

UNIVERSIDADE DE ESTADUAL DA PARAÍBA PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ALECIO SOARES SILVA

INDUÇÃO DE ESTRATÉGIAS DE APRENDIZAGEM MATEMÁTICA NAS QUESTÕES DAS PROVAS DA OBMEP.

ALECIO SOARES SILVA

INDUÇÃO DE ESTRATÉGIAS DE APRENDIZAGEM MATEMÁTICA NAS QUESTÕES DAS PROVAS DA OBMEP.

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento à exigência para obtenção do grau de mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Lamartine da Costa Barbosa

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

S586i Silva, Alecio Soares. Indução de estratégias de aprendizagem matemática nas questões das provas da OBMEP [manuscrito] / Alecio Soares Silva. - 2019.

91 p.: il. colorido.

Digitado.

Dissertação (Mestrado em Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Estadual da Paralba. Centro de Ciências e Tecnologia , 2019.

"Orientação : Prof. Dr. José Lamartine da Costa Barbosa , Departamento de Matemática - CCT."

1. Aprendizagem matemática. 2. OBMEP. 3. Resolução de problemas. I. Titulo

21. ed. CDD 510.7

ALECIO SOARES SILVA

INDUÇÃO DE ESTRATÉGIAS DE APRENDIZAGEM MATEMÁTICA NAS QUESTÕES DAS PROVAS DA OBMEP.

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento à exigência para obtenção do grau de mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Aprovado em: 11/04/2019

Prof. Dr. José Lamartine da Costa Barbosa – Orientador
Universidade Estadual da Paraíba- UEPB

Prof. Dr. José de Arimatéia Fernandes - Examinador Externo
Universidade Federal de Campina Grande – UFCG

Prof. Dr. Pedro Lucio Barboza- Examinador Interno
Universidade Estadual da Paraíba – UEPB

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, pela sua divina misericórdia e por tudo de tão maravilhoso quanto nos tem dado.

À minha família, pai, mãe, irmãos, e todos outros familiares pelo companheirismo, apoio e admiração que transcendem nossos laços sanguíneos.

Ao Professor Fernando José Lamartine Barbosa, meu orientador, por ter aceitado o desafio e contribuído com toda sabedoria, paciência, pelo modo respeitoso e dedicado de orientar.

Aos Professores José de Arimatéia Fernandes e Pedro Lúcio Barboza por terem aceitado participar da Banca Examinadora, assim como por toda contribuição por eles dada.

A todos meus colegas de turma pelos momentos de troca, pela grande ajuda em momentos dificeis, bem como, os momentos que pudemos compartilhar risos e tanto companheirismo.

A meus amigos Ailton Diniz, Joselito Elias, Valdson Davi, Thalita Alves e Islany Caetano pelo carinho, força, apoio e toda ajuda que puderam dispor.

À Escola Estadual Walnyza Borborema Cunha Lima.

Ao governo do estado da Paraíba pela realização do convênio com o PPGECEM.

Por fim, agradeço a todos os professores, secretários e coordenação do PPGECEM por toda contribuição dada durante esta difícil caminhada e a Universidade Estadual da Paraíba pelo oferecimento deste curso.

RESUMO

Esta pesquisa promove um estudo sobre uma proposta para o Ensino de Matemática baseada na Resolução de Problemas de olimpíadas de matemática. Tendo por objetivo principal analisar as contribuições do ensino da matemática por meio da Resolução de Problemas olímpicos, mais especialmente, propostos em edições da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), dos bancos de questões sugeridos pelos organizadores destas, e também, material preparado para treinamento de alunos para competições olímpicas realmente pode influenciar na formação de conceitos matemáticos e na elaboração de esquemas para resolução de problemas. Aqui fazemos uma abordagem histórica sobre as olimpíadas de matemática das escolas públicas, como também, uma pequena análise de pesquisas correlatas ao tema para estabelecer uma revisão da literatura. Também fazemos uma investida nos referenciais teóricos visitando a Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud e discutimos algumas abordagens de Resolução de Problemas feitas por autores da área. Em seguida, analisamos as tarefas realizadas pelos alunos, e estas análises revelaram como os alunos fazem uso dos esquemas, criando estratégias para resolver os problemas e consequentemente formando conceitos e compreendendo os conteúdos de matemática. Por fim, fazemos algumas considerações sobre os dados obtidos.

