UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ISNARA MENDES LINS

O USO DE JOGOS MATEMÁTICOS NA PERSPECTIVA DA RESOLUÇÃO E EXPLORAÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO MÉDIO

CAMPINA GRANDE- PB
2019

ISNARA MENDES LINS

O USO DE JOGOS MATEMÁTICOS NA PERSPECTIVA DA RESOLUÇÃO E EXPLORAÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, da Universidade Estadual da Paraíba, área de concentração em Educação Matemática, em cumprimento à exigência para obtenção do grau de mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Orientador. Prof. Dr. Silvanio de Andrade

CAMPINA GRANDE-PB
2019

L759u Lins, Isnara Mendes.

O uso de jogos matemáticos na perspectiva da resolução e exploração de problemas no ensino médio [manuscrito] / Isnara Mendes Lins. - 2019.

159 p. : il. colorido.

Digitado.

Dissertação (Mestrado em Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2019.

"Orientação : Prof. Dr. Silvanio de Andrade , Departamento de Matemática - CCT."

1. Jogos matemáticos. 2. Potencialidades. 3. Resolução de problemas. 4. Exploração de problemas. I. Título

21. ed. CDD 371.337

Elaborada por Giulianne M. Pereira - CRB - 15/714 BC/UEPB

ISNARA MENDES LINS

O USO DE JOGOS MATEMÁTICOS NA PERSPECTIVA DA RESOLUÇÃO E EXPLORAÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, da Universidade Estadual da Paraíba, área de concentração em Educação Matemática, em cumprimento à exigência para obtenção do grau de mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Aprovada em 10/04/2019

BANCA EXAMINADORA

Silvanio de Andrade

Prof. Dr. Silvanio de Andrade (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Prof. Dra. Severina Andréa Dantas de Farias (Examinadora)
Universidade Federal da Paraíba (UFPB)

Rogéria Gaudencio do Rêgo

Prof. Dra. Rogéria Gaudêncio do Rêgo (Examinadora)
Universidade Federal da Paraíba (UFPB)

Campina Grande – PB
2019

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus, por iluminar o meu caminho durante a realização desta pesquisa. A fé que tenho no senhor me deu força para ser persistente e vencer todos os momentos de tribulações enfrentados.

Aos meus pais, Maria Mendes e Setônio Mendes da Silva, pelo apoio e amor incondicional: sem vocês a realização desse sonho não seria possível.

Ao meu amor, José Eronildes, que sempre esteve ao meu lado passando confiança, apoio e compreensão.

Às minhas irmãs, Sonally e Iara, que me deram todo incentivo para continuar lutando pelo meu sonho e por compreender minha ausência em alguns momentos especiais.

Aos meus sobrinhos, Isaac e Clarice, que iluminam a minha vida, com amor e alegria.

Aos meus avós paternos, Zilda e João, e materna, Francisca (*in memoriam*), pelas contribuições e ensinamentos na minha formação pessoal e profissional.

À minha madrinha, Fátima (*in memoriam*), pelo apoio e incentivo à conclusão deste trabalho.

Aos tios e tias, primos e amigos, que contribuíram com palavras de otimismo e apoio.

Aos professores do Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática da UEPB, por todo conhecimento repassado.

Aos alunos participantes da pesquisa, pela compreensão e por proporcionarem reflexões na minha prática enquanto professora pesquisadora.

Ao orientador desta pesquisa, Prof. Dr. Silvanio de Andrade, pelo apoio, compreensão e orientações recebidas durante todo o processo de escrita, sempre me proporcionando um olhar reflexivo, direcionado à sala de aula.

RESUMO

Na presente pesquisa desenvolveu-se um trabalho com jogos matemáticos, a fim de identificar e analisar as potencialidades do uso de jogos pedagógicos na perspectiva da resolução e exploração de problemas com alunos do Ensino Médio. A pesquisa foi qualitativa, na modalidade de pesquisa pedagógica. Para o levantamento de dados utilizou-se notas de campo, descrições, observações e as produções dos alunos. O trabalho de campo foi realizado em uma escola Pública Estadual da Paraíba, na cidade de João Pessoa, com alunos do 1° ano do Ensino Médio. A análise do trabalho com os jogos apresenta-se sob duas finalidades, a primeira, na perspectiva que se aproxima do Construtivismo, em desenvolver o conteúdo a partir do jogo pedagógico e, a segunda, na finalidade de revisar o conteúdo matemático, reestruturando as ideias matemáticas que não foram bem compreendidas. Nesse contexto, a presente pesquisa procurou desenvolver o estudo da função quadrática mediante atividades propostas com o jogo Enigma de Funções, sendo a segunda finalidade apenas destacada como uma possibilidade de uso do jogo na perspectiva da resolução e exploração de problemas. As observações, análises e descrições evidenciam as dificuldades que os alunos têm em fazer a transição entre a representação tabular, gráfica e algébrica, na linguagem matemática expressa na função quadrática e nas operações fundamentais da matemática. Nas atividades, foram exploradas a percepção e a análise do erro e, na mediação viabilizou-se a compreensão do mesmo como possibilidade de acertos. Destaca-se, assim, a percepção do erro como uma potencialidade do jogo pedagógico que, ao ser trabalhado, desenvolve no aluno a consciência do que deve ser corrigido e reavaliado, melhorando suas estratégias e compreensões matemáticas. Ficou evidente, também, a ação do aluno, por meio de perguntas que contribuíram para as mediações realizadas durante as atividades. Na dinâmica, os alunos tiveram uma boa receptividade com os jogos de modo que, no decorrer das atividades, foram descobrindo a Matemática como uma disciplina interativa. A conclusão final deste trabalho evidenciou que o jogo pedagógico, aliado à resolução e exploração de problemas, favoreceu o desenvolvimento de potencialidades significativas à compreensão de ideias essenciais acerca da função quadrática.

Palavras-chave: Jogos Matemáticos. Potencialidades. Resolução, Exploração de Problemas.

ABSTRACT

In the present research a work with mathematical games was developed, in order to identify and analyze potential uses of pedagogical games in the perspective of the solving and exploring mathematical problems with high school students. It was a qualitative pedagogical research. For data collection field notes, descriptions, observations, and student productions were used. Fieldwork was carried out at a State Public School in João Pessoa (in the state of Paraíba, Brazil), with students from the first year of high school. The analysis of the use of games was carried with two purposes. The first one, from a perspective that approaches Constructivism, was to develop the content from the pedagogical game; while the second one was to revise the mathematical content, restructuring the mathematical ideas that were not well understood. In this context, this research aimed at developing activities on quadratic function with the game *Enigma de Funções* (Function Enigmas) being the second purpose only highlighted as a possibility of use of the game considering the resolution and exploration of mathematical problems. The observations, analyzes, and descriptions demonstrate the students' difficulties in making the transition among tabular, graphical and algebraic representations in the mathematical language expressed in quadratic functions and in fundamental mathematical operations. In the activities the perception and analysis of the error were explored. Moreover, during mediation the construction of the understanding of the error was enabled as a possibility of right answers. Therefore, it is noteworthy the perception of error as a potentiality of the pedagogical game since, when the students work on their errors they develop awareness of what must be corrected and reevaluated; thus, improving their strategies and mathematical comprehension. The students' actions were also clear when their questions contributed to the mediations carried out during the activities. The games were well received by the students and in the course of their activities they discovered mathematics as an interactive subject. The final conclusion of this work evidenced that the pedagogical game, combined with the resolution and exploration of mathematical problems favored the development of significant potentialities in the construction of the knowledge of essential notions of quadratic functions.

Keywords: Mathematical games. Potentials. Resolution, Scanning Problems.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Matemática é uma disciplina que proporciona muitos desafios aos que procuram conhecê-la e compreendê-la. Ao identificarmo-nos com esse perfil, buscamos, durante o período escolar, entendê-la, e por termos afinidade com a área, procuramos nos aprofundar nela, seguindo com um curso superior em Ciências com habilitação em Matemática, e em licenciatura, pelo desejo de contribuir com o ensino dessa disciplina.

Ao concluir o curso superior, iniciamos a nossa prática pedagógica e, a partir desse momento, lançamo-nos a outro desafio, a realidade dos alunos nas aulas de Matemática, onde muitos veem a disciplina como impossível de ser compreendida e sentem-se desmotivados a interagir com ela.

Nesse contexto, a experiência em sala de aula como professora de Matemática nos fez perceber a necessidade de refletirmos sobre a nossa prática e, assim, entender o que poderíamos fazer para contribuir com a formação pessoal, intelectual e social dos nossos alunos ao término do Ensino Fundamental II. Encontramos nos materiais concretos e nos jogos matemáticos um apoio pedagógico para desenvolver algumas potencialidades no ensino de Matemática, entre eles, a de motivar o aluno e envolvê-lo no conteúdo matemático dos jogos.

Para tal, iniciamos o trabalho em uma turma do 7° ano do Ensino Fundamental, com a dinâmica dos jogos matemáticos ainda na perspectiva do jogo pelo jogo, mas já sentimos um envolvimento por parte da turma. Presenciamos algumas potencialidades, entre elas, a socialização, motivação, a percepção do erro, o diálogo com professor e colegas, o pensar e principalmente a euforia para vencer. Entendemos que a atividade com os jogos traz uma oportunidade de envolver o aluno no conhecimento matemático.

A partir daí, outras experiências com a dinâmica dos jogos matemáticos foram vivenciadas, como a participação em uma Mostra Pedagógica, onde organizamos uma sala de exposição de jogos de estratégia, de sorte, quebra-cabeça, entre outros, e, novamente, percebemos que o jogo consegue tirar o aluno da posição de receptor para uma posição mais ativa, como participante da ação.

A nossa experiência com a metodologia do uso dos jogos no Ensino Fundamental foi a base para podermos avançar numa perspectiva do uso de jogos matemáticos associada à resolução e exploração de problemas, já que até o momento o trabalho com o jogo tinha apenas uma perspectiva superficial.

Dessa forma, ao iniciar a Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, já tínhamos o desejo de realizar a pesquisa com os jogos matemáticos. A fim de, aprofundar mais os nossos estudos sobre essa temática, procuramos buscar conhecimentos teóricos sobre o uso dos jogos matemáticos e analisar algumas pesquisas já realizadas com jogos em aulas de Matemática.

Nesse contexto, buscamos a metodologia dos jogos na perspectiva da resolução e exploração de problemas por perceber que as atividades de jogos podem contribuir com o conhecimento matemático principalmente quando temos a mediação do professor como ponto de partida para a resolução do problema.

Constatamos na pesquisa De Paulo (2017) o quão difícil é a realização dessa metodologia com alunos do Ensino Médio, a reflexão sobre o uso de jogos nas aulas de Matemática tem sido investigado em inúmeras pesquisas na última década, a maioria das publicações sendo direcionados à Educação infantil e ao Ensino Fundamental I, poucos em relação ao Ensino Fundamental II e Ensino Médio. Segundo o autor os professores entrevistados até compreendem o jogo como uma metodologia que possibilitam no aluno mudanças de atitudes com relação a sentirem mais motivados pelas aulas e a compreenderem melhor os conteúdos, porém muitas vezes os docentes que optam por esta metodologia enfrentam desafios como: o tempo, o receio de mudança em relação a tradicional aula dialogada utilizando pincel e lousa, falta de materiais e formação para li dar com a metodologia do jogo nas aulas de Matemática.

Conforme aponta o autor De Paulo (2017, p. 64) “é possível dizer que os jogos podem mudar a imagem negativa da disciplina de Matemática, por se apresentarem como motivadores, estimulantes de raciocínio e divertidos para se aprender”.

Ao analisar tal pesquisa, procuramos entender qual seria a receptividade dos alunos em relação à metodologia com os jogos matemáticos no Ensino Médio, considerando na presente pesquisa, que a aprendizagem não está no jogo em si, mas em como é desencadeada essa proposta de ensino.

Direcionamos o jogo no ensino de função quadrática, por ter analisado como professora da turma do 1°ano, a falta de motivação e participação ativa dos alunos, visto que, em aulas anteriores, após a metodologia dialogada e resolução de exercícios no estudo da função afim, os alunos apresentavam dificuldades em compreender a linguagem matemática sobre função e as representações. Foi então, a partir desse contexto que procuramos na metodologia com uso de jogos matemáticos e na resolução e exploração de problemas as potencialidades para auxiliar na compreensão de ideias essenciais da função quadrática.

Enquanto docentes precisamos fazer o que nos cabe, que é a construção de uma sociedade crítica, buscando apoio nas diretrizes propostas pelos documentos oficiais de ensino [1] e nas propostas de pesquisas que propõem avanços na melhoria do ensino/aprendizagem.

Diante do contexto que nos cerca, vemos nos jogos matemáticos a possibilidade de uma prática de ensino que pode proporcionar aos alunos do Ensino Médio mudanças de atitudes, em que eles possam ver e entender a Matemática como um conhecimento importante para a vida e, assim, ter uma maior aproximação com os conteúdos que a compõem, por meio da motivação pessoal, buscando, no momento da aula com o professor, todo o aparato necessário ao seu crescimento. Como defende Antunes:

> É nesse contexto que o jogo ganha espaço, como a ferramenta ideal da aprendizagem, na medida em que propõe estímulo ao interesse do aluno, desenvolve níveis diferentes de sua experiência pessoal e social, ajuda-o a construir suas novas descobertas, desenvolve e enriquece sua personalidade e simboliza um instrumento pedagógico que leva ao professor a condição de condutor, estimulador e avaliador da aprendizagem (ANTUNES, 2011, p. 37).

Na presente pesquisa desenvolvemos o conteúdo de função quadrática a partir de atividades com o jogo Enigma de Funções, visando potencializar a construção do conhecimento por meio da dinâmica com o jogo e as problematizações mediada pela professora pesquisadora. Trabalhamos o jogo como um recurso pedagógico à nossa metodologia de ensino e propomos ao aluno a sua capacidade de independência intelectual por meio das descobertas e compreensões construídas de forma coletiva e por meio das socializações entre os grupos.

No entanto, a metodologia com o uso de jogos precisa ser bem planejada pelo professor, que vai desde a escolha do jogo e conteúdo até a sua mediação no momento

[1] Documentos Oficiais de Ensino: Lei de Diretrizes e Bases da Educação- LDB, Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio-PCNEM, Base Nacional Comum Curricular-BNCC, entre outros.

da atividade. Discutiremos ainda, ao longo do presente estudo, os cuidados que o professor deve ter no planejamento e realização da metodologia com os jogos.

Nessa perspectiva, perguntamos: **“Como os jogos, por meio da exploração e resolução de problemas, podem potencializar a construção do conhecimento matemático dos alunos do Ensino Médio?”.**

Esta dissertação tem como objetivo identificar e analisar as potencialidades do uso de jogos pedagógicos associados à perspectiva da resolução e exploração de problemas no Ensino Médio.

Optamos por não elencar os objetivos específicos da presente pesquisa e que segundo os autores Gondim e Lima (2006, p. 52) “não há obrigatoriedade em inclui-los”.

Procuramos ainda, analisar os jogos matemáticos sob duas finalidades: a primeira desenvolver o conteúdo matemático a partir do jogo na perspectiva da resolução e exploração problema e a outra finalidade em trabalhar o jogo como revisão do conteúdo, a fim de contribuir na construção de novas ideias matemáticas e no esclarecimento de dúvidas existentes, também, na perspectiva da resolução e exploração de problema.

Na presente pesquisa trabalhamos os jogos sob as duas finalidades, porém nos detivemos a destacar apenas as análises das atividades com jogos desenvolvidas sob a primeira finalidade, que é desenvolver o conteúdo de função quadrática a partir do jogo Enigma de Função, quanto à segunda finalidade, nos detivemos apenas a analisar as potencialidades que podem contribuir e fazer presente em atividades de revisão de conteúdo.

Procuramos evidenciar no nosso estudo as potencialidades que os jogos podem proporcionar ao aluno em seu processo de aprendizagem. Focamos o trabalho com o jogo na perspectiva de desenvolver no aluno uma participação mais ativa no processo de construção, em valorizar o resgate dos seus conhecimentos prévios, proporcionando maiores questionamentos com o professor, favorecendo a exploração das ideias matemáticas, e, no seu processo de resolução, desenvolvendo o pensamento e a compreensão.

Como estratégia de levantamento de dados foi aplicado um questionário, com questões relativas ao jogo, em que os alunos descreverão as suas ações no jogo, a fim de obtermos uma compreensão acerca das potencialidades do jogo ao ensino de Matemática.

A metodologia da pesquisa foi classificada como qualitativa baseada nas caracterizações de Lüdke e Andre (1987) e Bogdan e Biklen (1994). Essa direção foi tomada por acreditarmos que ela possibilitou compreender o processo desse estudo, no qual interpretamos a realidade vivenciada durante o caminhar da pesquisa.

Adotamos a pesquisa qualitativa na modalidade de pesquisa pedagógica com base em Lankshear e Knobel (2008), na qual o professor deve pesquisar sua própria prática com vista à melhoria da qualidade do ensino. Entendemos que, ao direcionar o professor como pesquisador da sua prática docente, o mesmo passa a ser investigador da sua sala de aula por meio de um olhar crítico e reflexivo, despertando-se para possíveis mudanças nos seus métodos de ensino.

O que muito se discute nas pesquisas em Educação Matemática é o trabalho da resolução, exploração e proposição de problemas no ensino da Matemática, entretanto, a presente pesquisa traz mais a perspectiva da resolução e exploração de problemas como proposta de desenvolver no aluno, por meio dos jogos matemáticos, a exploração de ideias matemáticas através do diálogo, do raciocínio lógico e da mediação entre os jogadores e a professora pesquisadora, assim como desenvolver estratégias de resoluções no próprio jogo.

A presente pesquisa foi organizada em Capítulos que abordam temas relevantes a esse estudo. Na introdução, ressaltamos a justificativa de nossa escolha, destacando o nosso interesse pelos jogos matemáticos, assim como o problema de pesquisa, o qual durante todo o estudo será discutido e analisado, a fim de obtermos uma resposta à questão formulada juntamente com o objetivo da pesquisa.

No segundo Capítulo, realizamos um estudo sobre o jogo no ensino de Matemática e a resolução e exploração de problemas, buscando compreender as discussões que vêm acontecendo sobre o jogo, principalmente na perspectiva do jogo pedagógico. Analisamos também algumas pesquisas realizadas sobre jogos e, em seguida, discutimos as potencialidades e possibilidades do jogo nas aulas de Matemática.

No terceiro Capítulo, procuramos compreender as ideias essenciais de funções, especificamente a função quadrática.

No quarto Capítulo, apresentamos o desenvolvimento do trabalho, o caminhar metodológico da pesquisa qualitativa na modalidade de pesquisa pedagógica, o jogo Enigma de funções, juntamente com o perfil da turma envolvida na atividade, e os instrumentos de coleta e análise de dados.

No quinto Capítulo, apresentamos as descrições e análises do jogo Enigma de Funções por meio do questionário, cálculos, situações-problema, relatos dos alunos sobre o uso da metodologia com jogos nas aulas e as observações feitas durante todas as atividades.

E, por fim, temos as Considerações Finais da pesquisa, a partir dos resultados e análises realizadas. As referências e os apêndices também são apresentados ao final deste trabalho.

2. O JOGO NO ENSINO DE MATEMÁTICA E A RESOLUÇÃO E EXPLORAÇÃO DE PROBLEMAS

O jogo no ensino de Matemática pode contribuir como metodologia para desenvolver os conteúdos matemáticos de forma dinâmica, sendo este, trabalhado de forma coerente em seus contextos pedagógicos, possibilita ao aluno o desenvolvimento de habilidades cognitivas.

Nesse capítulo evidenciamos alguns teóricos que discutem a inserção do jogo no ensino e a importância para as aulas de Matemática, apresentaremos ainda, algumas potencialidades que podem ser analisadas e evidenciadas em situações de jogos pedagógicos.

2.1 A influência das atividades lúdicas no ensino de Matemática

Se olharmos à nossa volta, vemos e até realizamos atividades que podemos considerar lúdicas, como: correr, jogar bola, andar de bicicleta, pular corda, soltar pipa, cantar, dançar, ouvir músicas, soltar pião, jogar xadrez, entre outras, que acompanham o ser humano desde sua infância até à fase adulta, proporcionando momentos de distração e prazer em realizá-las. Sabemos que os jogos e brincadeiras fazem parte da sociedade e têm sido vistas como atividades recreativas por um longo tempo.

A percepção acerca do jogo é compreendida como sendo de extrema importância para o pleno desenvolvimento pessoal e intelectual, no entanto, há evidências de que as atividades lúdicas nem sempre foram tidas com tanta importância para as sociedades existentes, principalmente quando diz respeito ao desenvolvimento cognitivo.

Segundo Kishimoto (2011 p. 31). “Durante a Idade Média, o jogo foi considerado como algo ‘não sério’, por sua associação ao jogo de azar, bastante divulgado na época”. Entretanto, foi no Renascimento que a brincadeira pode ser vista como atividade livre que favorece o desenvolvimento cognitivo e a aprendizagem dos conteúdos escolares. Mas, só no Romantismo, que o jogo apareceu como algo sério e destinado a educar as crianças, época onde se constrói um novo lugar para a criança e o jogo.

Nesse contexto, Kishimoto (1998, p.1) apresenta uma variedade de jogos conhecidos como “faz-de-conta, simbólicos, motores, sensório- motores, intelectuais ou cognitivos, de exterior, de interior, individuais ou coletivos, metafóricos, verbais, de palavras, políticos, de adultos, de animais, de salão e inúmeros outros", mostram a diversidade de fenômenos, que inclui a categoria de jogos e propõe dificuldades em defini-lo.

Assim, para tentar compreender a definição de jogo no ensino destacamos os autores Huizinga (1971) e Caillois (1990), Kishimoto (1998, 2011), Grando (1995, 2000, 2004), e Smole, Diniz, Pessoas e Ishihara (2008) que discutem a natureza do jogo assim como as suas características.

Huizinga (1971) tem a convicção que é no jogo e pelo jogo que a civilização surge e se desenvolve e é na intensidade, no encantamento, no interesse de excitar que se encontra a própria essência e característica do jogo. Segundo Huizinga, o jogo é um elemento existente na própria cultura, acompanhando-a desde as mais distantes origens até a fase de civilização em que agora nos encontramos.

Ao descrevê-lo como elemento da cultura, Huizinga (1971) aponta as características relacionadas aos aspectos sociais, sendo que a primeira é o fato de se constituir de uma forma livre, de exercer a própria liberdade, e ser uma atividade voluntária. Sujeitos a ordens torna-se ser uma imitação forçada. A segunda, é que o jogo não é "vida corrente" nem "vida real", pelo contrário, trata-se de uma transição da vida *cotidiana* para uma atividade temporária com orientação própria e um aspecto novo. Tomada como *não séria* e externa à vida cotidiana, pode prender a atenção do jogador de maneira intensa e total.

A terceira de suas características principais é o isolamento, a limitação. É jogado até o fim dentro de alguns limites de tempo e espaço. Possui um caminho e um sentido próprios. E, ligada à sua limitação no tempo há outra característica interessante do jogo, a de fixar-se imediatamente como fenômeno cultural. Outra característica mais positiva ainda: cria ordem e é ordem, já que num determinado jogo exige o cumprimento de regras, e a menor desobediência a ela estraga o valor do jogo.

Segundo Huizinga (1971), as regras são um fator muito importante para o conceito de jogo. Todo jogo tem suas regras, que por sua vez, são determinantes no momento do jogo. A dinâmica é fascinante e cativante, e o elemento de tensão que o mesmo desempenha no jogo designa a “incerteza” e o “acaso”, já que, ao fazer uso do jogo, precisa-se desenvolver estratégias e criar possibilidades.

Conforme Huizinga (1971, p.14) quando “O jôgo acaba: O apito do árbitro quebra o feitiço e a vida “real” recomeça”.

Para Caillois (1990), o jogo estabelece uma relação com a sociedade. O autor desconstitui a imagem do jogo como alheio ao meio social, potencializando a visualização da expressão social, modificando e sendo modificado pelas ações do homem. O jogo e a cultura acontecem em processos paralelos.

Assim, seguindo quase as mesmas ideias, Caillois (1990) caracteriza o jogo como uma atividade livre, separada em limites de espaço e tempo, improdutiva, pois não cria nem bens nem riqueza, e por ser uma ação voluntária da criança, com fim em si mesmo, não pode criar nada, não visa a um resultado final e, por último, a incerteza que predomina justifica a incerteza sempre presente no jogo, não tem conhecimento do rumo que a ação do jogo irá seguir, assim como também a ação do jogador dependerá, sempre, de fatores internos e externos, como a própria ação dos demais participantes.

Na concepção de Huizinga (1971), o jogo é relacionado a diversas situações da vida humana, não se limitando a uma definição no contexto de ensino. Como relata Grando (1995, p 34), o jogo na concepção de Huizinga categoriza “muitas das manifestações humanas como, por exemplo, em qualquer tipo de competição, o Direito (competição judicial), a produção do conhecimento (enigmas), a poesia (“jogo de palavras”), a arte, a filosofia e a cultura”.

Ao tentar diferenciar a brincadeira do jogo em suas diversas semelhanças, Kishimoto (2011, p. 18), destaca os estudos dos autores Gilles Brougére (1981, 1993) e Jacques Henriot (1983, 1989), que atribuem significados ao termo jogo ao apontarem “três níveis de diferenciações, sendo eles: 1. o resultado de um sistema linguístico que funciona dentro de um contexto social; 2. um sistema de regras; e o 3. um objeto”.

No primeiro caso, o objetivo do jogo está envolvido em cada contexto social. O importante não é seguir o sentido de uma “designação científica dos fenômenos” e, sim, respeitar o uso cotidiano e social, atribuída a cada sociedade. No segundo caso, um sistema de regras permite identificar, em qualquer jogo, uma estrutura específica aquela atividade, ao mesmo tempo em que executar as regras, desenvolve uma dinâmica lúdica.

O terceiro sentido refere-se ao jogo enquanto objeto. Assim, o objeto é o próprio material que constituiu as peças do jogo ou da brincadeira.

“Os três aspectos citados permitem uma primeira compreensão do jogo, diferenciando significados atribuídos por diferentes culturas, pelas regras e objeto que o caracterizam (Kishimoto, 2011, p. 20)”.

Diante das definições acima mencionadas sobre jogos, objetos que proporcionam ao ser humano momentos de satisfação pessoal, seguido de regras e como elemento da nossa cultura, buscou-se associar o jogo como atividade lúdica à escola, lugar de cultura que se volta à aprendizagem dos mais diversos conhecimentos.

Nessa perspectiva, teremos como apoio teórico os estudos de Grando (1995, 2000, 2004) que traz os aspectos metodológicos do jogo no ensino de Matemática. A autora defende que, dentro do contexto do ensino-aprendizagem, o jogo vai além da ação lúdica do jogo pelo jogo, ou seja, deixa de ter um fim em si mesmo, tornando um jogo pedagógico com fim na aprendizagem matemática, visando à construção e aplicação de conceitos.

Diferente do pensamento de Huizinga (1971) e outros autores que consideram o jogo uma atividade que se torna desinteressante por ter um fim em si mesmo ou por ser uma atividade de fantasia e que só é real no momento do jogo. Para Grando (1995), quando o professor intervém no jogo do aluno, refletindo sobre sua ação, a atividade deixa de ser “desinteressante” para o aluno, porque o mesmo percebe que o foco é também o conhecimento matemático que está sendo discutido a partir do jogo.

Conforme destaca Grando (2000), o sentido da resolução de problemas em atividades com os jogos, direcionando o professor como mediador, rompe a ideia do trabalho com o jogo ser desinteressante.

As autoras Smole, Diniz, Pessoa e Ishihara (2008) ao tentarem definir a palavra *jogo* no ensino, afirmam serem tantos e tão variados os sentidos que o mesmo assume na escola, que o caracteriza como não sendo uma tarefa fácil de defini-lo. No entanto, para compreender a definição de jogo nas aulas de Matemática, as autoras se apoiam em dois referenciais, cujos autores Kamii(1991) e Krulik (1997) compreendendo que:

> - o jogo deve ser para dois ou mais jogadores, sendo, portanto, uma atividade que os alunos realizam juntos;

> - o jogo deverá ter um objetivo a ser alcançado pelos jogadores, ou seja, ao final, haverá um vendedor;
> - o jogo deverá permitir que os alunos assumam papéis interdependentes, opostos e cooperativos, isto é, os jogadores devem perceber a importância de cada um na realização dos objetivos do jogo, na execução das jogadas, e observar que um jogo não se realiza a menos que cada jogador concorde com as regras estabelecidas e coopere seguindo-as e aceitando suas consequências;
> - o jogo deve ter regras preestabelecidas que não podem ser modificadas no decorrer de uma jogada, isto é, cada jogador precisa perceber que as regras são um contrato aceito pelo grupo e que sua violação representa uma falta; havendo o desejo de alterações, isso deve ser discutido com todo o grupo e, no caso de concordância geral, podem ser impostas ao jogo daí por diante;
> - no jogo, deve haver a possibilidade de usar estratégias, estabelecer planos, executar jogadas e avaliar a eficácia desses elementos nos resultados obtidos, isto é, o jogo não deve ser mecânico e sem significado para os jogadores (SMOLE et al, 2008, p.11).

Segundo Smole, Diniz, Pessoa e Ishihara (2008), o jogo deve ser desafiante, proporcionando aos jogadores a autoavaliação das suas ações e a participação ativa, observando as suas jogadas, mas também a jogada dos demais participantes do jogo.

Portanto, diante dos estudos realizados sobre os jogos, tendo em vista que por um longo tempo as pessoas faziam uso apenas como recreação e momento de distração para o descanso, vimos no decorrer das pesquisas que a concepção dos teóricos sobre os jogos no ensino possibilita uma mudança de atitude em relação ao uso desse recurso, tendo consciência do seu caráter lúdico e, associando-o ao aspecto pedagógico da sala de aula, podemos ter uma metodologia que contribuirá com a motivação, participação e, principalmente, a construção do conhecimento, por entender que o mesmo faz parte da necessidade do ser humano e da sua própria cultura.

Com base na compreensão de jogo aqui discutida pelos autores, a nossa pesquisa defende a ideia do jogo como momento de interação e até mesmo de recreação, desde que seja planejado para o diálogo, o desenvolvimento do pensamento cognitivo e a construção de ideias matemáticas, definido pela autora Grando (1995) como jogo pedagógico.

No desenvolvimento das ações cognitivas do jogador, o trabalho com o jogo, por meio da relação entre aluno/ professor/ disciplina, desenvolve as potencialidades através do conhecimento prévio do aluno e das explorações e mediações feitas pelo professor, a fim de chegar ao desenvolvimento potencial do aluno.

Consideramos ainda na presente pesquisa a liberdade de participação do aluno na dinâmica do jogo e inseridos nessa realidade presenciamos um fator essencial à dinâmica do jogo e que é defendida pelos autores citados acima como a seriedade no jogo ao proporcionar o cumprimento de regras e facilitar o desenvolvimento e a cooperação nas atividades de jogo.

2.2. O que apontam as pesquisas sobre jogos matemáticos

Neste tópico apresentaremos algumas pesquisas realizadas sobre o uso de jogos matemáticos em sala de aula que se encontram disponíveis na internet e no banco de teses da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

Procuramos as pesquisas de Jelinek (2005), Silva (2008), Pfiffer (2014), Silva (2016) e De Paulo (2017) por serem estudos recentes que envolvem professores e alunos do Ensino Fundamental e Médio na discussão sobre o uso de jogos no ensino de Matemática, visando promover um maior envolvimento dos alunos com a disciplina, ajudando na socialização, concentração, organização espacial e motivação pessoal. As cinco pesquisas nos deram subsidio para determinar a área e sujeitos da presente pesquisa.

Na dissertação **“Jogos nas aulas de matemática: Brincadeira ou aprendizagem? O que pensam os professores?”** (JELINEK, 2005), a pesquisa se deu pela necessidade da própria pesquisadora como professora entender o que são jogos e como trabalhar com essa proposta em sala de aula para auxiliar no ensino e aprendizagem da matemática. A pesquisa buscou investigar de que forma os jogos podem ser utilizados nas aulas de matemática e qual a concepção dos professores em relação aos mesmos.

A pesquisa em sua essência tem uma abordagem qualitativa, mas na busca para maximizar os resultados, utilizou-se uma composição das duas metodologias qualitativa e quantitativa. A coleta de dados se deu por meio de um questionário que buscou os seguintes questionamentos: Você trabalha com jogos no ensino de matemática? Em que momento e com que frequência?

Ao primeiro questionamento, dos vinte e um participantes, dez responderam que fazem uso de jogos nas suas aulas, onde sete destes trabalham com os anos iniciais do Ensino Fundamental. Dos demais, quatro responderam que às vezes trabalham com jogos e sete não usam jogos nas suas aulas de matemática, sendo estes docentes do Ensino Fundamental II e Ensino Médio. Em relação a frequência com o uso dos jogos, oito sujeitos participantes fazem uso semanalmente, sendo estes dos anos inicias, os demais fazem uso desse recurso mensalmente e os outros com frequência indeterminada. A realidade segundo a pesquisadora é que apenas professores das series iniciais do Ensino Fundamental fazem uso frequente desse recurso. Conclui-se que a ausência na formação sobre jogos e falta de matérias para o trabalho com jogos no ensino Fundamental II e Médio, causa essa infrequência com relação as atividades de jogo em sala.

Na dissertação, **O uso de jogos nas aulas de Matemática do Ensino Médio: o que dizem os professores de Matemática** do autor De Paulo (2017), a pesquisa foi motivada para o Ensino Médio porque no reconhecimento do campo de pesquisa que busca compreender o uso dos jogos no processo de ensino e aprendizagem de Matemática, muitas pesquisas têm se debruçado nas seriações que envolvem os anos iniciais e finais do Ensino Fundamental, mas no Ensino Médio, ainda são poucos os trabalhos.

A pesquisa teve como objeto de interesse saber o que dizem os professores de Matemática da rede pública de ensino sobre o uso de jogos nas aulas de Matemática do Ensino Médio. A escolha dos quatro professores ocorreu pelo fato de estes já terem utilizado ou estarem utilizando jogos nas aulas de Matemática do Ensino Médio. A pesquisa teve uma abordagem qualitativa do tipo descritiva exploratória e como instrumento de coleta de dados foram realizadas entrevistas de caráter semiestruturados e gravações de áudios.

Segundo a pesquisa, os professores entrevistados entendem que a utilização dos jogos em aulas de Matemática pode trazer bons resultados para a aprendizagem, porém os docentes que optam em fazer uso desse recurso em sala têm que enfrentar sérios desafios como o tempo que é escasso, o receio da mudança em relação a tradicional aula dialogada com giz e lousa e resolução de exercícios, falta de materiais e formação para trabalhar com esse recurso.

De Paulo (2017) compreendeu em sua pesquisa que a fala dos professores sobre o uso dos jogos no Ensino Médio, é um assunto que envolve aspectos de natureza formativa, que não depende apenas de saber que existe o jogo e utilizar em suas aulas, mas que é preciso pensar sobre a natureza do conteúdo, o objetivo que o jogo vai ter na aula, questões que envolvem a dimensão pedagógica. Trata-se de uma mudança de concepção de aula de Matemática que permeia a reflexão entre o tradicional e o novo, de concepção de aluno, do papel do professor, etc.

No trabalho de mestrado intitulado **Jogos com conteúdos matemáticos para os anos finais do Ensino Fundamental** (PFIFFER, 2014), o interesse pela pesquisa se deu por meio da insatisfação da pesquisadora com a aprendizagem dos alunos com conteúdos matemáticos, juntamente com a participação da mesma em uma feira de matemática no município de Blumenau, com jogo sobre números inteiros, onde se constatou que as crianças que faziam visitas no local, mesmo com dificuldades nos conteúdos dos jogos, muitos queriam conhecer as regras.

A pesquisa foi definida em uma abordagem qualitativa e teve como objetivo apontar a importância do uso de jogos com conteúdos matemáticos na revisão de algum conteúdo ou como atividade de reforço.

Pfiffer (2014) realizou sua pesquisa com alunos do 8° e 9° ano do Ensino Fundamental em duas escolas públicas do município de Blumenau, Santa Catarina, e a alguns licenciados em Matemática, da Universidade Regional de Blumenau (FURB). Como recursos pedagógicos foram trabalhados oito atividades de jogos em diferentes conteúdos matemáticos, apresentados em forma de tabuleiros, trilhas e cartas. Os registros referentes à aplicação das atividades foram realizadas através de depoimentos dos alunos que avaliaram a atividade.

Segundo a pesquisa, os resultados destacam a importância do ensino de conceitos matemáticos de uma forma mais dinâmica por meio dos jogos. Durante a observação, percebeu-se que jogos contribuem para: realizar cálculo mental; evidencia o limite do estudante; controlar a ansiedade; desenvolver a linguagem, a organização espacial e a concentração; superar frustrações causadas pelo erro; desenvolver a autonomia e o cumprimento de regras, bem como promover a interação entre os estudantes.

A pesquisa intitulada **As estratégias no jogo Quarto e suas relações com a resolução de problemas matemáticos** (SILVA, 2008), fundamentada no construtivismo de Jean Piaget, investigou se a promoção de sessões de intervenção com a utilização do jogo de regras “Quarto” poderia ser favorável às atividades de resolução de problemas de conteúdo matemático. A pesquisa contou com a participação de vinte e um alunos do Ensino Médio sendo sete de cada um dos três anos, pertencentes a duas escolas da rede particular da cidade de Campinas-SP.

A Prova de Conhecimentos Matemáticos foi composta por cinco problemas retirados do Exame Nacional do Ensino Médio (BRASIL, 2004, 2005), em que foram realizados com os participantes encontros individuais destinados à resolução de uma Prova de Conhecimentos Matemáticos, à promoção de Sessões de Intervenção com o Jogo “Quarto”, à Reaplicação da Prova de Conhecimentos Matemáticos e à aplicação da Prova das Permutações. O jogo “Quarto” foi apresentado a eles por meio de seu tabuleiro e peças.

Os resultados da pesquisa, desenvolvida com alunos do 1°, 2° e 3° anos do Ensino Médio, para os quais propuseram problemas de conhecimento matemático e realizaram intervenções por meio do jogo de regras, confirmam que, para os que dela participaram, houve progresso na maneira como solucionaram os problemas quando foram reaplicados.

A pesquisa designada: **O uso de jogos nas aulas de matemática do Ensino Médio: um recurso avaliativo do conceito de função**, direcionada por Silva (2016), teve como objetivo analisar a compreensão do conceito de função em uma turma do 1° ano do Ensino Médio por meio do uso de jogos matemáticos e conhecer através dos dados coletados as opiniões dos alunos sobre a prática com uso de jogos e as contribuições no conteúdo de funções.

A pesquisa se caracterizou por uma abordagem qualitativa, por buscar interpretar os fatos ocorridos no processo de intervenção, resultou na boa receptividade da turma ao uso de jogos matemáticos.

A pesquisa foi desenvolvida no período de 09 aulas, com a dinâmica de dois jogos sobre o assunto de funções afins, constante e quadrática, em que os alunos participantes já tinham visto o assunto em aulas anteriores. Observamos que muitos alunos, no momento da pesquisa, ainda tinham dificuldade em alguns assuntos relacionados à função, possuindo um conhecimento bastante limitado.

As atividades de pesquisa mostraram que o professor não pode deixar de atuar com diferentes metodologias de ensino a fim de atender às necessidades individuais, podendo diversificá-las, despertando neles a nova visão do papel da Matemática, para que possam adquirir uma boa capacidade de interpretação Matemática.

Ao analisar cada pesquisa, procuramos evidenciar melhor os elementos que a compõe, sendo assim, elaboramos o quadro 01, onde apresentamos o resumo.

Quadro 01: Resumo das pesquisas analisadas.

Autor - Ano	Sujeitos da pesquisa	Objetivo	O por quê da pesquisa?	Metodologia
JELINEK (2005)	**Professores** do Ensino Fundamental e Médio de escolas públicas e privadas.	Investigar de que forma os jogos podem ser utilizados nas aulas de matemática e qual o paradigma dos professores em relação aos mesmos.	A necessidade da pesquisadora de entender o que seria jogo e o seu trabalho em sala de aula.	Aplicação de questionários.
DE PAULO (2017)	**Professores** do Ensino Médio de escolas públicas.	Objeto de interesso é saber o dizem os professores de Matemática de uma escola da rede pública de ensino sobre o uso de jogos nas aulas de Matemática do Ensino Médio.	Porque, no campo de pesquisa sobre os jogos no processo de ensino aprendizagem de Matemática, poucas são as pesquisas que se volta para o Ensino Médio.	Aplicação de questionários.
SILVA (2008)	**Alunos** do 1°, 2° e 3° ano do Ensino Médio.	Investigar se a promoção de sessões de intervenção com a utilização do jogo de regra “Quarto” poderia favorecer as atividades de resolução de problemas de conteúdos matemáticos.	Por ver nos jogos uma possibilidade de desenvolver melhor a resolução de situações-problemas.	Questões com resolução de problemas e questões com Jogo “Quarto”.
PFIFFER (2014)	**Alunos** do 8° e 9° ano do Ensino Fundamental e alguns alunos licenciados em Matemática do PIBID.	Apontar a importância do uso de jogos com conteúdos matemáticos na revisão de algum conceito ou como atividade de reforço.	Por estar insatisfeita com a aprendizagem dos alunos e a participação da pesquisadora em uma feira de matemática com uso de jogos dos números inteiros, deixou–a interessada pela proposta.	O trabalho com oito atividades de jogos e os depoimentos dos alunos sobre essas atividades.
SILVA (2016)	**Alunos** do 1° ano do Ensino Médio em escola pública.	Analisar através da utilização de jogos nas aulas de matemática, a compreensão do conceito de função.	Dar continuidade no estudo dos jogos com alunos do Ensino Médio, já que tinha vivenciado outras experiências nessa perspectiva metodologia.	jogos com conteúdo de função afim e quadrática e registro escritos desses jogos.

Fonte: Elaborado pela autora.

