Universidade Estadual da Paraíba
Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Diâmetros de cônicas: uma proposta de abordagem no Ensino Médio

Deodorio Souza da Costa

Trabalho de Conclusão de Curso

Orientador: Prof. Dr. Francisco Sibério Bezerra Albuquerque

Campina Grande - PB
Julho/2019

Universidade Estadual da Paraíba
Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

Diâmetros de cônicas: uma proposta de abordagem no Ensino Médio

por

Deodorio Souza da Costa

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UEPB, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Campina Grande - PB
Julho/2019

C837d Costa, Deodorio Souza da.

Diâmetros de cônicas [manuscrito] : uma proposta de abordagem no ensino médio / Deodorio Souza da Costa. - 2019.

67 p. : il. colorido.

Digitado.

Dissertação (Mestrado em Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual da Paraíba, Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa , 2019.

"Orientação : Prof. Dr. Francisco Sibério Bezerra Albuquerque , Departamento de Matemática - CCT."

1. Cônicas. 2. Diâmetros das cônicas. 3. Diâmetros conjugados. I. Título

21. ed. CDD 516.3

Elaborada por Elesbao S. Neto - CRB - 15/347 BSC5/UEPB

Diâmetros de cônicas: uma proposta de abordagem no Ensino Médio

por

Deodorio Souza da Costa

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UEPB, modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Aprovado em: 05 de Julho de 2019.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Davis Matias de Oliveira - UEPB
Examinador Interno

Prof. Dr. José Lindomberg Possiano Barreiro - UFCG
Examinador Externo

Prof. Dr. Francisco Sibério Bezerra Albuquerque - UEPB
Orientador

Campina Grande, 05 de Julho de 2019.

Dedicatória

Dedico este trabalho (in memorian) aos meus pais, Damião Vitorino e Maria Dulcinéia;
à minha esposa, Iolanda; e aos meus filhos, Anthoni e Bernardo.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus. A Ele, toda a Glória e todo Louvor.

Aos meus pais (in memoriam), Damião Vitorino da Costa e Maria Dulcinéia de Sousa Costa, por todo esforço e zelo em minha formação como pessoa, pela transmissão de bons valores, pelos incentivos aos estudos e ao trabalho honesto, por todo amor recebido e pelas diversas formas de carinho.

Aos meus familiares pelo apoio e incentivos durante o mestrado.

À minha adorável esposa, Iolanda, pela paciência e compreensão durante todo o curso.

A uma pessoa muito especial na minha vida, Maria das Neves (Vozinha), a qual considero uma segunda mãe.

Aos meus filhos, Anthoni Souza Guedes e Bernardo Souza Guedes, por serem a maior dávida de minha vida. Vocês são minha inspiração para todas as minhas conquistas.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Francisco Sibério Bezerra Albuquerque, pela dedicação e sabedoria com que conduziu essa orientação. Assim, como também, aos demais membros da Banca Examinadora, Prof. Dr. Davis M. de Oliveira e Prof. Dr. José L. P. Barreiro, pelas contribuições ao presente trabalho.

Agradeço a todo corpo docente do PROFMAT da UEPB de Campina Grande, por contribuírem significativamente com minha formação docente. Em especial, a professora Diana e aos professores Aldo e Vandenberg, que sempre me deram incentivos e apoio, até mesmo fora dos limites da sala de aula.

À direção da escola estadual Iolanda T. C. LIMA, nas pessoas de Silvano Fidelis e Luciano Augusto, pelo apoio e compreensão em ceder alguns dias de folgas durante a semana de avaliação no mestrado.

Aos meus colegas/amigos do PROFMAT, Alanberg, Ygor, Idalice, Camilo, Lairton, e em especial, meu grande companheiro e amigo dessa jornada de estudo, Eudes. Sempre lembrarei de todos com carinho.

Ao meu amigo Rivanildo pelo incentivo e apoio até antes mesmo de inicar o curso.

À CAPES, pela concessão de apoio financeiro durante o início curso.

Por fim, agradeço à Sociedade Brasileira da Matemática - SBM pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional.

Resumo

O presente trabalho objetiva o estudo amplo e detalhado do diâmetro das cônicas, eixo pouco explorado, mas com grande relevância no âmbito da geometria analítica. Os tópicos abaixo apresentam demonstrações e aplicações do conteúdo das cônicas, por meio da resolução detalhada de exemplos e da aplicação de conceitos conjecturados durante o processo de construção, através de proposições ou teoremas, com objetivo de apresentar o tema principal de uma forma sucinta e que venha a ser utilizado por estudantes ou pesquisadores de Matemática ou áreas afins.

Palavras Chaves: Cônicas. Diâmetros das cônicas. Diâmetros conjugados.

Abstract

The present works objective is the wide and detailed study of the diameter of the conics, an underexplored axis, but with great relevance in the scope of analytical geometry. The topics below present demonstrations and applications of the contents of the conics, by means of the detailed resolution of examples and the application of concepts conjectured during the construction process, through propositions or theorems, with the objective of presenting the main theme in a succinct way and that it will be used by students or Mathematics researchers or related areas.

Keywords: Conical. Diameters of conics. Conjugated diameters.

Lista de símbolos e abreviatura

1. $\overline{AB}$..segmento de reta
2. $\overrightarrow{AB}$..semirreta com origem em A
3. BNCC ....Base Nacional Comum Curricular
4. $d(A,B)$..distância entre dois pontos
5. LG..lugar geométrico
6. LORAN ....Long Range Navigation
7. OCEM ....Orientações Curriculares para o Ensino Médio
8. $\triangle ABC$ ....triângulo com vértices A, B e C
9. $\angle ABC$ ....ângulo B do triângulo ABC
10. $\mathscr{E}$ ....elipse
11. $\mathscr{H}$ ....hipérbole
12. $\therefore$ ....portanto
13. $\Rightarrow$ ....implica

Sumário

1 Introdução **2**

2 Um breve histórico acerca do surgimento das cônicas **4**

2.1 O problema da duplicação do cubo 4

2.2 Algumas aplicações clássicas das cônicas 7

3 Seções cônicas **10**

3.1 Elipse 10

3.2 Hipérbole 13

3.3 Parábola 15

3.4 Propriedades refletoras das cônicas e aplicações 17

3.4.1 Propriedade refletora da elipse 19

3.4.2 Propriedade refletora da hipérbole 20

3.4.3 Propriedade refletora da parábola 21

3.4.4 Aplicações 22

4 Construções das cônicas **25**

4.1 Construções elementares da elipse 25

4.2 Construções elementares da hipérbole 27

4.3 Construções elementares da parábola 29

5 Diâmetros das cônicas **32**

5.1 Diâmetros Conjugados 37

5.2 Relações entre os coeficientes angulares dos diâmetros conjugados 40

5.3 Aplicações 45

6 Conclusões **55**

Referências Bibliográficas **57**

Capítulo 1

Introdução

O estudo das seções cônicas é, verdadeiramente, um dos temas mais importantes da geometria analítica a serem apresentados em sala de aula, pois as suas principais figuras geométricas, através de suas respectivas características ou propriedades foram, e ainda são, essenciais para a criação de muita tecnologia contemporânea. O presente trabalho tem como motivação contribuir para o ensino e aprendizagem da geometria analítica no ensino médio como proposta extracurricular, além de fornecer um material que poderá subsidiar a pesquisa tanto pelos estudantes de Matemática e áreas afins, quanto dos que já exercem a atividade docente.

Inicialmente foi feito uma sondagem nas leis que regem o ensino médio regular no Brasil à respeito do assunto de geometria analítica. As OCEM enfatizam que existem dois aspectos essenciais para a geometria analítica nessa etapa: " O estudo das propriedades geométricas de uma figura com base em uma equação e o estudo dos pares ordenados de números (x, y) que são soluções de uma equação, por meio das propriedades de uma figura geométrica."

> O trabalho com a geometria analítica permite a articulação entre Geometria e Álgebra. Para que essa articulação seja significativa para o aluno, o professor deve trabalhar as duas vias: o entendimento de figuras geométricas, via equações, e o entendimento de equações, via figuras geométricas. A simples apresentação de equações sem explicações fundadas em raciocínios lógicos deve ser abandonada pelo professor. Memorizações excessivas devem ser evitadas; não vale a pena o aluno memorizar a fórmula da distância de um ponto a uma reta, já que esse cálculo, quando necessário, pode ser feito com conhecimento básico de geometria analítica (retas perpendiculares e distância entre dois pontos).([3], p.76-77)

A BNCC, também reafirma a importância da geometria (analítica) numa de suas competências, assim rege pela compreensão e utilização, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representações matemáticas (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

> Assim, a Geometria não pode ficar reduzida a mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas sobre relações de proporcionalidade em situações relativas a feixes de retas paralelas cortadas por retas secantes ou do teorema de Pitágoras. A equivalência de áreas, por exemplo, já praticada há milhares de anos pelos mesopotâmios e gregos antigos sem utilizar fórmulas, permite transformar qualquer região poligonal plana em um quadrado com mesma área (é o que os gregos chamavam "fazer a quadratura de uma figura"). Isso permite, inclusive, resolver geometricamente problemas que podem ser traduzidos por uma equação do segundo grau.([2], p.272)

Dessa maneira, o referido trabalho, tem como objetivo geral contribuir para o ensino e aprendizagem da geometria analítica no ensino médio trazendo como proposta de ensino aplicações de problemas extracurriculares afim de contribuir de forma significativa para o desenvolvimento da Matemática e, também, nos cursos das áreas de exatas. Apresenta-se da seguinte forma:

No **Capítulo 2**, iniciaremos alguns fatos históricos do surgimento das cônicas, com destaque para o *problema deliano* apresentando alguns métodos de resolução do mesmo por grandes matemáticos da época, com um destaque especial *As cônicas* de Apolônio. Finalizamos com algumas aplicações históricas de matemáticos renomados. O **Capítulo 3**, apresenta um tratamento das cônicas de maneira similar aos livros didáticos atuais, no entanto, incrementando as propriedades refletoras de cada cônica, assim como algumas de suas aplicações para o desenvolvimento da tecnologia. Em seguida, no **Capítulo 4**, serão apresentados alguns processos de construções das cônicas. Essa atividade busca promover um ensino mais dinâmico, na medida em que proporciona uma aprendizagem mais significativa aos discentes. Prosseguindo, no **Capítulo 5**, abordaremos uma proposta extracurricular mais ampla sobre o assunto cônicas, o qual servirá como material de estudos para discentes, tanto do ensino básico, quanto aos graduandos em Matemática e áreas afins. Por fim, no **Capítulo 6**, faremos as nossas considerações finais.

Capítulo 2

Um breve histórico acerca do surgimento das cônicas

Neste capítulo, teremos a oportunidade de conhecer um pouco da história do surgimento das seções cônicas, assim como algumas de suas aplicações históricas. Iniciaremos nossa jornada de estudo com um problema que causou um alvoroço enorme na comunidade da cidade de Delos (Grécia). O problema deliano, ou simplesmente *a duplicação do cubo*, que posteriormente ficou conhecido como um dos mais famosos problemas clássicos da Antiguidade.

> Há duas lendas sobre a origem da duplicação do cubo, com detalhes contraditórios. Uma delas se refere à duplicação de um túmulo e a outra à duplicação de um altar. Segundo a primeira lenda, Minos mandou fazer um túmulo para Glauco. Ao saber que o túmulo era um cubo cuja aresta media 100 pés, ele disse que a residência real tinha sido construída demasiadamente pequena e que ela deveria ser duas vezes maior e ordenou imediatamente que duplicassem cada aresta do túmulo, sem estragar sua bela forma. De acordo com a segunda lenda, quando um oráculo anunciou aos habitantes de Delos que, para se verem livres da peste, deveriam construir um altar duas vezes maior do que o existente, os arquitetos ficaram muito confusos, pois não sabiam como construir um cubo duas vezes maior do que outro. ([4], p.97)

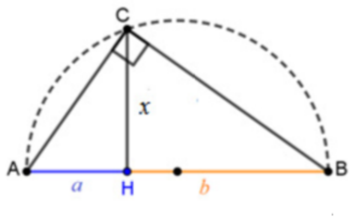
2.1 O problema da duplicação do cubo

Para duplicar o volume de um certo cubo, podemos proceder, sem tamanha complicações, da seguinte forma: Seja l_1 e V_1 o lado e o volume inicial de um cubo, respectivamente. Sabemos que $V_1 = l_1^3$; logo, para se obter o dobro do seu volume inicial devemos ter $V_2 = 2V_1$; donde, $l_2^3 = 2l_1^3$, e portanto $l_2 = \sqrt[3]{2}l_1$. Então, por que esse problema causou um alvoroço entre os matemáticos daquela época? A resposta para essa pergunta se dá na forma como os gregos resolviam problemas matemáticos, pois eles não se utilizavam de cálculos algébricos, e ainda, dispunham apenas de ferramentas de construção de figuras: a régua sem marcação e o compasso, instrumentos euclidianos. O primeiro matemático a tentar a solucionar o problema deliano, segundo [1] e [4], foi Hipócrates de Quíos (viveu em torno de 430 a.C.). Hipócrates, possivelmente, usou uma analogia ao problema de que dado um retângulo de comprimento a e b, é possível encontrar um quadrado de lado x de mesma área, cujo o referido problema nada mais é do que a inserção de uma média proporcional entre os segmentos a e b. Em Álgebra (atual) seria:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b} \Rightarrow x^2 = ab.$$

Esta equação pode ser obtida geometricamente, através da relação métrica do triângulo retângulo.

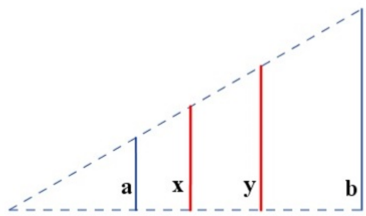
Figura 2.1: Média proporcional entre a e b



Fonte:[12]

Salientando, que para os gregos as equações acima não eram meras divisões, e sim, razões de mesma grandeza, como segmentos, área, volumes. Numa generalização, Hipócrates acrescentou ao problema duas medidas x e y proporcionais aos segmentos a e b.

Figura 2.2: Medidas x e y proporcionais aos segmentos a e b



Fonte:[10]

Assim, obtemos as seguintes relações:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}.$$

Em que: $x^2 = ay$, $y^2 = bx$ e $xy = ab$; fazendo $b = 2a$ e por eliminação de y, temos que:

$$x^3 = 2a^3 \Rightarrow x = a\sqrt[3]{2}$$

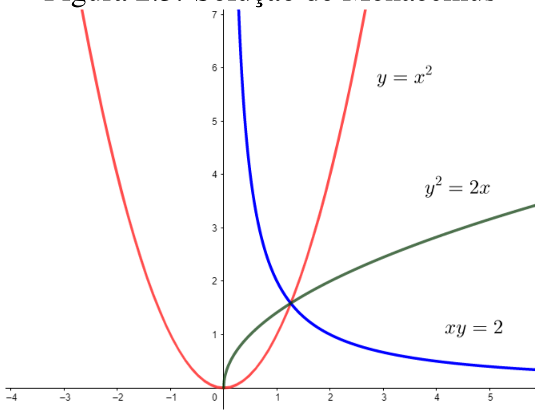
.

Outro grande matemático que apresentou sua solução ao problema *deliano*, também segundo [1] e [4], foi Menaecmus. O matemático nasceu em Alopeconnesus, Ásia Menor (atualmente Turquia) e morreu cerca de 320 a.C., discípulo e depois, sucessor de Eudoxo Cnido na direção da Escola de Cízico, estudou com Platão e há relatos que teria sido tutor de Alexandre "O Grande". Foi o primeiro a mostrar que as elipses, parábolas e hipérboles são obtidas cortando um cone num plano não paralelo à base. Esta descoberta deu-se pela tentativa de resolver o problema da duplicação do cubo. Menaecmus se utilizou da generalização de Hipócrates vista anteriormente, contudo atribuiu os valores 1 e 2 para a e b, respectivamente. Para encontrar x e y, segue que:

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2}.$$

A partir dessas relações, tomando-se duas grandezas quaisquer, temos as seguintes equações: $y^2 = 2x$, $x^2 = y$ e $xy = 2$. A aresta do cubo desejado, cujo seu volume tenha o dobro de seu volume inicial, será o valor x obtido da interseção dessas curvas: duas parábolas ou uma das parábolas e a hipérbole.

Figura 2.3: Solução de Menaecmus



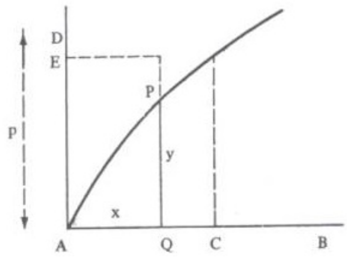
Fonte: autor

Embora a solução não tivesse em coerência com a solução do problema proposto pelos gregos, a história da matemática presencia a introdução das curvas cônicas, e, a partir de então, se tem início os estudos dessas estruturas.

Como vimos grandes matemáticos deram contribuições aos estudos das cônicas, como por exemplo: Aristeu, Euclides e o próprio Manaecmus. Contudo, segundo [1], foi através de Apolônio de Perga que o estudo das estruturas cônicas obteve o seu apogeu. O "grande geômetra" como era conhecido pelos epítetos da antiguidade, nasceu em Perga atual Turquia (262-190 a.C), estudou na escola Alexandrina, sua principal obra é um tratado, composto por oito livros, intitulado "As cônicas" ou as seções cônicas, com destaque aos livros II, VII e VIII, os quais fazem referência aos *diâmetros conjugados*. Em breve, retornaremos com mais detalhe a cerca desse assunto.

Apresentaremos a seguir, uma demonstração das cônicas por Apolônio através dos eixos cartesianos e de um retângulo.

