UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

JUSCELINO DE ARAÚJO SILVA

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E REPRESENTAÇÕES MÚLTIPLAS NO ENSINO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES POLINOMIAIS DO 1º GRAU COM DUAS INCÓGNITAS

CAMPINA GRANDE-PB
2019

JUSCELINO DE ARAÚJO SILVA

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E REPRESENTAÇÕES MÚLTIPLAS NO ENSINO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES POLINOMIAIS DO 1º GRAU COM DUAS INCÓGNITAS

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, área de concentração Educação Matemática, do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Silvanio de Andrade.

CAMPINA GRANDE-PB

2019

S586r Silva, Juscelino de Araújo.
Resolução de problemas e representações múltiplas no ensino de sistemas de equações polinomiais do 1º grau com duas incógnitas [manuscrito] / Juscelino de Araújo Silva. - 2019.
163 p.

Digitado.

Dissertação (Mestrado em Acadêmico em Ens. de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2019.

"Orientação : Prof. Dr. Silvanio de Andrade , Coordenação do Curso de Matemática - CCT."

1. Ensino de álgebra. 2. Equações polinomiais. 3. Resolução de problemas. 4. Representações múltiplas. I. Título

21. ed. CDD 515.25

Elaborada por Giulianne M. Pereira - CRB - 15/714 BC/UEPB

JUSCELINO DE ARAÚJO SILVA

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E REPRESENTAÇÕES MÚLTIPLAS NO ENSINO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES POLINOMIAIS DO 1º GRAU COM DUAS INCÓGNITAS

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, área de concentração Educação Matemática, do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre.

Aprovada em: 10 de abril de 2019.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Silvanio de Andrade (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Profa. Dra. Severina Andréa Dantas de Farias (Examinadora)
Universidade Federal da Paraíba (UFPB)

Prof. Dr. José Joelson Pimentel de Almeida (Examinador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

CAMPINA GRANDE-PB
2019

AGRADECIMENTOS

Há quem defenda que este espaço é destinado à gratidão a todos que contribuíram efetivamente para a realização do estudo. Por concordar plenamente com tal afirmação, venho agradecer à equipe do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática (PPGECEM) da UEPB, em especial aos meus professores e colegas de grupo de estudo e, de modo muito particular, ao meu orientador, que cumpriu seu papel de forma efetiva, iluminando alguns horizontes de meu caminho quando eu ainda estava perdido na confusão de tantas informações. Agradeço também à escola que colaborou com a pesquisa realizada, da direção aos alunos, os quais colaboraram de forma maravilhosa – não há dúvida de que sem eles este trabalho não seria realizado.

Dentre aqueles que contribuíram de forma efetiva para que esta etapa de minha vida fosse realizada, não posso deixar de citar: a minha família, que bem acolheu, apoiou, incentivou e suportou todo o tempo dedicado a este trabalho; aos meus amigos, que respeitaram e entenderam meu afastamento, às vezes, de nossas saídas, mas que torceram e sei que ainda torcem pelo meu sucesso; e ao meu Grupo de Oração da Renovação Carismática Católica (RCC), que compreendeu e aceitou meu afastamento das missões por tempo determinado, a fim de me dedicar a esta obra, e que também foi suporte através de sua oração.

Há quem julgue que estes personagens citados acima não são colaboradores diretos deste trabalho, mas os que assim pensam esquecem que eles, na realidade, são os primeiros de todos, pois foi com a ajuda deles que cheguei até aqui!

Um obrigado muito especial vai para um ex-aluno e amigo meu chamado Alyson, pois foi graças a ele que a ideia inicial desta pesquisa nasceu, assim como aconteceu na graduação. Junto a ele deixo meu obrigado a todos os jogadores de Yu-Gi-Oh! (Jogo de cartas que inspirou este trabalho, apesar de no decorrer da pesquisa vermos que ele não seria mais tão necessário quanto imaginávamos de início).

Por fim, toda gratidão, louvor e adoração sejam dados Àquele que é, que era e que há de vir (Apocalipse 4,8) – o Cristo Jesus. E o fato de aparecer em último lugar nesta seção, não significa que Ele esteja em último diante de todos os que ajudaram neste trabalho, muito pelo contrário: Ele vem como último, pois Ele é a base de toda esta realização, foi Ele quem mais contribuiu para que este trabalho se concretizasse, já que, entre inúmeras coisas que este bom Deus fez em minha vida, a primeira delas é me conceder o dom da vida ao mesmo tempo que **é Ele o sentido dela!**

RESUMO

Este trabalho evidencia *as potencialidades da resolução de problemas, aliada ao uso das representações múltiplas, no ensino de sistemas de equações polinomiais do 1º grau com duas incógnitas.* Para tanto, a partir de um levantamento bibliográfico a respeito de pesquisas sobre o ensino de Álgebra, mais especificamente, no que se refere ao ensino de sistemas de equações polinomiais do 1º grau com duas incógnitas, na matemática do Ensino Fundamental, decidiu-se trabalhar com o uso da resolução de problemas aliada às ideias sobre representações múltiplas, conforme Goldin e Shteingold (2001) e Friedlander e Tabach (2001). Para alcançar o objetivo proposto, a pesquisa, de cunho qualitativo, foi realizada numa escola da rede municipal da cidade de Mari, estado da Paraíba, numa turma de 8º ano, utilizando-se da metodologia da Resolução de Problemas (RP), baseada, especialmente, nas contribuições de Andrade, C. e Onuchic (2017). Ao término de toda experiência, e com os dados coletados através de um diário de campo e dos registros feitos pelos alunos, observou-se que os momentos das plenárias, consensos e formalização de conteúdo da metodologia da Resolução de Problemas foram de grande valia para o aprendizado dos alunos. Constatou-se também a necessidade de ouvir os discentes quando expõem oralmente suas representações verbais a respeito do que entenderam, a fim de compreender melhor os seus registros escritos tanto numérica, como algébrica ou graficamente, e então perceber se conseguiram assimilar as ideias que foram ensinadas. Por outro lado, ainda existe a necessidade de se trabalhar mais e melhor os métodos de adição e substituição, como também o uso das representações gráficas.

Palavras-chave: Sistema de equações polinomiais do primeiro grau. Representações múltiplas. Resolução de Problemas. Ensino de Álgebra.

ABSTRACT

This work highlights *the potentialities of problem solving, allied to the use of multiple representation, in the teaching of systems of first degree polynomial equations with two unknowns.* For that, starting from a bibliographic survey on researches on Algebra teaching, more specifically, on what refers to the teaching of systems of first degree polynomial equations with two unknowns, in Mathematics of Basic Education, it was decided to work with the use of problem solving allied to ideas about multiple representations, according to Goldin and Shteingold (2001) and Friedlander and Tabach (2001). In order to reach the proposed objective, the research, of qualitative feature, was performed in a municipal school in the city of Mari, Paraíba state, with an 8th grade group, making use of the Problem Solving methodology (PS), especially based on the contributions of Andrade, C. and Onuchic (2017). By the end of the entire experience, and with data collected through a field journal and records made by students, it was observed that the moments of plenary, consensus, and content formalization of the Problem Solving methodology were greatly valuable for the students' learning. It was also verified the necessity of listening to the students when they orally expose their verbal representations in relation to what they understood, in order to better comprehend their written records both in numerical, algebraic or graphic form, and then perceiving if they managed to assimilate the taught ideas. On the other hand, there is still the necessity of a further and better work of the addition and substitution methods, as well as the use of graphic representations.

Keywords: System of first degree polynomial equations. Multiple representations. Problem solving. Algebra teaching.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Era um dia normal e eu estava jantando em minha cozinha quando meu celular toca: era Alyson, meu aluno do 8° ano que me ligava para tirar uma dúvida sobre uma questão que fazia parte da tarefa de casa que tinha passado para sua turma. Não recordo bem qual era, mas não esqueço como disse a ele para pensar em como resolver e então...

Geralmente, toda pesquisa começa com uma inquietação do pesquisador a respeito de algo que observou e comigo não foi diferente. Já na graduação, sempre me inquietou o fato de os alunos não conseguirem compreender como passar para a linguagem algébrica um problema escrito na linguagem verbal – no tempo da graduação minha inquietação pairou sobre o caso desta passagem da linguagem verbal para algébrica em que surgiriam equações polinomiais do 1º grau com uma incógnita; por exemplo, escrever a equação correspondente à seguinte frase: "Um número somado com oito, resulta em 9. Que número é este?". Decidimos no mestrado ir por este caminho, sendo que agora na investigação dos sistemas de equações polinomiais do 1º grau, por exemplo, como escrever o sistema que corresponde ao enunciado: "A soma de dois números é 10 e sua diferença é 2. Quais são estes números?".

A proposta inicial era usar o jogo que usamos na época da graduação – Yu-Gi-Oh! – unido à metodologia da Resolução de Problemas (RP), todavia, com o aprofundamento da pesquisa, percebemos que o jogo não seria necessário para responder à pergunta que, após as leituras e com o auxílio de meu orientador, elaboramos: *quais as potencialidades da resolução de problemas, aliada ao uso das representações múltiplas, no ensino de sistemas de equações polinomiais do 1º grau com duas incógnitas?*

Partindo de estudos recentes na área de ensino dos sistemas de equações polinomiais do 1º grau com duas incógnitas, escolhemos abordar a metodologia da Resolução de Problemas juntamente com as ideias das representações múltiplas, consoante Goldin e Shteingold (2001) e Friedlander e Tabach (2001). Enveredamos por este caminho e elegemos o seguinte objetivo: explicitar as potencialidades da resolução de problemas, aliada ao uso das representações múltiplas, no ensino de sistemas de equações polinomiais do 1º grau com duas incógnitas.

Optamos por usar a metodologia da RP, pois os problemas de sistemas têm, por sua natureza, a possibilidade de permitir que os alunos resolvam eles usando sua criatividade e não tendo que se valer, inicialmente, de um método específico. Pelo fato de usar a criatividade, há os que possam resolver com contas, a depender do problema com desenhos (os problemas de carros e motos, por exemplo), e os que apresentam um pensamento tão rápido que podem expor verbalmente para depois passar para o papel os cálculos que fez. Todas estas formas são justamente as representações múltiplas, nas quais também encontramos fundamento para o trabalho que veio a ser realizado.

Uma vez que decidimos trabalhar os sistemas através da metodologia da Resolução de Problemas, fizemos um levantamento bibliográfico sobre a temática, fazendo um passeio histórico de como se desenvolveu esta metodologia, utilizando de autores como Polya (1944); Onuchic (1999); Onuchic e Allevato (2011); Andrade, S. (2011); Cai *et al.* (2015) e Andrade, C. e Onuchic (2017).

Nossa pesquisa foi desenvolvida em uma turma de 8º ano do Ensino Fundamental de uma escola municipal da cidade de Mari-PB, onde o professor foi o próprio pesquisador. Para obter os dados que foram analisados adotou-se um diário de campo, no qual o pesquisador buscou, na medida do possível, descrever cada momento da pesquisa para posterior análise. Juntamente com o diário, também foram analisados os registros feitos pelos alunos ao término de cada etapa da pesquisa. Ao lançar mão de tais instrumentos, tínhamos o objetivo de conseguir um material que nos ajudasse a entender e explicar melhor os resultados obtidos. Por tudo isso, consideramos que nossa pesquisa se encaixa numa perspectiva qualitativa de pesquisa, conforme Bogdan e Biklen (1994) e Gil (2010). Na pesquisa qualitativa é o próprio professor que pesquisa sua sala de aula na busca de observar a metodologia que está utilizando e tentando encontrar meios de aprimorá-la, a fim de proporcionar um melhor aprendizado aos alunos (LANKSHEAR; KNOBEL, 2008).

Após esta introdução, apresentamos um levantamento bibliográfico de trabalhos recentes a respeito do nosso objeto de estudo. Em seguida, apresentamos nosso referencial teórico, partindo das representações múltiplas e da formação de conceitos, passando pela história dos sistemas de equações do 1º grau, e adentrando na história do desenvolvimento da metodologia da Resolução de Problemas. Depois disso, apresentamos as características da pesquisa qualitativa adota em nosso estudo, na forma de pesquisa pedagógica, cujos dados foram obtidos através da coleta dos registros dos alunos e também de observações feitas e anotadas pelo professor-pesquisador em diário de campo. Após isso, apresentamos a análise dos resultados dos registros dos alunos, culminando nas considerações finais e referências.

Disse a ele: "Alyson, faça assim: pense que o x e o y representam os ataques de dois monstros de Yu-Gi-Oh! Pense desta forma e veja se você consegue ver como resolver". Depois disto, nos despedimos no telefone e após desligar o celular as ideias começaram a fluir em minha mente numa proporção que... Gerou uma monografia na graduação e agora uma dissertação.

2 REVISÃO DE LITERATURA

Neste capítulo, fazemos uma breve leitura da literatura existente sobre o tema da nossa pesquisa, apontando as dificuldades existentes no conteúdo e as experiências de ensino sobre os sistemas de equação do 1º grau com duas incógnitas.

2.1 RECORDAR É VIVER

Neste trabalho, ao falarmos de dificuldades em Matemática – não desmerecendo a importância das outras áreas que esta disciplina abrange –, nossa atenção se volta para a Álgebra, pois entendemos que se trata de uma poderosa ferramenta de resolução de problemas a ser adquirida pelo aluno. Além disso, através da linguagem algébrica, também se torna possível conseguir expor certos problemas de forma mais fácil e compreensível de se trabalhar. (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009).

É uma pena que, apesar dos avanços no ensino da Álgebra, em muitas salas de aula ainda predomine um ensino mecânico, resumindo a aprendizagem a procedimentos de cálculos com expressões algébricas, equações, sistemas etc. (ensino auxiliado por alguns livros didáticos que resumem a Álgebra a isto).

> A realidade é que a álgebra vem sendo desenvolvida de forma mecânica e automatizada, concebendo o papel dos alunos como limitado à memorização de técnicas de cálculos, com manipulação de letras e símbolos que, quase sempre, são dissociados de qualquer significado social. Em geral, o ensino-aprendizagem de conceitos algébricos no ensino fundamental restringe-se à abordagem de expressões algébricas, com redução de termos semelhantes, valores numéricos, operações, fatoração, equações, inequações, sistemas de equações e funções. (MIRANDA; GRANDO, 2006, p.57).

Neste trabalho, nosso enfoque principal é o aprendizado de sistemas de equações polinomiais do 1º grau com duas incógnitas, assunto específico da Álgebra, quer no que toca à compreensão de enunciados da linguagem materna que resultam neles ao serem levados para a linguagem algébrica, quer nos métodos de resolução. Todavia, as dificuldades já existem nas simples equações polinomiais do 1º grau com uma incógnita, como podemos constatar na dissertação de Freitas (2015), da Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), intitulada "Língua Materna e Linguagem Matemática: influências na resolução de problemas matemáticos", cujo objetivo era identificar e analisar as dificuldades que os alunos apresentam diante dos enunciados de problemas matemáticos, de forma especial os obstáculos no entendimento da

Língua Materna, da Linguagem Matemática e a influência destas no processo de resolução de problemas matemáticos. Temos, neste trabalho, o relato de uma experiência feita com cinco conjuntos de problemas com alunos de uma turma do 1º ano do Ensino Médio regular de uma escola da rede estadual da Paraíba. O autor notou que, nos problemas que poderiam ser resolvidos usando equações, houve recusa por parte dos alunos, seja pelo fato de os enunciados serem grandes, seja porque achavam que já estava difícil resolver com os dados do problema e se acrescentasse uma equação ficaria ainda mais complicado, ou, simplesmente, porque não conseguiam montar a equação que expressava o problema.

> Além disso, destacamos a importância do uso da álgebra, que elimina a necessidade de realizar diversas tentativas e é um processo mais rápido para obtenção da solução. Os alunos concordaram, afirmando que dessa forma (utilizando uma equação) era mais fácil e rápido, porém, **destacaram a dificuldade em montar e solucionar a equação** (FREITAS, 2015, p.116, grifo nosso).

De acordo com a citação de Freitas (2015), observa-se que embora os alunos reconheçam que o uso de equações facilita na resolução de problemas, eles demonstram a dificuldade existente na montagem da equação, ou seja, na tradução da linguagem materna para a algébrica. Este fato não ocorreu só uma vez no seu trabalho: “Eles concordam que utilizar uma equação seria bem mais simples, **mas afirmam que não conseguiam escrever uma equação que representasse a situação**” (FREITAS, 2015, p.118, grifo nosso).

Ponte, Branco e Matos (2009), ao discutirem de pensamento algébrico (pois tratar de equações e de sistemas é tratar também de pensamento algébrico) apontam que este tem três vertentes: apresentar, raciocinar e resolver problemas. E, de forma muito especial, um dos objetivos da última vertente é justamente: “Usar expressões algébricas, equações, inequações, **sistemas** (de equações e de inequações), funções e gráficos **na interpretação e resolução de problemas matemáticos** e de outros domínios (modelação)” (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p.11, grifo nosso).

Referindo-se a outros autores que também relatam dificuldades que podem ser encontradas na aprendizagem da Álgebra, Ponte, Branco e Matos (2009) destacam que uma das dificuldades mais relatadas é a tradução da linguagem materna para a algébrica. E, ao tratarem do ensino de sistemas, como também de inequações do 1º grau e equações do 2º grau, frisam que estes conteúdos são de muita importância para o desenvolvimento da linguagem algébrica, raciocínio do aluno e sua habilidade de resolução de problemas. Além disso, ainda deixam bem claro que há três principais dificuldades no trabalho com sistemas, uma delas é justamente “ser capaz de resolver problemas dados por enunciados verbais, traduzindo as condições dadas por um sistema de equações” (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p.151). Em relação aos motivos desses possíveis erros de interpretação, os autores elencam:

> [...] a falta de compreensão dos enunciados em linguagem natural, o desconhecimento das regras de sintaxe da linguagem algébrica, o estabelecimento de relações incorrectas entre as duas linguagens, a simples distracção ou o foco em pistas enganadoras (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p.151).

Mas, apesar disso, os autores supracitados apontam que discutir com toda a turma um problema inicialmente apresentado em linguagem materna também ajuda muito no desenvolvimento da capacidade de comunicação matemática dos alunos e da resolução de problemas. Sugerem ainda, citando o *Programa de Matemática*, que para a apresentação destes conteúdos convém trabalhar antes situações informais para só depois vir com todo o formalismo algébrico necessário, que é aquilo que tencionamos fazer em nossa experiência pedagógica antes de enunciar o conteúdo de sistemas propriamente dito.

No que se refere especificamente aos sistemas de equações, encontramos na pesquisa de Rocha (2010), intitulada “Aprendizagem da resolução de sistemas de equações do 1º grau por alunos do 8º ano do ensino fundamental: método da substituição”, da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), um trabalho realizado com sistemas de equações com auxílio do aplicativo *Aplusix*. Antes de começar a aplicação da sua atividade, o autor fez um teste diagnóstico com a turma, tanto no que se refere à resolução de certas equações, como também na tradução da linguagem natural para a algébrica de equações do 1º grau com uma ou com duas incógnitas. Rocha (2010, p.51) constatou: “Diante dos resultados apresentados, vimos que a maior parte, 73,4%, dos alunos apresenta dificuldade na tradução das informações escritas em linguagem natural para linguagem algébrica”. Na conclusão deste teste diagnóstico, percebeu-se que as dificuldades apresentadas pelos alunos se mostraram tanto na tradução quanto na resolução das equações.

Sua atividade estava dividida em 5 blocos, cada um com atividades específicas que versavam desde a tradução de enunciados até a resolução dos sistemas que deles surgiriam. Durante sua realização, o autor (conforme já tinha previsto numa análise feita *a priori* das possíveis dificuldades que poderiam ser nele encontradas) constatou que “A dificuldade maior ainda estava relacionada à conversão de instruções escritas na linguagem corrente em expressões algébricas, no caso, em sistemas de equações” (ROCHA, 2010, p.101). Todavia, com o auxílio do *software* utilizado, os alunos iam conseguindo perceber seus erros e assim iam obtendo as equações correspondentes a cada situação problema apresentada. No final de toda a atividade, o autor relatou que o conhecimento trabalhado conseguiu ser efetivado de maneira progressiva, passando por cada um dos blocos propostos, indo desde a tradução dos problemas até as suas resoluções de forma correta.

Na dissertação de Pimentel (2010), defendida na Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), de título “Metodologia da resolução de problemas no planejamento de atividades para a transição da aritmética para a Álgebra”, temos um trabalho cujo objetivo era identificar e explorar as possíveis causas das dificuldades apresentadas pelos alunos na passagem da aritmética para a álgebra nos anos finais do Ensino Fundamental, de forma especial no oitavo ano. Ele usou a metodologia da resolução de problemas abordando vários conteúdos como geometria, equação, contagem e também sistemas de equações. Após a análise dos resultados, percebeu que as maiores dificuldades estavam na insistência dos alunos em resolver as situações apresentadas apenas pela via aritmética, como também na percepção do papel das incógnitas nas equações e no significado das letras quando usadas como variáveis.

Santos (2012), em seu relatório da prática de ensino supervisionado, intitulado “Resolução de problemas envolvendo sistemas de equações de 1º grau a duas incógnitas - um estudo com alunos do 8º ano”, da Universidade de Lisboa, expõe sua experiência no ensino de sistemas de equações com auxílio da resolução de problemas numa turma A de 8º ano da Escola E.B. 2,3 Maria Alberta Menéres. Suas questões de pesquisa foram:

> Que dificuldades os alunos evidenciam na interpretação dos enunciados dos problemas, nomeadamente no que se refere a aspetos de tradução da linguagem corrente para a linguagem matemática e reciprocamente? Que estratégias são utilizadas pelos alunos na resolução de problemas envolvendo sistemas de equações e que dificuldades manifestam? (SANTOS, 2012, p.75).

Ao decorrer de seu trabalho, logo na primeira aula (o que voltou a se repetir em momentos da quarta e quinta aulas, quando também se fez necessário esta interpretação), Santos (2012, p.34) pôde notar a dificuldade de interpretação que os alunos expressaram em sua primeira questão: “Neste momento da aula, os alunos demonstraram alguma dificuldade na passagem do enunciado das tarefas para um sistema de equações, ou seja, da linguagem natural para a linguagem matemática, tendo solicitado bastante ajuda por parte dos professores”.

Nas aulas seguintes também foi apresentado e trabalhado o método da substituição, que demorou a ser bem assimilado pelos alunos, de tal forma que a autora chegou a perceber: “No fim desta aula, senti-me um pouco preocupada devido às dificuldades sentidas pelos alunos nas operações e verifiquei que os alunos precisavam de praticar mais a resolução de sistemas”

(SANTOS, 2012, p.41). Com o passar das aulas, os alunos conseguiram obter domínio do método da substituição e de todo o conteúdo em si. Ao final de toda a experiência, a professora titular da turma onde foi realizado o estágio fez uma avaliação com todos os alunos, abordando os tópicos de funções, equações do 1º grau e sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas. Neste teste, o subtópico de sistemas foi o que mais apresentou acertos, levando a autora a afirmar que os objetivos desejados de início foram alcançados.

Silva, D. (2013), na dissertação “Aprendizagens algébricas e o desenvolvimento do pensamento algébrico em alunos do 8º ano”, da Universidade da Madeira, Portugal, apresentou uma proposta que envolvia vários conceitos de Álgebra para serem trabalhados com os alunos: equações, sistemas, funções e operações com polinômios realizada no ano letivo 2012/13, no decorrer dos 2º e 3º períodos, na Escola Básica do 2º e 3º Ciclos Dr. Eduardo Brazão de Castro.

A proposta de trabalho que introduziu o estudo dos sistemas de equação foi a de nº 13, chamada “Morada da Mariana”. Através de uma apresentação de slides, a autora relatou que a proposta foi feita “dando especial atenção à passagem da informação da linguagem natural para algébrica” (SILVA, D., 2013, p.27). Os alunos tentaram traduzir o problema que fora apresentado e encontraram algumas dificuldades, tendo conseguido depois de um tempo a obtenção do sistema.

Já a outra questão apresentada (nº 14) trouxe o típico problema de sistemas onde se pede para achar o número de galinhas e coelhos em determinado quintal.

> Para a resolução do item 1.1 desta tarefa, foi sugerido aos alunos que encontrassem o número de galinhas e de coelhos que a quinta poderia ter. Pretendia-se que fossem utilizados métodos aritméticos na resolução e que por tentativa e erro os discentes chegassem à solução do problema. Na tradução do problema da linguagem natural para a linguagem matemática é importante que os alunos percebam que existem duas informações que dão origem a duas equações com duas incógnitas (SILVA, D., 2013, p.28).

Na resolução deste problema foram percebidos algumas falhas de tradução, pois foi usada a expressão 20x para representar o número de coelhos, quando na realidade era a incógnita x. Depois da discussão em grupo com toda a sala é que se obteve a tradução adequada: $x + y = 20$. Para a obtenção da segunda equação: $2x + 4y = 100$, um aluno fez a observação de que cada galinha teria duas patas (logo 2x) e cada coelho quatro (logo 4y).

Em suas considerações finais, Silva, D. (2013) observou que a dificuldade da tradução da linguagem escrita para a simbólica se dá, muitas vezes, pela falta de atenção dos alunos na leitura dos enunciados das questões (em especial, quando são muito grandes), que acabam não considerando algumas informações importantes presentes em cada enunciado. A autora verificou que os alunos também demonstraram dificuldade no uso do método da substituição para resolver o sistema, entretanto, com o decorrer das atividades, conseguiram atentar melhor para a leitura dos enunciados, havendo, assim, uma progressiva melhora na capacidade de interpretações.

Goulart (2014), em sua dissertação intitulada "A aprendizagem significativa de sistemas de equações do 1º grau por meio da resolução de problemas", da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), decidiu trabalhar com sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas e a resolução de problemas, tendo como referencial a aprendizagem significativa de David Ausubel. Ela preparou uma sequência de atividades para trabalhar com os alunos em sala que versavam inicialmente sobre uma introdução aos sistemas de equações, passando pela tradução de linguagem natural para a linguagem algébrica e o ensino dos métodos da adição e substituição.

Na análise dos resultados, a autora Goulart (2014) percebeu que, em algumas situações, foi fácil para os alunos fazer a conversão da linguagem natural para a algébrica, entretanto, em outras situações, essa transição não foi possível de ser realizada sem a sua ajuda. Nas palavras de Goulart (2014, p.102), "Já na segunda tarefa, em que seis diferentes situações foram propostas, os alunos apresentaram maior dificuldade na conversão para a linguagem algébrica e resolução dos itens **e** e **f**". No fim, a autora constatou que a sequência utilizada conseguiu levar os alunos à aprendizagem significativa com auxílio da resolução de problemas do conteúdo de sistemas de equações.

A dificuldade em sistemas vai além da Educação Básica. Cury e Bisognin (2009), em um artigo da revista Bolema, mostram que em suas experiências como professoras de Cálculo Diferencial e Integral encontram alunos que têm muita dificuldade de conseguir expressar uma situação escrita na linguagem matemática e ainda cometem erros na resolução do sistema que expressa a situação. Partindo desta observação, realizaram uma prova com 12 questões de múltipla escolha para serem respondidas intencionalmente por uma amostra inicial de 368 alunos, calouros de oito Instituições de Ensino Superior (IES) gaúchas dos mais diversos cursos: Engenharia, Arquitetura, Ciência da Computação, Ciências Contábeis e Licenciatura em Matemática. Foi pedido que os alunos marcassem as alternativas somente após escreverem todo o procedimento que realizaram para chegar à resposta.

Para fazer a análise qualitativa e quantitativa a que se propuseram, as autoras escolheram somente a questão que teve o maior número de acertos, a saber:

> O valor de dois carros de mesmo preço, adicionado ao de uma moto, soma R$ 41.000,00. No entanto, o valor de duas dessas motos, adicionado ao de um carro do mesmo tipo, é de R$ 28.000,00. A diferença entre o valor do carro e o da moto, em reais, é:
> a) 5.000 b) 13.000 c) 18.000 d) 23.000 e) 41.000 (CURY; BISOGNIN, 2009, p.4.)

Em termos quantitativos, a referida questão obteve 63% de acertos por parte dos alunos (24% marcaram opções incorretas e 13% nada responderam), mas como as autoras também analisaram o aspecto qualitativo e tinham pedido que os alunos deixassem escritos seus meios de resolução da questão, apenas 138 provas obedeceram a este critério e foram elas, então, analisadas.

Os resultados foram agrupados em 4 categorias: A, B, C e D. A categoria A foi composta pelas respostas nas quais os alunos identificaram que o problema se resolveria através de um sistema, montaram o sistema, resolveram e deram a resposta correta – um total de 94 alunos. A categoria B diferencia-se da A pelo fato de englobar as produções nas quais os alunos erraram alguns detalhes e não apresentaram a resposta correta – um total de 9 alunos. Na categoria C estão aqueles que reconheceram que a resposta poderia ser dada através de um sistema, chegaram a montá-lo, porém não souberam responder – um total de 25 alunos. Por fim, a categoria D foi formada por aqueles que não souberam modelar o sistema – um total de 10 alunos.

Nas considerações finais, Cury e Bisognin (2009, p.17) constatam, a partir das produções analisadas de alunos que estão em curso de nível superior, que “muitos desses estudantes ainda apresentam dificuldades no uso da simbologia necessária a um aluno de Cálculo Diferencial e Integral ou de Álgebra Linear”.

Apesar desse quadro, relativo às dificuldades encontradas no trabalho com sistemas de equações, existem documentos nacionais que dão um norte de “objetivos” a serem alcançados pelos alunos quando se é trabalhado este conteúdo.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), ao tratarem de “Conceitos e Procedimentos”, falam da necessidade da “Tradução de situações-problema por equações ou inequações” e da “Resolução de situações-problema por meio de um sistema de equações do primeiro grau, construindo diferentes procedimentos para resolvê-lo” (BRASIL, 1998, p.88). Além disso, também encontramos nos Referenciais Curriculares do Ensino Fundamental (RCEF) do estado da Paraíba que uma capacidade específica necessária aos alunos é: “Identificar um sistema de equações do primeiro grau que representa um problema”. (PARAÍBA, 2010, p.149).

Outro documento nacional, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC/BRASIL, 2017), traz como um dos objetos de conhecimento para a parte de Álgebra destinada ao 8º ano os sistemas de equações polinomiais do 1º grau, tanto na sua resolução algébrica, como em termos de representação no plano cartesiano. A BNCC abordou também que o aluno precisa adquirir a habilidade de resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto que possam ser representados por sistemas. O documento enfatiza ainda que, dentro da unidade temática Álgebra, além de se destacar o desenvolvimento de uma linguagem própria – a algébrica – também deve-se enfatizar a resolução de problemas por meio de equações.

A matriz de referência do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB) para a 8ª série (9º ano), em seu descritor número 34, já aponta que uma das habilidades que o aluno precisa desenvolver ao término do Ensino Fundamental é

> Identificar um sistema de equações do 1º grau que expressa um problema. Com este descritor se pretende avaliar: a habilidade de o aluno, dado um problema, identificar e expressar equações do 1º grau, construindo um sistema de equações (BRASIL, 2011, p.190).

Vemos, portanto, que existe em documentos oficiais a ressalva de que os alunos precisam desenvolver a habilidade de traduzir/identificar um sistema de equações expresso através de um determinado problema, como também de resolvê-lo.

Enfim, com base nas pesquisas levantadas, pudemos perceber diferentes enfoques, tendo em vista que versaram sobre: o uso de *software* para o ensino de sistemas (ROCHA, 2010); a transição da aritmética para a Álgebra (PIMENTEL, 2010); temas algébricos, mas não necessariamente de forma clara com a metodologia da resolução de problemas (SILVA, D., 2013); a Resolução de Problemas (SANTOS, 2012); bem como a resolução de problemas na perspectiva da teoria de David Ausubel (GOULART, 2014).

Frente a esse cenário, e propondo-nos a trazer algo novo, lançamos o seguinte questionamento de pesquisa: *quais as potencialidades da resolução de problemas, aliada ao uso das representações múltiplas, no ensino de sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas?*

3 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo, evidenciamos o uso das representações múltiplas, na perspectiva de Goldin e Shteingold (2001) e Friedlander e Tabach (2001); discutimos sobre a metodologia da Resolução de Problemas, com base em Andrade, C. e Onuchic (2017); e abordamos o conteúdo que escolhemos trabalhar no processo de pesquisa, a saber: os sistemas de equações polinomiais do 1º grau.

3.1 REPRESENTAÇÕES MÚLTIPLAS

Trabalhar com sistemas de equações é ensinar Álgebra e sabemos bem que o ensino desta área tem se tornado muito mecânico, tornando-se então um obstáculo para o efetivo aprendizado dos alunos. Em vista disso, o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000) – Conselho Nacional de Professores de Matemática – propõe, como um caminho, que se use com os estudantes diversas representações para o ensino da Álgebra. No documento elaborado pelos integrantes do NCTM, denominado *Principles and Standards for School Mathematics* – Princípios e Padrões para a Matemática Escolar (NCTM, 2000) –, recomenda-se que os programas de Matemática do ensino pré-escolar ao 12º ano deverão habilitar todos os alunos para:

> Criar e usar representações para organizar, registrar e comunicar ideias matemáticas; Selecionar, aplicar e traduzir representações matemáticas para resolver problemas; Usar as representações para modelar e interpretar fenômenos, sociais e matemáticos (NCTM, 2000 – Tradução: APM, 2008, p.75).

Entendemos como representações os registros que os alunos podem usar para mostrar o que foi (ou não) assimilado de certo conteúdo, mas não somente o seu "produto final", o processo que os levou até chegar a este produto também é uma forma de representação. Conforme o mesmo documento, citado anteriormente,

> O termo representação refere-se tanto ao processo como ao resultado – em outras palavras, à aquisição de um conceito ou de uma relação Matemática expressa numa determinada forma e à forma, em si mesma [...]. Além do mais, o termo é aplicável tanto aos processos e resultados observáveis externamente, como aos que ocorrem internamente, nas mentes dos indivíduos quando fazem Matemática (NCTM, 2000 – Tradução: APM, 2008, p.75).

Ainda segundo o mesmo documento, é necessário que se estimule os alunos a representar suas ideias da forma que sabem, isto é, usando os tipos de registros que possuem domínio para resolução dos problemas matemáticos que lhe são propostos, por mais que não sejam representações convencionais, mas que façam sentido para eles. Por outro lado, é necessário que os mesmos aprendam as formas de representação convencional para facilitar tanto o seu aprendizado como a sua comunicação matemática.

Nesse contexto, Friedlander e Tabach (2001) apresentam alguns tipos de representações como a verbal, numérica, gráfica e algébrica.

A representação verbal é muito utilizada quando se propõem problemas que, muitas vezes, podem ser resolvidos também verbalmente. Esta representação permite fazer ligações com temas do cotidiano ou da vida acadêmica, tornando a sua compreensão mais fácil. Entretanto, pelas diferenças presentes nas línguas maternas, pode causar ambiguidades e levar a associações incorretas, além de não ser uma linguagem universal e que varia muito do estilo pessoal de cada indivíduo.

Expor verbalmente um problema que represente um sistema para ser resolvido pelos alunos pode, inicialmente, além de despertar a curiosidade dos mesmos, estar num "tom mais acessível" de compreensão para eles, como, por exemplo: "Pensei em dois números cuja soma é 14 e a diferença é 2. Quais são eles?"

A representação numérica é, sem dúvida, uma das mais utilizadas no estágio inicial do estudo da Álgebra. Além do uso desta representação ser uma excelente ponte para a aquisição da Álgebra, ela precede também outros tipos de representação. Para o início da compreensão e resolução de problemas é uma representação muito importante e de muita ajuda, porém, possui limitações no que toca à necessidade de provar casos gerais.

Se tomarmos o mesmo exemplo dado na representação verbal podemos constatar que um dos caminhos que os alunos adotam, inicialmente, para resolvê-lo é o registro dos cálculos de soma e subtração de dois números, por método de tentativa e erro, na busca dos números procurados.

A representação gráfica é muito útil devido ao apelo visual que leva aos alunos, além de proporcionar uma imagem clara de uma função de variáveis reais, mas estas representações podem não ser bem exatas devido a fatores externos – como as escalas – e também por apresentarem apenas uma parte do alcance de certo problema. Sua utilidade varia de acordo com a tarefa matemática em questão.

Em relação aos sistemas, as representações gráficas aparecem na forma dos gráficos esboçados no plano cartesiano, de modo que, a partir deles, podemos fazer observações também muito interessantes a respeito do problema. Como os sistemas são, de certa forma, funções polinomiais do 1º grau, logo sua representação gráfica é possível de ser feita, bastando ao menos dois pares ordenados para cada equação a fim de se obter as retas que elas expressam.

A representação algébrica é concisa, geral e efetiva na representação de modelos e padrões matemáticos, aliás, às vezes, é a única forma de justificar ou provar declarações gerais. Contudo, o significado de objetos matemáticos ou a natureza dos objetos representados pode ser obstruído ou bloqueado quando há um uso exclusivo de símbolos algébricos em qualquer nível de aprendizagem.

É interessante que o aluno possa perceber que o uso da representação algébrica tanto na construção como na resolução de certos sistemas pode, além de "economizar tempo", isto é, ser um facilitador se comparado com outros tipos de representação como a numérica, também apresenta um grau sofisticado mais elevado. Isto não quer dizer que desconsideramos as contribuições que as outras representações podem dar, mas que vemos a vantagem que esta oferece, já que é um bom instrumento para potencializar a resolução de certos problemas.

É bom deixar claro também que, como cada representação possui suas vantagens e desvantagens, é recomendado que se trabalhe com mais de uma delas, pois o que falta em uma pode ser sanado com o uso da outra e vice-versa. Graças a este trabalho com mais de uma representação, a formação do conceito matemático que se deseja trabalhar pode se tornar mais efetivo para o aluno.

A própria BNCC ressalta que uma das competências específicas de Matemática para o aluno do Ensino Fundamental é comunicar por várias representações as relações entre conceitos e procedimentos dos diversos campos da Matemática, expondo suas respostas e conclusões ao enfrentar diversas situações-problema por meio de várias formas de registros (BRASIL, 2017).

Silva, L. (2013) realizou um trabalho usando a metodologia da Resolução, Proposição e Exploração de Problemas com as representações múltiplas em uma turma de 1º ano de Ensino Médio, abordando assuntos como: conceito de função, função afim, função quadrática e função exponencial. Ao final da experiência, o autor relata que os alunos mostraram um bom domínio das representações verbais e numéricas, sendo a algébrica a mais complicada para os alunos entenderem devido ao alto grau de generalização e abstração que ela envolve, além de também evidenciar que a Resolução, Proposição e Exploração de Problemas favoreceram possibilidades de desenvolver compreensões essenciais de funções.

Em Brandão (2014), também encontramos outro trabalho que utilizou as representações múltiplas para o ensino de funções numa turma de 1º ano de Ensino Médio, partindo da metodologia da Resolução, Proposição e Exploração de Problemas. Nesta pesquisa, constatou-se que o uso das várias representações permitiu aos alunos terem uma visão mais consistente a respeito do conceito de função, além do que a metodologia de Resolução de Problemas contribuiu para um envolvimento maior dos alunos nas atividades.

Os dois trabalhos citados anteriormente lidaram com funções dentro da perspectiva das representações múltiplas, o que se mostra muito interessante para o nosso trabalho, já que enveredamos pela mesma perspectiva, focando, especificamente, no conteúdo de Sistemas de Equações Polinomiais do 1º grau.

Os sistemas e as funções guardam entre si uma certa relação, sendo que para os sistemas as letras são tratadas como incógnitas e para as funções são tratadas como variáveis. Apesar dessa diferença, podemos ter a representação gráfica de cada equação do sistema/função onde o ponto de interseção das duas retas que representam as duas funções será o par ordenado da solução do sistema. Devido à similaridade existente entre esses dois conteúdos, vemos como podemos trabalhar com as representações múltiplas com eles, mesmo em suas particularidades.

Goldin e Shteingold (2001) explicam ainda que existem dois tipos de representação: as externas e as internas. Em resumo, podemos dizer que as externas são as que podem ser expressas por meio de papel, de desenhos, os esboços geométricos e as equações (que são os 4 tipos citados anteriormente); já as internas são as que são produzidas na mente dos indivíduos para objetos e processos matemáticos. Como as internas variam de pessoa para pessoa e também não podem ser expressas de forma fácil, apenas as externas podem ser avaliadas, é a partir delas que podemos afirmar algo a respeito das representações internas feitas pelos indivíduos, mas também podemos trabalhar nas representações internas deles a fim de aprimorá-las, realizando um bom trabalho no uso das externas.

Ressaltamos, por fim, a importância que o trabalho com as múltiplas representações tem como indicador da aprendizagem do aluno acerca de determinado conteúdo, pois quando o aluno consegue fazer pontes entre várias representações para expressar as ideias relacionadas ao conteúdo que se está sendo trabalhado, temos, nisto, um forte indicador da aprendizagem.

> Um conceito matemático é aprendido e pode ser aplicado pela extensão de uma variedade de representações internas apropriadas que tenham sido desenvolvidas, junto com o funcionamento de relações entre elas. Inferimos sobre a natureza das representações desenvolvidas, e sua adequação, em parte das interações individuais com a externa, convencionalmente desenvolveram sistemas de representações matemáticas e em parte de suas interações com situações não matemáticas (GOLDIN; SHTEINGOLD, 2001, p.6).

3.2 SISTEMAS DE EQUAÇÕES POLINOMIAIS DO 1º GRAU COM DUAS INCÓGNITAS

Ao traçarmos um breve histórico sobre o surgimento dos Sistemas de Equações Polinomiais do 1º grau com duas incógnitas (ou sistemas lineares), como nos propomos a trabalhar, encontramos seu primeiro registro na Matemática chinesa, no início da era cristã, na obra "Nove Capítulos sobre a arte da matemática", de autoria desconhecida (mas há uma hipótese de que tenha sido um compilado do conhecimento da Matemática da época feito por vários autores), escrita sob a Dinastia Han, embora a edição mais antiga seja do século XIII.

Um dos nove capítulos da obra (chamado Fangsheng) é reservado a apresentar a solução de Sistemas Lineares através de um método que seria parecido com as matrizes: usando os números dispostos em linhas e colunas. Vejamos abaixo, por exemplo, um dos problemas apresentados no texto:

> Três feixes de uma colheita de boa qualidade, dois feixes de uma de qualidade regular e uma de uma má qualidade são vendidos por 39 dou. Dois feixes de boa, três de regular e um de má qualidade são vendidos por 34 dou. Um feixe de boa, dois de regular e três de má são vendidos por 26 dou. Qual o preço do feixe para cada uma das qualidades? (EVES, 2004, p.268 *apud* TAVARES, 2013, p.4).

Fica claro que essa situação pode ser representada pelo seguinte sistema de três equações e três incógnitas: $\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases}$, considerando x o valor do feixe de boa qualidade, y o valor do feixe de qualidade regular e z o valor do feixe de má qualidade. Resolvendo o sistema encontraremos x = 9,25 dou; y = 4,25 dou e z = 2,75 dou.

Com o passar dos anos, o desenvolvimento do conteúdo de sistemas lineares se deu em consonância com o desenvolvimento das matrizes e determinantes. Na segunda metade do século XVII, ocorre no Japão, com Seki S. Kowa, um tratamento sistematizado sobre sistemas. E no século XVIII, encontram-se diversos trabalhos sobre este tema, descritos por Colin Maclaurin, Gabriel Cramer e Etienne Bézout, que formularam métodos de resolução de sistemas (SILVA, C., 2014).

Trazendo para a realidade de sala de aula, na maioria das vezes, o conteúdo de sistemas de equações polinomiais do 1º grau é iniciado por meio de um problema, no qual se apresenta a solução por uma forma pictórica (a depender do problema), ou de tentativa e erro, através das representações numéricas e, às vezes, com o auxílio de algumas representações tabulares.

Inclusive, a coleção do Programa Gestão da Aprendizagem Escolar (GESTAR/BRASIL, 2008) traz e indica este caminho metodológico.

Após este "primeiro contato" do aluno com tipos de problemas nos quais se procuram dois valores desconhecidos, geralmente, costuma-se apresentar os métodos algébricos da substituição e adição (como ocorreu na revisão de literatura que fizemos e que será o caminho que adotaremos também em nossa pesquisa).

Com o advento das novas tecnologias e a consequente facilidade no uso de *softwares* que ajudam a representar gráficos no plano cartesiano com mais perfeição do que o esboço feito à mão na malha quadriculada, existe também a tendência de abordar a solução gráfica dos sistemas e não apenas a solução algébrica. A coleção GESTAR abordou também o uso da resolução gráfica quando trata do conteúdo de sistemas de equações, além de trazer também os métodos da substituição e adição. Embora não utilizando os *softwares* em nossa pesquisa, abordamos dois problemas para trabalhar com as soluções/representações gráficas dos sistemas a partir do esboço dos gráficos em malhas quadriculadas.

Por fim, no Ensino Médio, o aluno é apresentado ao método do escalonamento – e, às vezes, à regra de Cramer –, justificado graças aos estudos sobre matrizes e determinantes. Como exposto anteriormente, foi de mãos dadas com estes conteúdos que os estudos a respeito dos sistemas de equações foram se desenvolvendo no decorrer do tempo.

A ideia do que é um sistema de equações que o livro utilizado pelos alunos da pesquisa traz é, de certa forma, a mesma que adotamos em nosso trabalho. Ele começa por discutir de equações do 1º grau com duas incógnitas para, em seguida, apresenta um problema sobre mistura de combustíveis e assim montar na linguagem algébrica as informações dadas no problema. Ele mostrou a presença de duas informações no problema que permitiu a montagem das duas equações, usando x e y em cada uma; após montá-las diz que as duas equações formam o sistema de equações e aponta que resolver o sistema é encontrar os valores de x e y que satisfazem as condições das duas equações obtidas, sendo esta solução chamada de par ordenado.

Assim sendo, consideramos Sistemas de Equações Polinomiais do 1º Grau com duas incógnitas o conjunto formado por duas equações polinomiais do 1º grau, cada uma com duas incógnitas e que possuem como solução comum o par ordenado (x, y), sendo x e y números racionais.

Por fim, dentro desse cenário, podemos observar que há ao menos duas ideias básicas presentes quando nos referimos a um sistema de equações para a finalidade a qual trabalhamos: uma delas é a existência de duas informações no problema, as quais, para serem expostas numa representação algébrica adequada, necessitam do uso de duas incógnitas diferentes para a montagem de duas equações, já que são dois valores desconhecidos que precisamos obter. A outra ideia que diz respeito ao momento da resolução de um sistema, já abordada pelo GESTAR, que é a necessidade de reduzir o número de incógnitas: no nosso caso, uma vez que trabalhamos com duas incógnitas, os métodos da adição e substituição demonstram a necessidade de resumir a equação que seria com duas incógnitas a uma equação com apenas uma (que sabemos como resolver facilmente) para depois voltarmos para obter o valor da incógnita que falta (através também de um equação com apenas uma incógnita).

3.3 UM POUCO DE HISTÓRIA SOBRE PROBLEMAS

Antes de tudo: **o que é um problema**?

Os PCN (BRASIL, 1998) definem como "uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, mas é possível construí-la" (BRASIL, 1998, p.41). Para Onuchic e Allevato (2011, p.81), "é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em fazer".

Entendemos problema como uma situação na qual o aluno se depara e não dispõe de métodos conhecidos para resolvê-la, portanto, precisará criar estratégias próprias para obter a solução do que lhe foi proposto, além de ser algo que cative o aluno fazendo-o engajar-se na busca pela resolução. A Resolução de Problemas, por sua vez, é uma metodologia que visa contribuir com o aluno para que ele desenvolva a habilidade de resolver problemas auxiliando-o, por exemplo, no desenvolvimento da sua criatividade, além de também possibilitar partir de um problema para chegar à formalização de certo conteúdo matemático almejado pelo professor.

Para os PCN (BRASIL, 1998), a resolução de problemas deve ser o ponto de partida da atividade matemática, não devendo ser tomada como uma espécie de exercício no qual o aluno irá usar técnicas que já conhece para resolvê-lo – já que só há problema se o aluno é capaz de interpretar o que a situação lhe diz e conseguir estruturá-la –, nem como uma atividade paralela, mas orientadora da aprendizagem.

Os RCEF (PARAÍBA, 2010), ao tratar desse assunto, abordam que entre as várias capacidades que o aluno precisa desenvolver no Ensino Fundamental, está a capacidade de resolver problemas. Além disso, apontam um "caminho" de como trabalhar a resolução em sala de aula: começa-se por uma leitura silenciosa do problema e depois, por exemplo, se algum termo do problema não tenha sentido claro para o aluno, então o professor pode esclarecer o significado da palavra. Após isto, passa-se para o processo de criação de estratégias de resolução que podem ser apresentadas das mais diversas formas: com desenhos, tabelas, método de tentativa e erro etc.

O professor deve valorizar cada uma delas, estimulando o aluno a usar aquilo que pensou para resolver o problema, de tal forma que se, por exemplo, ele usou um raciocínio aritmético, pode-se sugerir que ele tente resolver usando um raciocínio algébrico. Para terminar, o professor deve pedir ao aluno que justifique o porquê de ter escolhido sua estratégia para resolução e também pedir para conferir se a resposta encontrada é coerente com o que o problema pedia.

Os RCEF (PARAÍBA, 2010) ainda expõem que se pode pedir que os alunos criem seus próprios problemas, como também o professor pode apresentar problemas com, por exemplo, dados faltosos. Além disso, salientam que é de responsabilidade do professor a escolha criteriosa dos problemas a serem utilizados em sala de aula, e que para criar um clima positivo no âmbito escolar, o professor pode, por exemplo, personalizar os problemas usando personagens de desenho, novela, ídolos etc.

Por fim, a BNCC (BRASIL, 2017) recomenda para os anos iniciais e finais do Ensino Fundamental, o uso da resolução em conjunto com a elaboração de problemas, fazendo com que os discentes reflitam sobre diferentes situações, a exemplo do que aconteceria quando, após resolver o problema proposto, alguns dados do mesmo problema fossem alterados, acrescentados ou retirados.

Enfim, conviver com problemas e, portanto, com a necessidade de aprender a resolvê-los também, não é uma questão do homem do século XXI, pois desde o seu surgimento na terra, ele se deparou com situações que precisaram ser resolvidas. Desde o homem primitivo que precisava contabilizar quantos animais tinha em seu rebanho e que, para isto, por exemplo, utilizava-se de riscos em ossos ou em pedras; passando pelos povos das mais antigas civilizações, como é o caso dos egípcios que após a cheia do Nilo tinham que dividir novamente as terras para a população (o que fez surgir as frações); chegando aos nossos dias, na busca, por exemplo, da cura de algumas doenças, ainda incuráveis, a ciência médica.