A análise das pesquisas destacadas no quadro 01, que fizeram uso de jogos em sala de aula, nos ajudou a compreender como estão centralizadas as discussões nessa área da Educação Matemática e como a presente pesquisa pode contribuir com uso dessa metodologia em aulas de Matemática.

Inicialmente trazemos as pesquisas de Jelinek (2005) e De Paulo (2017) que estão direcionadas aos professores com o uso de jogos em sala de aula e assim percebemos o avanço que as pesquisas tem tido em relação ao uso de jogos em aulas de Matemática.

Ao longo dos anos, as pesquisas mostram que os professores compreendem a importância dos jogos não só para as series iniciais, mas em todos os anos de escolaridade, porém ainda colocam os desafios que enfrentam ao fazer uso da metodologia diante da realização das atividades com jogos em sala de aula.

O autor De Paulo (2017, p.64) fez uma análise sobre os professores que utilizam os jogos matemáticos com alunos do Ensino Médio e “verificou-se que a falta de formação e/ou informação por parte dos docentes a respeito dos jogos faz com que essa prática seja feita ainda de maneira pouco frequente”. No entanto, os professores entrevistados afirma que os jogos no ensino da Matemática podem trazer bons resultados para a aprendizagem.

Diante de tal situação, vê-se noutras pesquisa também analisadas nesse estudo que o uso de jogos no Ensino Médio pode, sim, ser um recurso de grande potencialidade para o ensino aprendizagem da matemática, sendo preciso que os professores busquem apoio pedagógico, planejem e elaborem, a fim de que, a metodologia possa acontecer nessa perspectiva.

Com base na experiência obtida na presente pesquisa, o trabalho com jogos no Ensino Médio acontece diante de uma diversidade de cultura, de valores e de ideias. De inicio, alguns alunos recusaram a participar do jogo, em um quantitativo pequeno, e a dinâmica do jogo permitiu essa liberdade ao participante.

No entanto, observa-se que a não aceitação das atividades com jogos acontece por dois motivos ou por achar que a atividade não faz parte do seu perfil ou por ser um jogo pedagógico que envolve conteúdos de Matemática, e como os alunos têm a ideia de que a Matemática é difícil, há recusa de alguns alunos, mas, no decorrer da dinâmica da aula, eles conseguem ver a diferença na metodologia de ensino.

Muitos discentes nunca tinham trabalhado com atividades de jogos envolvendo conteúdos de Matemática, por isso é esperado que alguns alunos recusem inicialmente a participar de tais atividades, cabendo ao professor não usar o jogo uma única vez, até porque, pedagogicamente, os objetivos inerentes ao jogo não permitem ser atingidos em um único momento. Tudo acontece de acordo com o planejamento, o objetivo a ser alcançado e a mediação que se desenvolve para atingir tal propósito.

É perceptível que quando são bem planejadas as atividades com jogos as suas potencialidades pedagógicas são evidenciadas, e os adolescentes se envolvem de tal forma que voltam a ser crianças, no sentido de interação, concentração e, principalmente, quando conseguem acertar uma partida, pois o ganhar no jogo já traz toda uma adrenalina e para muitos ganhar traz resultados positivos nos conhecimentos matemáticos, já que o jogo envolve conteúdos dessa área.

Como destacamos no quadro 01, são poucas as pesquisas de jogo na perspectiva da resolução de problemas com foco na mediação, os autores até mencionam a importância da resolução de problemas no jogo, porém na descrição das atividades não há um direcionamento voltado à reflexão para que o aluno possa pensar nos erros ou acertos presentes na sua jogada. O aluno do mundo atual precisa ser estimulado a refletir, a resolver problemas, a agir diante do erro. É preciso que o jogo pedagógico seja direcionado para desenvolver a formação do conceito matemático, não podendo acontecer com o propósito em si mesmo.

As pesquisas de Pfiffer (2014) e Silva (2016) desenvolveram atividades com jogos no Ensino Fundamental e no Ensino Médio, respectivamente, considerando assim, que os alunos tiveram uma boa aceitação com relação ao uso dos jogos em sala de aula. Porém, percebemos ainda a resistência em desenvolver conteúdos de Matemática a partir, de um jogo pedagógico, pois trabalham mais os jogos como revisão de exercícios.

O que procuramos destacar na presente pesquisa como diferencial ao trabalho com jogos pedagógicos é que o jogo pode acontecer em vários momentos do conteúdo e, principalmente, quando desenvolvemos um conteúdo matemático a partir de atividade lúdica.

Na perspectiva da resolução e exploração de problemas o jogo é um recurso capaz de desenvolver potencialidades que permite a construção do conhecimento matemático. Assim, introduzir um conteúdo com atividades de jogos permite, por meio das problematizações, o resgate dos seus conhecimentos prévios e socializações com os demais participantes do jogo.

Nessa perspectiva, Grando (1995), em sua pesquisa analisa o jogo não na dinâmica do jogo pelo jogo, mas defende o jogo como gerador de situações problemas.

> O jogo representa uma situação-problema simulada e determinada por regras, em que o indivíduo busca, a todo momento, elaborando estratégias e reestruturando-as, vencer o jogo, ou seja, resolver o problema. Este dinamismo característico do jogo é o que possibilita identifica-lo no contexto da resolução de problemas (GRANDO, 1995, p.77).

A pesquisa de Silva (2008) desenvolve resolução de problemas matemáticos através de intervenções com o jogo “Quarto”, e pode constatar que os alunos que participaram das sessões de intervenções com o jogo tiveram progresso nas soluções dos problemas. Esse resultado confirma a necessidade da resolução e exploração de problemas em atividades de jogos com foco no desenvolvimento das potencialidades, entre elas, o pensamento cognitivo, que se constrói através das intervenções e problematizações com o professor.

Entendendo que a ludicidade faz parte da vida do ser humano, como destaca De Paulo (2017) o jogo normalmente é uma atividade apreciada, não apenas por crianças, mas também por jovens e adultos.

Assim, no contexto do jogo pedagógico, realizamos a dinâmica com o jogo Enigma de Funções com alunos do 1° ano do Ensino Médio, a fim de identificar potencialidades como: a relação aluno/professor/disciplina, socialização, análise do erro, o desenvolvimento cognitivo, o cálculo mental e escrito e todas as atividades desenvolvidas por meio da resolução e exploração de problemas, com foco na mediação da professora pesquisadora.

2.3 Resolução e exploração de problemas

Na presente pesquisa, procuramos dar significado ao ensino de Matemática no Ensino Médio, recorrendo aos jogos matemáticos na perspectiva da resolução e exploração de problemas.

Nesse contexto da resolução de problema, procuramos entender o que seria um problema, já que a todo instante o ser humano se depara com situações no seu dia a dia que necessitam de soluções, exigindo que o indivíduo tome algumas decisões que favoreçam a resolução do problema em ação. E na matemática, o que podemos compreender como um problema?

Para responder a esse questionamento, Andrade (1998, 2017) diz que um problema “é entendido como um projeto, uma questão, uma tarefa, uma situação em que:”

> a) ***O aluno não tem ou não conhece nenhum processo que lhe permita encontrar de imediato a solução.*** O problema precisa exigir, da parte do aluno, a realização de um trabalho, não- repetitivo, não rotineiro, precisa estabelecer conexão entre o que o aluno já sabe e aquilo que ele ainda não sabe, precisa ser um nó entre o que o aluno sabe e aquilo que ele não sabe.
> b) ***O aluno deseja resolver, explorar ou realizar algum trabalho efetivo***. Esse projeto, essa questão posta, essa tarefa ou a situação dada precisa despertar o interesse do aluno e quando isso não acontece cabe ao professor iniciar um trabalho de problematização que possa despertar o interesse do aluno pela situação.
> c) ***Introduz*-se e/ou se leva o aluno à realização de algum trabalho efetivo.** Nesse sentido, o essencial é que o trabalho seja feito com bastante esforço e dedicação por parte do aluno. Não importa se o aluno tenha conseguido resolver ou não o problema, o que importa é o seu trabalho, desde que haja o seu envolvimento efetivo, desde que ele sinta engajado e o que se espera é que o aluno trabalhe o máximo possível. O que o aluno produziu nesse trabalho pode ser o ponto de partida do caminhar que o professor precisa trilhar com ele. Nesse caminhar, não há um ponto fixo de chegada. O compromisso do professor é levar o aluno e a turma até o ponto em que eles possam ir cada vez mais (ANDRADE, 2017, p.364).

Portanto, na Matemática, qualquer situação que desperte em nós o interesse em resolver e exige a busca por diferentes estratégias para a resolução pode ser considerado um problema. O próprio jogo pode ser considerado como um problema, quando o jogador busca estratégias, toma decisões e se desafia a realizar o trabalho para ganhar o jogo, ou seja, resolver o problema.

Conforme relata Grando (2004, p.30) “o jogo apresenta-se como um problema que “dispara” para a construção do conceito, de forma lúdica, dinâmica, desafiadora e mais motivante ao aluno”.

Como destaca Silva (2013, p 96), “as pesquisas em educação matemática indicam que só estamos diante de um problema quando não sabemos à sua resolução de imediato, porém, que estejamos interessados em desvendá-lo”. Qualquer situação pode ser entendida como um problema e não só apenas uma situação expressa por um contexto. No entanto, o que consideramos um problema para certa pessoa não necessariamente, possa ser um problema para outra, pois o problema depende de quem está interessado em resolver, visto que, quando se descobre a solução, o mesmo não se define mais como um problema.

O mesmo também pode acontece com alguns tipos de jogos, quando o jogador define suas estratégias após várias partidas e vence por várias vezes o mesmo jogo, assim, naquele momento o que antes era um problema passa a não ser mais para o jogador. Nesse contexto, defendemos a exploração da atividade com o jogo, na perspectiva da problematização, a fim de que durante todo o trabalho realizado o aluno possa compreender conceitos e desenvolver habilidades no pensamento matemático.

Ao longo das últimas décadas a resolução de problema vem sendo destaque nas pesquisas em sala de aula, desenvolvendo e apresentando aos leitores práticas exitosas. Sabemos que quando o professor recorre à metodologia da resolução de problema nas aulas de Matemática muitas supressas e contratempos podem surgir, entre eles, o tempo e a própria dinâmica da atividade, podendo beneficiar ou não o seu desenvolvimento. Entretanto, nenhum desses fatores poderá impedir a realização de um trabalho voltado na perspectiva da resolução e exploração de problemas.

Sabe-se que as pesquisas sobre resolução de problemas, direcionada para a sala de aula tiveram início com o trabalho de George Polya (1995, p. 3), em seu livro intitulado **A arte de resolver problemas**, do qual o autor "destaca quatro etapas que contribuem para o processo de resolução de problemas, sendo elas: 1°) compreender o problema; 2°) estabelecer o plano; 3°) execução do plano e 4º) fazer um retrospecto da resolução completa".

Grando (2004, p. 30), citando Krulik, estabelece um paralelo entre as quatro etapas definidas por Polya para a resolução de problemas com as quatro etapas para a elaboração de estratégias de um jogo: "1º) familiarização com o jogo; 2°) exploração inicial: procura de estratégias de resolução; 3°) aplicação da estratégia: seleção de posições ganhadoras e validação de conjecturas 4°) reflexão sobre o processo desencadeado".

Silva (2013) relata em sua pesquisa concepções da resolução de problemas apresentadas por Schroeder e Lester (1989):

> 1)Ensinar para a resolução de problemas, ou seja, tendo o fim na resolução de certos problemas, geralmente ficando para o final da apresentação do conteúdo, como os problemas de aplicação; 2) Ensinar sobre a resolução de problemas enfatizando as heurísticas e as quatro fases do Polya: compreensão do problema, planejamento de um plano de ação, execução do plano e fazer retrospecto.[...] 3)Ensinar via/através da resolução de problemas, tomando como ponto de partida o problema para fazer toda a construção do saber e do saber fazer matemático (SILVA, 2013, p.96-97).

Com base nessas concepções da resolução de problemas, destacamos, também, no presente trabalho, perspectivas metodológicas do jogo em aulas de Matemática sob duas finalidades. A primeira, que objetiva desenvolver o conteúdo matemático através do jogo, em que a construção das ideias matemáticas é desenvolvida a partir da exploração e resolução do problema determinado na dinâmica. E a segunda, na perspectiva do jogo como revisão do conteúdo.

Segundo Grando (2004) nesse processo, o foco principal está na ação dos alunos, em como se apresentam na busca pela estratégia do jogo, na tomada de decisão, na interação e socialização em grupo, na compreensão do erro como construção do conhecimento e na avaliação das suas jogadas.

Cabe ao professor ser um mediador nesse processo de construção, conduzindo o aluno a exercitar a prática em dialogar e fazer pergunta a fim de contribuir na compreensão e construção das ideias matemáticas, não interferindo ou dando respostas prontas à resolução dos alunos, mas destacando apenas pontos que precisam ser analisados.

Entretanto, compreendendo de fato o que é um problema matemático, podemos entender que, ao longo dos anos de escolaridade, o aluno precisa está preparado para o processo de resolução de problemas. O que encontramos na maioria das vezes é um ensino voltado para as definições, exemplificações, exercícios e algumas situações entendidas como problemas, mas que, muitas vezes, não despertam no aluno desenvolver um trabalho de resolução.

Assim, quando a situação não motiva o aluno, consequentemente, não há a realização da ação por parte do mesmo, o que podemos desconsiderar a possibilidade de resolução de problema nesse contexto.

Conforme apontam os documentos da Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018), a resolução de problemas pode exigir processos cognitivos diferentes:

> Há problemas nos quais os estudantes deverão aplicar de imediato um conceito ou um procedimento, tendo em vista que a tarefa solicitada está explícita. Há outras situações nas quais, embora essa tarefa esteja contida no enunciado, os estudantes deverão fazer algumas adaptações antes de aplicar o conceito que foi explicitado, exigindo, portanto, maior grau de interpretação. Há, ainda, problemas cujas tarefas não estão explícitas e para as quais os estudantes deverão mobilizar seus conhecimentos e habilidades a fim de identificar conceitos e conceber um processo de resolução. Em alguns desses problemas, os estudantes precisam identificar ou construir um modelo para que possam gerar respostas adequadas. Esse processo envolve analisar os fundamentos e propriedades de modelos existentes, avaliando seu alcance e validade para o problema em foco (BRASIL, 2018, p. 535).

A metodologia da resolução e exploração de problema no ensino- aprendizagem possibilita uma transformação no ambiente da sala de aula, onde professor e aluno juntos nesse processo de construção se comportam de modos diferentes do que habitualmente encontramos no ensino da Matemática.

O desenvolvimento da resolução de um problema para o professor é algo imprevisível, pois ele não sabe o direcionamento que a atividade pode tomar no contexto das discussões e perspectiva dos seus alunos. A partir dai as respostas vão sendo formadas, abrindo espaços para as problematizações e mediações na compreensão das ideias matemáticas presente na resolução. Conforme apontado por Andrade (1998):

> Dentro dessa proposta de ensino, o contexto do aluno e o do professor são de grande importância. Um professor que propõe um problema “x” para seus alunos e trabalha com eles para desenvolver a teoria das sequências geométricas a partir dele, é porque viu que, matematicamente, o problema exige esse conteúdo. Ele tem, a nosso ver, o direito e o dever de dirigir esse trabalho com os alunos, dialogicamente nesse sentido, mas o que ele não pode é desconsiderar que o trabalho dos alunos possa levar a conteúdos e problemas que ele sequer imaginou. Ele deve avançar e melhorar esse trabalho que gerou problemas e conteúdos inesperados. Num ensino de Matemática via Resolução, Exploração, Codificação e Descodificação de Problemas, não podemos desconsiderar nem o contexto do aluno, nem o contexto do professor (ANDRADE, 1998, p. 33).

Nesse sentido, a resolução não está voltada apenas em dar a resposta correta do problema, mas em compreender todas as ideias que são desencadeadas a partir dele, principalmente, os questionamentos que conduzem o aluno a compreendê-lo, mesmo que não esteja dentro do contexto do professor, mas na resolução problema é valido que todas as situações decorridas no processo de exploração sejam consideradas e dialogadas.

Assim, é fundamental que o professor possa explorar todas as possibilidades e questionamentos considerados pelos alunos a fim de conduzi-los a compreender e construir o conhecimento em estudo.

Com base no trabalho de dissertação desenvolvido por Andrade (1998), no qual discute a metodologia de ensino-aprendizagem via resolução, exploração, codificação e descodificação de problemas a partir da relação Problema-Trabalho-Reflexão e Síntese (P-T-RS) se desenvolve sobre dois aspectos: o processo e o produto como componentes essenciais da resolução de problemas. Para o autor, numa situação-problema envolve o trabalho do professor e aluno nesse processo de construção, podendo chegar ou não à resolução do problema.

No entanto, não há um roteiro a ser seguido ou uma descrição de resolução, o processo resulta numa metodologia conduzida pelo contexto que se desenvolve no espaço da sala de aula.

Segundo Andrade (1998), nesse processo de construção, a exploração de problema está baseada no processo de codificação e descodificação, em que codificar uma situação-problema é representá-la em outro contexto, em outra forma ou em uma linguagem mais simplificada, e descodificar uma dada situação é compreender a mensagem expressa decifrando-a, é procurar o significado, é entender o contexto.

> A codificação e a descodificação podem ser usadas como ferramentas na compreensão de um dado problema. Em certas ocasiões, o professor pode codificar o problema dado em uma forma que o torne mais compreensível para os alunos. O professor pode fazer um desenho representativo do problema dado, pode discutir uma determinada parte do problema etc. As diferentes codificações e descodificações, feitas por alunos e professor, podem ajudar a chegar a uma compreensão mais ampla do problema e podem sugerir diversos caminhos de resolução e indicar novas explorações, sendo que o trabalho feito por um aluno pode ajudar na compreensão do problema por parte de outro aluno e, quando um aluno codifica ou descodifica um problema dado, ele também passa a ter uma melhor compreensão do mesmo (ANDRADE, 1998, p.26-27).

Conforme pontua Andrade (1998) a exploração possibilita a busca pela resolução do problema, evidenciada nos questionamentos, ideias e pensamentos que surgem ao longo e até mesmo após a resolução, mesmo ao encontrar a resposta do problema, o diálogo precisa ser entendido com propostas para novas compreensões.

Entretanto, é inviável considerar a exploração do problema concluída quando se obtém a resolução final, pois, em outro momento podem surgir ideias e contextos que na resolução ficaram limitados, assim como outra forma de resolver o mesmo problema pode ser discutida novamente.

> No trabalho de exploração de problemas, há um prazer e uma alegria de ir cada vez mais longe, um ir cada vez mais profundo, um ir cada vez mais curioso, há um ir que chega e nunca chega, um ir que pode sempre ir, um ir que sempre se limita ao contexto do aluno, do professor, da Matemática, da escola... e por isso pode ir outra vez e mais outra vez... (ANDRADE, 1998, p. 25).

Segundo Andrade (1998) a exploração de um problema permite a construção e reconstrução do conhecimento matemático, através da codificação e descodificação do contexto, é um trabalho inacabado, sempre dá espaço para a problematização de novos questionamentos, seja pelo professor ou mesmo pelos alunos conduzindo a se envolverem em novos trabalhos de resoluções. Como aponta Silva (2013):

> Os alunos, na exploração de problemas, irão trilhar um caminho que não está pronto. Há sempre algo que se pode fazer além da apresentação de sua resolução e dar-se-á esse trabalho por encerrado quando o grupo não tiver mais questionamentos, podendo, em outro momento, ou em outro contexto, ser retomado, e, novas explorações e problematizações poderão ser levantadas e que, até então, não haviam sido percebidas nem exploradas (SILVA, 2013, p.103).

Grando (2004) no contexto do jogo defende:

> A inserção dos jogos no contexto educacional numa perspectiva de resolução de problemas, garantido ao processo educativo os aspectos que envolvem a exploração, explicitação, aplicação e transposição para novas situações-problema do conceito vivenciado (GRANDO, 2004, p. 29).

Os registros do jogo, além de todas as discussões e interação com o colega e professor, são de grande importância, tanto para o aluno, ao poder reavaliar sua partida de jogo fazendo questionamentos sobre os erros e acertos, como para o professor em poder conduzir uma problematização com base nos erros ocorridos e, assim, auxiliar o aluno na compreensão do conhecimento, a fim de que o mesmo possa desempenhar uma nova partida do jogo, organizando melhor os seus conhecimentos.

Em seguida destacaremos a resolução e exploração de problemas no jogo como uma potencialidade a ser desenvolvida, promovendo conflitos cognitivos que possibilitam a reconstrução e assimilação e novos conhecimentos.

2.4 As potencialidades dos jogos nas aulas de Matemática

Percebemos os benefícios alcançados ao realizarmos qualquer atividade diferenciada da metodologia continuamente aplicada nas nossas escolas, com os jogos não é diferente. Os discentes se envolvem a tal ponto de interagir com o conteúdo e, muitas vezes, não se dão conta de que estão aprendendo a Matemática. Quando bem planejada, uma atividade de jogos matemáticos pode criar um espaço de brincadeiras, exploração do conteúdo envolvido, interação e socialização da turma, análise e correção do erro, desenvolvimento do pensamento cognitivo e problematização do jogo, proporcionando aos envolvidos o protagonismo da sua aprendizagem.

Na Educação Matemática, segundo Grando (1995, p.116), “o jogo é definido como um gerador de situações-problema e desencadeador da aprendizagem dos alunos”, enriquecendo o vínculo entre o aluno e a disciplina. A seguir, discutiremos algumas potencialidades do jogo nas aulas de Matemática.

2.4.1 Relação aluno/professor/disciplina

A proposição da metodologia com jogos matemáticos procura trabalhar a Matemática por meio da ludicidade, do prazer e da problematização que os jogos proporcionam, de forma que os alunos sintam a necessidade de perguntar e passar a confiar mais no professor como mediador nos momentos de dúvida, ou em estratégias incertas na sua jogada, fortalecendo assim a interação professor/aluno.

No momento em que acontece tal atividade, quando se faz qualquer problematização explorando o jogo, o aluno, por mais inibido que seja sempre quer participar, talvez não no primeiro momento, mas ao longo das atividades com o jogo. Ao respeitar a decisão pessoal do aluno é possível que a participação aconteça, pelo desejo e curiosidade que o jogo desperta. Como Grando (2004) propõe, jogar é se expor aos próprios limites e suas formas de raciocínio, o que pode vir a causar um certo medo inicial.

As atividades de jogos possibilitam o contato do professor com os seus alunos, conhecendo-os nas suas individualidades, no relacionar com o outro, nos conhecimentos e dificuldades que durante o jogo vão sendo evidenciadas pelos participantes. Assim, o aluno se sente capaz de aprender pela segurança que o professor transmite e por meio da aproximação entre eles e da motivação que o jogo proporciona. Conforme destaca Kishimoto (2011, p. 94) “o professor é, por isso, importante como sujeito que organiza a ação pedagógica, intervindo de forma contingente na atividade autoestruturante do aluno”.

A relação professor/aluno é parte do envolvimento na construção de tal processo de aprendizagem significativa. Conforme, Grando (1995) aponta que não se constrói a dinâmica do aprender, sem que haja uma socialização dos conhecimentos matemáticos presentes em uma sala de aula.

> Nesse contexto, a interação professor-aluno é alterada na medida em que o professor perde o papel de “retentor do saber”, de controlador e punidor para ser um parceiro, um companheiro, um orientador das atividades, alguém que se expõe, faz descobertas junto com os alunos e aprende com eles (GRANDO, 1995, p. 92).

Como destaca Smole, Diniz, Pessoa e Ishihara (2008), o que torna possível a aprendizagem no processo de ensino, é o professor que pode intervir para que o aluno possa ampliar a sua análise no jogo, como também a sua aprendizagem no conhecimento matemático.

Quando não agimos com esse intuito, omitimos aquilo que podemos fazer por meio dessa interação professor/aluno, assim a metodologia do uso de jogos facilita esse caminhar do professor em meio à mediação no seu envolvimento com crianças e jovens, e nessa dinâmica os discentes sentem-se confiantes no seu processo de aprendizagem.

No nosso trabalho a relação aluno/professor/disciplina foi sendo construída ao longo de todas as atividades com o jogo e situações-problema apresentadas, os alunos se aproximaram mais da professora pesquisadora pela necessidade em realizar perguntas e discutir as suas ações no jogo, como também pelo contato mais próximo por estarem em pequenos grupos.

Também a relação com a disciplina de Matemática se destacou de forma positiva, pois nos conteúdos estudados, o que para muitos alunos seria difícil de ser compreendido, no jogo pode ser superado através da observação na partida de jogo do colega, na análise das cartas, na mediação da professora pesquisadora e, principalmente, no desejo de vencer o desafio do jogo, através de uma participação ativa nos conhecimentos matemáticos construídos.

Por isso destacamos o jogo como recurso pedagógico que favorece o desenvolvimento do trabalho em grupo, proporcionando a interação social, o controle de personalidades, a descoberta de potencialidades e a partilha dos conhecimentos.

2.4.2 Desenvolvimento cognitivo

O desenvolvimento cognitivo está atrelado a uma aprendizagem significativa que só acontece quando utilizamos atividades desafiadoras que conduzam o aluno a estabelecer relações entre o que sabe e aquilo que está aprendendo, exige dos mesmos, coragem em se colocar frente aos desafios e problemas, em saber solucioná-los buscando diferentes caminhos através da tentativa de errar e conseguir corrigir.

Encontra-se no jogo essa proposta desafiadora de envolver o aluno, pois nenhum aluno resistirá a não participar da dinâmica e do envolvimento de ver e tentar resolver os desafios proporcionados pelo jogo mediante as estratégias e o conhecimento matemático a ser utilizado em cada jogada. Segundo Grando (2004, p.25) “é necessário que a atividade de jogo proposta, represente um verdadeiro desafio ao aluno, ou seja, que se torne capaz de gerar ‘conflitos cognitivos’ ao aluno, despertando-o para a ação, para o envolvimento com a atividade, motivando-o ainda mais”.

Claro, esse resultado, necessariamente, não é percebido em uma primeira partida, mas ao longo de algumas atividades nessa perspectiva em que o aluno tenha uma participação ativa, engajada, tanto nas jogadas como na exploração proporcionada pelo professor, tornando-se perceptíveis aos avanços desenvolvidos na aprendizagem.

Segundo Grando (1995, p. 75) “o individuo, ao jogar, se arriscar, pois existe a possibilidade da vitória ou derrota, levanta hipótese, cria estratégias próprias e testa-as a partir de suas jogadas (experimentações)”. Nesse contexto, quando o individuo joga ele resgata as suas experiências já realizadas, para elaborar novas estratégias ou hipótese no presente jogo.

O desenvolvimento cognitivo vem das competências e habilidades a partir dos momentos no jogo, das resoluções dos problemas envolvidos constantemente, o que faz os participantes pensarem e refletirem qual será a melhor maneira de vencer tal situação, analisando cartas, tabuleiros e peças dos jogos a partir de sua jogada e a do seu oponente. Tudo isso enriquece a sua aprendizagem no conteúdo matemático envolvido e, consequentemente, as suas potencialidades cognitivas.

Conforme pontua Perrenoud (1999) citado por Smole, Diniz, Pessoa e Ishihara (2008), “uma competência pode ser entendida como uma capacidade de agir de modo eficaz em determinado tipo de situação, apoiada em conhecimentos, mas sem estar limitada a eles” (PERRENOUD, 1999; *apud* SMOLE et al, 2008, p. 15).

O jogo desenvolve o pensamento cognitivo que é fundamental no processo de resolução de problemas matemático diversos, inclusive do próprio jogo. A concentração e atenção que os participantes desenvolvem por meio das atividades propostas fortalecem a cognição, pois, ao observar o desenvolvimento de uma partida de jogo, seja de estratégias ou de conhecimento matemático, é nítido o empenho de tentar fazer a melhor jogada, desencadeando um alto nível de percepção, concentração, atenção e determinação que, quando não vence a primeira partida, sempre quer uma segunda para realizar uma nova jogada, a fim de corrigir o erro de estratégia ou de cálculo da partida anterior. Assim, fatores como a atenção e a concentração são determinantes no desenvolvimento cognitivo do discente.

No presente estudo, observamos que nos primeiros momentos com as atividades de jogo, alguns alunos tiveram dificuldades em participar e até recusaram-no, mas ao proporcionar os jogos pedagógicos com uma metodologia interativa por meio das explorações e intervenções da professora pesquisadora, os jogos foram sendo compreendidos, ao passo que se tornaram desafiantes entre os grupos de jogadores.

Assim, por não permitir que os jogos fossem apresentados em um único momento, mas ao longo das aulas, a dinâmica dos jogos foi conquistando os alunos. Nesse contexto, conseguimos despertar o desejo em participar das atividades de jogo e desenvolver nos jogadores a capacidade de pensar, de perguntar, de avaliar e corrigir os seus erros e, principalmente, de desenvolver suas próprias resoluções a partir do que sabem e do que estava sendo construído em contato com o outro.

2.4.3 Socialização

Cada sala de aula é única e cada aluno também é único. Isso serve de reflexão para o professor propor metodologias que possam atender as especificidades com relação às dificuldades de aprendizagem dos seus alunos. No entanto, quando a nossa metodologia é meramente livro, quadro e pincel, acabamos não envolvendo todos os alunos na dinâmica da aula, e aqueles mais envolvidos se saem bem, mas como nem todos são iguais e como sempre existem os mais tímidos, os que têm dificuldade na disciplina e que por vários outros motivos não se envolvem nessa dinâmica de aprendizagem. Esses alunos acabam se distanciando, tanto do professor como dos colegas e até mesmo da própria disciplina, ou seja, não se socializam.

Isso não acontece com o jogo se, a atividade for planejada e direcionada com tal propósito, por mais que a turma seja numerosa e, como tal, seja difícil trabalhar individualmente, mas quando formamos os grupos para trabalharmos com jogos, aqueles que não se envolvem na dinâmica passam a participar do jogo ora como juízes, ora como observadores, ora como participantes ativos e, sem perceber, a dinâmica da atividade faz com que eles se socializem. Assim, muitos quando têm dúvidas sobre o jogo ou o conteúdo compartilha com os colegas e, o mais interessante, é que ao invés do jogo proporcionar apenas competitividade entre os participantes, temos também a socialização presente nesses momentos.

É na troca de experiência e conhecimentos com outras pessoas que se podem promover outras perspectivas e opiniões. Como Grando (1995) afirma em suas pesquisas:

> É nos jogos e pelos jogos que os alunos podem vir a aprender sobre o "viver em sociedade", determinada por regras e padrões de comportamento, de ação. Desta forma, não se pode negar a importância dos jogos para o desenvolvimento da interação social entre crianças. Além disso, os jogos podem, até mesmo, auxiliar no processo de ajustamento da criança a esse meio, a essa sociedade (GRANDO, 1995, p. 93).

A atividade em grupo nem sempre é bem aceita, tem sempre aqueles alunos que preferem realizá-la na sua individualmente. Entretanto, sabemos que ninguém é tão capaz que possa se achar autossuficiente em tudo.

O meio que o jogo proporciona influência muitos alunos a envolver-se no trabalho em grupo, aceitar a argumentação do outro, a compreender o que o outro está apresentando. Conforme afirma Smole, Diniz, Pessoa e Ishihara (2008) sobre o envolvimento dos nossos alunos em atividades de grupo.

> Podemos mesmo afirmar que, sem a interação social, a lógica de uma pessoa não se desenvolveria plenamente, porque é nas situações interpessoais que ela sente obrigada a ser coerente. Sozinha poderá dizer e fazer o que quiser pelo prazer e pela contingência do momento, mas em grupo, diante de outras pessoas, ela sentirá a necessidade de pensar naquilo que dirá, que fará, para que possa ser compreendida (SMOLE et al, 2008, p. 11).

Como acontece também no jogo, a descoberta dos alunos que são considerados desinteressados pelas aulas de Matemática ou até mesmo os mais tímidos em participação e interação. A dinâmica de socialização entre os participantes acaba por facilitar a proposição da melhor estratégia, levantando possibilidades para realizar a melhor jogada e conseguir vencer. Muitos alunos só precisam de espaços para expor as suas habilidades e sentirem-se capazes naquilo que fazem. Segundo Grando (2000):

> É por isso que observamos que, muitas vezes, durante as atividades com jogos, as crianças (adversários) se ajudam durante as jogadas, esclarecendo regras e, até mesmo, apontando melhores jogadas (estratégias). A competição fica minimizada. O objetivo torna-se a socialização do conhecimento do jogo. Além disso, nesse processo de socialização no jogo, a criança ouve o colega e discute, identificando diferentes perspectivas e se justificando. Ao se justificar, argumenta e reflete sobre os seus próprios procedimentos em um processo de abstração reflexiva (GRANDO, 2000, p. 29).

Os participantes do jogo, ao observarem a estratégia e os cálculos feitos pelo seu oponente, na grande maioria, corrigem quando estão errados e ajudam a entender a forma correta de resolver, sempre tendo muito cuidado com as ajudas para não intervirem no ganho da sua jogada. Claro, se não, não seria jogo. Outro ponto que a socialização se faz presente é durante a exploração e problematização quando direcionada pelo professor.

As equipes participam de tal forma, seja respondendo algo inerente a sua jogada ou perguntando sobre as dúvidas e, nesse segundo momento, a problematização acontece em um processo dinâmico de muita socialização entre alunos e professores. Segundo Macedo, Petty e Passos (2005), os jogos influenciam no desenvolvimento de habilidades, pensamentos ou sentimentos:

> [...] ao aprendê-los, desenvolvemos o respeito mútuo (modos de se relacionar entre iguais), o saber compartilhar uma tarefa ou um desafio em um contexto de regras e objetivos, a reciprocidade, as estratégias para o enfrentamento das situações-problema, os raciocínios (MACEDO, et al 2005, p. 10).

O jogo potencializa a aprendizagem de forma lúdica por meio da socialização dos envolvidos. Segundo Smole, Diniz, Pessoa e Ishihara (2008, p.10), "por sua dimensão lúdica, o jogar pode ser visto como uma das bases sobre a qual se desenvolve o espirito construtivo, a imaginação, a capacidade de sistematizar e abstrair e a capacidade de interagir socialmente".

Para tanto é fundamental que o docente promova situações em que o aluno possa aprender a dialogar, a ouvir o outro e ajudá-lo, a pedir ajuda, a expor seu ponto de vista, coordenar ações para atender aquilo que deseja e sentir-se satisfeito e motivado. Todos esses direcionamentos são dados nas atividades com uso de jogos, muitas vezes de forma implícita, em que os próprios envolvidos não percebam a grandeza do envolvimento que está sendo construído.

A socialização é uma das potencialidades do jogo que tem se destacado na dinâmica do nosso trabalho de pesquisa, o que consideramos fundamental no desenvolvimento das capacidades intelectuais dos nossos alunos. A relação nos grupos de jogo permitiu a partilha de experiências e conhecimentos, proporcionando o engajamento e a motivação pessoal.

O que consideramos de forma positiva é que mesmo sendo um jogo e que possivelmente terá sempre um vencedor em cada partida, na maioria das equipes isso não teve influência na interação e socialização dos conhecimentos.

2.4.4 Habilidades nos cálculos

Os alunos encontram muitas dificuldades nos conteúdos de Matemática do Ensino Médio e a maioria está relacionada aos conhecimentos básicos do Ensino

Fundamental, principalmente, com relação às operações fundamentais da Matemática. Essas dificuldades são fatores essenciais para deixá-los desmotivados com a disciplina.

Os jogos de conhecimentos matemáticos frequentemente trazem o cálculo como parte integrante para facilitar aos participantes à compreensão e a superação nas dificuldades com as operações envolvidas no cálculo numérico. Essa perspectiva apresenta-se nos jogos e em todos os níveis de ensino, porém como não é tão direcionada as atividades com jogos nas aulas de Matemática, perdemos a dinâmica de desenvolver mais as habilidades com o cálculo.

No momento do jogo, o professor por meio da mediação pode rever as regras e propriedades dos cálculos numéricos, problematizando as questões inerentes ao jogo e os alunos podem ter liberdade para realizá-los a tal ponto de desenvolver a prática do cálculo mental nas situações de jogo, o que favorece o pensar e a capacidade de resolver problemas. Segundo Parra (1996), citado por Starepravo (2009):

> Entenderemos por cálculo mental o conjunto de procedimentos em que, uma vez analisados os dados a serem tratados, estes se articulam, sem recorrer a um algoritmo preestabelecido para obter resultados exatos ou aproximados. Os procedimentos de cálculo mental se apoiam nas propriedades do sistema de numeração decimal e nas propriedades das operações, e colocam em ação diferentes tipos de escrita numérica, assim como diferentes relações entre os números (PARRA, 1996 *apud* STAREPRAVO, 2009, p.40).

Como destaca Starepravo (2009) o cálculo mental é um pouco mais demorado, usa as mesmas operações e propriedades matemática, porém trabalha mais o pensamento e as relações envolvidas podem ser mais compreendidas e têm um significado para quem o realiza.

“A elaboração de estratégias pessoais de cálculo desenvolve a autoconfiança e permite aos alunos manter um controle maior das etapas do processo. Além disso, eles tornam-se capazes de julgar a validade dos resultados encontrados (Starepravo, 2009, p.41)”.

Os jogos matemáticos permitem a liberdade na realização dos cálculos, sejam eles o cálculo mental ou o automatizado (aquele realizado por meio de um algoritmo convencional). Estes são evidenciados no jogo a partir da análise e procedimentos utilizados pelos jogadores. No entanto, considera-se que o cálculo mental contribui com uma maior compreensão das relações envolvidas, por não está ligado a uma repetição de procedimentos com a utilização dos algoritmos convencionais.

Segundo Grando (2000, p.47), “a habilidade com o cálculo mental pode fornecer notável contribuição à aprendizagem de conceitos matemáticos (relação, operações, regularidades, álgebra, proporcionalidade) e ao desenvolvimento da aritmética”.

As escolas ainda valorizam o cálculo escrito baseado em algoritmos convencionais, seguido por meio de regras e propriedades, que nem sempre os alunos conseguem compreender o significado. Nesse contexto, Grando (2004) afirma que até mesmo nas resoluções de problemas mais complexos o cálculo mental se torna mais favorável por possibilitar uma melhor compreensão quanto ao significado do resultado.

Nesse contexto, os jogos propõem a liberdade de resolução ao aluno, mesmo que o cálculo mental não tenha sido priorizado na sua vida escolar. Porém, muitas vezes, fora da escola, utiliza-se o cálculo mental por uma necessidade prática cotidiana, o que pode ser também realizado nas atividades com jogos, podendo-se escolher a forma que mais se adequa à situação-problema. Nesse aspecto, Parra (1996), citado por Grando (2004) afirma que:

> Os jogos representam um papel importante. Por um lado, permitem que comece a haver na aula mais trabalho independente por parte dos alunos: estes aprendem a respeitar as regras, a exercer papéis diferenciados e controles recíprocos, a discutir, a chegar a acordos. (...) Estes jogos utilizados em função do cálculo mental podem ser um estímulo para a memorização, para aumentar o domínio de determinados cálculos (PARRA, 1996 *apud* GRANDO, 2004, p. 44).

O cálculo mental favorece uma melhor compreensão do conhecimento matemático, através da criatividade e as diferentes formas de resolução e reflexão sobre o significado dos cálculos.

No jogo Enigma de Funções trabalhamos mais a linguagem matemática nas propriedades da função e na análise das suas representações gráfica e algébrica. No entanto, ao trabalhar com situações-problema pudemos discutir a resolução com utilização dos cálculos, e percebemos que os alunos fizeram mais o cálculo escrito, não desenvolvendo muito o cálculo mental.

Destacamos esse ponto como algo que pode ser avaliado na perspectiva do trabalho com os jogos, a fim de possibilitar mais atividades de jogos que proporcione o desenvolvimento do cálculo mental.

2.4.5 Resolução e exploração de problemas no jogo

A proposta das atividades com jogos matemáticos deve está sempre aliada à resolução e exploração de problemas, pois na tentativa de ganhar a partida o participante está resolvendo vários problemas inerentes ao jogo, uma vez que, na verdade, ganhar o jogo para o aluno é nada mais nada menos do que resolver um grande problema e a forma como acontece essa busca pela resposta certa num processo de exploração de ideias e conceitos é o que fortalece essa metodologia de ensino.

Grando (2004) estabelece o elo entre o jogo e a resolução de problemas através da ligação do jogo em possuir um propósito direcionado à aprendizagem no que diz respeito à formação de ideias matemáticas.

> Analisando a relação entre o jogo e a resolução de problemas, ambos enquanto estratégias de ensino, evidenciamos vantagens no processo de criação e construção de conceitos, quando possível, por meio de uma ação comum estabelecida a partir da discussão matemática entre os alunos, e entre o professor e os alunos (GRANDO, 2004, p.29).

Segundo Azevedo (1999), numa sociedade que passa por constantes transformações e surgem novos problemas a cada dia, tem-se nos jogos um recurso que desenvolva a capacidade de criar soluções que atendam a tais expectativas.

O jogo desenvolve no aluno o desejo de fazer perguntas, buscar solução, pensar na melhor forma de realizar a jogada, rever as suas atitudes, ou seja, proporciona a resolução do problema. Grando (2004) relaciona a busca do aluno para vencer o jogo com o contexto da resolução de problema.

> O cerne da resolução de problemas está no processo de criação de estratégias e na análise, processada pelo aluno, das várias possibilidades de resolução. No jogo ocorre fato semelhante. Ele representa uma situação-problema determinada por regras, em que o indivíduo busca a todo o momento, elaborando estratégias e reestruturando-as vencer o jogo, ou seja, resolver o problema. Este dinamismo característico do jogo é o que possibilita identificá-lo no contexto da resolução de problemas. (GRANDO, 2004, p. 29).

Na situação do jogo, o aluno só compreende o problema, muitas vezes, quando realiza toda a ação de uma partida e que pode acontecer até mesmo após várias jogadas. Portanto, o jogo como recurso pedagógico em sala de aula deve ser explorado em vários momentos, nos quais o aluno possa jogar várias partidas, descobrindo o problema, avaliando suas jogadas, refletindo sobre suas ações até conseguir vencer o jogo e compreender as ideias matemáticas presentes na resolução do problema.

