UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

EMILY DE VASCONCELOS SANTOS

CONTRIBUIÇÕES DA RESOLUÇÃO, EXPLORAÇÃO E PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS AO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA COMBINATÓRIA NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

CAMPINA GRANDE - PB
2019

EMILY DE VASCONCELOS SANTOS

CONTRIBUIÇÕES DA RESOLUÇÃO, EXPLORAÇÃO E PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS AO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA COMBINATÓRIA NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Mestra em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática

Orientador: Prof. Dr. Silvanio de Andrade

CAMPINA GRANDE - PB
2019

S237c Santos, Emily de Vasconcelos.

Contribuições da resolução, exploração e proposição de problemas ao processo de ensino e aprendizagem da combinatória nos anos iniciais do ensino fundamental [manuscrito] / Emily de Vasconcelos Santos. - 2019.

228 p. : il. colorido.

Digitado.

Dissertação (Mestrado em Acadêmico em Ens. de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2019.

"Orientação : Prof. Dr. Silvanio de Andrade , Coordenação do Curso de Matemática - CCT."

1. Educação estatística. 2. Resolução de problemas. 3. Análise combinatória. 4. Educação básica. I. Título

21. ed. CDD 519.5

Elaborada por Giulianne M. Pereira - CRB - 15/714 BC/UEPB

EMILY DE VASCONCELOS SANTOS

CONTRIBUIÇÕES DA RESOLUÇÃO, EXPLORAÇÃO E PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS AO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA COMBINATÓRIA NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática

Aprovada em: 29 / 04 / 2019.

BANCA EXAMINADORA

Silvanio de Andrade

Prof. Dr. Silvanio de Andrade (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Rute E S R Borba

Profa. Dra. Rute Elizabete de Souza Rosa Borba (Examinadora)
Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)

Profa. Dra. Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão Santos (Examinadora)
Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)

CAMPINA GRANDE-PB
2019

Dedico esta dissertação aos meus pais,
José Orli e Maria Valdenilza, e meu esposo
José de Arimatéia, por tanto que apoiam e
incentivam o meu crescimento profissional.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por sempre guiar os meus caminhos, permitindo-me concretizar mais um sonho.

Aos meus pais, pelo exemplo de pessoas que são.

À minha irmã, pelo incentivo.

Ao meu esposo, pela paciência, compreensão e apoio incondicional. E por sempre ser o meu refúgio nos momentos em que mais precisei.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Silvanio de Andrade, pelos ensinamentos que transpassam os muros da acadêmica e pela dedicação a fim de tornar realidade o presente trabalho.

Aos membros da banca examinadora, Profa. Dra. Rute Elizabete de Souza Rosa Borba e Profa. Dra. Jaqueline Aparecida Foratto Lixandrão Santos, por aceitarem o convite e pelas valiosas contribuições em prol da melhoria do trabalho.

A todos que fazem parte do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001. Assim agradeço a CAPES.

Aos colegas do Grupo de Estudo e Pesquisa sobre Educação e Pós-modernidade (GEPEP), com os quais tive a oportunidade de adquirir mais conhecimento.

Aos demais colegas do mestrado, pelo companheirismo.

Aos familiares (sogro, sogra, sobrinho, tios, tias, primos, primas, avós etc.), pela torcida.

Aos meus amigos, pelo apoio.

À direção da escola, em especial a diretora e a professora participante, pela confiança em nos disponibilizar uma turma para a realização da pesquisa.

Aos alunos da turma, pelo empenho durante os encontros.

Enfim, a todos que, de algum modo, contribuíram para a realização deste trabalho.

Muito Obrigada!

RESUMO

Esta pesquisa investiga as contribuições da Resolução, Exploração e Proposição de Problemas (REP) ao processo de ensino e aprendizagem da Combinatória nos anos iniciais do Ensino Fundamental, tomando como base estudos relacionados à metodologia da Resolução de Problemas e à Educação Combinatória. Mediante o levantamento bibliográfico e os estudos discutidos no referencial teórico, observa-se que, embora o número de pesquisas no âmbito da Educação Combinatória tenha aumentado progressivamente nos últimos anos, ainda são poucos os estudos direcionados especificamente ao trabalho pedagógico nos anos iniciais do Ensino Fundamental. O estudo da pesquisa de campo possui cunho qualitativo, em razão de que se empenhou em descrever e analisar detalhadamente os dados coletados por meio de observações, notas de campo, registro escrito feito pelos alunos e gravações de áudio (BOGDAN; BIKLEN, 1994; OLSEN, 2015). Como sujeitos da pesquisa, adotaram-se 16 alunos de uma turma de 5º ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede pública municipal do Estado da Paraíba. As ações pedagógicas realizadas em contexto de sala de aula apoiaram-se na perspectiva metodológica da Resolução, Exploração e Proposição de Problemas defendida por Andrade (1998; 2017), bem como em estudos que discutem o processo de ensino e aprendizagem da Combinatória. Na oportunidade, trabalharam-se os quatro tipos de problemas combinatórios (combinação, arranjo, permutação e produto cartesiano [BORBA, 2010]) que precisam ser abordados nos anos iniciais do Ensino Fundamental, a partir de problemas combinatórios retirados da pesquisa de Pessoa (2009) e propostos pelos alunos. Conclui-se que a proposta metodológica da Resolução, Exploração e Proposição de Problemas contribui para a promoção da aprendizagem combinatória dos alunos, possibilitando o desenvolvimento de um processo educativo reflexivo. Constatou-se que as problematizações provocadas durante o processo de Resolução, Exploração e Proposição de Problemas potencializaram o trabalho de reflexão sobre os invariantes dos problemas combinatórios, o que favoreceu o desenvolvimento do raciocínio combinatório, generalizante e lógico dos alunos, além de também ter possibilitado aos pesquisadores explorar diferentes dimensões dos problemas propostos.

Palavras-chave: Resolução de Problemas. Combinatória. Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Educação Estatística.

ABSTRACT

This research investigates the contributions of Problem Solving, Exploration and Posing to the teaching and learning process of Combinatorics in the early years of Elementary School, based on studies related to the Problem Solving methodology and Combinatorial Education. By means of bibliographical survey and studies discussed in the theoretical frame of reference, it is observed that, although the amount of research in the domain of Combinatory Education has increased progressively in recent years, there are still few studies specifically focused on pedagogical work in the early years of Elementary Education. Field research is characterized by a qualitative nature, as it has been endeavored to describing and analyzing in detail the data collected through observations, field notes, written record by the students and audio recordings (BOGDAN; BIKLEN, 1994; OLSEN, 2015). As subjects of the research, 16 students from a 5th grade class from Primary School of a municipal public institution in the State of Paraíba were adopted. Pedagogical activities carried out in classroom context were supported by the methodological perspective of Problem Solving, Exploration and Posing advocated by Andrade (1998; 2017), as well as by studies related to teaching and learning process of Combinatorics. On that occasion, the four types of combinatorial problems (combination, arrangement, permutation and Cartesian product [BORBA, 2010]) – which need to be approached in the early years of Elementary Education – were worked on, taking as basis combinatorial problems extracted from Pessoa's research (2009) and proposed by the students. The conclusion is that the methodological proposal of Problem Solving, Exploration and Posing contributes to promoting combinatorial learning for the benefit of students, making it possible to develop a reflective educational process. It was found that the discussions that arose during the process of Problem Solving, Exploration and Posing maximized reflection on the invariants of the combinatorial problems, which favored the development of logical generalizing combinatorial reasoning on the part of the students, while it made possible to explore different dimensions of the proposed problems dealing with these aspects.

Keywords: Problem Solving. Combinatorics. Early Years of Primary Education. Statistical Education.

LISTA DE FIGURAS

FIGURAS REFERENTES AO ENCONTRO 01

FIGURAS REFERENTES AO ENCONTRO 02

FIGURAS REFERENTES AO ENCONTRO 03

FIGURAS REFERENTES AO ENCONTRO 04

FIGURA REFERENTES AO ENCONTRO 05

LISTA DE QUADROS

QUADROS REFERENTES AO ENCONTRO 01

QUADROS REFERENTES AO ENCONTRO 02

QUADROS REFERENTES AO ENCONTRO 03

QUADROS REFERENTES AO ENCONTRO 04

QUADROS REFERENTES AO ENCONTRO 05

QUADROS REFERENTES AO FECHAMENTO DAS REFLEXÕES SOBRE A EXPERIÊNCIA DIDÁTICA EM SALA DE AULA

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 PARA INICIAR O ASSUNTO

Ao longo da nossa experiência profissional e acadêmica como educadores matemáticos, continuamente precisamos nos questionar em que aspectos precisamos aprimorar nossa prática para o favorecimento da qualidade do processo de ensino e aprendizagem da Matemática. No que se refere à Educação Combinatória, questões metodológicas e de conteúdo podem vir a nos inquietar. Os problemas combinatórios possuem diferentes características e requerem o entendimento dos diferentes caminhos de resolução. Enquanto professores de Matemática, cabe-nos questionar, por exemplo: como podemos fazer para que nossos alunos consigam compreender as ideias essenciais da Combinatória? Quais seriam estas ideias essenciais? Em que nível de ensino este conteúdo deve ser abordado?

As contribuições dos conceitos combinatórios ao desenvolvimento da aprendizagem da Matemática e em diferentes áreas do conhecimento têm despertado a atenção de diversos pesquisadores, tais como: Borba (2016); Pessoa e Borba (2009); Pessoa (2009); Almeida (2010); Santos (2016); e Silveira (2016). O raciocínio combinatório contribui para a formação do raciocínio lógico-dedutivo, do raciocínio formal e do raciocínio generalizante, que são tipos de raciocínios extremamente importantes para a construção de conceitos matemáticos, que influenciam em conceitos oriundos de outras ciências e que nos ajudam a interpretar diversas situações do cotidiano em que a contagem de agrupamentos de elementos é essencial.

Com relação a isso, identificamos em pesquisas (PESSOA; SILVA, 2012; PESSOA; SANTOS, 2012) realizadas no âmbito da Educação Combinatória que a sistematização como forma de organização da estratégia de resolução é uma das competências que compete ao raciocínio combinatório. Quando os alunos conseguem enumerar as possibilidades, seja por listagem, árvore de possibilidades ou outra estratégia de resolução, eles seguem uma lógica para organizar seu raciocínio de forma sistemática, percebendo, assim, regularidades que os permitem generalizar os resultados.

Em razão de tal relevância, os documentos oficiais (BRASIL, 1997; PARAÍBA, 2010; BRASIL, 2014) que norteiam as práticas educativas em nosso país e Estado apontam a necessidade do ensino da Combinatória começar ainda nos primeiros anos de escolaridade do Ensino Fundamental. Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental (PCN) – Anos Iniciais (BRASIL, 1997), que têm como desígnio apresentar propostas para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática, pontuam que as características da "vida contemporânea trazem ao currículo de Matemática uma demanda em abordar elementos da estatística, da Combinatória e da probabilidade, desde os ciclos iniciais" (BRASIL, 1997, p. 84).

Diante tais apontamentos, na condição de professores de Matemática, cabem-nos questionar nesse momento: Que assuntos referentes à Combinatória, probabilidade e estatística precisam ser trabalhados neste nível de escolaridade? Entendemos que a finalidade do ensino da Combinatória nos anos iniciais é fazer com que o aluno consiga:

> [...] construir procedimentos para coletar, organizar, comunicar e interpretar dados, utilizando tabelas, gráficos e representações que aparecem freqüentemente em seu dia-a-dia. Relativamente à Combinatória, o objetivo é levar o aluno a lidar com situações-problema que envolvam combinações, arranjos, permutações e, especialmente, o princípio multiplicativo da contagem (BRASIL, 1997, p.40).

Todavia, não basta atentar apenas para aspectos relacionados ao domínio e seleção do conteúdo a ser ensinado, é necessário também que sejamos capazes de transformar esse conteúdo em algo pedagogicamente útil e adaptável para os diferentes níveis de escolaridade e desenvolvimento cognitivo de nossos alunos. É importante que façamos uma reflexão acerca das estratégias metodológicas adequadas para o ensino da Combinatória nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Os PCN (BRASIL, 1997) orientam que o ensino a ser desenvolvido nesse nível de escolaridade precisa estimular os alunos a fazerem perguntas, estabelecerem relações, construírem justificativas, pois à medida que eles progridem na vida adulta, precisam ser autônomos em suas tomadas de decisão. À vista disso, compreendemos que a perspectiva metodológica da Resolução de Problemas pode ser uma eficiente alternativa metodológica para o ensino deste conteúdo nos anos iniciais. De modo geral, a ação pedagógica do professor sobre tal perspectiva, busca provocar no aluno a reflexão sobre o que ele está fazendo ao longo do processo de resolução dos problemas (ONUCHIC; ALLEVATO, 2004; SERRAZINA, 2017).

Pensando no seu emprego para o ensino da Combinatória, confiamos que a metodologia da Resolução de Problemas quando bem empregada permite que o aluno, através de sua aprendizagem escolar, resolva problemas combinatórios imbricados em situações de seu cotidiano. Todavia, mais do que um processo para solucionar problemas cotidianos, a Resolução de Problemas precisar ser vista como um meio que favorece a apropriação e construção dos conceitos combinatórios. Ela não é somente uma atividade para ser desenvolvida como aplicação da aprendizagem, "mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas" (BRASIL, 1997, 33).

Em nosso trabalho, a Resolução de Problemas possui uma dimensão mais ampla, sendo considerada como uma alternativa metodológica que possibilita ao aluno aprender Matemática, mais especificadamente, conceitos combinatórios, através do processo Resolução, Exploração e Proposição de Problemas.

Diante de tais potencialidades para o ensino e aprendizagem da Matemática, e possivelmente da Combinatória, e em razão de se tratar de uma temática recente[1] no âmbito de pesquisa da Educação Matemática, questionamo-nos: *Que contribuições a proposta metodológica da Resolução, Exploração e Proposição de Problemas pode promover ao processo de ensino de aprendizagem da Combinatória nos anos iniciais do Ensino Fundamental?* Almejando encontrar uma resposta consistente para tal questionamento, partimos dos seguintes objetivos de pesquisa:

- **Objetivo Principal:**

  - Analisar as contribuições da Resolução, Exploração e Proposição de Problemas ao processo de ensino e aprendizagem da Combinatória nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

- **Objetivos Específicos:**

  - Avaliar a mobilização dos conhecimentos combinatórios ao longo do processo de resolução, exploração e proposição dos problemas;
  - Averiguar as principais estratégias de resolução utilizadas pelos alunos;
  - Analisar o desenvolvimento dos argumentos utilizados pelos alunos ao longo do estudo;
  - Examina as contribuições da Resolução, Exploração e Proposição de Problemas para o processo de ensino da Combinatória.

[1] Consideramos a temática recente pois os primeiros estudos voltados às contribuições da perspectiva metodológica da Resolução, Exploração e Proposição de Problemas para o ensino e aprendizagem da Matemática apareceram apenas nos anos finais da década de 90, sob autoria do pesquisador Andrade (1998).

Nossa pesquisa possui cunho qualitativo, uma vez que descreve e analisa detalhadamente os dados coletados. Teve como participantes alunos de uma turma do 5º ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede pública do estado da Paraíba, localizada na cidade de Nova Floresta. As ações pedagógicas realizadas ao longo do trabalho em sala de aula apoiaram-se na perspectiva metodológica da Resolução, Exploração e Proposição de Problemas, defendida por Andrade (1998; 2017), bem como em estudos que discutem o processo de ensino e aprendizagem da Combinatória. No trabalho de campo, trabalhamos com quatro problemas combinatórios retirados da pesquisa de Pessoa (2009) que tratam dos quatro tipos de problemas combinatórios (combinação, arranjo, permutação e produto cartesiano), que precisam ser abordados nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Para tanto, organizamos o nosso trabalho em seis capítulos. No primeiro capítulo, apresentamos a introdução do trabalho, onde destacamos perspectivas para o ensino e aprendizagem da Combinatória através da Resolução de Problemas. No segundo capítulo, discutimos diferentes perspectivas da Resolução de Problemas (POLYA, 1985; ONUCHIC; ALLEVATO, 2004, 2011, 2015; KILPETRICK, 2017; ANDRADE; 1998, 2017; SERRAZINA, 2017) e algumas orientações curriculares, didáticas e metodológicas voltadas para o ensino e aprendizagem da Combinatória no Ensino Fundamental, em especial nos anos inicias.

O panorama das atuais pesquisas realizadas no âmbito da Educação Combinatória na Educação Básica é apresentado no terceiro capítulo. Nele, pontuamos diferentes estudos com os mais variados enfoques de investigação, a fim de ilustrar como as pesquisas no âmbito da Educação Combinatória têm sido desenvolvidas nos últimos anos.

No quarto capítulo, elucidamos as características do raciocínio combinatório. A partir dos estudos de Vergnaud, discutimos os processos cognitivos para a sua construção. São abordados também os diferentes significados e invariantes dos quatros tipos de problemas combinatórios (produto cartesiano, permutação, arranjo e combinação) que precisam ser trabalhos deste os anos iniciais do Ensino Fundamental.

No quinto capítulo, descrevemos os procedimentos metodológicos utilizados para o desenvolvimento da pesquisa de campo. As descrições e análises dos encontros encontram-se no sexto capítulo. Por fim, apresentamos as considerações finais e referências.

Como já dito anteriormente, na próxima seção, discutiremos as possíveis contribuições da metodologia da Resolução de Problemas para o ensino da Matemática, mais especificamente, da Combinatória, apontadas pelas pesquisas e documento oficiais.

2 A RESOLUÇÃO, EXPLORAÇÃO E PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS NO ENSINO DA COMBINATÓRIA

Iniciamos nosso estudo apresentando as orientações curriculares e didáticas para o ensino da Combinatória no Ensino Fundamental, em especial nos anos iniciais. Fundamentados pelas orientações apresentadas por alguns documentos oficiais[2] e pesquisas realizadas no âmbito de pesquisa na temática, discutimos como o trabalho pedagógico com este conteúdo deve ocorrer em contexto de sala de aula, apoiado na perspectiva metodologia da Resolução, Exploração e Proposição de Problemas.

2.1 CONCEPÇÕES DE PROBLEMA

Resolver problemas é uma atividade que desempenhamos constantemente durante o cotidiano para responder diversas situações que vivenciamos. No decorrer de nossa vida, resolvemos problemas de diferentes tipos (financeiros, familiares, profissionais, amorosos etc.) e de distintas maneiras. Muitos destes problemas, se não a maioria, envolvem conceitos matemáticos. O conceito da Combinatória, por exemplo, está presente em problemas profissionais que envolvem a ideia de combinação de elementos para a formação de grupos. Um exemplo que podemos citar é a tomada de decisão que um técnico de futebol precisa delimitar para a formação do time que irá jogar no campeonato brasileiro de futebol, ou mesmo a decisão que um diretor geral de uma empresa de jornalismo, precisa tomar para formar uma equipe de jornalistas que ficarão responsáveis em fazer a cobertura de uma certa reportagem. Em ambas situações, os profissionais precisam testar diferentes possibilidades de combinações de escolha para então tomar sua decisão.

Existem diferentes concepções de problema, dependendo da definição de cada autor. Acreditamos que a definição de um problema depende da pessoa ou do grupo de pessoas que estejam interessados em resolvê-lo, pois para os que já sabem seu método de resolução ou resposta, o problema deixa de ser um problema e passa a ser apenas um exercício de fixação ou um conhecimento. Sobre isso, Lester (1980 *apud* SILVA, 2013, p.96) afirma:

[2] Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental – Anos iniciais (PCN) (BRASIL, 1997), os Referenciais Curriculares do Ensino Fundamental do Estado da Paraíba (RCEFEP) (PARAÍBA, 2010) e o Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa (PNAIC) (BRASIL, 2014).

> Um problema é uma situação em que um indivíduo ou um grupo é solicitado a desempenhar uma tarefa na qual não existe nenhum algoritmo disponível que determine completamente o método de resolução. A realização desta tarefa tem que ser desejada pelo indivíduo ou grupo. De outro modo a situação não pode ser considerada um problema.

O problema surge a partir do interesse em descobrir o método de resolução da situação imposta. Por essa razão, é importante que o indivíduo tenha interesse no problema que se depara, tendo em vista que a busca por estratégias de sua resolução é motivada pelo seu interesse em encontrar ou determinar a solução do problema proposto. E em compreender com significado as ações realizadas em torno da resolução desenvolvida.

É comum acreditarmos que um problema matemático é apresentado sempre como um enunciado. No entanto, os problemas matemáticos podem ser expressos de diferentes maneiras, basta que a situação na qual ele se encontra nos desafie, motivando-nos a buscar uma solução ainda não conhecida por nós. No ensino da Combinatória, por exemplo, pode se propor aos alunos situações rotineiras que exijam um raciocínio combinatório melhor estruturado, onde a sistematização para a organização e escolha dos elementos em um dado conjunto seja um dos requisitos para a sua solução. Relativo aos anos iniciais, um tipo de situação como esta, dependendo do nível de desenvolvimento cognitivo dos alunos, pode ser encarada como um problema; já em relação aos alunos do Ensino Médio, que já devem ter desenvolvido tais capacidades, este tipo de situação pode ser encarada apenas como um exercício de Combinatória, pelo fato de que já conhecem os métodos para sua resolução.

No que concerne à concepção de problema, Serrazina (2017) destaca algumas definições apresentadas por Kantowski (1980) e Krulik e Rudnik (1993). Para Kantowski (1980 *apud* SERRAZINA, 2017), um problema pode ser considerado como sendo uma situação em que uma pessoa se depara e que não tem de imediato um procedimento ou algoritmo que o conduza à sua resolução. De maneira semelhante, Krulik e Rudnik (1993 *apud* SERRAZINA, 2017) explica que um problema é uma situação na qual um indivíduo ou um grupo de pessoas se confronta em busca de uma solução para a qual não tem prontamente uma resposta.

Tais autores enfatizam ainda a distinção entre questão, exercício e problema. Uma questão é entendida como uma situação que necessita recorrer aos conhecimentos prévios; um exercício é visto como uma situação onde o objetivo é treinar e reforçar algoritmos já aprendidos; e um problema é considerado como uma situação onde é preciso raciocinar e sintetizar o que já foi aprendido. Em conformidade com que o acreditamos, Serrazina (2017) também defende que uma mesma situação pode constituir um problema em um dado momento, mas pode passar a ser um exercício numa fase posterior, isso dependerá dos conhecimentos que o sujeito possui no determinado momento que em o problema ou exercício é apresentado a ele.

Enquanto alguns autores consideram o problema como uma tarefa de investigação, Ponte (2005) pontua alguns aspectos que o diferenciam. Para esse autor, o que é dado e o que é pedido no problema está perfeitamente indicado pela situação imposta por ele, tratando-se de "uma tarefa fechada com elevado grau de desafio" (PONTE, 2005, p.4). Na tarefa de investigação, a questão é apresentada, as informações são dadas, porém, é deixado para o aluno "muito trabalho para fazer, quer em termos de elaboração de uma estratégia de resolução, quer em termos de formulação específica das próprias questões a resolver". Ao contrário do problema, a tarefa de investigação é "uma tarefa aberta com um elevado grau de desafio" (SERRAZINA, 2017, p.60).

De maneira geral, compreendemos que um bom problema precisar estimular a mobilização de conhecimentos já adquiridos para o auxílio na construção de novos conhecimentos. Num processo reflexivo sobre a situação apresentada pelo problema, é importante que ele seja encarado pelo aluno como um desafio, almejando motivá-lo a buscar diferentes métodos de resolução que o conduza a um processo de construção e consolidação dos conhecimentos matemáticos. Todavia, destacamos que esta visão de desafio precisa motivar esse movimento de investigação e reflexão sobre o problema, e não se apresentar como algo que desperte no aluno um sentimento de incapacidade ou impossibilidade em resolver o problema proposto. Em consonância, o Conselho Nacional de Professores de Matemática (NCTM, 1991, p.11) refere que:

> [...] um problema genuíno é uma situação em que, para o indivíduo ou grupo em questão, uma ou mais soluções apropriadas precisam ainda de ser encontradas. A situação deve ser suficientemente complicada para construir um desafio, mas não tão complexa que surja como insolúvel.

Em seu estudo, Serrazina (2017, p.60) defende que um bom problema precisa:

> (i) ser desafiante e interessante a partir de uma perspectiva matemática; (ii) ser adequado, permitindo relacionar os conhecimentos que os alunos já têm de modo que o novo conhecimento e as capacidade de cada aluno possam ser adaptadas e aplicadas para completar tarefas; (iii) ser problemático, a partir de algo que faz sentido e onde o caminho para a solução não está completamente visível.

Como já visto, um problema pode ser interpretado de diversas maneiras. Diferentemente das concepções defendidas pela maioria dos estudiosos na área (LESTER, 1980; KRULIK; RUDNIK, 1993; SERRAZINA, 2017; KILPATRICK, 2017; entre outros) em que o problema é encarado como sendo um desafio a se resolver, em nosso estudo fundamentamos nossa concepção em pressupostos teóricos defendidos por Andrade (1998). Entendemos que um problema pode ser conceituado como sendo um instrumento que pode impulsionar uma ação de trabalho reflexivo sobre as ideias matemáticas presentes nas situações impostas por ele (ANDRADE, 1998). Este trabalho estimula o aluno a refletir, organizar e sintetizar as informações fornecidas que o levarão à construção de novos conhecimentos.

Os documentos oficiais (BRASIL, 1997; PARAÍBA, 2010; BRASIL, 2014) que norteiam as práticas educativas em nosso país pontuam a necessidade da formação de um educando capaz de responder às demandas da sociedade atual de maneira crítica e segura, respondendo de maneira eficaz os problemas promovidos pelas cobranças sociais. Para que isso aconteça é necessário, primeiramente, que o educando consiga interpretar a situação imposta e, posteriormente, consiga de identificar que tipos de conhecimentos o auxiliarão a respondê-la.

Especificamente aos problemas que tratam de conteúdos matemáticos, os PCN (BRASIL, 1997, p.38) pontuam que um olhar mais atento para nossa sociedade evidencia "a necessidade de acrescentar a esses conteúdos aqueles que permitam ao cidadão 'tratar' as informações que recebe cotidianamente, aprendendo a lidar com dados estatísticos, tabelas e gráficos, a raciocinar utilizando idéias relativas à probabilidade e à combinatória".

Todavia, mais do que um processo para solucionar problemas, a Resolução de Problemas precisa ser vista como um meio que favorece a apropriação e construção de conceitos matemáticos. Ela não é somente uma atividade para ser desenvolvida como aplicação da aprendizagem, "mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas" (BRASIL, 1997, p.33).

2.2 O CAMINHAR DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Em nosso trabalho, a Resolução de Problemas[3] possui uma dimensão mais ampla. À consideramos como sendo uma alternativa metodológica que possibilita ao aluno aprender matemática através do processo de Resolução, Exploração e Proposição de Problemas, desenvolvendo, a partir de um processo dialógico e um trabalho reflexivo sobre o problema, uma compreensão com significado do conteúdo matemático estudado.

Tal perspectiva parte dos pressupostos teóricos defendidos por Andrade (1998, 2017), para quem não somente o processo de Resolução, mas também o de Exploração e Proposição dos Problemas podem ser utilizados em prol da aprendizagem matemática do aluno. Esclarecemos que a proposta do referido autor, pauta-se em uma perspectiva social/política/cultural discutida à luz da Educação Crítica de Paulo Freire. Todavia, em nossa proposta, voltamos nossos olhares especialmente para as suas potencialidades ao desenvolvimento cognitivo do aluno. Logo, atentamos em compreender o perfil das ações pedagógicas fundamentadas por tais estudos e que possam vir a potencializar a aprendizagem da Matemática.

A Resolução de Problemas como um caminho para o ensino de Matemática vem sendo discutida ao longo dos últimos anos. A reforma no ensino da matemática durante o século XX, ocasionada por três movimentos internacionais, influenciou o começo da discussão sobre a utilização da Resolução de Problemas para o processo educativo da Matemática (ONUCHIC, 1999).

De acordo com Onuchic (1999), no início do século XX, o ensino da Matemática apoiava-se na repetição, de modo que o recurso à memorização era extremamente importante. O processo educativo consistia na apresentação direta do conteúdo pelo professor e o recebimento da informação pelo aluno, onde este deveria escrever, memorizar e repetir os métodos de resolução apresentadas pelo educador. A repetição de exercícios para serem resolvidos em casa era uma prática adotada na época. O aprendizado do aluno era mediado por meio de testes, nos quais se o estudante conseguisse repetir bem o que o docente tinha apresentado, concluía-se que ele havia aprendido o conteúdo. Infelizmente, nos dias de atuais, podemos encontrar este tipo de

[3] Será usado Resolução de Problemas quando nos referirmos a sua teoria como metodologia de ensino, e resolução de problemas quando nos referirmos à ação de resolver problemas.

abordagem nas salas de aula aqui do Brasil, segundo os PCN de Matemática, “[...] o ensino de Matemática ainda é marcado [...] pela formalização precoce de conceitos, pela excessiva preocupação com o treino de habilidades e mecanização de processos sem compreensão” (BRASIL, 1998, p.19).

Falando especificamente no ensino da Combinatória, este tipo de abordagem também é bastante comum ainda. Em sua tese de doutorado, Roa (2000) verificou que as principais dificuldades apresentadas por um grupo de estudantes dos últimos períodos de um curso de licenciatura em Matemática para resolver problemas de combinatória estavam motivadas pela deficiência do ensino oferecido na educação básica, onde a ênfase foi dada ao estudo das fórmulas.

Anos depois, a partir da década de 1920, houve um segundo movimento, que possuía duas vertentes: a progressivista e a não diretiva. A primeira defendia o ensino da Matemática com compreensão, cabendo à educação a responsabilidade não somente de ensinar “às crianças conteúdos elaborados, mas sim fazê-las ‘aprender a aprender’” (LUCKESI, 1994, p. 154), de modo que elas se desenvolvam espontaneamente. O método de ensino deveria valorizar a ideia de “aprender fazendo”. Já a segunda vertente defendia que a finalidade da escola era auxiliar na formação de atitudes, portanto, voltava-se mais a aspectos psicológicos do que pedagógicos e sociais, o professor tinha como dever desenvolver seu próprio método de ensino para facilitar a aprendizagem (CAVALHEIRO, 2017).

Sobre essa década, Onuchic (1999) explica que o aluno precisava “entender” o que fazia. E pontua que foi a partir dessa época que se começou a falar em resolver problemas. Segundo a pesquisa de Andrade (1998, p. 7-8),

> [..] a primeira vez em que a resolução de problemas é tratada como um tema de interesse para professores e alunos, nos níveis superiores, foi a partir do livro How to solve it, de Polya, cuja primeira edição data de 1945. Antes desse período, entretanto, houve algumas experiências e alguns estudos enfatizando os produtos da resolução de problemas.

Por fim, nas décadas de 1960 e 1970, o ensino e a aprendizagem da Matemática no Brasil, e em vários países, sofreram influências renovadoras de um terceiro movimento. Neste movimento, a Matemática era apresentada de forma fundamentada, principalmente nas estruturas lógicas, algébricas e topológicas de ordem, enfatizando a teoria dos conjuntos (ONUCHIC, 1999). O ensino da Matemática passou a ter uma preocupação excessiva com abstrações matemáticas, apresentava uma linguagem matemática universal, e acentuava o ensino de símbolos em uma terminologia complexa. O professor, por muitas vezes, abordava o assunto sem estar seguro daquilo que estava ensinando. O aluno não conseguia relacionar todas aquelas propriedades matemáticas apresentadas em situações da vida real, tampouco com a matemática dos problemas. A preocupação excessiva em formalizar o ensino da Matemática fez com que seu estudo se distanciasse de questões práticas (ONUCHIC, 1999).

Podemos relacionar tais aspectos apontados nessa época com a Educação Combinatória atual. Infelizmente, ainda hoje, muitas práticas de ensino deste conteúdo priorizam a formalização da linguagem matemática em detrimento da compreensão das ideias essenciais dos conceitos combinatórios. O apego em apresentar de maneira direta as definições e fórmulas que representam de maneira generalizada o raciocínio combinatório é algo bastante comum na Educação Básica, principalmente no Ensino Médio.

Elucidando os três movimentos que antecedem a discussão sobre a Resolução de Problemas, Onuchic (1999) afirma que somente em 1980 é que se começou a perceber sua importância, pelo menos na teoria, ao processo de ensino e aprendizagem de Matemática. É importante esclarecer que, no fim dos anos 70, a Resolução de Problemas ganhou destaque mundial nas pesquisas; entretanto, somente na década de 80, com a publicação do documento "Uma agenda para ação" do NCTM dos Estados Unidos da América, é que passou a ser um dos temas centrais da matemática escolar no currículo norte-americano. As ações recomendadas por este documento enfatizavam que a capacidade de resolver problemas deveria ser o foco da matemática escolar nos anos 80. Além disso, conforme Onuchic (1999, p.205), o documento enfatizava que:

> – O currículo matemático deveria ser organizado ao redor de resolução de problemas;
> – A definição e a linguagem de resolução de problemas em matemática deveria ser desenvolvida e expandida de modo a incluir uma ampla gama de estratégias, processos e modos de apresentação que encerrassem o pleno potencial de aplicações matemáticas;
> – Os professores de matemática deveriam criar ambientes de sala de aula onde a resolução de problemas pudesse prosperar;
> – Materiais curriculares adequados ao ensino de resolução de problemas deveriam ser desenvolvidos para todos os níveis de escolaridade;
> – Os programas de matemática dos anos 80 deveriam envolver os estudantes com resolução de problemas, apresentando aplicações em todos os níveis;
> – Pesquisadores e agências de fomento à pesquisa deveriam priorizar, nos anos 80, investigações em resolução de problemas.

Muitos recursos em resolução de problemas foram desenvolvidos durante a década de 1980. Visando o trabalho em sala de aula, foram elaboradas: coleções de problemas, listas de estratégias, sugestões de atividades e orientações para avaliar o desempenho em resolução de problemas. Muitos destes materiais auxiliaram os professores a tornarem a resolução de problemas como ponto central de seu trabalho. Entretanto, Onuchic (1999) explica que a discordância de concepções entre as pessoas e grupos sobre o significado de "resolução de problemas ser o foco na matemática escola" dificultou uma boa condução para com o ensino da Matemática apoiado na resolução de problemas.

Com relação a esses diferentes olhares, no próximo subtópico, pontuamos brevemente algumas perspectivas sobre a Resolução de Problemas com a intenção de situar o leitor sobre essas diferentes interpretações sobre a Resolução de Problemas.

2.3 DIFERENTES OLHARES PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

De acordo com Stanic e Kilpatrick (1992 *apud* CAVALHEIRO, 2017, p.45), a Resolução de Problemas pode ser interpretada nos currículos matemáticos escolares em três perspectivas diferentes:

> a) a resolução de problemas como contexto – baseado na noção de que os problemas e a RP[4] são meios para se alcançar fins importantes; b) RP como capacidade – este insere a RP no topo da hierarquia das capacidades fundamentais a serem adquiridas pelos alunos; e c) RP como arte – no qual a RP é vista como a arte da descoberta, mais especificamente uma arte oriunda de imitação e prática.

Shroeder e Lester (1989) explicitam três abordagens distintas para se trabalhar a Resolução de Problemas em contexto de sala de aula: (1) ensinar *sobre* Resolução de Problemas; (2) ensinar matemática *para* resolver problemas; e (3) ensinar matemática *através* da Resolução de Problemas.

A primeira delas consiste em teorizar *sobre* o tema, tem como finalidade ensinar técnicas e estratégias para resolver problemas matemáticos. A segunda abordagem considera a Resolução de Problemas como um meio de aplicação da Matemática, onde o

[4] RP – Resolução de Problemas.

professor primeiro apresenta o conteúdo formalmente para, depois, propor aos alunos problemas como meio de aplicação do conteúdo estudado. Por fim, na terceira abordagem, o problema é visto não somente como uma aplicação matemática, mas como um ponto de partida para a construção de novos conhecimentos, sendo os alunos os coadjuvantes de seu próprio conhecimento, e os professores, os responsáveis em conduzir este processo (ONUCHIC; ALLEVADO, 2011). Observamos que, na teoria, essas três abordagens de se ensinar resolução de problemas podem ser separadas, contudo na realidade, na prática elas se sobrepõem e podem acontecer em combinações e sequências variadas (ONUCHIC,1999).

O professor que ensina *sobre* resolução de problemas identifica esta como uma “arte” da descoberta e fundamenta seu trabalho no modelo de resolução de problema de Polya (1985) (ONUCHIC, 1999; CAVALHEIRO, 2017). Este modelo descreve um conjunto de quatro fases que se relacionam no processo de resolver problemas matemáticos: (1) compreender o problema; (2) planejar um plano de resolução; (3) executar o plano; e (4) fazer a retrospectiva do problema original. Destacamos que estas etapas concebidas pelo autor não necessariamente precisam ocorrer de maneira sequenciada e rígida, posto que o trabalho de Polya (1985) valoriza a investigação matemática, as descobertas, a tentativa e o erro, a busca por um problema mais simples para a compreensão de um problema mais complexo, a generalização e a retrospectiva ao problema original para a verificação das ideias levantadas (SILVA, 2013).

No ensino de Matemática *para* resolver problemas, a resolução de problemas é interpretada como “uma capacidade” a ser desenvolvida pelo aluno. A ideia essencial do processo educativo é desenvolver no aluno a capacidade de solução de situações rotineiras, ou não, que envolvem aplicações matemáticas (ONUCHIC, 1999; CAVALHEIRO, 2017). Embora essa capacidade seja importante, consideramos essa visão estreita e limitada para com o trabalho em sala de aula, uma vez que os alunos podem ficar condicionados a resolver somente os tipos de problemas propostos pelo professor e a possibilidade de levantamento de ideias propulsoras de novos conhecimentos pode ficar limitada apenas ao que foi apresentado formalmente pelo educador inicialmente.

Comumente, muitos professores confundem essa perspectiva de resolução de problemas com a terceira (ensinar através da resolução de problemas), explicitada por Schroeder e Lester (1989). Acreditando que ao propor diferentes exercícios (que, muitas vezes, são equivocadamente considerados problemas) o ensino está apoiado através da resolução de problemas. Baseados nesse equívoco, alguns docentes propõem aos alunos uma bateria de exercícios após a apresentação formal do conteúdo que, por muitas vezes, tem como finalidade fixação dos algoritmos de resolução e não auxílio para o processo de construção de novos conhecimentos. A respeito disso, Cavalheiro (2017) afirma que este tipo de prática atualmente é algo ainda bastante adotado por vários docentes em suas aulas, limitando as potencialidades que a resolução de problemas pode promover ao ensino da matemática.

Com a grande atenção dada pelos estudos ao processo de resolução de problemas, não se limitando à busca pela solução, somente nos anos finais da década de 80, com todas as recomendações de ação, é que, segundo Andrade (1998), a Resolução de Problemas passou a ser pensada como uma metodologia de ensino, como um ponto de partida e um meio de se ensinar Matemática.

O ensino de Matemática *através* da Resolução de Problemas ampliou o olhar em relação ao papel da resolução de problema no processo educativo, que passou a ser vista como um "contexto". Nesta abordagem, os problemas não são somente um propósito para aprender Matemática, mas também um primeiro passo para se fazer isso (ONUCHIC, 1999). O processo educativo é iniciado por uma situação-problema que expressa aspectos chaves do conteúdo abordado. Um dos objetivos da aprendizagem matemática é o de desenvolver no aluno a capacidade de transformar certos problemas não rotineiros em rotineiros (ONUCHIC, 1999).

No ensino da Matemática *através* da resolução de problemas, o problema não é um exercício no qual o aluno aplica o que "aprendeu", quase de maneira mecânica, ele é visto "como um elemento que pode disparar um processo de construção do conhecimento" (ONUCHIC, 1999, p.207). Ao contrário da segunda perspectiva (ensinar *para* resolver problemas), esta inicia o processo de ensino não pela definição formal do conceito, mas pelo problema. Nesta ótica, Andrade (1998) defende que os problemas propostos têm como finalidade principal contribuir para a formação dos conceitos antes mesmo de serem apresentados em linguagem matemática formal. O foco do processo educativo volta-se à ação do aluno.

Pensando no processo de avaliação como parte integrante do processo de ensino e aprendizagem, Onuchic e Alevatto (2011) apresentam a abordagem Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. A autora afirma que fundamentar a ação pedagógica para o ensino da Matemática nesta abordagem exige do professor e dos alunos uma mudança de postura e atitude com relação ao trabalho em sala de aula. O professor precisa ter cautela na escolha do problema, bem como analisar cuidadosamente quais problemas são mais apropriados para o conteúdo e conceito que pretende construir, pois "o que é problema para um aluno pode não ser para outro, em função do seu nível de desenvolvimento intelectual e dos conhecimentos de que dispõe" (BRASIL, 1997, p.33).

É importante que o aluno seja o centro do processo educativo e entenda que ele é o principal responsável pela sua aprendizagem. Não é uma mudança muito fácil para se atingir, porém Onuchic e Allevato (2011) pontuam boas razões para esse esforço. Reunindo as ideias registradas por Onuchic e Allevato (2004) e Van de Walle (2001), as autoras destacam que a:

> – Resolução de problemas coloca o foco da atenção dos alunos sobre as ideias matemáticas e sobre o *dar sentido*. (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p.82).

As ideias matemáticas levantadas pelos alunos durante a resolução dos problemas, corretas ou não, devem ser valorizadas. As ideais matemáticas podem revelar aos professores o desenvolvimento intelectual real do estudante, além de permitir que sejam utilizadas para ajudar o aluno a dar sentido à sua aprendizagem, uma vez que o professor pode direcionar as possíveis problematizações a partir delas.

Nessa perspectiva, é importante que no decorrer da resolução dos problemas combinatórios o professor preste bastante atenção em que o aluno se fundamenta para construir as ideias que o auxiliaram compreender os invariantes dos problemas, posto que o raciocínio empregado neste processo evidencia a compreensão real do aluno em relação aos conceitos combinatórios. Acerca disso, Onuchic e Allevato (2011, p.82) explicam que:

> – Resolução de problemas desenvolve *poder matemático* nos alunos, ou seja, capacidade de pensar matematicamente, utilizar diferentes e convenientes estratégias em diferentes problemas, permitindo aumentar a compreensão dos conteúdos e conceitos matemáticos.

O ensino da Matemática apoiado na Resolução de Problemas permite que o aluno tenha oportunidade de refletir sobre cada ação que desenvolve em busca da solução do problema. Ele é motivado a pensar, matematicamente, como as estratégias delineadas para a solução estão de acordo com conceitos já construídos por ele e podem direcioná-lo ao caminho certo para a solução correta.

A resolução de problemas empregada no ensino da Combinatória pode ajudar o aluno a visualizar a empregabilidade da educação escolar em sua vida cotidiana. A partir da resolução de problemas o aluno pode conseguir relacionar os conceitos combinatórios empregados na escola em situações que diariamente vivencia. Com isso, ele poderá se sentir mais seguro para implementar tais conceitos em problemas da vida real, evidenciando o potencial desta perspectiva metodológica para o favorecimento do empoderamento matemático. Segundo Onuchic e Allevato (2011, p.82):

> – Resolução de problemas desenvolve a crença de que os alunos são capazes de fazer matemática e de que a Matemática faz sentido; a confiança e a autoestima dos estudantes aumentam.

O fato dos alunos serem estimulados a desenvolver suas próprias estratégias de resolução dos problemas combinatórios e defendê-las favorece o desenvolvimento de sua autoestima e confiança, demonstrando aos alunos, muitas vezes, sua capacidade em desenvolver estratégias para a resolução. Desse modo:

> – Resolução de problemas fornece dados de avaliação contínua, que podem ser usados para a tomada de decisões instrucionais e para ajudar os alunos a obter sucesso com a matemática" (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p.82).

O ensino da Matemática através da Resolução de Problemas pode evidenciar a partir das ideias matemáticas levantadas, e por meio dos registros escritos das soluções, o desenvolvimento intelectual real do aluno. Fundamentado em tais aspectos, o docente pode direcionar problematizações que conduzam o aluno à construção de novos conhecimentos e conceitos combinatórios.

> – Professores que ensinam dessa maneira se empolgam e não querem voltar a ensinar na forma dita tradicional. Sentem-se gratificados com a constatação de que os alunos desenvolvem a compreensão por seus próprios raciocínios" (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p.82).

Como já dito anteriormente, o trabalho com a Resolução de Problemas exige uma mudança na postura e atitudes do professor, no que se refere aos seus planejamentos e sua prática pedagógica. Embora seja uma modificação trabalhosa, a adoção da resolução de problemas, quando bem desempenhada, possibilita ao professor conduzir um processo educativo reflexivo, onde o aluno conjectura sobre as diferentes estratégias de resolução levantadas, passando a compreendê-las por seus próprios raciocínios. Confiamos que isso futuramente pode facilitar o trabalho do professor, pois com o passar do tempo o aluno terá mais autonomia sobre sua aprendizagem. “A formalização dos conceitos e teorias matemáticas, feita pelo professor, passa a fazer mais sentido para os alunos” (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p.82).

Um dos principais objetivos para esse tipo de ensino é ajudar os alunos na compreensão dos conceitos e dos processos necessários para a construção do conhecimento. Através da Resolução de Problemas, procura-se formalizar os conceitos e as teorias matemáticas de uma maneira mais simplificada, onde o aluno consiga compreendê-las a partir de suas próprias ideias. A partir das problematizações realizadas durante a resolução de problemas, o professor pode conduzir o aluno a fazer generalizações e relações, fazendo-o compreender com verdadeiro significado as representações formais dos conceitos e teorias matemáticas.

Pensando no ensino da Combinatória, o professor pode propor problemas que contenham aspectos chaves do conteúdo a ser abordado posteriormente. Essa prática permite que o aluno primeiramente compreenda o conteúdo seguindo sua própria forma de pensar. Aproveitando-se disso, no momento da socialização das ideias, o educador pode ajudar o aluno a alcançar o pensamento generalizante que representa a situação proposta pelo problema, a fim de que, a partir disso, ele possa formalizar essas representações na linguagem da matemática formal.

Para o alcance das potencialidades pontuadas por Onuchic e Allevato (2011), acreditamos ser importante que o problema represente um real desafio para o aluno e o motive a verificar a validação no processo de solução. Além disso, pensando em suas potencialidades para o ensino da Combinatória, compreendemos que seja necessário que o problema proposto seja um instrumento que ajude o professor a estimular um trabalho de reflexão sobre as características dos invariantes.

Entendemos que o processo de Resolução dos Problemas pode evidenciar a compreensão real do aluno com relação ao conteúdo abordado, às suas principais dificuldades, inquietações e curiosidades, o seu interesse em aprender o conteúdo. Além disso, permite que o docente analise como o raciocínio do aluno está sendo estruturado e direcionado a um caminho que possa construir um novo conhecimento.

Tratando especificamente das potencialidades que o ensino através da Resolução de Problemas pode promover ao processo educativo da Combinatória, acreditamos que esta perspectiva metodológica pode oportunizar momentos de descobertas tanto para o professor como para os alunos. Como já foi mencionado, os problemas combinatórios possuem um caráter desafiador, pelo fato de que podem ser resolvidos em diferentes formas e possuem diferentes invariantes que os personificam.

Diante disso, durante o processo de resolução destes problemas, os alunos podem criar estratégias de resolução que, por muitas vezes, podem não ser as mesmas esperadas pelo professor. Isso permite que o processo educativo tenha um caráter investigativo, em que o educador tem a possiblidade de analisar de maneira reflexiva como o raciocínio combinatório do aluno está se estruturando e até que ponto o aluno consegue chegar ao nível de generalização e abstração; e o aluno, por sua vez, é motivado a investigar estratégias de resolução que possam dar sentido ao seu fazer matemática e aos procedimentos matemáticos que ele está descobrindo e realizando.

Visando uma forma de ajudar os professores a empregar a metodologia de ensino-aprendizagem através da resolução de problemas em suas aulas, em 1998, com a participação de 45 professores participantes de um Programa de Educação Continuada, Onuchic criou um Roteiro de Atividades. Esta versão inicial do roteiro era composta pelas seguintes etapas: formar grupos e entregar uma atividade; o papel do professor; registrar os resultados na lousa; realizar uma plenária; analisar os resultados; buscar um consenso; fazer a formalização (ONUCHIC, 1999).

No entanto, com algumas constatações levantadas em pesquisas desenvolvidas durante os anos e com formações de professores, Onuchic e Allevato (2011) alteram pequenos aspectos do roteiro inicial com a tentativa de atender as dificuldades no processo educativo da matemática apontadas pelos professores e pelos resultados dos estudos. O segundo roteiro passou a incluir novos elementos e colocou de uma forma mais detalhada as orientações para a implementação desta perspectiva metodológica nas aulas de Matemática. As etapas que compõem o segundo roteiro foram organizadas do seguinte modo: (1) forma grupos; (2) preparação do problema; (3) leitura individual; (4) leitura em conjunto; (5) resolução do problema; (6) observar e incentivar; (7) registro das resoluções na lousa; (8) plenária; (9) busca do consenso; (10) formalização do conteúdo. Entretanto, com alguns estudos posteriores, em 2015, no SIPEM, Onuchic e Allevato (2011) propuseram mais uma etapa a este roteiro: (11) proposição de problemas, considerando-a como sendo como uma parte integrante da aprendizagem matemática do aluno.

Reiteremos que, nesta metodologia, é importante que os problemas propostos sejam um elemento capaz de disparar um processo de construção do conhecimento

(ANDRADE, 1998; ONUCHIC, 1999). Assim, os problemas são propostos aos alunos antes de lhe ter sido apresentado, formalmente, o conteúdo matemático mais apropriado para a sua resolução. A avaliação das evoluções dos alunos, nesta perspectiva metodológica, é feita continuamente durante a resolução do problema (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011).

Com relação à postura do professor como mediador, Van de Walle (2009, p.75) destaca que "ao ensinar pela Resolução de Problemas, um dos dilemas mais desconcertantes é o quanto dizer aos alunos". Por um lado, dizer reduz a reflexão deles, por outro, pode conduzi-los à construção de um novo conhecimento. A questão de o professor incentivar a investigação matemática por meio de questionamentos e problematizações precisa ser analisada e realizada com uma certa cautela, tendo em vista que quando se propõe direcionar o processo educativo a partir desta perspectiva metodológica o professor deve identificar os momentos oportunos para apresentar tais questionamentos e problematizações, posto que estas precisam ser um elemento que direcione os alunos a levantar conjecturas e não os impeçam de elaborar suas próprias estratégias.

É importante também ser cauteloso quanto às informações que podem ser disponibilizadas aos alunos, no sentido de não prejudicar a criatividade deles. Por outro lado, Van de Walle (2009, p.75) também destaca que "dizer muito pouco algumas vezes pode resultar em tropeços e desperdiçar um tempo precioso das aulas". Com relação a isso, o autor destaca três tipos de informação que os professores devem fornecer aos alunos:

> – Convenções matemáticas. As convenções sociais de simbolismo e de terminologia (nomenclatura) importante em matemática nunca serão desenvolvidas por pensamento reflexivo.
> – Métodos alternativos. Você pode, com cuidado, sugerir aos alunos um método ou uma abordagem alternativa para reflexão.
> – Esclarecimento dos métodos dos alunos. Você pode ajuda-los a esclarecer ou interpretar as suas ideias e, talvez, relacioná-las com outras (VAN DE WALLE, 2009, p.75).

Portanto, é importante que o professor seja capaz de entender até que ponto ele pode mediar o processo de construção do conhecimento, sabendo fornecer apenas as informações necessárias para que os alunos possam pensar e elaborar diversas estratégias para resolver o problema. Por esta razão, os problemas propostos devem permitir que os alunos utilizem seus conhecimentos prévios para sua resolução.

De modo geral, o trabalho em sala de aula via Metodologia de Resolução de Problemas deve dar autonomia para que os alunos sejam capazes de construir novos conhecimentos a partir daqueles que já possuem. Esta metodologia deve possibilitar que o aluno atribua sentido à matemática que está sendo aprendida. Nesta perspectiva, a ação pedagógica do professor precisar levar o aluno a pensar, desenvolvendo capacidade de investigar e refletir sobre o que está fazendo, tornando, com isso, as aulas de Matemática bem mais interessantes e motivadoras.

Cavalheiro (2017) afirma que para a construção dos conteúdos específicos de Matemática esta metodologia é bastante eficaz. De acordo com autor, muitos trabalhos de dissertação de mestrado e teses de doutorado em Educação Matemática, aqui no Brasil, adotam para o trabalho em sala de aula a metodologia de Ensino-Aprendizagem através da Resolução de Problemas.

Falando especificamente do ambiente de sala de aula na perspectiva metodológica de Resolução de Problemas, em uma abordagem de ensino-exploratório, Serrazina (2017) defende que é papel do professor promover um ambiente onde os alunos sejam encorajados a questionar, experimentar, explorar de maneira criativa diversas maneiras de resolução que o conduzam a processos de construção do conhecimento. Pensando na implementação da Resolução de Problemas na prática pedagógica do professor que trabalha sobre a perspectiva do ensino-exploratório, Serrazina (2017, p.66) afirma que os professores têm o "papel de levar os alunos a ler e compreender os problemas apresentados na forma escrita, a ouvir e compreender os problemas apresentados oralmente e a ler e dialogar sobre os problemas numa diversidade de formas e meios".

Segundo Serrazina (2017), no ensino-exploratório a aprendizagem promovida pela ação de resolver problemas surge da reflexão que o aluno faz sobre a atividade realizada na tarefa (problema) proposta. Neste sentido, compreendemos que a tarefa é vista como o problema proposto pelo professor, e a atividade é tida como a ação de resolver o problema, realizada pelo aluno.

Nessa abordagem, os alunos fazem uso de seus conhecimentos prévios, sendo desafiados a construir os seus próprios métodos de resolução. O professor deve escolher criteriosamente a tarefa e a planificação de como deverá explorá-la na aula. As tarefas escolhidas por ele precisam permitir que os alunos argumentem suas estratégias e soluções encontradas, promovendo e estimulando a comunicação matemática na sala de aula. A resolução da tarefa (problema) deve "terminar com uma síntese das principais ideias aprendidas, sendo este trabalho realizado pelos alunos, em conjunto com o professor" (SERRAZINA, 2017, p.70).

Uma atual abordagem atribuída ao ensino da Matemática através da Resolução de Problemas é defendida por Kilpatrick (2017). O pesquisador caracteriza a Resolução de Problemas como sendo uma sequência de reformulações, em que a descoberta de uma propriedade geral de uma resolução promove reformulações na maneira de interpretar o problema original. A partir de sucessivas reformulações ou fases de resoluções, a resolução final do problema é mediada (DUNCKER, 1945 *apud* KILPATRICK, 2017).

Nessa abordagem, a aprendizagem é baseada na investigação em Matemática. De acordo com o autor, embora o campo da Educação Matemática tradicionalmente tenha seu foco voltado mais para a Resolução de Problemas, a investigação em projetos como o PRIMAS[5] fornece "importantes oportunidades para que os alunos se envolvam no estudo da matemática" (KILPATRICK, 2017, p.170). É importante ressaltar que a investigação científica em Matemática, discutida por ele, não é a mesma coisa que a Resolução de Problemas matemáticos, no entanto, suas características em comum poderiam motivar novas abordagens para o ensino da Matemática através da abordagem da Resolução de Problemas como um processo de reformulações na investigação científica. Na Resolução de Problemas em Matemática, os esforços das pessoas em determinar uma solução estão focados em estudos matemáticos, enquanto a investigação nas ciências "engloba todos os aspectos de uma investigação (KILPATRICK, 2017, p.168). Assim, enquanto a primeira reside na Educação Matemática, a segunda está no domínio da educação das ciências.

Compreendemos que a Resolução de Problemas, interpretada como um processo de reformulações, possui um olhar mais amplo em relação ao processo de resolução de problemas matemáticos. Quando o aluno confronta o problema, entendido pelo autor também como tarefa, uma exigência cognitiva é colocada em destaque. Essa exigência demanda que o aluno coloque o fazer Matemática em ação, desenvolvendo procedimentos de resolução com e sem conexões, onde a compreensão e significados aos conceitos são atribuídos, utilizando-se dos conhecimentos prévios desenvolvidos e presentes em sua memória, ele começa a fazer reformulações do problema inicial.

[5] Projeto internacional – Promoting Inquiry in Mathematics and Sciense educacion across Europe. O projeto envolveu 14 universidades em 12 países europeus. Reunindo de 2007 a 2013, pesquisadores que almejavam implementar o uso do aprendizado baseado na investigação (IBL) em Matemática (KILPATRICK, 2017).

Kilpatrick (2017, p.171) destaca ainda a relevância da formulação de problemas neste processo de reformulação. De acordo com o autor, o professor pode introduzir uma situação na qual os aprendentes tenham a oportunidade de construir um modelo matemático dela, para então, começar o processo imediato de reformulação, em que a verificação do modelo e sua adequação à situação são averiguadas. Sobre este olhar, entendemos que uma situação pode ser explorada em diferentes níveis de complexidades, em que, a partir das reformulações, novos questionamentos e problemas podem ser gerados, a partir do modelo criado para interpretar o modelo inicial apresentado pelo problema. Como exemplificação, Kilpatrick (2017, p.171) destaca a seguinte situação:

> Um exemplo simples de uma situação poderia ser no qual as idades de três pessoas – Ana, Brian e Carl – são dadas (7, 10 e 13 anos, respectivamente) e as seguintes relações são dadas: Brian é 3 anos mais velho que Ann, e Carl é 3 anos mais velho que Brian.

De acordo com o pesquisador, esta situação pode ser reformulada em um modelo mais simples ou mais complicado, onde o aluno pode conseguir compreender como o problema inicial pode ser resolvido. E, além disso, pode desenvolver diferentes conhecimentos nos quais o professor não espera.

A implementação dessa abordagem, em uma perspectiva de aprendizagem baseada na investigação em Matemática, exige que o professor tenha uma boa preparação para desenvolvê-la de maneira eficaz. É importante que o docente consiga ver, analisar e explorar as várias facetas que um problema permite em um contexto de ensino inovador (KILPATRICK, 2017). Assim, para o desempenho de tal trabalho, o pesquisador defende que é necessário um programa de preparação de professores que tenha como foco principal a aprendizagem dos alunos. Salientando a necessidade de os professores estarem bem preparados para um trabalho tanto teórico quanto prático.

A perspectiva da Resolução de Problemas, como um processo de reformulações e investigação, enxerga cada ideia compreendida no processo de resolução como sendo uma reformulação do problema inicial, fazendo aperfeiçoamento das definições apresentadas no problema original. É necessário que os alunos sejam estimulados a fazer diferentes variações, reafirmações, transformações, repetidas vezes, do problema inicial, para que, finalmente, consigam ser bem-sucedidos no processo de resolução. A tentativa e erro são bem vistos nesta abordagem, uma vez que os alunos podem "aprender com o fracasso: pode haver alguma boa ideia numa tentativa malsucedida" (KILPATRICK, 2017, p.182), em que eles podem "chegar a uma tentativa mais bem-sucedida modificando a malsucedida" (KILPATRICK, 2017, p.182). Tornando, através desse processo de reformulação, o problema inicial mais acessível a partir dos problemas auxiliares formulados.

Encarar a Resolução de Problemas como um processo de reformulação e investigação exige do professor uma ampla consciência sobre todas as dimensões do problema proposto. É importante que antes de propor os problemas aos alunos, o professor conheça os possíveis caminhos que ele pode seguir no processo de resolução, os possíveis conhecimentos prévios que podem ser utilizados e os possíveis conhecimentos que podem ser construídos através do processo de reformulação, investigação e resolução do problema.

Ressaltamos que, não somente nesta perspectiva de Resolução de Problemas, mas em outras que iremos discutir mais à frente no texto, a escolha do problema precisa ser definida por um exame cuidadoso sobre a validade dos problemas aos objetivos que pretendem ser alcançados durante seu processo de resolução e exploração. É importante que o professor procure resolver os problemas previamente, tentando chegar à solução por diversos caminhos, almejando vislumbrar, durante o processo de resolução e exploração, os possíveis erros e obstáculos que o aluno possa cometer ou enfrentar, com a finalidade de planificar possíveis encontros que ele pode realizar durante o processo da resolução e exploração dos problemas propostos.

2.3.1 A PERSPECTIVA METODOLÓGICA DA RESOLUÇÃO, EXPLORAÇÃO E PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS: PRESSUPOSTOS TEÓRICOS

Diante do exposto no texto, entendemos que a perspectiva metodológica da Resolução de Problemas precisa ser encarada como uma metodologia de ensino-exploratório e investigativo, em que o aluno tem a oportunidade de explorar, investigar e elaborar reformulações do problema inicial e estratégias de resoluções para o encontro da solução. É importante que o aluno seja estimulado a fazer diferentes reformulações dos problemas repetidas vezes, para que, com isso, consiga tirar total proveito das dimensões que o problema pode proporcionar.

Almejando investigar mais profundamente o desempenho dos alunos na Resolução de Problemas, o professor pode dar ênfase, não somente ao processo de resolução dos problemas, mas também ao processo de exploração e proposição desses. Seguindo essa linha de pensamento, Andrade (1998, p. 59), em sua pesquisa de mestrado, explica que na Exploração de Problemas:

> [...] há um prazer e uma alegria de ir cada vez mais longe, um ir cada vez mais profundo, um ir cada vez mais curioso, há um ir que chega e nunca chega, um ir que pode sempre ir, um ir que sempre se limita ao contexto do aluno, do professor, da Matemática, da escola [...] e por isso pode ir outra vez e mais outra vez [...].

