos. Para ilustrar essa situação, vamos lembrar dos famosos "montros de Weierstrass": sempre que imaginamos uma função contínua de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, muito provavelmente pensamos em alguma função que, não somente é contínua, mas que também é diferenciável em muitos pontos de $\mathbb{R}$. Entretanto, em 1872, K. Weierstrass construiu uma função contínua que não era diferenciável em todo ponto de $\mathbb{R}$.

Exemplo 33 *O exemplo dado por Weierstrass foi $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a^k \cos(b^k \pi x),$$

em que $0<a<1$, b é um inteiro ímpar e $ab>1+\dfrac{3\pi}{2}$. Esta função é contínua e não-diferenciável em todo ponto.

Exemplo 34 *A função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(3^n \pi x)}{2^n}$$

também é contínua e não-diferenciável em todo ponto do seu domínio.

Observação 3.3 *Esse exemplo é indicada para uso em um curso de Análise I*

Na literatura, estes exemplos são conhecidos como monstros de Weierstrass[3].

[3] Apesar de serem conhecidos como monstros de Weierstrass, B. Bolzano ($\approx$ 1830), M. Cellérier ($\approx$ 1830), B. Riemann (1861) e H. Hankel (1870) já haviam encontrado funções desse tipo.

O aparente choque da comunidade matemática quando Weierstrass exibiu tal função se dá pelo pensamento geral que a maioria dos matemáticos da época compartilhavam: uma função contínua deve ser diferenciável num conjunto significante de pontos (até mesmo A. Ampère compartilhava desse pensamento e tentou dar uma justificativa teórica para isto).

Podemos pensar que, uma vez que um objeto dessa natureza tenha sido encontrado, não muitos outros devam existir. De imediato, nos vem a seguinte pergunta, quantos monstros de Weierstrass existem?

Após 1872, vários outros matemáticos construíram funções similares. Apenas para citar uma lista parcial, temos: H. Schwarz (1873), M. Darboux (1874), U. Dini (1877), K. Hertz (1879), G. Peano (1890), D. Hilbert (1891), T. Takagi (1903), H. von Koch (1904), W. Sierpiński (1912), G. Hardy (1916), A. Besicovitch (1924), B. van der Waerden (1930), S. Mazurkiewicz (1931), S. Banach (1931), S. Saks (1932) e W. Orlicz (1947).

Além disso, em 1966, V. Gurariy mostrou que existe um espaço vetorial de dimensão infinita em que toda função não-nula deste espaço é contínua e não-diferenciável em todo lugar de $\mathbb{R}$.

Este resultado de Gurariy de 1966 levou a introdução dos seguintes conceitos:

Definição 3.1 (2004) *Sejam X um espaço vetorial, M um subconjunto de X e μ um número cardinal. Diremos que M é μ-lineável, se $M \cup \{0\}$ contém um espaço vetorial de dimensão μ. Diremos que M é maximal lineável, se M é μ-lineável e* $\dim(X) = \mu$.

Ao unimos o conjunto M com $\{0\}$ podemos afirmar que $M \cup \{0\}$ é um Subespaço Vetorial.

Observação 3.4 *Às vezes, iremos nos referir ao conjunto M, simplesmente, como lineável se a dimensão do espaço vetorial contido em $M \cup \{0\}$ for infinita.*

Com esta nova terminologia, podemos reescrever o resultado de V. Gurariy como:

Teorema 3.1 (Gurariy, 1966) *O conjunto das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínuas e que são não diferenciáveis em todo lugar é lineável.*

O termo lineabildiade foi usado primeiramente por Aron, Gurariy, Seoane-Sepulveda em Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2004) 795-803. Desde aquela época, vários autores mostraram interesse sobre o tópico.

Exemplo 35 *Seja P o espaço vetorial dos polinômio de grau $n \in \mathbb{N}$.*

Considere os inteiros positivos

$$j_1 \leq k_1 < j_2 \leq k_2 \cdots \leq j_m \leq k_m \leq j_{m+1} \leq \cdots$$

tais que $k_m - j_m = m$. *Considere ainda o seguinte subconjunto de P:*

$$M = \bigcup_m \left\{ \sum_{i=j_m}^{k_m} a_i x^i : a_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

Como os subespaços

$$\left\{ \sum_{i=j_m}^{k_m} a_i x^i : a_i \in \mathbb{R} \right\},$$

$n \in \mathbb{N}$ *são dois a dois disjuntos e finitamente geradores, segue que M é n-lineável para todo* $n \in \mathbb{N}$, *mas não é lineável.*

3.3.1 Lineabilidade das Funções Sobrejetivas em todo lugar

Daremos a seguir a definição de um tipo de função que o leitor pode até duvidar se essa é, de fato, uma boa definição, isto é, será que o conjunto das funções que definiremos a seguir é não-vazio?