Starepravo (2009) faz referência do jogo como problema que desperta o interesse do aluno:

> Os jogos colocam os alunos constantemente diante de situações de resolução de problemas e, como essas situações se apresentam de uma forma diferenciada dos “problemas” em geral trabalhados na escola (enunciados com formatação padrão apresentados por escrito), acabam encorajando o aluno a usar procedimentos pessoais, os quais podem ser, posteriormente, objeto de discussão com toda a classe (STAREPRAVO, 2009, p.52).

O trabalho com o jogo é significativo quando a perspectiva do professor também está centrada na resolução e exploração de problemas, pois a dinâmica da atividade fica mais atrativa e participativa. Nessa perspectiva, o jogo não é meramente abordado com um fim em si mesmo, mas na dinâmica da exploração e construção de conhecimentos a partir do mesmo.

Segundo Starepravo (2009, p.39), “o professor tem papel fundamental na mediação dessa discussão e na proposição de novas questões que levem os alunos a refletir sobre seu próprio pensamento, propiciando as (re)elaborações”.

Essa perspectiva com o jogo trata de situações em que não evidenciamos diretamente uma solução, mas, exige dos participantes fazerem uma conexão com os conhecimentos e decidirem qual a maneira de usá-los na busca da solução. A partir daí, o mediador problematiza a situação, construindo a compreensão de ideias matemáticas e, possivelmente, a resposta do problema.

A resolução e exploração de problemas potencializa a atividade com jogo, por proporcionar espaço para o aluno discutir seus questionamentos, tomar decisões e ganhar a confiança pessoal em suas próprias resoluções, permitindo que suas ideias sejam valorizadas. Grando (1995), ao defender as atividades de jogo, afirma que:

> Defende-se a visão de jogo no contexto da Educação Matemática, enquanto gerador de situações problemas (conflitos), de real desafio para o aluno e desencadeador de sua aprendizagem onde o conteúdo matemático esteja envolvido. (...) É necessário jogar e refletir sobre suas jogadas, sendo que, ao fazê-lo, constrói o conteúdo envolvido (GRANDO, 1995, p. 28).

A resolução e exploração de problemas estão presentes nas atividades com jogos quando o professor que é o mediador da ação faz o aluno discutir suas ideias e resoluções ou quando a discussão é provocada entre os participantes, no sentido de concordarem ou discordarem de tal proposta, no contexto de defender com argumentos suas jogadas.

Quando os jogadores não têm esse perfil de discussão, o próprio mediador precisa fazer as provocações necessárias para resgatar no aluno esse potencial que o jogo estimula. Smole, Diniz, Pessoa e Ishihara (2008, p. 15) afirmam que “a relação natural entre o jogo e resolução de problemas coloca os alunos frente a situações que exigem deles desenvolver meios de alcançar uma meta, resolver problemas, agir na urgência e tomar decisões”.

O professor, ao receber questionamentos do aluno, leva-o a compreender por meios de indagações e descobertas próprias, o processo de construção do conhecimento matemático, em uma formação pessoal, crítica e ativa. Segundo Starepravo (2009):

> Os jogos exercem um papel importante na construção de conceitos matemáticos por se constituírem em desafios aos alunos. Por colocar as crianças constantemente diante de situações-problema, os jogos favorecem as (re)elaborações pessoais a partir dos seus conhecimentos prévios. Na solução dos problemas apresentados pelos jogos, os alunos levantam hipóteses, testam sua validade, modificam seus esquemas de conhecimento e avançam cognitivamente (STAREPRAVO, 2009, p. 19).

A problematização deve fazer parte das atividades com jogos, para que os discentes possam desenvolver as competências a fim de atingir os objetivos do jogo. Essa dinâmica pode acontecer em vários momentos, desde as observações nos momentos do jogo, nos registros, nas perguntas e dúvidas dos próprios alunos, como ao fim de cada jogada o professor pode propor problemas a partir do próprio jogo, envolvendo toda a turma.

Como o aluno chegou a determinado ponto do tabuleiro? Se tal decisão tomada não pode interferir no ganho da próxima jogada. E assim, pode-se abrir um leque de investigações em cada partida, para que o aluno possa compreender bem o jogo e ter uma participação ativa, potencializando a aprendizagem não só dos conteúdos, mas, ampliando uma visão de mundo aos envolvidos, tornando-os críticos, ativos e participativos no processo de formação pessoal.

Segundo Smole, Diniz, Pessoa e Ishihara (2008, p.14), “a problematização inclui o que é chamado de processo metacognitivo, isto é, quando se pensa sobre o que se pensou ou se fez”. Exige uma relação entre o que sabe e o que está aprendendo. Faz-se uma retomada do conhecimento anterior para facilitar a compreensão dos novos, esclarecendo dúvidas não entendidas e reestruturando novas ideias matemática. As autoras destacam três características da perspectiva metodológica da resolução de problemas:

> A primeira característica dessa perspectiva metodológica é considerar como problema toda situação que permite alguma problematização. A segunda característica pressupõe que enfrentar e resolver uma situação-problema não significa apenas compreender o que é exigido, aplicar as técnicas ou fórmulas adequadas e obter a resposta correta, mas, além disso, uma atitude de investigação em relação àquilo que está em aberto, ao que foi proposto como obstáculo a ser enfrentado e até à própria resposta encontrada. A terceira característica implica que a resposta correta é tão importante quanto a ênfase a ser dada ao processo de resolução, permitindo o aparecimento de diferentes soluções, comparando-as entre si e pedindo que os resolvedores digam o que pensam sobre ela, expressem suas hipóteses e verbalizem como chegaram à solução (SMOLE et al, 2008, p.13).

Assim compreendemos que não é só chegar à resposta correta, mas, refletir sobre todo o processo, como as dificuldades encontradas, o desenvolvimento das soluções e as hipóteses levantadas. Enfim, a resolução de problemas desenvolve o pensar e refletir na busca da compreensão, sendo um exercício contínuo de desenvolvimento do senso crítico.

A resolução e exploração de problemas foi um grande desafio da presente pesquisa e o diferencial nas atividades com jogos em relação à outras experiências já tidas com o jogo numa perspectiva mais superficial. Nesse contexto, procuramos introduzir conteúdo de Matemática com atividades de jogos e situações-problemas na perspectiva da resolução e exploração de problemas, incentivando os jogadores a rever os seus conhecimentos prévios em um processo de mediação e exploração das ideias matemáticas que foram construídas entre as equipes.

Propomos a realização do jogo sobre várias atividades de forma que o jogador tivesse o tempo necessário para entender o seu jogo, construir suas estratégias, corrigir e avaliar os seus erros, compreender as ideias matemáticas presentes no jogo e resolver o problema, que era vencer o jogo.

2.4.6 O erro no contexto do jogo

Atualmente, o erro ainda é visto pelos nossos alunos e pela escola como algo negativo e punitivo. O aluno ao participar da aula e se a sua participação não tiver de acordo com aquilo que o professor está explicando, poderá não ser bem compreendido pelos colegas, assim muitos alunos preferem não participar da discussão, passando apenas a receber as informações.

Pelo erro nos processos avaliativos os alunos tiram notas baixas, sendo as notas a situação mais importante, resultados, muitas vezes, de estudos decorativos que servem mais para atingir uma nota necessária à aprovação, e, no caso de não atingi-la, o aluno precisa realizar uma nova avaliação para recuperar o resultado não alcançado. Concluímos que, a forma como o erro ainda é compreendido acaba inibindo o aluno a desenvolver melhor o seu potencial.

Enquanto não levarmos em consideração que cada um dos nossos alunos tem uma experiência de vida, como, também, os conhecimentos prévios adquiridos. E que através da participação, argumentação de ideias e opiniões, eles podem construir seus conhecimento de forma coletiva e participativa, o erro permanecerá dificultando a aprendizagem dos conteúdos matemáticos e os nossos alunos continuarão temerosos em participar e expor suas ideias, limitando-se a uma formação que não contribuirá à construção de cidadãos críticos e pensantes.

Nessa perspectiva de envolver o aluno e fazer com que o mesmo perceba no erro a compreensão de novas ideias a partir da correção, encontramos nos jogos essa potencialidade, tanto em seu aspecto argumentativo, participativo como também no processo de utilizar as estratégias de jogadas. São pelos erros que se obtêm os acertos.

O jogo é um recurso metodológico que os próprios participantes, muitas vezes, percebem o erro cometido na jogada, mas esse erro não dá margem para encerrar o jogo por não ter conseguido fazer o certo. Pelo contrário, os alunos questionam sobre o que causou tal situação, tentam entendê-lo em um momento de reflexão, para poderem virar o jogo.

É pelo erro que o professor faz a intervenção, observando as dificuldades de determinado conteúdo naquela equipe de jogadores. O erro, na concepção da autora Grando (2000), pode ser útil enquanto fonte de informações acerca dos procedimentos utilizados pelos sujeitos e recurso para a reflexão sobre como as estratégias do jogo são definidas, a partir da análise de tais erros.

O erro obtido no momento do jogo aumenta a capacidade de pensar, agir, de ter atenção e concentração do jogador, contribuindo para compreender melhor a sua estratégia na partida do jogo. Grando (2000) valoriza o erro na perspectiva de poder avaliar novamente as jogadas:

> É na ação do jogo que o sujeito, mesmo que venha a ser derrotado, pode conhecer-se, estabelecer o limite de sua competência enquanto jogador e reavaliar o que precisa ser trabalhado, desenvolvendo suas potencialidades, para evitar uma próxima derrota. O “saber perder” envolve este tipo de avaliação (GRANDO, 2000, p.28).

O jogo proporciona a quem ganha, euforia, satisfação e realização pessoal, no entanto não é garantido que numa próxima partida o mesmo venha a vencer novamente. Assim, dificilmente o jogador que ganha faz uma reflexão sobre a sua ação no jogo, o que impede de definir melhores jogadas nas próximas partidas. Já os jogadores que não conseguem resultados positivos, analisam as suas ações em conjunto com os demais participantes. E nesse contexto o erro é avaliado por ambos os envolvidos, definindo melhores estratégias e correções futuras.

O que se faz necessário é ter um ambiente favorável à troca de ideias entre os participantes, e onde todos possam compreender que, além do jogo proporcionar o ganho ou perda na partida, tem em jogo o conhecimento que ali está sendo discutido em sala de aula, e nessa interação todos ganham. .

O erro não pode ser compreendido como algo negativo na aprendizagem dos conteúdos, mesmo nos exercícios rotineiros. O jogo deve ser entendido como uma oportunidade para o aluno construir e reavaliar seus conceitos, a fim de compreendê-los, sem se sentir derrotado, ao contrário, ele deve ser entendido numa perspectiva de avanços no conhecimento, o que proporciona o ganho como jogador.

Borin (2007) nos traz uma importante justificativa para o uso de jogos na sala de aula.

> [...] a introdução de jogos nas aulas de Matemática é a possibilidade de diminuir bloqueios apresentados por muitos dos nossos alunos que temem a matemática e sentem-se incapacitados para aprendê-la. Dentro da situação de jogo, onde é impossível uma atitude passiva e a motivação é grande, notamos que, ao mesmo tempo em que estes alunos falam matemática, apresentam também um melhor desempenho e atitudes positivas frente a seus processos de aprendizagem (BORIN, 2007, p. 9)

Ao propor a correção dos erros, o jogo permite que o jogador avance ao rever as suas falhas na jogada anterior, desenvolvendo a consciência dos seus atos e a autonomia para aprender aquilo que não ficou compreendido em outro momento do jogo. Como destaca Borin (2007), o jogo aproxima o aluno da disciplina de Matemática e influencia significativamente na compreensão do erro como uma oportunidade de desenvolver novos conhecimentos e estratégias diminuindo assim, bloqueios que normalmente se colocam diante do aluno quando, o mesmo sente-se incapaz diante de algumas situações.

Smole, Diniz, Pessoa e Ishihara (2008), propõe que no jogo o aluno compreenda o erro como algo normal e que pode ser recuperado por meio da análise e correção.

> No jogo, os erros são revistos de forma natural na ação das jogadas, sem deixar marcas negativas, mas propiciando novas tentativas, estimulando previsões e checagem. O planejamento de melhores jogadas e a utilização de conhecimentos adquiridos anteriormente propiciam a aquisição de novas ideias e novos conhecimentos (SMOLE et al, 2008, p.10).

Quando associamos à dimensão lúdica do jogo a dimensão educativa, temos inúmeras potencialidades direcionadas ao ensino/aprendizagem, mas segundo Smole, Diniz, Pessoa e Ishihara (2008, p.10) “uma das interfaces mais promissoras dessa associação diz respeito à consideração dos erros”.

No jogo, o erro é visto como um ponto possível de acontecer, seja pelo próprio jogador ou pelo seu adversário, possibilitando a ambos a oportunidade de reverem, corrigirem em uma próxima partida do jogo, evitando que o mesmo aconteça novamente e os impeçam de vencer. Segundo Azevedo (1999, p.76) “a prática do debate exercita a argumentação, organiza o pensamento e constrói uma atitude positiva diante do erro”.

Grando (1995) discute ainda sobre o erro, defendendo que é por meio das atividades de grupo com uso dos jogos que o aluno consegue minimizar esse sentimento de ganho e perda.

> É na ação do jogo que o sujeito, mesmo que venha a ser derrotado, pode conhecer-se, estabelecer o limite de sua competência enquanto jogador e reavaliar o que precisa ser trabalhado, desenvolvendo suas potencialidades, para evitar uma próxima derrota (GRANDO, 1995, p.42).

É nesse momento que o aluno compreende que nem sempre vai ganhar e que precisa aprender a perder, não causando frustações ou sentindo-se fracassado, pelo contrário, pelo seu caráter construtivo, o jogo reduz a gravidade que o erro pode causar, quando propõe ao jogador o prazer de uma nova partida com uma reflexão da sua jogada ou até mesmo na interação com os demais participantes consegue perceber o erro e corrigi-lo.

O erro no jogo serve também como mediação para o professor, pois nas observações ou nos momentos de problematização é possível perceber os erros que os jogadores cometeram, assim, estes dão suporte para o professor perceber as dificuldades de aprendizagens dos alunos seja elas na compressão da linguagem matemática, nos conceitos ou mesmo nas estratégias de jogadas, servindo de pontos de partida para mediações e problematizações centradas em tais perspectivas.

Segundo Grando (2004, p 72), “a análise do erro do aluno e a construção das estratégias de resolução dos problemas de jogo fornecem ao professor subsídios para a sistematização dos conceitos trabalhados durante a situação de jogo”.

O registro dos alunos feitos no momento do jogo contribui para a exploração dos conceitos matemáticos e que em outros momentos podem passar despercebidos. Ao analisar a escrita podemos compreender muitos fatores que influenciam no bom desempenho do aluno, seja na organização das suas ideias, na forma como descrevem suas resoluções e até mesmo nos erros dos cálculos que no jogo não foram visualizados.

Segundo Grando (2004), podemos entender que, quando o erro é diagnosticado contribui para o processo de mediação e exploração do professor, como também fortalece no aluno o pensar, agir, refletir e tomar decisões que possam favorecer uma melhor jogada, contribuindo na construção das ideias matemáticas desenvolvidas a partir da atividade proposta.

Ao longo das atividades desenvolvidas no nosso estudo, procuramos dar total liberdade aos jogadores em seus processos de resoluções, principalmente, na percepção do erro em suas jogadas, no entanto, sempre éramos solicitados pelos grupos ao final das suas partidas para verificarmos o erro cometido pela dupla de jogadores, consideramos assim, esse momento tão importante quanto toda a partida.

Nesse contexto, incentivamos a avaliação do jogo a fim de perceber o erro, com o propósito de que os jogadores pudessem compreender melhor a sua partida, reconhecer o erro e tentar corrigi-lo em uma próxima jogada. No decorrer das atividades, as equipes já estavam percebendo o erro e discutindo entre si.

As compreensões em avaliar o erro e entendê-lo como algo positivo e que pode ser corrigido em uma próxima partida, foram construídas ao longo das atividades, no diálogo e na percepção com o jogo. No jogo Enigma de Função, o erro pode ser cometido por ambos os jogadores ou duplas de jogadores, tanto pelos que responderam as cartas-perguntas como pelos que eliminaram as cartas com os gráficos das funções, determinando a perda da partida de jogo para os jogadores da vez. Por isso, a percepção do erro no jogo foi determinada com mais evidência.

A análise do erro também foi importante para a mediação da professora pesquisadora nos grupos de jogadores, proporcionando conhecer e avaliar melhor os jogadores no conhecimento matemático e na compreensão do jogo.

2.5 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS NO TRABALHO COM JOGOS

A metodologia dos jogos traz uma proposta de mudança de atitude frente ao ensino de Matemática que ainda encontramos em nossas escolas. Ao analisarmos os atributos do jogo compreende-se a possibilidade de um recurso pedagógico que se coloca ao aluno como atividade lúdica que, quando bem orientado, contribui para o desenvolvimento de habilidades pedagógicas, o que favorece o processo de ensino/aprendizagem.

Ao utilizar jogos em sala de aula não se garante que todos os alunos conseguirão apreender Matemática, assim, não defendemos neste trabalho, que devemos recorrer exclusivamente à metodologia com jogos nas aulas de Matemática, mas estamos discutindo os jogos na perspectiva da resolução e exploração de problemas e evidenciando algumas potencialidades pedagógicas do mesmo que pode ser explorados no contexto da sala de aula.

Para a realização de atividades com jogos em sala de aula é preciso alguns cuidados pedagógicos para que o jogo não seja visto apenas no seu caráter lúdico, mas que possa ir além do prazer que o jogo proporciona, avançando no conhecimento matemático. Smole, Diniz, Pessoa e Ishihara (2008) defendem alguns pontos importantes como: escolha do jogo, tempo, organização e exploração que precisam ser pensados e analisados antes de realizar atividades com jogos em sala de aula, destacando que o jogo nas aulas de Matemática precisa tanto da dimensão lúdica como educativa.

O professor precisa esclarecer aos alunos participantes da atividade que o jogo não deve ser compreendido apenas como momento de diversão, mas que através do jogo serão construídas ideias matemáticas.

Grando (2004, p.25) afirma que “o interesse está garantido pelo prazer que esta atividade lúdica proporciona, entretanto, é necessário o processo de intervenção pedagógica a fim de que o jogo possa ser útil à aprendizagem, principalmente para adolescentes e adultos”. A autora também menciona que o professor deve ser cuidadoso na mediação do jogo para não influenciar na perda da ludicidade. Sabemos que o aspecto lúdico é o que caracteriza o jogo, o que proporciona o prazer, o que leva o jogador a se arriscar e desafiar na busca da vitória.

É importante procurar não interferir muito no momento do jogo e nas estratégias realizadas pelos alunos, deixá-los à vontade e auxiliar apenas com novos questionamentos e intervenções, não impedir que o aluno cometa a jogada errada, mas na reflexão após o erro problematizar tal situação junto ao aluno para ajudá-lo a compreender a dificuldade no conhecimento ou na estratégia utilizada.

Smole, Diniz, Pessoa e Ishihara (2008) ainda chamam a atenção para a escolha do jogo, é preciso verificar se o jogo escolhido tem um conteúdo significativo. É preciso verificar se o jogo escolhido está adequado ao planejamento feito para a turma.

Se o jogo for considerado muito fácil, não se constituirá como desafio para a turma, não possibilitará como obstáculo e desencadeador da resolução de problemas, no entanto, se o jogo for considerado muito difícil os jogadores acabarão desistindo por não encontrarem respostas dentro do seu conhecimento. Grando (1995, p.47) diz que o "desafio é o 'tempero' do jogo, sem ele não há motivação, nem interesse pelo jogo".

Grando (2004) enfatiza o ambiente em que se realizará a atividade, é preciso que este, proporcione o diálogo entre alunos e entre professor e aluno, que possa favorecer o pensamento, as estratégias utilizadas e os problemas que vão aparecer na ação do jogo. Deve ser um ambiente acolhedor a todos os envolvidos, respeitando sempre a livre vontade de participação. Nesse sentido, Grando (2004) afirma que:

> Jogar é se expor, expor seus limites e suas formas de raciocínio, o que pode vir a causar um certo "medo" inicial. Esta reação agrava-se com a idade. Para o adolescente, principalmente que se importa muito com a aprovação do grupo de colegas que convive, essa exposição que o jogo exige, muitas vezes, incomoda (GRANDO, 2004, p.33).

O jogo não pode ser visto como uma avalição punitiva, o processo de avaliação deve ser contínuo em todos os momentos, os alunos devem ser avaliados não no contexto do ganhar ou perder, mas dentro das potencialidades que, a partir do jogo, vão sendo desencadeadas nos participantes.

O jogo deve ser visto como uma atividade de diversão que tem como fim as ideias matemáticas que ali serão trabalhadas a partir das problematizações e que o aluno sinta-se à vontade para participar. No entanto, muitas vezes, a resistência do aluno é por pouco tempo, até que o prazer e a curiosidade possam atraí-lo. Para isso, é necessário que o jogo tenha uma dinâmica interessante e que desperte no aluno o desejo de jogar.

Segundo Grando (2004) o tempo pode ser visto como desvantagem ao ensino com jogos por ser necessário um maior número de aulas se, o professor não está preparado para utilizá-los em detrimento dos demais conteúdos.

Consideramos que os jogos matemáticos não precisam ser usados como única metodologia de ensino, já que temos o tempo como fator prejudicial, mas se considerarmos as potencialidades que o jogo pedagógico traz ao aluno, convém utilizá-lo em alguns conteúdos e recorrer a outras metodologias de ensino que favoreçam o tempo. Conforme aponta Starepravo (2009):

> Contudo, se acreditamos na importância do pensamento autônomo de nossos alunos, se compreendemos que as descobertas que as próprias crianças fazem são usadas por elas na elaboração de solução de problemas cada vez mais complexos, pela reestruturação e reelaboração do pensamento, então sabemos que o tempo gasto neste trabalho não é perdido, mas ganho (STAREPRAVO, 2009, p. 68).

Para que o tempo gasto no jogo realizado na sala de aula não prejudique outros conteúdos, é preciso que o professor realize um bom planejamento do que pode ser trabalhado na atividade de jogo.

A competitividade é também um ponto que merece cuidado. Ao realizar um trabalho com jogos, é preciso preparar os alunos para saber lidar com a competição. Estamos envolvidos em um mundo competitivo no qual o sistema de ensino e os processos seletivos que enfrentaremos, promovem essa disputa.

Não é deixando de trabalhar com os jogos em sala de aula que a competição deixará de existir na vida, pelo contrário, é preciso saber lidar e transformar o confronto da troca de ideias e cooperação entre os participantes. Grando (1995, p.71) afirma que: “mais do que efeito negativo, a competição nos jogos garante o dinamismo, o movimento do jogo, propiciando um interesse e envolvimento natural do aluno e contribuindo para o seu desenvolvimento social, intelectual e afetivo”.

O jogo, dentre outras coisas, possibilita o resgate à credibilidade da sala de aula como ambiente propício ao desenvolvimento do aluno desde que, através das intervenções pedagógicas, o sujeito possa se tornar parte integrante do processo de construção do conhecimento matemático.

Para que o jogo venha a favorecer na construção do conhecimento é preciso ser bem direcionado no espaço da sala de aula, não só com a atividade de jogo, mas, seja qual for à metodologia de ensino a ser desenvolvida, é preciso que haja um planejamento das aulas, pois esse é um momento para refletir e analisar o que precisa ser trabalhado.

Desse modo, com todas as potencialidades que os jogos matemáticos proporcionam ao ensino, é fundamental que o docente seja ousado em seu planejamento. Smole, Diniz, Pessoa e Ishihara (2008) falam sobre o planejamento das abordagens metodológicas no trabalho com os jogos:

> Trabalhar com jogos envolve o planejamento de uma sequência didática. Exige uma série de intervenções do professor para que, mais que jogar, mais que brincar, haja aprendizagem. Há que se pensar como e quando o jogo será proposto e quais possíveis explorações ele permitirá para que os alunos aprendam (SMOLE et al, 2008, p.19).

A eficiência não está no jogo, mas em como a atividade é realizada, o que pode ser explorado e desenvolvido a partir dele. Segundo Macedo, Petty e Passos (2005, p.25), "é fundamental um trabalho de intervenção por parte do profissional que acompanha as partidas, propõe desafios, pede análises, enfim, instiga à reflexão e também ajuda os alunos a perceberem semelhanças entre os contextos do jogo e da escola".

Para pensar em tudo que possa vir a contribuir com o objetivo proposto pelo professor para a realização dessa atividade, nada melhor que execução de um bom planejamento pedagógico. Como falamos anteriormente, alguns cuidados precisam ser tomados para não influenciar de forma negativa na realização da atividade e interferir nos objetivos determinados.

Ao longo do nosso trabalho com os jogos em sala de aula, observamos, em vários momentos e em cada equipe de jogadores, as vantagens apresentadas, visto que cada equipe de jogadores respondeu de forma diferente, dentro do seu tempo e limite, porém, procuramos respeitar o desenvolvimento e avanço de cada um.

Algumas equipes se destacaram realizando um bom trabalho em grupo, desenvolvendo suas habilidades em uma competição sadia e participativa, favorecendo de forma eficiente o seu desenvolvimento cognitivo, entretanto, outras equipes foram aceitando e interagindo com a metodologia de ensino aos poucos. Porém, pudemos, ao final, perceber que também conseguiram desenvolver um trabalho positivo e venceram os desafios com a dinâmica dos jogos matemáticos.

Sobre as vantagens apresentadas nas atividades de jogo na presente pesquisa, mencionamos e discutimos as potencialidades que trazem para a vida do aluno mudança de atitudes, frente ao aprendizado de Matemática. Já sobre as desvantagens com o uso de jogos em sala de aula, procuramos evitá-las ao máximo durante o planejamento e realização das atividades.

Grando (1995, 2004) apresenta um quadro com 6 (seis) desvantagens nas atividades de jogo em sala de aula, assim destacamos:

- quando mal utilizados, os jogos podem ter um caráter puramente aleatório, no qual os alunos jogam e se sentem motivados pelo jogo, sem saber por que jogam;
- o tempo gasto com as atividades de jogos em sala de aula é maior e, se o professor não tiver realizado um bom planejamento, pode existir prejuízos em outros conteúdos;
- o perigo de achar que se deve ensinar todos os conteúdo através de jogos.
- o professor exigir que o aluno jogue, mesmo que ele não queira, destruindo a voluntariedade característica própria à natureza do jogo.
- quando o professor faz muita interferência, destruindo a essência do jogo. a ludicidade.
- a dificuldade de acesso e disponibilidade de matérias sobre o uso de jogos no ensino.

Entre as desvantagens citadas pela autora, a presente pesquisa destaca mais uma que possivelmente pode acontecer se o professor não estiver acompanhando as equipes.

- quando o jogo for formado por quatro participantes, dois a dois, em todas as aulas e a realização do jogo ficar sendo determinada sobre o(s) mesmo(s) aluno(s).

Dentre as desvantagens destacadas, o tempo pode se tornar vantagem, se trabalhar o conteúdo a partir do jogo, a dinâmica lúdica ocorra simultaneamente ao aprendizado das ideias matemática que estão no jogo e que podem ser problematizadas, uma vez que não exista necessidade de explicação do conteúdo, porque, no jogo, as duas metodologias acontecem concomitantemente.

Diante das vantagens e desvantagens apresentadas, é importante que o professor tenha um conhecimento teórico sobre a temática e que realize um planejamento eficiente ao assumir a proposta de inserir no contexto da sala de aula atividades com jogos, como recurso pedagógico facilitador ao ensino de Matemática.

Cabe ao professor, enquanto mediador da atividade, organizar o ambiente, conversar com os alunos explicando que a atividade deve ser conduzida com seriedade e que a partir da dinâmica com o jogo, eles podem desenvolver a aprendizagem no conteúdo matemático assim como o raciocínio-lógico ao criar e analisar estratégia. Smole, Diniz, Pessoa e Ishihara (2008) elucidam que:

> Todo jogo por natureza desafia, encanta, traz movimento, barulho e uma certa alegria para o espaço no qual normalmente entram apenas o livro, o caderno e o lápis. Essa dimensão não pode ser perdida apenas porque os jogos envolvem conceitos de matemática. Ao contrário, ela é determinante para que os alunos sintam-se chamados a participar das atividades com interesse (SMOLE et al, 2008 p.10).

É necessário que o professor tenha domínio para controlar a situação, que o barulho não possa prejudicar o desenvolvimento da atividade, mas que seja convertido em interação e troca de ideias. Como destaca Macedo, Petty e Passos (2000, p.39) “o professor é quem dá o “tom” do desafio proposto, ele deve ser o líder da situação, saber gerenciar o que acontece, tornando o meio o mais favorável possível, desencadeando reflexões e descobertas”. Nesse contexto, Teixeira (2008) explica ainda que:

> É necessário que o professor tenha um planejamento didático-pedagógico adequado, para que o jogo realmente funcione como uma ferramenta na construção do conhecimento do aluno. Este planejamento requer do profissional atitude de disponibilidade para a atualização, abertura de espírito, empenho, responsabilidade e flexibilidade para mudanças (TEIXEIRA, 2008, p. 25).

Segundo Smole, Diniz, Pessoa e Ishihara (2008) outro ponto considerado por alguns professores como uma das dificuldades ao ensino com jogos é a questão do quantitativo de alunos em sala, que ultrapassa o número de trinta e cinco alunos em uma mesma turma. Sendo uma realidade que faz parte da nossa pesquisa, temos um posicionamento crítico em relação a tal situação.

Se pensarmos em realizar aulas com jogos matemáticos no Ensino Médio, e colocarmos essa dificuldade com empecilho, consideramos poucas as turmas nas quais poderíamos desenvolver a atividade. Entretanto, cabe ao professor planejar a metodologia com jogos para atender a realidade que tem. Não consideramos fácil essa situação, porém, não podemos excluir uma metodologia importante ao ensino de Matemática por ter um número elevado de alunos.

Em nossa pesquisa apontamos sugestões para uma atividade com jogos em turmas numerosas, devendo-se formar grupos de quatro participantes, dois a dois, o que torna vantajoso para o quantitativo de material a ser confeccionado, como também na mediação realizada durante a atividade, facilitando a interação entre os grupos.

Consideramos que diante da realidade, a atividade possa precisar de um tempo maior, para atender a todos os grupos, e problematizar as situações do jogo. Porém, esse não pode ser motivo que impeça a metodologias com jogos.

2.6 Possibilidades sobre o uso de jogos no ensino de Matemática

Ao longo do tempo e por estudos realizados nessa área, os jogos foram recebendo as classificações específicas, conforme a época e o que os estudiosos sobre o tema compreendiam serem os jogos para o ensino.

Com os vários tipos de jogos para o ensino, a sua inserção em sala de aula se dá sob duas finalidades: a primeira, em uma perspectiva que se aproxima do construtivismo, em que a partir do jogo o aluno possa desenvolver o conteúdo, permitindo fazer as suas próprias descobertas, através de uma mediação baseada na resolução e exploração de problemas que possa contribuir com o mínimo de informações, conduzindo o jogador a descobrir sua jogada. E assim construir o conhecimento matemático inerente ao jogo, possibilitando também ao aluno a utilização dos conhecimentos prévios para a construção de outros mais elaborados.

A segunda, na finalidade de revisar o conteúdo matemático, reestruturando as ideias matemáticas que não foram bem compreendidas. O jogo possibilita rever conceitos e construir novas ideias matemáticas, através da mediação baseada também na resolução e exploração de problemas.

Grando (1995, 2000, 2004) em seus estudos sobre jogos, defende as duas perspectivas ao trabalho em sala de aula, porém, compreende, pelas práticas que a mesma utiliza, mais a perspectiva de desenvolver conceitos a partir do jogo. A autora ainda chama a atenção para atividades e brincadeiras de jogos que os alunos estão acostumados a praticar fora da sala de aula e que estão repletos de conhecimento matemático, mas que os próprios alunos não fazem a relação da Matemática presente no jogo com a Matemática da sala de aula.

A autora propõe o resgate desses jogos para a sala de aula, buscando, além da cultura dos próprios alunos, facilitar a aprendizagem de conhecimentos matemáticos que podem ser compreendidos a partir dos jogos utilizados por eles.

Compreendemos que quando o conteúdo é desenvolvido a partir do recurso pedagógico do jogo, existe um sentido maior para o aluno, no qual são discutidas as ideias do conteúdo dentro de uma atividade prática que, através da mediação do professor desafiando o aluno a pensar em conhecimentos já estudados anteriormente, possa estabelecer e compreender os novos conceitos, possibilitando ao aluno a construção do conhecimento de forma ampla.

A possibilidade de trabalhar o jogo no desenvolvimento do conteúdo aproxima-se da perspectiva construtivista, por despertar no aluno o pensamento, a descoberta e a reflexão sobre sua ação.

Na maioria das pesquisas que encontramos com atividades de jogos em sala de aula parece haver uma resistência no trabalho do conteúdo desenvolvido a partir do jogo, ocorrendo mais o jogo como revisão de um conteúdo já estudado como destacamos as pesquisas de Pfiffer (2014) e Silva (2016).

Constatamos também em um curso de formação de professores de Matemática da UEPB opiniões sobre as possibilidades do trabalho com jogos. Dentro da presente pesquisa na qual, realizamos o jogo Enigma de Funções e após a realização da atividade em um momento de discussão sobre o jogo, um dos participantes afirmou "ser o jogo um recurso importante para o ensino de função quadrática por revisar ideias matemáticas e facilitar a compreensão gráfica e algébrica da função, mas que para jogar precisa ter conhecimento do conteúdo".

É preciso ir além do exercício. O jogo deve ser compreendido como recurso que possibilita ao aluno pensar e construir estratégias que possam assegurar a construção de ideias e habilidades que contribuam para compreensão dos novos conceitos matemáticos. Segundo Kishimoto (2011):

> O jogo na educação matemática parece justificar-se ao introduzir uma linguagem matemática que pouco a pouco será incorporada aos conceitos matemáticos formais, ao desenvolver a capacidade de lidar com informações e ao criar significados culturais para os conceitos matemáticos e estudos dos novos conteúdos (KISHIMOTO, 2011, p. 95).

Em nossa prática com os jogos vivenciamos a experiência de trabalhar ideias de funções quadráticas através do jogo Enigma de Funções, procurando desenvolver no aluno habilidades de leitura e interpretação gráfica assim como a linguagem matemática. O jogo possibilitou ao aluno descobrir estratégias de resolução de problemas encontradas no próprio jogo. Segundo Smole, Diniz, Pessoa e Ishihara (2008):

> O trabalho com jogos é um dos recursos que favorece o desenvolvimento da linguagem, diferentes processos de raciocínio e de interação entre alunos, uma vez que durante um jogo cada jogador tem a possibilidade de acompanhar o trabalho de todos os outros, defender pontos de vista e aprender a ser crítico e confiante em si mesmo (SMOLE et al 2008, p. 9).

Não ignoramos o trabalho com jogos na revisão de conteúdos, até utilizamos em nossa pesquisa jogos nessa perspectiva de ensino, porém não trouxemos para as nossas analises e descrições, procuramos nos deter ao jogo como desenvolvimento do conteúdo.

O jogo não pode ser compreendido apenas no contexto da revisão, quando este pode seguir outros caminhos que potencializam a aprendizagem do aluno, entre eles, o da descoberta. O aluno tem a possibilidade de desenvolver o pensamento e estruturar suas ideias a partir do diálogo e da exploração dos conceitos matemáticos que são desencadeados na dinâmica do jogo.

Contudo, a mediação no momento do jogo contribui com o bom desempenho da atividade, sendo desenvolvido na perspectiva da resolução e exploração de problemas. Teixeira (2008, p. 63) elucida que “Essa mediação acarreta possibilidades ao professor porque exige uma reflexão conjunta com os alunos que, por sua vez, passam a pensar, a buscar informações e a construir os elementos do conhecimento, capazes de conduzir a autonomia”.

No entanto, além de decidir qual a perspectiva será desenvolvida na atividade com jogos, há outro aspecto importante para ser pensado, o tipo de jogo a ser trabalhado em sala com seus alunos.

Grando (1995), em seus estudos sobre os jogos, determina uma classificação com base nos aspectos didático-metodológicos com ênfase na função que os jogos desempenham em um contexto social. Com isso, os jogos são classificados em:

- ✓ Jogos de quebra-cabeças: são jogos de soluções que, a princípio, são desconhecidas e, por isso, o raciocínio exerce um papel importante para o jogador que, na maioria das vezes, joga sozinho. São aplicados principalmente nos anos iniciais do ensino, com o objetivo de desenvolver o raciocínio das crianças;
- ✓ Jogos de fixação de conceitos: são os jogos utilizados justamente com o objetivo de fixar ou aplicar um conceito já estudado. São utilizados após a exposição de algum conceito, podendo substituir as extensas listas de exercícios aplicadas para fixação do conteúdo;
- ✓ Jogos computacionais: são os jogos em ascensão no momento, despertando a atenção de indivíduos de todas as faixas etárias. Para serem executados necessitam de um ambiente computacional;
- ✓ Jogos de azar: são os jogos que o jogador depende apenas da *sorte* para vencê-lo;
- ✓ Jogos de estratégias: são jogos que dependem exclusivamente que o jogador elabore estratégias para vencê-lo, pois não conta com o fator sorte;
- ✓ Jogos pedagógicos: são aqueles que possuem seu valor pedagógico, ou seja, que são utilizados visando o ensino-aprendizagem. Na verdade, eles podem englobar todos os outros tipos de jogos. Os jogos pedagógicos apresentam papel fundamental no ensino.

A nossa pesquisa procurou, em todas as atividades, trabalhar com os jogos pedagógicos, a fim de desenvolver por meio desse recurso a construção do conhecimento matemático. O jogo pedagógico foi associado a outros tipos de jogos, como o de estratégia, por exemplo. Para Smole, Diniz, Pessoa e Ishihara (2008) a diferença entre os dois tipos de jogos está no fator sorte, assim, nos jogos pedagógicos ou de conhecimentos os alunos dependem da sorte presente nas cartas ou dado, já no jogo de estratégia o que prioriza é a escolha e decisão realizada durante o jogo.

Trabalhamos com o jogo pedagógico na perspectiva da resolução e exploração de problemas, a fim de desenvolver as potencialidades do jogo no processo de ensino aprendizagem de Matemática. Nesse tipo de jogo a participação dos jogadores e a problematização das ideias matemáticas são evidenciadas na dinâmica da atividade, o que favorece o bom desempenho dos participantes. Segundo Grando (1995), o uso do jogo pedagógico:

> Apresenta-se produtivo ao professor que busca nele um aspecto instrumentador e, portanto, facilitador à aprendizagem do aluno e, também, produtivo ao aluno, que desenvolve sua capacidade de pensar, refletir, analisar, levantar hipóteses, testá-las e avalia-las, além do desenvolvimento da autonomia e da socialização propiciada pelo movimento do jogo (GRANDO, 1995, p. 44).

Todos os jogos trazem em sua essência a possibilidade de interação entre os participantes, e esse é o aspecto mais importante no jogo pedagógico, visto que nesse jogo desenvolvemos ideias matemáticas, e por meio da interação e problematização que o professor realiza tem-se um envolvimento dos participantes, o que possibilita um maior desempenho na construção do conhecimento que será desenvolvida na dinâmica da atividade.

O jogo pedagógico é um recurso que permite ao professor conhecer melhor os seus alunos e as dificuldades matemáticas apresentadas por eles enquanto realizam a ação no jogo, e a contribuir com os alunos nas suas descobertas no processo de construção e compreensão de ideias matemáticas.

No jogo pedagógico o professor precisa compreender dois aspectos importantes, a ludicidade no jogo e permitir a liberdade dos participantes na atividade, características importantes na definição do jogo citado pelos teóricos aqui apresentados. O que muitos temem no jogo pedagógico é que esses aspectos não sejam respeitados, pois prejudicaria a potencialidade do jogo no ensino, deixando de ser uma atividade lúdica para ser um mero exercício forçado.

Ao final desse capítulo, compreendemos a devida importância da metodologia da resolução e exploração de problemas nas atividades com jogos pedagógicos. Porém na presente pesquisa entendemos a resolução de problemas não apenas como uma potencialidade desenvolvida nas atividades com jogos, mas o ponto essencial de todo o trabalho, que desenvolveram as demais potencialidades aqui estudadas.

A resolução e exploração de problemas permite desenvolver na sala de aula a participação dos alunos em um processo de diálogo na busca da descoberta, favorecendo a interação e mediação do professor durante o jogo. Permite ao aluno perceber o seu desenvolvimento cognitivo ao longo das atividades, principalmente quando o mesmo reconhece, analisa e corrigir o seu erro enquanto jogador.

Nas atividades de jogo, a exploração nos grupos propõe ao professor o desafio de não estar direcionado apenas à solução do problema no jogo, mas de propor ideias e novos questionamentos que possibilitem ao aluno o desenvolvimento do pensamento lógico-matemático. A resolução e exploração de problemas permitem que o trabalho com o jogo pedagógico tenha foco no desenvolvimento ao longo do jogo e não apenas em ganhar ou perder.

3. COMPREENSÃO DE IDEIAS ESSENCIAIS AO ENSINO DE FUNÇÕES

Compreendemos a grande relevância do conceito de função para o conhecimento matemático que durante a história da álgebra, foi sendo formalizado para expressar o que definimos hoje como função. Segundo Silva (2013) a ideia de função que temos hoje foi sendo construído ao longo dos anos, como resultado da necessidade do homem em resolver problemas.

No entanto, segundo Silva (2013, p. 54), a definição que encontramos nos dias atuais, "baseada na teoria de conjuntos, foi atribuída ao matemático alemão Dirichlet (1805 – 1859) e ao grupo de jovens matemáticos franceses Bourbaki do início do século XX que se ocuparam em estudar e desenvolver teorias matemáticas". De acordo com Eves (1997) citado por Silva (2013):

> A definição Dirichlet- Bourbaki formulada em 1934 apresenta função como uma associação de um conjunto a outro, e é visto como um conjunto de pares ordenados, explicitamente: f é uma função de um conjunto a outro, digo de A para B, se f é um subconjunto do produto cartesiano de A (o domínio) e B (contradomínio), tal que para cada a $\in$ A há exatamente um b $\in$ B com (a, b) $\in$ f. Entendemos por isto, que o conceito de função foi se tornando cada vez mais formal, passando a ser definido como uma relação entre conjuntos ou subconjunto de uma relação e não mais como uma relação de dependência entre grandezas. No entanto, tais definições trouxeram mudanças importantes para o campo de estudo da Ciência Matemática. (EVES, 1997 *apud* SILVA, 2013 p. 54-55).