Palavras-chave: Olimpíadas de Matemática. Resolução de Problemas. Aprendizagem Matemática.

ABSTRACT

This research promotes a study on a proposal for Mathematics Teaching based on Problem Solving of Mathematical Olympiads. The main objective of this study was to analyze the teaching of mathematics through the Resolution of Olympic Problems, more specifically, proposed in editions of the Brazilian Mathematics Olympiad of Public Schools (OBMEP), of the banks of questions suggested by the organizers of these, to train students for Olympic competitions can really influence the formation of mathematical concepts and the elaboration of schemes for problem solving. Here we make a historical approach to the mathematics Olympiads of public schools, as well as a small analysis of research related to the subject to establish a review of the literature, as there is an attack on theoretical references by visiting the Conceptual Field Theory of Gérard Vergnaud and we have discussed some approaches to Problem Solving made by area authors. Then we analyze the tasks performed by the students, and these analyzes revealed how the students make use of the schemas, creating strategies to solve the problems and consequently forming concepts and understanding the contents of mathematics. Finally, we make some considerations about the data obtained.

Keywords: Mathematical Olympiads; troubleshooting; mathematical learning

LISTA DE SIGLAS

CNPq – Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico.

ICM – Congresso Internacional de Matemática.

IMO – Olimpíadas Internacionais de Matemática.

IMPA – Instituto de Matemática Pura e Aplicada.

MCTI – Ministério da Ciência e Tecnologia e Inovação.

MEC – Ministério de Educação e Cultura.

OBMEP – Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas.

PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais.

PIC – Programa de Iniciação Científica.

PIC Jr – Programa de Iniciação Científica Jr.

PICME – Programa de Iniciação Científica e Mestrado.

POTI – Pólo Olímpico de Treinamento Intensivo

PPGECEM – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional.

PUC-SP – Pontificia Universidade Católica de São Paulo.

SBM – Sociedade Brasileira de Matemática.

UEPB – Universidade Estadual da Paraíba.

UFERSA – Universidade Federal Rural do Semiárido.

UFRGS – da Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

WBCL – Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Walnyza Borborema Cunha Lima.

LISTA DE QUADROS

Quadro 1. Quantidade de alunos classificados, para segunda fase, por escolas;

Quadro 2. Quantidade de alunos classificados, para segunda fase, por escolas;

LISTA DE FIGURAS

Figura	Pág.
Figura 1 – Os conjuntos que compõem um Campo Conceitual.	28
Figura 2- Resposta de um aluno, para o problema 1 (Tarefa 1).	43
Figura 3- Resposta de um aluno, para o problema 1 (Tarefa 1).	44
Figura 4- Resposta de um dos alunos para o problema 3 (Tarefa 1).	44
Figura 5- Solução dada por um dos alunos para o problema quatro	46
(Tarefa 1).	
Figura 6 – Soluções dadas por dois alunos para o item (a) do	
problema um (Tarefa 2).	49
Figura 7. Solução dada por uma aluno para o problema 3 (Tarefa 2).	50
Figura 8 Solução dada por uma aluno para o problema 3 (Tarefa 2).	50
Figura 9. Solução dada por uma aluno para o problema 4 (Tarefa 2).	51
Figura 10. Solução dada por uma aluno para o problema 4 (Tarefa 2).	51
Figura 11. Solução dada por uma aluno para o problema 5 (Tarefa 2).	52
Figura 12. Solução dada por uma aluno para o problema 5 (Tarefa 2).	52
Figura 13. Solução dada por um dos alunos para o problema 1 da	
Tarefa 3.	54
Figura 14. Solução dada por um dos alunos para o problema 1 da	
Tarefa 3.	54
Figura 15. Solução dada por um dos alunos para o problema 1 da	
Tarefa 3.	55
Figura 16. Solução dada por um dos alunos para o problema 1 da	
Tarefa 3.	55
Figura 17. Solução dada por um dos alunos para o problema 1 da	
Tarefa 3.	55
Figura 18. Solução dada por um dos alunos para o problema 2 da	
Tarefa 3.	57
Figura 19. Solução dada por um dos alunos para o problema 2 da	
Tarefa 3.	57
Figura 20. Solução dada por um dos alunos para o problema 2 da	
Tarefa 3.	57