Definição 3.2 *Dizemos que uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é sobrejetiva em todo lugar se* $f(I) = \mathbb{R}$ *para todo intervalo não degenerado* $I \subseteq \mathbb{R}$.

O exemplo abaixo mostra que o conjunto das funções sobrejetivas em todo lugar é não-vazio.

Exemplo 36 *A função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por*

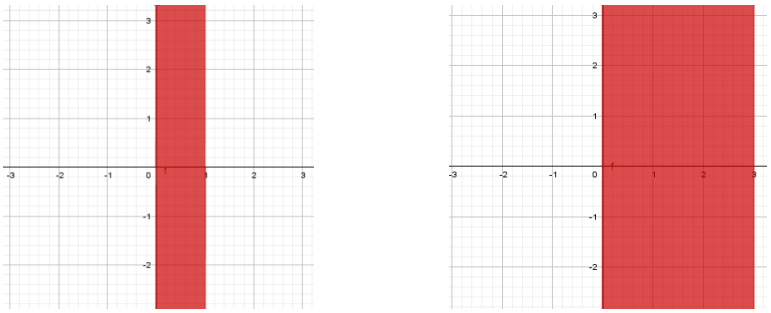
$$f(x) = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \tan(n!\pi x), & \text{se o limite existe,} \\ 0, & \text{caso contrario,} \end{cases}$$

verifica as seguintes propriedades:

1. Se $x \in \mathbb{R}$ e $q \in \mathbb{Q}$ então $f(x+q) = f(x)$.
2. f é sobrejetiva: para todo $y \in \mathbb{R}$ existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$.
3. f é sobrejetiva em todos os intervalos abertos não-degenerados: Se $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, então $\{f(x) : a < x < b\} = \mathbb{R}$.

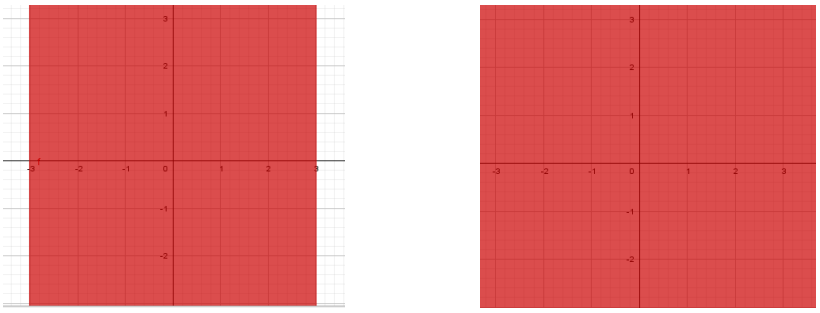
(Ver Figuras 3.3 e 3.4).

Figura 3.3: A esquerda temos o gráfico da restrição $f|_{[0,1]}$; a direita temos o gráfico da restrição $f|_{[0,3]}$.



Fonte: Produção própria

Figura 3.4: A esquerda temos o gráfico da restrição $f|_{[0,3]}$; a direita temos o gráfico de f.



Fonte: Produção própria

A seguinte observação será útil na demonstração das propriedades acima.

Observação 3.5 *Se* $\lfloor x \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$, *então*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lfloor r(n+1) \rfloor}{n+1} = r,$$

para cada $r \in \mathbb{R}$. *De fato,* $x - 1 \leq \lfloor x \rfloor \leq x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. *Se definirmos nas desigualdades anteriores* $x = r(n+1)$ *para* $r \in \mathbb{R}$ *arbitrário e* $n \in \mathbb{N}$, *então* $r(n+1) - 1 \leq \lfloor r(n+1) \rfloor \leq r(n+1)$. *Dividindo por* $n+1$ *implicará em*

$$r - \frac{1}{n+1} = \frac{r(n+1)-1}{n+1} \leq \frac{\lfloor r(n+1) \rfloor}{n+1} \leq \frac{r(n+1)}{(n+1)} = r.$$

Finalmente, concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lfloor r(n+1) \rfloor}{n+1} = r.$$

Provemos agora as propriedade 1-3 acima.

1. Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $q \in \mathbb{Q}$, então existem $r,s \in \mathbb{Z}$ com $s \neq 0$ tal que $q = r/s$. Se $n \geq s$, então $n!q$ é um inteiro e, portanto, $n!\pi x$ e $n!\pi(x+q)$ são múltiplos de π. Segue-se que $\tan(n!\pi(x+q)) = \tan(n!\pi x)$ para todo $n \geq s$. Assim, $f(x+q) = f(x)$.