À luz da perspectiva de Educação Crítica de Paulo Freire e da teoria sociocultural/sócio-histórica de Vygostsky, Andrade (1998) admite a Matemática como um construto social falível e não como um conhecimento absoluto. Esses estudos teóricos, aliados aos estudos de Imre Lakatos e às experiências vivenciadas pelo autor, foram os principais pressupostos teóricos que o ajudaram a sustentar a proposta de ensino-aprendizagem em Matemática intitulada como *Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução, Exploração, Codificação e Descodificação de Problemas e a Multicontextualidade da Sala de Aula.* Dando maior ênfase, nos últimos anos ao processo de proposição de problemas, está proposta inicial, de forma prática passou a ser denominada como sendo *Exploração, Resolução e Proposição de Problemas* (ERP).

A proposta, visa a partir da uma articulação entre a teoria e prática, desenvolver uma prática intencionalizada, onde a teoria é a prática refletida, e a prática é a teoria intencionalizada (ANDRADE, 2017). De maneira semelhante às ideias de Onuchic (1999), Onuchic e Allevato (2004, 2011, 2015) e Kilpatrick (2017), o pesquisador também assume que o processo de ensino-aprendizagem do aluno começa sempre a partir de um problema. De modo que, os estudantes, "através de um processo de codificação e descodificação, aprendem e entendem aspectos importantes de um conceito ou ideia matemática explorando, resolvendo e propondo problemas ou situações problemas" (ANDRADE, 2017, p.357).

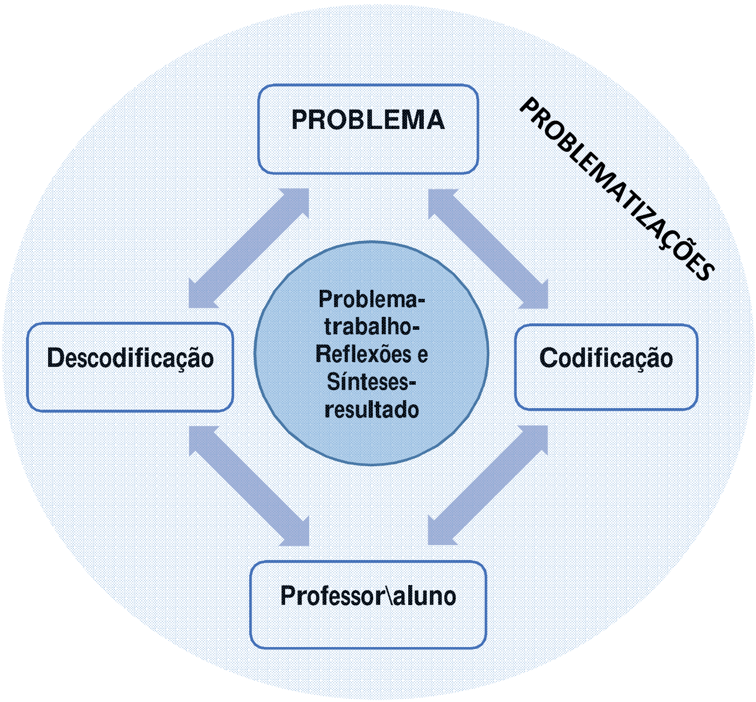
Em uma *Experiência de Exploração de Problemas*, esses conceitos e ideias, de acordo com ele, nunca são construídos apenas a partir de um único problema ou situação-problema, mas de um repertório de problemas ou situações-problemas nas quais, a partir da exploração da resolução e da proposição desses problemas, se desenvolve o movimento *Problema-Trabalho-Reflexões* e *Sínteses-Resultado* que, por sua vez, toma como base o processo de Codificação e Descodificação dos mesmos (ANDRADE, 2017). Compreendemos que esta ideia do autor vem de encontro com o pensamento de Vergnaud (1982a), para quem o conhecimento do aluno emerge a partir de uma série de problemas a serem resolvidos e situações a serem dominadas. Assim, em sua teoria, a construção do conceito somente confere sentido ao aluno quando esse o constrói a partir de uma variedade de problemas ou situações-problema que envolva o conceito a ser construído e suas relações com outros conceitos.

Em nossa proposta, pretendemos trabalhar diferentes problemas combinatórios que possuem diferentes significados. Almejamos, com isso, possibilitar aos alunos um repertório de problemas que os ajudem a mobilizar e/ou construir ideias e conceitos que são essenciais para o raciocínio combinatório. Logo, trabalhamos problemas que permitissem ao aluno a sistematização do levantamento de possibilidades, observando se estas levavam em consideração a ordem dos elementos nos agrupamentos formados.

Voltando à proposta de Andrade (2017), em sua proposta inicial, em 1998, o termo “resultado” não era usado, o movimento era composto apenas pelas relações entre Problema-Trabalho-Reflexões e Sínteses. No entanto, com os estudos realizados durante os anos, notou-se a necessidade de acrescentar a palavra resultado para melhor definir a finalização de cada processo como um todo, “entendendo aqui o resultado como um refinamento das diversas sínteses desenvolvidas ao longo do processo de uma experiência de exploração de problemas” (ANDRADE, 2017, p.368).

Esse movimento de *Problema-Trabalho-Reflexões* e *Sínteses-Resultado* é um “momento aberto, não fechado, embora não solto” (ANDRADE, 2017, p.365) em que inicialmente é proposto um problema que pode partir tanto dos alunos como do professor, em que eles realizarão um trabalho sobre ele. Posteriormente, juntamente com o professor, os alunos devem discutir o trabalho desenvolvido em um processo de reflexões e síntese, chegando, assim, possivelmente, “à solução do problema, a novos conteúdos, a novos problemas, à realização de novos trabalhos, a novas reflexões e novas sínteses” (ANDRADE, 1998, p.24). Neste movimento, o *trabalho de exploração de problemas é inacabado*, podendo ir além da solução (ANDRADE, 2017). Nesta ótica, compreendemos que o processo de Resolução, Exploração e Proposição de Problemas acontece em torno do seguinte ciclo, conforme a Ilustração 1:

Ilustração 1 - Processo de Resolução, Exploração e Proposição de Problemas



Fonte: Adaptação de Andrade (1998; 2017)

Os processos de codificação e a descodificação que apoia o movimento de *Problema-Trabalho-Reflexões* e *Sínteses-Resultado* são utilizados como ferramentas no processo de Exploração, Resolução e Proposição de Problemas. Estes precisam estar presentes em todo o trabalho de reflexão e síntese que se faz em torno do problema.

A codificação consiste em representar um problema em uma "outra forma, outro código, outra linguagem, numa forma mais curta, mais simplificada e mais conveniente" (ANDRADE, 1998, p.25). Para a codificação é necessário que o aluno desempenhe um trabalho de síntese em torno de um problema ou de uma dada situação. O autor ressalta que o próprio problema dado já se constitui num código.

A descodificação, por sua vez, busca o significado do problema, objetivando entendê-lo, de modo a decifrar a mensagem que ele expressa e, sobretudo, fazer uma análise crítica dela. Andrade (1998) explica que "neste trabalho, a descodificação refere-se, principalmente, a toda análise crítica que se faz sobre um problema, sobre sua resolução ou sobre cada trabalho feito" (ANDRADE, 1998, p.24).

Estes dois processos podem ocorrer em diferentes momentos: durante o processo de Resolução, Exploração e Proposição de Problemas; como também de maneira integrada e simultânea. Com relação a isso, Andrade (2017, p.369) explica que:

> Quando o aluno busca compreender o problema que lhe é dado e procura representá-lo em um código possível de operacionalização, está fazendo, quase que simultaneamente, um trabalho de descodificação e codificação. Este trabalho ajuda o aluno a explorar e resolver esse problema.

Pensando nos problemas combinatórios, podemos representar este processo de codificação e descodificação simultânea quando os alunos buscam inicialmente compreender o problema por meio de uma análise crítica, buscando, ao mesmo tempo, uma maneira mais conveniente ou simples de apresentar a análise que representa o problema. Um problema de produto cartesiano, por exemplo, quando é proposto aos alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental, inicialmente os alunos podem buscar uma maneira de compreender a situação apresentada, de modo que consigam representá-la de uma maneira mais simples, como por meio de desenhos. Ao fazer isso, o aluno estará descodificando a situação, para posteriormente codificá-la da sua maneira, de um modo mais conveniente para a sua compreensão e análise crítica. Esse processo permite que o aluno explore os invariantes do problema e consiga observar que, em problemas desse tipo, a ordem dos elementos nas possibilidades elencadas não origina novas possibilidades, e que, além disso, problemas desse tipo podem envolver a combinação de elementos, um ou mais conjuntos em seus agrupamentos.

Para Andrade (1998), assim como os alunos podem procurar maneiras para melhor representar os problemas combinatórios, em certas ocasiões, o professor pode codificar o problema dado em uma forma que o torne mais compreensivo para os alunos. Andrade (1998) explica que na busca pela descodificação do problema por parte dos alunos, o professor pode codificá-lo de uma maneira que fique mais acessível para a compreensão do aluno, ele pode "fazer um desenho representativo do problema dado, pode discutir uma determinada parte do problema, etc." (ANDRADE, 1998, p.24-25).

Diante disso, para alcançar uma compreensão mais ampla sobre os conceitos que os problemas envolvem e as estratégias de resolução que ele permite, os professores e os alunos podem fazer diferentes codificações e descodificações dos problemas combinatórios. Durante a exploração destes problemas, diversos caminhos de resolução podem surgir, sendo o trabalho colaborativo entre os alunos primordial para o seu desenvolvimento, uma vez que a codificação e decodificação feita por um aluno pode ajudar outro aluno a compreender melhor o problema.

O ensino da Combinatória na perspectiva da Exploração de Problemas permite que o aluno reflita com maior profundidade sobre os invariantes dos problemas, bem como sobre as problematizações levantadas, o que favorece na compreensão de tais conceitos. Mais do que isso, a partir da Exploração de novos problemas, o estudante tem a oportunidade de retornar a problemas anteriores em busca de alcançar um conhecimento mais avançado e estruturado. Com relação a isso, Andrade (1998) afirma que, através da Exploração e Proposição de Problemas, o professor tem a possibilidade de trabalhar com os alunos um único problema, em diferentes dimensões, níveis de aprofundamento e níveis de ensino. Com isso, compreendemos que um mesmo problema trabalhado nos anos iniciais do Ensino Fundamental pode ser explorado no Ensino Médio, seguindo uma outra intencionalidade educacional, onde o direcionamento para as reflexões feitas ao seu redor requer uma compreensão mais aprofundada dos conhecimentos combinatórios envolvidos.

Pensando no processo de resolução de problemas combinatórios, compreendemos que os alunos e professores, visando simplificar o enunciado do problema em uma forma mais conveniente simplificada, podem codificar as situações apresentadas neles em desenhos e traços. E a sua decodificação pode ser por meio de diagramas de árvores, tabelas de dupla entrada, desenhos também, diagramas de Venn, fórmulas etc.

Com a exploração de problema as trocas de ideias são favorecidas, visto que a investigação acontece em uma perspectiva mais aprofundada e compartilhada. O processo da resolução tem como principal interesse codificar e descodificar os problemas em busca da compreensão mais profunda sobre as técnicas operatórias utilizadas e os conceitos matemáticos envolvidos. Essa ação investigativa promove no aluno um pensamento questionador, onde ele é motivado a sempre ir mais além em busca de um conhecimento.

Andrade (1998) explica que o processo de descodificação é composto por dois momentos. O primeiro momento é descritivo e consiste na leitura do problema, ou seja, os leitores - descodificadores - narram o problema. Já o segundo momento é analítico, nesse caso, os leitores/decodificadores estudam as características que estruturam o problema.

As reflexões e sínteses realizadas pelos alunos são mediatizadas pelo processo de codificação e descodificação. Assim, a codificação e descodificação precisam fazer parte de todo o processo de Resolução, Exploração e Proposição de Problemas. Vale ressaltar que estas ferramentas não podem ser ensinadas explicitamente em sala de aula. De acordo com Andrade (1998, p.26) “elas são adquiridas no trabalho da unidade Problema-Trabalho-Reflexões e Síntese-Resultado e quanto melhor for desenvolvida essa unidade, melhor será o seu trabalho de codificação e descodificação”.

Em uma experiência de Resolução, Exploração e Proposição de Problemas, dado um problema, não é necessário dizer aos alunos que eles o codifiquem e o descodifiquem para que, posteriormente, possam resolvê-lo e explorá-lo ou propor novos problemas. O que se deseja do aluno é que ele, diante do problema, “tente realizar algum trabalho sobre ele e que este seja encaminhado num processo de Reflexão e Sínteses-Resultado” (ANDRADE, 2017, p.370).

Assim, no trabalho com a Combinatória na perspectiva da Resolução, Exploração e Proposição de Problemas o interesse do trabalho em sala volta-se à exploração do problema em diversos enfoques. Cabe ao docente incentivar a exploração de novos problemas que podem ser gerados pelos problemas iniciais, e não dizer de maneira explícita o que o aluno precisar fazer. Desse modo, o professor estará oportunizando os alunos a refletirem sobre os diferentes significados que um mesmo problema pode possuir. No ensino da Combinatória, por exemplo, o professor pode inicialmente propor um problema que trabalhe o Princípio Fundamental da Contagem e, com o decorrer da exploração do problema, incentivar os alunos a levantar questionamentos que os conduzam a um novo problema que, por sua vez, trabalhe os invariantes de problemas de combinação ou produto cartesiano.

As ideias próprias dos alunos é algo que precisa ser valorizado na exploração e proposição problemas. Assim, para que o professor conduza seu trabalho neste ambiente é preciso que a criatividade dos alunos e sua autonomia seja estimulada. Durante o processo de exploração e proposição é importante que o docente incentive a criação de estratégias próprias, pois isso favorece o pensamento matemático. Em nossas atividades, pretendemos incentivar os alunos a utilizarem seus conhecimentos prévios no processo de exploração e criação de estratégias para a resolução dos problemas combinatórios.

No ensino de Matemática via Resolução, Exploração e Proposição de Problemas não podemos desconsiderar nem o contexto do aluno, nem o contexto do professor (ANDRADE, 1998). Como tal perspectiva metodológica possibilita um nível de reflexão mais aprofundada, é bem possível que o aluno apresente questionamentos que, muitas vezes, o professor não espera. Assim, quando o docente decide desenvolver seu trabalho pedagógico apoiado nesta perspectiva metodológica ele não pode desconsiderar o trabalho de reflexão do aluno, pois situações como estas exigem que ele analise como pode avançar e melhorar o seu trabalho, que na presente situação oportunizou a germinação de outros problemas e conteúdos inesperados. Fundamentado nas ideias de Freire (1993), Andrade (1998) cita um trecho do trabalho do autor que explica essa ideia:

> Impor a eles a nossa compreensão em nome de sua libertação é aceitar soluções autoritárias como caminhos de liberdade. Mas assumir a ingenuidade dos educandos demanda de nós a humildade necessária para assumir também a sua criticidade, superando, com ela, a nossa ingenuidade também (FREIRE, 1993 *apud* ANDRADE, 1998, p.32).

É importante que o contexto de trabalho dos alunos e o contexto do trabalho do professor caminhem de maneira dialética (ANDRADE, 1998). O caminho que o professor deve trilhar, muitas vezes, pode ser indicado pelo trabalho desenvolvido pelo aluno, ou seja, o ponto de partida do professor pode ser determinado pelos questionamentos e problemas secundários gerados pelos alunos e o problema inicial. As problematizações que podem ser promovidas pela relação *Problema-Trabalho-Reflexões e Síntese-Resultado* precisam estar fundamentadas no trabalho de reflexão desenvolvido pelo aluno.

A Resolução, Exploração e Proposição de Problemas permite que o aluno realize uma reflexão mais aprofundada sobre os conceitos implícitos nos problemas que lhes serão propostos, o que favorece no processo de construção de novos conhecimentos. Além disso, compreendemos que a dinâmica de aula promovida nesta direção pode despertar nos alunos a segurança necessária para a criação e exploração de diferentes estratégias de resolução e ideias matemáticas que, por sua vez, pode evidenciar como o seu raciocínio combinatório está se desenvolvendo.

Destacamos, ainda, um modelo mais atual da proposta de Exploração, Resolução e Proposição de Problemas, onde ligeiramente modificado, a proposição de problemas aparece de forma explícita no processo, como fazendo parte de movimentos da problematização do processo. Neste novo modelo, a proposição é percebida como uma ferramenta de problematização que estimula o processo de resolução e de exploração do problema ou situação-problema. Nesse processo, a "atividade de exploração de problemas é considerada a ferramenta mais importante e mais ampla de todas, ela compreende tanto a resolução como a proposição" (ANDRADE, 2017, p.371).

Nosso trabalho em sala de aula pautou-se nesta perspectiva atual do autor, em que a *Experiência de Exploração, Resolução$_{exploração}$, Proposição$_{exploração}$ e Codificação – Descodificação de Problemas*, que se trata de uma versão ligeiramente modificada da primeira, considerando como ferramentas essenciais de trabalho o processo de codificação e descodificação e a proposição de problemas ao longo de todo processo educativo.

Compreendemos que, em todas as perspectivas aqui discutidas, é extremamente importante que o professor compreenda os questionamentos dos alunos durante o processo de resolução e exploração dos problemas. A metodologia de Resolução de Problemas, em especial a proposta de Andrade (1998), Onuchic (1999) e Kilpatrick (2017) exige que o professor saiba ouvir seus alunos, no sentido de saber interpretar suas indagações para que apoiados nelas, posteriormente, apresente problematizações e explorações em diferentes dimensões que um problema pode permitir.

O professor que apoia seu trabalho pedagógico na expectativa de conduzir seu aluno a construir o seu próprio conhecimento precisa conseguir identificar os momentos oportunos para introduzir as problematizações, as quais não podem intimidar o aluno, mas impulsioná-lo a buscar pelo seu conhecimento. Sob a ótica da metodologia da Resolução, Exploração e Proposição de Problemas, entendemos que para uma profunda e significativa exploração dos problemas é extremamente necessário que o professor consiga interpretar os registros escritos dos alunos, bem como seus questionamentos e trocas de ideias. O professor que assume a postura de pesquisador, além de interpretar, necessita saber utilizar tais aspectos para o estudo do desenvolvimento de seus alunos.

Com relação a isso, D'Ambrósio (2017) explica que alguns professores se propõem a escutar seus alunos com o intuito de apenas avaliar soluções e/ou colocações, sejam elas representadas oralmente ou pelo registro escrito; ao passo que outros buscam ouvir seus alunos com o objetivo de interpretar a solução e/ou colocação dadas por eles. Nesta última maneira de ouvir,

> [...] o professor tentar compreender o que o aluno está pensando, faz a ele muitas perguntas para entender qual o seu equívoco, para então, poder criar situações que o leve a corrigir o seu erro. Esse professor também busca guiar o aluno a respostas e a construções matemáticas corretas (D'AMBRÓSIO, 2017, p.111).

Além dessas duas maneiras de ouvir, D' Ambrósio (2017) explica uma terceira, a hermenêutica. Nesta, o professor também ouve o aluno com o intuito de aprender algo novo com o que foi colocado pelo aluno.

Acreditamos que na abordagem da Resolução, Exploração e Proposição de Problemas, a maneira com que o professor ouve os seus alunos, muitas vezes, pode representar a maneira com a qual ele conduz sua prática pedagógica e as problematizações em contexto de sala de aula. O professor que está disposto a ouvir seus alunos, buscando aprender e interpretar suas colocações e soluções, durante a exploração dos problemas, procura valorizar e estudar a Matemática apresentada pelo aluno. Durante o processo de codificação e descodificação dos problemas, ele examina os esquemas e a lógica matemática que o aluno desenvolveu para a resolução do problema, ele se interessa por momentos em que o saber deste parece desestabilizar-se, pois são nestes momentos que o aluno elabora novos saberes em busca de alcançar seu equilíbrio. Para tanto, ele "retoma para um estado de equilíbrio com conhecimentos anteriores" (D'AMBRÓSIO, 2017, p.112).

A produção escrita do aluno também pode ser analisada desta forma. Quando o professor examina a resolução do problema que o aluno fez, buscando acreditar na matemática desenvolvida por ele, está investigando as ideias suscitadas pelos alunos para começar a dar início a seu trabalho pedagógico fundamentado no que analisou. Sobre o fato de o educador passar a considerar a produção do aluno e a ouvir sua voz, acreditando no seu potencial matemático, D'Ambrósio (2017) explica:

> [...] é possível aprender com a sua construção de conhecimento a respeito de razões inversas, será também possível aprender muito e começar a elaborar um modelo do pensamento dos alunos, o que dará maior segurança ao escolher e a propor as próximas atividades para a turma (D'AMBRÓSIO, 2017, p.118).

Pensando na interpretação de resoluções de problemas combinatórios, quando o professor lê a produção escrita do aluno acreditando e dando razão a ele está tendo a oportunidade de entender melhor o raciocínio combinatório empregado pelo aluno na resolução do problema. É possível descobrir se o aluno está compreendendo bem o conteúdo e, com base nisso, determinar um instrumento a partir de sua produção "para resolver esse problema de forma robusta e autêntica, apoiando-se em novas construções" (D'AMBRÓSIO, 2017, p.118).

A produção pessoal do aluno pode deixar bastante evidente o que ele compreende sobre o conteúdo. No registro escrito dos problemas combinatórios, por exemplo, ele pode expressar, a partir da árvore de possibilidades, se é capaz de conseguir elencar todas as possiblidades de agrupamentos ou se demonstra não conseguir compreender como se distribui a ramificação das possibilidades. A partir disso, o professor pode analisar se o raciocínio combinatório está sendo estruturado, se as escolhas das combinações das possibilidades estão sendo sistematizadas ou se essas escolhas são realizadas de maneira desordenada.

O trabalho do professor pesquisador que dá voz e razão ao aluno tem positivas consequências. A análise, não limitada da produção escrita do aluno ou de suas colocações durante o processo de resolução dos problemas, apresenta elementos que ajudam o professor a elaborar um modelo da aprendizagem de seu aluno. Isso pode influenciar na sua escolha de situações-problemas que serão colocadas posteriormente para dar prosseguimento ao trabalho (D'AMBRÓSIO, 2017). Por exemplo, a partir de uma coleção de produções dos alunos para problemas de combinação de elementos, o professor pode elaborar ou escolher um outro problema ou situação-problema, nos quais um novo contexto com diferentes valores de agrupamentos e invariantes sejam trabalhados de maneira a criar novos desafios aos alunos.

Outro aspecto positivo, quando se adota esta postura, está ligada à condução das problematizações durante o processo de resolução e exploração dos problemas. De acordo com a autora, essa postura quando adotada pelo professor influencia não apenas na ordem em que serão desenvolvidas as discussões das resoluções e soluções, mas também no foco desses debates (D'AMBRÓSIO, 2017).

2.3.2 SÍNTESES DAS IDEIAS

Objetivando sintetizar as abordagens da metodologia de Resolução de Problemas, discutidas no presente capítulo, no Quadro 1, exibimos as ideias fundamentas das principais abordagens.

Quadro 1 - Abordagens da Metodologia de Resolução de Problemas

Autor/ano	Abordagem	Concepção de problema	Ideia principal
POLYA (1985)	Descreve um conjunto de quatro fases que se relacionam no processo de resolver problemas matemáticos: (1) compreender o problema; (2) planejar um plano de resolução; (3) executar o plano; e (4) fazer a retrospectiva do problema original.	Considera um problema como sendo uma situação na qual se busca maneiras para se alcançar algo desejado, que, no entanto, não se consegue fazer isso prontamente.	Preocupa-se com a resolução de problemas e como ensinar estratégias que levassem a enxergar caminhos para resolver problemas.
SCHROEDER; LESTER (1989)	Apresentam três abordagens distintas para se trabalhar a Resolução de Problemas em contexto de sala de aula: (1) ensinar	--- (Não encontramos uma definição exata sobre a concepção destes autores.)	Preocupa-se com a interpretação da Resolução de Problemas em contexto de sala de aula. Tendo

	sobre Resolução de Problemas; (2) ensinar matemática para resolver problemas; e (3) ensinar matemática através da Resolução de Problemas.		em vista que, ela pode ser vista como ou como uma teoria, ou como uma metodologia, ou como uma ação a ser realizada em torno de um problema.
ONUCHIC; ALLEVATO (2011)	Discute implementação da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.	Para as autoras, um problema é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em fazer.	Considera que o processo integrado ensino-aprendizagem-avaliação. Neste, o trabalho destes três elementos, ocorrem simultaneamente durante o processo de resolução dos problemas.
SERRAZINA (2017)	Dialoga sobre a Metodologia de Ensino e aprendizagem da Matemática através da Resolução de Problemas, em uma abordagem de ensino-exploratório.	A autora assume que um problema é uma situação para a qual se procura uma solução, não existindo à partida de um procedimento que conduza a essa solução.	Objetiva ajudar os professores na promoção de um ambiente, em que os alunos sejam encorajados, a questionar, experimentar, explorar, de maneira criativa, diversas maneiras de resolução que o conduzam a processos de construção do conhecimento. Com isso, a autora apresenta dez estratégias de resolução de problemas que precisam ser trabalhadas na formação inicial dos professores que ensinam matemática.
KILPATRICK (2017)	Aborda a Resolução de Problemas como sendo uma investigação, em que uma sequência de reformulações é realizada em torno de um problema inicial.	Considera-se que um problema, pode ser uma tarefa na qual o aluno desempenha um trabalho de investigação que o possibilite elaborar reformulações do problema que o conduzam a uma solução, ou estratégia de resolução bem-sucedida, onde o	A perspectiva da Resolução de Problemas como um processo de reformulações e investigação, enxergar cada ideia compreendida no processo de resolução como sendo uma reformulação, do problema inicial, fazendo aperfeiçoamento das definições

		aluno consiga construir algum conhecimento a partir dela.	apresentadas no problema original.
ANDRADE (1998; 2017)	Ensino-Aprendizagem de Matemática via Resolução, Exploração e Proposição de Problemas.	Entende-se como problema um projeto, uma questão, uma tarefa, ou uma situação, em que o aluno não tem ou não conhece nenhum processo que lhe permita encontrar de imediato a solução, porém que tem interesse em solucioná-lo, de modo que realize um trabalho efetivo sobre ele.	A partir da exploração, da resolução e da proposição dos problemas, através de do movimento *Problema-Trabalho-Reflexões* e *Sínteses-Resultado*, que toma como base o processo de Codificação e Descodificação dos, os alunos constroem ideias e conceitos matemáticos.

Fonte: Adaptado de Polya, 1985; Schroeder e Lester, 1989; Onuchic e Allevato, 2011; Serrazina, 2017; Kilpatrick, 2017 e Andrade, 1998; 2017.

De acordo com o exposto no capítulo, compreendemos que as abordagens atribuídas à Resolução de Problemas diferenciam de acordo com o tempo e concepções sobre o ensino da Matemática e problemas matemáticos.

Existem abordagens nas quais a ação de resolver problemas é entendida apenas como uma ação propiciada pela aprendizagem da Matemática. Todavia, existem também aquelas cujo processo de resolução e exploração dos problemas possui uma perspectiva mais ampla de seu significado. A abordagem de Resolução de Problemas de Kilpatrick (2017) e Andrade (1998; 2017) são exemplos destas perspectivas. Nelas, a Resolução de Problemas é vista não somente como uma ação que se desenvolve quando se aprende Matemática, mas também como uma maneira de se aprendê-la, de modo a utilizar as capacidades desenvolvidas através dela para interpretar situações que fazem parte de outras áreas de conhecimento. A perspectiva dos referidos autores entra em consenso, no sentido de enxergar a proposição e formulação de problemas secundários como um objetivo da aprendizagem Matemática, e como um meio de se ensiná-la.

A valorização dos conhecimentos prévios dos alunos e da criatividade deles no momento de investigação e elaboração de estratégias de resolução, apresenta-se como um ponto convergente entre os estudos de Kilpatrick (2017), Andrade (1998; 2017), Serrazina (2017), Onuchic (1999) e Onuchic e Allevato (2011; 2015). Compreendemos que os conhecimentos já adquiridos pelos alunos, oriundos de experiências vivenciadas em contextos escolares e extraescolares, são vistos pelos referidos estudos como um instrumento que dispara o processo de reformulação das ideias, impulsionado a busca pela construção de novos conhecimentos que os possibilitem a elaboração de estratégias bem-sucedidas de resolução. Consideramos como estratégias de resolução bem-sucedidas, não apenas aquelas que conduzam a caminhos que cheguem a uma solução correta, mas também aquelas que possibilitam aos alunos construírem novos conhecimentos.

Dentre as abordagens discutidas, existem aquelas em que a ideia principal ora se aproxima, ora se distancia. A abordagem defendida por Polya (1985) preocupa-se em explicar o processo de resolução de problemas e em ensinar estratégias de resolução que levem a enxergar caminhos para solução dos problemas. Em contraste, temos Onuchic e Allevato (2011) e Serrazina (2017), cuja abordagem se preocupa não apenas com os métodos de resolução de problemas, mas também em apresentar considerações que auxiliem no trabalho pedagógico dos professores que ensinam Matemática.

Com isso, podemos observar que tais abordagens discutem diferentes aspectos da Resolução de problemas que podem favorecer o processo de ensino-aprendizagem da Matemática, tais como: o trabalho pedagógico do professor que adota a Resolução de Problemas como metodologia de ensino; o processo de resolução, exploração e/ou proposição dos problemas; as técnicas de resolução; o comportamento dos alunos em um processo educativo apoiado sobre esta perspectiva metodológica.

A Metodologia de Ensino-Aprendizagem da Matemática através da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas, apresentada por Andrade (2017), pode favorecer o processo educativo da Combinatória. Entendemos que, a partir desta metodologia, problematizações podem ser propostas aos alunos, a fim de estimulá-los quanto à exploração dos problemas. Diante disso, durante os encontros, buscamos articular a Exploração e a Proposição de Problemas no intuito de potencializar a reflexão sobre as características dos invariantes dos problemas combinatórios.

No próximo capítulo, abordaremos as ideias essenciais da Combinatória, como os seus diferentes invariantes e significados e o processo de construção dos conceitos.

3 CARACTERÍSTICAS DO RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO

Neste capítulo, discutimos sobre o processo de construção das ideias essenciais da Combinatória, a partir dos estudos de Vergnaud, elucidando os diferentes significados e invariantes dos problemas combinatórios.

3.1 A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE COMBINATÓRIA

Compreender como ocorre o processo de aprendizagem e a construção de um conceito matemático por parte dos alunos é tarefa essencial na profissão docente, considerando o fato de que a compreensão desses aspectos pode subsidiar algumas decisões que o professor precisará delimitar no exercício da docência. A Teoria dos Campos Conceituais contribui para esse trabalho, sendo "[...] fundamental para ensinar a disciplina, pois permite prever formas mais eficientes de trabalhar os conteúdos" (VERGNAUD, 2008, p. 33).

É imprescindível que o professor consiga entender o percurso que seu aluno está delineando para alcançar a aprendizagem desejada. Compreendendo a forma como eles aprendem e constroem seus conceitos matemáticos, o docente pode planejar estratégias de ensino que favoreçam o desenvolvimento progressivo do aluno, de tal modo que futuramente as situações organizadas e postas pelo professor ocasionem momentos de desestabilização em seus alunos para a busca de novos conhecimentos e momentos de estabilização como forma de aquisição da aprendizagem. Assim,

> [...] é útil que os professores tenham uma análise mais confiável das situações matemáticas, das operações de pensamento necessárias para lidar com elas e dos erros mais importantes cometidos pelos alunos. Isso deve permitir que os professores planejem atividades de aprendizado mais adequadas, façam diagnósticos e avaliações melhores e forneçam aos alunos explicações mais benéficas (VERGNAUD, 1992, p.288).

Desenvolvida pelo cognitivista Gérard Vergnaud, a Teoria dos Campos Conceituais estuda os processos de aquisição dos conhecimentos matemáticos e as estruturas mentais utilizadas pelas crianças nesses processos para delimitar estratégias educacionais consistentes. É influenciada pelas concepções da teoria de Jean Piaget e Vygotsky. Com um interesse maior nos processos de ensino e aprendizagem, Vergnaud considera que os conceitos piagetianos de assimilação, acomodação, adaptação e equilibração são muito importantes para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Contudo, a grande contribuição piagetiana em relação à Teoria dos Campos conceituais é o conceito de esquema de assimilação. Quanto às contribuições de Vygotsky, a relevância da interação social, da linguagem e da simbolização no progressivo domínio de um campo conceitual pelos alunos é uma das concepções que o autor adotou para a formalização de sua teoria.

De acordo com Vergnaud (1982a, p.32) "[...] o conhecimento emerge dos problemas a serem resolvidos e situações[6] a serem dominadas", assim, em sua teoria, a construção do conceito somente confere sentido ao aluno quando este o constrói a partir de uma variedade de situações-problema que envolva o conceito a ser construído e suas relações com outros conceitos. Sobre este olhar, destacamos a importância da resolução de problemas combinatórios para a compreensão das ideias essenciais da Combinatória e para a construção sólida de seu conceito. Os problemas combinatórios possuem um caráter desafiador, podendo representar situações nas quais os conceitos necessários para a sua solução ainda não foram adquiridos pelos alunos, motivando-os a desenvolver novas estratégias de resolução e, consequentemente, permitindo que construam novos conhecimentos.

Relativo aos problemas e situações a serem propostos durante o processo educativo, em seu estudo *La Teoría de los Campos Conceptuales,* Vergnaud (1990) explica que, para a análise do papel da linguagem e do simbolismo na conceituação de um conceito matemático, os problemas a serem propostos podem ser tanto teóricos como práticos. Quanto às situações, ele distingue em dois tipos: 1) classes de situações para as quais o sujeito tem em seu repertório as competências necessárias para o tratamento relativamente imediato da situação, materializadas em um dado momento vivenciado por este; 2) classes de situações para as quais o sujeito não possui todas as competências necessárias, "o que o obriga a um tempo de reflexão e exploração, de dúvidas, tentativas abortadas e, eventualmente, leva ao sucesso ou falha" (VERGNAUD, 1990, p.2).

Pela sua interessante distinção de funcionamento para ambos os tipos de situações, o conceito de *esquema* é destacado pelo autor. De acordo com Vergnaud (1990, p.2), o *esquema* pode ser considerado como "a organização invariável do comportamento de uma classe de dadas situações". O pesquisador afirma que existem numerosos exemplos de esquemas na aprendizagem da Matemática, sendo cada um deles concernentes a uma

[6] O conceito de situação colocada pelo autor tem aqui o significado tarefa (VERGNAUD, 1982a).

classe de situações, cujas características são bem definidas, podendo ser aplicado em uma classe menor ou maior. Quando aplicado em uma classe maior, entende-se que o esquema foi estendido, podendo-se falar então em relocação, generalização, transferência e descontextualização.

Seus estudos explicam que os esquemas colocados na perspectiva da primeira classe de situações costumam ser eficazes, porém, quando se mostram ineficazes na resolução de uma determinada situação, a experiência leva o aluno a mudar ou modificar o esquema adotado anteriormente. Como os comportamentos nas situações presentes são baseados no repertório inicial de esquemas disponíveis, podemos dizer que "o funcionamento cognitivo de um sujeito ou de um grupo de sujeitos em situação repousa sobre o repertório de esquemas disponíveis, previamente formados, de cada um dos sujeitos considerados individualmente" (VERGNAUD, 1990, p.4). A teoria dos campos conceituais aborda esse problema crítico.

Tendo em vista que a Combinatória pertence ao campo conceitual das estruturas multiplicativas, como maneira de elucidação, podemos exemplificar uma situação que envolva o algoritmo da multiplicação, em que se possa usar a estratégia de adição de parcelas repetidas e outra que se utilize da compreensão de proporcionalidade.

Como sabemos, as quatro operações fundamentais da Matemática são apresentadas nos primeiros anos do Ensino Fundamental, adição e subtração nos dois primeiros anos e multiplicação e divisão nos últimos anos do Ensino Fundamental I. Assim, quando o aluno se depara com uma situação que envolver a ideia de multiplicação, podendo resolvê-la a partir da ideia de adição de parcelas repetidas, ele apoia-se neste esquema (algoritmo) que já foi previamente formado por situações já conhecidas. Todavia, quando a situação tem apenas pequenas semelhanças e exige outras competências que ainda não foram desenvolvidas, como no caso da situação da proporcionalidade, no qual o aluno ainda não vivenciou a situação, inicialmente, pelas minuciosas semelhanças entre as situações, o seu comportamento pode ser reflexivo aos de outras situações anteriores. Entretanto, com o insucesso das experimentações, logo perceberá que o algoritmo (esquema) de adição das parcelas repetidas mobilizado não o possibilitará obter a resolução da situação proposta no presente momento.

Isso acontece porque eles foram afastados de uma classe de situações dominadas para uma classe de situações que parecem ter uma semelhança com esta, na qual o repertório de seus esquemas disponíveis não se mostra suficiente. Como a semelhança entre as situações é apenas parcial, vários esquemas podem ser evocados e esboçados.

Na teoria dos Campos Conceituais, um esquema organiza as ações que serão realizadas frente a uma dada situação. Nesse sentido, podemos considerar que um esquema "é composto de regras de ação e antecipações uma vez que gera uma série de ações para atingir um determinado objetivo" (VERGNAUD, 1990, p.5), sendo composto também, essencialmente, por *invariantes operativos* e *inferências*. Por inferências, uma vez que "um esquema não é um estereótipo, mas uma função temporalizada de argumentos que produz uma série de diferentes ações e coleta de informações" (VERGNAUD, 1990, p.5). Por invariantes, pelo fato de estabelecerem relações que permanecem sem alteração diante um certo conjunto de transformações ou variações (VERGNAUD, 1982a).

No que se refere ao *conceito*, Vergnaud (1990) defende que este não pode ser reduzido à sua definição, pela razão de que um conceito adquire significado a uma criança por meio de diferentes situações e problemas que pretendem ser resolvidos. Assim, para estudar profundamente o desenvolvimento de um conceito, é necessário se apoiar em três dimensões ao mesmo tempo, sendo elas: (i) um conjunto de *situações* (tarefas) que dão sentido ao conceito; (ii) um conjunto de *invariantes* que constituem o conceito; e (iii) um conjunto de *representações simbólicas* (formas linguísticas e não linguísticas) que permitem representar o conceito, suas propriedades e as situações a que se refere (o significante).

Na Teoria dos Campos Conceituais, são as situações que dão significado aos conceitos matemáticos, mas não o significado da situação em si. Verganud (1990) refere-se ao significado que o sujeito atribui à situação e ao significante. Ou seja, o significado é uma relação do sujeito com situações e significantes (representações simbólicas). Mais precisamente, "são os esquemas que o sujeito evoca a partir de uma situação ou de um significante, que o possibilitam estabelecer o significado desta situação ou deste significante para esse sujeito" (VERGNAUD, 1990, p.15).

Além de ser constituído por uma tríade de conjuntos, Vergnaud (1982b) parte da premissa de que o conceito é organizado em campos conceituais. Em seu estudo, o autor explica que um campo conceitual pode ser considerado como (1) um conjunto de situações e (2) um conjunto de conceitos.

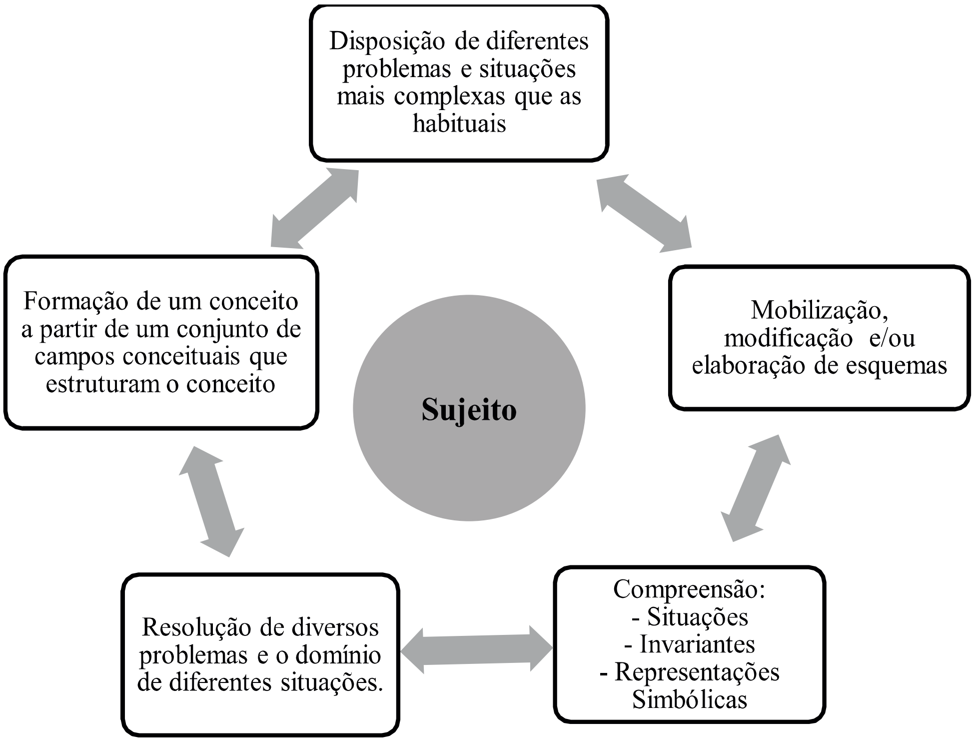
Conforme visto, um conceito não se desenvolve sozinho, mas por meio de uma estreita relação com outros conceitos e situações. Por este motivo, as situações, invariantes e representações que o caracterizam estão conexas a outros conceitos, mediante diferentes situações ou representações simbólicas (VERGNAUD, 1990).

Assim, no que diz respeito à formação do conceito de Combinatória, compreendemos que este é formado por um conjunto de campos conceituais que o estruturam matematicamente. Logo, o desenvolvimento do raciocínio combinatório acontece por meio da construção de campos conceituais que lhes permitem dar sentido a um campo de situações que o estruturam.

Nesse sentido, Vergnaud (1982b) afirma que o domínio de um campo conceitual, por parte do sujeito, demanda um longo período de tempo, com rupturas e filiações, e pela maturidade adquirida por meio da experiência. Ele explica que entre as primeiras competências adquiridas pelas crianças (de quatro ou cinco anos) e as competências a serem desenvolvidas até a sua adolescência (quinze anos), numerosas etapas e processos com filiações e rupturas podem ser observadas. Filiações, no sentido de que as competências novas apoiam-se, em parte, nas competências adquiridas anteriormente; e rupturas, porque, às vezes, na tomada de consciência da formação de uma nova competência, é preciso que a criança deixe de lado ideias e formas de agir anteriores (VERGNAUD, 2011).

Sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, compreendemos que, para a construção do conceito da Combinatória, é importante que o aluno tenha a oportunidade de vivenciar tal processo (Ilustração 2):

Ilustração 2 - Processo de construção conhecimento



Fonte: Adaptação de Vergnaud (1982a; 1982b; 1990; 1991)

Com base na Teoria dos Campos Conceituais, entendemos que para a construção do conceito da Combinatória é preciso que seu processo educativo seja iniciado a partir de uma classe de situações mais ampla que a habitual. Ao passo que o aluno confere que seu repertório de esquemas previamente formado se mostra insuficiente para a resolução de tais situações, ele é estimulado a aprimorar ou elaborar novos esquemas. E, com isso, atribuir um significado aos invariantes imbricados nas situações, bem como às possíveis representações que significam tais invariantes.

Tendo conseguindo construir tais significados, é necessário que o aluno seja disposto a resolver diversos problemas que envolvem o domínio de diferentes situações. Isso, permite que o aluno faça rupturas e/ou filiações com competências já adquiridas para a formação de novos conceitos, a partir da compreensão de um conjunto de campos conceituais que o estruturam.

Assim, para que o aluno consiga ter domínio do campo conceitual das estruturas Combinatórias é interessante que, a princípio, ele tenha domínio do campo conceitual das estruturas multiplicativas. Isso, pode facilitar no domínio de classe de situações combinatórias mais complexas, haja vista que o campo conceitual das estruturas multiplicativas estrutura, matematicamente, o campo conceitual das estruturas Combinatórias.

Entender as características próprias do campo conceitual das estruturas multiplicativas é algo importante para a formação de conceitos combinatórios mais complexos. É preciso que as diferentes situações que as estruturas multiplicativas possuem sejam compreendidas, pois o aprendizado de problemas de multiplicação, divisão e outros conceitos relacionados, são alguns dos aspectos básicos que fazem parte dos conceitos combinatórios.

Geralmente, os problemas multiplicativos são introduzidos na educação escolar de maneira formal e sistemática a partir da 2º ou 3º série, atuais 3º e 4º ano do Ensino Fundamental. Estas estruturas, de acordo com Pessoa (2009), usualmente, são apresentadas nas salas de aula e nos livros didáticos como uma extensão da adição, sendo a multiplicação vista como a adição de parcelas repetidas. Entretanto, muito embora essa abordagem seja relevante como ponto de partida para a compreensão da multiplicação de números naturais, ela "não é suficiente para que os alunos compreendam e resolvam outras situações relacionadas à multiplicação" (BRASIL,1997, p.109), visto que as bases do raciocínio dessas operações são diferentes.

De acordo com Nunes e Bryant (1997), para a compreensão das características do campo multiplicativo é preciso que as crianças entendam um novo conjunto de invariantes relacionados à multiplicação e à divisão, pois o pensamento multiplicativo tem como base a correspondência um-a-muitos, já o aditivo a concepção básica é parte-todo.

É preciso considerar que mesmo que em algumas situações os procedimentos de multiplicação possam ser realizados como a adição de parcelas iguais, existem diferenças conceituais entre os dois campos. Vergnaud (1991) discute sobre esse aspecto revelando que para ampliação conceitual de uma criança é preciso que a competência de realizar o *cálculo numérico* e, sobretudo, o *cálculo relacional*, seja desenvolvida. De acordo com o autor, os dois tipos de cálculos são competências diferentes para a resolução de problemas e operações: os cálculos numéricos são as resoluções dos algoritmos propriamente ditos; ao passo que os cálculos relacionais envolvem operações de pensamento na decisão de qual procedimento ou operações aritméticas podem ser utilizadas para resolver determinada situação.

Existem diferentes classificações de cálculo relacional característico das estruturas multiplicativas, porém, em sua maioria, se familiarizam. Na perspectiva de Vergnaud (1990, p.8), o campo conceitual das estruturas multiplicativas pode ser visto como “um conjunto de situações cujo tratamento envolve uma ou várias multiplicações ou divisões”. Assim como os demais campos conceituais que importam algum significado para algum conceito, o campo conceitual das estruturas multiplicativas confere sentido à situações ou problemas que envolvem, além da multiplicação e divisão, os conceitos de proporção simples e múltipla, função linear e não linear, análise dimensional, fração, números racionais, dentre outros.

Mais à frente, ainda no presente capítulo, abordaremos com mais profundidade as diferentes situações Combinatórias (*arranjos, combinações e permutações*), assim como as de produto cartesiano e o Princípio Fundamental da Contagem (PFC), que significam o seu conceito.

3.2 O CONCEITO DE COMBINATÓRIA

A importância da compreensão do conceito da Combinatória na Educação Matemática é algo pontuado pelos pesquisadores. Pela relevância de suas contribuições em diversos conhecimentos importantes para o desenvolvimento da sociedade, como os de Probabilidade e Estatística, a necessidade do entendimento do conceito da Combinatória é destacada por diferentes estudos (PESSOA, 2009; SANTOS, 2016). Tais estudos defendem que, ao compreender o conceito deste conteúdo, o aluno conseguirá identificar e relacionar tal conceito em diferentes situações que fazem parte do seu cotidiano, ajudando-o a responder com mais facilidade as demandas impostas pela sociedade atual.

Ao discutir sobre a complexidade do conceito da Combinatória, Morgado *et al.* (1991) afirmam que, embora seja um conteúdo matemático repleto de problemas capazes de motivar os alunos, ele é considerado complicado. Os autores explicam que, durante o processo de resolução dos problemas combinatórios, a maioria dos alunos não conseguem compreender, tampouco identificar em que situações poderão utilizar as diferentes técnicas de contagem da combinatória. O não entendimento dos diferentes invariantes que cada técnica possui, bem como a não compreensão da conceituação deste conteúdo, são fatores que influenciam os alunos a recorrerem a outros métodos de contagem, como o Princípio Fundamental da Contagem, evitando sempre que possível o envolvimento das técnicas de contagem propriamente da Combinatória.

Muitos pesquisadores da Educação Matemática pontuam que a Combinatória surgiu como um dos meios de contagem da Matemática, no qual permite que se saiba a quantidade de agrupamentos possíveis constituídos pela combinação e manipulação de elementos de um dado conjunto finito, sem necessariamente precisar contá-los um a um (PESSOA, 2009). Em outras palavras, pode-se dizer que com a Combinatória é possível agrupar elementos de um dado conjunto, de modo a atender certos critérios postulados anteriormente, determinando-se, com isso, a quantidade possível de agrupamentos dos elementos.

Diante disso, podemos extrair diferentes situações do nosso cotidiano que exemplificam como os conceitos combinatórios podem estar presentes em ações familiares ao nosso convívio. Quando selecionamos e organizamos as possibilidades mais prováveis de acontecimentos de um evento, consequentemente, estamos organizando um espaço amostral, ao fazer isso, temos como objetivo determinar quais são as possíveis combinações de elementos que mais são prováveis para o alcance de uma possível vitória. Por conseguinte, estamos combinando elementos de um dado conjunto, para saber quais os agrupamentos possíveis que indicam uma maior probabilidade de vencer.

Todavia, nem todas as situações que envolvem conceitos combinatórios podem ser descritas de maneiras contextualizadas. Sabemos pela literatura que para o estudo da Matemática é interessante apresentar os conceitos aos alunos que estão iniciando seus estudo de maneira um pouco menos formal, contextualizando sempre que possível, a partir de situações familiares ao seu convívio, para que somente mais adiante, o objeto de estudo possa ser trabalhado com mais aprofundamento e rigidez dentro do próprio campo do saber matemático, apresentando suas respectivas definições, postulados, teoremas, ou seja, o que o estrutura matematicamente. Desta forma, o estudo do objeto poderá ter sentido para a aprendizagem do aluno, uma vez que o possibilitará relacionar com situações não somente escolares, mas também extraescolares presentes em suas atividades cotidianas.

É difícil atribuir uma única definição para a Análise Combinatória ou simplesmente Combinatória, pois ela não se detém unicamente a resolver problemas de permutação, arranjo, combinação e produtos cartesianos. O conceito de Combinatória pode ser visto em diferentes perspectivas, assim, o consideramos flexível à situação imposta no momento, permitindo que seja aplicado a uma gama de situações, possibilitando ao professor exemplificar diferentes situações que envolvem tal conceito. Este fato justifica a razão pela qual "os matemáticos sentem instintivamente que certos problemas são de 'natureza combinatória', e que os métodos para resolvê-los merecem ser estudados sistematicamente" (BERGE, 1971, p.1). No tocante à diversidade de conceitos que constituem a Combinatória, que não serão discutidos aqui, Dornelas (2004, p.21) destaca em seu estudo:

> Os que tratam do número total de elementos na união de um número finito de conjuntos (Princípio da Inclusão e Exclusão), das Funções geradoras (que envolvem a seleção de objetos nos quais a repetição é permitida, em problemas da teoria aditiva dos números, especificamente na teoria das partições, das Relações de Recorrência (que partem da abordagem de problemas particulares para problemas genéricos), O Princípio de Dirichlet, também conhecido como da Casa dos Pombos ou das Gavetas (que procura determinar a existência ou não de conjuntos satisfazendo certas propriedades), as Permutações Caóticas (que procura determinar o número de permutações com os elementos de um conjunto dado, quando nenhum número se encontra ocupando seu lugar primitivo), os Lemas de Kaplansky (que busca obter de quantos modos é possível formar um conjunto de p elementos a partir de um outro com n elementos, $p \leq n$, no qual não haja números consecutivos) e o Princípio da Reflexão que procura estabelecer o número de trajetos possíveis de uma partícula no plano.

Mesmo com essa flexibilidade e amplitude do conceito, observamos que as diferentes perspectivas de conceitos sobre a Combinatória não fogem de sua principal vertente, que consiste na seleção de dados, seja por escolha e/ou agrupamento de um determinado conjunto com particularidades próprias.

A Combinatória faz parte do campo de estudo da Matemática Discreta. Este ramo da Matemática tem como objetivo determinar a contagem de elementos de um dado conjunto, o que se diferencia da noção clássica da Matemática Contínua, mais apropriada para situações em que a finalidade principal é a medida de uma quantidade. Em relação aos tipos de problemas discutidos pela Matemática Discreta, Dossey (1991 *apud* SILVEIRA, 2016, p.37) classifica-os em três amplas categorias:

> 1ª) Problemas de existência: trata de reconhecer se um dado problema tem uma solução ou não;
> 2ª) Problemas de contagem: investiga quantas soluções podem existir para problemas com soluções conhecidas;
> 3ª) Problemas de otimização: focaliza sobre a descoberta de uma melhor solução para um problema particular.

Antes de fazer parte do referido campo de estudo da Matemática, a Combinatória transitou em diferentes situações que envolviam problemas de contagem ao longo da história do seu desenvolvimento na Matemática. Somente a partir do século XVII ela passou a ser reconhecida como parte integrante da Matemática Discreta. Suas aplicações na Estatística e no cálculo de probabilidades ganharam destaque em vários outros campos da ciência e dentro de poucos anos foram pontuadas em três livros notáveis: *Traité du triangle arithmétique* (escrito em 1654 e publicado em 1665 em Paris), de Pascal; *Dissertatio de arte Combinatória (*1666), de Leibniz, *Ars magna sciendi sive combinatoria* (1669), de Athanasius Kircher; e também em trabalhos de Frénicle de Bessy, *Abrége des combinaisons* (Paris, 1693); de J. Bernoulli, *Ars Conjectandi* (Basiléia, 1713); bem como de Moivre, *Doutrine of chances* (Londres, 1718) (VAZQUEZ, 2011).

A partir da literatura da história da Matemática, é possível observar que o conceito de Combinatória está presente desde cedo em diferentes questionamentos e descobertas produzidas pelos homens durante os tempos. Suas inúmeras contribuições ao desenvolvimento de variadas áreas do conhecimento, bem como em diversas situações cotidianas, vêm motivando os pesquisadores do âmbito da Educação Matemática a compreender e interpretar as características peculiares do conceito deste conteúdo em uma perspectiva mais pedagógica, objetivando melhorar a qualidade do seu processo educativo na Educação Básica.

Atualmente, Pessoa (2009) defende que, a partir de determinadas estratégias ou fórmulas que envolvem conceitos combinatórios, podemos saber "quantos elementos ou quantos eventos são possíveis numa dada situação, sem necessariamente ter que contá-los um a um" (PESSOA, 2009, p.72). Nesse sentido, de maneira sistematizada, o raciocínio combinatório fundamenta-se no raciocínio multiplicativo para a contagem de grupos de possibilidades e eventos existentes em uma dada situação (PESSOA, 2009), é por este motivo que a Combinatória faz parte do campo conceitual das estruturas multiplicativas e da área da Matemática Discreta.

Compreendemos que a definição do pensamento combinatório defendido pela pesquisadora não é voltada apenas às diferentes técnicas de contagem (combinação, arranjo, permutação e produto notável), como acontece na maioria das definições apresentadas no Ensino Médio. A conceitualização da autora preocupa-se em defender a principal característica do pensamento combinatório, a capacidade da organização de dados de um dado conjunto em subconjuntos (agrupamentos).

Aparentemente, existem diferentes concepções e definições acerca do que vem a ser a Combinatória, entretanto compreendemos que todas seguem a mesma perspectiva para descrevê-la. No presente estudo, consideramos a Combinatória como um conhecimento matemático que nos permite enumerar, classificar e quantificar os elementos e/ou agrupamentos possíveis de um dado conjunto ou subconjunto finito, determinados a partir de uma certa condição de combinação ou manipulação dos elementos que o constitui.

3.2.1 OS DIFERENTES TIPOS DE PROBLEMAS COMBINATÓRIOS E SEUS RESPECTIVOS SIGNIFICADOS

Como discutido anteriormente, para Vergnaud (1982b), o conceito é organizado em campos conceituais, de modo que seu domínio por parte do sujeito ocorre em longo prazo, através da experiência, maturidade e aprendizagem. Compreendemos que Pessoa e Borba (2009), tomando como premissa o argumento de Vergnaud, defendem que o ensino da Combinatória precisa ser iniciado nos primeiros anos do Ensino Fundamental, de maneira que todos as situações presentes na Combinatória (tipos de problemas combinatórios) possam ser trabalhadas simultaneamente, objetivando favorecer na compreensão dos alunos acerca dos diferentes significados (respectivos invariantes deste conceito e as possíveis representações para resolvê-los). Nesse sentido, acreditamos que o ensino dos diferentes tipos de problemas combinatórios, desde os anos iniciais, é necessário e importante para que o aluno consiga assimilar com clareza os diferentes procedimentos de contagem que os conceitos combinatórios possuem.

Em se tratando da perspectiva do campo das estruturas multiplicativas, no caso específico da Combinatória, consideramos que suas situações são como os tipos de problema (arranjo, combinação, permutação e produto cartesiano); seus invariantes são as propriedades características de cada um desses tipos de problema; e as representações simbólicas são as diferentes formas de representar as resoluções dos problemas ou as formas de apresentá-los. Diante disso, na sequência iremos discutir as diferentes situações, invariantes e representações que cada tipo de problema combinatório possui.

Princípio Fundamental da Contagem

O *Princípio Fundamental da Contagem* (PFC), também conhecido como *Princípio da Multiplicação*, não se trata de um tipo específico de problema combinatório, entretanto, pela sua importância no processo de desenvolvimento de esquemas de resoluções dos problemas combinatórios, consideramos importante apresentar a sua definição. Considerado como um princípio implícito na resolução de problemas que envolvem o raciocínio combinatório, ele é definido da seguinte forma:

> Se uma decisão d_1 pode ser tomada de x maneiras e se, uma vez tomada a decisão d_1, a decisão d_2 puder ser tomada de y maneiras então o número de maneiras de se tomarem as decisões d_1 e d_2 é xy (MORGARDO *et al.,* 1991, p.18).

Assim, por exemplo, para formar um casal, dentre 3 homens e 4 mulheres, devemos tomar as seguintes decisões:

d_1 – escolha do homem (3 modos);

d_2 – escolha da mulher (4 modos).

Portanto, há $3 \times 4 = 12$ modos de formar casal.

De acordo com Oliveira (2017), ao se utilizar o PFC, algumas estratégias fazem a diferença no momento de resolução dos problemas combinatórios:

> – Postura: deve sempre se colocar no lugar da pessoa que deve fazer a ação solicitada pelo problema e ver que decisões devemos tomar;
> – Divisão: sempre que possível, dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples;
> – Não adiar dificuldades: se uma das decisões a serem tomadas for mais restrita que as demais, essa é a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar. [...] (OLIVEIRA, 2017, p.20-21).

A seguir, serão apresentados os diferentes tipos de problemas, ou seja, os diferentes significados presentes na combinatória. Em alguns destes, o PFC é uma possível forma de resolução.

Modelização de Batanero, Godino e Navarro-Pelayo

Para Batanero, Navarro-Pelayo e Godino (1997), Morgado *et al.* (1991) e Dornelas (2004), a Combinatória trata de vários tipos de problemas e dispõe de outras técnicas de resoluções de problemas, diferentes da combinação, permutação, arranjo e produto cartesiano, que envolvam o raciocínio combinatório.

De acordo com Batanero *et al.* (1997), a Combinatória é uma área de conhecimento muito mais ampla do que simplesmente resolver problemas de permutação, arranjo e combinação. Em um estudo realizado em 1994, os autores elencam diferentes categorias de problemas combinatórios: os problemas de existência, que averiguam se um determinado problema tem (ou não) solução; os problemas de enumeração, que correspondem à listagem (enumeração) de todos os subconjuntos de elementos que satisfazem as condições postas às situações; os problemas de contagem, responsáveis pela contagem de quantas soluções podem existir para os problemas com soluções conhecidas, ou seja, determinam o número de elementos de um conjunto finito que se tenha uma propriedade e uma coleção de propriedades; os problemas de classificação, nos quais se a enumeração de soluções for demasiadamente elevada, renuncia-se esta enumeração para realizar somente uma classificação das diferentes soluções.

Quanto aos problemas que, tradicionalmente, são tratados com mais frequência na Educação Escolar, Navarro-Pelayo, Batanero e Godino (1996) propõem um tipo de modelização, fundamentada na proposta de Dubois (1984). Esta proposta apresenta quatro[7] modelos diferentes e enunciados para problemas simples[8] de Combinatória.

- Seleção de uma amostra a partir de um conjunto de objetos. Exemplo:

> Se quer eleger um comitê formado por três membros: presidente, tesoureiro e secretário: Para selecioná-lo, dispomos de quatro candidatos: Arturo, Basílio, Carlos e David. Quantos comitês diferentes se podem eleger com os quatro candidatos? (NAVARRO-PELAYO; BATANERO; GODINO, 1996, p.39).

- Colocação de objetos em urnas. Exemplo:

> Dispomos de três cartas iguais. Desejamos colocá-las em quatro envelopes das cores amarelo, branco, creme e dourado. Se cada envelope só pode conter, no máximo, uma carta, de quantas formas é possível colocar as três cartas nos quatro envelopes? (NAVARRO-PELAYO; BATANERO; GODINO, 1996, p.38).

- Partição em subconjuntos de objetos. Exemplo:

> Maria e Carmen têm quatro cromos numerados de 1 a 4. Decidem reparti-los entre as duas (dois cromos para cada uma). De quantos modos se podem repartir os objetos? (NAVARRO-PELAYO; BATANERO; GODINO, 1996, p.39).