Agricultura, Medicina, Astronomia, Mecânica, vida pessoal, a própria Matemática etc., são exemplos das várias áreas da vida humana nas quais os problemas existem, porém, uma coisa é certa: é preciso que eles sejam resolvidos, aliás, muitas coisas que o homem atual dispõe a seu favor são fruto de problemas que foram resolvidos por outros homens que nos precederam.

Stanic e Kilpatrick (1989) relatam que a resolução de problemas aparece na história desde a antiguidade, um exemplo é o conhecido Papiro de Ahmes, copiado pelo escriba Ahmes, por volta de 1650 a.C., como também outros registros dos mais diversos povos antigos: egípcios, chineses e gregos. Ademais, para esses autores, até meados do século XX, tratar de resolução de problemas se referia somente em resolver problemas, não sendo visualizada como uma metodologia de ensino, o que só veio a ocorrer no mundo e no Brasil anos mais tarde.

Os PCN (BRASIL, 1998) revelam que, a partir dos anos 20, as reformas curriculares não surtiram muito efeito para o ensino de Matemática, pois ainda eram muito presentes os altos índices de retenção e a aprendizagem sem compreensão alimentada por um ensino mais focalizado em procedimentos mecânicos, por exemplo.

Olhar a Resolução de Problemas como metodologia para o ensino de Matemática começou a ganhar espaço na década de 40, com George Polya (1944), a partir da publicação da sua obra clássica: “A arte de resolver problemas”. Nesta obra, Polya (1944) passa a ensinar estratégias de como resolver problemas, resumindo-as em 4 passos: primeiro, era necessário compreender o problema e saber o que tem que ser resolvido; depois, se deveria elaborar um plano para tentar solucionar o problema e, após a elaboração, colocá-lo em prática, a fim de que na última etapa deveria se conferir se o plano criado resolveu (ou não) o problema em questão.

Entretanto, na década de 1960 e 1970, com a chegada do Movimento da Matemática Moderna (MMM), o ensino de Matemática no Brasil e no mundo foi tomado por um excesso de abstração, valorização de aspectos da teoria dos conjuntos, da Álgebra, e embora apresentasse uma linguagem matemática universal e concisa, por outro lado acentuava o ensino de símbolos e terminologias complexas que prejudicava o aprendizado.

Em 1980, surgia nos Estados Unidos uma iniciativa que desencadearia uma séria mudança a respeito do ensino de Matemática com o foco na Resolução de Problemas: o NCTM publicava o documento chamado “Uma agenda para ação” que chamava a todos os interessados pela busca de uma melhor educação matemática a juntarem-se nesta missão e a primeira recomendação que fazia era que: “resolver problemas deve ser o foco da matemática para os anos 80” (ONUCHIC, 1999, p.204).

No que tange ao ensino da Resolução de Problemas, Schroeder e Lester (1989) apontam que este pode ocorrer de três formas, as quais, embora pareçam distintas, se sobrepõem: ensinar sobre resolução de problemas, ensinar para resolução de problemas e ensinar através da resolução de problemas.

Ensinar sobre resolução de problemas é a ideia de Polya ou alguma de suas variações, ou seja, encarar a Resolução de Problemas como um novo conteúdo a ser ensinado e assim ensinar meios, formas, estratégias de como solucionar problemas – são os 4 passos que apresentamos anteriormente. Já ensinar para resolução de problemas consiste no professor apresentar os conteúdos aos alunos e, após isto, passar-lhes problemas para que eles resolvam usando os conhecimentos adquiridos. Em outras palavras, eles aprendem Matemática para resolver problemas.

A Resolução de Problemas como metodologia de ensino, isto é, ensinar através dela, se torna o foco de pesquisas e estudos nos anos 1990, de tal forma que a UNESCO em uma declaração mundial sobre educação para todos destaca "que a resolução de problemas deve ser um instrumento essencial da aprendizagem, do mesmo modo que a leitura, a escrita e o cálculo". (HUANCA, 2006, p.20).

Merece destaque os trabalhos feitos pelo NCTM no fim dos anos 1980 e durante os anos 1990 para ajudar os professores a ver quais seriam os aspectos essenciais para o ensino de Matemática. De maneira especial a publicação do *Standards* (2000) onde é enunciado, entre tantas outras coisas, que a Resolução de Problemas é um dos cinco Padrões de Procedimento para o ensino de Matemática (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011). A partir de então os educadores começam a pensar no ensino de Matemática através da resolução de problemas, que se baseia em utilizar problemas para a introdução de novos conteúdos aos alunos, isto é, inicia-se o conteúdo acerca de certo tópico matemático, a partir de um problema que aborde alguns conceitos deste tópico, para tentar ser solucionado pelos alunos com estratégias próprias para, após isto, vir à formalização a respeito do tópico abordado pelo problema.

É na década de 1990 que os PCN são lançados no Brasil, aliás, as ideias propostas em "Uma agenda para ação" influenciaram vários países na elaboração "dos seus parâmetros", de forma que muitas apresentavam pontos de convergência como, por exemplo, a "ênfase na resolução de problemas, na exploração da Matemática a partir dos problemas vividos no cotidiano e encontrados nas várias disciplinas" (BRASIL, 1998, p.20).

Apesar disso, os PCN mostram que o ensino de Matemática a respeito dos problemas está mais acentuado no que seria a visão de ensino **para** a resolução de problemas, do que o ensino **através** da resolução de problemas.

Nosso trabalho se dedica a ensinar através da resolução de problemas, seguindo as ideias que foram expostas e aperfeiçoadas com o passar dos anos por Onuchic (1999), Onuchic e Allevato (2011) até chegar em Andrade, C. e Onuchic (2017) conhecida como Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Na perspectiva de ensinar algum conteúdo matemático através da metodologia de Resolução de Problemas exposta, Andrade, C. e Onuchic (2017) apresentam um roteiro de como se trabalhar com ela em sala de aula que consiste inicialmente em preparar o problema que irá utilizar; para depois entregar aos alunos, com eles divididos em grupos, uma cópia de cada problema e dar tempo para que cada aluno leia e tente entender o mesmo e assim depois fazer uma leitura em conjunto para sanar alguma dúvida que possa existir sobre, por exemplo, algum termo do problema. Após as leituras se dá um tempo para que os alunos se coloquem a resolver o problema, cabendo ao professor observar e incentivar os alunos a explorarem-no. Depois de um tempo que os alunos já começaram a resolver o problema, se pede que um integrante de cada grupo vá a lousa registrar o que o seu grupo fez para depois começar um momento de plenária. Neste momento os alunos são chamados a debaterem em cima do que foi escrito no quadro, aonde o professor media todo o processo até chegarem em um consenso sobre o resultado correto para então o professor fazer a formalização do conteúdo que quis ensinar a partir do problema que foi escolhido. A atividade não acaba apenas na resolução: as autoras indicam que ao término da resolução os alunos sejam instigados a criar seus próprios problemas. Isto é uma oportunidade de levar os alunos a aumentar suas habilidades de resolver e compreender as ideias matemáticas básicas presentes neles, porque a proposição tanto é uma parte integrante desta forma de aprender Matemática, como também é uma ferramenta para se ensinar por meio da resolução de problemas.

É através desta forma que optamos por realizar nossa pesquisa, embora sabendo que este roteiro não é algo estático, pronto e acabado, mas sim dinâmico, ou seja, ele existe para nos dar uma noção dos elementos necessários para se trabalhar através desta metodologia. Muitas destas etapas podem estar penetradas umas nas outras, como observamos na prática durante a realização da pesquisa, por exemplo, quando durante a resolução do problema, foi uma leitura do professor em conjunto com o aluno, ou apenas a leitura individual do mesmo, que o fez repensar a forma como resolveu o problema pedido e então mudar a estratégia.

Além disso, ao trabalhar com a resolução de problemas em sala de aula, podemos também trabalhar com a exploração de problemas, que como o próprio nome sugere – explorar – é um momento de ir além daquilo que o problema proposto nos fez chegar. Muitas vezes, é a partir da resposta obtida, pensar em outra forma de resolvê-lo, ou até mesmo criar outros problemas a partir dele, que podem servir até mesmo para lidar com outros conteúdos que não foram inicialmente pensados pelo professor ao trazer o problema inicial. Ao se criar o novo problema na fase da exploração e então se obter sua resposta, pode-se então se repetir o processo e assim explorar novamente outro problema a partir já deste segundo e assim por diante. É como Andrade, S. (2011, p.2-3) destaca:

> No trabalho de exploração de problemas, há um prazer e uma alegria de ir cada vez mais longe, um ir cada vez mais profundo, um ir cada vez mais curioso, há um ir que chega e nunca chega, um ir que pode sempre ir, um ir que sempre se limita ao contexto do aluno, do professor, da Matemática, da escola ... e por isso pode ir outra vez e mais outra vez [...].

Andrade, S. (1998), em sua dissertação, traz uma contribuição muito interessante no que diz respeito a uma experiência com a Resolução e com a Exploração de Problemas que, a princípio, chamou de Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução, Exploração, Codificação e Descodificação de Problemas. Para ele, a experiência que compreende a relação Problema-Trabalho-Reflexões e Síntese-Solução é chamada de uma experiência de Resolução de Problemas. Já uma experiência que segue a partir da relação Problema-Trabalho-Reflexões e Síntese (P-T-RS) pode ser chamada de uma experiência de Exploração de Problemas. Os meios para se trabalhar numa experiência de P-T-RS são a codificação e a descodificação. A codificação consiste em conseguir expressar um problema de outra forma diferente da apresentada inicialmente; é apresentar o problema de uma forma mais simples, mais curta, sob uma nova linguagem, um novo código. Já a descodificação é procurar entender o significado do problema, o que ele quer dizer, é fazer uma análise crítica dele. As várias formas que o professor e os alunos podem encontrar para codificar e descodificar um mesmo problema podem contribuir para se obter novos caminhos tanto para resolver como para explorá-lo. Consoante Andrade, S. (1998, p.25-26), "o trabalho feito por um aluno em cima do problema além de melhorar a sua compreensão sobre o mesmo pode ajudar para que outro aluno também compreenda melhor o problema proposto".

Esta relação Problema-Trabalho-Reflexões e Síntese (P-T-RS) ocorre quando um problema é dado aos alunos e eles começam a realizar um trabalho em cima dele, tentando compreendê-lo e escrevê-lo de alguma forma que lhe fique mais claro (e estas atitudes são justamente as codificações e descodificações). Desse modo, professor e alunos vão juntos discutindo o que está sendo feito num caminho de reflexão e síntese, chegando não somente à solução do problema, mas também a novos conteúdos, novos problemas. E então o processo prossegue: novos trabalhos, novas reflexões e novas sínteses vão sendo obtidas.

Além de tudo isso, atividades de resolução e exploração de problemas são oportunidades de se trabalhar com temas interdisciplinares (relação com outras ciências) e/ou transdisciplinares (relação com valores, ética, cidadania entre outros). Quando surgem novos problemas e novos conteúdos a partir das explorações, podemos ter casos em que se pode:

- Fazer as pontes dentro da própria matemática: o que é oportunidade de revisitar alguns conteúdos; algumas ideias a respeito de habilidades matemáticas que naquela etapa de ensino se espera que os alunos já as tenham adquirido (o que auxilia o professor a perceber, muitas vezes, o porquê de alguns alunos não estarem conseguindo resolver nem o problema original e nem os novos que surgem, já que estão carentes de conteúdos base que deveriam ter sido vistos anteriormente); além de se conseguir fazer ligações com as outras áreas da matemática que é a chance de os alunos perceberem uma matemática "integrada" na qual: a Álgebra pode muito bem estar ligada à Geometria; a Estatística pode estar ligada à Álgebra; a Geometria à Aritmética etc.;

- Fazer as pontes com questões sociais, políticas e culturais, para assim trazer para a sala de aula o debate em cima de outros temas muito importantes para a formação do cidadão, como meio ambiente, saúde, discriminação etc. A dificuldade de trabalhar com temas transversais dentro da Matemática pode ser facilitada quando trabalhados dentro de uma perspectiva de ensino através da resolução e da exploração de problemas, tanto a partir dos problemas que podem vir surgindo da parte dos alunos na exploração, como daqueles que o professor pode instigar a partir do problema proposto para então começar a discussão na sala, quando não se esperam respostas "matemáticas" para eles, mas antes o debate que vai além da Matemática, de forma que possibilite aos alunos a percepção de que ela também pode contribuir para entender/refletir/analisar estes outros temas.

O trabalho com a exploração leva o aluno a desenvolver a criatividade e autonomia, a levantar hipóteses, tomar decisões, refletir sobre o que está fazendo, fazer novas descobertas e assim vai levantando ideias com o objetivo de entender os conceitos matemáticos que vão surgindo durante a busca da resposta, ou seja, trabalhar com a exploração de problemas, como também acontece na resolução, leva o aluno a se tornar um personagem ativo na construção do seu conhecimento.

Cabe ao professor, quando o aluno chega à solução do problema, conseguir instigar o discente a tentar ir além do problema proposto, fazendo com que ele crie outros, visando uma melhor compreensão dos conceitos envolvidos. Ao fazer isto, o professor conduz o aluno a ir percebendo as ideias matemáticas que estão presentes no problema apresentado. A resolução de problemas não deve estar focada apenas no fato de o aluno obter a resposta e ponto final, mas deve focar sua atenção na compreensão do aluno.

Ao se falar da exploração de problemas muito se disse sobre o fato de que a partir dela surgem outros problemas que podem ser propostos pelos próprios alunos. A criação de problemas também é uma outra potencialidade desta metodologia de ensino e que chamamos de proposição de problemas.

China e Estados Unidos são alguns países que têm em suas propostas curriculares as ideias não apenas da resolução, mas também da proposição de problemas (CAI *et al.*, 2015), que também não é novidade, basta lembrar que o conhecimento das ciências foi se desenvolvendo graças aos problemas que foram sendo respondidos à medida que iam surgindo: a "novidade" está em trazer a proposição como metodologia de ensino. Tanto é que Jurado (2016), em seu artigo *Creación de Problemas, Avances y Desafíos em la Educacíon Matemática*, faz um breve histórico das pesquisas sobre a proposição de problemas, começando por um artigo pioneiro de Kilpatrick, de 1987, e logo a seguir passa a expor e comentar três obras muito marcantes para este tema: a publicação da revista *Educational Studies in Mathematics*, de maio de 2013, dedicada exclusivamente à proposição de problemas; o livro: *Mathematical Problem Posing, From Research to Effective Practice*, editado por Singer, Ellerton e Cai (2015), e, por fim, o livro *Posing and solving mathematical problems. Advanced and new perspectives*, publicado em maio de 2016, editado por Felmer, Pehkonen e Kilpatrick (2016).

Propor problemas estimula o aluno a pensar, isto é, sair da zona de conforto que é receber do professor o problema e apenas resolvê-lo, desse modo, criar o seu próprio problema torna-se algo desafiador e ao mesmo tempo motivador. Apesar de muitos não estarem acostumados a trabalhar desta forma. Em virtude disso, é possível que quando o professor apresente essa "novidade" em sala de aula, inicialmente, o aluno não a receba muito bem.

Chica (2001, p.151) aponta que os "deveres" que os alunos precisam ter para elaborar problemas também podem se tornar habilidades através destas atividades:

> Quando o aluno cria seus próprios textos de problemas, ele precisa organizar tudo que sabe e elaborar o texto, dando-lhe sentido e estrutura adequados para que possa comunicar o que se pretende. [...] O aluno deixa, então, de ser um resolvedor para ser um propositor de problemas, vivenciando o controle sobre o texto e as ideias matemáticas.

Assim, depreendemos como as atividades de elaboração de problemas são geralmente tarefas cognitivamente exigentes com o potencial de fornecer contextos intelectuais para o rico desenvolvimento matemático do aluno (CAI *et al.*,. 2015), não apenas pelas próprias "habilidades matemáticas" que já estão nelas presentes, pois propor um problema matemático exige que o aluno tenha conseguido perceber as ideias essenciais presentes no tópico de estudo no qual ele deseja elaborar o problema, mas também pelas "habilidades de língua portuguesa" que são necessárias para que a criação ocorra. Logo, o aluno é posto diante de um rico conjunto de habilidades a mobilizar para criar um problema.

Além disso, esse tipo de atividade ajuda a desenvolver o pensamento crítico e as capacidades de raciocínio do aluno, enquanto ele busca expressar suas ideias da forma mais concisa possível, além de auxiliar em sua criatividade (BONOTTO; SANTO, 2015). Um cidadão capaz de observar a realidade à sua volta e então se colocar a indagar a mesma: é assim que nascem os problemas de pesquisa que permitem que a ciência avance. Desse modo, levar os alunos a propor seus próprios problemas é uma forma de contribuir para que eles possam ir desenvolvendo estas habilidades de indagação.

Conforme Kilpatrick (1987 *apud* BONOTTO; SANTO, 2015), a formulação de problemas deve ser vista não apenas como um objetivo do ensino, mas também como um meio para ensinar. A experiência de descobrir e criar os próprios problemas matemáticos deve fazer parte da educação de todos os alunos, embora hoje tenha se tornado uma experiência para poucos alunos (talvez apenas para os que forem candidatos à área de Matemática).

O papel do professor no momento de proposição de problemas é diferente da postura que ele adota no momento da resolução de problemas, pois neste é o professor que propõe e cabe aos alunos desenvolverem suas próprias estratégias de resolução para chegar à resposta, já naquele é o aluno que passa a ser o iniciador do processo, cabendo ao professor encorajá-lo e orientá-lo a partir daquilo que ele sabe e observa dos problemas que resolveu para, então, conseguir criar os seus, tendo noção das ideias matemáticas necessárias para que esta criação ocorra.

Para se trabalhar a proposição de problemas em sala de aula, destacamos algumas possibilidades, tais como: solicitar que os alunos criem seus problemas a partir de um tema gerador dado pelo professor; pedir que alterem os dados de um problema que já resolveram, ou que acrescentem nele outros dados e assim outras perguntas, como também aproveitar os momentos de exploração do problema e então transformá-los nas proposições; é recomendável que o aluno seja exposto a diversos tipos de problemas para que possa ir se familiarizando com eles e assim possa criar os seus (CHICA, 2001), além de que realizar a atividade da proposição em grupos também pode ajudar, tendo em vista que a troca de experiências e ideias amplia os horizontes do aluno. Assim, quando o aluno conseguir elaborar um (ou mais) problema significa que ele conseguiu entender as ideias matemáticas que estavam presentes naquele problema que inicialmente resolveu e já se pôs a explorar.

Por fim, da mesma forma que na exploração de problemas, a proposição de problemas é uma oportunidade de poder trabalhar com os alunos tanto conteúdos e habilidades matemáticas, a partir dos novos problemas que surgem e que podem estar em déficit por parte dos discentes, como também conteúdos que versem sobre questões políticas, sociais, culturais etc. Nessa perspectiva, a atividade de proposição de problemas contribui para que os alunos melhorem sua aprendizagem matemática e, ao mesmo tempo, sua conscientização cidadã.

Após expormos cada uma dessas três formas – Resolução, Exploração e Proposição de problemas – salientamos que, mesmo tendo as apresentado de formas distintas, elas podem caminhar juntas. Andrade, S. (2017) chama a atenção para o fato de que algumas abordagens que se detém apenas à Resolução de Problemas terminam por se limitar a buscar as soluções dos problemas propostos, não seguindo adiante nas potencialidades que o problema poderia ter quando explorado e a partir dele virem a nascer novos problemas. Tanto é que o próprio autor trabalha numa proposta onde "o carro-chefe é a Exploração de Problemas" (ANDRADE, S., 2017, p.358), entendendo que a exploração sempre abrange a resolução e a proposição e, assim, "atualizando" a sua proposta da dissertação para o que podemos chamar de Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução, Exploração, Proposição, Codificação e Descodificação de Problemas.

Em suas pesquisas, Andrade, S., passa a chamar os termos Problema-Trabalho-Reflexões e Síntese (P-T-RS) de Problemas-Trabalho-Reflexões e Sínteses-Resultado, compreendendo que o resultado é o refinamento das várias sínteses que ocorreram durante todo o caminho da experiência da exploração de problemas, no qual a própria solução do problema é uma forma de resultado. Embora ainda permaneça válida a ideia presente em Andrade, S. (2011), na qual sempre se pode ir mais além em uma experiência com uma proposta de exploração de problema, pois o resultado não é exatamente um fim, mas pode ser o início de uma nova caminhada, já que: "Trabalhar com a Exploração de Problemas é colocar-se sempre em movimento, em aventura, é um sair sempre para mergulhar reflexivamente e criticamente em si mesmo e além de si mesmo" (ANDRADE, S., 2017, p.367).

O trabalho com a codificação e a descodificação, como já explicadas em Andrade (1998), permanecem também aqui e quanto mais se leva o aluno a trabalhar em cima do problema proposto, obtendo ou não a solução dele, pois o que importa é o trabalho feito pelo discente diante da situação exposta, mais ele estará adquirindo e apurando as suas habilidades em codificar e descodificar um problema.

Dentro desta proposta de unidade entre Resolução, Exploração e Proposição de problemas abordada por este autor, além dele deixar claro que a proposição não é um tema separado, ainda enfatiza que ela é um momento consciente de todo o processo de exploração de problemas. Observando as atividades de pesquisa que orientou, o autor pôde constatar que a proposição pode ocorrer antes, durante e depois do problema, além de ajudar a trabalhar com as representações múltiplas, ocorrendo com mais frequência entre a resolução e a exploração. Entretanto, o ideal é que ela venha a ser sempre o ponto de partida e que quando pensarmos em exploração de problemas, pensemos também na proposição como uma ferramenta presente em todo o processo.

Para finalizar, Andrade, S. (2017, p.389) afirma ainda que a proposição e a exploração alimentam-se mutuamente, no sentido de que uma ajuda a avançar o trabalho da outra, como também a resolução (usando sempre os processos de codificação e descodificação para isto). Por esse motivo, acrescenta-se agora o uso do hífen entre os termos, demonstrando as conexões existentes entre as três: Resolução-Exploração-Proposição.

4 METODOLOGIA DA PESQUISA

Neste capítulo falamos da metodologia que utilizamos em nossa pesquisa, além das características da escola e da turma onde a realizamos, como também dos materiais que foram utilizados para coletar os dados e apresentamos como foi a divisão das etapas de nosso trabalho.

4.1 A PESQUISA QUALITATIVA NA MODALIDADE DE PESQUISA PEDAGÓGICA

A metodologia que adotamos nesta pesquisa foi qualitativa, por entendermos que esta forma de pesquisa aborda o fenômeno em toda sua profundidade, isto é, busca a compreensão e os significados do fenômeno e não apenas sua explicação.

Quem decide enveredar por uma pesquisa de caráter qualitativo precisa estar disposto a frequentar de forma regular o ambiente no qual a pesquisa se realizará, pois o contexto também é importante. Para melhor compreender aquilo que busca investigar é preciso estar mergulhado no ambiente. O investigador qualitativo deve ter a consciência de que seu trabalho é descritivo, logo, até mesmo o que para algum espectador poderia ser algo desnecessário, para o investigador pode ser fonte de muitos dados, não necessariamente dados numéricos, mas também palavras e imagens que são a base para as exposições dos futuros resultados. (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p.48).

Nessa forma de pesquisa, o próprio ambiente natural é a fonte dos dados e o pesquisador é o seu principal instrumento. É justamente isso que ocorre em nossa pesquisa, pois o professor é também pesquisador e age diretamente nas interações em sala de aula, coletando os dados que foram analisados. Nesse sentido, nos dedicamos a uma descrição dos acontecimentos do espaço da sala de aula para, posteriormente, analisá-los (BOGDAN; BIKLEN, 1994; GIL, 2010). Vemos, portanto, que os dados coletados foram, em sua maioria, descritivos, além de que a nossa preocupação está mais voltada para o processo e não tanto com o produto final.

Existem várias modalidades de pesquisa qualitativa, porém, escolhemos a pesquisa pedagógica por visualizarmos nela uma espécie de pesquisa que atende os nossos interesses. Ela tem seus objetivos e propósitos bem claros apresentados por Lankshear e Knobel (2008, p.14):

> Um deles diz respeito a melhorar a percepção do papel e da identidade profissional dos professores. O outro é a ideia de que o envolvimento com a pesquisa pedagógica pode contribuir para um ensino e uma aprendizagem de melhor qualidade nas salas de aulas. [...] ela pode contribuir, de forma

> demonstrável, para melhorar o ensino ou a formação dos alunos. Isto pode acontecer de diferentes maneiras. É por meio de sua própria pesquisa que os professores podem ficar atentos ao seu método de ensino, e detectar o que faz com que os alunos tenham um menor rendimento, aprendendo menos do que poderiam. Com essa consciência, podem realizar mudanças criteriosas, coloca-las em prática e melhorar os resultados de ensino.

Nessa modalidade de pesquisa o professor é o próprio pesquisador e investiga a sua própria sala de aula, buscando observar sua metodologia e assim encontrar meios para melhorá-la, a fim de aprimorar o aprendizado dos alunos. Ademais, essa forma de pesquisa traz várias contribuições que melhoram o ensino ou formação dos discentes (LANKSHEAR; KNOBLE, 2008).

Como essa forma de pesquisa pode ser realizada em sala de aula ou em qualquer lugar, desde que se possa obter, analisar e interpretar informações que sejam pertinentes à orientação do professor-pesquisador, ela se encaixa muito bem em nosso trabalho. É importante frisar também que tal abordagem tem a oportunidade de levar o professor a refletir sobre sua prática, possibilitando-o um crescimento profissional.

A pesquisa pedagógica segundo Lankshear e Knobel (2008, p.18):

> [...] pode envolver a observação de sua própria sala de aula, a reflexão sistemática das notas de campo contendo descrições dessas aulas sobre as suas próprias experiências elucidadas através das questões teóricas ou conceituais que sustentam tal pesquisa. E finalmente, pode ser fundamentada por meio dos dados coletados através das aulas ministradas implicando numa variedade potencial de informações, interpretações e considerações relevantes ao campo de pesquisa realizada. [...] um pesquisador sério não está meramente interessado em algo que funcione, mas em entender como e por que funciona e/ou como pode precisar ser adaptado para funcionar em outras circunstâncias ou aplicar-se a outros casos.

Concluímos, então, que os dados coletados pelo professor-pesquisador com base nessa forma de pesquisa não são para justificar, ou não, suas hipóteses levantadas; não focam buscar um método de ensinar determinado conteúdo que dê resultados sempre proveitosos; não se destina a buscar por uma receita pronta; mas busca tentar entender como e porque aquilo funciona, como também em que pode ser adaptado para ser útil em outras circunstâncias.

Por fim, é bom frisar que o professor-pesquisador que utiliza a modalidade de pesquisa pedagógica também precisa entender que ela necessita estar baseada em fundamentos sólidos e na postura crítica da sua própria prática docente, pois mesmo sendo uma pesquisa onde prevaleça certa subjetividade, ela não pode perder o caráter metódico e sistemático que é característica de uma investigação.

4.2 CARACTERÍSTICAS DA ESCOLA E DA TURMA

Nossa pesquisa ocorreu numa escola municipal da cidade de Mari, estado da Paraíba, e está situada numa zona menos favorecida da cidade. A escola atende um público adverso, muitos alunos, inclusive, advém de alguns bairros violentos da cidade, havendo casos de envolvimento de alguns alunos com drogas (alguns dos alunos da turma pesquisada, por exemplo). No início de sua fundação, a escola sempre teve um grande número de alunos, mas devido a uma mudança temporária do local de funcionamento durante uns meses em anos anteriores, quando a escola voltou a funcionar no seu prédio original acabou por perder muitos alunos.

O prédio e o espaço escolar são aspectos positivos da escola, pois atendeu alunos do 5º ao 9º ano, entre os turnos da manhã e tarde, possuindo reuniões de planejamento mensais com os professores e também um ginásio que ainda está para ser terminado.

A turma de 8º ano escolhida para realização da pesquisa possuía 32 alunos matriculados: três eram reprovados e o restante eram novatos na turma. Esta escolha se deu devido ao fato de o conteúdo de sistemas de equações fazer parte do currículo da série e a turma ainda não tinha visto. Optamos, então, por introduzir o conteúdo a partir da Resolução de Problemas.

Essa turma era tida como a mais trabalhosa da escola, além de ser também a maior em quantidade de alunos (durante a pesquisa um aluno foi transferido e outros dois alunos chegaram). As aulas ocorriam no turno da manhã da seguinte forma: na quarta-feira eram as duas primeiras aulas (das 07h00 às 08h20) com uma terceira aula (das 09h55 às 10h30) e na quinta-feira eram as duas últimas aulas (das 09h55 às 11h00). No decorrer da pesquisa, constatamos que quando as aulas eram na quinta-feira, por serem as últimas, ocorria uma maior dispersão dos alunos, o que não ocorria na quarta (em sua maioria), já que eram as primeiras aulas.

Os grupos eram divididos pelos próprios alunos quando o professor lhes solicitava, raramente interferindo nessa tarefa, sendo a pesquisa realizada em momentos que variam de duplas a quintetos, com algumas pequenas mudanças de integrantes de um grupo para outro. Existiram momentos em que alguns alunos insistiram por realizar individualmente.

4.3 A COLETA DE DADOS

Em nossa pesquisa, a coleta de dados se deu através do registro feito pelos alunos a respeito das resoluções dos problemas propostos, lembrando que os discentes já haviam sido avisados que deixassem por escrito as formas de resolver cada problema, pois elas seriam usadas para fazer a análise do que eles estavam compreendendo e lhes foi dito que fariam parte de uma pesquisa de mestrado. O professor-pesquisador também acertou com os alunos que os problemas resolvidos contariam, no final de tudo, como uma nota para eles. Além dos registros feitos pelos alunos, o professor-pesquisador também tomou nota de alguns diálogos que teve com os alunos através de um diário de campo. Ao final do expediente de cada dia da pesquisa, de posse de todo o material, o professor começava a descrever o encontro por escrito para depois digitar e fazer algumas análises.

Para identificar o professor e os alunos na descrição de alguns diálogos, ou das fotos dos seus registros, utilizamos letras maiúsculas: P para o professor e as outras letras do alfabeto quando nos referimos aos alunos.

Os problemas utilizados foram divididos em 6 blocos:

1º BLOCO: Resolução de Problemas (RP) e Representações Múltiplas

Neste bloco (cinco aulas ao todo) estão os problemas 1 e 2 que tiveram como objetivo maior habituar os alunos à metodologia da RP, conforme Andrade, C. e Onuchic (2017), e incentivá-los a usar as diversas representações (segundo Friedlander e Tabach [2001]), que conheciam para resolver os problemas propostos;

2º BLOCO: Introdução aos sistemas de equações polinomiais do 1º grau

Neste bloco (cinco aulas ao todo) estão os problemas 3 e 4 que tiveram como objetivo maior introduzir o conceito de Sistemas de Equações Polinomiais do 1º grau com duas incógnitas, a partir das equações que os alunos formularam baseados neles;

3º BLOCO: Método da adição

Neste bloco (oito aulas ao todos) estão os problemas 5, 6 e 7 que objetivaram levar os alunos a aprender o método da adição. Vale salientar que, a partir destes problemas, o trabalho com a formação do conceito de sistemas e o uso das diversas representações sempre se manteve presente, quer o professor-pesquisador pedisse, quer o problema pedisse, quer os próprios alunos montassem os sistemas espontaneamente;

4º BLOCO: Método da substituição

Neste bloco (sete aulas ao todo) foi ensinado o método da substituição a partir dos problemas 8, 9 e 10;

5º BLOCO: Proposição de Problemas

Apesar de no roteiro proposto por Andrade, C. e Onuchic (2017) uma sugestão de último momento seja o da proposição de problemas, em nossa pesquisa, achamos melhor reservar um momento específico para ele (duas aulas), tal como Silva, L. (2013), a fim de que os alunos criassem seus próprios problemas dentro do conteúdo trabalhado, já que é inegável as contribuições que a elaboração deles tem para a capacidade cognitiva do aluno (CAI *et al.*, 2015). Durante toda a pesquisa, nosso foco se voltou para a resolução de problemas e quase em nenhum outro momento conseguimos trabalhar com a exploração ou a proposição.

6º BLOCO: Representações gráficas

Após a qualificação, foi visto que era necessário voltarmos à sala de aula e aplicarmos alguns problemas a fim de verificar como a representação gráfica seria utilizada pelos alunos, já que em nenhuma das etapas anteriores ela foi usada. Assim, os problemas 11 e 12 foram destinados a isso (cinco aulas), sendo o problema 12 idêntico ao problema 5, apenas tendo sido mudado seu enunciado.

Não optamos por ensinar o método da comparação, pois além de não ser muito utilizado na resolução de sistemas, também tínhamos que cumprir o restante do conteúdo curricular da turma, pois embora os sistemas de equações fizessem parte, não era o único assunto. Além disso, a pesquisa foi realizada durante todo o 2º bimestre e início do 3º, começando no dia 02/05/2018 e terminando em 02/08/2018. Após a qualificação, voltamos à escola para a aplicação do 6º bloco nos dias 28/11/2018 e 29/11/2018. Nesse caso, os problemas utilizados foram criados pelo professor-pesquisador e retirados de outras fontes, devidamente citadas nas referências e nos próprios problemas quando forem expostos.

Uma vez esclarecida a metodologia, passaremos à descrição e análise de cada encontro.

5 COLETA E ANÁLISE DE DADOS

5.1 1º BLOCO: RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS (RP) E REPRESENTAÇÕES MÚLTIPLAS

5.1.1 Encontro 1: O caso do sítio

02/05/2018

Conteúdo: Resolução de Problemas (RP) e Representações Múltiplas.

Objetivo: Habituar os alunos à metodologia da RP e incentivar o uso de diferentes estratégias de resolução de um problema, através de diversas representações.

PROBLEMA 1: Antes de voltar das férias o professor Juscelino foi ensinar certo conteúdo a um senhor chamado Daniel que iria fazer um concurso. Juscelino sabia que Daniel cuidava de um sítio onde criava porcos e galinhas e então lhe propôs o seguinte problema: "*Daniel... Imagine que entre porcos e galinhas que você cria lá há um total de 25 animais e 70 patas. Dentro desta situação, eu quero que você me responda quantas são as galinhas que você cria?*"

Este foi o primeiro dia da nossa pesquisa e ocorreu nas duas primeiras aulas: das 07h00 até 08h20. O dia estava claro e sem sinal de chuva (fator que se ocorresse levaria a ter menos alunos em sala). Na turma do 8º ano escolhida, neste primeiro dia, faltaram 4 alunos, logo participaram 28 alunos. Ao entrar na sala e cumprimentar os alunos, o professor fez a chamada, mostrando as médias do 1º bimestre de cada aluno e, ao término da chamada, fez algumas considerações sobre as médias.

Antes de entregar o problema, o professor explicou como seria a metodologia da aula. Em outras palavras, falou aos alunos o passo a passo que Onuchic (1999), Onuchic e Allevato (2011) e Andrade, C. e Onuchic (2017) apresentam para trabalhar com a Resolução de Problemas em sala.

Comentário do pesquisador: na aula anterior o professor já tinha conversado com a turma que, a partir da aula seguinte, eles fariam parte de uma pesquisa de mestrado e além de explicar a eles o que era um mestrado, também já tinha lhes dito como seria a metodologia das aulas seguintes, mas achou por bem reforçar o aviso neste momento.

Após a explicação, o professor entregou o problema para a leitura individual de cada aluno e, após leitura, explicou um pouco sobre sua trajetória de professor de reforço escolar e para concurso – já que o problema falava disto – e então se pôs a ler o problema para a sala.

> **Comentário do pesquisador**: o professor decidiu contar esta história de sua vida pessoal, pois encontrou nela uma oportunidade de conseguir obter uma melhor atenção e interesse dos alunos para a busca da resolução do problema proposto, pois um problema é algo que além de não ter uma solução previamente clara, deve despertar a quem é destinado o interesse de resolvê-lo, conforme Andrade e Onuchic (2017). Além disto, a leitura do problema pelo professor é de muita importância, pois ajuda a sanar algumas dúvidas sobre certas palavras que podem dar um sentido diferente do que era esperado por ele ao escolher o problema, como vemos a seguir no caso da palavra "pata" a qual o professor já foi explicando inicialmente qual era o seu significado.

Ao término da leitura, o professor explicou que as 70 patas que o texto se referia não eram patas como a fêmea do pato, mas sim como os pés das galinhas e porcos, aliás, um aluno até comentou na hora que tinha entendido patas como as fêmeas dos patos mesmo. Este problema foi escolhido (e adaptado pelo próprio professor) devido a ser um dos "clássicos" problemas sobre sistemas e que, geralmente, aparecem nas introduções de capítulos que falam sobre o conteúdo; além de permitir a resolução numérica e também o uso de desenhos de animais para representar os porcos e as galinhas. Ou seja, duas alternativas diferentes de resolução para os alunos escolherem. Isso nos faz constatar como diferentes caminhos (alguns mais fáceis que outros, ou não) podem levar às respostas certas, não precisando ater-se a apenas uma forma de fazer.

Depois das leituras e da breve explicação, o professor pediu para que os presentes se separassem em grupos de até 4 pessoas. Assim, foram formados 2 quartetos, 4 trios, duas duplas e um aluno fez sozinho. Um aluno que chegou atrasado uniu-se a um dos quartetos. Começou então a resolução do problema por parte dos alunos, conforme indicam para este momento Andrade, C. e Onuchic (2017).

O professor acompanhava as resoluções dos grupos e, uma vez ou outra, anotava algumas observações em seu diário de campo. Enquanto sondava alguns grupos, sendo por eles chamados ou não, pôde perceber que, de início, apenas um trio e o aluno que fez sozinho não conseguiram dar grandes passos na resolução do problema. Todos os outros grupos tinham entendido o que era para ser feito e usado diversas representações – como se esperava – para resolver a questão.

Embora houvesse um barulho na sala de aula durante este período, em certa medida alto, era perceptível que se tratava de uma discussão acerca do problema por cada grupo. No mais, houve empenho dos alunos na busca de resposta, observando-se, várias vezes, a troca de ideias entre os grupos. Um exemplo disso é que um dos trios, que até antes da plenária não tinha chegado à resposta, em certos momentos chamou o professor para conferir o que os integrantes haviam escrito. Duas das três integrantes, ao apresentarem algumas das respostas iniciais, como, por exemplo, 10 porcos e 15 galinhas, e também 12 porcos e 13 galinhas, enquanto uma perguntou ao professor se era 12 e 13, recebeu como resposta o porquê de não poder ser o outro, a outra colega disse algo do tipo: “Eu não disse!”.

Essa situação não ocorreu apenas esta vez e podia-se notar que o “eu não disse” da colega não era uma frase de tom acusatório, mas sim no sentido de que havia outra coisa a fazer. Isso ficou claro, pois eram estas duas alunas do trio que, de fato, mais cooperaram uma com a outra na obtenção da resposta. A outra aluna não se mostrou muito colaboradora para a resolução do problema, sua participação se deu quanto foi ao quadro transcrever as respostas do grupo.

> **Comentário do pesquisador**: no empenho de cada grupo na busca da resolução do problema podemos ver como a metodologia da RP proporciona a oportunidade de o aluno ir sendo o construtor do seu conhecimento e assim tomar a frente do seu próprio aprendizado, desenvolvendo a criatividade na busca e criação das suas estratégias de resolução, isto é, o seu ‘jeito de fazer matemática’, não ficando apenas de forma passiva recebendo as informações dadas pelo professor.

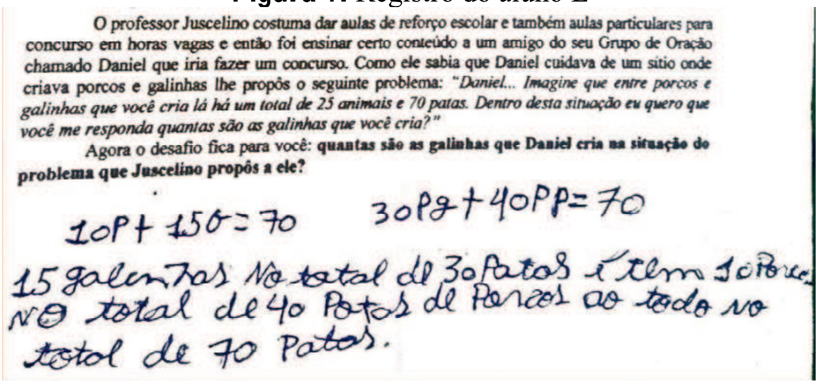
O aluno sozinho foi o que demonstrou mais dificuldade em resolver o problema, pois aparentemente não conseguiu usar a informação dos 25 animais para supor uma certa quantidade de porcos e de galinhas, como a maioria dos outros grupos fez. Mesmo o professor tendo solicitado desde o início que não apagassem suas formas de resolver, isto é, deixassem seus registros originais, podia-se ver na resolução dele marcas remanescentes de algumas divisões feitas.

Em relação aos demais grupos, o desempenho foi o esperado.

Logo após alguns minutos, um dos alunos de um trio perguntou: “Pode resolver com equação?”. O professor disse que eles respondessem como quisessem.

Nesse aspecto, foi curioso notar que alguns alunos chegaram a escrever a equação “p + g = 25”, representando a informação dos 25 animais; alguns escreveram de forma errônea, mas é possível entender o que eles quiseram expressar através da linguagem algébrica. Vejamos nas Figuras 1 e 2:

Figura 1: Registro do aluno L


O professor Juscelino costuma dar aulas de reforço escolar e também aulas particulares para concurso em horas vagas e então foi ensinar certo conteúdo a um amigo do seu Grupo de Oração chamado Daniel que iria fazer um concurso. Como ele sabia que Daniel cuidava de um sítio onde criava porcos e galinhas lhe propôs o seguinte problema: *"Daniel... Imagine que entre porcos e galinhas que você cria lá há um total de 25 animais e 70 patas. Dentro desta situação eu quero que você me responda quantas são as galinhas que você cria?"*

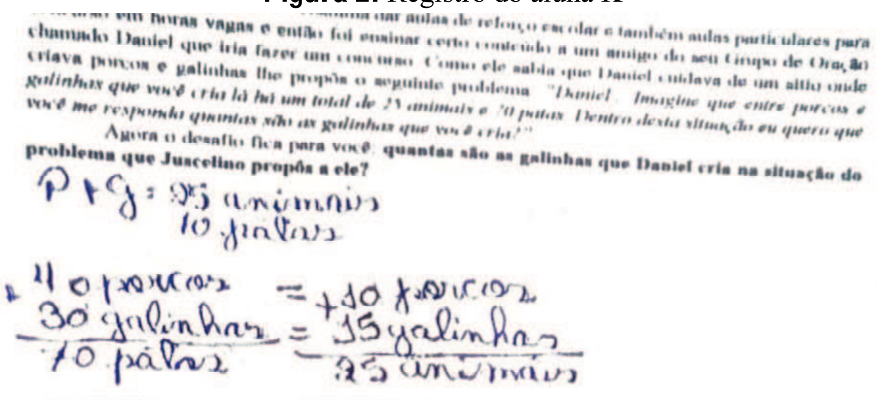
Agora o desafio fica para você: **quantas são as galinhas que Daniel cria na situação do problema que Juscelino propôs a ele?**

10P + 15G = 70 30Pg + 40PP = 70

15 galinhas No total de 30 Patas e tem 10 Porcos No total de 40 Patas de Porcos ao todo no total de 70 Patas.

Fonte: Acervo do pesquisador

Figura 2: Registro do aluna K


[illegible] em horas vagas e então foi ensinar certo conteúdo a um amigo do seu Grupo de Oração chamado Daniel que iria fazer um concurso. Como ele sabia que Daniel cuidava de um sítio onde criava porcos e galinhas lhe propôs o seguinte problema: *"Daniel... Imagine que entre porcos e galinhas que você cria lá há um total de 25 animais e 70 patas. Dentro desta situação eu quero que você me responda quantas são as galinhas que você cria?"*

Agora o desafio fica para você: **quantas são as galinhas que Daniel cria na situação do problema que Juscelino propôs a ele?**

P + G = 25 animais
70 patas

40 porcos = +10 porcos
30 galinhas = 15 galinhas
70 patas 25 animais

Fonte: Acervo do pesquisador

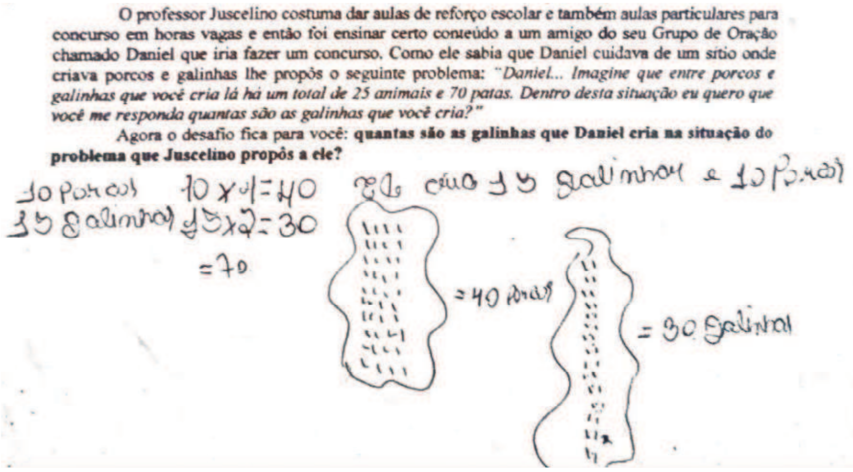
O aluno L do registro da Figura 1, ao ser perguntado sobre o porquê de ter escrito 30 e 40, expressou-se verbalmente na oralidade: "Porque, professor, no total de 15 galinhas vezes dois dá 30 e 10 porcos vezes 4 dá 40", mostrando que o dois se referia às patas das galinhas e o quatro às patas dos porcos.

Comentário do pesquisador: vemos aqui a presença da representação verbal que estava bem clara ao aluno, aliás, isto também nos leva a perceber a representação interna que ele elaborou para resolver esta questão – de acordo com Goldin e Shteingold (2001) –, apesar de tê-la representado externamente errada, quase lhe ajudou a expressar-se corretamente na representação algébrica, o que nos leva a perceber como é útil o uso de mais de uma representação, já que naquilo que uma falta, a outra pode suprir, portanto lidar com mais de uma delas é algo que tem um forte potencial para se poder formar um conceito, como Friedlander e Tabach (2001) e Goldin e Shteingold (2001) dizem, e assim termos possibilidades de constatar se ele foi assimilado com

> proveito pelo aluno. Notamos que os alunos dos dois registros apontados fizeram a representação algébrica de uma das informações do sistema, certamente levados pela resposta do professor à pergunta sobre se podiam usar uma equação para resolver o problema, e resolveram-no por meio da representação numérica: o que era de se esperar, pois a representação numérica precede todas as outras, segundo Friedlander e Tabach (2001), e acaba sendo a primeira que vem à mente dos alunos para resolver problemas matemáticos, aliás, foi esta a representação mais utilizada por todos os grupos na sala nesta atividade, alguns alunos usaram até ‘palitinhos’ para realizar as contagens.

Outro aluno iniciou a resolução através de “palitos”, mas a apagou. Quando perguntado sobre o porquê de ter apagado, ele respondeu que estava separando de 2 em 2 as galinhas, mas tinha se atrapalhado e acabou apagando tudo. O aluno Z esboçou com “palitos” as patas dos porcos e das galinhas, mesmo tendo feito a representação numérica do resultado, conforme a Figura 3.

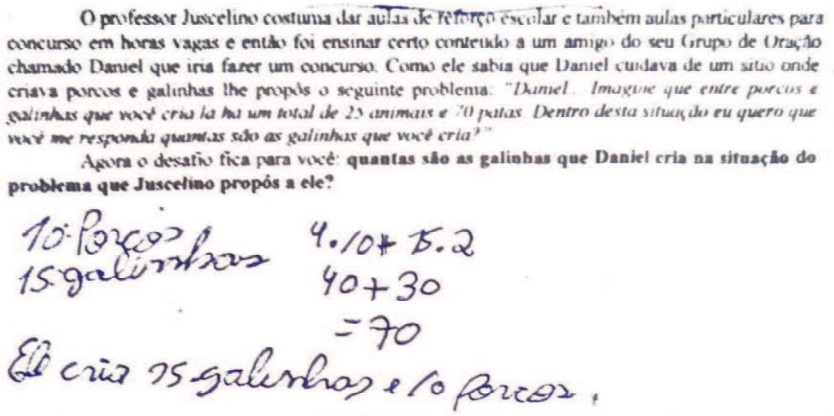
Figura 3: Resposta do aluno Z



Fonte: Acervo do pesquisador

Este aluno era o que formava uma dupla cujo colega expressou numericamente as 70 patas conforme a imagem da Figura 4 e que chamou atenção do professor por ser um aluno repetente e conhecido como “bagunceiro” na sala. Contudo, ele teve um bom desempenho na resposta do problema, pois como se vê em seu registro (Figura 4) ele não se atrapalhou na expressão numérica que montou e resolveu primeiro as multiplicações e depois somou. Ficou na mente do professor como o aluno conseguiu dar sentido à expressão que montou e, por isso, também a solucionou de forma correta.

Figura 4: Resposta do aluno E



O professor Juscelino costuma dar aulas de reforço escolar e também aulas particulares para concurso em horas vagas e então foi ensinar certo conteúdo a um amigo do seu Grupo de Oração chamado Daniel que iria fazer um concurso. Como ele sabia que Daniel cuidava de um sítio onde criava porcos e galinhas lhe propôs o seguinte problema: *"Daniel. Imagine que entre porcos e galinhas que você cria lá há um total de 25 animais e 70 patas. Dentro desta situação eu quero que você me responda quantas são as galinhas que você cria?"*

Agora o desafio fica para você: **quantas são as galinhas que Daniel cria na situação do problema que Juscelino propôs a ele?**

10 porcos
15 galinhas
4.10+15.2
40+30
=70
Ele cria 15 galinhas e 10 porcos.