2. Seja $y \in \mathbb{R}$ dado, e escolha $r \in [0,1)$ tal que $\tan(\pi r) = y$. Defina $x \in \mathbb{R}$ como

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lfloor rn \rfloor}{n!}$$

Resta-nos mostrar que $f(x) = y$. Sejam x_n a n-ésimo soma parcial de x e ε_n o termo remanescente. Consequentemente,

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lfloor kn \rfloor}{k!} \quad \text{e}$$

$$\varepsilon_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\lfloor kn \rfloor}{k!} = x - x_n.$$

Note que $n!x_n \in \mathbb{Z}$ para todo n e, portanto, pelo item anterior, $\tan(n!\pi x) = \tan(n!\pi\varepsilon_n)$ para todo n. Consequentemente,

$$n!\varepsilon_n = \frac{\lfloor r(n+1) \rfloor}{n+1} + n! \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{\lfloor rk \rfloor}{k!}.$$

Como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lfloor r(n+1) \rfloor}{n+1} = r$$

e

$$\lim_{n\to\infty} n! \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{\lfloor rk \rfloor}{k!} = 0$$

concluímos que $\lim_{n\to\infty} n!\varepsilon_n = r$, de onde segue que

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \tan(n!\pi x) = \lim_{n\to\infty} \tan(n!\pi\varepsilon_n) = \tan(\pi r) = y.$$

3. Sejam $a,b,y \in \mathbb{R}$ com $a < b$. Pela propriedade 2, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c) = y$, e pela propriedade 1, $f(c) = f(c+q) = y$ para todo $q \in \mathbb{Q}$. Como entre dois números reais distintos, quaisquer que sejam, sempre existe um números racional, $q \in \mathbb{Q}$ tal que um $a < c+q < b$. Se $x = c+q$, então $a < x < b$ e

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n\to\infty} \tan(n!\pi(c+q)) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\tan(n!\pi c) + \tan(n!\pi q)}{1 - \tan(n!\pi c)\tan(n!\pi q)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \tan(n!\pi c) \\ &= f(c) = y. \end{aligned}$$

Observe que $\tan(n!\pi q) \to 0$ quando $n \to \infty$. Desde que y é um número real arbitrário, segue-se que $\{f(x) : a < x < b\} = \mathbb{R}$.

Observação 3.6 *Lebesgue (1904), provavelmente, foi o primeiro a mostrar um exemplo de uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ satisfazendo a surpreendente propriedade acima.*

Apesar de ser uma definição, aparentemente, "inimaginável", foi provado em 2005 por R. Aron, V. Gurariy e J. Seoane que o conjunto das funções sobrejetivas em todo lugar é, na verdade, um conjunto imenso. Assim, com esse fato e outros citados no texto a lineabilidade tem chamado a atenção para pesquisas e descobertas.

Teorema 3.2 (Aron, Gurariy, Seoane, 2005) *O conjunto das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que são sobrejetivas em todo lugar é $2^{\aleph_1}$-lineável.*

A demonstração da Teorema acima pode ser verificado em [4].

3.3.2 As Funções de Sierpiński e Zygmund

Daremos nesta seção mais um exemplo surpreendente de lineabilidade.

Teorema 3.3 (Blumberg, 1922) *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função arbitrária. Então, existe um subconjunto denso $S \subset \mathbb{R}$ tal que a função $f|_S$ é contínua.*

Uma leitura cuidadosa na prova deste resultado mostra que o conjunto S acima é enumerável. Naturalmente, poderíamos nos perguntar se seria possível escolher o conjunto S no teorema de Blumberg como sendo não-enumerável.

Para isto, uma excelente resposta na negativa, apesar de parcial em certo sentido, foi dada por Sierpiński e Zygmund:

Teorema 3.4 (Sierpiński, Zygmund, 1923) *Existe uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que, para qualquer conjunto $Z \subset \mathbb{R}$ de cardinalidade do continuum, a restrição $f|_Z$ não é uma função contínua.*

Este teorema responde de forma parcial a questão acima, pois exige que a cardinalidade de Z seja $\aleph_1$.