Este modelo de seleção é comumente trabalho no Ensino Médio, sendo denominados, respectivamente, como: arranjo simples; arranjo com repetição;

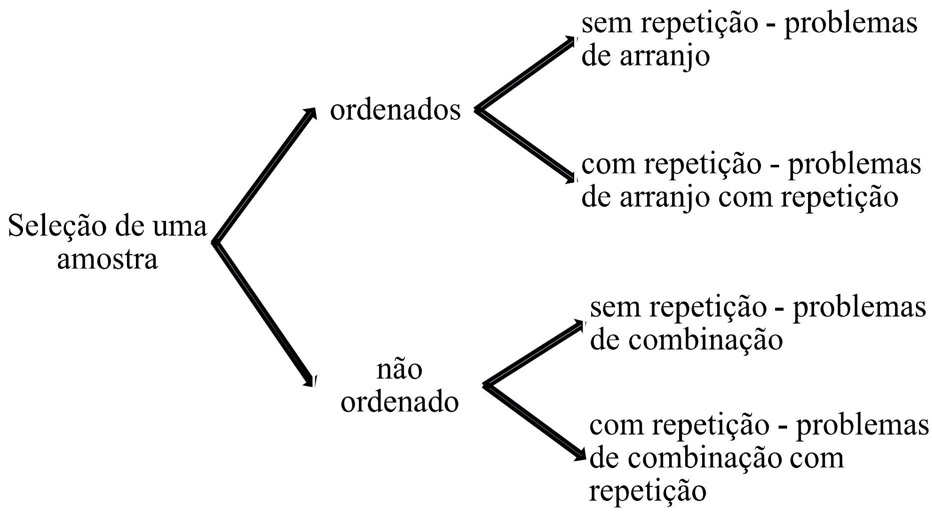
---

[7] Tem-se ainda a classificação de decomposição de um número natural em parcelas, no entanto, os autores a consideram como um caso particular da Partição.

[8] Os problemas combinatórios simples, de acordo com Roa (2000), são definidos por Navarro-Pelayo (1994) como sendo aqueles que podem ser resolvidos a partir da aplicação de apenas uma operação combinatória, com ou sem repetição.

combinação simples e combinação com repetição. Navarro-Pelayo *et al.* (1996) explicam que para a resolução destes problemas é preciso analisar se a ordem de seleção dos elementos dos agrupamentos importa ou não, e se os elementos se repetem ou não, ou seja, precisamos analisar os invariantes de amostragem do problema. O diagrama da Figura 1 representa as estruturas dos problemas de seleção:

Ilustração 3 - Estrutura dos problemas de seleção da classificação de Batanero et al.



(1996)

Fonte: Batanero *et al.* (1996, p.32)

Nesta classificação, os problemas de permutação simples são consideramos como um caso particular dos problemas de arranjo com todos os elementos. Este tipo de problema também é trabalho tradicionalmente no Ensino Médio.

O modelo de seleção gera operações Combinatórias básicas para a resolução de seus problemas, cujas representações podem ser observadas no Quadro 4.

Quadro 2 - Modelos de problemas combinatórios de seleção e suas respectivas fórmulas

Modelos de problemas combinatórios de seleção	**Representação em fórmula**
Arranjo simples	$A_{n,\,r} = n(n-1)...(n-r+1)$
Arranjo com repetição	$AR_{n,\,r} = n^r$
Combinação simples	$C_{n.r} = A_{n,\,r} : P_r$
Combinação com repetição	$CR_{n,\,r} = C_{n+r-1,\,r}$

Fonte: Batanero *et al.* (1996)

A permutação (Pr) é um arranjo onde n = r, daí: $P_r = A_{r,r}$.

Em classificações anteriormente apresentadas, discutidos sobre as características dos problemas do tipo produto cartesiano. Na abordagem de Batanero *et al.* (1997), vimos que este tipo de problema não está incluso, porém, são discutidos os problemas do tipo arranjo, permutação e combinação. Assim, em nosso trabalho, respaldamo-nos na abordagem de Pessoa e Borba (2009) e Pessoa (2009), pelo motivo de que as autoras consideram que estes quatro tipos de problemas (arranjo, permutação, combinação e produto cartesiano) são os caracterizantes do pensamento combinatório. Segundo elas, tais problemas combinatórios estão frequentes em livros didáticos e se apresentam em diferentes anos do Ensino Fundamental. Desse modo, consideramos importante, nesta dissertação, discutir os diferentes significados dos conceitos combinatórios (produto cartesiano, permutação, arranjo, combinação) apresentados na Educação Básica, a partir de suas diferentes situações-problema, invariantes e representações simbólicas.

A seguir, apresentamos os diferentes significados presentes na Combinatória, com suas respectivas situações, invariantes e algumas possíveis maneiras diferentes de resolução (esquemas), assim como a resolução a partir do PFC. Uma vez que o foco do nosso estudo é o ensino e aprendizagem da Combinatória nos anos iniciais do Ensino Fundamental, evidenciaremos apenas os invariantes dos problemas do tipo produto cartesiano, permutação simples, arranjo simples e combinação simples.

3.2.1.1 OS DIFERENTES SIGNIFICADOS DOS PROBLEMAS COMBINATÓRIOS: PRODUTO CARTESIANO, PERMUTAÇÃO, ARRANJO E COMBINAÇÃO

Neste trabalho, a perspectiva de apresentação das características dos diferentes significados em Combinatória (produto cartesiano, arranjo simples, permutação simples, arranjo simples e combinação simples), é fundamentada na proposta da teoria de Verganud, considerando que para cada um dos significados apresentados tem-se seus respectivos invariantes do conceito e esquemas para sua resolução.

3.2.1.1.1 PRODUTO CARTESIANO

Denominado como produto de medidas (VERGNAUD, 1983), Combinatória (PCN/BRASIL, 1997) e produto cartesiano (NUNES; BRYANT, 1997), este tipo de significado pode ser entendido a partir das seguintes características:

- **Situação-problema** – Exemplo: Na feira de ciências organizada pela direção da escola, 2 meninos (Pedro e Lucas) e 3 meninas (Marina, Ana e Beatriz) da turma do 5º ano, têm interesse de participar do *stand* de Matemática. Sabendo que a professora da turma precisa formar uma dupla com dois destes cinco alunos, sendo um menino e uma menina, quais as possíveis duplas que ela pode formar?

  - Algumas possíveis maneiras de resolução (esquemas):

    a) Todas as possibilidades de duplas podem ser listadas;
    b) Podem ser elencadas as possibilidades de casais para somente um menino (Pedro com Marina, ou Pedro com Ana, ou Pedro com Beatriz), observando que serão três possibilidades para menino, e sendo dois os meninos envolvidos na situação, resultará em 6 possibilidades;
    c) Pelo Princípio Fundamental da Contagem da seguinte forma – toma-se a primeira decisão, a escolha dos meninos (duas possibilidades); uma vez tomada a primeira decisão toma-se a segunda, a escolha de meninas (três possibilidades). Diante disso, o número total de possibilidades de formação de duplas, ou seja, deste evento, é 2 x 3, resultando em 6 possíveis formas de combinar dois meninos e três meninas.

- **Invariantes**

  - Dado dois (ou mais) conjuntos distintos, a combinação entre eles forma um novo conjunto;
  - A natureza dos conjuntos é distinta do novo conjunto formado;
  - A ordem dos elementos escolhidos não gera novas possibilidades (PESSOA, 2009; AZEVEDO, 2013).

Podemos observar, a partir da situação exemplificada, que o que caracteriza esses problemas é o fato de que a combinação dos conjuntos distintos (conjunto de meninas e conjunto de meninos) forma um novo conjunto, no qual a sua natureza é distinta (dupla de menino e menina) e a ordem dos elementos não gera uma nova possibilidade (tanto faz ser Pedro e Ana, ou, Ana e Pedro).

3.2.1.1.2 PERMUTAÇÃO

Este significado pode ser compreendido a partir das seguintes características:

- **Situação-problema** – Exemplo: De quantas formas diferentes Marcela poderá organizar seus brinquedos (boneca, ursinho e bola) na estante, de modo que eles fiquem lado a lado?

  - <u>Algumas possíveis maneiras de resolução (esquemas):</u>
    a) Lista todas as possibilidades, partindo da escolha da boneca para ser o primeiro brinquedo da sequência, posteriormente todas as possibilidades de o ursinho ser o primeiro da sequência e, por fim, todas as possiblidades para a bola ser o primeiro brinquedo da sequência;
    b) Em uma situação na qual o aluno perceba a relação com a multiplicação, ele pode iniciar a resolução listando todas as possibilidades para a boneca, depois todas as possibilidades para o ursinho e então percebe que se são duas possibilidades para cada um destes brinquedos, podendo, logicamente, generalizar para o próximo brinquedo, a bola. Multiplicando assim 2 possibilidades para cada um dos 3 brinquedos, o que resultará em 6 possibilidades.
    c) Pelo Princípio Fundamental da Contagem da seguinte forma – toma-se a primeira decisão, a escolha do brinquedo (três possibilidades); uma vez tomada a primeira decisão toma-se a segunda, a escolha do segundo brinquedo (dois possibilidades); por fim, toma-se a terceira decisão, a escolha do terceiro brinquedo (uma possibilidade). Obtendo com o número total de possibilidades, 2 x 3 x 1, resultando em 6 possíveis formas de organizar os brinquedos na prateleira.

– **Invariantes**

Para a permutação simples (sem repetições):

- Todos os elementos do conjunto serão usados, cada um apenas uma única vez (especificamente para os casos sem repetições);
- A ordem dos elementos origina novas possibilidades (PESSOA, 2009; AZEVEDO, 2013).

A partir da situação exemplificada, podemos observar que o que designa esses problemas é o fato de que todos os elementos de um único conjunto (brinquedos) são utilizados em diferentes ordens, o que gera novas possibilidades de permutação.

3.2.1.1.3 ARRANJO

Este significado de problema combinatório pode ser identificado a partir das seguintes características:

– **Situação-problema** – Exemplo: Em uma comissão de 5 professores (Beto, Fábio, Lúcia, Bruna e Gustavo) devem ser escolhidos um diretor e um coordenador. De quantas maneiras eles podem ser escolhidos?

- Algumas possíveis maneiras de resolução (esquemas):

a) Uma solução menos formal poderia ser encontrada listando todas as possibilidades para um dos professores ser escolhido para o cargo de diretor e outro ser escolhido para o cargo de coordenador. Em seguida, o professor escolhido para ser diretor, na situação anterior, seria trocado pela escolha de outro professor, sem ser o que ocupa o cargo de coordenador, analogicamente, substituindo as outras opções de professores, novas possibilidades serão geradas e uma nova listagem de combinação será determinada até que as possíveis combinações sejam esgotadas;
b) Pelo Princípio Fundamental da contagem da seguinte forma – toma-se a primeira decisão, a escolha do professor para o cargo de diretor (5

possibilidades), uma vez definida, toma-se a segunda decisão, a escolha do professor para o cargo de coordenador (4 possibilidades), ou seja, 4 x 5 possibilidades ao todo.

– **Invariantes**

Para a arranjos simples (sem repetições):

- Dado n elementos de um conjunto, poderão ser formados subconjuntos de agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos, ..., p elementos, com $0 < p < n$, sendo p e n números naturais;
- A ordem e a escolha dos elementos nos agrupamentos geram novas possibilidades (PESSOA, 2009; AZEVEDO, 2013).

O que caracteriza esse tipo de problema é que dado um conjunto com n elementos (opções de professores), alguns subconjuntos de agrupamentos ordenados podem ser gerados (possibilidades para a escolha de diretor e coordenador).

3.2.1.1.4 COMBINAÇÃO

Podemos compreender o que caracteriza este significado a partir das seguintes características:

– **Situação-problema** – Exemplo: Em uma lanchonete há 4 opções de frios (salame, presunto, queijo e frango) para se colocar no sanduíche. Ana quer um sanduíche com apenas duas opções diferentes de frios. De quantas maneiras Ana pode escolher os frios que iram rechear seu sanduíche?

- <u>Algumas possíveis maneiras de resolução (esquemas):</u>

a) Em uma resolução menos formal, é possível listar todas as possibilidades de combinação fixando uma das opções de frios, por exemplo, frango e queijo, frango e presento, frango e salame, analogamente, se faz o mesmo procedimento para as demais opções de frios. Como a ordem não gera novas possibilidades, uma vez que a escolha de frango e queijo é a mesma de queijo e frango, excluem-se as combinações repetidas e soma-se o restante das possibilidades que sobrou;

b) Pelo Princípio Fundamental da contagem articulado com a divisão, da seguinte forma – toma-se a primeira decisão, a escolha da primeira opção de frio, há 4 possibilidades (salame, presunto, queijo e frango); uma vez tomada a primeira decisão, para segunda decisão há 3 possibilidades (salame, frango e queijo – caso a primeira escolha tenha sido presunto, por exemplo). Haveria, assim, pelo princípio fundamental da contagem 4 x 3, possibilidades, ou seja, 12 combinações possíveis de escolha de frios. Porém, estas 12 possibilidades são iguais duas a duas, ou seja, salame e frango ou frango e salame podem ser escolhidos, no entanto, se tratam da mesma escolha. Assim, o total de possibilidades deverá ser dividido por dois, resultando em 6 possibilidades distintas de escolha de combinação de frios para recheio do sanduíche.

– **Invariantes**

Para a combinação simples (sem repetições):

- Dado n elementos de um conjunto, poderão ser formados subconjuntos de agrupamentos de, 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos, ..., p elementos, com $0 < p < n$, sendo p e n números naturais;
- A ordem e a escolha dos elementos nos agrupamentos não geram novas possibilidades (PESSOA, 2009; AZEVEDO, 2013).

Diferentemente da situação exemplificada anteriormente, podemos observar que esses problemas se caracterizam pela não importância de ordenação dos elementos dos subconjuntos (agrupamentos) gerados. Do conjunto maior (opções de frios), são elencadas possibilidades para formar subconjuntos (combinação da escolha de frio), em que a ordem dos elementos dos subconjuntos gerados não determina novas possibilidades.

Diante das situações-problema exemplificadas, podemos observar que as questões de Combinatória são especialmente desafiadoras, uma vez que possuem distintas relações (invariantes) e podem mobilizar diferentes esquemas para sua resolução (AZEVEDO, 2013). Dentre as estratégias de resolução, destacamos, no presente estudo, o uso de diversas representações simbólicas. Em sua tese, Pessoa (2009) destaca as representações mais habituais utilizadas na resolução de situações Combinatórias: o desenho; a listagem; o diagrama/quadro; o princípio fundamental da contagem e a árvore de possibilidades.

As possíveis maneiras de resolução, consideradas aqui como formais, foram classificadas desta forma por seus esquemas se tratarem de algoritmos. O que, de acordo com Pessoa (2009, p.80), "é uma sequência de instruções definidas como passos necessários para realizar uma tarefa, como, por exemplo, as fórmulas, no caso da Combinatória".

Evidenciamos, em todas as situações, a resolução por meio do Princípio Fundamental da Contagem, para que possamos perceber que, a partir dele, diferentes problemas combinatórios podem ser resolvidos, sendo esta uma das formas de resolução, e não um significado de situação Combinatória propriamente dito.

Partindo das diferentes características dos significados das situações de problemas combinatórios, podemos observar a importância dos professores que ensinam Matemática, em especial nos anos iniciais, compreender os diferentes invariantes e maneiras de soluções que as situações possuem. Quando a compreensão conceitual do professor é duvidosa, consequentemente, o seu ensino pode dificultar a aprendizagem conceitual por parte dos alunos. Amparado na perspectiva da teoria de Vergnaud, acreditamos que, para o aluno conseguir dominar o campo conceitual combinatório, é preciso que desde os anos iniciais ele seja estimulado a resolver diferentes situações deste campo que devem ser propostas pelo professor, que, por sua vez, precisa ter domínio dos diferentes significados, invariantes e representações que estas situações podem possuir.

Visando situar o leitor com relação ao atual cenário de pesquisas realizadas no âmbito da Educação Combinatória, nas próximas linhas dialogamos com diferentes estudos que versam sobre os mais variados enfoques de investigação, relacionados ao processo de ensino e aprendizagem deste conteúdo ao longo dos anos da Educação Básica.

4 O QUE DIZEM DOCUMENTOS OFICIAIS E ESTUDOS RECENTES SOBRE O ENSINO E APRENDIZAGEM DA COMBINATÓRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

É reconhecido pelas pesquisas que os conceitos combinatórios podem ter profundas implicações em outros conceitos matemáticos, em outras áreas de conhecimento, como também em diferentes situações presentes no cotidiano das pessoas. Pela sua relevância, atualmente o número de pesquisas no âmbito da Educação Combinatória tem crescido, todavia, este quadro nem sempre foi assim.

Neste capítulo, apresentamos o panorama das atuais pesquisas realizadas no âmbito da Educação Combinatória na Educação Básica. Pontuamos diferentes estudos com os mais variados enfoques de investigação. O estudo do panorama da literatura da Educação Combinatória permite que tenhamos um olhar mais amplo sobre tudo o que já foi discutido pela comunidade científica. Além disso, nos ajuda a compreender em que aspectos outros pesquisadores podem contribuir para o tema desta pesquisa e em que pontos podemos contribuir para a evolução da discussão do tema no âmbito de pesquisa da Educação Matemática. De acordo Soares (1989), compreender o estado de conhecimento sobre um determinado tema de pesquisa é necessário para a evolução da ciência, a fim de que:

> [...] se ordene periodicamente o conjunto de informações e resultados já obtidos, ordenação que permita indicação das possibilidades de integração de diferentes perspectivas, aparentemente autônomas, a identificação de duplicações ou contradições, e a determinação de lacunas e vieses. (SOARES, 1989, p.3).

O levantamento literário tomou como base trabalhos apresentados em eventos científicos nos últimos anos e pesquisas de dissertações e teses disponibilizadas pela Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) e pelo Catálogo de Teses e Dissertações da Capes[9], bem com as orientações pontuadas por alguns documentos oficias (BRASIL, 1998; BRASIL, 2014; PARAÍBA, 2010) que norteiam as práticas pedagógicas do Brasil. A escolha das pesquisas discutidas foi fundamentada nas possíveis contribuições que podem proporcionar à presente pesquisa.

[9] Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes).

4.1 A EDUCAÇÃO COMBINATÓRIA SOB A ÓTICA DAS DISSERTAÇÕES E TESES PRODUZIDAS NO BRASIL

Conforme destacado por Morgado *et al.* (1991), há um bom tempo a temática de pesquisa Educação Combinatória tem despertado o interesse da comunidade científica. O interesse de compreender como o raciocínio combinatório se desenvolve e como pode ser potencializado pela educação escolar é um dos fatores que motivam o crescimento de pesquisas atualmente.

As pesquisas desenvolvidas neste campo de estudo versam sobre diferentes temas. Alguns autores estudam as contribuições da Combinatória em diferentes áreas de conhecimento da Matemática, como o ensino da Probabilidade, Estatística e Raciocino Lógico. Outros, destacam aspectos que podem influenciar na qualidade de seu ensino e aprendizagem, como: os conhecimentos que os alunos e professores possuem acerca da Combinatória; os diferentes significados que a Combinatória possui; as principais estratégias de resolução; as dificuldades de ensino e aprendizagem; o desenvolvimento do raciocínio combinatório em diferentes níveis de ensino; a formação inicial ou continuada dos professores que ensinam Matemática.

Em nosso estudo, destacamos cinco dessas pesquisas, pela pertinência e pelas contribuições ao tema da presente pesquisa. Para tanto, apresentamos os principais resultados das pesquisas de Pessoa (2009), Souza (2010), Azevedo (2013), Almeida (2010) e Silveira (2016), que foram desenvolvidas em diferentes programas de pós-graduação e que abonam diversos olhares sobre os processos educativos da Combinatória na Educação Básica (Resolução de Problemas, Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas; Comunicação Matemática; Resolução, Exploração e Proposição de Problemas; Tecnologias no Ensino da Combinatória; e Formação Docente).

A primeira pesquisa, de Cristiane Azevedo dos Santos Pessoa (2009)[10], teve como propósito analisar o desempenho e as estratégias de alunos do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio em relação à resolução de problemas que envolviam raciocínio combinatório. A tese de doutoramento foi apresentada em 2009, sob a orientação da professora Doutora Rute Borba, com o apoio da Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal de Pernambuco. O objetivo central da

[10] Pela relevância das contribuições do estudo para a nossa pesquisa, a discussão sobre este estudo será um pouco mais aprofundada do que em relação aos demais apresentados nesta seção.

pesquisa foi analisar o desempenho e as estratégias de alunos do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio, em relação à resolução de problemas que envolvem raciocínio combinatório.

Para a compreensão da formação e desenvolvimento de conceitos, seu trabalho toma como referencial a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud e a perspectiva da formação de esquemas de Piaget. Tendo em vista que os problemas combinatórios fazem parte do campo conceitual das estruturas multiplicativas, Pessoa (2009), a partir dos estudos de Vergnaud (1990; 1991), Nunes e Bryant (1997) e dos PCN (BRASIL, 1997), explica as principais características de problemas que fazem deste campo, as situações que possam estar envolvidos e os conceitos que estão presentes neles. Os estudos de Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1997); bem como de Morgado *et al.* (1991) e Merayo (2001), foram o aparato teórico escolhido para explicar o conceito de Combinatória e os seus diferentes tipos de problemas.

Em relação à parte empírica da pesquisa, a metodologia adotada pela pesquisadora em contexto de sala de aula foi estabelecida a partir das ideias articuladas no referencial teórico. Assim, cada aluno resolveu individualmente uma ficha com oito problemas (dois de cada tipo: produto cartesiano, combinação, arranjo e permutação). Os problemas propostos na ficha eram os mesmos para todos os níveis de ensino. Participaram do estudo 568 alunos de quatro escolas, sendo duas públicas e duas particulares.

No que diz respeito ao desenvolvimento do raciocínio combinatório de acordo com os níveis de ensino (Ensino Fundamental I e II e Ensino Médio), os resultados da pesquisa de Pessoa (2009) apontam progressos significativos de um nível para outro. Observaram-se grandes avanços em termos de desempenho do Ensino Fundamental I para o Ensino Fundamental II, mas menores avanços entre o Ensino Fundamental II e o Ensino Médio. Ao que parece, as experiências extraescolares e/ou escolares, não necessariamente relacionadas diretamente ao ensino da Combinatória, podem ter uma grande influência nos desempenhos dos alunos. Mesmo sem instrução escolar específica para o ensino da Combinatória, o desenvolvimento dos alunos nos anos finais do Ensino Fundamental melhorou significativamente, demonstrando como a maturidade adquirida ao longo de suas experiências vivenciadas durante os anteriores anos de escolarização pode contribuir para o desenvolvimento do raciocínio combinatório (PESSOA, 2009).

No que se refere ao desenvolvimento pelos anos de escolarização, de modo geral, os resultados apontaram grandes avanços entre os alunos do 5º e 9º ano do Ensino Fundamental. Esse progresso também foi percebido do 9º ano para o 3º ano do Ensino

Médio, porém não tão grande quanto em relação aos anos do Ensino Fundamental. Entre os alunos do 2º, 3º e 4º anos do Ensino Fundamental não se observou uma diferença significativa de desempenho, mas, em relação aos alunos do 5º ano, apresentaram desempenho significativamente inferior. Quanto ao desenvolvimento dos alunos do 5º ano, verificou-se que, além de apresentarem desempenho significativamente superior ao dos alunos de anos anteriores, não se distanciam significativamente em termo de desempenho dos alunos do 6º, 7º e 8º ano, porém diferiram de modo significativamente inferior aos alunos do 9º ano de escolarização (PESSOA, 2009).

Analisou-se também o desenvolvimento do raciocínio combinatório dos alunos a partir de cada significado dos problemas. A partir disso, verificou-se que os problemas de produto cartesiano demonstraram ser os mais fáceis pelos índices de acertos da resolução, seguidos pelos problemas de arranjo. Já os de permutação e de combinação, foram considerados os mais difíceis, sendo este último o que apresentou o menor percentual de acertos em todos os níveis, e sendo a permutação o significado de mais difícil compreensão no Ensino Fundamental I.

Pessoa (2009) comenta que o melhor desempenho em problemas de produto cartesiano pode ser creditado ao ensino nas escolas, posto que a partir do 3º ano do Ensino Fundamental estes são os únicos problemas trabalhados desde o início da escolarização básica. Segundo a autora, este tipo de significado da Combinatória é trabalhado juntamente com outros problemas de estruturas multiplicativas (como proporcionalidade) por volta do 3º e 4º ano. Quanto aos demais tipos, como arranjo, permutação e combinação, não são explicitamente ensinados neste nível de escolaridade, mesmo que os PCN (BRASIL, 1997) orientem positivamente.

No que refere ao desempenho por ordem de grandeza dos números, os resultados apontaram que o desempenho dos alunos foi influenciado pelo número de possibilidades. De acordo com a análise, os estudantes apresentaram mais dificuldade em problemas que possuíam o número de possibilidades (agrupamentos) maior. Esta dificuldade foi destacada, principalmente, nos primeiros anos de escolarização. Ao final do 2º ano do Ensino Médio, o percentual apresentou um avanço aos demais anos, justificado pelo aprendizado adequado de fórmulas neste ano de escolaridade (PESSOA, 2009). Desta forma, apresentaram um maior percentual de acertos os problemas nos quais os alunos poderiam manipular as quantidades sem necessitar do uso de estratégias mais sistematizadas e formalizadas, podendo fazer uso de estratégias próprias como a enumeração sistemática ou desenhos, conseguindo esgotar todas as possibilidades com maior facilidade pelo seu pequeno número.

A pesquisa de Cristiane Pessoa (2009) apresenta uma ampla e profunda discussão sobre o desenvolvimento do raciocínio combinatório dos estudantes ao longo de toda a Educação Básica. Trata de pontos específicos sobre o processo de ensino e aprendizagem da Combinatória. Apresenta os principais objetivos de aprendizagem e dialoga sobre as principais dificuldades encontradas pelos estudantes para a construção do raciocínio combinatório na Educação Escolar.

A discussão sobre como a Combinatória deve ser abordada desde as séries iniciais do Ensino Fundamental até o Ensino Médio, permite que tenhamos um amplo entendimento sobre a Educação Combinatória em toda a Educação Básica. O destaque dado aos principais objetivos de aprendizagem que se esperam alcançar ao longo dos anos da Educação Básica, e algumas perspectivas para o ensino da Combinatória, orienta-nos com relação à parte empírica da presente pesquisa.

Os resultados apresentados em seu estudo nos ajudarão no momento da análise dos dados, pois explicam detalhadamente em que aspectos o raciocínio combinatório dos alunos precisa se desenvolver nos anos iniciais.

A segunda pesquisa, de Analucia Castro Pimenta de Souza (2010), teve como objetivo principal criar uma proposta de trabalho para abordar a Combinatória em sala de aula, fazendo uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. A dissertação foi realizada sob a orientação da Professora Doutora Lourdes de la Rosa Onuchic, pelo Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista/*Campus* Rio Claro.

A pesquisa de Souza (2010) foi fundamentada em dois eixos: análise Combinatória, contida na Matemática Discreta; e a Resolução de Problemas, vista como uma metodologia de ensino. Para fundamenta a discussão sobre a Combinatória, a autora destacou algumas ideias de Dossey (1991), Gardiner (1991), Morgado *et al.* (1991), Domingues (1993), PCN-EM (Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio – Matemática) (BRASIL, 1989). Quanto à Resolução de Problemas, ela pontuou os estudos de Polya (1962), Van de Walle (2001), Dante (1989), Onuchic (1999), Gazire (1988), Schroeder e Lester (1989), Onuchic (2004), Jinfa Cai (2003) e os documentos do NCTM – *National Council of Teachers of Mathematics* – USA (Conselho Nacional de Professores de Matemática dos Estados Unidos) (1991).

Com a análise, a pesquisadora evidenciou que a maioria dos livros apresenta Análise Combinatória no modo tradicional de ensino, no qual os conceitos são definidos logo de início pelo professor, depois são apresentados alguns exemplos, e por fim se propõe a resolução de alguns exercícios. De acordo com Souza (2010), essa perspectiva não permite que os alunos sejam levados a construir os conceitos, visto que todo o pensamento matemático é apresentado previamente pelo professor a partir de fórmulas. Segundo ela, alguns até introduziam inicialmente o trabalho com a Combinatória a partir do Princípio Fundamental de Contagem, evitando o uso precoce de fórmulas, incluindo, por vezes, tópicos da História da Matemática, entretanto esses se tratam da minoria.

A perspectiva de desenvolvimento da investigação seguiu a metodologia de pesquisa de Thomas A. Romberg (1992). Essa metodologia é composta por uma sequência de dez atividades que estão distribuídas em três blocos. Assim, o primeiro bloco de atividades desenvolvidas tratou de identificar o problema de pesquisa; o segundo bloco apresentou uma proposta para resolução desse problema, no qual estratégias e procedimentos para trabalho foram levantados e selecionados; e o terceiro e último bloco tratou de analisar as informações obtidas, buscando tudo o que ficou evidente diante das questões levantadas.

Souza (2010) realizou ainda uma entrevista semiestruturada com um professor de Matemática atuante no Ensino Médio, que não participou de nenhum dos projetos. O objetivo da entrevista foi coletar informações que evidenciassem como esse conteúdo era trabalhado pelo professor, as principais dificuldades que ele e os alunos enfrentam ao trabalhar esse tópico matemático, e a importância atribuída por ele ao ensino de Análise Combinatória.

Ao final de sua pesquisa, Souza (2010) verificou que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas favoreceu o crescimento da aprendizagem dos alunos e dos participantes da oficina, no que se refere às ideias centrais dos conceitos da Combinatória. De acordo com a pesquisadora, essa metodologia dispõe de recursos que ajudaram a maioria dos alunos a representar de diferentes maneiras as estratégias para a resolução dos problemas, chegando a encontrar sua solução correta. Além disso, Souza (2010) destaca que a organização da resolução dos problemas por meio de tabelas, da árvore de possibilidades e de listas organizadas, tem grande importância na construção dos conceitos dos problemas combinatórios.

Consideramos que o estudo de Souza (2010) apresenta uma perspectiva metodológica para o ensino e aprendizagem da Combinatória pouco conhecida, mas muito interessante. As argumentações apresentadas em toda a extensão de seu trabalho demonstram que a ação pedagógica dos professores recebe novo significado, na medida que possibilita ao professor assumir a postura de pesquisador de sua prática, refletindo sobre quais aspectos podem ser aperfeiçoados para a melhoria do ensino da Matemática, e especialmente da Combinatória, como é destacado no estudo.

No tocante às contribuições proporcionadas ao desenvolvimento do raciocínio combinatório dos participantes da pesquisa, acreditamos que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas se mostrou eficaz. Pelo exposto no trabalho, observamos que o desenvolvimento deste modo de pensar foi favorecido pela perspectiva de trabalho a qual foi explorado. A resolução de problemas, articulada ao processo de avaliação, permitiu aos alunos assumirem uma postura investigativa e reflexiva, ao passo que durante a busca das soluções testaram conjecturas e argumentaram suas ideias com os colegas de classe, ou formação, e com a pesquisadora, que, por vezes, assumiu o papel de professora-pesquisadora.

A terceira pesquisa de mestrado, de Juliana Azevedo (2013), é voltada ao ensino da Combinatória nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Teve como principal objetivo analisar a influência da construção de árvores de possibilidades na resolução de problemas combinatórios, com lápis e papel ou com o uso de um *software* educativo (Árbol).

Os principais trabalhos que constituíram o quadro teórico da pesquisa foram: a Teoria dos Campos Conceituais, de Vergnaud (1986), para discussão sobre as três dimensões fundamentais de conceitos: significados, invariantes e representações simbólicas; os estudos de Pessoa e Borba (2009), para dialogar acerca das características do raciocínio combinatório; e a pesquisa de Sandoval, Trigueiros e Lozano (2007), que analisam a aplicação do *software* Diagramas de Árbol com crianças, como também Borba e Penteado (2010) e Goos (2010), que discutem o uso da tecnologia na sala de aula.

Participaram da pesquisa 40 alunos do 5º ano do Ensino Fundamental de duas escolas da rede pública do municipal de Recife-PE, divididos em quatro grupos: o Grupo 1 (G1), que resolveu os problemas combinatórios por meio da construção de árvores de possibilidades, fazendo uso do *software* Diagramas de Árbol; o Grupo 2 (G2), que resolveu os problemas por meio de construções de árvores de possibilidades, fazendo o uso de lápis e papel; o Grupo 3 (G3), que trabalhou apenas com problemas multiplicativos, não combinatórios, por meio de desenhos; e o Grupo 4 (G4), que participou apenas do pré-teste e dos pós-testes que envolviam oito situações-problema de

Combinatória, sendo duas questões para cada tipo de problema combinatório (produto cartesiano, arranjo, combinação e permutação).

Com a análise, Azevedo (2013) observou que o estudo de somente os problemas multiplicativos, sem o envolvimento do raciocínio combinatório, não é suficiente para desenvolver esse tipo de pensar, visto que os alunos que resolveram apenas estes problemas não demonstraram maiores avanços ao comparar seus resultados do pré-teste com os resultados do pós-teste.

Com relação aos significados, notou-se que os problemas que os alunos mais tiveram facilidade em resolver foram de produto cartesiano; quanto aos mais difíceis, foram apontados os problemas de permutação. Assim como Pessoa (2009), a autora acredita que a dificuldade encontrada nesse tipo de problema pode estar relacionada à quantidade de etapas de escolhas a serem realizadas para a sua resolução. Quando vamos resolver um problema de produto cartesiano, fazemos primeiramente uma escolha, uma vez tomada, escolhemos a segunda, a ordem nesse tipo de problema não produz novas possibilidades, assim, não faz diferença a primeira escolha passar a ser a segunda, e a segunda escolha passar a ser a primeira. Todavia, nos problemas de permutação, essa troca representa uma nova possibilidade no conjunto do espaço amostral. Normalmente os problemas de permutação apresentam mais de duas etapas de escolha, por exemplo, existe n maneiras de se organizar m pessoas em uma filha de banco, em cada organização deve-se escolher a primeira pessoa, depois a segunda, a enésima pessoa, até que se tenha organizado as pessoas na fila do banco e todas as possibilidades de posicionamentos delas sejam esgotadas.

O estudo também evidenciou que o trabalho com árvores de possibilidades é uma excelente proposta para o ensino e aprendizado da Combinatória nos anos iniciais, uma vez que utilizando essa representação os alunos demonstraram avanço no raciocínio combinatório. Nesse sentindo, em conformidade com Vergnaud (1986), a autora defende que trabalhar múltiplas representações "permite aos alunos uma visão ampla do conhecimento matemático, desde que se reflita sobre as similaridades entre as variadas formas de representar o conceito estudado" (AZEVEDO, 2013, p.122).

Como já foi dito, nos anos iniciais do Ensino Fundamental o conceito de Combinatória e suas estruturas não são apresentadas formalmente, desse modo, o uso de fórmula é inapropriado e inviável neste nível de escolaridade. Com isso, a pesquisa de Azevedo (2013) nos revela a importância da valorização das múltiplas representações simbólicas e estratégias pessoais dos alunos, como desenhos para o ensino e aprendizagem da Combinatória nos anos iniciais. Verificou-se que a partir das construções de árvores de possibilidades, os alunos conseguiram resolver os problemas combinatórios, demonstrando, mesmo que indiretamente, a compreensão dos invariantes dos quatro tipos (arranjo, permutação, combinação e produto cartesiano) de problemas trabalhados.

A quarta pesquisa, de Adriana Luziê de Almeida (2010), teve como propósito analisar as contribuições da Comunicação Matemática para o ensino e aprendizagem da Combinatória no Ensino Médio. Para o seu desenvolvimento, a pesquisa recebeu o apoio do Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade de Ouro Preto.

Sobre a Combinatória, a pesquisadora fundamenta seu trabalho nos estudos de Navarro-Pelayo (1991), Batanero e Navarro (1991), Roa (2000), Roa e Navarro-Pelayo (2001). E no que se refere à Comunicação Matemática, nos trabalhos de Menezes (1999), Martinho (2007) e D'Antonio (2006). Além disso, baseia-se nas ideias de Yackel e Cobb (1996) e Boavida (2005) para a discussão sobre a argumentação nas aulas de Matemática.

Com relação aos percursos metodológicos, a pesquisa foi realizada em uma escola da rede pública de ensino da cidade de Itabirito-MG. Os participantes foram 31 alunos de uma turma do 2º ano do Ensino Médio. Fundamentada nos estudos sobre desenvolvimento do pensamento combinatório e um ambiente de estímulo à argumentação e discussão de situações-problema, Almeida (2010) buscou selecionar dinâmicas que favorecem uma Comunicação Matemática. A maior parte das atividades foi realizada em grupos de quatro alunos. Alguns utilizaram materiais usuais de sala de aula, como lápis, borracha e caneta; outras, peças de um jogo de Dominó convencional. Em busca de uma maior interação dos alunos, foi dada a eles a liberdade de definirem quais alunos seriam os membros de cada grupo. As atividades propostas foram elaboradas com a finalidade de identificar os principais obstáculos e formas de enfrentá-los, referentemente ao estudo desse tópico.

A pesquisa de Almeida (2010) revelou que as estratégias de resolução como o passar das atividades desenvolvidas foram se tornando cada vez mais elaboradas. No teste diagnóstico final, aplicado pela pesquisadora, observou-se que os alunos conseguiram enumerar agrupamentos possíveis, mesmo construindo apenas parte da árvore de possibilidades.

Assim como no estudo de Azevedo (2013), verificou-se que a árvore de possibilidades foi uma estratégia frequente nas resoluções dos alunos. Com isso, podemos constatar que esse tipo de representação simbólica favorece na aprendizagem dos alunos, tanto nos anos iniciais do Ensino Fundamental como no Ensino Médio.

Outro resultado que corrobora os estudos de Azevedo (2013) e também de Pessoa (2009) diz respeito às dificuldades crescentes quando o número dos agrupamentos possíveis é grande. Acreditamos que essa dificuldade ocorre pelo aumento das escolhas necessárias para selecionar os elementos que farão parte dos agrupamentos, tendo em vista que para cada agrupamento formado deve-se fixar uma escolha de seleção inicial que delimitará as escolhas subsequentes, quando os agrupamentos são ordenados.

Ao fim da pesquisa, Almeida (2010) destaca que mais do ensinar um aluno a resolver problemas combinatórios, apresentando-lhe habilidades e técnicas, é preciso garantir um ambiente de aprendizagem, no qual todos sejam corresponsáveis pela sua própria aprendizagem, sendo motivados a expor, argumentar, questionar e refletir suas ideias. Concordamos com a autora, pois, com isso, os alunos terão a oportunidade de não apenas desenvolver o raciocínio combinatório, mas também a capacidade de verbalizar sua compreensão acerca do conteúdo. A argumentação nas aulas de Matemática favorece a sistematização das ideias, o que para o desenvolvimento do raciocínio combinatório é muito importante.

A quinta pesquisa, de Adriano Silveira (2016), versa sobre o processo de ensino e aprendizagem da Combinatória no Ensino Médio via Resolução, Exploração e Proposição de Problemas. A dissertação foi desenvolvida sob orientação do Professor Doutor Silvanio de Andrade, com o apoio do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba.

A pesquisa se propôs analisar como uma abordagem em sala de aula via Resolução, Exploração e Proposição de Problemas pode potencializar o ensino-aprendizagem de Análise Combinatória.

A Metodologia de ensino-aprendizagem escolhida para trabalhar em sala de aula foi a de Resolução, Exploração e Proposição de Problemas, desenvolvida através de uma sequência de atividades de problemas combinatórios, em uma turma de 34 alunos do 2ª ano do Ensino Médio. Optou-se pela formação de grupos de 3 alunos, com o intuito de desenvolver uma dinâmica de aula que privilegiasse o trabalho cooperativo e colaborativo, onde as ideias levantadas em busca da solução deveriam ser respeitadas por todos os participantes.

Para a elaboração da sequência das atividades, Silveira (2016) buscou respaldos nos estudos levantados no referencial teórico e nos resultados de uma entrevista com quatro professores de Matemática, realizada logo no início do estudo, que teve como objetivo conhecer as ideias deles acerca do ensino-aprendizagem da Combinatória.

Para dialogar sobre as características essenciais da Combinatória, Silveira (2016) apresenta no aporte teórico as ideias de Morgado *et al.* (1991) e Pessoa (2009), e buscando relacionar esse tipo de raciocínio à Matemática Discreta, destaca os estudos de Dossey (1991). Quanto aos estudos relacionados com a Metodologia de Resolução, Exploração e Proposição de Problemas, o pesquisador respalda-se nas pesquisas de Onuchic e Allevato (2004; 2015), Pais (2013), Polya (1995), Andrade (1998), Van de Walle (2001; 2009), Onuchic (1999), Cai e Lester (2003), como também nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997; 1998).

Influenciado pelas ideias de Onuchic e Allevato (2004), Silveira (2016) destaca que no trabalho em sala de aula via metodologia da Resolução de Problemas, o problema é considerado como um ponto de partida para o processo de ensino e aprendizagem dos alunos. Assim, quando a Matemática é ensinada através da resolução de problemas, "os problemas são importantes não somente como um meio de se aprender Matemática mas, também, como um primeiro passo para se fazer isso" (SILVEIRA, 2016, p.56). Ele afirma que é através e durante a resolução dos problemas que os alunos conseguem fazer conexões entre diferentes ramos da Matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos.

Silveira (2016) destaca que, ao adotar essa metodologia em sala de aula, o professor permite que os alunos ajam como investigadores diante de um problema que os desafia na busca da solução. Diante disso, durante a resolução e exploração dos problemas, convém que os caminhos e as estratégias pessoais utilizadas pelos alunos sejam valorizadas, porque mais importante do que chegar à resposta correta é a possibilidade de o aluno compreender suas ideias matemáticas empregadas para a busca das soluções.

Ao fim de sua pesquisa, Silveira (2016) afirma que o ensino-aprendizagem via Resolução, Exploração e Proposição de Problemas, o permitiu acompanhar o crescimento gradual do desenvolvimento de seus alunos, de modo que conseguiu compreender as múltiplas estratégias de resolução efetivadas por eles. A metodologia empregada promoveu o engajamento dos alunos nas atividades propostas, motivando a exploração das soluções encontradas, favorecendo a apreensão de ideias essenciais de Análise Combinatória.

A pesquisa de Silveira (2016) apresenta uma profunda discussão acerca das contribuições que a metodologia da Resolução de problemas, articulada à Exploração e Proposição de Problemas, pode trazer ao ensino-aprendizagem da Matemática, e especialmente ao ensino-aprendizagem da Combinatória.

A partir deste estudo, podemos observar como esta perspectiva de trabalho contribuiu para a construção sólida dos conceitos combinatórios. A possibilidade de refletir sobre a empregabilidade das ideias essenciais da Combinatória à solução dos problemas propostos possibilita ao aluno atribuir uma significação à sua aprendizagem. Com as argumentações apresentadas no trabalho, consideramos que a exploração de problemas propicia um raciocínio matemático mais estruturado e sólido, dado que o aluno precisa organizar seus pensamentos para compreender matematicamente o emprego das estratégias utilizadas.

As pesquisas destacadas apresentam um leque de possibilidades para o ensino e aprendizagem da Combinatória. Os principais resultados pontuados evidenciam a importância da Educação Combinatória ao desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos e professores da Educação Básica. No intuito de apresentar de maneira sintetizada os principais pontos que diferenciam as pesquisas analisadas, apresentamos, no Quadro 2, um resumo de cada uma delas.

Quadro 3 - Resumo de dissertações e teses analisadas

AUTOR/ANO/ SUJEITOS	OBJETIVO PRINCIPAL	APORTE TEÓRICO	RESULTADOS
PESSOA, Cristiane Azevêdo dos Santos (2009) **Alunos do Ensino Fundamental e Médio**	Analisar o desempenho e as estratégias de alunos do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio, em relação à resolução de problemas que envolvem raciocínio combinatório.	O raciocínio combinatório: Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1997); Morgado, Carvalho, Carvalho e Fernandez (1991); Merayo (2001); Inhelder e Piaget (1995) e Soares e Moro (2006). Combinatória na escola: PCN (BRASIL, 1997); Ferraz (2004), Guirado e Cardoso (2007) e, Costa (2004).	Sobre o desenvolvimento do raciocínio combinatório: −Grandes avanços entre os alunos do Ensino Fundamental I e II, porém menores avanços entre o Ensino Fundamental II e o Ensino Médio; −Os alunos do 5º ano, apresentam um desempenho significativamente superior ao dos

			alunos de anos anteriores; Sobre os significados dos problemas combinatórios: – Os problemas de produto cartesiano, seguidos dos problemas de arranjo demostraram ser o de mais fácil compreensão. – Os problemas de permutação e de combinação, foram considerados os mais difíceis compreensão.
SOUZA, Analucia Castro Pimenta (2010) **Alunos do 2º ano do Ensino Médio, professores e educadores matemáticos, alunos da Licenciatura em Matemática.**	Criar uma proposta de trabalho para abordar a Combinatória em sala de aula, fazendo uso da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas	Raciocínio combinatório e seu ensino: Dossey (1991); Gardiner (1991); Morgado et al (1991); Domingues (1993); PCN-EM (1989). Resolução de problemas: Polya (1962); Van de Walle (2001); Dante (1989); Onuchic (1999); Gazire (1988); Schroeder e Lester (1989); Onuchic (2004); Jinfa Cai (2003) e o NCTM (1991).	Verificou-se que Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas favoreceu para o crescimento da aprendizagem dos alunos e dos participantes da oficina, no que se refere às ideias centrais dos conceitos da Combinatória.
AZEVEDO, Juliana (2013) **Alunos do 5º ano do Ensino Fundamental.**	Analisar a influência da construção de árvores de possibilidades na resolução de problemas combinatórios, com lápis e papel ou com o uso de um software educativo (Árbol)	Raciocínio Combinatório: Pessoa e Borba (2009). O uso da tecnologia na sala de aula: Sandoval, Trigueiros e Lozano (2007); Borba e Penteado (2010) e Goos (2010).	Revelou a importância da valorização das múltiplas representações simbólicas e estratégias pessoais dos alunos, como desenhos, para o ensino e aprendizagem da Combinatória nos anos iniciais.

ALMEIDA, Adriana Luziê (2010) **Alunos do 2º ano do Ensino Médio.**	Analisar as contribuições da Comunicação Matemática para o ensino e aprendizagem da Combinatória no Ensino Médio.	Sobre a Combinatória: Navarro-Pelayo (1991); Batanero e Navarro (1991); Roa (2000); Roa e Navarro-Pelayo (2001). Sobre a Comunicação Matemática e argumentação em sala de aula: Menezes (1999); Martinho (2007); D'Antonio (2006); Yackel e Cobb (1996), e Boavida (2005).	Verificou-se que: − As estratégias de resolução como o passar das atividades desenvolvidas foram se tornando cada vez mais elaboradas; − Dificuldades crescentes quando o número dos agrupamentos possíveis é grande;
SILVEIRA, Adriano (2016). **Alunos do 2ª ano do Ensino Médio**	Analisar como uma abordagem em sala de aula via Resolução, Exploração e Proposição de problemas pode contribuir/potencializar com o ensino-aprendizagem de Análise Combinatória	Ideias essenciais da Combinatória: Morgado *et al.* (1991); Pessoa (2009) e Dossey (1991). Processo educativo da Combinatória: Parâmetros Curriculares Nacionais (1997; 1998; 2002; 2006). Metodologia de Resolução, Exploração e Proposição de problemas: Onuchic e Allevato (2004); Pais (2013); Polya (1995); Andrade (1998); Allevato (2005); Van de Walle (2001; 2009); Onuchic (1999); Cai e Lester (2003); e também os Parâmetros Curriculares Nacionais (1997; 1998).	Constatou-se que o processo de ensino-aprendizagem via Resolução, Exploração e Proposição de problemas, o permitiu acompanhar o crescimento gradual do desenvolvimento de seus alunos, de modo que, conseguiu compreender as múltiplas estratégias de resolução efetivadas por eles.

Fonte: Adaptado de Pessoa, 2009; Souza, 2010; Azevedo, 2013; Almeida, 2010 e Silveira, 2016.

Com este levantamento, fica evidente o quanto a área de pesquisa aqui discutida vem se desenvolvendo a partir de diferentes enfoques. Preocupando-se sempre com a qualidade de ensino e aprendizagem da Combinatória, os pesquisadores destacados analisaram aspectos do processo educativo deste conteúdo em contexto de sala de aula, evidenciando as principais dificuldades encontradas para o desenvolvimento do seu ensino e aprendizagem.

As pesquisas apresentam relevantes orientações para a ação pedagógica dos professores, destacando a metodologia de Resolução de Problemas como uma proposta de ensino eficaz à aprendizagem da Combinatória, seja no Ensino Fundamental ou Médio. Destacamos que apenas uma pesquisa dentre as cinco destacadas trata especificamente do processo de ensino e aprendizagem da Combinatória nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Apresentamos somente a pesquisa de Azevedo (2013), pois foi a única que encontramos especificamente para esse nível de ensino.

Tal fato demonstra a necessidade de se desenvolver mais pesquisas voltadas a esse nível de escolaridade. O estudo da Matemática nos anos inicias precisa receber um olhar mais aprofundado quanto às especificidades do seu processo educativo. Sabemos que os conceitos formalizados neste nível de escolaridade são a base para a compreensão de conceitos mais complexos nos anos subsequentes do Ensino Fundamental II e Ensino Médio.

No que diz respeito à Combinatória, os resultados das pesquisas de Pessoa (2009), Almeida (2010) e Silveira (2016) evidenciam que, mesmo com um progresso significativo do desenvolvimento entre os anos iniciais do Ensino Fundamental ao Médio, os alunos e professores sentem dificuldade em compreender as ideias essenciais da Combinatória e resolver seus problemas. Diante disso, diferentemente da maioria das pesquisas pontuadas, o presente estudo é voltado especificamente ao processo educativo da Combinatória nos anos iniciais. Visando à qualidade do seu processo educativo, objetivamos analisar as contribuições que a metodologia da Resolução, Exploração e Proposição de Problemas pode ocasionar ao ensino e aprendizagem da Combinatória nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Na sequência, apresentamos os resultados de um levantamento de trabalhos produzidos e apresentados em eventos científicos nos últimos anos. Consideramos importante averiguar o índice de produções nestes eventos, pois os estudos publicados fazem parte de todo o âmbito de pesquisa da Educação Matemática, incluindo o nível de graduação.

4.2 A EDUCAÇÃO COMBINATÓRIA NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL A PARTIR DE ESTUDOS RECENTES APRESENTADOS EM EVENTOS CIENTÍFICOS

Há alguns anos, o número de pesquisas nessa área era pequeno. Em um levantamento realizado em 2009, integrantes do grupo "Geração" verificaram que o número de trabalhos envolvendo o tema raciocínio combinatório apresentado em eventos, tanto em âmbito nacional quanto internacional, nos últimos anos, é muito baixo. O levantamento identificou que nos 23 encontros[11] de Educação investigados, ocorridos no período de 2004 a 2008, foram apresentados apenas 28 trabalhos sobre o tema. Em alguns desses eventos, nem mesmo houve a incidência de pesquisas nessa área.

Especificamente, com relação ao ensino e aprendizagem da Combinatória nos anos iniciais, realizamos um levantamento de estudos apresentados em eventos de divulgação científica, em nível nacional e internacional, no período de 2014 a 2017. Em um primeiro momento, verificamos trabalhos nos quais a palavra "combinatória" estivesse presente em seu título. Posteriormente, o levantamento foi direcionado aos eixos temáticos nos quais o tema ensino da Combinatória tivesse relação. Feita esta busca, realizamos um refinamento dos trabalhos selecionados, priorizando no tratamento dos dados aqueles cujo foco tratava, especificamente, do processo de ensino e aprendizagem da Combinatória nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Após o levantamento de todos os estudos referentes ao ensino e aprendizagem da Combinatória nos anos iniciais, deliberamos categorias de agrupamento para a análise dos mesmos. A escolha das categorias elencadas foi fundamentada no perfil dos estudos analisados, bem como na sua relevância ao ensino da Combinatória. Sendo assim, as categorias selecionadas foram:

I. <u>Estudos de sondagem:</u> nos quais o objetivo da pesquisa é averiguar quais conhecimentos prévios os alunos possuem acerca dos conceitos combinatórios, os métodos de resolução dos problemas combinatórios e a

[11] Psychology of Mathematics Education (2004; 2005; 2006); International Conference on Teaching Statistics (2006); Conferência Interamericana de Educación Matemática (2003; 2007); Reunião de Didática da Matemática do CONESUL (2006); Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (2003; 2006); Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (2006; 2008); Encontro Nacional de Educação Matemática (2001; 2004; 2007); Reunião Anual da Associação Nacional de Pós-graduação e Pesquisa em Educação (2000; 2007); Encontro Nacional de Didática e Prática de Ensino (2006).

compreensão dos conceitos combinatórios em diferentes situações propostas pelas pesquisas analisadas;

II. Relatos de experiência: trabalhos que apresentam relatos de experiências de atividades realizadas por professores que ensinam Matemática em seu próprio contexto de sala de aula, condizentes com o ensino da Combinatória nos anos iniciais;

III. Estudos com professores: voltados a pesquisas que têm por objetivo analisar aspectos da formação inicial e continuada de professores e seus conhecimentos sobre os conceitos combinatórios e métodos que facilitem seu ensino;

IV. Estudos documentais: pesquisas que analisam as orientações dos documentos oficiais para o ensino da Combinatória nos anos iniciais e a forma de abordagem do tema nos livros didáticos;

V. Estudos com recursos didáticos: trabalhos nos quais se faz uso de materiais didáticos como facilitadores do processo de ensino e aprendizagem da combinatória.

Destacamos que a categoria II (relatos de experiência) pode categorizar outras pesquisas que foram designadas à categorias diferentes desta, como é o caso de alguns trabalhos sobre a formação de professores e estudos de relatos de experiência. No entanto, no presente levantamento, são apresentados nessa categoria apenas os trabalhos apresentados na modalidade relato de experiência. As demais categorias (I, III, IV e V) são compostas pelos trabalhos apresentados na modalidade de comunicação oral e painel, e, em caso específico, aos eventos ENCEPAI e XII ENEM, também foram considerados os trabalhos submetidos como mesas redondas, palestras e minicursos.

A Tabela 1 apresenta o resultado quantitativo dos trabalhos, relacionados com aspectos do processo de ensino e aprendizagem da Combinatória nos anos iniciais e subsequentes do Ensino Fundamental (EF) e Médio (MD), que foram submetidos aos eventos científicos listados anteriormente.

Tabela 1 - Resultado quantitativo de trabalhos relacionados ao processo de ensino de aprendizagem da Combinatória

EVENTO	ANO DE PUBLICAÇÃO	Nº DE TRABALHOS IDENTIFICADOS	
		ANOS INICIAIS	DEMAIS ANOS DO EF E MD
XIV Conferência Interamericana de Educación Matemática	2015	01	03
VI Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática	2015	03	00
I Congresso Nacional de Pesquisa e Ensino em Ciências	2016	00	00
II Congresso Nacional de Pesquisa e Ensino em Ciências	2017	02	03
I Congresso Nacional de Educação Matemática	2014	00	00
II Congresso Nacional de Educação Matemática	2015	01	02
III Congresso Nacional de Educação Matemática	2016	02	02
XII Encontro Paulista de Educação Matemática	2014	01	00
XIII Encontro Paulista de Educação Matemática	2017	01	01
XIX Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática	2015	01	02
XX Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática	2016	01	03
Encontro de Combinatória, Estatística e Probabilidade dos Anos Iniciais	2016	09	00
XIII Encontro Nacional de Educação Matemática	2016	10	08
IX Encontro Paraibano de Educação Matemática	2016	00	05
V Fórum Nacional de Licenciaturas Em Matemática	2014	00	00
IV Seminário de Escritas e Leituras em Educação Matemática	2016	00	01
$\sum$	4 anos (2014, 2015, 2016 e 2017)	32	30

Fonte: Autoria própria

Considerando a totalidade de trabalhos apresentados nos 16 eventos analisados, pudemos observar que o quantitativo de estudos relacionados ao ensino da Combinatória cresceu em relação aos resultados apresentados pelo estudo realizado em 2009, por integrantes do grupo “Geração”, ainda que o número de eventos pesquisados para o presente estudo tenha sido menor em comparação ao de 2009.

O levantamento mostra que, durante os últimos quatro anos (2014, 2015, 2016 e 2017), foram realizados 62 trabalhos conexos à temática, e destes, 32 estão relacionados diretamente ao ensino da Combinatória nos anos iniciais. Tal fato demonstra uma maior atenção dos estudiosos da área. Acreditamos que isto possa ter sido motivado pela preocupação da comunidade acadêmica e científica em analisar aspectos relacionados ao ensino da Combinatória, tendo em vista suas inúmeras contribuições em outras áreas de conhecimento, em diferentes conceitos matemáticos, e em diversas situações extraescolares da vida dos alunos.

Ao que se concerne aos estudos direcionados aos anos iniciais, presumimos que a relevância do ensino da Matemática, neste nível de escolaridade, tem despertado nos últimos anos o interesse dos pesquisados, posto que, para que os conceitos mais completos sobre o ensino da Matemática, em especial da Combinatória, sejam melhor compreendidos pelos alunos nos demais anos da Educação Básica, é preciso que desde o início da escolarização os alunos tenham sido direcionados para um melhor desenvolvimento do raciocínio necessário para o estudo da Combinatória em anos subsequentes dos anos do Ensino Fundamental e Médio.

Analisando os trabalhos desenvolvidos, e os agrupando nas categorias elencadas para análise, recolhemos o seguinte resultado (Ver Tabela 2):

Tabela 2 - Percentual dos tipos de trabalhos produzidos

	Estudos de sondagem	Relatos de experiências	Estudos com professores	Estudos documentais	Estudos com recursos didáticos
TOTAL	12	03	08	07	02

Fonte: Autoria própria

É possível observar que os estudos de sondagem apresentam o maior percentual das pesquisas realizadas, o que demonstra o interesse dos pesquisadores em compreender o processo de aprendizagem que os alunos desenvolvem para construção de seus conhecimentos. A partir das análises realizadas, acreditamos que as pesquisas destinadas a essa categoria auxiliam o professor a compreender melhor os percursos traçados pelos alunos no processo de aquisição da aprendizagem, o nível de entendimento dos conceitos combinatórios que podem ser alcançados, a forma de resolução dos problemas adotadas pelos alunos, assim como as conjecturas e argumentações movimentadas por eles durante uma atividade que envolva tais conceitos.

O índice dos estudos com professores e estudos documentais aproximam-se. Mesmo não fazendo parte do menor índice das pesquisas, consideramos ser necessário o aumento de pesquisas nestas duas categorias, visto que os trabalhos desenvolvidos na primeira categoria podem analisar os aspectos da formação inicial e continuada dos professores que precisam ser aprimorados para um melhor ensino da Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, averiguando também quais os conhecimentos que os professores possuem sobre o Combinatória e quais precisam aprofundar mais em sua formação. Já os desenvolvidos na perspectiva da segunda categoria podem apresentar interessantes análises sobre as orientações oficiais que regem todo o sistema de ensino, como também podem expressar a forma com a qual os livros didáticos, um dos principais instrumentos de ensino utilizado pelo professor, abordam o ensino da Combinatória nos anos iniciais.

Como demonstrado na Tabela 2, os estudos com recursos didáticos e relatos de experiência foram os que apresentaram o menor percentual de pesquisas realizadas. Assim como as categorias anteriores, consideramos que trabalhos nestes contornos são de grande importância para o âmbito da Educação Matemática, e em especial para a Educação Combinatória. Os estudos com recursos didáticos podem trazer sugestões metodológicas que auxiliem aos professores em seu trabalho docente rotineiramente; e os trabalhos que relatam as experiências dos professores podem romper o paradigma de que a Educação Combinatória neste nível de escolaridade é algo muito difícil de ser desenvolvido ou quase impossível.

Acreditamos que uma das justificativas para o baixo índice desses trabalhos está fundamentada em algumas debilidades do ensino da Matemática, encontradas nas formações iniciais dos professores dos anos iniciais. Assim como afirma Curi (2004), os cursos que preparam os professores à docência neste nível de escolaridade reservam pouco tempo para as disciplinas direcionadas ao ensino da Matemática, prejudicando a formação do docente em relação ao seu ensino. Logo, a insegurança em lecionar um conteúdo específico como a Combinatória se faz presente, fazendo com que o professor não o ensine ou o ensine de forma limitada, restringindo-se a atividades tradicionais cuja utilização dos recursos didáticos seja dispensada.

Em razão da pertinência dos resultados apresentados pelos estudos de sondagem e relatos de experiência, dentre as quatro categorias de trabalhos que selecionamos, iremos apresentar algumas considerações acerca dos principais achados das investigações voltadas para a categoria I e II. Os estudos relativos a estas duas categorias buscaram averiguar os principais métodos de resolução dos problemas combinatórios que são adotados pelos estudantes e discutir relatos de experiências de atividades voltadas para o ensino da Combinatória nos anos iniciais.

Destacamos que a escolha dos trabalhos a serem discutidos tomou como base a convergência de seus objetivos com o da presente pesquisa. Os três tratam do processo educativo da Combinatória nos anos iniciais do Ensino Fundamental e apoiam as experiências didáticas em perspectivas de ensino que valorizam a resolução de problemas.

I. Estudos de sondagem

A pesquisa de Magina, Spinillo e Sá Melo (2015), intitulada "As Estratégias de Estudantes dos Anos Iniciais na Resolução de Problema Combinatório", objetivou averiguar quais seriam as estratégias utilizadas por estudantes na resolução de problemas de Combinatória. A pesquisa foi realizada com 269 estudantes das 2ª, 3ª e 4ª séries (referentes aos atuais 3º, 4º e 5º anos do Ensino Fundamental), cada participante resolveu por escrito problemas de produto cartesiano, apresentando por escrito sua resolução.