Fonte: Acervo do pesquisador

Após uns 20 minutos para resolução dos alunos, o professor solicitou que uma pessoa de cada grupo fosse ao quadro para socializar os resultados. Após cada grupo ter registrado no quadro sua resolução, o professor começou a plenária pedindo que alguns alunos explicassem suas resoluções, embora todas estivessem quase idênticas e claras para toda a turma de como fora feito por cada grupo. Sendo assim, coube ao professor comentar sobre as resoluções registradas na lousa, começando por apontar as diversas representações numéricas escritas; depois fez um breve comentário sobre a resolução envolvendo "palitinhos", revelando que ela não estava errada e também representava uma forma possível de resolução.

Por último, fez alguns comentários a respeito das equações, dizendo aos alunos que aquelas eram o que se chamava de representação algébrica e que aqueles que escreveram o "p + g = 25", embora tenham escrito correto, ainda não haviam atingido a resposta adequada. E aos que expressaram como na Figura 1, embora tenham feito de forma equivocada, a resposta estava ali presente, isto é, as 15 galinhas; aliás, toda a sala percebeu que existia sim a resposta presente na representação feita na hora do consenso. Não formalizamos o conteúdo ainda de sistemas nesta aula, pois não era o nosso objetivo para este bloco de problemas.

Ao final da aula, após a conclusão das discussões de cada registro, um aluno fez uma pergunta fantástica: "Existia outra resposta fora esta, professor?". O professor não sabia se dizia, ou não, que não existia outra resposta. Chegou até a propor a sala se teria como se obter outra, mas a aula já chegava ao fim e, diante desta pergunta, foi incrível o silêncio feito na sala e o semblante da turma diante daquele "enigma". Todavia, o professor terminou por revelar que só existiria aquela resposta e seriam as equações que provariam isto, aproveitando também para tecer um rápido comentário sobre a importância da Matemática no fato de provar as coisas.

Comentário do pesquisador: uma observação que não pode deixar de ser feita neste momento é que no roteiro proposto por Andrade, C. e Onuchic (2017) há, justamente, a indicação de que ao término da formalização do conteúdo ocorra o espaço da proposição de problemas por parte dos alunos e é isto que este aluno fez ao realizar a pergunta citada no parágrafo anterior. Esta teria sido uma oportunidade muito interessante para levar os alunos a buscar novos pares de resposta a fim de constatar que, mesmo apenas numericamente falando, não se teria condições de se ter outra resposta, porém o tempo de apenas duas aulas neste momento havia esgotado e não tivemos como continuar com a investigação em cima deste novo problema. Podemos ver que a pergunta criada por este aluno é também uma forma de exploração do problema inicialmente sugerido e em atividades de exploração há fatores que limitam o trabalho com elas, conforme aponta Andrade, S. (2011), como o tempo que fazem com que atividades de exploração de um problema acabem por serem 'concluídas', apesar de, às vezes, poderem 'render mais'. Admitimos, por outro lado, que, ao darmos a resposta poucos instantes depois, perdemos a oportunidade de voltar a este problema criado pelo aluno em outra ocasião, que é algo que pode também poderia ter sido feito.

5.1.2 Encontro 2: A praça de saúde

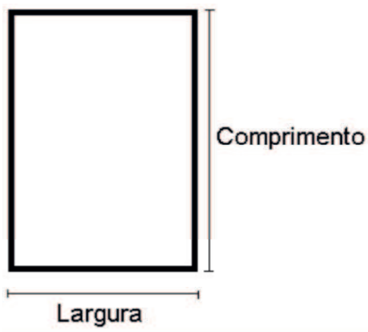
<u>03/05/2018</u>

Conteúdo: Resolução de Problemas (RP) e Representações Múltiplas

Objetivo: Habituar os alunos à metodologia da RP e incentivar o uso de diferentes estratégias de resolução de um problema, através de diversas representações.

PROBLEMA 2: A imagem da esquerda abaixo representa uma das conhecidas Academias da Saúde que são feitas em várias cidades que possuem uma forma aproximada de ser um retângulo como a imagem da direita representa.

Sabe-se que o perímetro da praça é de 84 m e que a medida da largura mede metade da medida do comprimento. Quais são as medidas das dimensões desta praça?



Com esta atividade, continuamos a trabalhar com os alunos a metodologia da RP, verificando o uso das diversas representações deles nas suas estratégias. Optamos por esta atividade por ela fazer ligação da Álgebra/Aritmética com Geometria, além do conceito de perímetro ser chave para o entendimento do problema e porque pensamos que, devido à figura do retângulo presente nela, poderia levar os alunos a usar mais desenhos como alternativa de resolução.

Dentro dessa situação, nas duas aulas deste dia – que foram as duas últimas –, alguns alunos não estavam, pois a direção tinha lhes mandado para casa devido à confusões nas aulas anteriores, de forma que, neste dia, foram feitos dois quintetos, um quarteto, três duplas e três alunos fizeram separados; logo, tivemos 23 alunos participantes.

O professor, após cumprimentar a sala e solicitar a divisão dos grupos, reforçou o lembrete de que deixassem por escrito suas resoluções, pois três alunos que faltaram no dia anterior apareceram neste dia.

Feita a entrega dos problemas, a leitura individual e em conjunto com o professor para tirar alguma dúvida em relação a algum termo do problema, os alunos começaram a atividade. Vale ressaltar que o professor chamou a atenção para o significado da palavra "perímetro" e "dimensões" que estavam no problema, apesar de nenhum aluno ter dito que não as conhecia. Este fato mesmo assim foi importante, pois no decorrer da atividade muitos alunos interpretaram o valor de 84m como sendo uma das medidas e não a soma de todas. Um aluno específico, ao ler o problema, deu a entender que 84m referia-se à medida da largura. Podemos observar que foi unânime, ao menos inicialmente, o não entendimento do perímetro ser 84m, o que demonstrou ser um obstáculo para resolver o problema, sendo isto resolvido no decorrer da atividade.

Comentário do pesquisador: vemos aqui a importância das fases apontadas por Andrade, C. e Onuchic (2017) em seu roteiro, tanto da leitura do problema, como na elaboração do mesmo por parte do professor. A leitura em conjunto com o professor serve para o esclarecimento de certos termos desconhecidos (ou não lembrados) por parte dos alunos e que se isto não ocorresse comprometeria a resolução adequada da atividade proposta. Na elaboração do problema, o professor já pode pensar: que dúvidas podem surgir a partir de certas palavras e conceitos matemáticos que os alunos podem não conhecer, ou não estarem lembrados dos seus significados e/ou como operacionar com eles (levando em conta que perímetro se conhece desde o 6º ano, neste nosso exemplo) neste problema? Para ganhar tempo neste caso, o professor então explicou aos alunos o que era o perímetro de uma figura.

Assim que o professor disse o que era perímetro e foi exemplificar usando as medidas da sala de aula, sugerindo medir os 4 lados, um dos alunos – chamaremos ele de A – disse que só precisaria medir 2 lados – um do comprimento e um de largura – já que os outros dois lados seriam iguais aos medidos. O professor achou esta observação fantástica e acreditou que os outros alunos lembrar-se-iam dela durante a resolução que começou logo após o esclarecimento do professor. Durante a resolução, o professor caminhava na sala observando os grupos, fazendo comentários com os mesmos, incentivando-os e também fazendo anotações.

A primeira dificuldade de todos os alunos foi perceber que 84m correspondia à soma das medidas dos 4 lados. O aluno A chamou o professor algumas vezes para conferir suas respostas, sendo que na primeira vez o erro de interpretação do 84m foi o que levou o aluno a resolver errado, pois depois que o professor repetiu que 84m era a soma da medida dos 4 lados é que o referido aluno notou que estava usando o 84m como medida de comprimento. O interessante foi a segunda vez: o aluno chamou o professor e mostrou que tinha escrito 21+21+42, afirmando que 21 era a largura e 42 o comprimento, o que condizia com a informação da "metade" do problema. Todavia, o professor (P) perguntou:

> P: Como então dá 84 m o perímetro sendo estas as medidas?
> A: Porque 21 da largura de um lado, com 21 da largura do outro lado e com 42 do comprimento [...].

Neste momento, o aluno deu uma pausa no pensamento, porque notou que se esqueceu de um dos lados do retângulo, e disse completando:

> A: Pera aí, já passa, porque tá faltando um lado.

O professor pediu que ele tentasse novamente.

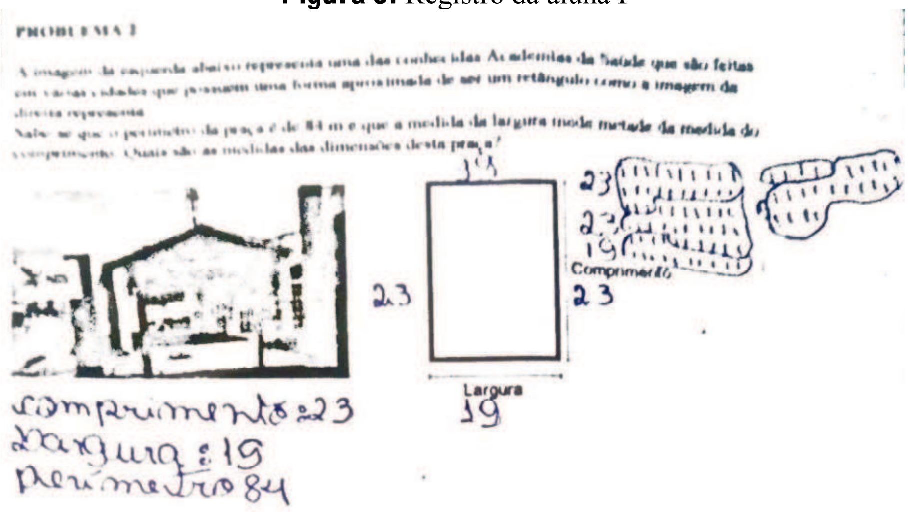
> **Comentário do pesquisador**: mediar não é dar respostas, mas saber o que se pode fazer para que o aluno dê os passos seguintes em seu aprendizado; saber como incentivá-lo a ir adiante a partir daquilo que já fez; onde mesmo que esteja errado, se mostra que o erro não é o fim, mas pode ser trabalhado como ponte para um acerto futuro. O professor soube, neste momento, fazer uma pergunta coerente ao invés de dizer que estava errado e que o aluno refizesse então suas contas. Poderá se perceber em outros diálogos retratados em toda nossa pesquisa este cuidado que o professor teve em saber o que dizer aos alunos de forma que não lhes desse a resposta, mas sim que os fizesse refletir em cima do que estavam fazendo, por isto a necessidade do momento do observar e incentivar, o que Andrade, C. e Onuchic (2017) trazem em sua sugestão de roteiro de trabalho. Ousamos dizer até que o professor termina por

> ter um papel mais ativo em atividades de resolução de problemas, do que em aulas expositivas e dialogadas.

Dos alunos que fizeram individualmente, somente uma aluna não conseguiu dar nenhuma resposta ao problema proposto. O aluno D sempre chamava o professor para ver suas respostas, ele estava colocando os valores ao redor do retângulo aproveitando o desenho, e embora em muitos dos valores que pôs o perímetro dava 84m, a informação da metade não era atendida. Em certo momento, este aluno colocou 41m no comprimento e 21m na largura e chamou o professor que lhe perguntou: “21 é a metade de 41?”. Ele respondeu dizendo: “Mas 20, não é a metade de 40?”. O professor replicou perguntando sobre o 1, mas ele não soube responder.

Aliás, esse problema em dividir também surgiu no quarteto quando uma das integrantes (aluna J) chamou o professor e comentou: “Mas, professor, como é que a gente divide, por exemplo, 84 por 4?” e então escreveu a conta no papel. Para aquele momento o professor sugeriu que pensasse em 84 reais para 4 pessoas, e ao mesmo tempo outra integrante (aluna I) disse que preferia os “palitinhos” mesmo. Tanto que resolveu por meio deles:

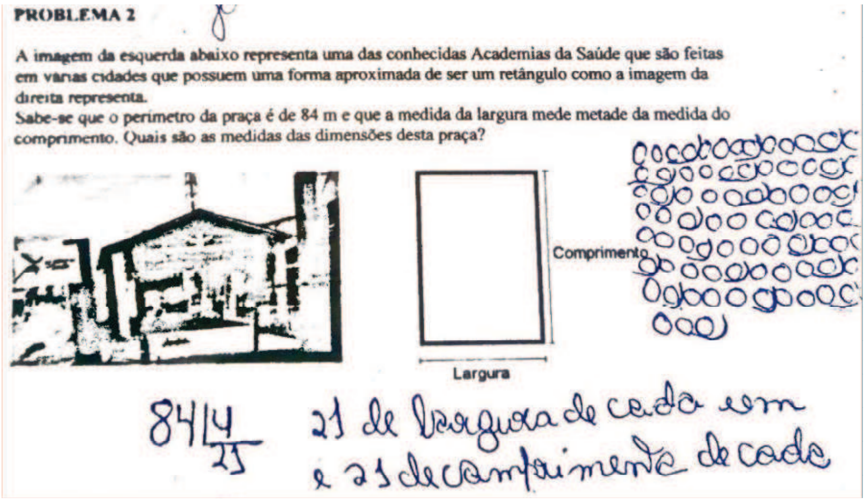
Figura 5: Registro da aluna I



Fonte: Acervo do pesquisador

Outra dupla também se valeu da divisão (84 ÷ 4), inicialmente, por “palitinhos”. Ao fazê-la e chamar o professor, o aluno M explicou oralmente – representação verbal – seu pensamento: “84 dividido por 4, dá 20 grupos de 4 palitos e sobra 2 palitos, então o comprimento é 20 e a largura é 2”. O professor lhe perguntou se este valor atendia à condição da “metade” e então ele percebeu que não e se pôs a achar outra resposta. Após um tempo, ele chamou o professor e observou que tinha feito a primeira divisão errada e, ao refazê-la com bolinhas, viu que obtinha 21 grupos de 4 bolinhas cada, chegando a dizer que supunha que cada lado media 21m (Figura 6). Neste momento, seu colega de dupla interveio e disse que não era possível, pois no problema era claro que um lado era menor que o outro.

Figura 6: Registro do aluno M



Fonte: Acervo do pesquisador

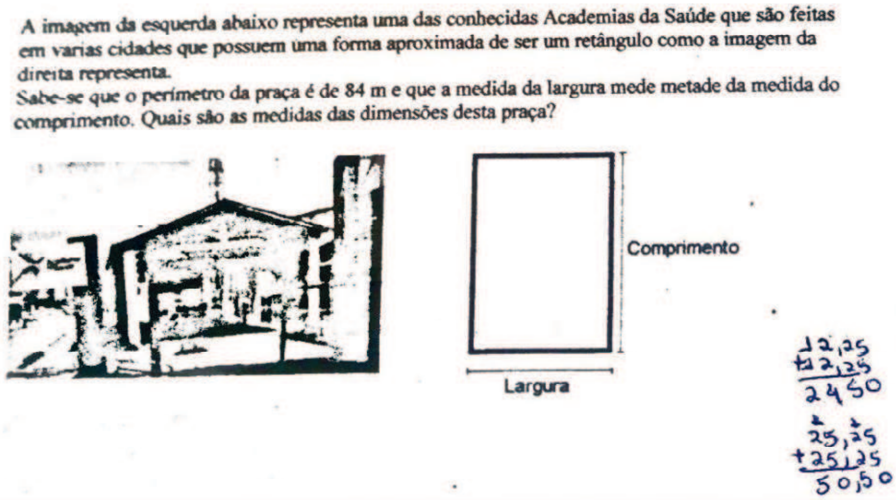
> **Comentário do pesquisador**: vemos nestes casos como o aluno D, a aluna J e a aluna I – em um 8º ano – demonstraram um baixo domínio a respeito do algoritmo da divisão, além disto, o aluno M que acertou depois a divisão, inicialmente quando a expôs oralmente, o fez errado. Na situação do aluno M, outro fator interessante é a contribuição do seu colega quando lhe diz que um lado era menor que o outro, assim então corrigindo o fato de ele achar que todos os lados mediam 21m. Como no caso do aluno A retratado anteriormente, podemos constatar como o que dizer ao aluno o incentiva a buscar novamente uma solução, não o desmotivando apenas porque está errado o que fez. A observação feita pelo colega também foi muito proveitosa, pois o professor não precisou nem perguntar sobre a metade novamente, já que o próprio colega chamou a atenção para as diferenças entre os lados: o trabalho em equipe que serve como mediador para aprendizagem, tanto quanto as intervenções do professor.

Um dos quintetos (exemplo de registro deles na Figura 7) optou por ir atribuindo valores para o comprimento e a largura para ver aonde chegavam, como podemos ver na Figura 7 abaixo de um dos seus componentes, mas não chegaram à resposta. Um dos seus integrantes – aluno C – pensou até em números decimais, como mostra a Figura 8, mesmo assim não chegou à resposta.

Figura 7: Registro do discente L

Fonte: Acervo do pesquisador

Figura 8: Registro do aluno C

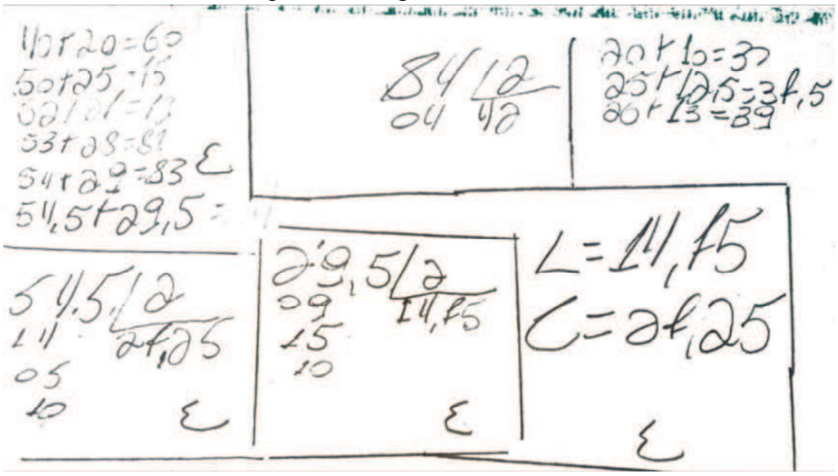


Fonte: Acervo do pesquisador

Comentário do pesquisador: Friedlander e Tabach (2001) já dizem que a representação numérica precede todas as outras em Matemática; também tínhamos falado que imaginávamos que ela fosse utilizada para resolução deste problema, logo é de se esperar o uso dos métodos de tentativa e erro por parte dos alunos. A resposta do aluno C revela como ele conseguiu sair apenas do universo dos números naturais e então pensou nos decimais, como o aluno B, citado a seguir, também fez: algo que merece ser notado.

O aluno B, na Figura 9, que fez sozinho, usou de representações numéricas, de tal forma que o seu raciocínio de aumentar 0,5 em cada parcela após ter obtido 83 foi muito interessante, além de também dividir por 2 os valores para então achar as medidas pedidas, todavia não obteve a resposta correta.

Figura 9: Registro do aluno B

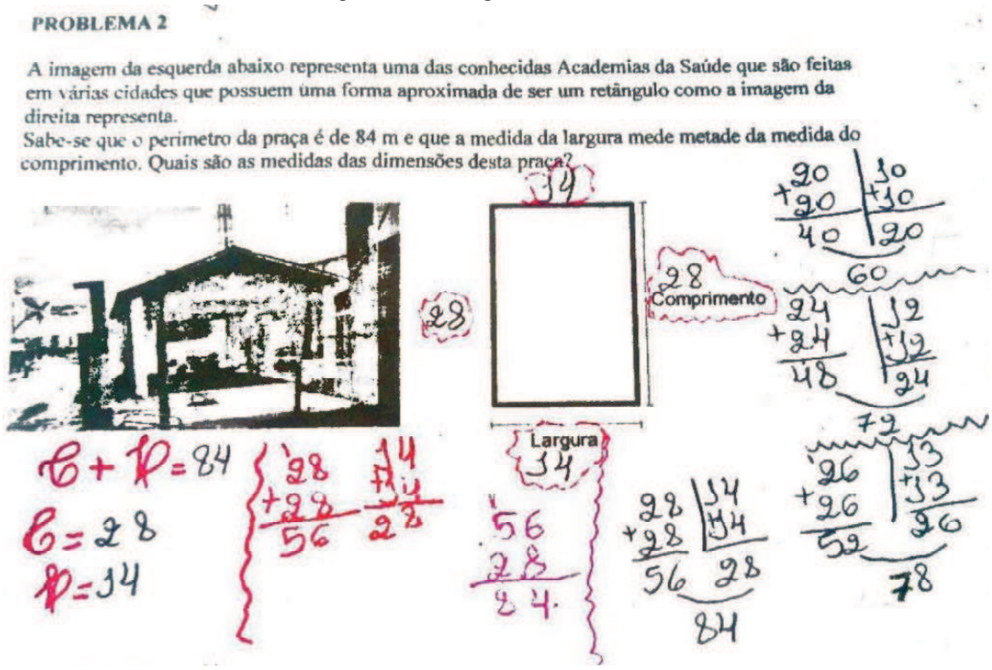


Fonte: Acervo do pesquisador

> **Comentário do pesquisador**: No caso desse aluno, tanto seu raciocínio como seu domínio dos algoritmos de divisão são perfeitos. Observa-se que ele chegou nas medidas de 54,5 e 29,5 que perfazem os 84 m de perímetro. Como sabia que elas indicam a soma de dois lados iguais, então dividiu por 2 encontrando, respectivamente, 27,25 e 14,75. Tem mais: notemos que para chegar nos 54,5 e 29,5 ele foi fazendo as aproximações de tal forma que quando chegou em 54 e 29 percebeu que só faltava mais 1 para os 84, então separou o 1 em: 0,5 e 0,5. Apesar de não ter encontrado a resposta exata, podemos ver como ele pensou de forma bem adequada ao enunciado do problema. Momentos como este nos fazem lembrar que não é o produto final apenas que nos interessa quando fazemos uma pesquisa qualitativa, mas entender o processo de como a ele se chega (ou não) se torna algo muito rico.

A primeira pessoa a obter a resposta completa foi a aluna U, integrante de um dos quintetos, que ao ser interrogada pelo professor como ela fez, explicou que foi via tentativa e erro, pondo os valores nas dimensões até chegar aos que atendiam as informações do problema – Figura 10.

Figura 10: Registro da aluna U



Fonte: Acervo do pesquisador

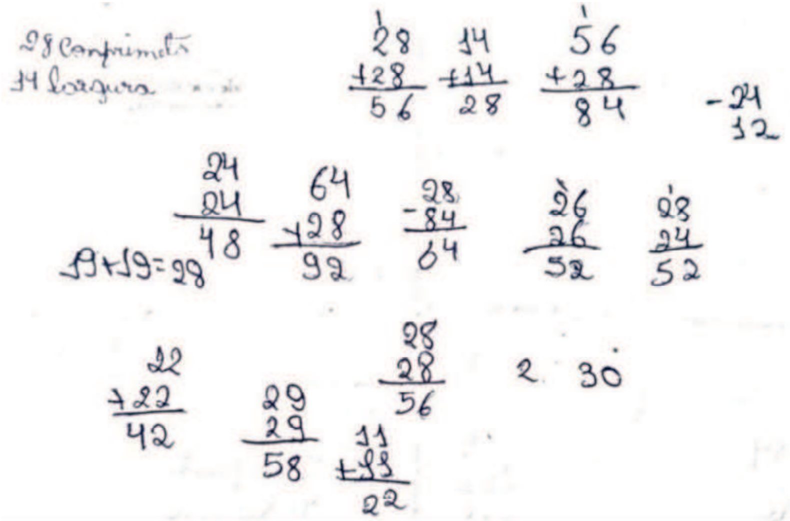
É interessante observar que a aluna U também fez uma representação algébrica ao escrever “c + l = 84”, embora incompleta, mas que foi discutida na plenária e completada nela.

> **Comentário do pesquisador**: Esta aluna foi a primeira a escrever alguma equação sobre o problema (apesar de lembrarmos que ele não pedia isto). Após ela, alguns outros alunos obtiveram a mesma equação que foi corrigida na hora da plenária e do consenso. Vemos que ela, como a quase maioria de toda sala, usou do método da tentativa e erro para obter a resposta: começando do par 20 e 10 até o par que era a solução pedida. É possível perceber que ela entendeu perfeitamente às duas condições do problema, isto é, tanto a que o perímetro era 84, como a que um lado é a metade do outro: basta perceber que os pares escolhidos por ela, foram pares nos quais um dos números era a metade do outro e ela apenas foi realizando as somas para ver qual resultaria em 84.
>
> Até o final deste problema observamos que nenhum dos alunos optou pela resposta via desenho, fazendo com que apenas as representações numéricas fossem utilizadas e a algébrica na apresentação da equação já citada (que não fazia ainda parte da resposta, muito embora foi muito importante como se verá na discussão feita mais adiante): tudo isto apenas corrobora o que Friedlander e Tabach (2001) falam sobre o predomínio do uso das representações numéricas na resolução de problemas, as quais ‘preparam o terreno’ para o uso das algébricas.
>
> Goldin e Shteingold (2001) já dizem que só temos como avaliar as representações externas dos alunos e, a partir delas, presumir algo a respeito das internas que eles criam sobre algum conceito que lhes está sendo ensinado e, no caso da aluna U, escrever a equação “c + l = 84” foi a forma de externar aquilo que internamente ela poderia estar entendendo: a soma das 4 medidas

era 84m, todavia quando colocou logo abaixo os valores c = 28 e l = 14, notamos que não conseguiu perceber a incoerência da escrita, pois com estes valores a equação de cima daria 42 e não 84.

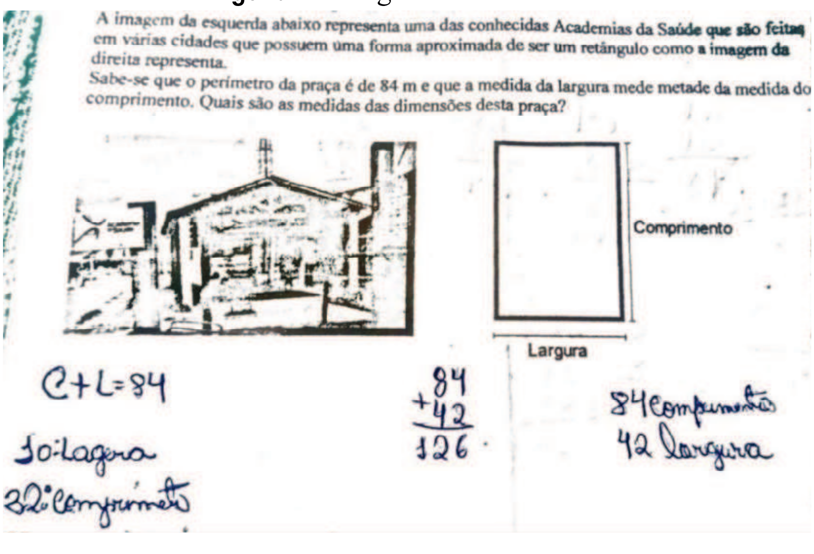
Minutos depois, o aluno A também obteve a resposta seguindo as mesmas ideias das representações numéricas e escrevendo a mesma equação da aluna U, citada anteriormente, como podemos observar em seus registros nas Figuras 11 e 12.

Figura 11: Registro 1 do Aluno A



Fonte: Acervo do pesquisador

Figura 12: Registro 2 do Aluno A



Fonte: Acervo do pesquisador

Chegou então o momento da plenária e, após alguns alunos registrarem suas respostas na lousa, começou-se a análise na qual, como da primeira vez, muitas das respostas foram claramente entendidas pelos presentes, mesmo o professor solicitando a explicação de como alguns fizeram. O professor mostrou aos alunos que todas as resoluções escritas atendiam à informação dos 84m de perímetro, entretanto, ao se observar a informação da metade: duas representações não as atendiam (os próprios alunos perceberam isto) – uma delas usou as medidas 23 e 19 e a outra 21 e 21 – somente outras duas atenderam e eram as respostas corretas: 28 m de comprimento e 14 m de largura. Nesse momento, também houve uma observação do professor pelo fato dos alunos não terem colocado a unidade de medida, isto é, metros.

Já estava para terminar a aula; a agitação/dispersão de uma boa parte da sala se fazia presente, mas foi o momento que o professor achou para discutir a equação "c + l = 84" escrita na resolução no quadro por parte da aluna U. Estabeleceu, então, o diálogo, a partir do professor:

> P: Esta equação representa exatamente o perímetro do retângulo?
> Alguns alunos: Sim!
> Outros alunos: Não!
> P: Por que não? Aqui estão os 4 lados do retângulo?
> B: Não, aí só tem dois: um comprimento e uma largura.
> P: Falta o quê então?
> C: Mais um comprimento e mais uma largura.
> P: Então como eu deveria escrever?
> C: Com dois c e dois l.
> P: Me digam aí como é para que eu escreva aqui.
> A, B, C: Dois c mais dois l é igual a 84.

Após o professor escrever na lousa: 2c + 2l = 84, os discentes chegaram ao consenso que esta equação expressava o perímetro.

> **Comentário do pesquisador**: neste ponto vemos a importância do momento da plenária e da busca do consenso dentro do esquema proposto do Andrade, C. e Onuchic (2017), pois a construção da equação se deu neste momento onde todos poderiam acompanhar e participar, tendo como ponto de partida a valorização daquilo que os próprios alunos escreveram. Ressaltamos que também não formalizamos nenhum conteúdo já que este não era o nosso objetivo até este momento da pesquisa.

Nos instantes finais, o professor aproveitou o fato de que, enquanto estava montando a equação do perímetro, um aluno de uma dupla – aluno AP – questionou onde colocava a metade que o problema dizia, e a fim de montar a equação desta informação, perguntou à sala como fazer.

> **Comentário do pesquisador**: é bom observar que o problema já estava respondido a esta altura e até mesmo a escrita da equação do perímetro (que não era algo solicitado desde o início) também tinha sido discutida e entendida pelos alunos (ao menos foi o que eles assim o mostraram), porém diante do que era apenas uma dúvida do aluno AP, vimos como uma oportunidade de

> explorar este problema, mesmo estando numa situação bem parecida com a aula anterior: na limitação do tempo, aliás, para completar ainda tínhamos a atenção de poucos alunos e eram as últimas aulas, mas não quisemos cometer o mesmo equívoco da outra aula e então lançamo-nos a explorar e responder o problema feito pelo aluno AP: onde colocava a metade? E assim, junto com os alunos, elaboramos a outra equação do problema. Num momento como este, vemos como o professor precisa perceber quais pequenas dúvidas, curiosidades etc. podem ser o 'estopim' para uma atividade de exploração e até mesmo de proposição de problemas e assim instigar a sala a conseguir 'ir cada vez mais longe, um ir cada vez mais profundo, um ir cada vez mais curioso, há um ir que chega e nunca chega' (ANDRADE, S., 2011, p.2-3).

Mesmo percebendo que os alunos estavam visivelmente de cansados, outros distraídos, o professor quis dar continuidade à abordagem do problema, pois sabia que seria de grande valia até mesmo para o próximo problema que visaria à obtenção do sistema propriamente dito. Desse modo, mesmo contando efetivamente com a atenção de poucos alunos, lançou-se a este desafio começando por perguntar:

> P: Como posso escrever metade?
> AP: Dividindo.
> P: Por quanto?
> AP: Por 2.
> P: Como escrevo isto?
> B: Pode ser o c com dois pontinhos e o 2.

Então o professor escreveu no quadro c:2 e perguntou:

> P: Mas isto aqui representa o quê?
> C: A largura.
> P: Como escrevo?
> A: L igual a isto aí, professor.

Assim, quando o professor escreveu l = c:2 comentou que esta era a equação da segunda informação.

Foi interessante notar nesses dois momentos da obtenção das duas equações, onde por volta de 4 alunos da sala – coincidentemente os que têm o melhor desempenho matemático – mantiveram sua atenção totalmente fixa na explicação, apesar da dispersão da sala e sendo os últimos minutos do dia de aula no turno da manhã.

Enfim, após isto, o professor recolheu os registros e dispensou os alunos, pois tinha acabado o horário, concluindo o segundo encontro e o 1º bloco dos problemas.

5.1.3 Considerações sobre o 1º bloco

Os dois problemas deste primeiro bloco de atividades, conforme exposto anteriormente, objetivava habituar os alunos à metodologia da Resolução de Problemas e ver nas estratégias dos mesmos onde poderiam surgir as diversas representações. Podemos dizer que ambos os objetivos foram bem alcançados, pois a representação verbal dos grupos foi bem clara nas falas dos alunos (quer as transcritas, quer não); as representações numéricas foram muito presentes através do método da tentativa e erro, como era de se esperar (FRIEDLANDER; TABACH, 2001); os desenhos que imaginávamos que os alunos poderiam fazer para representar os animais do problema 1 e o terreno do problema 2: não ocorreram; e a representação algébrica foi a que mais nos surpreendeu, pois não esperávamos que os alunos fossem representar uma parte dos dados de cada problema através das equações logo de início, mesmo que algumas não tenham sido as corretas.

Além disto, diante de cada uma das representações que foram utilizadas pelos alunos, às vezes, na união de mais de uma para expressar seu entendimento do problema, conseguimos notar o que Goldin e Shteingold (2001) dizem sobre conseguir inferir alguma coisa das representações internas feitas pelos alunos a partir da avaliação das externas, pois pudemos perceber, em ambos os problemas, como estava sendo a construção do pensamento dos alunos através das justificativas que apresentavam verbalmente quando interpelados pelo professor.

Também não podemos negar o quanto a metodologia da RP foi muito útil e os alunos conseguiram ir se habituando a ela. Além disso, tornou os alunos mais ativos na construção do seu conhecimento, levando-os a sair da sua zona de conforto e fazendo-os usar a criatividade na busca de suas próprias estratégias de resolução. Em relação ao roteiro de Andrade, C. e Onuchic (2017), vimos que muito nos ajudou na organização desses momentos, mostrando tanto o cuidado que o professor deve ter ao preparar um problema que será aplicado com sua turma (objetivo que se quer alcançar, conhecimentos prévios que a turma precisa, escrita adequada etc.), como a leitura feita por ele para perceber se a turma entendeu de fato o que o problema pede para ser feito e também esclarecer algum termo desconhecido; ressaltamos novamente como no problema 2, por exemplo, a importância da fase da plenária e do consenso para o aprendizado dos alunos.

Não podemos deixar de ressaltar a importância do papel do professor que não desprezou a resolução que cada aluno fez, mas, ao contrário, mostrou como todas estavam adequadas na resposta a cada problema proposto. Ao usar a representação que lhe foi mais interessante, soube instigar os alunos a pensar se aquela era mesmo a melhor resolução, tanto nos comentários em cada grupo, como nos momentos finais da plenária e do consenso.

5.2 2º BLOCO: INTRODUÇÃO AOS SISTEMAS

5.2.1 Encontro 3: Soma e diferença

09/05/2018

Ideias trabalhadas: Uso de duas incógnitas distintas para obtenção de duas equações, cada uma com as duas incógnitas diferentes.

Conteúdo: Introdução aos sistemas de equações polinomiais do 1º grau com duas incógnitas.

Objetivo: Obter o sistema de equações polinomiais do 1º grau com duas incógnitas associado a um problema.

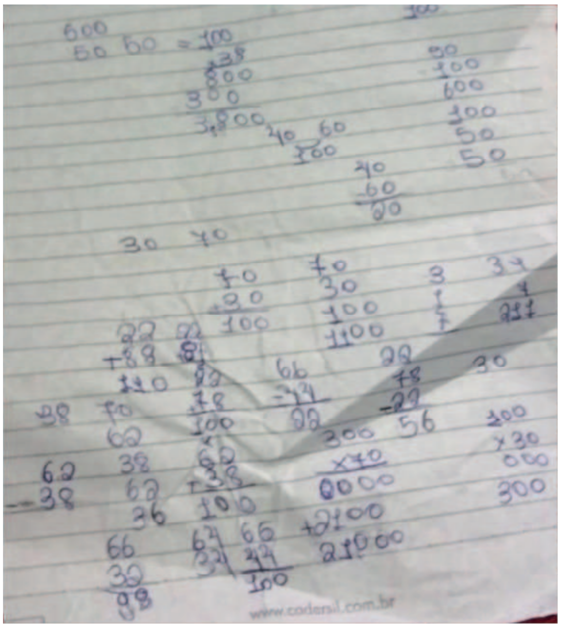
PROBLEMA 3: Somando dois números obtemos 100 e subtraindo o maior do menor achamos 38. Quais são estes dois números?

Ao escolhermos este problema acreditávamos que os alunos iriam conseguir resolvê-lo rapidamente (fato que não ocorreu), o que seria a primeira parte da aula. Na segunda parte, partimos para um momento de exploração ao pedir que montassem as equações que representam os dados da adição e subtração e assim, a partir da montagem de tais equações, definiríamos os sistemas para eles.

Neste terceiro encontro, o professor chegou à sala, cumprimentou os alunos e, após uma conversa informal, relembrou-lhes a dinâmica de como funcionaria a aula para então entregar o problema 3. Vale salientar que foram as duas primeiras aulas que iam de 07h00 as 08h20, porém quando veio começar a aplicação, neste dia, já era por volta de 07h25 e se pôde sentir a consequência deste atraso nos momentos finais da aula.

Após a entrega do problema, ocorreu a leitura individual do problema por parte dos alunos, como Andrade, C. e Onuchic (2017) recomendam e, minutos depois, a leitura em conjunto, para então os grupos começarem a resolução. Neste momento, tínhamos 3 duplas, 3 quartetos, 1 trio e 1 aluno sozinho; após um tempo chegaram 5 alunos, que se dividiram de forma que a sala permaneceu até o final com: 1 trio, 3 duplas, 4 quartetos, 2 sozinhos. Enquanto olhava o trabalho dos grupos, o professor fazia suas anotações e pôde notar que foi unânime o uso da representação numérica pelo método da tentativa e erro pelos alunos, como podemos ver no exemplo da Figura 13 e em outros que aparecerão no decorrer desta descrição.

Figura 13: Registro do aluno A

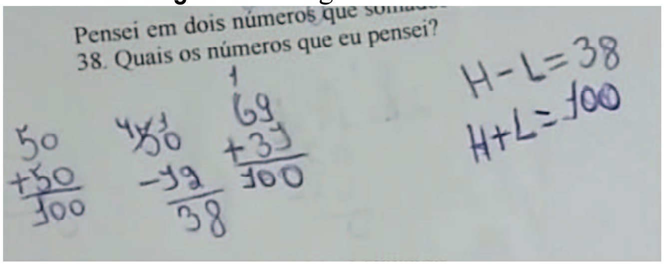


Fonte: Acervo do pesquisador

> **Comentário do pesquisador:** como já dito no bloco de problemas anteriores: a representação numérica precede todas as outras em Matemática e, para este problema, certamente não seria diferente, já que ele aborda questões de adição e subtração, as quais por esta razão achávamos que os alunos as resolveriam rapidamente, o que, como dissemos anteriormente, não aconteceu. Alguns podem achar que, devido à simplicidade desta atividade, ela poderia parecer mais com um mero exercício do que com um problema. Para aqueles que podem achar desta forma é necessário relembrar que um problema não é necessariamente uma 'atividade enfeitada preenchida de um enunciado extremamente desafiador', mas como definimos, é uma atividade que visa despertar no aluno o interesse em buscar sua solução que a princípio não conhece. Conseguimos constatar como esta atividade despertou o interesse dos alunos na busca por sua resposta, tendo em vista que até demoraram mais do que imaginávamos para resolvê-la.

Para alguns grupos não ficou claro a informação da subtração contida no problema, além de muitos também terem pensado em dois números para a soma e outros dois para a subtração, como podemos conferir no registro da Figura 14, feito por um aluno de uma das duplas.

Figura 14: Registro do aluno L



Fonte: Acervo do pesquisador

Devido a um erro de digitação na informação do problema que era "subtraindo o maior do menor", o professor foi oralmente corrigindo/explicando a alguns dos grupos que não entendiam este dado através de falas do tipo: "se subtrairmos os dois dá 38". Um dos alunos que fez sozinho e um dos alunos de um dos quartetos interrogaram o professor sobre o que era subtrair.

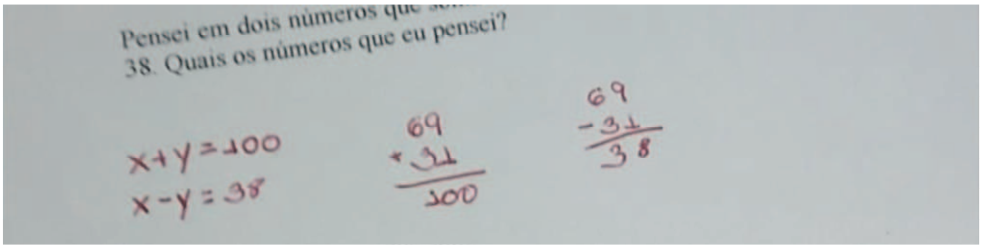
> **Comentário do pesquisador:** não somente através deste aluno, mas também em outros momentos nos quais os problemas também foram aplicados, conseguimos ver como algumas noções básicas de alguns conteúdos matemáticos, e até mesmo o entendimento da interpretação do problema, precisam ser trabalhados: ou os alunos não tinham, ou não se lembraram de usar corretamente. Além deste caso, por exemplo, houve outro de uma aluna que ao subtrair com números decimais não pôs a vírgula embaixo da vírgula, além das dificuldades na divisão apresentadas no problema anterior. Obviamente, sabemos que para uma turma de 8º ano, espera-se que os alunos tenham domínio de certos conteúdos básicos nesta etapa de ensino.
>
> Outra coisa que observamos é que mesmo o enunciado do problema sendo pequeno, nem na hora da leitura pelo próprio professor, este percebeu a falha da escrita, sendo somente no decorrer da atividade, através de outra leitura feita, que veio ocorrer a percepção do erro. Isto mostra como o roteiro de Andrade, C. e Onuchic (2017) não é algo estático, nem uma 'receita pronta', mas que as partes se entrelaçam em vários momentos: aqui foi o momento de, na hora da observação e incentivo dos grupos, o professor voltar à leitura inicial para constatar a falha e então tomar as providências para corrigir a mesma. Esta também é mais uma observação sobre o fato do professor estar atento ao conteúdo e à forma de exposição do problema para os alunos.
>
> Sobre o sistema que o registro da Figura 14 apresenta comentaremos mais adiante.

Além disso, o professor tinha dividido o problema em duas partes: a primeira foi resolver e descobrir os números, que estava escrito no problema entregue; a segunda parte foi um momento de exploração, pedindo que os alunos montassem as equações que o problema expressava, sendo que esta parte foi solicitada após a plenária da primeira, de forma oral.

Comentário do pesquisador: diferente do que ocorreu no 1º bloco, para alcançarmos nosso objetivo neste, tivemos a oportunidade de explorar este problema solicitando dos alunos a representação algébrica do enunciado. Poderia ser um ‘passo muito grande’ para alguns alunos, mas era necessário este desafio da passagem da representação verbal para a algébrica e como nos outros 2 problemas tínhamos visto que foi realizado por alguns alunos, então isto demonstrava que algum domínio da representação de equação eles tinham. Este foi o momento do nosso ‘ir mais longe’, conforme Andrade, S. (2011) apontou, pois não paramos na resposta. Aliás, nosso objetivo desde o início, de fato, não era parar apenas nela, qual não foi nossa surpresa quando um aluno já tinha escrito o sistema ainda na primeira fase.

Entretanto, para surpresa do professor, o aluno C, de um dos quartetos, ao iniciar a resolução já tinha escrito as equações conforme o que pediria o professor no 2º momento. Eis o seu registro.

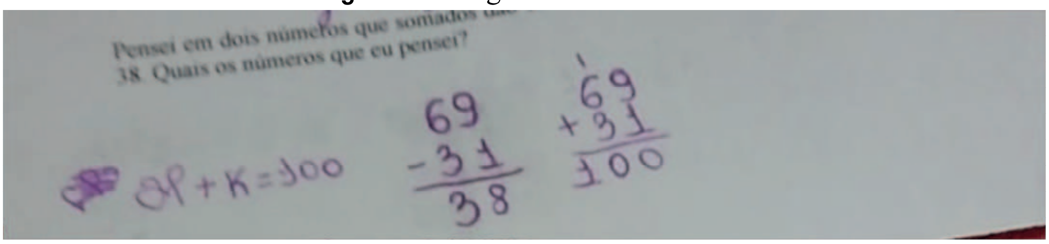
Figura 15: Resposta do aluno C



Fonte: Acervo do pesquisador

Outros alunos chegaram, inicialmente, a escrever a equação que representaria a soma 100, como se vê, a título de exemplo, no registro a seguir:

Figura 16: Registro da aluna J



Fonte: Acervo do pesquisador

Comentário do pesquisador: encontramos, neste ponto, que as representações numéricas e algébricas se fizeram presentes neste terceiro problema, sendo aquela para auxiliar na resolução propriamente dita, e esta não; mas seu surgimento inicial, sem o professor ter solicitado por parte de C e dos outros alunos já nos ajuda a entender um pouco dos seus pensamentos, isto é, da representação interna que eles tiveram feito do enunciado do problema, conforme Goldin e Shteingold (2001) apontam, e que assim lhes permitiu já escrever a equação da soma. As equações que surgiram após o pedido do professor também sinalizam que pode ter ocorrido o entendimento da passagem da representação verbal para a algébrica dos alunos que assim as fizeram.

Chegou o momento de cada grupo enviar um participante para o quadro para escrever suas respostas. Após escreverem, a resposta ficou clara para todos: os números eram 69 e 31, cabendo ao professor apenas enfatizar que todos tinham optado pelo uso da representação numérica. Alguns registros no quadro foram das equações, sendo que, de propósito, o professor não os comentou, já devido à sua ideia de exploração. Portanto, logo após esta primeira discussão, o professor apagou o quadro e lançou o problema da montagem das equações. Nisto, o relógio já marcava 08h00.

Comentário do pesquisador: alguns podem se perguntar o porquê de não termos aproveitado as equações que foram escritas no quadro para delas desencadear a atividade de exploração, ao invés de apagar e nada comentar. Fizemos isto, pois acreditamos que perderíamos um rico momento para maior análise do entendimento em cada grupo separado do que os seus componentes fizeram na representação algébrica do problema. Embora já tivéssemos pouco tempo para o término da aula, vimos que a oportunidade de criação de cada grupo seria um momento importantíssimo de aprendizado para os alunos.

O aluno C, que já tinha escrito, foi o primeiro a dizer que já tinha a resposta; o professor pediu então que ele esperasse o restante dos grupos; minutos depois, uma dupla também disse que já tinha obtido a resposta; o professor pediu que aguardassem e foi então observar os outros grupos.

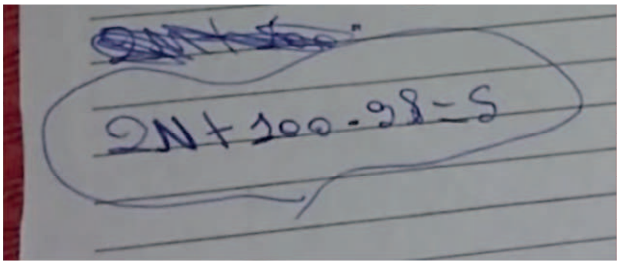
Em um dos quartetos, onde o professor viu o uso de 4 letras nas duas equações, manteve-se o seguinte diálogo com a aluna G responsável pela resolução:

P: Mas, será que são 4 letras diferentes? Por quê?
G: Por causa dos números.
P: São quantos números na resposta?
G: São 2.
P: Então quantas letras diferentes seriam suficientes? Pois você só usaria quatro letras diferentes se os quatro números fossem diferentes.

Comentário do pesquisador: com nossa última fala, esperávamos que a aluna pudesse perceber que apenas duas letras seriam suficientes (justamente umas das ideias dentro do conteúdo de sistema) para expressar as equações. O caso do aluno D, citado mais adiante (e em outros momentos desta pesquisa), irá revelar como a união da mediação do professor ao ouvir como o aluno pensou e então escreveu, isto é, a sua representação interna a partir do enunciado e então a exposição externa da sua representação verbal para a algébrica são elementos muito importantes para o aprendizado das ideias que trabalhamos.

Após este diálogo, o professor partiu para outro quarteto, no qual um dos integrantes (aluno S) tinha escrito a seguinte equação:

Figura 17: Registro do aluno S



Fonte: Acervo do pesquisador

Porém, quando interpelado pelo professor, o aluno se deteve a explicar a equação falando: “Ah, professor: são dois números – ele aponta para o N – que somados dão 100 e diminuídos dão 38”.

> **Comentário do pesquisador**: o aluno, sem dúvida, mostra que entendeu a escrita do problema, de tal forma que, ao fazer (e ao explicar ao professor) a tradução para linguagem algébrica de todo o enunciado em uma única equação, mostrou que dentro do seu entendimento estava coerente. Além desta ‘tradução’ errônea, representar a dificuldade que os alunos apresentam dentro da passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica (já presente nas pesquisas do nosso levantamento bibliográfico e um dos motivos que nos levou a realizar esta pesquisa), ela também nos permite inferir que o entendimento deste aluno a respeito destas passagens não estava de todo adequado, pois avaliar aquilo que o aluno expõe externamente é o meio que temos para tentar entender o que se passa internamente em sua mente, isto é, a relação entre as representações internas e externas que já nos são apontadas por Goldin e Shteingold (2001).

O aluno D, do mesmo quarteto, chegou a escrever: “2H = 100”. Nesse caso, o professor manteve o seguinte diálogo:

> P: Por que escreveu assim?
> D: Por que aqui num são dois números?
> P: Quais são os números?
> D: 69 e 31.
> P: Eles são iguais?
> D: Não!
> P: Então?
> D: Ah... tô ligado!