Uma função como a do Teorema 3.4 será chamada de função de Sierpiński e Zygmund. Considere

$$S\mathscr{Z} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ é uma função de Sierpiński e Zygmund}\}.$$

Observação 3.7 *É óbvio que se a Hipótese do Continuum é assumida, então a restrição de uma função de $S\mathscr{Z}$ a qualquer conjunto não enumerável não pode ser contínua. Ale disso, Shinoda provou em 1973 que sob algumas hipóteses axiomáticas (incluindo a negação da Hipótese do Continuum) para qualquer $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existe um conjunto não enumerável $Z \subset \mathbb{R}$ tal que a restrição $f|_Z$ é contínua.*

Apesar de toda essas discussões sobre as funções de Sierpiński e Zygmund, o que dizer sobre a lineabilidade do conjunto da funções de Sierpiński-Zygmund? Será que existem muitas funções como a do Teorema 3.4?

Quem deu uma primeira resposta para essa pergunta foi Gámez-Merino, Muñoz-Fernandez e Seoane-Sepúlveda em 2010. Antes de exibirmos o resultado provado por eles, daremos abiaxo uma defenição necessária para este propósito.

Definição 3.3 *A cardinalidade superior a dos* $\mathbb{R}$ *chamaremos de* $\aleph_1^+$.

Teorema 3.5 (Gámez-Merino, Muñoz-Fernandez, Seoane-Sepúlveda, 2010) *O conjunto das funções de Sierpiński-Zygmund é* $\aleph_1^+$*-lineável.*

Um resultado muito interessante nesta direção é o seguinte teorema.

Teorema 3.6 (Gámez-Merino, Seoane-Sepúlveda, 2013) $2^{\aleph_1}$*-lineabilidade do conjunto das funções de Sierpiński-Zygmund é indecidível.*

3.3.3 Séries para as quais os Testes da Razão e da Raiz falham

Os resultados desta seção podem ser encontrados em [1]

Dada a série $\sum_n a_n$, o clássico teste da razão afirma que

(i) se $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$, então $\sum_n a_n$ converge, e

(ii) se $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$, então $\sum_n a_n$ diverge.

Analogamente, o clássico teste da raiz afirma que

(i) se $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} < 1$, então $\sum_n a_n$ converge, e

(ii) se $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} > 1$, então $\sum_n a_n$ diverge.

Sabemos que nenhuma destas condições são suficientes. Por exemplo,

$$a_n = \frac{1}{n} \quad \Longrightarrow \quad \sum_n a_n \text{ diverge, mas } \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1$$

e

$$a_n = \frac{1}{n^2} \quad \Longrightarrow \quad \sum_n a_n \text{ converge, mas } \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1.$$

O teorema abaixo mostra que os testes da razão e da raiz estão longe de serem ótimos, isto é, tanto para o teste da razão como para o teste da raíz, o teorema abaixo mostra

que existem espaços vetoriais de dimensão infinita formados por sequências que geram séries absolutamente convergentes ou sequências que geram séries divergentes para os quais os referidos testes falham, ou seja, não dão nenhuma informação sobre a convergência ou divergência das séries.

Teorema 3.7 *(a) O conjunto das sequências que geram séries absolutamente convergentes para as quais o teste da razão falha é maximal ($\aleph_1$-) lineável.*

(b) O conjunto das sequências que geram séries absolutamente convergentes para as quais o teste da raíz falha é maximal ($\aleph_1$-) lineável.

(c) O conjunto das sequências que geram séries divergentes para as quais o teste da razão falha é maximal ($\aleph_1$-) lineável.

(d) O conjunto das sequências que geram séries divergentes para as quais o teste da raiz falha é maximal ($\aleph_1$-) lineável.

3.3.4 Mais Funções Diferenciáveis Exóticas

Vamos retornar as funções diferenciáveis.

Definição 3.4 *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita ser uma função de Pompeiu se ela é diferenciável e f' se anula em um conjunto denso de $\mathbb{R}$. O símbolo $\mathscr{P}$ significa o espaço vetorial das funções de Pompeiu.*

Apesar de nossa intuição não nos deixar pensar em uma função como de Pompeiu, o teorema abaixo mostra que, mais uma vez, não devemos confiar em nossa intuição, pois o conjunto das referidas funções não somente é não vazio, como possui um espaço vetorial de dimensão infinita formado por objetos dessa natureza.

Teorema 3.8 *O conjunto das funções em $\mathscr{P}$ que não são constantes em qualquer intervalo de $\mathbb{R}$ é $\aleph_1$-lineável em $C(\mathbb{R})$.*

O argumento usado nas demonstrações dos resultados anteriores é o mesmo, sendo utilizado em diferentes contextos. Esta técnica, algumas vezes, é chamada técnica do vetor mãe. Entretanto, esta técnica é limitada para certas situações, e novas técnicas são necessárias em diferentes situações, em alguns casos, abordagens não construtivas.