Sendo essa descrição Dirichlet- Bourbaki, a definição mais formal para o conceito de função que atualmente trabalhamos nas aulas de matemática, no entanto, precisamos pensar se ela é realmente compreendida pelos alunos da educação básica. Como aponta Silva (2013, p. 55) "pode haver uma lacuna entre as definições formais de concepções matemáticas e as imagens que os alunos têm".

Embora não tenhamos trabalhado em nossa pesquisa os aspectos históricos do conceito de função, consideramos ser importante destacar apenas a descrição formal do conceito de função definida por Dirichlet- Bourbaki como base para as ideias que serão construídas sobre função quadrática.

Nesse contexto, propomos o jogo como uma metodologia que possibilita uma melhor compreensão do conhecimento de função quadrática, visto que o jogo se dá por meio de cartas na representação gráfica e algébrica nos mais diversos exemplos de funções.

As funções constituem uma área ampla no ensino de Matemática, fundamental para o conhecimento do aluno, entretanto, para nós professores, é um desafio discutir e colocar em prática tais ideias, a fim de que os alunos possam compreender os diferentes fenômenos que as funções podem representar. Portanto, é preciso buscar alternativas que favoreçam o ensino-aprendizagem desse conteúdo.

Com base no trabalho desenvolvido por Silva (2013), destacamos as cinco grandes ideias no estudo de funções idealizadas por Cooney, Beckmann e Lloyd, em uma publicação do NCTM (National, Council Teachers Mathematics- Conselho Nacional de Professores de Matemática dos Estados Unidos), de 2010. Considerando como ideias essenciais para o desenvolvimento no estudo de funções os autores destacam: o conceito de função, covariação e taxa de variação, combinação e transformação de função, famílias de funções e representações múltiplas de funções.

Passamos a analisar como o jogo Enigma de Funções pode contribuir para o estudo de funções, sobretudo, da função quadrática, que é ponto principal da nossa atividade com o jogo.

Conforme destaca Cooney, Beckmann e Lloyd (2010) citados por Silva (2013), as ideias de função começam a se desenvolver no Ensino Fundamental com o objetivo dos alunos estudarem padrões representando e analisando o crescimento entre as grandezas e por fim, desenvolvem a noção de variável. No Ensino Médio, os alunos analisam as relações entre grandezas e identificam as funções especificas estudando suas características. No Ensino Superior, nas áreas de Exatas, eles estendem sua familiaridade com os domínios das funções com a inclusão de números complexos que podem expandir suas noções sobre as características das famílias de funções.

Espera-se que o aluno ao chegar ao Ensino Médio tenha uma noção mesmo que informal sobre variáveis e padrões, entretanto, não é o que observamos quando iniciamos o estudo das funções. Segundo Silva (2013) o aluno do Ensino Médio apresenta dificuldades na compreensão com a linguagem algébrica, confunde o uso da letra, referindo-se sempre como uma incógnita, não compreendendo a letra como uma variável que no estudo das funções representa um fenômeno, uma situação e que as variáveis representam relações de grandezas. O autor ainda justifica que, essa dificuldade em compreender o conceito de função se dá pelo estudo da Álgebra, muitas vezes de forma inadequada, não integrando ao ensino da aritmética durante toda a escolaridade.

Faz-se necessário partirmos de situações reais, muitas delas vivenciadas pelos próprios alunos no seu dia a dia, como por exemplo: ao ir à padaria, o preço pago pelo pão está relacionado ao peso em quilograma do pão. O tempo gasto no percurso da sua casa até a escola depende da distância percorrida. No abastecimento de um veiculo, o valor pago pelo combustível está relacionado à quantidade por litros de combustível. No lançamento de uma bola, verticalmente para cima, a posição em que ela atinge a altura máxima está relacionada ao tempo a partir do seu lançamento. Ou até mesmo pela regularidade de padrões, através do raciocínio matemático, o conhecimento pode ser sistematizado e significativamente compreendido.

A primeira ideia, o conceito de função, é único e consistente, podendo ser aplicado a diversas situações e contextos matemáticos (SILVA, 2013 p. 52).

> Compreensão essencial 1a. As funções são associações de valor único de um conjunto – do domínio da função – para outra – sua imagem.
>
> Compreensão essencial 1b. As funções são aplicadas para uma vasta gama de situações. Elas não precisam ser descritas por algumas expressões especificas ou seguir um padrão de regularidade. Elas são aplicadas para outros casos que não são àqueles da variação contínua. Por exemplo: sequências são funções.
>
> Compreensão essencial 1c. O domínio e a imagem de funções não precisam ser números. Por exemplo: matrizes dois por dois podem ser vistas como uma representação de funções onde o domínio e a imagem são duas dimensões do espaço vetorial; uma função também pode ser uma transformação (translação, rotação, homotetia e reflexão) de uma figura geométrica T em outra f(T), tal que para cada ponto de T corresponde um único ponto em f(T), cuja função está definida sobre o plano no plano (COONEY, BECKMANN E LLOYD, 2010, *apud* SILVA, 2013, p. 52).

Segundo Silva (2013, p 64) “no coração do estudo das funções no Ensino Médio sentam-se as funções afins, funções quadrática, funções exponenciais e suas inversas e funções trigonométricas”. Sendo que o estudo dessas funções está centrado no conjunto dos números reais. No entanto outras funções matemáticas do Ensino Médio, são definidas por intervalos, as chamadas sequências.

Ao analisar vários autores de livros de Matemática do Ensino Médio sobre o estudo das funções, Silva (2013) constata que alguns autores fazem uma definição informal, outros buscam a compreensão por meio de definição mais formal, no entanto, todos se voltam ao estudo da função com uma definição de valor único, em que para cada elemento do domínio há exatamente um único elemento da imagem da função.

Ter o valor único, como ideia essencial no conceito de função é algo que pode ser explorado e analisado pelos alunos na presente pesquisa, com o jogo Enigma de Funções, por meio das cartas com a representação gráfica das várias funções quadráticas, em que a professora pesquisadora através de algumas cartas e de forma coletiva com os grupos procurou determinar os pares ordenados dos gráficos, explorando a unicidade de cada par. Em outras palavras, para cada elemento do domínio há exatamente um único elemento da imagem da função.

Através da representação gráfica nas cartas do jogo Enigma de Funções, apresentamos todos os gráficos com função contínua, já que estamos trabalhando a função quadrática, mostrando que elas são contínuas em todos os números reais do domínio e que o conjunto imagem é determinado pelos valores que y pode assumir na função.

Segunda ideia essencial no estudo das funções, a covariação e taxa de variação, mostra-nos que as funções associadas dos números reais aos números reais, nos dão meios para relacionar quantidades que estão variando juntas, percebendo na maneira pela qual duas quantidades diferentes mudam em conjunto. Segundo Silva (2013, p. 69) “a taxa de variação de uma função é a taxa em que a saída da função muda em relação a uma mudança na entrada – esse é o modelo de quantificar a ideia de covariação”.

“No estudo do conceito de função, é importante que os alunos compreendam a ideia de covariação e taxa de variação, observando como as duas grandezas estão variando entre si” (BRANDÃO, 2014, p.34).

Cooney, Beckmann e Lloyd citado por Silva (2013) define a taxa de variação:

> Do mesmo modo, para toda função de valor real f definida sobre um intervalo [a, b], dizemos que a taxa de variação desta função acima no intervalo é a mudança no valor da função de a para b dividido pelo comprimento no intervalo de a para b. Porque a mudança no valor da função entre a e b é f(b) – f(a), e o comprimento do intervalo de a para b é b – a, a taxa de variação média de f no intervalo [a, b] é $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (COONEY, BECKMANN e LLOYD, 2010, apud. SILVA, 2013, p. 70).

No jogo Enigma de Funções, procuramos discutir na função quadrática a ideia de covariação e taxa de variação das funções através das cartas com representação gráfica, mostrando através da parábola dos gráficos a variação entre o eixo x e o eixo y que variam juntos, apresentando a ideia de covariação.

Quando descrevemos o crescimento e o decrescimento da função quadrática, podemos analisar a taxa de variação em que dentro de determinado intervalo da função ser crescente a taxa varia, mas sempre é positiva. Já em intervalos nos quais a função quadrática é decrescente a taxa varia, no entanto, é negativa.

Portanto, segundo Silva (2013) na função quadrática a taxa de variação é linear, sendo constante só em uma segunda variação, ou seja, quando calculamos a taxa de variação da taxa de variação. Diferentemente da função afim que é sempre constante.

A terceira ideia é a família de funções em que cada uma caracteriza-se por suas próprias propriedades, representando fenômenos do mundo real e compartilhando o mesmo tipo de taxa de variação. Cooney, Beckmann e Lloyd citado por Silva (2013) definem como compreensão essencial 3c. no estudo da função quadrática:

> A função quadrática é caracterizada por uma taxa de variação linear. Assim a taxa de variação da taxa de variação (a segunda diferença ou derivada) de uma função quadrática é constante. Raciocínio sobre a forma do vértice de uma quadrática permite deduzir que a função quadrática tem um valor máximo ou mínimo e que os zeros da função quadrática são números reais, eles são simétricos sobre a abscissa x do ponto máximo ou mínimo (COONEY, BECKMANN E LLOYD, 2010, apud. SILVA, 2013, p. 72).

Por definição, chamamos função quadrática, qualquer função **f** de R em R definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$ para as constantes reais **a, b** e **c**, onde a é diferente de zero.

O jogo Enigma de Funções está direcionado às características da família de Função Quadrática, no qual podemos trabalhar, por meio das cartas com formas gráficas e algébricas, as propriedades dessa família de função onde destacamos, o valor máximo ou mínimo de uma função quadrática, a concavidade da parábola, os zeros ou raízes da função, a simetria sobre o eixo de x dos pontos máximo ou mínimo (coordenadas do vértice da parábola) e o estudo do sinal da função quadrática, identificando os intervalos em que função é positiva $F(x) > 0$ e os intervalos em que a função é negativa $F(x) < 0$.

A fim de permitir uma compreensão melhor, procuramos, por meio da exploração e discussão, seja entre os participantes de uma mesma equipe ou entre equipes, ou até mesmo na intervenção da professora pesquisadora de maneira individual e coletiva, problematizar as várias situações que aconteceram ao longo do jogo.

Na exploração dos vários gráficos de função quadrática proposto no jogo, procuramos discutir situações que estavam relacionadas com esse tipo de função. Entre as cartas de perguntas sobre as funções quadrática do jogo, existem as perguntas sobre o zero da função. No entanto, o jogo permite mais a visualização gráfica e orienta o jogador a determinar o zero da função apenas no gráfico. Considerando a limitação do jogo, procuramos, em momentos após o jogo, utilizando as cartas, determinar o zero da função na forma algébrica, considerando F(x) = 0.

Assim também, com o vértice da função quadrática, além de identificar no gráfico como o jogo propõe, direcionamos as equipes de jogadores a calcular na forma algébrica o vértice da função $V = (X_v, Y_v)$ sendo $X_v = \frac{-b}{2a}$ e $Y_v = \frac{-\Delta}{4.a}$. Sendo possível, através das cartas com representação gráfica, discutir a ideia de simetria.

Ao longo de todo o estudo, problematizamos as propriedades da função quadrática presentes nas cartas, destacando as potencialidades do jogo para o ensino, como também explorando situações-problema da função quadrática para fortalece no aluno a compreensão dessas ideias essenciais no presente estudo.

Sabemos da complexidade no estudo das funções e entendemos que o jogo em si não permite uma compreensão ampla em todo o seu contexto. Contudo, o jogo favorece a compreensão do conteúdo, quando exploramos as suas potencialidades e entre elas está a interação entre os alunos e entre aluno e professor, buscando através da dinâmica lúdica a problematização das ideias essenciais da função quadrática desenvolvidas a partir do jogo.

A quarta ideia essencial é a combinação e transformação de funções. Técnica muito utilizada em números, termos, equação, figuras e, inclusive, nas funções, a fim de compreender conceitos matemáticos. Segundo Silva (2013, p. 79) “a maioria das funções matemáticas estudadas é uma combinação aritmética. Elas podem ser combinadas pela adição, subtração, multiplicação, divisão e composição delas”. Conforme afirma os autores Cooney, Beckmann e Lloyd (2010) citado por Silva (2013):

> Compreensão essencial 4 a. As funções que têm o mesmo domínio e que estão associadas aos números reais podem ser adicionadas, subtraídas, multiplicadas ou divididas (onde pode mudar o domínio).
>
> Compreensão essencial 4 b.Sob condições apropriadas as funções podem ser compostas.
>
> Compreensões essencial 4c. Para as funções que associam números reais a números reais, compondo uma função com variação ou escalas na forma de mudanças de funções, a fórmula e o gráfico da função são facilmente previsíveis.
>
> Compreensão essencial 4d. Sob condições apropriadas, as funções têm inversas. A função logarítmica é a inversa da função exponencial. A função raiz quadrada é o inverso da função quadrática (COONEY, BECKMANN E LLOYD, 2010, *apud* SILVA, 2013, p. 79).

Qualquer combinação em uma função com uma das operações mencionadas o resultado é perceptível por meio do gráfico, determinando um deslocamento e até mudança na formula da própria função.

Por fim, a quinta ideia essencial, as representações múltiplas. As pesquisas nesse contexto mostram que diferentes formas de representar as funções contribuem na compreensão do conceito de função, cada uma em sua dimensão, representando a função em diferentes aspectos dos fenômenos estudados, de modo que todas definem a mesma função.

As funções podem ser representadas de múltiplas maneiras, incluindo as representações algébricas, gráficas, verbal e em tabelas assim, compreendidas pelos autores Cooney, Beckmann e Lloyd (2010) citado por Silva (2013):

> Compreensão essencial 5a. As funções podem ser representadas de várias maneiras, incluindo, através de meios algébricos (por exemplo: equações), gráficos, descrições verbais e tabelas.
>
> Compreensão essencial 5b. Mudando o modo que a função é representada (por exemplo: algebricamente, com um gráfico, em palavras, ou com uma tabela) não faz mudança de função, embora representações diferentes destaquem diferentes características, e de alguma maneira apresenta somente uma parte da função.
>
> Compreensão essencial 5c. Algumas representações de uma função devem ser mais úteis que outras, dependendo do contexto.
>
> Compreensão essencial 5d. Conexões entre representações algébricas e gráficas de funções são especialmente importantes no estudo de relações e mudanças (COONEY; BECKMANN; LLOYD 2010, apud. SILVA, 2013, p.86).

Conforme destaca Silva (2013, p.85) “para qualquer função dada, os alunos devem perceber que todas essas representações estão conectadas e ilustram a mesma relação, embora cada representação forneça uma perspectiva diferente sobre a função”.

Dessa forma, podemos entender que o estudo de funções quando operam conexões entre as diferentes representações, oferece melhores condições na compreensão de muitos aspectos dos fenômenos estudados. Todavia, entendemos que em algumas situações as funções exigem mais atenção por meio de uma determinada representação, dependendo da situação na qual a função é abordada, não impedindo que possamos analisá-la sob outros aspectos, já que todas as formas de representar evidenciam diferentes característica sobre a mesma função.

Na matemática escolar, segundo Silva (2013) o ensino de função apresenta-se com mais ênfase na exploração algébrica, no estudo do sinal e resoluções de inequações e pouco destaque no estudo e análise das representações gráficas e tabulares.

Sabendo da dificuldade que os professores do Ensino Médio têm ao trabalhar o conteúdo de funções e, principalmente, em fazer essa conexão entre as diferentes representações. Procuramos através do jogo enigma de funções, trabalhar o conteúdo de função quadrática, dando ênfase nas representações gráfica, algébrica e verbal por meio do jogo, complementando nas situações-problema com a representação tabular, com a finalidade de desenvolver no aluno uma compreensão significativa no estudo da função quadrática através da dinâmica lúdica, proporcionado pelo jogo e a conexão entre as diferentes representações de funções.

A representação gráfica nas cartas do jogo permite ao aluno uma análise minuciosa das propriedades da função, apresentando a construção dos diferentes gráficos, definidas numa representação eficiente ao estudo de cada uma das funções. Permite também, a compreensão de funções contínuas que se definem em todos os números reais, não se limitando apenas à escala do plano cartesiano apresentado.

A representação algébrica nas cartas do jogo aparece juntamente com a representação gráfica, o que favorece ainda mais a compreensão visual da expressão algébrica da função quadrática, possibilitando a observação dos coeficientes e identificando a mudança no gráfico para cada caso específico, por exemplo: se a função quadrática é incompleta na qual o coeficiente $c = 0$, ao observar o gráfico das várias funções compreende-se que, nesse caso, o gráfico intercepta o ponto de origem do plano cartesiano, como destaca Cooney, Beckmann e Lloyd (2010) citado por Silva (2013) em sua compreensão Essencial 5d.

A representação tabular não aparece no jogo, entretanto, exploramos situações fora do jogo, a fim de que os alunos compreendessem a construção da função, por meio da tabela e o estudo da taxa de variação. Já a representação verbal foi explorada em todas as atividades, seja por meio da dinâmica do jogo, exposição de situações-problema ou pela interação entre alunos ou professor e aluno.

Explorando o problema em ação no jogo, os jogadores venciam a partida, e a mediação, possibilitava a compreensão das ideias essenciais da função quadrática, em que todas as representações dialogavam com a mesma temática.

Diante das ideias essenciais do estudo das funções trabalhadas através da metodologia com o jogo Enigma de Funções na perspectiva da resolução e exploração de problemas, as atividades proporcionadas aos alunos limitaram a discutir a quarta ideia essencial, a combinação e transformação de funções que consideramos importante, porém, essa possibilidade pode ser planejada e analisada por outros pesquisadores dentro da ideia do jogo.

Destacaremos no Quadro 02 as grandes ideias essenciais de funções abordadas pelos autores Coonney, Beckmann, Lloyd (2010) citado por Silva (2013) que foram trabalhadas nas atividades do jogo Enigma de Função e situações-problema complementar ao jogo:

Quadro 02: As ideias essenciais de funções que foram atendidas pelas atividades de pesquisa.

Grandes ideias essenciais de funções	**Jogo Enigma de Função – Função Quadrática**	**Problemas complementares ao jogo**
- O conceito	Sim	Sim
- Covariação e taxa de variação	Sim, parcialmente	Sim
- Família de funções	Sim	Sim
-Combinação e transformação de função	Não	Não
-Representações múltiplas	Sim, parcialmente as representações gráficas e a algébricas	Sim, as representações algébrica, numérica, tabular e gráfica

Fonte: Elaborado pela autora.

O Quadro 02 apresenta as ideias que o Jogo Enigma de Funções atendeu dentre, as cinco grandes ideias essenciais do conteúdo de funções, especificamente, de funções quadráticas apresentadas no capítulo 3.

Contudo, como já mencionado anteriormente, no intervalo de uma aula e outra com o jogo, a professora-pesquisadora procurou discutir problemas complementares que contribuíram para reforçar as ideias trabalhadas no jogo, assim como outras ideias de função quadrática que não seriam possíveis de serem discutidas e trabalhadas dentro das regras e limites do jogo.

Com base nos diferentes documentos oficiais do Ensino Médio, o estudo de função vem obtendo um crescimento no que se refere à análise e estudo por meio das representações múltiplas de funções, destacando as características e a percepção diante dos fenômenos reais em que a função está presente.

Conforme aponta no documento da Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2016) que a Álgebra no Ensino Médio deve ser entendida como o estabelecimento de relações, ampliando e consolidando a noção de equações e função.

> Nessa etapa de escolaridade, merece destaque o estudo das funções por seu papel como modelo matemático para analisar e interpretar relações de dependência entre variáveis de duas grandezas em fenômenos do mundo natural ou social, incluindo os trabalhados em componentes de outras áreas de conhecimento como Física, Química e Biologia, por exemplo. Para tanto, o trabalho e a conversão entre representações algébricas e gráficas são de vital importância para análise e interpretação das relações existentes entre as variáveis envolvidas. (BRASIL, 2016, p.576).

Segundo a Base Nacional Comum Curricular BNCC (BRASIL, 2018), os estudantes do Ensino Médio devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação de construção de modelos e de resolução de problemas.

> Eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados (BRASIL, 2018, p.529).

Segundo as competências da Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018) de acordo com os objetivos de aprendizagem do componente curricular Matemática para o Ensino Médio na área da Álgebra, destacamos algumas habilidades:

> (EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.
>
> (EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais.
>
> (EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$ (BRASIL, 2018, p. 536-539-541).

As competências da Matemática para o Ensino Médio formam um todo conectado e segundo a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018 p. 530) “consideram que, além da cognição, os estudantes devem desenvolver atitudes de autoestima, na busca de soluções e de respeito ao trabalho e às opiniões dos colegas, mantendo predisposição para realizar ações em grupo”.

4. CAMINHAR METODOLÓGICO DA PESQUISA

Iniciamos este capítulo classificando a nossa pesquisa como qualitativa, buscando suporte teórico em Ludke e André (1986) e Bogdan e Biklen (1994). Concomitantemente, decidimos categorizá-la como pesquisa pedagógica sob a visão teórica de Lankshear e Knobel (2008).

Em seguida, descrevemos os aspectos metodológicos e apresentaremos o nosso local de pesquisa, explicitando as características gerais, assim como o perfil dos sujeitos participantes da pesquisa: o professor pesquisador, a sala de aula e os alunos. As atividades com o jogo serão destacadas ainda neste capítulo, do mesmo modo os instrumentos de pesquisa foram especificados com base em tudo que foi apresentado, expondo a dinâmica e desenvolvimento das atividades.

4.1. Pesquisa qualitativa na modalidade de pesquisa pedagógica

O presente trabalho foi direcionado em uma abordagem metodológica qualitativa, por acreditarmos que esta nos dará possibilidades de compreender o processo deste estudo, e que possamos interpretar a realidade vivenciada durante todo o caminhar da pesquisa.

Nessa perspectiva, o jogo trabalhado em sala de aula tem a proposta de analisar como se dá a aceitação dos alunos do Ensino Médio com o uso da metodologia e quais as potencialidades que o mesmo poderá contribuir com o ensino de Matemática, uma vez que precisamos ficar atentos a todas as etapas da realização dos estudos da pesquisa. Conforme relatam Bogdan e Biklen (1994) sobre como realizar uma investigação qualitativa, ao se coletar os dados favoráveis à compreensão dos resultados de um estudo:

> A investigação qualitativa é descritiva. Os dados recolhidos são em forma de palavras ou imagem e não de números. Os resultados escritos da investigação contêm citações feitas com base nos dados para ilustrar e substanciar a apresentação. Os dados incluem transcrições de entrevistas, notas de campo, fotografias, vídeos, documentos pessoais, memorandos e outros registros oficiais. Na sua busca de conhecimento, os investigadores qualitativos não reduzem as muitas páginas contendo narrativas e outros dados a símbolos numéricos. Tentam analisar os dados em toda a sua riqueza, respeitando, tanto quanto o possível, a forma em que estes foram registrados ou transcritos (BOGDAN e BIKLEN, 1994, p. 48).

Nesse contexto, entendemos que a pesquisa não foi direcionada diretamente a resultados numéricos ou ao produto final, mas ao processo como se desenvolveu todas as atividades e, principalmente, como os sujeitos de pesquisa se colocaram diante dessa realidade. Como destaca Bogdan e Biklen (1994):

> A abordagem da investigação qualitativa exige que o mundo seja examinado com a ideia de que nada é trivial, que tudo tem potencial para construir uma pista que nos permita estabelecer uma compreensão mais esclarecedora do nosso objeto de estudo (BOGDAN e BIKLEN, 1994, p. 49).

Entendemos que a dinâmica com o uso de jogo se enquadrou perfeitamente sobre essa linha de investigação na qual a abordagem se deu de forma contínua em um processo de construção e reconstrução do conhecimento matemático envolvido na atividade.

Dessa forma, a partir dos dados coletados, o contato dos sujeitos com o ambiente da pesquisa, as observações e transcrições, as imagens e resultados, todas essas riquezas que temos na coleta de dados em uma pesquisa qualitativa, foram favoráveis à análise detalhada das potencialidades dessa metodologia de ensino.

Conforme destaca Lüdke e André (1986, p. 5) "o papel do pesquisador é justamente o de servir como veículo inteligente e ativo entre esse conhecimento acumulado na área e as novas evidências que serão estabelecidas a partir da pesquisa".

Durante todo o tempo, a nossa pesquisa foi pensada na tentativa de dar suporte à prática da professora pesquisadora. Assim, diante da abordagem qualitativa nos enquadramos na modalidade de pesquisa pedagógica por ser direcionada a professora à realização do estudo como pesquisadora da sua própria prática docente.

Ao procurar compreender a pesquisa pedagógica por meio da visão teórica de Lankshear e Knobel (2008), percebemos que a mesma sofria resistência por parte de alguns pesquisadores que não consideravam a modalidade de pesquisa aceita no meio científico.

Por acreditar nas contribuições e potencialidades que a mesma tem a oferecer para a comunidade científica, acadêmica e educacional, procuramos fundamentar nossa pesquisa na modalidade pedagógica, e objetivar que ela se tornasse, significativamente, benéfica aos sujeitos participantes da mesma.

Nesse contexto, o professor realiza uma diagnose do que se pretende pesquisar dentro da sua realidade, apoiado por meio de um pensamento crítico e reflexivo do contexto. O professor não está ensinando apenas os conteúdos para obter resultados, ele passa a investigar como a sua prática pode contribuir com a aprendizagem dos alunos.

Na nossa pesquisa destacamos a sala de aula como lugar natural da realidade do professor e fonte de todas as nossas coletas e dados da pesquisa. Enquanto professora pesquisadora procuramos realizar toda a descrição das atividades de pesquisa com base nas caraterísticas apresentadas por Bogdan e Binklen (1994) em que a pesquisa qualitativa está voltada mais para o processo de aplicação do que apenas aos resultados.

O professor enquanto pesquisador valoriza ainda mais o seu trabalho, buscando no mesmo uma autonomia para gerar conhecimento especifico da sua área no campo educacional. Como destacam os autores Lankshear e Knobel (2008) sobre a visão de outros teóricos.

> Vários autores (por exemplo, Cocharm-Smith e Lytle, 1993; Hopkins, 1993; Fishman e McCarthy, 2000) agruparam uma série de visões amplamente compartilhadas sobre os propósitos e ideais da pesquisa pedagógica, em torno de dois conceitos fundamentais. Um deles diz respeito a melhorar a percepção do papel e da identidade profissional dos professores. O outro é a ideia de que o envolvimento com a pesquisa pedagógica pode contribuir para um ensino e uma aprendizagem de melhor qualidade nas salas de aula (LANKSHEAR e KNOBEL, 2008, p.14).

A pesquisa pedagógica torna-se necessária por aproximar as pesquisas ao espaço da escola, pois o professor pode direcionar novos métodos de ensino que favoreçam a aprendizagem dos seus alunos, sendo um investigador, pode analisar melhor e tentar solucionar os problemas que influenciam negativamente a sua sala de aula. Segundo Lankshear e Knobel (2008, p.19) "(...) um pesquisador serio não está meramente interessado em 'algo que funcione', mas em entender como e por que funciona e/ou como pode precisar ser adaptado para funcionar em outras circunstâncias ou aplicar-se a outros casos".

A abordagem da pesquisa pedagógica pode ser vivenciada na sala de aula ou em qualquer outro ambiente onde se pode obter dados, analisar e interpretar informações a respeito da prática de um professor enquanto pesquisador. Conforme aponta Lankshear e Knobel (2008, p.15) "a pesquisa de professores é vista como um importante recurso, por meio do qual os professores podem desenvolver sua competência para fazer o autêntico tipo de julgamento autônomo e decisões adequadas a seu status como profissionais".

4.2 O trabalho de campo

A presente pesquisa foi desenvolvida com alunos do 1°ano do Ensino Médio de uma escola pública da Rede Estadual de Ensino da Paraíba. O direcionamento a esse nível de ensino se deu por considerar o jogo com potencialidades de aprendizagem nos conteúdos matemáticos e que, por meio da resolução e exploração de problemas, o aluno tem grandes possibilidades de interação com os colegas e o professor, favorecendo na construção do seu próprio conhecimento, também pela ludicidade e motivação que o jogo proporciona aos alunos a se sentirem parte integrante do processo de aprendizagem.

Destacamos na nossa pesquisa o trabalho com o jogo sob duas possibilidades de ensino. A primeira, na perspectiva de desenvolver o conteúdo matemático a partir do jogo onde trouxemos as descrições e análise de atividades com o jogo Enigma de Funções, e a segunda, em trabalhar o jogo como revisão do conteúdo matemático, na qual até realizamos atividades de jogo, porém procuramos analisar apenas as potencialidades do jogo, não destacamos no presente estudo as descrições e análise do jogo como revisão.

Dentro das possibilidades do trabalho com o jogo em sala de aula, procuramos recorrer à metodologia da resolução e exploração de problemas para que, através do diálogo entre os sujeitos da pesquisa, buscando incentivá-los ao questionamento, à discussão, a desenvolver o pensamento crítico e, principalmente, a sentirem-se confiantes na sua aprendizagem, os alunos pudessem ser ativos e participativos no processo de crescimento pessoal, cognitivo e social.

O planejamento para as atividades de pesquisa aconteceram após várias leituras e mediante diálogo com o orientador da pesquisa, assim como observações feitas enquanto professora pesquisadora da turma, que fortaleceram as ideias a serem trabalhadas no decorrer das atividades.

Durante a descrição das atividades aparecerá em vários momentos as letras iniciais acompanhados de números, a exemplo de A01 e A02 representando as duplas de alunos e EQ01, EQ02 que são equipes, quando as discussões foram feita por um grupo maior, e ainda aparecerá o P que representa a fala da professora pesquisadora.

Essa forma de representação faz-se necessária para expor os questionamentos dos alunos no momento do jogo e das atividades propostas durante a realização da pesquisa, diferenciando a participação dos sujeitos, onde pudemos analisar e obter as informações e resultados da pesquisa.

O jogo desenvolvido nas atividades de pesquisa foi analisado como jogo pedagógico por entender que o mesmo busca compreender o conhecimento matemático, como destaca Antunes (2011, p.39) desenvolve-se "com a intenção explícita de provocar a aprendizagem significativa, estimular a construção de novo conhecimento e, principalmente, despertar o desenvolvimento de uma habilidade operatória".

Assim como todo jogo tem uma estratégia de jogada, destacamos também os jogos de estratégias nos quais os alunos precisam desenvolver uma estratégia para conseguir chegar ao objetivo do jogo. Em um contexto de ensino/aprendizagem, o jogo não está direcionado apenas ao objetivo do jogo pelo jogo, mas, com perspectiva na compreensão do conceito matemático envolvido pela dinâmica.

O jogo pedagógico torna-se eficiente para todos os envolvidos, pois ao mesmo tempo em que o professor busca com a metodológica dos jogos um ensino colaborador à aprendizagem dos seus alunos, por meio dele os alunos desenvolvem a capacidade de pensar, resolver, discutir e aprender os conteúdos matemáticos presente no jogo.

Grando (1994) propõe que o jogo pedagógico seja promissor à aprendizagem:

> O jogo pedagógico deve ser desafiador, interessante, ter um objetivo que possibilite ao sujeito o 'se conhecer' a partir de sua própria ação no jogo e finalmente, que todos os jogadores estejam ativamente envolvidos com a situação, ou seja, participando em todos os momentos do jogo (GRANDO, 1995, p.59).

No jogo pedagógico o aluno deve além de definir a sua estratégia a partir da jogada do seu adversário, também dominar o conteúdo envolvido, esse termo "dominar" é construído ao longo das jogadas por meio das intervenções, das reflexões e das discussões com a equipe, mas a estratégia de ganhar depende das observações na jogada do oponente e na sua própria jogada.

O primeiro momento da pesquisa em sala de aula foi falar para os alunos sobre as potencialidades que as atividades com jogos podem trazer para o ensino e aprendizagem da Matemática, desde que os sujeitos tenham o compromisso de utilizar a metodologia como proposta significativa ao objetivo determinado em cada atividade. Contudo, deixamos claro, que o jogo em sala de aula não seria apenas brincadeira, mas algo que lhes proporcionassem momento de aprendizagem e que a participação precisa ser vista com seriedade.

No entanto é uma atividade onde o aluno não é obrigado a participar, assim como qualquer outro tipo de jogo, o jogo pedagógico, presa pela liberdade de decisão do participante de querer ou não jogar.

4.3 A escola

A escola onde aconteceram as atividades de pesquisa faz parte da realidade da professora pesquisadora que procurou explorar a pesquisa no espaço da sua sala de aula, por perceber a necessidade de tornar o ensino da Matemática mais dinâmico e interativo. Procuramos propor o trabalho com os jogos matemáticos e as atividades na perspectiva da resolução e exploração de problemas, para fortalecer as potencialidades do ensino inovador por meio de uma metodologia que possibilitasse ao aluno a sua participação ativa no processo de construção do conhecimento.

A nossa pesquisa foi realizada em uma Escola Pública Estadual que fica localizada na zona sul na cidade de João Pessoa, no estado da Paraíba, sendo uma instituição pública que atende à comunidade com o ensino educacional nos turnos matutino, Ensino Fundamental I e II até o 6°ano e as aulas dos Cursos Técnicos, no turno vespertino com o Ensino Fundamental II, Ensino Médio regular e o Ensino Médio com Cursos Técnicos na Área de Manutenção e Suporte em Informática e Curso Técnico em Segurança do Trabalho, e no turno noturno Educação de Jovens e Adultos-EJA.

A instituição educacional dispõe de uma boa estrutura física, contendo dez salas de aula, sala de departamento, biblioteca, auditório para reuniões e eventos escolares, laboratórios de informática, de ciências e de robótica. Como parte das salas de aula está localizada no 1° andar, a escola dispõe de uma rampa que favorece a acessibilidade, porém não possui um laboratório específico para Matemática, sendo o espaço do laboratório de robótica cedido uma parte à Matemática, onde guardamos os materiais a ser utilizados de acordo com a necessidade do professor, desde que para utilizá-los devem ser levados para a sala de aula.

Contudo, mesmo com o curso Técnico na Área de Informática tem-se dificuldade de acesso à internet por ter pouca capacidade de distribuição de rede, o que dificulta o acesso da Matemática à tecnologia. A área pedagógica é bem centrada nos projetos educacionais, o que contribui para o desenvolvimento educacional.

No segundo semestre do ano letivo 2017, a escola recebeu o programa Mente Inovadora com o projeto Mindlab, a criação de um laboratório com jogos para o Ensino Fundamental, constituído por vários jogos entre eles, o de estratégia, sorte, competição e regras. O projeto dispõe de formação continuada para os professores de Matemática que realizam as atividades em sala, e ao final do ano os alunos participam das Olimpíadas de Raciocínio Mente Inovadora em três fases: estadual, nacional e internacional, apresentando-se em duas categorias do 4° ao 7° ano e outra do 8° ao 9° ano.

Consideramos um trabalho significativo na educação, por direcionar projetos voltados para o lúdico no ensino da Matemática, buscando a melhoria na motivação, no pensamento cognitivo e no raciocínio-lógico, desenvolvendo habilidades que contribuem para o ensino/aprendizagem da Matemática.

4.4 Sujeitos participantes da pesquisa

A nossa pesquisa procurou atender alunos do 1° ano do Ensino Médio, com atividades de jogos desenvolvidas no segundo semestre do ano letivo de 2017. A turma na qual realizamos a pesquisa cursava de forma integral o Curso Técnico na Área de Manutenção e Suporte em Informática, com uma carga horária de 39 aulas semanais, em tempo integral nos turnos matutino e vespertino.

A sala de aula apresentava quarenta e dois alunos matriculados em que cinco estavam entre os alunos transferidos e desistentes. A faixa etária dos alunos se encontrava entre 15 e 18 anos. Segundo os documentos de registro, a maioria dos alunos está de acordo com a faixa etária estabelecida para o ano em estudo. A maior parte dos alunos mora no bairro onde localiza a escola em que estudam ou em bairros próximos.

A carga horária de Matemática da turma do 1° ano do Ensino Médio era de apenas três hora/aulas semanais, já que a mesma tem uma grade curricular de um curso técnico, assim, as atividades com os jogos foram planejadas para serem trabalhadas em duas aulas seguidas de Matemática. Para seguir com a carga horária de duas aulas germinadas no trabalho com o jogo, conversamos com outra professora da turma para realizarmos trocas no horário das aulas, assim em uma semana teríamos quatro aulas de matemática e na semana seguinte teríamos apenas duas aulas, num período de cinco semanas em um total de sete encontros, tempo estimado para a realização das atividades de pesquisa.

Nessa turma, a metodologia com o uso dos jogos na perspectiva de desenvolver o conteúdo matemático, seguiu o planejamento da professora com o conteúdo de função quadrática. O conhecimento matemático foi desenvolvido a partir do jogo Enigma de Funções distribuídos em quatorze hora/aulas.

Procuramos trabalhar as atividades com o jogo uma vez na semana em duas aulas geminadas, durante cinco semanas com oito hora/aulas de jogo. Nas aulas em que não utilizávamos o jogo Enigma de Função recorremos à metodologia da resolução e exploração de problema, já que a mesma faz parte da metodologia com jogos.

Assim, podíamos trazer o estudo da função quadrática sob a apresentação de situações-problema com um total de seis horas/aula, destacando as ideias essenciais no estudo da função específica complementando assim, a atividade com o jogo.

A turma do 1° ano do Ensino Médio era composta de um dos maiores quantitativos de alunos da escola: discentes, em sua maioria, compromissados com os estudos, porém apresentavam muitas dificuldades no conhecimento da Matemática básica. As regras do jogo e o material da pesquisa estão disponíveis no apêndice do presente trabalho.

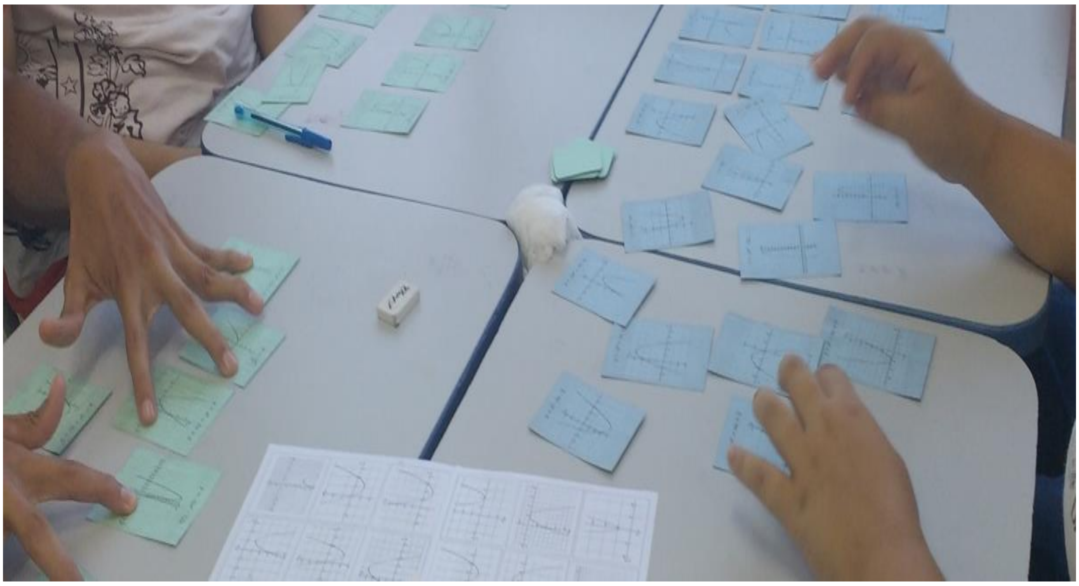
4.5 O jogo e as atividades da pesquisa

O jogo e as atividades utilizados na presente pesquisa foram todos planejados criteriosamente pela professora pesquisadora, com a finalidade de atender aos alunos do 1° ano do Ensino Médio dentro do planejamento do conteúdo do respectivo ano e para dar uma resposta ao problema de pesquisa.

A confecção do jogo foi realizada pela professora pesquisadora**,** com uso dos seguintes materiais: folhas A4 coloridas, cartolina cola sete, cola branca, envelopes, xerox e impressões. Com esses materiais foram confeccionado o jogo Enigma de Funções.

Para a confecção do material impresso do jogo utilizamos a cartolina cola sete para garantir melhor qualidade e durabilidade do material, já que o jogo não seria trabalhado em um único momento e, ao final da pesquisa, podia ficar como material de apoio pedagógico na escola para outros alunos. Utilizamos também uma folha para registrar as perguntas e respostas da partida do jogo, possibilitando ao final do jogo a avaliação dos jogadores.

Figura 01: Apresentação do jogo na dinâmica da equipe 01.



Fonte: Autoria própria.

Na figura 01, destacamos a dinâmica da equipe formada pelos alunos A01, A02, A03 e A04, e a organização do jogo, onde apresentamos dois baralhos de funções em cores diferentes (azul e verde), cada dupla ficou com um baralho de 24 cartas de funções de uma cor, acompanhado do cartazete[2] (folha branca com os gráficos) e um baralho de 20 cartas-pergunta que permanece virada para baixo contribuindo com a escolha das perguntas no jogo e serve para toda a equipe.

O jogo foi sempre trabalhado em grupos que não foram fixos, ora os alunos escolhiam suas equipes, ora fizemos uma dinâmica de formar grupos só com números impares e outros só com números pares de acordo com a frequência da turma, ora escolhemos os alunos para a formação dos grupos. Desse modo os alunos puderam transitar de um grupo para outro.