> **Comentário do pesquisador**: a primeira coisa a observarmos aqui é a ocorrência do mesmo episódio do aluno S: o aluno D entendeu de uma forma o enunciado da soma dos números e traduziu ele para linguagem algébrica de

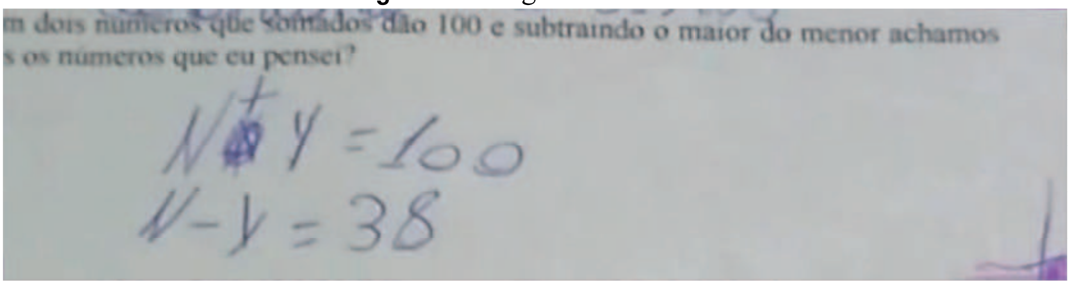
> forma inadequada. A segunda coisa é o diálogo a partir deste registro com o professor, no qual podemos observar claramente que as indagações do professor serviram para fazer com que D repensasse o que tinha feito até o momento de dar aquela resposta. A última fala de D sinaliza que ele descobriu algo que faltava, que ele conseguiu perceber seu próprio erro para então consertar (e consertou depois quando voltamos e vimos seu registro). Aqui está o papel do professor novamente enquanto o mediador, enquanto aquele que incentiva o aluno a não parar no erro e nem ‘condena’ o mesmo dizendo que está errado e pronto, mas que sabe o que dizer para fazer com que o aluno dê os passos seguintes no seu aprendizado. O fato de o aluno voltar e perceber que no registro numérico a resposta dava dois números diferentes, certamente lhe permitiu perceber que precisaria então de duas letras diferentes e isto é o momento no qual uma representação lança luz sobre outra a fim de que a ideia que se está sendo trabalhada possa ser atingida (FRIEDLANDER; TABACH, 2001): a numérica auxilia a algébrica.

O aluno finalizou dando a entender que percebeu o porquê de usar duas letras diferentes.

Chegou então o momento da plenária. Um aluno de cada grupo veio ao quadro e, após montarem as equações, começamos a discussão. De todos os registros no quadro, o professor começou por ir analisando as equações que representavam a soma e que em apenas uma das respostas estava escrita “x + x = 100”, o qual fez o professor indagar se estava adequada àquela forma e, de maneira bem clara, a maioria notou que o mais indicado era letras diferentes já que eram dois números diferentes envolvidos.

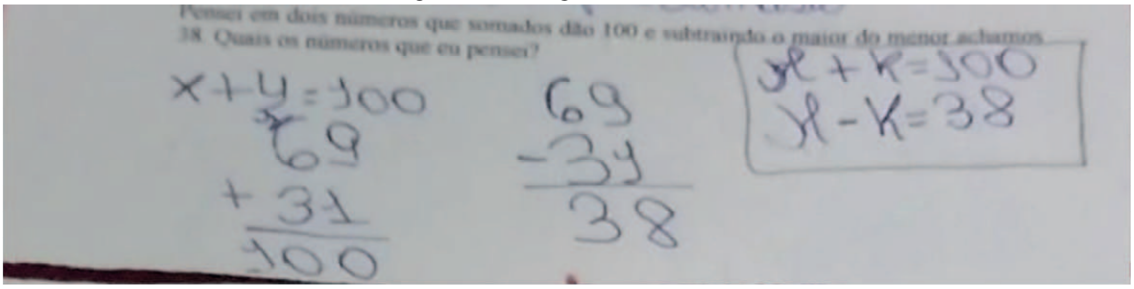
Na análise da equação que indicava a subtração todos chegaram ao consenso de que os registros dos grupos no quadro estavam corretos. Eis alguns (além da Figura 14 exposta anteriormente):

Figura 18: Registro do aluno E



Fonte: Acervo do pesquisador

Figura 19: Registro da aluna J



Fonte: Acervo do pesquisador

Em resumo, todos os registros expressaram satisfatoriamente as duas equações, cada uma com as duas incógnitas e, a partir disto, o professor pôde partir para o momento de formalização do conteúdo (que nos outros 2 problemas não foram feitos, pois não eram seus objetivos) e então fazer a introdução do que é um sistema de equações polinomiais do 1º grau com duas incógnitas. Partindo do registro na lousa da Figura 19 acima, ele pôde dizer aos alunos que chamamos de sistema de equação polinomial do 1º grau com duas incógnitas o conjunto formado por duas equações, cada uma com duas incógnitas que aparecem em ambas as equações, onde a solução para uma das equações também será para a outra e que chamamos esta solução de par ordenado.

Enfim, já passava das 08h20 e a agitação na aula para a troca de professor já estava alta; o docente não conseguiu falar mais muita coisa, então recolhendo o material, deu a aula por encerrada.

5.2.2 Encontro 4: Entre feijão e arroz

<u>16/05/2018</u>

Ideias trabalhadas: Uso de duas incógnitas distintas para obtenção de duas equações, cada uma com as duas incógnitas diferentes.

Conteúdo: Introdução aos sistemas de equações polinomiais do 1º grau com duas incógnitas.

Objetivo: Obter o sistema de equações polinomiais do 1º grau com duas incógnitas associado a um problema.

PROBLEMA 4: Minhas duas irmãs foram ao supermercado fazer compras de alguns alimentos básicos para casa: arroz e feijão. Minha irmã mais velha comprou dois pacotes de feijão e um de arroz e pagou R$ 13,00, já minha outra irmã comprou um pacote de feijão e três de arroz e pagou R$ 14,00. Quanto custa um pacote de arroz? E um de feijão?

Escolhemos este problema para continuar falando da construção do sistema de equações, entretanto não pedimos que os alunos o montassem inicialmente. Planejamos fazer como da última vez, ou seja, dividir a aula em dois momentos: no primeiro, os alunos resolveriam e, após a plenária do primeiro momento, faríamos a exploração do problema na busca da construção do sistema.

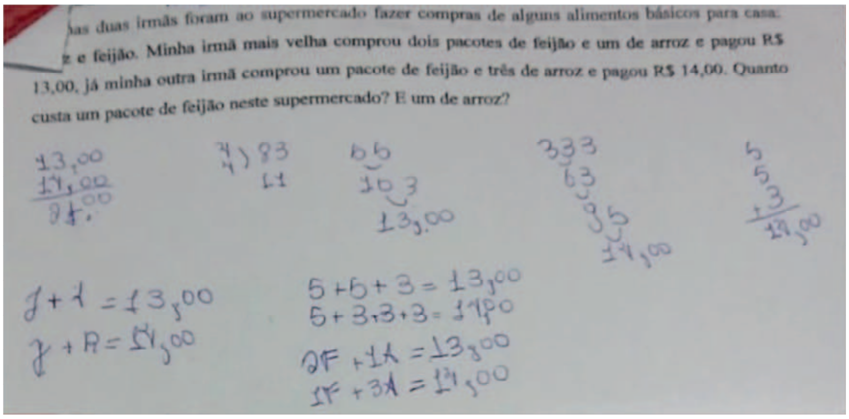
No início da aula, o professor optou por relembrar o sistema do encontro anterior e novamente explicar o que seria um sistema. Além disto, esta aula foi a primeira em que ocorreu a maior quantidade de trios (4) e quartetos (3), optando apenas um aluno por fazer individual. Durante a maior parte da pesquisa, deixamos sempre a critério dos alunos a montagem dos seus grupos, apesar das limitações que esta prática causa, achamos melhor priorizar a afinidade entre os membros de cada grupo, logo raramente, de nossa parte, houve alguma mudança de alunos de um grupo para outro.

Com os grupos feitos, entregamos o problema, demos o tempo para a leitura individual de cada aluno para, então, fazermos a leitura em conjunto e os alunos partirem para a resolução; tudo isto já tinha gastado 30 minutos de duas aulas que iam das 07h00 às 08h20.

Inicialmente, muitos alunos encontraram um valor para o arroz e um para o feijão que satisfazia a condição dos R$ 13,00 e assim que chamavam o professor para conferir, este lhes pedia para averiguar se os valores satisfaziam a condição dos R$ 14,00. Alguns grupos e um aluno que fez individual encontraram a solução numa faixa de 5 minutos, após o início da resolução e usaram a representação numérica.

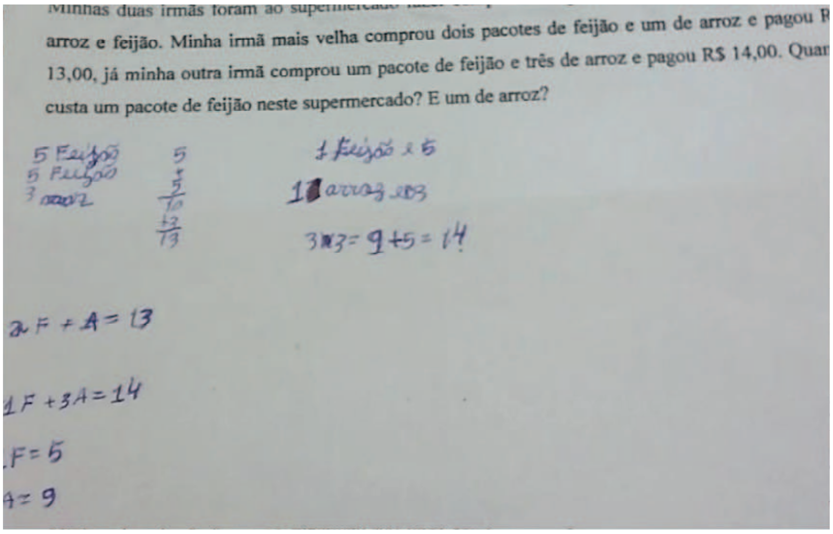
Seguem dois registros de soluções (o sistema presente na Figura 20 será comentado posteriormente):

Figura 20: Registro do aluno F



Fonte: Acervo do pesquisador

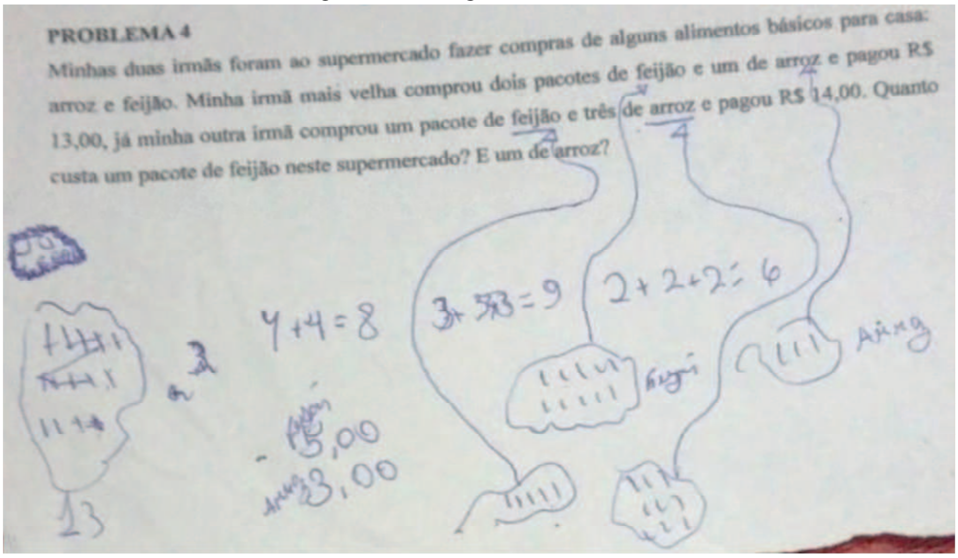
Figura 21: Registro do aluno 1



Fonte: Acervo do pesquisador

A maioria dos alunos resolveu através de uma representação numérica, no método de tentativa e erro; um aluno, porém, utilizou-se também dos "palitinhos" para obter a resposta, ligando-os, inclusive, aos respectivos trechos do problema indicados na resposta.

Figura 22: Registro do aluno N

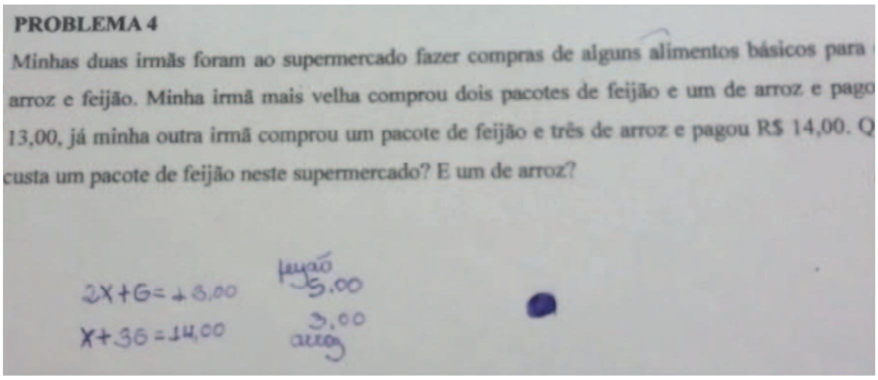


Fonte: Acervo do pesquisador

> **Comentário do pesquisador**: mais uma vez, constatamos como a representação numérica precede todas as outras nos registros expostos até aqui e durante tudo o que vimos em sala. No caso deste aluno, que resolvia usando 'palitinhos', vale salientar que é um aluno que já tivera um bom desempenho matemático, mas que devido a fatores exteriores veio caindo em seu desempenho escolar de forma geral. Acreditamos que seu uso dos 'palitinhos', mesmo deixando sempre as contas escritas, se deve ao fato de que, desde o início da pesquisa, o professor deixou bem claro que poderiam resolver como quisessem: com números, com equações, com desenhos etc.

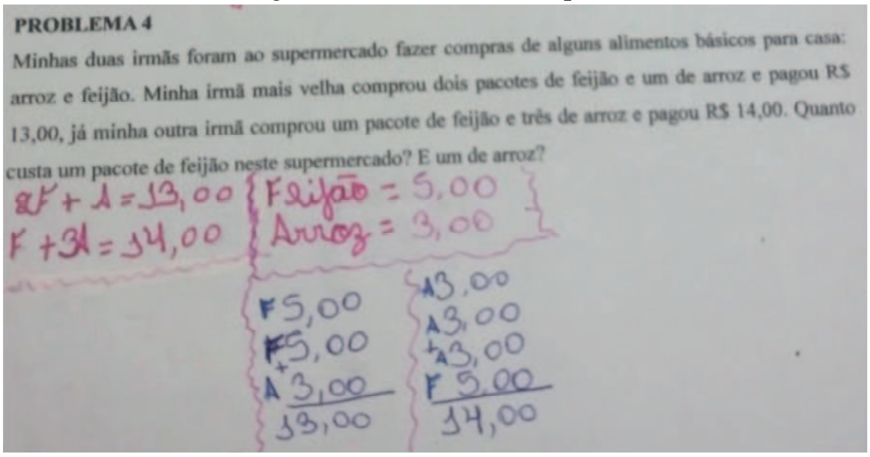
Outros grupos demoraram a obter a solução, não havendo encontrado até a hora da plenária. Por outro lado, quase todos os grupos montaram o sistema que o problema representava sem o professor (ou o próprio problema) solicitar, como podemos ver em algumas Figuras que seguem:

Figura 23: Sistema obtido por C



Fonte: Acervo do pesquisador

Figura 24: Sistema obtido por U

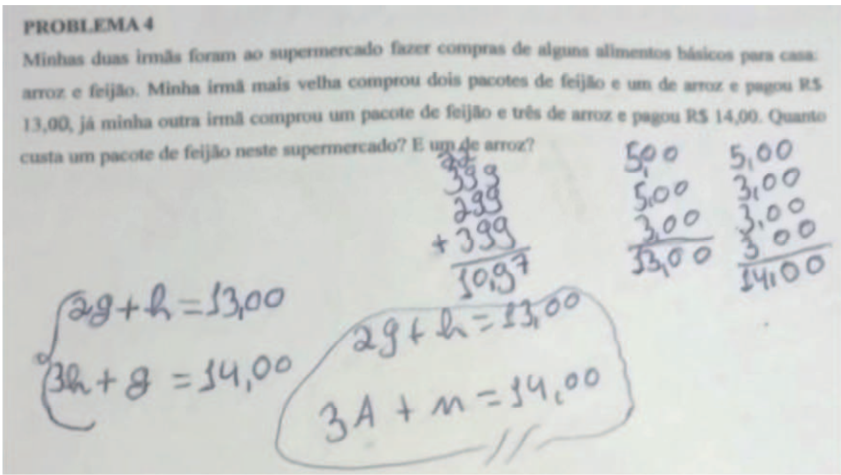


Fonte: Acervo do pesquisador

> **Comentário do pesquisador**: não apenas nestes dois casos, mas em outros que também foram respondidos corretamente, é possível observar que os alunos deixaram a resposta escrita via representação numérica de um lado e o registro do sistema do outro. Embora não tenhamos pedido que montassem o sistema, certamente, por já "desconfiarem" que iríamos pedir (como revisamos no início da aula), os que sabiam como, já o montaram. Isto pode ser um indício de que a transição da linguagem verbal para a linguagem matemática estava conseguindo ser bem entendida por parte da sala e isto faz eco às ideias de Goldin e Shteingold (2001): a partir da análise dos registros externos, podemos avaliar como está o entendimento dos alunos a respeito da formação do conceito que se está sendo trabalhado. Neste caso, da ideia de usar duas incógnitas e perceber que o problema traz duas informações que nos permitem montar o sistema com as incógnitas escolhidas.

Vale salientar, no entanto, que houve uma representação algébrica do aluno D que estava errada, mas que na mediação do professor e do seu colega – o aluno K –, de trio, ele conseguiu entender e montar o sistema correto. A seguir temos o seu registro (Figura 25) e o diálogo:

Figura 25: Registro do aluno D



Fonte: Acervo do pesquisador

> P: Por que as 4 letras diferentes?
> D: Porque são duas compras.
> K: Mas as letras debaixo deve ser as mesmas de cima.

Neste instante, D ia falar, mas o professor também ia, de forma que o professor disse:

> P: Não! Vá! Fale você que depois eu falo.

D fez uma pausa que demonstrava ser aquela pausa de quem está pensando em cima do próprio pensamento e então disse:

> D: Ah! Pera aí, tem que ser as mesmas letras mesmo.
> P: Por que?
> D: Porque são as mesmas mercadorias.

> **Comentário do pesquisador:** é notório ver, neste episódio, como se destaca a importância do papel do professor numa aula com a RP, pois foi com a ajuda das intervenções dele e do aluno K, que D conseguiu repensar seu próprio pensamento e assim chegar à conclusão exposta na última fala, que para o professor foi a demonstração de que o aluno conseguiu dar sentido ao porquê de usar as mesmas incógnitas. Este foi o momento mais marcante da aula para o professor, pois justamente era a ideia que objetivamos trabalhar, ou seja, a necessidade das duas incógnitas diferentes para obter as duas equações com elas, que este aluno demonstrou perceber e que, certamente, não teria sido possível para ele se as influências externas não tivessem contribuindo.

O aluno, então, reescreveu o sistema de forma correta (à esquerda na Figura 25), apagando o que fez errado. Percebendo isso, o professor pediu que ele escrevesse novamente para poder discutir na plenária e assim o aluno fez (à direita na Figura 25).

Outra representação de sistema interessante foi aquela feita pelo aluno F e que já expomos na Figura 20, aproveitamos este registro na hora da plenária e do consenso para poder discuti-lo – embora, antes destes momentos, o aluno já havia obtido o sistema adequado.

Com o relógio marcando 08h00, o professor solicitou que um aluno de cada grupo fosse ao quadro escrever as respostas, iniciando-se a discussão. O professor parabenizou os grupos, pois, mesmo sem pedir, eles já tinham escrito o sistema, e começou por analisar as representações algébricas deles, detendo-se em comentar o de D. Logo depois, aproveitou o de F para gerar o diálogo que segue:

> P: Este sistema está adequado?
> Aluna J: Não!

P: Por que?
J: Porque só representa um de cada.
P: O que falta para completar ele?
D: Mais números.
P: Nesta 1ª equação falta que número?
A: Falta o 2 no J.

O professor escreve o 2 na frente do J.

P: E nesta 2ª equação?
Aluna H: Faltou o 3 no R.

O professor escreve o 3 na frente do R.

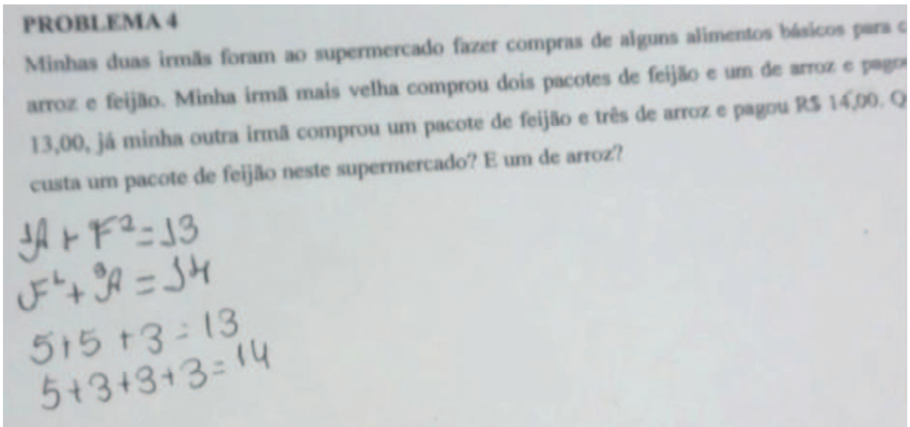
P: Agora sim!

Comentário do pesquisador: constatamos aqui como a etapa da plenária e do consenso que Andrade, C. e Onuchic (2017) trazem foi, mais uma vez, de muita importância para o aprendizado. Esta oportunidade foi muito proveitosa, pois nos permitiu trabalhar com a representação algébrica justamente na passagem de uma linguagem para outra (que é a dificuldade que as pesquisas apontam e que também nos levou a realizar este trabalho como já falamos) no grupo grande e não apenas nos diálogos nos pequenos grupos; na busca do consenso de qual seria a equação certa toda a sala podia tanto participar como obter no final a expressão adequada. Não houve, neste momento, uma formalização direta do conteúdo, como Andrade, C. e Onuchic (2017) nos sugerem, já que ao montar os sistemas, tendo esclarecido ambas as equações, então já se tinha feito a formalização.

Após este momento, o professor também comentou as representações numéricas dos alunos, que por meio delas obtiveram a resposta: que o feijão custava R$ 5,00 e o arroz R$ 3,00.

Já passava das 08h20 quando o professor solicitou que um aluno recolhesse os registros de todos e lhe entregasse, encerrando, assim, a aula. De posse dos registros, e ao término do expediente, o professor teve uma surpresa quando sentou para fazer a descrição e avaliação da aula. Um dos registros recebidos foi da aluna G – que demonstrava um bom domínio matemático – que vinha faltando demais por motivos de doença e que escreveu os coeficientes numéricos das incógnitas sob a forma de expoentes (ou ao menos é o que se pode deduzir), como podemos ver no registro a seguir:

Figura 26: Registro da aluna G



PROBLEMA 4

Minhas duas irmãs foram ao supermercado fazer compras de alguns alimentos básicos para c
arroz e feijão. Minha irmã mais velha comprou dois pacotes de feijão e um de arroz e pago
13,00, já minha outra irmã comprou um pacote de feijão e três de arroz e pagou R$ 14,00. Q
custa um pacote de feijão neste supermercado? E um de arroz?

$^{1}A + F^{2} = 13$

$F^{1} + {}^{3}A = 14$

$5+5+3=13$

$5+3+3+3=14$

Fonte: Acervo do pesquisador

Não compreendemos, de fato, se ela quis escrever como expoentes, ou como não tinha um espaço razoável para escrevê-los como coeficientes, os escreveu de forma pequena, mas que para si era no sentido de coeficientes. O que podemos afirmar é que ela participou do momento do consenso e então acreditamos que tenha refletido depois este erro, conforme Figura 26.

> **Comentário do pesquisador**: todavia, isto nos revela como para esta aluna (até antes do consenso possivelmente) a transição da linguagem materna para a linguagem matemática ainda precisa ser aprimorada, pois a partir de um registro externo desse, podemos ter uma ideia de como tentar trabalhar para atuar nas representações internas que a mesma faz, a fim de ajudá-la a expressar-se externamente com sucesso nas próximas vezes (GOLDIN; SHTEINGOLD, 2001). Além disso, como comentamos já anteriormente, apesar de ser uma boa aluna, devido a faltar demais por motivos de saúde, acabou se prejudicando muitas vezes no decorrer das atividades, já que não conseguia acompanhar todo o processo.

5.2.3 Considerações sobre o 2º bloco

Neste segundo bloco de atividades, nosso objetivo foi introduzir a ideia de Sistemas de Equações Polinomiais do primeiro grau com duas incógnitas e podemos dizer que o uso da metodologia da Resolução de Problemas, conforme Andrade, C. e Onuchic (2017), contribuiu para que este objetivo pudesse ser alcançado, pois basta observar como os momentos das plenárias e dos consensos foram ricos de aprendizado, apesar de, às vezes, contarmos com apenas uma pequena parte da participação dos alunos nesta etapa da aula. Além disto, salta-nos aos olhos novamente, como no 1º bloco, a atenção na parte do roteiro proposta por estas autoras das fases da elaboração do problema e da sua leitura pela parte do professor: o erro de digitação do problema 3 que passou despercebido, tendo sido notado quase no meio da aplicação dele.

Por outro lado, observamos que ainda não conseguimos tratar diretamente da proposição de problemas (CAI *et al.*, 2015) como sendo um último momento após a formalização do conteúdo, muitas vezes, isto se deve também às limitações do tempo das aulas.

Podemos constatar a presença da exploração de problemas, por exemplo, em todas as vezes que o professor interrogou os alunos acerca das respostas apresentadas por eles, e mesmo algumas estando erradas, serviram para trilhar um novo/outro caminho para a busca da solução que viria a ser a adequada. E tudo isto é uma forma do P-T-RS apontada por Andrade, S. (2011). A exploração de problemas também esteve presente quando solicitou-se a montagem do sistema do problema 3 que embora alguns alunos já o tivessem feito sem dificuldade, para outros foi um desafio cognitivo muito rico.

Observamos também que a união das representações verbais com as numéricas por parte de alguns alunos, que tiveram seus diálogos com o professor transcritos nestas descrições, auxiliaram em dois aspectos: tanto para ajudar os alunos a expressarem adequadamente na representação algébrica quais seriam as equações do problema (o que mostra, portanto, a união de 3 representações: verbal, numérica e algébrica, que como já observado em momentos anteriores, esta união é necessária para uma melhor compreensão e formação do conceito que se está sendo estudado, conforme Goldin e Shteingold (2001) nos dizem), como para dar sentido às letras utilizadas, basta observar o diálogo do professor na plenária deste problema 4 e na conversa com D no problema 3. Até aqui, não vimos a representação gráfica para "completar" os 4 tipos de representação que Friedlander e Tabach (2001) mostram; e isto se deu, certamente, porque, diferente das outras 4, a gráfica não é uma representação tão espontânea quanto a numérica. Não sabemos, até este ponto, se essa turma de 8º ano conhece os conteúdos referentes a plano cartesiano, o que permitiria esboçarem os gráficos das equações dos sistemas.

Essa união de representações, como foi exposto em nosso referencial, é útil, pois o que falta em uma, a outra pode completar e vice-versa. Podemos observar, em outros momentos dos 4 problemas relatados, como a representação verbal dos alunos, por exemplo, conseguiu ajudá-los a repensar seu próprio pensamento numérico e assim expressar as soluções usando a representação numérica de forma correta.

Por fim, não podemos deixar de observar que antes mesmo de pedirmos ou definirmos o que seria um sistema, o aluno C, no problema 3, o obteve sem muita dificuldade na representação algébrica. Isto nos leva a pensar que, mesmo sem a definição formal, mas apenas com a ideia, isto é, o conceito do que viria a ser um sistema, ele conseguiu obter, de tal forma que conseguiu representar externamente algo que já tinha concebido internamente. É desta forma que vão se aprendendo conceitos matemáticos, conforme relatam Goldin e Shteingold (2001).

Este aspecto é algo que achamos muito interessante já que, apesar de terem passado já por 3 problemas, e tendo em alguns a montagem ora completa, ora não, de algumas das equações dos sistemas deles, no problema 3 uma parte dos alunos conseguiu fazer a identificação das duas informações do enunciado e então obteve o sistema, isto é, uma das ideias a serem trabalhadas neste conteúdo pode ter sido assimiladas por estes alunos e estas ideias permaneceram sendo trabalhadas nos encontros vindouros já que para se trabalhar os métodos de resolução precisaremos antes montar os sistemas.

5.3 3º BLOCO: MÉTODO DA ADIÇÃO

5.3.1 Encontro 5: Soma e diferença II

17/05/2018

Ideias trabalhadas: Uso de duas incógnitas distintas para obtenção de duas equações, cada uma com as duas incógnitas diferentes; eliminação de uma incógnita para iniciar a resolução.

Conteúdo: Introdução ao método da adição.

Objetivo: Conhecer o método da adição na sua "forma mais básica".

PROBLEMA 5: A soma de dois números é 20 e a diferença entre eles é 5. Quais são estes números?

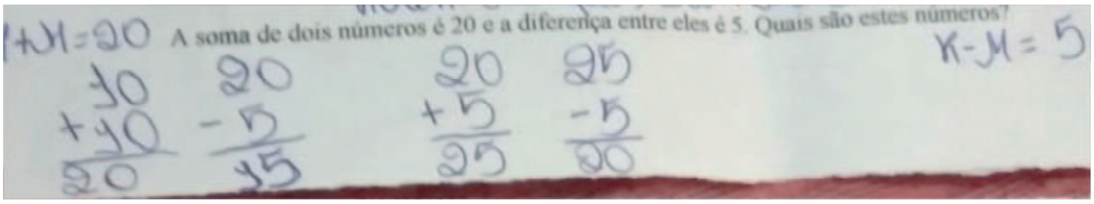
A resposta para este problema são dois números decimais: 12,5 e 7,5. Escolhemos este problema, pois acreditamos que os alunos não chegariam a esta resposta por meio apenas das representações numéricas (com exceções, é claro). Este tipo de representação se mostra insuficiente, de certa forma, caso eles apenas detenham o pensamento em valores inteiros.

A partir disso, iríamos propor que eles preparassem um sistema (como aprendido na etapa anterior, isto é, a representação algébrica) para que com ele montado – que é um dos "clássicos" sistemas que já "vem pronto" para resolver pelo método da adição – apresentássemos este método na formalização do conteúdo, conforme propõem Andrade, C. e Onuchic (2017), como meio de resolver o problema proposto.

Nesse dia, tivemos as duas últimas aulas que seriam de 09h55min às 11h00, porém a supervisora chegou para dar alguns avisos e somente depois é que o professor pôde entregar o problema 5 para, após a leitura, os alunos começarem a resolução. Já eram mais de 10h15min; foram montados uma dupla, 2 trios, 3 quartetos e 3 alunos fizeram sozinhos.

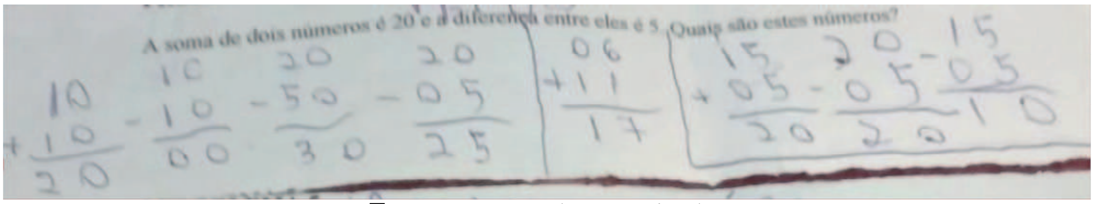
Durante a resolução, mais uma vez, a maioria dos alunos usou o método da tentativa e erro na representação numérica e alguns montaram inicialmente a equação que representava a soma dos dois números, ou até mesmo as duas (Figura 27), porém, durante todo o processo, os grupos que chamaram o professor sempre mostravam que fizeram uma soma usando dois números e queriam saber se estava correto ou não. E a resposta do professor era: "A diferença dá 5?".

Figura 27: Registro da aluna M



Fonte: Acervo do pesquisador

Figura 28: Registro do aluno AP



Fonte: Acervo do pesquisador

> **Comentário do pesquisador**: embora a representação numérica preceda todas as outras, não quer dizer que ela sempre será feita de forma correta: observemos que na figura 28, por exemplo, a aluna até achou os números 10 e 10 que somados dão 20, mas para subtrair foi fazer 20 – 5, além de na sua outra tentativa fazer 20 + 5, mostrando que usou os números da pergunta e não se atinou para encontrar os números desconhecidos. Já na figura 29 vemos que até subtrações simples foram ora montadas, ora resolvidas erradas pelo aluno: 20 – 50 = 30, 20 – 05 = 25, 20 – 05 = 20.

Foi quase unânime aos grupos perceberem que não existiam números que satisfaziam o problema, ao menos números inteiros. O aluno A chegou até a perguntar ao professor se a resposta era um número inteiro e C ainda chegou, inicialmente, a um número decimal, todavia não eram os valores.

Alguns minutos antes da plenária, outro aluno começou a tentar obter a resposta através de números decimais, mas não deu tempo concluir. Também é importante frisar que o aluno A conseguiu chegar à resposta antes da plenária e um dos integrantes de seu grupo - a aluna U - viu que, embora o colega tenha obtido os valores 12,5 e 7,5, poderia tentar fazer a diferença no celular e fez: 7,5 - 12,5 = - 5. Ao mostrar ao professor e perguntar se estava certo, o professor devolveu replicando: “Qual será o problema?”.

> **Comentário do pesquisador:** Vemos até este ponto que o que queríamos com este problema foi até alcançado – mostrar que devido a se concentrar só nos números inteiros a representação numérica, em certo sentido, era limitada. Foi no momento da plenária e do consenso, onde apresentamos o método da adição, que para alguns alunos as coisas ficaram mais claras. Além disto, a predominância da representação numérica se deu devido ao tipo do problema (soma e diferença).

Convém lembrar que, alguns minutos antes da plenária, o professor pediu que os grupos escrevessem o sistema que representava o problema – o que foi feito pelos alunos, embora 2 grupos - 1 trio e 1 quarteto - tenham encontrado dificuldade.

O trio era composto por uma aluna que faltou na aula anterior e, por isso, não havia acompanhado a explicação do professor sobre o sistema. Em seu trio, o professor aproveitou que um de seus companheiros tinha escrito o sistema de forma adequada e, a partir dele, explicou à aluna, ao menos brevemente, o que seria um sistema.

No que se refere ao quarteto, a aluna J estava a conversar com o professor que tinha pedido para escrever o restante do sistema (pois só tinha escrito a equação que representava a soma), no entanto, a aluna replicou: “Mas, professor, o que é um sistema?”.

> **Comentário do professor***:* na aula anterior J não estava muito atenta à explicação dada, logo se justifica a não compreensão dela neste momento.

Quando o professor foi explicar ao quarteto no qual a aluna estava o que seria o sistema, o aluno E começou a escrever o que seria a segunda equação: “m – 5 = 20”, seguindo-se um breve diálogo:

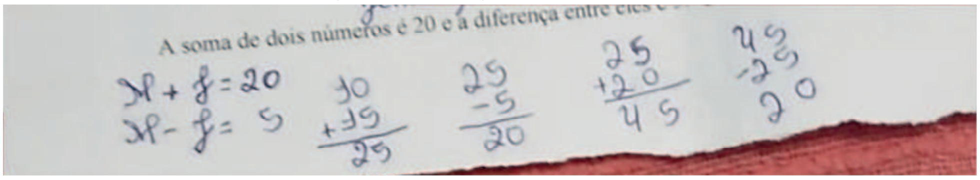
> P: Esta equação é a informação do problema?
> E: Mas, num é para subtrair 5?
> P: Mas, são os dois números que subtraídos dão 5. Quais foram às letras que H usou?
> J: M e J!

E então começa a escrever, dizendo:

> E: Então é assim.
> P: Agora sim!

Na Figura 29, segue a foto desse registro:

Figura 29: Registro do aluno E



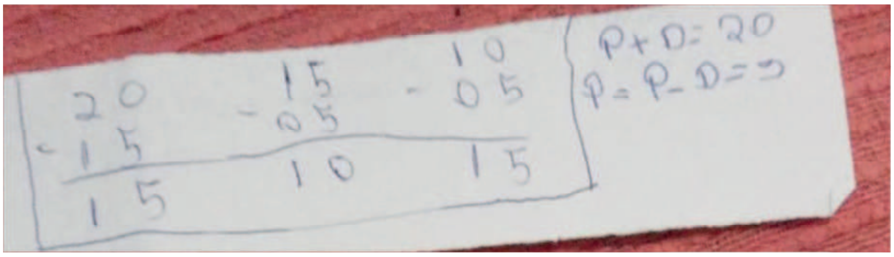
Fonte: Acervo do pesquisador

> **Comentário do pesquisador**: vemos através deste diálogo que o erro inicial da escrita de E foi, justamente, a não compreensão adequada do enunciado para poder realizar a passagem para a linguagem matemática de forma correta: falha esta que foi uma das dificuldades encontradas quando se trata de equação. Por outro lado, com o devido esclarecimento do professor e a fala de J, o entendimento de E ficou mais claro, de forma que conseguiu escrever adequadamente a equação. Sem dúvida, as contribuições do breve diálogo tido naquele momento atuaram na representação interna que ele tinha de início do problema e que o possibilitou corrigir-se: esta é uma das coisas que podem ser feitas para ajudar a estabelecer uma relação adequada entre as representações internas e externas: ao se perceber que as representações externas estão erradas, encontrar meios de como agir nas internas para então corrigi-las, conforme nos apontam Goldin e Shteingold (2001).

Diante disso, partimos para o momento de discussão, oportunizando cada grupo a expor no quadro como fez. Após o registro na lousa, o professor começou a mostrar que os alunos tinham escrito corretamente a equação da soma, embora ao buscarem os números que seriam a solução tenham conseguido atender o dado da soma, mas não o da subtração, e apesar de terem escrito certo a equação da subtração também.

Um momento proveitoso entre a plenária e o consenso foi a discussão da representação algébrica da Figura 30 escrita no quadro.

Figura 30: Equação do aluno AP



Fonte: Acervo do pesquisador

> P: Esta equação está correta?
> A: Não!
> P: O que poderíamos fazer para corrigir ela?
> A: Apaga o 1º sinal de igual.
> P: E depois?
> G: Apaga este P que ficou no meio.
> P: Então ela termina assim: P – D = 5?
> A e G: Sim!
>
> **Comentário do pesquisador**: o professor poderia muito bem, ao ver registros como este, apenas dizer aos alunos que estava errado (a começar da própria subtração do 20 – 15) e expor a forma correta de ajustá-lo, mas a metodologia proposta por Andrade, C. e Onuchic (2017) nos permite dar vez e voz ao aluno nestes momentos de plenária e consenso, a fim de que eles possam ver como ajustar as repostas, e mesmo que nem todos respondam, as respostas dadas pelos que participam permitem ao professor avaliar como está o entendimento a respeito do que está sendo passado. Podemos constatar que os alunos A e G estavam demonstrando um bom domínio a respeito da representação algébrica, já que conseguiram corrigir a equação presente no quadro. Estes momentos que antecedem a formalização do conteúdo foi umas das potencialidades para o ensino de sistemas que constatamos da metodologia da Resolução de Problema em todo o nosso trabalho.

O professor explicou aos alunos que devido a ficarmos, muitas vezes, presos aos números inteiros, não conseguimos notar outras possibilidades de resposta, mas que com ajuda do conhecimento a respeito dos sistemas, certos problemas podem ser resolvidos mais facilmente. Escolheu, então, o sistema montado por C e, a partir dele, começou a formalização do conteúdo a respeito do método da adição.

Somando as equações até chegar a 2x = 25 e então x = 12,5, o professor – como o método exige – voltou à equação da soma e ao substituir o valor do x, obteve o y = 7,5.

Neste momento – já passavam das 10h45min –, com novamente uma parte da sala dispersa, mas com a atenção de alguns alunos ao quadro, foi notório ver o semblante de alegria de A ao descobrir esta forma de resolução.

> **Comentário do pesquisador**: apesar do semblante de alegria de A, também era de fácil percepção como muitos outros, ou não estavam atentos à exposição, ou mesmo atentos não demonstravam estar claramente entendendo o método. Não se espera que alguém que nunca viu o método da adição consiga assimilá-lo de uma vez assim que lhe é apresentado, pois a linguagem algébrica tem as dificuldades que lhe são próprias, além disso, víamos que o domínio do conhecimento prévio dos alunos a respeito das equações polinomiais do 1º grau com uma incógnita não era de toda a sala (que é um conhecimento prévio que ajudaria neste conteúdo de sistemas). Perceber a ideia da necessidade da eliminação de uma incógnita para obter o valor da outra também era uma 'novidade' para estes alunos que estavam conhecendo agora este método, foi por este motivo que optamos por trazer um problema cujo sistema já vinha 'pronto', abordando outros tipos de sistemas nos encontros seguintes.

Ao final deste momento, U estabeleceu o seguinte diálogo:

> U: E como fica professor aquela subtração que lhe mostrei no celular?
> P: Boa observação, U! Vamos ver aqui! Pessoal quanto é 2+1?
> Turma em coro: 3.
> P: E 1+2?
> Turma em coro: 3.
> P: Mudar a ordem dos números, mudou o resultado?
> Turma em coro: Não!
> P: E 2-1, quanto dá?
> Turma em coro: Um!
> P: E 1-2?
> A: -1.
> P: Observem que se mudarmos a ordem na subtração, o resultado será diferente. U, seu erro foi quando digitou a subtração, você inverteu a ordem.

A partir desse diálogo, o professor foi mostrar no sistema no quadro aquilo que U havia feito, isto é, sendo x = 12,5 e y = 7,5, a 2ª equação para dar - 5, seria y – x = - 5, entretanto, sua montagem adequada "obedeceria à ordem alfabética", ou seja, x - y = 5. Esta observação sobre "obedecer à ordem alfabética" foi feita por um aluno da sala. Considerando o horário, 11h00, o professor recolheu os registros e encerrou a aula.

5.3.2 Encontro 6: O pires e a xícara

<u>13/06/2018</u>

Ideias trabalhadas: Uso de duas incógnitas distintas para obtenção de duas equações, cada uma com as duas incógnitas diferentes; eliminação de uma incógnita para iniciar a resolução.

Conteúdo: Método da adição.

Objetivo: Aplicar o método da adição na resolução de sistemas.

PROBLEMA 6 (CENTURIÓN; JAKUBOVIC, 2015): “O preço de uma xícara com pires é R$ 7,00. Eles podem ser vendidos separadamente e, nesse caso, a xícara custa R$ 2,00 a mais do que o pires. Qual o preço de cada um?”

> **Comentário do pesquisador:** Devido à greve dos caminhoneiros, ocorrida nas últimas semanas do mês de maio, e às atividades extras do calendário escolar, a pesquisa teve que ser pausada de forma que da data da aplicação do problema 5 para o problema 6, teve-se quase um mês de diferença. O que o professor pôde fazer com a turma neste intervalo – e apenas no dia 23/05 – foi escrever o conteúdo até então ensinado através dos problemas, a fim de os alunos terem o assunto para posteriores estudos e pesquisas.

Nesse dia, as aulas iniciaram com a tradicional frequência escolar, que foi o tempo para que outros alunos chegassem. Assim, após uma breve conversa informal, o professor entregou o problema 6, e após a leitura individual e em conjunto seguiu-se a resolução. Os alunos se dividiram em 4 quartetos, 3 trios e 1 dupla, sendo esta dupla a separação de um quarteto inicial cujas conversas paralelas ecoavam demais na sala.

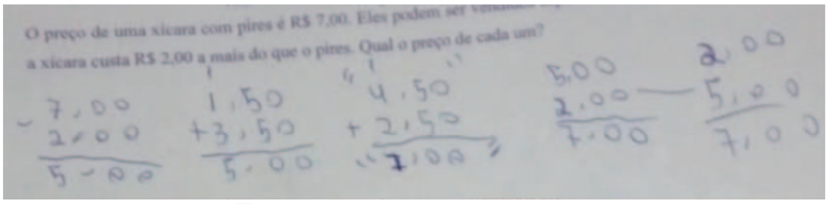
Eram as duas primeiras aulas e não havia uma grande agitação em sala. Entretanto, o professor percebeu que algumas equipes não estavam atentas ao problema, ao menos, inicialmente. Diante disso, coube ao professor chamar a atenção destas equipes a fim de que voltassem seus esforços para o problema.

> **Comentário do pesquisador**: são em momentos como este que a parte da observação e incentivo proposto por Andrade, C. e Onuchic (2017) se mostram também necessárias, já que uma atividade de resolução de problemas não consiste em jogar o problema para que os alunos façam e o professor fique sentado na sua cadeira, ao contrário, cabe ao docente, além de tirar dúvidas que podem surgir (como vimos em outros momentos relatados), observar casos como este episódio e saber como chegar e incentivar os alunos a se concentrarem na atividade proposta.

Após alguns minutos, um dos alunos da dupla – aluno C – chamou o professor e mostrou que já tinha obtido a resposta via apenas a representação numérica. O professor solicitou que ele tentasse montar o sistema.

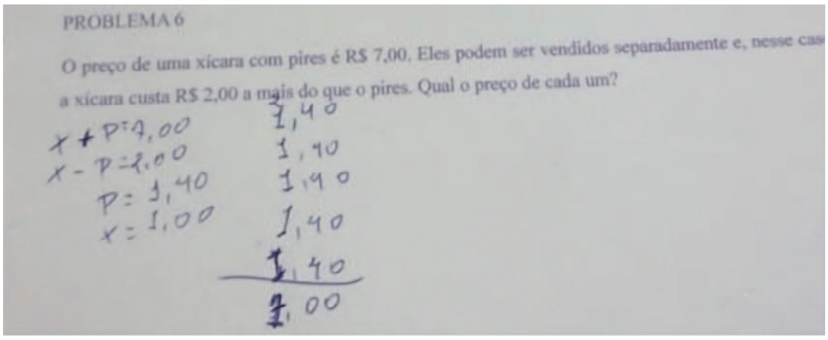
As outras equipes lançaram mão do método de tentativa e erro através da representação numérica para obter a resposta e alguns chegaram à solução; outros, no meio da escrita das equações, às vezes, obtinham a solução, às vezes, não.

Figura 31: Registro do aluno AP



Fonte: Acervo do pesquisador

Figura 32: Registro do aluno R



Fonte: Acervo do pesquisador

> **Comentário do pesquisador**: vemos que, na Figura 31, o aluno simbolizou a resposta correta após várias tentativas com as duas duplas de aspas indicando a informação da soma de 7 reais e que se vê claramente que um dos valores é 2 reais a mais que o outro. Na Figura 32, vemos um registro de 5 vezes o valor de 1,40 (que é uma tentativa de encontrar os valores de resposta do problema, porém não são os corretos) e que o aluno representou a xícara pelo x e o pires por p pondo neles os valores de 1,00 e 1,40, respectivamente, que estão errados, embora devemos notar que ao usar as iniciais de cada um dos objetos é um indício de que sabia a que se referia cada letra. Este também foi um dos casos que o sistema foi elaborado pelo aluno sem necessidade de inicialmente pedirmos (fato que ocorreu em muitas das equipes, certamente eles sabiam que iríamos solicitar posteriormente à resolução). No entanto, observamos que para este e outros alunos foi fácil montar e justificar a equação que representaria a soma, a saber: $x + p = 7$ (porém, um aluno não o fez, adiante falamos dele), todavia, muitos que escreveram a segunda, isto é, $x – p = 2$, não sabiam como justificar (como se verá a seguir): isto é um indício de que, certamente, se espelharam no sistema da aula anterior, podendo apenas ter feito o sistema deste problema mais por uma lembrança e imitação, do que por ter a compreensão do que era o enunciado dele.

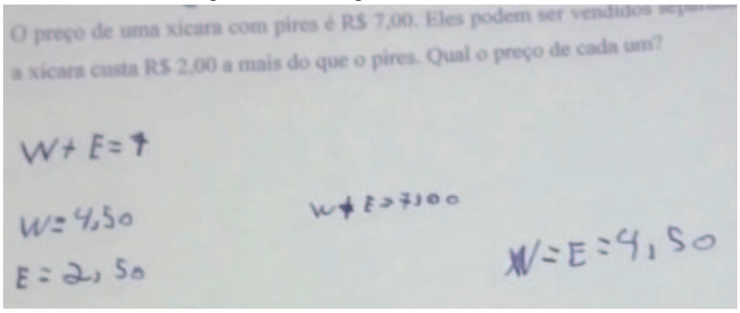
Em um dos trios, o aluno W chamou o professor e lhe mostrou a equação “w = 7”, obtendo-se o seguinte diálogo:

> P: O que você entendeu por esta equação?

W: Que a xícara e o pires é sete reais.
P: Mas são quantos objetos que dão 7?
W: São 2!
P: Então?
W: Ah, falta uma letra.
P: Escreva então e veja como fica.

Segue, então, o registro do aluno ajeitada (Figura 33).

Figura 33: Registro do aluno W



Fonte: Acervo do pesquisador

Outro diálogo a ser destacado foi com o aluno D a respeito da mesma situação do uso das letras, onde inicialmente ele tinha escrito “g + p = 7” e “x = 2”. Eis o diálogo:

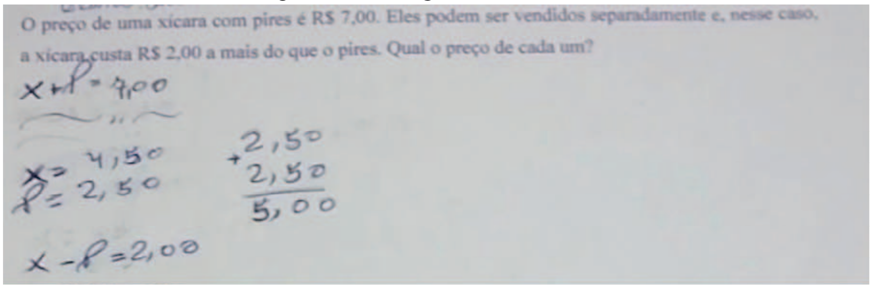
P: Podemos usar as 3 letras diferentes?
D: Hum...
P: Ao total temos quantas mercadorias?
D: Duas.
P: Então?
D: Eu tenho que trocar o ‘g’ que coloquei da xícara pelo ‘x’.
P: Continue agora tentando montar o sistema.

O aluno K, do mesmo grupo, chegou a escrever a equação “x + p = 4,50”, havendo mais um diálogo:

P: O que você entendeu por isto que escreveu?
K: Que os 2 juntos são vendidos por R$4,50... Ah, não é sete reais.
P: Então dê uma ajeitada nisto.