Por exemplo:

Teorema 3.9 (Drewnowski) *Sejam X e Z espaços de Banach e $T : Z \to X$ um operador linear contínuo com imagem $Y = T(Z)$ não fechada. Então o complementar $X \setminus Y$ é espaçável.*

3.4 RESULTADOS DE LINEABILIDADE

Lembremos as seguintes notações: Seja X um espaço vetorial normado. Seja $\mathscr{F}(X,\mathbb{R})$ o conjunto das funções de X em $\mathbb{R}$. Considere ainda

i $C(X) := \{f \in \mathscr{F}(X;\mathbb{R}) : \ f$ é contínua$\}$

ii $\widehat{C}(X) := \{f \in C(X) : \ f$ atinge o máximo em um único ponto $t \in X\}$

Após vermos os exemplos de resultados de lineabilidade em conjuntos de funções que talvez jamais poderíamos ter imaginado as suas existências, apresentaremos as demonstrações dos seguintes resultados: lineabilidade de $\widehat{C}[0,2\pi)$, $\widehat{C}[a,b)$ e $\widehat{C}(\mathbb{R})$.

Teorema 3.10 *$\widehat{C}[0,2\pi)$ é 2-lineável.*

Demonstração. Mostrar que $\widehat{C}[0,2\pi)$ é 2-lineável significa provar que existe um espaço vetorial V de dimensão 2 tal que $V \subset \widehat{C}[0,2\pi) \cup \{0\}$.

Para isso, precisamos definir duas funções f e g, pertencentes a $\widehat{C}[0,2\pi)$, que sejam *LI*.

Consideremos as funções f e g sendo $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$, respectivamente, definidas no intervalo semiaberto $[0,2\pi)$, ou seja, $f,g \in \widehat{C}[0,2\pi)$, pois ambas atingem o valor máximo em um único ponto de $[0,2\pi)$.

Verificaremos se f e g são *LI*.

Seja o conjunto $\{\operatorname{sen} x, \cos x\}$, para $x \in [0,2\pi)$ é *LI*, pelo teorema de Wronskiano

$$\begin{bmatrix} f & f' \\ g & g' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x \\ \cos x & -\operatorname{sen} x \end{bmatrix} = -\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x = -1 \neq 0.$$

As funções $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ com $x \in [0,2\pi)$ são linearmente independentes.

Mostraremos que qualquer combinação não trivial também atinge o máximo em um único ponto, ou seja, para quaisquer $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \operatorname{sen} x + \beta \cos x \in \widehat{C}[0,2\pi)$. Sejam $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ e $\alpha \operatorname{sen} x + \beta \cos x$ uma combinação linear não trivial. Sabemos que para qualquer ponto $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$, existe $\theta \in [0,2\pi)$ (coordenadas polares) tal que

$$(\alpha,\beta) = \left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\cos\theta, \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\operatorname{sen}\theta\right).$$

Assim, segue a seguinte igualdade

$$\begin{aligned} \alpha\cos x + \beta \operatorname{sen} x &= \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\cos\theta\cos x + \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen} x \\ &= \sqrt{\alpha^2+\beta^2}(\cos\theta\cos x + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen} x) \\ &= \sqrt{\alpha^2+\beta^2}(\cos\theta - x). \end{aligned}$$

Dessa forma, basta analisarmos $\cos(\theta - x)$ com $\theta, x \in [0, 2\pi)$, ou seja,

$$\theta - x \in (-2\pi, 2\pi).$$

Neste intervalo, $\cos(\theta - x)$ admite um único ponto máximo e, portanto, segue que $\alpha \cos x + \beta \operatorname{sen} x$, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, admite um único ponto de máximo em $[0, 2\pi)$.

Portanto, considerando $V = G(\{f, g\}) = G(\{\operatorname{sen} x, \cos x\}) \subset \widehat{C}[0, 2\pi) \cup \{0\}$, concluímos a demostração. □

A partir do que foi provado, temos o seguinte resultado:

Lema 3.11 *$\widehat{C}[a, b)$ é 2-lineável.*

Demonstração. Basta compor cada função $f \in \widehat{C}[0, 2\pi)$ com a função $g : [a, b) \to [0, 2\pi)$, $g(x) = \dfrac{2\pi(x-a)}{b-a}$.

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= \alpha \operatorname{sen}(g(x)) + \beta \cos(g(x)) \\ &= \alpha \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi(x-a)}{b-a}\right) + \beta \cos\left(\frac{2\pi(x-a)}{b-a}\right). \end{aligned}$$

Com $x \in [a, b)$ e g $\in [0, 2\pi)$.