[2] **Cartazete** é um dos materiais do jogo Enigma de Funções, onde se encontra todas as funções do jogo apenas na sua representação gráfica e serve como apoio para escolher a carta da função quadrática. (recurso opcional ao jogo).

No jogo Enigma de Funções as cartas-pergunta comandam as partidas do jogo. Para descobrir a função quadrática da carta escolhida por uma dupla, a dupla oponente precisa das cartas-pergunta para fazer aos jogadores que escolheram a função e assim obter deles a resposta “SIM” ou “NÃO”. Numa dinâmica de descoberta, os jogadores excluem as funções que não satisfazem a resposta obtida, até que seja possível concluir qual é a função escolhida pela dupla oponente.

Destacamos no Quadro 03 o nome do jogo trabalhado e a referência, assim como o conteúdo e a turma que foi desenvolvido o jogo e a sua finalidade. Trabalhamos o jogo e as atividades na perspectiva da resolução e exploração de problemas.

Quadro 03: Resumo sobre o jogo Enigma de Funções.

Nome do jogo/Referência	**Conteúdo matemático**	**Turma**	**Finalidade do jogo**
-Enigma de funções -Smole, Diniz, Pessoa e Ishihara (2008)	Função quadrática	1° ano do Ensino Médio	Introduzir por meio do jogo o conteúdo de funções quadráticas a fim de compreender melhor as ideias matemáticas

Fonte: Elaborado pela autora.

Como atividades de pesquisa realizada com o material do jogo, procuramos explorar as ideias da função quadrática, através das cartas-pergunta e cartas com as diferentes funções, trabalhando o jogo ora nos grupos de jogadores contribuindo na mediação de cada grupo, ora trabalhando as ideias de função quadrática de forma coletiva explorando os conhecimentos matemáticos.

Além do jogo, apresentamos situações-problema de função quadrática, onde destacamos a resolução e exploração do problema com base na mediação da professora-pesquisadora nos grupos possibilitando, a compreensão das ideias essenciais da função quadrática.

4.6. Instrumentos de coleta e análise de dados

Os dados obtidos no trabalho de campo foram coletados através das observações durante as aulas com o uso do jogo, incluindo as notas de aula da professora pesquisadora com anotações e descrições das falas, realizadas durante ou após as aulas, escritas de memória recente.

As descrições das aulas e registros dos alunos nos momentos de jogo e no desenvolvimento das atividades são informações que possibilitaram todas as análises da presente pesquisa. Durante as descrições das aulas procuramos trazer os diálogos que ocorreram em sala de aula na tentativa de destacar a participação dos alunos através das descrições das suas falas, porém não conseguimos registrar todos os diálogos e momentos dos jogos. Contudo, procuramos observar e descrever jogadas de todos os grupos em momentos importantes no jogo, sendo considerado pela professora pesquisadora como essenciais no estudo das nossas análises.

Os registros dos alunos possibilitaram observar as diferentes formas de estratégias e resoluções sejam no jogo ou em resolução das situações-problema que foram complementares ao conteúdo do jogo.

Os dados coletados incluem as notas de aulas, registros do jogo, resoluções dos alunos, comentários dos alunos sobre as atividades em sala e fotografias que permitiram visualizar etapas de jogadas e como os alunos se posicionaram frente a tal recurso metodológico.

Todos esses instrumentos de coleta e análise de dados, juntamente com a aproximação por meio do diálogo que envolveu aluno/aluno e aluno/professora pesquisadora, foram fundamentais na nossa pesquisa.

5. DESCRIÇÃO E ANÁLISE DO JOGO ENIGMA DE FUNÇÕES

O jogo Enigma de Funções aborda o conteúdo de função quadrática de forma mais interativa e dinâmica, despertando o interesse pela Matemática e o aprender brincando. É um jogo de cartas que promove a visualização das representações gráficas e algébricas das funções quadrática acompanhada de cartas-perguntas que direcionam a dinâmica do jogo.

A análise da função quadrática por meio da representação gráfica, influência significativamente na compreensão das características de cada função, onde podemos explorar através dos vários gráficos as propriedades de cada uma, ao mesmo tempo em que comparamos o comportamento da função quadrática nos respectivos gráficos.

Conforme Smole, Diniz, Pessoa e Ishihara (2008), o jogo possibilita que os alunos desenvolvam habilidades de leitura e interpretação de gráficos a partir das relações entre as funções e suas características.

O jogo Enigma de Funções foi selecionado do livro **Caderno do Mathema:** jogos de matemática 1° ao 3° ano do Ensino Médio (2008), organizado pelas autoras Kátia Stocco Smole, Maria Ignez Diniz, Neide Pessoa e Cristiane Ishihara. Essa atividade teve como foco desenvolver ideias matemáticas sobre funções quadráticas.

Na dinâmica proporcionada pelo jogo, o aluno tem a oportunidade de compreender as propriedades da função quadrática, por meio de um trabalho coletivo, fazendo descobertas e construções entre eles e também com a mediação da professora pesquisadora. Nesse processo o aluno é um sujeito ativo, formulando hipóteses, organizando e reestruturando suas ideias de forma coletiva.

Entretanto, compreendemos algumas limitações do jogo, no sentido de atender a um conceito amplo como é o de função quadrática. Assim procuramos utilizar o material do jogo para explorar ideias matemáticas da função que não eram discutidas na dinâmica do próprio jogo, como por exemplo, a representação tabular dos gráficos de algumas funções apresentadas no jogo, a covariação e a taxa de variação das funções, a compreensão com relação aos coeficientes da função. Assim como situações-problema que apresentam ideias matemáticas que complementam aulas com o jogo, entre outros pontos que foram discutidos e que serão apresentados nas descrições das atividades de pesquisa. Essas explorações aconteceram em aulas intercaladas complementando as discussões do conteúdo de função quadrática.

Smole, Diniz, Pessoa e Ishihara (2008, p.81) trazem o jogo Enigma de Função "com o objetivo que os alunos relacionem as funções quadráticas apresentadas na forma gráfica e algébrica com as suas respectivas características, desenvolvam a linguagem matemática própria a funções e gráficos e aprimorando o raciocínio lógico-dedutivo".

O jogo apresenta-se com um objetivo bem definido pelas autoras, entretanto, o presente trabalho acrescentou outros objetivos que atendem às explorações no jogo. O Quadro 04 apresenta as informações gerais acerca da presente pesquisa.

Quadro 04: Informações gerais sobre as atividades com o jogo Enigma de Funções.

Conteúdo: Função Quadrática Recurso: jogo matemático, situações-problema e questionário. Público-alvo: alunos do 1° ano do Ensino Médio de uma escola pública do Estado da Paraíba Número de participantes: 37 alunos Carga-horária: 14 horas-aula Período: 28 de Agosto a 29 de Setembro de 2017 Objetivo: • Compreender as ideias essenciais de função quadrática a partir das perguntas e análise dos gráficos; • Identificar as potencialidades do uso do jogo Enigma de Funções na construção de ideias matemáticas sobre função quadrática; • Possibilitar através da resolução e exploração de problemas o estudo da função quadrática.

Fonte: Elaborado pela autora.

A carga horária de quatorze horas-aula apresentada no Quadro 04, foi dividida em dois momentos: oito horas-aula em que trabalhamos a dinâmica do jogo Enigma de Funções e em seis horas-aula intercalando com as aulas do jogo trabalhamos com resolução e exploração de situações-problema, assim como a representação tabular e algébrica dentro das cartas apresentadas no jogo e a resolução do questionário que está direcionada à realização das partidas do jogo, considerando um período de cinco semanas com 45 minutos em cada aula .

Visamos durante as atividades de jogo desenvolver as várias potencialidades no ensino da função quadrática, entre elas, a eficiência de uma metodologia coletiva e interativa voltada ao diálogo, à problematização e à busca pela compreensão do que é essencial ao jogo, o conhecimento matemático da função quadrática.

5.1 Descrição e análise das atividades de pesquisa

Nessa unidade, apresentamos as descrições e análises de cada encontro, onde procuramos destacar os diálogos apresentados pelos alunos durante as mediações nos momentos de discussões e os registros do jogo e das atividades realizadas.

Nos encontros em que prevaleceram a dinâmica do jogo e suas problematizações discutimos as características da função quadrática com as representações algébrica e gráfica. Nos demais encontros, utilizamos as cartas do jogo explorando de forma coletiva conhecimentos matemáticos que não poderiam ser discutidos no momento do jogo e abordamos as ideias essenciais e as representações múltiplas da função quadrática, a partir das situações-problema discutidas com base na resolução e exploração de problemas.

5.1.1 Encontro 01

Aulas 01 e 02 (31/08/2017)

<u>Conteúdos desenvolvidos:</u> Explorando as características da função quadrática, visualizadas através das cartas com representações gráficas e algébricas.

<u>Recursos</u>: Jogo Enigma de Funções

Antes de iniciar a aula, conversamos um pouco com a turma e, perguntamos aos alunos, se eles queriam que a professora utilizasse outras metodologias para as aulas de matemática. E se a metodologia compreendesse jogos matemáticos, o que eles achariam.

Ao escutar de forma rápida a fala de alguns alunos, evidenciamos a preferência por aula com uma metodologia dinâmica. Assim, iniciamos a aula, propondo a metodologia com uso dos jogos matemáticos e as responsabilidades em fazer uso da mesma, assim como a liberdade do aluno em participar. Para fazer uso da metodologia é necessário que se tenha compromisso, pois o jogo é considerado como uma atividade séria.

Solicitamos à turma que formasse grupos de quatro jogadores, posicionados dois a dois. Essa orientação no posicionamento foi para que a forma de localização no jogo ficasse confortável entre os jogadores, pois na escolha da carta ou no momento de responder, a dupla teria um maior contato entre si e com a dupla oponente, o que é necessário ao presente jogo. Em seguida, entregamos juntamente com o auxílio de alguns alunos, o material.

Ao abrirem os envelopes, os jogadores retiraram todas as cartas e, então, solicitamos a leitura das regras e cartas do jogo por todos os jogadores. As equipes organizaram as cartas sobre a mesa e compartilharam as regras do jogo. Ao fazerem a leitura das regras os alunos compreenderam o jogo e desenvolveram a linguagem matemática, momento onde inicia a construção do conhecimento matemático.

Ao observarem os gráficos apresentados nas cartas, alguns alunos começaram a fazer o seguinte comentário:

A1: Professora, nós não estudamos esse tipo de gráfico.

Na mesma equipe, outros alunos lembraram que tinham estudado esse conteúdo no 9°ano do Ensino Fundamental.

Ao realizarem a leitura em grupo, pedimos que as duplas se cumprimentassem entre si e com seus oponentes, para mostrar que o jogo tem em seu caráter competitivo a aprendizagem coletiva. Em seguida, realizamos uma leitura compartilhada, com uma simulação do jogo, a fim de que todos os jogadores compreendessem as regras e de fato pudessem iniciar a dinâmica.

No jogo uma dupla escolhe a carta contendo o gráfico na sua forma algébrica e gráfica, sem que a dupla oponente possa ver. A outra dupla procura encontrar a carta escolhida, para isso utiliza as cartas-pergunta para fazer perguntas à dupla que escolheu a função. Em seguida, ficam atentos à resposta recebida para eliminar as funções que não teriam possibilidade de ser a escolhida.

É disponibilizada uma folha de registros, na qual as equipe podem fazer as anotações sigilosas. Esse processo dinâmico permite aos participantes muitas interações, atenção e concentração, tanto dos jogadores que dão a resposta como dos que estavam tentando encontrar a carta certa.

O jogo nesse momento é um problema a ser resolvido pelos alunos. Conforme Andrade (1989), um problema é uma questão, uma situação em que os alunos não sabem o caminho e a estratégia a seguir, mas sabem que para resolvê-lo, precisa realizar algum trabalho, desenvolver habilidades a fim de resolver o problema que, no jogo é ganhar a partida.

Ao transitar entre os grupos de jogadores, o que chamou a atenção no primeiro momento foi à forma como os alunos procuravam entender as cartas, as regras e a seriedade com o jogo. Assim, os que estavam compreendendo o jogo no grupo, ou os que estavam em dúvida com algum item das regras, solicitavam a ajuda da professora pesquisadora.

A1e A2: Professora vem cá, verifica aqui. O A3 e A4 esconderam uma carta e nós precisamos encontrá-la, para isso fazemos as perguntas e eles respondem para que nós possamos encontrar a carta escolhida (barulho e o A3 e A4 já interfere).

A3 e A4: Mas eles irão fazer todas as cartas-pergunta até determinar a carta ou podemos determinar a quantidade de cartas?

P. Bom, precisamos deixar claro, que as regras do jogo devem ser obedecidas por toda a equipe. Entretanto, nas regras do jogo Enigma de Funções as cartas-perguntas, são embaralhadas e voltadas para baixo e a escolha deve ser aleatória. As cartas-perguntas não voltam ao baralho. Se o baralho de perguntas termina, as cartas são embaralhadas para formar novamente o baralho das cartas-perguntas. Porém se a equipe quiser determinar um número de perguntas deve ser acordado com toda a equipe

A nossa ação em fazer com que os alunos compreendessem as regras do jogo era para que eles entendessem que só realizamos uma boa dinâmica de aprendizagem se, inicialmente, eles tiverem compreendido as regras e assim poderem levar o jogo a sério.

Sabemos que, em um primeiro momento, uma equipe compreende mais rápido e já inicia o jogo, e que outros são mais demorados, entretanto, o jogo se realizou em vários encontros para que todos tivessem a oportunidade de compreender e desenvolver as habilidades necessárias à construção do conhecimento matemático. Portanto, o aluno precisa compreender na dinâmica da atividade a liberdade de expressão, a partir da leitura das regras.

Tendo em vista as dificuldades que podem ser apresentadas pelos alunos em fazer uso com os jogos matemáticos na perspectiva de compreender a Matemática, o papel do professor é fazer a mediação entre o conhecimento matemático e o próprio jogo, permitindo por meio da sua exposição oral no decorrer da atividade a interação entre aluno/aluno e aluno/professor, incentivando a liberdade em expressar as suas perguntas e questionamentos, facilitando a busca pelo seu próprio conhecimento matemático.

Segundo Grando (2004), é preciso que a atividade de jogo proposta, represente um verdadeiro desafio ao aluno despertando-o para a ação e motivando-o ainda mais.

Sabemos que o conhecimento dos alunos com o estudo de funções inicia no 9° ano do Ensino Fundamental, como também que, ao chegar ao estudo da família de função quadrática, eles já estudaram a família de função afim, assim, possibilitamos aos jogadores, por meio da problematização a exploração do conhecimento prévio sobre o conteúdo de funções. Seguem as mediações:

A1: Professora vem cá, explica aqui para nós.

A1 e A2: Fizemos a seguinte pergunta a eles: O vértice está no eixo das abscissas?

A3 e A4: Sim.

A1 e A2: Mas nós não sabemos o que é vértice, só sabemos que abscissa é o eixo x.

P: No momento direcionei a equipe A3 e A4, que havia respondido e perguntei para eles se sabiam o que seria vértice.

A3 e A4: Não sabemos a definição de vértice, mas fizemos um comparativo com o que chamamos de vértice na figura de um triângulo, por exemplo, que tem três vértices (fez uma representação por meio de desenho).

A3 e A4: (mostra no gráfico) O único que pode ser vértice seria essa curva.

P: Direcionei a dupla A1 e A2 e perguntei se tinha entendido a ideia dos colegas sobre vértice.

A1 e A2: Ah, então é a curva.

A3 e A4: Isso! E abscissa é o eixo x

A1 e A2: Nesse gráfico (mostrando no gráfico) o vértice é (1, -1).

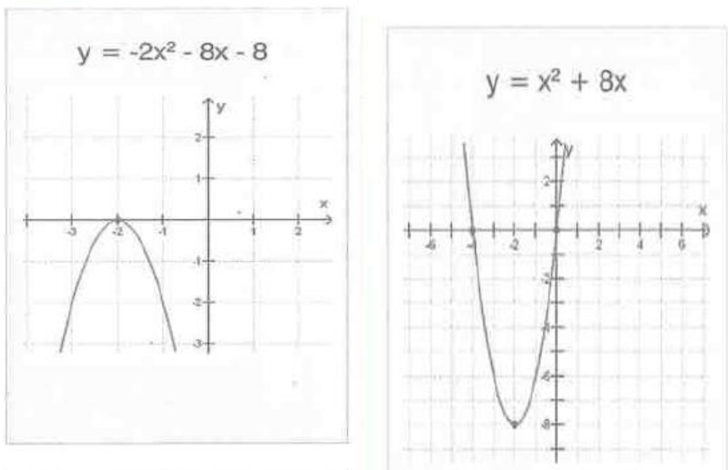
A3 e A4: Sim.

A1 e A2: E se não tiver o gráfico, como encontramos o vértice?

P: A função quadrática tem o gráfico representado por uma curva denominada parábola, assim o vértice da parábola é correspondente à ordenada máxima ou mínima e será representada por V (x_v , y_v), onde o valor de x na determinação do vértice de uma parábola é dado por $x_v = -\frac{b}{2a}$ *e o valor de y é calculado por* $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$.

Como está identificado na figura 02, utilizamos os gráficos especificados nas cartas 1 e 2, para explicar aos alunos o vértice de uma função.

Figura 02: Cartas do jogo no estudo do vértice da função quadrática.



Carta 1 Carta 2

Fonte: Elaborado pela autora.

P: Identifiquem os vértices.

A3 e A4: Carta 1: V (-2, 0) e a outra carta é V(-2,-8).

P: Certo. Mas o que podemos analisar de diferente entre esses gráficos?

A4: Professora, já respondemos, a carta-pergunta, vamos ao jogo.

P: Vamos, sim. Mas, antes, tentem explorar um pouco mais esses gráficos.

A2: A parábola, uma está para cima e outra esta para baixo.

A1:A carta1, o gráfico da função tem o vértice no eixo da abscissa e a carta 2, não.

P: O que mais pode ser observado? O que determina a parábola está voltado para cima ou para baixo? Observem as demais cartas.

Comentário: Caminhando entre as equipes de jogadores, foi perceptível a participação dos mesmos a fim de realizarem as suas jogadas e conseguirem descobrir a função escolhida. No entanto, alguns alunos querem apenas tirar a dúvida e seguir o jogo como podemos perceber com o aluno A4, que resiste às explorações realizadas sobre as características entre os gráficos das funções apresentadas. Tal atitude é compreensível por entender que os alunos estão habituados a uma metodologia pronta, baseada em definições, exemplos e exercícios, assim, quando os colocamos frente a situações que exigem dos mesmos pensar, analisar e descobrir por si mesmo, percebemos a resistência e o desejo em desviar da situação.

O trabalho em grupo permite a interação e a socialização dos conhecimentos, mesmo quando um dos participantes não está interessado em aprender ou explorar certas situações, mas se os outros insistem e conseguem desenvolver suas ideias, há possibilidades de tal conhecimento ser socializado entre os demais.

Como destaca Smole, Diniz, Pessoa e Ishihara (2008, p. 11) “é por meio da troca de pontos de vista com outras pessoas que o aluno vai descentralizando-se, isto é, ele passa a pensar sob outra perspectiva e, gradualmente, a coordenar seu próprio modo de ver com outras opiniões”.

O conhecimento de função quadrática foi sendo construído ao longo do desenvolvimento da atividade em meio ao diálogo e as explorações das cartas presentes no jogo. Algo positivo que pode ser observado no jogo, foi a liberdade que os alunos tiveram em fazer perguntas aos colegas ou a professora pesquisadora. Tal atitude contribuiu para que eles respondessem às perguntas e eliminassem as cartas que não teriam sido escolhidas pela dupla oponente, mas, principalmente, para compreender as características da função quadrática. Fatos como esse ficaram evidenciados pelas intervenções nos grupos, com o seguinte diálogo:

A5 e A6: Professora fizeram a seguinte pergunta: A função admite ponto de máximo?

A5 e A6: Não conseguimos encontrar esse ponto de máximo.

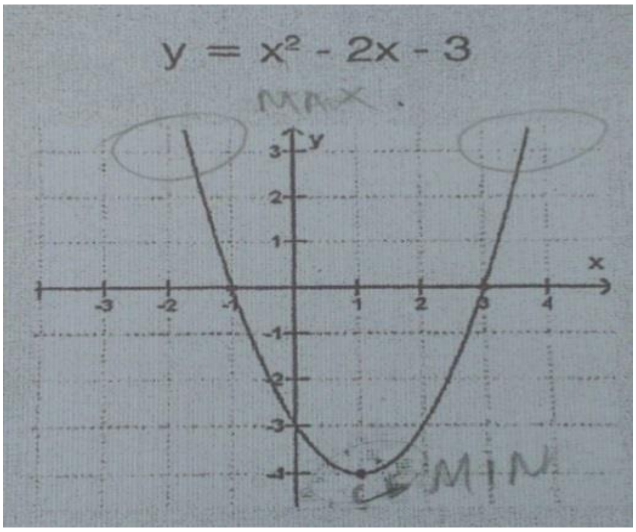
A7 e A8: Ponto de máximo é o ponto mais alto do gráfico. Tem ou não?

P: Qual a dúvida?

A5 e A6: O que é ponto de máximo?

P: Observe os gráficos abaixo e veja se a função admite ponto de máximo.

Figura 03: Compreensão da dupla A5 e A6.



Fonte: Registrado pela autora.

A5 e A6: Acho que são esses os pontos de máximo e mínimo (mostraram no gráfico). Os pontos de máximo são os mais altos do gráfico.

P: Mas você sabia que esse gráfico vai além dos pontos que você considera como o mais alto? A função quadrática está dentro dos números reais, logo, o seu domínio pertence aos números reais e a imagem são os valores de y determinados pela função $Im = \{y \in \mathbb{R} / y \geq -4\}$*. Então, não podemos ver o gráfico limitado ao que mostra a figura 03. E, assim, a parábola ou admite ponto de máximo ou ponto de mínimo.*

P: E aí a função admite ponto de máximo?

A7 e A8: Ah, então nem sempre tem ponto de máximo.

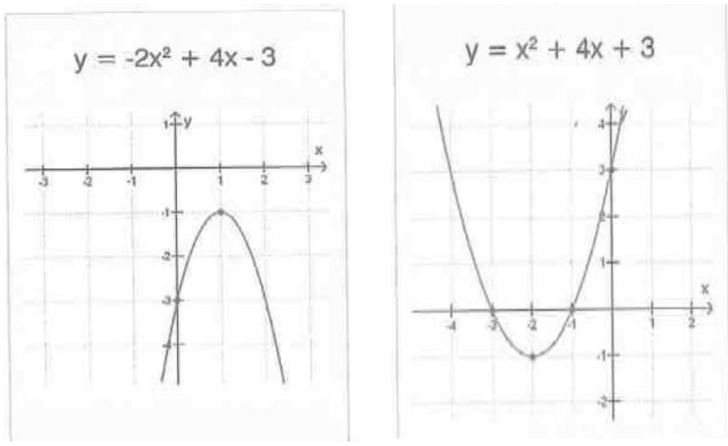
A5 e A6: nesse caso não tem, então só tem o mínimo.

P: Sim, e o que é o ponto de mínimo?

A5 e A6: É (1, -4) também é o vértice da função.

P: Muito bem. Agora observando os gráficos das funções quadráticas I e II, na figura 04, o que determina a função ter ponto de máximo ou mínimo?

Figura 04: Cartas do jogo Enigma de Funções.



Função I Função II

Fonte: Elaborado pela autora.

A5 e A6: O posicionamento da parábola. Se estiver aberta para cima admite ponto de mínimo e se estiver aberta para baixo admite ponto de máximo.

A7 e A8: Então a função quadrática ou tem ponto de máximo ou mínimo determinada pelo vértice.

P: Isso mesmo. Se a < 0, a parábola tem ponto de máximo que é o vértice da função. Já se a > 0, a parábola tem ponto de mínimo que também é o vértice da função cujas coordenadas são (Xv e Yv). O valor máximo ou mínimo da função corresponde ao Yv, o que determina também a imagem da função. Como podemos ver na função I da figura 04, a imagem da função é Im(f) = {y ∈ R/ y ≤ -1} e na função II da mesma figura temos, como imagem da função Im(f) = { y ∈ R/ y ≥ -1}.

P: Agora, continuem com o jogo.

Comentário: Podemos perceber por meio das intervenções que as muitas compreensões dos alunos não se apresentam de forma correta, mas podemos construí-las significativamente a partir dos seus conhecimentos prévios. A participação ativa dos alunos, a atividade em grupo e o diálogo são potencialidades dos jogos matemáticos que favorecem a construção no estudo da função quadrática. Assim como a mediação no grupo dos jogadores A5, A6, A7 e A8 aconteceram também nos demais grupos, nos quais a visualização, através da representação gráfica das funções e da exploração de ideias matemáticas, favoreceu a construção do conhecimento matemático a respeito da função quadrática.

A representação gráfica influência significativamente na compreensão das características de uma função quadrática, no entanto, é necessário deixar claro aos alunos que essa função é definida nos números reais e que não podemos compreender o limite da função pela representação do gráfico.

O conteúdo de função precisa ser desenvolvido por meio das múltiplas representações, proporcionando ao aluno a compreensão em vários contextos, desde a representação gráfica e algébrica como foi desenvolvida através do jogo Enigma de Funções até as representações tabular e verbal, presentes na resolução das situações-problema.

Em seguida, discutimos com os alunos ideias matemática de funções quadrática, utilizando o próprio material do jogo. Cada representação expressa a mesma ideia de função, possibilitando apenas um olhar diferente.

Ao caminhar pela sala de aula, entre os grupos de jogadores, observamos a equipe 03, e sem que eles pedissem ajuda, começamos a interagir a fim de conduzir os alunos a analisarem as diferentes funções em sua forma gráfica e algébrica.

A9 e A10 fizeram a seguinte pergunta aos seus oponentes: A parábola tem concavidade voltada para cima?

A11 e A12: Sim.

P: Como vocês determinam a concavidade da função se olharem apenas para a função quadrática, caso não tivessem o gráfico?

Os alunos observaram as cartas na sua forma gráfica e algébrica por um tempo, enquanto isso, a equipe analisou melhor a questão, e só depois voltamos à discussão.

A9 e A10: Ao observar os gráficos, acho que deve ser determinado ao construir o gráfico, não tem como saber sem antes ter o gráfico definido.

A11 e A12: Depende do valor de a professora? Lembro-me do ensino fundamental quando estudei, o valor de a pode ser positivo ou negativo.

P: Vamos observar nos gráficos aqui.

P: Respondendo à dupla A9 e A10: Quando construímos o gráfico atribuindo valores na tabela como já fizemos com a função afim, fica claro perceber a concavidade na função quadrática, porque a união dos pontos define o gráfico. Mas é possível dizer se a concavidade está voltada para cima ou para baixo observando o valor de <u>*a*</u> *na função como disse os colegas A11 e A12, se* <u>*a*</u> *< 0, ou seja, negativo, a concavidade é voltada para baixo, já se* <u>*a*</u> *> 0, ou seja, positivo, a concavidade é voltada para cima.*

A9 e A10: Mas o que é <u>*a*</u>*?*

P: Alguém sabe responder?

A11 e A12: Assim na função afim, <u>*a*</u> *é o número que está com x. E quando* <u>*a*</u> *é positivo, a função é crescente; e quando* <u>*a*</u> *é negativo, a função é decrescente.*

P: Certo. Então a função quadrática é definida com $ax^2 + bx + c = 0$*, em que* <u>*a*</u>*,* <u>*b*</u> *e* <u>*c*</u> *são coeficientes pertencentes aos reais e* <u>*a*</u> *≠ 0. Assim* <u>*a*</u> *é o coeficiente de* x^2 *e o valor de a define a concavidade da parábola.*

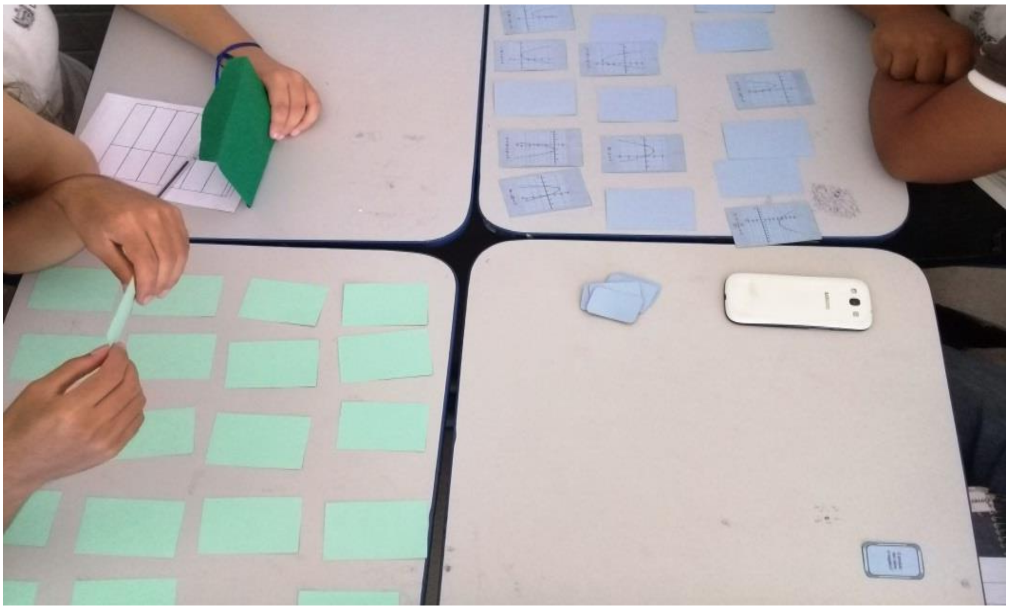
<u>Comentário</u>: O jogo Enigma de Funções, por meio da exploração, permite a compreensão no estudo da função quadrática por incentivar o aluno a participar dos questionamentos. Em um processo de resolução das perguntas definida pelo jogo, ele se sente aberto às discussões porque está em um grupo menor, facilita a sua interação e, consequentemente, fica à vontade para resolver o problema do jogo, compreendendo as ideias matemáticas que estão sendo trocadas entre os participantes.

Nesse contexto de jogo, os conhecimentos vão sendo trabalhados a partir do que o aluno já sabe, já entende por meio do seu conhecimento prévio e que utiliza para construir novas ideias na interação com os colegas e o professora pesquisadora.

Os alunos buscam suas estratégias de jogo, assim como utilizam sua criatividade a fim de realizarem uma melhor partida de jogo, seja ganhando ou dificultando a vitória dos seus oponentes.

O jogo dispõe de cartas com as funções na forma gráfica e algébrica, cartas-pergunta e o cartazete como material de apoio, entretanto, as duplas A11 e A12 que escolheram a carta com a função, conforme destacamos na figura 05 a seguir, preferiram não utilizar o cartazete para responder às perguntas, mas, virar todas as carta da mesa e ficar apenas com a carta que teria sido escolhida, conforme justificaram os jogadores.

Figura 05: Os jogadores utilizando suas estratégias no jogo.



Fonte: Registrado pela autora.

P: Por que as cartas na cor verde estão viradas?

A11 e A12: Resolvemos jogar dessa forma, porque, colocando as cartas com a função para cima e retirando apenas aquela que foi escolhida fica fácil para os colegas encontrarem a função que escolhemos, já que eles têm as mesmas cartas das funções. Para utilizar o cartazete, às vezes eles podem ver e lá também não tem a função na forma algébrica, então preferimos assim.

P: Certo, mas desde que seja um acordo entre todos da equipe.

Como apresentamos na figura 05, cada grupo tem a sua forma de entender o jogo, e a liberdade de utilizar certa criatividade ou estratégia deve ser respeitada, quando todos do grupo estão de acordo. E ao serem questionados por essa mudança, eles conseguem explicar a regra do jogo e que a alteração na regra está em comum acordo com os demais jogadores.

Isso é o que torna a dinâmica no jogo atrativa aos participantes e de fato o que motiva a realizá-la. Finalizando esse primeiro momento do jogo, os alunos tiveram uma compreensão do que seria o jogo e qual trabalho seria realizado a partir dele.

Entretanto, não foi o suficiente, assim já estava definido no nosso planejamento outros encontros para aprofundar mais as estratégias de jogo e situações-problema que devem ser discutidos a partir do jogo. Segundo Smole, Diniz, Pessoa e Ishihara (2008, p.23), o jogo permite ao aluno, “(...) enquanto joga, apropriar-se de estratégias, compreender as regras, aprimorar o raciocínio, aperfeiçoar a linguagem e aprofundar-se nos problemas que o jogo apresenta”.

Nessa atividade com o jogo Enigma de Funções, os alunos trabalharam a primeira ideia sobre o conceito de função. Estudamos, também, a partir dos gráficos, os pontos de x, y que definem o vértice e os pontos de máximo e mínimo, a terceira ideia, que é a família de função quadrática, e a quinta ideia, que é o uso das representações gráfica e algébrica.

5.1.2. Encontro 02

Aulas 03 e 04 (04/09/2017)

<u>Conteúdo desenvolvido</u>: determinar o valor máximo de uma função, o vértice da parábola e analisar os coeficientes das funções quadráticas nas cartas do jogo Enigma de função.

<u>Recursos:</u> situação-problema e cartas do jogo Enigma de Funções.

No planejamento, preparamos a aula do nosso segundo encontro com a metodologia do jogo Enigma de Funções e situação-problema. Inicialmente, exploramos a função quadrática, definida por meio de uma situação-problema. Discutimos a sua formação algébrica definindo os seus coeficientes e a relação entre a representação gráfica e algébrica da função.

Com base na ideia de Silva (2013), para que o aluno possa chegar à compreensão do conceito de função não se deve necessariamente partir de uma definição formal.

> (...) porém, para isso acontecer, faz-se necessário partirmos da ideia intuitiva através de situações de contexto real ou mesmo o padrão concreto que possa favorecer o interesse pela busca de regularidades e leis através do desenvolvimento do raciocínio matemático e, somente no final do processo, poder sistematizar esse conhecimento (SILVA, 2013, p. 56).

Nesse contexto, procuramos apresentar a função quadrática na sua forma algébrica por meio de uma situação-problema e a partir dela discutir características importantes como os seus coeficientes e o valor máximo e mínimo.

01.Situação-problema: Uma pequena fábrica vende seus bonés em pacotes com quantidades de unidades variadas. O lucro obtido é dado pela expressão $L(x) = -x^2 + 12x - 20$, onde x representa a quantidade de bonés contidos no pacote. A empresa pretende fazer um único tipo de empacotamento, obtendo um lucro máximo. Para obter o lucro máximo nas vendas, os pacotes devem conter uma quantidade de bonés igual a:

a) 4 b) 6 c) 9 d) 10 e) 14

(retirada do ENEM PPL, 2013)

Ao identificar a função quadrática no problema $L(x) = -x^2 + 12x - 20$, antes de resolver a questão sobre valor máximo, iniciamos explorando a função quadrática na sua forma algébrica $ax^2 + bx + c = 0$, sendo a, b e c coeficientes dos números reais com $a \neq 0$. Em seguida, solicitamos aos alunos a determinar os coeficientes da função que representa o lucro de vendas de bonés L(x).

Ao iniciar as intervenções, perguntamos se ao determinar os coeficientes tinham descoberto algo sobre a função quadrática.

A1: Professora essa função tem o gráfico como as outras funções?

P: Sim, a função quadrática tem a sua representação gráfica determinada dentro dos números reais, porém, precisamos compreender o problema.

A2: O valor de a é negativo e quando isso acontece o gráfico é voltado para baixo.

P: Certo, mas e os demais coeficientes?

A2: Não importa, só precisa saber do a.

P: O coeficiente a determina apenas a concavidade da parábola, mas os outros coeficientes também têm suas representações no gráfico.

Ao determinar os coeficientes, solicitamos uma nova leitura do problema para tentarmos resolvê-lo. Durante o momento de leitura, percebemos que uns alunos têm o compromisso de realmente ler o problema, outros não levam tão a sério. Entretanto, a exploração foi iniciada quando perguntamos: o que estava propondo o problema? Prevalecendo por alguns minutos o silêncio. Após várias indagações da professora pesquisadora, a troca de informações começou a acontecer.

A10: Quer saber o valor máximo.

P: Valor ou lucro?

A10: Acho que é o lucro.

A1:Como a é negativo, a parábola está para baixo e assim tem o valor máximo.

P: E o que indica o valor máximo?

A2: È o vértice no gráfico, nessa questão aí eu não sei.

P: Alguém sabe como encontrar o vértice. (silêncio geral). Como o a < 0, a parábola tem um ponto de máximo que é o vértice da função, cujas coordenadas são (Xv, Yv), onde o valor máximo é determinado pelo valor do Yv.

Como as coordenadas do vértice só tinham sido discutidas nos gráficos por duas cartas do jogo Enigma de Função apresentadas e discutidas nos grupo entre alunos e a professora pesquisadora. Assim na situação-problema para determinar o vértice por meio da representação algébrica, procuramos apresentar na lousa a expressão matemática que define as coordenadas do vértice, sendo: $X_v = \frac{-b}{2a}$ e $Y_v = \frac{-\Delta}{4a}$.

Comentário: Conduzindo a exploração, solicitamos que os próprios alunos encontrasse o vértice da função. A dúvida nesse momento foi sobre o Δ, onde muitos alunos não se lembravam da resolução de equação do 2° grau, outros conseguiram resolver por outro caminho, encontrando o valor de $x_v = \frac{-b}{2a}$ e depois substituíram na lei $y = ax^2 + bx + c$.

Ao caminharmos na sala de aula observando os grupos, percebemos que alguns alunos estavam com dificuldades nas operações matemáticas. Como os alunos estavam trabalhando em grupo e a pedido da professora pesquisadora cada um teria que determinar o ponto máximo da função, as discussões foram acontecendo e, de forma compartilhada, a resolução do problema.

Continuando com a resolução, procuramos entender qual o lucro máximo da fabrica?

A1: Professora, é o valor de x ou o de y?

A5: É o valor de x que as alternativas só tem 6 como resposta.

P: Antes de analisar as alternativas vamos entender o que representa a quantidade de bonés (silêncio total).

A11: É o x.

P: E o que é o lucro?

A15: L(x) = y

P: E agora, o que vocês acham?

A5: É o x = 6

A10: Que só terá o lucro máximo se o $x = 6$.

P: Exatamente. O empacotamento de bonés deve ter quantidade 6 para que se tenha o lucro máximo. Alterativa b.

P: E como encontraremos agora o lucro máximo dessa função?

A: Professora, já encontramos a resposta da questão.

P: Sim, agora vamos pensar em como calcular o lucro máximo, porque só encontramos a quantidade máxima de boné.

A11:Nesse caso precisamos encontrar o L(x) que é o y para $x = 6$?

P: Muito bem, como poderemos resolver essa questão?

A5: Calculando o Yv = $\frac{-\Delta}{4a}$, como encontramos o Δ?

P: Para calcular o valor do Δ em uma função quadrática consideramos o $L(x) = 0$ e teremos uma equação do 2°grau, quem se lembra da resolução de uma equação do 2° grau?

A1: Então fica assim: $- x^2 + 12 x – 20 = 0$

P: Sim, agora determine os coeficientes da equação do 2° grau.

A2: $a =1$, $b = 12$ e $c = - 20$.

P: O coeficiente a é positivo ou negativo?

A2: $a = -1$

P: Quem sabe a expressão do discriminante Δ?

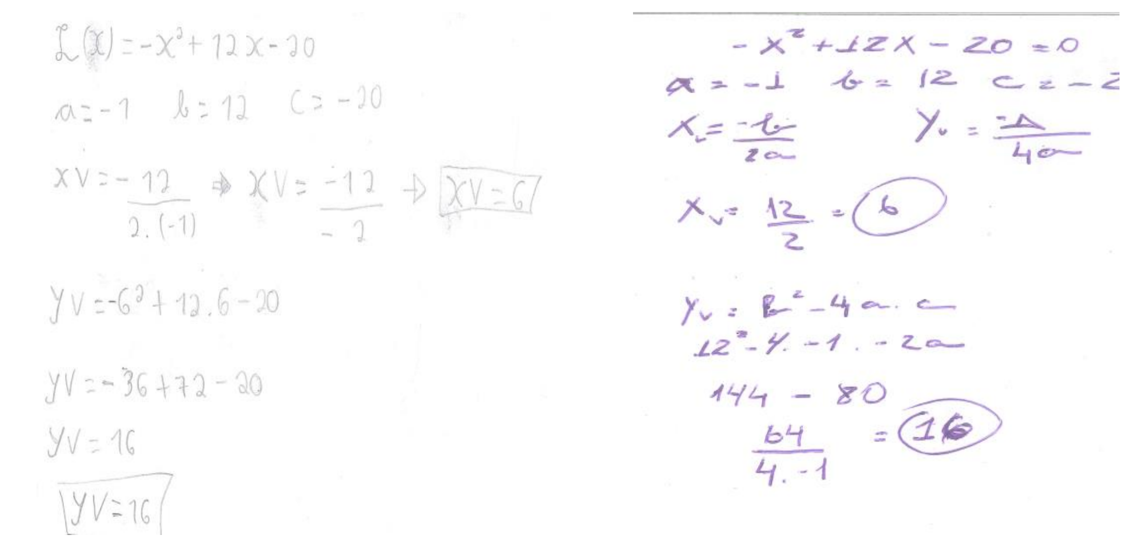
A15: É $b^2 – 4 .a.c$, é esse professora.

P: Muito bem é sim, agora vamos responder e determinar o lucro máximo?

As discussões possibilitaram a compreensão do conhecimento de uma característica importante da família de função quadrática, que é o ponto de máximo, assim como a revisão do discriminante de uma equação do 2° grau, bem comum à problemática que conduziu os alunos a participarem realizando perguntas coletivas ou em discussões internas entre os seus grupos.

Em seguida, apresentamos na figura 06, a resolução de dois alunos utilizando métodos diferentes: a aluna A11 encontrou o valor de L(x) substituindo x = 6, o aluno A15 resolveu o discriminante da equação do 2° grau e encontrou a expressão do Yv.

Figura 06: Resposta da situação-problema 01.



Resposta da aluna A11 — Resposta do aluno A15

Fonte: Registrado pela autora.