Figura 2.4:



Fonte: [20]

Seja a cônica de vértice A e um retângulo de base $\overline{AQ}$, situada sobre a reta $\overrightarrow{AB}$, e lado $\overline{AE}$ sobre $\overrightarrow{AD}$, de modo que sua área seja $\overline{PQ}^2$. Segundo [1],

> Considerando uma cônica de vértice A, seja P um ponto qualquer da cônica e Q sua projeção ortogonal sobre $\overrightarrow{AB}$. Pelo vértice A traçamos uma reta perpendicular a $\overrightarrow{AB}$, sobre a qual tomamos $\overrightarrow{AD} = p$ (p real positivo). A segui, construamos um retângulo de base $\overline{AQ}$ ($\overline{AQ} \subset \overrightarrow{AB}$) e $\overline{AE}$ ($\overline{AE} \subset \overrightarrow{AD}$), devemos ter sua área igual a $\overline{PQ}^2$. Conforme $\overline{AE} < \overrightarrow{AD}$, $\overline{AE} = \overrightarrow{AD}$ ou $\overline{AE} > \overrightarrow{AD}$, temos respectivamente: elipse, parábola ou hipérbole. Outra forma: Considerando a curva referida a um sistema cartesiano de eixos coordenados (x sendo os eixos das abscissas e y eixos das ordenadas). Designando as coordenadas do ponto P por x e y, obtemos: elipse se $y^2 < px$, parábola se $y^2 = px$ e hipérbole se $y^2 > px$.

2.2 Algumas aplicações clássicas das cônicas

Ao longo dos tempos, a família das cônicas foi sendo vista sob diferentes perspectivas e através destas eram descobertas algumas relações entre a matemática e a realidade. A história, segundo [10], relata que um dos maiores cientistas de todos os tempos teria sido o matemático grego, sucessor de Euclides na Escola de Alexandria, Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.).

Arquimedes escreveu uma obra sobre a "Quadratura da Parábola" em que se calcula a área do segmento de parábola pelo seu método de exaustão. Conta-se que durante o cerco de Siracusa, Arquimedes teria incendiado vários navios romanos, vindos com intuito de confronto, utilizando misteriosos espelhos, chamados "Ustórios", que reverberavam pavor entre os viajantes. Usando as propriedades das cônicas, ele recorreu a um ou vários espelhos parabólicos colocados de modo a concentrar os raios de sol refletidos num só ponto, desviando-os depois para uma galera romana que começava a queimar.

Figura 2.5: Ustório, invenção de Arquimedes

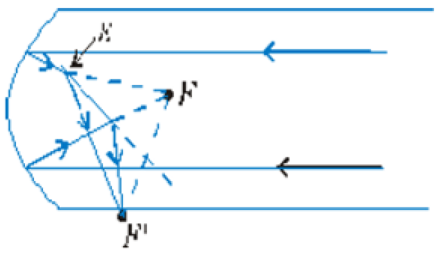
Fonte:[13]

Em 1609, Galileu Galilei, nascido na Itália (1564-1642), segundo [19], foi o primeiro cientista a construir um telescópio para observação astronômica. Tais instrumentos funcionavam com base na refração da luz, os chamados telescópios refratores. Muito embora ainda fossem tidos como primitivos, com lentes cheias de deformações nas imagens formadas, a construção desses telescópios ocasionou uma revolução na Astronomia. Esse problema foi resolvido (em partes, vale salientar) com a utilização dos telescópios refletores, que faziam uso de um espelho parabólico no fundo do tubo, ocasionando a formação da imagem do corpo celeste. No foco, porém, havia um grande problema: o olho do observador deveria estar exatamente no foco da região parábola, o que por sua vez é impossível.

Isaac Newton, inglês (1642-1727), segundo [19], deu uma grande contribuição para a resolução deste problema: colocar um espelho plano E entre o espelho parabólico e o foco, fazendo com que a imagem que iria se formar no foco F, fosse refletida para um outro foco F' fora do tubo do telescópio, pelo qual deveria se posicionar o observador (ver Figura 2.6).

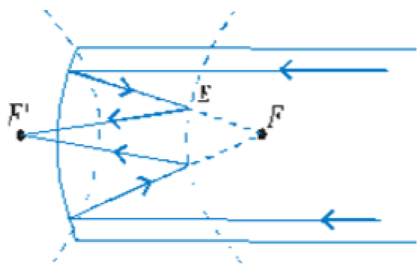
Contudo foi o astrônomo francês Cassegrain, em 1672, por [19], que propôs a utilização de um espelho hiperbólico E. Neste caso, existiria uma coincidência focal entre os espelhos parabólico e hiperbólico. Dessa forma, os raios que iriam formar a imagem no foco F seriam refletidos pelo espelho hiperbólico E e formariam essa imagem no outro foco da hipérbole. São inúmeras as vantagens dos telescópios de Cassegrain sobre os demais, que até a presente data tinham sido desenvolvidos pelos melhores e mais renomados astrônomos. No telescópio Newtoniano, por exemplo, o espelho plano E não pode ficar muito próximo do foco F, estando este localizado dentro do telescópio. Outra desvantagem seria o tamanho do espelho plano E o qual deve ter um tamanho razoável, pois pode ocorrer um bloqueio da luz incidente no espelho parabólico. Já nos telescópios de Cassegrain, o espelho plano E não apresenta os problemas relacionados anteriormente, em relação ao seu tamanho e à sua distância ao foco F, pois nestes são usadas as propriedades de definição da hipérbole, ou seja, a distância entre os focos F e F' podem ser alteradas sem que haja modificação na posição do foco F (ver Figura 2.7).

Figura 2.6: Esquema do telescópio de Newton.



Fonte:[19]

Figura 2.7: Esquema do telescópio de Cassegrain.



Fonte:[19]

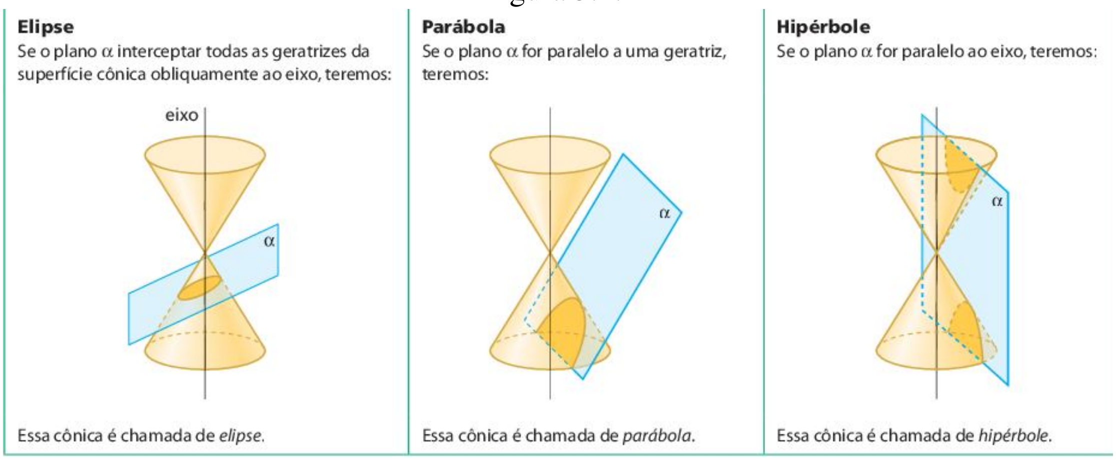
Outra contribuição importante de Galileu, envolvendo as propriedades das cônicas, segundo [10], obviamente está na sua análise do movimento dos projéteis numa componente horizontal (movimento uniforme) e uma componente vertical (movimento uniformemente variado). Mais uma vez o mesmo usufruiu de uma parábola a qual descreve com perfeição a trajetória dos projéteis sobre a ação da força da gravidade. É notória a importância das cônicas para avanços tecnológicos contemporâneos, quer seja na astronomia moderna, ou nas construções de pontes, templos e outras, quer seja nos estudos dos gases como na lei de Boyle.

Capítulo 3

Seções cônicas

Neste capítulo, primeiramente, conceituaremos cada cônica tal qual fez o "grande geômetra" Apolônio em seu trabalho, método ainda hoje utilizado pelos livros didáticos, por [11] e [5]. Em seguida, abordaremos cada cônica de maneira similar às definições do livro didático [11]. Por conseguinte, apresentaremos demonstrações de fórmulas de maneira simples e objetiva. Ao final de cada seção abordaremos algumas aplicações das propriedades refletoras. Segundo [11], seções cônicas são curvas obtidas da interseção de um plano α com cones duplos. Através da variação da inclinação do plano α em relação ao eixo central do cone duplo, pode-se demonstrar que obtemos as três cônicas: elipse, parábola e hipérbole.

Figura 3.1:



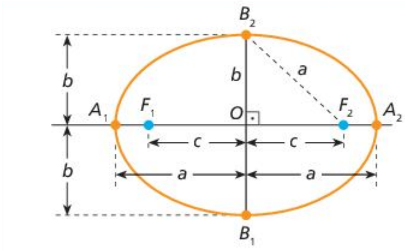
Fonte:[11]

3.1 Elipse

Definição 3.1 *Elipse é o LG dos pontos P de um plano cujo a soma de suas distâncias aos pontos F_1 e F_2, desse plano, é constante e maior que a distância entre eles.*

Vamos identificar e definir os principais elementos da elipse. Então, pela Figura 3.2, temos que:

Figura 3.2:



Fonte:[11]

- **Focos**: são os pontos F_1 e F_2;
- **Distância focal**: é a distância entre os focos e, sua medida é dado por $d(F_1,F_2) = 2c$;
- **Eixo maior**: é o segmento $\overline{A_1A_2}$, que passa pelos focos $d(A_1,A_2) = 2a$;
- **Centro**: é o ponto O, ponto médio de $\overline{A_1A_2}$;
- **Eixo menor**: é o segmento $\overline{B_1B_2}$, perpendicular a $\overline{A_1A_2}$, que passa por O e, sua medida é dada por $d(B_1,B_2) = 2b$;
- **Excentricidade**: é a razão $e = \dfrac{c}{a}$, sendo $0 < e < 1$.

Vamos demonstrar a equação canônica da elipse. Sem perda de generalidade, consideraremos uma elipse de centro na origem do sistema cartesiano, de focos $F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$, ou seja, como seu eixo maior e focos no eixo Ox. Tomando um ponto $P(x,y)$ qualquer sobre a elipse, por definição teremos:

$$d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2a. \tag{3.1}$$

Aplicamos a fórmula da distância entre dois pontos no lado esquerdo em (3.1), temos que:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a. \tag{3.2}$$

Note, na equação (3.2), que podemos isolar a segunda parcela da soma e elevar ao quadrado ambos os membros. Daí,

$$(x-c)^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} + (x+c)^2+y^2. \tag{3.3}$$

Desenvolvendo os quadrados em (3.3) e simplificando, teremos

$$xc + a^2 = a\sqrt{x^2+2xc+c^2+y^2}. \tag{3.4}$$

Podemos elevar ao quadrado ambos os lados de (3.4) e simplificarmos

$$a^2(a^2-c^2) = x^2(a^2-c^2) + a^2y^2. \tag{3.5}$$

Por outro lado, considerando o triângulo $\triangle F_2OB_2$ da Figura 3.2. Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2. \tag{3.6}$$

Segue,

$$b^2 = a^2 - c^2. \tag{3.7}$$

Substituindo (3.7) em (3.5), obtemos:

$$x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2. \tag{3.8}$$

Por fim, dividimos a expressão (3.8) por a^2b^2. Dessa maneira, demonstramos que a equação dessa elipse é dada por:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Para o caso tomado da elipse com focos e eixo maior sobre o eixo Oy, e também, centrada na origem, prosseguindo de maneira análoga aos procedimentos acima, obtemos que:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Exemplo 1 *Obtenha os pontos da elipse* $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ *cuja a distância ao foco, que se encontra no semieixo Ox positivo, é igual a 14.*

Resolução: Note que a elipse tem centro na origem do sistema cartesiano, e ainda que: $a^2 = 100 \Rightarrow a = 10$ e $b^2 = 36 \Rightarrow b = 6$. Então, $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = 100 - 36 = 64 \Rightarrow c = 8$. Logo, os focos são:

$$F_1(-8,0) \quad \text{e} \quad F_2(8,0).$$

Agora, seja $P(x,y)$, um ponto pedido da questão, segue:

$$d(P,F_1) = \sqrt{(x-8)^2 + y^2)} = 14 \Rightarrow (x-8)^2 + y^2 = 196. \tag{3.9}$$

Por outro lado, P pertence à elipse. Então, substituímos (3.9) na equação dada da elipse. Obtemos:

$$x_1 = 30 \quad \text{e} \quad x_2 = -5.$$

Contudo, $x_1 = 30$, não pode ser abscissa de nenhum ponto sobre a elipse: $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$. Agora, fazendo $x_2 = -5$, teremos:

$$\frac{y^2}{30} = 1 - \frac{(-5)^2}{100} \therefore y = 3\sqrt{3}.$$

Portanto, os pontos pedidos são:

$$(-5, -3\sqrt{3}) \quad \text{e} \quad (-5, 3\sqrt{3}).$$

Exemplo 2 *Determine a equação da elipse conhecendo os focos* $F_1(0,4)$ *e* $F_2(0,-4)$ *e as extremidades do eixo maior* $A_1(0,6)$ *e* $A_2(0,-6)$.

Resolução: Note que os focos da elipse pertencem ao eixo Oy. Assim, teremos:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1.$$

Como $c=4$ e $a=6$. Temos $a^2=b^2+c^2 \Rightarrow b^2=20$. Portanto, a equação é:

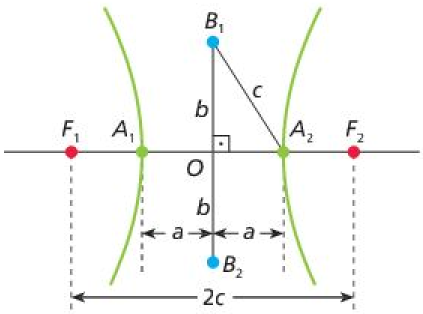
$$\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{36}=1.$$

3.2 Hipérbole

Definição 3.2 *Hipérbole é o LG dos pontos P de um plano cuja diferença, em módulo, de suas distâncias aos pontos F_1 e F_2 desse plano é constante e menor que a distância entre eles.*

Através da figura abaixo, iremos definir e identificar alguns dos principais elementos da hipérbole.

Figura 3.3:



Fonte:[11]

- **Focos**: são os pontos F_1 e F_2;
- **Distância focal**: é a distância entre os focos e, sua medida é dada por $d(F_1,F_2)=2c$;
- **Vértices**: são os pontos A_1 e A_2, intersecções de $\overline{F_1F_2}$ com os ramos da hipérbole;
- **Centro**: é o ponto médio O de $\overline{A_1A_2}$;
- **Eixo real**: é o segmento $\overline{A_1A_2}$, em que $d(A_1,A_2)=2a$;
- **Eixo imaginário**: é o segmento $\overline{B_1B_2}$, em que $d(B_1,B_2)=2b$;
- **Vértices imaginários**: são os pontos, B_1 e B_2, extremos do eixo imaginário;
- **Excentricidade**: é a razão $e=\dfrac{c}{a}$, sendo $e>1$.

Iremos demonstrar a equação canônica da hipérbole. Sem perda de generalidade, consideremos uma hipérbole de centro na origem do sistema cartesiano, de focos $F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$, ou seja, como seu eixo real sobre eixo Ox. Tomando um ponto $P(x,y)$ qualquer sobre a hipérbole, por definição, temos que:

$$|d(P,F_1)-d(P,F_2)|=2a. \tag{3.10}$$

Aplicando a fórmula da distância entre dois pontos no lado esquerdo em (3.10), junto com a propriedade modular, em seguida procedendo analogamente a demonstração da elipse, obtém-se:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Para o outro caso da hipérbole centrada na origem, agora sendo seu eixo real em Oy, segue:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

Exemplo 3 *Encontre a equação na forma canônica, os vértices, o centro, os focos, os vértices imaginários e a excentricidade da hipérbole* $4x^2 - 45y^2 = 180$.

Solução: Primeiramente, colocando a equação da hipérbole na sua forma reduzida, teremos:

$$4x^2 - 45y^2 = 180 \Rightarrow \frac{x^2}{45} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

Logo, o seu centro está na origem $C(0,0)$, e ainda, $a^2 = 45 \Rightarrow a = \sqrt{45}$ e $b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$. Então, $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 45 + 4 = 49 \Rightarrow c = 7$. Logo, temos:

- os focos: $F_1(-7,0)$ e $F_2(7,0)$;
- vértices: $A_1(-\sqrt{45},0)$ e $A_2(\sqrt{45},0)$;
- vértices imaginários: $B_1(0,-2)$ e $B_2(0,2)$;
- excentricidade: $e = \dfrac{7\sqrt{45}}{45}$.

Exemplo 4 *Determine a equação da hipérbole que passa pelo ponto* $P(4\sqrt{2},3)$ *e tem os focos nos pontos* $F_1(5,0)$ *e* $F_2(-5,0)$.

Solução: Pelos dados do problema temos que os focos pertencem ao eixo Ox com seu centro $C(0,0)$ e $c = 5$. Assim,

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 25. \tag{3.11}$$

Por outro lado, o ponto $P(4\sqrt{2},3)$ pertence à hipérbole, segue que:

$$\frac{32}{a^2} - \frac{9}{b^2} = 1 \Rightarrow 32b^2 - 9a^2 = a^2b^2. \tag{3.12}$$

Resolvendo o sistema entre as equações (3.11) e (3.12), ver claramente que $a^2 = 16$ e $b^2 = 9$. Portanto, a equação da hipérbole é:

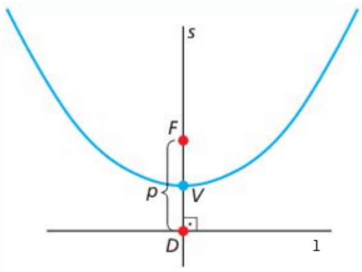
$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

3.3 Parábola

Definição 3.3 *Parábola é o LG dos pontos P de um plano cuja distância a uma reta l dada é igual à distância a um ponto F não pertencente a l.*

Através da figura abaixo vamos identificar e definir alguns dos principais elementos da parábola.