Sejam $r(x) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{2\pi(x-a)}{b-a}\right)$ e $s(x) = \cos\left(\dfrac{2\pi(x-a)}{b-a}\right)$, vamos mostrar que r, s são *LI*, $r, s \in \widehat{C}[a, b)$ e $G(\{r, s\}) \subset \widehat{C}[a, b) \cup \{0\}$.

Como $g : [a, b) \to [0, 2\pi)$, já sabemos que r, s são linearmente independentes, ambas atingem o ponto máximo em um único ponto no domínio, $G(\{r, s\}) = V$, e que $V \in \widehat{C}[a, b)$. Portanto, $G(\{r, s\}) = G(\{\operatorname{sen}(g(x)), \cos(g(x))\}) = V \subset \widehat{C}[a, b) \cup \{0\}$ e concluímos a demonstração. □

Teorema 3.12 *$\widehat{C}(\mathbb{R})$ é 2-lineável.*

Demonstração. Mostrar que $\widehat{C}(\mathbb{R})$ é 2-lineável significa provar que existe um espaço vetorial V de dimensão 2 tal que $V \subset \widehat{C}(\mathbb{R}) \cup \{0\}$.

Sejam as funções $f(x) = \varphi(x) \operatorname{sen}(4 \arctan |x|)$ e $g(x) = \varphi(x) \cos(4 \arctan |x|)$, com φ uma função contínua definida em $\mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^x, & \text{se } x \leq 0, \\ 1, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Verificando se f e g são *LI*.

Considere $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ o intervalo de definição da função $\tan x$. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e

$$z(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$$

uma combinação linear não trivial de $f(x)$ e $g(x)$, para cada $x \in \mathbb{R}$. Note que se $z(x) = 0$ então

$$\alpha\varphi(x)\operatorname{sen}(4\arctan|x|) + \beta\varphi(t)\cos(4\arctan|x|) = 0$$

ou ainda

$$\varphi(x)(\alpha\operatorname{sen}(4\arctan|x|) + \beta\cos(4\arctan|x|)) = 0.$$

Como $\varphi(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, por definição, segue que

$$\alpha\operatorname{sen}(4\arctan|x|) + \beta\cos(4\arctan|x|) = 0.$$

Mostraremos que se $\alpha = \beta$, que implica $\alpha = \beta = 0$.

Se $x = 0$, então

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha\operatorname{sen}(4\arctan|0|) + \beta\cos(4\arctan|0|) \\ &= \alpha\operatorname{sen}(4\cdot 0) + \beta\cos(4\cdot 0) \\ &= \alpha\operatorname{sen} 0 + \beta\cos 0 \\ &= \alpha\cdot 0 + \beta\cdot 1 \\ &= \beta. \end{aligned}$$

Se $x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ e $\beta = 0$, então

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha\operatorname{sen}(4\arctan|\tfrac{\sqrt{3}}{3}|) + \beta\cos(4\arctan|\tfrac{\sqrt{3}}{3}|) \\ &= \alpha\operatorname{sen}(4\cdot\tfrac{\pi}{6}) + \beta\cos(\cancelto{0}{4\arctan|\tfrac{\sqrt{3}}{3}|}) \\ &= \alpha\operatorname{sen}(\tfrac{2\pi}{3}) \\ &= \alpha\tfrac{\sqrt{3}}{2} \therefore \alpha = 0. \end{aligned}$$

Logo, $f(x)$ e $g(x)$ são linearmente independentes.

Analisando se $f, g \in \widehat{C}(\mathbb{R})$, como $\operatorname{sen}(4\arctan|x|) \leq 1$, $\cos(4\arctan|x|) \leq 1$ e $\varphi(x) > 0$, para $x \in \mathbb{R}$, segue que $f(x) \leq \varphi(x)$ e $g(x) \leq \varphi(x)$. Sendo $\varphi(x) \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$, as funções $f(x)$ e $g(x)$ são limitadas superiormente por 1. Mostremos que $f(x)$ e $g(x)$ atingem o valor 1 apenas em um único ponto.

Para $x = 0$,

$$\begin{aligned} g(0) &= \varphi(0) \cdot \cos(\arctan|0|) \\ &= 1 \cdot \cos 0 \\ &= 1 \cdot \cos 0 \\ &= 1 \cdot 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Assim, vimos que $x = 0$ é ponto de máximo. Para $x \neq 0$, temos $0 \leq \arctan x < \frac{\pi}{2} \therefore 0 \leq 4\arctan|x| < 2\pi$, ou seja, $4\arctan|x| \in (0, 2\pi)$, logo $\cos(4\arctan|x|) < 1$. Como $\varphi(x) \leq 1$ segue que $g(x) < 1$, para todo $x \neq 0$. Daí, vemos que $g(x) \in \widehat{C}(\mathbb{R})$.