Figura 21. Solução dada por um dos alunos para o problema 2 da	
Tarefa 3.	58
Figura 22. Solução dada por um dos alunos para o problema 1 da	
Tarefa 4.	60
Figura 23. Solução dada por um dos alunos para o problema 2 da	
Tarefa 4.	61
Figura 24. Solução dada por um dos alunos para o problema 3 da	
Tarefa 4.	62
Figura 25. Solução dada por um dos alunos para o problema 3 da	
Tarefa 4.	62
Figura 26. Solução correta dada por um dos alunos para o problema 5	
da Tarefa 4.	63
Figura 27. Solução incorreta dada por um dos alunos para o problema	
5 da Tarefa 4.	63
Figura 28. Solução apresentada por um dos alunos para o problema 1	
da Tarefa 5.	65
Figura 29. Solução apresentada por um dos alunos para o problema 3	
da Tarefa 5.	66
Figura 30. Solução apresentada por um dos alunos para o problema 3	
da Tarefa 6.	69
Figura 31. Solução apresentada por um dos alunos para o problema 3	
da Tarefa 6.	69
Figura 32. Solução apresentada por um dos alunos para o problema 3	
da Tarefa 6.	70
Figura 33. Solução apresentada por um dos alunos para o problema 4	
da Tarefa 6.	70
Figura 34. Solução apresentada por um dos alunos para o problema 4	
da Tarefa 6.	71
Figura 35 Solução apresentada por um dos alunos para o problema 6	
da Tarefa 6.	73
Figura 36. Solução apresentada por um dos alunos para o problema 6	
da Tarefa 6.	73

SUMÁRIO

Introdução	11
1. Breve histórico sobre a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas	
Públicas	16
2. Revisão de literatura	21
3. Referenciais Teóricos	27
3.1Teoria dos Campos Conceituais na Resolução de Problemas	27
3.2 A Resolução de Problemas	30
3.3 Esquemas na Resolução de Problemas	34
4. Aspectos Metodológicos	37
4.1 Estrutura Metodológica	37
4.2 O <i>locus</i> da investigação	37
4.3 Um programa de treinamento olímpico	38
4.4 Os instrumentos de investigação	38
5. Análise dos Dados	40
Tarefa 1	40
Tarefa 2	46
Tarefa 3	52
Tarefa 4	59
Tarefa 5	62
Tarefa 6	65
6.Considerações finais	73
7. Referências	75

ANEXOS APÊNDICES

INTRODUÇÃO

Indiscutivelmente seria uma tarefa árdua e difícil, talvez até inatingível definir precisamente o que é a Matemática usando poucas palavras, contudo é fato que se pode dizer que ela é uma ciência viva, não apenas no cotidiano das pessoas, como também nas escolas, faculdades, universidades, centros de pesquisas, laboratórios e tantos outros locais relativos à produção do conhecimento.

Atualmente, existe uma imensa produção de conhecimento que se situa às margens de uma natureza lógica, característica direcionada como instrumento útil na resolução, na exploração e na formulação de problemas matemáticos, mas não só os desta natureza, pois os problemas não matemáticos, bem como científicos e tecnológicos de grande relevância, figuram com alta frequência na rotina diária atual de todos.

A Matemática, sem dúvida, possui a característica de atuar como uma forma de ler, compreender e explorar o mundo, além de possibilitar a busca por melhorias no ambiente onde se vive. O saber gerado nessa área do conhecimento é visto como um dos mais importantes frutos da construção humana como podemos ler em (LIMA, 2007) ao afirmar que:

É verdade que a matemática é bela; que seu cultivo é uma das mais elevadas expressões da intelectualidade humana; que os problemas por ela propostos constituem desafios cuja solução fortalece a auto-estima, sublima o espírito e recompensa nobremente o esforço. Tudo isso é verdade, mas não é somente por isso que a matemática é estudada na escola, em toda parte. Não é apenas por isso que a matemática é considerada cada dia mais imprescindível para a formação cultural e técnica do homem moderno (LIMA, 2007).