Figura 3.4:



Fonte:[11]

- **Foco**: é o ponto F;
- **Diretriz**: é a reta l;
- **Eixo de simetria ou reta focal**: é a reta s, perpendicular a r, que passa pelo foco;
- **Vértice**: é o ponto V, intersecção da parábola com eixo de simetria;
- **Parâmetro** : é a distância p entre o foco e a diretriz.

Demonstraremos a equação canônica da parábola. Consideremos, sem perda de generalidade, uma parábola com vértice na origem do sistema cartesiano e com o eixo Ox correspondendo ao eixo de simetria. Tomemos o foco $F(p,0)$, com $p > 0$, e por conseguinte, a reta diretriz $l : x = -p$.
Sendo $P(x,y)$ um ponto qualquer da parábola, pela definição teremos que:

$$d(P,F) = d(P,l). \tag{3.13}$$

Agora, aplicando a fórmula da distância entre dois pontos, no primeiro membro, e a fórmula da distância entre ponto e reta, no segundo membro, em (3.13) teremos:

$$\sqrt{(x-p)^2+(y-0)^2} = |x+p|.$$

Elevando a equação acima ao quadrado e simplificando, obtemos:

$$y^2 = 4px.$$

De maneira análoga, teremos outros três casos semelhantes: Ainda com Ox sendo o eixo de simetria, contudo $p < 0$, temos:

$$y^2 = -4px.$$

Agora, adotando o eixo Oy como eixo de simetria, segue que:

- $p > 0$, temos: $x^2 = 4py$.
- $p < 0$, então: $x^2 = -4py$.

Exemplo 5 *Determine a equação da parábola e seus principais elementos, sabendo que ela tem vértice na origem:*

a) passa pelo ponto $(9,6)$ *e tem reta focal paralela ao eixo Ox;*

b) passa pelo ponto $(4,-8)$ *e tem reta focal paralela ao eixo Oy;*

c) e foco no ponto $(0,-3)$*;*

d) e diretriz $l: x = 7$.

Solução:
(a) A parábola é da forma $y^2 = 4px$, como o ponto $P(9,6)$ pertence a parábola, segue que $6^2 = 4p \cdot 9 \Rightarrow p = 1$. Logo, a equação da parábola é: $y^2 = 4x$. Temos também que $d(V,F) = d(V,l)$. Daí,

- A reta diretriz: $x = -1$;
- foco: $F(1,0)$;
- vértice: $V(0,0)$;
- reta focal: $x = 0$.

(b) A parábola é da forma $x^2 = -4py$, como o ponto $P(4,-8)$ pertence a parábola, segue $16 = -4p \cdot (-8) \Rightarrow p = \frac{1}{2}$. Logo, a equação da parábola é: $x^2 = -2y$. Temos também $d(V,F) = d(V,l)$. Daí,

- A reta diretriz: $y = \dfrac{1}{2}$;
- foco: $F\left(0, -\dfrac{1}{2}\right)$;
- vértice: $V(0,0)$;
- reta focal: $y = 0$.

(c) Dado o foco $F(0,-3)$ da parábola, temos que $d(V,F) = \sqrt{(0-0)^2 + (0+3)^2} = 3$. Neste caso, $d(V,l) = 3$. Então,

- A reta diretriz: $y = 3$;
- foco: $F(0,-3)$;
- vértice: $V(0,0)$;
- reta focal: $y = 0$.

(d) Para a reta da diretriz $l : x = 7$, com vértice $V(0,0)$, então: $p = d(V,l) = 7$. Assim, o foco é $F(-7,0)$. Logo, a equação é da forma:

$$y^2 = -4px \Rightarrow y^2 = -28x.$$

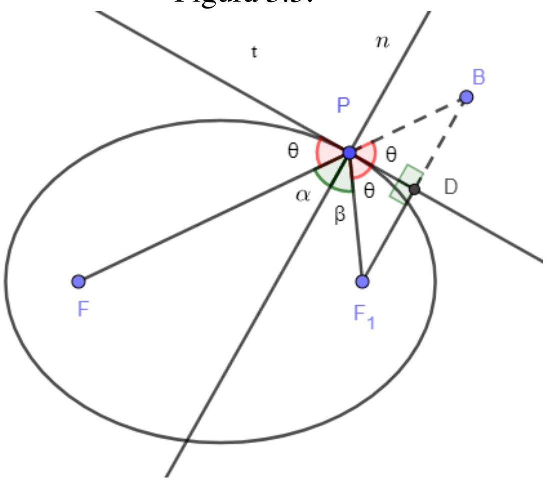
Por fim, a reta focal é $x = 0$.

3.4 Propriedades refletoras das cônicas e aplicações

Apresentamos nessa seção, algumas propriedades de reflexões fundamentadas às estruturas da elipse, hipérbole e parábola, adotamos [8] e [18] como referência para o desenvolvimento teórico desse tópico. Antes de iniciarmos as propriedades refletoras das cônicas, trataremos dos teoremas das tangentes das cônicas.

Teorema 3.1 (das tangentes para elipses) *Considere uma elipse de focos F e F_1 e P um ponto pertencente à elipse. Então, a bissetriz externa do triângulo $\triangle FPF_1$ e que passa por P será tangente à elipse.*

Figura 3.5:

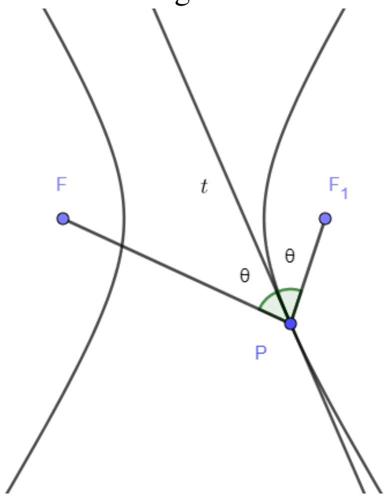


Fonte: autor

Demonstração. Seja B o ponto simétrico a F_1 em relação à reta t, e D, a interseção do segmento $\overline{F_1B}$ com a reta t. Por construção, temos que $\overline{F_1D} = \overline{BD}$, e ainda, $F_1\widehat{D}P = B\widehat{D}P = 90^o$. Por hipótese, t é bissetriz externa de $\triangle F_1PF$ em P, portanto essa reta t divide $F_1\widehat{P}B$ em dois ângulos de medidas iguais. Então, $F_1\widehat{P}D = B\widehat{P}D$. Logo, os triângulos $\triangle F_1DP$ e $\triangle BDP$ são congruentes pelo caso LAA_o (Lado Ângulo Ângulo oposto). Pela unicidade do ponto P pertencente à reta t e à elipse, ver claramente que, a reta t é, de fato, tangente à elipse em P.

Teorema 3.2 (das tangentes para hipérboles) *Considere uma hipérbole de focos F e F_1 com o ponto P pertencente à hipérbole.* ***O Teorema das tangentes para hipérboles*** *afirma que a bissetriz interna do triângulo $\triangle FPF_1$ em P é uma reta tangente à hipérbole.*

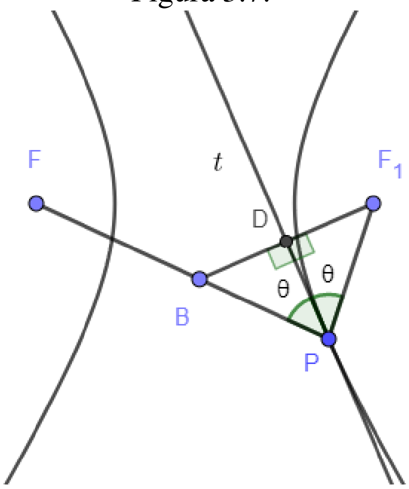
Figura 3.6:



Fonte: autor

Demonstração. Vamos destacar o ponto B de modo que ele seja simétrico de F_1 em relação à reta t.

Figura 3.7:

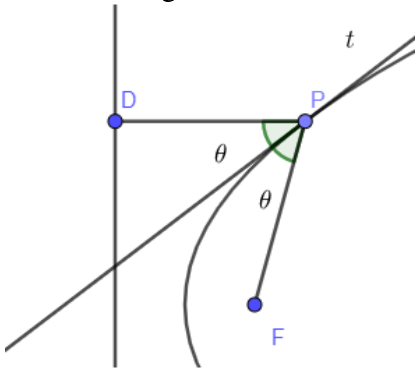


Fonte: autor

Como B o ponto simétrico a F_1 em relação à reta t, e D, a interseção do segmento $\overline{F_1B}$ com a reta t. Então, de maneira análoga a demonstração anterior, chegamos a conclusão que a reta t divide o ângulo $F_1\widehat{P}B$ em dois ângulos de medidas iguais. Pela unicidade do ponto P pertencente à reta t e à hipérbole, chegamos a conclusão que, de fato, a reta t é tangente em P à hipérbole.

Teorema 3.3 (das tangentes para parábola) *Considere uma parábola de foco F com o ponto P pertencente à parábola.* ***O Teorema das tangentes para parábolas*** *afirma que o ponto simétrico ao foco F da parábola, em relação à reta tangente em P, pertence à diretriz da parábola.*

Figura 3.8:



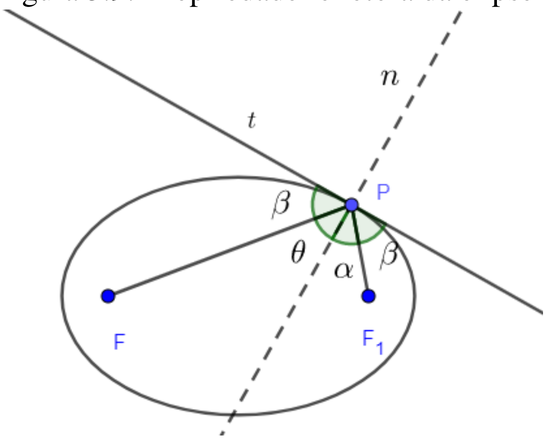
Fonte: autor

Demonstração. Seja o ponto P o ponto de tangência da reta t com a parábola, por definição o ponto Q é simétrico ao foco F em relação a reta t. Assim, a reta t é bissetriz do ângulo $F\widehat{P}D$, por consequência, também é mediatriz relativa ao mesmo ângulo. Logo, por definição da mediatriz $\overline{FP} = \overline{PD}$. Portanto, pela definição de parábola, temos que o ponto Q pertence à reta diretriz da parábola de foco F.

3.4.1 Propriedade refletora da elipse

Considerando um ponto P sobre a elipse, tomando sobre essa elipse em P as retas t e n, reta tangente e normal, respectivamente, enunciaremos a propriedade refletora da elipse.

Figura 3.9: Propriedade refletora da elipse



Fonte: autor

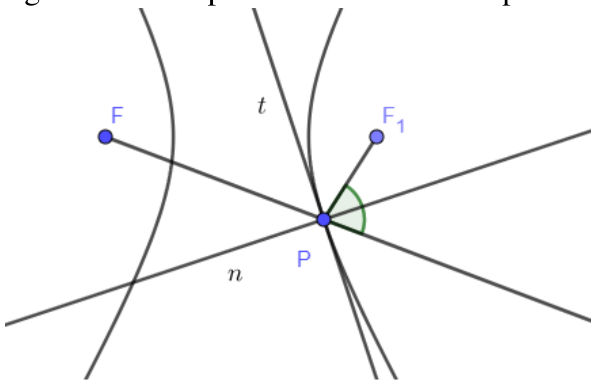
Teorema 3.4 *Seja P o ponto de tangência da reta t com a elipse de focos F e F_1. Então a reta normal à elipse n, em P é bissetriz interna do ângulo $F_1\widehat{P}F$.*

Demonstração. Note que a reta n é perpendicular à reta t, e por consequência, tem-se: $\beta + \theta = 90^o$, e também, $\beta + \alpha = 90^o$. Logo, $\theta = \alpha$. Portanto, a reta n é bissetriz interna do ângulo $F_1\widehat{P}F$.

3.4.2 Propriedade refletora da hipérbole

Teorema 3.5 *Consideremos uma hipérbole de focos F e F_1, uma reta tangente à mesma no ponto P, e uma outra reta n normal à hipérbole no mesmo ponto P. A Propriedade Refletora da hipérbole afirma que a reta n é bissetriz do ângulo formado pela semirreta $\overrightarrow{FP}$ e o segmento $\overline{PF_1}$.*

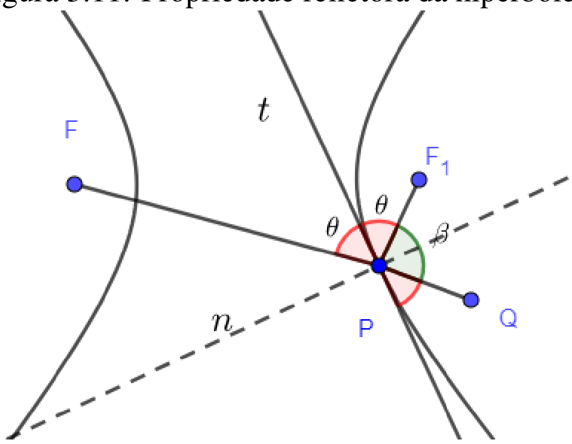
Figura 3.10: Propriedade refletora da hipérbole



Fonte: autor

Demonstração. Temos que a reta tangente t será bissetriz interna, em relação ao ponto P, do triângulo $\triangle FPF_1$. Agora, tomamos um ponto Q pertencente à semirreta $\overrightarrow{FP}$, de modo que o segmento $\overline{PQ}$ seja simétrico ao segmento $\overline{PF_1}$ em relação à reta n.

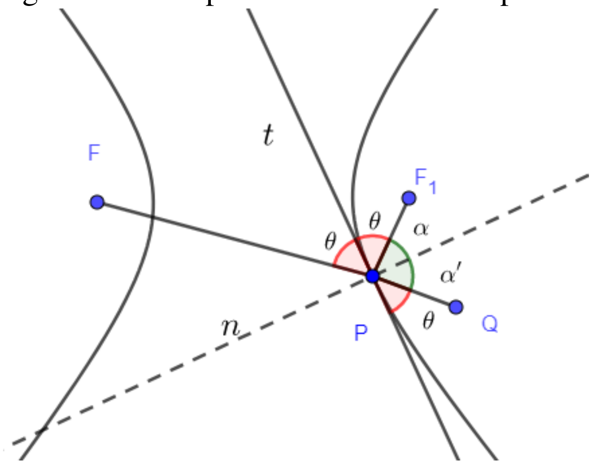
Figura 3.11: Propriedade refletora da hipérbole



Fonte: autor

Note que o ângulo formado entre a reta t e semi-reta $\overrightarrow{PQ}$ tem valor θ, pois o mesmo é oposto pelo vértice ao ângulo destacado entre o segmento $\overline{FP}$ e a reta t. Agora, tomemos dois outros ângulos α e α' de modo que $\beta = \alpha + \alpha'$.

Figura 3.12: Propriedade refletora da hipérbole



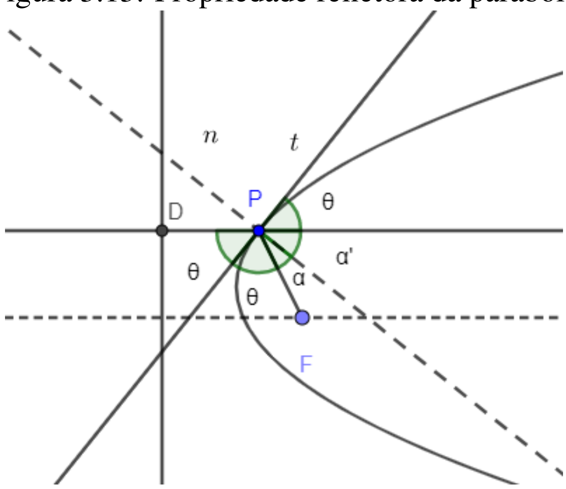
Fonte: autor

Logo, como as retas t e n são perpendiculares no ponto P, então $\theta + \alpha = \theta + \alpha' = 90^{o}$. Então, $\alpha = \alpha'$. Portanto, a reta n é bissetriz do ângulo $\beta = F_1\widehat{P}Q$.

3.4.3 Propriedade refletora da parábola

Considere um ponto P sobre a parábola de foco F, uma reta t bissetriz do ângulo $Q\widehat{P}F$ e uma outra reta n perpendicular a t em P. (Ver a Figura 3.13) Assim, podemos enunciar o seguinte teorema.