Para o caso de $f(x)$, temos $x = \tan\dfrac{\pi}{8}$, segue que

$$\begin{aligned} f\left(\tan\frac{\pi}{8}\right) =& 1 \cdot \operatorname{sen}\left(4\arctan(\tan\frac{\pi}{8})\right) \\ =& 1 \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} \\ =& 1 \cdot 1 \\ =& 1. \end{aligned}$$

Logo, $x = \tan\dfrac{\pi}{8}$ é o ponto máximo.

Para $x < 0$, $\operatorname{sen}(\arctan|x|) \leq 1$ e $\varphi(x) < 1$. Logo, $f(x) < 1$. Para $x \geq 0$, temos $\varphi(x) = 1$ e $4\arctan x \in [0, 2\pi)$. Como $\operatorname{sen} x = 1$ em $[0, 2\pi)$ apenas quando $x = \dfrac{\pi}{2}$, segue que $f(x) = \operatorname{sen}(\arctan x) = 1$ somente quando $4\arctan x = \dfrac{\pi}{2}$. A função $\tan x$ admite inversa em $x \in (\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$. Portanto, pela bijetividade da função $\arctan x$, segue que $x = \tan\dfrac{\pi}{8}$ é único ponto máximo de $f(x)$.

Considere $z \in G(\{f, g\})$, mostraremos que $z \in \widehat{C}(\mathbb{R})$.

Sejam α, β e $\alpha f(x) + \beta g(x)$ uma combinação linear não trivial. Já sabemos que para qualquer par $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, existe $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que

$$(\alpha, \beta) = (\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\cos\theta, \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\operatorname{sen}\theta).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&\alpha f(x)+\beta g(x)\\
&=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\cos\theta\cdot f(x)+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,\mathrm{sen}\,\theta\cdot g(x)\\
&=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\cos\theta\cdot\varphi(x)\cos(4\arctan|x|)+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,\mathrm{sen}\,\theta\cdot\varphi(x)\,\mathrm{sen}(\arctan|x|)\\
&=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\cdot\varphi(x)\cdot(\cos\theta\cdot\cos(4\arctan|x|)+\mathrm{sen}\,\theta\cdot\mathrm{sen}(\arctan|x|))\\
&=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\cdot\varphi(x)\cdot\cos(\theta-4\arctan|x|)\\
&=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\cdot\varphi(x)\cdot\cos(4\arctan|x|-\theta).
\end{aligned}$$

Note que para $x\geq 0$, $\varphi(x)=1$, e $\arctan x\in[0,2\pi)$. Uma vez que a função $\cos x$ admite um ponto único de máximo em $[-\theta,2\pi-\theta)$, segue que

$$\alpha f(x)+\beta g(x)=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\cos(4\arctan x-\theta)$$

atinge único ponto máximo quando $x\geq 0$. Para $x<0$, $\varphi(x)=e^x<1$, então

$$\begin{aligned}
\alpha f(x)+\beta g(x)&=\varphi(x)\cdot(\alpha\cos(4\arctan|x|))+(\beta\,\mathrm{sen}(4\arctan|x|))\\
&=<\alpha\cos(4\arctan|x|)+\beta\,\mathrm{sen}(4\arctan|x|)\\
&=\alpha f(-x)+\beta g(-x),
\end{aligned}$$

ou seja, o máximo não é atingido. Qualquer combinação não trivial $\alpha f(x)+\beta g(x)$ pertence a $\widehat{C}(\mathbb{R})$. Isso prova que f e g são LI, $f,g\in\widehat{C}(\mathbb{R})$, $z\in G(f,g)\therefore z\in\widehat{C}(\mathbb{R})$. Portanto $V=G\{f,g\}\subset\widehat{C}(\mathbb{R})\cup\{0\}$ e com isso concluímos a demonstração. □

Considerações Finais

Como abordado ao longo desse texto, o ponto de partida para esta pesquisa consistiu em analisar como a intuição matemática pode servir de motivação para a descoberta de novos significados para os conteúdos que envolvem a Lineabilidade, tendo como proposta atividades que formulem a resolução de situações problemas, usando a intuição para chegar ao resultado final.

A metodologia adotada nos fez entender que a intuição matemática possibilita conhecer novas estratégias, e como estas podem ser aplicadas aos conteúdos estudados na Matemática, especialmente, os que abordamos nessa pesquisa.