Ao término das intervenções deixamos que os alunos em seus grupos resolvessem a problematização sobre o lucro máximo da fábrica, e ficamos acompanhando os grupos apenas observando as suas resoluções e diálogos. Percebemos algumas dificuldades que alguns alunos tiveram em operações matemática, como, por exemplo, a potenciação e o jogo do sinal.

Continuamos com essa questão na construção do gráfico de uma função quadrática, explorando outras ideias matemáticas.

No segundo momento da aula entregamos as cartas com as funções na sua forma gráfica e algébrica, para os alunos determinarem os coeficientes em três cartas e analisarem as diferenças entre as representações gráfica e algébrica.

Ao iniciarem com a escolha das cartas, eles perceberam a diferença entre as funções quadráticas completas e incompletas. No entanto, voltando à definição da função quadrática na sua forma algébrica, em que $F(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e c sendo números reais e $a \neq 0$, continuamos com alguns questionamentos:

A6: Porque a ≠ 0?

P: O que identifica uma função ser quadrática?

A11: O expoente 2, assim como a função afim o expoente 1.

P: E se a = 0?

A11:É o mesmo caso da função afim, se o a for zero, deixa de ser afim.

Continuando com a exploração, perguntamos se todos concordavam com o colega e, no caso de a = 0, que outra função poderia ter? A professora pesquisadora fez a simulação na lousa substituindo o coeficiente a pelo 0 na expressão geral da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ e, assim, os alunos compreenderam que, se a for 0 o expoente 2 irá ser nulo e a função deixa de ser do 2° grau, passando a ser uma função afim em que o maior expoente é 1.

Já os demais coeficientes b e c nas funções quadráticas podem ser zero, definindo-as como função quadrática incompleta. E quando b e c são diferentes de zero definindo como função completa.

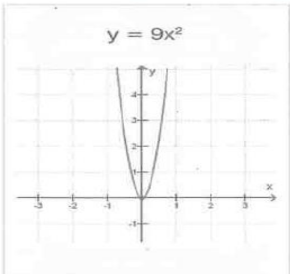
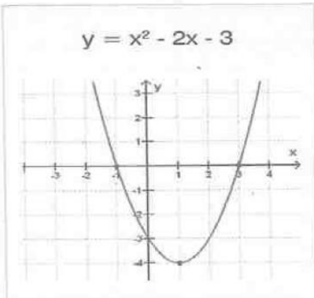
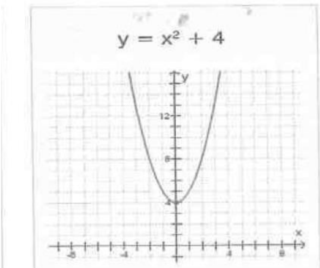
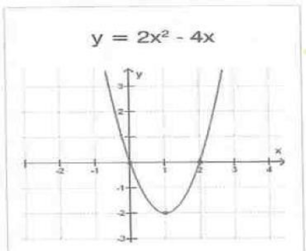
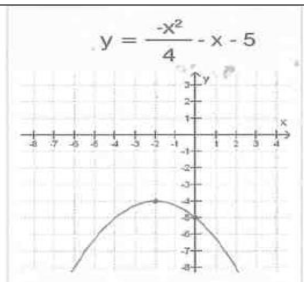
Ao analisar as cartas com a função na forma gráfica e algébrica, solicitamos aos grupos que determinassem os coeficientes da função e verificassem alguma similaridade entre eles e o respectivo gráfico, como apresentado pelo Quadro 05.

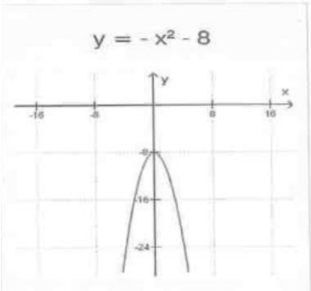
Em processo de análise e exploração das várias funções quadráticas apresentadas nas cartas do jogo e na sua representação gráfica e algébrica, verificamos algumas características que acontecem com os mesmos tipos de funções, por exemplo: as funções quadráticas incompletas do tipo $F(x) = ax^2 + bx$, $F(x) = ax^2$ e $F(x) = ax^2 + c$, assim como a função quadrática completa $F(x) = ax^2 + bx + c$.

Ao observar nos grupos os registros que estavam sendo feito das análises das funções quadrática percebemos algumas dificuldades na linguagem matemática e em compreensões não bem definidas sobre os coeficientes das funções quadrática analisadas. Assim destacamos no Quadro 05 as transcrições dessas análises para uma melhor compreensão ao leitor.

Entretanto, cada grupo fez a análise em três cartas com as funções completas e incompletas, dentre as quais apresentamos apenas uma das análises de alguns grupos. Nesse contexto, a mediação esteve focada nas compreensões dos alunos sobre os coeficientes da função quadrática, de forma coletiva, entre os grupos e a professora pesquisadora.

Quadro 05: Análise das equipes sobre os coeficientes das funções quadráticas.

Equipe	Carta do jogo	Coeficientes a	Coeficiente b	Coeficiente c
01	 *Função incompleta*	*a = 9, determina a* ***concavidade da parábola*** *voltada para cima*	*b = 0, o gráfico* ***passa*** *pelo ponto de origem*	*c = 0 o gráfico* ***passa*** *pelo ponto de origem*
02	 *Função completa*	*a = 1, valor positivo,* ***concavidade*** *voltada para cima*	*b=-2*	*c = -3,* ***ponto que o gráfico toca o eixo y*** *(0, -3)*
03	 *Função incompleta*	*a = 1, a* ***abertura*** *está para cima*	*b = 0, o gráfico não* ***toca o eixo x****, e o vértice está sobre o y*	*c =4, o y do vértice é 4, onde no* ***gráfico toca o eixo y***
04	 *Função incompleta*	*a = 2, positivo* ***concavidade*** *voltada para cima*	*b = - 4*	*c = 0.* ***Passa*** *pelo ponto (0,0)*
05	 *Função completa*	*a =* $\frac{-1}{4}$*, determina a* ***concavidade*** *da parábola para baixo.*	*b = -1*	*c = -5* .

06	 *Função incompleta*	*a = - 1, valor negativo,* ***concavidade*** *para baixo*	*b= 0, gráfico não* ***toca*** *o eixo das abscissas.*	*c = - 8, ponto que o gráfico* ***toca o eixo y*** *(0, - 8) é o vértice.*

Fonte: elaborado pela autora.

Destacamos no Quadro 05, a análise dos alunos sobre as várias funções com a representação algébrica e gráfica, das quais puderam visualizar e diferenciar entre os gráficos os valores dos coeficientes e suas respectivas similaridades em cada tipo de função.

Foram evidenciadas nos registros dos alunos dificuldades com a linguagem matemática, entretanto numa dinâmica participativa onde, todos os grupos estavam envolvidos realizamos algumas correções na linguagem compreendida pelos alunos como: “abertura” (concavidade da parábola), “ponto do eixo x”(coordenada do eixo x ou eixo y), “toca, corta” (o gráfico intercepta o eixo x) entre outros termos do estudo da função que foram sendo compreendidas ao longo das aulas.

Em seguida, pedimos que cada equipe, apresentasse a função quadrática e determinasse a análise realizada nos coeficientes dessa função. Durante as apresentações de cada equipe, percebemos a participação ativa dos alunos envolvidos, pois todos os grupos apresentaram uma função, dentro das suas compreensões.

Contudo, ao observarmos toda a atividade, percebemos que as cartas do próprio jogo, conduziram os alunos a de forma equivocada compreender que se o coeficiente b = 0 o gráfico não intercepta o eixo x como está descrito pelas equipes 03 e 06 no Quadro 05.

Assim, a mediação foi direcionada a esclarecer que no jogo Enigma de função, só tínhamos duas funções quadráticas em que o b = 0 e c ≠ 0, e que o gráfico das respectivas funções não intercepta o eixo da abscissa. Porém, explicamos aos alunos que isso não acontece em todas as funções quadráticas em que o b = 0. Ao perceber na analise das cartas tal compreensão, apresentamos exemplos de outras funções quadráticas que melhor definiram o estudo do coeficiente b = 0.

Apresentamos na lousa, o gráfico da função quadrática $y = x^2 - 4$ (não faz parte das cartas do jogo Enigma de Função) que tem as raízes reais e diferentes por ter $\Delta > 0$ e nesse caso o gráfico da função intercepta o eixo x nas raízes x' = -2 e x" = 2. Contudo, na função quadrática em que $b = 0$ e $c \neq 0$, o vértice estará sobre o eixo y.

Já no caso de $b = 0$ e $c = 0$,como destacou o grupo 01, o gráfico da função sempre intercepta o eixo x no ponto (0,0).

A atividade potencializou a compreensão dos alunos com relação a exploração dos coeficientes, pois na mediação a professora pesquisadora percebeu as compreensões equivocadas que os alunos estavam construído específicas a duas funções quadrática presentes nas cartas do jogo e num processo de exploração foi sendo esclarecidas as ideias sobre os coeficientes de uma função quadrática.

Abordamos na resolução desse problema a primeira grande ideia para o desenvolvimento do conceito de função que estava presente em toda a atividade, com a terceira e a quinta ideia desenvolvidas por meio das representações algébrica, gráfica e numérica.

5.1.3 ENCONTRO 03

Aulas 05 e 06 (11/09/2017)

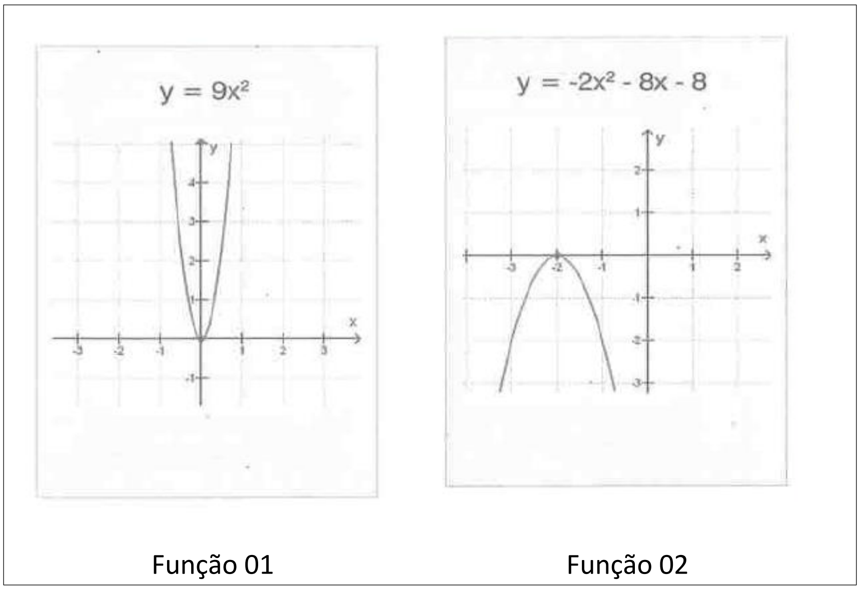
<u>Conteúdos desenvolvidos:</u> Exploração das características das funções quadráticas visualizadas através das cartas com representações gráficas e algébricas, problematizando e explorando as várias perguntas que fazem parte do jogo.

<u>Recursos:</u> Jogo Enigma de Funções

Nesse encontro, propomos uma dinâmica diferente com o material do jogo, solicitamos a formação dos grupos, seguindo as mesmas orientações do encontro 01 em seguida, entregamos o material. Ao estarem com o material em mãos e organizados sobre a mesa, apresentamos a seguinte dinâmica, todos os grupos realizariam perguntas selecionadas das cartas-perguntas do jogo a professora-pesquisadora.

As respostas seriam dadas aos grupos com base nos dois gráficos do jogo expostos na lousa, visível a todos da sala, porque numa exploração coletiva responderíamos as perguntas e socializaríamos o conhecimento sobre a função quadrática. Como destacamos na figura 07 a seguir.

Figura 07: Explorando cartas de função quadrática.



Fonte: Elaborado pela autora

As respostas são analisadas com base, nas funções 01 e 02 como destacamos na figura 07.

A equipe 01 fez a seguinte pergunta: f(1) é zero?

P: Respondemos a pergunta com a seguinte questão: O que vocês entendem por f(1)?

A4: É o x = 1.

P: Alguém discorda?

P: (Todos em silêncio). Certo, e se f(1) = 0, como entendemos, observando os gráficos?

A3: Não consigo entender.

A2: Será que é quando o y é zero?

P: Sim, mas como determinamos esse par ordenado?

A8: (1, 0)

P: Nos gráficos (função 01 e 02) encontramos algum ponto assim?

A1: Sim, é só marcar.

P: Mas o gráfico já é formado por todos os pontos que são definidos pela função.

A1: Ah, tem que estar definido pelo gráfico.

P: Se o f(1) = 0 o gráfico terá que passar no ponto (1, 0). Agora responda, em algum dos gráficos temos o par ordenado (1,0)?

A1: Não.

A equipe 02 fez a seguinte pergunta: <u>f(0) é positivo?</u>

P: Respondemos com base nas funções 01 e 02 da figura 07. E agora essa está fácil, quem sabe responder?

A5: x = 0 e y é um numero positivo, mas para os gráficos acima a resposta é não.

A10: Fico em dúvida nessa questão, com relação ao gráfico da figura 01, pois quando o x = 0 ou y = 0, se considerar o 0 com valor positivo, a resposta é sim.

P: Muito bom. Mas no caso da figura 01, vamos considerar o zero como elemento neutro, ponto de origem do plano cartesiano, então, se fosse para encontrar a carta, seria necessário realizar outras perguntas. E se a pergunta fosse f(0) é negativo, a resposta também seria não?

P: Quais as funções em que o gráfico passa pelo ponto de origem no plano cartesiano?

A2: São todas essas funções (separando outras cartas do jogo com os gráficos).

P: Além de ter o ponto (0,0) em comum, que outra característica é possível perceber entre essas cartas com funções A2, que você separou?

A10: A diferença não está só no gráfico, mas na expressão na qual só aparece um ou dois números (coeficientes).

P: Alguém compreende o que a colega está afirmando.

A2: como na função 01 só temos o <u>a</u> e em outras cartas que separei que só tem <u>a</u> e <u>b</u>.

P: A função quadrática é definida pela expressão $ax^2 + bx + c = 0$*, onde <u>a</u>, <u>b</u> e <u>c</u> são números reais com* $a \neq 0$*. Quando a função é incompleta, do tipo* $f(x) = ax^2 + bx$ *ou do tipo* $f(x) = ax^2$*, o gráfico passa pela par ordenado (0, 0).*

A10: a função 01 é uma função incompleta, já a função 02 é uma função completa.

A equipe 03 fez a seguinte pergunta: <u>A soma das raízes é negativo?</u>

P: O que vocês entendem por raiz de uma função?

A17: É o mesmo da função afim, quando o gráfico toca o eixo x.

P: Certo, então quais as raízes da função 01 e da função 02?

A17:Na função 01 é o 0 e na função 02 é o -2.

P: Mas será que em cada função quadrática só tem mesmo uma raiz? Então, porque pedem a soma?

A12: Não, tem função que tem duas raízes.

P: Como podemos identificar as raízes de uma função?

A3: É só olhar no gráfico.

P: E se não tiver o gráfico?

A3: Não sei.

P: Quem se lembra da resolução de uma equação do 2° grau?

Nesse momento alguns alunos disseram que sabiam resolver uma equação do 2° grau, outros disseram que não se lembravam desse conteúdo, assim escrevemos a função algébrica 01 da figura 07 e explicamos novamente que, para encontrar a raiz de uma função na sua forma algébrica, fazemos f(x) = 0 e resolvemos a equação do 2° grau. Ao colocar a equação escrita na lousa, alguns alunos começaram dizendo que deveriam encontrar o valor de Δ e determinamos por alguns minutos que os grupos resolvessem a equação do 2° grau, a fim de verificar os valores determinados no gráfico.

<u>Comentário:</u> A visualização das cartas que apresenta várias funções na sua forma gráfica e algébrica permite ao aluno identificar propriedades de uma determinada função quadrática diferenciando-a de outras funções. Esse momento de diálogo coletivo foi bem participativo pela turma, propondo a liberdade de expressar suas opiniões e resoluções das questões direcionadas à busca de compreensão das características de uma função quadrada. Porém é fundamental a mediação e observação da professora pesquisadora nas atividades.

Procuramos inserir toda a turma na dinâmica, incentivando os estudantes a fazerem perguntas, a se envolverem no processo de aprendizagem e a compreender que a sua dúvida também pode ser a do seu colega, e nesse contexto de exploração o conhecimento de função quadrática foi sendo construído coletivamente.

Smole, Diniz, Pessoa e Ishihara (2008, p.14) afirmam que, “nessa perspectiva atitudes naturais do aluno que não encontram espaço no modelo tradicional de ensino de matemática, como é o caso da curiosidade e da confiança em suas próprias ideias, passam a ser valorizadas no processo investigativo”.

O jogo estimula a argumentação dos participantes, favorecendo até os mais inibidos, uma vez que eles discutem suas jogadas e observam a jogada do adversário. Todos os diálogos e troca de experiências relacionadas ao jogo ensinam de alguma forma os conteúdos de Matemática, mas, principalmente, tornam as pessoas capazes de buscar a sua própria aprendizagem. Seguimos com a dinâmica das perguntas realizadas pelos grupos.

A equipe 04 fez a seguinte pergunta: <u>A função é toda positiva?</u>

P: Respondemos a pergunta com a seguinte questão: Para que valores de x a função é positiva?

A14: Quando ela está no eixo positivo do plano.

P: Mas, qual eixo?

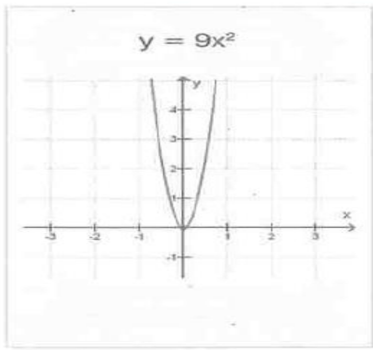
A16: Acho que deve ser nos dois ou seja no 1° quadrante.

Como já tínhamos discutido na aula passada na equipe desse aluno sobre uma carta pergunta que se referia ao vértice da função estar em algum dos quadrantes, o mesmo procurou socializar o conhecimento que foi assimilado, identificando o 1° quadrante do plano cartesiano como o positivo no eixo x e y e explicou rapidamente aos colegas na lousa.

P: Certo, o que o colega explicou foi identificar no plano cartesiano os quatro quadrantes, o que não quer dizer que a função só será positiva se o gráfico estiver no primeiro quadrante. A função ela pode ser toda positiva, mas também pode ter intervalos nos quais ela é positiva e intervalos em que é negativa, como também pode ser toda negativa.

Utilizamos as funções 01 e 02 que estão apresentadas na figura 07 para compreender o estudo do sinal de uma função quadrática. Realizamos um estudo no gráfico da função 01, na lousa para os alunos compreenderem a análise de uma função com relação aos valores de f(x).

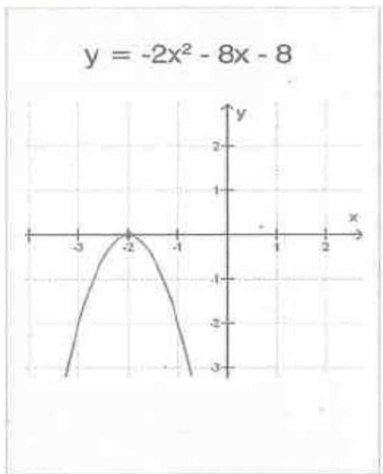
Figura 08: Estudo do sinal da função quadrática.

$F(x) = 9x^2$ V (0,0) Ponto mínimo (0,0) a = 9 assim a > 0 f(x) > 0 para x < 0 ou x > 0 f(x) = 0 para x = 0 $\nexists$ x ϵ R tal que f(x) < 0 Função toda positiva	 Função 01

Fonte: Elaborado pela autora.

Nesse ponto, destacamos na figura 08 o fato da função ser toda positiva, pois não existe f(x) < 0 e o a > 0, assim quem define o intervalo positivo ou negativo da função são os valores de f(x). Em seguida, propomos que as duplas realizassem o estudo do sinal da função 02, conforme destacamos na figura 09.

Figura 09: Registro da dupla A3 e A4 sobre o estudo do sinal da função

$y = -2x^2 - 8x - 8$ a = -2 → negativo, concavidade, voltada para baixo. V = (-2,0) ponto maximo (-2,0) Y = F(X) é menor que zero para todo x. A função é toda negativa.	 Função 02

Fonte: Registrado pela autora.

Ao caminharmos entre os grupos que estavam fazendo o estudo do sinal na função 02, percebemos a dificuldade que alguns dos alunos têm em identificar, por exemplo, o sinal de maior ou menor (< ou >), ao analisar o x = -2 da respectiva função, como o valor máximo da função e entender que o f(x) < 0, para qualquer valor de x, considerando a função como negativa. Como também sempre colocar o valor de a como negativo ou positivo e não como $a < 0$ ou $a > 0$. São pequenas dificuldade assim que precisam ser esclarecidas para que o aluno possa ir compreendendo melhor a linguagem Matemática.

Contudo a dupla A3 e A4 como apresentamos na figura 09, consegue analisar a função e descreve quando uma função é toda negativa, pois o $f(x) < 0$ para todos os valores de x, assim, podemos perceber que alguns alunos até compreendem quando a função é positiva ou não, porém apresentam dificuldade em descrever para quais valores de x a função é positiva ou negativa.

A atividade em grupo é considerada por Grando (2004) como exercício para o próprio autoconhecimento. Ao termino das análises feita pelos alunos apresentada na função 02 da figura 09, alguns alunos estavam analisando outras funções diferentes das que tinham sido expostas no quadro e nesse momento achamos melhor deixar que eles compreendessem o estudo do sinal da função e ficamos fazendo as mediações entre as equipes.

No encontro 03, as atividades com o jogo Enigma de Funções possibilitaram a exploração de três ideias essenciais, que são: o conceito e a família de função quadrática e as representações gráfica e algébrica. A quinta grande ideia essencial para o desenvolvimento do conceito de função estava presente na atividade por meio das representações gráfica e algébrica.

Assim, encerramos com esses momentos de discussões e jogadas coletiva, e ainda na segunda aula permitimos que eles realizassem as suas jogadas livremente em seus grupos.

5.1.4. ENCONTRO 04

Aula 07 e 08 (14/09/2017)

<u>Conteúdo desenvolvido</u>: Explorando através da situação-problema 01 a covariação, ou seja, o crescimento e decrescimento da função e a construção da representação tabular.

<u>Recursos:</u> Exploração do problema.

Continuando com a exploração da Situação-problema 01 apresentada no encontro 02, procuramos discutir algumas ideias de funções na representação tabular e gráfica com questões elaboradas pela professora pesquisadora.

Continuação da Situação-problema 01: Uma pequena fábrica vende seus bonés em pacotes com quantidades de unidades variadas. O lucro obtido é dado pela expressão $L(x) = - x^2 + 12 x – 20$, em que x representa a quantidade de bonés contidos no pacote. A empresa pretende fazer um único tipo de empacotamento, obtendo um lucro máximo.

a) Se empacotássemos sete bonés, qual seria o lucro?

b) O lucro é uma variável dependente ou independente nessa relação?

c) Represente a função algébrica por meio da representação tabular e em seguida esboce o gráfico dessa função.

(retirada e adaptada do ENEM PPL 2013).

Ao iniciar esse momento retomando a situação problema 01, os alunos começaram dizendo que já tínhamos respondido a essa questão, que a atividade estava sendo repetida. No entanto, explicamos a turma que o problema seria o mesmo, contudo discutiríamos outras ideias da função quadrática a partir dessa situação proposta. A fala dos alunos é justificada por eles desconhecerem o processo de exploração de uma situação-problema matemático.

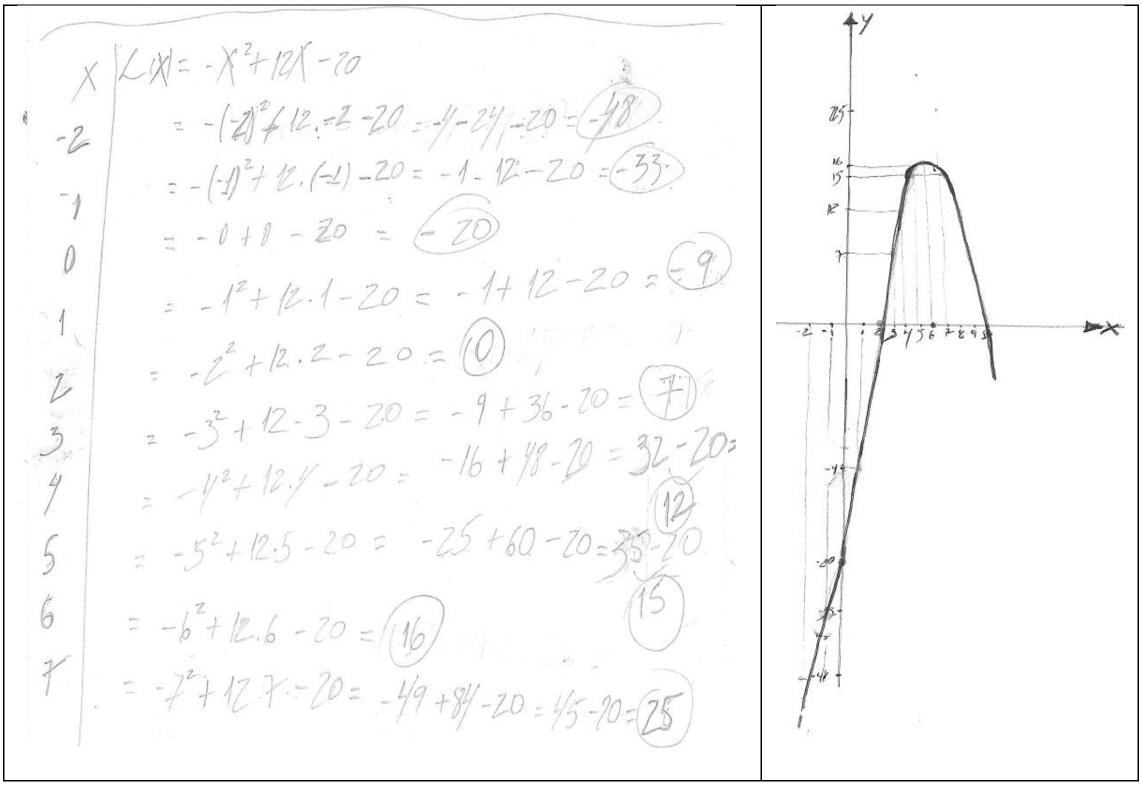
Como afirma Andrade (2017, p. 365), na exploração de problemas, a grande questão "é que o trabalho realizado não se limita apenas à busca da solução da tarefa proposta, podendo ir muito além dela". A intenção de retornar a essa mesma questão teve como proposito a exploração de outras situações da função que vão além da resposta sobre lucro máximo.

Iremos apresentar algumas resoluções realizadas pelas equipes, assim como questionamentos e problematizações realizadas no processo de resolução. Inicialmente, dialogamos com a turma, a fim de lembrar as ideias matemáticas que foram estudadas até aqui e que podiam contribuir na resolução das questões, como por exemplo, os coeficientes da função quadrática, o vértice que já foi determinado anteriormente, a concavidade da parábola, a ideia de lucro que também é necessária à compreensão da questão, assim como a própria definição da função quadrática. Enfim, esse momento foi importante para que os alunos pudessem analisar melhor cada alternativa e procurar o melhor caminho de resolução.

Lembramos, aqui, que a construção da tabela e, posteriormente, o esboço do gráfico já foram assuntos trabalhados na presente turma com o estudo da função afim. Compreendemos as diferentes características entre as famílias de funções, no entanto, a forma de organizar a tabela e de determinar os pontos no plano cartesiano é coincidente entre as famílias de funções.

Nessa situação problema, as duplas recorreram a diferentes resoluções, no entanto, algumas se voltaram para a construção do gráfico na letra c inicialmente e em seguida responderam às demais alternativas. Algumas duplas construíram o gráfico por meio da tabela, outras já procuraram construir o gráfico identificando as raízes da função e o vértice.

Figura 10: Resposta da dupla A1 e A2 referente à continuação da situação-problema 01.



Fonte: Registrado pela autora.

Comentário: Percebemos que os alunos, ao determinarem x = 7 cometeram um erro encontrando y = 25, no entanto sem perceber o erro no cálculo da tabela decidiram determinar os pontos encontrados no gráfico, ao construir o gráfico como já tinham determinado o x do vértice na questão anterior, perceberam que o maior valor que o y pode assumir é 16, sendo esse o valor máximo da função, assim a correção do y = 25 foi verificada na construção do gráfico da função.

Ao construírem o gráfico por meio da representação tabular como destacamos na figura 10, as duplas atribuíram valores negativos e positivos a x. Nessas condições, alguns dos alunos que construíram o gráfico utilizando a representação tabular não levaram em consideração o contexto do problema com relação à quantidade de bonés como valores de x.

Entretanto, outras duplas atribuíram valores a x até encontrarem uma das raízes e o vértice da função para determinar a representação tabular, em seguida utilizam o eixo de simetria que é determinado pelo vértice e encontraram a outra raiz da função. Ao serem questionados afirmaram:

> *A7 e A8: Ao encontrar uma raiz e o vértice da função, verificamos que a raiz era x = 2 e o vértice x = 6, então, a outra raiz seria x = 10, aí já determinamos logo.*

Compreender as funções através das suas representações tabular, algébrica e gráfica é condição para que os alunos de forma individual e coletiva, por meio de um trabalho cooperativo, possam construir e reformular seus pensamentos durante o processo de resolução de um problema matemático.

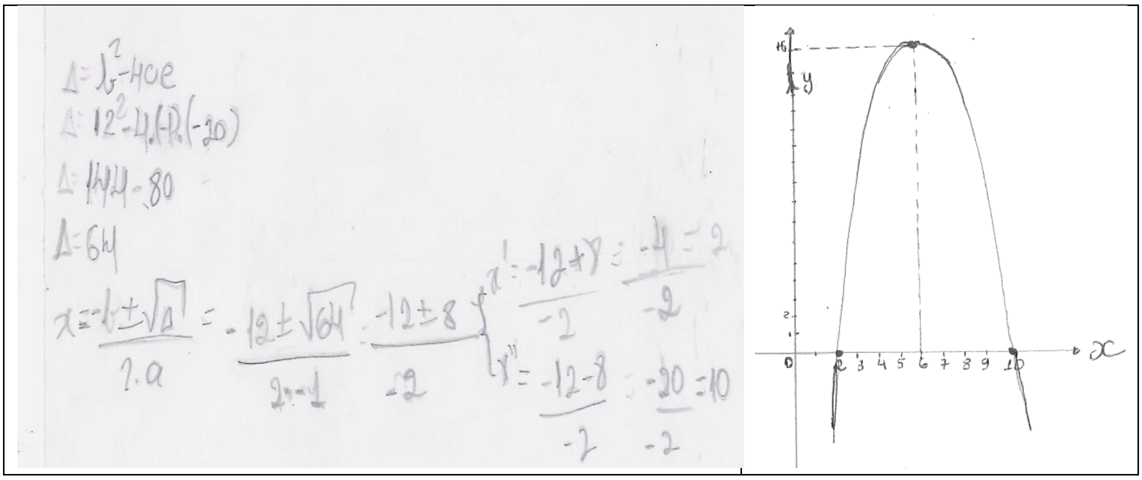
Ao construírem a tabela e em seguida o gráfico, os alunos analisaram a variação entre as grandezas lucro e quantidade, compreendendo a segunda grande ideia de função, que é a covariação.

Segundo Friedlander e Tabach (2001), citados por Silva (2013), cada uma dessas representações traz as suas vantagens e desvantagens, e, para que o potencial possa ser atingido, é necessário o uso combinado de todas as formas de representação de uma função. A compreensão da função é construída a partir da análise e estudo nas diferentes formas de representar a mesma função. As diferentes representações de uma mesma função se faz necessária por atender aos pensamentos e compreensões particulares de cada aluno.

Como podemos perceber a dupla A1 e A2 na figura 10, utilizou exclusivamente a representação tabular para construir o gráfico, já outros alunos, como A7 e A8, iniciaram a resolução da questão por meio da representação tabular, mas, ao encontrar uma das raízes e o vértice, recorreram à compreensão do eixo de simetria, perceberam que o valor do x do vértice é simétrico às raízes da função, definindo a outra raiz e a parábola.

Nesse contexto, procuramos perceber a capacidade que cada aluno tem de compreender e entender o estudo da função quadrática de forma cooperativa no sentido de assimilar as ideias compartilhadas entre eles.

Figura 11: Gráfico construído pela dupla A9 e A10.



Fonte: Registrado pela autora.

Os alunos A9 e A10, como mostra a figura 11, na resolução da questão, recorreram ao uso da representação algébrica, determinando as raízes da função, o vértice e o valor do coeficiente a, em seguida a construção do gráfico. Para alguns alunos, determinar através da representação algébrica os pontos principais do gráfico, permite uma visualização rápida da função. Em seguida, solicitamos que os alunos A9 e A10 apresentassem a representação tabular dessa função quadrática, na qual estudamos a covariação e taxa de variação.

Essa atividade foi realizada em grupo e teve como recurso apenas a exploração da situação-problema 01, não utilizaram as cartas do jogo como material de apoio. Destacamos, aqui, inicialmente, a inquietação de alguns alunos na resolução, pois pedia a professora pesquisadora para resolver o problema na lousa, ou que utilizassem o jogo ao invés de exploração a resolução do problema de forma coletiva.

Nesse contexto, analisamos que a resolução de problema ainda encontra-se distante da sala de aula, o aluno não está acostumado com a construção do pensamento matemático e consideram como algo difícil.

Em algumas equipes as discussões retomaram a resolução da questão inicial, sobre o lucro máximo, como mostra o diálogo abaixo:

EQ02: Professora, se já sabemos o que são o vértice e os coeficientes da função, assim como a concavidade da parábola, podemos logo resolver a letra c, construindo o gráfico da questão e depois resolvemos as questões anteriores, o que consideramos que, pelo gráfico, podemos dar essas respostas.

P: Bom, é possível resolver inicialmente a letra c. E as características que tem, são suficientes para a construção do gráfico? Não esquecendo da representação tabular.

EQ02: Estamos pensando em determinar as raízes da função, é o que está faltando para a construção do gráfico.

P: O que contribuiu para que vocês utilizassem esse método de resolução?

EQ03: Ah, por ter algumas informações que são importantes para o gráfico, e por não precisar necessariamente de determinar muitos valores de x sem que tenha muita importância para o gráfico.

EQ03: Assim como mostram as cartas do jogo, não é necessário determina outros valores de x que não seja o vértice, as raízes e a concavidade da parábola.

As EQ02 e EQ03 como destacaram os diálogos acima, assim como outras equipes que também decidiram resolver utilizando as ideias Matemática já compreendida anteriormente e só depois resolveram as demais questões, assim como a representação tabular. A EQ06 teve dificuldade em resolver a equação do 2° grau, para determinar as raízes e resolveu assim como a EQ01 construiu a tabela inicialmente.

> Comentário: Assim como a EQ01 destacadas na figura 10, outras equipes decidiram resolver o problema pela construção do gráfico e, em seguida, resolve as demais questões, entretanto, observando as resoluções, podemos analisar as dificuldades nas operações matemáticas. Assim, permitimos o uso da calculadora nesse processo de resolução por entender que o necessário nesse momento seria a compreensão das ideias essenciais da função quadrática, assim como o processo de resolução do problema, e que a calculadora permitia a agilidade dos cálculos, dando tempo ao pensamento matemático.

Andrade (1998) defende o uso da calculadora em todos os níveis de ensino e em todas as atividades em sala de aula, a fim de que, a mesma possa auxiliar a exploração dos conhecimentos matemáticos:

> A calculadora tem que ser pensada como uma ferramenta auxiliar, mediadora, de um processo de ensino-aprendizagem que valoriza a compreensão crítica e o fazer matemático como um todo. As atividades propostas aos alunos têm que valorizar um “fazer” matemático vivo, dinâmico e os alunos devem usar a calculadora para a exploração de ideias, conceitos e processos matemáticos (ANDRADE, 1998, p. 20).

Em outros grupos, os alunos acharam melhor resolver construindo a tabela e em seguida o gráfico da função.

P: Sabendo que a função quadrática é definida nos números reais, porém no problema sobre o empacotamento dos bonés quais os valores de x que definiram a representação gráfica da função?

EQ01: Professora, colocamos alguns valores, mas não foi possível determinar o gráfico, assim estamos colocando outros valores de x.

P:Quando o valor de x representa a quantidade de bonés, seria necessário determinar os valores de x positivos e negativos?

EQ03: Por isso que não consideramos valores negativos, pois o x é a quantidade de bonés.

P: Usando esse método de resolução é possível encontrar a resposta da letra a?

EQ01: Sim, é só calcular o valor de $x = 7$.

Inicialmente, os grupos procuraram ajudar uns aos outros compartilhando o mesmo método de resolução. No entanto, procuramos mediar esses grupos para que, pudessem compreender o processo de resolução que estavam utilizando.

Os grupos que optaram em iniciar com a representação tabular demoraram um pouco mais, já que eles iniciaram com valores negativos de x e para encontrar as raízes da função tiveram que calcular até $x=10$, que seria a segunda raiz da função. Entre as equipes que optaram por esse método de resolução, duas equipes não concluíram a construção do gráfico, mas conseguiram discutir as demais perguntas da questão, o que nos fez perceber que tinham compreendido a representação tabular.

As equipes que utilizaram inicialmente a representação por meio da tabela e que determinaram valores negativos a x, não tinham compreendido o problema, estavam preocupados em construir a tabela e o gráfico. No entanto não impedimos a resolução dos mesmos, deixamos que concluíssem as suas respostas e nas discussões eles perceberam que não havia necessidade de determinar valores negativos a x no contexto da situação-problema.

Ao término do esboço do gráfico e construção da tabela, discutimos a ideia de covariação entre as grandezas quantidades e lucro, destacando o crescimento e decrescimento da parábola.

P: Pessoal, ao término da construção do gráfico e resolução das questões anteriores, como percebemos o comportamento de uma parábola?

A2: Não conseguimos terminar a parábola, mas fomos de -2 ate o 7.

P: O que vocês observaram nesse percurso?(barulho entre as equipes)

A7: que o gráfico subiu até o 6 e desce em seguida.

A11: A parábola sobe e ao chegar no x = 6 ela faz a curva e desce após o valor de x = 6.

P: Todos conseguem perceber isso? Assim toda parábola tem um intervalo de crescimento e decrescimento, e isso é consequência da variação entre as duas grandezas, na qual chamamos de covariação. Vocês sabem quais as grandezas presentes nesse gráfico?

A8: X e Y

A9: Lucro é o y e quantidade é o x.

P: Certo. Assim determinamos a covariação da função, que é determinada pelo crescimento e decrescimento da função.

A7: Não entendi o que é covariação.

P: A covariação é a variação que acontece ao mesmo tempo entre as duas grandezas, seja no intervalo em que a função é crescente ou no intervalo em que é decrescente, no caso do gráfico o x e o y mudam juntos no percurso da parábola. E essa mudança é definida por uma taxa de variação entre os intervalos da parábola.

Por exemplo: no intervalo entre (2, 0) e (3, 7) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{7-0}{3-2} = 7$, *assim a variação seria de 7, o que se continuássemos fazendo com outros intervalos não seria o mesmo valor, com isso dizemos que a primeira variação não é constante quando trabalhamos com a função quadrática.*

Ao finalizar a construção das representações gráfica e algébrica da função, verificamos na lousa com toda a turma, a covariação e a taxa de variação que é a razão da variação entre os intervalos de f(x) e de x na função.

Os alunos perceberam que no intervalo de crescimento da função a variação é positiva, já no intervalo de decrescimento a variação é negativa, porém, em todos os intervalos a variação inicial não é constante.

A12: Essa função é diferente da função afim, lá ou é crescente ou é decrescente e aqui tem os dois.

P: Sim, a taxa de variação na função afim é constante.

Na resolução da atividade, os alunos trabalharam a quinta ideia essencial, representações de função, destacando as representações algébrica, numérica, gráfica e tabular. Ao explorar a tabela e a construção do gráfico, os alunos puderam observar a variação das grandezas e, dessa forma, trabalharam a segunda ideia essencial, covariação e taxa de variação.

5.1.5 ENCONTRO 05

Aula 09 e 10 (18/09/2017)

Conteúdo desenvolvido: Explorando através do jogo Enigma de Funções as características da função quadrática.

Recursos: Jogo Enigma de Funções.

Nesse quinto encontro de trabalho com a função quadrática, procuramos acompanhar detalhadamente as jogadas e, para isso, pedimos aos participantes que estavam tentando encontrar a carta da função escolhida que descrevessem as perguntas e respostas que conduziram ao encontrar a respectiva função.

Procuramos, ao longo da aula, deixar o jogo fluir entre as equipes, já que os alunos apresentavam uma compreensão melhor sobre as discussões nas jogadas, e a nossa mediação foi mais observar o andamento das resoluções.

A socialização presente no momento do jogo é o que proporciona o avanço significativo na compreensão do conhecimento de função quadrática, como afirma Grando (2004, p.26). “A socialização propiciada por tal atividade não pode ser negligenciada, na medida em que a criação e o cumprimento de regras envolvem o relacionar-se com o outro que pensa, age e cria estratégias diferenciadas".

O envolvimento da atividade em grupo proporciona ao aluno um olhar diferente, tanto na apresentação da sua jogada, como na observação e compreensão do jogo da dupla oponente. O conhecimento vai sendo construído a partir do diálogo e das discussões proporcionadas pelo jogo entre os participantes.