Figura 3.13: Propriedade refletora da parábola



Fonte: autor

Teorema 3.6 *O ângulo que o raio vetor $\overrightarrow{FP}$ forma com a reta n é igual ao ângulo que n forma com a semirreta de início em P e está contida na concavidade da parábola, de modo que essa semi-reta seja paralela ao eixo de simetria e n seja uma reta normal à parábola.*

Demonstração. Seja a reta t bissetriz do ângulo $D\widehat{P}F$. Por consequência, podemos afirmar que t divide esse ângulo em dois ângulos adjacentes iguais a θ. Por outro lado, as retas t e $\overleftrightarrow{PD}$ formam ângulos opostos pelo vértice de medida θ em relação ao ponto P, o que está acima da reta $\overleftrightarrow{PD}$ é adjacente com o ângulo formado pelas retas n e $\overleftrightarrow{PD}$. Então, como as retas t e n são perpendiculares, temos que:

$$\theta + \alpha = \theta + \alpha' = 90^{\text{o}}.$$

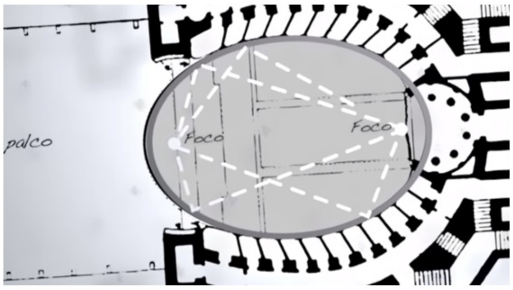
Portanto,

$$\alpha = \alpha'.$$

3.4.4 Aplicações

Segundo [15], os refletores dos consultórios odontológicos são refletores elípticos que têm como objetivo concentrar o máximo de luz onde se está trabalhando e também evitar que os raios luminosos ofusquem a visão do paciente causando certo desconforto. Existem alguns formatos de construções de salas que dão condições acústicas especiais em auditórios, teatros, e catedrais, como acontece no Teatro Nacional de São Carlos, em Lisboa (Portugal), o qual tem formato elíptico em que um dos focos está no palco e o outro na tribuna real, segundo [16]. Assim, o som emitido no palco reflete nas paredes do teatro em direção ao outro foco, exatamente na cadeira do rei. Em outro meio e com finalidade diferente do exemplo anterior, temos a litotripsia, recurso utilizado para destruir pedras nos rins. Segundo [15], o litotriptor, aparelho usado para o tratamento, possui um espelho elíptico que concentra os raios emitidos num determinado ponto com grande precisão. As ondas de choque são criadas fora do paciente e viajam através da pele e tecido até atingirem os cálculos mais densos, fragmentando-os.

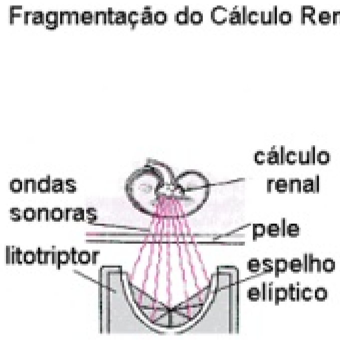
Figura 3.14: Esquema do Teatro São Carlos.



Fonte: [16]

Segundo [15] e [10], a propriedade refletora da hipérbole faz com que a mesma tenha várias aplicações práticas. Um exemplo de uma aplicação óptica é o chamado telescópio de reflexão, já detalhado no segundo capítulo desse trabalho.

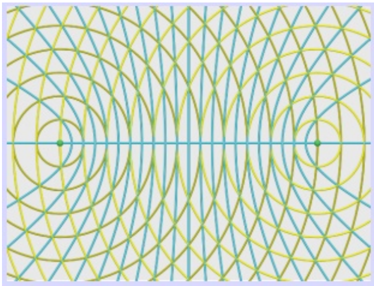
Figura 3.15: Tratamento com litotripsia



Fonte: [10]

Outra aplicação prática da propriedade da hipérbole é o sistema de navegação de rádio terrestre LORAN. Este permite aos navios e aeronaves a compreensão de sua posição e velocidade.

Figura 3.16: Interseção de frente de onda circulares, sistema LOGAN.

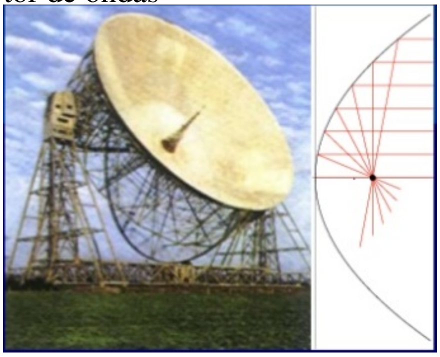


Fonte: [6]

Assim como na elipse, a propriedade refletora da hipérbole também se faz presente no campo da acústica, como em construções de teatros, auditórios e igrejas. Um exemplo é a Catedral de Brasília, que possui formato hiperbólico, ocasionando a vibração acústica em suas paredes. Por esta razão, não há sequer a necessidades de utilização de microfones para as celebrações de missas.

Outro pertinente exemplo, são as antenas que captam sinais do espaço. Já pensaram por que tais antenas são chamadas de parabólicas? A resposta para essa pergunta está na propriedade refletora da parábola. Por [19], os sinais que recebemos de ondas de rádio são muito fracos. Dessa forma, é necessário captá-los em uma área relativamente grande e concentrá-los em um único ponto para que sejam naturalmente amplificados. O mesmo acontece para sinais de ondas de luz nos telescópios e fornos solares. No sentido contrário de captação de ondas (luzes ou sons), porém se valendo da mesma propriedade refletora, estão, por exemplo: os auto-falantes, holofotes, lanterna e faróis de carro. No caso, uma fonte luminosa no foco produz um feixe de raios paralelos que vão de encontro à superfície à sua frente.

Figura 3.17: Parábola com receptor de ondas



Fonte:[10]

Figura 3.18: Parábola com emissor de ondas

Fonte: [10]

Figura 3.19: Catedral de Brasília.

Fonte: autor

Nos anos 70, um projeto em Odeillo, no Sul da França, segundo [10] inovou e desenvolveu uma "fornalha" abastecida pela luz solar, que ainda hoje é a maior em funcionamento no mundo. A fornalha faz uso de um grande refletor parabólico, que concentra, em uma pequena área, os raios de sol redirecionados por 63 espelhos planos individuais. Um processo mecânico que permite gerar um aquecimento de aproximadamente 3.500 graus celsius na fornalha. E isso, sem o uso de qualquer artefato ou química prejudicial ao ambiente.

Figura 3.20: Forno solar de Odeillo

Fonte: [7]

Capítulo 4

Construções das cônicas

Neste momento, apresentaremos algumas atividades de construções das cônicas. Inicialmente abordaremos os métodos convencionais, explorados por [5] e [11]. Em seguida, apresentaremos outros métodos baseados em [9], no intuito de implementar uma metodologia mais significativa no processo de ensino-aprendizagem das turmas do 3º ano do ensino médio. A princípio, as construções devem acontecer no laboratório de matemática, e depois, serão simuladas algumas construções com auxílio do software Geogebra[1] no laboratório de informática.

4.1 Construções elementares da elipse

Conhecida como "método do jardineiro" essa construção é baseada por [11] se constitui de maneira bastante simplificada. Nos utilizaremos dos seguintes materiais: um barbante inextensível, duas ventosas, o quadro de vidro e um pincel de quadro. Seguem os procedimentos:

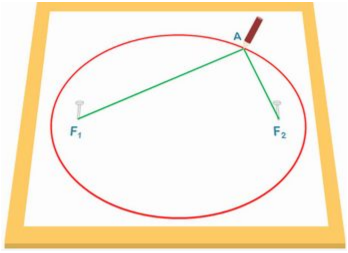
1. Primeiramente, marcamos dois pontos fixos, F_1 e F_2, distando $2c$ um do outro. Para isso, usaremos as ventosas, ou seja, prenderemos as duas ventosas ao quadro de vidro;

2. Em seguida, amarraremos as pontas do barbante nas ventosas, de modo que o comprimento do barbante $2a$ seja maior que $2c$;

3. Terceiro passo, com o pincel esticado ao barbante deslizamos o lápis sobre o quadro dando uma volta completa.

[1] GeoGebra é um software gratuito e multiplataforma de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino. Ele integra geometria, álgebra, planilha eletrônica, gráficos, estatística e cálculo em um único ambiente fácil de usar.

Figura 4.1: Construção via definição.



Fonte: [9]

Método de dobradura com simulação no Geogebra na sua versão Clássico 6

Os procedimentos a seguir foram obtidos por [9]:

- Marque um ponto mais ou menos no centro da folha, o qual chamaremos de F_1;
- Com o auxílio do compasso, desenhe duas circunferências centrados em F_1, ambos com raios $2a$ *(aproximadamente 14 cm de raio)* e $2c$ *(com c menor do que a)*;
- Trace uma semirreta horizontal com origem em F_1; em seguida, tome o ponto H, interseção da semirreta com a circunferência de raio $2c$;
- Marque um ponto I sobre a circunferência de raio $2a$, daí então, dobre o papel manteiga de forma a fazer coincidir os pontos I e H;
- Repita essa operação para diferentes escolhas do pontos I sobre a circunferência de raio $2a$.

Após um número significativo de operações será observado que as dobras parecem tangenciar uma curva. Assim podemos perceber que essas dobras tangenciam uma curva, pela qual sua forma representa uma elipse. **Utilização do software Geogebra para simular a construção acima:**

1. Utilizando a barra de ferramenta *Segmento* construa dois segmentos de medidas f e g, com $g > f$;
2. Na mesma opção de ferramenta, construa uma reta h, desconsidere o ponto E dessa reta;
3. Com a ferramenta *Compasso* construa duas circunferência concêntricas de centro F com raios g e f, respectivamente;
4. Utilize a ferramenta *Ponto de Interseção* obtenha o ponto H, ponto de interseção da reta h e a circunferência de raio f, desconsidere o outro ponto de interseção G;
5. Na mesma linha de ferramenta *Ponto* tome um ponto I sobre a circunferência de raio g;

6. Na ferramenta *Mediatriz*, trace a mediatriz i do segmento $\overline{HI}$;

7. Na ferramenta *Reta* construa a reta j que passa pelos pontos F e I;

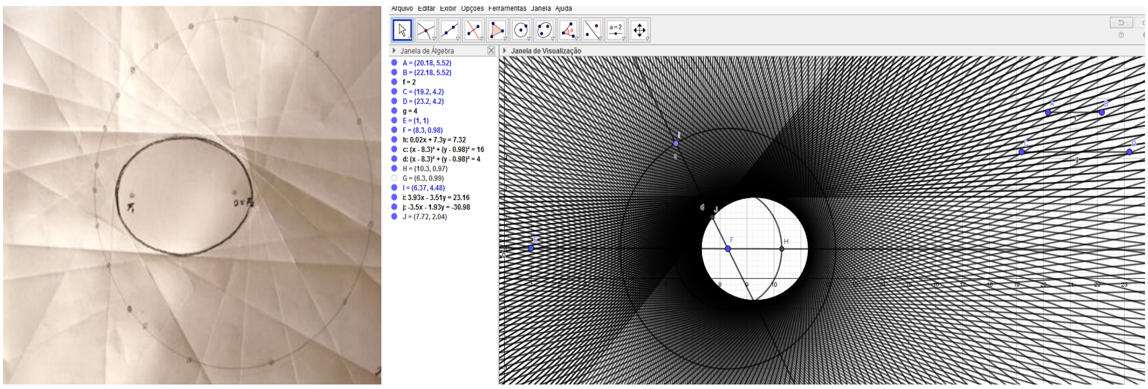
8. Com a ferramenta *Interseção de Dois Objetos* obtenha o ponto J, interseção das retas i e j;

9. Clique com o botão esquerdo do mouse em cima da reta mediatriz i, em seguida, marque a opção *Habilitar Rastro*;

10. clique com o botão direito do mouse no ponto I, em seguida, marque a opção *Animar*.

Definição 4.1 *Elipse é o lugar geométrico dos pontos J quando I se move ao longo da circunferência de raio g.*

Figura 4.2: Construções elipse: via dobradura, à esquerda; via Geogebra, à direita.



(a) Fonte: [9]

(b) Fonte: [9]

4.2 Construções elementares da hipérbole

Para essa construção, baseada em [11], utilizaremos os seguintes materiais: quadro de vidro, pincel para quadro, régua para quadro, duas ventosas e barbante inextensível. Abaixo o passo a passo dos respectivos procedimentos:

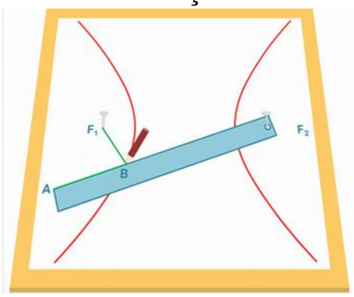
1. Inicialmente, prendemos a ponta do barbante a uma extremidade da régua, sendo que a outra ponta barbante deve ficar fixa a uma das ventosas pressa ao quadro de vidro. Chamemos essa ventosa de foco F_1;

2. Agora, apoiaremos a outra extremidade da régua a segunda ventosa, digamos que seja o segundo foco F_2;

3. Prosseguindo, utilizaremos a ponta do pincel para esticar o barbante junto à régua;

4. Por fim, giramos a régua de modo que uma de suas extremidades fique fixa ao foco F_2, assim obteremos um dos ramos da hipérbole. De maneira análoga a esse procedimento, agora fixando a outra extremidade da régua ao foco F_1 obteremos o outro ramo da hipérbole.

Figura 4.3: Construção via definição.



Fonte: [9]

Método de dobradura com simulação no Geogebra na versão Clássico 6

Procedimentos a seguir foram obtidos por [9]:

- Marque um ponto mais ou menos no centro da folha, o qual chamaremos de F_1;
- Com o auxílio do compasso, desenhe duas circunferências centrados em F_1, ambos com raios $2a$ *(aproximadamente 14 cm de raio)* e $2c$ *(com c menor do que a)*;
- Trace uma semirreta horizontal com origem em F_1, em seguida, tome o ponto H interseção da semirreta com a circunferência de raio $2a$;
- Marque um ponto I sobre a circunferência de raio $2c$, daí então, dobre o papel manteiga de forma a fazer coincidir os pontos I e H;
- Repita essa operação para diferentes escolhas do pontos I sobre a circunferência de raio $2c$.

Assim, após um número significativo de operações, será observado que as dobras tangenciam uma curva. Dessa maneira, podemos observar que essas dobras tangenciam uma curva, pela qual sua forma representa uma hipérbole.

Utilização do software Geogebra para simular a construção acima

1. Utilizando a barra de ferramenta *Segmento* construa dois segmentos de medidas f e g, com $g > f$;
2. Na mesma opção de ferramenta, construa uma reta h, desconsidere o ponto E dessa reta;

3. Com a ferramenta *Compasso* construa duas circunferências concêntricas de centro F com raios g e f, respectivamente;

4. Utilize a ferramenta *Interseção de Dois Objetos* e obtenha o ponto H, ponto de interseção da reta h e a circunferência de raio g, desconsidere o outro ponto de interseção G;

5. Na mesma opção de ferramenta *Ponto* tome um ponto I sobre a circunferência de raio f;

6. Na ferramenta *Mediatriz*, trace a mediatriz i do segmento $\overline{HI}$;

7. Na ferramenta *Reta* construa a reta j que passa pelos pontos F e I;

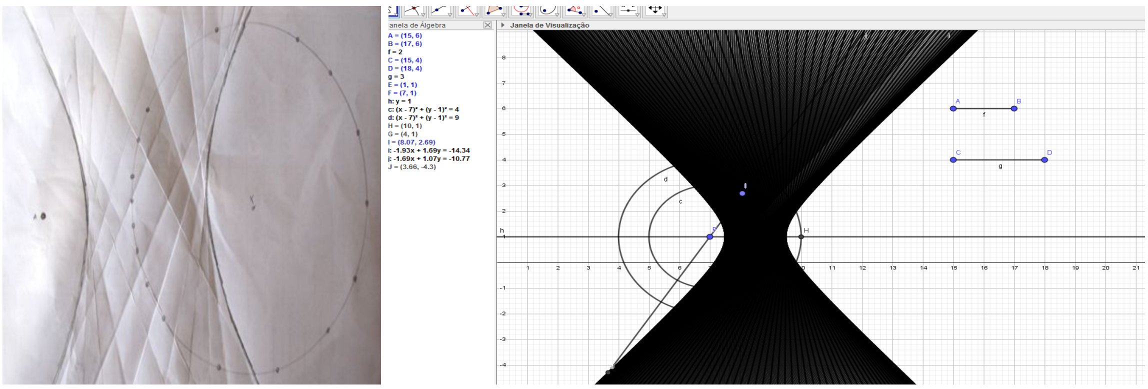
8. Com a ferramenta *Interseção de Dois Objetos* obtenha o ponto J, interseção das retas i e j;

9. Clique com o botão esquerdo do mouse em cima da reta mediatriz i, em seguida, marque a opção *Habilitar Rastro*;

10. clique com o botão direito do mouse no ponto I, em seguida, marque a opção *Animar*.

Definição 4.2 *Hipérbole é o lugar geométrico dos pontos J quando I se move ao longo da circunferência de raio f.*

Figura 4.4: Construções hipérbole: via dobradura, à esquerda; via Geogebra, à direita.



(a) Fonte: [9]   (b) Fonte:[9]

4.3 Construções elementares da parábola

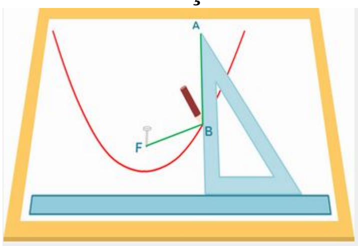
Para a construção da parábola, baseada em [11], usaremos os seguintes instrumentos: quadro de vidro, pincel para quadro de vidro, esquadro de madeira, uma ventosa e barbante inextensível (com tamanho inferior ao lado do esquadro pelo qual se fará o procedimento). Seguimos os respectivos passos:

1. Iniciaremos fixando a ventosa em lugar apropriado do quadro de vidro, de preferência a uma distância mínima de 30 cm de cada borda, sendo essa ventosa o foco F;

2. Em seguida, prendemos uma ponta do barbante numa extremidade do esquadro e a outra extremidade na ventosa;

3. Prosseguindo, com o pincel apoiado no esquadro esticamos o barbante e contornamos assim uma curva, deslizando o esquadro para à direita. De maneira análoga, repetimos o processo com o esquadro invertido.

Figura 4.5: Construção via definição.