De acordo com o resultado das análises dos registros das resoluções dos problemas realizadas pelos alunos, as autoras concluíram que estudantes dos Anos Iniciais tiveram pouco sucesso ao resolver problemas de Combinatória; e que, embora tenha tido um crescimento no percentual de sucesso dos estudantes, à medida que os anos escolares avançam, esse crescimento é pífio. As estratégias identificadas nas resoluções dos alunos são de natureza hierárquica, no sentido de expressarem diferentes níveis de compreensão a respeito da Combinatória. A partir disso, em uma perspectiva de desenvolvimento, identificou-se uma progressão no raciocínio combinatório que se manifesta na resolução (MAGINA; SPINILLO. SÁ MELO, 2015).

O trabalho "A Produção de Conceitos Combinatórios e Probabilísticos por meio de uma prática Problematizadora no 4º Ano do Ensino Fundamental" foi desenvolvido por Santos *et al.* (2017a) e apresentou resultados de uma pesquisa de conclusão de curso. O trabalho em questão objetivou evidenciar quais os conceitos de Combinatória e Probabilidade que podem surgir a partir de situações de ensino problematizadoras com alunos dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

Os sujeitos do estudo foram 25 alunos do 4º ano do Ensino Fundamental, com idades entre 09 e 10 anos. O jogo "Corrida de Cavalos" foi a ferramenta metodológica adotada pelas pesquisadoras para desenvolver a intervenção didática. Após a apresentação das regras do jogo, as pesquisadoras organizaram a turma em grupos de 4 alunos e começaram as partidas. Durante e depois das jogadas, foram realizadas problematizações com intuito de mobilizar o raciocínio logico dos alunos, assim como seus conhecimentos prévios, intuitivos, sobre conceitos combinatórios.

Segundo Santos *et al.* (2017a), a situação de ensino descrita apresentou resultados satisfatórios para o processo de ensino e aprendizagem da Combinatória, permitindo que os conceitos combinatórios e probabilísticos fossem desenvolvidos no ideário dos alunos do 4º ano do Ensino Fundamental, a partir das problematizações realizadas pelas professoras. Tal fato foi validado, pois, de acordo com as pesquisadoras, depois de algumas jogadas, observou-se que os alunos passaram a fundamentar suas apostas e argumentos em conceitos combinatórios.

Depreendemos que o trabalho de Magina, Spinillo e Sá Melo (2015) e Santos *et al.* (2017a) são complementares, no sentido de que comprovam a presença de conceitos combinatórios no ideário dos alunos. Nas intervenções realizadas pelas duas pesquisas, durante a resolução das atividades propostas, os alunos demonstraram um raciocínio combinatório durante as resoluções, mesmo que de forma espontânea ou não sistematizada.

É interessante destacar como a compreensão e mobilização dos conceitos combinatórios podem ocorrer de modo diferente, dependendo da forma como aula é dirigida e planejada. No primeiro estudo, de Magina, Spinillo e Sá Melo (2015), as autoras fizeram uso de uma metodologia e didática mais tradicional, pois embora se tenha trabalhado com situações-problema, as problematizações não foram tão destacadas durante as resoluções como na pesquisa de Santos *et al.* (2016).

II. Relatos de Experiência

O trabalho de relato de experiência de Silva, Feitosa e Pereira (2016), intitulado "O Raciocínio Combinatório: Crianças dos Anos Iniciais em Atividade", objetivou mostrar como crianças dos anos inicias podem ser encaminhadas quando apresentadas aos problemas que envolvem o raciocínio combinatório.

A metodologia adotada, segundo as autoras, foi de "aula investigativa, pois o cenário mostrava-se favorável, considerando que a classe envolvida sempre se manifestou positivamente quando instigada a participar" (SILVA; FEITOSA; PEREIRA, 2016, p.3). Os sujeitos da pesquisa foram alunos de uma classe do 5º ano do Ensino Fundamental. Quem ministrou a intervenção em contexto de sala de aula foi a professora titular da turma, a qual era participante do projeto EMAI[12]. A aula desenvolvida teve como finalidade ensinar para os alunos envolvidos problemas de raciocínio combinatório por meio de possibilidades. Inicialmente, os alunos foram orientados a ler e reler os problemas propostos tantas vezes quantas fossem necessárias para que pudessem compreender o que estava sendo solicitado. Enquanto as crianças resolviam os problemas, a professora circulava pela sala procurando auxiliá-los, caso surgissem algumas dúvidas ou dificuldades.

Silva, Feitosa e Pereira (2016) compreenderam com as análises do trabalho realizado que os problemas do raciocínio combinatório devem ser explorados nas suas diversas possibilidades de resolução, respeitando as características de cada um.

Em conformidade com as autoras, consideramos que um problema combinatório deve ser explorado nos anos inicias de diversas formas, de modo a estimular o aluno a investigar e levantar hipóteses, desenvolvendo seu raciocínio lógico e combinatório. Além disso, concordamos com a perspectiva de valorizar as estratégias próprias e pessoais do aluno para a resolução de problemas com esse caráter, uma vez que valoriza a autonomia do aluno e engrandece sua autoconfiança.

Almejando apresentar de maneira sintetizada os principais aspectos dos trabalhos aqui discutidos, apresentamos o Quadro 3:

Quadro 4 - Resumo de trabalhos publicados em anais de eventos analisados detalhadamente

CATEGORIA	AUTOR/ANO/ SUJEITOS/TÍTULO	OBJETIVO PRINCIPAL	RESULTADOS
Estudos de sondagem	– MAGINA; SPINILLO; SÁ MELO (2015).	Averiguar quais seriam as estratégias utilizadas por estudantes, para	– Os estudantes dos Anos Iniciais tiveram pouco sucesso

[12] O projeto "Educação Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental – EMAI", tinha como característica, segundo as pesquisadoras, o envolvimento de professores que atuavam nos Anos Iniciais, propôs a constituição de grupos de estudos nos horários destinados ao trabalho pedagógico coletivo, com a ativa participação do Professor Coordenador dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. As pesquisadoras Silva, Feitosa e Pereira (2016), faziam parte da organização e realização do projeto, a professora titular da turma era apenas participante das capacitações que o projeto oferecia.

	– Alunos do 3º, 4º e 5º anos do Ensino Fundamental. – As Estratégias de Estudantes dos Anos Iniciais na Resolução de Problema Combinatório.	resolverem problemas de Combinatória.	ao resolver problemas de Combinatória; – As estratégias identificadas nas resoluções dos alunos, são de natureza hierárquica, no sentido de expressarem diferentes níveis de compreensão a respeito da Combinatória; – Identificou-se uma progressão no raciocínio combinatório que se manifesta na resolução dos problemas,
	– SANTOS *et al.* (2017) – Alunos do 4º ano do Ensino Fundamental – *A Produção de Conceitos Combinatórios e Probabilísticos por meio de uma prática Problematizadora no 4º Ano Do Ensino Fundamental*	Evidenciar quais os conceitos de Combinatória e probabilidade podem surgir a partir de situações de ensino problematizadoras com alunos dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.	– Conclui-se que o desenvolvimento do raciocínio combinatório dos alunos foi favorecido, a partir das problematizações realizadas pelas professoras.
Relatos de Experiências	– SILVA; FEITOSA; PEREIRA (2016). – Alunos do 5º ano do Ensino Fundamental. – *O Raciocínio Combinatório: Crianças dos Anos Iniciais em Atividade*	Mostrar como crianças dos anos inicias podem ser encaminhadas, quando são apresentadas aos problemas que envolvem o raciocínio combinatório.	– Os problemas do raciocínio combinatório devem ser explorados nas suas diversas possibilidades de resolução; – Os problemas combinatórios, devem ser explorados nos anos inicias de diversas formas, de modo a estimular o aluno a investigar e levantar hipóteses,

	desenvolvendo seu raciocínio lógico e combinatório – É necessário valorizar as estratégias próprias e pessoais do aluno para a resolução de problemas.

Fonte: Autoria própria

Consideramos que o estudo dos últimos trabalhos realizados no âmbito da Educação Combinatória apresentou diferentes elementos norteadores para o seu ensino e aprendizagem. As análises realizadas versam sobre diferentes aspectos interligados a esses processos, evidenciam suas potencialidades e fragilidades na área da Educação Combinatória. Apesar do aumento de trabalhos nessa área nos últimos anos, julgamos ser necessária a realização de mais trabalhos na perspectiva de pesquisas sobre a formação docente dos professores dos anos iniciais, com o intuito de identificar as possíveis fragilidades na formação em diferentes contextos sociais e escolares.

Acreditamos que a análise de aspectos da formação docente dos professores dos anos iniciais, como: o currículo proposto; a ementa dos cursos direcionados ao ensino da Matemática; as metodologias adotadas pelos formadores; bem como as perspectivas esperadas pelos formandos (futuros professores); são pontos que podem delimitar o perfil dos profissionais que irão atuar nas séries iniciais, assim, precisam receber mais atenção dos pesquisadores.

Diante do exposto, consideramos que o levantamento e as discussões realizadas contemplam vários fatores que podem contribuir para o desenvolvimento da presente pesquisa, uma vez que apresenta e argumenta as perspectivas de trabalhos que vem sendo desenvolvidos na área, colocando em evidência quais áreas de estudo dessa temática precisam receber um maior aprofundamento.

4.3 ORIENTAÇÕES PARA O ENSINO DA COMBINATÓRIA: CONFORME AS PESQUISAS E DOCUMENTOS OFICIAIS

É comprovado pelas pesquisas que os *conhecimentos do conteúdo*, *os conhecimentos didáticos do conteúdo* e os *conhecimentos do currículo,* são essenciais para o exercício da docência (SHULMAN, 2005 *apud* ROCHA, 2011). Especificamente para o ensino da Matemática, não basta apenas o professor ter domínio do conteúdo, é necessário que ele seja capaz de transformar esse conteúdo em algo pedagogicamente útil e adaptável para os diferentes níveis de escolarização e desenvolvimento cognitivo dos alunos. Para isso, é preciso que o educador entenda como o processo de ensino e aprendizagem da Matemática deve ocorrer. O *conhecimento didático do conteúdo* permite ao professor refletir sobre as escolhas das ações que serão adotadas para formular e abordar o conteúdo. Este conhecimento:

> [...] representa a mistura entre a matéria e didática porque se chega a uma compreensão de como determinados temas e problemas se organizam, se representam e se adaptam para os diversos interesses e capacidades dos alunos, e se expõe no seu ensino (SHULMAN, 2005 *apud* ROCHA, 2011, p.21).

Conhecer e compreender as orientações metodológicas, curriculares e didáticas, apresentadas pelos documentos oficiais e pelas pesquisas no âmbito da Educação Combinatória, é de suma importância para a qualidade de seu ensino, uma vez que estas orientações direcionam futuras pesquisas, assim como práticas pedagógicas e planos curriculares.

Por ser uma parte importante da Matemática Discreta, a inclusão da Combinatória ao Currículo de Matemática é recomendada deste 1989, pelo *National Council of Teachers of Mathematics* - NCTM (2000). Sua relevância ao desenvolvimento do raciocínio lógico dos alunos em diferentes níveis de ensino é enfatizada pelo documento.

A Combinatória pertence ao bloco (eixo) de conteúdos de tratamento de informações e deve ser trabalhada em todas as séries de ensino da Educação Básica (BRASIL, 1997). Recomenda-se que o ensino formal deste conteúdo seja realizado no Ensino Médio, de modo a apresentar de maneira formal a sua definição, ferramentas de contagem e suas respectivas fórmulas. Diferentemente do Ensino Médio, nos primeiros anos de escolarização do Ensino Fundamental o que se pretende não é um trabalho pautado na apresentação de definição de termos ou de fórmulas que envolvam tal assunto. Mas sim, a construção de ideias essenciais que estruturam o raciocínio combinatório como os invariantes e significados de cada tipo de problema.

De acordo os PCN (BRASIL, 1997), o objetivo da Educação Combinatória no Ensino Fundamental é “levar o aluno a lidar com situações-problema que envolvam combinações, arranjos, permutações e, especialmente, o princípio multiplicativo da contagem" (BRASIL, 1997, p.40). Assim, no decorrer dos primeiros ciclos do Ensino Fundamental é importante que os alunos consigam desenvolver a familiarização com a contagem de agrupamentos, uma vez que a organização dos elementos de uma coleção em agrupamentos facilita a contagem e a comparação entre coleções com um grande número de elementos.

Ainda sobre as capacidades a serem desenvolvidas com o ensino da Combinatória neste nível de escolaridade, os Referenciais Curriculares do Ensino Fundamental do Estado da Paraíba (RCEFEP), documento que orienta a proposta de trabalho pedagógico das escolas paraibanas, destaca que os alunos precisam desenvolver a capacidade de "identificar possíveis maneiras de combinar elementos de uma coleção e contabilizá-los por meio de variadas estratégias" (PARAÍBA, 2010, p.127). Nesse contexto de aprendizagem está presente a necessidade de desenvolver a contagem de possibilidades, denominada Combinatória. Partindo-se de estratégias das próprias crianças é possível introduzir formas variadas de organizar os dados, como, por exemplo, as tabelas de dupla entrada. Temos, ainda, o raciocínio probabilístico que, embora no ciclo de alfabetização não precise ser sistematizado, pode ser iniciado a partir de situações lúdicas desenvolvendo conceitos simples, auxiliando a criança a identificar eventos com maior ou menor chance de ocorrer (BRASIL, 2014, p.5).

Na Combinatória, a contagem e a comparação de agrupamentos apoiam-se no raciocínio multiplicativo. Através da sistematização para a escolha e ordem dos elementos, grupos de possibilidades são elencados, seja de maneira direta, pelo uso de fórmula, seja indiretamente, pelo desenvolvimento de estratégias próprias (como a árvore das possibilidades e tabela de dupla entrada) que deem conta de atender aos requisitos do tipo de problema (PESSOA, 2009).

Sobre isso, o PNAIC afirma que a influência da contagem de agrupamentos sobre o raciocínio da combinatório exige que este tipo de raciocínio supere "a ideia de enumeração de elementos isolados para se passar à contagem de grupos de objetos, tendo como base o raciocínio multiplicativo" (BRASIL, 2014, p.37). Assim, em suas orientações sobre a Combinatória, o documento ressalta a necessidade do pensamento hipotético-dedutivo no processo de ensino. Para tanto, os alunos precisam ser estimulados a levantar hipóteses e construir estratégias para resolver situações problemas propostas pelo o professor. Essa possibilidade pode ser desenvolvida quando a atividade de resolução de problema envolve diversas representações, [...] “tais como listagem, árvore de possibilidades, tabelas, quadros, diagramas, etc.” (BRASIL, 2014, p.39).

Uma das principais razões para que o ensino da Combinatória comece desde os primeiros anos na escolarização básica é a importância do raciocínio combinatório para a aprendizagem Matemática e a necessidade de um longo tempo para a sua construção. Uma das principais características do raciocínio combinatório é a capacidade de analisar situações nas quais envolvem procedimentos sistemáticos de enumeração e/ou de determinação do número total de distintas possibilidades. A capacidade de sistematização deste tipo de raciocínio ajuda o aluno a estruturar o raciocino lógico e generalizante, que são tipos de raciocínios extremamente importantes para a desenvolvimento da aprendizagem da Matemática (PESSOA; SILVA, 2012; PESSOA; SANTOS, 2012). Com relação a isso, Rocha (2011, p.6) ressalta que quando “o aluno busca estratégias para resolução de problemas combinatórios produzem organizações e sistematizações que podem ser aplicáveis a outros ramos da Matemática”.

Compreendemos que esses tipos de raciocínios, potencializados pela formação do raciocínio combinatório, permitem ao aluno observar padrões e regularidades entre as diferentes estruturas matemáticas, possibilitando-o desenvolver um grau mais aprofundado de abstração dos conceitos matemáticos. O raciocínio combinatório “é um modo especial de pensamento lógico-dedutivo e, em uso pleno, denota um mais alto nível de desenvolvimento cognitivo” (BORBA; PESSOA; ROCHA, 2013, p.896).

Fischbein, no prefácio de Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996), defende a importância do ensino deste conteúdo para promover benefícios para outros ramos da Matemática. Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996, p.14) destacam que os problemas combinatórios indicam um excelente meio “para que alunos realizem atividades de matematização (modelagem, representação, formulação, abstração, validação, generalização...)”. Posto que os conceitos combinatórios podem modelar diversas situações inquietantes do cotidiano, a exemplo do levantamento das combinações possíveis de sequências numéricas sorteadas pela loteria.

É importante ressaltar também a relevância do raciocínio combinatório para a construção da ideia de probabilidade e o desenvolvimento do pensamento formal. Amparados pelos estudos de Inhelder e Piaget (1955)[13], Batanero, Navarro-Pelayo e Godino (1997) afirmam que, além da sua importância no desenvolvimento da ideia de

[13] Que discutem o desenvolvimento do pensamento formal.

probabilidade, a capacidade do raciocínio combinatório é um componente fundamental do pensamento formal. A capacidade do raciocínio combinatório em selecionar e organizar os elementos de um dado conjunto em agrupamentos possíveis consiste em construir o espaço amostral das possibilidades para o cálculo da probabilidade. Pela sua contribuição ao ensino da Probabilidade, é importante que o ensino da Combinatória aconteça de maneira articulada, de modo que, a partir do tratamento combinatório, o espaço amostral pode ser determinado para o cálculo da probabilidade.

Com relação ao tempo necessário para o desenvolvimento do raciocínio combinatório, é considerado que este precisa de um longo tempo para se estruturar de maneira consistente. Pela sua contribuição ao desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo, do raciocínio formal e do raciocínio generalizante, a consolidação do raciocínio combinatório leva bastante tempo. Com isso, é extremamente importante que ensino da Combinatória se inicie logo nos primeiros anos do Ensino Fundamental, objetivando ir estruturando este tipo de pensamento ao longo dos demais anos de escolaridade básica, de modo que, quando o aluno chegue ao Ensino Médio, onde se depara com o ensino formal deste conteúdo, não enfrente dificuldades para compreender os conceitos combinatórios que possuem um maior grau de complexidade. Sobre isso, Borba, Pessoa e Rocha (2013, p.896) defendem:

> [...] o raciocínio combinatório leva um longo tempo para se desenvolver e que no início da escolarização situações Combinatórias simples podem ser propostas, de modo a prover estudantes com noções iniciais sobre como combinar elementos e considerar combinações válidas que atendem a determinadas condições.

Diante disso, defendemos que o desenvolvimento do raciocínio combinatório acontece de maneira lenta, sistemática, organizada e gradual. Assim, quando a criança tem a oportunidade de conhecer as noções básicas de Combinatória na educação escolar, logo nos primeiros anos, a abordagem desse assunto nos anos subsequentes da Educação Básica torna-se mais fácil, tendo em vista que as ideais essenciais que a estruturam já foram trabalhadas previamente.

Tal fato vai de encontro às ideias de Vergnaud (1991), a respeito do processo de construção dos conceitos. Sob o olhar da Teoria dos Campos Conceituais, compreendemos que, para a formação do conceito de Combinatória, é necessário que um conjunto de campos conceituais que a estruturam matematicamente sejam dominados. Nesse sentido, o desenvolvimento do raciocínio combinatório acontece por meio da construção de campos conceituais que lhes permitem dar sentido a um campo de situações que o estruturam. O que leva muito tempo, uma vez que o domínio de um campo conceitual, por parte do sujeito, ocorre em um longo período de tempo, com rupturas e filiações, pela maturidade adquirida por meio da experiência (VERGNAUD, 1982b). Diante disso, é importante que as atividades propostas pelo professor possibilitem que os alunos consigam atribuir algum significado e que, além disso, possam auxiliá-lo a desenvolver o seu repertório de esquemas e representações dos problemas combinatórios. Corroborando estas ideias, Esteves (2001, p.75) defende que:

> Um conceito não é uma mera definição; refere-se a um jogo de situações, envolve um jogo de invariantes operacionais diferentes, e suas propriedades podem ser expressas através de representações linguísticas e simbólicas diferentes. Professores são mediadores e a parte deles consiste principalmente em ajudar o aluno a desenvolver seu repertório de esquemas e representações.

O ensino da Combinatória exige que o professor entenda que os problemas combinatórios, tais como: arranjo, permutação, combinação e produto cartesiano, apresentam diferentes características que conduzem a diferentes raciocínios e resoluções, ou seja, que os problemas combinatórios possuem diferentes invariantes que o definem, e diferentes representações simbólicas (árvores de possibilidades, por exemplo) que os representam. Ao compreender tais aspectos, por meio das representações adotadas pelo aluno na resolução dos problemas, o professor conseguirá analisar como o raciocínio combinatório deste aluno está se desenvolvendo durante o processo educativo.

Ao que se refere à aprendizagem dos alunos neste nível de ensino, vale salientar que "as crianças em início de escolarização podem não ter a capacidade de enumerar todos os casos de situações Combinatórias, mas são capazes de compreenderem relações Combinatórias de escolha e de ordenação de elementos" (BORBA; PESSOA; ROCHA, 2013, p.901). Borba, Pessoa e Rocha (2013) observaram que, mesmo não tendo conseguido obter corretamente o número total de possibilidades na resolução dos problemas combinatórios, algumas crianças compreenderam a estrutura Combinatória dos problemas. Esse apontamento assemelha-se ao estudo de Pessoa (2009), pela dificuldade observada para resolver problemas com o número de agrupamentos consideravelmente grande.

Amparados pelas pesquisas de Pessoa (2009); Borba *et al.* (2009); Borba; Pessoa e Rocha (2013); e Borba (2016), confiamos que os alunos dos anos iniciais do Ensino

Fundamental possuem a capacidade de compreender os diferentes invariantes dos problemas combinatórios e que, além disso, conseguem elaborar diferentes estratégias de resoluções para eles. Falando especificamente da compreensão de cada tipo de problema, de acordo com as pesquisas supracitadas, o desenvolvimento do raciocínio combinatório que melhor demonstrar desempenho, tanto no Ensino Fundamental, quanto no Ensino Médio, são os problemas de produto cartesiano. Tal apontamento evidencia a importância do trabalho com a Combinatória desde os primeiros anos do Ensino Fundamental, para o desenvolvimento de conhecimentos mais complexos no Ensino Médio.

Assim como Pessoa (2009), confiamos que o melhor desempenho apontado para este determinado tipo de problema pode ser creditado ao seu ensino ocorrido desde o 3º e/ou 4º ano do Ensino Fundamental, posto que é a partir destes anos de escolaridade que este tipo significado da Combinatória é trabalhado juntamente com outros problemas de estruturas multiplicativas (como proporcionalidade). Enquanto os demais tipos, como arranjo, permutação e combinação, não são explicitamente ensinados neste nível de escolaridade, mesmo que os PCN (BRASIL, 1997) orientem o trabalho com estes.

A capacidade das crianças em compreender os diferentes tipos de problemas combinatórios é pontuada pelas pesquisas de Pessoa e Borba (2012); Azevedo (2013) e Rocha (2011). De acordo com as pesquisas, os alunos conseguem compreender os diferentes tipos de problemas combinatórios, mesmo antes do ensino formal na escola, e são capazes de desenvolver estratégias próprias para resolução desses problemas. Sobre isto, defende-se que esta capacidade de compreensão e resolução dos problemas combinatórios, antes mesmo da educação formal, é motivada por situações do cotidiano que os alunos vivenciam e que envolvem conceitos combinatórios.

Nessa direção, Borba *et al.* (2009) pontuam diversas situações extraescolares que podem ser exploradas para o ensino da Combinatória no Ensino Fundamental. De acordo com as autoras, situações-problemas que envolvam "expectativas de um acontecimento, regras de um jogo, escolha de vestimentas, combinações de sucos e sanduíches em uma lanchonete ou de sabores de um sorvete" (BORBA *et al.* 2009, p.1) são ricas possibilidades para o ensino da Combinatória e da Probabilidade, visto que possibilitam o trabalho com a contagem e organização de agrupamentos de elementos de um conjunto.

A partir disso, confiamos que a introdução do ensino formal da Combinatória, a partir de problemas contextualizados em situações rotineiras da vida cotidiano dos alunos, pode ser um meio eficiente para o processo educativo deste conteúdo. Amparados pelos estudos de Vergnaud (1991), salientamos que a valorização dos conhecimentos agregados pelas crianças, anteriormente ao ensino escolar, possibilita ao professor propiciar situações de ensino que mobilizem os conhecimentos já adquiridos em busca da construção de novos conhecimentos combinatórios.

Objetivando auxiliar o docente no processo de ensino da combinatória, o PNAIC orienta a utilização de materiais manipuláveis em situações que envolvam o contexto das vivências das crianças, que envolvam "diversas estratégias de resolução, tais como desenhos, listagens ou árvores de possibilidades podem ser caminhos para o trabalho com a Combinatória desde cedo nas salas de aula" (BRASIL, 2014, p.42).

Aliado as diferentes estratégias de resolução e registros, é importante que os alunos compartilhem suas conjecturas referentes a problemas de Combinatória com os colegas, pois novas significações podem ser desenvolvidas. De acordo com o PNAIC, o desenvolvimento do raciocínio combinatório das crianças é um processo longo, sendo necessário que:

> [...] durante a escolarização os diferentes tipos de problemas sejam trabalhados com um aprofundamento contínuo para que estratégias próprias das crianças, mais informais, sejam gradativamente transformadas em procedimentos sistematizados (BRASIL, 2014, p.50).

Consideramos que as orientações apresentadas no PNAIC podem auxiliar o trabalho do professor com os conteúdos de Combinatória, uma vez que o documento se preocupa com aspectos importantes para o desenvolvimento progressivo do raciocínio combinatório, probabilístico e estatístico das crianças.

Com relação aos aspectos a serem trabalhados a partir dos problemas combinatórios, Borba (2016) defende que, desde novas, as crianças podem ser estimuladas a pensarem em questões interessantes de investigação. De acordo com a autora, no Ensino Fundamental é possível que os professores propiciem situações-problemas nas quais:

> [...] informações podem ser levantadas, organizadas, classificadas e interpretadas, bem como podem ser incentivadas a refletirem sobre como eventos ocorrem – de modo aleatório, previsível ou determinístico. Também, desde cedo, podem ser incentivadas a levantarem possibilidades de eventos ocorrerem e enumerarem modos de elementos constituintes de uma situação serem combinados entre si (BORBA, 2016, p.2).

Segundo a autora, os conceitos mais elaborados de Combinatória são formalmente trabalhados em níveis mais elevados do ensino da Educação Básica. Ela sugere que essa temática esteja presente no processo de ensino desde o início da escolarização, inclusive, na Educação Infantil. Borba (2016) indica que, a partir de situações práticas e lúdicas, presentes, no seu cotidiano dos alunos, é possível abordar noções básicas de Combinatória de forma que os conceitos desenvolvidos sejam significativos.

As experiências vivenciadas pelos alunos precisam ser utilizadas a favor do desenvolvimento do raciocínio combinatório, visto que os conceitos combinatórios que emergem nas situações extraescolares, colaboram na formalização e consolidação dos conceitos escolares. Com relação a isso, Borba (2016) destaca algumas observações realizadas em estudos anteriores por Pessoa e Borba (2009):

> As autoras sugerem que os raciocínios combinatórios evidenciados podem ser fruto de experiências extraescolares – de escolha e combinação de objetos no cotidiano – e também argumentam que vivências escolares, não necessariamente relacionadas à Combinatória, podem ter influência no modo como as crianças pensam e como desenvolvem seus pensamentos combinatórios (BORBA, 2016, p.4).

De maneira semelhante, várias pesquisas (BATANERO, 1997; ESTEVES, 2001; ROA; NAVARRO-PELAYO, 2001) orientam que o trabalho com a Combinatória no Ensino Fundamental comece pela construção de diversos tipos de agrupamentos, sem necessariamente sistematizar e/ou formalizar o conteúdo de estudo. Acreditamos que se essa perspectiva de trabalho for adotada desde os anos iniciais, os alunos conseguirão compreender com maior facilidade os conceitos combinatórios em níveis mais elevados de ensino. Almeida (2010) assegura que este método de ensino auxilia na aprendizagem do aluno, evitando que:

> [...] os alunos apenas memorizem as fórmulas e, depois de algum tempo, as esqueçam ou não sejam capazes de aplicá-las adequadamente por desconhecer seu sentido, é importante construir todo o processo juntamente com eles, de modo que, efetivamente, compreendam cada ação realizada, refletindo a respeito do problema e analisando a melhor estratégia para resolvê-lo. (ALMEIDA, 2010, p.27).

Desse modo, é preciso que o trabalho do professor respeite e priorize durante o processo de ensino, o desenvolvimento cognitivo de seus alunos, visto que “se o estágio cognitivo em que a criança se encontra não for respeitado ela não terá condições de responder aos objetivos que o professor deseja atingir” (EBERHARDT; COUTINHO, 2011, p.64). Mesmo porque, cada criança desenvolve um processo de aquisição dos conhecimentos de maneiras e ritmos diferentes. Assim, “cada aluno elabora e desenvolve maneiras diferentes de operar matematicamente” (EBERHARDT; COUTINHO, 2011, p.64), uma vez que o desenvolvimento do cognitivo das crianças - processo de aquisição dos conhecimentos - depende de diversos fatores como o pensamento, a linguagem, a percepção e raciocínio (VERNAUD, 1991).

Por ser tratar de um conceito amplo em aplicabilidades, a Combinatória possibilita ao professor elaborar situações-problema de diversos contextos que estimulam o aluno a desenvolver estratégias cognitivas e dialógicas. Almeida (2010) ressalta que a Combinatória “permite a elaboração de situações-problema que podem ser discutidas através da construção de conjecturas e discussão de ideias, promovendo o desenvolvimento da capacidade de argumentação em diferentes níveis de ensino” (ALMEIDA, 2010, p.20).

No entanto, a realidade do ensino e da aprendizagem desse conteúdo tem apresentado inúmeros empecilhos. O processo educativo da Combinatória, na maioria das vezes, tem se tornado um grande obstáculo para os alunos e professores. Acredita-se que a principal justificativa para esse quadro seja a maneira como o ensino da Combinatória está sendo apresentado.

Segundo a autora, os conceitos combinatórios vêm sendo abordados de uma maneira mecanizada, por meio da apresentação de definições e fórmulas, prejudicando assim o processo investigativo que o conteúdo possibilita para a aprendizagem do aluno, o qual, nesta didática, não terá a oportunidade de elaborar e justificar suas hipóteses para solucionar as situações propostas pelo docente. Com relação a isso, Souza e Marasca (2010, p.3) afirmam que é preciso o professor:

> [...] adotar outra metodologia, que permite a participação do aluno na construção desses conceitos, pode contribuir para a aquisição de uma compreensão mais significativa, que procura dar sentido à matemática construída, considerando o cotidiano do aluno e o trabalho com problemas contextualizados (SOUZA; MARASCA, 2010, p.3).

Diante disso, alguns autores (ALMEIDA, 2010; SOUSA; MASCARA, 2010) sugerem que o processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos de Combinatória seja desenvolvido numa perspectiva problematizadora, de maneira investigativa e dialógica. Para tanto, é primordial que, durante este processo, o aluno tenha momentos de investigação nos quais consiga validar suas hipóteses por meio da socialização das ideias com o professor e com os colegas de classe, pois na medida que suas ideias são discutidas, conhecimentos são compartilhados, construídos e consolidados, conseguindo, desta forma, produzir (re)significações de seus conhecimentos.

É recomendado por diferentes pesquisas (ALMEIDA, 2010; ROA; NAVARRO-PELAYO, 2001; BORBA, 2016,) que durante o processo educativo da Combinatória o aluno tenha a oportunidade de levantar hipóteses por meio de problematizações apresentadas e/ou mediadas pelo docente. Nas situações de ensino, é importante que o docente proponha estratégias cujos conceitos combinatórios, presentes no ideário dos alunos, sejam confrontados com os conceitos escolares. É preciso que os alunos sejam expostos a um conjunto de situações-problema que ele ainda não tenha desenvolvido os esquemas necessários para dominá-las, no entanto, com a ajuda de seus conhecimentos prévios terá um "tempo de reflexão e exploração, de dúvidas, tentativas abortadas e, eventualmente, leva ao sucesso ou falha" (VERGNAUD, 1990, p.2). De maneira semelhante, Almeida (2010, p.15-16) explica que:

> [...] a utilização de situações-problema pode contribuir para a aprendizagem de diversos conteúdos, inclusive, da Análise Combinatória. Mas somente aprender a resolver os problemas, construindo suas próprias estratégias, não é o suficiente para tornar esta aprendizagem eficaz. Através da discussão em pequenos grupos e da troca de experiências entre o professor e seus alunos ou entre os próprios alunos, a aprendizagem é potencializada pela oportunidade de aprender consigo mesmo e com o outro.

Nesse sentido, entendemos que o ensino da Combinatória precisa acontecer em um ambiente aberto a diálogos e discussões argumentativas, visto que as situações de problemas, por si só, não são suficientes para o desenvolvimento do pensamento combinatório das crianças, bem como para uma aprendizagem com significado.

Durante o processo de ensino o professor deve organizar o tempo, de modo que os alunos possam desenvolver e discutir suas ideias em pequenos grupos, bem como socializar essas ideias com os demais colegas de classe. Assim, os alunos terão a oportunidade, em um primeiro momento, de desenvolver conceitos combinatórios durante a resolução de problemas e, no segundo momento, apresentar e argumentar sobre os conceitos elaborados nos grupos, com o coletivo da classe.

Nessa perspectiva, acreditamos que o trabalho com a Combinatória através da Resolução de Problemas, na qual os alunos têm a oportunidade de construir suas próprias conjecturas por meio de análise e discussão dos dados, é uma alternativa para o ensino deste conteúdo nos anos de escolarização da Educação Básica, e em especial no Ensino Fundamental. Neste processo, é relevante que o professor utilize os conhecimentos que os alunos já possuem sobre a Combinatória como ponto de partida para o seu ensino, de modo que, a partir do aprendizado oriundo de suas vivências, o aluno desenvolverá alguns conceitos mais amplos.

No próximo capítulo, elucidamos os procedimentos metodológicos desenvolvidos durante a pesquisa de campo.

5 A RESOLUÇÃO, EXPLORAÇÃO E PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS: UM CAMINHAR METODOLÓGICO

No presente capítulo, apresentamos os procedimentos metodológicos percorridos para a realização da pesquisa de campo, tais como os aspectos a serem analisamos ao longo dos encontros e a dinâmica do desenvolvimento destes; os sujeitos envolvidos e os problemas a serem trabalhados sobre a perspectiva metodológica da Resolução, Exploração e Proposição de Problemas.

5.1 MÉTODOS DA PESQUISA

A relevância do ensino da Combinatória nos anos iniciais do Ensino Fundamental para o desenvolvimento da aprendizagem Matemática, bem como as contribuições de seus conceitos em diferentes áreas de conhecimentos e situações cotidianas, são as principais motivações para a realização desta pesquisa.

Com as leituras, entendemos que é interessante para o processo de ensino deste conteúdo que os alunos vivenciem situações de ensino desafiadoras, sendo motivados a levantar hipóteses, a criar diferentes estratégias de resolução dos problemas combinatórios e a trocar experiências durante o processo de construção das ideias essenciais do conteúdo. Nesse sentido, acreditamos que a perspectiva metodológica de Ensino-Aprendizagem da Matemática através da Resolução, Exploração e Proposição de Problemas pode ser uma boa alternativa para o ensino da Combinatória. Conforme discutido em capítulos anteriores, esta perspectiva permite que professor conduza o processo educativo da Combinatória de maneira reflexiva, onde o espírito de investigação do aluno pode ser favorecido.

A aplicação e reflexão de nossa proposta de ensino fundamentaram-se em análises críticas acerca das estratégias de codificação e descodificação criadas e utilizadas pelos sujeitos da pesquisa durante o processo de resolução dos problemas combinatórios. Diante disso, delimitamos como objetivos de pesquisa:

- **Objetivo Geral:**
  - Analisar as contribuições da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas ao processo de ensino e aprendizagem da Combinatória nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Para isso, compreendemos ser necessário propor problemas combinatórios para alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental que nos possibilitem:

- **Objetivos Específicos:**

  - Avaliar a mobilização dos conhecimentos combinatórios ao longo do processo de Resolução, Exploração e Proposição dos Problemas;
  - Averiguar as principais estratégias de resolução utilizadas pelos alunos;
  - Analisar os argumentos apresentados pelos alunos ao longo do estudo;
  - Examina as contribuições da Resolução, Exploração e Proposição de Problemas para o processo de ensino da Combinatória.

A pesquisa foi realizada com alunos de uma turma do 5°ano do Ensino Fundamental de uma escola do munícipio de Nova Floresta-PB. A turma era composta por 25 alunos, todavia, trabalhamos com apenas 16. A logística empregada para a coleta e aprofundamento de dados (gravações e análise contínua dos registros escritos dos alunos e argumentações) durante as discussões nos encontros foi um dos fatores que influenciou na determinação da quantidade de alunos que iriam participar do estudo. Outro motivo foi a necessidade apresentada pela professora de revisar alguns conteúdos de matérias de estudo diferentes com alguns dos alunos que não participaram.

Estrategicamente, solicitamos à professora responsável pela turma que, por conhecer melhor o perfil do alunado, organizasse as duplas, seguindo como critério os níveis de facilidades/dificuldades semelhantes na disciplina de Matemática. O interesse em estimular a troca de ideias entre os componentes das duplas durante o processo de Resolução, Exploração e Proposição dos Problemas foi a razão pela qual decidimos organizar as duplas dessa maneira.

Acreditamos que a junção de componentes em uma mesma dupla, com níveis de conhecimento muito diferenciados ou distanciados, poderia dificultar o trabalho reflexivo entre eles sobre os problemas propostos. Entendemos que o que pode ser de difícil compreensão para um, não necessariamente, poderia ser de difícil para outro, logo, este último poderia facilmente resolver os problemas da sua maneira, sem necessariamente enfrentar nenhuma refutação do segundo componente da dupla.

Os encontros realizados totalizaram-se em 18 horas-aula, distribuídas em 5 encontros com duração de 4 horas cada, com exceção do último, que teve como duração 2 horas. Em todos eles, procuramos explorar e analisar a mobilização e construção das ideias essenciais da Combinatória através da Resolução, Exploração e Proposição de Problemas, fundamentando nossa prática pedagógica nas principais ideias defendidas por Onuchic e Allevato (2011) a respeito do ensino da Matemática através da Resolução de Problemas e nos pressupostos teóricos de Andrade (1998; 2017) acerca da relação *Problema-Trabalho-Reflexões e Síntese-Resultado*, e pelo trabalho de codificação e descodificação realizado.

A dinâmica dos encontros priorizou o trabalho de reflexão através de questionamentos e registro escrito produzidos pelos alunos. A proposição de problemas apareceu de forma explícita no processo de Resolução, Exploração e Proposição de Problemas, sendo utilizada também em boa parte dos momentos como uma ferramenta de problematização, em que através de questionamos, buscamos estimular o processo de resolução e exploração dos problemas (ANDRADE, 1998; 2017). Destacamos que, os questionamentos provocados pela pesquisadora, durante os encontros, foram previamente planejados (em apêndices), com o intuito de analisar se estes poderiam potencializar o trabalho de reflexão dos alunos sobre os problemas propostos.

Reunindo as ideias defendidas por Onuchic e Allevato (2011) e Andrade (1998; 2017), organizamos uma dinâmica para o desenvolvimento dos encontros realizados. A seguir, apresentamos detalhadamente a dinâmica dos encontros desenvolvidos:

- **Delimitação do problema**

Selecionar problemas geradores que possibilitem trabalhar as ideias essenciais da Combinatória (seus diferentes invariantes e conceitos) nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

É importante ressaltar que, a delimitação dos problemas precisa ser cautelosa, posto que, os problemas a serem propostos aos alunos precisam permitir que o processo educativo da combinatória comece a partir do trabalho de problematizações e reflexão ocasionadas pelo problema, e estimulado e conduzido pelo professor.

- **Codificação do problema**

Esta etapa consiste na elaboração, por parte do aluno, de uma representação mais conveniente e simplificada do problema proposto que facilite a sua compreensão. Neste momento, entregamos cópias dos problemas para que, a partir da leitura individual, as duplas procurassem ou elaborassem maneiras de representar de maneira mais simplificada e conveniente o problema.

Neste momento, é extremamente importante que a criatividade do aluno seja valorizada. A representação elaborada ou escolhida pelo estudante, ou pelo grupo, pode demonstrar a representação que melhor permite uma compreensão da situação estabelecida pelo problema.

A compreensão da situação apresentada pelo problema permite que, posteriormente, o aluno consiga elaborar estratégias de resolução durante o processo de descodificação do problema. Ressaltamos ainda que o processo de codificação pode demonstrar a interpretação que o aluno possui em relação ao problema proposto.

– **Descodificação do problema**

Uma vez codificado o problema da maneira conveniente, estimulamos os alunos a buscarem maneiras de descodificar o mesmo para o alcance de sua solução. Destacamos que durante o processo de descodificação é importante que os alunos desempenhem um trabalho reflexivo sobre o problema, para que consigam analisar criticamente os invariantes das situações impostas. Após um tempo, abordamos as duplas com o intuito de propor problematizações que os estimulassem a realizar uma reflexão mais aprofundada acerca das características dos problemas.

A partir dos pressupostos teóricos de Borba (2016), acreditamos que a análise crítica desses problemas pode ser fundamentada em conhecimentos prévios dos alunos oriundos de suas experiências extraescolares. À vista disso, visando um desenvolvimento progressivo de sua aprendizagem, julgamos de primordial importância no processo de resolução e exploração dos problemas valorizar e estimular a mobilização dos conhecimentos que os alunos já possuem e as estratégias (esquemas) de resolução que já conhecem. Compreendemos que quando os discentes são colocados em classe de problemas em que seus conhecimentos prévios são valorizados, porém insuficientes para sua resolução, possivelmente, um avanço na aprendizagem do aluno pode acontecer. A partir do trabalho de reflexão sobre a nova experiência propiciada pelo problema, o aluno analisa sobre como mudar ou aprimorar o esquema já construído em busca de um novo que seja suficiente para a resolução do problema proposto (VERGNAUD, 1990).

Nesta etapa, é importante que o problema permita que o aluno desempenhe um trabalho reflexivo, individualmente e em conjunto, sobre as ideias principais do problema. Individualmente, pela necessidade da autonomia de pensamento e, em conjunto, pela importância da troca de ideias e trabalho colaborativo para a construção de um conhecimento.

Compreendemos que esse trabalho reflexivo sobre o problema possibilita ao estudante elaborar estratégias de resoluções que o conduzam a sínteses das ideias construídas durante o processo de resolução.

– **Estimular a exploração e proposição**

Esta etapa aconteceu simultaneamente a anterior. Enquanto os alunos, em duplas, buscavam resolver os problemas, observávamos seus comportamentos e procurávamos estimular o trabalho colaborativo e investigativo. Assumindo o papel de mediadores, levamos os alunos a pensar, dando-lhes tempo e os incentivando a criar ou escolher diferentes caminhos (métodos) de resolução a partir de seus conhecimentos prévios e técnicas operatórias já conhecidas. Na oportunidade, propomos problemas secundários, almejando trabalhar as diferentes dimensões do problema inicial.

Visando conseguir entender a mobilização dos conceitos combinatórios dos alunos, buscamos acompanhá-los durante todo o processo de resolução e exploração dos problemas propostos. Neste momento, as problematizações promovidas foram apoiadas pela relação *Problema-Trabalho-Reflexões* e *Síntese-Resultado,* discutidos por Andrade (1998; 2017), uma vez que foram fundamentadas pelo trabalho de reflexão desenvolvido pelo aluno. Como ponto de partida para as nossas problematizações, tivemos como base os questionamentos levantados pelos alunos e os registros escritos também elaborados por eles.

– **Análise crítica das resoluções**

Nesta etapa, almejando realizar uma análise crítica da validez das resoluções desenvolvidas, representantes das duplas foram convidados a registrar no quadro suas resoluções. A partir das resoluções expostas, discutimos em conjunto a eficácia das resoluções elaboradas. Ainda no mesmo momento, exploramos as diferentes dimensões dos problemas iniciais, objetivando a capacidade de análise crítica.

É importante ressaltar que, ao longo dos encontros, fundamentamos nossas discussões em resoluções certas ou erradas e feitas por diferentes caminhos. Tal ação apoia-se nas orientações de Onuchic e Alevatto (2011) e Andrade (1998; 2017), haja vista que na Resolução de Problemas o processo de resolução se mostra mais relevante do que somente a solução.

Neste ponto, também destacamos a relevância da valorização da pluralidade de ideias e troca destas para a construção do conceito matemático estudado.

– **Síntese das ideias e Formalização do conteúdo**

Nesta etapa, juntamente com os alunos, a partir do trabalho reflexivo sobre ideais construídas ao longo do processo de resolução, buscamos chegar a um consenso sobre o resultado correto dos problemas propostos com todos os alunos da classe. Além disso, a partir dos procedimentos construídos através da resolução do problema, apresentamos diferentes técnicas operatórias possíveis para resolução dos problemas. Assim, para a formalização das ideias, apresentamos como método de resolução o diagrama das árvores e a listagem das possibilidades. O motivo de termos escolhido apenas estes dois métodos se dá pelo fato de que, neste nível de escolaridade, o interesse da Educação Combinatória não está voltado para a representação formal dos diferentes tipos de problemas.

– **Proposição e exploração de problemas propostos**

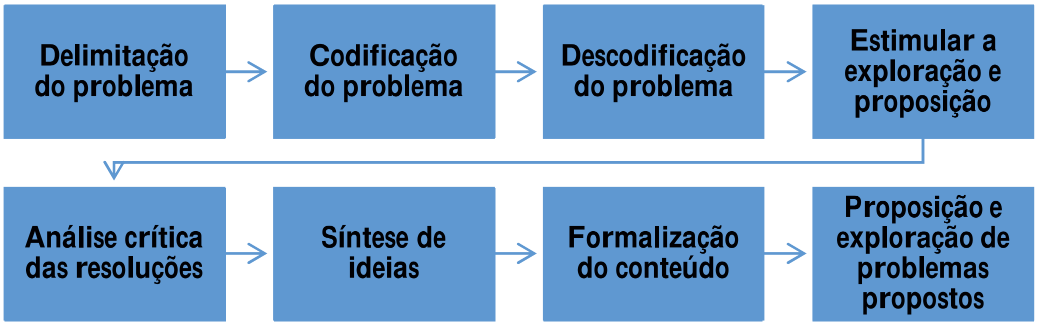
Nesta fase, estimulamos a proposição e exploração de problemas de maneira direta. Para tanto, pedimos aos alunos que elaborassem problemas com as mesmas características dos problemas principais trabalhados durante o encontro. Após isso, juntamente com eles, exploramos as estratégias de resolução utilizadas por eles e as diferentes dimensões dos problemas que eles propuseram.

Consideramos que a proposição de problemas contribui para a organização do raciocínio combinatório, posto que para a elaboração de um novo problema, gerado ou fundamentado por outro, é necessário que o aluno tenha clareza na compreensão dos invariantes que caracterizam tais problemas.

Convém ressaltar que essa etapa foi adicionada em nossa dinâmica somente após verificarmos que, no primeiro encontro, a proposição de problemas não ocorreu espontaneamente por parte dos alunos durante o processo de resolução e exploração do problema principal, como apontado por Andrade (1998).

Reiteramos que a mediação realizada durante o processo de codificação e descodificação do problema teve como intencionalidade direcionar os alunos a um caminho de construção de novos conhecimentos. Na Ilustração 3, de maneira sintetizada, apresentamos a dinâmica dos encontros:

Ilustração 4 – *Design* da dinâmica dos encontros



Fonte: Autoria própria

É importante destacar que tais etapas não necessariamente precisam ocorrer nesta sequência. Em outros encontros, dependendo dos objetivos do professor, pode-se iniciar o processo educativo a partir da etapa de descodificação, por exemplo, codificando posteriormente as colocações dos alunos apresentadas em um novo problema gerador que possibilite a condução para um trabalho reflexivo sobre este.

No registro das resoluções dos problemas, analisamos o padrão das estratégias de resolução adotadas para resolver os problemas combinatórios. Além disso, também averiguamos quais conhecimentos prévios estariam presentes na resolução dos alunos.

Durante os momentos de descodificação, exploração e proposição de problemas, analisamos se as problematizações provocaram uma mudança na ação do aluno e em que aspectos favoreceram para a condução da construção de novos conceitos combinatórios.

Como colocamos anteriormente, uma das principais características do raciocínio combinatório é a capacidade de analisar situações nas quais envolvem procedimentos sistemáticos de enumeração e/ou de determinação do número total de distintas possibilidades. Neste viés, a partir dos registros escritos das resoluções e dos momentos de problematizações e sínteses das ideias, analisamos se os alunos conseguiram desenvolver a capacidade de sistematização deste tipo de raciocínio, fator que o ajuda a estruturar o raciocínio lógico e generalizante, que são tipos de raciocínios extremamente importantes para a desenvolvimento da aprendizagem da Matemática.

Destacamos que os problemas combinatórios trabalhados foram retirados da pesquisa de Pessoa (2009) e tratam dos quatro tipos de problemas combinatórios (combinação, arranjo, permutação e produto cartesiano) que precisam ser abordados nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Todos foram explorados com objetivo de estimular o aluno a elaborar variados tipos de representações (árvore de possibilidades, listas das possibilidades) para a listagem dos agrupamentos. Além destes quatros problemas trabalhados, também exploramos os problemas propostos pelos alunos, por esta razão, modificamos nossa proposta inicial da pesquisa que consistia em trabalhar oito problemas combinatórios, dois de cada tipo, propostos apenas por nós.

O problema de combinação e o de produto cartesiano foram trabalhos com o intuito de ajudar os alunos a perceberem que a ordenação dos elementos nos agrupamentos não produz novos agrupamentos, e que a seleção e combinação dos elementos é feita entre um ou mais conjuntos de elementos.

O problema de arranjo e o de permutação foram trabalhos objetivando levar os alunos a perceber que a ordenação dos agrupamentos produz novos agrupamentos e que, diferentemente dos de produto cartesiano, os de arranjo e permutação podem selecionar e organizar elementos de somente um dado conjunto.

Os problemas propostos pelos estudantes também possuíam os mesmos significados (produto cartesiano, combinação, arranjo e permutação) dos problemas propostos por nós. Logo, o trabalho com estes problemas também seguiu os mesmos objetivos explicitados acima, sendo estendidos um pouco mais, por também tratarem do contraste das características dos invariantes entre problemas principais e os problemas propostos pelos alunos.

Além de todos esses aspectos, verificamos até que ponto a perspectiva metodológica da Resolução, Exploração e Proposição de Problemas auxilia na mobilização dos conhecimentos combinatórios.

Nos dois primeiros encontros, objetivamos trabalhar tipos de problemas combinatórios cuja ordem de escolha e combinação dos elementos não gera novas possibilidades de combinação. Buscamos também evidenciar a diferenciação entre o problema de combinação e o de produto cartesiano. Este último, envolve todos os elementos dos conjuntos iniciais, os problemas de combinação não necessariamente precisam envolver.

Objetivando contrastar as características dos problemas abordados nos primeiros encontros, trabalhamos os problemas de permutação e arranjo, respectivamente. Neles, a ordem e seleção dos elementos geram novas possibilidades de agrupamentos, o único aspecto que os diferenciam é que no primeiro todos os elementos do conjunto inicial fazem parte dos agrupamentos gerados, ao passo que no segundo isso não necessariamente precisa acontecer.

Uma vez que nos quatro primeiros encontros trabalhamos um tipo diferente de problema combinatório, no último, sentimos a necessidade de formalizar as ideias construídas ao longo dos encontros. Assim, no quinto encontro, buscamos contrastar as características dos diferentes tipos de problemas combinatórios.

Abaixo, no Quadro 5, apresentamos a sequência dos tipos de problemas trabalhados em cada encontro:

Quadro 5 – Tipos de problemas trabalhados por encontro

Encontros	Tipos de Problemas
1º Encontro	Combinação
2º Encontro	Produto Cartesiano
3 º Encontro	Permutação
4º Encontro	Arranjo
5º Encontro	Problemas combinatórios propostos pelos alunos/ Formalização das ideias

Fonte: Autoria própria

Os problemas são contextualizados em situações que podem fazer parte da vida dos alunos e, além disso, trabalham as ideias essenciais dos diferentes tipos de problemas. No Quadro 6, expomos os problemas na ordem em que foram trabalhados.

Quadro 6 - Ordem dos problemas trabalhados

ENCONTROS	PROBLEMAS
1º Encontro	**1.** [14]Três alunos (Mário, Raul e Júnior) participam de um concurso em que serão sorteadas duas bicicletas. Quantos resultados diferentes podem ser obtidos no concurso?

[14] Durante o trabalho com este problema, destacamos para os estudantes que cada um dos três alunos mencionados no enunciado do problema, poderiam ganhar somente uma bicicleta, dentre as duas sorteadas, e que além disso, as duas bicicletas seriam do mesmo modelo e cor. Precisamos enfatizar tais informações pois estas não foram apresentadas no enunciado do problema. Logo, os estudantes sem serem avisados,

2º Encontro	**2.** Para a festa de São João da escola tem 3 meninos (Pedro, Gabriel e João) e 4 meninas (Maria, Luíza, Clara e Beatriz) que querem dançar quadrilha. Se todos os meninos dançarem com todas as meninas, quantos pares diferentes poderão ser formados?
3 º Encontro	**3.** De quantas formas diferentes poderei arrumar as fotos de meu irmão, meu pai e minha mãe na estante, de modo que elas fiquem lado a lado?
4º Encontro	**4.** Para representante de turma da sala de aula se candidataram 3 pessoas (Joana, Mário e Vitória). De quantas maneiras diferentes poderão ser escolhidos o representante e o vice representante?

Fonte: Adaptado de Pessoa (2009)

O interesse maior em compreender o processo de geração dos dados e resultados da pesquisa a classifica como sendo um estudo de cunho qualitativo, tendo em vista que "os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente os resultados" (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p.49).

Nesta perspectiva, a fim de compreender a produção dos dados e resultados gerados, na presente pesquisa descrevemos e analisamos detalhadamente os dados coletados – por meio de observações, notas de campo, registro escrito e gravações de áudio –, fazendo inferências e interpretações, almejando concretizar resultados concisos a respeito dos encontros realizados. Esse planejamento metodológico está fundamentado pelas considerações de Bogdan e Biklen (1994, p.48), posto que a avaliação qualitativa é descritiva, sendo os dados recolhidos "[...] em forma de palavras ou imagens e não números. [...] Os dados incluem transcrições de entrevistas, notas de campo, fotografias, vídeos, documentos pessoais, memorandos e outros registros".

Os instrumentos para recolha dos dados e os métodos para sua utilização são provenientes das contribuições de Bogdan e Biklen (1994) e Olsen (2015). Nesse sentido, selecionamos os seguintes instrumentos para a coleta dos dados gerados:

a. <u>Registros Escritos das resoluções:</u> Através do registro escrito, analisamos as estratégias de resolução elaboradas pelos alunos durante os encontros. Averiguamos quais foram os procedimentos e combinações elaboradas, com o intuito de compreender os raciocínios combinatórios dos alunos envolvidos;

b. <u>Gravações de áudio:</u> As gravações de áudio foram utilizadas para auxiliar na avaliação dos argumentos apresentados pelos alunos. Através delas,

---

poderiam considerar as duas bicicletas em diferentes modelos ou cores o que tornaria o problema 1 em um do tipo de arranjo, ao invés de um de combinação.

analisamos os raciocínios empregados nos argumentos e resoluções apresentadas por eles;

c. Notas de campo: A elaboração das notas de campo teve como intuito suplementar os demais métodos de recolha de dados, visto que alguns aspectos, a exemplo da expressão facial dos participantes, não podem ser capturados com o uso do gravador de áudio.

Confiamos que o planejamento metodológico desta pesquisa nos direcionou a caminhos frutíferos de produção e recolha dos dados, o que nos possibilitou realizar uma análise consistente dos mesmos. No próximo capítulo, apresentamos a descrição e analises dos dados recolhidos durante a pesquisa de campo.

6 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DE UMA EXPERIÊNCIA DIDÁTICA SOBRE A PERSPECTIVA DA RESOLUÇÃO, EXPLORAÇÃO E PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS

No presente capítulo, relatamos detalhadamente os principais eventos ocorridos durante os encontros realizados ao longo da pesquisa de campo. Apresentamos descrições e análises críticas de alguns diálogos e registros escritos de resoluções feitas pelos alunos durante o processo de resolução, exploração e proposição de problemas combinatórios.

Os dados foram analisados de maneira qualitativa, tendo como objetivo analisar através dos registros escritos e diálogos a mobilização dos conhecimentos combinatórios, as principais estratégias de resolução e os argumentos apresentados pelos alunos ao longo do estudo.

Durante a descrição e análise dos encontros denominamos as oito duplas formadas como: D1; D2; D3; D4; D5; D6; D7 e D8. E os alunos, membros das duplas, chamados de A1, A2, A2, A3 etc. Ao longo da descrição, também pontuamos alguns Comentários da Pesquisadora (C.P), os quais consistem em análises críticas pontuais dos dados descritos. Apresentamos também algumas transcrições de textos escritos pelas duplas apresentados em seus registros escritos. Ressaltamos que, tais transcritos estão exatamente de acordo com o que foi apresentado pelos alunos, assim, há trechos do texto que apresentam diversos erros gramaticais, em razão da dificuldade de escrita e leitura apresentada por alguns alunos no nível (anos iniciais do Ensino Fundamental) de ensino pesquisado.

É importante esclarecer que a presente proposta de ensino foi elaborada em conjunto com a mestranda e o orientador, que discutiram e delimitaram cada etapa a ser realizada durante os encontros. Todavia, o trabalho efetivo em sala de aula ficou a cargo apenas da mestranda, a qual aparecerá nos diálogos nomeada como Pesquisadora (PP). Assim, ao decorrer do texto, utilizaremos a primeira pessoa do plural, por consideramos que todas as ações realizadas apoiaram-se nas discussões e crenças da mestranda e do orientador.

– Primeiros contatos

Iniciamos o trabalho de campo a partir do contato com a direção da escola e a professora titular da turma. Para cada uma dessas autoridades, disponibilizamos uma cópia de nosso projeto de pesquisa, em que apresentamos algumas referências teóricas que fundamentaram nossa prática pedagógica, bem como o delineamento da dinâmica que pretendíamos desenvolver durante a realização das atividades.

Na data combinada, comparecemos à escola e fomos apresentadas aos alunos pela professora titular da turma que, em um breve discurso, explicou aos alunos o motivo da nossa presença. Na oportunidade, a pesquisadora se apresentou à turma, enfatizando que sua presença em sala de aula decorria de uma pesquisa de mestrado, na qual tinha como um dos objetivos aprender com eles e buscar maneiras eficazes de ensinar Matemática. De imediato, os alunos demonstraram interesse em participar e ficaram curiosos com as possíveis atividades que seriam desenvolvidas.

6.1 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DE UM TRABALHO REALIZADO SOBRE UM PROBLEMA DE COMBINAÇÃO – ENCONTRO 01

(Data 12.11.2018)

Conteúdos e ideias trabalhadas: problema combinatório do tipo combinação.

Objetivo:

- Compreender que, neste tipo de problema combinatório, a ordenação dos elementos não produz novos agrupamentos;
- Perceber que a seleção e combinação dos elementos é feita entre dois ou mais elementos de um mesmo conjunto;
- Analisar as possíveis contribuições da perspectiva metodológica da Resolução, Exploração e Proposição de Problemas para o ensino e aprendizagem da Combinatória.

Neste encontro, trabalhamos o Problema 1:

Três alunos (Mário, Raul e Júnior) participam de um concurso em que serão sorteadas duas bicicletas. Quantos resultados diferentes podem ser obtidos no concurso?

Iniciamos o primeiro encontro elucidando algumas ações importantes que deveriam, se possível, ser respeitadas e realizadas. Estas foram:

- Ao fim de cada encontro, os problemas e os registros escritos deveriam ser entregues à pesquisadora;
- Ao longo do processo de resolução, exploração e proposição, as resoluções iniciais e originais dos problemas deveriam ser preservadas, estando essas corretas ou não;
- A frequência na sala de aula constante durante os dias dos encontros precisaria ser respeitada;
- A participação e envolvimento nas discussões deveriam, sempre que possível, ser valorizadas e desempenhadas ao longo de todo o estudo;
- Os alunos precisariam, primeiramente, ler atentamente o problema com o intuito de identificar seus dados e o que se pedia;
- Os alunos poderiam solicitar a ajuda da pesquisadora para esclarecer dúvidas sobre o problema a qualquer momento;
- Todos os registros deveriam ser escritos no material disponibilizado pela pesquisadora.

Uma vez discutidas as ações, elucidamos para os alunos como a dinâmica dos encontros seria desenvolvida e entregamos para cada dupla uma cópia do problema proposto. De maneira sucinta, explicamos que, inicialmente, entregaríamos alguns problemas matemáticos, os quais deveriam resolver, em duplas, da maneira que melhor compreendessem. A princípio, observamos que alguns alunos estavam confusos quanto à metodologia adotada. Após a leitura do problema em duplas, a grande maioria ficou em silêncio, esperando a pesquisadora explicar/evidenciar o que o problema solicitava e que dados apresentava.

> C.P: Notamos que os alunos no início do estudo ainda não estavam habituados a realizar um trabalho de reflexão sobre o trabalho como o apontado por Andrade (1998). Entendemos que isso aconteceu por ainda enfrentarem dificuldades de leitura e interpretação do enunciado do problema, e também, pelo motivo de estarem mais habituados ao método de ensino tradicional, em que primeiro o conteúdo é apresentado de maneira formal para que depois exercícios de fixação de problemas sejam apenas resolvidos, sem necessariamente serem explorados.

A partir das dificuldades de leitura e interpretação observadas, e com o intuito de facilitar a compreensão do enunciado do problema, a pesquisadora leu o problema em voz alta para todos os alunos. Mesmo fazendo uso deste artifício, o silêncio ainda continuou a dominar a turma. Então, buscando estimular a troca de ideias, bem como analisar as maneiras de codificação e descodificação elaboradas pelos alunos, a pesquisadora direcionou-se a cada uma das duplas. Na oportunidade, leu novamente o problema e discutiu como poderiam melhor representar o problema proposto. No Quadro 7, dispomos um dos diálogos que ocorreram neste momento.