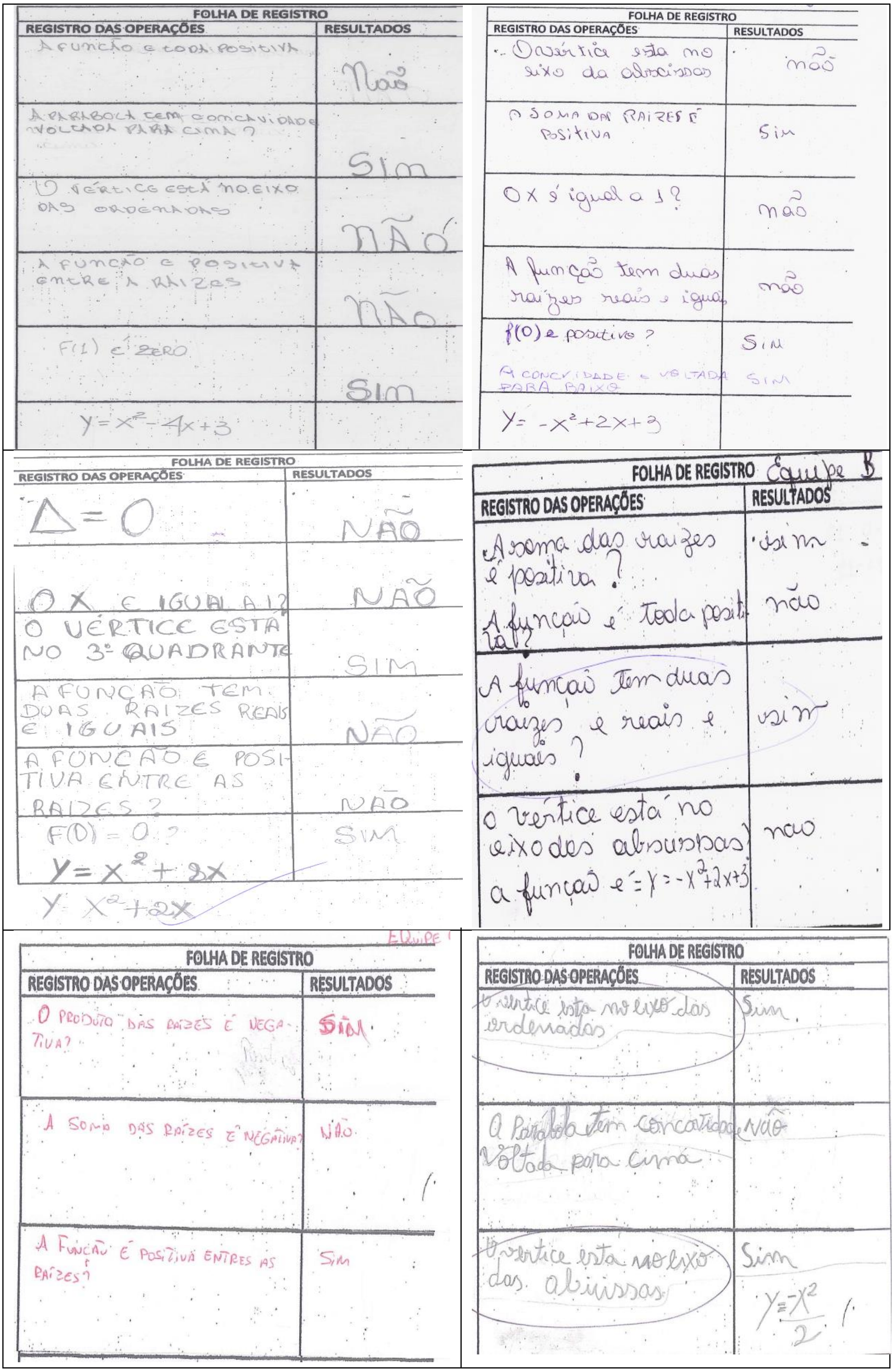
Na presente atividade com o jogo, os alunos trabalharam intuitivamente três ideias essenciais de função, sendo elas: conceito de função, representações e família de função. A terceira ideia essencial de função, a família de função, especificamente a função quadrática foi explorada no jogo por meio das propriedades da função, a partir da visualização gráfica e algébrica da função e as cartas-perguntas do jogo.

Nesse contexto, procuramos discutir por meio dos registros realizados pelos jogadores em cada partida, as suas construções, analise e correções dos erros. Assim, como destacam Macedo, Petty e Passos (2000), sobre a importância das intervenções nos momentos de jogo, a fim de valorizar a ação no jogo.

> A questão não está no material, mas no modo como ele é explorado. Pode-se dizer, portanto, que serve qualquer jogo, mas não de qualquer jeito. Para nós, jogar não é só divertimento, e ganhar não é só uma questão de sorte. Isso significa afirmar que, independentemente do jogo, a ação de joga por nós valorizada deve estar comprometida e coordenada tanto com as ações já realizadas como com as futuras, correspondendo a um conjunto de ações intencionais e integradas no sistema como um todo (MACEDO et al, 2000, p.24).

Destacamos na figura 12, os registros de algumas partidas do jogo em algumas equipes, nas quais direcionamos nossas mediações, contribuindo significativamente, tanto ao aluno para que reavaliasse a sua jogada, como para a professora-pesquisadora por tê-lo como recurso de mediação e utilizá-lo com fim na exploração das ideias matemática.

Figura 12: Registro em uma partida do jogo Enigma de Função.



FOLHA DE REGISTRO

REGISTRO DAS OPERAÇÕES	RESULTADOS
A FUNÇÃO É TODA POSITIVA	Não
A PARÁBOLA TEM CONCAVIDADE VOLTADA PARA CIMA?	Sim
O VÉRTICE ESTÁ NO EIXO DAS ORDENADAS	NÃO
A FUNÇÃO É POSITIVA ENTRE A RAIZES	NÃO
F(1) É ZERO	Sim
$y=x^2-4x+3$	

FOLHA DE REGISTRO

REGISTRO DAS OPERAÇÕES	RESULTADOS
O vértice está no eixo da abscissas	não
A SOMA DAS RAIZES É POSITIVA	Sim
O x é igual a 1?	não
A função tem duas raízes reais e iguais	não
f(0) é positivo?	SIM
A CONCAVIDADE É VOLTADA PARA BAIXO	SIM
$y=-x^2+2x+3$	

FOLHA DE REGISTRO

REGISTRO DAS OPERAÇÕES	RESULTADOS
$\Delta = 0$	NÃO
O X É IGUAL A 1?	NÃO
O VÉRTICE ESTÁ NO 3º QUADRANTE	SIM
A FUNÇÃO TEM DUAS RAIZES REAIS E IGUAIS	NÃO
A FUNÇÃO É POSITIVA ENTRE AS RAIZES?	NÃO
F(0) = 0?	SIM
$y=x^2+2x$	

$y=x^2+2x$

FOLHA DE REGISTRO Equipe B

REGISTRO DAS OPERAÇÕES	RESULTADOS
A soma das raízes é positiva?	sim
A função é toda positiva?	não
A função tem duas raízes e reais e iguais?	sim
o vértice está no eixo das abscissas?	não
a função é = $y=-x^2+2x+3$	

EQUIPE 1

FOLHA DE REGISTRO

REGISTRO DAS OPERAÇÕES	RESULTADOS
O PRODUTO DAS RAÍZES É NEGATIVA?	SIM
A SOMA DAS RAÍZES É NEGATIVA?	NÃO
A FUNÇÃO É POSITIVA ENTRES AS RAÍZES?	SIM

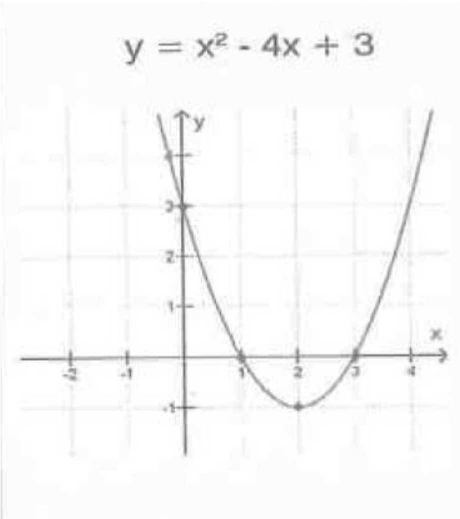
FOLHA DE REGISTRO

REGISTRO DAS OPERAÇÕES	RESULTADOS
O vértice está no eixo das ordenadas	Sim
A Parábola tem concavidade voltada para cima	Não
O vértice está no eixo das abscissas	Sim
	$y=\frac{-x^2}{2}$

Fonte: Registrado pela autora.

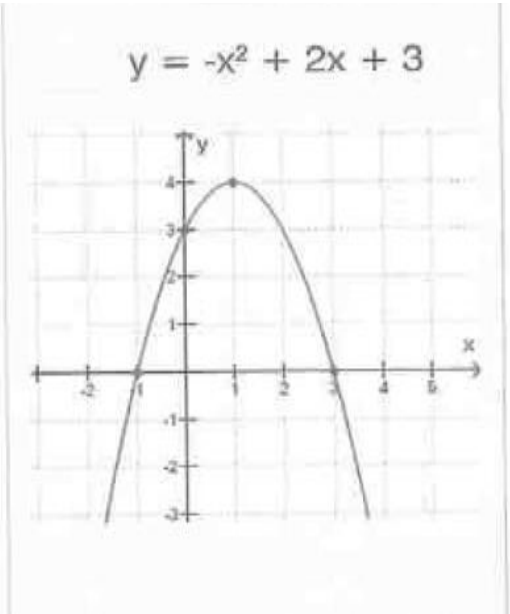
Apresentamos em seguida a descrição dos alunos em suas jogadas, permitindo uma maior clareza ao leitor, no sentido de perceber como o aluno compreendeu o estudo da função quadrática. Destacamos nas figuras 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 e 20 algumas partidas de jogo das equipes e alguns questionamentos necessários.

Figura 13: Registro de uma partida do jogo Enigma de Funções da equipe 01.

Partida de jogo da Equipe 01	PERGUNTAS/ RESPOSTAS
	1.A função é toda positiva?
	Não.
	2.A parábola tem concavidade voltada para cima?
	Sim.
	3. O vértice está no eixo das ordenadas?
	Não.
	4. A função é positiva entre as raízes?
	Não.
	5.F(1) é zero? Sim.

Fonte: Registrado pela autora.

Figura 14: Registro de uma partida do jogo Enigma de Funções da equipe 02.

Partida do jogo da equipe 02	PERGUNTAS/ RESPOSTAS
	1. O vértice está no eixo das abscissas?
	Não.
	2. A soma das raízes é positiva?
	Sim.
	3. O x é igual a 1?
	Não.
	4. A função tem duas raízes reais e iguais?
	Não.
	5. F(0) é positiva?
	Sim.
	6. A parábola tem concavidade voltada para cima?
	Não

Fonte: Registrado pela autora.

Em cada figura segue perguntas e respostas realizadas por ambas as duplas e a carta escolhida para a partida do jogo, no entanto evidenciamos nas discussões, que nem sempre a carta escolhida foi encontrada pela dupla. Momento em que a mediação da professora pesquisadora analisa junto aos jogadores os erros, possibilitando as correções e a construção do conhecimento da função quadrática.

Inicialmente, destacamos a partida do jogo das equipes 01 e 02 nas figuras 13 e 14, para compreendermos a aprendizagem dos alunos do conteúdo da função quadrática na dinâmica com o jogo Enigma de Funções. Observamos, durante o desenvolvimento da atividade, que os grupos discutiram as ideias e características da função quadrática, tanto no momento de responder às perguntas como na eliminação das cartas, a fim de encontrar a função escolhida, assim pudemos analisar como os mesmos compartilhavam e apropriavam-se de tais conhecimentos matemáticos.

Por meio de uma metodologia interativa, proporcionada pelo jogo Enigma de Funções, introduzimos o conteúdo de função quadrática, a fim de facilitar a compreensão através da analise feita pelos alunos na representação gráfica e algébrica da função quadrática, identificando nas cartas perguntas as características de cada uma.

As partidas de jogo das equipes apresentavam as perguntas sorteadas e as respectivas respostas usando apenas *sim* ou *não*. Nessa dinâmica, presenciamos a socialização como uma das potencialidades do jogo bem evidente, tanto entre a dupla como toda a equipe. Ao responder, a dupla precisava compreender e visualizar a pergunta na carta escolhida, assim como a outra dupla entender a pergunta e a resposta, a fim de eliminar as possíveis cartas que não tinham tais características.

Assim, nas partidas de jogo das equipes 01 e 02, destacadas nas figuras 13 e 14 respectivamente, a compreensão foi satisfatória, chegando ao final com a determinação das cartas escolhidas. Portanto, entendemos que o jogo Enigma de Funções estava trabalhando nas equipes, o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo e a compreensão das propriedades da função quadrática.

Ao caminharmos entre as equipes em meio à realização da partida do jogo observando o envolvimento de todos, pudemos realizar alguns questionamentos ao final da jogada.

P: Sendo possível realizar até seis perguntas à dupla oponente, quais perguntas não contribuíram na eliminação de cartas?

Eq 01: Bom, depende das cartas que são sorteadas, pois como não podemos escolher a carta-pergunta, a jogada depende também de um pouco de sorte, pois na nossa partida a pergunta 1 e 2 eliminaram as mesmas cartas que poderiam ser eliminadas na pergunta 4, ou seja, as cartas que poderíamos eliminar com a pergunta 4 já estavam eliminadas na pergunta 1 e 2.

P: E se a resposta da pergunta 04 fosse sim, quais características a função precisaria ter para ser positiva entre as raízes?

Eq 01: A parábola ter concavidade voltada para baixo e duas raízes diferentes.

P: Muito bem.

P: Mas, a carta pergunta 02 ter resposta "sim" já garante a resposta da carta pergunta 04 ser "não".

Eq01: Sim, porque já tinha eliminado as cartas com a concavidade voltada para baixo. E a função só é positiva entre as raízes se a concavidade for voltada para baixo.

P: Muito bem!

P: Para a Eq 02, sendo possível realizar até seis perguntas à dupla oponente, quais perguntas não contribuíram na eliminação de cartas?

Eq 02: A carta pergunta 04, pois todas as cartas que possivelmente poderiam ser eliminadas com ela, já tinha sido eliminada na carta pergunta 01.

P: Sendo a resposta sim para a pergunta 02, que outras cartas foram possíveis de serem eliminadas?

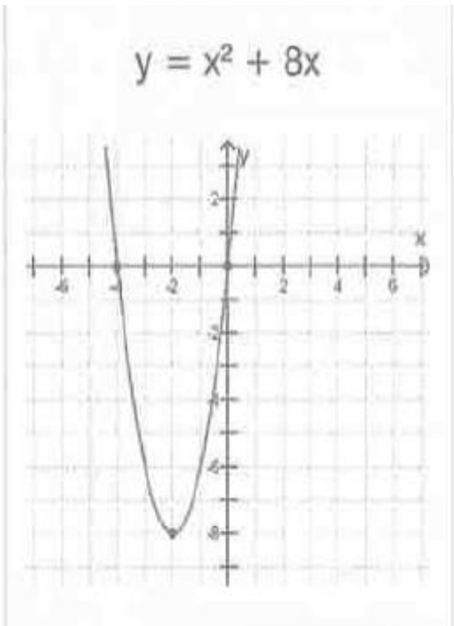
Eq 02: Nenhuma, professora, só aquela em que a soma das raízes fosse positiva.

P: E as funções que não têm raízes não poderiam ser eliminadas na pergunta 02?

Eq 02: Acho que sim, já que a função não tem raízes, não pode ser positiva entre as raízes, mas não eliminamos nesse momento.

A maioria das equipes conseguiu, nesse encontro, realizar partidas de jogo eficientes ao conhecimento de função quadrática, no entanto, apresentamos apenas duas das equipes que prontamente conseguiram descobrir a função escolhida no jogo. Em seguida, apresentamos outras equipes que também obtiveram êxito no jogo, mas que precisaram de algumas intervenções que foram positivas na aprendizagem e potencialidades dos jogadores.

Figura 15: Registro de uma partida do jogo Enigma de Funções da equipe 03.

Partida do jogo da equipe 03	PERGUNTAS/ RESPOSTAS
	1.Δ=0?
	Não.
	2. O x é igual a 1?
	Não.
	3. O vértice está no 3° quadrante?
	Sim.
	4. A função tem duas raízes reais e iguais?
	Não.
	5. A função é positiva entre as raízes?
	Não.
	6. F(0) = 0?
	Sim.

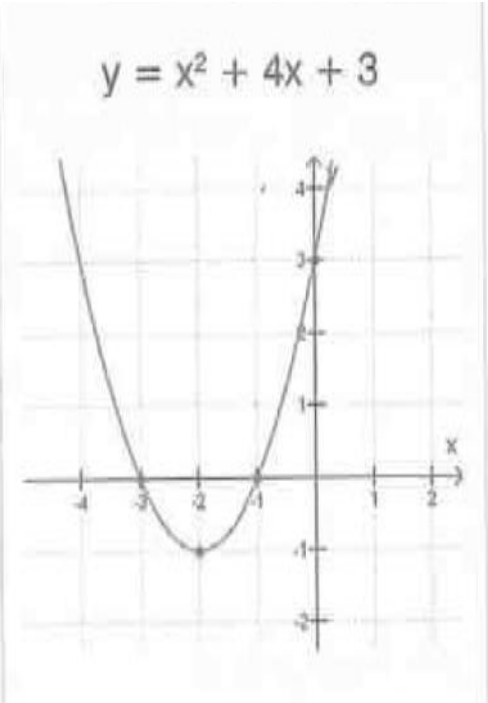
Fonte: Registrado pela autora.

<u>Comentário:</u> Ao término dessa partida de jogo, fomos solicitados pela equipe para resolver um problema nas cartas, pois a equipe teria realizado a partida, mas ao final todas as perguntas determinaram duas funções, sendo elas: $Y = X^2 + 2X$ e $Y = X^2 + 8X$. Pedimos à equipe que novamente verificasse todas as perguntas e respostas e ao final, obtendo o mesmo resultado, elaborassem uma pergunta que pudesse eliminar uma das cartas.

Ao analisar o material de jogo no planejamento, verificamos que, se uma das funções mencionadas acima fosse escolhida, teríamos a possibilidade de instigar o aluno a verificar o jogo e perceber que a sua jogada estava correta, entretanto, o equivoco é do próprio jogo, assim poderíamos permitir a elaboração de uma pergunta que pudesse eliminar uma das cartas.

Assim também aconteceu com a pergunta: “O x é igual a 1?”, nesse caso seria mais compreensível se formulasse outra pergunta, em que o x ser igual a 1 significa dizer que o y = 0, ou seja, o número 1 seria um das raízes da função. Porém, preferimos mantê-la, para verificar a compreensão do aluno na linguagem matemática sobre a função.

Figura 16: Registro de uma partida do jogo Enigma de funções da equipe 04.

Partida do jogo da equipe 04	PERGUNTAS/ RESPOSTAS
	1.Δ=0?
	Não.
	2.O x é igual a 1?
	Sim.
	3. A função tem duas raízes reais e iguais?
	Não.
	4. A função admite ponto de máximo?
	Não.
	5. A parábola corta o eixo y em ordenada positiva?
	Sim.
	6. O vértice está no terceiro quadrante?
	Sim.

Fonte: Registrado pela autora.

<u>Comentário</u>: Durante a partida de jogo, na pergunta 02, a dupla que escolheu a carta da função respondeu *sim*, no entanto, ao responder todas as perguntas_a dupla oponente conseguiu encontrar a carta escolhida. Porém, ao analisar os registros da partida do jogo, questionamos aos alunos sobre a pergunta 02 feita naquela equipe. Percebemos que a pergunta 02 estava sendo mal compreendida por alguns alunos em considerarem o x igual a 1 como sendo o coeficiente a da função. Fizemos novamente a pergunta de forma que os alunos pudessem compreender que o x igual a 1 deve ser observado no gráfico e não nos coeficientes da função, assim a questão 02 refere-se ao f(1) = 0, ou seja, o 1como uma das raízes da função quadrática.

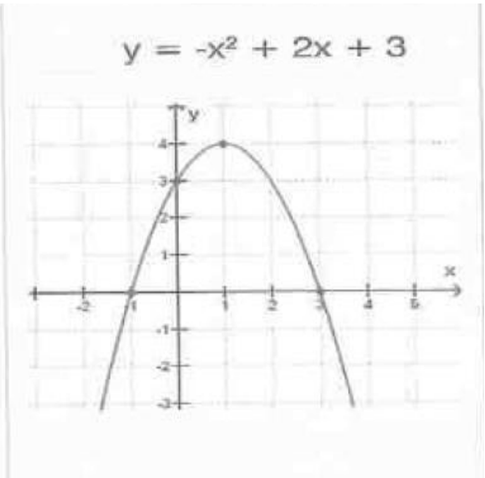
Como nessa partida não foi encontrada a função escolhida, pedimos a dupla que escolheu a função que não determinasse, antes do grupo rever a partida do jogo. Em seguida, solicitamos que a equipe realizasse a partida do jogo, utilizando as mesmas cartas perguntas e assim, encontrar a carta escolhida. A mediação da professora pesquisadora esclareceu a compreensão sobre a carta pergunta 02 para toda a equipe.

No jogo Enigma de Funções, em cada partida, toda a equipe participa, pois, de um lado temos a dupla que escolhe a carta e responde às perguntas e, por outro lado temos os jogadores que fazem a pergunta e ao receber as respostas utilizam-se do conhecimento de função quadrática para eliminar as cartas que não satisfazem a resposta dada pela dupla oponente, e nessa dinâmica todos os participantes se envolvem a fim de realizar a partida do jogo.

Destacamos que esse foi o terceiro momento de jogo e o quinto encontro nos quais exploramos as ideias da função quadrática, assim foi preciso um tempo maior para que, de forma contínua, a aprendizagem dos conteúdos fosse construída e num período de intervenções, os erros superados, a motivação e a socialização determinadas no jogo pedagógico potencializassem o conhecimento matemático.

Entretanto, procuramos trabalhar significativamente os erros, permitindo ao aluno a oportunidade de analisar e rever o processo de resolução, a fim de que eles pudessem compreender esse momento como algo produtivo à sua aprendizagem.

Figura 17: Registro de uma partida do jogo Enigma de Funções da equipe 05.

Partida do jogo da equipe 05	PERGUNTAS/ RESPOSTAS
	1.A soma das raízes é positiva?
	Sim.
	2.A função é toda positiva?
	Não.
	3. A função tem duas raízes reais e iguais?
	Sim.
	4. O vértice está no eixo da abscissa?
	Não.

Fonte: Registrado pela autora.

<u>Comentário:</u> Nessa equipe, fomos solicitados pela dupla que estava tentando encontrar a carta escolhida. Os participantes perceberam que as perguntas 01, 03 e 04 não estavam coerentes, pois, ao final eles eliminaram todas as cartas. Ao

> analisarmos as perguntas e respostas pedimos que a equipe reavaliasse a jogada e analisasse as respostas. Ao fazer alguns questionamentos por intermédio das cartas, percebemos que a dupla estava respondendo de forma incoerente com a própria carta escolhida, assim explicamos que se a função tem raízes reais e iguais, consequentemente, o vértice está no eixo das abscissas, já se a função tem duas raízes reais e diferentes o gráfico, intercepta o eixo da abscissa em dois pontos diferentes, e se a função não tem raiz o gráfico da função não intercepta o eixo x.

Ao realizar a mediação e apresentar a possibilidade de reavaliar o erro no jogo, percebemos que os alunos compreendiam o estudo das raízes da função quadrática, entretanto, o erro se justificou na falta de atenção. Mesmo em um momento de jogo, no qual os alunos procuravam se envolver e participar da aula, é possível que a concentração e atenção fossem prejudicadas, ou até mesmo o erro pudesse ser provocado para impedir ou dificultar que a dupla oponente ganhasse a partida.

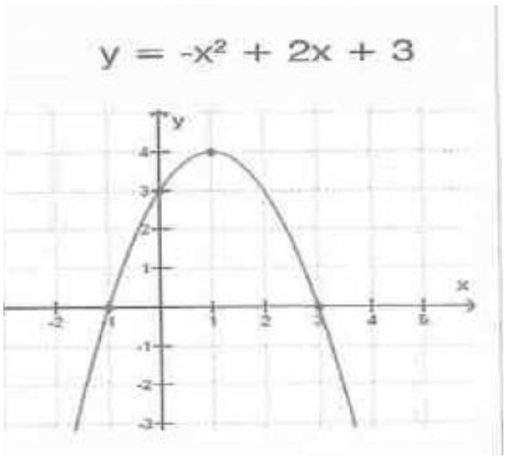
Destacamos a importância da mediação e intervenção da professora-pesquisadora, a fim de discutir os erros não como perdas no jogo, mas como possibilidades de reavaliar a partida do jogo e discutir as causas do erro, proporcionando uma compreensão significativa sobre o conhecimento matemático. Como aponta Smole, Diniz, Pessoa e Ishihara (2008) sobre o erro na perspectiva do jogo:

> Por permitir ao jogador controlar e corrigir seus erros, seus avanços, assim como rever suas respostas, o jogo possibilita a ele descobrir onde falhou ou teve sucesso e os motivos pelos quais isso ocorreu. Essa consciência permite compreender o próprio processo de aprendizagem e desenvolver a autonomia para continuar aprendendo (SMOLE et al, 2008, p.10).

Logo em seguida às mediações realizadas pela professora pesquisadora, solicitamos que a dupla iniciasse uma nova partida do jogo procurando ficar mais atentos ao seu jogo como também no jogo da dupla oponente.

A sala de aula é um espaço de diversidades, onde cada aluno tem sua limitação na aprendizagem e o seu tempo para aprender, assim em algumas equipes percebemos que há alunos ainda com dificuldades na resolução da jogada, seja por não compreenderem as características e conceito da função quadrática ou mesmo por ter dificuldades no conhecimento matemático.

Figura 18: Registro de uma partida do jogo Enigma de Funções da equipe 06.

Partida do jogo da equipe 06	PERGUNTAS/ RESPOSTAS
	1.O produto das raízes é negativo?
	Sim.
	2. A soma das raízes é negativa?
	Não
	3. A função é positiva entre as raízes?
	Sim.

Fonte: Registrado pela autora.

Comentário: Nessa equipe também fomos solicitados a analisar a partida de jogo em que, a dupla da vez conseguiu determinar uma função e a outra dupla dizia que não era a escolhida. Observamos que o erro não foi cometido pela dupla que respondeu às perguntas, mas pela dupla que eliminou as cartas sem analisá-las corretamente. No momento de rever a jogada, as duplas discutiram entre si, colocando o erro na dupla adversária, proporcionando momento de euforia, mas as diferenças foram resolvidas pacificamente. Quando iniciamos a intervenção, ao analisar o jogo, a dupla descobriu que as perguntas 01 e 02 ao eliminar as cartas, errou o jogo do sinal dos números negativos e positivos, e assim eliminou as cartas que satisfaziam a resposta da pergunta 01 e 02. No final da partida, a dupla encontrou a função $y = -x^2 - 4x - 3$, que não era a carta escolhida.

Ao rever a partida de jogo, analisando as cartas, os jogadores descobriram que a carta escolhida foi a função quadrática $y = -x^2 + 2x + 3$.

Eq 06:(A23 e A24)Na pergunta 01 eliminamos todas as cartas que não tem raízes, porque consideramos que a função escolhida deve ter raízes, já que a dupla respondeu que o produto das raízes é negativo.

P: Que outra função quadrática no jogo, tem o produto das raízes negativo?

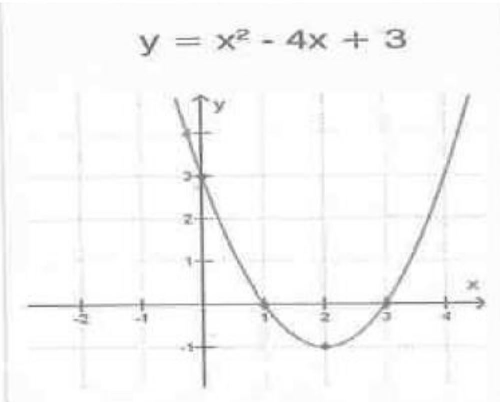
Eq 06: A função: $y = x^2 - 2x - 3$

P: Nessa função, qual é o valor da soma das raízes?

Eq 06: 2

A mediação acontecia tanto na análise dos registros no jogo como em alguns momentos utilizamos cartas do próprio jogo, a fim de facilitar a compreensão das funções na sua representação gráfica.

Figura 19: Registro de uma partida do jogo Enigma de Funções da equipe 07.

<table>
<tr><td>Partida do jogo da equipe 07</td><td>PERGUNTAS/ RESPOSTAS</td></tr>
<tr><td rowspan="8">
</td><td>1.A função tem concavidade voltada para cima?</td></tr>
<tr><td>Sim.</td></tr>
<tr><td>2.A soma das raízes é negativa?</td></tr>
<tr><td>Não.</td></tr>
<tr><td>3.A função é toda positiva</td></tr>
<tr><td>Sim.</td></tr>
<tr><td>4 O x é igual a 1?   Sim.</td></tr>
</table>

Fonte: Registrado pela autora.

Comentário: Ao final do jogo a dupla não conseguiu encontrar a carta escolhida, pois as respostas eliminavam todas as funções. Quando fomos solicitados a realizar as intervenções na equipe, percebemos diante da função escolhida $y = x^2 - 4x + 3$ e das cartas perguntas registradas na partida do jogo, a incoerência entre a função e a característica definida pela dupla que respondeu a pergunta 03 como sendo uma função toda positiva. No momento abrimos um diálogo entre os participantes, indagando o porquê de eliminar todas as cartas e evidenciamos que a dupla que escolheu a carta respondeu que é uma função toda positiva por compreender que a parábola da função é formada apenas por pontos positivos de x e y e o gráfico estará no 1° quadrante. Ao escutar tal compreensão, apresentamos cartas da função quadrática quando a função é toda positiva, negativa ou quando é positiva ou negativa apenas entre as raízes da função.

Procuramos explorar o estudo do sinal da função quadrática através das cartas, a fim de esclarecer as dúvidas sobre o conteúdo. Como verificamos no registro da equipe 07, os alunos estavam limitados nos valores de x definidos pela representação gráfica, não compreendendo que o domínio da função é definido em todos os números reais e que o estudo do sinal da função é definido pelo F(x).

Como afirma Andrade (1998, p. 24), “os erros e acertos dos alunos devem indicar o caminho que o professor deve trilhar com ele”.

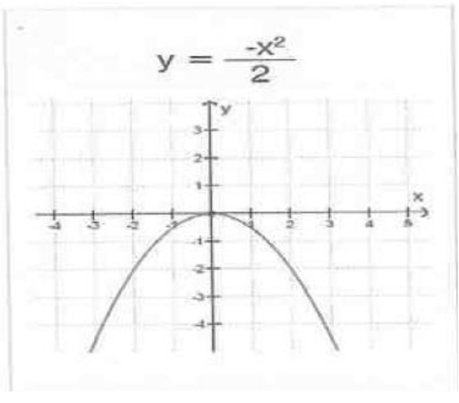
Com todo benefício que o jogo Enigma de Funções proporciona ao aprendizado dos alunos no estudo da função quadrática por meio da representação gráfica e algébrica, é fundamental o acompanhamento e as mediações da professora pesquisadora, assim como o registro das partidas do jogo realizado pelo aluno, possibilitando a percepção de certo conflitos na compreensão do conceito e estudo da função quadrática.

Vale ressaltar que durante as observações foi perceptível o envolvimento dos alunos na dinâmica proporcionada pelo jogo, algo que como professora da turma e durante todo o ano letivo não tinha ainda presenciado a empolgação deles em participar da aula.

O jogo Enigma de Funções é um jogo de estratégias conforme aponta Smole, Diniz, Pessoa e Ishihara (2008), em que o jogador depende exclusivamente das escolhas e decisões que realiza durante o jogo. Consideramos também como um jogo de conhecimento em que os alunos constroem e aprofundam de modo mais desafiador o conceito de função quadrática. Contudo, os jogadores dependem de resultados sorteados nas cartas e em alguns momentos o fator sorte na escolha da carta-pergunta favorece uma maior agilidade na partida, de forma que o jogo Enigma de Funções é uma combinação entre jogo de conhecimento e estratégia.

Como apresentamos em seguida, a partida de jogo da equipe 08 poderia escolher até 6 perguntas e apenas três perguntas bem compreendidas encontraram a carta escolhida.

Figura 20: Registro de uma partida do jogo Enigma de Funções da equipe 08.

Partida do jogo da equipe 08	PERGUNTAS/ RESPOSTAS
	1.O vértice está no eixo das ordenadas?
	Sim.
	2.A parábola tem concavidade voltada para cima?
	Não.
	3. O vértice está no eixo das abscissas?
	Sim.

Fonte: Registrado pela autora.

Comentário: Essa partida do jogo pode ser concluída com apenas três perguntas simples, nas quais pudemos perceber que os alunos compreenderam a linguagem matemática sobre o conteúdo de funções quadráticas, nos termos dos eixos das abscissas e ordenadas. Consideramos positivo no jogo Enigma de Funções o desenvolvimento da linguagem matemática e do pensamento.

Os registros permitiram que a professora pesquisadora tivesse uma melhor compreensão sobre o desenvolvimento do conhecimento de função quadrática nas equipes de jogo, visto que o trabalho é desenvolvido em uma sala de aula com trinta e sete alunos, sendo impossibilitado de acompanhar todas as observações realizadas durante o jogo.

Consideramos que, dentro do limite, os registros realizados pelos jogadores favorecem a mediação do mesmo, assim como a própria análise do aluno em relação aos erros e acertos na partida de jogo.

5.1.6 .Encontro 06

Aula 11 e 12 (25/09/2017)

Conteúdo desenvolvido: Resolução ao questionário sobre as atividades com o jogo Enigma de Funções

Recursos: Jogo Enigma de Funções e o questionário.

Nesse encontro, solicitamos que os alunos jogassem uma partida do jogo e em seguida respondessem o questionário com base no jogo Enigma de Funções. Como se tratava do quarto momento com o material do jogo, os alunos já possuíam um conhecimento significativo sobre a função quadrática e o material do jogo.

O questionário estava direcionado às cartas do jogo e procurava proporcionar ao aluno a reflexão e análise sobre as suas partidas. Pretendemos direcionar as questões que conduzissem os alunos a rever todas as cartas das funções, como também perguntas que possibilitassem aos alunos uma reflexão das suas jogadas anteriores nas quais sentiram dificuldade em eliminar as cartas de função, assim como questões que conduziram os alunos a fazer uma avalição do conhecimento matemático construído ao longo das atividades com o jogo, em que, diante de uma função quadrática, pudessem determinar as cartas pergunta que satisfazem a função.

Para realização dessa atividade, direcionamos o material do jogo, o registro de jogos anteriores e o questionário, priorizando os grupos de jogadores da aula anterior, a fim de facilitar o desenvolvimento das respostas, sendo o questionário respondido por cada dupla de jogadores. Tivemos uma participação ativa das equipes, em meio ao diálogo e partilha das ideias que aconteceram nos jogos.

Descreveremos, abaixo, as respostas referentes ao questionário das atividades com o jogo Enigma de Funções:

Questão 01

Se a carta da pergunta sorteada for: f (1) é zero? Quais funções terão essa resposta como sim? E o que representam x= 1 e y = 0 na função?

Essa questão pretendia identificar as cartas em que o x = 1 fosse uma das raízes e saber se o aluno de fato se sentia habilitado a determinar as cartas com a função que apresentava essa característica. Nesse contexto, foi possível perceber que todas as respostas dadas estavam corretas e que os alunos identificaram o numero 1 como uma das raízes.

Questão 02

Se a carta da pergunta sorteada for: A soma das raízes é positiva? Quais funções podem ser excluídas se a resposta for sim?

Nessa segunda questão, as respostas dadas pelos alunos, na sua maioria, foram satisfatórias, no entanto, alguns alunos escreveram todas as funções na sua forma algébrica em que a soma das raízes é negativa e que não tem raiz. Outros escreveram todas as funções algébricas em que a soma das raízes é negativa, as função que não têm raiz e também as funções que têm uma única raiz negativa, e outros alunos não escreveram as funções na sua forma algébrica, mas descreveram a característica por elas serem eliminadas nessa questão, ou seja, não fazerem parte da resposta as funções que têm uma única raiz com valor negativo, as funções em que a soma das raízes é negativa e também todas as funções que não têm raiz.

Os alunos apresentaram formas diferentes de compreender a resolução, mas todos compreenderam a questão de forma significativa.

Questão 03:

Quais as cartas pergunta que tem como resposta *sim*, dificultando encontrar a função nas primeiras cartas perguntas?

Essa questão teve como objetivo fazer com que os jogadores analisassem as jogadas anteriores e descrevessem as perguntas que não contribuíram muito com a partida do jogo. Nesse contexto, alguns alunos não saíram muito bem, talvez por não perceber que, em algum momento, algumas cartas pergunta não favoreceram a eliminação das funções nos jogos do seu grupo. Entretanto, os demais participantes descreveram as cartas que não contribuíram em determinados momento para vencer a partida.

Destacamos no Quadro 06 algumas duplas que relataram, numa sequência de cartas, aquelas que não contribuíram de forma favorável.

Quadro 06: Resposta dos alunos referente à questão 03 do questionário.

A01, A02 e A25, A26	A03, A04:
O vértice está no terceiro quadrante? A soma das raízes é negativa? A função admite raízes reais? A parábola tem concavidade voltada para cima?	F(1) é zero? A função admite raízes reais? A soma das raízes é positiva? O x é igual a 1?
A07, A08 e A09, A10	**A11, A12 e A13, A14**
O x é igual a 1? F(1) é zero? A função admite raízes reais? A função admite ponto de máximo? C < 0?	F(0) = 0? A função admite raízes reais?
A15, A16:	**A20, A21**
Δ = 0? O vértice está no eixo das abscissas? A função tem duas raízes reais e iguais?	A função admite raízes reais? Δ = 0? O vértice está no eixo das abscissas?

Fonte: Elaborado pela autora.

Questão 04

Selecione uma carta de função e relacione todas as perguntas que têm resposta *sim* para aquela função.

Nessa pergunta, identificamos, de fato, a compreensão do conhecimento da função quadrática desenvolvida pelos alunos por meio da atividade com o jogo Enigma de Funções. O aluno selecionou uma carta com a função quadrática na sua forma gráfica e algébrica, e, junto com ela, cartas pergunta que satisfazem a função escolhida e que tem como resposta *sim*.

Algumas duplas, ao selecionarem a carta função e as relacionarem com as cartas perguntas, escolheram algumas perguntas que não satisfaziam a função escolhida, no entanto, a dupla reescreveu a pergunta de forma que a mesma pudesse satisfazer a função escolhida.

Questão 05

Quais cartas de função são descartadas quando a resposta é *sim* para “A função que admite raízes reais”? E como podemos identificá-la no gráfico?

Nessa questão, os alunos escreveram todas as funções que não admitem raízes reais e afirmaram que podem identificá-las no gráfico quando a parábola não está no eixo x. Diante das resoluções das duplas, a maioria conseguiu identificar todas as funções que não têm raízes. Uma dupla entendeu que seriam as raízes reais e iguais e assim descartou todas as funções que tinham duas raízes diferentes ou que não tinham raízes, e explicou que no gráfico as raízes reais e iguais tocam o gráfico em um único ponto.

Questão 06

Na ultima jogada, quantas vezes você conseguiu adivinhar a carta escolhida pela dupla oponente? E quais foram as funções?

A maioria das duplas respondeu que conseguiu descobrir entre 1 a 3 funções. Outras duas duplas disseram que da forma como eles estavam jogando, em que as duas duplas jogavam ao mesmo tempo, foi possível conseguir encontrar até quatro funções.

Questão 07

Como você considera a atividade com o jogo “Enigma de Funções”.

Nesse contexto, os alunos responderam de forma subjetiva. A questão determinou o jogo como muito difícil, regular, bom ou excelente. Diante das alternativas, nenhuma das duplas respondeu que o jogo foi considerado como muito difícil, no entanto, a dificuldade que os alunos encontraram no jogo foi no início por ser uma atividade na qual desenvolvia um conteúdo matemático e com uso de uma metodologia diferente daquela que eles estão habituados.

No geral a turma respondeu o questionário considerando, o que eles acharam das atividades com o jogo. Assim, duas duplas consideraram o jogo como uma atividade regular, quatro duplas consideraram o jogo como bom e, por fim, as demais duplas apontaram a dinâmica do jogo como uma atividade excelente nas aulas de Matemática.

As respostas nessa última pergunta de fato condizem com a realidade à qual o jogo foi trabalhado, primeiro por ser uma metodologia nova para a realidade deles, e segundo por ser mediado como introdução de um novo conteúdo. Contudo ao finalizar as análises dos questionários é perceptível, enquanto professora-pesquisador, que o jogo "Enigma de Funções" é um recurso metodológico importante para potencializar a capacidade dos alunos com relação ao pensamento, à criatividade, à interatividade, à pergunta e a compreender o conceito de uma função quadrática.

Após as respostas ao questionário solicitamos que, de forma pessoal e livre, os alunos escrevessem sobre o jogo Enigma de Funções na exposição do conteúdo da função quadrática.

Em uma diversidade de experiências sobre o jogo que cada um apresentou, compreendemos que, ao final das aulas, todos gostaram do jogo e conseguiram desenvolver as habilidades e potencialidades inerentes à dinâmica, alguns acharam difícil, contudo, como já mencionado em outro momento, o jogo é algo diferente assim como o conteúdo de função quadrática.