Fonte: [9]

Método de dobradura com simulação no Geogebra na versão Clássico 6

Seguem os procedimentos obtidos por [9]:

- Desenhe uma reta horizontal l *(diretriz da parábola)* na folha de papel manteiga, em seguida, marque, fora dessa reta, um ponto fixo F *(foco da parábola)*;

- Selecione um ponto qualquer C sobre a reta l, em seguida, dobre o papel manteiga de forma a fazer coincidir os pontos C e F;

- Repita essa operação para diferentes escolhas de pontos quaisquer sobre a diretriz l, realizando esta operação um número suficiente de vezes.

Note que, as dobras tangenciam uma curva que tem formato de parábola.

Utilização do software Geogebra para simular a construção acima

1. Construa uma reta f, e em seguida, marque um ponto C fora dela;

2. Utilize a ferramenta *ponto sobre o objeto* e tome um ponto D sobre a reta f;

3. Com a ferramenta *mediatriz* construa a mediatriz g sobre o segmento $\overline{CD}$;

4. Utilize a ferramenta *Reta Perpendicular* construa a reta h perpendicular à reta f passando pelo ponto D;

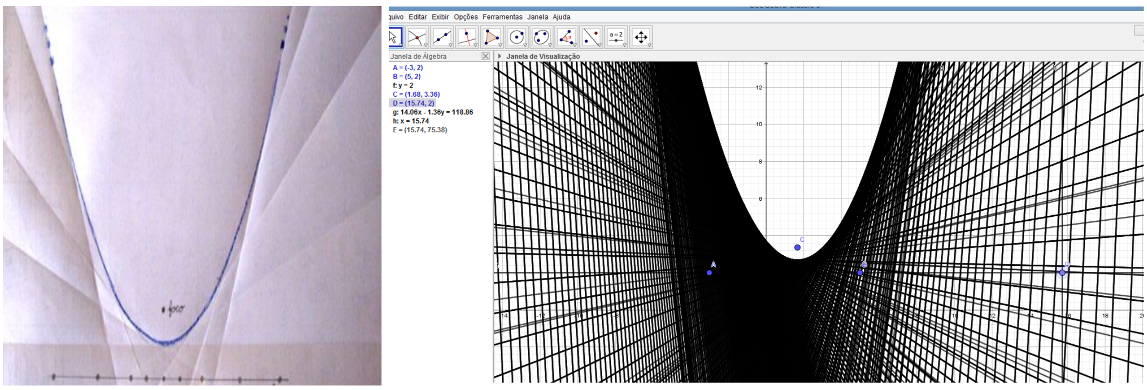
5. Utilizando a ferramenta *Interseção de Dois Objetos*, obtenha o ponto E, interseção das retas g e h;

6. Clique com o botão esquerdo do mouse em cima da reta g, em seguida, marque a opção *Habilitar Rastro*;

7. Finalmente, clique no botão direito do mouse no ponto D, em seguida, marque a opção *Animar*.

Definição 4.3 *Parábola é o lugar geométrico dos pontos E quando D se move ao longo da reta f.*

Figura 4.6: Construções parábola: via dobradura, à esquerda; via Geogebra, à direita.



(a) Fonte: [9]

(b) Fonte: [9]

Capítulo 5

Diâmetros das cônicas

Neste capítulo, apresentaremos uma abordagem mais ampla das cônicas, aprofundando num tópico do assunto que ainda é pouco explorado nos livros atuais de geometria analítica. Todavia, tem grande relevância ao conteúdo como um todo, pois através de suas aplicações podemos compreender importantes razões, como por exemplo: o fato de que cada elipse é a imagem afim de um círculo; a razão de semelhança entre elipses; o porquê da parábola não possuir diâmetros conjugados; entender melhor o comportamento das retas assíntotas da hipérbole, dentre outros.

Apresentaremos visualizações dos principais resultados através de figuras pelo software Geogebra, no intuito de conceituar ainda mais os enunciados. Iniciaremos esse capítulo, com uma definição trivial dos diâmetros das cônicas e, em seguida, exploraremos um exemplo de uma questão cobrada na Olimpíada Brasileira de Matemática Universitária (2006).

Definição 5.1 *O Diâmetro de uma cônica é o LG dos pontos médios das cordas paralelas a uma dada direção.*

Exemplo 6 *(OBM-U-2006, adaptada) Dada uma hipérbole e uma reta, não vertical e não paralela às assíntotas[1], determine a equação do lugar geométrico dos pontos médios das cordas da hipérbole paralelas à reta dada. (***Obs.:** *Uma corda de uma hipérbole é um segmento cujos extremos pertencem à hipérbole).*

Resolução: De acordo com a Definição 5.1, o enunciado pede justamente a equação do diâmetro de uma hipérbole relativa a uma direção não paralela às assíntotas e não vertical. Vamos considerar a hipérbole $\mathscr{H}$ na sua forma canônica de centro na origem:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{5.1}$$

Seja r tal reta, de acordo com enunciado, então:

$$r : y = mx + h, \quad \text{com} \quad m \neq \pm\frac{b}{a}. \tag{5.2}$$

[1]São linhas que se aproximam muito de uma curva, porém nunca chegam a tocá-la

Substituindo (5.2) em (5.1), obtemos:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{(mx+h)^2}{b^2} = 1.$$

Logo,

$$b^2x^2 - a^2(m^2x^2 + 2mhx + h^2) - a^2b^2 = (b^2 - a^2m^2)x^2 - 2mha^2x - a^2(h^2 + b^2) = 0.$$

Sendo $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ os dois pontos de interseção da reta com a hipérbole $\mathscr{H}$, teremos que a abscissa do ponto médio da corda definida por esse dois pontos será:

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\text{soma das raízes}}{2} = \frac{2mha^2}{2(b^2 - a^2m^2)} = \frac{mha^2}{b^2 - a^2m^2}. \tag{5.3}$$

Por outro lado, a ordenada do pontos médios de P_1 e P_2, será:

$$y_m = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{mx_1 + h + mx_2 + h}{2} = mx_m + h,$$

donde

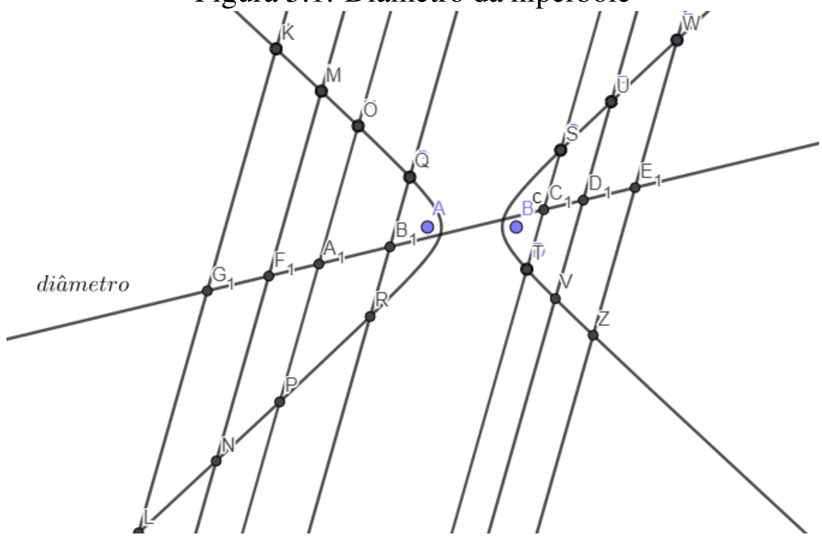
$$y_m = m\frac{mha^2}{b^2 - a^2m^2} + h = \frac{b^2h}{b^2 - a^2m^2}. \tag{5.4}$$

Agora, dividindo as equações (5.3) por (5.4), obtemos:

$$\frac{x_m}{y_m} = \frac{ma^2}{b^2} \quad \Rightarrow \quad y_m = \frac{b^2}{ma^2}x_m.$$

Logo, o LG pedido é, portanto, uma reta, que passa pelo centro da hipérbole $\mathscr{H}$ e tem coeficiente angular igual a $\dfrac{b^2}{ma^2}$.

Figura 5.1: Diâmetro da hipérbole



Fonte: autor

O resultado do Exemplo 5.1 nos revela que o diâmetro da hipérbole é uma reta que passa pelo seu centro. Assim, este resultado nos proporciona formas mais gerais para as cônicas. A seguir, demonstraremos esse resultado.

Teorema 5.1 (Teorema dos Diâmetros das Cônicas) *Considere uma cônica de equação*

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0.$$

O diâmetro de cônica relativo a qualquer direção será uma reta.

Demonstração. Vamos considerar uma reta passando pelo ponto $P_0(x_m,y_m)$ e com direção do vetor (p,q),

$$\begin{cases} x = x_m + pt \\ y = y_m + qt. \end{cases}$$

Os pontos de interseção da reta com a cônica serão soluções do sistema:

$$\begin{cases} x = x_m + pt \\ y = y_m + qt \\ Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0. \end{cases}$$

Então, temos que:

$$\begin{aligned} &A(x_m^2+2ptx_m+p^2t^2)+B[x_my_m+t(x_mq+y_mp)+pqt^2] \\ &\quad +C(y_m^2+2y_mqt+q^2t^2)+D(x_m+pt)+E(y_m+qt)+F=0, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} &(Ap^2+Bpq+Cq^2)t^2+[2Apx_m+B(qx_m+py_m)+2Cqy_m+Dp+Eq]t \\ &\quad +(Ax_m^2+Bx_my_m+Cy_m^2+Dx_m+Ey_m+F)=0. \end{aligned} \tag{5.5}$$

A equação (5.5) é do 2º grau na variável t e terá duas soluções t_1 e t_2. Agora, sendo $P_1(x_1,y_1)$ e $P_2(x_2,y_2)$ os dois pontos de interseção da reta com a cônica, teremos que o ponto médio da corda definida por estes dois pontos será:

$$x_m = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{(x_m+pt_1)+(x_m+pt_2)}{2} = x_m + \frac{p(t_1+t_2)}{2} \Rightarrow t_1+t_2=0.$$

Portanto, a soma das raízes da equação (5.5) é nula. Por outro lado, a soma das raízes de uma equação do 2º grau é dada por: $t_1+t_2=-\dfrac{b}{a}$, em que b é o coeficiente da variável t e a o coeficiente da variável de t^2. Então, temos que:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{2Apx_m+B(qx_m+py_m)+2Cqy_m+Dp+Eq}{2(Ap^2+Bpq+Cq^2)} \\ &= -\frac{2Apx_m+B(qx_m+py_m)+2Cqy_m+Dp+Eq}{2} \\ &= Apx_m+\frac{B}{2}(qx_m+py_m)+Cqy_m+\frac{D}{2}p+\frac{E}{2}q. \end{aligned}$$

Então, organizando a equação acima em função de $\frac{p}{q}$, obtemos:

$$\begin{aligned} 0 &= Ax_m + \frac{B}{2}\left[\left(\frac{q}{p}\right)x_m + y_m\right] + C\left(\frac{q}{p}\right)y_m + \frac{D}{2} + \frac{E}{2}\left(\frac{q}{p}\right) \\ &= \left(Ax_m + \frac{B}{2}y_m + \frac{D}{2}\right) + \left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{B}{2}x_m + Cy_m + \frac{E}{2}\right). \end{aligned}$$

Note que $\frac{q}{p}$ é o coeficiente angular da direção da reta. Logo, considerando $m = \frac{q}{p}$, segue:

$$\left(Ax_m + \frac{B}{2}y_m + \frac{D}{2}\right) + m\left(\frac{B}{2}x_m + Cy_m + \frac{E}{2}\right) = 0. \tag{5.6}$$

Daí,

$$Ax_m + \frac{B}{2}y_m + \frac{D}{2} + \frac{B}{2}mx_m + Cmy_m + \frac{E}{2}m = \left(A + \frac{Bm}{2}\right)x_m + \left(\frac{B}{2} + Cm\right)y_m + \frac{D}{2} + \frac{Em}{2} = 0. \tag{5.7}$$

Assim, colocando y_m em função de x_m em (5.7), obteremos:

$$y_m = -\frac{\left(A + \frac{Bm}{2}\right)}{\left(\frac{B}{2} + Cm\right)}x_m - \frac{D + Em}{2\left(\frac{B}{2} + Cm\right)}. \tag{5.8}$$

Portanto, o diâmetro da cônica é uma reta, cuja a equação reduzida é dada por (5.8).

Observação 5.1 *Tomando o caso particular em que tem-se $B = D = E = 0$ em* (5.8)*, a equação reduzida da reta, terá a seguinte equação:*

$$y_m = -\frac{A}{Cm}x_m. \tag{5.9}$$

Lema 5.2 *Se uma curva for uma elipse ou uma hipérbole, o diâmetro de sua curva sempre passará pelo seu centro.*

Demonstração. Dada uma cônica descrita por sua equação geral:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Por [8],definiremos o **centro da cônica** como sendo o ponto $C(x_0, y_0)$, solução do sistema a seguir:

$$\begin{cases} 2Ax_0 + By_0 + D = 0 \\ Bx_0 + 2Cy_0 + E = 0. \end{cases}$$

Dividindo as duas equações acima por 2, obtemos:

$$\begin{cases} Ax_0 + \frac{B}{2}y_0 + \frac{D}{2} = 0 \\ \frac{B}{2}x_0 + Cy_0 + \frac{E}{2} = 0. \end{cases}$$

Por outro lado, de (5.6) chegamos à conclusão que o ponto $C(x_0, y_0)$ estará contido na reta do diâmetro, visto que:

$$\left(Ax_0 + \frac{B}{2}y_0 + \frac{D}{2}\right) + m\left(\frac{B}{2}x_0 + Cy_0 + \frac{E}{2}\right) = 0 + m \cdot 0 = 0.$$

Observação 5.2 *No caso das cônicas do tipo de parábola a curva não possui* **centro***. Tomando a parábola $y^2 - px = 0$, substituindo esses valores no sistema acima ver, claramente, que não há solução para (x_0, y_0), verificamos:*

$$\begin{cases} 2 \cdot 0 \cdot x_0 + 0 \cdot y_0 + (-p) = 0 \\ 0 \cdot x_0 + 2 \cdot 1 \cdot y_0 = 0. \end{cases}$$

Teorema 5.3 *As equações dos diâmetros relativos a uma direção de coeficiente angular m para as cônicas nas formas canônicas são dadas por:*

1. *Diâmetro da elipse:* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y = -\dfrac{b^2 x}{a^2 m}$;
2. *Diâmetro da hipérbole:* $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y = \dfrac{b^2 x}{a^2 m}$;
3. *Diâmetro da parábola:* $y^2 = 2px \Rightarrow y = \dfrac{p}{m}$.

Demonstração. Considere uma cônica na sua forma geral

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \tag{5.10}$$

Para elipse na forma canônica, temos que:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0. \tag{5.11}$$

Comparando (5.10) e (5.11), temos:

$$A = b^2, \quad C = a^2 \quad \text{e} \quad F = -a^2b^2. \tag{5.12}$$

Substituindo (5.12) em (5.9), obtemos:

$$y = -\frac{b^2}{a^2 m}x.$$

Para hipérbole na forma canônica, temos que:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0. \tag{5.13}$$

Comparando (5.10) e (5.13), temos:

$$A = b^2, \quad C = -a^2 \quad \text{e} \quad F = -a^2b^2. \tag{5.14}$$

De (5.14) em (5.9), vem:

$$y = \frac{b^2}{a^2 m} x.$$

Para parábola na forma canônica, temos que:

$$y^2 = 2px \quad \Rightarrow \quad y^2 - 2px = 0. \tag{5.15}$$

Comparando (5.10) e (5.15), temos:

$$A = 0 \quad , \quad C = 1 \quad \text{e} \quad D = -2p. \tag{5.16}$$

De (5.16) em (5.8), vem:

$$y = -\left(\frac{0}{1}\right) m - \frac{1}{2} \cdot \frac{(-2p + 0)}{0 + 1m} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{-2p}{-2m} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{p}{m}.$$

Portanto, a equação do diâmetro de uma cônica na forma canônica com foco(s) sobre o eixo x é:

$$y = \begin{cases} -\dfrac{b^2}{a^2 m} x, & \text{Elipse;} \\[2ex] \dfrac{b^2}{a^2 m} x, & \text{Hipérbole;} \\[2ex] \dfrac{p}{m}, & \text{Parábola.} \end{cases}$$

5.1 Diâmetros Conjugados

Logo em seu livro I, Apolônio mostrou que os pontos médios de um conjunto de cordas paralelas a um diâmetro de uma elipse, ou hipérbole, formam um segundo diâmetro, a que chamou de diâmetros conjugados, e o intitulou de *Teoria dos Diâmetros Conjugados* ([1], p.106). Dentre os teoremas no Livro I, há várias proposições que equivalem as transformações de coordenadas de um sistema baseado numa tangente e um diâmetro por um ponto da curva, para um novo sistema, determinado por uma tangente e um diâmetro por um segundo ponto da mesma cônica.

Nos dias atuais, os diâmetros conjugados são usados em várias construções, como na fuselagem de aviões, pontes, edifícios industriais, torres, guindastes, mecanismo de direção dos automóveis, entre outras coisas mais.