A realização desse trabalho soma-se a todos os benefícios que ao longo de nossa formação adquirimos, o qual permite ampliarmos nosso conhecimento matemático e, simultaneamente, a nossa prática pedagógica em sala de aula, a qual oportuniza a reflexão mais ampla sobre a nossa atuação, bem como proporciona levarmos aos nossos alunos a aprendizagem efetiva, além de poder adotar as estratégias para que as aulas de Matemática possam ter um sentido mais significativo.

No tocante as ideias abordadas no decorrer do estudo, sugerimos que novas pesquisas sejam feitas, com a finalidade de complementarem essa investigação, que sejam apontadas novas potencialidades para a inovação das práticas pedagógicas, e que também outros conteúdos possam ser contemplados com a intuição matemática, pois, essa perspectiva pouco tem sido usada em sala de aula, por demandar um tempo maior e exigir do educador uma ótica criteriosa comparada as metodologias convencionais que, hodiernamente, são utilizadas no ambiente da sala de aula.

Assim, é possível que a partir do uso constante da intuição matemática na prática cotidiana das aulas, talvez, seja o ponto culminante para que os alunos possam descobrir a resposta que tanto procuram, pois, estes não obtêm uma resposta pronta e acabada, mas sim, são frequentemente desafiados a moldarem seus conhecimentos e chegarem aos resultados esperados.

Então, faz-se necessário que o professor comece a trabalhar com problemas mais elaborados e aborde também as aplicações, desafios e atividades práticas, visto que para uma aprendizagem efetiva da Matemática, o estudante deve ter o contato com problemas que envolvam raciocínio lógico, elaboração de estratégias, interpretação de textos e figuras, de tal forma que seja exigido o aprendizado de novas técnicas de cálculo e de argumentação

matemática.

Mediante a relevância apresentada pelos conteúdos abordados ao longo desse percurso de aperfeiçoamento profissional, pretendemos ampliar esse estudo a outros conteúdos do ensino de Matemática, assim como a outros níveis investigativos, com a intenção incitar a reflexão matemática, e ao passo de suscitarmos maiores entendimentos sobre o ensino de Matemática sob um viés intuitivo. Portanto, a busca por novos saberes não acaba aqui, a nossa meta é irmos adiante à procura de novos métodos no campo da Educação Matemática, enquanto profissionais da educação que incessantemente buscam fazer o melhor do ensino da Matemática em sua sala de aula.

Referências Bibliográficas

[1] Araújo, G., Bernal-González, L., Muñoz-Fernández, G.A., Prado-Bassas, J.A., Seoane-Sepúlveda, J.B. Lineability in sequence and function spaces. Studia Mathematica, V. 237, n. 2, 2017. 119-136.

[2] Bernal-González, L., Pellegrino, D., Seoane-Sepúlveda J.B. Linear Subsets of Nonlinear Sets in Topological Vector Spaces. V. 51, n. 1, January/2014. 71-130.

[3] Boldrine, J.L. Álgebra Linear. - 3.ed. - São Paulo: Harper & Row do Barasil, 1980.

[4] Borges, V. Lineabilidade e Funções Everywhere Surjective, Outubro/2017.

[5] Dante, L.R. Matemática: Contexto & aplicações. 2. ed. São Paulo: Ática, 2013.

[6] Fenoy-Muñoz, M. et al. A hierarchy in the family of real surjective functions. Open Math. 2017; 15: 486-501

[7] Figueiredo, D.G. Números Irracionais e Transcendentes. - 3. ed. - Rio de Janeiro: SBM, 2011.

[8] Hefe, A., Fernandes, C.S. Introdução à Álgebra Linear. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[9] Hinckel, F. Introdução aos Espaços Vetoriais de Dimensão Infinita. Monografia, Universidade Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Santa Catarina, 2009.

[10] Lang, S. Álgebra linear. 3. Ed. Rio de Janeiro: Ciência Mordena, 2003.

[11] Leão, A.M.C. Noções Básicas de Infinitos e Números Cardinais. Dissertação (Mestrado em Matemática), Profmat, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2014.

[12] Lima, E.L. Curso de Análise. v.1. 14.ed - Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2013.

[13] Lima, E.L. Geometria Analítica e Álgebra Linear. IMPA; Rio de Janeiro, ISBN, 2001.

[14] Lima, E.L. Números e Funções reais. SBM, 2014. (Coleção PROFMAT).

[15] Nogueira, T.K. Lineabilidade em conjunto de funções reais que atingem o máximo em um único ponto, Dissertação (Mestrado em Matemática), CCEN, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2014.

[16] Sá, C.C., Rocha, J. (editores). Treze Viagens pelo Mundo da Matemática. - 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.