Evidenciando a sua interação constante com o contexto natural, social e cultural. Assim, a atuação da matemática na formação básica para a cidadania implica em refletir, discutir sobre as condições humanas de sobrevivência, sobre a interação das pessoas com o mundo, seja na produção de conhecimento, seja na exploração de recursos naturais ou também no desenvolvimento tecnológico, nas relações sociais e na cultura e sobre o desenvolvimento da crítica e do posicionamento diante das questões sociais. Logo, é importante refletir a respeito do papel da Matemática na formação do cidadão.

Nesse aspecto, percebemos que o ensino da Matemática contribui na formação humana ao desenvolver metodologias que enfatizem a construção de estratégias, a

comprovação e justificativa de resultados, a criatividade, a iniciativa pessoal, o trabalho coletivo e a autonomia que vem da confiança na própria capacidade para enfrentar os problemas. O lugar onde o estímulo deve ser desenvolvido, sem dúvida alguma é o ambiente escolar, no qual o crescimento coletivo e individual é um dos alvos a serem alcançados. Preocupando-se com isso, a qualificação de professores e estudantes e a elaboração e utilização de material didático deve ser encarada como fundamental.

Uma das ações elaboradas para melhoria da educação básica foi a criação de Olimpíadas de Matemática, que assim como sua execução, buscam promover o estudo da Matemática, promovendo a disseminação da cultura matemática, incentivando o aperfeiçoamento de escolas e professores, como também, o ingresso de jovens talentos em universidades. Sobre estas olimpíadas precisamos reconhecer que seu alcance pode estar limitado, pois inegavelmente, é possível que apenas alguns alunos se encorajem a participar dela.

Contudo, a grande importância das olimpíadas está no impacto que a preparação para as provas e na motivação por uma competição, na qual alunos não precisam ser fisicamente fortes, não precisam ser grandalhões e o que apenas está em disputa é a capacidade de resolver problemas, potencializando a vontade de participação deles. Como pode-se ler em (COSTA, 2017), ao afirmar que:

O programa de Olimpíadas de Matemática é reconhecido em todos os países do mundo desenvolvido como eficiente instrumento para atingir o objetivo motivacional. Aproveitando o natural gosto dos jovens pelas competições, as Olimpíadas de Matemática têm conseguido estimular alunos a estudar conteúdos além do currículo escolar e, também, por outro lado, aumentar e desenvolver a competência dos professores (COSTA, 2017)

Em vista desta discussão, é notado que o cotidiano de uma sala de aula revela necessidades bastante particulares, alguns alunos buscam alto desempenho, outros, menos simpatizantes com a matemática buscam apenas compreendê-la. Considerando que, no geral, os alunos têm interesses diversos, e tal fato faz com que os objetivos e as necessidades de cada um possam apontar em uma direção discrepante dos demais colegas, se faz necessário buscar metodologias capazes de despertar o interesse e a motivação do máximo deles.

Porém, é possível, e bem provável, que na escolha da estratégia metodológica o professor de uma turma não consiga atingir de forma positiva a todos os alunos, como também pode ocorrer que os resultados possam não ser positivos. Não da para crer que exista uma receita para ser seguida em sala de aula, afim de obtermos bons frutos, e que

casos de metodologias que deram certo não são raros, mas estão intrinsecamente ligados a bastante trabalho e paciência. Pois em educação o sucesso de uma estratégia, mais comumente, é atingido em longo prazo, em grande parte das vezes acontece depois de muitas tentativas frustradas e adaptações.

Sugerimos aqui uma proposta para o Ensino de Matemática baseada na Resolução de Problemas de olimpíadas de matemática, que tomará como pressuposto a Teoria dos Campos Conceituais de Gérrard Vergnaud, buscando com ela a valorização da exploração dos esquemas utilizados pelos alunos na resolução de alguns problemas e conectando os esquemas por eles criados, e cultivando uma rede, para atingir uma vasta gama de situações nas quais estão envolvidos alguns conceitos a serem formados. Tal investida será possível pela aplicação de uma sequência de tarefas, e da posterior discussão sobre as resoluções apresentadas pelos alunos, como também da exploração do problema feita pelo professor.