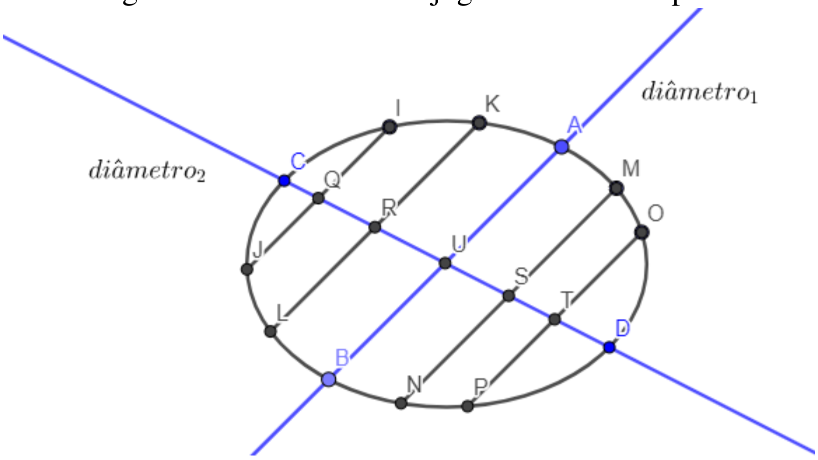
Além disso, os diâmetros conjugados de hipérboles também são úteis para afirmar o princípio da relatividade na física moderna do espaço-tempo. Segundo [21], o conceito de relatividade é introduzido primeiramente em um plano que consiste em uma única dimensão no espaço, a segunda dimensão sendo o tempo. Assim, uma hipérbole corresponde a eventos como um intervalo de espaço constante a partir do evento de origem e a outra hipérbole corresponde a eventos de um intervalo de tempo constante a partir dele.

O princípio da relatividade pode ser formulado da seguinte forma: "Qualquer par de diâmetros conjugados de hipérboles conjugadas pode ser tomado para os eixos de espaço e tempo". Esta interpretação da relatividade foi enunciada por Whittaker[2] em 1910.

Definição 5.2 *O LG dos pontos médios das cordas paralelas a um diâmetro de uma elipse (ou hipérbole) também será diâmetro da elipse (ou hipérbole). Chamaremos estes dois diâmetros de* ***Diâmetros Conjugados****.*

Seja $\overleftrightarrow{AB}$ o diâmetro de uma elipse, considere os segmentos de reta: $\overline{JI}$, $\overline{LK}$, $\overline{MN}$ e $\overline{PO}$ paralelos a esse diâmetro. Logo, a reta que passa pelo seu centro e pelos pontos: Q, R, S e T, pontos médios das seguintes cordas: $\overline{JI}$, $\overline{LK}$, $\overline{MN}$ e $\overline{PO}$, respectivamente; é o seu diâmetro conjugado. Logo, as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$ são diâmetros conjugados da elipse.

Figura 5.2: Diâmetros conjugados de uma elipse.

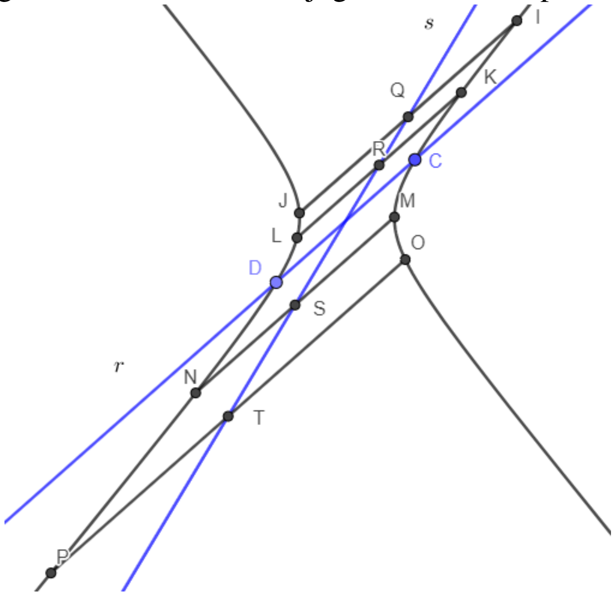


Fonte: autor

De maneira análoga, as retas r e s, são diâmetros conjugados da hipérbole (ver Figura 5.3). Sejam as seguintes cordas da hipérbole $\overline{JI}$, $\overline{LK}$, $\overline{MN}$ e $\overline{PO}$, ambas paralelas a reta r. Agora, tome uma reta s que passa pelos pontos médios Q, R, S e T das cordas $\overline{JI}$, $\overline{LK}$, $\overline{MN}$ e $\overline{PO}$, respectivamente. Logo, as retas r e s são chamadas de diâmetros conjugados da hipérbole.

[2]Edmund Taylor Whittaker (1873-1956), foi um matemático britânico que contribuiu amplamente para a matemática aplicada, a física matemática e a teoria de funções especiais. Ele tinha um interesse particular em análise numérica, mas também trabalhou na mecânica celeste e na história da física. Perto do final de sua carreira, ele recebeu a Medalha Copley, o mais prestigioso prêmio honorário da ciência britânica.

Figura 5.3: Diâmetros conjugados de uma hipérbole.

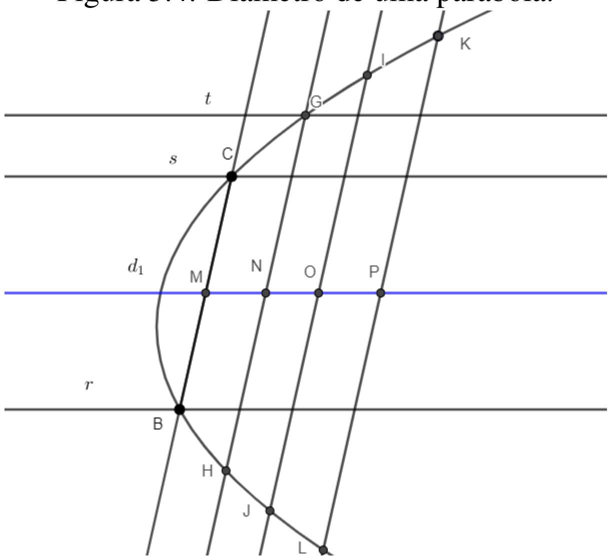


Fonte: autor

Observação 5.3 *A parábola não aborda os* ***diâmetros conjugados****, pois pela Definição 5.2, um diâmetro de uma parábola será sempre paralelo ao seu eixo principal. No caso, as retas paralelas a um diâmetro não definirão cordas na parábola.*

Considerando d_1 diâmetro da parábola, e tomando as retas r, s e t, paralelas à d_1, diâmetro da parábola (Figura 5.4), note que as retas paralelas à d_1 não formarão corda com a parábola. Sendo assim, a parábola não terá diâmetros conjugados.

Figura 5.4: Diâmetro de uma parábola.



Fonte: autor

5.2 Relações entre os coeficientes angulares dos diâmetros conjugados

Vimos anteriormente que o diâmetro de uma elipse relativo a uma dada direção m tem equação:

$$y = -\frac{b^2}{a^2 m}x. \tag{5.17}$$

De modo que esta reta determina uma direção de coeficiente angular: $m' = -\frac{b^2}{a^2 m}$. Pela Definição 5.2, teremos que as cordas paralelas a esta direção dada, também definirão um outro diâmetro. Ambos serão diâmetros conjugados da elipse. Considere d_1 a reta de direção m_1 que passa pelo centro da elipse e tome d_2 a reta da equação (5.17). Segue que:

$$d_1 : y = m_1 x \tag{5.18}$$

e

$$d_2 : y = -\frac{b^2}{a^2 \cdot m_2}x. \tag{5.19}$$

Ora, as retas d_1 e d_2 tem um ponto em comum, o centro da elipse. Então, substituindo (5.18) em (5.19), obtemos a relação entre seus coeficientes angulares:

$$-\frac{b^2}{a^2 \cdot m_2}x = m_1 x \quad \Rightarrow \quad m_1 \cdot m_2 = -\frac{b^2}{a^2}. \tag{5.20}$$

Observação 5.4 *Para os casos em que $a = b$, ou seja, casos particulares de uma elipse em formato de uma circunferência, temos a seguinte relação:*

$$m_1 \cdot m_2 = -\frac{b^2}{a^2}. \tag{5.21}$$

Contudo $a = b$, e consequentemente, donde substituímos $b^2 = a^2$ em (5.21), vem:

$$m_1 \cdot m_2 = -\frac{a^2}{a^2} \quad \Rightarrow \quad m_1 \cdot m_2 = -1.$$

Então, podemos concluir que os casos em que uma elipse tem a forma de uma circunferência, a relação dos seus coeficientes angulares conjugados é igual a -1, o que implica que seus coeficientes angulares são perpendiculares.

De maneira análoga, provaremos a relação dos coeficientes angulares das retas dos diâmetros conjugados de uma hipérbole. Considere a reta d_3 diâmetro de uma hipérbole de direção m. Então:

$$y = \frac{b^2}{a^2 \cdot m}x. \tag{5.22}$$

Logo, o coeficiente angular é:

$$m_1 = \frac{b^2}{a^2 \cdot m}.$$

Mais uma vez pela Definição 5.2, as cordas paralelas a esta direção dada, definirão um outro diâmetro, ambos diâmetros conjugados da hipérbole. Agora adotando d_4 como reta do diâmetro da hipérbole em relação à d_3, com direção m_2, e ainda, passa pelo centro da hipérbole. Obtém-se:

$$d_3 : y = m_1 x \tag{5.23}$$

e

$$d_4 : y = \frac{b^2}{a^2 \cdot m_2} x. \tag{5.24}$$

Agora, d_3 e d_4 tem um ponto em comum, o centro da hipérbole. De (5.23) em (5.24), obtemos a relação entre seus coeficientes angulares:

$$\frac{b^2}{a^2 \cdot m_2} x = m_1 x \quad \Rightarrow \quad m_1 \cdot m_2 = \frac{b^2}{a^2}. \tag{5.25}$$

Proposição 5.4 *Sendo m_1 e m_2 , os coeficientes angulares de dois diâmetros conjugados, por* (5.20) *e* (5.25)*, concluímos que:*

$$m_1 \cdot m_2 = \begin{cases} -\dfrac{b^2}{a^2} & \textit{(Elipse)} \\ \dfrac{b^2}{a^2} & \textit{(Hipérbole).} \end{cases}$$

Exemplo 7 *Determine as equações das retas dos diâmetros conjugados da cônica de equação $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, dada a direção $m = 2$ de um desses diâmetros.*

Solução: A cônica dada é uma elipse com centro na origem e vértices sobre o eixo $0x$, de modo que $a^2 = 9$ e $b^2 = 4$. Assim, pelo Teorema 5.3, a equação de um diâmetro dessa cônica é dado por:

$$y_1 = -\frac{4}{9 \cdot m} x.$$

Como a direção da reta de um diâmetro é $m = 2$, temos:

$$y_1 = -\frac{2}{9} x,$$

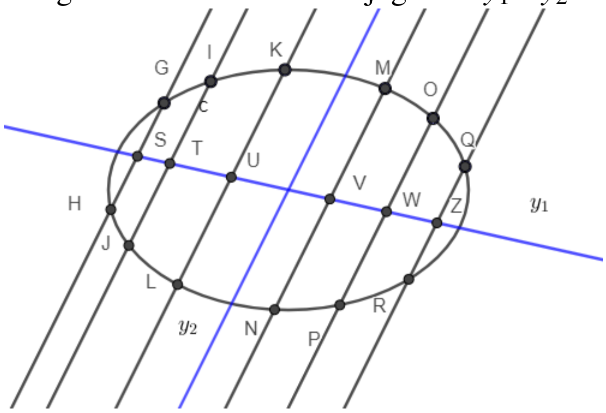
a qual é a equação de um diâmetro da elipse. Agora, como o coeficiente angular de y_1 é $-\frac{2}{9}$, pela Proposição 5.4, obtemos:

$$m_1 \cdot m_2 = \frac{b^2}{a^2} \quad \Rightarrow \quad -\frac{2}{9} m_2 = \frac{4}{9} \quad \Rightarrow \quad m_2 = 2,$$

o qual é o coeficiente angular de y_2. Logo, como os diâmetros conjugados dessa elipse passam pela origem, temos: $y_2 = 2x$. Portanto, as equações das retas dos diâmetros conjugados pedidos são:

$$y_1 = -\frac{2}{9} x \quad \text{e} \quad y_2 = 2x.$$

Figura 5.5: Diâmetros conjugados: y_1 e y_2.



Fonte: autor

Exemplo 8 *Seja uma reta r com inclinação 60^o que passa pelo centro da cônica de equação $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{16} = 1$. Determine a equação geral da reta t, de modo que as retas r e t estejam sobrepostas aos diâmetros conjugados da cônica. Em seguida, verifique se seus coeficientes angulares satisfazem a Proposição 5.4.*

Solução: Note que a cônica é uma hipérbole com centro na origem e focos sobre o eixo $0x$, então $a^2 = 25$ e $b^2 = 16$. Assim, pelo Teorema 5.3, a equação de um diâmetro da cônica é dado por:

$$t : y = \frac{16}{25 \cdot m}x.$$

Como o ângulo de inclinação de r é de medida 60^{o}, daí $m = \tan 60^{\text{o}} = \sqrt{3}$, segue:

$$t : y = \frac{16\sqrt{3}}{75}x,$$

a qual é a equação de um diâmetro da hipérbole. Logo,

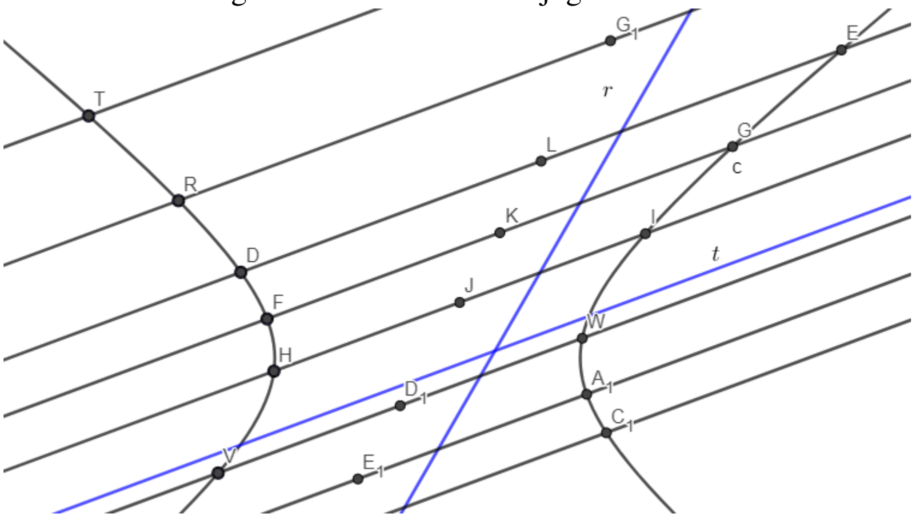
$$t : \left(\frac{16\sqrt{3}}{75}\right)x - y = 0.$$

A seguir, verificamos a relação da Proposição 5.4.

$$m_1 \cdot m_2 = \frac{b^2}{a^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{16\sqrt{3}}{75}\sqrt{3} = \frac{16}{25} \quad \Rightarrow \quad \frac{16}{25} = \frac{16}{25}.$$

Portanto, os coeficientes das retas dos diâmetros conjugados satisfazem a Proposição 5.4.

Figura 5.6: Diâmetros conjugados r e t.



Fonte: autor

Exemplo 9 *Determine as equações das retas dos diâmetros conjugados de uma elipse de centro na origem de modo que um dos diâmetros seja o eixo principal da cônica.*

Solução: Temos dois casos a considerar:
Caso 1: O seu eixo maior pertence ao eixo $0x$. Assim, a inclinação do seu diâmetro é nula, ou seja, $m = 0$. Pelo Teorema 5.3, teremos:

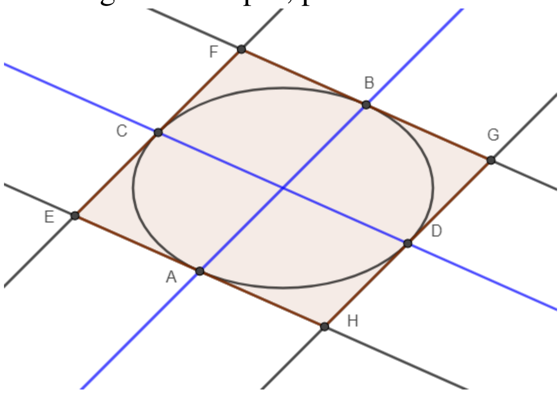
$$y_1 = -\frac{b^2}{a^2 \cdot 0}x,$$

ou seja, não existe coeficiente angular. Logo, o ângulo cujo a tangente não existe, para valores $0 \leq x < 180$, é de medida igual 90º. Portanto, a reta equação da reta, diâmetro conjugado, a y_2 é o próprio eixo $0y$.
Caso 2: O seu eixo maior pertence ao eixo $0y$. De maneira análoga, se a equação da reta, diâmetro da elipse, se encontra no eixo $0y$, teremos que a equação do seu diâmetro conjugado será o próprio eixo $0x$.

A seguir, apresentaremos duas proposições baseadas em [17], tais quais serão de grande utilidade para aplicações de diâmetros conjugados.

Proposição 5.5 *As tangentes à cônica traçadas pelas extremidades A e C do diâmetro $\overleftrightarrow{AC}$ são paralelas ao diâmetro $\overleftrightarrow{BD}$, e as tangentes à cônica que passam por B e D são paralelas a $\overleftrightarrow{AC}$. O encontro dessas tangentes formam um paralelogramo circunscrito à elipse.*

Figura 5.7: Pares de retas tangentes à elipse, paralelas a um dos diâmetros conjugados.

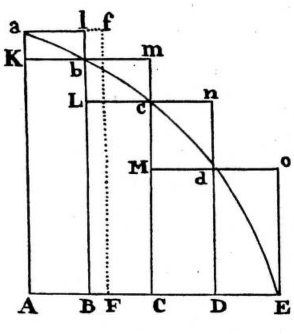


Fonte: autor

A proposição acima será de grande utilidade, uma vez que toda elipse será inscrita a um paralelogramo. A demonstração para este resultado encontra-se em Principia livro I, livro do Isaac Newton, ele afirmou, por [14],

> "Se em qualquer figura *AacE*, delimitada pelas retas *Aa*, *AE* e a curva *acE*, existirem um número qualquer de paralelogramos *Ab*, *Bc*, *Cd* etc., as bases iguais *AB*, *BC*, *CD* et., e lados *Bd*, *Cc*, *Dd* etc., paralelos a um lado *Aa* da figura; e os paralelogramos *aKbl*, *bLcm*, *cMdn* etc., forem completados; então se for suposto que a largura daqueles paralelogramos foi progressivamente dimunuída e seu número aumentado in infinitum, afirmo que as razões finais que a figura inscrita *AKbLcMdD*, a figura circunscrita *AalbmcndoE* e a figura curvilínea *AabcdE*, terão uma para a outra, são razões de igualdades."