Quadro 7 - Diálogo entre a pesquisadora e o a dupla D2

PP: Então meninos conseguiram compreender o problema?
D2 (Aluno 4): Não! É muito difícil.
PP: Vocês querem que eu leia o problema novamente?
D2 (Aluno 3): Sim!
(PP leu novamente o problema)
PP: E agora meninos, facilitou mais um pouco?

> C.P: O silêncio entre os componentes da dupla D2 permaneceu. Então a pesquisadora deu mais um tempo para eles refletirem um pouco mais sobre o problema.

PP: Façam o seguinte, leiam com um pouco mais de atenção o problema, daqui a um tempo eu volto aqui.

Fonte: Acervo da pesquisadora

Durante todo o estudo, observamos que nenhum dos alunos conseguiu codificar os problemas por meio de texto escrito, apenas por desenho. A maioria inicialmente representava a situação imposta pelo problema através de um desenho para depois procurar um meio para representar as possibilidades. Como foi o caso da dupla D1, explicitado nos Quadros 8 e 9.

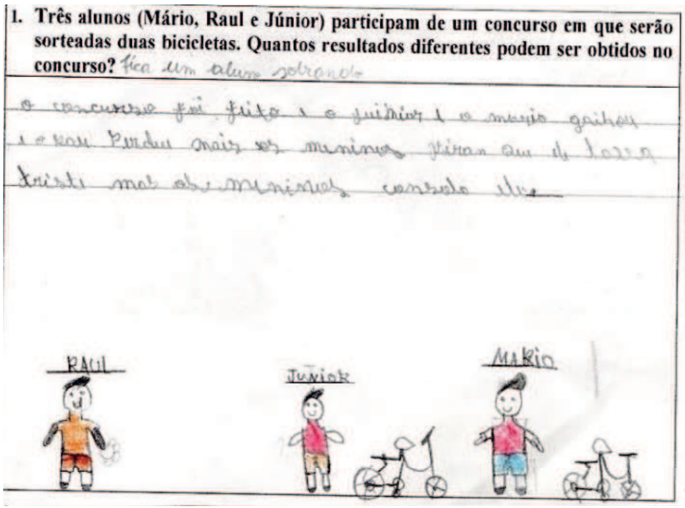
Quadro 8 - Diálogo entre a pesquisadora e a dupla D1

PP: Meninas, vocês conseguiram compreender o problema?
D1 (Aluna 2): Mais ou menos.
PP: O que vocês não conseguiram compreender?
D1 (Aluna 1): Estamos desenhando os alunos e a escola para poder entender melhor.
PP: Vocês acham que assim fica mais fácil de entender o que o problema pede?
D1 (Aluna 1): Sim, porque assim a gente não precisa ficar lendo toda hora.
PP: Ah...entendi.

Fonte: Acervo da pesquisadora

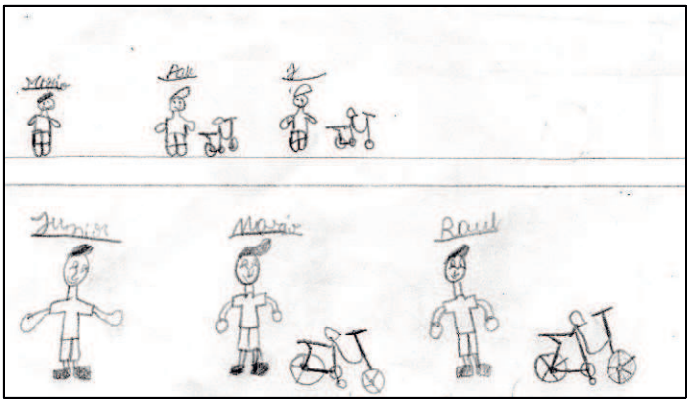
Quadro 9 - Resolução da dupla D1

Figura 1- Primeira parte da resolução da dupla D1



Fonte: Acervo da pesquisadora

Figura 2- Segunda parte da resolução da dupla D1



Fonte: Acervo da pesquisadora

<u>Transcrição do texto da figura 1</u>: o concurso foi feito e o Junior e o Mário ganhou e o sou perdeu mais os meninos viram que ele tava triste mas os meninos consolo ele.

Como a dupla D2 não apresentou nenhuma colocação durante o tempo que a pesquisadora circulou nas demais duplas para averiguar as demais estratégias de resolução utilizadas, a pesquisadora retornou para a dupla (Ver Quadro 10).

Quadro 10 - Continuação do diálogo entre a pesquisadora e a dupla D2

PP: E então meninos, conseguiram compreender melhor o problema? D2 (Aluno 3): Ainda não. PP: Então vamos "fazer de conta" que nós vamos realizar um sorteio de duas bicicletas entre vocês três: você (aluno A3), ele (Aluno A4) e aquele seu colega (Aluno A7, componente da dupla D4). Como vocês poderiam organizar as possibilidades do sorteio? D2 (Aluno A4): No ímpar ou par.

PP: Existe outra maneira?   C.P: A dupla permaneceu em silêncio por alguns minutos.   PP: Os três irão ganhar as bicicletas?   D2 (Aluno 3): Não, somente dois.

Fonte: Acervo da pesquisadora

> C.P: Podemos perceber que a partir da codificação apresentada pela a professora os alunos começaram a compreender melhor o problema. Inicialmente apontaram como estratégia para a resolução do problema a aleatoriedade presente no jogo impar ou par, todavia, ao serem ainda mais instigados pelos questionamentos elencaram a quantidade de elementos nos agrupamentos a serem formados.

Com o intuito de explorar um pouco mais a capacidade dos alunos de enumerar as possibilidades de combinação, a pesquisadora deu continuidade à conversação, conforme o Quadro 11.

Quadro 11 - Continuação do diálogo entre a pesquisadora e o a dupla D2

PP: Porque apenas dois irão ganhar?   D2 (Aluno 3): Porque só tem duas bicicletas.   PP: Então vamos pensar na primeira possibilidade do sorteio. Vamos supor que temos aqui uma urna onde iremos sortear dois de vocês para ganhar a bicicleta. Que possibilidade poderia ser essa?   C.P: Objetivando apresentar o problema de uma maneira mais conveniente para a compreensão dos alunos, a pesquisadora o codificou de uma maneira mais simples, aproximando o enunciado a uma linguagem menos formal que a apresentada no material entregue a dupla.   D2 (Aluno 3): Dois ganha e um fica sem.   PP: Então poderia ser quem?   D2 (Aluno 3): Poderia ser eu (Aluno 3) e ele (indicando aluno 4).   PP: Existe outra possibilidade?   D2 (Aluno 4): Sim!   PP: Qual?   D2 (Aluno 3): Poderia ser ao contrário. Poderia ser ele (indicando o aluno 4) e depois eu (Aluno 3).   PP: Isso não seria a mesma coisa?   D2 (ambos): Sim! (Risos)   PP: Porque sim?   D2 (Aluno 4): Porque sim! (Risos)   C.P: Neste momento a pesquisadora ainda pensou em discutir sobre um dos invariantes característicos desse tipo de problema (não ordenação), no entanto, como o objetivo aqui era ajudar os alunos interpretar o problema inicial, ela decidiu deixar essa discussão para um outro momento.   D2 (Aluno 3): Então poderia ser eu (Aluno 3) e ele (indicando o aluno 7)?   PP: Sim!   PP: Existe outra possibilidade ainda?   Aluno 4 sinalizou com a cabeça afirmando que sim e indicou com a mão a outra possibilidade como sendo ele (Aluno 4) e o aluno 7 da outra dupla.   PP: Isso mesmo!   PP: Existe outra possibilidade ainda?

D2 (ambos): Não!
PP: Então será que vocês conseguem representar essas possibilidades que vocês que apontaram de maneira escrita?
D2 (Aluno 3): Vamos tentar.
PP: Certo. Então irei deixar vocês à vontade, daqui a um tempinho eu volto aqui. Ok?!

Fonte: Acervo da pesquisadora

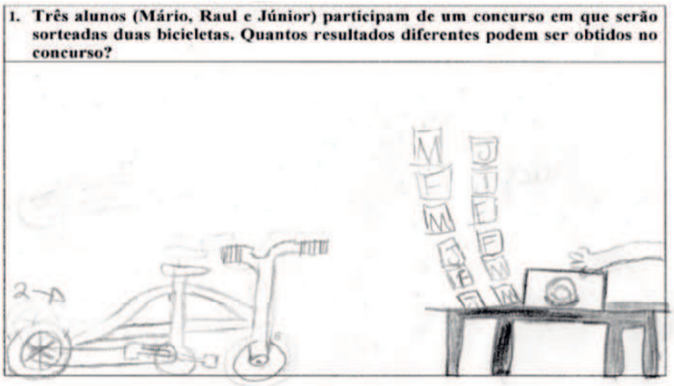
> C.P: A partir do diálogo descrito acima, podemos observar a dificuldade dos alunos em codificar o problema de uma maneira mais conveniente para a sua compreensão. Acreditamos que a dificuldade em ler corretamente o enunciado prejudicou em sua interpretação e que, além disso, o fato de não estarem habituados a realizar um trabalho de reflexão sobre o problema que lhe é proposto é um dos fatores que dificultaram o processo de codificação, como também de descodificação do problema. Podemos notar também que à medida que a pesquisadora apresentou uma nova versão do mesmo problema, ou seja, apresentou uma codificação diferente da inicial, os alunos passam a demonstrar uma compreensão do seu significado, conseguindo, até mesmo, descodificá-lo a partir da condução dos questionamentos colocados pela pesquisadora.

> C.P: Outro ponto que podemos destacar é que, até este momento, os alunos ainda não compreendiam com nitidez o motivo pelo qual a ordem na seleção dos dados não importava. Acreditamos que a afirmação apresentada pela dupla neste diálogo, em que afirmam que indiretamente a ordem não interfere na quantidade de possibilidades, foi espontânea, uma vez que não apresentaram nenhuma reflexão crítica sobre ela, não explicaram o motivo pelo qual o invariante de ordem não importava neste tipo de situação imposta pelo problema.

Embora os alunos tenham elencado da maneira correta todas as possibilidades e combinações possíveis no problema durante o diálogo com a pesquisadora, no registro escrito eles as representaram equivocadamente. Representando a resolução através de um desenho, os alunos listaram as possibilidades do sorteio utilizando as iniciais dos nomes dos alunos, considerando a ordem. Essa mesma resolução foi representada também como texto escrito, conforme se verifica no Quadro 12.

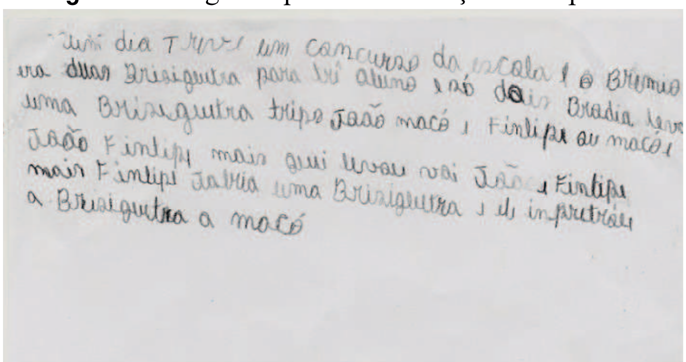
Quadro 12 - Resolução da dupla D2

Figura 3 - Primeira parte da resolução da dupla D2



Fonte: Acervo da pesquisadora

Figura 4 – Segunda parte da resolução da dupla D2



Fonte: Acervo da pesquisadora

> <u>Transcrição do texto da figura 4</u>: um dia treve um concurso da escola e o Bruno era duas brisigeuta para três aluno e só dois brandia leva uma brisiguetra tripo João macó e Finlipe ou macó e João Fintipe mais qui levou vai Jõao e Fintipe mais Fintipe jatria uma bisiguetra e ele inpretou a brisiguetra a macó.
> C.P: A representação através do desenho, assim como em texto escrito, evidencia que os alunos representaram as possibilidades de maneira equivocada. Ao enumerarem as possibilidades, levaram em consideração a ordem dos elementos. Entendemos que este fato demonstra que eles apresentam uma maior facilidade de representar as possibilidades verbalmente do que por meio da escrita.
>
> C.P: A partir dos erros de escrita observados no texto que representa a resolução do problema 1 (Figura 4), confiamos que a dificuldade de leitura e escrita, de fato, pode ter sido um dos fatores que prejudicou no momento de interpretação e codificação do problema.

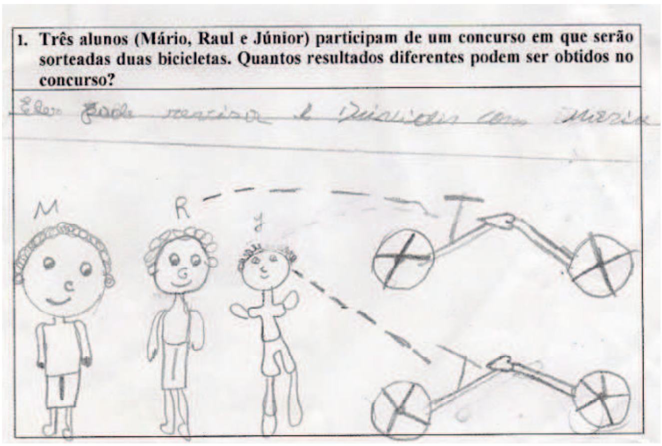
Diferentemente da dupla D2, que elencou todas as possibilidades durante a conversação representando-as de maneira equivocada no registro escrito, a dupla D6 não conseguiu enumerar todas as possibilidades, mas conseguiram representar no desenho exatamente todas as possibilidades elencadas por eles durante o diálogo com a pesquisadora.

Quadro 13 - Diálogo entre a pesquisadora e a dupla D6

PP: Pessoal vocês conseguiram compreender o problema? D5 (Aluno A10): Sim, mas ainda não terminamos de resolver. PP: Está faltando o quê? D5 (Aluna A9): Nada! D5 (Aluno A10): A gente está terminando de pintar o desenho. PP: Vocês podem me explicar como resolveram? (A dupla ficou em silêncio por um pequeno intervalo de tempo) PP: Quantos resultados diferentes de sorteio vocês encontraram? D5 (Aluna A9): Um pode não ficar com a bicicleta. PP: Então como pode ficar as possibilidades? D5 (Aluna A9): O Raul ganhar uma e o Júnior ganhar a outro e o Mário não ganhar, e não ficar triste. PP: Teria outra possibilidade? D5 (Aluna A9): Acho que não. Só essa mesmo.

Fonte: Acervo da pesquisadora

Figura 5 – Resolução da dupla D6



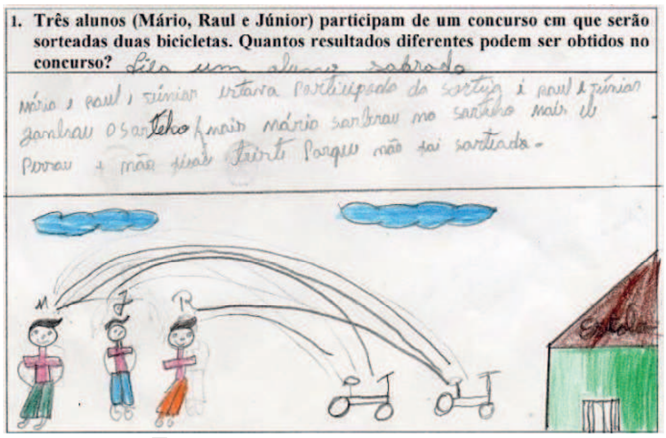
Fonte: Acervo da pesquisadora

Transcrição do texto da figura 5: Eles pode revisa e dividir com Mario.

O mesmo aconteceu com as duplas D5, D7 e D8 (Ver Quadro 14). A referidas duplas conseguiram apontar no diálogo o quantitativo de agrupamentos correto, porém no registro escrito apresentaram apenas alguns destes. Apresentamos no quadro 14, os registros escritos das resoluções elaboradas pelas respectivas duplas.

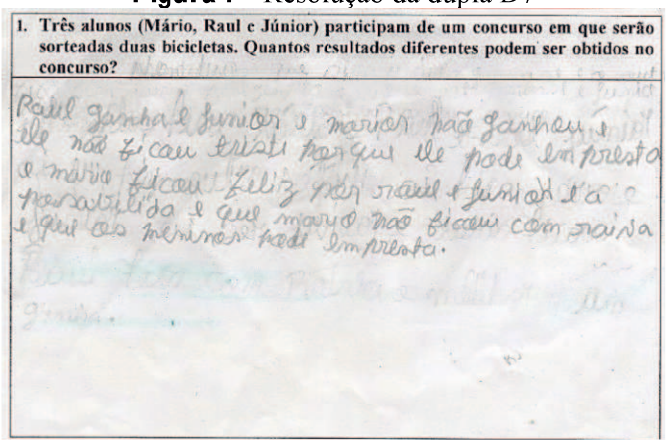
Quadro 14 - Resoluções do problema 1 incorretas

Figura 6 - Resolução da dupla D5



Fonte: Acervo da pesquisadora

Figura 7 - Resolução da dupla D7

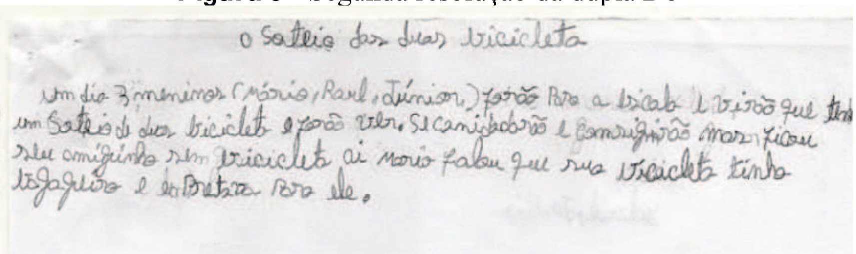


Fonte: Acervo da pesquisadora

Figura 8 - Primeira resolução da dupla D8

Fonte: Acervo da pesquisadora

Figura 9 - Segunda resolução da dupla D8



Fonte: Acervo da pesquisadora

> Transcrição do texto da figura 6: Mário e Raul e Júnior estava participando do sorteio e Raul e Júnior ganhou o sortilho, mais Mário sobrou no sortilho, mas ele perrou e não ficou triste porque não foi sorteado.
> Transcrição do texto da figura 7: Raul ganha e Júnior e Mário não ganhou e ele não ficou triste porque ele pode empresta e Mário ficou feliz por Raul e Junior e a possibilidade é que Mário não ficou com raiva e que os meninos podem emprestar.
> Transcrição do texto da figura 8: Mário e Raul ficam com uma bicicleta e Júnior fica com a outra.
> Transcrição do texto da figura 9: Um dia 3 meninos (Mário, Raul e Júnior) forão para a escola e virão que tem um sorteio de duas bicicleta e forão ver. Se canidadarão e conseguirão mais ficou seu amiguinho sem bicicleta, aí Mário falou que sua bicicleta tinha bagageiro e emprestava para ele.

Esse fato nos faz compreender que alguns alunos apresentam dificuldades em elencar todas as possibilidades de combinações possíveis, enquanto outros demonstram ter dificuldade de representar todas essas possibilidades no registro escrito. Representar possibilidades de combinação de maneira escrita exige que o aluno, muitas vezes, sistematize e organize seu raciocínio para não deixar "passar em branco" nenhuma possibilidade. É importante que os alunos vivenciem isso com mais frequência em sala de aula, pois essa capacidade de sistematização do raciocínio para elencar todas as possibilidades, na maioria das vezes, ainda não tem sido desenvolvida nos alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental. De acordo com o estudo de Pessoa (2009), o motivo pelos quais os alunos não conseguem, em algumas situações, elencar todas as possibilidades de agrupamento é o fato de ainda estarem nessa faixa etária de ensino desenvolvendo um raciocínio combinatório sistemático.

Observamos também que, neste primeiro encontro para resolverem o problema proposto a maioria das crianças apoiaram-se muito em suas experiências reais. Na segunda resolução da dupla D8 (figura 9), como estratégia de resolução os componentes da dupla sugeriam colocar um bagageiro na bicicleta aspirando dividir a mesma com o terceiro aluno que não a ganharia.

Durante o processo de descodificação do problema, apenas três duplas (D1, D3 e D4) conseguiram apresentar nos diálogos e representar no registro escrito todas as possibilidades de combinação. Todas utilizaram como estratégias de resolução desenhos e textos escritos.

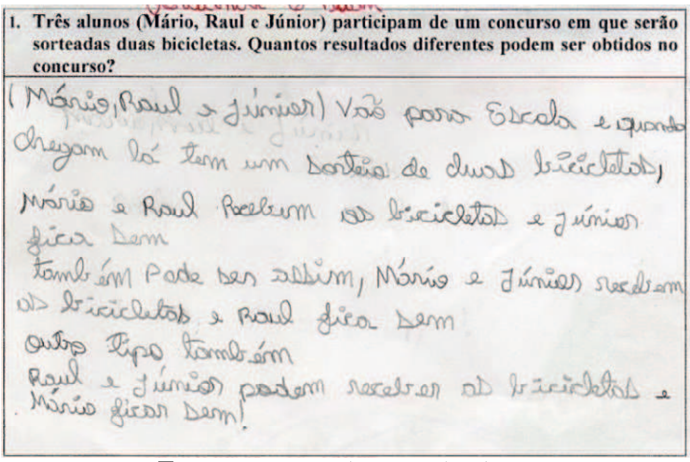
Quadro 15 - Diálogo entre a dupla D4 e a pesquisadora

PP: Pensando no problema, como vocês poderiam escolher as pessoas que iriam ganhar essas duas bicicletas?
D4 (Aluno A7): Eles dois ganhavam (indicando o aluno A8 membro da dupla D4 e o aluno A4, membro da dupla D2, que estava próxima), aí eu ficava sem.
PP: Existe outra possibilidade?
D4 (Aluno A7): Existe. Eu ganhar e o aluno A8 ganhar também.
PP: E o aluno A4?
D4 (Aluno A7): Ele não ganhava não.
PP: Existe outra?
D4 (Aluno A7): Sim. Ele (indicando o aluno A8 membro da dupla D2) e eu ganhar e o aluno A8 não.
PP: Existe mais outra?
D4 (Aluno A7): Não.

Fonte: Acervo da pesquisadora

Quadro 16 - Resoluções do problema 1 corretas

Figura 10 - Primeira resolução da dupla D3


1. Três alunos (Mário, Raul e Júnior) participam de um concurso em que serão sorteadas duas bicicletas. Quantos resultados diferentes podem ser obtidos no concurso?

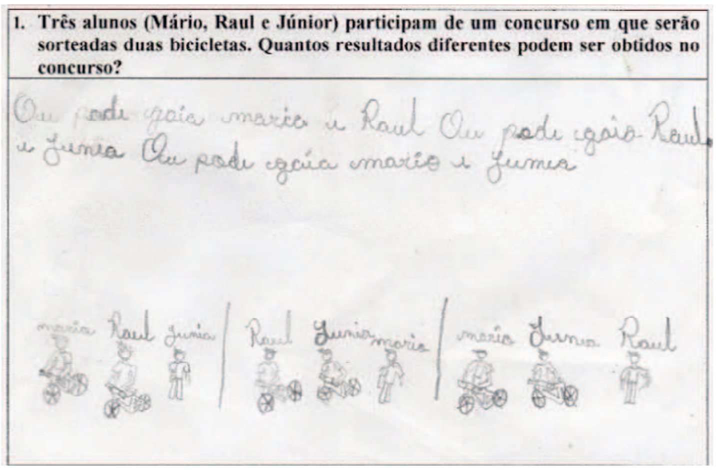
(Mário, Raul e Júnior) Vão para Escola e quando chegam lá tem um sorteio de duas bicicletas, Mário e Raul Recebem as bicicletas e Júnior fica sem
também Pode ser assim, Mário e Júnior recebem as bicicletas e Raul fica sem
outro tipo também
Raul e Júnior podem receber as bicicletas e Mário ficar sem!

Fonte: Acervo da pesquisadora

Figura 11 - Segunda resolução da dupla D3

Fonte: Acervo da pesquisadora

Figura 12 - Resolução da dupla D4



1. Três alunos (Mário, Raul e Júnior) participam de um concurso em que serão sorteadas duas bicicletas. Quantos resultados diferentes podem ser obtidos no concurso?

Ou pode gaia mario e Raul Ou pode gaia Raul e Junia Ou pode gaia mario e Junia

Fonte: Acervo da pesquisadora

Transcrição do texto da figura 10: (Mário, Raul e Júnior) Vão para a escola e quando chegam lá tem um sorteio de duas bicicletas, Mário e Raul recebem a bicicleta e Júnior fica sem. Também pode ser assim, Mário e Júnior recebem as bicicletas e Raul fica sem. Outro tipo também Raul e Júnior podem receber as bicicletas e Mário fica sem!
Transcrição do texto da figura 12: Ou pode gaia Mário e Raul. Ou pode gaia Raul e Júnior. Ou pode gaia Mário e Júnior.

Objetivando explorar ainda mais o problema, a professora apresentou um problema secundário para a dupla D4.

Quadro 17 - Continuação do diálogo entre a pesquisadora a dupla D4

PP: Se aluno A8 fosse o primeiro a ser sorteado e você fosse o segundo, essa seria outra possibilidade de sorteio?
D4 (Aluno 7): Acho que sim.
PP: Porque?
D4 (Aluno 7): Porque ia mudar.
PP: Mudar o quê?

D4 (Aluno 7): O jeito de quem ia ganhar primeiro.

Fonte: Acervo da pesquisadora

> C.P: Notamos que os alunos da dupla D4 conseguiram elencar todas as possibilidades de agrupamento. Todavia, mesmo com a exploração no momento de descodificação, não conseguiram identificar um dos invariantes que caracterizam problemas do tipo de combinação. Posto que, em problemas de combinação, a ordem dos elementos que constituem os agrupamentos não gera novas possibilidades de agrupamentos.

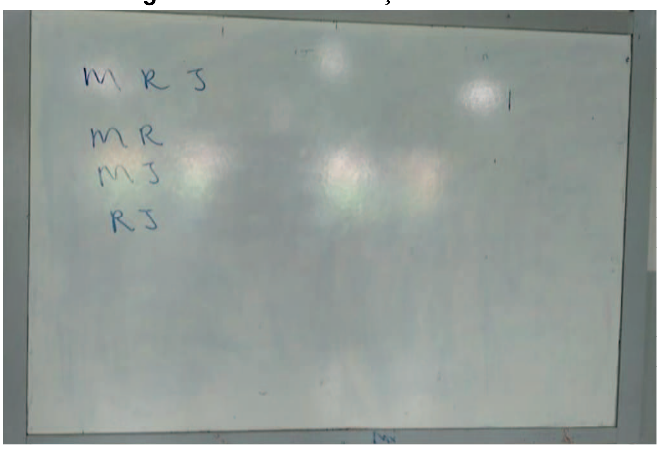
No momento da análise crítica das resoluções, convidamos para irem ao quadro representantes das duplas que resolveram o problema de maneiras diferentes (Ver Figura 13). Na ocasião, discutimos resoluções corretas e incorretas.

Figura 13 – Socialização das estratégias de resolução

Fonte: Acervo da pesquisadora

Objetivando ajudar os alunos a sistematizar seus raciocínios combinatórios, no momento de formalização do conteúdo, apresentamos todas as possibilidades de maneira sistematizada, utilizando como recurso a listagem de todas as possibilidades. Conforme a Figura 14.

Figura 14 - Formalização das ideias



Fonte: Acervo da pesquisadora

É importante destacar que a etapa de exploração e proposição dos problemas aconteceu de maneira simultânea, não somente no momento de descodificação dos problemas, como também nas demais etapas da dinâmica apresentado no capítulo anterior. Durante todo o estudo, sempre que possível, procuramos estimular um trabalho reflexivo dos alunos sobre os problemas propostos. Buscamos incitar a reflexão sobre as explorações provocadas pela pesquisadora, bem como sobre suas estratégias de resolução.

Confiamos que a exploração de problemas foi essencial para que os alunos conseguissem descodificar o problema realizando uma análise crítica sobre o trabalho de reflexão. Os questionamentos pontuados pela pesquisadora durante o processo de exploração ajudaram os alunos a atribuírem um significado para a sua resolução e para a resolução dos colegas.

Com relação à proposição de problemas, no primeiro encontro nenhuma dupla conseguiu propor novos problemas tomando como base o problema principal apresentado pela professora. Entendemos a razão para esse fato acontecer possa ter sido a dificuldade em se habituarem com uma nova perspectiva metodológica de ensino. No primeiro encontro, os alunos tiveram a oportunidade de vivenciar pela primeira vez uma proposta de ensino seguindo essa abordagem, isso para eles incialmente foi encarado como o desafio.

6.2 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DE UM TRABALHO REALIZADO SOBRE UM PROBLEMA DE PRODUTO CARTESIANO – ENCONTRO 02

(Data 13.11.2018)

Conteúdos e ideias trabalhadas: problema combinatório do tipo produto cartesiano.

Objetivo:

- Observar que a ordenação dos elementos não produz novos agrupamentos;
- Perceber que a seleção e combinação dos elementos é feita a partir da combinação de elementos de dois ou mais conjuntos distintos;
- Observar a diferença entre os invariantes que caracterizam o problema trabalhado na aula anterior com a presente;

- Analisar as possíveis contribuições da perspectiva metodológica da Resolução, Exploração e Proposição de Problemas para o ensino e aprendizagem da Combinatória.

Neste encontro trabalhamos o Problema 2:

Para a festa de São João da escola, tem 3 meninos (Pedro, Gabriel e João) e 4 meninas (Maria, Luíza, Clara e Beatriz) que querem dançar quadrilha. Se todos os meninos dançarem com todas as meninas, quantos pares diferentes poderão ser formados?

Com o objetivo de mobilizar as ideias construídas na aula anterior, para que, futuramente, no momento de exploração e formalização das ideias, confrontá-las com as construídas na presente aula, iniciamos o encontro 2 relembrando os resultados encontrados no encontro 1. Neste momento, em conjunto, algumas das principais estratégias de resoluções e soluções foram socializadas novamente.

Dando continuidade à aula, entregamos para cada dupla uma cópia do problema 2 que seria trabalhado. Em seguida, solicitamos que fizessem sozinhos uma leitura inicial da situação proposta pelo problema e reservamos um tempo para que o resolvessem. Deixamos os alunos trabalhando nas duplas, circulando de vez em quando na sala de aula para acompanhar o trabalho realizado pelas duplas.

Assim como na aula anterior, observamos uma dificuldade na compreensão e interpretação do enunciado do problema. Diante disso, para algumas duplas, lemos novamente o problema, dando um tempo para que realizassem um trabalho reflexivo sobre o problema, de modo que conseguissem comprovar a validade de suas conjecturas a partir do processo de resolução e exploração dos problemas.

A dupla D3 foi a primeira que apresentou um posicionamento frente ao problema. Em uma conversa com a pesquisadora, a aluna A5 elucidou como compreendeu o problema e apresentou uma possível estratégia de como resolvê-lo:

Quadro 18 - Diálogo entre a pesquisadora e a dupla D3

PP: Como vocês compreenderam o problema? Dupla D3 (Aluna A5): Professora a gente entendeu bem assim: Maria poderia dançar com um desses meninos, Luíza também, e Clara, e Beatriz fica fora. Ou, Maria, Luíza e Clara também ficar fora dessa quadrilha. Daí a gente vai responder isso com texto. PP: Vocês acham melhor resolver assim?

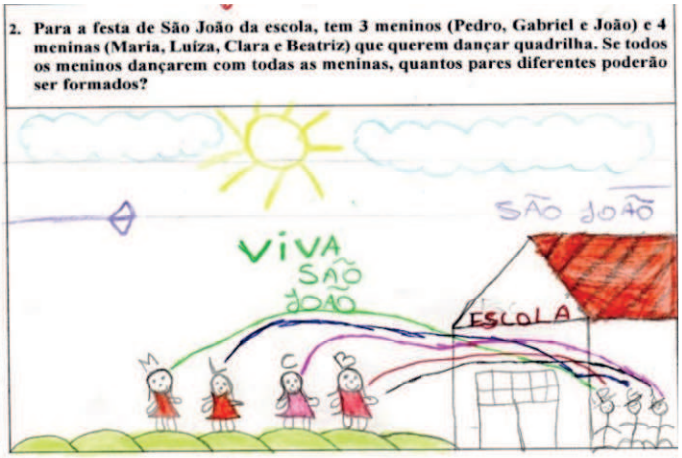
D3 (Aluno A6): Sim.
PP: Porque?
D3 (Aluna A5): É mais fácil professora.

Fonte: Acervo da pesquisadora

> C.P: Analisamos que a aluna A5 apresentou simultaneamente uma maneira de codificação e descodificação do problema. Indiretamente, ela descreve o que o problema pede, mas também propõe uma maneira de como resolvê-lo. É possível perceber que, neste momento inicial, a dupla não realizou uma análise crítica aprofundada sobre o problema, as alunas apresentaram apenas algumas possibilidades de agrupamentos, aqui, o processo de descodificação encontrava-se ainda no início. Articulando com as ideias de Vergnaud (1991) e Andrade (1998), entendemos que neste momento o processo de descodificação do problema está apoiado em conjecturas que ainda não foram comprovadas através de uma análise crítica.

É importante destacar que, mesmo com a dupla apresentando como maneira de resolução o texto escrito, no momento em que foram registrar a resolução, a representaram por meio de desenho.

Figura 15 - Resolução da dupla D3



Fonte: Acervo da pesquisadora

> C.P: Entendemos que a mudança na maneira de representar o problema pode ser justificada pela a dificuldade de leitura e escrita demonstrada pelos alunos. Mesmo com a mudança de estratégia de resolução a dupla não conseguiu elencar todas as possibilidades de agrupamentos.

Dando continuidade ao trabalho, continuamos circulando na sala de aula para acompanhar o desenvolvimento das questões apresentadas pelos alunos.

Observamos que, nesta aula, alguns já haviam se acostumado um pouco mais com a metodologia de ensino, entretanto, a colocação de questionamentos ainda era algo escasso entre eles. Os questionamentos somente eram apresentados por eles quando a pesquisadora estimulava essa ação.

Almejando analisar as maneiras de codificação apresentadas pelos alunos, durante todo o estudo, acompanhamos cada dupla, questionando sempre como haviam compreendido o problema. Com estes acompanhamentos, podemos registrar uma interessante interpretação acerca do problema 2 apresentada pela a dupla D5.

Quadro 19 - Diálogo entre a pesquisadora e a dupla D5

PP: Vocês conseguiram compreender o problema?
D5 (Aluna A9): Sim! Mais ou menos.
PP: Vocês conseguem me explicar o que conseguiram compreender até agora?
D5 (Aluna A9): A gente vai tentar fazer como o da outra aula.
PP: Então como ficaria?
D5 (Aluna A9): Tipo igual ao outro, vai ficar sobrando uma menina. No outro ficava sobrando um menino.
PP: Entendi. Então vou deixar vocês resolverem e eu volto aqui, daqui a pouco para a gente conversar mais um pouquinho está bem.
D5 (ambos): Tá bem.

> C.P: Através do diálogo, fica explicito que os alunos da dupla apoiaram inicialmente suas ações para resolver o problema no repertório de esquemas de resolução construídos na aula anterior. Essa ação também foi adotada pelas outras duplas, todas, inicialmente procuraram resolver o problema 2 da mesma maneira que o problema 1 foi resolvido. Quando os alunos notaram que o repertório de esquemas utilizados anteriormente, em partes, demonstrava ser ineficaz para a resolução do problema atual, foram provocados a modificar seu raciocínio, uma vez que os referidos problemas possuem diferentes invariantes. Assim, as estratégias de resolução apresentadas foram bem similares (a grande maioria utilizou como maneira de representação desenhos e textos), no entanto o raciocínio empregado para a sua resolução foi diferente.
>
> Indo de encontro com as ideias de Vergnaud (1990), compreendemos que essa ação pode ter sido provocada pelas pequenas similaridades dos invariantes do problema de combinação e produto cartesiano. De acordo com o autor, isso pode acontecer quando as crianças são confrontadas por situações em que as características são bem semelhantes a anteriores já dominadas. Assim como nos problemas do tipo de combinação, nos de produto cartesiano, a ordem dos elementos não gera novos agrupamentos, entretanto, neste último os agrupamentos se constituem a partir da combinação de elementos de dois ou mais conjuntos.

Apoiados pelas ideias de Andrade (1998) compreendemos que a codificação consiste em uma maneira de representação do problema mais conveniente para a compreensão do aluno. Uma vez compreendido o sentido do problema, o aluno iniciará o processo de descodificação, que pode ser direcionado pelo professor, estimulando a resolução e exploração do problema para a realização de um trabalho de reflexão sobre este, de modo que o permita analisar o problema criticamente, elencando ou criando estratégias de resolução e sintetizando as ideias ao final do processo reflexivo. Entendemos que a codificação não necessariamente precisa ser representada através de um registro escrito, ela também pode ser demonstrada apenas oralmente, como o diálogo do Quadro 18 evidencia.

> C.P: A dupla D3, inicialmente, apresentou oralmente uma maneira de codificação do problema apoiada na interpretação construída pelo problema anterior trabalhado.
>
> C.P: Semelhantemente às demais duplas, os alunos das duplas D5 e D2 demonstram que o processo de codificação e descodificação do problema pode ocorrer de maneira articulada. A partir da análise dos diálogos entre a pesquisadora e a dupla D5 (Quadro 19) e na representação da codificação utilizada feita pela dupla D2 (Figura 15), entendemos que os alunos codificam os problemas em parcelas, e que, de acordo que essa codificação, uma maneira de descodificação substancial do problema é elaborada. Substancial, pois a análise crítica realizada neste momento inicial ainda não era aprofundada ao ponto de o aluno realizar um processo de Problema-Trabalho-Reflexões e Síntese (P-T-R-S) sobre o problema (ANDRADE, 1998). Observamos que, inicialmente, os alunos codificam uma parte do problema oralmente (como no caso na dupla D3) ou escrito (como no caso da dupla D3), procurando sempre interpretar esse parte da codificação amparado na compreensão do problema anterior, após isso, eles apresentam uma forma de descodificação apoiada na codificação apresentada, então, à medida que procuram maneiras de validar suas conjecturas, sentem a necessidade de modificar e/ou aprimorar a codificação inicial para conseguirem descodificar o problema de modo a encontra sua solução.

A modificação nos esquemas utilizados como estratégias de resolução, discutida acima, pode ser demonstrada explicitamente no momento de exploração dos problemas pelas alunas da dupla D1 em um diálogo com a pesquisadora.

Quadro 20 - Diálogo entre a pesquisadora e a dupla D1

PP: Meninas, como vocês resolveram? D1 (Aluna A2): A gente entendeu melhor esse aqui. D1 (Aluna A1): É! A gente se baseou no outro problema, daí já fizemos por desenho, só que agora ao invés de ser só meninos, a gente tem meninos e meninas. Daí a gente foi ligando os pares.

Fonte: Acervo da pesquisadora

> C.P: Isso não aconteceu com todas as duplas, porém, a grande maioria observou essa mudança do invariante. É importante destacar que

> nenhum dos alunos conseguiu explicar em que aspectos os dois problemas eram diferentes, mas conseguiram demonstrar a percepção dessa diferenciação através dos diálogos com a pesquisadora. Podemos observar que inicialmente as alunas codificam o problema apoiando-se no problema anterior, porém ao refletirem um pouco mais modificam o esquema de resolução inicial.

Ainda na face de descodificação, após acompanhar o trabalho de resolução de algumas duplas, demos iniciou ao processo de exploração dos problemas. Dando continuidade ao diálogo acima a pesquisadora levantou alguns questionamentos as alunas da dupla.

Quadro 21 - Diálogo entre a pesquisadora e a dupla D1

PP: E como foi que vocês "ligaram" os pares?
D1 (Aluna 1): Aqui, cada uma bonequinha tem o vestido de uma cor. Aí tipo, se for "ligando" cada uma para os três meninos vai dá doze pares. Então dava para cada um dos meninos dançar com as meninas, cada um, uma vez.
PP: É possível todas as meninas dançarem?
D1 (ambas): Sim!
PP: Porquê?
D1 (Aluna 1): Porque é só ir trocando os pares. Daí vai ficar sobrando uma.
D1 (Aluna 2): É, daí sempre vão dançando e trocando, dançando e trocando...
D1 (Aluna 1): E quando um estiver sem par eles trocar, daí enquanto a outra fica dançando e o outro fica sem par.
PP: Se os meninos escolherem as meninas primeiro, é a mesma coisa das meninas escolherem os meninos primeiro?
C.P: A pesquisadora levantou esse questionamento com o objetivo de analisar se as alunas da dupla tinham conseguido observar que a ordem dos elementos neste problema não gera novos pares.
D1 (Aluna 2): É!
PP: E se Maria escolher Pedro para dança, Luíza pode escolher quem para dançar?
C.P: Os questionamentos provocados pela pesquisadora a partir deste, tinha como objetivo analisar a familiarização para contagem de agrupamentos e a flexibilidade para a formação de agrupamentos que as alunas eram capazes de alcançar.
D1 (ambas): Gabriel.
PP: Somente Gabriel?
D1 (Aluna 2): Não. Pode ser João também.
PP: Se Maria escolheu Pedro e Luíza escolheu Gabriel, Clara pode escolher quem?
D1 (Aluna 1): Só João.
PP: Se Maria escolher Gabriel, Clara pode escolher quem?
D1 (Aluna 1): Pedro ou João.
PP: E Clara?
D1 (Aluna 1): Pode escolher Pedro, se Luíza escolheu João.
PP: E se Maria escolher Pedro, Luíza tem quantas possibilidades de escolha?
D1 (Aluna 2): Duas
PP: Porque?
D1 (Aluna 2): Porque tem o Gabriel e o João sem par.
PP: E se Maria escolher Pedro e Luíza escolher Gabriel, Clara tem quantas possibilidades de escolha?
D1 (Aluna 1): Só uma.

PP: E se fosse ao contrário? Pedro escolher Maria, Gabriel tem quantas possibilidades de escolha?

> C.P: Invertemos a ordem dos elementos nas combinações de pares, almejando analisar a familiarização das alunas na contagem de agrupamentos na ordem inversa até aqui explorada.

D1 (ambas): Três.
PP: Porque?
D1 (Aluna 2): Porque ainda ia sobra Luíza, Clara e Beatriz.
PP: Certo eu entendi. Será que vocês conseguiriam agora me propor um problema parecido como este?

> C.P: Como as alunas não proporam espontaneamente problemas durante o processo de resolução e exploração do problema, estimulamos essa proposição, pela a relevância para o desenvolvimento do raciocínio combinatório.

D1 (Aluna 1): Acho que sim, mas agora não.
PP: Então eu vou deixar vocês pensarem mais um pouquinho, daí daqui a pouco eu volta aqui certo?
D1 (ambas): Certo!

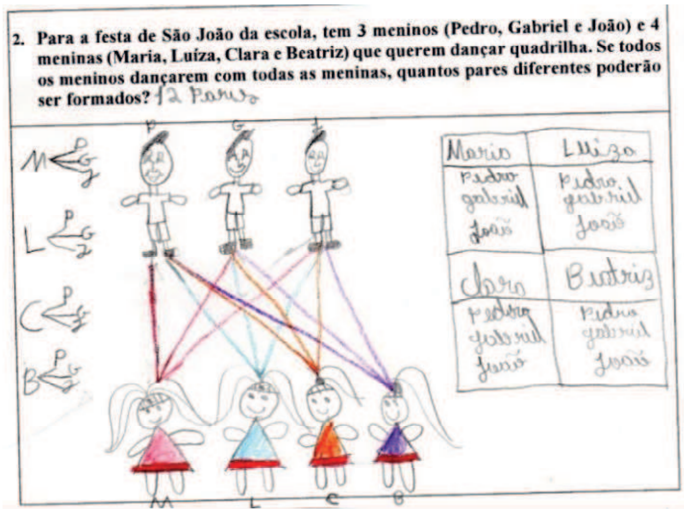
Fonte: Acervo da pesquisadora

> C.P: A partir do diálogo, entendemos que a exploração de problemas pode favorecer na percepção dos invariantes dos problemas combinatórios. Através da exploração, a pesquisadora estimou o trabalho reflexivo sobre o problema. As problematizações ajudaram os alunos a compreender que a ordem dos elementos nos agrupamentos, neste tipo de problema, não gera novas possibilidades de agrupamentos, e que, além disso, a composição destes é constituída pela combinação de elementos de dois conjuntos distintos. A flexibilidade no levantamento das possibilidades de agrupamentos também foi uma competência favorecida, as alunas da dupla D1, a partir da exploração, foram estimuladas a apresentar diferentes composição de agrupamentos. Observamos também que a exploração do problema pode contribuir para a capacidade de familiarização com a contagem de agrupamentos destacada como um fator importante para desenvolvimento do raciocínio combinatório (BRASIL, 1997; PESSOA, 2011; BORBA, 2016). Os questionamentos provocados durante o processo ajudaram as alunas a refletiram com maior profundidade a quantidade de agrupamentos que eram possíveis, de acordo com as possibilidades de combinação pontuadas pela pesquisadora. Confiamos que o planejamento prévio dos objetivos de aprendizagens e dos possíveis problemas secundários a serem propostos foi um dos fatores essenciais que favoreceram na condução da exploração.
>
> C.P: Percebemos que a exploração de problemas também pode contribuir para a proposição de problemas secundários. À medida que as alunas da dupla conseguiam solucionar os problemas apresentados pela pesquisadora, novos problemas secundários eram elaborados fundamentados em problemas secundários anteriores, com o objetivo de possibilitar uma análise crítica mais aprofundada sobre o problema no momento de descodificação. Assim, indo de encontro com as ideias de Serrazina (2017), com relação à perspectiva da resolução de problemas realizada em um cenário de ensino exploratório, acreditamos que para uma exploração de problemas eficaz é necessário que a escolha do problema a ser explorado seja criteriosa, para que a exploração desse permita que os alunos argumentem suas estratégias de resoluções,

estando esses envolvidos em um processo de problema-trabalho-reflexão e síntese sobre o problema como defendido por Andrade (1998).

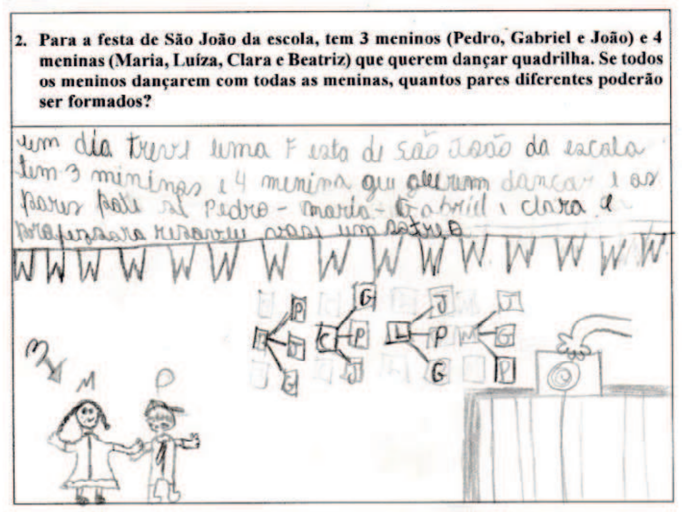
Com relação às representações utilizadas para representar as resoluções dos problemas, analisamos que todas as duplas representaram suas resoluções somente em forma de desenhos, com exceção das duplas D1 e D2, que também representaram as possibilidades de agrupamentos através da árvore das possibilidades e quadro (a dupla D1). Vejamos nas Figuras 16 e 17:

Figura 16 - Resolução da dupla D1



Fonte: Acervo da pesquisadora

Figura 17 - Resolução da dupla D2



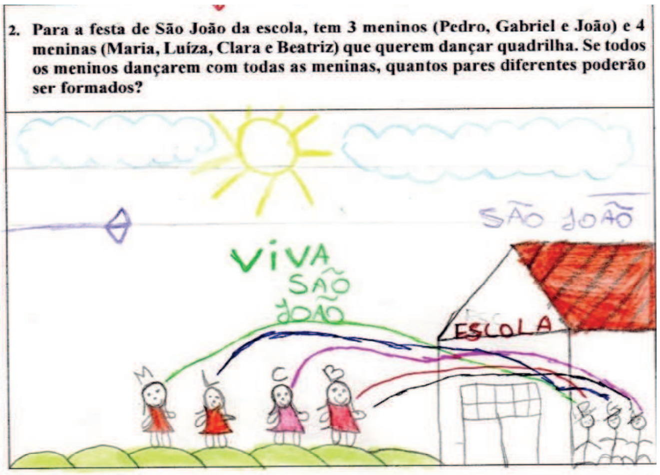
Fonte: Acervo da pesquisadora

Transcrição de texto da figura 17: Um dia treve uma festa de São João da escola tem 3 meninos e 4 meninas que querem dançar e os pares podem ser: Pedro – Maria - Gabriel e Clara e a professora resolveu fazer um sorteio.

As resoluções acima foram as únicas totalmente corretas. Assim como no encontro 1, observamos que a maioria dos alunos, durante o processo de resolução e exploração dos problemas, conseguiam elencar todas as possibilidades de agrupamentos, no entanto, no registro escrito apresentavam apenas algumas possibilidades. No quadro 22, apresentamos as resoluções incorretas do problema 2.

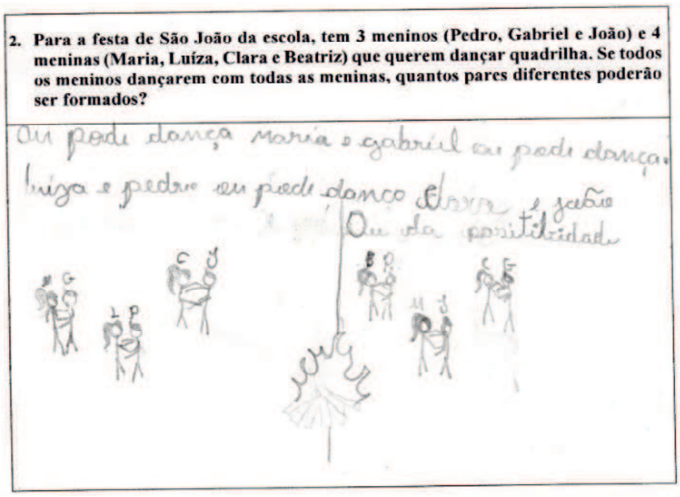
Quadro 22 - Resoluções do problema 2 incorretas

Figura 18 - Resolução da dupla D3



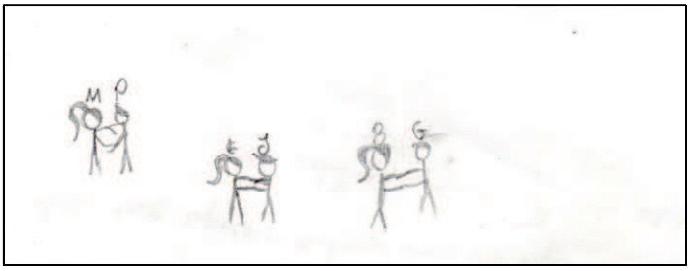
Fonte: Acervo da pesquisadora

Figura 19 - Resolução da dupla D4



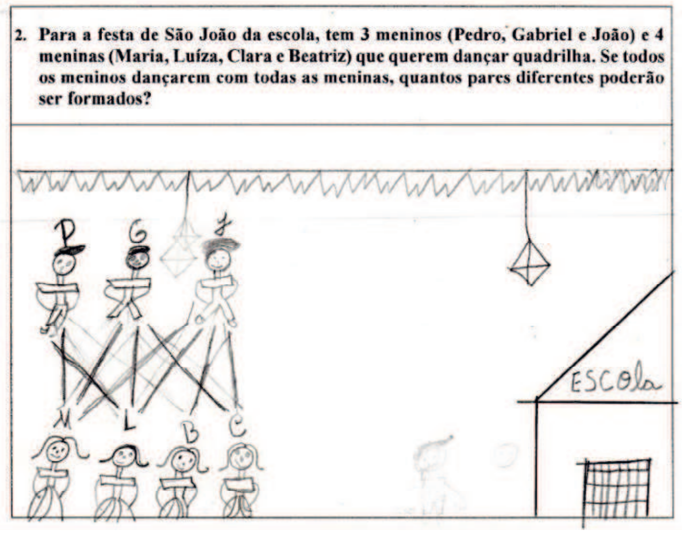
Fonte: Acervo da pesquisadora

Figura 20 - Segunda parte da resolução da dupla D4



Fonte: Acervo da pesquisadora

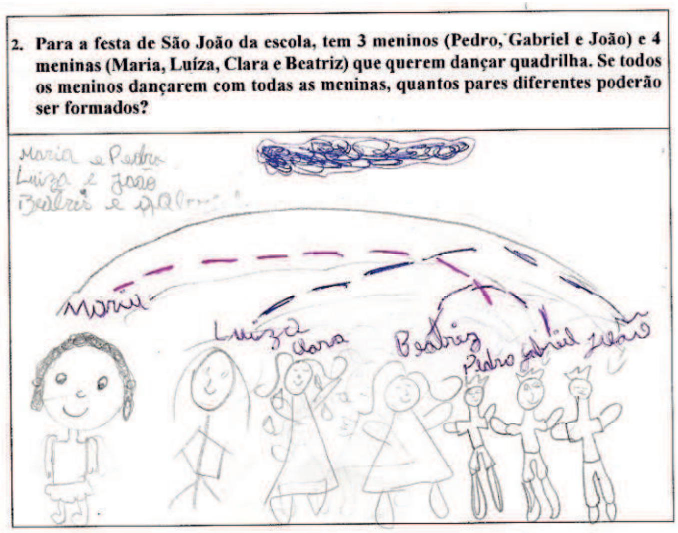
Figura 21 - Resolução da dupla D5



2. Para a festa de São João da escola, tem 3 meninos (Pedro, Gabriel e João) e 4 meninas (Maria, Luíza, Clara e Beatriz) que querem dançar quadrilha. Se todos os meninos dançarem com todas as meninas, quantos pares diferentes poderão ser formados?

Fonte: Acervo da pesquisadora

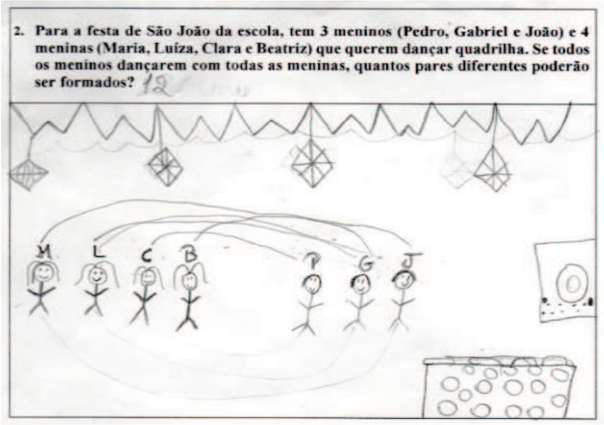
Figura 22 - Resolução da dupla D6



2. Para a festa de São João da escola, tem 3 meninos (Pedro, Gabriel e João) e 4 meninas (Maria, Luíza, Clara e Beatriz) que querem dançar quadrilha. Se todos os meninos dançarem com todas as meninas, quantos pares diferentes poderão ser formados?

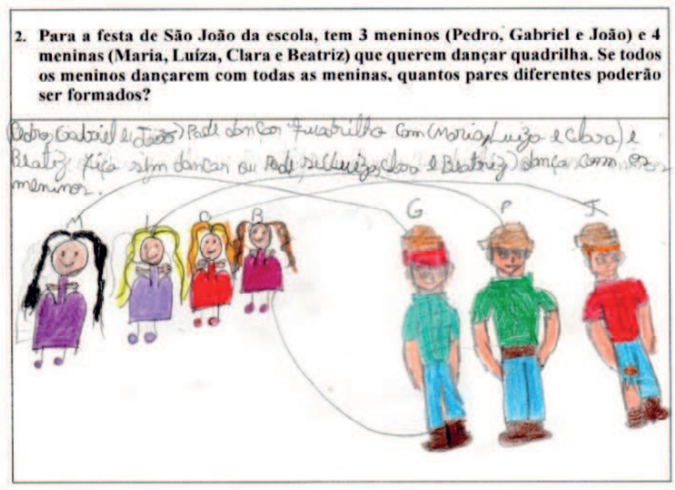
Fonte: Acervo da pesquisadora

Figura 23 - Resolução da dupla D7



Fonte: Acervo da pesquisadora

Figura 24 - Resolução da dupla D8



Fonte: Acervo da pesquisadora

Transcrição do texto da figura 24: (Pedro, Gabriel e João) Pode dançar quadrinha com (Maria, Luíza e Clara) e Beatriz fica sem dançar ou pode ser (Luíza, Clara e Beatriz) dançar com os meninos.

C.P: Algumas duplas conseguiram perceber alguns invariantes do problema combinatório de produto cartesiano. A dupla D8, percebeu que a ordem dos elementos nos agrupamentos não produz novos agrupamentos, porém, não conseguiram representar todas as possibilidades de combinação dos elementos. Os alunos da dupla D7, apresentaram o quantitativo correto de possibilidades de agrupamentos (12), contudo, assim como as demais, não representaram no registro escrito todas as possibilidades de formação de casais possíveis. Com relação a essa última, analisando o quantitativo de possibilidades corretas apresentado (12), com a estratégia de resolução incompleta, entendemos que a dupla realizou o que Vergnaud (1991) nomeia de cálculo numérico. As alunas da dupla D7, conseguiram apresentar o quantitativo correto, porém não conseguiram demonstrar que operações de pensamento lhe auxiliaram na decisão de qual procedimento ou operação aritmética poderiam ser utilizadas para resolver o problema e

> determinar o quantitativo apresentado na resolução, que seria no caso, o cálculo relacional discutido pelo autor.

Com relação à demonstração do raciocínio envolvido na estratégia de resolução utilizada, no Quadro 23, apresentamos um diálogo em que as alunas apresentam dificuldade em explicar como construíram a resolução registrada.

Quadro 23 - Diálogo entre a dupla D7 e a pesquisadora

PP: Oi meninas, vocês já conseguiram resolver o problema?

Dupla D7 (Aluna 13): Sim.

PP: Ah... muito bem. Vocês conseguem me explicar como foi que vocês resolveram?

(Dupla D7 permaneceu em silêncio)

PP: O que significa essas flechinhas?

> C.P: Este e os demais questionamentos a seguir, tiveram como objetivo estimular a explicação das estratégias de resolução utilizadas pelas alunas da dupla.

Dupla D7 (Aluna 13): Os pares.

PP: E esse número 12? (quantitativo de agrupamentos)

(Dupla D7 permaneceu silêncio)

PP: Como vocês encontraram esse número?

(Dupla D7 permaneceu em silêncio)

PP: Foi através dessas fechas?

(Dupla D7 permaneceu em silêncio)

PP: Vou deixar vocês pensarem mais um pouquinho, já já eu volto aqui está bem.

> C.P: Mesmo deixando um espaço de tempo para a alunas refletirem um pouco mais sobre o problema, ao retornarmos a dupla, nenhuma delas conseguiram explicar como encontraram o quantitativo de agrupamentos registrados.

Fonte: Acervo da pesquisadora

Além das contribuições apontadas, confiamos que a exploração de problemas favorece também para a generalização do raciocínio combinatório. Comprovamos isso a partir das ideias discutidas no momento de socialização das estratégias de resoluções.

Quadro 24 - Diálogo entre a pesquisadora e a turma no momento de socialização das ideias

PP: Se fossem mais meninas aumentaria o número de casais?

Todos os alunos em conjunto: Sim!

PP: Porque sim?

Aluna A2: Porque teria mais pessoas e formaria mais casais.

PP: E se eu aumentasse a quantidade de meninos?

Aluna A9: Também.

PP: E se eu diminuísse uma menina?

Aluna A1: Se aumentasse um menino ficaria o mesmo tanto.

> C.P: Aqui a aluna demonstra está familiarizada com a contagem de agrupamentos. Mesmo modificando as possibilidades de combinação dos elementos nos agrupamentos, com facilidade, a aluna conseguiu complementar o problema proposto pela a pesquisadora e ainda apontou a quantidade de agrupamentos correta.

PP: Então quer dizer que, se eu diminuir uma menina e aumentar um menino ficaria a mesma quantidade de casais?

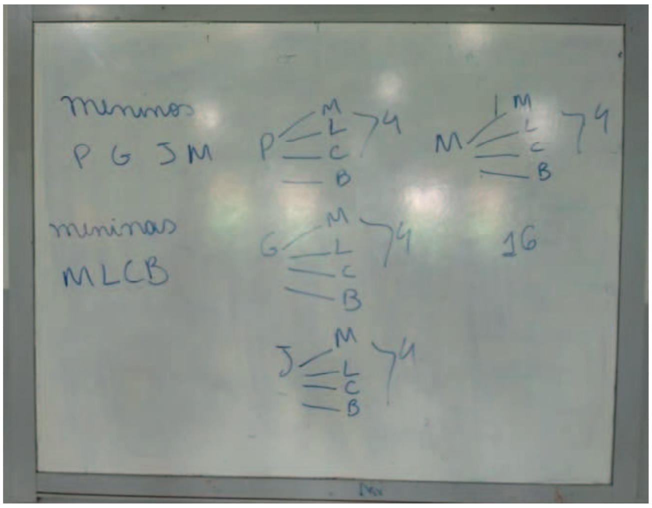
Aluna A2: Ficaria ainda no mesmo tanto. Mas, se a senhora diminuir uma menina e não aumentasse um menino ficaria menos, ficaria 9 casais.

> C.P: Com esta afirmação, é possível observar que a exploração do problema conduzida pela a pesquisadora estimulou a aluna A2 propor problemas secundários que o ajudaram a generalizar seu raciocínio combinatório em diferentes situações de combinações de elementos. Concordando com o que Vergnaud (1991), acreditamos que os diferentes problemas secundários propostos pelas a pesquisadora ao longo do processo de exploração contribui para a compreensão dos invariantes do problema demonstrado pela aluna A2.