Contudo, essa proposta, assim como várias outras já existentes, permite que se coloquem algumas dúvidas e inquietações quanto a sua eficácia, e motiva a que levantemos o seguinte questionamento "O uso, em sala de aula, de problemas que conduzam os alunos a criarem esquemas/estratégias de resolução, realmente contribui para formação de conceitos e de elementos constituintes de campos conceituais?" Questão que conduzirá a discussão dessa pesquisa.

Sobre ela é válido dizer que a escolha de problemas Olímpicos aqui foi feita levando em conta que a competição, neles implícita, se dá de maneira motivadora e incentivadora, pois é sabido que já haviam competições intelectuais travadas na antiguidade clássica como, por exemplo, debates sobre filosofia e conhecimento na Grécia ou, grandes episódios na idade média, nos reinos, nos esportes e também nas salas de aula. Acreditamos que a competição pode elevar o nível dos envolvidos, seja simplesmente pelo fato de aguçar o desejo pela vitória, ou pela busca do alto rendimento, sendo assim, ela motiva e incentiva a necessidade de batalhar pelo conhecimento.

O Objetivo principal que propomos aqui é de analisar as contribuições da exploração dos problemas olímpicos, mais especialmente, propostos em edições da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), dos bancos de questões sugeridos pelos seus organizadores e pelos materiais preparados para

treinamento de alunos para competições olímpicas no processo de formação de conceitos matemáticos e na elaboração de esquemas para resolução de problemas.

Como Objetivos Específicos buscamos:

- Discutir estratégias de Resolução de Problemas;
- Explorar ideias que possibilitem formação de conceitos matemáticos;
- Desenvolver atividades capazes de relacionar esquemas utilizados na resolução de problemas do material usado no treinamento olímpico, com a formação de conceitos matemáticos.
- Promover atividades realizadas em grupos de estudo, buscando estimular os alunos e assim desenvolver suas habilidades de trabalho em grupo contribuindo com as interações entre eles.

Justificamos esta proposta realçando a necessidade de se criar uma relação entre a preparação para as competições olímpicas e o ensino da matemática escolar, para afastar o mito de que as olimpíadas movimentam apenas aqueles alunos que tem algum "dom", ou alguma habilidade extraordinária, propondo então, uma abordagem que utilize as olimpíadas e a preparação para elas como metodologia de ensino. Pois, é essencial que, em sala de aula, busquemos a utilização de tais recursos capazes de mostrar para os alunos o quanto o conhecimento matemático pode transcender os limites da sala de aula.

Por outro lado, é sabido que diversas políticas publicas são criadas para incentivar a preparação, tais como PIC, PICME, POTI, POTI Virtual, o programa OBMEP na Escola, o Portal da Matemática, o Portal do Saber, os incentivo às olimpíadas regionais, auxiliando a formar cidadãos capazes de evoluir, pensar e ajudar as comunidades onde vivem. E precisamos, enquanto educadores matemáticos, ter habilidade para interagir com essas possibilidades potencializando a nossa prática em sala de aula. Assim, exprimimos o cenário de investigação sobre o quanto, ou como, a Resolução de Problemas pode influenciar a formação de conceitos matemáticos, contribuindo assim, para a ampliação da diversidade dos temas pesquisados no PPGECEM.

Para tanto, organizamos este trabalho da seguinte forma. No primeiro capítulo tratamos de expor uma abordagem histórica sobre as olimpíadas de matemática das

escolas públicas. Já no segundo capítulo, fazemos uma análise de pesquisas correlatas ao tema para estabelecer uma revisão da literatura.

No terceiro capítulo fazemos uma investida nos referenciais teóricos visitando a Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud, como também as abordagens de Resolução de Problemas feitas por Polya, Onuchic, Andrade, Dante. E também, visitamos algumas possibilidades de ataque a problemas, ou melhor, de estratégias de resolução de problemas propostas por Morgado, Polya e Tao, dentre outros.

No capítulo 4 fazemos um registro metodológico do caminho para atingir o objetivo desta pesquisa. Já no capítulo 5, iniciamos a exposição dos dados obtidos com a aplicação das tarefas. Por fim, deixamos algumas conclusões baseadas em nossa pesquisa empírica, nas leituras feitas, e as referências fontes do processo de investigação.