Figura 5.8:



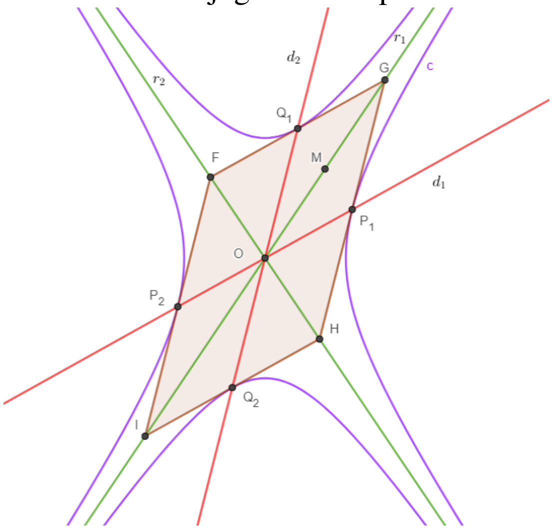
Fonte: [14]

Proposição 5.6 *Seja $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ diâmetro de uma hipérbole. O diâmetro conjugado $\overleftrightarrow{Q_1Q_2}$ intercepta à hipérbole conjugada*[3].

[3] Se na equação da hipérbole invertermos as variáveis x e y, obteremos a hipérbole conjugada

Assim, quando os pontos extremos dos diâmetros conjugados com os ramos das hipérboles alcançam pontos impróprios com as mesmas, chamamos essas retas de *assíntotas*. Neste caso, as retas paralelas a um diâmetro conjugado, que passam pelas extremidades do outro, são tangentes às hipérboles, de modo que tais retas paralelas formam um paralelogramo entre os ramos das hipérboles (ver Figura 5.9). Portanto, as diagonais do paralelogramo $FGHI$ (ver Figura 5.9) são as assíntotas (d_1 e d_2) e os pontos médios dos lados opostos são as extremidades dos diâmetros conjugados.

Figura 5.9: Diâmetros conjugados da hipérbole e suas relações.



Fonte: autor

5.3 Aplicações

Iremos abordar através de exemplos resolvidos algumas questões de exercícios do livro [8] de modo pragmático e objetivo.

Exemplo 10 *Determine o LG dos pontos do plano dos quais se podem traçar tangentes à elipse* $x^2+2y^2=4$ *paralelas a dois diâmetros conjugados.*

Resolução: Dada a elipse $x^2+2y^2=4$, podemos escrevê-la da seguinte forma:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1, \tag{5.26}$$

em que: $a^2=4$ e $b^2=2$. Pelo Teorema 5.3 e Proposição 5.5 , temos que:

$$d_1: \quad y_1=-\frac{b^2}{a^2m}x \quad \Rightarrow \quad y_1=-\frac{x}{2} \tag{5.27}$$

$$d_2: \quad y_2=x. \tag{5.28}$$

Note que foi considerado em (5.27) uma inclinação de 45°, ou seja, $m=1$. Assim, d_1 e d_2 são as equações dos diâmetros conjugados da elipse $x^2+2y^2=4$. Agora, tome r e s as retas paralelas distintas ao diâmetro d_2, e ainda, tangentes à elipse. Logo,

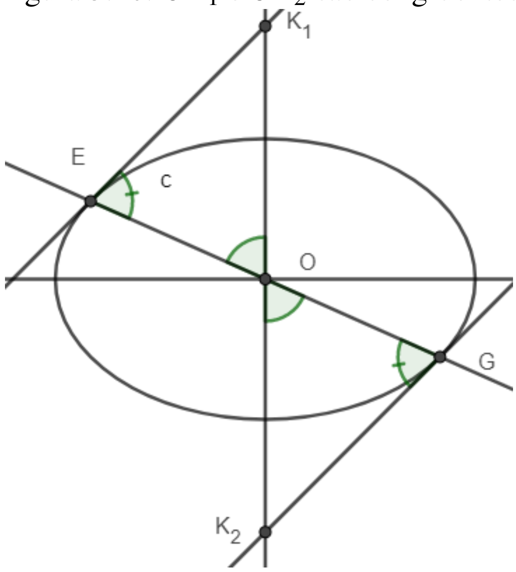
$$r : y = x + k_1 \tag{5.29}$$

e

$$s : y = x - k_2, \tag{5.30}$$

em que $k_1 = k_2 = k$ é uma constante qualquer. Sejam os triângulos $\triangle K_1OE$ e $\triangle K_2OG$, então os ângulos $\angle K_1OE$ e $\angle K_2OG$ são opostos pelo vértice, os lados $\overline{EO}$ e $\overline{OG}$ têm medidas iguais, por construção; e por fim, $\angle OEK_1 = \angle OGK_2$, pois são alterno internos. Logo, pelo caso (ALA) os triângulos $\triangle K_1OE$ e $\triangle K_2OG$ são congruentes. Portanto, $\overline{OK_1} = \overline{OK_2}$, ou seja, $k_1 = k_2$.

Figura 5.10: OK_1 e OK_2 são congruentes



Fonte: autor

De maneira análoga, tomemos as retas t e u, paralelas distintas ao diâmetro d_1, como também, tangentes à elipse. Daí, temos:

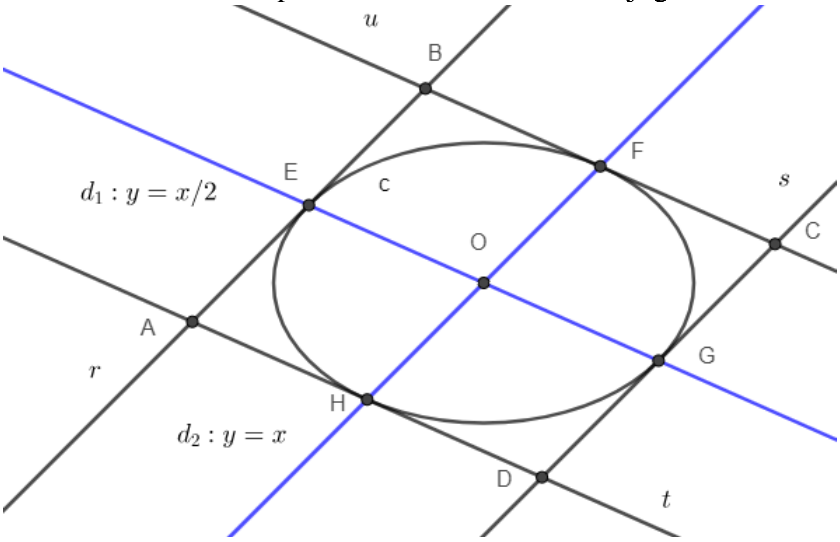
$$u : y = -\frac{x}{2} + c \tag{5.31}$$

e

$$t : y = -\frac{x}{2} - c. \tag{5.32}$$

O LG, em questão, passa pelos pontos A, B, C e D, pontos de interseções das retas r e t, r e u, s e u e s e t; respectivamente.

Figura 5.11: Pares de retas paralelas aos diâmetros conjugados de uma elipse



Fonte: autor

Primeiramente, vamos encontrar as equações das retas r e s, onde ambas interceptam a reta d_1 nos pontos E e G, pontos de tangência com a elipse. Sem perda de generalidade, tomando a reta r, e ainda, de (5.26) e (5.29), obtemos:

$$\begin{cases} r & : \quad y = x + k \\ \mathscr{E} & : \quad \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{2} = 1. \end{cases}$$

Então, segue que:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{(x+k)^2}{2} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 + 4kx + 2k^2 - 4 = 0.$$

Como a reta r é tangente à elipse, então temos na variável x o discriminante (Δ) igual a zero. Daí, teremos:

$$\Delta = (4k)^2 - 4 \cdot 3 \cdot \left(2k^2 - 4\right) = 16k^2 - 24k^2 + 48 = 0 \therefore k = \pm\sqrt{6}. \tag{5.33}$$

Logo, substituindo (5.33) em (5.29) e (5.30), temos que:

$$r : y = x + \sqrt{6} \quad \text{e} \quad s : y = x - \sqrt{6}. \tag{5.34}$$

De maneira análoga, encontraremos as retas u e t. Sem perda de generalidade, tomemos a reta u, então de (5.26) e (5.31), obtemos:

$$\begin{cases} u & : \quad y = -\dfrac{x}{2} + c \\ \mathscr{E} & : \quad \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{2} = 1. \end{cases}$$

Ou seja,

$$\frac{x^2}{4}+\frac{\left(-\frac{x}{2}+c\right)^2}{2}-1=0 \quad\Rightarrow\quad x^2+2\left(\frac{x^2}{4}-xc+c^2\right)-4=3x^2-4cx+4c^2-8=0.$$

Usando o fato que a reta u é tangente à elipse, ou seja, o discriminante (Δ) na variável x é nulo, segue:

$$\Delta=(-4c)^2-4\cdot 3\cdot\left(4c^2-8\right)=16c^2-48c^2+96=0 \therefore c=\pm\sqrt{3}. \tag{5.35}$$

Logo, substituindo (5.35) em (5.31) e (5.32), obtemos que:

$$u: y=-\frac{x}{2}+\sqrt{3} \quad \text{e} \quad t: y=-\frac{x}{2}-\sqrt{3}. \tag{5.36}$$

Por (5.34) e (5.36), escrevemos o sistema de equações dos pares de retas paralelas distintas aos diâmetros conjugados, d_1 e d_2, as quais são tangentes à elipse. Segue que:

$$\begin{cases} r: \ y &= x+\sqrt{6}\\ s: \ y &= x-\sqrt{6}\\ u: \ y &= -\frac{x}{2}+\sqrt{3}\\ t: \ y &= -\frac{x}{2}-\sqrt{3}.\end{cases}$$

Agora encontraremos os seguintes pontos de interseção das retas acima, segue que:
Ponto A,

$$\begin{cases} r: \ y &= x+\sqrt{6}\\ t: \ y &= -\frac{x}{2}-\sqrt{3}\end{cases} \therefore A\left(\frac{-2\sqrt{6}-2\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{6}-2\sqrt{3}}{3}\right).$$

Ponto B,

$$\begin{cases} r: \ y &= x+\sqrt{6}\\ u: \ y &= -\frac{x}{2}+\sqrt{3}\end{cases} \therefore B\left(\frac{2\sqrt{3}-2\sqrt{6}}{3};\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{3}\right).$$

Ponto C,

$$\begin{cases} u: \ y &= -\frac{x}{2}+\sqrt{3}\\ s: \ y &= x-\sqrt{6}\end{cases} \therefore C\left(\frac{2\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{3};\frac{-\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{3}\right).$$

Ponto D,

$$\begin{cases} s: \ y &= x-\sqrt{6}\\ t: \ y &= -\frac{x}{2}-\sqrt{3}\end{cases} \therefore D\left(\frac{2\sqrt{6}-2\sqrt{3}}{3};\frac{-\sqrt{6}-2\sqrt{3}}{3}\right).$$

Note que, as medidas dos segmentos $\overline{AB}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$, $\overline{BC}=\frac{2\sqrt{30}}{3}$, $\overline{CD}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$ e $\overline{AD}=\frac{2\sqrt{30}}{3}$, e ainda, por construção $\overline{AB}\parallel\overline{CD}$ e $\overline{BC}\parallel\overline{AD}$. Logo, $ABCD$ é um paralelogramo, pela Proposição 5.5, a figura que circunscreve um paralelogramo é uma elipse. Como os pontos A, B, C e D pertencem à elipse, sem perda de generalidade, escolhendo os pontos A e B e substituindo na forma canônica da equação de uma elipse, teremos:

Substituindo o ponto A em $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, temos:

$$\frac{\left(\frac{-2\sqrt{6}-2\sqrt{3}}{3}\right)^2}{a^2}+\frac{\left(\frac{\sqrt{6}-2\sqrt{3}}{3}\right)^2}{b^2}=1 \therefore (36+24\sqrt{2})b^2+(18-12\sqrt{2})a^2=9a^2b^2. \tag{5.37}$$

Substituindo o ponto B em $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b}=1$, segue que:

$$\frac{\left(\frac{2\sqrt{3}-2\sqrt{6}}{3}\right)^2}{a^2}+\frac{\left(\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{3}\right)^2}{b^2}=1 \therefore (36-24\sqrt{2})b^2+(18+12\sqrt{2})a^2=9a^2b^2. \tag{5.38}$$

Assim, de (5.37) e (5.38), segue-se que:

$$36b^2+24\sqrt{2}b^2+18a^2-12\sqrt{2}a^2=36b^2-24\sqrt{2}b^2+18a^2+12\sqrt{2}a^2 \therefore a^2=2b^2. \tag{5.39}$$

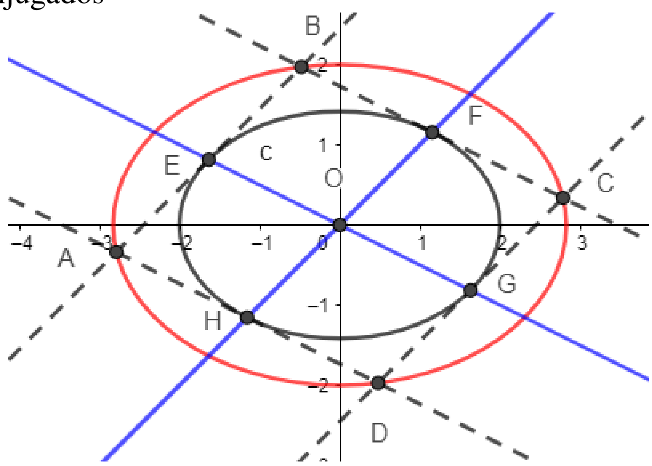
Finalmente, de (5.39) em (5.37), obtemos:

$$36b^2+24\sqrt{2}b^2+36b^2-24\sqrt{2}b^2=18b^4 \therefore b^2\left(b^2-4\right)=0 \therefore b^2=0 \text{ ou } b^2=4. \tag{5.40}$$

No entanto, $b=0$ não convém. Assim teremos que $b^2=4$. E assim, de (5.40) em (5.39), temos, enfim, que $a^2=2\cdot 4=8$. Portanto, o LG pedido na questão é

$$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1.$$

Figura 5.12: LG dos pontos do plano dos quais as retas tangentes à elipse dada são paralelas a dois diâmetros conjugados



Fonte: autor

Exemplo 11 *Determine o LG dos pontos médios das cordas que ligam os pontos de contato das tangentes à elipse $x^2+2y^2=4$ paralelas a dois diâmetros conjugados.*

Resolução: Pelo exercício anterior, temos as equações das retas tangentes à elipse $x^2+2y^2=4$, e também, as equações das retas de dois diâmetros conjugados da cônicas:

$$\begin{cases} r: y = x+\sqrt{6} \\ u := -\dfrac{x}{2}+\sqrt{3} \\ s: y = x-\sqrt{6} \\ t: y = -\dfrac{x}{2}-\sqrt{3} \\ d_1: y = -\dfrac{x}{2} \\ d_2: y = x. \end{cases}$$

Sendo, $r \parallel s \parallel d_2$ e $u \parallel t \parallel d_1$. Sejam os pontos E, F, G e H, pontos de interseção entre as retas r e d_1, u e d_1, s e d_1 e t e d_2, respectivamente (Ver Figura 5.12); então, iremos encontrar os referidos pontos, façamos:
Para o ponto E, teremos que:

$$\begin{cases} r: y &= x+\sqrt{6} \\ d_1: y &= -\dfrac{x}{2} \end{cases} \therefore E\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3};\frac{\sqrt{6}}{3}\right).$$

Para o ponto F, temos que:

$$\begin{cases} u: y &= -\dfrac{x}{2}+\sqrt{3} \\ d_2: y &= x \end{cases} \therefore F\left(\frac{2\sqrt{3}}{3};\frac{2\sqrt{3}}{3}\right).$$

Note que, os pontos H e G são simétricos, em relação à origem, dos pontos F e E, respectivamente (caso LAA). Logo,

$$H\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3};-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \quad \text{e} \quad G\left(\frac{2\sqrt{6}}{3};-\frac{\sqrt{6}}{3}\right).$$

Agora, iremos determinar os pontos médios dos segmentos $\overline{HE}$, $\overline{EF}$, $\overline{FG}$ e $\overline{GH}$, chamaremos de pontos I, J, K e L, respectivamente, isto é

$$I\left(\frac{-2\sqrt{3}-2\sqrt{6}}{6};\frac{\sqrt{6}-2\sqrt{3}}{6}\right), \quad J\left(\frac{-2\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{6};\frac{\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{6}\right)$$

e

$$K\left(\frac{2\sqrt{3}+2\sqrt{6}}{6};\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{6}\right), \quad L\left(\frac{2\sqrt{6}-2\sqrt{3}}{6};\frac{-\sqrt{6}-2\sqrt{3}}{6}\right).$$