PP: Vocês concordam com isso pessoal?
Todos os alunos em conjunto: Sim!
PP: Porque?
A2: Porque as possibilidades seriam menos.
PP: Se eu diminuísse uma menina e um menino?
Aluno A3: Ficaria só quatro.
A2: Que só quatro! Ficaria seis.
PP: Então quanto mais meninas eu aumento...?
Aluna A2: Mais possibilidades de casais a senhora tem.
PP: E quanto mais meninos eu aumento...?
Todos os alunos em conjunto: Mais possibilidades de casais a senhora tem.
PP: E se eu aumentar um menino e diminuo uma menina?
Aluna A1, A2, A5, A9 e A3 (juntas): Fica a mesma coisa!
PP: E se eu aumentasse duas meninas e deixasse os 3 meninos como está, ficaria a mesma coisa?
Aluna A2: Aí ia ser dezoito.
PP: Iria forma dezoito casais?
Aluna A2: Sim.
PP: Alguém discorda?
Aluna A1: Ninguém.
PP: Porque que seria dezoito casais?
Aluna A2: Porque ia aumentar mais seis possibilidades.
PP: Porque seis possibilidades?
A2: Porque cada menina tem três possibilidades, daí juntando as duas dá seis.
PP: Ah.... Entendi. É isso mesmo.

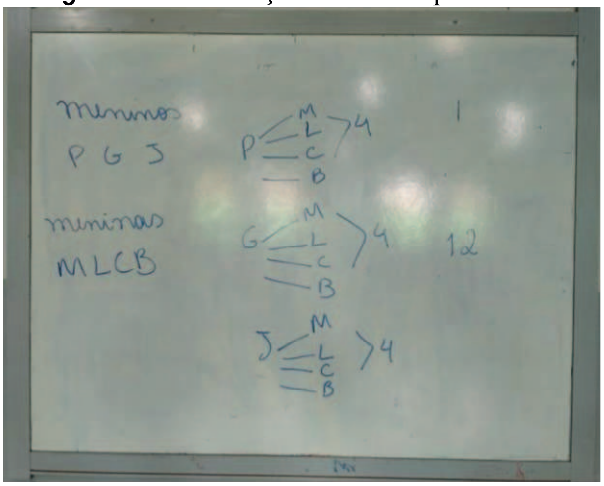
> C.P: Explicitamente, observamos que os alunos demonstram conseguir generalizar a situação apresentada no problema para situações que envolvem um quantitativo de agrupamentos maior ou menor. Acreditamos que, possivelmente, sem uma exploração planejada, os alunos não conseguirão demonstrar/desenvolver esse nível de generalização do raciocínio combinatório. Confirmando o que Andrade (2017) afirma, observamos que a exploração articulada à proposição de problemas pode contribuir significativamente para a aprendizagem matemática e para autonomia no desenvolvimento do raciocino matemático dos alunos.

Figura 25 - Exploração do problema 2



Fonte: Acervo da pesquisadora

Figura 26 - Resolução formal do problema 2



Fonte: Acervo da pesquisadora

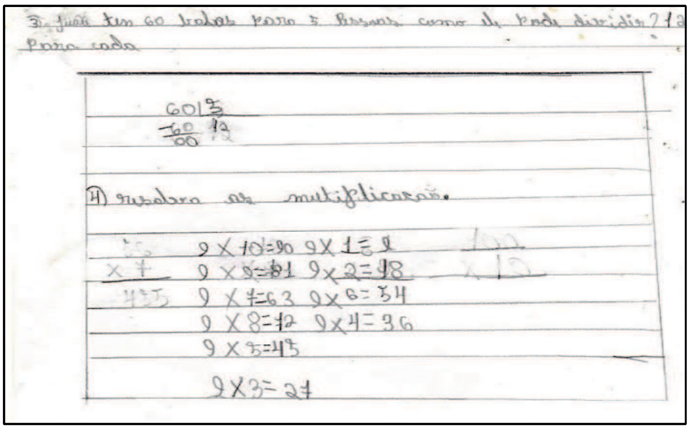
A exploração e proposição de problemas foram estimuladas ao longo de todo o estudo, destacando-se mais na fase de *descodificação* dos problemas*, análises críticas das resoluções* e *sínteses das ideias.* Ao percebermos que, no encontro 1, a proposição de problemas não aconteceu espontaneamente pelos alunos, no encontro dois, após a exploração das diferentes resoluções no quadro, solicitamos que eles tentassem elaborar alguns problemas parecidos com o principal.

Confiamos que a proposição de problemas contribui para a organização do raciocínio, posto que, para a elaboração de um novo problema, gerado ou fundamentado por um outro, é necessário que o aluno tenha clareza na compreensão dos invariantes que caracterizam tais problemas. Por este motivo, estimulados à proposição de problemas de maneira direta, já que espontaneamente essa necessidade de proposição quase não foi apresentada pelos alunos durante o processo de resolução e exploração do problema principal.

Neste encontro, a proposição de problemas foi essencial para analisarmos o desenvolvimento dos alunos. Os problemas propostos por eles evidenciaram sua compreensão acerca dos invariantes do problema 2. Como pedimos para que eles elaborassem problemas parecidos com o principal trabalhado na aula, pudemos observar a discrepância nas características entre os propostos pelos alunos e o principal proposto por nós.

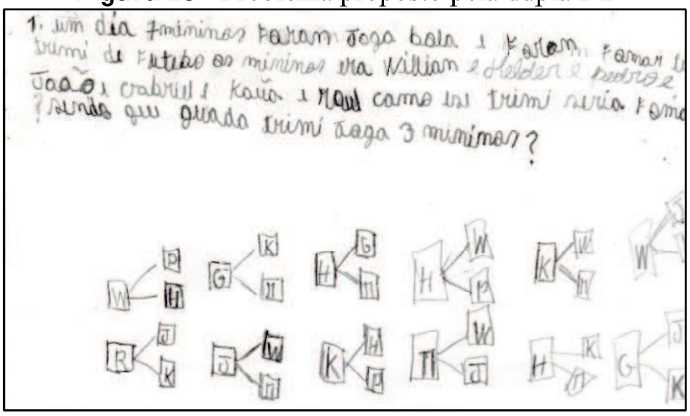
Quadro 25 - Problemas propostos pelos alunos no encontro 02

Figura 27 - Problema proposto pela dupla D1



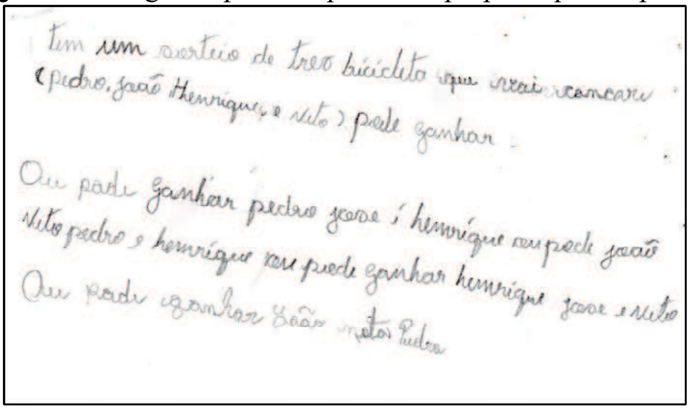
Fonte: Acervo da pesquisadora

Figura 28 - Problema proposto pela dupla D2



Fonte: Acervo da pesquisadora

Figura 29 - Segunda parte do problema proposto pela dupla D4


tem um sorteio de treo bicicleta que vai comecar (pedro, jaaõ Henrique, e neto) pode ganhar.
Ou pode ganhar pedro jose i henrique ou pode jaaõ neto pedro e henrique ou pode ganhar henrique jose e neto
Ou pode ganhar Jaão netos Pedro

Fonte: Acervo da pesquisadora

<u>Transcrição do texto da figura 27</u>: O João tem 60 balas para 5 pessoas. Como ele pode dividir? 12.
<u>Transcrição do texto da figura 28</u>: Um dia 7 meninos foram joga bola e foram formar um trimi de futebol. Os meninos eram William e Helder e Pedro e João e Gabriel e Kauã e Raul. Como esse trimi seria formado sendo que guada trimi joga 3 meninos?
<u>Transcrição do texto da figura 29</u>: Tem um sorteio de três bicicleta que vai começar (Pedro, João, Henrique e Neto) pode ganhar. Ou pode ganhar Pedro José Henrique ou pode João e Neto Pedro e Henrique ou pode ganhar Henrique José e Neto, ou pode ganhar João Neto e Pedro.

C.P: Analisamos que a dupla D1 propôs um problema de divisão que envolvia o esquema de distribuição equitativa discutida por Nunes e Bryan (1997) e propôs um exercício fixação de multiplicação que consistia na resolução da tabuada do número 9. Essa dupla foi a mesma que apresentou uma compreensão clara dos invariantes do problema, bem como uma familiarização na contagem de agrupamentos no momento de exploração evidenciada no quadro 24. Um fato interessante é que, mesmo demonstrando tais aspectos, ao proporem um problema, elaboraram com características diferentes do trabalhado. Mesmo que sejam problemas que envolvam as estruturas multiplicativas, as alunas não envolveram nenhum invariante característico de problemas combinatórios. A dupla D2 e D4 apoiaram-se no problema proposto no encontro 1 para a elaboração do problema. Isso demonstra que, mesmo com a compreensão dos invariantes evidenciada pelas duplas no registro escrito da resolução do problema e nos diálogos com a pesquisadora, o domínio dessa classe de situações de invariantes ainda não se desenvolveu claramente, posto que nenhuma das duplas conseguiu propor um problema com os mesmos invariantes do problema combinatório do tipo de produto cartesiano. Confiamos que, para que isso aconteça, seria necessário que mais situações com estes mesmos invariantes fossem propostas aos alunos, uma vez que o domínio de um uma classe de situações ocorre a partir de uma variedade de problemas a serem resolvidos, envolvendo-se o conceito a ser construído e suas relações com outros conceitos (VERGNAUD, 1982a). Além de todos estes aspetos observados, ainda podemos apontar a presença marcante das estruturas multiplicativas no

> ideário das crianças nesta faixa de escolaridade. Todos os problemas propostos envolvem estruturas multiplicativas e operações que envolvem o algoritmo de multiplicação. Possivelmente, isso aconteceu pois recentemente, em semanas anteriores, a professora titular havia trabalhado o algoritmo de multiplicação com a turma.

Após a elaboração dos problemas, escolhemos alguns para serem socializados e explorados pelos demais colegas da turma. Estrategicamente, selecionamos alguns problemas de multiplicação para através da exploração estimularmos os alunos a observar a diferença entre este tipo de problema e o problema 2. No Quadro 26, destacamos uma discussão acerca do problema proposto pela dupla D1.

Quadro 26 - Diálogo da pesquisadora com a turma no momento de socialização das ideias

PP: Existe alguma diferença entre esse problema elaborado pelas meninas (problema proposto pela a dupla D1) e aquele que a gente resolveu? Aluna A1, A2 e A9: Existe. Aluna A9: Esse é tipo para fazer uma conta. Aluno A3: O outro foi o do São João. Aluno A5: O outro pede para formar pares e esse está perguntando quanto é para dividir sessenta balas para 5 pessoas. PP: Ah.... Entendi. Então são problemas diferentes? Todos os alunos em conjunto: Sim. Aluna A2: Mas eles têm a mesma resposta. PP: Mas problemas diferentes podem dá a mesma resposta? Aluna A1, A2, A4, A5 e A9: Podem. C.P: Com a exploração do problema os alunos conseguiram elencar apenas alguns aspectos que diferenciam os dois tipos de problemas matemático.

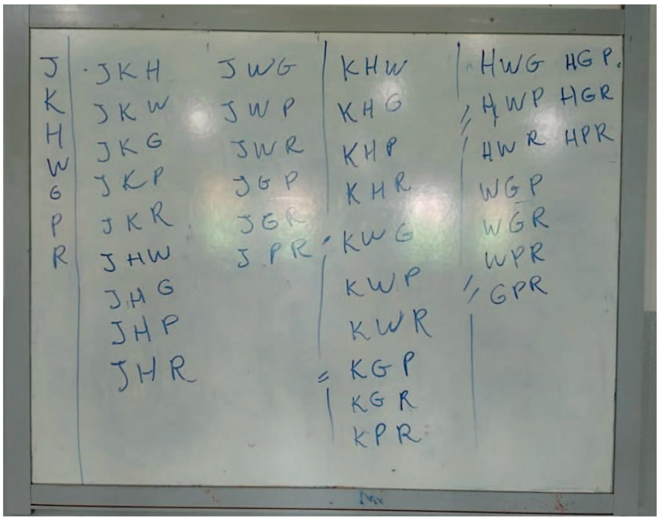
Fonte: Acervo da pesquisadora

Também exploramos um problema elaborado pela dupla D2. Este, consistia em um problema combinatório do tipo de combinação. O problema proposto pela dupla apresentava um quantitativo de agrupamentos maior do que os resolvidos até então.

Durante o processo de exploração desse problema, observamos que os alunos apresentaram uma maior dificuldade para determinar a quantidade de agrupamentos possíveis. Constatando o que Pessoa (2009) afirmou em sua pesquisa, observamos que os estudantes apresentaram mais dificuldade em problemas que possuíam o número de possibilidades de agrupamentos maior.

Percebemos a dificuldade dos alunos em determinar a quantidade de agrupamentos possíveis, realizamos, em conjunto o levantamento das possibilidades no quadro. Na Figura 30, destacamos um dos registros desse momento.

Figura 30 - Resolução do problema proposto pela a dupla D2



Fonte: Acervo da pesquisadora

> C.P: Com o levantamento das possibilidades de combinações no quadro, os alunos conseguiram determinar o quantitativo correto (35 possibilidades).

No segundo encontro, foi possível perceber que os alunos demonstraram estar mais à vontade para expor suas dúvidas e constatações. Logo, conseguimos discutir com maior profundidade os conceitos combinatórios presentes nos problemas. Percebemos que as problematizações realizadas durante o processo de resolução, exploração e proposição de problemas, diferentemente do primeiro encontro, passaram a ser encaradas como instrumento de reflexão, não mais como um obstáculo difícil de ser superado. A partir delas, os alunos foram estimulados a refletirem mais sobre as características dos problemas, e não a desistirem de imediato.

6.3 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DE UM TRABALHO REALIZADO SOBRE UM PROBLEMA DE PERMUTAÇÃO – ENCONTRO 03

(19/11/2018)

Conteúdos e ideias trabalhadas: problema combinatório do tipo permutação.

Objetivo:

- Observar que a ordenação dos elementos produz novos agrupamentos;

- Perceber que os agrupamentos são constituídos a partir da permutação de todos os elementos de um mesmo conjunto;
- Observar a diferença entre os invariantes que caracterizam o problema trabalhado nas aulas anteriores com a presente.
- Analisar as possíveis contribuições que a perspectiva metodológica da Resolução, Exploração e Proposição de Problemas pode oportuna para o ensino e aprendizagem da combinatória.

Neste encontro, trabalhamos o Problema 3:

De quantas formas diferentes poderei arrumar as fotos de meu irmão, meu pai e minha mãe na estante, de modo que elas fiquem lado a lado?

Uma vez organizadas todas as duplas, entregamos uma cópia do problema 3 para cada uma delas. Após isso, orientamos os integrantes fazerem sozinhos uma leitura inicial da situação proposta pelo problema, dando um tempo para que tentassem resolvê-lo. Enquanto isso, circulamos na sala de aula, analisando o trabalho realizado pelos alunos sobre o problema para que, posteriormente, as abordagens nas duplas se iniciassem.

Diferentemente dos encontros anteriores, neste, não tivemos a necessidade de realizar a leitura do problema para cada uma das duplas. Os alunos demonstraram compreender o problema somente com as leituras individuais realizadas entre eles. A abordagem realizada no momento inicial evidenciou este apontamento, no Quadro 27, trazemos um diálogo demonstrativo da compreensão inicial apresentada por uma das duplas.

Quadro 27 - Diálogo da pesquisadora com a dupla D1

PP: Vocês conseguiram compreender o problema? D1 (Aluna A1): Conseguimos, eu já estou fazendo (desenhando) a estantezinha aqui toda legal. PP: Vocês conseguem me explicar o que compreenderam? D1 (Aluna A1): É parecido com o outro tia. A gente entendeu que é para fazer de lado a lado de formas diferentes. C.P: Compreendemos que a explicação apresentada pela aluna A1 consiste em uma maneira de codificação do problema. A aluno reelabora o problema em uma maneira mais conveniente para sua compreensão. É possível observar que o texto escrito foi apresentado oralmente pela aluna de uma maneira simplificada, com a exclusão de algumas palavras, porém, preservando seu significado inicial. Este fato demonstra que a codificação do problema pode ser representada em diferentes maneiras, não sendo necessariamente obrigatória sua representação em registro escrito.

D1 (Aluna A1): Aí a gente já fez essa primeira parte que é primeiro o irmão, depois o pai depois a mãe. Aí depois a gente vai fazer primeiro o pai, depois o irmão e depois a mãe.

> C.P: É possível verificar que o levantamento das possibilidades apontado pela aluna segue uma sequência. Primeiro ela aponta a possibilidade de agrupamentos colocando o irmão como o primeiro elemento, o pai como o segundo e a mãe como terceiro. Em seguida, ela troca a posição entre o pai e o irmão, deixando fixo a mãe em terceiro, e trocando o irmão para a segunda posição e o pai para a primeira. Diversos estudos (PESSOA, 2009; ALMEIDA, 2010; SANTOS, 2016; SILVEIRA, 2016; BORBA, 2016) apontam que sistematizar a escolha e ordem dos elementos que constituem os agrupamentos é uma importante capacidade do raciocínio combinatório. Conseguir organizar os elementos em agrupamentos, de maneira sistematizada, seja de maneira direta, pelo uso de fórmula, ou indireta, pelo desenvolvimento de estratégias próprias (como neste caso), ajuda aos alunos conseguirem esgotar todas as possibilidades de agrupamentos que podem ser formados neste tipo de problema matemático. Observamos que nos primeiros encontros essa capacidade não foi identificada em nenhum dos diálogos ou registros escritos, entendemos que a diversidade de situações ocasionadas pelas problematizações nos encontros anteriores pode ter estimulado o desenvolvimento dessa competência. Porém, ressalvamos que essa capacidade não foi identificada em todas as duplas, a dupla D1 foi a primeira a demonstrar seu desenvolvimento, mesmo que discreto.

PP: Hum.... Entendi. Então, as maneiras de organizar as fotos... (aluna A2 interferiu)
D1 (Aluna A2): ...pode ser diferente. Porque a ordem de organizar as fotos é diferente.
PP: Ah... entendi. Então vou deixar vocês resolverem, já já eu voltou aqui. Qualquer coisa é só me chamar, está certo?!

> C.P: Analisamos que as alunas da dupla compreenderam além do significado do problema, um dos invariantes que o caracteriza. A importância da ordem dos elementos nos agrupamentos a serem formados foi destacada pela aluna A2. Essa compreensão também foi percebida por outras duplas, a maioria conseguiu perceber a importância da ordem dos elementos na formação dos agrupamentos, no entanto, a necessidade do envolvimento de todos os elementos do conjunto não foi destacada por nenhuma delas.

Fonte: Acervo da pesquisadora

> C.P: A facilidade inicial demonstrada pelos alunos em compreender o significado do problema somente pela leitura individual evidencia uma maturidade prematura[15] em compreender as condições impostas pelos problemas que envolvem invariantes combinatórios, adquirida possivelmente pelas leituras dos problemas propostos nos encontros anteriores. Acreditamos que a similaridade na estrutura dos problemas, pode ter facilitado essa compreensão inicial do problema 3. Todos eles tratam-se de problemas que envolvem estruturas multiplicativas, em que a seleção dos elementos que constituem os agrupamentos formados, segue, ou não, uma ordem de escolha e ordenação (BATANERO *et al.*, 1996). Essa maturidade adquirida pela experiência promovida por situações similares é destacada por Vergnaud (1982b). O pesquisador explica que a maturidade das competências adquirida por meio da

[15] Consideramos que a maturidade é prematura pois, essa foi desenvolvida em um pequeno período de tempo, com o trabalho de apenas três problemas. Normalmente, é preciso um longo período para a criança desenvolver tal capacidade, sendo estimulada a partir de trabalho que proporciona uma diversidade de situações que envolve diferentes campos conceituais.

> experiência incide numerosas etapas e processos com filiações e rupturas. Verificamos que, para a compreensão do problema 3, as alunas realizaram filiações na compreensão do problema trabalhado no encontro anterior, porém, realizaram também rupturas ao observarem a importância da ordem nos agrupamentos. Essas filiações e rupturas ajudam na estruturação do raciocínio combinatório, bem como na compreensão dos diferentes invariantes dos problemas deste tipo, uma vez que existem características similares e avessas entre os diferentes tipos de problemas combinatórios que precisam ser contrastadas para a percepção da diferenciação de suas características.

Após averiguarmos os métodos de codificação elaborados pelos alunos, abordamos as duplas almejando explorar as estratégias de resoluções utilizadas para a descodificação do problema. Neste momento, sempre que possível, provocamos questionamentos, articulando os argumentos apresentados pelos alunos com seus registros escritos elaborados.

Quadro 28 - Diálogo da pesquisadora com a dupla D4

PP: E aí pessoal, vocês conseguiram resolver o problema? D4 (Aluno A7): Acho que sim. (expressando está insegura quanto a resposta encontrada) PP: Quais são as maneiras de organizar as fotos na estante que vocês encontraram? D4 (Aluno A7): A mãe no lado, o pai no meio, e o filho no outro. PP: E aqui? (apontando para um dos desenhos apresentados no registro escrito) D4 (Aluno A7): É...o filho no lado, a mãe no meio e o pai no outro. PP: E aqui? (apontando para um dos desenhos apresentados no registro escrito) D4 (Aluno A7): O pai no lado, o filho no meio e a mãe no outro. PP: Então de quantas formas vocês conseguem organizar as fotos na estante? D4 (Aluno A7): Três. PP: Existe mais alguma maneira, diferente destas, para organizar as fotos na estante? D4 (Aluno A7): Acho que não. PP: E você aluna 15 o que acha? D4 (Aluno A8): Também acho que não, porque aqui a gente já colocou a mãe em primeiro, depois o filho e depois o pai. Daí acabou.

Fonte: Acervo da pesquisadora

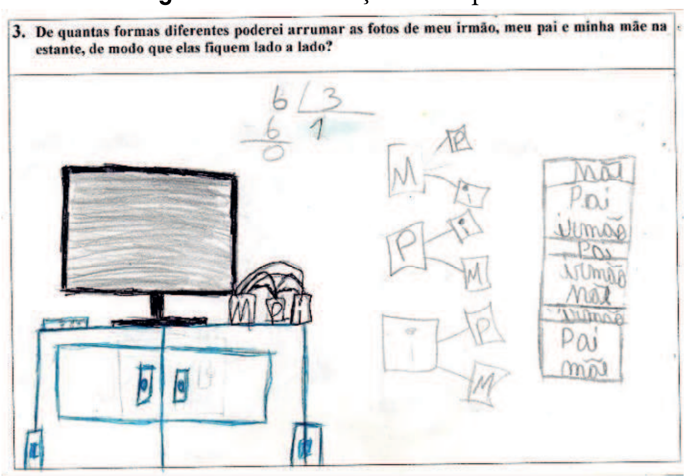
> C.P: Os alunos da dupla conseguiram compreender o invariante da ordem dos elementos, porém, não conseguiram perceber todas as possibilidades de permutação entre os elementos envolvidos. Em nenhum dos métodos de resolução a dupla apresentou todos os agrupamentos possíveis. Observamos que o levantamento das possibilidades seguiu um critério de seleção, posto que, em todos os agrupamentos formados as permutações dos elementos seguiram uma sistematização. A ordem dos elementos do primeiro agrupamento, apontado pela dupla foi aleatória, porém, a formação do segundo agrupamento seguiu como critério a ordem dos elementos do primeiro agrupamento, e o terceiro agrupamento como critério a ordem dos elementos do segundo agrupamento. O primeiro elemento, do segundo agrupamento (*filho*, a mãe e o pai), consiste no último elemento do primeiro agrupamento (mãe, pai e *filho*); o segundo elemento, do segundo agrupamento (filho, a *mãe* e o pai), consiste no primeiro

> elemento do primeiro agrupamento (*mãe*, pai e filho), o mesmo foi verificado para a formação do terceiro agrupamento elencado, que seguiu como critério a ordem dos elementos do segundo agrupamento. Mesmo evidenciando essa capacidade de sistematização do raciocínio combinatório, os alunos não conseguiram perceber a segunda possibilidade de permutação para cada um dos agrupamentos apontados por eles. Isso demostra que a capacidade de sistematização é importante para o levantamento de todas as possibilidades de combinação, mas não suficiente, tendo em vista que os alunos não conseguiram elencar todas as possibilidades de combinação. É preciso também que o aluno desenvolva a capacidade de familiarização na contagem de agrupamentos para a potencialização dos raciocínios generalizante e lógico (BRASIL, 2014). Entendemos que estes tipos de raciocínios possibilitam que o aluno, no momento do levantamento das possibilidades, siga uma lógica para a seleção e ordem dos elementos, de modo que o permita generalizar a quantidade de agrupamentos possíveis, sem necessariamente precisar contar um a um deles.

Observamos que, mesmo com a compreensão do problema, inicialmente demonstrada na fase de codificação, todas as resoluções estavam ou totalmente incorretas, ou parcialmente corretas. Parcialmente corretas no sentido de apresentarem mais de uma estratégia de resolução em que, pelo menos uma, estava ou incorreta em partes ou incompleta. No quadro 29, apresentamos as resoluções totalmente incorretas apresentadas por algumas duplas:

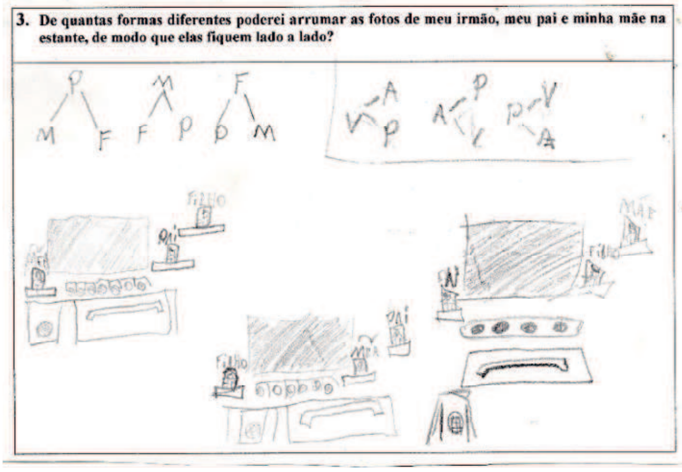
Quadro 29 - Resolução do problema 3 totalmente incorretas

Figura 31 - Resolução da dupla D2



Fonte: Acervo da pesquisadora

Figura 32 - Resolução da dupla D4

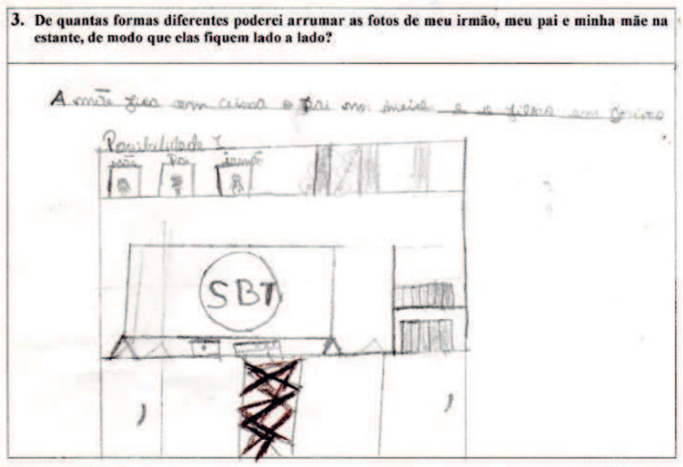


Fonte: Acervo da pesquisadora

Figura 33 - Resolução da dupla D5

Fonte: Acervo da pesquisadora

Figura 34 - Resolução da dupla D6



Fonte: Acervo da pesquisadora

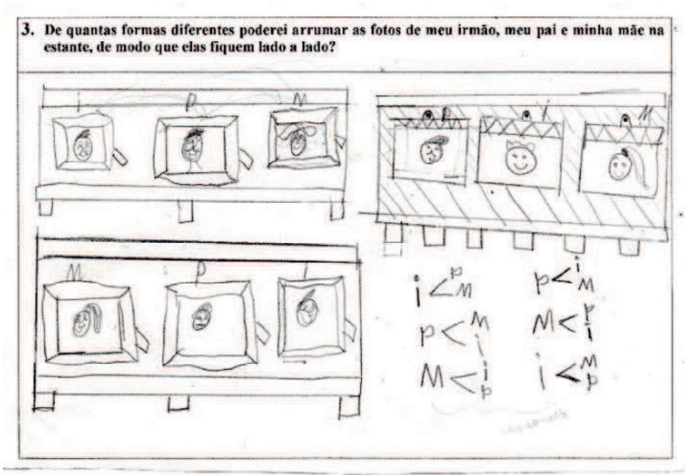
Transcrição do texto da figura 34: A mãe fica em cima e o pai no meio e o filho embaixo.

C.P: Analisamos que em todas as resoluções acima os alunos não conseguiram elencar todas as possibilidades de agrupamentos. A duplas D2 e D4 apontaram 3 possibilidades, e as demais duplas (D5 e D6), apresentaram apenas uma possibilidade. O registro escrito evidencia que a estratégia de resolução que foi adotada por todas as duplas foi o desenho das possibilidades do posicionamento das fotos. A árvore das possibilidades também foi uma das estratégias de resolução utilizada dentre essas duplas, mas, somente pelas duplas D2 e D4. Observamos que a quantidade de ramificações da árvore, que representa as possibilidades de seleção dos elementos por etapas, está incompleta. As duplas apresentaram apenas ramificações que representam as possibilidades de permutação para o primeiro e segundo elemento dos agrupamentos. Isso também foi verificado com outras duplas que também fizeram uso dessa estratégia de resolução. Mais adiante, discutiremos sobre elas.

Conforme já destacado, nenhuma das resoluções apresentadas pelos alunos estava totalmente correta. Em todas elas existe pelo menos uma estratégia, ou incorreta ou incompleta. No Quadro 30, apresentamos os registros escritos das referidas resoluções.

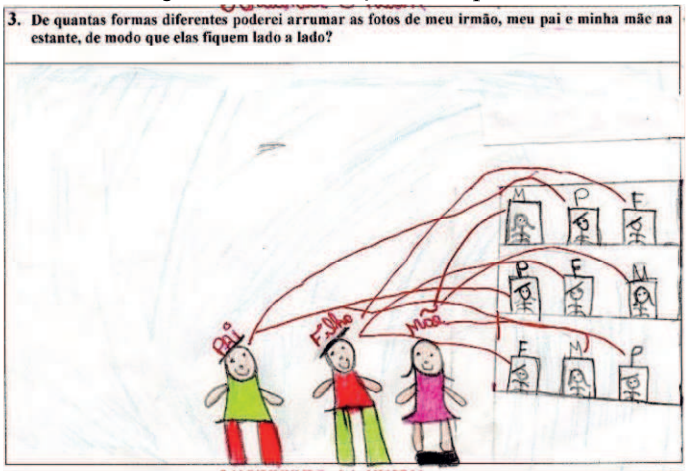
Quadro 30 - Resolução do problema 3 parcialmente corretas

Figura 35 - Resolução da dupla D1



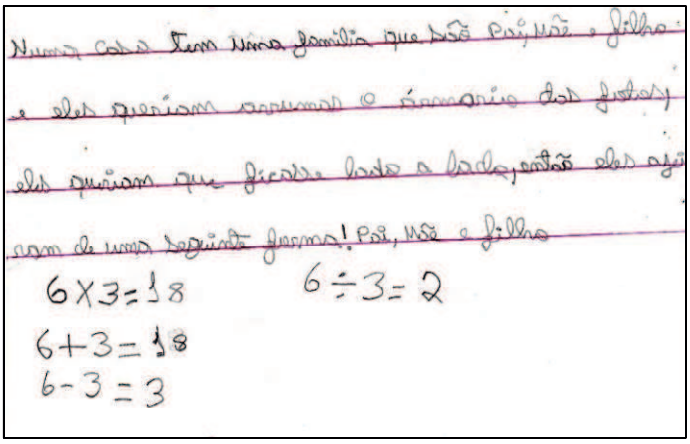
Fonte: Acervo da pesquisadora

Figura 36 - Resolução da dupla D3



Fonte: Acervo da pesquisadora

Figura 37 - Segunda parte da resolução da dupla D3



Numa casa tem uma família que são Pai, Mãe e filho e eles queriam arrumar o armário das fotos, eles queriam que ficasse lado a lado, então eles agiram da uma seguinte forma! Pai, Mãe e filho

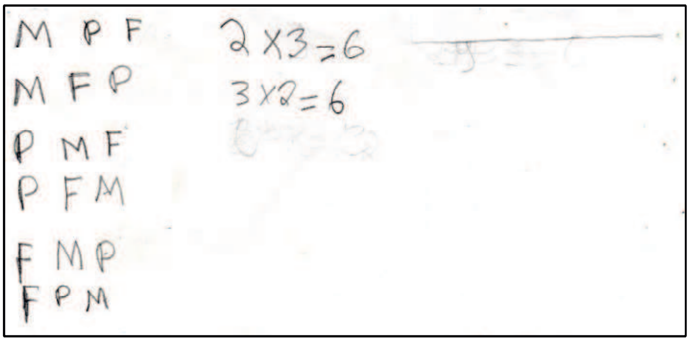
$6 \times 3 = 18$ $\quad 6 \div 3 = 2$

$6 + 3 = 18$

$6 - 3 = 3$

Fonte: Acervo da pesquisadora

Figura 38 - Terceira parte da resolução da dupla D3



M P F $\quad 2 \times 3 = 6$

M F P $\quad 3 \times 2 = 6$

P M F

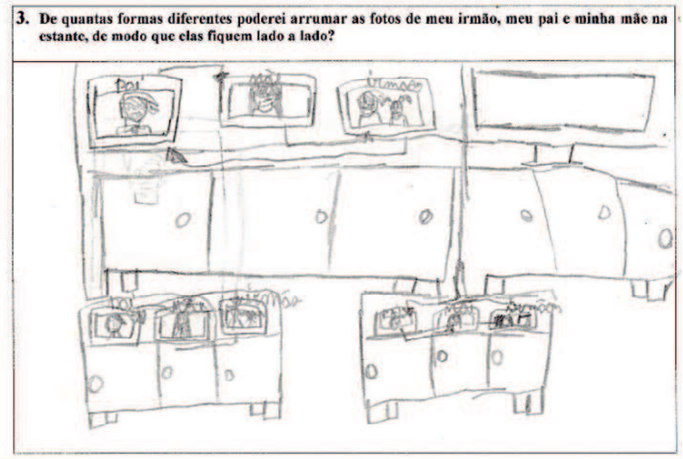
P F M

F M P

F P M

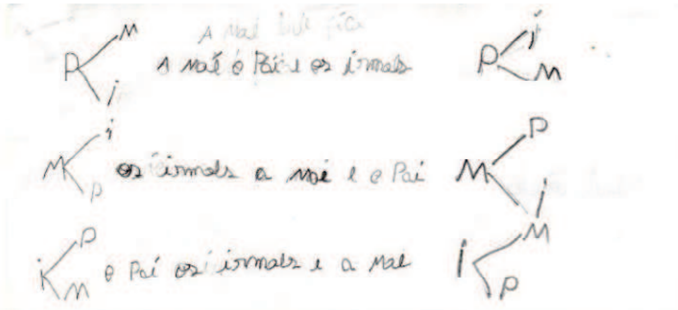
Fonte: Acervo da pesquisadora

Figura 39 - Resolução da dupla D8



Fonte: Acervo da pesquisadora

Figura 40 - Segunda parte da resolução da dupla D8



Fonte: Acervo da pesquisadora

Transcrição do texto da figura 37: Numa casa tem uma família que são pai, mãe e filho e eles querem arrumar o armário das fotos, eles queriam que ficasse lado a lado, então eles ajeitaram de uma seguinte forma! pai, mãe e filho.

C.P: De imediato, analisamos que: a) todas as duplas optaram por desenhos para representar pelo menos uma de suas estratégias de resolução; b) as duplas D1 e D8 também optaram pela estratégia da árvore das possibilidades; c) apenas a dupla D3 utilizou texto escrito e listagem das possibilidades como estratégia de resolução; d) as duplas D1 e D3 também optaram pela utilização de algoritmos de multiplicação.

C.P: As duplas D1 e D8 que optaram pelo método das árvores das possibilidades, assim como as duplas D2 e D4, discutidas anteriormente, também apresentaram a quantidade de ramificações das árvores incompleta, mas diferente destas, construíram 6 árvores ao invés de três. Entendemos que o motivo para a diferença da quantidade de árvores apresentadas no registro escrito seja a percepção dos alunos acerca dos agrupamentos possíveis, posto que as duplas D2 e D4 conseguiram elencar apenas três possibilidades de agrupamentos, enquanto as duplas D1 e D8 apresentaram as 6 possibilidades. Mesmo

> com essa diferenciação, observamos que o significado atribuído para a ramificação da árvore das possibilidades incide em um mesmo para as quatro duplas. Sabemos que, as ramificações da árvore das possibilidades representam as possibilidades de seleção dos elementos em uma determinada fase de escolha que constituem os agrupamentos. Diferentemente dessa compreensão, observamos que o significado atribuído pelos alunos para as ramificações consiste em compreender as ramificações como sendo o posicionamento dos elementos nos agrupamentos, e não as possibilidades de escolha em uma determinada fase de seleção dos elementos. Mesmo com esse significado equivocado, as duplas D1 e D8, a partir da representação das árvores, conseguiram apontar o quantitativo correto dos agrupamentos possíveis, uma vez que apresentaram a representação das 6 permutações possíveis a partir das arvores. Analisamos também que, em todas as resoluções em que a representação consistia em desenhos, o quantitativo de agrupamentos estava incorreto. Através dessa representação, a dupla D1 e D3 representaram somente três possibilidades de permutação e a dupla D8 apenas uma. Esta última, apresentou três desenhos no registro escrito, porém as três representam uma mesma possibilidade de agrupamento.

A exploração das estratégias de resoluções adotadas pelos alunos é primordial para a compreensão das ideias matemáticas envolvidas durante o processo de descodificação do problema (ANDRADE, 1998). É importante que, durante este processo, a ação pedagógica do professor busque, sempre que possível, estimular a produção de ideias dos alunos através de um trabalho reflexivo sobre o problema, no qual o aluno tenha a oportunidade de desenvolver a capacidade de organizar e sintetizar suas ideias para conseguir defendê-las, bem como analisá-las criticamente, de acordo com a situações impostas, tanto pelo problema, como pelo professor ao fazer problematizações.

Nessa ótica, entendemos que o professor precisa explorar todas as estratégias de resolução adotadas pelos alunos, não com objetivo de julgar ou discriminar os erros encontrados, mas, sim, compreender as ideias que equivocadamente foram articuladas e defendidas por eles. Pensando em uma perspectiva de ensino em que a exploração das ideias é vista como um processo de investigação, o professor tem o papel de saber ouvir e compreender os problemas secundários apresentados pelos alunos, sabendo dialogar sobre suas dúvidas numa diversidade de formas e meios, buscando sempre aprender como seus alunos pensam e constroem suas ideias (KILPATRIC, 2017; SERRAZINA, 2017, D'AMBRÓSIO, 2017).

Diante disso, destacamos uma conversação com a dupla D3 (Quadro 31), na qual tivemos a oportunidade de analisar o significado atribuído a uma das estratégias de resolução apresentada pela dupla no registro escrito. Esclarecemos que, dentre os diversos momentos de exploração, durante o processo de descodificação do problema, destacamos essa conversação porque os alunos apresentaram uma maneira de resolução diferente das apresentadas, até então.

Quadro 31 - Diálogo da pesquisadora com a dupla D3

PP: Deixa eu ver essa outra maneira que vocês responderam. PP: Hum, vocês fizeram por continhas (utilizando o termo utilizado pelos alunos). Me expliquem como vocês fizeram essas continhas. D3 (Aluna A5): A gente pensou em fazer essas continhas tipo assim: 6 x 3, aí deu 18; 6 + 3, deu 18; e 6 ÷ 3, que deu 2. Só que aí a gente está fazendo as continhas com todos os sinais. PP: Mas porque 6 x 3? Porque vocês responderam assim? C.P: Mesmo observando que o cálculo empregado pelos alunos para resolver o problema estava incorreto para representa a resolução, a pesquisadora buscou ouvir a explicação da dupla, com o objetivo de compreender seu raciocínio, para então, poder criar situações que levassem a dupla a perceber e corrigir o seu erro (D'AMBRÓSIO, 2017). D3 (Aluna A5): Porque a gente achou que seria outro tipo, de outra maneira. PP: De resolver? D3 (Aluna A5): É!

Fonte: Acervo da pesquisadora

> C.P: É possível observar que o significado atribuído para o cálculo desenvolvido foi puramente a resolução de diferentes algoritmos. Deixando evidente que o cálculo realizado para a resolução do problema consistia em um *cálculo numérico*, dado que a dupla não conseguiu descrever as operações de pensamento que foram aplicadas nas estratégias de resolução (VERGNAUD, 1991).

Compreendemos que a análise crítica do cálculo realizado e a solução apresentada pela dupla D3 viabilizam a compreensão das operações de pensamento que justificam os métodos utilizados para a descodificação do problema. À vista disso, objetivando estimular a análise crítica de tais fatores, a pesquisadora continuou a provocar mais questionamentos para a dupla.

Quadro 32 - Continuação do diálogo da pesquisadora com a dupla D3

PP: Esse número 6 representa o que? D3 (Aluna A5): As fotos. PP: Então no caso são 6 fotos? É isso que você está querendo dizer? D3 (Aluna A6): Não é 9! PP: Então esse 6 representa o quê? D3 (Aluna A5): Verdade Aluno 6 (demonstrando compreender o erro)! PP: Então ele significa a quantidade de fotos? D3 (Aluna A5): Sim. PP: E esse 3? D3 (Aluna A5): Significa as três pessoas. PP: Então é 6 fotos x 3 pessoas?

D3 (Aluna A5): Hunrum. PP: E isso significa o que? (Dupla D3 permaneceu em silêncio por um tempo).

Fonte: Acervo da pesquisadora

> C.P: Observamos que, inicialmente, o significado atribuído para o algarismo presente no cálculo ainda não estava claramente formado para a aluna A5. Foi necessário que a pesquisadora provocasse mais questionamentos, para que assim a aluna conseguisse compreender a representação dos algarismos no cálculo. Apesar do trabalho realizado, o significado para a construção do cálculo, até o momento, demonstrou ainda não ter sido construído, visto que os alunos da dupla não conseguiram explicar o significado da expressão 6 fotos x 3 pessoas. Analisando tal fato, entendemos que a construção do significado do cálculo, que consiste também na capacidade de realizar um *cálculo relacional*, não é algo conquistado facilmente. Mesmo após diferentes questionemos provocados com o intuito de conduzir o raciocínio do aluno para a compreensão de tais fatores, ainda assim, os alunos demostraram não alcançar as expectativas de aprendizagens planejadas.

Observando que a dupla permaneceu em silêncio, demonstrando não conseguir explicar o significado do cálculo, a pesquisadora provocou mais questionamentos, buscando estimular uma reflexão mais aprofundada sobre o problema. Desta vez, mudando a estratégia, de maneira sistematizada, e através da listagem das possibilidades, a pesquisadora auxiliou a dupla D3 a elencar todas as possibilidades de agrupamentos.

Quadro 33 - Continuação do diálogo da pesquisadora com a dupla D3

PP: Então vamos pensar mais pouquinho. A mãe sendo a primeira, por essa ordem que vocês organizaram aqui (apontando para o registro escrito), qual a possibilidade que sobra para a organização das fotos do pai e do filho? D3 (Aluna A5): O pai ser o do meio e o filho ser o terceiro. PP: Mas a mãe sendo a primeira, existe mais alguma outra possibilidade de organizar as fotos do pai e do filho? D3 (Aluna A5): Tem. O filho ser o segundo e o pai ser o terceiro. PP: Existe mais alguma possibilidade de organização, colocando a foto da mãe como sendo a primeira? D3 (Aluna A5): Que a gente sabe, são só essas. PP: E a foto do pai sendo a primeira? D3 (Aluna A5): A mãe pode ficar em segundo e o filho em terceiro. PP: Existe outra? D3 (Aluna A5): Sim. O filho fica em segundo e a mãe em terceiro. PP: E agora, ainda existe mais alguma possibilidade de organizar as fotos? D3 (Aluna A6): Tem, com a do filho sendo o primeiro. PP: Então como ficaria? D3 (Aluna A5): Ficaria o filho sendo o primeiro, a mãe sendo a segunda e o pai sendo o terceiro. Aí pode ser também, o filho sendo o primeiro, o pai sendo o segundo e a mãe sendo a terceira. PP: Então pensando comigo, para cada uma dessas pessoas, quantas possibilidades tem para que elas sejam a primeira? D3 (Aluna A6): Duas.

PP: Então se para cada pessoa existem duas possibilidades, quantas possibilidades existem ao todo?
(A dupla D3 demorou um tempo para responder)
D3 (Aluna A5): Seis!
PP: Será que tem como representar essas possibilidades por essa continha que vocês fizeram aqui (apontando para a primeira expressão escrita pelos alunos)?
D3 (Aluna A5): Não sei.... Acho que sim.
PP: Esse 6 seria o quê?
D3 (Aluna A5): As possibilidades para as três pessoas.
PP: Então para cada três pessoas existem seis possibilidades. Mas, por aqui, (apontando para a listagem feita recentemente) encontramos isso?
D3 (Aluna A5): Não. Aqui para cada uma pessoa a gente tem duas possibilidades.
PP: Hum.... Entendi. Então como ficaria agora a continha de vocês?
(A dupla D3 ficou um tempo em silêncio)
PP: Aqui seria para cada três pessoas seria seis possibilidades. E aqui para uma pessoa seria?
D3 (Aluna A5): Cada uma tem duas possibilidades.
PP: Então se são três pessoas, ficaria?
D3 (Aluna A5): 3 x 2?
PP: Porque 3 x 2?
D3 (Aluna A5): Porque cada uma das três pessoas tem duas possibilidades.
PP: Então se cada uma das pessoas tem duas possibilidades, quantas possibilidades ao todo existe?
D3 (Aluna A5): Seis.

Fonte: Acervo da pesquisadora

C.P: A mudança de estratégia realizada pela pesquisadora para conduzir o diálogo apresentou, de maneira reformulada, o problema inicial em problemas auxiliares (questionamentos). Observamos que, tal estratégia, através do trabalho reflexivo sobre estes problemas, possibilitou que os alunos conseguiram atribuir um significado para o cálculo desenvolvido, conseguindo, até mesmo, compreender os erros apresentados no cálculo inicial. Consideramos que o trabalho realizado somente promoveu resultados positivos, pois, previamente, a pesquisadora planejou possíveis problematizações, o que permitiu ter uma ampla consciência de todas as dimensões do problema. Entendemos que essa ampla consciência é crucial para um trabalho pedagógico amparado na perspectiva metodológica da Resolução, Exploração e Proposição de Problemas, pois, dependendo das dificuldades de compreensão apresentadas pelos alunos, é preciso que o professor consiga fazer diferentes reformulações do problema inicial, para que, finalmente, os alunos consigam ser bem-sucedidos no processo de resolução (KILPATRICK, 2017). Destacamos ainda, a importância de o professor sempre buscar compreender os erros dos alunos para criar situações que potencializem a análise crítica destes no momento de descodificação dos problemas (D' AMBRÓSIO, 2017). Influenciada pela resolução incorreta apresentada inicialmente pela dupla D3, a pesquisadora buscou, através de sua exploração, provocar questionamentos que ajudassem os alunos a compreender o erro cometido, a partir da construção do significado dos algarismos e operações envolvidas no cálculo.

O trabalho com a Combinatória nos anos iniciais precisa aprofundar continuamente as estratégias próprias das crianças, mais informais, almejando que sejam gradativamente transformadas em procedimentos

> mais sistematizados (BRASIL, 2014). A capacidade de sistematização do raciocínio combinatório ajuda o aluno a estruturar o raciocino lógico e generalizante, que são tipos de raciocínios importantes para a desenvolvimento da aprendizagem da Matemática (PESSOA; SILVA, 2012; PESSOA; SANTOS, 2012). Desse modo, entendemos que o aprofundamento dado à resolução apresentada auxiliou a aluna A5 no aprimoramento de suas estratégias de resolução, de modo que o procedimento realizado para o levantamento das possibilidades tornou-se sistematizado. Analisamos que os primeiros questionamentos ajudaram a aluna a elencar as possibilidades fixando a mãe como primeiro elemento dos agrupamentos, depois fixando o pai e, por último, fixando o irmão como o primeiro elemento. A apresentação das possibilidades de maneira sistemática facilitou a percepção dos diferentes pares de agrupamentos, isso contribuiu para que a aluna A5 realizasse uma análise crítica mais aprofundada acerca da estratégia de resolução adotada, conseguindo sintetizar as ideias, apontando todas as possibilidades de agrupamentos e demonstrando uma compreensão do cálculo realizado.
>
> Diante disso, entendemos que o trabalho pedagógico pautado na perspectiva metodológica da Resolução de Problemas requer tempo e dedicação do professor, tanto para elaborar as propostas pedagógicas, como para desenvolvê-las de maneira consistente e significativa, de modo que potencialize a aprendizagem do alunado (ANDRADE, 1998; ONUCHIC, 1999; ONUCHIC, ALLEVATO, 2011; KILPATRICK, 2017; SERRAZINA, 2017). Pensando, especificamente, na abordagem defendida por Andrade (1998; 2017), compreendemos que averiguar o raciocínio matemático envolvido nas estratégias de resolução para conduzir uma ação pedagógica que favoreça a reflexão crítica do aluno no momento de descodificação do problema, sabendo julgar o que deve ser dito ou não ao aluno, não é uma tarefa fácil. Mas, os resultados alcançados podem ser satisfatórios, quando conseguimos provocar questionamentos que permitem aos alunos significar a matemática desenvolvida por eles.

Após abordarmos as duplas, direcionamos a socialização das diferentes estratégias de resolução para o trabalho em conjunto no quadro. Como faltava pouco tempo para a aula acabar, priorizamos as resoluções diferentes das convencionais já apresentadas. Dentre os representantes convidados para irem ao quadro, destacamos o trabalho realizado com as estratégias de resoluções das duplas D1 e D2, que na oportunidade contratamos as resoluções objetivando chegar a um consenso.

Quadro 34 - Socialização da resolução da dupla D3 com a turma

PP: Vocês conseguem ver alguma diferença entre esta resolução e essa? (apontando para as resoluções das duplas D1 e D2) Aluna A5: Esta daqui (apontando para a resolução da dupla D1) tem flecha e essa aqui (apontando para a resolução da dupla D2) não. Aluna A1: Essa também tem o quadro (referindo-se à resolução da dupla D2) mostrando como é que pode colocar (referindo-se à apresentação das possibilidades). Aluna A8: Esse tem conta (apontando para a resolução da dupla D1).

PP: E esse não tem?
Aluno A10: Não, as duas tem! Essa (referindo-se à resolução da dupla D1) é a mesma coisa dessa (referindo-se à resolução da dupla D2).

> C.P: Até este momento, os alunos ainda não tinham conseguido perceber o cálculo incorreto apresentado pela dupla D2.

Aluna A2: É, mais nessa a conta está resolvida certo (referindo-se à resolução da dupla D1).
PP: O que tem de diferente na conta?
Aluno A4: Essa aqui deu 2 (referindo-se ao resultado do cálculo elaborado pela dupla D2), e nessa deu 1 (referindo-se ao resultado do cálculo elaborado pela dupla D1).
PP: Porque nessa o resultado foi 2 e nesta o resultado foi 1?
Aluno 10: Porque essa aqui está errada (referindo-se à resolução da dupla D1).
PP: Porque está errada?
Aluna A1: Porque eles não souberam resolver a conta de divisão.

> C.P: A aluna A1 foi a primeira a apontar o motivo do cálculo errado realizado pela dupla D1. A explicação da aluna, até o momento, demonstra está apoiada apenas nas características do algoritmo de divisão. Observamos que, até então, nenhum dos alunos conseguiram elucidar o raciocínio combinatório empregado no cálculo.

PP: E porque as duas duplas dividiram 6 por 3?
Aluna A1: Porque tem três pessoas e 6 opções, então se cada um for escolher cada um tem duas opções.

> C.P: A partir do diálogo, observamos que a aluna A1 realizou um *cálculo relacional*. Ao conseguir explicar a operação de pensamento envolvida no cálculo, ela demonstra com clareza o raciocínio combinatório envolvido no quadro.

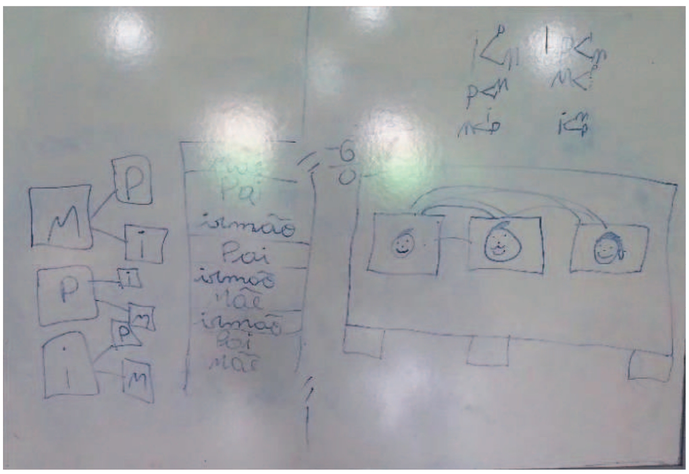
PP: Pessoal vocês concordam?
Todos os alunos em conjunto: Sim!
PP: Então porque aqui tem somente três possibilidades (referindo-se à resolução da dupla D1) e aqui tem 6 (referindo-se à resolução da dupla D2)?
Aluna A10: Porque aqui (referindo-se a resolução da dupla D1) eles mudaram as fotos somente uma vez para cada pessoa e nesse aqui (referindo-se a resolução da dupla D2) foi duas.

> C.P: As possibilidades de permutação dos elementos entre os agrupamentos formados, foi a justificativa apresentada pelo aluno A10 para explicar o erro encontrado na resolução da dupla D2. Diante disso, entendemos que o aluno demonstra compreender com clareza os invariantes do problema.

PP: E aí pessoal foi por isso mesmo?
Todos os alunos em conjunto: Sim!
PP: Foi isso mesmo, vocês estão corretos.

Fonte: Acervo da pesquisadora

Figura 41 - Registro escrito de resoluções socializadas

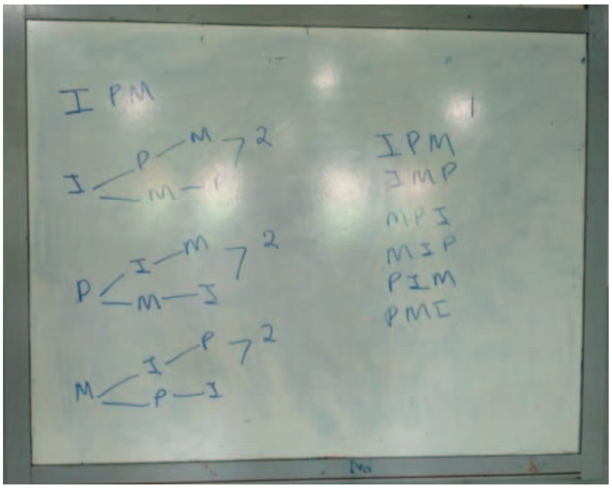


Fonte: Acervo da pesquisadora

> C.P: Consideramos que a exploração das diferentes resoluções em conjunto ajudou aos alunos a perceberem a possibilidade de resolver os problemas combinatórios utilizando como estratégia o cálculo aritmético. A socialização das ideias com todos os alunos da turma, possibilitou que todos conseguissem compreender com clareza o significado dos números e operações envolvidas no cálculo

Após a socialização das resoluções, formalizamos as ideias construídas apresentado para classe a resolução formal do problema 3. Para sua resolução, utilizamos como estratégia de resolução a listagem de todos os agrupamentos possíveis e as árvores das possibilidades, com o objetivo de elucidar o significado de suas ramificações.

Figura 42- Formalização das ideias



Fonte: Acervo da pesquisadora

Mesmo com a estimulação durante todas as etapas da aula, percebemos que a proposição de novos problemas não aconteceu de maneira espontânea por parte dos alunos. Diante disso, assim como no encontro anterior, logo após a exploração das diferentes estratégias de resolução e formalização das ideias, pedimos para que os alunos elaborassem problemas parecidos com o problema principal trabalhado durante a aula.

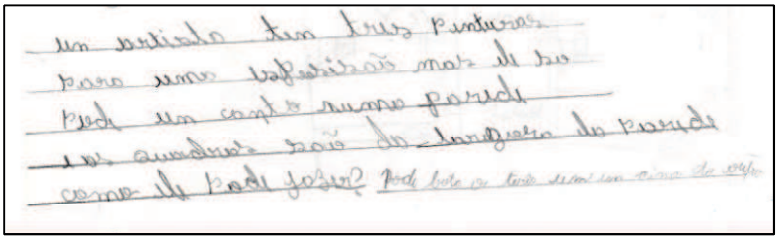
Além dos motivos apresentados em outros momentos do texto, destacamos que a estratégia realizada fundamentou-se do entendimento de que a proposição de problemas potencializa o desenvolvimento do raciocínio matemático, e, mas especificadamente, combinatório, em razão de que este tipo de pensar é sistemático e organizado, o que exige do aluno a capacidade de síntese das ideias (MORGADO *et al.*, 1991; BATANERO *et al.*, 1994; PESSOA, 2009; BORBA, PESSOA, ROCHA, 2013).

À vista disso, depreendemos que a proposição de problemas exige do aluno um grau de reflexão e síntese mais aprofundado do que o que foi realizado pelos alunos nos momentos de codificação e descodificação dos problemas. Para a proposição de um novo problema combinatório é preciso que o aluno, não somente analise criticamente os problemas trabalhados anteriormente, mas também, revise, reestruture e reorganize os conceitos construídos, para então conseguir sintetizá-los e, finalmente, envolvê-los na elaboração do novo problema proposto.

Assim como no encontro anterior, pedimos para que os alunos elaborassem problemas parecidos com principal trabalhado na aula, com o objetivo de analisar as divergências entre as características dos problemas propostos pelos alunos e o principal proposto por nós.

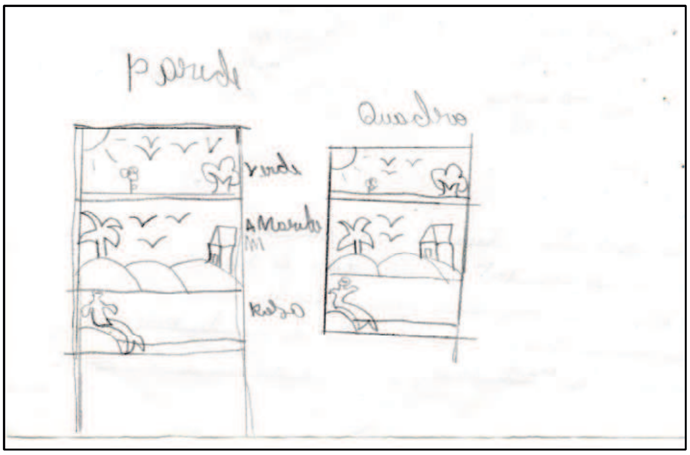
Quadro 35 - Problemas propostos pelos alunos no encontro 3

Figura 43 – Primeira parte do problema proposto pela dupla D1



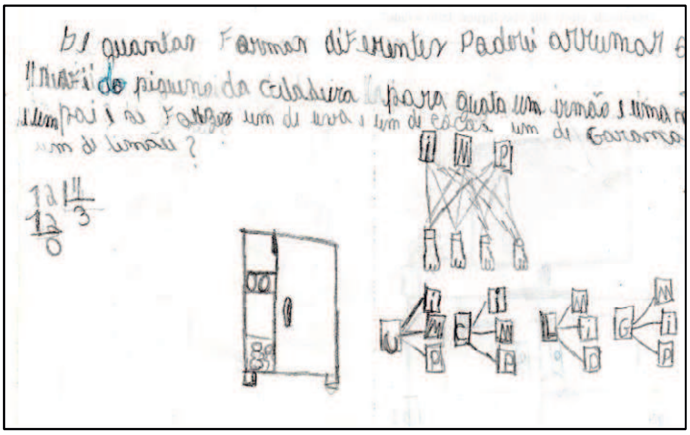
Fonte: Acervo da pesquisadora

Figura 44 - Segunda parte do problema proposto pela dupla D1



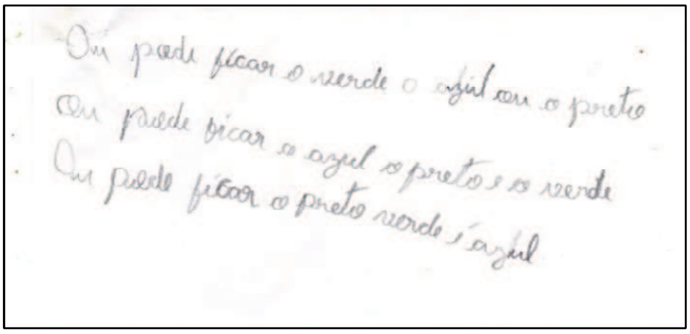
Fonte: Acervo da pesquisadora

Figura 45 - Problema proposto pela dupla D2



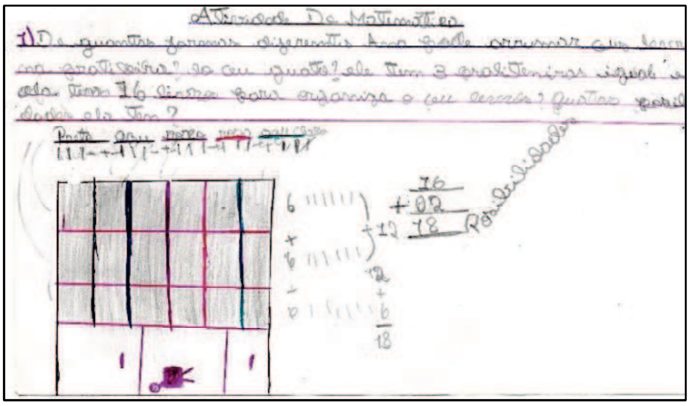
Fonte: Acervo da pesquisadora

Figura 46 - Problema proposto pela dupla D4



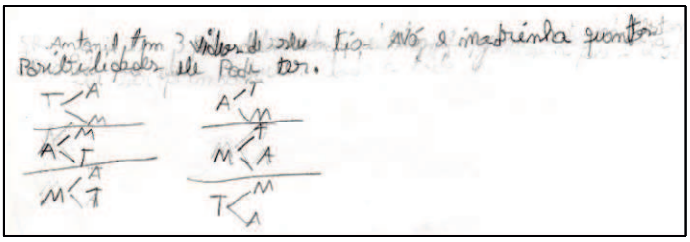
Fonte: Acervo da pesquisadora

Figura 47 - Problema proposto pela dupla D6



Fonte: Acervo da pesquisadora

Figura 48 - Problema proposto pela dupla D8



Fonte: Acervo da pesquisadora

Transcrição do texto da figura 43: Um artista tem três pinturas para uma exposisão mas ele só pode um canto numa parede e os quadros são da largura da parece como ele pode fazer? Pode bota os três um em cima do outro.
Transcrição do texto da figura 45: De quantas formas diferentes poderei arrumar 4 refri do pequeno na geladeira para guata um irmão e uma mãe e um pai, e se fossem um de uva e um de coca e um de guaraná e um de limão?
Transcrição do texto da figura 46: Ou pode ficar o verde o azul ou o preto. Ou pode ficar o azul o preto e o verde. Ou pode ficar o preto, o verde e o azul (os alunos estavam se referindo as cores de três lápis).
Transcrição do texto da figura 47: De quantas formas diferentes Ana pode arrumar ceus livros na prateleira de ceu quarto? Ele tem 3 prateleiras iguais e ela tem 16 livros para organizar o ceu livros? Quantas possibilidades ela tem?
Transcrição do texto da figura 48: Antoniel tem 3 vídeos de seu tio, avó e madrinha. Quantas possibilidades ele pode ter?