1. UM BREVE HISTÓRICO SOBRE A OLIMPÍADA BRASILEIRA DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS PÚBLICAS

Neste capítulo faremos uma breve apresentação da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas, a fim de esclarecer para o leitor o que ela é, como ela funciona, quem são seus organizadores, dentre tantas outras informações pertinentes.

A OBMEP é uma competição que foi proposta inicialmente no ano de 2005, ela surgiu como uma Olimpíada de Matemática que envolveria apenas as Escolas Públicas da Educação Básica. Foi aí que surgiu um novo desafio, do qual não se sabia ao certo quais eram seus objetivos, contudo, houve nessa edição mais de 10 milhões de alunos inscritos, com a participação de 31.031 escolas. Possivelmente, a proposta de revelar talentos e abrir aos estudantes caminhos nas áreas científicas e tecnológicas ou, até mesmo, a premiação para os alunos, professores, escolas, municípios e Secretárias de Educação tenha sido motivo para tantas inscrições.

Os responsáveis pela realização da OBMEP, em parceria na execução com várias universidades, são o Ministério de Educação e Cultura (MEC) e o Ministério da Ciência e Tecnologia e Inovação (MCTI), estes responsáveis pelo pagamento de todos os custos. O Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) e a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), estes responsáveis pela elaboração das provas, correções e todas as situações administrativas e de logística envolvidas no processo de execução. As universidades, estas responsáveis pela execução de provas e correções de questões discursivas e as escolas da Educação Básica que se responsabilizam em inscrever os alunos, aplicar provas de primeira fase, corrigir através dos gabaritos e enviar a relação de alunos classificados para segunda fase.

De acordo com o regulamento da OBMEP, a abrangência da competição é dirigida para alunos do Ensino Fundamental e Médio, das escolas públicas (Municipais, Estaduais e Federais), como também para professores, as próprias escolas e as secretarias de educação. E seus objetivos são, além de promover o estudo da matemática no Brasil, contribuir para melhoria da Educação Básica, promover a disseminação da cultura matemática, incentivar o aperfeiçoamento de escolas e professores e incentivar o ingresso de jovens talentos em universidades e programas de iniciação científica. Esta competição divide os alunos em três níveis, NÍVEL 1 (alunos dos 6º e 7º anos), NÍVEL

2 (alunos dos 8° e 9° anos), ambos do Ensino Fundamental e NÍVEL 3 (alunos dos 1°, 2° e 3° anos) do Ensino Médio.

Suas provas se estruturam da seguinte maneira: São aplicadas provas em fases distintas, como podemos ler em (COCCO, 2014), a OBMEP é realizada em duas fases, sendo que a primeira consiste na aplicação de provas de múltipla escolha e a segunda em uma prova discursiva para, em média, 5% dos inscritos de cada nível e classificados na primeira fase, porém a quantidade de alunos que se classificam para a segunda fase depende ainda de alguns outros fatores como, por exemplo, o número de alunos inscritos para cada nível.

Na primeira fase, os alunos de cada escola competem entre si, e destes se classificam para segunda fase, em média, o percentual de cinco por cento da quantidade total de alunos inscritos pela escola. As provas da primeira fase são compostas por um caderno contendo vinte questões objetivas, tendo cada uma delas cinco alternativas, uma correta e quatro incorretas e uma folha de respostas (gabarito). A correção da primeira fase é feita pelo corpo docente da escola em que a prova foi realizada, fazendo uso do gabarito (Máscara de correção), além de um caderno com as respostas das vinte questões enviados pelo IMPA.

As escolas inscritas na primeira fase são divididas em grupos pelo número de alunos inscritos na primeira fase, e cada um desses grupos tem um critério para determinar como se dará a classificação dos alunos para segunda fase. Os grupos e a quantidade de alunos que se classificam dentro de cada um deles podem ser vistos no quadro abaixo, tal quadro foi retirado do regulamento da 14ª edição da OBMEP ocorrida em 2018:

Quantidade de alunos classificados, para segunda fase, por escolas.					
NÍVEL 1					
GRUPO	QUANTIDADE DE	QUANTIDADE DE ALUNOS			
	ALUNOS DA ESCOLA	CLASSIFICADOS			
1A	De 2 a 40	2			
1B	De 41 a 80	4			
1C	De 81 a 140	7			
1D	De 141 a 240	12			
1E	Mais que 241	5% do total			