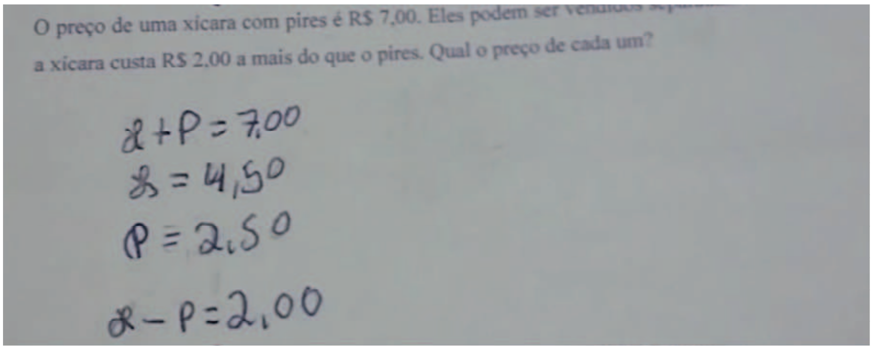
A correção da escrita de K e D, respectivamente, segue as Figuras 34 e 35:

Figura 34: Registro do aluno K



Fonte: Acervo do pesquisador

Figura 35: Registro do aluno D



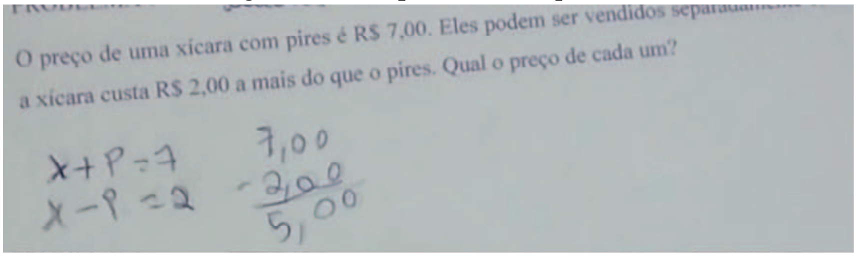
Fonte: Acervo do pesquisador

> **Comentário do pesquisador:** podemos observar nestes 3 diálogos transcritos como o papel do professor enquanto mediador é importante. Ele se colocou a auxiliar os alunos a pensarem a respeito do que estavam escrevendo e, sem dar a resposta, os ajudou a chegar nela. Há da parte dos 3 alunos uma representação verbal quando conseguem perceber o próprio erro e então sabem como corrigi-lo na representação algébrica, fato ocorrido não só nestes casos citados. São nestes momentos de 'explicação do aluno ao professor' que este consegue perceber o processo mental que se passou na cabeça daquele para escrever o que escreveu, que é o que Goldin e Shteingold (2001) discutem quando dizem que só podemos ter acesso e avaliar as representações externas, e delas presumir algo a respeito das internas, ou seja, quais conceitos podem estar sendo internalizados pelos alunos a partir daquilo que estão externando. Além disso, não podemos deixar de observar como as representações verbais auxiliaram as algébricas, fato que Friedlander e Tabach (2001) já observam: o uso de uma representação para ajudar em outra.

Observemos agora os episódios relacionados à obtenção da segunda equação.

A Figura 36 representa uma forma de escrita da segunda equação do problema ao qual um dos quartetos chegou:

Figura 36: Resposta de um quarteto



Fonte: Acervo do pesquisador

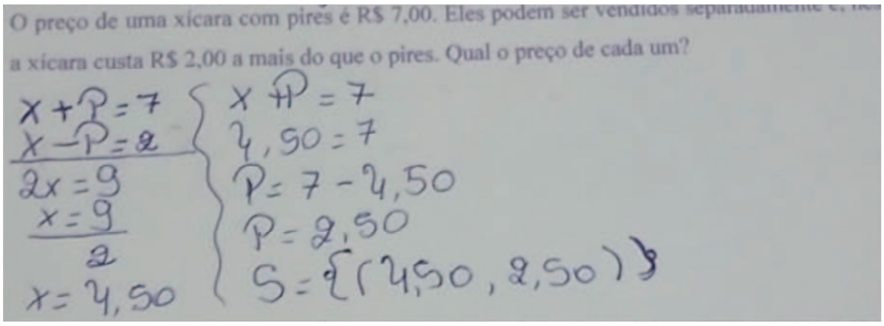
Com base na equação “x – p = 2”, o professor perguntou a um dos alunos se ela representava o fato da xícara ser dois reais mais cara que o pires, porém, o grupo não soube responder, aliás, quase todos os grupos que chegaram a escrever a mesma equação, quando interrogados pelo professor, não souberam explicar o porquê dela.

Entretanto, U teve um desempenho interessante ao escrever a equação “x - 2 = p” e chamar o professor para conferir, mantendo-se o seguinte diálogo:

> P: Isto representa o fato da xícara ser dois reais mais cara?
> U: Não sei, professor!
> P: Pense assim, você não já sabe que a xícara é R$ 4,50 e o pires R$ 2,50?
> U: Sim!
> P: Vejamos o que acontece se você usar estes valores nesta equação: 4,50 – 2 = 2,5 (apontando para a equação com o dedo e perguntando o resultado oralmente a menina). Vê que deu certo?
> U: Sim!
> P: Então esta equação expressa à outra informação. Agora tente ver se você conseguiria escrever as letras de um mesmo lado da igualdade e assim ver o que acontece.
> U: Ok!
>
> **Comentário do pesquisador:** a equação ‘x - 2 = p’ escrita pela aluna, colocando em linguagem escrita, quer dizer que o pires custa 2 reais a menos que a xícara e que, de fato, é a mesma informação do problema de certa forma (esta observação foi feita pelo professor na hora do consenso). Digno de nota é o fato de que o professor, ao escolher este problema, só esperava que a segunda equação sairia da forma ‘x = p + 2’ (e, a partir disto, mostraria a ideia de transpor o p para o primeiro membro e então ter o sistema para ser respondido, além de mostrar aos alunos uma forma de que as incógnitas não viriam sempre do mesmo lado: por estes motivos escolheu este problema), mas isto não ocorreu em nenhum grupo, porém este episódio citado foi o ponto forte da aula para o professor, junto com o outro episódio similar ocorrido na mesma aula.
>
> A fala do professor ao justificar para a aluna aquela equação por substituir os valores numéricos obtidos foi uma demonstração de como a representação numérica pode ajudar a confirmar as representações algébricas e que, justamente, aquelas são a ponte para os alunos chegarem a estas (FRIEDLANDER; TABACH, 2001), vendo como podemos usar mais de uma portanto para representar um conceito.

Tempos depois o professor voltou ao grupo dessa aluna e viu que, além de ter escrito a equação já na forma: “x - p = 2”, ela já tinha resolvido o problema pelo método da adição, conforme registro da Figura 37:

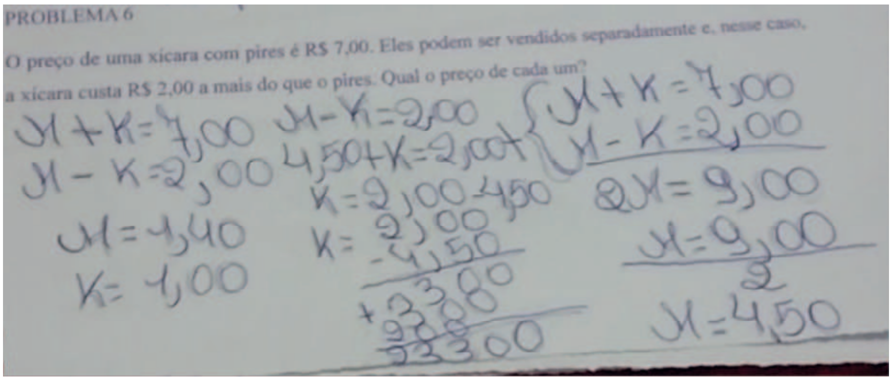
Figura 37: Resposta da aluna U



Fonte: Acervo do pesquisador

Para o quarteto citado anteriormente, que tinha escrito “x – p = 2”, mas não soube responder o que ele significava, o professor sugeriu que tentassem resolver o sistema que compuseram pelo método da adição. Uma integrante tentou, mas como vemos no seu registro ela se atrapalhou para obter o valor do pires. Além de ter deixado escrito a equação “m = 1,40”, quando perguntada pelo professor sobre o porquê do 1,40, a resposta dada foi que somando de 1,40 em 1,40 chegou em 7.

Figura 38: Resposta da aluna J



Fonte: Acervo do pesquisador

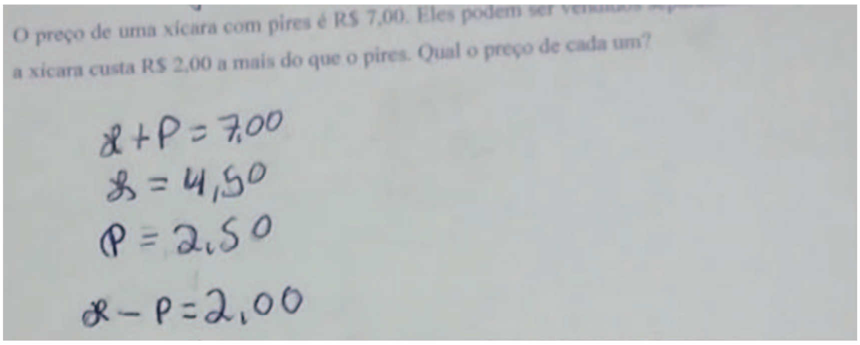
> **Comentário do pesquisador**: uma observação precisa ser feita dentro destes dois registros de resolução via método da adição. Apesar de que na Figura 38 vemos ele parcialmente respondido corretamente, ao passo que, na Figura 37, vemos ele respondido totalmente correto (apesar de um erro na escrita de 4,50 = 7). Ainda não podemos afirmar com toda certeza que a ideia da retirada de uma incógnita tenha ficado clara para a aluna U e para o quarteto. Certamente, podemos dizer que o algoritmo em si do método da adição quando o sistema

> ‘vem pronto’ foi assimilado de alguma forma por eles, mas entender o algoritmo não significa compreender a ideia do porquê, por exemplo, que se pode resolver desta forma o sistema, embora não podemos tirar o mérito destes alunos por terem conseguido responder satisfatoriamente este problema a partir do algoritmo do método da adição, já que a primeira vez que o viram foi na aula anterior.

Antes de iniciar a plenária, o professor foi ao grupo do aluno D que o chamou e mostrou a equação “x – p = 2”, embora já tivessem achado antes os valores das respostas via tentativa e erro (conforme Figura 39) e que foram muito úteis para o diálogo que tiveram a seguir:

> P: D, você consegue me explicar se esta equação representa que a xícara é 2 reais mais cara que o pires?

Figura 39: Registro de D



Fonte: Acervo do pesquisador

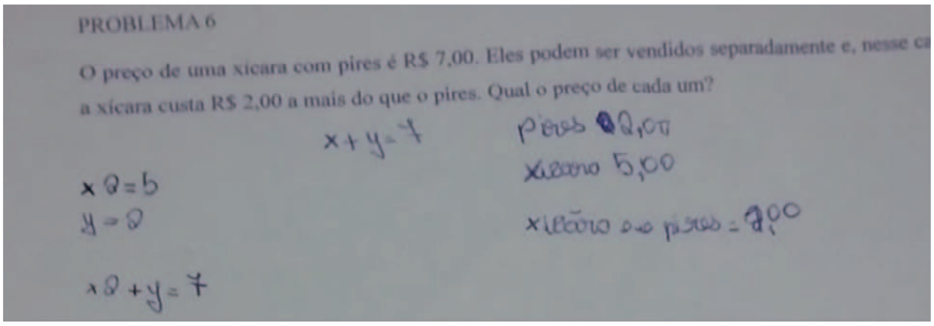
> **Comentário do pesquisador:** D é um adolescente que trabalhava vendendo coisas na feira livre da cidade e, no momento desta indagação, o professor pôde perceber que algo tinha mudado no seu rosto, como se tivesse entendido que a equação representava sim o enunciado (pois se a xícara é 2 reais mais cara, quer dizer que a diferença de valor dos objetos são os 2 reais), porém o aluno ficou meio que com o pensamento travado, de forma que expressava saber o que acontecia entre os preços do objeto, mas não tinha como explicar. Tanto é que para poder seguir adiante o professor agiu com ele como fez no diálogo com a aluna U: indicando as substituições das incógnitas pelos valores obtidos e constatando que as respostas eram corretas.
>
> P: Faça assim: se substituir o 4,50 e o 2,50, diminuindo eles, dá 2 reais?
> D: Dá professor!
> P: Então você pode usar esta equação!

Chegou a plenária e, após os alunos copiarem algumas de suas respostas no quadro, o professor começou dizendo que eles tinham conseguido escrever a equação do “x + p = 7” de forma satisfatória e que, mesmo usando os “chutes”, obtiveram também as respostas: a xícara custava R$ 4,50 e o pires R$ 2,50, e como isto tinha ficado claro aos alunos pelos registros da lousa, o docente não achou necessário pedir que eles explicassem como fizeram tais partes.

Sua atenção voltou-se em mostrar aos alunos como se deu a construção da segunda equação que, embora muitos que tenham ido ao quadro escreveram “x – p = 2” (ou alguma similar só variando as incógnitas), não sabiam se ela representava o enunciado de fato, tanto quando perguntados nos grupos pelo professor, como também nesta plenária. O professor explicou à sala a partir do caso de U, já descrito e comentado.

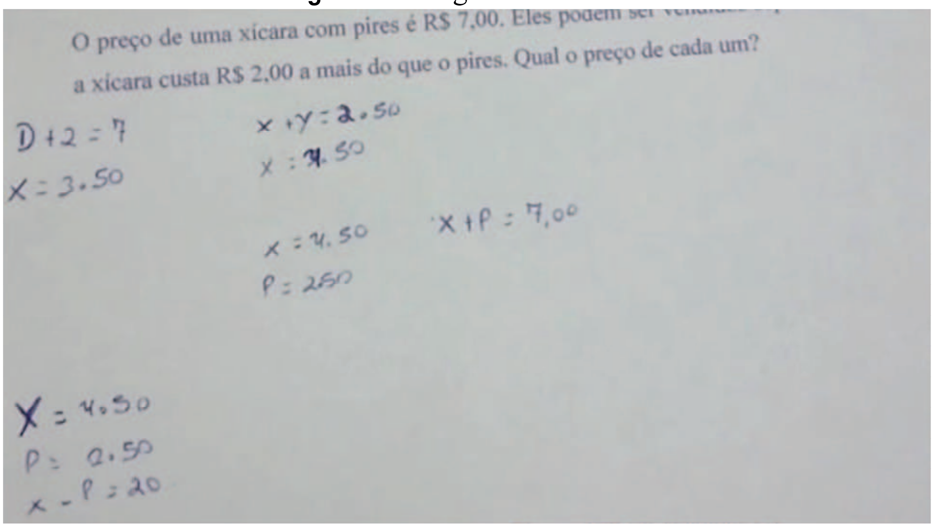
Além disso, devido a algumas equações escritas também de forma equivocadas, o professor pôde ir tentando descobrir, juntamente com os alunos, se elas estavam coerentes com o enunciado do problema (Figuras 40 e 41).

Figura 40: Registro do aluno C



Fonte: Acervo do pesquisador

Figura 41: Registro do aluno F



Fonte: Acervo do pesquisador

Em relação à resposta da Figura 40, obteve-se o seguinte diálogo:

> P: O que pode estar inadequado aqui?
> D: É para escrever 2x.
> P: Só isto? F o que você quis escrever quando se expressou assim?
> F: Que a xícara é 2 reais mais cara que o pires e que juntos dão 7 reais.

P: Notem que se formos usar aqui os valores de 4,50 e 2,50 não vai chegar em 7, pois vai ficar 4,5.2+2,5=11,5. A ideia de F foi interessante, mas precisamos ter cuidado quando tentamos expressar a equação.

Comentário do pesquisador: apesar da equação ter sido escrita errada, notamos que, usando a representação verbal, o aluno justificou sua escrita, entretanto este episódio acaba sendo similar a outro ocorrido durante a pesquisa (vide encontro 3), no qual constatamos a dificuldade da passagem da linguagem natural para a linguagem matemática.

Relativo à Figura 41, tivemos:

P: O que vocês acham desta: D+2=7? Ela representa algo do problema?
U: Por que este D+2?
P: Eu quero saber de vocês! L, você que escreveu como pensou?
L: E eu sei professor!
(Risos dos alunos)

Comentário do professor: na hora da resposta dada por L, podemos verificar que além de ser aquela resposta em tom de piada, foi também no sentido de não saber o porquê de tê-la dado. O momento da plenária é importante para que o aluno possa expor como foi, ou não, o seu pensamento e defendê-lo, para a partir daí o professor, usando da mediação, possa ir auxiliando no melhor entendimento de todos na busca do consenso. A pergunta de U mostra como a mesma achou 'sem lógica' aquela equação se olharmos bem para o problema e isto indica como seu pensamento algébrico estava bem aguçado. Certamente, o que esta equação quis expressar é que os objetos juntos custavam 7 reais, sendo que um custava 2 reais **a mais** que o outro, isto é, vemos mais uma vez a passagem da linguagem natural para a linguagem algébrica de forma equivocada. Além de percebermos alguns registros de equações que não simbolizam as informações do problema como em "x + y = 2,50" e "x – p = 20" (que, neste caso, certamente, seria 2,00), ou x = 3,50, todavia nota-se que no método de tentativa e erro o aluno chegou a escrever as soluções corretas.

No final, o professor aproveitou a representação da aluna U, respondida com o método da adição, e explicou novamente aos alunos como funciona o método, isto é, formalizando o conteúdo novamente, como Andrade, C. e Onuchic (2017) propõem, encerrando assim a aula e recolhendo os registros dos alunos.

5.3.3 Encontro 7: A festa de confraternização

<u>20/06/2018</u>

Ideias trabalhadas: Uso de duas incógnitas distintas para obtenção de duas equações, cada uma com as duas incógnitas diferentes; eliminação de uma incógnita para iniciar a resolução.

Conteúdo: Método da adição.

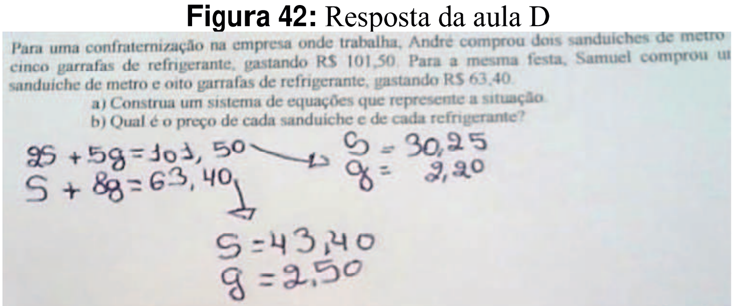
Objetivo: aplicar o método da adição na resolução de sistemas.

PROBLEMA 7: (BRASIL, 2008, pág. 57) Para uma confraternização na empresa onde trabalha, André comprou dois sanduíches de metro e cinco garrafas de refrigerante, gastando R$101,50. Para a mesma festa, Samuel comprou um sanduíche de metro e oito garrafas de refrigerante, gastando R$63,40. a) Construa um sistema de equações que represente a situação. b) Qual é o preço de cada sanduíche e de cada refrigerante?

Com a aplicação do problema 7 encerramos o bloco de problemas que visavam trabalhar com o método da adição. A aula transcorreu com calma e embora, inicialmente, alguns alunos não tenham se dedicado muito, minutos depois cada grupo começou a resolução e, neste dia, tivemos: 3 trios, 3 quartetos e 5 alunos fizeram individual.

Como sempre, o professor iniciou a aula com uma breve conversa informal e, depois da frequência, entregou os problemas aos alunos, dando um tempo para que fizessem as leituras individuais e em conjunto. Os alunos começaram a resolver e uma boa parte deles não teve muita dificuldade em obter o sistema que a letra solicitava, como podemos conferir no registro da Figura 42 a seguir:

Figura 42: Resposta da aula D



Fonte: Acervo do pesquisador

Comentário do pesquisador: vemos que a representação algébrica acima feita por uma aluna está correta, apesar de suas respostas numéricas não condizerem com a resposta exata do problema, aliás, isto ocorreu com vários alunos: acertaram a representação algébrica e erraram a solução. Muitos dos alunos tentaram resolver este problema usando o método de tentativa e erro pela via da representação numérica e somente alguns pensaram no método da adição para resolvê-lo – como será visto posteriormente -, embora tenham resolvido errado. Para responder via método da adição basta, por exemplo, multiplicar por (- 2) a equação que representa a conta de Samuel e então resolver normalmente com o algoritmo. Evidentemente, sabíamos que tal procedimento poderia não ser deduzido logicamente pelos alunos, mas justamente foi este motivo que nos fez escolher este problema: trabalhar com a resolução de outro sistema que não estivesse 'pronto', além de trabalhar com números decimais. Na hora da formalização do conteúdo explicamos aos alunos como se aplica o método da adição para um problema como este e então mostramos como a representação algébrica facilita a resolução deste problema.

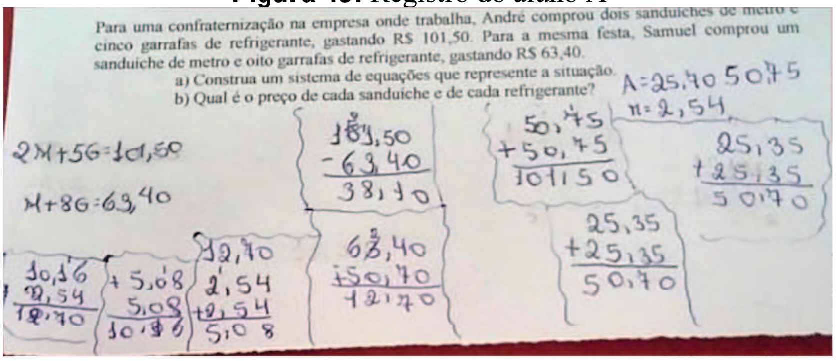
Por outro lado, foi necessário o diálogo com o professor para que outros alunos pudessem obter ou corrigir o sistema que fizeram. Seguem alguns diálogos com as respectivas figuras (43 e 44) dos registros dos alunos com suas escritas de antes e depois da intervenção do professor.

- **Aluno A**

Embora A tenha apagado seu primeiro registro e deixado apenas o segundo que é o que está presente na foto abaixo, inicialmente ele tinha escrito apenas "m + 5g = 101,50" como representação da compra de André; quando o professor viu isto, perguntou:

P: O que significa este m + 5g = 101,50?
A: A primeira compra de André.
P: Ele comprou o quê?
A: Dois sanduíches e 5 garrafas... Ah... Foram 2 sanduíches, tenho que por o 2 aqui.
P: Exato! Conserte aí!

Figura 43: Registro do aluno A



Fonte: Acervo do pesquisador

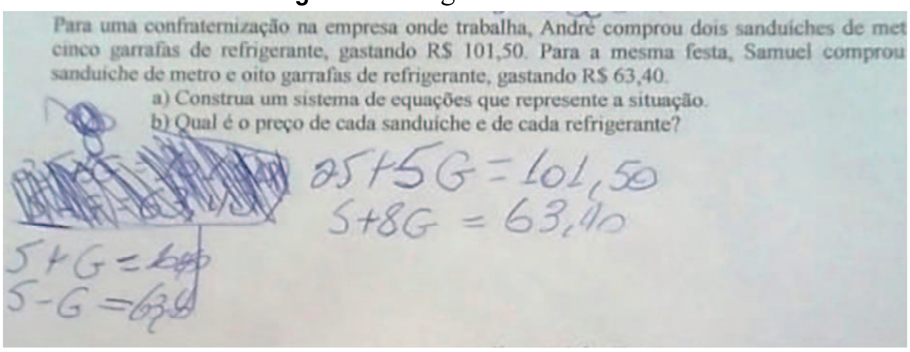
Comentário do pesquisador: podemos constatar como a representação verbal auxiliou o aluno a corrigir a sua representação algébrica, além disso, graças à verbal conseguimos entender um pouco do que se passava na mente do aluno (e ele mesmo se entendeu, de tal forma que conseguiu perceber seu erro e se corrigir), para então, a partir delas, conseguirmos inferir algo sobre seu entendimento como Goldin e Shteingold (2001) afirmam. Vale ressaltar que fato similar a este ocorreu com esse mesmo aluno no problema 2.

- **Aluno B**

Este aluno escreveu inicialmente o sistema que está representado na Figura 44, do lado esquerdo. Quando o professor viu perguntou:

P: Por que escreveu assim esta 1ª equação?
B: Porque num é a compra do sanduíche e do refrigerante que dá 101,50?
P: Mas André comprou quantos sanduíches e quantas garrafas?
B: 2 sanduíches e 5 garrafas.
P: Então?
B: Eu teria que botar o 2 na frente do S e 5 na frente do g.
P: Exato! Reescreva agora de forma adequada, mas não apague este que você fez.

Figura 44: Registro do aluno B



Fonte: Acervo do pesquisador

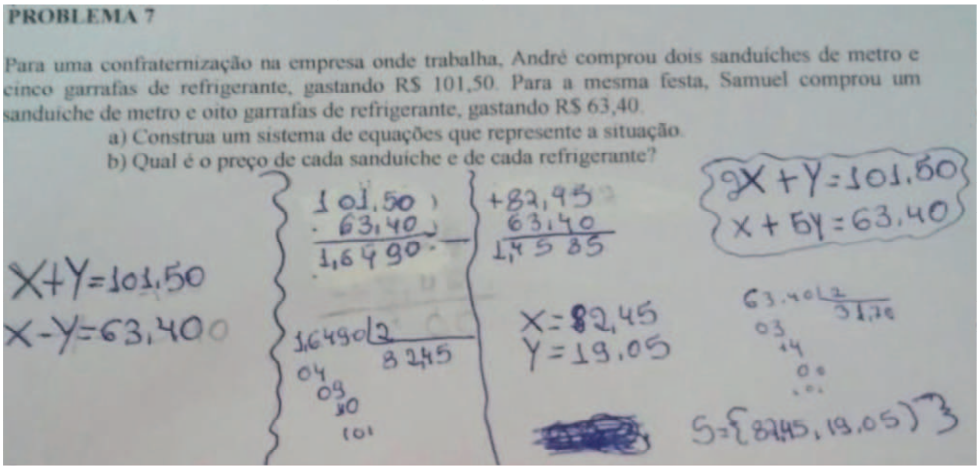
Comentário do pesquisador: aqui temos mais um caso onde a representação verbal, exposta oralmente pelo aluno, ajudou a consertar a representação algébrica; representação esta que é idêntica às formas de sistemas 'prontos' para resolver via método da adição: o que pode indicar que o aluno tenha, de certa forma, “imitado” os dois sistemas dos problemas anteriores, mas graças a mediação do professor, o aluno conseguiu se corrigir.

- **Aluna N**

Enquanto percorria a sala o professor deparou-se no grupo desta aluna, no qual cada uma das 4 integrantes ia resolvendo de uma maneira o problema. Ao ver o registro desta aluna (no sistema escrito a esquerda na Figura 45), o professor começou o diálogo:

P: O x representa quem?
N: O sanduíche.
P: E o y?
N: A garrafa.
P: Mas neste caso que dá R$ 101,50, são quantos sanduíches?
N: 2!
P: E garrafas?
N: 5!
P: O que está faltando então?
N: Pôr o 2 e o 5.
P: Ajeite isto, mas lembre de não apagar este outro.

Figura 45: Registro da aluna N



Fonte: Acervo do pesquisador

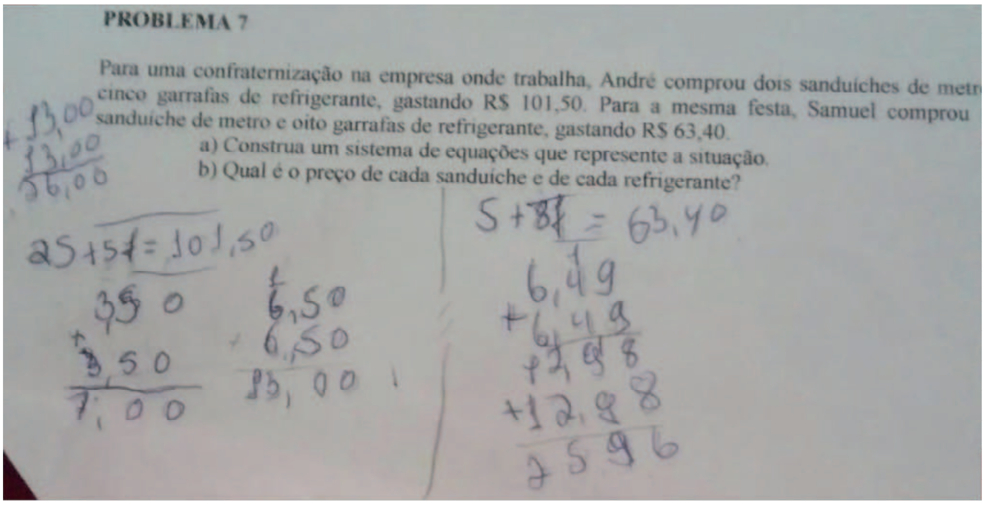
Comentário do pesquisador: é interessante observar que a aluna – no sistema que escreveu à direita na folha – ajeitou e pôs 2x, porém colocou o 5 na equação que representava a compra de Samuel e assim não colocou o 8 da compra deste em local nenhum. Além disto, vê-se claramente que ele tentou usar uma representação numérica para obter a resposta, embora tenha realizado a adição, por exemplo, de 101,50 com 63,40 pondo a vírgula no local errado, certamente, por ter confundido com a regra da multiplicação de decimais. Da mesma forma que no registro do aluno A, vemos as representações verbal, numérica e algébrica presentes para obtenção da solução deste problema, porém A conseguiu escrever o sistema corretamente.

- **Aluno D**

Este aluno apesar de não ter deixado registrado sua primeira escrita, que era: “2s + g = 101,50”, chamou o professor e disse:

> D: Professor, como é que faz isto? É assim?
> P: Esta primeira equação representa o quê?
> D: Os 2 sanduíches e as 5 garrafas.
> P: Mas aonde tem 5 garrafas aqui, se só aparece g?
> D: É verdade, faltou o 5.
> P: Ajeite!

Figura 46: Registro do aluno D



Fonte: Acervo do pesquisador

> **Comentário do pesquisador:** há dois elementos presentes neste diálogo (como também nos anteriores e nos dois seguintes) que demonstram como sua união tem auxiliado os alunos na representação algébrica adequada do sistema: a representação verbal e mais uma vez o papel do professor em uma aula com a metodologia da RP.

- **Aluno E**

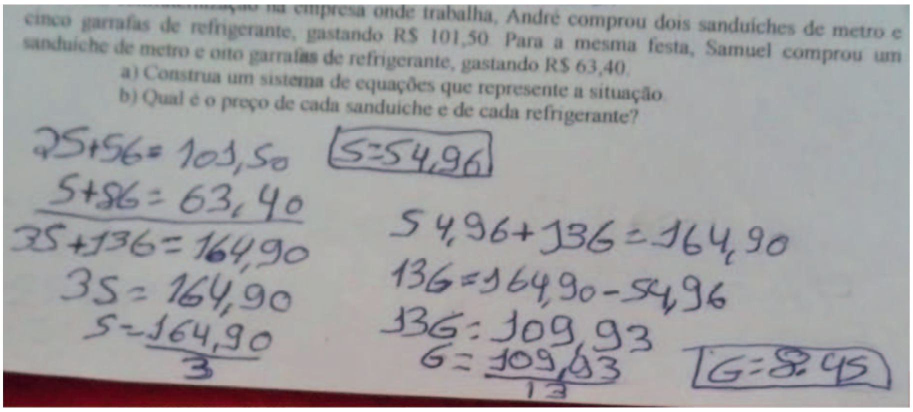
O caso deste aluno foi o mais interessante de todos, tanto na obtenção do sistema, como na sua resolução via método de adição. Vale salientar que este foi um dos alunos que no início da aplicação do problema começou por dizer que não sabia de nada e nem como fazer (Figura 47).

O primeiro sistema que ele escreveu, embora tenha apagado, era composto pelas seguintes equações: “S + R = 101,50” e “S – R = 63,40”. O aluno chamou o professor e então se seguiu o diálogo:

> P: O que você quis dizer quando escreveu S + R = 101,5?

E: Que é a compra do sanduíche e do refrigerante.
P: Mas foram quantos sanduíches e quantos refrigerantes?
E: Dois sanduíches e cinco refrigerantes.
P: É isto que está escrito aqui?
E: Não!
P: Então ajeite, mas agora e aqui porque é menos (-)?
E: Num vai ser menos não, porque está comprando junto!
P: Muito bem! Então reveja isto também!

Figura 47: Registro do aluno E



Fonte: Acervo do pesquisador

Comentário do pesquisador: além do que já foi dito nos comentários anteriores, outra coisa que precisa ser ressaltada é o aparente domínio de como funcionaria o método da adição apresentado pelo aluno, que embora tenha respondido errado, de certa forma, demonstrou certa habilidade em como usar este método passo a passo, aliás, foi esta a resolução exposta no quadro na hora da plenária que o professor, após discuti-la no consenso, a utilizou na formalização do conteúdo para explicar o método da adição que, neste caso, ocorreria ao multiplicar-se por (-2) a equação da compra de Samuel e então se partiria para a resolução.

Chegando a hora da plenária e a busca do consenso, após os alunos socializarem os resultados no quadro, o professor começou por perguntar:

P: Pessoal, alguns escreveram esta equação “s – r = 101,50”, mas o que há de errado nela?
J: Falta os 2 sanduíches e 5 refrigerantes.
P: Exato! E nesta outra: o que ela quer dizer: “s – r = 63,40”?
J: Que é a diferença entre os objetos!
P: Alguns escreveram errado elas, mas enquanto eu passava nos grupos, pude ir conversando e ajudando alguns a escreverem na forma correta. Parabéns por terem conseguido obter elas; vamos agora dar uma olhada em como resolvê-las.

Entretanto, o horário das duas aulas tinha terminado e só após o intervalo o professor pôde comentar a resolução. Para isto, solicitou que os alunos escrevessem no caderno o registro feito pelo aluno E, a fim de que, após o intervalo, ele pudesse trabalhar em cima da resolução do aluno.

Na volta do intervalo (com apenas uma aula), o professor copiou no quadro novamente a resolução do aluno e fez a formalização do conteúdo da forma expositiva e através de algumas indagações dos alunos, explicando a resolução a partir da necessidade de aparecerem termos simétricos (que é a ideia da eliminação de uma incógnita) e que, para tanto, seria preciso o artifício da multiplicação por -2 para então se ter um sistema "pronto" e assim obter os valores de x e y neste problema.

> **Comentário do pesquisador:** sabíamos que o problema poderia ser de montagem do sistema fácil para o aluno, mas nosso objetivo era ver como pensariam no método da adição nele. O aluno E (Figura 47) o resolveu como se já fosse um sistema com termos simétricos e como já prevíamos que alguém poderia resolver este problema assim, por isto que o escolhemos: para ensinar o uso do artifício que, como sabemos, alguns sistemas precisam para serem resolvidos. O fato do aluno E ter resolvido desta forma nos leva a concluir que ele ainda não percebeu a diferença existente nos sistemas que estão 'prontos' e os que 'não estão prontos', isto é, a ideia da eliminação de uma incógnita ao somar as equações, que só ocorre quando as incógnitas são simétricas, o que já é outro dado a se considerar, pois alguém poderia querer resolver simplesmente por ter visto um dos termos positivo numa equação e negativo em outro, sem serem simétricos.

- **Aluno F**

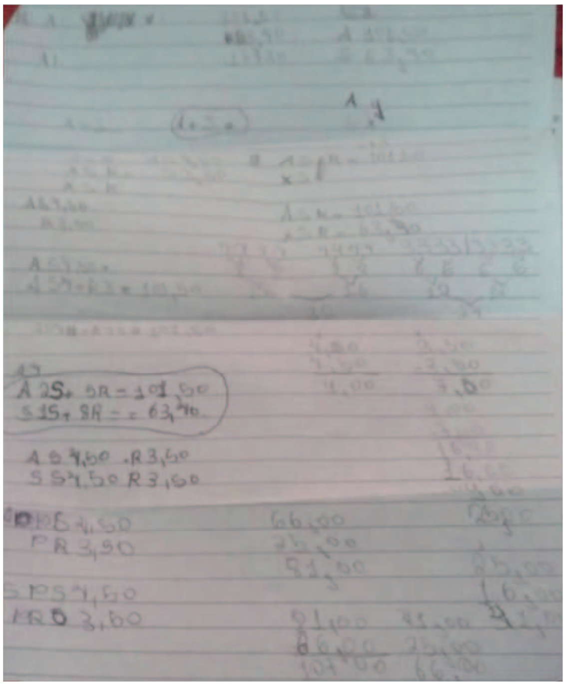
Este aluno foi um dos únicos que desde o início não conseguiu compreender como seria a montagem do sistema, pois nas várias vezes que chamou o professor, este constatou que o que F estava considerando como incógnita eram os personagens André (A) e Samuel (S) e não os materiais comprados. Podemos observar na Figura 48 como ele expressou a equação por várias vezes com o A e o S, além dos cálculos que fez para obter a resposta. As equações circuladas são a resposta correta que ele expressou depois do diálogo que teve com o professor:

> P: Por que você está escrevendo assim: ASR=101,50?
> F: Porque André num comprou sanduíche e refrigerante e gastou 101,50.
> P: Mas, André comprou quantos sanduíches?
> F: Dois!
> P: E refrigerantes?
> F: Cinco!
> P: E cadê eles aqui?
> F: E tem que colocar?
> P: Lembra de como foi o problema do feijão e do arroz? Tente lembrar-se dele para ver se lhe ajuda.

Após este diálogo, o professor deu uma volta na sala e ao voltar ao aluno, F mostrou o sistema correto.

> **Comentário do pesquisador:** o esforço feito pelo método de tentativa e erro do aluno F via representação numérica é claro, ao ponto que ele chegou a obter que o sanduíche é R$ 4,50 e o refrigerante é R$ 3,50, respostas, no entanto, equivocadas. Além disto, este é outro caso no qual vemos a dificuldade que nos levou a este trabalho: a transição para a linguagem algébrica de um enunciado na linguagem materna.

Figura 48: Registro do aluno F



Fonte: Acervo do pesquisador

5.3.4 Considerações sobre o 3º bloco

Não poderíamos esperar que o método da adição fosse utilizado pelos alunos "do nada". Logo, foi necessário que durante os momentos do consenso explicássemos como utilizar ele nas suas formas mais variadas, passo a passo, embora ainda estejamos cientes de que não conseguimos abordar todas quanto possíveis. Mesmo diante da greve dos caminhoneiros, que interrompeu as aulas por uma semana, conseguimos perceber que isto não foi um grande obstáculo para o aprendizado dos alunos e o desenrolar da pesquisa.

No que tange ao domínio, por parte dos alunos, na habilidade de conseguir obter um sistema a partir do enunciado de um problema, isto é, a formação do conceito a respeito de sistemas no que toca a ideia do uso de duas incógnitas diferentes para obtenção de duas equações, cada uma com as duas incógnitas diferentes, conseguimos verificar como foi algo necessário e trabalhado em todo o decorrer dos três problemas deste bloco, apesar ainda de termos alunos que não conseguiam chegar nele de forma satisfatória, demonstrando de alguma forma a dificuldade que nos levou a realizar esta pesquisa.

O papel do professor unido à representação verbal dos alunos para se obter a representação algébrica do sistema foi algo que muito se destacou nesta etapa (o que não quer dizer que não tenha ocorrido nas outras). Conseguimos perceber que quando o professor age não dando respostas, mas sim indagando o aluno, este se coloca a pensar novamente e assim vence certo comodismo e posição passiva e consegue então se corrigir. Aliás, isto também se tornou possível graças à metodologia da RP que conduz a criação deste espaço de melhor e mais amplo diálogo entre os atores – alunos e professor.

É graças à representação verbal exposta oralmente pelo aluno que conseguimos entender – em partes – o que se passa em sua mente e que caracteriza, portanto, a sua representação interna a respeito da ideia trabalhada naquele momento. Com isso, mediante esta representação interna, ele consegue representar algo externamente. É esta representação externa que podemos analisar, como nos falam claramente Goldin e Shteingold (2001), e que foi o que muito fizemos nesta etapa da pesquisa. Isto nos levou a refletir a necessidade de ouvir o aluno para que ele explicasse o que escreveu, pois ouvi-lo ajudou não só a ele a se corrigir, caso note algo que fez errado (como aconteceu em muitos dos nossos casos), como permitiu ao próprio professor perceber se, de fato, o aluno compreendeu o que escreveu através da representação algébrica, no nosso caso, dos sistemas. E, a partir disso, caso o professor perceba que a compreensão do aluno ainda não está em um nível adequado poderá buscar os meios necessários para tentar atuar nas representações internas do discente, visando ajudá-lo a expressar-se corretamente e assim dar passos em seu aprendizado (GOLDIN; SHTEINGOLD, 2001).

A respeito do domínio do método da adição que era também o nosso foco neste bloco de problemas, não há dúvida que precisaríamos de mais oportunidades para trabalhar com os alunos este método, a fim de que ele conseguisse ser melhor assimilado por todos, principalmente a ideia da eliminação de uma incógnita para iniciar a resolução. Podemos ver que alguns conseguiram entender o algoritmo do método (basta ver o aluno E no problema 7 – Figura 47 - por exemplo), o que não significa que tenham conseguido compreender de fato a ideia de como resolver um sistema qualquer pelo método da adição (ou por qualquer outro método que necessitasse a eliminação inicial de uma das incógnitas) quanto este aparecer em sua frente, tendo em vista as diversas formas que um sistema pode adotar até conseguirmos transformá-lo a fim de que possa ser resolvido por este caminho. Por outro lado, não podemos desprezar a conquista que alguns alunos demonstraram de conseguir usar do algoritmo do método da adição, já que foi a primeira vez que o conheceram.

5.4 4º BLOCO: MÉTODO DA SUBSTITUIÇÃO

5.4.1 Encontro 8: Quanto pesa o copo e a xícara?

25/07/2018

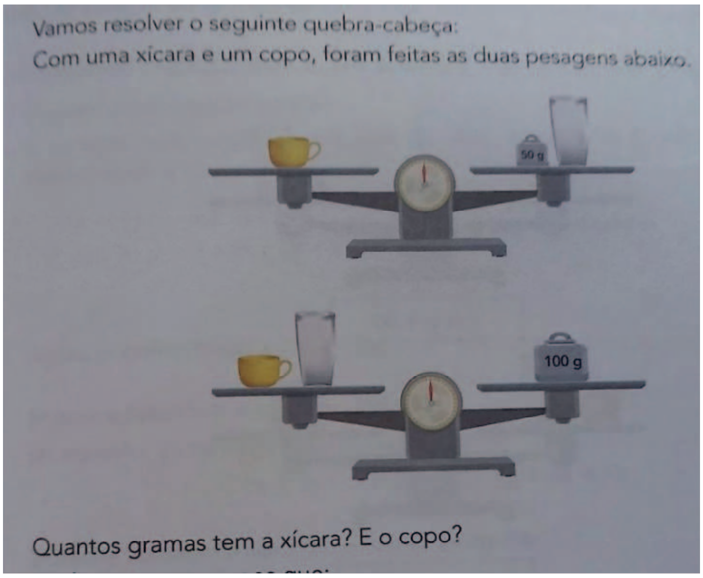
Conteúdo: Introdução ao método da substituição.

Ideias trabalhadas: Uso de duas incógnitas distintas para obtenção de duas equações, cada uma com as duas incógnitas diferentes; eliminação de uma incógnita para iniciar a resolução.

Objetivo: Conhecer o método da substituição na sua "forma mais básica".

PROBLEMA 8

Figura 49: Balanças



Fonte: Centurión e Jakubovic (2015)

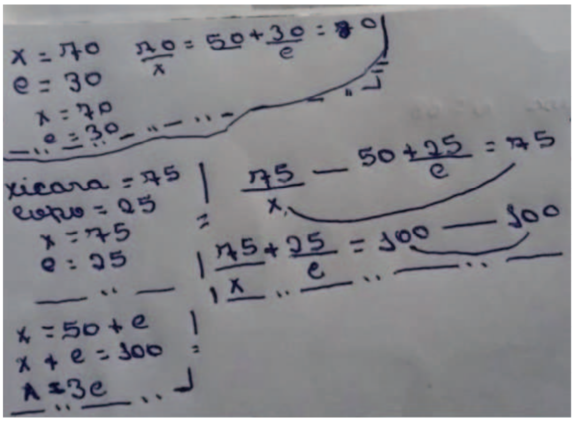
Comentário do pesquisador: o intervalo dado do problema 7 ao 8 se deu ao fato, tanto do recesso escolar junino, como também por motivos de doença do professor que se ausentou neste período. Além disso, o problema foi retirado do próprio livro dos alunos que o trazia como introdução ao método da substituição e, por isto, o escolhemos: vimos nele um bom potencial para fazer os paralelos entre o 'passo a passo' da resolução na figura e da resolução algébrica para apresentar assim o método da substituição, sendo esta a forma que adotamos na hora da formalização do conteúdo.

No início deste encontro, a sala estava calma e tínhamos: 3 quartetos, 1 trio, 1 aluno fazendo individualmente e duas duplas; outros 4 alunos chegaram no decorrer da aula, mas já com a atividade quase chegando ao fim, e embora tenham se aliado a alguns dos grupos, o professor observou que muito pouco eles realizaram do problema proposto.

O professor iniciou a aula perguntando um pouco sobre como foram as férias dos alunos e depois de uma conversa informal, seguida da frequência escolar, fez a entrega do problema aos alunos que já tinham se dividido nos grupos. Após a leitura individual e em conjunto com o professor, começou o momento de os alunos buscarem a resolução enquanto ele caminhava observando os grupos, fazendo as anotações necessárias e auxiliando os alunos que solicitavam ou quando julgava necessário.

Os grupos que foram chamando o professor, em sua maioria, tinham resolvido o problema pela via da representação numérica através da tentativa e erro, como podemos ver no exemplo de registro a seguir (Figura 50), além de terem tentado escrever o sistema.

Figura 50: Registro da aluna Y



Fonte: Acervo do pesquisador

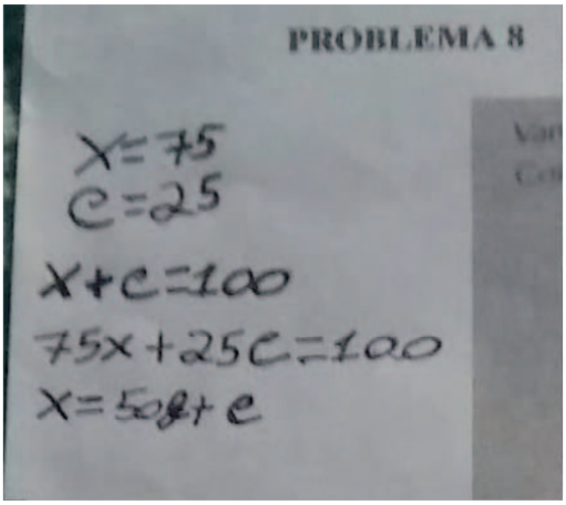
Além da representação numérica, quando interpelados pelo professor os alunos, através da representação verbal, explicaram seus pensamentos, como no diálogo com o aluno AP:

> P: Como você chegou a estes valores? Chutando?
> AP: Eu fui colocando e vendo qual que dava certo, aí neste primeiro a xícara é 75 e o copo é 25, que com 50 dá os 75, porque eu vi que tá equilibrado.
> P: Mas, estes valores dão certo para o segundo desenho?
> AP: Dá, porque 75 com 25 dá os 100.
>
> **Comentário do pesquisador**: certamente, o apelo visual que este problema traz por ter o desenho de duas balanças e os objetos nelas presentes ajudou

> muito os alunos na busca de sua solução, pois exposições verbais como a de AP puderam ser percebidas na maioria dos grupos. Isto revela como é importante o professor usar várias formas de expor um problema e não apenas deter-se na linguagem retórica. Trabalhar diversas maneiras de apresentar um problema contribui para que o aluno aplique seus conhecimentos também de várias formas, gerando oportunidades de resoluções criativas e até mesmo nada convencionais, cabendo ao professor, posteriormente, ajudar o aluno a apropriar-se da linguagem convencional da matemática, isto é, muitas vezes ajudando a alcançar os conceitos científicos que se deseja alcançar e que estão ligados aquele problema. Vale lembrar novamente aqui o papel do professor na preparação/escolha do problema que deve utilizar, conforme Andrade, C. e Onuchic (2017).

Uma situação interessante ocorreu com uma dupla. A seguir a Figura 51 referente à resposta do aluno X da dupla (seu colega escreveu do mesmo jeito):

Figura 51: Registro do aluno X



Fonte: Acervo do pesquisador

> X: Professor é assim?
> P: Por que colocou 75 e 25?
> X: Porque não é 75 a xícara e 25 o copo?
> P: Mas lembre que eu já disse em outros momentos que os valores não devem ser colocados assim, já que inicialmente supomos que não os conhecemos.
> X: Ah, tá! Entendi!
> F: Vem aqui professor!
> P: Diga!
> F: É assim que vou escrever a equação?

Neste ponto, ambos os alunos tinham escrito corretamente a equação da segunda balança e estavam tentando compreender a da primeira. O aluno F mostrou o desenho da primeira balança com os pesos dos objetos escritos neles, e o professor foi lhe perguntando:

P: Como escrever isto aqui na equação?
F: Seria assim?
O aluno escreveu: x = 50y c
P: O peso e copo estão juntos do mesmo lado. Qual é a operação matemática que representa o juntar?

Depois de uns segundos pensativos:

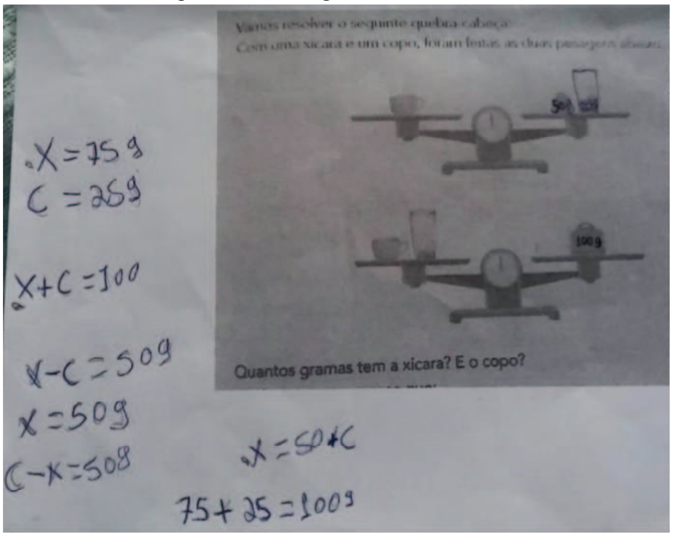
F: Não sei!
X: É a de mais!
P: Pronto! Então falta colocar o sinal de mais onde?
X: No meio do 50 e do c!
P: Exatamente!