C.P: Apenas cinco duplas[16] (D1, D2, D4, D6 e D8), dentre as oito, conseguiram propor um problema. Dentre os problemas propostos, apenas o problema da dupla D2 não se trata de um problema do tipo permutação, mas sim, de produto cartesiano. O problema da referida dupla deixou de ser um problema do tipo permutação a partir do momento que questionou além das possibilidades de organização dos quatro refrigerantes na geladeira, as possibilidades de sabores de refrigerante (uva, coca, guaraná e limão) para cada uma das três pessoas (irmão, mãe e pai) envolvidas no problema. Observamos que, para a elaboração do referido problema, os alunos vincularam as ideias construídas pelo trabalho realizado no problema 2 (produto cartesiano) e 3 (permutação). O início do problema evidencia o envolvimento de invariantes do problema 3, em que se pede as possibilidades de organização dos quatros refrigerantes com sabores diferentes na geladeira. Por outro lado, dando continuidade ao texto do problema, observamos a integração dos elementos apresentados no problema 3 (irmão, pai e filho), onde relacionados a partir de uma relação de produto cartesiano, se pede os agrupamentos formados pelas combinações dos possíveis sabores de refrigerantes para cada pessoa. Diante dessa integração, compreendemos que os alunos da dupla D2 ainda não conseguiram dissociar os invariantes entre estes dois tipos de problemas combinatórios claramente, ao passo que associaram os invariantes dos dois tipos de problema em apenas um. Analisamos também que, para a proposição de novos problemas, os alunos apoiam-se em esquemas de resolução previamente desenvolvidos. Entendemos que, a razão para que isso aconteça seja a necessidade de, primeiramente, o aluno conseguir compreender o processo de resolução do problema a ser proposto, para que, posteriormente, consiga elaborá-lo seguindo como estratégias de resoluções esquemas previamente desenvolvidos pelos alunos. Diante disso, destacamos, assim como Vergnaud (1990, 1991), Pessoa (2009), Almeida (2010), Silveira (2016) e Borba (2016), a relevância dos conhecimentos prévios para a construção dos conhecimentos dos alunos. Observamos que, ao longo

[16] A dupla D7 não estava presente no encontro 3.

> de todas as etapas do estudo (Resolução, Exploração e Proposição de Problemas), os alunos demonstraram apoiar seus raciocínios em conhecimentos previamente desenvolvidos.
> Com relação aos demais problemas propostos analisamos que, embora os alunos tenham conseguido elaborar problemas de permutação, apenas duas, dentre as quatro duplas, apresentaram a resolução correta. Somente os problemas elaborados pela dupla D4 e D8 apresentaram o quantitativo de agrupamentos correto, porém, assim como na resolução do problema 3 proposto na presente aula, o quantitativo de ramificações das árvores das possibilidades, estratégia utilizada para a resolução do problema proposto, estava incompleto. Outro fato que destacamos tem a ver com incongruência observada nas resoluções apresentadas pelas duplas que conseguiram elaborar um problema do tipo permutação. As duplas que não conseguiram resolver corretamente o problema 3, proposto da aula, conseguiram apresentar uma solução correta para o problema proposto por eles, com exceção da dupla D6 que resolveu ambos incorretamente. Contrariamente a isso, a dupla D1 que conseguiu resolver corretamente o problema 3 proposto na aula, não conseguiu resolver corretamente o problema proposto pela dupla, apresentando apenas uma possibilidade de permutação, dentre as 6 possíveis. Diante de tais fatos, corroborando as ideias pontuadas por Vergnaud (1991), compreendemos que para o domínio dessa classe de situações, ou seja, para compreensão clara dos invariantes que representam os problemas de permutação, é necessário que mais situações semelhantes a estas sejam propostas, buscando aprofundar continuamente, através do trabalho reflexivo sobre o problema, as estratégias informais elaboradas pelos alunos para a promoção de uma análise crítica mais aprofundada sobre os invariantes que caracterizam este tipo de problema (ANDRADE, 1998; BRASIL, 2014).

Uma vez proposto os problemas, direcionamos nosso trabalhado para a etapa de socialização e exploração dos problemas propostos. Neste momento, convidamos alguns alunos para apresentarem o problema e a resolução elaborado por eles. Realizamos essa etapa na confiança de que a troca de ideias, oportunizada no momento de socialização das ideias, potencializa a aprendizagem do aluno em razão de que este pode aprender consigo mesmo, com o professor e com demais colegas de classe (ALMEIDA, 2010). Apresentamos, no Quadro 36, uma conversação no momento de exploração do problema proposto pela a dupla D1.

Quadro 36 - Diálogo da pesquisadora com a turma no momento de socialização das ideias

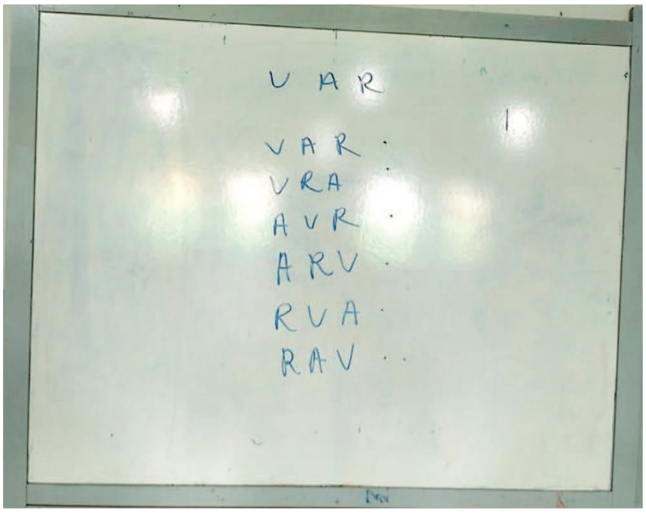
PP: Pessoal as meninas disseram que elas podem organizar as pinturas uma embaixo da outra na parede. Vocês concordam? Todos os alunos em conjunto: Sim! PP: Porque sim? (a turma ficou em silêncio) PP: Será que existe somente esta possibilidade de organizar as pinturas na parede? (a turma permaneceu em silêncio)

PP: Vamos pensar que as pinturas sejam nas cores verde, amarela e rosa. Como ele pode organizar essas pinturas na parece? Aluno A3: Um embaixo da outra. PP: Mas de que maneira ficaria? Aluno A3: Pode ficar em cima a pintura verde, depois a amarela e depois a rosa. PP: Existe outra maneira diferente dessa? Aluna A4: Amarelo, verde e rosa. Aluna A5: Pode ser também, rosa, verde e amarelo. PP: Acabou? Aluna A2: Tem rosa, amarelo e verde. PP: Tem mais alguma? Aluna A3: Tem amarelo, rosa e verde. Aluna A1: Verde, amarelo e rosa e verde, rosa e amarelo. PP: Isso mesmo. Falta mais alguma pessoa? Aluna A1: Acho que não. PP: Então vamos organizar elas. Vamos começar pelas que têm a cor verde primeiro. Como é que fica? Aluna A1: Fica verde, rosa e amarelo e também verde, amarelo e rosa. PP: Agora com a cor amarela. Como fica? Aluna A1: Amarelo, verde e rosa. PP: Depois? Aluna A1: Amarelo, rosa e verde. PP: E agora? Aluna A1: Fica rosa, verde e amarelo. Aluna A1: Rosa, amarelo e verde PP: Então gente, existe quantas possibilidades ao todo? Aluno A3: Seis. PP: Para quantas pinturas? Aluna A2: para três pinturas. PP: E se fosse 4 pinturas, quantas possibilidades teria? A2: Aí já seria mais possibilidades. PP: Isso mesmo. Quanto mais pinturas com cores diferentes... Aluna A1 completou: ...mas possibilidades tem.

Fonte: Acervo da pesquisadora

C.P: Corroborando as ideias de Andrade (1998) e Almeida (2010), verificamos que a troca de ideias promovida durante o processo de exploração da resolução do problema pode potencializar a aprendizagem dos alunos. Com a discussão das possíveis maneiras de organizar as pinturas, observamos que os alunos, em conjunto, conseguiram elencar todas as possibilidades, corrigindo o erro apresentado na solução da dupla D1 (composta pelas alunas A1 e A2).

Figura 49 - Registro da exploração do problema proposto pela a dupla D1



Fonte: Acervo da pesquisadora

O encontro três comprovou a dificuldade apontada pela pesquisa de Pessoa (2009), a respeito da dificuldade dos alunos dos anos iniciais em resolver problemas combinatórios de permutação. Durante o processo de resolução, observamos a dificuldade dos alunos em compreender a importância da ordem dos elementos nos agrupamentos, a maioria somente conseguiu compreender tal importância a partir de diversas problematizações provocadas pela pesquisadora. Consideramos também que o baixo índice de resoluções corretas também seja uma evidência da dificuldade observada.

Mesmo com tais dificuldades, consideramos que os alunos apresentaram uma evolução no desenvolvimento de seu raciocínio combinatório. Sutilmente, alguns apresentaram a capacidade de sistematização no levantamento das possibilidades e familiarização na contagem dos agrupamentos.

6.4 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DE UM TRABALHO REALIZADO SOBRE UM PROBLEMA DE ARRANJO – ENCONTRO 04

(20/11/2018)

Conteúdos e ideias trabalhadas: problema combinatório do tipo arranjo.

Objetivo:

- Observar que a ordenação dos elementos produz novos agrupamentos;

- Perceber que os agrupamentos são constituídos a partir da permutação de, não necessariamente, todos os elementos de um mesmo conjunto;
- Observar a diferença entre os invariantes que caracterizam o problema trabalhado nas aulas anteriores com a presente.
- Analisar as possíveis contribuições que a perspectiva metodológica da Resolução, Exploração e Proposição de Problemas pode oportuna para o ensino e aprendizagem da combinatória.

Neste encontro, trabalhamos o Problema 4:

Para representante de turma da sala de aula se candidataram 3 pessoas (Joana, Mário e Vitória). De quantas maneiras diferentes poderão ser escolhidos o representante e o vice representante?

Iniciamos a aula solicitando aos alunos que se organizassem em duplas, com seus respectivos parceiros dos encontros anteriores. Posteriormente, sucintamente, relembramos, juntamente com eles, alguns resultados encontrados no encontro 3, como as características dos invariantes do problema e as soluções encontradas.

Prosseguindo, entregamos para cada dupla uma cópia do problema 4 e pedimos que realizassem sozinhos uma leitura inicial da situação proposta pelo problema, dando-lhes um tempo para que tentassem resolver o problema e disponibilizando-nos a esclarecer possíveis dúvidas sobre seu enunciado. Enquanto isso, circulamos na sala de aula com o intuito de averiguar o trabalho realizado pelas duplas.

Inicialmente, analisamos que algumas duplas (D3, D5, D6 e D8) não conseguiram observar a importância da ordem dos elementos nos agrupamentos. Diante disso, abordamos essas duplas a fim de analisar melhor o raciocínio que seguiam.

Quadro 37 - Diálogo da pesquisadora com dupla D1

PP: O que vocês conseguiram compreender do problema? D1 (Aluna A2): Que esse é igual aquele da bicicleta que a gente já fez. Só que esse é um outro problema. PP: E aquele que a gente fez no último encontro (referindo-se ao problema 3), tem algo parecido com ele? D1 (Aluna A1): Esse não é parecido com o da outra aula não tia. Eu acho esse mais parecido com o da bicicleta. PP: Porque? Aluna A1: Porque em todos os dois, somente duas pessoas que vão ganhar.

Fonte: Acervo da pesquisadora

> C.P: Diferentemente do encontro 3, em que os alunos inicialmente apoiaram suas ideias no problema trabalhado no encontro anterior, no encontro 4, observamos que os alunos apoiaram suas ideias iniciais no trabalho realizado no primeiro encontro. Em vista disso, entendemos que a semelhança entre os invariantes dos problemas combinatórios do tipo combinação e arranjo demostra ser mais notória para a percepção dos alunos do que em relação aos problemas combinatórios do tipo permutação e arranjo, que também possuem invariantes semelhantes. A não obrigatoriedade do envolvimento de todos os elementos nos agrupamentos, demonstrou ser mais perceptível do que a importância da ordem dos elementos nos agrupamentos. Outra razão creditada a essa associação, diz respeito à diferença na dificuldade de compreender o significado da permutação e combinação nos problemas combinatórios. A partir das análises dos encontros anteriores, notamos que o significado do problema de combinação evidenciou ser mais fácil, comparado à compreensão ao significado do problema de permutação. No primeiro encontro, analisamos que quatro duplas resolveram corretamente o problema proposto, enquanto que, no terceiro encontro nenhuma das resoluções apresentadas pelas duplas estavam totalmente corretas. Essa dificuldade na compreensão do significado dos problemas de permutação também foi observada na pesquisa de Pessoa (2009). Dentre os diferentes tipos de problema, a pesquisadora destacou o significado de permutação como sendo o de mais difícil compreensão no Ensino Fundamental I. Alicerçados em tais fatos, defendemos a importante de propor aos alunos classes de situações para as quais eles ainda não possuem todas as competências necessárias, mas que, a partir de seus conhecimentos prévios, consigam refletir, explorar e articular suas ideias para o favorecimento da construção de novos conhecimentos (Vergnaud, 1990). A partir desse processo de reflexão, síntese e articulação dos conhecimentos prévios, o raciocínio combinatório das alunas A1 e A2, assim como os da maioria da classe, foi favorecido em razão da compreensão dos invariantes do problema combinatório de arranjo observada.
>
> Com relação às estratégias de codificação apresentada pela dupla, comprovamos que, assim como nos encontros anteriores, a codificação pode ser representada apenas oralmente, como o diálogo do quadro 37 evidencia. Observamos que, para a facilitação da compreensão do problema, a aluna A13 o representou de uma maneira mais conveniente ao contrastar as características entre o seu enunciado e o enunciado do problema 1. A codificação destacou apenas o invariante que ela conseguiu associar com o problema trabalhado no encontro 1. Destacamos que essa estratégia de codificação foi observada em todas as duplas que participaram da aula.

Logo após a compreensão das codificações apresentadas pelas duplas, iniciamos a etapa de descodificação do problema. A partir da exploração da compreensão inicial dos alunos, buscamos propor problemas secundários que os levassem a perceber a diferenciação entre os dois tipos de problemas comparados. No Quadro 38, destacamos uma conversação, dentre as ocorridas durante o processo de descodificação, em que a pesquisadora dá continuidade ao diálogo com a dupla D1.

Quadro 38 - Continuação do diálogo da pesquisadora com a dupla D1

PP: Vamos analisar comigo. No problema da bicicleta, a ordem importava? D1 (Aluna A2): A ordem importava. PP: Importava porquê? Aluna A1: A ordem importava porque não dava para os três ganhar, mas só dois. CP: É possível observar que o invariante de ordem foi confundido pela aluna A1 com o invariante que define os elementos que constituem os agrupamentos. PP: Vamos supor que vamos fazer o sorteio de uma bicicleta entre nós três. Se você for sorteada primeiro e depois ela, é a mesma coisa de ela ser sorteada primeiro e depois você? D1 (Aluna A1): Sim! PP: E aí a ordem importa? D1 (ambas as alunas): Não! PP: E neste aqui, a ordem importa? D1 (ambas as alunas): Sim! (risos) PP: Porque? D1 (Aluna A2): Porque aqui é vice e aqui é presidente, nem são dois para vice e nem dois para presidente. PP: Entendi. Então a gente já viu uma diferença não foi? D1 (Aluna A2): É.

Fonte: Acervo da pesquisadora

> C.P: Constamos que a exploração da codificação do problema, bem como a busca pela compreensão das ideias que sustentam a argumentação dos alunos, são importantes elementos que evidenciam para o professor o real entendimento dos alunos acerca do significado do problema proposto. Assim, é importante que, logo no início, o professor tenha o compromisso de analisar cuidadosamente estes elementos, com a finalidade de, posteriormente, no momento de descodificação, propor problemas secundários que estimulem o trabalho reflexivo para exploração aprofundada das ideias necessárias para a desenvolvimento da aprendizagem combinatória. Verificamos ainda que, assim como as alunas da dupla D1, os demais alunos, inicialmente confundiram os invariantes que definem os dois problemas discutidos em questão.

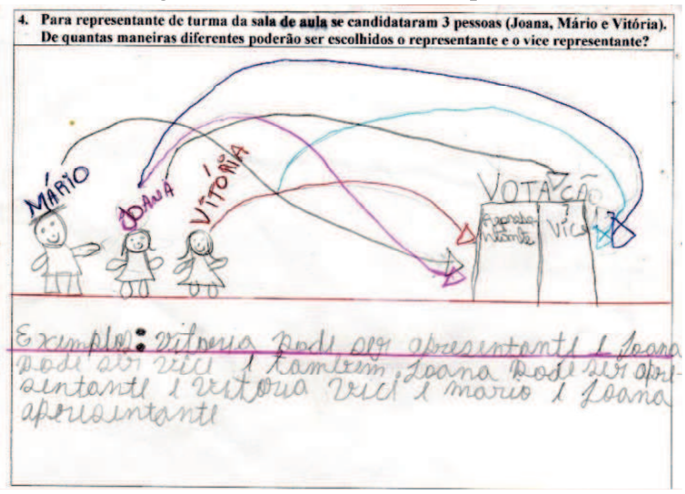
Ao que tange as representações utilizadas para representar as resoluções dos problemas, verificamos que: a) todas as duplas representaram suas resoluções em forma de desenhos, com exceção das duplas D4; b) apenas duas duplas (D2 e D7) optaram por representar as possibilidades de agrupamentos através da árvore das possibilidades e tabela; c) as duplas D1, D2 e D5 foram as únicas que representaram a resolução também através da listagem das possibilidades; d) apenas a dupla D4 optou por também representar a resolução em formato de texto; e) as duplas D2 e D7 também optaram pela representação em quadro.

Ao analisar, detalhadamente, o registro dos alunos, verificamos que a maioria das resoluções apresentava, pelo menos, uma estratégia correta. Dentre as sete duplas que participaram do encontro, apenas duas (D3 e D6) apresentaram a resolução totalmente incorreta.

> C.P: A partir de tais resultados, confiamos que o trabalho de resolução, exploração e proposição de problemas, realizado ao longo dos encontros, contribuiu para o desenvolvimento do raciocínio combinatório dos alunos. Percebemos uma evolução no índice de respostas corretas comparado aos encontros anteriores, nos quais, em média, estavam corretas entre duas ou três resoluções apresentadas pelas duplas.

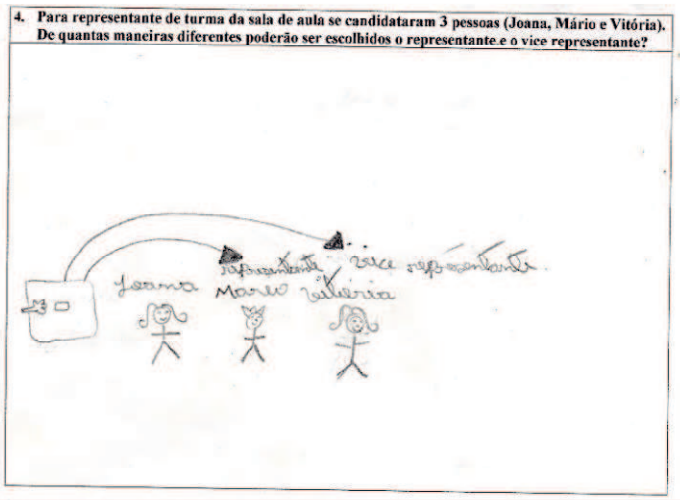
Quadro 39 - Resolução do problema 4 totalmente incorretas

Figura 50 - Resolução da dupla D3



Fonte: Acervo da pesquisadora

Figura 51 - Resolução da dupla D6



Fonte: Acervo da pesquisadora

> <u>Transcrição do texto da figura 50</u>: Exemplo: Vitória pode ser apresentante e Joana a vice e também Joana pode ser apresentante e Vitória a vice e Mário e Joana apresentante.

> C.P: Em todas as resoluções acima os alunos não conseguiram elencar todas as possibilidades de agrupamentos. A dupla D3, através do desenho, apresentou 6 possibilidades de permutação. Mesmo com o quantitativo de possibilidades correto, a ordem dos elementos nos agrupamentos formados estava incorreta. Com relação à representação em formato de texto, verificamos que essa mesma dupla apresentou apenas três possibilidades de agrupamento, dos quais um está com a ordem dos elementos incorreta. A dupla D6 não representou nenhuma possibilidade de agrupamento, o registro escrito representa apenas uma das maneiras de codificação adotada pela a dupla.

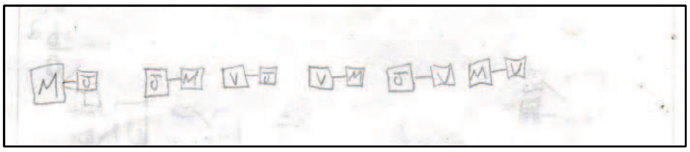
Assim como no encontro anterior, consideramos algumas resoluções como parcialmente corretas por apresentarem, pelo menos, uma das estratégias de resolução incorreta ou incompleta. No Quadro 40, expomos o registro escrito das duplas (D2, D4 e D7) que apresentaram essas resoluções.

Quadro 40 - Resolução do problema 4 parcialmente corretas

Figura 52 - Primeira parte da resolução da dupla D2

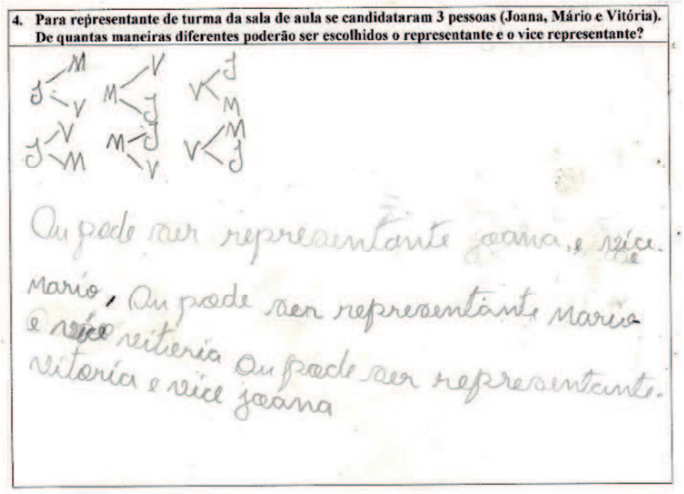
Fonte: Acervo da pesquisadora

Figura 53 - Segunda parte da resolução da dupla D2



Fonte: Acervo da pesquisadora

Figura 54 - Resolução da dupla D4



Fonte: Acervo da pesquisadora

Figura 55 - Resolução da dupla D7

Fonte: Acervo da pesquisadora

<u>Transcrição do texto da figura 54</u>: Ou pode ser representante Joana e vice Mário. Ou pode ser representante Mário e vice Vitória. Ou pode ser representante Vitória e vice Joana.

C.P: Analisamos que o sentido dado às ramificações das árvores das possibilidades é diferente entre as duplas. A partir do registro escrito, compreendemos que, assim como no encontro anterior, as duplas D2 e D4 interpretaram as fases de ramificações das árvores como sendo a posição dos elementos nos agrupamentos. Fundamentados por essa ideia, as respectivas duplas consideraram todos os elementos do conjunto, em razão que apresentaram a ramificação de três árvores a mais (o correto é apenas três), demonstrando entender que ao mudar a posição dos elementos na segunda fase das ramificações produziriam diferentes agrupamentos, o que não é correto, posto que elementos colocados nesta fase das ramificações representam as opções de

> escolha, não ordem, para os candidatos a vice representante da sala. Essa primeira estratégia de resolução adotada pelas duplas D2 e D4 evidencia que os alunos fundamentaram suas ideias nos invariantes do problema trabalhado no encontro anterior, pois apresentaram as possibilidades considerando a permutação de todos os elementos do conjunto inicial. Mesmo com tais equívocos, consideramos essa estratégia de resolução como parcialmente correta, pois analisamos que as seis árvores construídas representam para os alunos a quantidade correta de agrupamentos possíveis. Interpretamos desta maneira pois, no momento de descodificação do problema, durante as conversações, as respectivas duplas conseguiram elencar o quantitativo de agrupamentos possíveis oralmente. Destacamos ainda que as resoluções dessas duplas, representadas através de desenho e quadro, estão incorretas, pois não apresentam todas as possibilidades de agrupamentos. Com relação à dupla D2, especificamente, ressaltamos que, na segunda parte da resolução, os alunos conseguiram representar a quantidade de agrupamentos corretamente, utilizando como estratégia a listagem das possibilidades.
>
> No que se refere à resolução da dupla D7, analisamos que o significado atribuído para as ramificações das árvores está correto. A dupla apresentou as três ramificações necessárias, evidenciando compreender a ideia de hierarquia dos cargos representadas pelas fases de ramificação das árvores. Os ramos que constituem as árvores representam as opções de escolha para representante e vice representante. Na situação imposta pelo problema, o primeiro elemento da árvore representa a opção de escolha do candidato a ser representante da turma, as segundas ramificações das árvores representam as opções de escolha dos candidatos ao cargo de vice representante. Mesmo com essa estratégia de resolução correta, a dupla ainda apresentou duas estratégias (quadro e desenho) incorretas, por este fato foi considerada como parcialmente correta.

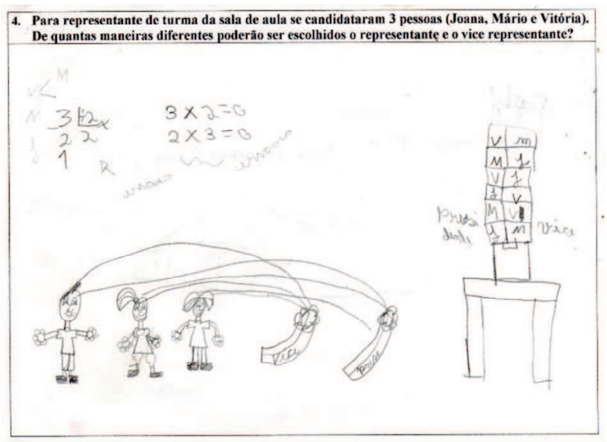
Mediante tais resultados, consideramos que a interpretação dada aos invariantes dos problemas combinatórios pode ser influenciada pela estratégia de resolução adotada pelo estudante. Entendemos que cada estratégia exige do aluno a capacidade de conseguir interpretar as características dos invariantes em diferentes perspectivas de representação. Algumas estratégias de resolução, como a listagem, conseguem representar os invariantes de uma maneira mais simples e direta, outras, como no caso das fórmulas, representam os invariantes de forma mais generalizada, que, por muitas vezes, pode dificultar na compreensão do aluno.

Verificamos que a estratégia de resolução das árvores das possibilidades, ao longo de todo o estudo, dentre as adotadas pelos alunos (desenho, listagem e quadro), demonstrou ser a de mais difícil compreensão. Em todas as representações apresentadas pelas duplas (com exceção da última apresentada pela dupla D7), observamos o equívoco na compreensão do significado das ramificações das árvores, as fases de ramificações das árvores foram consideradas pelos alunos como sendo a posição dos elementos nos agrupamentos, e não as opções de escolha dos elementos em uma dada fase da seleção dos dados.

Logo abaixo, no Quadro 41, trazemos as resoluções totalmente corretas, em que todos as estratégias de resolução adotadas pelas duplas apresentadas estão completas e corretas.

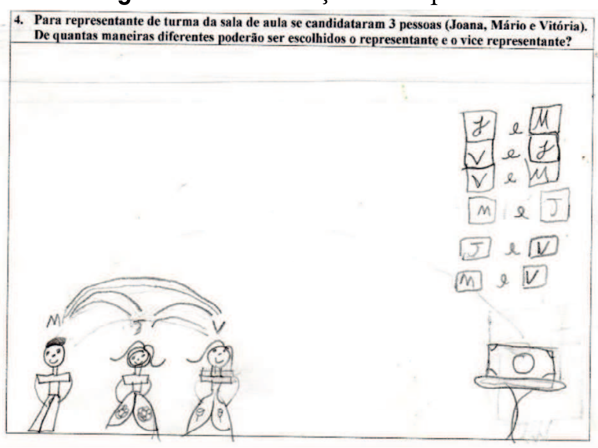
Quadro 41 - Resolução do problema 4 corretas

Figura 56 - Resolução da dupla D1



Fonte: Acervo da pesquisadora

Figura 57 - Resolução da dupla D5



Fonte: Acervo da pesquisadora

Como elucidado, as abordagens realizadas no início do processo de descodificação tinham como finalidade provocar a percepção da diferença entre os invariantes dos problemas de combinação e de arranjo. À medida que analisamos que todas as duplas demostraram tal percepção, direcionamos as abordagens para o trabalho com a exploração e proposição de problemas secundários. Destacamos que, esta mesma perspectiva de trabalho, também foi adotada com as demais duplas.

Diferentemente dos primeiros encontros (1 e 2), observamos que no encontro 3 e, principalmente, no 4, os alunos demonstraram estar mais habituados com a metodologia de ensino adotada. No início, eles ficavam à espera de uma explicação das possíveis estratégias de resolução, com o decorrer dos encontros, percebemos que essa necessidade foi diminuindo cada vez mais, ao passo que eles começaram a elaborar suas próprias estratégias de resolução, de maneira autônoma, sem necessariamente precisar serem encorajados pela pesquisadora.

Entendemos que o fato de os alunos serem estimulados, ao longo de todo o estudo, a desenvolver suas próprias estratégias de resolução dos problemas combinatórios e defendê-las, favoreceu para o desenvolvimento de sua autoestima e confiança, demonstrando a eles sua capacidade em elaborar suas próprias estratégias de resolução. Logo, assim como Onuchic e Allevato (2011), confiamos que o ensino da Matemática através da Resolução da Problemas pode contribuir para o aumento da autoconfiança dos estudantes, fazendo-os acreditar que são capazes de fazer matemática.

As estratégias de resolução passaram a se fundamentar, principalmente, nas características dos invariantes dos problemas. A finalidade atribuída para a leitura inicial do problema deixou de ser apenas a busca pela compreensão da situação imposta, mas também a necessidade de identificar os invariantes que os caracterizava. Entendemos que esse interesse em também buscar identificar os invariantes partiu da compreensão adquirida ao longo dos encontros de que para a elaboração de estratégias de resoluções válidas é preciso que as condições impostas pelos invariantes sejam consideradas.

Diante disso, percebemos que as problematizações promovidas durante o processo de exploração e proposição de problemas poderiam ser aprofundadas ainda mais. No encontro 4 discutimos diferentes dimensões do problema, o que nos possibilitou transitar entre os diferentes significados dos problemas combinatórios. No diálogo a seguir, disposto no Quadro 42, destacamos uma conversação com a dupla D2, em que a modificação de um dos dados do enunciado transformou-o em um problema de combinação. Estrategicamente, pretendíamos, com isso, contrastar as características dos dois significados, que no início do encontro haviam sido confundidos pelas duplas no momento de codificação do problema.

Quadro 42 - Diálogo da pesquisadora com dupla D2

PP: E se fosse para escolher dois representantes de turma, quantas possibilidades teria? D2 (Aluno A4): Aí ia ter só três. PP: Porque? D2 (Aluno A4): Porque tipo: se colocar Mário e Joana e depois Joana e Maria, vai ser a mesma coisa. PP: Mas se fosse assim, a ordem ia importar? D2 (ambos os alunos): Não. PP: Porque não? D2 (Aluno A3): Porque não ia ter um cargo mais baixo, ia ficar igual. PP: Se o problema fosse assim, ele seria igual aquele da bicicleta? (Os alunos ficaram em silêncio) PP: Se o problema fosse esse a ordem ia importar? D2 (ambos os alunos): Não. PP: No da bicicleta a ordem importa? D2 (Aluno A4): Não. PP: Nesse todo mundo ia poder ser representante? D2 (Aluno A4): Não, somente dois. PP: E no da bicicleta? D2 (Aluno A3): No da bicicleta só dois ganhava também. PP: E aí, eles seriam iguais? (os alunos demoraram um tempo para responder) D2 (Aluno A4): É... acho que sim tia.

Fonte: Acervo da pesquisadora

> C.P: A exploração das diferenças dimensões dos problemas pode contribuir para o desenvolvimento dos conhecimentos combinatórios. A transição provocada pela exploração de umas das dimensões do problema 4, potencializou o processo de descodificação, ao favorecer na capacidade do aluno analisar, mais profundamente, os diferentes tipos de problemas combinatórios e seus respectivos invariantes.

Durante a fase de descodificação, também tivemos a oportunidade de trabalhar a diferença entre os invariantes do problema de arranjo e permutação. Para isso, reformulamos o problema adicionando mais um cargo (suplente), para que assim todos os candidatos pudessem ser considerados nas permutações.

Além das diferentes dimensões do problema, exploramos o raciocínio generalizante dos alunos. Propomos problemas secundários, nos quais a percepção das regularidades pudesse ser potencializada, posto que é a partir da análise das regularidades que generalizações podem ser realizadas. Adicionamos mais pessoas ao problema inicial e preservamos a situação imposta pelo problema e os seus invariantes, a partir disso, questionamos para algumas duplas em que isso poderia influenciar na quantidade de possibilidades de agrupamentos. Em todas as duplas (D1, D2, D4 e D5) que foram abordadas, verificamos que nenhuma delas conseguiu determinar corretamente a quantidade de agrupamentos apenas pela generalização da situação. Em razão disso, julgamos ser necessário aprofundar mais essa discussão no momento de socialização e formalização das ideias, entendendo a importância do raciocínio generalizante para o desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Após as explorações das resoluções desenvolvidas por outras duplas, iniciamos o trabalho de socialização das ideias. Convidamos os representantes das duplas para apresentarem suas resoluções no quadro. Na oportunidade, retornamos ao trabalho da exploração do raciocínio generalizante realizado com as duplas D1, D2, D4 e D5 no momento de exploração do problema. No Quadro 43, apresentamos as problematizações[17] realizadas neste momento.

Quadro 43 - Diálogo da pesquisadora com a turma no momento de socialização e formalização das ideias

PP: Pessoal, a gente encontrou que para 6 pessoas são... Aluna A3: 6 possibilidades. (aluno completou a frase) PP: Isso. Mas e se fosse quatro pessoas, quantas possibilidades teria? Aluna A1: 8 possibilidades. PP: Porque 8? Aluna A1: Porque cada pessoa tem duas possibilidades PP: Ah... Então quanto mais pessoas, mais possibilidades? Aluna A1: É. PP: Entendi. Então como ficaria se a gente tivesse Joana, Mário, Vitória e Beatriz, por exemplo? (Os alunos ajudaram a elencar todos os agrupamentos possíveis) PP: Vamos contar para ver quantas possibilidades deram? (A contagem foi feita em conjunto) Todos em conjunto: 12. PP: Será que é isso mesmo? Aluno A7 e A13: É tia. PP: Quantas possibilidades aumentou? Aluno A3: 6. Aluna A1: Que 5 menino! Foi 6. PP: Isso mesmo aluna A1. PP: Porque que aumentou? Aluna A2: Porque aumentou uma pessoa. PP: Para 3 pessoas, a gente encontrou que existe 2 possibilidades para cada uma não foi? Alunos em conjunto: Foi! PP: E para quatro pessoas, quantas possibilidades teria cada pessoa? (os alunos ficaram em silêncio por um espaço de tempo) PP: Vamos ver aqui. Joana ficou com quantas possibilidades? (A contagem foi feita em conjunto) Todos em conjunto: 3. PP: E Mário? Aluna 1: Também. Cada um ficou com 3 possibilidades. PP: Isso. E se fosse 5 pessoas, com quantas cada uma delas ficaria?

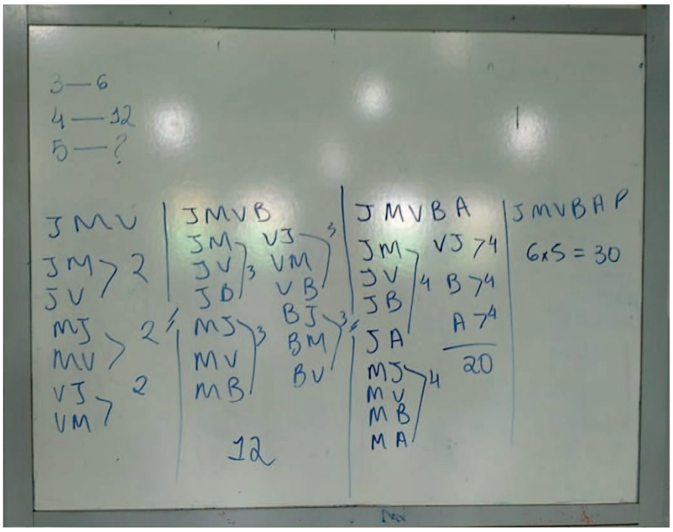
[17] Inicialmente tínhamos decidido apenas descrever como as problematizações haviam sido realizadas neste momento, não iriamos apresentar o registro do diálogo por considerá-lo extenso. Porém, ao analisá-lo melhor, decidimos por apresentá-lo na integra, com o cuidado de preservar a originalidade dos sentidos empregados nas palavras e ideias apresentadas pelos alunos e a pesquisadora.

Aluno A4: Eita tia!
PP: Porque eita? (risos)
Aluno A4: Ia ter muitas.
PP: Quantas ficaria?
Aluno A4: Não sei.
PP: E aí pessoa quantas possibilidades ficaria?
(turma permaneceu em silêncio por um tempo)
Aluno A7: 5?
PP: Porque 15?
Aluna A11: 3 tia?
PP: Porque 3?
Aluna A11: Porque ia aumenta igual a esse.
PP: Vamos fazer aqui para ver quantas ficam. Colocando Ana, como ia ficar?
Todos os alunos em conjunto: Fica Joana, Maria; Joana e Vitória; Joana e Beatriz e Joana e Ana.
PP: E agora?
(alunos em conjunto elencaram os agrupamentos possíveis ao escolher Mário como representante).
PP: E com Vitória?
Alunos em conjunto: Vitória e Joana; Vitória e Mário...
Aluna A1: Professora vai dá a mesma quantidade! (aluna A1 exclamou)
PP: A mesma quantidade de quê?
Aluna A1: Vitória vai ter 4 possibilidades também.
PP: Ah... E Beatriz e Ana?
Aluna A1: Também.
PP: Então, cada pessoa vai ter 4 possibilidades?
Aluna A1 e A2: É!
PP: E ao todo?
Aluno A1: 20, porque fica 5 para cada uma.
PP: Entendi. E aí pessoal o que vocês acham?
(a turma ficou em silêncio)
PP: É isso mesmo aluna A1.
PP: Agora eu perguntar: com quatro pessoas a gente encontrou 12 possibilidades, e com 5, 20. Então quantas possibilidades aumentou?
Aluna A1: 8.
PP: Isso mesmo.
PP: Com o aumento de uma pessoa, aumentamos?
Aluna A1: 6 possibilidades.
PP: Com duas pessoas?
Aluna A1: 8
PP: E aumentando mais três pessoas?
Aluna A1: 10, professora?
PP: 10? Porque 10?
Aluna A1: Tá aumentando dois a mais.
PP: Hum entendi.
PP: Então se eu amentasse mais 4 pessoas?
Aluna A1: Aí ia aumentar mais 12.
PP: Iria ficar quanto ao todo então?
(aluna demorou um tempo para responder)
Aluna A1: 42. Porque ia ficar 20+10=30, e 30+12=42
PP: Isso mesmo aluna A1. Parabéns você acertou!
PP: Pessoal vocês conseguiram entender o que a aluna A1 está dizendo:
Aluna A2: Sim.

Fonte: Acervo da pesquisadora

C.P: Analisamos que a exploração das resoluções, aliada à proposição de problemas, favoreceu na construção do raciocínio combinatório, ao passo que potencializou na estruturação do raciocínio generalizante e lógico dos alunos. Observamos que os problemas secundários propostos pela pesquisadora estimularam a capacidade de organização das informações, ao ponto de os alunos conseguirem observar as regularidades e semelhanças entre os resultados encontrados. Através desta percepção, entendemos que o raciocínio lógico dos alunos foi estimulado a articular e sintetizar as regularidades observadas, para que, então, o generalizante os auxiliasse a determinar previamente as possíveis quantidades de agrupamento. Os alunos conseguiram observar que: a quantidade de agrupamentos gerados dependia diretamente do número de candidatos para os cargos; cada pessoa acrescentada acarretava no aumento de mais duas possibilidades ao total. Confiamos que, através da exploração e proposição de mais problemas secundários, a pesquisadora poderia, cada vez mais, aprofundar as ideias a serem discutidas. Em razão disso, complementamos a ideia de Andrade (2017), ao entender que, não somente o trabalho de exploração, mas também de proposição dos problemas, pode ser tornar inacabado. Compreendemos que, a proposição de problemas é estimulada pela aprofundado dado a exploração das ideias envolvidas no problema principal, logo, quanto maior for grau de aprofundamento das ideias que se deseja alcançar, maior precisará ser o nível de aprofundamento dos problemas secundários propostos. Todavia, ressaltamos que, para que isso aconteça, é importante que o trabalho de exploração e proposição seja realizado de maneira articulada, e que a relação de Problema-Trabalho-Reflexões e Síntese (P-T-R-S) (ANDRADE, 1998) esteja presente durante todo o processo. E preciso que professor, constantemente, analise a capacidade de reflexão e síntese das ideias dos alunos, para, então, propor problemas e conduzir as explorações, de modo que potencialize a aprendizagem deste. Entendemos também que esse trabalho pode ser realizado entre os próprios alunos. No entanto, em nosso caso específico, não observamos tal ação entre eles, possivelmente isso não ocorreu por se tratar da primeira experiência deles vivenciando esta perspectiva metodológica.

Figura 58 - Problematizações realizadas no momento de socialização das ideias



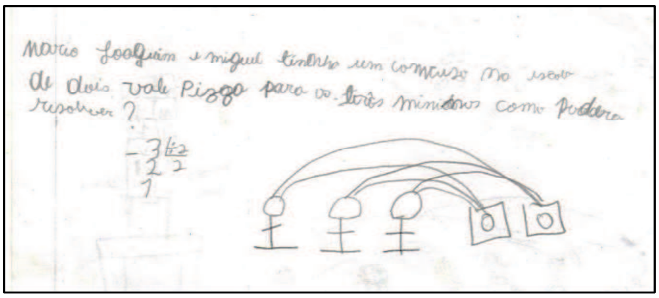
Fonte: Acervo da pesquisadora

No quarto encontro, notamos que os alunos participaram mais ativamente deste momento e demonstraram uma maior confiança para argumentar as estratégias de resolução adotadas. Entendemos que essa interação potencializou a capacidade de síntese de ideias e, consequentemente, estruturação do raciocínio combinatório deles. A assídua troca de ideias ocorrida neste momento estimulou a capacidade de síntese das ideias, uma vez que, para a devolutiva das ideais contrariadas pelos colegas, era preciso que os mesmos conseguissem sintetizar e organizar as informações dispostas, para que assim, pudessem elucidar com clareza seu pensamento para os demais colegas da classe.

Após o momento de socialização e formalização das ideias, pedimos aos alunos que elaborassem problemas parecidos com o problema principal trabalhado durante a aula, tendo em vista que, mesmo com a estimulação durante todas as etapas da aula, percebemos que a proposição de novos problemas não se dava espontaneamente por parte dos alunos.

Quadro 44 - Problemas propostos pelos alunos no encontro 4

Figura 59 - Problema proposto pela dupla D1



Fonte: Acervo da pesquisadora

Figura 60 - Problema proposto pela dupla D2

Fonte: Acervo da pesquisadora

> <u>Transcrição do texto da figura 59</u>: Mário Joaquim e Miguel tinham um concurso na escola de dois vale pizza para os três meninos como eles podera resolver?
> <u>Transcrição do texto da figura 60</u>: Na escola estava tradano duas bolas de futebol e três pessoas (José, Arthur, Kauã). De quantas maneiras diferente poderão ser escolhidos?

Verificamos que apenas a dupla D1 e D2, dentre as sete, conseguiram elaborar um problema. Os problemas elaborados consistiam em problemas combinatórios do tipo de combinação.

> C.P: Entendemos que este fato demonstra novamente a associação entre os problemas combinatórios do tipo combinação e arranjo. Mesmo com todo o trabalho desenvolvido durante o encontro, os alunos ainda demonstraram que a compreensão dos invariantes do problema combinatório de arranjo ainda não se consolidou claramente, tendo em vista que, ao invés de elaborarem um problema combinatório de arranjo, elaboraram um de combinação. Mediante isso, avaliamos ser preciso que mais situações que envolvem os invariantes dos problemas de arranjo sejam propostas aos alunos, uma vez que o conhecimento emerge da diversidade de problemas a serem resolvidos (VERGNAUD, 1982a).

Tivemos que deixar o momento de socialização dos problemas elaborados pelos alunos para o encontro seguinte, pois, neste dia, os alunos precisaram ser liberados para assistir a uma palestra na escola.

Observamos que no quarto encontro, alguns alunos demostraram estar desinteressados em buscar novas estratégias de resolução. A partir dos registros escritos apresentados, analisamos que, em todas as duplas, as estratégias de resolução já haviam sido apresentadas em outros encontros. Entendemos que esse desinteresse se originou pelo interesse em serem liberados para assistir a palestra na escola e também por estarem mais habituados com a estrutura dos problemas propostos.

6.5 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DE UM TRABALHO REALIZADO SOBRE OS PROBLEMAS COMBINATÓRIOS PROPOSTOS PELOS ALUNOS E FORMALIZAÇÃO DAS IDEIAS

(26/11/2018)

Conteúdos e ideias trabalhadas: diferenciação dos invariantes dos diferentes problemas combinatórios.

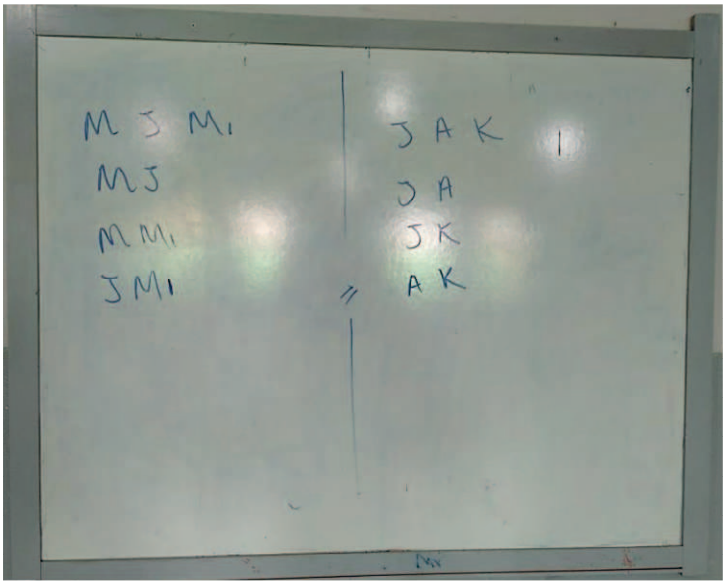
Objetivo:

- Diferenciar os invariantes dos problemas combinatórios;
- Explorar problemas propostos pelos alunos.
- Formalizar ideias construídas ao longo dos encontros.

Iniciamos o encontro pedindo que os alunos se organizassem em duplas. Após isso, entregamos os registros escritos elaborados no encontro anterior e convidamos os alunos da dupla D1 e D2 para compartilhar com a turma os problemas elaborados. Em seguida, discutimos em conjunto a validez das resoluções apresentadas pelas duplas.

O problema proposto pela dupla D1, embora não tenha sido um problema do tipo arranjo, como solicitado, foi resolvido pelas alunas corretamente. Através de desenho, as alunas representaram as três possibilidades de agrupamento. O problema elaborado pela dupla D2 também consistia em um problema de combinação, porém, a resolução apresentada pela dupla estava incorreta, pois os alunos consideraram a ordem dos elementos nos agrupamentos. Diante disso, juntamente com os alunos, resolvemos novamente os problemas, utilizando como estratégia de resolução a listagem das possibilidades dos agrupamentos.

Figura 61 - Socialização do problema proposto pelos alunos



Fonte: Acervo da pesquisadora

Observamos que as situações impostas pelos dois problemas, bem como suas estratégias de resolução, foram facilmente compreendidas pelos demais alunos, nenhum questionamento foi levantado durante o processo de resolução dos problemas. Contudo, quando questionados sobre a semelhança entre os problemas propostos com o problema 3, os alunos apontaram apenas a semelhança do não envolvimento de todos os elementos nos agrupamentos formados. A partir disso, questionamos acerca da importância da ordem dos elementos nos agrupamentos entre os três problemas (os dois propostos pelos alunos e o problema 3), no intuito de fazer com que os alunos percebessem a diferença entre os dois tipos de problemas.

> C.P: Antes dos questionamentos, os alunos não haviam observado as diferenças entre os problemas, somente após os questionamentos provocados pelas pesquisadoras, os alunos foram instigados a refletir mais profundamente acerca de suas características. O trabalho apoiado na perspectiva da Resolução de Problemas, Exploração e Proposição de Problemas exige que o professor seja perspicaz para identificar durante os processos de resolução, exploração e proposição que conceitos precisam ser melhor trabalhos, que questionamentos podem favorecer na construção de conhecimento dos alunos e em que momentos estes devem ser apresentados. Conseguir avaliar o que se deve dizer, como dizer, é um dos dilemas mais desconcertantes que os professores podem encontrar (VAN DE WALLE, 2009), pois, por um lado, o que é dito pode reduzir a reflexão dos alunos sobre o problema, e, por outro, pode conduzi-los à construção de um novo conhecimento. A questão de o professor incentivar a reflexão dos invariantes dos problemas por meio

> de questionamentos e problematizações precisa ser analisada e realizada com uma certa cautela. Pensando no trabalho que realizamos, conduzimos a exploração dos problemas propostos desta maneira, pois, durante o encontro 3, observamos que os alunos apresentaram uma compreensão não muito clara acerca da diferença entre os invariantes dos problemas.

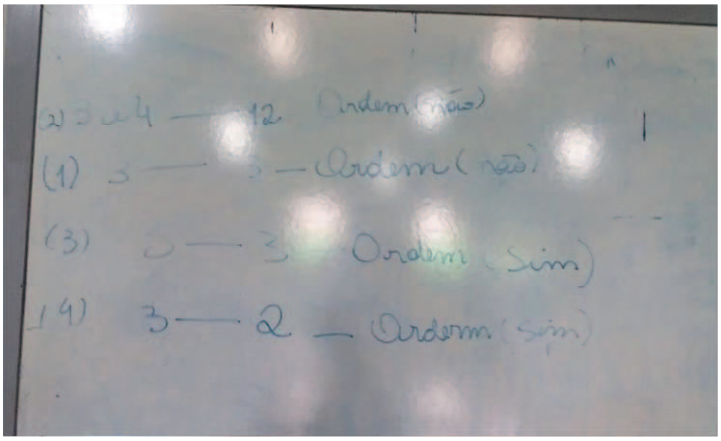
Constatamos que a socialização e exploração dos problemas propostos pelos próprios alunos pode contribuir para a aprendizagem combinatória. Falando especificadamente das situações impostas pelos problemas propostos por eles, observamos que os alunos conseguiram facilmente compreendê-las, pois descreveram situações que fazem parte de seu cotidiano. A contribuição de situações extraescolares para o ensino da combinatória também foi observado pela pesquisadora Borba (2016). De acordo com a autora, situações extraescolares como regras de um jogo, combinações de sucos e sanduíches, são ricas situações sobre Combinatória e probabilidade que podem ser trabalhadas nos primeiros ciclos de escolaridade.

Entendemos que, através da exploração dos problemas propostos pelos alunos, o professor pode discutir com mais facilidade as diferentes dimensões dos problemas que venham a favorecer no desenvolvimento do raciocínio combinatório. No nosso caso, discutimos a diferença entre os invariantes dos problemas combinatórios do tipo arranjo e permutação, confundidos pelos alunos no encontro três.

Continuando a aula, após o momento de socialização e exploração dos problemas propostos, entregamos a todas as duplas seus registros escritos desenvolvidos ao longo de todos os encontros. Em seguida, direcionamo-nos para o quadro para iniciar o trabalho de formalização das ideias. A partir de questionamentos, relembramos as características dos problemas trabalhados nos encontros anteriores, com o objetivo de contrastar as diferenças entre eles.

Começamos as problematizações tratando das diferenças e semelhanças entre o problema de permutação e arranjo. Em seguida, realizamos este mesmo trabalho, agora contrastando as características entre o problema de arranjo com o de combinação, depois, o de combinação com o de produto cartesiano e, por fim, de permutação com arranjo, e permutação e produto cartesiano. Na oportunidade, anotamos no quadro as semelhanças e diferenças entre eles e também as respostas dos problemas.

Figura 62 - Formalização das ideias



Fonte: Acervo da pesquisadora

Apresentamos, no Quadro 45, uma parte do diálogo entre a pesquisadora e os alunos da classe, no qual eles evidenciam conseguir perceber a diferenciação entre os tipos de problemas.

Quadro 45 - Diálogo entre a pesquisadora e a turma no momento de formalização das ideias

PP: Todos esses problemas aqui, eles são iguais?
Aluno A3: Não, uns a ordem importa, outros não?
PP: O que tem de diferente entre o problema 3 e o problema 1?
Aluno A3: O 3 importa, o 1 não.
PP: No problema 1 a gente fez as combinações com as três pessoas.
Aluna A2: Não.
PP: E no problema 3, a gente organizou as fotos das três pessoas?
Aluna A2: Foi a das três, a mãe o pai e o filho.
PP: E aí o que tem de diferente entre eles?
Aluna A1: Que no 1 a ordem importa...
Aluno A3: ... e no 2 não.
Aluna A1: É mais não é só isso não! No 1 a gente não combina todas as pessoas, mas no dois sim, né tia?
PP: Isso mesmo. No problema 3, a gente combinou as fotos das três pessoas, não foi? Mas no problema 4, a gente combinou as três pessoas?
Aluno A4: Não, só com duas.
PP: Então qual a diferença entre o problema 3 e 4?
Aluna A1: A ordem não é!
PP: É o que então?
Aluno A4: É porque no 3 a gente usou as três pessoas e no quatro só usamos 2.

...

(as problematizações continuaram para a comparação entre os outros tipos de problemas)

Fonte: Acervo da pesquisadora

> C.P: A diferenciação dos problemas combinatórios é importante para a aprendizagem da combinatória, pois o tipo de problema conduz a diferentes procedimentos de resoluções. Amparados pelas respostas dos alunos frente os questionamentos provocados, analisamos que a formalização das ideias permitiu que eles observassem que existem diferentes problemas que tratam da combinação de elementos e que, além disso, estes conduzem a procedimentos de resoluções diferentes

> também. Observamos ainda que a formalização dos conceitos passou a fazer mais sentido para os alunos (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011), pois eles passaram a referenciar os conceitos formalizadas com as situações trabalhadas ao longo de todos os encontros.

O encontro 5 foi o que teve menor duração (2 horas). Após o trabalho realizado de formalização das ideias, recolhemos os problemas e encerramos a aula, agradecendo aos alunos e à professora pela contribuição para a realização da pesquisa.

6.6 FECHAMENTO: REFLEXÕES DA EXPERIÊNCIA DIDÁTICA EM SALA DE AULA

Ao longo dos encontros, observamos que as estratégias de resoluções apresentadas pelos alunos cada vez mais foram se diversificando. Nos dois primeiros encontros, foram adotadas como estratégias de resolução apenas o desenho e o texto escrito. Com o decorrer dos encontros, notamos o aparecimento da estratégia das árvores das possibilidades, listagens das possibilidades, tabelas, quadros e, até mesmo, a utilização do algoritmo de divisão e multiplicação. Mediante tais resultados, confiamos que a Resolução potencializa a capacidade de os alunos pensarem matematicamente, tendo em vista que conseguiram utilizar diferentes e convenientes estratégias em diferentes problemas (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011).

Assim como as estratégias de resoluções, observamos que os argumentos apresentados pelos alunos, ao longo do estudo, tornaram mais consistentes e coerentes as características dos problemas. Nos primeiros encontros, quando questionados sobre as estratégias de resolução utilizadas, os argumentos apresentados por eles fundamentavam-se em conhecimentos espontâneos oriundos de situações extraescolares. No decorrer do estudo, estes argumentos passaram a ser fundamentados também em conhecimentos combinatórios construídos em encontros anteriores.

Quadro 46 - Evolução dos argumentos apresentados pela a dupla D1

Recorte de diálogo entre a pesquisadora e a dupla D1 no encontro 01: *D7 (Aluna A14): O Raul tinha perdido e o Junior e o Mário tinham ganhado as duas bicicletas. Mas como Junior e o Mário eram muito amigos dele, eles foram e emprestaram a bicicleta de algum deles, para os três brincarem juntos.* *PP: Existe outra possibilidade?* *D7 (Aluna A13): É Raul pode ganhar e emprestar a dele pra Junior.*

Recorte de diálogo entre a pesquisadora e a dupla D1 no encontro 04:

PP: E neste aqui, a ordem importa?
D1 (ambas as alunas): Sim! (risos)
PP: Porque?
D1 (Aluna A2): Porque aqui é vice e aqui é presidente, nem são dois para vice e nem dois para presidente.

Fonte: Acervo da pesquisadora

O índice de acertos das resoluções também foi outro ponto no qual observamos uma evolução. Gradativamente, percebemos uma evolução entre os três primeiros encontros e o último. Nos três primeiros, em média, apenas duas ou três duplas conseguiam apresentar a resolução dos problemas corretamente. No quarto encontro, apenas duas duplas apresentaram resultados totalmente incorretos.

No Quadro 47, trazemos de maneira sintetizada os principais resultados que observamos durante os encontros:

Quadro 47 - Principais representações e produções

Produções / Encontros	Representação de codificação	Representação de descodificação	Tipos de Problemas Propostos	Índice de resoluções corretas[18] por dupla
Encontro 01 (combinação)	Oral, desenho e texto escrito	Desenhos e texto escrito	--	02
Encontro 02 (produto cartesiano)	Oral, desenho e texto escrito	Desenhos e árvores das possibilidades	Combinação	02
Encontro 03 (permutação)	Oral	Desenhos, árvores das possibilidades, listagem das possibilidades e algoritmo de divisão e multiplicação	Combinação e produto cartesiano	03
Encontro 04 (arranjo)	Oral	Desenhos, árvores das possibilidades, listagem das	Combinação	05

[18] Na contagem também consideramos as resoluções parcialmente corretas por estas apresentarem algumas estratégias de resolução corretas.

		possibilidades e algoritmo de divisão e multiplicação		
Encontro 05 (problema propostos pelos alunos e formalização das ideias)	Oral	Desenhos, árvores das possibilidades, listagem das possibilidades e algoritmo de divisão e multiplicação	--	--

Fonte: Autoria própria

O aumento no índice de respostas corretas, a consistência e coerência dos argumentos e a variedade de estratégias de resolução percebida, evidenciam que a diversidade de problemas trabalhados, bem como as problematizações realizadas ao longo dos encontros favoreceram o desenvolvimento do raciocínio combinatório dos estudantes. Concordamos com Vergnaud (1982a), ao compreender que a construção do conceito para o aluno somente confere sentido quando ele o constrói a partir de uma variedade de problemas a serem resolvidos. Contudo, acreditamos também que seja necessário o professor, ao longo do processo educativo, identificar os momentos oportunos para dispor tais problemas aos alunos, de modo que os estimule a refletir sobre as características dos problemas combinatórios, permitindo-os fazer múltiplas observações dos invariantes combinatórios.