NÍVEL 2						
GRUPO	QUANTIDADE DE	QUANTIDADE DE ALUNOS				
	ALUNOS DA ESCOLA	CLASSIFICADOS				
2A	De 2 a 40	2				
2B De 41 a 80		4				
2C	De 81 a 140	7				
2D	De 141 a 240	12				
2E	Mais que 241	5% do total				
	NÍVEL 3					
GRUPO	QUANTIDADE DE	QUANTIDADE DE ALUNOS				
	ALUNOS DA ESCOLA	CLASSIFICADOS				
3A	De 2 a 120	6				
3B	De 121 a 240	12				
3C	De 241 a 380	19				
3D	De 381 a 620	31				
3E	Mais que 621	5% do total				

Quadro 1. Informações retiradas do regulamento da OBMEP 2018

As provas da segunda fase são aplicadas em escolas, designados centros de aplicação, sua aplicação tem duração de três horas e são constituídas por seis questões abertas, dentre as quais, têm-se dois, três, quatro ou cinco itens a serem respondidos. Nestas questões o item *a*, normalmente, é uma pergunta que exige dos alunos apenas algum cálculo direto ou aplicação de alguma propriedade validando um caso particular. Os itens *b* e *c*, em geral, são para aplicação de uma propriedade de maneira inversa do que é apresentado na questão, ou para validação dessa propriedade para um conjunto de valores particulares. Já os itens *d* e *e* tem a característica de cobrar uma generalização da propriedade envolvida no problema.

ARAÚJO (2018) destaca que os problemas da OBMEP são caracterizados por serem, como classifica DANTE (1991), Problemas-processo ou heurísticos, nos quais a resolução tem passos que não estão descritos no enunciado, portanto podem ser interessantes para desenvolver o espírito investigativo e criativo dos alunos.

A correção das provas da segunda fase é feita por professores de diversas universidades públicas do Brasil, credenciados para tal. As premiações levam em consideração apenas as provas da segunda fase, e elas se dividem da seguinte maneira:

Quantidade de alunos premiados na segunda fase						
NÍVEL 1						
MEDALHA DE OURO 200 ALUNOS						
MEDALHA DE PRATA	500 ALUNOS					
MEDALHA DE BRONZE	30 ALUNOS DE CADA UNIDADE DA					
	FEDERAÇÃO		1180			
CERTIFICADO DE	200 ALUNOS DE CADA UNIDADE					
MENÇÃO HONROSA	DA FEDERAÇÃO		10000			
NÍVEL 2						
MEDALHA DE OURO 200 ALUNOS						
MEDALHA DE PRATA	500 ALUNOS					
MEDALHA DE BRONZE	20 ALUNOS DE CADA UNIDADE					
	DA FEDERAÇÃO		900			
CERTIFICADO DE MENÇÃO	200 ALUNOS DE CADA					
HONROSA	UNIDADE DA FEDERAÇÃO 1		10000			
NÍVEL 3						
MEDALHA DE OURO	100 ALUNOS					
MEDALHA DE PRATA	500 ALUNOS					
MEDALHA DE BRONZE	10 ALUNOS DE CADA UNIDADE					
	DA FEDERAÇÃO		800			
CERTIFICADO DE MENÇÃO	200 ALUNOS DE CADA UNIDADE					
HONROSA	DA FEDERAÇÃO		10000			

Quadro 2. Fonte: Informações retiradas do regulamento da OBMEP 2018

Porém, a OBMEP considera as escolas que realizam algum tipo de processo seletivo para eleger seus alunos, ou privilegia algum grupo social, como por exemplo, as escolas que priorizam filhos de militares, como um grupo de escolas distinto do grupo formado por escolas não seletivas, e tais grupos não competem entre si, em relação a premiação.

Além dessas premiações os alunos de Escolas Públicas medalhistas, quer com medalha de ouro, prata ou bronze e matriculados em Escolas Públicas no ano seguinte, tem o direito de participar do Programa de Iniciação Científica (PIC - OBMEP). A participação no PIC inclui o recebimento de uma bolsa de Iniciação Científica Jr do

Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq). E em caso de vacância de bolsas, a critério da coordenação do PIC-Jr, um medalhista poderá ser substituído por um aluno que tenha recebido Menção Honrosa e que esteja matriculado no ensino público.