E, assim, F escreveu a equação x = 50g + c corretamente.

Comentário do pesquisador: nos diálogos apresentados até aqui, conseguimos perceber como as representações verbais foram importantes – novamente – para a explicitação, tanto da solução do problema, como da obtenção das equações que compõem o sistema, além disto, notamos como a participação do professor, no caso da dupla, e os alunos da mesma, contribuíram para ajudar F a terminar a equação, apesar de F não se lembrar que a operação e juntar é a adição. Outro aspecto interessante neste diálogo – e que ocorreu também no que transcreveremos a seguir – foi que o professor pôde sentir que os segundos em que a dupla ficou pensativa era o momento em que estavam concentrados e tentando compreender o que seria a resposta sobre a operação do juntar.

D: Professor, venha cá!
P: Diga!
D: É assim a equação?
P: Por que x – c = 50g?
D: Porque eu tirei da primeira balança o copo e da segunda também.
P: Não entendi!... Vamos lá: esta daqui x + c = 100 representa o quê?
D: A segunda balança!
P: Você quer montar a equação da primeira, né?
D: Sim!
P: Pense assim: na primeira eu tenho a xícara de um lado e o copo e os 50g do outro – como eu poderia escrever isto?

Figura 52: Registro do aluno D



Fonte: Acervo do pesquisador

Nesse instante, D fez um momento de silêncio, de modo que todos os integrantes do quarteto também pararam e foram esperando para ver a resposta que ele iria dar. Então, o aluno D (Figura 52) começou a escrever na folha o que veio a ser a equação da primeira balança: x = 50 + c, e daí:

> D: É assim então!
> P: Por que este mais?
> D: Por que as duas coisas não estão juntas do mesmo lado? Tá certo agora, né?
> P: Aham!

> **Comentário do pesquisador:** o silêncio deste aluno, enquanto ele ia vagarosamente escrevendo cada parte da resposta, fez o professor notar que algo estava se passando em sua mente e que enquanto estava 'processando este algo', ele ia escrevendo a resposta, o que é claramente aquilo que Goldin e Shteingold (2001) discutem ao tratar das representações internas e externas, pois a partir destas podemos entender o que se passa naquelas. Com a resposta escrita de forma compassada pelo discente conseguimos observar que ele estava compreendendo o que ali se passava.

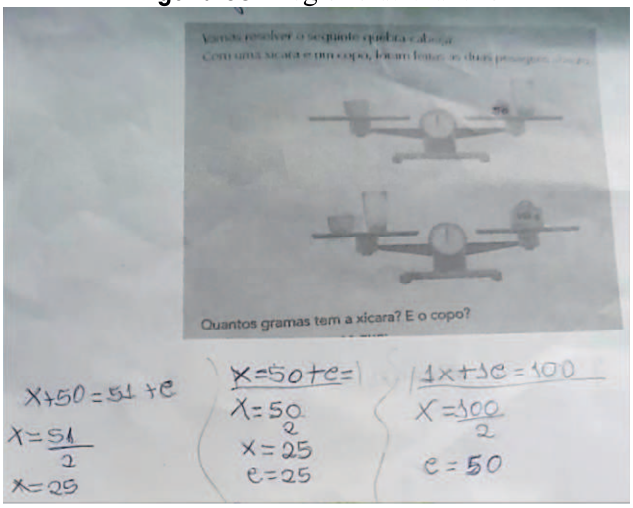
Em resumo, a maior parte dos alunos conseguiu obter as respostas corretas da solução do problema, bem como da montagem do sistema.

> **Comentário do pesquisador**: o que é um fator muito positivo, tendo em vista que este problema não estava diretamente na linguagem retórica aonde se esperava que os alunos conseguissem bem interpretar as imagens para encontrar os valores dos objetos, como a obtenção do sistema. Por um lado, o fato de uma boa parte da solução ter sido encontrada via representação numérica não nos foi de muita surpresa, pois como sabemos é esta

> representação que antecede as outras (FRIEDLANDER; TABACH, 2001); por outro, o domínio da representação algébrica demonstrado na passagem da linguagem do desenho para a linguagem algébrica é um indício que nos permite inferir que a compreensão desta forma de representação esteja conseguindo ser bem assimilada por eles (GOLDIN; SHTEINGOLD, 2001).

No entanto, um quarteto apresentou dificuldade em chegar à resposta (Figura 53). Segue a foto do registro de uma das suas integrantes, a aluna G:

Figura 53: Registro da aluna G



Fonte: Acervo do pesquisador

> **Comentário do pesquisador**: A Figura 53 apresenta o registro da aluna que conseguiu expressar adequadamente as equações das balanças, porém nota-se que ela resolveu cada uma de forma individual via a representação algébrica e de maneira errada, pois confundiu com equação do 1º grau com uma incógnita, além do que o 51 surge de uma interpretação equivocada da aluna, como veremos no diálogo mais abaixo. Isto demonstra o domínio da linguagem algébrica para obtenção do sistema, porém a não percepção de que resolvê-lo algebricamente poderia ser feito via método da adição (que era o que foi apresentado até então pela turma).

Diante do 1º registro, à esquerda da Figura 53, teve-se o diálogo:

> P: Por que x + 50 = 51 + c? Qual balança representa isto?
> G: É que 1x+50 num é 51 e ainda tem o copo junto.

Diante desta resposta, o professor explicou que não se podia efetuar a soma do x com 50 e pediu que a aluna revisasse isto. Foi quando surgiram as duas equações seguintes corretas e que a colega de grupo de G, a aluna T, fez.

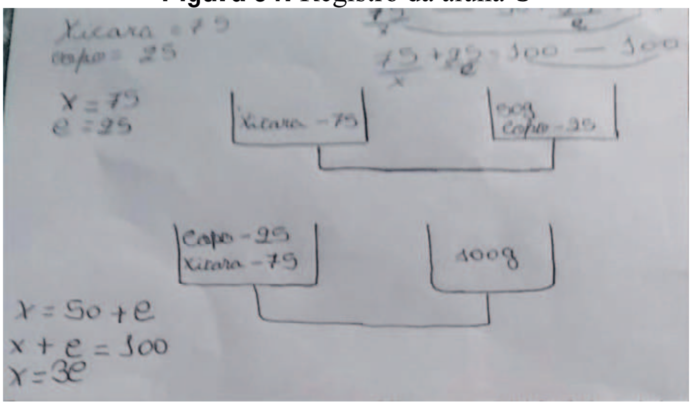
> T: É assim então, professor?

P: O que esta equação quer dizer?
T: A xícara é igual a 50 mais 1 copo.
P: Só que lembre que não sabemos o peso do copo, então como que devemos escrever?

Foi então que T reescreveu corretamente a equação, apesar de tê-la respondido errado.

Até o momento da plenária, a maioria dos grupos já tinha obtido o peso dos objetos e o sistema de forma correta. Durante a plenária e o consenso, as falas do professor foram de confirmação tanto da resposta do peso dos objetos que a maioria tinha feito via representação numérica, como das duas equações das balanças. Contudo, um registro no quadro chamou a atenção do professor – o da aluna U – conforme Figura 54:

Figura 54: Registro da aluna U



Fonte: Acervo do pesquisador

Diante do x = 3c o professor perguntou à turma:

P: O que vocês acham que esta equação significa?
M: Que uma xícara pesa a mesma coisa que 3 copos.
P: Exato, pois 75 = 3 x 25.

Comentário do pesquisador: o professor achou fantástica esta atitude da aluna, pois foi muito além do que era esperado, já que x = 3c não seria uma equação que representasse diretamente o problema. A aluna, ao escrevê-la, demonstrou um domínio da representação algébrica muito bom, aliás, mesmo sem pedirmos, ela fez uma exploração do problema a partir das informações do mesmo: U fez a passagem da linguagem numérica para algébrica, pois a partir dos pesos dos objetos obteve com sucesso a montagem da equação. Vale salientar que nem o professor tinha percebido que a relação expressa por esta aluna era possível neste problema.

Após tudo isso, o professor passou para o momento da formalização do conteúdo, segundo Andrade, C. e Onuchic (2017), apresentando aos alunos o método da substituição. Para tanto, o professor disse aos alunos como resolver este problema simplesmente por observar que se podia trocar na segunda balança a xícara pelo seu correspondente da primeira balança: 50g e um copo, pois, desse modo, ficaria claro que o copo pesaria 25g e então se voltaria para a situação da primeira balança e se achava o peso da xícara: 75g.

Para encerrar a aula, o professor explicou que tais substituições consistiam no modo de resolução que recebe o nome de método da substituição, mostrando-lhes na lousa a solução pictórica fazendo a sua relação com a resolução algébrica.

5.4.2 Encontro 9: O panfleto da loja

26/07/2018

Ideias trabalhadas: Uso de duas incógnitas distintas para obtenção de duas equações, cada uma com as duas incógnitas diferentes; eliminação de uma incógnita para iniciar a resolução.

Conteúdo: Método da substituição.

Objetivo: Aplicar o método da substituição na resolução de sistemas.

PROBLEMA 9: (BRASIL, 2008, pág.55-56) Em um panfleto, uma loja de móveis para escritório anunciava os seguintes produtos:

Panfleto

Em uma primeira compra, Marcelo adquiriu uma cadeira giratória e uma estante e pagou R$ 910,00 pelos dois produtos. A estante custou R$ 210,00 a mais do que a cadeira giratória.

a) Construa um sistema de equações para representar a situação.

b) Calcule o preço de cada produto.

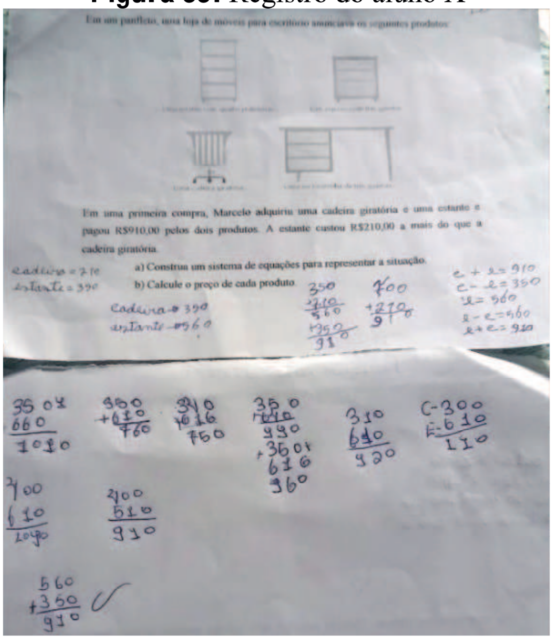
Neste encontro, estavam presentes 27 alunos, de forma que tivemos 6 quartetos e 1 trio. O professor foi tentando aquietar os ânimos dos alunos inicialmente, pois estas eram as duas aulas após o intervalo e esperávamos que, ao obterem o sistema na alternativa, utilizassem o método da substituição para resolvê-lo. Quando ele conseguiu, solicitou as divisões dos grupos e após a entrega dos problemas, enquanto os alunos faziam a leitura, o professor fez a chamada. Em seguida, fez a leitura em conjunto com os alunos, dando um tempo para que eles resolvessem.

Como de costume, o professor ia acompanhando os grupos, auxiliando-os quando necessário. Nesta etapa, pode-se notar que alguns alunos optaram por pesquisar no caderno, acreditando que nele teria alguma dica de como resolver o problema proposto.

Um dos quartetos chegou facilmente à resposta, que era a estante por R$ 560,00 e a cadeira giratória a R$ 350,00, através da representação numérica – que foi a via mais utilizada por todos os 7 grupos: com exceção de um quarteto que optou por tentar resolver via representação algébrica através do método da substituição (ao menos uma aluna do quarteto, conforme veremos adiante).

Na Figura 55 temos um exemplo de registro das resoluções usando a via numérica de tentativa e erro e algumas equações que representam o problema.

Figura 55: Registro do aluno X



Fonte: Acervo do pesquisador

Comentário do pesquisador: a representação numérica, muitas vezes, antecede a representação algébrica, além de ser a que mais facilmente os alunos começam a utilizar, como Friedlander e Tabach (2001) mostram. O que

> vemos claramente neste registro: o aluno X foi, por exemplo, somando 400 + 610, 400 + 510, 310 + 610 etc., para encontrar os valores que atenderiam à questão da compra dos dois objetos, até chegar ao par de números que atendessem à condição da estante ser 210 reais a mais do que a cadeira. Vemos que ele representou adequadamente a equação ‘c + e = 910’, aliás, muitos outros grupos também conseguiram obtê-la satisfatoriamente. Para a outra equação do sistema, este aluno escreveu “c – e = 350” que não corresponde ao problema, certamente fez isto a partir dos 350 que encontrou do preço da cadeira, além de ter pensado em montar um sistema ‘pronto’ para resolver pelo método da adição: isto nos leva a inferir que a informação dos 210 não foi por ele bem utilizada na obtenção da segunda equação. A dificuldade encontrada por muitos grupos foi como transformar em equação a expressão dos 210 reais a mais.

Uma informação que ficou muito confusa para praticamente todos os alunos foi o fato da estante ser R$ 210,00 mais cara que a cadeira: muitos pensaram, inicialmente, que a estante era R$ 210,00. O professor teve que, em alguns destes casos, dar um exemplo menor da forma: “Imagine que você tem R$ 30,00 e seu amigo tem R$ 15,00 a mais que você. Quanto ele tem?”.

Em um quarteto, após ouvir isso, uma das integrantes demorou a entender e ainda disse:

> I: Não tô entendendo!
> K: É assim, olhe: eu tenho R$ 10,00 a mais que tu; se tu tiver R$ 5,00, então eu tenho quanto? Né, 15?
> I: Ah! Agora tô ligada!

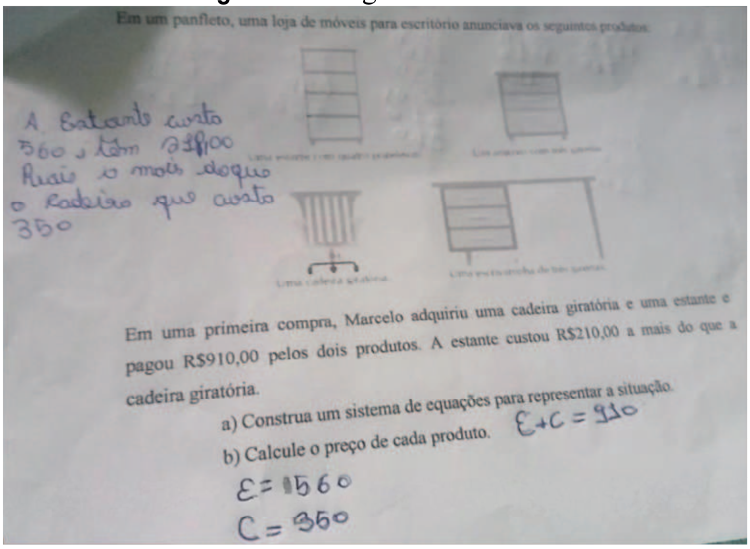
> **Comentário do pesquisador:** Informações com números menores como colocamos neste exemplo podem facilitar o entendimento do aluno ao tentar escrever tanto a equação do problema apresentado, pois ao fazer vários registros numéricos de tentativa e erro pode perceber a relação que ajuda a montar a equação: e = c + 210, como ao buscar os números que são a solução do sistema. Friedlander e Tabach (2001) já falam desta relação entre representação numérica e algébrica, na qual aquela pode ajudar a se obter esta, aliás, a observação de padrões numéricos ajudam a construção do modelo algébrico do padrão observado.

Outra situação que revelou claramente o que estava presente nesse relato anterior foi quando o professor chegou ao trio cujo aluno F tinha escrito que a estante era R$ 300,00 e a cadeira R$ 610,00. Vejamos:

> P: Sendo estes valores: a estante custa os R$ 210,00 mais caro que a cadeira?
> X e Q: Não! É 300 reais!

Ao perceber a resposta dos companheiros, o aluno F foi tentar resolver novamente e então chegou ao registro do que se pode observar na Figura 56:

Figura 56: Registro do aluno F



Em um panfleto, uma loja de móveis para escritório anunciava os seguintes produtos:

A Estante custa 560 e tem 210,00 Reais a mais do que o Cadeira que custa 350

Em uma primeira compra, Marcelo adquiriu uma cadeira giratória e uma estante e pagou R$910,00 pelos dois produtos. A estante custou R$210,00 a mais do que a cadeira giratória.

a) Construa um sistema de equações para representar a situação. E+C = 910

b) Calcule o preço de cada produto.

E= 1560

C= 350

Fonte: Acervo do pesquisador

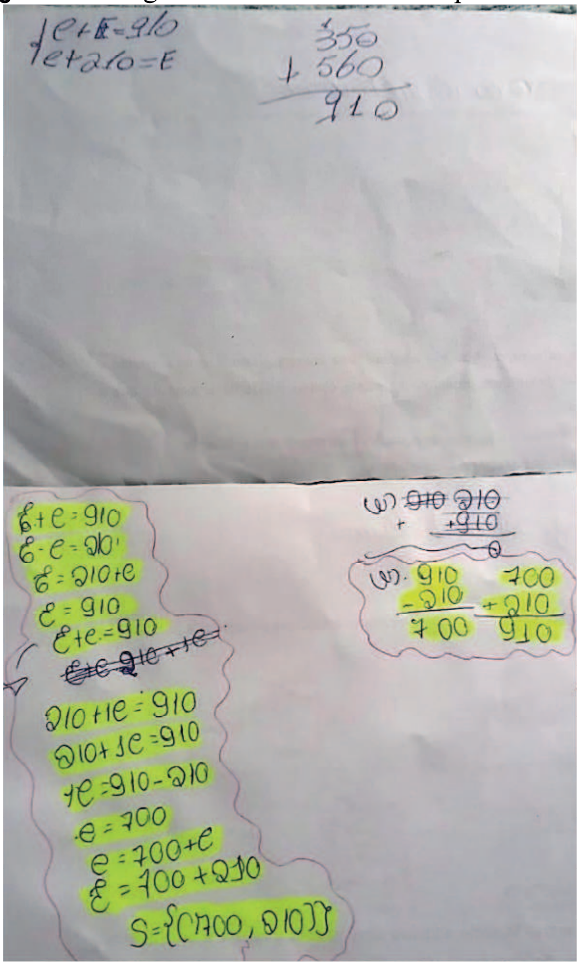
Embora não apresentado na Figura 56, mediante o diálogo podemos perceber que este aluno usou as representações numéricas para obter o valor dos objetos, utilizando ainda a algébrica na montagem da equação da soma correta. Ele também quis deixar por escrito a representação verbal da solução do problema.

Até então, nenhum grupo tinha conseguido obter a segunda equação do sistema que poderia ser: e = 210 + c, apesar de que alguns alunos chegaram a escrever e - c = 210, embora ao serem perguntados pelo professor se ela representava a outra informação do problema, não saberem dizer.

> **Comentário do pesquisador:** na hora do consenso o professor explicou aos alunos que as equações "e = 210 + c" e "e – c = 210" são equivalentes, logo estavam ambas corretas, além disto, disse também que ao se referir que certo objeto é R$ 210,00 mais caro que outro isto implica que a diferença entre os preços é de R$ 210,00. Vale lembrar que os alunos já tinham resolvido problema semelhante a este (problema 6), mas mesmo assim não recordaram dele para então tentar a montagem da equação faltante.

Ao final do tempo da resolução, o professor observou dois registros que lhe chamou atenção: os dos alunos B e S, dispostos na Figura 57.

Figura 57: Registro dos alunos B e S respectivamente



Fonte: Acervo do pesquisador

Comentário do pesquisador: pode-se ver que B conseguiu obter o sistema completo deixando apenas o registro numérico da soma ao lado, o que justifica ambas as equações do sistema. Quando perguntado sobre o porquê da segunda equação, o aluno fez a explicação partindo da adição armada, falando que com a cadeira sendo: 350 + 210 (que era o ser mais caro que a estante) obtinha-se os 560 da estante, isto é, o aluno conseguiu fazer a ponte entre a representação numérica e a algébrica, além da verbal, e assim obteve sucesso na resposta do problema por completo. Este é um dos casos que revela que o uso de mais de uma representação ajudam o aluno na compreensão das ideias que queremos trabalhar (FRIEDLANDER; TABACH, 2001): que se por um lado a ideia da eliminação da incógnita para resolver o sistema a partir de um dos métodos que ensinamos não foi totalmente bem compreendida, a ideia das incógnitas diferentes para obtenção do sistema tem sido bem formalizada para a turma no geral.

No caso da aluna S, além do sistema completo, ela tentou resolver o problema pelo método da substituição e é interessante frisar que só não obteve o sucesso porque na hora de substituir a incógnita “e” pelo seu valor correspondente “210 + c”, só pôs o 210, daí ter chegado à resposta errada (tudo isto foi trabalhado no momento do consenso).

Estes dois registros nos chamam a atenção pelo domínio que os alunos demonstraram da representação algébrica na montagem, e por parte de S na

> resolução do sistema, até porque foram os únicos que até antes da plenária e do consenso chegaram a este ponto.

Ao partir para a plenária, e após os alunos copiarem no quadro as respostas, o professor começou por apontar que a maioria tinha chegado quer à resposta correta dos valores dos objetos, quer à montagem da primeira equação. Como todos percebiam isto não se via necessidade de explicarem como chegaram a eles, já que com as respostas no quadro todos os grupos viam que tinham tido quase as mesmas ideias para resolver o problema.

A explicação maior decorreu de como obter a segunda equação que o professor fez, partindo dos registros que apareciam “e – c = 210” e “e = 210 + c”, conforme já explicado anteriormente. Além de que aproveitou para comentar a resolução de S, sendo que, a partir dela, foi mostrando o que estava faltando para então se ter toda a resolução via representação algébrica do método da substituição, fazendo neste momento a formalização do conteúdo. Embora este problema seja idêntico ao anterior, optamos por ele devido ao fato de que neste as informações não estavam em imagens para serem interpretadas, mas sim na linguagem materna para então se fazer a passagem para a linguagem algébrica e, consequentemente, sua resolução.

Mais uma vez, como já estávamos nas últimas aulas, foi visível para o professor a dispersão dos alunos na hora da formalização do conteúdo, como em outros momentos. Uma vez que a quinta aula já estava acabando, o professor recolheu os registros e assim encerrou este momento.

5.4.3 Encontro 10: O problema clássico

01/08/2018

Ideias trabalhadas: Uso de duas incógnitas distintas para obtenção de duas equações, cada uma com as duas incógnitas diferentes; eliminação de uma incógnita para iniciar a resolução.

Conteúdo: Método da substituição.

Objetivo: Aplicar o método da substituição na resolução de sistemas.

PROBLEMA 10: Num estacionamento de um shopping há motos e carros em um total de 150 veículos e 540 rodas. Quantas motos e quantos carros há ao todo neste estacionamento?

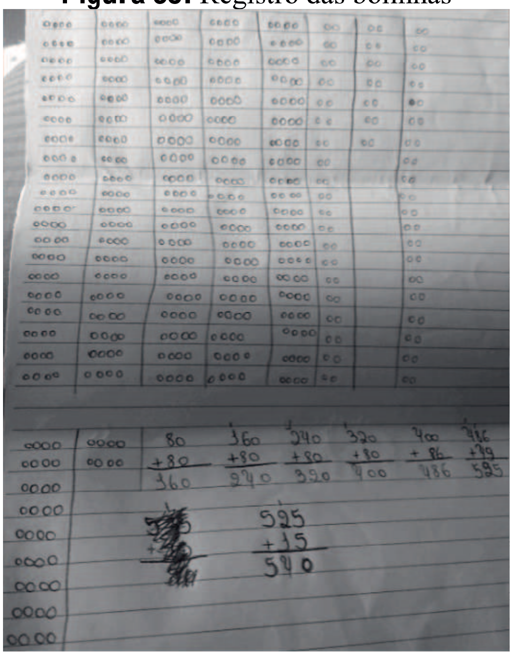
Comentário do pesquisador: um aluno pediu transferência e uma aluna chegou à turma neste dia, sendo esta a sua primeira aula. Escolhemos este problema por ser um 'clássico' problema de sistemas e também porque para resolvê-lo via método da substituição seria necessário isolar uma incógnita: aspecto que ainda não foi trabalhado nos outros dois problemas.

Como de costume, o professor entrou na sala e após cumprimentar os alunos, fazer a chamada e ter alguns momentos de conversas informais, entregou o problema dando tempo para leitura individual dos alunos, para minutos depois solicitar a montagem dos grupos. Neste dia, tivemos seis quartetos, uma dupla e dois individuais. O professor leu o problema e deu espaço para alguma dúvida sobre algo do enunciado, e, como todos demonstraram ter entendido o problema, começaram a resolver a situação dada.

Inicialmente, o professor percebeu certa dispersão na sala, mesmo sendo a primeira aula, além do mais a novata não sabia como resolver o problema, aliás, ela não estava habituada ao trabalho em grupo, diferente de toda a turma que já estava situada dentro da metodologia da RP: o professor pediu então que os colegas do grupo fossem auxiliando-a.

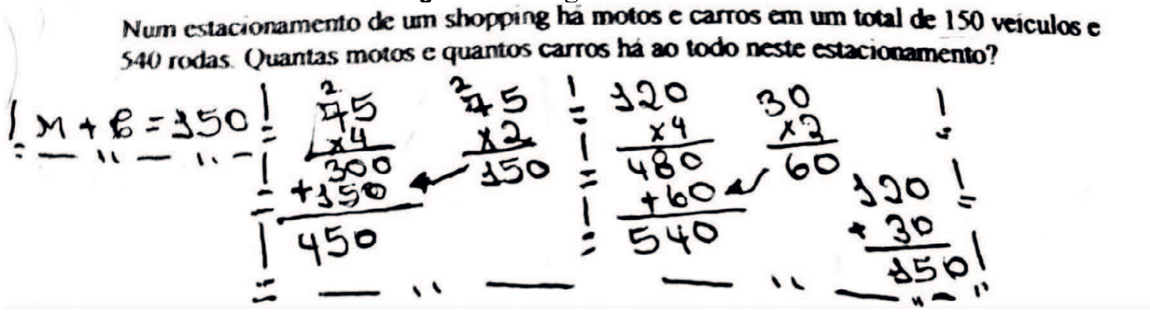
Enquanto o professor percorria a sala pôde notar como a representação numérica foi utilizada para resolver o problema, além de em um quarteto uma das alunas optou por resolver fazendo bolinhas para representar as rodas dos carros e das motos, conforme as Figura 58 e 59:

Figura 58: Registro das bolinhas



Fonte: Acervo do pesquisador

Figura 59: Registro da aluna U



Fonte: Acervo do pesquisador

> **Comentário do pesquisador**: percebemos que diante da representação das bolinhas na Figura 58, a aluna ainda foi registrando os cálculos por escrito, todavia é o domínio da representação algébrica que permite ao aluno, em situações como esta, no mínimo, ganhar tempo na resolução do problema. Na Figura 59 vemos as tentativas da outra aluna: pensou em 75 carros e 75 motos, mas, ao fazer as multiplicações e ver que o total de rodas não era o do problema, refez as contas usando os valores de 120 para os carros e 30 para as motos, obtendo assim a resposta do sistema, além de escrever a equação da quantidade de meios de transporte adequadamente. Uma boa parte dos alunos fizeram como esta aluna, tanto na obtenção da resposta via tentativa e erro, como no acerto ao escrever a equação m + c = 150: isto nos leva a presumir que a ideia do uso de duas incógnitas diferentes para obtenção de duas equações estava sendo bem compreendida por eles, como veremos nos registros seguintes, mesmo que, por várias vezes, estivessem montando apenas uma das equações dos problemas que lhes foram propostos (GOLDIN; SHTEINGOLD, 2001).

Um aluno expôs uma representação verbal explicando que tinha tentado fazer com 100 carros e 50 motos, mas não tinha obtido as 540 rodas, quando o professor foi em seu quarteto.

A dupla de F e X chegou – como muitos grupos – a escrever "c + m = 540". O professor disse:

> P: O que c + m = 540 quer dizer?
> F: Que são os carros e as motos.
> P: Mas 540 são as rodas, 150 que é o total de veículos.
> X: Hum...
> P: Revejam aí!

Outro diálogo interessante se deu com o aluno C quando o professor viu que ele tinha escrito "x = 150".

> P: O que isto quer dizer?
> C: Que os veículos no shopping são 150!
> P: Mas os veículos são motos e carros e são de dois tipos.
> C: Ah, tá!

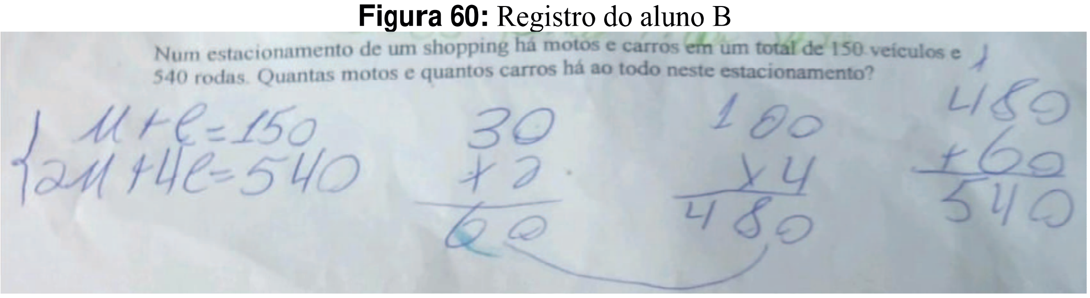
Comentário do pesquisador: nestes dois diálogos transcritos verificamos que a falta de atenção à leitura do enunciado fez com que os alunos obtivessem equações erradas. São em momentos como este que vemos que o roteiro proposto por Andrade, C. e Onuchic (2017) não é estático, mas que, como já observamos em outros momentos, muitas vezes, os momentos estarão se compenetrados uns nos outros. Nestes casos, por exemplo, vemos a leitura do professor ocorrendo na fase da resolução do problema. Lembremos que o roteiro é apenas uma forma de ajudar a organização do trabalho na sala com a RP, mas que cabe ao professor saber como lidar com ele. No caso do aluno C, podemos dizer que não foi necessariamente nem um erro de interpretação, já que ao escrever x = 150 ele tomou o x como o substantivo veículos e como então era apenas um substantivo, logo bastava uma incógnita: a mediação do professor foi necessária para que ele percebesse que os substantivos em jogo na realidade eram dois veículos diferentes: motos e carros.

Resolver o sistema e obter a primeira equação – c + m = 150 – foram momentos até fáceis para os alunos. O desafio ficou na obtenção da segunda equação: 4c + 2m = 540, que até minutos antes da plenária, com exceção dos alunos B e D, nenhum outro grupo conseguiu obter satisfatoriamente.

Comentário do pesquisador: apesar de o problema 10 ser um ‘clássico problema’ quando o conteúdo é sistemas de equações, conseguimos observar que houve uma grande dificuldade na obtenção da equação que representa o número de rodas. Acreditamos que isto se deve à própria dificuldade da linguagem algébrica, como também às dificuldades dos próprios alunos no entendimento do como fazer a passagem adequada da linguagem retórica para a algébrica; dificuldade que foi a causadora do nosso trabalho e também apontada pelos trabalhos que consultamos.

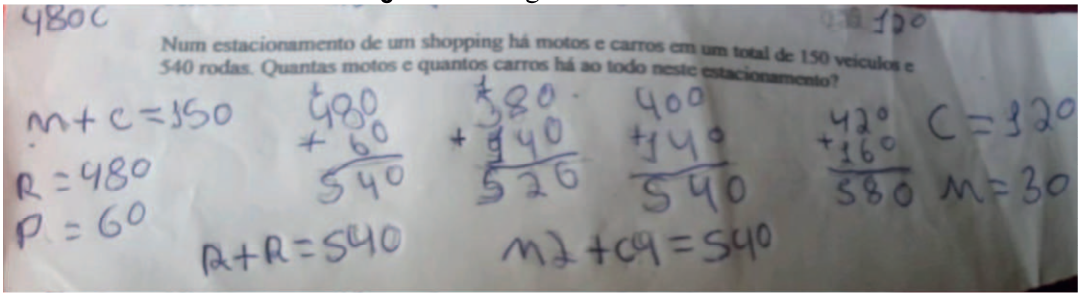
Os dois alunos que conseguiram obter as equações tiveram sucesso após várias visitas do professor em seus grupos, sempre lembrando-os que cada moto tinha duas rodas e cada carro tinha quatro rodas. Vejamos os registros dos dois alunos nas figuras 60 e 61:

Figura 60: Registro do aluno B



Fonte: Acervo do pesquisador

Figura 61: Registro do aluno D



Fonte: Acervo do pesquisador

O aluno D ainda escreveu “R + R = 540” e o professor disse:

> P: Por que esta equação?
> D: Porque são as rodas das motos e dos carros que dão 540.
> P: Mas elas não são das motos e dos carros: como seria escrever elas a partir desta primeira que você já montou, sabendo que um carro tem quantas rodas?
> D: Quatro!
> P: E uma moto?
> D: Duas!
> P: Como ficaria escrito?

Num instante de pausa, o aluno D começou a escrever a equação que está em seu registro (que na hora do consenso foi melhor explicado, pedindo que colocassem o coeficiente numérico na frente das incógnitas). Então:

> D: É assim, então?
> P: Agora sim!

No diálogo com B, sua prontidão em escrever a resposta foi mais rápida:

> P: Qual seria a segunda equação? Lembrando que uma moto tem duas rodas e um carro tem quatro!
> B: Seria então só colocar o dois aqui na frente do m e o 4 na frente do c assim!

O aluno escreveu a equação que está na Figura 61 já exposta e o professor o parabenizou.

> **Comentário do pesquisador:** nos registros de B e D vemos que para obter a resposta utilizaram-se da representação numérica, como todos os alunos fizeram. No caso do aluno D, podemos perceber que para ele o uso dos 2 Rs fazia sentido (rodas de carros e rodas de motos), mas é necessário (como foi o caso do aluno C) que o aluno seja levado a prezar pelo rigor matemático que a representação algébrica traz, além, é claro, de observar a necessidade da ideia trabalhada a respeito do uso das incógnitas diferentes para expressar as equações do sistema. No caso de B, vemos que ele já percebia que o

> coeficiente é ideal que fique na frente da incógnita, diferente do erro na escrita de D e que foi trabalhada no consenso.
>
> Esperávamos que os alunos (não apenas B e D) lembrassem do processo de isolamento de uma incógnita em uma das equações, como foi feito nos outros dois problemas, mas nenhum dos alunos lembraram disto, o que aponta que a ideia da eliminação de uma incógnita não foi clara para eles aqui.

Os alunos foram ao quadro para fazer os registros e socializar os resultados. Durante o consenso, o professor comentou a respeito da solução do grupo que fez a resposta via bolinhas, como também via cálculos, além de mostrar que todos os grupos que escreveram no quadro a primeira equação, a escreveram adequadamente. O professor se deteve a explicar a equação das rodas a partir das respostas de B e D.

> **Comentário do pesquisador:** o professor pôde perceber uma grande dispersão da turma enquanto fazia a formalização do conteúdo na parte da obtenção do sistema. Numa aula após o intervalo, pois o tempo destas duas aulas iniciais já tinha acabado, ele fez um outro momento da formalização do conteúdo mostrando aos alunos como resolver o sistema via método da substituição, mas só o fez depois de trocar alguns alunos de local e retirar da sala outros, para que pudesse se fazer um pouco mais de silêncio para a exposição da resposta. Após a exposição, a aula chegou ao seu término.

5.4.4 Considerações sobre o 4º bloco

Apesar da distância da aplicação dos problemas do 4º bloco em relação aos do 3º bloco, conseguimos perceber que a turma não ficou dispersa do conteúdo, nem da forma da metodologia que estava sendo trabalhada na sala, o que vemos como algo bom e que achávamos que não ocorreria.

A escolha do problema 8 foi de extrema importância e isto vai muito de encontro ao que Andrade, C. e Onuchic (2017) dizem que é o fato do professor saber preparar adequadamente cada problema que se deseja trabalhar e que objetivo se quer alcançar com ele. Este problema foi a chave para auxiliar os alunos a entender a "justificativa" de como funciona o método da substituição, além de ser um problema exposto na forma pictórica e não apenas verbal, como a maioria dos alunos estava habituada, isto mostra como a diversidade de situações-problema é interessante e necessária para que os alunos possam se deparar com as mais diferentes formas de problemas.

Conseguimos observar, durante a pesquisa, a presença das representações múltiplas às quais Friedlander e Tabach (2001) se referem (com exceção da gráfica): a montagem dos sistemas estava sendo algo mais fácil para os alunos fazerem nesta etapa da pesquisa (apesar de algumas dificuldades em obter algumas das equações), o que demonstra certo domínio da representação algébrica por parte dos alunos, auxiliada pela representação verbal. Isto também indica que a ideia do uso de duas incógnitas diferentes para obtenção de duas equações, cada uma com as duas incógnitas diferentes, foi sendo bem assimilada pelos alunos, conforme seus registros escritos nos permitem inferir a respeito da formação dos conceitos que estão sendo realizadas em suas mentes (GOLDIN; SHTEINGOLD, 2001).

Além disso, vemos que o entendimento numérico dos problemas por parte dos mesmos conseguiu ser bem claro a ponto de conseguirem demonstrar o domínio da representação numérica para respondê-los. As representações verbais dos alunos continuam permanecendo neste bloco de problemas, como os diálogos transcritos mostram, e nos ajudam a entender o que os alunos queriam expressar no papel através das outras representações citadas anteriormente, além de ajudar eles mesmos a se corrigirem quando necessário.

Pouquíssimos alunos resolveram os problemas via o método da substituição, como apresentamos no primeiro problema deste bloco, isto nos levou a constatar que, apesar da introdução a este método e de outros problemas para se trabalhar ele (como também no método da adição), é necessário mais tempo e mais exercícios que ajudassem a fixá-lo, além de que a ideia da eliminação de uma incógnita também precisa ser ainda mais trabalhada.

Encerramos estas considerações ressaltando que para nossa experiência docente, o trabalho com o ensino do método da substituição através do problema 8 foi muito gratificante, pois nos ajudou a fazer uma analogia muito rica para justificá-lo, de forma que conseguimos ver um alto potencial através de problemas como este para introduzir este conhecimento matemático. Nesse sentido, recomendamos este método para quem desejar/necessitar trabalhar tal conteúdo.

5.5 5º BLOCO: PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS

5.5.1 Encontro 11: Agora é com eles

<u>02/08/2018</u>

Ideias trabalhadas: Uso de duas incógnitas distintas para obtenção de duas equações, cada uma com as duas incógnitas diferentes; eliminação de uma incógnita para iniciar a resolução.

Conteúdo: Proposição de problemas.

Objetivo: Criar e resolver problemas que envolvam os sistemas de equações do 1º grau.

PROBLEMA 11: Escreva um problema que seja respondido com um sistema de equações do 1º grau. Seja criativo! Você deverá escrever ele e respondê-lo: montando o sistema que representa o problema criado e resolvendo ele da forma que achar melhor. (Dica: uma sugestão é que utilize algum dos métodos que aprendemos – adição ou substituição)

Para este encontro, dedicado à proposição de problemas, o professor quando chegou à sala e pediu que os alunos se dividissem em duplas, sendo que se formaram 12 duplas e 4 alunos fizeram individualmente. Então, o professor entregou a folha com o enunciado daquilo que iriam realizar e, após a leitura individual e em conjunto, os alunos começaram a criar seus problemas.

> **Comentário do pesquisador**: embora dentro do que Andrade, C. e Onuchic (2017) apresentem em seu roteiro que o momento reservado para proposição seja a última fase, optamos mesmo assim por deixar este instante reservado para agora, pois embora propor problemas seja uma atividade cognitivamente rica (CAI *et al.*, 2015), uma das formas de se pedir que os alunos criem os seus próprios problemas é fazer com que eles conheçam alguns nas mais diversas formas (CHICA, 2001), por isto passamos 10 problemas para então chegar a esse ponto. Reconhecemos, porém, que a pergunta feita ao término do problema 1 foi um momento de proposição de problemas.

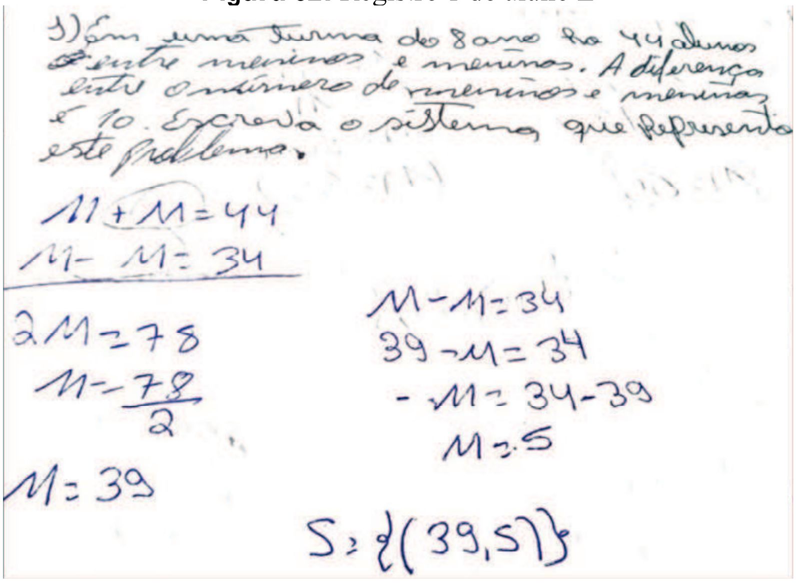
De início, algumas duplas se mostraram resistentes à realização da atividade, pois não sabiam criar perguntas.

> **Comentário do pesquisador**: o aluno D, que fez dupla com uma aluna novata, foi bem enfático ao afirmar que não sabia criar perguntas. Isto nos leva a refletir como temos, muitas vezes, ‘cortado’ a capacidade de criação dos alunos. Propor problemas – apesar de termos reservado somente este espaço da pesquisa para ele – é uma atividade rica em contribuir na criatividade do aluno, além de auxiliá-lo a tomar a postura do questionador e não apenas recebendo tudo calado e pronto para resolver; além disto, redigir um problema é usar uma representação verbal para expressar um conceito que pode ter sido assimilado.

Outra dificuldade encontrada por algumas duplas inicialmente foi a confusão feita entre sistemas de equações do 1º grau com apenas as equações do 1º grau, mas o professor conseguiu esclarecer e os alunos conseguiram ir elaborando seus problemas.

O aluno E foi o primeiro a elaborar o seu, conforme apresentamos na Figura 62:

Figura 62: Registro 1 do aluno E


1) Em uma turma do 8 ano há 44 alunos entre meninos e meninas. A diferença entre o número de meninos e meninas é 10. Escreva o sistema que representa este problema.

$M + M = 44$

$M - M = 34$

$2M = 78$

$M = \frac{78}{2}$

$M = 39$

$M - M = 34$

$39 - M = 34$

$-M = 34 - 39$

$M = 5$

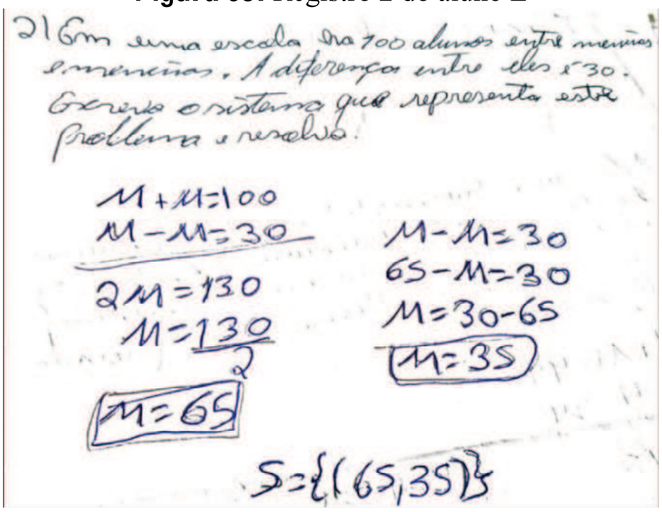
$S = \{(39,5)\}$

Fonte: Acervo do pesquisador

Problema 1 do aluno E: "Em uma turma de 8º ano há 44 alunos entre meninos e meninas. A diferença entre o número de meninos e meninas é 10. Escreva o sistema que representa este problema."

O professor o instigou a criar mais um e assim ele o fez, conforme a Figura 63.

Figura 63: Registro 2 do aluno E


2) Em uma escola há 100 alunos entre meninos e meninas. A diferença entre eles é 30. Escreva o sistema que representa este problema e resolva.

$M + M = 100$

$M - M = 30$

$2M = 130$

$M = \frac{130}{2}$

$\boxed{M = 65}$

$M - M = 30$

$65 - M = 30$

$M = 30 - 65$

$\boxed{M = 35}$

$S = \{(65,35)\}$

Fonte: Acervo do pesquisador

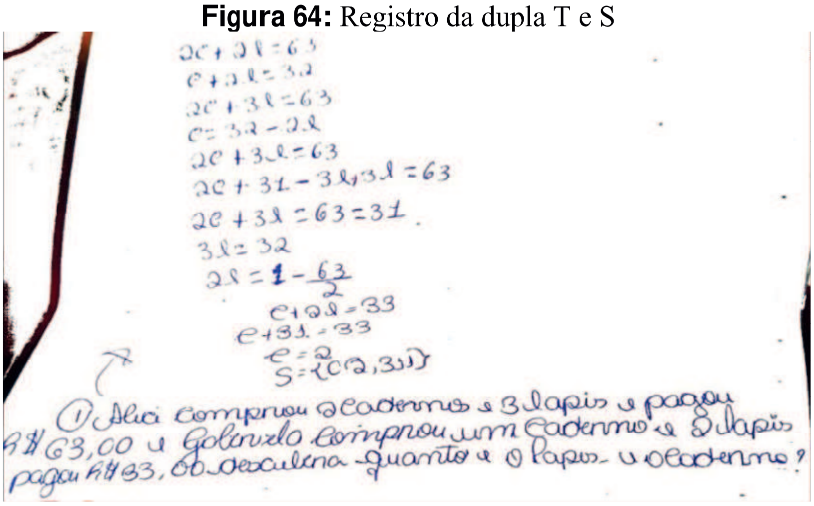
Problema 2 do aluno E: "Em uma escola há 100 alunos entre meninos e meninas. A diferença entre eles é 30. Escreva o sistema que representa este problema e resolva."

Assim que o professor viu e leu, começou o diálogo:

> P: Qual a diferença deste segundo para o primeiro problema?
> E: A escola... Se bem que eu só mudei isto mesmo, porque a ideia dos alunos continua a mesma.
>
> **Comentário do pesquisador**: decidimos por transcrever este diálogo, pois ele indica que o próprio aluno observou que não havia uma diferença substancial nos dois problemas que criou e vimos isto como um fato muito bom. Observe-se que para ambos os sistemas o aluno usou da mesma incógnita para expressar os meninos e meninas – chamamos a atenção dele por isto, pois embora fizesse sentido para ele o que cada incógnita representava, o rigor da representação algébrica ajudou a esclarecer certas situações e, por isto, o uso de duas letras diferentes em sistemas –, além de que a informação da diferença de 30 alunos no problema 2 não permite saber se há mais meninos ou meninas, por outro lado ele conseguiu além de resolver corretamente, escrever o par ordenado também de forma coerente e no segundo problema pedir que se resolvesse ele e não apenas montasse o sistema. O domínio da representação verbal e algébrica fica claro nestes problemas, embora notemos que ele não pediu no problema que se encontrassem o número de meninos e de meninas, apesar de o professor ter feito esta observação, mas que pelo que vemos passou despercebido por ele. Vemos que o aluno E resolveu adequadamente os sistemas pelo método da adição, acreditamos que isto se deu muito mais pela facilidade que este método apresenta para sistemas 'prontos' como ele elaborou o dele. No seu segundo problema, observamos que para encontrar o outro valor, ele esquece de um jogo de sinal que precisaria ser feito (ao menos da forma que ele escreveu, pois pela resposta, em si, está correta). Digno de nota é que este aluno já é repetente e que, durante cada problema da pesquisa, ora ele se dedicava muito para resolver, ora não, embora sempre tivesse demonstrado um bom domínio do conhecimento matemático.

A dupla T e S criou o problema da Figura 64:

Figura 64: Registro da dupla T e S


2c + 2l = 63
c + 2l = 32
2c + 3l = 63
c = 32 − 2l
2c + 3l = 63
2c + 31 − 3l, 3l = 63
2c + 3l = 63 = 31
3l = 32
2l = 1 − 63/2
c + 2l = 33
c + 31 = 33
c = 2
S = {(2, 31)}

① Alici comprou 2 cadernos e 3 lapis e pagou R$ 63,00 e Golenzlo comprou um caderno e 2 lapis pagou R$ 33,00 descubra quanto e o lapis e o caderno?

Fonte: Acervo do pesquisador

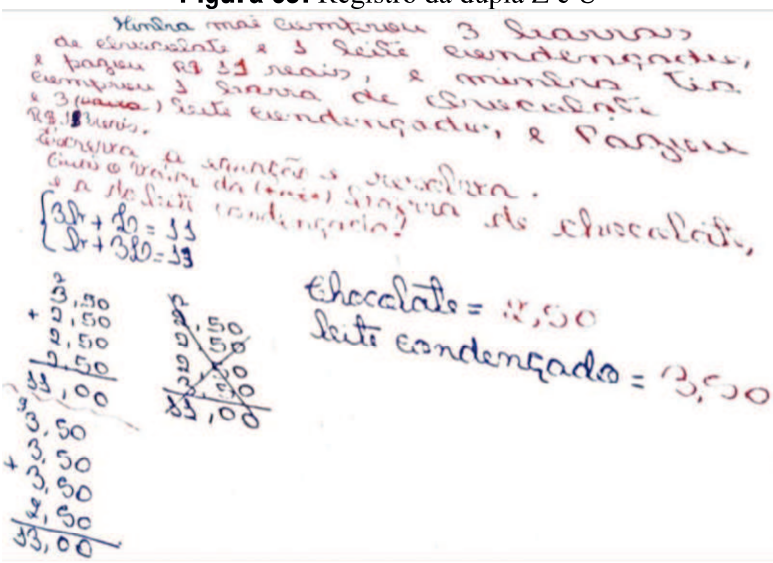
Problema: "Alice comprou 2 cadernos e 3 lápis e pagou R$ 63,00 e Gabriela comprou um caderno e 2 lápis e pagou R$ 33,00. Descubra quanto é o lápis e o caderno."