Neste caso, as medidas dos segmentos são: $\overline{IJ}=\dfrac{4\sqrt{6}}{6}$, $\overline{JK}=\dfrac{2\sqrt{30}}{6}$, $\overline{KL}=\dfrac{4\sqrt{6}}{6}$ e $\overline{LI}=\dfrac{2\sqrt{30}}{6}$, e ainda, por construção $\overline{IJ} \parallel \overline{KL}$ e $\overline{JK} \parallel \overline{LI}$. Logo, $IJKL$ também é um paralelogramo, e como sabemos pelo resultado anterior, o LG pedido será é uma elipse. Assim, os pontos I, J, K e L pertencem à elipse, sem perda de generalidade, escolhendo os pontos I e J e substituindo na forma canônica da equação de uma elipse, teremos que:

Substituindo o ponto I em $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, obtemos:

$$\frac{\left(\dfrac{-2\sqrt{3}-2\sqrt{6}}{6}\right)^2}{a^2}+\frac{\left(\dfrac{\sqrt{6}-2\sqrt{3}}{6}\right)^2}{b^2}=1 \therefore (36+24\sqrt{2})b^2+(18-12\sqrt{2})a^2=36a^2b^2. \tag{5.41}$$

Substituindo o ponto J na elipse, segue que:

$$\frac{\left(\dfrac{-2\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{6}\right)^2}{a^2}+\frac{\left(\dfrac{\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{6}\right)^2}{b^2}=1 \therefore (36-24\sqrt{2})b^2+(18+12\sqrt{2})a^2=36a^2b^2. \tag{5.42}$$

De (5.41) e (5.42), segue-se que:

$$36b^2+24\sqrt{2}b^2+18a^2-12\sqrt{2}a^2=36b^2-24\sqrt{2}b^2+18a^2+12\sqrt{2}a^2 \therefore a^2=2b^2. \tag{5.43}$$

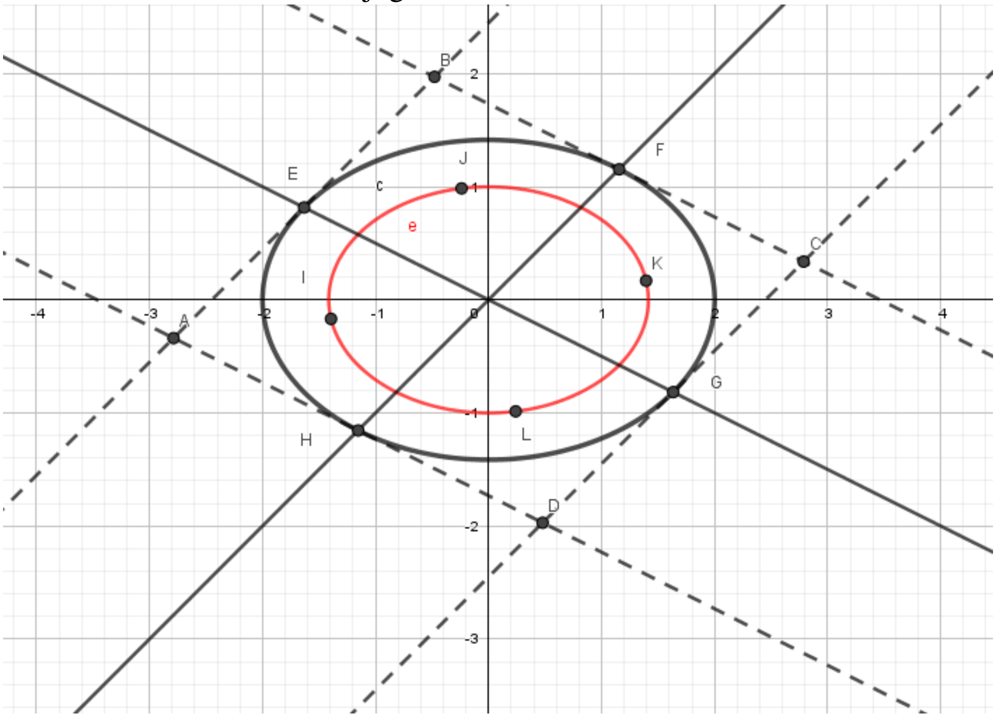
Finalmente, de (5.43) em (5.37), obtemos:

$$36b^2+24\sqrt{2}b^2+36b^2-24\sqrt{2}b^2=72b^4 \therefore b^2\left(b^2-1\right)=0 \therefore b^2=0 \text{ ou } b^2=1. \tag{5.44}$$

Já sabemos que $b=0$ não convém, logo teremos $b^2=1$. Daí, de (5.44) em (5.43), temos, enfim, que $a^2=2\cdot 1=2$. Portanto, o LG pedido na questão é:

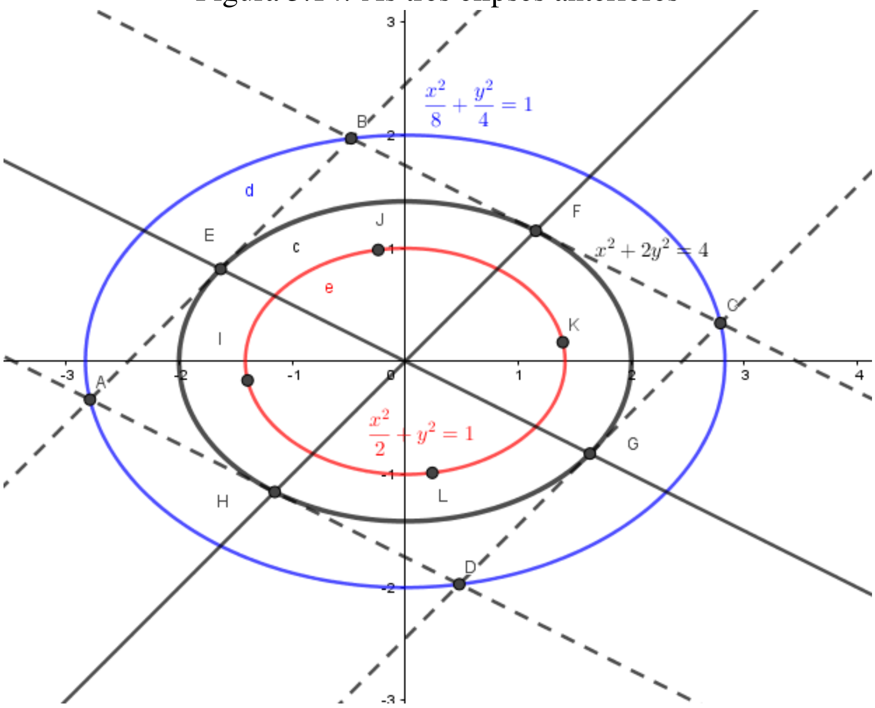
$$\frac{x^2}{2}+y^2=1.$$

Figura 5.13: LG dos pontos médios das cordas dos pontos de contato das tangentes à elipse dada paralelas a dois diâmetros conjugados



Fonte: autor

Figura 5.14: As três elipses anteriores



Fonte: autor

Observação 5.5 *Seria possível estabelecer alguma relação de semelhança entre as três* *elipse acima?*

Demonstração. Primeiramente, temos que as três elipses são concêntricas. Neste caso, iremos encontrar suas excentricidades. Segue que: Usando a Relação Fundamental da Elipse, encontraremos a constante c de cada elipse, obtemos: Para $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$, em que $a^2=4$ e $b^2=2$, tem-se $a^2=b^2+c^2 \therefore 4=2+c^2 \therefore c=\sqrt{2}$, daí, segue-se que:

$$e_1=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Para $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$, de modo que $a^2=8$ e $b^2=4$, tem-se $a^2=b^2+c^2 \therefore 8=4+c^2 \therefore c=2$, e assim:

$$e_2=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Para $\frac{x^2}{2}+y^2=1$,então $a^2=2$ e $b^2=1$, daí $a^2=b^2+c^2 \therefore 2=1+c^2 \therefore c=1$, de maneira que:

$$e_3=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Como $e_1=e_2=e_3$, temos que as três elipses conservam a mesma razão de semelhança, em relação as suas excentricidades, além de serem concêntricas. Portanto, as elipses são semelhantes.

Exemplo 12 *Determine as equações das retas assíntotas de uma hipérbole dada por dois diâmetros conjugados.*

Resolução: Sejam as retas d_1 e d_2, diâmetros conjugados de uma hipérbole. Sem perda de generalidade, tomemos:

$$d_1: y=\frac{b^2}{a^2m}x \quad \text{intercepta à hipérbole} \quad \mathscr{H}_1: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{5.45}$$

Assim, pela Proposição (5.6), segue que:

$$d_2: y=mx \quad \text{intercepta à hipérbole conjugada} \quad \mathscr{H}_2: -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{5.46}$$

Substituindo d_1 em $\mathscr{H}_1$, teremos:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{\left(\frac{b^2}{a^2m}x\right)^2}{b^2}=1.$$

Então, temos:

$$x=\pm\frac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2-b^2}} \quad \text{e} \quad y=\pm\frac{b^2}{\sqrt{a^2m^2-b^2}}.$$

Adotando $w = \sqrt{a^2m^2 - b^2}$, escrevemos os pontos P_1 e P_2 interseções com a hipérbole $\mathscr{H}_1$, segue:

$$P_1\left(\frac{a^2m}{w}; \frac{b^2}{w}\right) \quad \text{e} \quad P_2\left(-\frac{a^2m}{w}; -\frac{b^2}{w}\right).$$

Agora, substituindo d_2 em $\mathscr{H}_2$, e procedendo de maneira análoga, teremos os seguintes pontos:

$$Q_1\left(\frac{ab}{w}; \frac{abm}{w}\right) \quad \text{e} \quad Q_2\left(-\frac{ab}{w}; -\frac{abm}{w}\right).$$

Pela Proposição 5.6, as assíntotas das duas hipérboles estão sobre as diagonais do paralelogramo $P_1P_2Q_1Q_2$. Sendo assim, vamos considerar a reta s_1 assíntota que passa pelo ponto médio M do segmento $\overline{P_1Q_1}$ e s_2 assíntota que passa pelo ponto médio N do segmento $\overline{P_1Q_2}$, então:

$$M\left(\frac{a^2m+ab}{2w}; \frac{abm+b^2}{2w}\right) \quad \text{e} \quad N\left(\frac{a^2m-ab}{2w}; \frac{b^2-abm}{2w}\right).$$

Por outro lado, as assíntotas também passam pela origem. Sendo assim, para s_1 temos que:

$$D = \begin{vmatrix} X_m & Y_m & 1 \\ x & y & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Logo,

$$\left(\frac{a^2m^2+ab}{2w}\right)y - \left(\frac{b^2+amb}{2w}\right)x = 0 \quad \Rightarrow y = \left(\frac{b^2+amb}{2w}\right)\left(\frac{2w}{a^2m+ab}\right)x.$$

Como $m \neq 0$, $a \neq 0$ e $b \neq 0$, ver claramente, que $y = \frac{b}{a}x$. Procedendo de maneira análoga para assíntotas s_2, teremos:

$$\left(\frac{a^2m-ab}{2w}\right)y - \left(\frac{b^2-amb}{2w}\right)x = 0 \Rightarrow y = \left(\frac{b^2-amb}{2w}\right)\left(\frac{2w}{a^2m-amb}\right)x.$$

Também para $m \neq 0$, $a \neq 0$ e $b \neq 0$, ver claramente, que $y = -\frac{b}{a}x$.

Portanto, as assíntotas das hipérboles são:

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{e} \quad y = -\frac{b}{a}x.$$

Capítulo 6

Conclusões

No referido trabalho, apresentamos uma proposta extracurricular para as turmas do 3º ano do ensino básico, abordando teoremas e definições dos diâmetros das cônicas e relações entre os coeficientes angulares dos diâmetros conjugados da elipse e hipérbole. Posteriormente, exploramos algumas aplicações do assunto, através dos exercícios do livro do [8]; comprovamos o porquê da parábola não está relacionado ao tópico diâmetros conjugados e, ainda, porque as assíntotas da hipérbole limitam os seus ramos.

Em referência ao trabalho em sua totalidade, apresentamos, de forma parcial, o surgimento das cônicas e suas aplicações no decorrer dos tempos, pois acreditamos que é necessário estudar o primórdio das grandes descobertas e refletir sobre sua importância dentro de um contexto limitado de tecnologia, mas que ocasionou o surgimento de tantos recursos tecnológicos.

Outra parte que merece destaque, são as atividades de construções das cônicas, com a utilização do uso do laboratório de matemática, ou mesmo, se utilizando do software Geogebra, pois são através dessas ocasiões que os alunos tem oportunidade de conceituar os assuntos de matemática de forma prática. O Geogebra, por sua vez, teve sua importância também como facilitador visual dos principais resultados de teoremas, proposições, dentre outros.

Contudo, somente o uso de uma ferramenta de programação não é suficiente para tornar o ensino e aprendizagem de Matemática mais eficaz. É preciso fazer com que os discentes sejam inseridos no processo de conjecturamento de reformulações das definições e teoremas, amparando-lhes para resolverem problemas de dificuldades maiores.

Consideramos ter alcançado nosso propósito de forma bem sucedida, pois antes mesmo de quaisquer aplicações de teoremas e/ou fórmulas aos exercícios, foram abordadas as demonstrações dos principais teoremas ou resultados com deduções claras e objetivas, o que tem o carácter fundamental para motivar nos alunos a habilidade de interpretação, de investigação e de crítica, tornando-os sujeitos autônomos.

Dessa forma, buscamos evitar um ensino defasada, baseada apenas em memorizações de fórmulas e com pouca significação no processo de ensino e aprendizagem. Salientando, ainda, que a explanação das demonstrações de fórmulas, ou teoremas, darão um bom anteparo aos estudantes que visam estudar em cursos de licenciatura plena ou bacharelado em matemática.

Por fim, consideramos o estudo das seções cônicas fascinante. A forma como foram descobertas, passando pelas propriedades refletoras e suas aplicações, tanto nas construções do homem, quanto nas provenientes da natureza. Às vezes, talvez chegamos a nos questionar se não é a forma como Deus tenta se comunicar conosco.

As sugestões apresentadas no presente trabalho visam motivar os docentes matemáticos a explorem mais o assunto cônicas, mais especificamente, os diâmetros das cônicas, na busca por novas descobertas que possam incrementar ainda mais o seu conhecimento. Além de possibilitar a reflexão por parte do profissional docente, quanto ao desenvolvimento de suas aulas e a utilização de suas próprias metodologias de ensino, ressaltando a importância de pesquisas que possam apontar direções para a formação e prática de professores que atuem nas turmas do 3º ano médio no ensino básico.

Referências Bibliográficas

[1] BOYER, C. B. **História da matemática**. Tradução de Elza F. Gomes. 2 ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996, p. 100-106.

[2] BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: <$http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wp-content/uploads/2018/12/BNCC19dez2018site.pdf$>.

[3] BRASIL. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**. Ensino médio, volume 2: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologia-parte III. Brasília: Mec-2006. Disponível em: <$http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf$>

[4] CARVALHO, J. B. P. de. **Os três problemas clássicos da matemática grega**. Disponível em <$http://www.obmep.org.br/docs/apostila6.pdf$> Acesso em 10 de setembro de 2018.

[5] DANTE, L. R. **Matemática contexto & aplicações**, 3 ed. São Paulo: Editora Ática, 2017.

[6] DELGADO, et al. **Geometria analítica**. Rio de Janeiro: SBM, 2017.

[7] FERRARO, N. G. **Forno solar**. Disponível em:<$http://osfundamentosdafisica.blogspot.com/2010/06/forno-solar.html$>

[8] GUIMARÃES, C. S. **Álgebra Vetorial e Geometria Analítica**, 1ª ed. Fortaleza - CE: Vestseller, 2013.

[9] HARTUNG, G. E. **Construção das Cônicas com Dobraduras**. Disponível em <$http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=27219$>.

[10] LAGO, D. M. **Um estudo das cônicas**. Dissertação (Mestrado Programa de Pós-graduação em Matemática Profissional em Matemática em Rede Nacional)-Universidade Federal de Goiás. Disponível em < $https://sca.profmat-sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id=150280291$ >.

[11] LEONARDO, et al. **Conexões com a matemática**, 3 ed. São Paulo: Moderna, 2016.

[12] MOREIRA, J. S. **Construções das cônicas utilizando o desenho geométrico e instrumentos concretos**. Disponível em:$< https : //sca.profmat - sbm.org.br/sca_v2/get_tcc3.php?id = 150450766 >$.

[13] NASCIMENTO, M. I. M. **Arquimedes**. Disponível em: $< http : //www.histedbr.fe.unicamp.br/navegando/glossario/verb_barquimedes.htm >$.

[14] NEWTON, Isaac. **Principia**. Disponível em: $< https : //archive.org/details/Principia.Livro.1.2.3 - Isaac.Newton/page/n64 >$.

[15] RODRIGUES, G. S. G. M. et al. **Cónicas**. Disponível em: $<http : //www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm26/frames.htm>$.

[16] [S.N] **O bilhar, o dentista e o Teatro São Carlos**. Disponível em: $<https : //www.youtube.com/watch?v =_P Ygy - 06rIs>$.

[17] SIQUEIRA, P. H., COSTA, A. M., **Cônicas**. Disponível em: $<http : //www.exatas.ufpr.br/portal/docs_degraf/conicas.pdf>$

[18] SOUZA, C. L. N. de. **Cônicas: Tópicos especiais para o ensino médio**. Dissertação (Mestrado Programa de Pós-graduação em Matemática Profissional em Matemática em Rede Nacional)-Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande. 2018.

[19] WAGNER, E. **Por que as antenas são parabólicas?**. Resumo do artigo da RPM, N^o **33**. Disponível em $<http : //rpm.org.br/cdrpm/34/5.htm>$.

[20] WAGNER, E. **Por que elipse, parábola e hipérbole?**. Resumo do artigo da RPM, N^o **07**. Disponível em: $< http : //rpm.org.br/cdrpm/7/10.htm >$.

[21] WIKIPEDIA. Disponível em $<https : //en.wikipedia.org/wiki/Conjugate_diameterscite note - 3>$.