Constatamos que averiguar os raciocínios combinatórios dos alunos envolvidos nas estratégias de resoluções, para então conduzir uma ação pedagógica almejando potencializar a reflexão crítica deles no momento de descodificação do problema, sabendo julgar o que deve ser dito ao aluno, não é uma tarefa fácil. Diante de tal complexidade, notamos que a resolução de problemas, assim como a exploração, nos forneceu evidências sobre o desenvolvimento dos alunos, que foram usadas para a tomada de decisões instrucionais posteriores. A partir das conversações realizadas nestes momentos, bem como através dos registros escritos dos alunos, coletamos dados que nos auxiliaram a direcionar as problematizações no momento de socialização e formalização das ideias. Uma das situações que podemos exemplificar, refere-se a uma experiência que relatamos no encontro 04, em que a partir do trabalho desenvolvido no momento de exploração do problema 04, avaliamos que ideias precisariam ser melhor trabalhadas no momento de socialização e formalização das ideias.

O trabalho apoiado na perspectiva da Resolução, Exploração e Proposição de Problemas exige que o professor seja perspicaz para identificar, durante esses processos, que conceitos precisam ser melhor trabalhos, que questionamentos podem favorecer na construção do conhecimento dos alunos e em que momentos esses devem ser apresentados. Avaliar o que se deve dizer, como dizer, e em que momento dizer, é um dos dilemas mais desconcertantes que os professores podem encontrar, pois, por um lado, o que é dito pode reduzir a reflexão dos alunos sobre o problema, e, por outro, pode conduzi-los à construção de um novo conhecimento (VAN DE WALLE, 2009). Essa questão de que o professor deve incentivar a reflexão dos invariantes dos problemas por meio de questionamentos e problematizações precisa ser analisada e realizada com uma certa cautela.

À vista disso, entendemos que o trabalho pedagógico pautado na perspectiva metodológica defendia por Andrade (1998, 2017) não é uma tarefa fácil de ser desenvolvida, porém, recompensadora, pois verificamos que ela pode promover uma aprendizagem com significado para nossos alunos.

Como destacado em outras partes do texto, temos consciência que o trabalho com a Resolução de Problemas exige uma mudança na postura e atitudes do professor, no que se refere aos seus planejamentos e sua prática pedagógica. Embora seja uma modificação trabalhosa, a adoção da Resolução de Problemas, quando bem desempenhada, possibilita ao professor conduzir um processo educativo reflexivo, onde o aluno conjectura sobre as diferentes estratégias de resolução levantadas, passando a compreendê-las por seus próprios raciocínios. Por este motivo, concordamos com Onuchic e Allevato (2011, p.82) quando afirmam que "os professores que ensinam dessa maneira se empolgam e não querem voltar a ensinar na forma dita tradicional", uma vez que se sentem gratificados ao constatarem que seus alunos desenvolvem a compreensão por seus próprios raciocínios.

Nos primeiros encontros, observamos que os alunos tiveram dificuldade para assimilar a dinâmica da aula proposta. Nos encontros 01 e 02, demonstraram ter dificuldade para resolver os problemas de maneira autônoma. A resolução de problemas, inicialmente, era vista sob a ótica da resolução de exercícios, em que primeiramente o professor dispõe as ferramentas e procedimentos para sua resolução.

Por esse motivo, ressaltamos que o fato dos alunos ao longo dos encontros serem estimulados a desenvolver suas próprias estratégias de resolução dos problemas combinatórios e defendê-las favoreceu no desenvolvimento de sua autoestima e confiança, à medida que, em encontros posteriores, eles passaram a resolver os problemas, sem necessariamente a pesquisadora precisar encorajá-los. Esse favorecimento a autoconfiança, por conseguinte, contribuiu para a compreensão dos invariantes dos problemas, pois os alunos começaram a realizar um trabalho reflexivo sobre as características dos problemas propostos. À vista disso, indo de encontro com as ideias de Onuchic e Allevato (2011, p.82) confiamos que a Resolução de Problemas desenvolve a crença de que os alunos são capazes de fazer matemática e de que "a Matemática faz sentido; a confiança e a autoestima dos estudantes aumentam".

Consideramos também que tanto a Resolução de Problemas quanto a Exploração e a Proposição "fornece[m] dados de avaliação contínua, que podem ser usados para a tomada de decisões instrucionais e para ajudar os alunos a obter sucesso com a matemática" (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p.82). No que diz respeito à Resolução de Problemas, em todos os encontros, observamos que as primeiras abordagens realizadas nos forneceram evidências sobre o nível de desenvolvimento do raciocínio combinatório dos alunos, auxiliando-nos a delinear as futuras problematizações a serem promovidas em etapas posteriores. Através da resolução, conseguimos avaliar a influência dos conceitos previamente formados sobre as estratégias de resolução adotadas e a causa para a dificuldade de interpretação dos enunciados demonstrada pelos alunos nos dois primeiros encontros.

Pensando nas contribuições que a Exploração de Problemas promoveu ao ensino e aprendizagem da Combinatória, constatamos que através da exploração dos problemas conseguimos averiguar melhor o raciocínio combinatório dos alunos empregado nas resoluções. A exploração nos permitiu averiguar com maior aprofundamento o nível de desenvolvimento do raciocínio combinatório dos alunos. A partir dela, tivemos a possiblidade de investigar a capacidade de sistematização do raciocínio combinatório no momento de elencar as possibilidades de agrupamentos, bem como a familiarização dos alunos para a contagem desses nas diferentes situações propostas ao longo do processo.

As problematizações realizadas nesta etapa potencializaram o trabalho de reflexão sobre os problemas propostos. Mediante a isso, confiamos que o trabalho de exploração articulado ao de proposição possibilitou uma compreensão mais aprofundada das características dos invariantes dos problemas combinatórios, bem como o desenvolvimento do raciocínio combinatório, generalizante e lógico, ao passo que nos permitiu trabalhar as diferentes dimensões dos problemas propostos.

Também constatamos que a exploração e a proposição contribuíram para a evolução da consistência e coerência dos argumentos apresentados pelos alunos. Ao decorrer dos encontros, percebemos que as problematizações promovidas pelo trabalho de exploração, como de proposição, estimulavam os alunos a melhor organizar seu raciocínio para apresentá-lo de um modo mais compreensível.

No que tange às contribuições da Proposição de Problemas para o ensino e aprendizagem da Combinatória, verificamos que a utilização das situações extraescolares facilitou na elaboração dos problemas propostos pelos alunos. Todos os problemas propostos por eles retratavam situações que faziam parte do seu cotidiano.

Verificamos também que quando enxergada como uma *ferramenta de problematização*, a ser utilizada *antes, durante* e *depois* do processo de resolução e exploração de problemas, a proposição de problema possibilita ao professor realizar um ensino reflexivo, em que os alunos são instigados a refletir sobre a validade e coerência de suas ações e raciocínios.

Além dessas valiosas contribuições, observamos que proposição de problema evidencia a compreensão real dos alunos acerca dos invariantes dos problemas. Durante os encontros, observamos que, embora os alunos tenham demonstrado uma compreensão clara dos invariantes dos problemas durante o momento de resolução e exploração dos problemas, quando orientados a produzir seus próprios problemas, demonstraram ter dificuldade em elaborar problemas que envolviam os mesmos invariantes do problema inicial.

No Quadro 48, apresentamos, de maneira sintetizada, algumas observações referentes à Resolução, Exploração e Proposição de Problemas formuladas durante os encontros. Destacamos algumas observações referentes à recepção dos alunos, bem como às principais contribuições desta perspectiva metodológica para o ensino e aprendizagem da Combinatória nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Quadro 48 – Observações acerca da Resolução, Exploração e Proposição de Problemas formuladas durante os encontros

	RESOLUÇÃO	EXPLORAÇÃO	PROPOSIÇÃO
OBSERVAÇÕES SOBRE OS ALUNOS	– No primeiro encontro foi vista pelos alunos com a resolução de exercícios, em que primeiramente o professor dispõe as ferramentas	– Não observamos nenhuma estimulação a exploração dos problema por parte dos alunos.	– Nenhum aluno propôs problemas espontaneamente; – A utilização das situações extraescolares facilitou na elaboração dos problemas

	para sua resolução; – Nos dois primeiros encontros os alunos demonstraram ter mais dificuldade para resolver os problemas de maneira autônoma.		propostos pelos alunos; – Os alunos demonstraram ter dificuldades para elaborar problemas que envolviam os mesmos invariantes do problema inicial.
CONTRIBUIÇÕES AO PROCESSO EDUCATIVO DA COMBINATÓRIA	– Contribuiu para autonomia dos alunos, à medida que, estimulou a elaboração de suas próprias estratégias de resolução; – Forneceu dados sobre o nível de desenvolvimento do raciocínio combinatório dos alunos; – Evidenciou a influência dos conhecimentos prévios sobre as estratégias de resoluções adotadas pelos alunos; – Favoreceu para a compreensão dos invariantes do problema; – Demonstrou que ideias precisariam ser melhor trabalhadas nas etapas posteriores. – Beneficiou na autoconfiança dos	– Permitiu averiguar melhor o raciocínio combinatório dos alunos empregado nas resoluções; – Forneceu dados sobre o nível de desenvolvimento do raciocínio combinatório dos alunos; – Favoreceu para uma compreensão mais aprofundada das características dos invariantes dos problemas combinatórios; – Possibilitou trabalhar as diferentes dimensões dos problemas propostos; – Permitiu aprofundar a discussão sobre as características dos problemas combinatórios. – As problematizações	– Importante ferramenta de problematização no momento de resolução e exploração dos problemas combinatórios propostos por nós e pelos alunos; – Potencializou a reflexão sobre as características dos invariantes dos problemas; – Beneficiou na autoconfiança dos alunos com relação a matemática. – Demonstrou a coerência entre argumentos, os invariantes dos problemas e os métodos de resolução adotadas. – Contribuiu para estruturação do raciocínio combinatório, ao passo que estimulou a

	alunos com relação a matemática.	realizadas favoreceram na sistematização do raciocínio combinatório e na familiarização da contagem de agrupamentos; − Potencializou a capacidade de sistematização do raciocínio combinatório. − Contribuiu para a evolução da consistência e coerência dos argumentos, apresentados pelos alunos. − Estimulou a reflexão sobre o problema. − Possibilitou contrastar as diferentes características dos problemas combinatórios; − Potencializou o desenvolvimento do raciocínio combinatório, generalizante e lógico.	organização e síntese das ideias. − Evidenciou a compreensão real dos alunos sobre os invariantes dos problemas.

Fonte: Autoria própria

No encontro 04, questionamos os alunos sobre a receptividade da metodologia adotada nas aulas, em virtude disso, no quadro 49, apresentamos um recorte das respostas apresentadas pelos alunos.

Quadro 49 - Receptividade da metodologia por parte dos alunos

PP: Pessoal vocês estão gostando das atividades? Todos os alunos em conjuntos: Sim! Sim! PP: O que é que vocês mais estão gostando? Aluna A2: Porque é diferente e a professora não faz esse tipo de tarefa com a gente. PP: Somente por isso? Aluna A9: Dá para entender melhor. PP: Fica mais fácil de resolver é isso? Aluna A1: É!

Fonte: Acervo da pesquisadora

A partir do diálogo, pudemos observar que os alunos conseguiram se adaptar melhor à proposta de ensino, demostrando até mesmo satisfação. Percebemos que, no decorrer dos encontros, eles se mostraram cada vez mais entusiasmados para compartilhar suas estratégias de resolução.

Mesmo com todos os resultados favoráveis, constatamos que seria necessário realizar mais encontros, pois o trabalho de aprofundamento dos conceitos combinatórios durante as discussões teve que se limitar a apenas os encontros cedidos pela professora titular da turma. Assim, teve momentos em que percebemos que poderíamos aprofundar mais as discussões, porém, pelo espaço de tempo, decidíamos progredir para as demais etapas planejadas na dinâmica.

Entendemos também que com a realização de mais encontros os alunos poderiam desenvolver mais a maturidade para propor problemas espontaneamente, sem necessitar das provocações da pesquisadora. Ao longo de todos os encontros, observamos que os alunos buscavam sempre reorganizar seus raciocínios com o objetivo de responder as problematizações provocadas apenas pela pesquisadora durante a Resolução, Exploração e Proposição de Problemas. Gostaríamos de ter tido um pouco mais de tempo para provocar nos alunos uma mudança de atitude, que os motivasse a propor problemas em busca de compreender cada vez melhor as diferentes dimensões dos problemas propostos e os diversos conhecimentos que os estruturam.

Nas próximas linhas, apresentamos nossas considerações finais acerca de todo o estudo desenvolvido na presente pesquisa.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Refletindo sobre o aporte teórico e a pesquisa de campo desenvolvida, retornamos ao questionamento inicial apontado na introdução no nosso trabalho: *Que contribuições a proposta metodológica da Resolução, Exploração e Proposição pode promover ao processo de ensino e aprendizagem da Combinatória nos anos iniciais do Ensino Fundamental?*

A partir da finalização da pesquisa de campo foi possível constatar que a proposta metodológica da Resolução, Exploração e Proposição de Problemas contribui para a promoção da aprendizagem combinatória dos alunos, possibilitando o desenvolvimento de um processo educativo reflexivo, no qual o estudante tem a oportunidade de significar os conceitos combinatórios construídos e mobilizados durante o processo.

Com o caminhar dos encontros, observamos que o desenvolvimento do raciocínio combinatório dos alunos tornou-se cada vez mais aparente. As estratégias de resolução e os argumentos apresentados por eles passaram a se fundamentar não somente em conhecimentos espontâneos, oriundos de situações escolares e do cotidiano, mas também em conhecimentos combinatórios construídos pelo trabalho de reflexão realizado durante os encontros anteriores. Entendemos que este progresso pode ser creditado ao trabalho de reflexão sobre as problematizações provocado pela pesquisadora ao longo de todo o processo de resolução e exploração dos problemas principais e secundários propostos.

Confiamos que a ação pedagógica ancorada na relação *Problema-Trabalho-Reflexões* e *Síntese-Resultado,* defendida por Andrade (1998), potencializou a aprendizagem Combinatória. As problematizações apresentadas *antes, durante* e *depois* do processo de codificação e descodificação dos problemas incitaram os alunos a realizarem um trabalho reflexivo mais aprofundado sobre as características dos invariantes dos problemas combinatórios. Isso favoreceu, significativamente, na compreensão dos invariantes, na organização e síntese das ideias e, por conseguinte, na delimitação das estratégias de resolução para os diferentes tipos de problemas combinatórios.

Verificamos que tanto a Resolução quanto a Exploração e a Proposição de Problemas fornecem evidências sobre o desenvolvimento do raciocínio combinatório das crianças, que podem nortear o delineamento das futuras problematizações a serem elencadas em papel da aprendizagem combinatória.

Através da Exploração, é possível estimular o trabalho reflexivo sobre as características dos problemas combinatórios. Verificamos que as problematizações a cargo da exploração ajudam os alunos a compreender quando a ordem dos elementos nos agrupamentos gera, ou não, novas possibilidades de agrupamentos e quando a composição destes agrupamentos é constituída, ou não, pela combinação de todos os elementos dos conjuntos dispostos pela situação.

A flexibilidade para o levantamento das possibilidades de agrupamentos também foi outra competência favorecida pela exploração dos problemas, pois, foi por meio dela que conseguimos estimular as crianças a elencarem diferentes composições de agrupamentos. Tal competência influencia na promoção da capacidade de familiarização para a contagem de agrupamentos, posto que a flexibilidade para o levantamento das possibilidades facilita na contagem dos agrupamentos ao permitir que os alunos visualizem os agrupamentos em diferentes perspectivas de ordenação.

Além dessas contribuições, constatamos que a Exploração de Problemas também pode contribuir para a Proposição de Problemas secundários. Observamos que, conforme os alunos conseguiam solucionar os problemas secundários propostos, novos problemas poderiam ser gerados, fundamentados em problemas anteriores, permitindo que as ideias matemáticas que estruturam os conceitos combinatórios fossem estudadas mais profundamente.

Sobre este olhar, destacamos a possibilidade de aprofundar continuamente, através da exploração, as estratégias de resolução mais informais das próprias crianças. A partir da exploração, é possível aprofundarmos tais estratégias até que sejam gradativamente transformadas em procedimentos mais sistematizados, admitindo, consequentemente, que os conceitos a serem ensinados sejam melhor trabalhados.

Confiamos que, a articulação entre o trabalho de Exploração e Proposição outorga ao professor trabalhar com as diferentes dimensões de um problema. Com a exploração de problemas secundários, conseguimos transitar entre os diferentes significados dos problemas combinatórios, bem como estimular o raciocínio generalizante dos alunos. Com a modificação de, pelo menos, um invariante do problema principal, é possível reformulá-lo em outro tipo de problema combinatório, que pode ser proposto com o objetivo de explorar as diferentes características e ideias entre os dois tipos de problemas (o principal e o secundário). Ou, a partir de uma reformulação adequada, é possível também propor problemas secundários nos quais o raciocínio generalizante do aluno seja estimulado por meio da análise das regularidades em sua resolução.

A Proposição de Problemas merece destaque no trabalho desenvolvido em sala de aula. Quando vista como uma *ferramenta de problematização*, ela pode ser utilizada para nortear o processo educativo, bem como para impulsionar o trabalho de reflexão e síntese das ideias construídas no percorrer de todo o processo de resolução e exploração dos problemas. Quando apresentadas em momentos oportunos, as problematizações podem germinar reflexões que direcionam os raciocínios dos alunos à promoção da aprendizagem combinatória. Além disso, quando os alunos são incentivados a elaborar um novo problema, fundamentado por um anterior, eles estão sendo estimulados a organizar suas ideias de maneira sintetizada, para que assim possam ser integradas e apresentadas no enunciado do problema proposto por eles.

Diante as potencialidades que a Proposição de Problemas pode proporcionar ao processo educativo da Combinatória, entendemos que em nosso estudo poderíamos ter explorado um pouco mais seu potencial. Se tivéssemos um pouco mais de tempo, poderíamos propor mais problemas, provocar mais reflexões que pudessem potencializar a mobilização, articulação e construção dos conceitos combinatórios.

À vista disso, vislumbramos em futuras estudos mergulhar mais profundamente nas possíveis contribuições que a Proposição de Problemas pode promover ao processo educativo da Combinatória nos anos iniciais. Estudos nos quais, mais situações de problemas combinatórios sejam propostas, aspirando com isso, promover uma mudança de postura do aluno frente aos questionamentos, estimulando-o a sempre ir além do que é proposto e apresentado pelo professor. Ambicionamos, que os alunos possam vivenciar momentos de reflexão e síntese das ideais nos quais, sejam provocados a, de maneira espontânea, proporem problemas secundários, uma vez que a Proposição de Problemas, permite-o aprofundar, gradativamente, a complexidade de suas reflexões o que o auxilia no amadurecimento de seu conhecimento. Muitas vezes, a Proposição de Problemas, quando espontânea por parte do aluno, o possibilita ir além das expectativas de aprendizagem ambicionadas pelo professor.

Com relação a Proposição de Problemas, o tópico 17 do Grupo de Estudo do ICME[19]-14 tem se interessado sobre as possíveis potencialidades que a Proposição de Problemas pode promover para o ensino e aprendizagem de Matemática. Embora seja uma temática de pesquisa muito jovem na Educação Matemática este tópico, de acordo com ICME-14 tem crescido rapidamente nas últimas décadas. A justaposição entre o

[19] International Congress on Mathematical Education

campo de estudo da Resolução de Problemas, presente na Educação Matemática há pelos menos 70 anos, com o campo de estudo da Proposição de Problema, temática imergente, tem despertado pesquisadores na área. Com este atual cenário, os objetivos gerais do Grupo de Estudo do tópico 17 no ICME-14 são:

> 1. Apresentar uma visão geral da pesquisa e desenvolvimento existentes sobre a resolução e proposição de problemas matemáticos;
> 2. Identificar novas tendências e desenvolvimentos de pesquisa e prática sobre esses tópicos; e;
> 3. Engajar os participantes para a reflexão crítica sobre esses temas em direção a uma agenda para pesquisa e desenvolvimento futuros.
>
> (ICME-14, 2019).

A partir disso, podemos perceber que, mesmo que imergente, a temática da Proposição de Problemas vem despertando também o interessante de pesquisados em âmbitos internacionais. Questões relevantes, destacadas ICME que tratam da Proposição de Problemas para os diferentes níveis de ensino da matemática precisam ser analisadas, tais como:

> – Como diferentes estruturas conceituais têm sido usadas para explicar o desenvolvimento de competências matemáticas de Proposição de Problemas (ou Resolução de Problemas)?
>
> – Como foi estudada a relação entre Resolução de Problemas e Proposição de Problemas na Educação Matemática e o que se aprendeu?
>
> – Como a Proposição de Problemas e a Resolução de Problemas são tratados pelos Professores em salas de aula de matemática? Quais são as principais características dos modelos instrucionais ou abordagens para atividades eficazes de Proposição de Problemas e de Resolução de Problemas na sala de aula de matemática?
>
> (ICME -14, 2019).

Sobre este olhar, destacamos a necessidade de discutir a importância do planejamento para as futuras ações didáticas que venham a desempenhar um trabalho educativo em conformidade com a perspectiva metodológica da Resolução, Exploração e Proposição de Problemas, para o ensino da Combinatória. E que além disso, as práticas educativas propostas sobre tal perspectiva, sejam melhores analisadas.

O trabalho pedagógico realizado a partir deste estudo foi bastante satisfatório, a partir dele, conseguimos analisar as contribuições da Proposição de Problema em contexto de sala de aula. Contudo, cabe ressaltar que os resultados só foram positivos para o ensino e aprendizagem da Combinatória, porque as possíveis problematizações a serem provocadas durante todo o processo educativo foram previamente planejadas. O planejamento possibilitou-nos ter uma ampla consciência de todas as dimensões dos problemas, o que é considerado como crucial para um trabalho pedagógico amparado na perspectiva metodológica da Resolução, Exploração e Proposição de Problemas. Dependendo das dificuldades de compreensão apresentadas pelos alunos, é preciso que o professor consiga fazer diferentes reformulações do problema, para que os alunos consigam compreender com clareza os conceitos combinatórios nele envolvidos.

Mais do que isso, consideramos extremamente importante que o professor saiba articular seus conhecimentos didáticos e de conteúdo, tendo em vista que durante o processo educativo sua prática pedagógica deve ser dirigida pelas ações dos alunos e pelo interesse em promover os objetivos de aprendizagem. Assim, é preciso que o docente consiga continuamente avaliar o desenvolvimento de seus alunos, para que fundamentado nesta análise defina quais problematizações devem ser provocadas durante o processo de resolução, exploração e proposição dos problemas, quando devem ser provocadas e as razões pelas quais elas precisam ser provocadas aos alunos.

Neste sentido, entendemos que o trabalho pedagógico pautado na perspectiva metodológica da Resolução, Exploração e Proposição de Problemas requer tempo e dedicação do professor, tanto para elaborar as propostas pedagógicas como para desenvolvê-las de maneira consistente e significativa para a aprendizagem do aluno. Saber conduzir a ação pedagógica, discernindo quais problematizações permitem uma melhor reflexão sobre os conceitos combinatórios e em que momentos devem ser provocadas, não é uma tarefa fácil de ser realizada, porém, recompensadora, quando percebemos que nossos alunos têm a oportunidade de significar sua aprendizagem.

Destacamos também que o trabalho de Exploração e Proposição de Problemas deve ser visto como um processo inacabado. Isso, permite que o professor entenda que as ideias construídas pelos alunos ao longo de tais processos, podem ser cada vez mais aprofundadas, através de novas explorações e proposição de novos problemas. Partindo dessa perspectiva, é essencial que ele compreenda que a proposição de problemas é impulsionada pelo aprofundamento dado à exploração das ideias envolvidas no problema principal. Logo, quanto maior for o grau de aprofundamento das ideias que se deseja alcançar, maior precisará ser o nível de aprofundamento dos problemas secundários propostos e vice-versa.

Todavia, para que isso aconteça, é importante que o trabalho de exploração e proposição seja realizado de maneira articulada, e que a relação de Problema-Trabalho-Reflexões e Síntese (P-T-R-S) (ANDRADE, 1998) esteja presente durante todo o processo. É preciso que o professor analise constantemente a capacidade de reflexão e síntese das ideias dos alunos, para então propor problemas e conduzir explorações que potencializem a aprendizagem do aluno.

É fato que os alunos dos anos iniciais demonstram ter dificuldades para diferenciar a natureza dos diferentes tipos de problemas combinatórios. Contudo, devemos destacar a mudança de postura dos alunos, provocada pela perspectiva metodológica adotada. Com o decorrer dos encontros, eles se mostraram estar mais interessados em investigar que estratégias de resoluções poderiam melhor representar os invariantes combinatórios presentes nas situações impostas pelos problemas.

É válido destacar também que nos primeiros encontros notamos que os alunos tiveram dificuldades para se adaptar à proposta de ensino. A resolução de problemas, inicialmente, era vista sob a ótica da resolução de exercícios, em que primeiramente o professor dispõe as ferramentas e procedimentos para sua resolução.

Tais fatores observados demonstram o quanto precisamos estar atentos ao nosso fazer pedagógico, pois, mesmo com todas as potencialidades da perspectiva metodológica apontada no presente estudo, é possível que os professores encontrem algumas dificuldades iniciais. Contudo, confiamos que tais entraves podem ser superados quando dominam o conteúdo a ser ensinado e os caminhos metodológicos a serem percorridos.

Com relação a isso, o presente estudo despertou-nos reflexões sobre o quanto as ações pedagógicas, o planejamento das aulas e o conhecimento do conteúdo estão intrinsicamente ligados à qualidade de ensino da Matemática e, em especial, da Combinatória. Compreendemos que, para a condução de um trabalho que permita maior desenvolvimento do raciocínio combinatório dos alunos, é necessário que o professor tenha propriedade do assunto a ser ensinado e da perspectiva metodológica a ser adotada. Tendo propriedade de tais conhecimentos, o professor consegue conduzir melhor o processo educativo, pois passa a compreender com clareza as estruturas Combinatórias e os percursos metodológicos apropriados para o seu ensino.

Nesse sentido, mediante a relevância do ensino da Combinatória nos anos iniciais, bem como as diversas contribuições da perspectiva metodológica da Resolução, Exploração e Proposição e Problemas ao processo educativo desse conteúdo, destacamos a necessidade de realizar pesquisas que tenham como objetivo principal desenvolver formações continuadas para os professores que atuam neste nível de escolaridade e que tenham como foco o ensino da Combinatória apoiado em tal perspectiva metodológica. Formações essas que devem apresentar e trabalhar com os docentes, de maneira teórica e prática, possibilidades metodológicas para o ensino da Combinatória, para que assim consigam futuramente, em contexto de sala real, despertar o interesse de seus alunos, proporcionando-lhes uma aprendizagem significativa.

Como sabemos, nos cursos de formação inicial dos professores que atuam nesse nível de escolaridade, o tempo destinado a disciplinas que trabalham os conteúdos específicos da Matemática é escasso. Portanto, há conteúdos que os professores devem abordar com os alunos, que são exigidos nos currículos escolares, com os quais nunca tiveram nenhum contado durante a sua formação, como acontece, em alguns casos, com os conteúdos referentes à Combinatória. Assim, entendemos que falta aos professores pedagogos, em sua formação inicial, um trabalho mais direcionado para os conteúdos específicos da Matemática, assim como uma reflexão metodológica acerca desses conteúdos que possibilite o aperfeiçoamento de saberes curriculares, disciplinares e didáticos, necessários para o desenvolvimento de um ensino de qualidade.

Finalizamos nossas considerações destacando nosso contentamento em relação às contribuições que a pesquisa oportunizou para nosso amadurecimento profissional e pessoal. Foi um caminho abstruso, porém, muito gratificante, em razão que vivenciamos experiências que nos possibilitaram crescer como pessoa e como educadores matemáticos. Ao longo dos dois anos de estudo, tivemos a oportunidade de discutir temas educacionais e sociais que engradeceram nossas concepções sobre o ato de ensinar e aprender Matemática, sobre a construção da nossa identidade profissional e também acadêmica, bem como sobre o nosso compromisso com a sociedade na condição de educadores matemáticos e formadores de opiniões.

Com base nos resultados da pesquisa desenvolvida e nas reflexões suscitadas ao decorrer deste estudo, fica evidente o nosso interesse pela temática. Nesse sentido, almejamos continuar pesquisando sobre esta área da educação, e em especial, no âmbito da Educação Combinatória nos anos iniciais do Ensino Fundamental, considerando nosso encantamento em relação ao ensino-aprendizagem desse conteúdo.

Convictos de que demos o nosso melhor para o desenvolvimento da presente pesquisa, registramos nosso desejo insaciável de sempre buscarmos melhorias para o ensino e aprendizagem da Matemática.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, A. **Ensinando e aprendendo Análise Combinatória com ênfase na Comunicação Matemática**: um estudo com o 2º ano do Ensino Médio. 2010. 166f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, 2010.

ANDRADE, S. **Ensino-aprendizagem de matemática via resolução, exploração, codificação e descodicação de problemas e a multicontextualidade da sala de aula.** 1998. 325f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, SP, 1998.

ANDRADE, A. Um caminhar crítico reflexivo sobre Resolução, Exploração e Proposição de Problemas Matemáticos no Cotidiano da Sala de Aula. *In*: ONUCHIC, L; JUNIOR, L; PIRONEL, M. (Orgs.). **Perspectivas para a Resolução de Problemas.** Livraria da Física, 2017, p. 355-395.

AZEVEDO, J. **Alunos de Anos Iniciais Construindo Árvores de Possibilidades: é melhor no papel ou no computador?.** 2013. 127f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE, 2013.

BATANERO, M.; GODINO, J; NAVARRO-PELAYO, V. **Razonamiento Combinatorio.** Espanha: Ed. Síntesis, 1994.

BATANERO, C; GODINO, J; NAVARRO-PELAYO, V. **Razonamiento Combinatorio**. Madri: Ed. Síntesis, 1996.

BATANERO, C; GODINO, J. **Developing new theoretical tools in statistics education research.** 53 Session of the International Statistical Institute. Seul Corea, 2001.

BATANERO, C; NAVARRO-PELAYO, V; GODINO, J. **Combinatorial Reasoning and its Assessment.** *In*: GAL, I.; GARFIELD, J. B. (editors). The Assessment Challenge in Statistics Educacion. IOS Press, 1997.

BERGE, C. **Principles of Combinatorics.** Ed. Elsevier, v.72, 1971.

BERNOULLI, J. **Art Conjectandi.** 1713. Disponível em: https://books.google.com.br/books?id=kD4PAAAAQAAJ&printsec=frontcover&hl=pt-BR&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false. Acesso em: 06 abr. 2018.

BOAVIDA, A. **A argumentação em Matemática: Investigando o trabalho de duas professoras em contexto de colaboração.** 2005. Tese (Doutorado) – Universidade de Lisboa. Portugal, 2005.

BORBA, Rute. **Antes Cedo do Que Tarde: o aprendizado da combinatória no início da escolarização.** Encontro de Combinatória, Estatística e Probabilidade dos Anos Iniciais. Recife – PE, 2016.

BORBA, R; LIMA, R; PESSOA, C; MARTINS, G. **Uma Análise sobre o Desenvolvimento do Raciocínio Combinatório entre Estudantes dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental e da Educação de Jovens e Adultos.** ANAIS ENCONTRO DE PESQUISA EDUCACIONAL DO NORTE E NORDESTE, 2009, Recife, PE, 2009.

BORBA, R; ROCHA, C; MARTINS, G; LIMA, R. **O Que Dizem Estudos Recentes sobre o Raciocínio Combinatório.** ENCONTRO GAÚCHO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2009, Ijuí. **Anais [...].** Ijuí, RS, 2009.

BORBA, M; PENTEADO, M. **Informática e Educação Matemática.** 4 ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora. Coleção tendências em Educação Matemática. 2010.

BORBA, R; PESSOA, C; ROCHA, Ce. **Como Estudantes e Professores de Anos Iniciais pensam sobre problemas combinatórios.** Educação Matemática e Pesquisa, São Paulo, v.15, Número Especial, p.895-908, 2013.

BOYER, C. B. **História da Matemática.** Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1999.

BOGDAM, R; BIKLEN, S. **Investigação Qualitativa em Educação.** Editora: Porto Editora. Porto, Portugal, 1994.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais.** Matemática: ensino de primeira à quarta série. Secretaria de Educação Fundamental, Brasília, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** Matemática. Brasília, DF, 1998. 152 p. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf. Acesso em: 06 jul. de 2018.

BRASIL. **Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa:** educação estatística. Secretaria de Educação Básica, Caderno 07, Brasília, 2014.

CAI, J; LESTER, F . **Por que o ensino com resolução de problemas é importante para a aprendizagem do aluno?** Tradução de Antonio Sergio Abrahão Monteiro Bastos. ISSN Eletrônico (2176-2988). 2003.

CAVALHEIRO, G. **Resolução de problemas e investigação matemática:** um processo de encontro formativa para licenciandos em matemática. 197f. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência) – Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência, Universidade Estadual Paulista, Bauru, SP, 2017.

COSTA, C. **Análise combinatória:** como abordá-la a partir do Ensino Fundamental? Anais do VII Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), Recife, 2004.

CURI, E. **Formação de Professores Polivalentes:** Uma análise de conhecimentos para ensina matemática e de crenças e atitudes que interferem na construção desses conhecimentos. 278f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP, 2004.

DANTE, L.R. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática.** São Paulo: Ática, 1989.

D'AMBROSIO, B. O professor-pesquisador diante da produção escrita dos alunos. *In*: ONUCHIC, L; JUNIOR, L; PIRONEL, M. (Orgs.). **Perspectivas para a Resolução de Problemas.** Ed. Livraria da Física, 2017, p.109-129.

D'ANTONIO, S. **Linguagem e Matemática: Uma relação conflituosa no processo de ensino?** 285 f. Dissertação - Universidade Estadual de Maringá, Maringá, Paraná, 2006.

DOMINGUES, H. **A Matemática e os jogos de azar.** In: HAZZAN, S. Fundamentos da Matemática Elementar (Combinatória/Probabilidade). São Paulo: Atual Editora, 6ªed., vol.05, 1993.

DORNELAS, A. **Resolução de problemas em análise combinatória: um enfoque voltado para alunos e professores do ensino médio.** *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004, Recife. Anais [...]. Recife, PE: SBEM, 2004.

DOSSEY, J. **The Math for Our Time.** In: Kenney, M.J.; Hirsch, C.R. Discrete Mathematics across the Curriculum, K-12: 1991, Yearbook. NCTM, 1-9, 1991.

DIAS, R. **Proposta de atividades potencialmente interdisciplinares envolvendo noções de análise combinatória e probabilidade.** Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências na Educação Básica) – UNIGRANRIO, Duque de Caxias, RJ, 2015.

DUBOIS, J. **Une Systématique de Configurations Combinatoires Simples.** Educational Studies in Mathematics, v.15, p.37-57, 1984.

EBERHARDT, I; COUTINHO, C. **Dificuldades de Aprendizagem em Matemática nas Séries Iniciais: diagnóstico e encontros.** Vivências – Revista Eletrônica de Extensão da URI Vivências, v.7, n.13: 2011, p.62-70.

ESTEVES, I. **Investigando os fatores que influenciam o raciocínio combinatório em adolescentes de 14 anos** – 8ª série do Ensino Fundamental. 203f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP, 2001.

FERRAZ, M. **Problemas de contagem no Ensino Fundamental:** novas indagações didáticas. Anais do VII Encontro Nacional de Educação Matemática, Recife, 2004.

GARDINER, A. **A Cautionary Note.** In: Kenney, M.J.; Hirsch, C.R. Discrete Mathematics across the Curriculum, K-12: 1991, Yearbook. NCTM, 10-17, 1991.

GAZIRE, E. **Resolução de Problemas: Perspectivas em Educação Matemática.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Rio Claro: UNESP, 1988

GOOS, M. **Technology and mathematics teaching and learning: What counts?** Teacher, 215, 22-25. 2010

GUIRADO, J; CARDOSO, E. **Análise combinatória:** da manipulação à formalização de conceitos. Anais do IX Encontro Paranaense de Educação Matemática. Paraná, 2007.

HART, E. **Discrete Mathematics:** na exciting and necessary addition to the secondary school curriculum, 1992.

HAZZAN, S. **Fundamentos de Matemática Elementar: Combinatória e Probabilidade,** v.5, 3. Editora Atual, 1977.

ICTM. **14 thInternational Congress on Mathematical Education.** ICME 14 to be held in Shanghai, China, 2019. Disponível em: http://www.icme14.org/static/en/index.html. Acesso em: 08 de maio de 2019.

INHELDER, R; PIAGET, J. **De la lógica del niño a la lógica del adolescente.** Barcelona, 1955.

KANTOWSKI, M. **Some thoughts on teaching for problem solving.** *In*: KRULIK, S; REYS, R. (Orgs.). Problema Solving in School Mathematics. NCTM, 1980, p. 195-203.

KILPATRICK, J. **Reformulando: abordando a Resolução de Problemas Matemáticos como Investigação.** *In*: ONUCHIC, L; JUNIOR, L; PIRONEL, M. (Org.). Perspectivas para a Resolução de Problemas. Tradução de KILPATRICK, J; Livraria da Física. São Paulo: Livraria da Física, 2017, p.163-187.

KRULIK, J; RUDNIK, J. **Reasoing and Problem Solving** – A Handbook for Elementary School Teachers. Massachussets: Allyn and Bacon. 1993.

LUCKESI, C. **Filosofia da educação.** São Paulo: Cortez, 1994.

MAGINA, S; SPINILLO, A; SÁ MELO, L. **As Estratégias de Estudantes dos Anos Iniciais na Resolução de Problema Combinatório.** ANAIS DO SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6., 2015.

MARTINHO, M. **Comunicação na sala de Matemática**: um projeto colaborativo com três professoras do ensino básico. 2007. 455 f. Tese (Doutorado) - Departamento de Educação, Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal, 2007.

MENEZES, L. **Desenvolvimento da comunicação em professores do 1º ciclo no contexto de um projecto de investigação colaborativa.** In J. Brocardo, F. Mendes, & A. M. Boavida (Eds.), Actas do XVI Seminário de Investigação em Educação Matemática. Setúbal: APM. 2005, pp. 349-364.

MERAYO, F. **Matemática Discreta.** Madri: Editora Thompson Paraninfo S.A., 2001.

MORGADO, A.; CARVALHO; CARVALHO; FENANDEZ, P. **Análise Combinatória e Probabilidade.** Rio de Janeiro: IMPA, 1991.

NAVARRO – PELAYO. **La enseñanza de la Combinatoria em Bachillerato.** Memoria de Tercer Ciclo. Departamento de Didática de la Matemática. Universidad de Granada, 1991.

NCTM. **National Council of Teachers of Mathematics:** Principles and standards for school mathematics, 2000.

NUNES, T; BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática.** Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

PAIS, L. **Ensinar e aprender Matemática.** Belo Horizonte: autêntica editora, 2013.

OLIVEIRA, G. **O Ensino da Análise Combinatória:** como classificar problemas. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, MG, 2017.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. *In*: BICUDO, M. A. V. (Org.) **Pesquisa em Educação Matemática:** Concepções e Perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999, p.199-218.

ONUCHIC, L.R.; ALLEVATO, N. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. *In*: BICUDO, M. A.; BORBA, M. (Orgs.). **Educação Matemática** – pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004, p.213-231.

ONUCHIC, L.R.; ALLEVATO, N. **Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas.** In: BICUDO, M; BORBA, M. C. (Org.) Educação Matemática: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, p.212-231, 2005.

ONUCHIC, L.R.; ALLEVATO, N. **Pesquisa em resolução de problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas.** Bolema – Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, SP, v. 25, n. 41, p. 73-98, 2011.

ONUCHIC, L.R.; ALLEVATO, N. **Proporcionalidade através da Resolução de Problemas no curso superior de Licenciatura em Matemática.** SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6., 2015, Pirenópolis. **Anais [...].** Pirenópolis, GO, 2015.

OSLEN, W. **Coleta de dados: debates e métodos fundamentais em pesquisa social.** Tradução: Daniel Bueno. Porto Alegre: Penso, 2015.

PARAÍBA. **Referenciais Curriculares do Ensino Fundamental do Estado da Paraíba.** Matemática. Ciências da Natureza. Diversidade Sociocultural. Secretaria do Estado da Educação e Cultura, João Pessoa, PB, 2010.

PESSOA, C. **Quem dança com quem: o desenvolvimento do Raciocínio Combinatório do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio.** 2009. 267f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE, 2009.

PESSOA, C; BORBA, R. **Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série.** ZETETIKÉ – Cempem – FE – Unicamp, v. 17, jan./jun., 2009.

PESSOA, C; SANTOS, L. **Listagem, invariantes, sistematização e generalização:** um caminho para o ensino de combinatória em uma turma do 5º ano do ensino fundamental. *In*: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3, 2012, Fortaleza. **Anais [...].** Fortaleza, CE, 2012, p. 1-13.

PESSOA, C; SILVA, M. **Invariantes, Generalização, Sistematização e Estratégias Bem Sucedidas:** O ensino de Combinatória no 9º ano do Ensino Fundamental. *In*: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3, 2012, Fortaleza. **Anais [...].** Fortaleza, CE, 2012, p. 1-13.

PONTE, J. **Gestão Curricular.** *In*: GTI. (Org.). O professor e o desenvolvimento curricular. Lisboa: APM, 2005, p.11-34.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: Interciência, 1985, 196p.

POLYA, G. **Mathematical Discovery: on understanding, learning, and teaching problem solving.** vol.01, Jonh Wiley & Sons, 1962.

ROA, R. **Razonamiento combinatório em estudiantes com preparación matemática avanzada.** 2000. 189f. Tese (Doutorado em Didáctica de la Matemática) – Universidade de Granada, Granada, Espanha, 2000.

ROA, R; NAVARRO-PALAYO, V. **Razonamiento Combinatorio e Implicaciones para la Enseñanza de la Probabilidad.** Jornades Europees D'estadística. Palma, p.254 – 264, 2001.

ROCHA, C. **Formação docente e o ensino de problemas combinatórios:** diversos olhares, diferentes conhecimentos. 2011. 192f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE, 2011.

ROMBERG, T. **Perspectives on Scholarship and Research Methods.** In: Grouws, D. A. (ed.) Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. NCTM, New York: Simon & Schuster, 1992, p.49-64.

SANDOVAL, I.; TRIGUEIROS, M.; LOZANO, D. **Uso de un interactivo para el aprendizaje de algunas ideas sobre combinatoria en primaria.** Anais: XII Comitê Interamericano de Educação Matemática, Querétaro, México, 2007.

SANTOS, E. **Contribuições Teóricas e Didáticas para o Ensino e Aprendizagem da Combinatória nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.** Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Cuité, PB, 2016.

SANTOS, E; SANTOS, J; MARTINS, F; SANTOS, V; BARBOSA, L. **A Produção de Conceitos Combinatórios e Probabilísticos por meio de uma Prática Problematizadora no 4º Ano Do Ensino Fundamental.** CONGRESSO NACIONAL DE PESQUISA E ENSINO EM CIÊNCIAS, 2., Campina Grande. Anais [...]. Campina Grande, PB, 2017a.

SANTOS, E; SANTOS, J; MARTINS, F; CABRAL; V, BARBOSA, Lamartine. **Contribuições das Orientações Curriculares ao Processo de Ensino e Aprendizagem da Combinatória nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.** CONGRESSO NACIONAL DE PESQUISA E ENSINO EM CIÊNCIAS, 2., Campina Grande. **Anais [...].** Campina Grande, PB, 2017b.

SERRAZINA, L. **Resolução de Problemas e Formação de Professores: um olhar sobre a situação de Portugal.** *In*: ONUCHIC, L; JUNIOR, L; PIRONEL, M. (Orgs.). Perspectivas para a Resolução de Problemas. Ed. Livraria da Física, 2017, p.55-83.

SHROEDER, T. L.; LESTER JR., F. K. **Developing understanding in mathematics via problem solving.** *In*: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Ed.). New directions for elementar school mathematics. Reston: NCTM, 1989, p. 31-32.

SHULMAN, L.S. **Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma.** Profesorado – Revista de currículum y formación del profesorado, v.9, 2, 2005, p.1-30.

SILVA, L. **Compreensão de ideias essenciais ao ensino-aprendizagem de funções via resolução, proposição e exploração de problemas**. 307f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, PB, 2013.

SILVEIRA, A. **Análise combinatória em sala de aula: uma proposta de ensino-aprendizagem via resolução, exploração e proposição de problemas.** 235f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, PB, 2016.

SILVA, J; FEITOSA, D; PEREIRA, J. **O Raciocínio Combinatório:** Crianças dos Anos Iniciais em Atividade. ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA 8., São Paulo. **Anais [...].** São Paulo, SP, 2016.

SOARES, M. **Alfabetização no Brasil** – O estado do conhecimento. Brasília: INEP/MEC, 1989.

SOUZA, A. **Análise Combinatória no Ensino Médio apoiada na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas,** 2010. 343f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, SP, 2010.

SOUZA, A; MARASCA, Escola Estadual Profa. Heloisa Lemenhe. **Ensino-Aprendizagem - Avaliação de Análise Combinatória através da Resolução de Problemas.** ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., Salvador. **Anais [...].** Salvador, BA, 2010.

SOARES, M; MORO, M. **Psicogênese do raciocínio combinatório e problemas de produto cartesiano na escola fundamental.** Anais do III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Águas de Lindóia, SP, 2006.

STANIC, G. M. A.; KILPATRICK, J. **Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum.** In: CHARLES, R. I.; SILVER, E. A. (Eds.), The teaching and assessing of mathematical problem solving. Reston, VA: NCTM e Lawrence Erlbaum, 1992. p. 1-22.

VAN DE WALLE, J.A. **Matemática no ensino fundamental:** formação de professores e aplicação na sala de aula. Tradução de Paulo H. Colenese. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VAZQUEZ, C. **O ensino da análise combinatória no Ensino Médio por meio de atividades orientadas em uma escola estadual do interior paulista.** Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) – Universidade Federal de São Carlos, SP, 2011.

VERGNAUD, G. **Cognitive and Developmental Psychology and Research in Mathematics Education:** some theoretical and methodological issues. For the Learning of Mathematics 3, p. 31-41, Canadá, 1982a

VERGNAUD, G. **A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems.** *In:* CARPENTER, T., MOSER, J.; ROMBERG, T. Addition and subtraction. A cognitive perspective. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum, 1982b, p. 39-59.

VERGNAUD, G. **Quelques problèmes theóriques de la didactique a propos d'un example: les structures additives**. Atelier International d'Eté: Récherche en Didactique de la Physique. França, 1983a.

VERGNAUD, G. **Multiplicative structures.** *In*: Lesh, R.; Landau, M. (Eds.). Acquisition of Mathematics Concepts and Processes. New York: Academic Press Inc., p. 127-174, 1983b.

VERGNAUD, G. **Psicologia do desenvolvimento cognitive didática das matemáticas** – Um Exemplo: as estrututas aditivas**.** Análise Psicológica, p. 75-90, 1986.

VERGNAUD, G. **La théorie des champs conceptuels. Recherche en Didactique des Mathématiques.** v.10, n.2, 3, p.133-170, 1990.

VERGNAUD, G. **El niño, las Matemáticas y la realidad** - Problemas de la enseñanza de las Matemáticas en la escuela primaria. Mexico: Trillas, 1991.

VERGNAUD, G. **Conceptual Fields, Problem Solving and Intelligent Computer Tools.** *In*: De Corte, E.; Linn, M.; Mandl, H.; Verschaffel, L. Computer-Based Learning Environments and Problem Solving, 1992, p. 287-308.

VERGNAUD, G. **Todos perdem quando não usamos a pesquisa na prática. Nova** Escola, ed.215, set., 2008. Disponível em: http://revistaescola.abril.com.br/matematica/fundamentos/todos-perdem-quando-nao-usamos-pesquisa-pratica-427238.shtml. Acesso em: 14 fev. 2018.

VERGNAUD, G. **O Longo e o Curto Prazo na Aprendizagem da Matemática.** Educar em Revista, n.1, Universidade Federal do Paraná, Paraná, p.15-27, 2011.

YACKEL, E; COBB, P. **Normas sociomatemáticas, argumentação e autonomia em Matemática.** Tradução do artigo publicado no Journal for Research in Mathematics Education, 27(4), 1996, p.458 – 477.

APÊNDICES

1. QUADROS COM POSSÍVEIS QUESTIONAMENTOS

Quadro 1: Roteiro para o desenvolvimento da atividade

ETAPAS	AÇÕES	POSSÍVEIS QUESTIONAMENTOS A SEREM ELENCADOS
DELIMITAÇÃO DO PROBLEMA	Selecionar problemas geradores que possibilitem trabalhar as ideias essenciais da Combinatória (seus diferentes invariantes e conceitos).	• Porque trabalhar com problemas? • Que tipos de problemas? • Em que aspectos estes problemas contribuem para o alcance dos meus objetivos?
CODIFICAÇÃO DO PROBLEMA	Será entregue cópias dos problemas para que a partir de uma leitura individual e depois em duplas, os alunos sejam estimulados a elaborar uma representação mais conveniente e simplificada do problema proposto para que facilite a sua compreensão.	• Você consegue compreender o que o problema pede? Você consegue me explicar? • O que você não consegue compreender do problema? • Será possível representar esse mesmo problema de uma maneira diferente? • Será que uma maneira diferente de representar este problema pode lhe ajudar a entendê-lo melhor? Que maneira? E porque está maneira?
DESCODIFICAÇÃO DO PROBLEMA	Será proposto que os alunos, em duplas, busquem maneiras de descodificar o mesmo para o alcance de sua solução. (Resolver os problemas)	• Você pode me explicar como você entende essa informação apresentada no problema? • Porque você interpretou essa informação desta maneira? Você se baseou em algo para interpretá-la desta maneira? • Essa sua interpretação pode influenciar na resolução do problema? Como e porquê?
ESTIMULAR A EXPLORAÇÃO E PROPOSIÇÃO	Esta etapa acontecerá simultaneamente com a anterior. Enquanto os alunos, em dupla, buscam resolver os problemas, observaremos seus comportamentos e	• Se alteramos algum dado do problema será que isso influenciaria na sua resolução? • E se tivéssemos mais pessoas, envolvidas, como

	estimularemos o trabalho colaborativo e investigativo. Daremos tempo para que os alunos tenham a oportunidade de refletir sobre o problema incentivando-os a criar ou escolher diferentes caminhos (métodos) de resolução a partir de seus conhecimentos prévios e técnicas operatórias já conhecidas.	você responderia este problema? • A ordem de organizar/escolher as pessoas influência na resolução e resultado? Se sim/não porquê? • Você poderia me propor um problema parecido com este onde a ordem é importante? Como você o resolveria? • Você resolveu este problema da mesma maneira do outro? Sim/Não, porque? • Você enxergar alguma diferença entre este problema e o anterior que resolvemos? Quais? Isso pode influenciar na resolução? • Você acredita que sua resolução esteja correta? (Justificar a resposta) • O que podemos modificar na resolução para encontramos a solução correta? • Podemos resolver de uma maneira diferente e encontrar o mesmo resultado?
ANÁLISE CRÍTICA DAS RESOLUÇÕES	Representantes dos grupos serão convidados a registrar, no quadro, suas resoluções. A partir das resoluções expostas será discutido, em conjunto com todos os alunos, a validez das resoluções elaboradas.	• Você pode apresentar para nós como vocês resolveram este problema? • Porque vocês resolveram assim? • Alguém resolveu de mesma maneira? Se sim, porque? • O que vocês mudariam na resolução dos colegas? E porque mudaria? • Alguém resolveu de uma maneira muito diferente desta? • O que tem de diferente entre a resolução de vocês e a do colega? Você pode apresenta ela para nós? • Porque você mudou isso? • Será que assim a solução encontrada é a correta?

		• Porque vocês acreditam que a solução está incorreta? • O que podemos modificar na resolução dos colegas para encontramos a solução correta? Porque devemos modificar isto?
SÍNTESE DAS IDEIAS	Nesta etapa pretendemos, juntamente com os alunos, chegar a um consenso sobre o resultado correto dos problemas propostos com todos os alunos da classe.	• Diante estas resoluções quais vocês acreditam que seja a correta? E porquê? • Será que está outra maneira pode ser correta também? Porque? • Vocês conseguem ver algo de diferente entre este problema e o anterior que resolvemos? E porque é diferente? • Então o que podemos concluir com essa característica principal do problema?
FORMALIZAÇÃO DO CONTEÚDO	Neste momento, iremos apresentar as possibilidades de combinação por meio de listagem que leve o aluno a sistematizar seu raciocínio combinatório.	Apresentar a resolução formal mais conveniente para este nível de escolaridade.

Quadro 2: Possíveis questionamentos a serem elencados por aula

AULAS	TIPOS DE PROBLEMAS A SEREM TRABALHADOS	OBJETIVOS DAS AULAS	POSSÍVEIS QUESTIONAMENTOS
1ª e 2ª AULA	**COMBINAÇÃO E PRODUTO CARTESIANO**	**1ª AULA** • Compreender que, neste tipo de problema combinatório, a ordenação dos elementos nos agrupamentos não produz novos agrupamentos; • Perceber que a seleção e combinação dos elementos é feita entre dois ou mais elementos de um mesmo conjunto; • Analisar as possíveis contribuições que a perspectiva metodológica da Resolução, Exploração e Proposição de problemas pode oportuna para o ensino e aprendizagem da combinatória. 2ªAULA • Observar que a ordenação dos	• Vocês conseguiram me explicar o que o problema pede? • O que vocês conseguem entender a partir deste determinado dado do problema? • Será que se vocês organizarem as opções de escolha em uma ordem diferente isso influenciaria no resultado que vocês encontraram? Se sim/não porquê? • Entre este problema e o outro vocês conseguem ver alguma diferença? Sim? Qual? • Qual dos problemas vocês sentiram uma maior facilidade para resolver? Porquê? • O que vocês poderiam modificar neste problema para que resolvessem da mesma maneira que o anterior? • Desta maneira fica mais fácil/difícil de resolver porquê?

		elementos nos agrupamentos não produz novos agrupamentos; • Perceber que a seleção e combinação dos elementos é feita a partir da combinação de elementos de dois ou mais conjuntos distintos; • Observar a diferença entre os invariantes que caracterizam o problema trabalhado na aula anterior com a presente. • Analisar as possíveis contribuições que a perspectiva metodológica da Resolução, Exploração e Proposição de problemas pode oportuna para o ensino e aprendizagem da combinatória.	
3ª e 4ª AULA	**ARRANJO E PERMUTAÇÃO**	**3ª AULA** • Observar que a ordenação dos elementos nos agrupamentos produz novos agrupamentos; • Perceber que os agrupamentos são constituídos a partir	• Vocês conseguiram me explicar o que o problema pede? • O que vocês conseguem entender a partir deste determinado dado? • Será que se vocês organizarem as opções de escolha em uma ordem diferente isso pode modificar o resultado que vocês encontraram? Se sim/não porquê?

		da permutação de todos os elementos de um mesmo conjunto; • Observar a diferença entre os invariantes que caracterizam o problema trabalhado nas aulas anteriores com a presente. • Analisar as possíveis contribuições que a perspectiva metodológica da Resolução, Exploração e Proposição de problemas pode oportuna para o ensino e aprendizagem da combinatória. **4ª AULA** • Observar que a ordenação dos elementos nos agrupamentos produz novos agrupamentos; • Perceber que os agrupamentos são constituídos a partir da permutação de, não necessariamente, todos os elementos	• Entre este problema e o outro vocês conseguem ver alguma diferença? Sim? Qual? • Entre os problemas desta aula e os problemas que resolvemos na aula anterior, existe alguma diferença na resolução? Qual? Porque é diferente? • Como poderíamos modificar os problemas de hoje de maneira que estes pudessem ser resolvidos da mesma maneira dos problemas resolvidos na aula anterior? Porque modificar isso? • Dentre os problemas que você resolveu hoje qual vocês sentiram uma maior facilidade para resolver? Porquê? E entre os de hoje e os da aula anterior? Porque? • O que vocês poderiam modificar neste problema para que resolvessem da mesma maneira do primeiro da aula de hoje? • Desta maneira fica mais fácil/difícil de resolver porquê? • A ordenação dos elementos nestes dois tipos de problemas é importante? • Na resolução, vocês utilizaram todos os elementos apresentados no problema? Sim/não, porquê?

		de um mesmo conjunto; • Observar a diferença entre os invariantes que caracterizam o problema trabalhado nas aulas anteriores com a presente. • Analisar as possíveis contribuições que a perspectiva metodológica da Resolução, Exploração e Proposição de problemas pode oportuna para o ensino e aprendizagem da combinatória.	
5ª AULA	• Formalização das ideias construídas ao longo das aulas		

Quadro 3: Possíveis questionamentos a serem elencados por problema

TIPOS DE PROBLEMAS	PROBLEMAS	OBJETIVOS DOS PROBLEMAS	POSSÍVEIS QUESTIONAMENTOS
COMBINAÇÃO	1.Três alunos (Mário, Raul e Júnior) participam de um concurso em que serão sorteadas duas bicicletas. Quantos resultados diferentes podem ser obtidos no concurso?	Observar se os alunos conseguem identificar que: • A ordem de escolha e organização não gera novas possibilidades de combinação. • A natureza dos agrupamentos gerados é semelhante à natureza do conjunto gerador; • Nem todos os elementos necessariamente precisam estar envolvidos nos agrupamentos gerados.	• Vocês conseguiram compreender o que o problema pede? • Se ao invés de três alunos fossem quatro. Como vocês resolveriam? A maneira de resolver seria a mesma? Sim/não porquê? O que poderia mudar? E porque mudaria? • Se Paulo ganhar a bicicleta primeiro que Raul isso tem alguma diferença? Sim/não, porquê? • Se o primeiro a ganhar, ganhasse uma bicicleta melhor que o segundo? Isso influenciaria no resultado e na maneira de resolução? Sim/não, porquê? • Se as bicicletas fossem de cores diferentes? Isso influenciaria no resultado? • Você conseguir me propor um problema parecido com este? Você sabe resolvê-lo? Como podemos resolvê-lo?

PRODUTO CARTESIANO	2. Para a festa de São João da escola, tem 3 meninos (Pedro, Gabriel e João) e 4 meninas (Maria, Luíza, Clara e Beatriz) que querem dançar quadrilha. Se todos os meninos dançarem com todas as meninas, quantos pares diferentes poderão ser formados?	Observar se os alunos conseguem identificar que: • As combinações podem ser entre dois ou mais conjuntos. • A ordem de escolha e organização não gera novas possibilidades de combinação. • A natureza dos agrupamentos gerados é diferente do conjunto gerador; • Nem todos os elementos necessariamente precisam estar envolvidos nos agrupamentos gerados.	• Vocês conseguiram compreender o que o problema pede? • Se a escolha for primeiro em as Luíza para depois escolher Gabriel, ao invés de ser em Gabriel para depois em Luíza. Isso pode modificar o resultado final? Sim/não e porquê? • Você conseguir me propor um problema parecido com este? Você sabe resolvê-lo? Como podemos resolvê-lo? • Os problemas resolvidos na aula anterior têm algo em comum com este? Sim/não, porquê? • Você conseguir me propor um problema parecido com este? Você sabe resolvê-lo? Como podemos resolvê-lo?

PERMUTAÇÃO	3.De quantas formas diferentes poderei arrumar as fotos de meu irmão, meu pai e minha mãe na estante, de modo que elas fiquem lado a lado?	Observar se os alunos conseguem identificar que: • A ordem de escolha e organização gera novas possibilidades de combinação. • A natureza dos agrupamentos gerados é semelhante à natureza do conjunto gerador; • Todos os elementos precisam estar envolvidos nos agrupamentos gerados.	• Vocês conseguiram compreender o que o problema pede? • Se além das fotos do meu irmão, meu pai e minha mãe, eu também tivesse duas fotos de amigos meus. De quantas maneiras eu poderia organizar as fotos na estante? Como vocês resolveriam este problema? Porque resolveriam assim? Este problema é diferente do inicial? • Se eu desejasse organizar apenas as fotos de duas pessoas. O que mudaria do problema inicial? • Considerando que, a foto de meu pai deveria ser sempre a primeira. O que mudaria na resolução? Porque? • Você conseguir me propor um problema parecido com este? Você sabe resolvê-lo? Como podemos resolvê-lo?

ARRANJO	4.Para representante de turma da sala de aula se candidataram 3 pessoas (Joana, Mário e Vitória). De quantas maneiras diferentes poderão ser escolhidos o representante e o vice representante?	Observar se os alunos conseguem identificar que: • A ordem de escolha e organização gera novas possibilidades de combinação. • A natureza dos agrupamentos gerados é semelhante à natureza do conjunto gerador; • Todos os elementos precisam estar envolvidos nos agrupamentos gerados.	• Vocês conseguiram compreender o que o problema pede? • Se ao invés de 3 alunos fossem 6 alunos. Como vocês resolveriam? A maneira de resolver seria a mesma? Sim/não porquê? O que poderia mudar? E porque mudaria? • Se todos os dois a serem escolhidos fossem representantes? O que poderia mudar? E porque mudaria? • O problema anterior resolvido tem algo em comum com este? Sim/não, porquê? Qual você mais fácil resolver? • Você conseguir me propor um problema parecido com este? Você sabe resolvê-lo? Como podemos resolvê-lo?