Comentário do pesquisador: podemos verificar que a dupla expôs bem claro o problema via representação verbal e tentou resolver via método da substituição. Embora tenham resolvido errado, pois a substituição foi equivocada, montaram o sistema adequadamente e isolaram o preço do caderno na equação da compra de Gabriela de forma adequada (mas o problema aborda 33 reais e no sistema foi escrito 32). Por outro lado, não vemos nenhuma representação numérica que, certamente, poderia ter ajudado a obter os valores dos objetos (que não são os que estão no conjunto solução), isto revela como esta representação não pode ser descartada, pois ela tem suas vantagens. Por exemplo, se esta dupla tivesse resolvido este problema via tentativa e erro, como muito foi feito durante toda a pesquisa, poderia ser que tivessem percebido que os valores de conjunto solução obtido não correspondem ao valor real que satisfaz o problema. Embora é merecido reconhecer o empenho da dupla em tentar mobilizar seus conhecimentos a respeito do método da substituição.

O uso das representações verbais e algébricas nos levam a notar que a ideia do uso das duas incógnitas estava conseguindo se formar e firmar nestas duplas (embora não apenas nela como vimos no aluno E anteriormente e veremos em alguns a seguir) e a da eliminação da incógnita ainda estava para ser mais amadurecida, já que como Goldin e Shteingold (2001) afirmam: conseguir expressar um conceito por mais de uma forma é um indício de que as ideias relacionadas ao conteúdo de sistemas está sendo formado em sua mente.

A dupla das alunas Z e U conseguiu utilizar as representações numéricas, verbais e algébricas na elaboração do seu problema, como vemos a seguir:

Figura 65: Registro da dupla Z e U



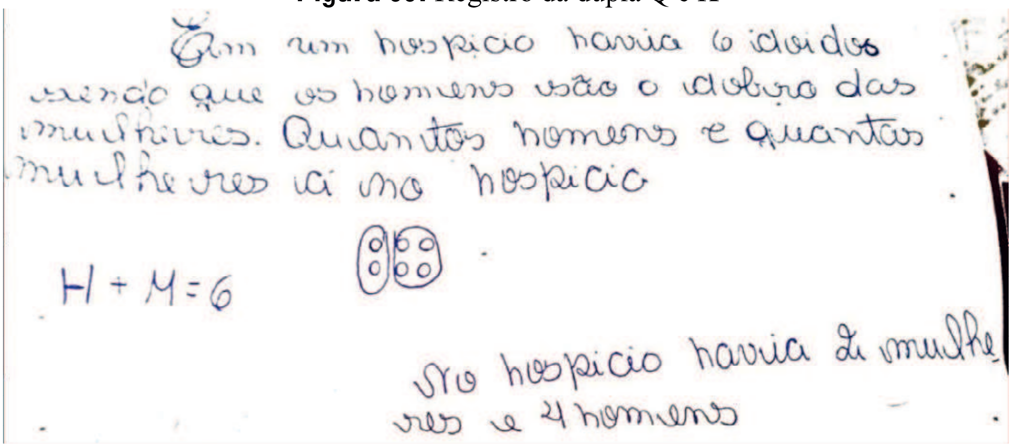
Fonte: Acervo do pesquisador

Problema: “Minha mãe comprou 3 barras de chocolate e 1 leite condensado, e pagou R$ 11 reais, e minha tia comprou 1 barra de chocolate e 3 leites condensados, e pagou R$ 13 reais. Escreva a equação e resolva. Qual o valor da barra de chocolate e do leite condensado?”

> **Comentário do pesquisador**: apesar do erro ortográfico no nome condensado e no uso ainda do nome reais, mesmo já tendo sido escrito o R$, vemos como a dupla mostrou um desenvolvimento muito bom na elaboração do problema (Figura 65), embora tenha pedido que escrevesse a equação e não o sistema. Notamos que a forma de o resolver foi pela representação numérica e não pelos recursos dos métodos trabalhados. Este é mais um exemplo de como a união e o uso de mais de uma representação são sinais que indicam a formação do conceito sobre sistemas, ao menos, neste problema, da ideia do uso de duas incógnitas, já que os métodos de resolução não apareceram.

Usando da representação verbal – numa situação bem descontraída – com desenhos e a álgebra (a numérica também foi utilizada quando a dupla foi interrogada pelo professor), vejamos o que outra dupla criou:

Figura 66: Registro da dupla Q e K


Em um hospicio havia 6 doidos sendo que os homens são o dobro das mulheres. Quantos homens e quantas mulheres ái no hospicio

H + M = 6

No hospicio havia 2 mulheres e 4 homens

Fonte: Acervo do pesquisador

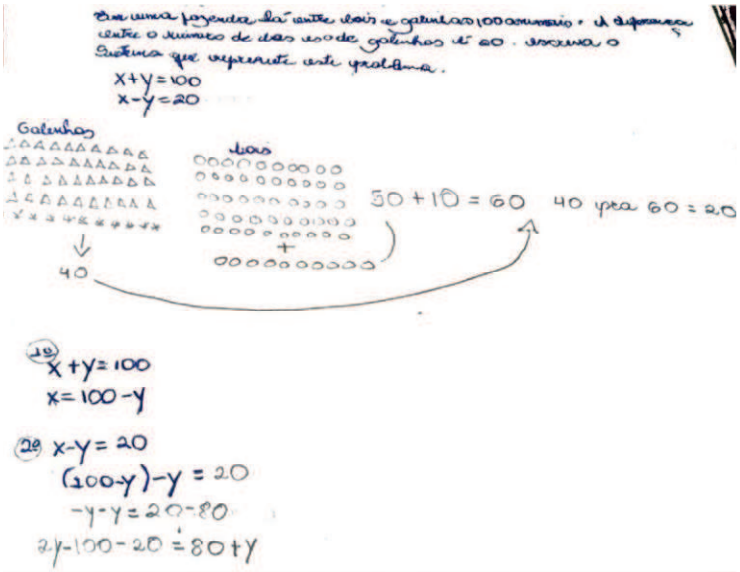
Problema: “Em um hospício havia 6 doidos sendo que os homens são o dobro das mulheres. Quantos homens e quantas mulheres há no hospício?”

> **Comentário do pesquisador**: uma das alunas desta dupla, devido ao barulho da turma, geralmente, chama os colegas de ‘doidos’, por isto se baseou num hospício para montar o problema. Interessante observar que esta aluna foi uma das que inicialmente dizia que não conseguia criar uma pergunta e também estava confundindo os sistemas com apenas as equações, mas no decorrer da atividade ela conseguiu ir desenvolvendo o problema. Ressaltamos que mesmo com o diálogo com o professor, a dupla não conseguiu montar a outra equação do problema, conseguindo apenas montar uma das equações e obter

> a resposta via o desenho das bolinhas. Este é mais um caso onde a ideia do uso das incógnitas foi presente para a dupla, embora não todo, ao mesmo tempo que a forma de resolução não foi realizada com os métodos trabalhados.

L e C criaram o problema apresentado na Figura 67. Embora seja parecido com o “clássico” problema dos bois e galinhas, foi interessante terem feito ele baseado na soma e na diferença dos animais.

Figura 67: Registro da dupla L e C



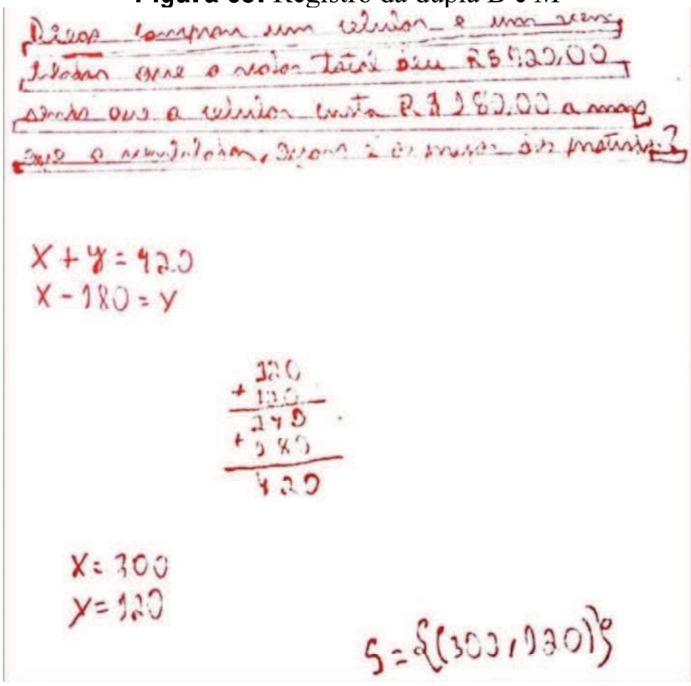
Fonte: Acervo do pesquisador

Problema: “Em uma fazenda há entre bois e galinhas 100 animais. A diferença entre o número de bois e de galinhas é 20. Escreva o sistema que representa este problema.”

> **Comentário do pesquisador**: verbal, algébrica e numérica – 3 das 4 representações que Friedlander e Tabach (2001) apontam, foram claramente usadas por esta dupla. É interessante notar que a dupla inicia o método da substituição de forma perfeita, embora não tenham concluído com êxito. No uso de todas estas representações por esta dupla conseguimos perceber, mais uma vez, os indícios de que a formação das ideias relacionadas aos sistemas foi sendo firmado para mais uma dupla: o uso das duas incógnitas de forma adequada e a eliminação de uma incógnita precisando ser aperfeiçoada, como no caso da dupla de T e S.

Os alunos B e M conseguiram criar um sistema usando a ideia do “mais que o outro”, de forma que o expressaram adequadamente, conforme Figura 68:

Figura 68: Registro da dupla B e M



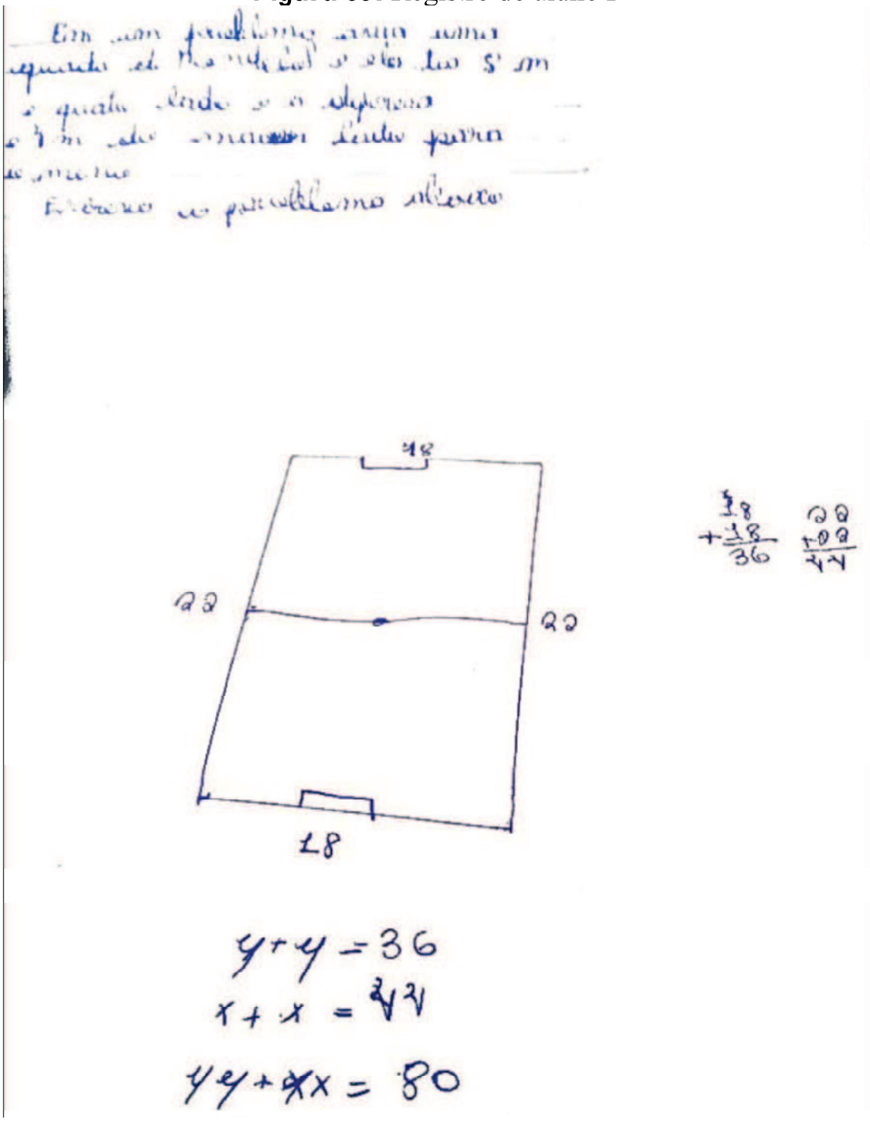
Fonte: Acervo do pesquisador

Problema: “Diego comprou um celular e um ventilador que o valor total deu R$ 420,00, sendo que o celular custa R$ 180,00 a mais que o ventilador. Qual é o menor dos preços?”

Comentário do pesquisador: acreditamos que os alunos montaram bem a equação x – 180 = y baseando-se nos valores numéricos que eles já sabiam, já que se fossem partir via de regra a equação seria: x = y + 180, o que nos mostra como a representação numérica auxiliou a algébrica. Além disto, vemos que a pergunta foi diferente: “Qual é o menor dos preços?” (que já é óbvio que é o ventilador) e que embora não tenha sido diretamente respondida, a presença do conjunto solução nos ajuda a entender a resposta e assim o uso das 3 representações nos ajudam a perceber, como nos outros exemplos, a formação do conceito dos sistemas por esta dupla, ao menos da ideia do uso de das incógnitas, já que a resolução foi feita via representação numérica.

Entretanto, nem todos os problemas criados foram tão claros como estes. O aluno F criou o problema apresentado na Figura 69:

Figura 69: Registro do aluno F



Fonte: Acervo do pesquisador

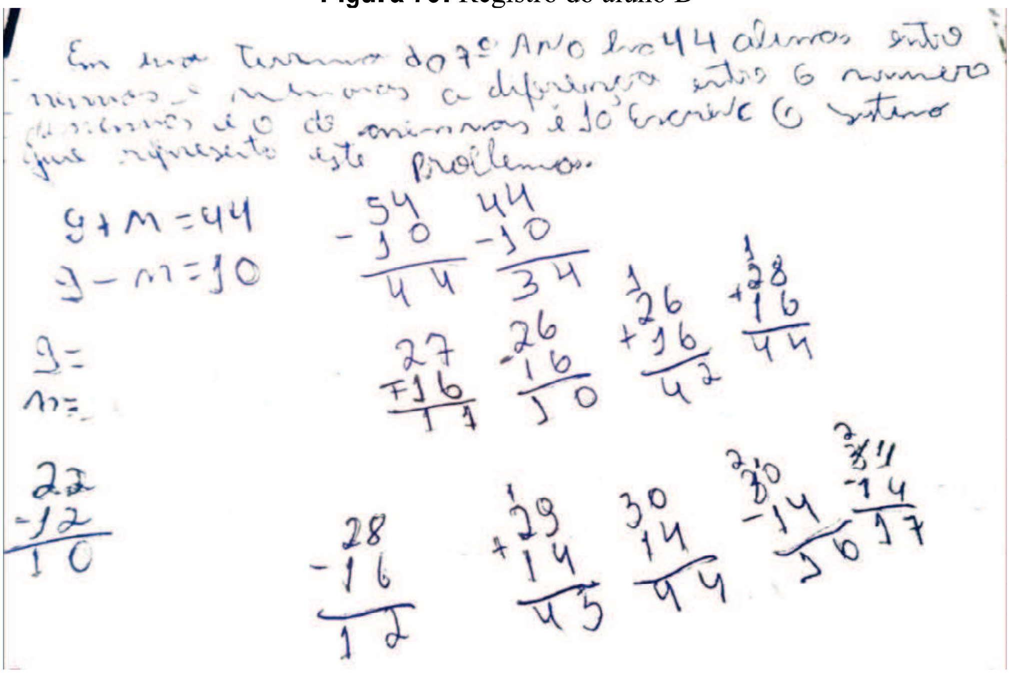
Problema: "Em um problema havia uma quadra de handebol e ela tinha 8 m e quatro lados e a diferença é 4 m do maior lado para o menor. Escreva o problema abaixo."

Comentário do pesquisador: como o aluno já sabia que o lado maior era 22m e o menor era 18m, então pôde usar da informação de que um lado é 4m maior que o outro; nota-se que ele quis se referir à soma das medidas de todos os lados que era 80m (e não 8m, como escreveu). Além disto, percebe-se certa lógica no esboço algébrico que fez, onde o y = 18 m e o x = 22 m e a soma de 2x com 2y dava 80m, porém não soube escrever a outra equação do problema. Vemos, neste caso, que a representação numérica o ajudou a escrever algebricamente uma parte do sistema, como Friedlander e Tabach (2001) falam quando se referem que uma representação pode lançar luz sobre outra. Além disto, vemos na descrição deste problema uma dificuldade em articular as ideias na forma de um texto de fácil compreensão. A proposição de problemas tem a potencialidade de ajudar o aluno a desenvolver um domínio

> também destas habilidades 'de português', como já observou Chica (2001, p.151).

O aluno D escreveu um problema que seria simples para resolver via método da adição (Figura 70), mas optou por resolver via representação numérica e mesmo assim não conseguiu obter a resposta, apesar de ter escrito correto o problema e o sistema que o representava.

Figura 70: Registro do aluno D



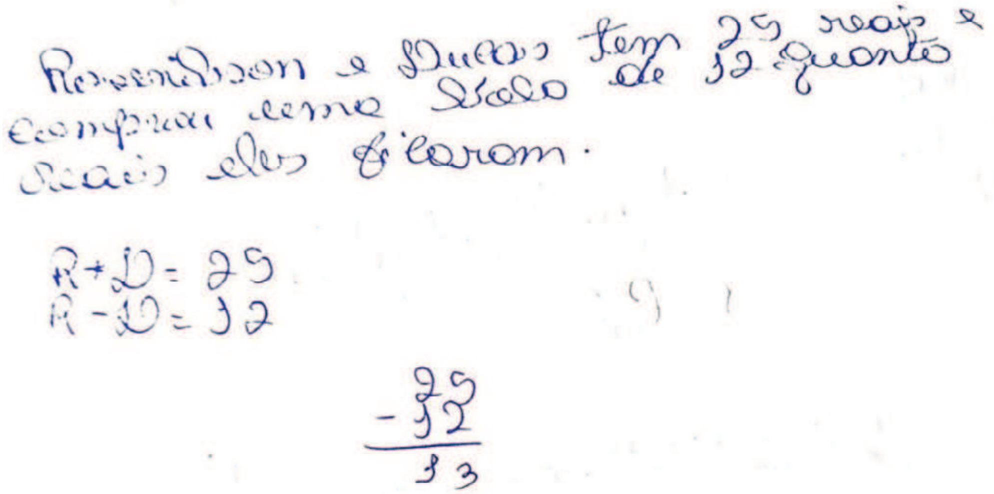
Fonte: Acervo do pesquisador

Problema: "Em uma turma de 7º ano há 44 alunos entre meninos e meninas. A diferença entre o número de meninos e o número de meninas é 10. Escreva o sistema que representa este problema."

> **Comentário do pesquisador:** graças ao seu registro escrito podemos, conforme Goldin e Shteingold (2001), dizer que a ideia relacionada ao uso das duas incógnitas para obtenção das duas equações do problema foi também sendo alcançada por mais este aluno em sala, apesar de a ideia da eliminação da incógnita por um dos métodos trabalhados não ter sido obtida com sucesso. Precisamos, por outro lado, citar também que a dupla em que este aluno estava (a aluna novata que tinha chegado) não contribuiu neste momento para ajudar o mesmo e vemos que este fator foi algo que o impossibilitou de tentar até mesmo responder o sistema pelo método da adição.

Outra dupla escreveu um problema que na realidade não passou de uma aritmética básica, como apresentado na Figura 71, apesar de escrito em partes um sistema em cima do problema.

Figura 71: Registro da dupla J e R



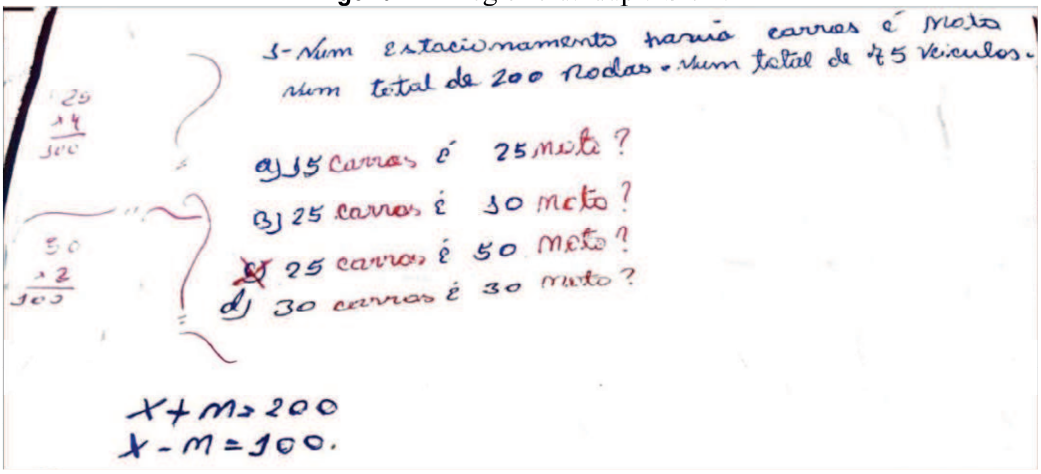
Fonte: Acervo do pesquisador

Problema: "Rosenilson e Lucas tem 25 reais e comprou um bolo de 12, quantos reais eles ficaram?"

> **Comentário do pesquisador:** constatamos que a dupla interpretou o fato dos 12 reais como a diferença entre os valores dos personagens do problema, por isto montaram a equação R – L = 12, embora tenham resolvido pela aritmética básica o problema e em nenhum momento perceberam que a situação não era um sistema.

Outra dupla criou um problema de múltipla escolha e conseguiu elaborar tanto via representação numérica como verbal de forma adequada, todavia a representação algébrica foi feita de forma incoerente, conforme Figura 72.

Figura 72: Registro da dupla S e N



Fonte: Acervo do pesquisador

Problema: "Num estacionamento havia carros e motos num total de 200 rodas. Num total de 75 veículos."

Comentário do pesquisador: a dupla só acrescentou a informação dos 75 veículos após o professor ter perguntado quantos eram os veículos e note-se que, ainda assim, não há a pergunta propriamente dita do que se deve procurar. Além do mais, por ser uma questão de marcar, percebe-se que eles colocaram uma alternativa que a informação dos 75 veículos já resolvia o problema, isto é, não conseguiram pensar de alguma forma que deixasse o problema mais exigente, além disto o sistema que escreveram não expressa corretamente o sistema (Figura 72).

Enfim, a aula em si acabou tendo um desenrolar muito bom para o professor que ficou até surpreso e feliz ao notar que, das ideias relacionadas ao conceito de sistemas de equações, ao menos a do uso das duas incógnitas foi ficando clara para os alunos, que é o que podemos inferir a partir de seus registros (GOLDIN; SHTEINGOLD, 2001), como também a visão de que as várias representações que puderam ser utilizadas até este ponto – verbal, numérica e algébrica – e a RP tiveram suas contribuições para que estas ideias fossem sendo assimiladas internamente pelos alunos, que por isto conseguiam expressar bem externamente.

5.6 6º BLOCO: REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS DE SISTEMAS

5.6.1 Encontro 12: A importância da alimentação saudável

28/11/2018

Ideias trabalhadas: Uso de duas incógnitas distintas para obtenção de duas equações, cada uma com as duas incógnitas diferentes.

Conteúdo: Representação gráficas de sistemas.

Objetivo: Usar a representação gráfica para esboçar sistemas compreendendo as características desta forma de representação.

> **Comentário do pesquisador:** após o exame de qualificação, notamos a necessidade de se trabalhar com os alunos a representação gráfica dos sistemas, pois tinha sido a única forma de representação das de Friedlander e Tabach (2001) que não foi abordada. Já estávamos no final do ano letivo e tanto os outros conteúdos do 8º ano tinham que ser abordados, como também as provas do 4º bimestre estavam chegando. Então conseguimos realizar apenas dois encontros dentro deste bloco de problemas, sendo necessário, antes deles, trabalhar com os alunos as noções de plano cartesiano, em aulas anteriores as aplicações dos problemas deste bloco, que até então eles não conheciam.

PROBLEMA 12: Juliano é um adolescente que gosta muito de comer "besteiras": doces, salgados, sanduíches, refrigerantes e etc. Embora sua mãe já tenha chamado muito a sua atenção por isto, mas ainda assim ele deixa de comer as "comidas de panela" muitas vezes para comer estes lanches rápidos. Da última vez que foi a uma lanchonete comprou 10 salgados entre pastéis e coxinhas e pagou R$ 16,00 por tudo. O preço do pastel, da coxinha e dos outros lanches disponíveis na lanchonete estão no quadro ao lado.

Lanche	Preço
Pastel	R$ 3,00
Coxinha	R$ 1,00
Sanduíche	R$ 3,50
Suco	R$ 1,00
Refri (Lata)	R$ 3,50
Refri (Copo)	R$ 0,50

a) Esboce o gráfico que representa esta situação.

b) Que tipos de combinações de lanches diferentes você poderia fazer com os mesmos R$ 16,00 que Juliano tinha?

c) Você prefere doces ou salgados? Pastel ou coxinha? As "comidas de panela" ou estas "besteiras" como Juliano?

d) O que você acha da atitude de Juliano de trocar as "comidas de panela" pelos lanches rápidos? É bom? É ruim? Por quê?
e) Você sabe o que é e qual a importância de se ter uma alimentação saudável?

Ao chegar em sala e cumprimentar os alunos, o professor lembrou que a atividade seria feita em grupos de até quatro pessoas e que se dividissem segundo sua afinidade. Após isto, surgiram três trios, três quartetos e duas duplas. O professor passou entregando o problema a ser resolvido e deu um tempo para que eles pudessem lê-lo. Depois das leituras individuais, o docente fez a leitura com todos, esclarecendo, ao término, que das alternativas b, a e e, as respostas eram pessoais e assim cada um optasse por qual caminho tomar para começar.

Iniciando então o tempo de os alunos responderem, o professor passeava na sala e observava os registros. De início, a maioria dos alunos optou por responder as questões pessoais e outros já estavam desenhando na malha quadriculada um plano cartesiano. Não houve muitas dúvidas nas respostas pessoais, tendo o professor raramente interferindo nesta etapa, o que de fato foi necessário foi como responder a letra a.

O aluno E começou a ter o seguinte diálogo com o professor:

E: Professor e este "a" faz como?
P: Para você fazer o gráfico no plano cartesiano.
E**:** Vou colocar este 10 aqui no "x", é? Ou "x" e "y" é 10?
P: Você precisa montar o que para ajudar a desenhar o gráfico, lembra?
E**:** As equação lá!
P: Tente montá-la e achar os pares ordenados.

O Aluno D também foi tendo a mesma ideia, como se vê no diálogo a seguir:

D: Professor, é 10 no "x" e 16 no "y"?
P: Antes de tudo, calma! Para lhe ajudar a desenhar o gráfico é bom se basear em que?
D: No plano cartesiano.
P: No que mais?

Após alguns segundos de silêncio:

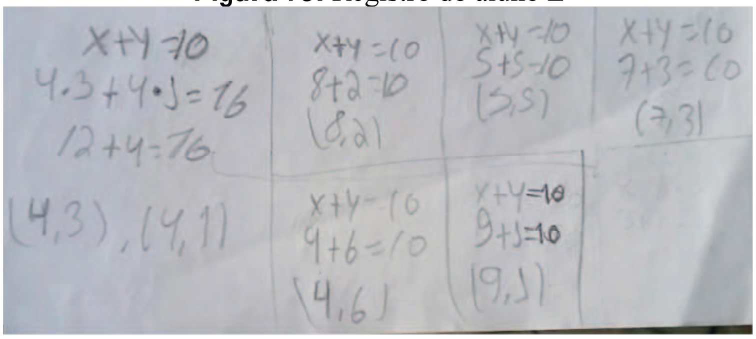
D: Não sei, professor!
P: Tente montar as equações que representam o problema.
D: Tipo assim: os pastéis mais a coxinha é 10?
P: Por que é mais?
K: Por que tá tudo junto!

P: Pronto! Tente encontrar agora pares ordenados que deem certo nessa equação.

Comentário do pesquisador: as duas primeiras falas destes alunos tentando relacionar o 10 e 16 já com o eixo x ou o eixo y, revelam que ainda não tinham percebido a necessidade da montagem do sistema para a partir dele ter uma melhor facilidade para criação do gráfico. Ficamos surpresos quando o aluno E lembrou logo de fazer as equações após nossa pergunta, como também de D ter expressado verbalmente uma das equações do problema.

O aluno E chamou novamente o professor e lhe mostrou a equação 10x + y = 16 que tinha escrito, mas quando perguntado pelo professor o que ela representava não soube responder, todavia, instantes depois, chamou o professor e mostrou o registro que consta na Figura 73, que além de ser uma das equações do problema, também contém alguns pares ordenados que a tornam verdadeiras.

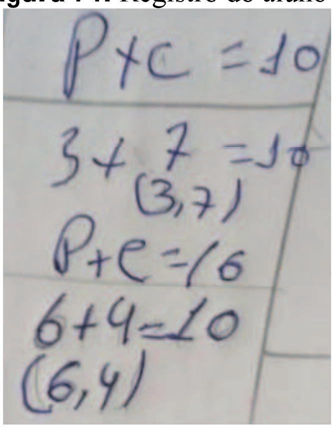
Figura 73: Registro do aluno E



Fonte: Acervo do pesquisador

O aluno D também conseguiu obter uma equação parecida com esta, além de também obter alguns pares ordenados, conforme o registro a seguir apresentado na Figura 74:

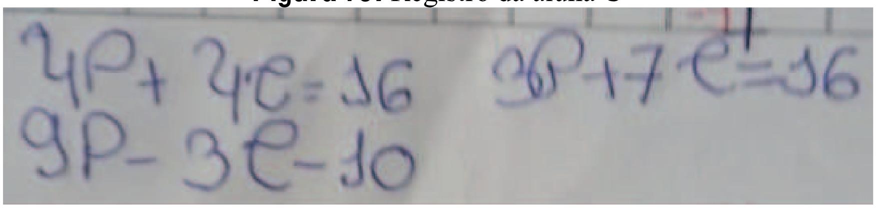
Figura 74: Registro do aluno D



Fonte: Acervo do pesquisador

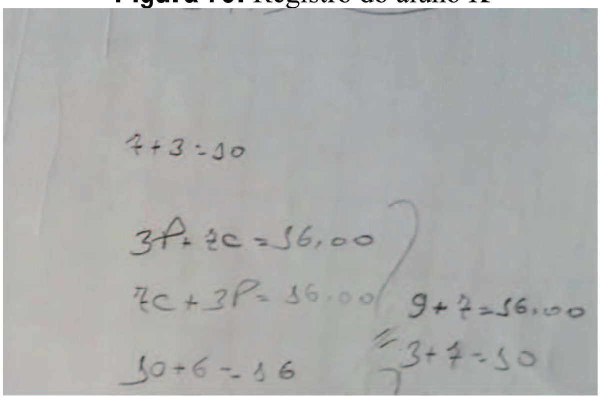
Comentário do pesquisador: apenas estes dois alunos conseguiram obter a equação que representava a quantidade de salgados comprada. Nos outros grupos a dificuldade de como responder a letra ‘a’ persistia e mesmo quando o professor lhes lembrou que a montagem do sistema poderia ajudar, somente o aluno C conseguiu obter a equação que representava o valor pago (diálogo retratado mais a frente) e outros alunos até tentavam montar alguma equação, mas sem sucesso (como vemos nas Figuras 75, 76 e 77) e que mesmo quando perguntados pelo professor: ora alguns não sabiam o que elas representavam, ora estavam as escrevendo baseadas nas respostas – 3 pastéis e 7 coxinhas.

Figura 75: Registro da aluna U



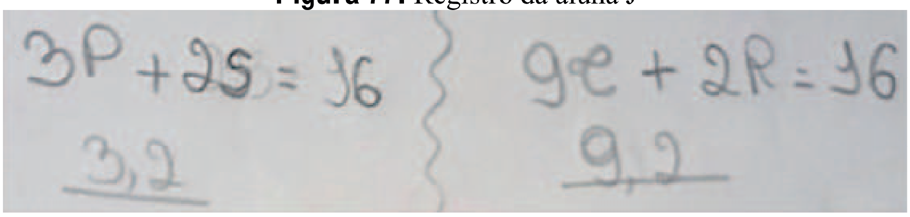
Fonte: Acervo do pesquisador

Figura 76: Registro do aluno K



Fonte: Acervo do pesquisador

Figura 77: Registro da aluna J



Fonte: Acervo do pesquisador

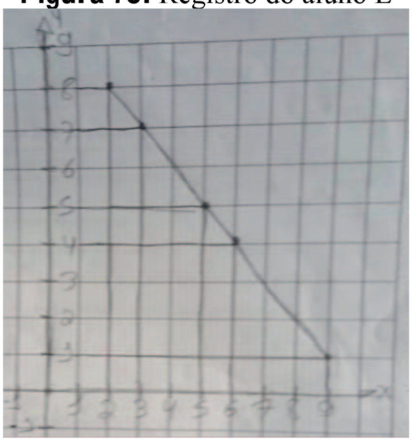
Comentário do pesquisador: na Figura 76, vemos que o aluno, de certa forma, entendeu que seriam 3 pastéis e 7 coxinhas, todavia estes valores seriam as incógnitas, já os coeficientes numéricos delas seriam, respectivamente, 3 e 1, mas ele acabou por trocá-las. Na Figura 75, além de percebemos esta mesma compreensão na escrita da equação da direita, podemos ver que a primeira equação da esquerda também sofreu a mesma interpretação, já que 4 pastéis a 3 reais e 4 coxinhas a 1 real dá justamente os 16 reais, porém os valores 4 e 4 seriam um par ordenado solução da equação do valor pago e não os coeficientes numéricos. As equações da Figura 77 devem representar: 3 pastéis e 2 sanduíches (esquerda) e 9 coxinhas e 2 refrigerantes (lata) onde em ambos os casos dá R$16,00, além disto, os números colocados abaixo destas equações separado por vírgula deve ser o par ordenado que a aluna quis representar a partir delas, porém estas informações não são as do problema.

Acreditamos que aquilo que levou muitos dos alunos a cometerem os erros expostos como estes das três figuras anteriores na busca da obtenção da segunda equação era a 'confusão' que ocorria devido ao fato da resposta ser: três pastéis e cada um era R$3,00 (logo, o 3 que era o coeficiente da incógnita que representava o pastel também era a quantidade de pastel) e sete coxinhas com cada uma custando R$ 1,00 (logo, o 1 que era o coeficiente da incógnita ao se multiplicar com 7 da quantidade de coxinhas, resultaria em 7), resposta que a maioria da sala obteve via representação numérica.

A respeito da questão gráfica, a dificuldade encontrada pela turma no esboço também se deve ao pouco contato que podem ter tido com este tipo de representação, como apresentamos em nossa metodologia, porém muito nos surpreendeu a atitude do aluno E na "dedução" da necessidade do uso das equações para partir para a montagem do sistema, como também D expressou.

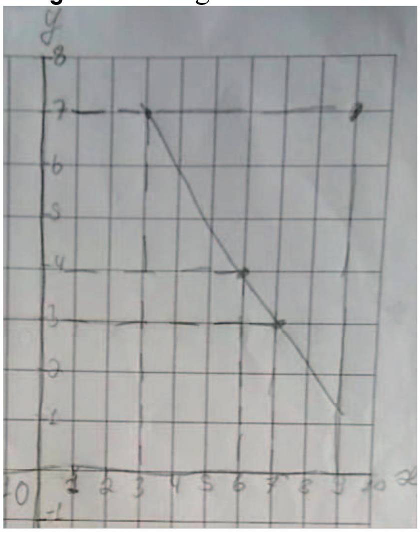
Comentário do pesquisador: dos registros dos alunos E e D podemos observar como conseguiram realizar a passagem da representação verbal para a algébrica, mesmo que somente de uma equação de forma exitosa, além disso, usando os procedimentos aritméticos, obtiveram alguns dos pares ordenados para esboçar o gráfico da equação conseguida: o que fizeram também muito bem – foram os únicos alunos que realizaram e que segue as fotos mais abaixo. As mesmas nos permitem perceber que E e D conseguiram fazer a relação entre, no mínimo, a representação numérica e a gráfica, mas que, como não obtiveram a outra equação e não a esboçaram, não puderam visualizar a solução através do gráfico, apesar de terem percebido via representação numérica que a resposta seria o par ordenado (3,7). Enfim, vemos que eles conseguiram transitar entre todas as representações que Friedlander e Tabach (2001) abordam, como seus registros nos permitem inferir.

Figura 78: Registro do aluno E



Fonte: Acervo do pesquisador

Figura 79: Registro do aluno D



Fonte: Acervo do pesquisador

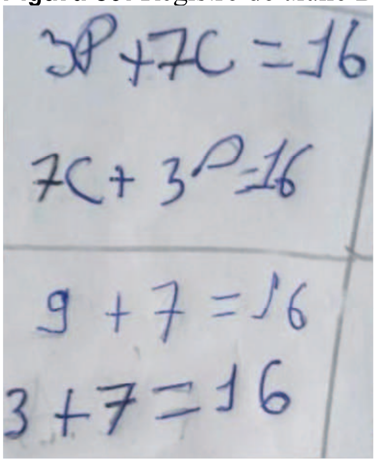
Algo curioso acontece no gráfico do aluno D (Figura 79) quando ele marcou o ponto (9,7), e podemos entender isto a partir de umas de suas falas e de um dos seus registros que segue:

> D: Professor, 3 pastéis dão 9 reais, com mais 7 reais das coxinhas, dá 16 então. Ai lá no desenho eu coloco 9 e 7. (Figura 80)

O aluno D então localiza no gráfico e diz que agora é só ligar o ponto (9,7), conforme Figura 80, com o (6,4), então:

> P: Mas se você for ligar, você está considerando que (6,4) também dá certo na quantidade de dinheiro e 6 pastéis e 4 coxinhas dão 16 reais?
> K: Não dá! Eu num disse!?
> P: Não é porque tá alinhado que você vai ligar exatamente, cuidado.

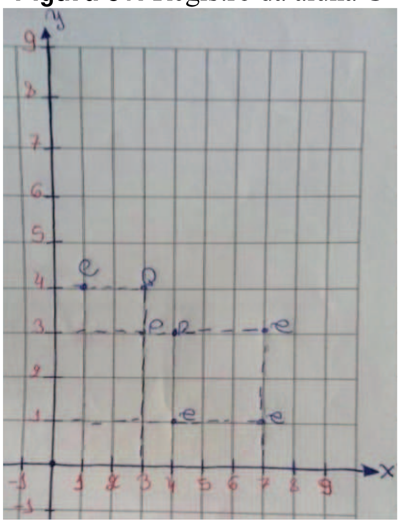
Figura 80: Registro do aluno D



Fonte: Acervo do pesquisador

Outro caso que ocorreu com relação a uma representação gráfica, foi o registro da aluna U que segue junto com o diálogo tido (Figura 81):

Figura 81: Registro da aluna U



Fonte: Acervo do pesquisador

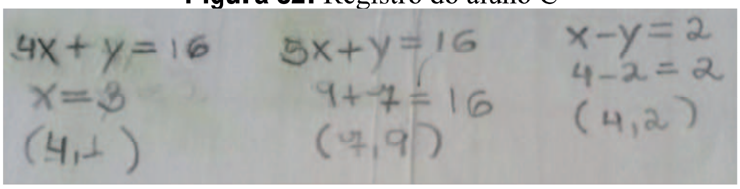
U: É assim, professor?
P: Só ligar eles!
U: Mas não dá!
P: Então veja como consertar.

Comentário do pesquisador: estes dois exemplos de registros (Figura 80 e 81) nos mostram que, se por um lado há uma localização de pontos correta, por outro, ocorreu ora uma interpretação errônea dos dados numéricos (aluno D), ora uma localização bem diversa dos pontos que devem ter alguma ligação com o sistema montado (aluna U), mas que não condizem com a representação solicitada do problema.

> A respeito do caso do aluno D podemos ressaltar que refletir em cima de querer ligar o ponto (6,4) com o (9,7) não representa uma solução aritmética/algébrica para a equação, aliás, o par (9,7) também não o é, e isto nos permite ver como o entendimento da representação gráfica pode auxiliar na resolução por quem optar pela numérica ou algébrica.
>
> A respeito do caso da aluna U podemos perceber que a ‘desconexão’ entre os pontos na representação gráfica que lhe impedia a ligação (e que o professor pediu que ela ligasse justamente para que ela percebesse que não seria possível) foi devido ao uso equivocado das representações algébricas e numéricas para a obtenção dos pares ordenados. Isto nos mostra como entender a relação entre as representações utilizadas nos permite fazer uma autoavaliação de como estamos conduzindo o processo de resolução de um problema. É o que Friendlander e Tabach (2001) apontam quando indicam o uso de mais de uma representação, pois uma poderá lançar luz sobre outra.

No tocante à segunda equação do problema: $3x + y = 16$, como dissemos anteriormente e que assim foi explorado no momento da plenária e do consenso com os alunos, somente o aluno C conseguiu obter a resposta. Embora quando fomos ao seu grupo e começamos a discutir a respeito do que a equação significava, o mesmo se corrigiu por achar que seria $4x + y = 16$, já que 4 pastéis e 4 coxinhas davam 16 reais: o que é certo, porém, o aluno confundia o coeficiente numérico das incógnitas com o valor procurado. Quando recolhemos os registros, observamos que ele tinha apagado a equação correta e deixado as que segue na Figura 82:

Figura 82: Registro do aluno C



Fonte: Acervo do pesquisador

Partimos então para o registro das respostas dos alunos no quadro e então para a plenária. Começamos por responder as questões pessoais, nas quais o professor arguia alguns alunos da turma e sem muito problema obtinha-se suas respostas. Com a posse dos registros, o professor pôde analisar e ver que muitos dos alunos demonstraram perceber como as “comidas de panela” são importantes para saúde, ao invés dos lanches rápidos. Percebeu também que, apesar de não terem conseguido dar uma definição do que seria uma alimentação saudável, colocaram que esta é uma alimentação com verduras, frutas, legumes e que nos dão força para as atividades diárias.

A partir da discussão da última alternativa o professor começou o seguinte diálogo com a turma:

> P: Mas que tipos de nutrientes precisamos ter em nossa alimentação?
> Y: Carboidratos!
> AP: Vitamina C!
> J: Proteína!

Começava uma agitação na sala e, por várias vezes, o professor pedia silêncio para retomar a fala.

> P: Silêncio! Psiu! Gente, calma! Vamos por parte aqui: o que são os carboidratos ‘Y’?
> Y: E eu sei!
> P: Carboidratos são os alimentos da base da pirâmide alimentar e nos dão energia. Alguém pode citar exemplos?
> C: Massas e pão, Professor!
> P: A vitamina C que AP disse é muito importante e ajuda até a prevenir uma doença bem simples: quem sabe qual é?
> C: A gripe?
> P: Exato, a gripe! Existem outras vitaminas que a gente precisa?
> W e J: Ferro!
> O: A,D!
> P: Calma, vamos por parte: para que serve a A e a D, ‘O’?
> O: Para dar força no organismo, professor!
> P: A falta de ferro pode gerar uma doença bem conhecida. Quem lembra qual é?
> J e Z: Anemia.
> P: Anemia, muito bem! Que tipo de alimento bem conhecido é rico em ferro?
> Alguns Alunos: Feijão.
> Y: E é aula de ciências agora é?
> P: O que mais nosso organismo precisa?
> C: Lipídeos!
> Y: Proteína.
> P: Para que servem as proteínas? Onde podemos achá-las?
> Y: Elas dão força!
> AP e E: Nas carnes, nos ovos, no frango.
> P: Os lipídios são o que?

Nesse momento, entre muitas piadas e brincadeiras sobre ser gordo, que até o professor fez consigo mesmo, ele mesmo esclareceu à turma:

> P: Gorduras são reservas de energia, galera! Na pirâmide alimentar, na base há os carboidratos, que seriam ‘os pedreiros’ do organismo, que vão colocar ‘os tijolos’ que são as proteínas no lugar e assim vão construindo nosso organismo.
> AP: Sim, a pirâmide alimentar!
> P: Vi um dia destes, enquanto preparava este problema para vocês, que tem até a ideia de uma nova base da pirâmide, que começa com água e exercícios físicos.

Nesse momento, o professor da outra aula já tinha chegado e era hora de mudar de turma, então o professor deixou uma última pergunta:

> P: Para terminar pessoal esta parte, eu queria que a gente pensasse no seguinte: vocês acham que uma família que vive com um bolsa família hoje, consegue comprar os alimentos que necessita para ter uma alimentação saudável?
> Quase toda a turma: NÃO!
> P: Na terceira aula a gente continua, após o intervalo.

> **Comentário do pesquisador:** ao pensarmos este problema, justamente o que viria após a última alternativa dependeria de como o professor iria explorar o problema e então desencadear a discussão, além disto, o criamos com o intuito de poder trabalhar nele questões que envolvessem o cotidiano dos alunos. O próprio professor teve que estudar sobre nutrientes para poder saber conduzir a exploração. É visível observar como 'a aula de matemática virou aula de ciências' (conforme 'Y' alardeou) na exploração em cima dos nutrientes para uma alimentação saudável. Coincidentemente, os alunos já tinham visto este conteúdo neste ano de ensino, o que facilitou muito a lembrança deles, para responderem as indagações do professor. Se, por um lado, uma parte da turma estava envolvida com conversas paralelas, o que gerou a agitação que fez mais de uma vez o professor pedir silêncio, por outro, foi muito fortuita a participação dos alunos que se envolveram na discussão. Fazer a ponte com ciências, permitiu ao professor pôr em prática o que aprendeu no mestrado, na disciplina de 'Resolução de Problemas': que o uso desta metodologia tem o potencial para se trabalhar com temas do cotidiano dentro da matemática, aliás, isto é uma vantagem da exploração (como da proposição de problema). Além disto, a discussão acabou devido ao limite de tempo da aula, pois o outro professor já estava à porta, é o que Andrade, S. (2011) aponta quando discute que os momentos de exploração sempre podem ir mais além, mas acabam sendo parados devido a diversos limites que podem surgir. Apesar de que o 'combustível' para continuar se falando sobre nutrientes também da parte do professor 'estava acabando', mas nota-se que o docente já tinha terminado a exposição com outra pergunta e que – como veremos adiante – ajudou a gerar uma outra discussão.
>
> Por fim, a partir das respostas dadas as alternativas de b a e, particularmente a última, conseguimos trazer reflexões para se fazer novas perguntas, isto é, conseguimos trabalhar sob uma forma do P-T-RS, conforme Andrade, S. (1998), no qual não paramos meramente na resposta pessoal de cada um, e sim fomos indagando a turma outras vezes trazendo novas discussões.

Quando voltamos na 3ª aula – logo após o intervalo – foi o momento dedicado à plenária e ao consenso da alternativa a do problema. Foi solicitado que um aluno de cada grupo fosse ao quadro escrever os resultados, e então começou o momento da discussão e análise das respostas. Inicialmente, o professor perguntou o que significava o $x + y = 10$ ou $p + c = 10$ registrado por uns alunos e a turma foi quase unânime em reconhecer que era a quantidade de pastéis e coxinhas.

Ao se discutir os pares ordenados que satisfaziam esta equação para colocá-los no gráfico, também foi um momento de fácil compreensão, como a observação do gráfico construído.

> **Comentário do pesquisador:** o que ocorreu então se tudo isto foi fácil, mas não feito pela maioria dos grupos? Certamente, um dos fatores que levou a isto foi não terem conseguido montar o sistema que poderia ajudar quando fossem em busca dos pares ordenados; não é à toa que ao perceberem as respostas dos colegas, constataram que 'era fácil'. Isto também pode indicar não terem percebido de início a ideia de um sistema que estava associado ao problema de Juliano, ou seja, para a maioria dos alunos a ideia do uso de duas incógnitas diferentes para obtenção de duas equações não foi percebida neste momento. Se tivéssemos pedido numa alternativa que construíssem o sistema que representava, o problema poderia ter sido evitado (ou confirmado) este fato de não perceberem o sistema associado ao problema 12, mas ao criarmos esta situação esperávamos que, a partir da alternativa a, os próprios alunos percebessem a necessidade de obter o sistema sem ter que ser pedido diretamente.

O professor partiu para a formalização do conteúdo ao se discutir a equação do aluno C: $3x + y = 16$. Tomando uma resposta do aluno E que trazia o par ordenado (4,4) como solução para a equação, e assim a partir deste exemplo numérico, como também com o do par ordenado (3,7), conseguiu mostrar aos alunos de que forma chegar à equação em questão e, de posse dos dois pares, esboçou o gráfico a partir do que foi feito por E. Segue o diálogo:

> P: Notem que o problema não pedia a quantidade de pastéis e coxinhas comprada, mas apenas que esboçassem o gráfico. Vocês puderam perceber quando respondiam, que eu passava nos grupos e via, que eram quantos pastéis e quantas coxinhas?
> Alguns alunos: 3 pastéis e 7 coxinhas.
> P: Olhem agora aqui para o gráfico e me respondam o que este ponto em comum nas duas retas quer dizer no gráfico?

Instante de silêncio feito pela turma e depois:

> AP: A solução!
>
> **Comentário do pesquisador:** a resposta de AP – em meio a um silêncio que foi feito na sala mediante a pergunta do professor – foi num tom de certeza e não de mero chute. Além do mais, a visão do ponto de intercessão das retas que o gráfico possibilita, que é a solução do sistema por ele representado, é um aspecto da representação gráfica que precisa ser enfocada, já que nela reside 'a chave' para resolver um sistema via esta representação e que foi isto que o professor ressaltou neste momento de formalização do conteúdo.