> *A3: "O livro tem sua importância, pois temos ele em casa para estudar, mas o jogo foi bem mais divertido e a vontade de jogar a cada aula só aumentou. O jogo nos ajuda na prática."*
>
> *A6: "(...) fazendo assim ser uma matéria de entretenimento, com mais interação, compreendendo melhor e ainda nos mostra que a matemática pode até, às vezes, ser complicada, mas se conseguirmos prestar atenção e analisar bem entendemos qualquer coisa".*
>
> *A7: "(...) o jogo foi muito bom para a matéria de função quadrática, ele foi bom por causa não só do aumento na aprendizagem mas também pela interação entre os alunos".*
>
> *A8: "(...) o jogo é uma forma de incentivo nos estudos... porque ninguém gosta de perder e nisso nos empenhamos mais em aprender sobre o assunto para ganhar mais".*
>
> <u>Comentário:</u> Mesmo de forma espontânea, apenas dois alunos não argumentaram sobre as suas opiniões, no entanto, os demais participantes descreveram sobre as aulas com o jogo. Visto que, são inúmeros comentários, procuramos fazer referência à fala de alguns alunos. O aluno A3 diz que "o jogo ajuda na prática", esse foi um comentário que muito se repetiu ao longo da escrita dos alunos. Compreendemos que o jogo ajudou na prática, pela forma como a metodologia foi trabalhada a partir da análise e visualização da função

na sua representação gráfica e algébrica e por meio das situações-problemas, assim como na dinâmica de interação e valorização de cada participante. Na escrita, pudemos perceber que os alunos mencionaram várias potencialidades que o jogo proporciona, entre elas, a aproximação entre o aluno e professor, e entre aluno e aluno, mostrando que essa interação possibilita um maior envolvimento com a disciplina e facilita a compreensão do conteúdo.

5.1.7 Encontro 07

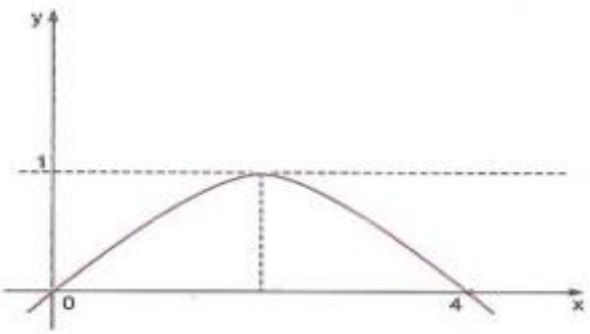
Aula 13 e 14 (28/09/2017)

Conteúdo desenvolvido: Conceito de função, representações gráfica, tabular e algébrica de uma função e o crescimento e decrescimento de uma função quadrática.

Recursos: Situação-problema.

Situação-problema 02:

As trajetórias dos animais saltadores são, normalmente, parabólicas. A figura mostra o salto de uma rã representado em um sistema de coordenadas cartesianas. O alcance do salto é de 4 metros e a altura máxima atingida é de 1 metro.



a) Monte uma tabela que relacione a altura atingida e os metros alcançados.

b) Quantos metros são alcançados quando a rã está a uma altura de 0,5 metros? E quando está a uma altura de 0,75metros?

c) Qual a expressão matemática que representa a trajetória da rã?

d) Para quais valores de x a função é crescente ou decrescente?

(retirada e adaptada de GIOVANNI e BONJORNO, 2005, vol. 1, p. 192).

Ao entregar a situação-problema 02 aos grupos, solicitamos uma leitura do problema, e, em seguida, uma discussão com os colegas. A atividade inicialmente traz a função quadrática em uma representação de contexto real e na representação gráfica, em que é possível perceber a relação de valor único da função nos pontos apresentados no gráfico.

Com a situação-problema 02, pretendemos discutir as ideias essências da função quadrática e a construção da expressão algébrica a partir de algumas características presentes no gráfico. Procuramos ainda determinar o vértice da função destacando o intervalo de crescimento e decrescimento. Inicialmente demos um tempo para que eles compreendessem as questões e analisassem o gráfico e já respondessem sem as intervenções da professora pesquisadora.

Ao caminharmos na sala entre as duplas e ao acompanhar as discussões dos alunos, começamos a fazer algumas mediações com toda a turma e observar o que eles compreendem do conteúdo.

A3: Professora, como construir essa tabela sem ter a função?

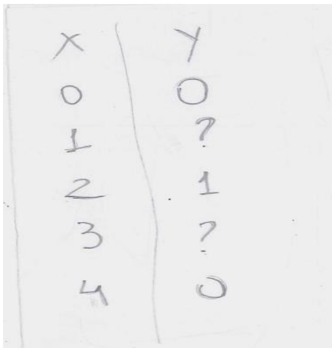
P: Nesse caso, que não temos a função para atribuir os valores a x e obter os valores de y, como podemos obter a tabela? Será que encontramos através do gráfico?

A6: Ah, então posso pegar os valores que estão no gráfico.

A9: como o eixo de simetria passa pelo vértice na função, assim o V= (2, 1)

A9 e A10: Consideramos a altura como o valor de y e o metro alcançado como valor de x e encontramos a tabela:

Figura 21: Resposta da dupla A9 e A10 da letra a da situação-problema 02.



Fonte: Registrado pela autora.

A3 e A4: Como a rã sai do ponto x = 0 e vai até o x = 4, então a cada $4x^{2,}$ *ela dá um salto.*

P: Por que considera $4x^2$*?*

A5 e A6: Também estamos com essa mesma ideia de $y = 4x^{2}$*, já que o gráfico é uma parábola.*

P: Muito bem, logo a função tem que ser definida com a expressão algébrica da função quadrática.

A5 e A6: Assim $y = ax^2 + bx + c$.

A9 e A10: Podemos retirar do gráfico as raízes da função e o vértice.

P: O que mais podemos perceber por meio do gráfico?

A15 e A16: Não sei qual a função, mas sei que ela tem o valor de <u>*a*</u> *negativo, por ter um gráfico com a parábola voltada para baixo e o valor de* $c = 0$.

A1 e A2: Professora como fazemos para encontrar a tabela, só temos três valores de x e de y definido?

P: Se o $x = 0,5$*, qual é o valor de y?*

A1e A2: Acho que é 0,5, mas como podemos comprovar?

A3 e A4: Professora como temos três valores de x e y podemos encontrar a função por tentativa, então tenho que encontrar uma função quando $x = 0$ *o* $y = 0$*, quando o* $x = 4$ *o* $y = 0$ *e que quando o* $x = 2$ *o* $y = 1$.

P: E assim com os demais valores de x?

A3 e A 4: $x = 1$, $x = 3$.

P: Não só para esses valores inteiros, mas para todos os valores que fazer parte do gráfico.

A3 e A4: Quem seriam esses valores?

P: Entre $x = 0$ *e* $x = 1$ *quais valores o x pode assumir?*

A3 e A4: Os números com vírgula?

P: Sim, se $x = 0,5$ *quem é o valor de y?*

Ao observar e interagir com os grupos, pudemos perceber que os mesmos compreenderam as características apresentadas no gráfico da função e que a lei de formação da função deve satisfazer os valores presentes no gráfico, entretanto, ainda tinham a ideia de que o gráfico era formado apenas por números inteiros.

Deixamos os alunos encontrar a função por tentativas, para que eles pudessem analisar que os valores de x devem corresponder aos valores de y presentes no gráfico, assim como, os valores decimais.

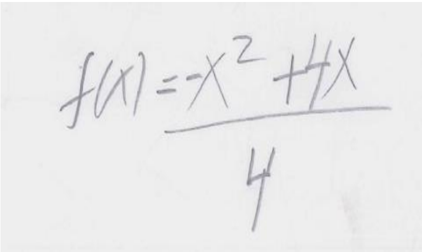
<u>Comentário:</u> No diálogo com os grupos, os alunos analisaram o gráfico, definiram as características da função quadrática e descreveram a função na sua forma algébrica. Os alunos A15 e A16 afirmaram que a função tem o valor do coeficiente a negativo, porque a concavidade da parábola está voltada para baixo e o valor de $c = 0$ porque o gráfico passa pelo ponto (0,0). Assim como as duplas

A3, A4 e A5, A6 definiram o movimento da rã como uma função quadrática em que a rã sai do ponto x=0 e vai até x = 4 e em que a função pode ser $4x^2$. Quando questionados por tal resposta, definiram esse movimento como uma parábola. Nessa perspectiva, os alunos verificaram por tentativa se os valores apresentados no gráfico, como o vértice e as raízes, satisfazem a função $4x^2$ e a partir daí, considerando as observações, procuraram encontrar uma função na forma algébrica que satisfaça os valores no gráfico. Ao caminharmos na sala fazendo as mediações, percebemos que os alunos se comunicavam entre as equipe discutindo as ideias e observações entre eles, o que contribui significativamente para a compreensão da atividade.

Após várias tentativas verificando se as formas algébricas satisfaziam os pontos do gráfico, a dupla A3 e A4 chegaram às seguintes conclusões:

A3 e A4: Fizemos várias tentativa a começar por $y=4x^2$, $y = x^2 + 4x$, $y = 4x^2 + x$ entre outras, mas nenhuma dava certo com os valores do gráfico. A função tem que apresentar uma fração, pois quando x = 2, o valor de y é um valor menor que x, assim, se os coeficientes estiverem somando ou multiplicando não dá certo, aí coloquei o número quatro porque a rã pula do 0 ao 4.

Figura 22: Resposta da dupla A3 e A4 da letra c da situação-problema 02



Fonte: Registrado pela autora.

P: E o valor de c?

A3 e A4: Não tem, quando o gráfico passa pelo zero não tem o c.

P: Certo, agora procure verificar se a função satisfaz a todos os valores de x.

Os alunos A3 e A4, assim como outras duplas também, recorreram à representação numérica por meio da tentativa, utilizando a tabela com os pontos apresentados na representação gráfica da função, verificando dentro da situação problema se os valores satisfaziam a determinadas funções.

Alguns alunos questionaram se poderiam utilizar o vértice do gráfico já que ele está definido, para encontrar a função ou até mesmo a própria função quadrática na sua forma geral. Nesse contexto, solicitamos que as duplas utilizassem todos os conhecimentos que os mesmos tinham sobre função quadrática para tentar encontrar a função correspondente ao gráfico.

A resolução do problema ainda era, para muitos, algo difícil, pois a mesma instigava o aluno a buscar sua própria resolução e, uma vez que muitos ainda estão acostumados a receber respostas prontas e apenas copiá-las, mesmo que entenda o processo de resolução, não exploram os seus conhecimentos prévios a fim de reestruturá-los em novos conceitos.

Nessa atividade percebemos que muitos alunos estavam empolgados com a resolução, entretanto, algumas equipes pareciam estar esperando por um fechamento da atividade para compreender a resolução.

Nesse sentido, procuramos interagir e, quando o aluno não sabia fazer as questões a, b e c, tentamos problematizar a letra d, a fim de que os alunos se sentissem motivados a compreender o problema, não seguindo uma sequência de questões, mas proporcionando uma aproximação do conteúdo. Assim, começamos a problematizar:

P: No gráfico da função, qual é o valor máximo, ou seja, a altura máxima que a rã conseguiu atingir?

A25: O valor máximo é o vértice, não é? Então é o 1.

P: Após atingir o valor máximo, o que acontece com a rã?

A26: Cai.

P: Em qual intervalo a rã realiza um salto crescente e em qual intervalo ela realiza um salto decrescente?

A25: De 0 a 2 ela sobe, cresce, e de 2 a 4 ela cai, desce.

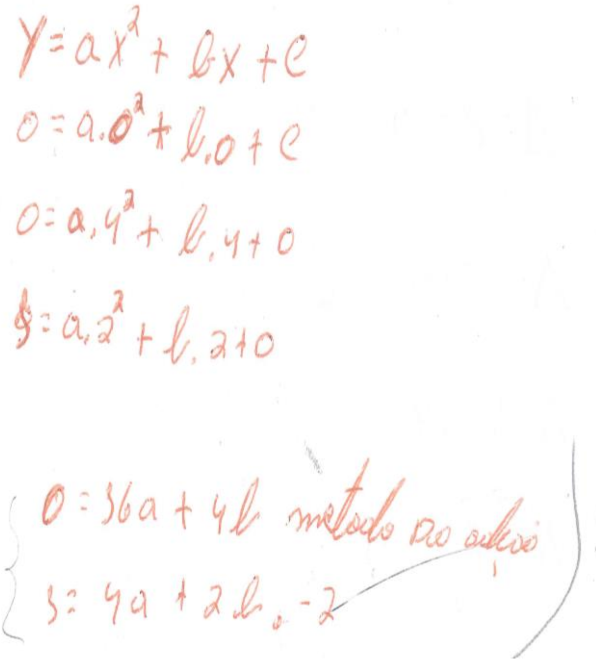
Ao interagirmos com a dupla, deixamos que eles desenvolvessem algum raciocínio sobre a questão e continuamos a observar a resolução dos demais.

A15 e A16: Professora, sabemos que a função só tem coeficiente a e b, assim, como o gráfico passa pelos três pontos determinados no gráfico, se usar a função quadrática $y = ax^2 + bx + c$*. dá para resolver?*

P: Verifique. Os pontos são os valores de x e y.

Após analisar as questões do gráfico e ao identificar as características da função com o valor de c = 0, alguns alunos tentaram resolver a situação utilizando a forma algébrica da função e os pontos marcados no gráfico e construíram um sistema de duas equações.

Figura 23: Resposta da dupla A15 e A16 da letra c da situação-problema 02.



Fonte: Registrado pela autora.

A15 e A16: Encontramos um sistema, porem não sei como resolver.

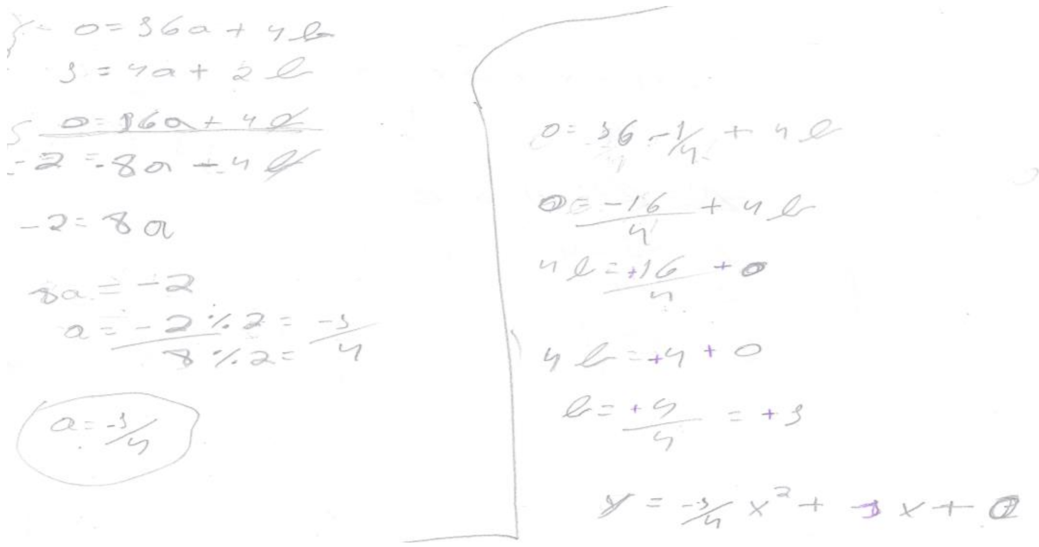
P: Para resolver você pode recorrer a um dos métodos de resolução do sistema. Quantas incógnitas têm o sistema e quantas equações?

A15 e A16: a e b e tem três equações, só que uma tem valores de x =0 e y =0.

Nesse momento, as alunas não conseguiram resolver o sistema e perguntamos a turma, se alguém sabia resolver, no entanto toda a sala ficou em silêncio, confirmando que não sabiam ou que naquele momento estavam esquecidos dos métodos de resolução de um sistema. A partir dessa realidade, resolvemos fazer uma mediação, mostrando para eles, por meio de uma exposição dialogada, a resolução de um sistema de duas equações com o método da adição.

Em seguida, a dupla que encontrou o sistema se uniu com outra dupla para resolver e verificar se a função satisfazia os valores de x e y do gráfico.

Figura 24: Resolução do sistema.

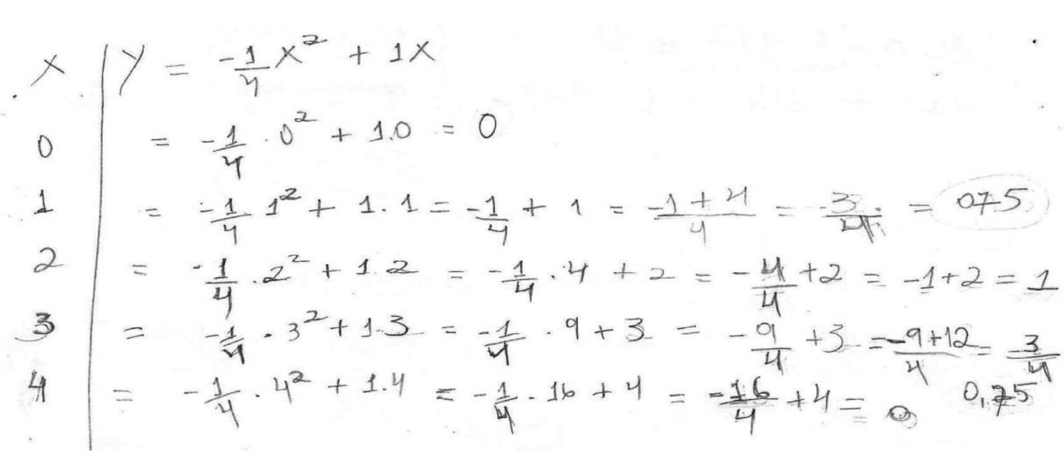


Fonte: Registrada pela autora.

Alguns alunos questionaram a dupla, como tinham chegado a esse resultado, no entanto, de forma expositiva, os alunos da dupla explicaram que tinham utilizado a forma algébrica da função quadrática e tinha substituído os pares ordenados determinados pelo gráfico, sendo estes as raízes e o vértice da função.

A atividade em grupo permite essa interação e, por meio dela, evidenciamos a partilha dos conhecimentos entre os alunos. Nessa perspectiva, as atividades com a resolução de problemas possibilitaram o desenvolvimento do conteúdo de função quadrática de forma coletiva em que todos os participantes puderam evidenciar as suas dúvidas e limitações, assim como, o crescimento no conhecimento matemático e as habilidades desenvolvidas a partir do pensamento matemático.

Figura 25: Tabela construída pelas duplas A13, A14 e A15, A16.



Fonte: Registrado pela autora .

Comentário: Percebemos, mais uma vez, nas resoluções dos alunos que eles preferiram os números inteiros, assim mesmo sendo solicitados pela letra b, valores de y decimais, não observamos os mesmos terem atribuído valores a x decimais pensando em obter esses resultados. Ao determinar o x = 1, obtiveram o y = 0,75, porém, procuramos explorar a outra resposta da letra b quando y= 0,5 e não sabia qual o valor de x. Nesse momento, as duplas ficaram confusas em suas respostas, pois alguns alunos questionaram que se colocassem y=0,5 teriam que resolver a equação do 2° grau com número decimal, mas outras duplas voltaram a analisar o gráfico e perceberam que se atribuíssem valores decimais a x entre 0 e 1 encontrariam o y = 0,5. Nesse ponto, deixemos que os alunos desenvolvessem os seus pensamentos e métodos de resolução.

Ao analisar a tabela junto com os alunos, pudemos observar à variação das grandezas e, dessa forma, o crescimento e decrescimento da função. Assim como, a ideia de covariação e taxa de variação da função.

Ao término da resolução do problema, entregamos o cartazete que faz parte do jogo e que apresenta apenas as funções quadráticas na sua forma gráfica. Solicitamos que os alunos escolhessem um gráfico e encontrassem a forma algébrica desse gráfico. Nesse momento, continuamos circulando na sala de aula, analisando o trabalho das duplas sem intervir mais no desenvolvimento das questões, apenas observando como os alunos resolviam a situação e determinavam a função quadrática na forma algébrica.

Comentário: Nessa última atividade, como as duplas podiam escolher a função, a maioria procurou funções que tinham a mesma característica da situação-problema 02, ou seja, que tinha as raízes reais e diferentes e o vértice da função; outros escolheram funções que são fáceis de encontrar a função algébrica por meio de tentativa e com base no estudo dos coeficientes.

Pudemos perceber o quanto importante foi o desenvolvimento das aulas em que os alunos se colocaram como protagonistas da sua aprendizagem, em que buscaram desenvolver a sua resolução dentro dos conhecimentos construídos sobre função quadrática.

O jogo como uma metodologia pode proporcionar ao aluno a construção do conhecimento matemático, a partir das potencialidades que o mesmo oferece, destacando a interação e socialização entre alunos/alunos e aluno/ professor, a resolução de problema, a percepção do erro como possibilidade de reavaliar a sua aprendizagem e o desenvolvimento do pensamento e raciocínio lógico matemático.

A metodologia com o jogo Enigma de Funções possibilitou através das representações gráfica e algébrica a exploração das ideias essenciais ao estudo da função quadrática, no entanto, procuramos desenvolver a representação verbal e tabular através das situações-problema que possibilitaram ao aluno uma compreensão ampla no estudo da função quadrática.

Concluímos com as atividades no 1° ano do Ensino Médio considerando que nosso objetivo foi alcançado, pois entendemos que a metodologia de ensino com o jogo Enigma de Funções e as atividades propostas na perspectiva da resolução e exploração de problemas contribuiu com uma melhor compreensão no estudo da função quadrática.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Destacaremos a seguir nossas reflexões e considerações proporcionadas a partir do nosso estudo de pesquisa, na qual teve como objetivo identificar e analisar as potencialidades do uso de jogos pedagógicos associados à perspectiva da resolução e exploração de problemas com alunos do 1° ano do Ensino Médio.

Optamos pelo trabalho com os alunos do Ensino Médio por percebermos, através de estudos realizado em outras pesquisas, quão raro é o trabalho com os jogos matemáticos voltados a esse nível de ensino. Por isso, buscamos verificar as potencialidades do uso de jogos pedagógicos no ensino de Matemática e analisar a receptividade dos alunos com a metodologia.

Nesse contexto, destacamos nas nossas atividades de pesquisa as possibilidades do trabalho com jogos matemáticos. A primeira delas se aproxima a ideia construtivista, por desenvolver o conteúdo de função quadrática através de atividades com jogos na perspectiva da resolução e exploração de problemas, como destacamos as análises e descrições com o jogo Enigma de Função.

A segunda possibilidade, destaca-se na retomada dos conteúdos, como revisão de ideias que não foram bem compreendidas pelos alunos ou que precisam ser melhor esclarecidas através da resolução e exploração de problemas. No entanto, a presente pesquisa não evidenciou nas analises e descrições das atividades o uso do jogo como revisão, destacou apenas as potencialidades que o mesmo pode desenvolver.

Em cada encontro analisamos os registros dos alunos no momento das atividades, as notas de campo e as observações que se destacaram na visão da professora pesquisadora. Todas as informações coletadas como o diálogo dos alunos e as mediações que aconteceram durante as atividades da pesquisa contribuíram com os resultados aqui obtidos.

Recorremos a pesquisa qualitativa por acreditar que essa seria a melhor forma de obter os resultados do estudo e na modalidade de pesquisa pedagógica por proporcionar reflexão e investigação a própria prática pedagógica.

A educação matemática se destaca por suas metodologias de ensino, dentre elas, a resolução, proposição e exploração de problemas e os vários jogos matemáticos entre outras, que auxiliam a aprendizagem dos estudantes segundo um planejamento docente habilitado para desenvolver tais aspectos nas aulas de Matemática. Entretanto, as atividades de pesquisa se detiveram apenas ao estudo da resolução e exploração de problemas no jogo e em situações-problema.

Destacamos nas atividades as cinco grandes ideias essenciais no estudo da função definidas por Cooney, Beckmann e Lloyd, citados por Silva (2013), entre elas, o conceito de função, covariação e taxa de variação, a família de função quadrática, a combinação e transformação e as representações múltiplas.

Nesse contexto, ao desenvolver as atividades de pesquisa na turma do 1° do Ensino Médio, acreditamos ter conseguido desenvolver bem quatro ideias essenciais ao estudo de função, que foram: conceito de função, covariação e taxa de variação, família de função quadrática e representações de função.

A primeira grande ideia, conceito da função quadrática, foi trabalhada em todas as atividades de jogo. Percebemos ao longo das atividades que os alunos apresentavam sempre uma compreensão melhor, assim como a participação ativa.

A segunda ideia essencial, covariação e taxa de variação, foi trabalhada parcialmente nas atividades dos jogos nas quais os alunos observaram apenas a variação de grandezas. No entanto, nas situações-problema podemos explorar a compreensão de covariação por meio do crescimento e decrescimento, assim como a realização com o cálculo da taxa de variação de forma coletiva.

A terceira ideia essencial, família de função, especificamente a quadrática, trabalhamos ao longo das atividades com o jogo, construindo as características e compreensões a respeito da sua forma algébrica e gráfica. Está família de função é considerada como uma das famílias mais exploradas no Ensino Médio.

E por fim, a representação de função, quinta ideia essencial. Iniciamos com o estudo de função quadrática por meio das representações gráfica e algébrica que o jogo apresenta. Sendo o jogo limitado a essas duas representações, procuramos por meio das situações-problema desenvolver outras representações: a tabular e numérica. Contudo, percebemos que as representações muito contribuíram para a compreensão da função quadrática.

As atividades de jogos por meio das problematizações possibilitaram um resgate ao conhecimento prévio dos alunos, reestruturando os novos conhecimentos a partir dos que já estavam formulados. Assim, mesmo os alunos que não faziam essa retomada dos seus conhecimentos, mas, por ser uma dinâmica em grupo, todos compartilhavam e procuravam utilizá-los.

Planejamos uma metodologia que atendesse aos critérios da atividade de jogo, entre eles, priorizamos não interferir, em todo momento, na dinâmica, para não perder a essência do jogo, como uma atividade interessante e motivadora. Nos primeiros encontros procuramos nos destacar mais nos grupos, a fim de contribuir com a compreensão do jogo e do conteúdo, de modo que fomos aos poucos passando confiança aos jogadores.

Para evitar que o jogo perdesse a essência por tal motivo, planejamos alguns encontros em que utilizamos as cartas do jogo na lousa e realizamos uma partida de jogo entre os alunos e a professora pesquisadora, em um grande grupo.

Nas atividades, constatamos ainda, que os alunos estão mais habituados ao cálculo escrito, não conseguindo evidenciar muito o uso do cálculo mental. Isso mostra que o cálculo mental, ainda é pouco recorrente nas aulas de Matemática o que possibilita ao aluno o uso mais direto às operações e regras matemáticas.

O jogo Enigma de Funções desenvolve o raciocínio lógico, quando ao escolhe uma função o aluno sabe diferenciá-la das outras funções através das suas características ou quando o aluno recebe a informação do colega e consegue descartar todas as funções que não satisfazia aquela caraterística específica.

Pudemos salientar que, com todos os benefícios que o jogo Enigma de Funções proporcionou ao ensino de função quadrática, destacamos ainda no material do jogo a limitação em trabalhar apenas as representações gráficas e algébricas, não possibilitando ao aluno desenvolver a representação tabular, o estudo da covariação e taxa de variação de uma função quadrática e no trabalho com a construção do gráfico.

Ressaltamos ainda, que o jogo não propõe ao aluno a resolução dos cálculos como: encontrar o zero da função, determinar o valor máximo e mínimo e encontrar o vértice a partir da representação algébrica. O jogo trabalha todo o conteúdo da função quadrática destacando-se apenas na visualização gráfica e algébrica da função.

Diante das limitações nas representações tabular e gráfica assim, como outras ideias da função quadrática que precisam ser trabalhada, recorremos a metodologia da resolução e exploração de situações-problema que ao intercalar com as aulas do jogo, contemplamos todo o conteúdo de função quadrática e o desenvolvimento de um trabalho significativo com as quatro ideias essenciais no estudo da função.

Compreendemos que o aluno, muitas vezes, sente-se inseguro com a sua capacidade de compreensão, assim destacamos a autoconfiança como um ponto que foi desenvolvido ao longo das atividades, e ao final, pudemos perceber uma postura diferente dos nossos alunos.

Todo o estudo se deu na intenção de tornar as aulas de matemática mais interessantes ao aluno, que estimulassem o desenvolvimento da autonomia, criatividade, o desejo pela descoberta e a mudança de atitude dos alunos em relação ao próprio aprendizado.

Nesse contexto, destacamos que a experiência adquirida no presente estudo, nos proporciona seguir com o trabalho dos jogos aplicado a outros conteúdos do Ensino Médio, a fim de evidenciar reflexões acerca do ensino de Matemática. Ao mesmo tempo, indicamos o uso de jogos nas aulas de Matemática para os professores, afim de que possam se sentir incentivados a experimentar um ensino mais dinâmico voltado para o desenvolvimento pessoal, social e intelectual dos seus alunos.

Nossa reflexão na presente pesquisa procura destacar, alguns pontos importantes que fundamentaram nossas atividades e evidenciam os resultados aqui conquistados. Destacamos assim, as problematizações que foram evidenciadas em todas as atividades do presente trabalho, seja com os conteúdos trabalhados no jogo, a fim de que os alunos construíssem os seus próprios conhecimentos ou fazendo problematizações com as ações do próprio jogo, contribuindo para que os alunos pudessem analisar e definir melhor suas estratégias.

O que mais elucidou as problematizações nas atividades foi à necessidade de resgatar o conhecimento prévio do aluno, fazendo com que ele se sentisse parte do processo de construção. Para isso, realizamos um trabalho de devolver a pergunta ao aluno ou ao grupo a fim de que pudéssemos coletivamente compreender tal situação apresentada.

As evidências dos erros aconteceram por todos os envolvidos nas atividades do jogo, ora pelo próprio jogador ao analisar e rever sua jogada, ora pelo seu oponente ao apontar a jogada como incorreta, ora pela professora pesquisadora quando presenciava um descuido ou falta de atenção do jogador e pedia que o jogo fosse verificado.

Contudo, em todos os aspectos, o erro foi sempre determinado como algo positivo e eficiente ao processo de construção do conhecimento. Assim, para o desenvolvimento de um bom jogador, o erro foi reavaliado nos jogos sempre que fossem evidenciados. No jogo Enigma de Funções, a percepção do erro tornou-se mais evidente já que a ação de uma dupla interferia no jogo da outra.

A socialização é uma potencialidade que caracteriza as atividades com jogos. Assim, temos nas nossas salas de aula, alunos com boa socialização e que tem uma participação ativa nas aulas, porém encontramos alunos que ao longo das atividades foi necessário desenvolver a autoconfiança, para que o mesmo pudesse se envolver e interagir com a atividade do jogo. Nesse contexto, o jogo pode contribuir significativamente, uma vez que o mesmo foi articulado em grupos menores, o que favoreceu a uma maior aproximação entre os integrantes permitindo, assim a socialização dos envolvidos.

Entendemos que a problematização conforme foi acontecendo nas atividades proporcionou a autoconfiança entre os participantes, e criou condições para a sua expressividade nos momentos de diálogo.

O importante não era o aluno ganhar uma partida do jogo, porque, quando ele vencia a partida muitas vezes não realizava a análise do jogo, e sabemos que ganhar uma partida não é garantia de que o jogador domina o conteúdo do jogo. Os jogadores que perdiam uma partida tinham a oportunidade de avaliar a sua ação no jogo e no conhecimento matemático, contribuindo nas suas próximas jogadas. Ao longo das atividades trabalhadas, procuramos desenvolver ações que mobilizassem os alunos a ter uma participação ativa, entre elas destacamos a autonomia, a confiança, a determinação e a argumentação.

No entanto, o nosso foco foi trabalhar a percepção do erro, algo que contribuiu significativamente nas ações desenvolvidas ao longo do jogo, compreendendo que a análise do erro é valiosa tanto quanto o resultado final da partida; a ação do aluno em apresentar suas estratégias, compartilhar seus conhecimentos com o grupo, perguntar, observar a jogada do outro, socializar os seus conhecimentos prévios, avaliar seus erros, suas resolução diante de certas situações, entre outras ações, objetivaram e tiveram como resultado, ao longo das atividades, desenvolver ainda mais as potencialidades nos alunos.

As potencialidades analisadas na presente pesquisa com a dinâmica do jogo Enigma de Funções foram: a relação aluno/professor/disciplina, o desenvolvimento cognitivo, a socialização, habilidades com o cálculo, a resolução e exploração de problemas e a análise do erro no contexto do jogo. Durante todas as atividades essas potencialidades foram se confirmando como possibilidades de melhoria ao ensino aprendizagem dos conteúdos de Matemática.

Finalizamos nossas considerações, refletindo sobre o que elencamos por meio desta dissertação, apresentando possibilidades e reflexões a cerca do trabalho com jogos matemáticos na perspectiva da resolução e exploração de problemas. Assim, consideramos a necessidade de futuras pesquisas destacando o papel na formação de conceitos através de jogos matemáticos, em todos os níveis de ensino.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, Silvanio de. **Ensino-aprendizagem de matemática via resolução, exploração, codificação e descodificação de problemas e a multicontextualidade da sala de aula.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – IGCE, UNESP, Rio Claro, 1998.

ANDRADE, Silvanio de. "Um caminha crítico reflexivo sobre resolução, exploração e proposição de problemas matemáticos no cotidiano da sala de aula**"**. In: ONUCHIC, Lourdes De La Rosa; JUNIOR, Luiz Carlos Leal; PIRONEL, Márcio. **Perspectivas para resolução de problemas**. São Paulo: Livraria da Física, São Paulo, 2017. p. 355-395.

ANTUNES, Celso. "O jogo e o brinquedo na escola". In: SANTOS, Santa Marli Pires dos. **Brinquedoteca:** a criança, o adulto e o lúdico. Rio de Janeiro: Vozes, 2011. p. 37-42.

AZEVEDO, Maria Verônica Rezende de. **Jogando e construindo matemática:** a influência dos jogos e materiais pedagógicos na construção dos conceitos em matemática. 2. ed. São Paulo: VAP, 1999.

BEZERRA, Adriana da Silva Veloso. **Conceito e representação de função via resolução, proposição e exploração de problemas:** um trabalho com alunos de graduação. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2013.

BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari. **Investigação qualitativa em educação:** uma introdução à teoria e aos métodos. Portugal: Porto, 1994. v. 12. (Coleção Ciências da Educação).

BORIN, Júlia. **Jogos e resolução de problemas:** uma estratégia para as aulas de matemática. São Paulo: IME-US, 2007.

BRANDÃO, Jefferson Dagmar Pessoa. **Ensino aprendizagem de função através da resolução de problemas e representações múltiplas**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba-UEPB, Campina Grande, 2014, 211p.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio** (PCN+): orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais - ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília, DF: MEC, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular**. 2 versão. Brasília: MEC, 2016. p. 652. Disponível em: <http://historiadabncc.mec.gov.br/documentos/bncc2versao.revista.pdf> Acesso em 12/11/2018.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular**. Brasília: MEC, 2018. p. 600. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf> Acesso em: 20/03/2018.

CAILLOIS, Roger. **Os jogos e os homens:** a máscara e a vertigem. Lisboa, Portugal: Cotovia, 1990.

CADERNOS DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. "Resolução de problemas: problema ou solução?: ensino fundamental. Belo Horizonte: 2008. vol. 4. Disponível em: <https://pactuando.files.wordpress.com/2015/04/material-suporte-para-modulo-8-e-9-resoluu00c7u00c3o-de-problemas.pdf>. Acesso em: 11/11/2018.

DE PAULO, Jessé Valério. **O uso de jogos nas aulas de Matemática do Ensino Médio: o que dizem os professores de Matemática**. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia, Bauru, 2017, 114 p.

GRANDO, Regina Célia. **O jogo e suas possibilidades metodológicas no processo ensino-aprendizagem da matemática**. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Educação, UNICAMP, Campinas, 1995. 175 p.

____________**O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula.** Tese (Doutorado) – Faculdade de Educação, UNICAMP, Campinas, São Paulo, 2000. 224 p.

____________ **O jogo e a matemática no contexto da sala de aula**. São Paulo: Paulus, 2004.

GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José. Roberto. **Matemática completa**. Vol.1.3.2.ed. São Paulo: FTD, 2005.

GONDIM, Linda Maria de Pontes; LIMA, Jacob Carlos. **A pesquisa como artesanato intelectual:** considerações sobre método e bom senso. São Paulo: EdUFSCar, 2006.

HUIZINGA, Johan. **Homo ludens:** o jogo como elemento da cultura. São Paulo: Perspectiva, 1971.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto. **Conecte Matemática.** 1 ed. volume único. São Paulo. Editora Saraiva, 2015.

JELINEK, Karin Ritter. **Jogos nas aulas de matemática:** brincadeira ou aprendizagem? O que pensam os professores? Dissertação (Mestrado em Ciências e Matemática) - Universidade Católica do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2005.

KISHIMOTO, Tizuko Morchida. **O jogo e a educação infantil**. 2. ed. São Paulo: Pioneira, 1998.

______________ (org.) **Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação.** 14. ed. São Paulo: Cortez, 2011.

LANKSHEAR, Colin; KNOBEL, Michele. **Pesquisa pedagógica**. Porto Alegre: Artmed, 2008.

LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli Elisa Dalmazo Afonso. **Pesquisa em educação:** abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MACEDO, Lino de; PETTY, Ana Lúcia Sícoli; PASSOS, Norimar Christe. **Aprender com jogos e situações-problema.** Porto Alegre: Artmed, 2000.

____________**Os jogos e o lúdico na aprendizagem escolar.** Porto Alegre: Artmed, 2005.

PFIFFER, Claudimara da Silva. **Jogos com conteúdos matemáticos para os anos finais do Ensino Fundamental.** Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Universidade Regional de Blumenau, 2014.

POLYA, George; **A arte de resolver problemas:** um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: 1995.

SILVA, Ariana Costa. **O uso de jogos nas aulas de matemática do Ensino Médio:** um recurso avaliativo do conceito de função. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2016.

SILVA, Ledevande Martins da. **Compreensão de ideias essenciais ao ensino-aprendizagem de funções via resolução, proposição e exploração de problemas**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2013.

SILVA, Maria Jose de Castro. **As estratégias no jogo quarto e suas relações com a resolução de problemas matemáticos.** Tese (Doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação. Campinas, 2008.

SMOLE, Katia Stocco; DINIZ, Maria Ignez; PESSOA, Neide; ISHIHARA, Cristiane. **Jogos de matemática do 1° ao 3° ano**. Porto Alegre: Artmed, 2008. (Série Caderno do Mathema: Ensino Médio).

STAREPRAVO, Ana Ruth**. Mundo das ideias:** jogando com a matemática, números e operações. Curitiba: Aymará, 2009.

TEIXEIRA, Susane Fernandes de Abreu; **Uma reflexão sobre a ambiguidade do conceito de jogo na Educação Matemática.** Dissertação. (Mestrado) – São Paulo, 2008. 111p.

Disponível em: <https://www.aprovaconcursos.com.br/questoes-de-concurso/prova/inep-2013-enem-exame-nacional-do-ensino-medio-ppl-prova-cinza-2o-dia> . Acesso em 16/06/2017.

ANEXO A – REGRAS DO JOGO ENIGMA DE FUNÇÃO

1. Cada jogador recebe um conjunto de cartas de funções que devem estar visíveis e organizadas à sua frente.

2. As cartas de perguntas são embaralhadas e colocadas no centro da mesa voltada para baixo.

3. O cartazete é colocado de modo que os jogadores possam vê-lo durante o jogo.

4. Os jogadores escolhem uma função do cartazete, sem que seu oponente saiba qual é, e registram a forma algébrica da função escolhida.

5. O objetivo de cada jogador é descobrir a função do seu oponente.

6. Decide-se quem começa e, a partir daí, os participantes ou as duplas jogam alternadamente.

7. Na sua vez, o jogador retira uma carta do baralho e pergunta a seu oponente se a função escolhida por ele tem aquela característica. O oponente deve responder apenas sim ou não. O jogador deve excluir as funções que não lhe interessam.

Por exemplo, se a carta retirada contiver O VÉRTICE ESTÁ NO TERCEIRO QUADRANTE? E a resposta for SIM, ficam excluídas as funções que não contêm vértices no 3° quadrante, já se a resposta for NÃO, isso significa que a função escondida não tem vértice no 3° quadrante.

Sucessivamente, as perguntas auxiliam cada jogador a excluir funções até que seja possível concluir qual é a função escolhida por seu oponente.

8. As perguntas não voltam ao baralho. Se o baralho de perguntas terminar, as cartas são embaralhadas para formar novamente o baralho das cartas de perguntas.

9. Ganha o jogo o primeiro jogador que identificar a função escolhida por seu oponente.

ANEXO B : QUESTIONÁRIO DO JOGO ENIGMA DE FUNÇÃO

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAIBA
PRÓ-REITORIA DE PÓS- GRADUAÇÃO E PESQUISA
CENTRO DE CIENCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIENCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIENCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

O presente questionário é parte integrante da Dissertação de Mestrado Profissional que será apresentado ao programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. As questões apresentadas fazem parte da pesquisa sobre o uso dos jogos matemáticos na perspectiva da resolução e exploração de problemas para alunos do 1° ano do Ensino Médio, buscando, após a prática da atividade com jogos, alguns questionamentos da jogada e dos conhecimentos do aluno sobre o conteúdo envolvido no jogo. Não há identificação dos participantes. Contamos com a colaboração dos nossos alunos e, desde já. agradecemos a sua colaboração.

Orientador: Prof. Dr. Silvanio de Andrade

Mestranda: Isnara Mendes Lins

QUESTÕES SOBRE O JOGO "ENIGMA DE FUNÇÕES".

1)Se a carta da pergunta sorteada for: f(1) é zero?

Quais funções terão essa resposta como sim? E $x = 1$ e $y = 0$ representa o que na função?

2) Se a carta da pergunta sorteada for: A soma das raízes é positiva?

Quais funções podem ser excluídas?

3) Quais as cartas de perguntas que tem como resposta *sim*, dificultando achar a função nas primeiras perguntas.

4)Selecione uma carta de função e relacione todas as perguntas que tem resposta sim para aquela função.

CARTA DE UMA FUNÇÃO	PERGUNTAS	RESPOSTA "SIM"

5)Quais cartas de função são descartadas quando a resposta é sim para "A função admite raízes reais"? E como podemos identificá-la no gráfico?

6)Na última jogada quantas vezes você conseguiu adivinhar a carta escolhida pela dupla oponente? E quais foram as funções?

7) Como você considera a atividade com o jogo " Enigma de funções":

a)( ) muito difícil b) ( ) regular c) ( ) bom d) ( ) excelente