Após este momento, o professor voltou à pergunta que tinha feito na aula anterior:

> P: Então, voltando a pergunta que deixei na aula anterior: vocês acham que, por exemplo, uma família consegue se alimentar de forma saudável com um bolsa família?
> Alguns alunos: Não!

Começou, então, mais uma vez, o barulho na sala:

> P: Pera aí! Ei, psiu! Silêncio!

O professor bate com a caneta no quadro pedindo silêncio para então voltar a falar (este fato ocorreu diversas vezes nesta aula, apesar de não ficarmos repetindo-o aqui):

> P: Alguém sabe como surgiu o programa bolsa família?
> E e A: Com Lula!

Neste momento, o aluno B fala com o aluno AP novamente sussurrando um nome do qual o professor entende apenas a parte "Cardoso" e então:

> P: Como C disse ali: na realidade o programa bolsa família é uma junção de benefícios que começaram no mandato do presidente Fernando Henrique Cardoso. Como ele funciona, quem sabe?
> X, K, O: Os filhos têm que estar na escola!
> P: Isto é uma das condições para receber. Estou perguntando como ele funciona até você poder receber.

Alguns alunos insistiam em falar dos filhos na escola, então o professor brevemente explanou:

> P: Quem for no site da Caixa vai ver um pouco como o programa funciona. Ele é para ajudar a famílias que estão na linha da pobreza, ou da extrema pobreza. Inicialmente para saber se a família vai ter direito ao benefício, se pega a renda total da família e se divide pela quantidade de membros dela. Se este resultado der um valor menor que uma certa quantia que agora eu esqueci qual é: a família pode receber o benefício que é dividido em partes: tem R$ 89,00 fixo; se na família houver uma gestante, amamentando ou filhos de 0 a 15 anos: se recebe R$ 41,00 por membro, sendo no máximo 5; se for de 16 ou 17 anos recebe 48, sendo no máximo 2 e no fim ainda tem uma outra parcela que é calculada a partir do que a família já tem parece. Agora pense comigo: uma família com pai e mãe desempregados; a mãe é agricultora e doméstica, o pai é ajudante de pedreiro e faz bicos; eles possuem dois filhos entre 14 e 15 anos, e vamos supor que ela está gestante também. Vamos ver uma base de quanto receberiam: os R$ 89,00 são fixo, então com os 2 filhos e a gestante já são mais 3 de R$ 41,00, dá quanto?

D: R$123,00!
P: Com os R$ 89,00 já vai para...
D: R$ 202,00?
C: R$ 212,00?
AP: Aff... Até nisso tem matemática?
P: Bora, 202 ou 212?
D: Eu fiz e deu R$212,00.
P: Deixa eu ver aqui... Hum... É R$212,00 mesmo. Agora vamos pegar esta outra parte... Bem... Vamos imaginar que fecha em R$ 300,00. Uma família desta consegue se manter com uma alimentação saudável com este valor?
Alguns Alunos: Não!
P: O que poderia se fazer para melhorar esta situação? Quem tem alguma sugestão?
Z: Abrir fábricas!
E: Tem que ter mais empregos!
X: Um novo programa!
W: Pode aumentar o valor!
P: Vamos com Calma! W aumentar o quê? O valor do benefício?
W: Sim!
P: É uma saída, mas veja que tem aquele limite até onde se pode, ou não ser beneficiada a família.
O: E se forem 5 filhos, professor?
P: Vamos ver: já tem R$ 89,00. Se cada filho for na faixa dos R$ 41,00, dá quanto?
O: E se forem 9 filhos?
P: Aí lembre que é bom ver a idade para supormos em que faixa estaria cada filho deste, mas gente, para aí e pensa: será que com os 9 filhos os pais conseguiriam acompanhar direito eles na escola?
Alguns Alunos: Não!
P: Para terminar pessoal, atenção aqui! Não podemos negar como um programa como o bolsa família de fato ajudou e tem ajudado muitas famílias que não tem nada a conseguir sobreviver atualmente, mas vocês acham que seria melhor um novo programa social como o bolsa família, como X disse, ou um programa que gerasse mais empregos?
Uma parte da sala: Emprego!
Outra parte: Um programa!
P: Pera aí, vamos numa votação: quem acha que é melhor um emprego: levanta a mão!

De forma quase unânime todas as mãos foram levantadas.

P: E, você que sugeriu o emprego, por que o emprego?
E: Porque você vai ter o seu dinheiro para comprar, gastar e todo ano ele aumenta.
I: Mas E, do que adianta aumentar o salário todo ano, se eles aumentam o salário de um lado e do outro aumentam a luz, o combustível e as outras coisas? Se o governo aumenta as coisas, então ele que me dê o dinheiro para eu gastar!

A aluna I falou tão bem, mas, em meio ao barulho, poucos prestaram atenção, então o professor solicitou que todos silenciassem e prestassem atenção na fala da colega, que novamente falou:

> I: Pensa assim: eu trabalho e recebo meu salário. É verdade que todo ano ele aumenta, mas o governo vem e aumenta as outras coisas também e acaba saindo um pelo outro, mas, ora esta, se o governo aumenta as coisas, então ele que me dê o dinheiro para eu comprar o que quero.

Com este comentário da aluna I, o sinal tocou e muitos alunos já estavam se organizando para sair, logo não conseguimos continuar a discussão, sendo então o momento de encerrar a aula, mas que achamos por demais proveitosa.

> **Comentário do pesquisador:** da mesma forma que na primeira discussão, conseguimos trazer mais uma conversa sobre um tema do cotidiano dos alunos que era o programa Bolsa Família: e esta é uma das potencialidades da metodologia da RP, como já frisamos. Podemos ver como conseguimos adentrar numa exploração do problema com ideias matemáticas básicas, por exemplo, a soma dos benefícios para saber quanto a família que o professor supôs ganhava, como também uma exploração que ajudou a trabalhar questões de cidadania com os alunos, por exemplo, esta discussão final sobre a escolha entre empregos, ou um novo programa. O aluno O nas suas perguntas sobre as famílias com 5 e 9 filhos demonstra tanto uma forma de exploração como de proposição de problemas dentro da discussão que estava sendo feita, não deixando apenas para o professor ir perguntando. Auxiliar o aluno a pensar e se posicionar criticamente diante de certos temas do cotidianos é uma grande missão que a escola tem e que os professores precisam perceber onde podem ajudar nisto, pois certamente os alunos tem alguma espécie de pensamento formado sobre alguns temas que envolvam pontos sobre cidadania, como vemos o posicionamento tão claro da aluna I neste diálogo. Graças à discussão, o professor pôde perceber a potencialidade de um problema como este para trabalhar com ideias relacionadas a funções do primeiro grau para anos seguintes, por exemplo, além de que viu que os dois momentos de exploração do problema, o qual foi elaborado nestas intenções, revela a necessidade do professor bem preparar o problema que deseja levar para sala buscando ver quais conteúdos pode abordar e quais objetivos pode alcançar a partir dele e isto ressalta a importância desta fase dentro do roteiro proposto por Andrade, C. e Onuchic (2017).

5.6.2 Encontro 13: Soma e diferença III

<u>28/11/2018</u>

Ideias trabalhadas: Uso de duas incógnitas distintas para obtenção de duas equações, cada uma com as duas incógnitas diferentes.

Conteúdo: Representação gráficas de sistemas.

Objetivo: Usar a representação gráfica para esboçar sistemas compreendendo as características desta forma de representação.

PROBLEMA 13: Esboce o gráfico referente a seguinte frase: “Pensei em dois números que somados dão 25 e subtraídos dão 5.”

> **Comentário do pesquisador:** com este problema encerramos a pesquisa. Ele é praticamente o problema 5, sendo que neste pedimos o gráfico do enunciado e não os números que são a resposta do problema. Neste encontro, 8 alunos realizaram uma viagem feita pela escola como prêmio por terem sido os que apresentaram melhor desempenho no 3º bimestre, tendo a sala se resumindo a dois quartetos, dois trios e uma aluna realizando sozinha a atividade.

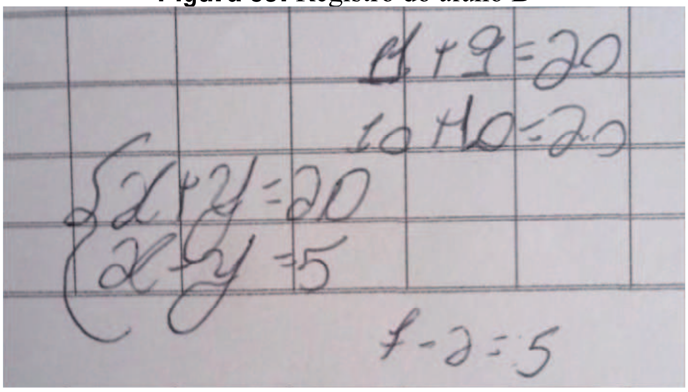
Ao chegar na sala e cumprimentar os presentes, o professor lembrou que este seria o último problema e solicitou a divisão dos grupos que foi feita prontamente. O problema foi entregue, lido pelos alunos, como também pelo professor para retirar qualquer dúvida e então os alunos começaram a resolução.

Minutos se passaram e o aluno A chamou o professor para conferir a resposta que tinha encontrado, a saber: os números 15 e 10. Após esta constatação, o professor notou que a soma não era 25, mas 20 – ocorrera um erro na digitação do problema – então pediu que os alunos ajeitassem isto no problema e continuassem a resolvê-lo.

> **Comentário do pesquisador:** aqui, mais uma vez vemos, a necessidade da atenção no professor na preparação dos problemas que irá levar para a discussão na sala de aula, como Andrade, C. e Onuchic (2017) mostram em seu roteiro. Embora tenha sido um erro facilmente contornado e que os alunos acharam ruim, pois sendo a soma 25 seria mais fácil de acharem os números da resposta (mesmo que este não fosse o objetivo do problema), mas isto não deixa de ser um ponto que merece cuidado ao se trabalhar com a RP em sala de aula, já que é da preparação do problema que decorrem todo o resto do processo.

Vemos que muitos alunos presentes conseguiram fazer a passagem da representação verbal para a algébrica, conforme um exemplo da Figura 83:

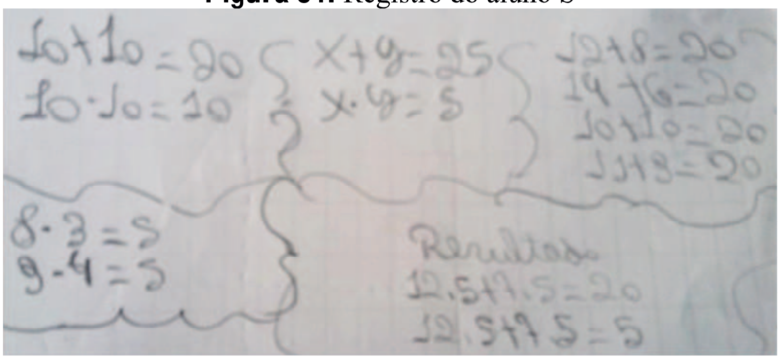
Figura 83: Registro do aluno B



Fonte: Acervo do pesquisador

Comentário do pesquisador: A passagem da representação verbal para a algébrica (Figura 83) é um indício de que a transição da linguagem materna para a algébrica dos alunos pode ter sido bem construída (a ideia que visamos trabalhar neste bloco de problemas), assim como no problema anterior, onde ao menos a primeira equação foi escrita. Por outro lado, nenhum dos alunos que montou o sistema o resolveu por algum dos métodos algébricos para que com o par ordenado obtivesse a solução do mesmo e a busca por outros pares fosse amenizada: os alunos optaram pela representação numérica para obter os pares ordenados para a representação gráfica (não há dúvida que isto se deu devido o problema tratar de uma adição e subtração), assim como na Figura 83.

Figura 84: Registro do aluno S

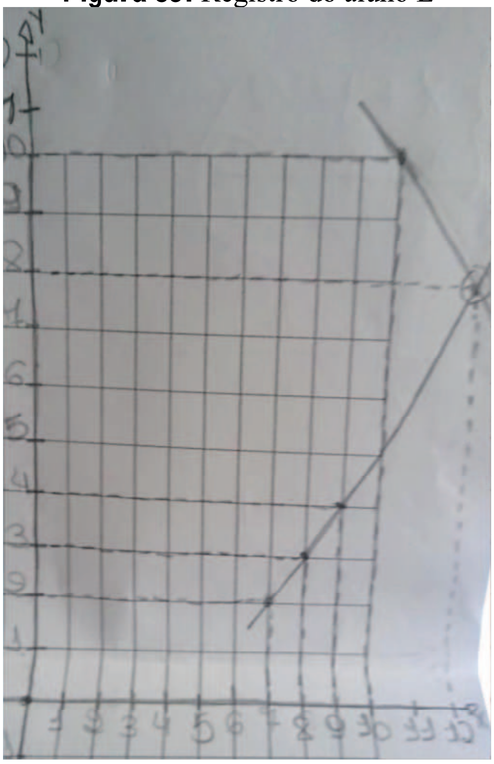


Fonte: Acervo do pesquisador

Algo que inquietou praticamente todos os grupos foi como localizar certos pontos no plano cartesiano se estavam usando valores muito grandes para o x. E, assim, encontravam, por exemplo, para a situação da soma os pares (11,9) e (12,8) e na malha quadriculada eles desenharam o plano, a começar do meio da folha. O professor sugeriu que poderiam aproveitar mais o 1º quadrante já que estavam usando mais números positivos, todavia fazendo algumas "adaptações" eles deixaram os que tinham desenhado inicialmente.

De forma geral, os alunos que dentro do tempo estipulado conseguiram esboçar o gráfico, o fizeram sem muita dificuldade. O aluno E foi o primeiro a terminar e quando o professor foi olhar (Figura 85) teve o seguinte diálogo:

Figura 85: Registro do aluno E



Fonte: Acervo do pesquisador

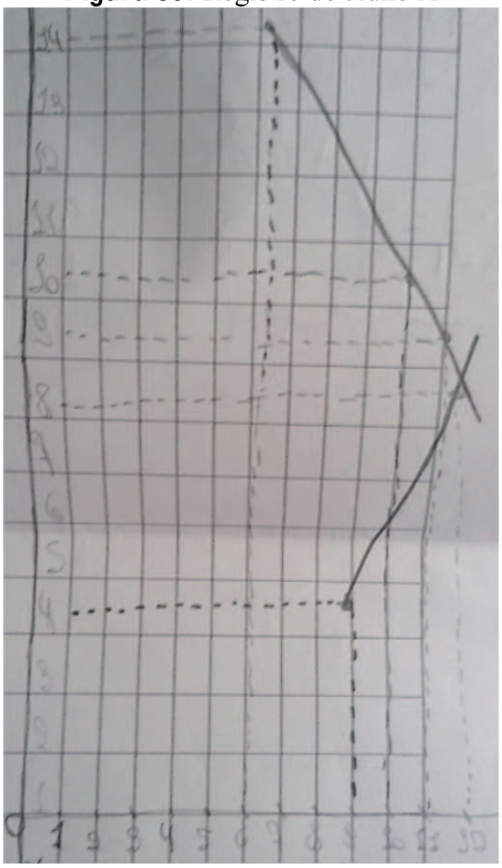
> E: Pronto, professor!
> P: Gostei E, mas agora eu lhe pergunto: você poderia me dizer qual a resposta deste problema, a partir deste gráfico?
> E: 12 e 8!
> P: Mas 12 + 8 é quanto?
> E: 20!
> P: 12 - 8 é 5?
> E: Não!
> P: Então tem alguma coisa aí! Tente observar a partir do ponto de intercessão destas duas retas qual é a solução.

> **Comentário do pesquisador:** como visto no problema 5, a resposta é o par ordenado (12,5;7,5); é verdade que o problema não o pedia, pedia apenas o esboço do gráfico, mas quisemos explorar este problema a mais neste ponto a fim de fazer que tanto o aluno E, como todos presentes na hora do consenso e da formalização, notassem que a intercessão das retas é a solução do sistema, como já dito na aula anterior. Podemos notar nesta representação gráfica que parece que a solução é (12,8), porém isto se dá justamente as limitações que as representações gráficas tem devido, por exemplo, às escolas usadas, conforme Friendlander e Tabach (2001): note que (Figura 85) até o 10 do eixo x a distância de um ponto a outro é a mesma, mas nos seguintes, feitos à mão

pelo aluno, ele não conseguiu seguir milimetricamente a escala, por isto a diferença (isto foi explicado pelo professor no consenso).

Por fim, o gráfico do aluno A foi o que mais nos chamou a atenção, conforme Figura 86:

Figura 86: Registro do aluno A



Fonte: Acervo do pesquisador

Comentário do pesquisador: podemos dizer que o registro do aluno A está quase impecável, tanto é que conseguiu a 'aproximação' da solução do sistema no eixo x, apesar de no eixo y não obter a mesma (as dificuldades das escalas como Friendlander e Tabach (2001) já falam desta representação), e que, aliás, enquanto ainda estávamos na plenária foi o primeiro a dizer que tinha encontrado a solução. Este aluno também representou algebricamente o sistema e, embora não o tenha resolvido via álgebra, podemos notar que foi se baseando nele que achou alguns pares, ou seja, o aluno A conseguiu lidar com as diversas representações de forma a obter no gráfico a solução (vale salientar que foi ele o primeiro aluno a obter a resposta do problema 5), o que é um indício de que pode ter assimilado as ideias que trabalhamos, como Goldin e Shteingold (2001) discutem em seus estudos.

O registro do aluno D também nos chamou a atenção, pois foi o único que usou valores negativos, todavia o que foi ainda mais curioso é que quando lhe perguntamos também, como fizemos com o aluno E, qual seria a solução, ele e o aluno E (que estavam em grupos diferentes) foram se juntar para “estender as retas” e ver onde se encontravam, de forma que desenharam na cadeira a continuação do eixo x na busca de encontrar a solução, contudo esbarraram no mesmo problema que o aluno E: a escala.

Na hora da socialização dos resultados um integrante de cada grupo veio ao quadro expor seus resultados (com exceção da aluna individual). Iniciando a plenária, o professor começou perguntando se a representação algébrica estava coerente com o problema e a resposta dos presentes foi sim; os dados numéricos foram facilmente entendidos e na hora dos gráficos o registro do aluno E no quadro mostrou a intercessão das retas no ponto (12,8) e como o do aluno A estava esboçado com a aproximação que comentamos anteriormente, o professor pôde formalizar o conteúdo no que toca a falar das limitações da representação gráfica, mas que numa aproximação se constataria o par que era solução do sistema e que se o resolvessem achariam este par, ou se obedecessem às condições de soma e subtração do problema, via representação numérica, teriam a confirmação da solução: (12,5; 7,5).

Comentário do pesquisador: esta ligação entre as representações a respeito de se obter ou confirmar a solução é algo muito necessário quando se fala de diversas representações, a fim de que os alunos notem como elas se complementam e então ajudam umas às outras, segundo Friedlander e Tabach (2001). Além do mais, no que toca à representação gráfica, como já apontamos, há a importância de se enfocar que a intercessão das retas é a solução do sistema e que neste caso em especial a noção de aproximação também é importante (e foi por isto que escolhemos este problema), pois vimos que muitos alunos gostaram desta forma de representação (o que revela o fato de o aspecto visual ser ‘atraente’ para alguns, segundo Friendlander e Tabach (2001) dizem). Termos explorado a busca da solução (embora não o fosse pedido) também foi algo muito rico: basta ver como o aluno E e D, mesmo em grupos diferentes, de fato tomaram para si o desafio de descobrir a solução.

Após o momento da formalização do conteúdo, o professor agradeceu a todos os presentes por toda a ajuda para realização da pesquisa e disse que após ter o material pronto traria para eles, a fim de que soubessem como tudo se desenrolou e assim encerrou a aula.

5.6.3 Considerações sobre o 6º bloco

Com esta etapa da pesquisa, queríamos ver como os alunos trabalhariam com a representação gráfica dos sistemas, que foi a única das 4 representações propostas por Friedlander e Tabach (2001) que não utilizamos nas etapas anteriores. Isto se deu, certamente, porque não é tão intuitivo fazer uma representação gráfica no plano cartesiano de um problema relacionado a um sistema, como resolvê-lo numericamente, e mesmo para quem já tem algum domínio da representação algébrica até poderia se deter em resolver o mesmo pelos métodos conhecidos algebricamente (adição, substituição, comparação) sem esboçar o gráfico a ele relacionado.

Foi necessário investigar quais eram os conhecimentos que os alunos detinham a respeito do plano cartesiano e ao vermos que não tinham nenhum, tivemos que explicar o que era o plano cartesiano, como escrevê-lo numa malha quadriculada, como localizar os pontos no mesmo e outras atividades referentes à noções básicas sobre este conteúdo para então iniciarmos a semana composta por estes dois problemas.

Conseguimos observar que alguns alunos demonstraram um bom domínio entre a representação algébrica e gráfica dos sistemas propostos (especialmente A, D e E), além de também utilizar os cálculos numéricos para obter os pares ordenados de cada equação do sistema, isto é indício de que o conceito sobre sistema pode ter sido assimilado por alguns alunos (GOLDIN; SHTEINGOLD, 2001, p.6). Embora, para outros, observamos que ainda houve dificuldade no que toca ao representar algebricamente o sistema, o que, por sua vez, é um indicador de que a ideia do uso de duas incógnitas diferentes para obtenção de duas equações, cada uma com as duas incógnitas diferentes pode não ter sido bem compreendida por estes.

Algumas ideias relacionadas à representação gráfica de um sistema conseguiram ser explanadas: 1) que o ponto onde as retas se cruzam é a solução do sistema mostrando assim uma outra forma de resolvê-lo, onde percebemos que muitos alunos gostaram desta forma de representação, certamente, porque o apelo visual é atraente (FRIEDLANDER; TABACH, 2001), e também porque representar pontos no plano cartesiano não envolve muitos cálculos algébricos como nos dois métodos apresentados, já que pode ser feito por atribuir valores às duas incógnitas e então ver se eles fazem com que a igualdade seja verdadeira, isto é, exigindo um domínio de representação numérica de certa forma; 2) que às vezes a solução não está nos pontos representados por números inteiros no plano cartesiano, mas graças às devidas aproximações podemos obter o ponto que é solução do problema, por outro lado, a necessidade das outras formas de resolver um sistema, pois elas permitem obter o ponto exato que é solução do problema; 3) que não se deve ligar todos os pontos localizados de uma forma apenas porque estão alinhados, mas é necessário ter o entendimento do que eles significam: daqui que entra a importância de entender quais pontos pertencem a qual representação algébrica, ou seja, temos aqui o ponto de que uma representação ajuda a entender outra (FRIEDLANDER; TABACH,

2001) e 4), que se os pontos localizados não permitem a adequada ligação para fazer retas (ou se não estão, ao menos, alinhados), pode ser que algo tenha sido feito errado nas representações para obter estes pontos, quer tenham sido numéricas ou até algébricas, e isto recai, mais uma vez, na necessidade de observar como estas três representações – numérica, algébrica e gráfica – se ajudam.

Apesar de ter sido extremamente positivo conseguir mostrar aos alunos estas 4 ideias acima relacionadas, ao se tratar da representação gráfica dos sistemas, não há dúvida que precisaríamos de mais tempo para poder utilizar outros problemas e ver como eles poderiam ir progredindo na compreensão deste modelo de representação dos sistemas de equação, além de que a falta de alunos no último problema também nos impediu de constatar como estava a compreensão deles a respeito do que abordávamos.

Por fim, outro aspecto que não podemos deixar de ressaltar é como a RP, a partir de uma exploração do primeiro problema deste bloco, nos permitiu fazer discussões sobre temas do cotidiano dos alunos. Sabemos da importância de ensinar uma matemática que possa estar interligada com vários aspectos da vida dos alunos, tanto no tocante a outras disciplinas, como a vida fora da escola num contexto mais amplo. Aliás, frise-se aqui que isto só foi possível porque quando o professor elaborou o problema 12 já o fez para permitir estas discussões, e isto revela novamente o ponto que Andrade, C. e Onuchic (2017) discutem de que cabe ao docente ter o cuidado para preparar o problema que deseja utilizar, tendo em vista os objetivos que quer alcançar.

5.7 SOBRE TODOS OS BLOCOS

Com as análises de cada bloco de problemas aplicado, podemos ter uma visão mais ampla de como se deu todo o percurso do ensino e aprendizagem do conteúdo dos sistemas de equações polinomiais do 1º grau que objetivamos trabalhar dentro da perspectiva da resolução de problemas e das representações múltiplas, além de também conseguir constatar o que nos faltou alcançar e então deixar também isto que nos faltou como sugestão para futuras pesquisas a quem se interessar.

Não há dúvida que, apesar da sala escolhida ser tida como a mais trabalhosa da escola, a metodologia da resolução de problemas ajudou muito a canalizar a energia dos alunos na busca das soluções dos problemas propostos. Constatamos como os alunos não tiveram problemas para trabalhar em grupos e também em ir buscando suas estratégias de resolução, muito pelo contrário, o trabalho em grupo serviu para que uns ajudassem os outros em suas dificuldades e que cada um contribuísse com algo naquilo que sabia fazer.

Percebemos como os dois primeiros problemas que visavam levar os alunos a se habituarem à metodologia da resolução de problemas, segundo Andrade, C. e Onuchic (2017), e a estimulá-los a usarem de várias formas de resposta foi realizada de forma tranquila. Esta forma de trabalho conseguiu permear todos os outros problemas; até mesmo o bloco das representações gráficas que foi realizado tempos depois. Conseguimos ver também como as discussões dos registros no quadro feitos pelos alunos, dos momentos de consenso até as formalizações do conteúdo, foram muito importantes: lembremos o "encantamento" que alguns alunos demonstraram no olhar ao conhecerem o método da adição.

Notamos como, durante toda a pesquisa, a maioria da sala sempre optou pela representação que antecede todas as outras em matemática, isto é, a numérica para responder os problemas propostos, como Friedlander e Tabach (2001) já diziam. Por outro lado, não podemos deixar de ressaltar que, apesar de resolverem os problemas por esta forma de representação e alguns que tentaram resolver pela representação algébrica não obtiveram sucesso, boa parte dos alunos conseguiu demonstrar um bom domínio da passagem da representação verbal e escrita para a algébrica para obter os sistemas de equações do 1º grau que representavam os problemas! Isto foi possível, entre outras coisas, graças à mediação do professor que, diante de alguma representação verbal exposta, oralmente, pelos alunos, aliada a representação algébrica que tinham montado até aquele momento, fez com que repensassem o que tinham escrito e assim chegassem à resposta correta, ou a confirmassem se já a tinham obtido. Ouvir os alunos para conseguir relacionar o que se passa em suas mentes com aquilo que escreveram, conforme dizem Goldin e Shteingold (2001) quando abordam as questões das representações internas e externas, e saber como agir nas representações usadas pelos mesmos a fim de ajudá-los a chegar a formar o conceito sobre os sistemas de equações polinomiais do 1º grau, foi algo muito necessário.

Ainda sobre o uso das representações algébricas, conseguimos observar que os métodos da adição e substituição podem não ter sido apreendidos plenamente pelos alunos. É verdade que, após a apresentação destes métodos, vimos que alguns alunos tentaram resolver os problemas usando-as, todavia quase não houve sucesso em nenhum e os que apresentaram algum êxito nós acreditamos ter sido mais por uma espécie de domínio mecânico do algoritmo do método do que realmente em que consiste a ideia do mesmo (embora o problema introdutório do método da substituição tenha um potencial bem esclarecedor para a introdução desta forma de resolver).

Evidentemente, não desconsideramos o empenho demonstrado pelos alunos que podem ter assimilado apenas o passo a passo do algoritmo, já que é a primeira vez que a turma é exposta a este conteúdo, contudo, estamos cientes que seria necessário mais tempo e assim mais diversidade de problemas para auxiliar os alunos a melhor operacionalizar com estes métodos. Além disto, reconhecemos que na maioria dos problemas que utilizamos prevaleceu a representação verbal em sua exposição e, certamente, teria sido mais rica toda a pesquisa se tivéssemos abordado problemas também em diversas formas, como o problema 8 que foi através de um desenho.

Outro ponto que merece nossa atenção diz respeito ao uso da representação gráfica em nosso trabalho. Tivemos pouco tempo para trabalhar com estas formas de representação: só dois encontros. Tal forma de representação não é tão "natural" para surgir, soma-se a isto o fato de que a turma na qual foi realizada a pesquisa não tinha conhecimento nem do plano cartesiano, o que nos levou a ter que primeiro apresentar isto a eles, a fim de que pudéssemos então trabalhar com as representações gráficas, e apesar do pouco espaço de tempo destinado a trabalhar com ela, notamos como foi bem atrativa aos alunos. Ressaltamos que foi graças a este bloco de problemas, sugerido após a qualificação, que conseguimos com os dois problemas propostos trabalhar algumas características próprias desta forma de representação, além de também discutir questões do cotidiano: e este é outro ponto positivo a ser ressaltado.

O trabalho com a metodologia da resolução de problemas nos permitiu trazer à sala de aula duas formas de debate que, muitas vezes, é difícil de ser feito em aulas de Matemática: o primeiro diz respeito à ponte que conseguimos realizar com Ciências, ao discutir a importância de uma alimentação saudável; e o segundo refere-se à discussão sobre o Bolsa Família e a geração de emprego, ao falarmos sobre como encontrar meios para ajudar as pessoas a conseguirem ter uma renda que lhes permita conseguir se alimentar de forma saudável. Todos estes momentos de debates foram formas de exploração do problema 12 que foi o motivador deles: tanto observando questões matemáticas (como foram os cálculos para saber quanto uma família iria receber do bolsa família), como questões ligadas aos nutrientes e a busca de como melhorar as rendas de uma família. De certa forma, a agitação dos alunos neste momento foi intensa, isto se deve ao fato de tanto eles estarem vendo a matemática sendo "aplicada" dentro de outras áreas da suas vidas, como também de verem a possibilidade de trabalharem questões que visam até mesmo o futuro (do Brasil, de cada um deles etc.) ao pensarem em meios para se ter mais dinheiro.

Ao chegar neste ponto é bom lembrar que a resolução de problemas, atualmente, não se restringe apenas a resolver problemas, mas existem as vias da exploração e da proposição de problemas como alguns autores trabalham, por exemplo, Andrade, S. (1998) e Cai *et al.* (2015), como também na união das três, conforme Andrade, S. (2017), aliás, o próprio roteiro proposto por Andrade, C. e Onuchic (2017) trazem como um último momento a fase da proposição, porém não conseguimos trabalhar de forma satisfatória estas outras duas vias em nossa pesquisa, embora tenhamos deixado um bloco específico para a proposição de problemas no qual conseguimos obter problemas muito interessantes por parte das duplas, o que é um indício de que as ideias trabalhadas a respeito, ao menos, do que é um sistema de equação polinomial do 1º grau foi possivelmente assimilado.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Após a realização da pesquisa é hora de voltarmos os nossos olhares para o que norteou seu início, isto é, aquela pergunta que nos inquietou a qual agora queremos visualizar o quanto ela pôde ter sido, ou não, respondida: *quais as potencialidades da resolução de problemas, aliada ao uso das representações múltiplas, no ensino de sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas?*

Começamos por relembrar que a proposta da Resolução de Problemas que adotamos foi aquela exposta por Andrade, C. e Onuchic (2017) que é composta de várias etapas, onde vemos como muito ricos os momentos das **plenárias e das buscas dos consensos**: eles permitiram envolver mais os alunos, já que os discentes viram os seus próprios resultados serem debatidos e, em muitos casos, não apenas sendo "jogados fora, porque são errados", mas vendo como diferentes caminhos permitiam chegar à mesma solução (representações múltiplas ajudam nisto), apesar de que existem caminhos mais "rápidos" para se resolver certos problemas. Levar os alunos a pensarem em como corrigir certas escritas no quadro foi muito gratificante, embora poucos alunos tenham participado.

Os momentos da **formalização dos conteúdos** do que é um sistema de equações polinomiais do 1º grau com duas incógnitas e dos métodos da adição e substituição, como das representações gráficas, também foram muito importantes, pois através da RP conseguimos fazer isto, mas não apenas de uma forma direta, e sim tentando partir dos registros dos alunos na lousa, valorizando o que eles fizeram: isto desperta neles autoestima e então se espera que, por isto, eles possam estar mais receptivos para o aprendizado.

Não podemos deixar de mencionar também como a fase da **preparação do problema** não deve ser subestimada pelo professor: usar RP não é utilizar qualquer problema e pôr para que os alunos resolvam e acompanhar o que estão fazendo: é necessário que se veja se o problema não é nem fácil, nem difícil demais, além de se ter sempre em conta o que se deseja alcançar com aquela atividade que se está propondo ao aluno. A fase da **leitura pelo professor** também não deve ser subestimada, pois é neste momento que o professor pode perceber se os alunos de fato entenderam o que o problema está lhes pedindo a fazer, como também corrigir/esclarecer palavras ou conteúdos matemáticos necessários para se resolver o problema proposto.

A RP nos permitiu realizar atividades que levaram para a sala de aula temas do cotidiano – como a alimentação saudável e o Bolsa Família, por exemplo –, graças aos momentos de exploração do problema 12, os quais pudemos constatar que foram muito ricos, como também as atividades de **proposição de problemas** a partir do problema 11, pois tais atividades permitiram que os alunos fizessem "o caminho inverso do aprendizado", demonstrando se conseguiram entender as ideias relacionadas ao conteúdo de sistema para assim elaborar problemas que por eles se expressem (habilidade ressaltada pela BNCC): o qual podemos perceber que de fato foi rico de aprendizado (CAI *et al*.,. 2015) não apenas matematicamente falando, mas também deu suas contribuições para as habilidades de "português" dos alunos, apesar de revelar que a maioria da turma demonstrou um bom domínio apenas da ideia do uso de duas incógnitas diferentes para obtenção de duas equações, cada uma com as duas incógnitas diferentes.

Aliada à RP acreditamos que as representações múltiplas que Friedlander e Tabach (2001) apontam – verbal, numérica, algébrica e gráfica – tinham um forte potencial para ajudar no aprendizado de nossos alunos, apesar de a representação gráfica ter sido trabalhada apenas nos dois últimos problemas, mas foi fonte de boas discussões e observações. As outras apareceram de forma muito intensa: a numérica e algébrica por escrito; já a verbal, na maioria das vezes, oralmente exposta nos diálogos com o professor, os quais conseguimos transcrever, e de forma bem especial no bloco da proposição dos problemas através dos registros escritos destes.

Já esperávamos a presença da numérica, pois as resoluções dos problemas envolveriam cálculos a serem feitos e, conforme Friedlander e Tabach (2001), é esta representação que precede as outras, além de ser a ponte para a algébrica. Por sua vez, esperamos o surgimento das algébricas com mais frequência a partir do momento que formalizamos o conceito do que é o sistema de equações e que de fato ocorreu: ora com os problemas pedindo que os sistemas fossem montados, ora que o professor pedisse, ora os próprios alunos o escrevessem. Aliás, isto nos fez perceber como alguns dos alunos conseguiram mostrar um bom domínio desta forma de representação, ao menos para montar os sistemas. Isto é até o descritor 34 da matriz do SAEB: "Identificar um sistema de equações do 1º grau que expressa um problema." (BRASIL, 2011, p.190). Já no tocante a resolvê-los pelo método de adição e substituição observamos que, apesar dos esforços de alguns alunos para usarem este métodos para resolução (com acertos e erros), ainda foram métodos que não ficaram bem claro para os alunos, também porque não trabalhamos com mais outras atividades que ajudassem a isto, não à toa, muitos alunos que expressavam corretamente os sistemas optavam por resolvê-los por meio de outras representações que não a algébrica – de forma quase unânime usando a numérica. Esse fator revela que enquanto a ideia do uso de duas incógnitas diferentes para obtenção de duas equações, cada uma com as duas incógnitas diferentes foi bem compreendida por boa parte da turma, já a ideia referente à eliminação de uma incógnita para iniciar a resolução não obteve o mesmo grau de assimilação.

Algo que nos deixou muito surpresos, e nos fez entender melhor o que Goldin e Shteingold (2001) discutem das representações internas e externas, foi o uso das representações verbais expostas oralmente pelos alunos que conseguimos "obter", graças aos momentos da mediação que o professor podia realizar ora com os grupos, ora individualmente com os alunos. Aprendemos que, de fato, não podemos afirmar com segurança o que se passou na mente dos alunos a respeito daquilo que foi ensinado, a não ser a partir daquilo que eles deixaram escritos, mas se tivéssemos nos detido apenas ao aspecto escrito teríamos perdido uma grande fonte de informações que nos ajudam até mesmo a entender o que os alunos quiseram expressar pela escrita. Esta fonte de informações se faz presente nas representações verbais oralmente dos alunos junto com a adequada mediação do professor. Se há um ponto que consideramos chave em nossa pesquisa foi a contribuição que os diálogos com os alunos nos deram para entender o que se passou "nas suas cabeças" a respeito daquilo que estávamos ensinando, isto é, a necessidade de ouvir o aluno é algo essencial, principalmente para quem desejar trabalhar com as diversas representações, já que é por meio da verbal que poderemos entender o que ele quis fazer quando expressou tal cálculo, tal registro algébrico etc.

Durante todo o decorrer da pesquisa, conseguimos verificar em vários momentos o uso de mais de uma representação por parte dos alunos (FRIEDLANDER; TABACH, 2001), especialmente a algébrica, na construção do sistema, e a numérica, na resolução deles, o que é um fator positivo para o aprendizado, pois umas ajudam as outras: basta que vejamos os vários relatos em que foram as representações verbais que auxiliaram os alunos na (re)construção algébrica dos sistemas que eles tinham feito, por exemplo.

Por sua vez, a RP contribuiu muito para ajudar aos alunos a serem os protagonistas, construtores dos seus conhecimentos, saindo, assim, da sua zona de conforto, buscando criar seus próprios meios para resolver os problemas propostos.

Apesar de tudo isto, ressaltamos que ainda foi insuficiente o trabalho com o método da adição, substituição e as representações gráficas e, por isto, certamente, a aprendizagem destes pontos ainda não foi bem formada e firmada para os alunos; diferente do trabalho com os problemas do 2º bloco no qual conseguimos observar que as ideias relacionadas a eles foram melhor assimiladas pelos alunos, tendo em vista como bem conseguiram ir representando os sistemas nos problemas seguintes. Além disto, sabemos que alguns dados da pesquisa não conseguiram ser coletados durante todo o processo e isto é um risco que corremos quando nos dispomos a fazer pesquisa dentro de nossa sala de aula, já que não tínhamos como acompanhar todos os grupos e alunos individuais ao mesmo tempo. Sabemos também que devido à heterogeneidade da sala de aula, cada aluno teve sua forma e seu tempo para assimilar, ou não, as ideias a respeito dos sistemas que quisemos ensinar. Além do mais, os momentos de dispersão da maioria dos alunos, em várias etapas da pesquisa, também contribuíram negativamente para o efetivo aprendizado da turma.

Por fim, percebemos que a RP, além de contribuir para que houvesse um domínio da sala, também permitiu direcionar as energias dos alunos para a realização das atividades dos problemas propostos. Frisamos também que a RP cooperou muito para tornar os alunos mais ativos na iniciativa de resolver os problemas, não esperando apenas pelo professor. Isso foi muito importante, pois foi a partir dos seus registros que as discussões puderam ser realizadas nos momentos das plenárias, consensos e formalização dos conteúdos, e então a construção coletiva do conteúdo de sistemas de equações polinomiais do 1º grau com duas incógnitas pôde ir sendo firmada. Além disso, a oportunidade de trabalhar com os temas da alimentação saudável e do Bolsa Família – temas que poderiam não ter ligação nenhuma com a Matemática, mas que faz parte da vida dos alunos – levou-nos a perceber que podemos usar a RP para conseguir trazer para a sala de aula debates com temas diversos, para além da própria Matemática.

As contribuições das representações múltiplas também foram de grande relevância, principalmente porque nos revelou a importância de ouvir os alunos, de modo que, a partir das suas representações orais, os próprios discentes conseguiam se corrigir onde poderiam ter se equivocado nos registros numéricos, algébricos ou gráficos. Isto também nos mostra como o uso de mais de uma representação para o ensino de sistemas de equações polinomiais do 1º grau com duas incógnitas pode ser relevante.

Aos interessados em aprofundar os estudos dos sistemas de equações polinomiais do 1º grau com duas incógnitas, a partir de nosso trabalho, sugerimos que possam desenvolver mais a parte da representação gráfica através de aplicativos eletrônicos que permitam elaborar os gráficos próprios de cada equação dos sistemas, e assim conseguir fazer mais pontes entre esta forma de representação e as outras. Sugerimos também que possam aprofundar mais o ensino dos métodos resolutivos algébricos: adição, substituição e, até mesmo, comparação (que não abordamos). Indicamos ainda que possam realizar pesquisas com este conteúdo dentro da perspectiva da exploração e proposição de problemas, de forma que consigam abordar contextos que permitam momentos para realização de pontes com temas do cotidiano e de discussões com temas que contribuam para a formação cidadã dos alunos.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, C. P.; ONUCHIC, L. R. Perspectivas para Resolução de Problemas no GTERP. *In*: ONUCHIC, L. R.; JUNIOR, L. C. L.; PIRONEL, M. (org.). **Perspectivas para Resolução de Problemas.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017. p. 433-466.

ANDRADE, S. de. Um caminhar crítico e reflexivo sobre Resolução, Exploração e Proposição de Problemas Matemáticos no Cotidiano da Sala de Aula. *In*: ONUCHIC, L. R.; JUNIOR, L. C. L.; PIRONEL, M. (org.). **Perspectivas para Resolução de Problemas.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017. p. 355-395.

ANDRADE, S. de. **Ensino-Aprendizagem de matemática via resolução, exploração, codificação e descodificação de problemas**. 1998. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1998.

ANDRADE, S. de. Ensino-aprendizagem de matemática via exploração de problemas e o uso do laboratório de ensino de matemática. *In*: Conferência Interamericana de Educação Matemática, XIII, 2011, Recife. **Anais: XIII – CIAEM**. Recife, [s.n.], 2011.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Tradução Maria J. Alvarez, Sara B. Santos e Telmo M. Baptista. Porto (Portugal): Porto Editora, 1994.

BONNOTO, C.; SANTO, L. D. On the Relationship Between Problem Posing, Problem Solving, and Creativity in the Primary School. *In*: SINGER, F. M.; ELLERTON, N. F. e CAI, J. (ed). **Mathematical Problem Posing, From Research to Effective Practice**. Nova York: Springer Science + Business Media, 2015. p. 103-123.

BRANDÃO, J. D. P. **Ensino aprendizagem de função através da resolução de problemas e representações múltiplas.** 2014. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2014.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros curriculares nacionais**. Terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental. Matemática. Brasília, DF: Ministério da Educação, 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf. Acessado em: 02 de set. de 2013.

BRASIL. Ministério da Educação. **PDE.** PROVA BRASIL. PLANO DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2011. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/dmdocuments/prova%20brasil_matriz2.pdf. Acessado em: 10 de fev. de 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Educação é a base. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2017. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=79601-anexo-texto-bncc-reexportado-pdf-2&category_slug=dezembro-2017-pdf&Itemid=30192. Acessado em: 15 de ago. de 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. **Programa gestão da aprendizagem escolar** - GESTAR II. Matemática: Atividades de Apoio à Aprendizagem 6 - AAA6: matemática nas migrações e em fenômenos cotidianos (Versão do Aluno). Brasília: Secretaria de Educação Básica, 2008.

BRASIL. Ministério da Educação. **Matemática**: Caderno de Teoria e Prática 6 - TP6: matemática nas migrações e em fenômenos cotidianos. Brasília: Secretaria de Educação Básica, 2008.

CAI, J. *et al.* Problem-Posing Research in Mathematics Education: Some Answered and Unanswered Questions. *In*: SINGER, F. M.; ELLERTON, N. F.; CAI, J. (ed). **Mathematical Problem Posing, From Research to Effective Practice**, Nova York: Springer Science + Business Media, 2015. p. 3-34.

CENTURIÓN, M.; JAKUBOVIC, J. **Matemática nos dias de hoje 8º ano**: na medida certa. São Paulo: Leya, 2015.

CHICA, C. H. Por que formular problemas? *In*: SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I. (Org.). **Ler, escrever e resolver problemas**: habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001. p. 151-173.

CURY, H. N.; BISOGNIN, E. Análise de Soluções de um Problema Representado por um Sistema de Equações. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro - SP, v. 22, n. 33, p. 1-22, 2009.

FREITAS, T. dos S. **Língua materna e linguagem matemática:** influências na resolução de problemas matemáticos. 2015. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2015.

FRIEDLANDER, A.; TABACH, M. Promoting multiple representations in algebra. *In*: CUOCO, A. A.; CURCIO, F. R. (ed.). **The roles of representation in school mathematics.** Reston: NCTM, 2001. p. 173-185.

GIL, A.C. **Como elaborar projetos de pesquisas**. 5 ed. São Paulo: Atlas, 2010.

GOLDIN, G.; SHTEINGOLD, N. Systems of representations and the development of mathematical. *In*: CUOCO, A. A.; CURCIO, F. R. (ed.). **The roles of representation in school mathematics.** Reston: NCTM, 2001. p. 11-23.

GOULART, A. M. A. **A aprendizagem significativa de sistemas de equações do 1º grau por meio da resolução de problemas**. 2014. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2014.

HUANCA, R. R. H. **A Resolução de Problemas no processo de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática na e além da sala de aula.** 2006. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.

JUREDO, U. M. Creación de Problemas, Avances y Desafíos em la Educación Matemática. **REMATEC**: Revista de matemática ensino e cultura, Natal, n. 21, p. 79-88, 2016.

LANKSHEAR, C. KNOBEL, M. **Pesquisa pedagógica**: do projeto à implementação. Porto Alegre: Artmed, 2008.

MIRANDA, I. R. de; GRANDO, N. I. Álgebra no ensino fundamental: dificuldades e obstáculos. *In*: GRANDO, Neiva Ignês (org.). **Pesquisa em educação matemática**: contribuições para o processo ensino-aprendizagem. Passo Fundo: UPF, 2006. p. 56-74.

NCTM. **Princípios e normas para a matemática escolar**. Tradução: Magda Melo. 2. ed. Lisboa: APM, 2008.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. *In*: BICUDO, M. A. V. (org.) **Pesquisa em educação matemática:** concepções e perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 199-218.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro – SP, v. 25, n. 41, p. 73 – 98, 2011.

PARAIBA (Estado). Secretaria de Educação. **Referenciais Curriculares do Ensino Fundamental** – Matemática, Ciências da Natureza e Diversidade sociocultural. Volume 2. João Pessoa: Secretaria de Educação do Estado, 2010.

PIMENTEL, D. E. **Metodologia da resolução de problemas no planejamento de atividades para transição da aritmética para a álgebra**. 2010. Dissertação (Mestrado em Ensino em Ciências Exatas e Tecnologia) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2010.

PONTE, J. P.; BRANCO, N & MATOS, A. **Álgebra no Ensino Básico**. Ministério da Educação, 2009.

ROCHA, F. de O. **Aprendizagem da resolução de sistemas de equações do 1º grau por alunos do 8º ano do ensino fundamental**: método da substituição. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Matemática, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2010.

SANTOS, V. I. O.. **Relatório da prática de ensino supervisionada.** Resolução de problemas envolvendo Sistemas de Equações de 1.º grau a duas incógnitas - um estudo com alunos do 8.º ano. 2012 – Mestrado em Ensino de Matemática, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2012. Disponível em: http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/8330/1/ulfpie043302_tm.pdf. Acessado em: 10 de fev. de 2017.

SCHROEDER, T. L., LESTER, F. K. Developing understanding in mathematics via problem solving. *In*: TRAFTON, P. R., SHULTE A. R. (ed.). **New directions for elementar school mathematics**. Reston: NCTM, 1989. p. 31-43.

SILVA, C. A. R. **Um estudo sobre sistemas de equações lineares**. 2014. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal do Ceará, Juazeiro do Norte, 2014.

SILVA, D. M. T. F. **Aprendizagens Algébricas e o Desenvolvimento do Pensamento Algébrico em Alunos do 8º Ano**. 2013. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e Secundário) – Universidade da Madeira, Portugal, 2013. Disponível em: http://docplayer.com.br/8533981-Aprendizagens-algebricas-e-o-desenvolvimento-do-pensamento-algebrico-em-alunos-do-8o-ano-dissertacao-de-mestrado.html. Acessado em: 10 de fev. de 2017.

SILVA, L. M. **Compreensão de ideias essenciais ao ensino-aprendizagem de funções via resolução, proposição e exploração de problemas**. 2013. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2013.

STANIC, G. M. KILPATRICK, J. Historical Perspectives on Problem Solving in the Mathematics Curriculum. *In*: CHARLES, R. I.; SILVER, E. A. (Ed.) **The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving.** Reston: NCTM, 1989, p. 1-22.

TAVARES, A. H. C. **Usando a história da resolução de alguns problemas para introduzir conceitos: Sistemas Lineares, Determinantes e Matrizes**. 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2013.

ANEXO

UEPB

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Para Escola: Escola Municipal de Ensino Fundamental "Professor José Honório Filho".
Sra. Diretora: Maria Anunciada

Solicitação de Pesquisa de Campo

Prezada Diretora

Vimos por meio deste, solicitar autorização de Vossa Senhoria para que o aluno JUSCELINO DE ARAÚJO SILVA, matrícula 2017092304, que está matriculado na disciplina de Dissertação de Mestrado, do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, realize as atividades de observação e pesquisa com intervenção em campo nesse estabelecimento de ensino.

Para realizar a atividade de pesquisa, o aluno deverá acompanhar, observar e aplicar algumas atividades desenvolvidas na turma do 8º Ano do Ensino Fundamental dessa instituição de ensino.

Outrossim, informamos que todas as atividades acima descritas serão desenvolvidas pelo aluno, sob orientação do professor Dr. Silvanio de Andrade vinculado a Universidade Estadual da Paraíba.

Contando com a colaboração de Vossa Senhoria, subscrevemo-nos.

Atenciosamente,

19 de abril de 2018

Professor orientador

Diretora da Escola

Autorizado em: 19 / de abril / 2018.
Carimbo:

Eliete Maria [illegible]