E também estes alunos premiados em qualquer edição da OBMEP, estando regularmente matriculados no Ensino Superior, poderão candidatar-se ao Programa de Iniciação Científica e Mestrado (PICME) oferecido por diversas Instituições de Ensino Superior.

2. REVISÃO DE LITERATURA

Neste capítulo fazemos uma revisão bibliográfica sobre algumas pesquisas que também abordam, de alguma maneira, a Resolução de Problemas evolvidos com edições da OBMEP, como também problemas relacionados com a preparação dos alunos para competições olímpicas. Fizemos uma pesquisa em alguns bancos de dissertações e teses, como por exemplo, o banco indutor do Mestrado Profissional em Rede Nacional (PROFMAT) e também no Google Escolar, usando nessas investigações, como palavras chave os termos "OBMEP" e "Resolução de Problemas". Em seguida realizamos uma triagem das pesquisas cujo tema, de alguma forma, dialogasse com o tema dessa pesquisa, com o intuito de buscar um norte sobre o que tem se pesquisado sobre o tema desta.

Como resultado desta triagem, selecionamos seis pesquisas: uma da Pontificia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), uma da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), uma da Universidade de Brasília (UNB) e uma da Universidade Federal Rural do Semiárido (UFERSA) e uma da Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), inclusive, produzida no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

A pesquisa produzida na PUC-SP é uma dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, de autoria de Washington José Santos Alves, orientado pela Professora Doutora Maria José Ferreira da Silva. Tem como título: *O Impacto da Olimpíada de Matemática em Alunos da Escola Pública*, e seu tema central é a Análise sobre Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. O autor justifica enfatizando a importância da verificação se a OBMEP estimula estudantes a buscar novos conhecimentos em matemática, pois, o problema de pesquisa por ele exposto é se a OBMEP consegue motivar o aluno a buscar conhecimento matemático e estes estímulos são suficientes para que melhore a qualidade da educação.

Os objetivos propostos por ele são os de investigar como ocorre o envolvimento da escola na realização da OBMEP e, também, interpretar as contradições das respostas dadas pelos alunos – se existirem – em relação ao que a comissão organizadora propõe nos "Objetivos da Olimpíada de Matemática". Essa pesquisa foi aplicada com um caráter qualitativo, com aplicação de um questionário misto, com questões abertas e fechadas, aplicadas a alunos de cinco classes em duas datas distintas.

A análise dos dados nessa pesquisa foi feita de maneira que se pôde concluir que a primeira pergunta, (ela tratava de experiências anteriores dos alunos na OBMEP), deveria ter sido aberta, por conta ao baixo número de alunos que afirmam ter participado da competição, para se investigar o motivo da baixa frequência. E quanto aos que participaram da OBMEP, uma grande parte dos alunos se descreveu como feliz por ter se classificado para a segunda fase da olimpíada em uma de suas edições. A maior parte deles, os que não conseguiram se classificar para segunda fase, se descreveu como indiferente. No geral o autor percebe que os alunos afirmam que na sua escola não há um trabalho de preparação para segunda fase da OBMEP, mas eles gostariam que houvesse.

Por fim, em suas conclusões, (ALVES, 2010), aponta que seria interessante a criação de um espaço de construção coletiva de saberes, o uso do banco de questões divulgado pelo IMPA, bem como, a instituição de cursos de capacitação para os professores, com possibilidade de troca de experiências sobre a OBMEP. E sua pergunta de pesquisa foi respondida dizendo que entre os alunos investigados é comum a necessidade de a escola abordar conteúdos específicos da prova desejando adquirir novos conhecimentos.

A pesquisa produzida na UNB é uma dissertação de Mestrado em Matemática com autoria de Eduardo Cordeiro Fidélis, orientado pelo Professor Doutor Kellcio Oliveira Araújo. Seu título é: *A OBMEP Sob uma Perspectiva de Resolução de Problemas*. Ela tem como tema principal a Resolução de Problemas, e seu autor justifica que vê na sua prática docente a OBMEP como uma possibilidade de motivação dos alunos tendo em vista que o viés da resolução de problemas empregado nessa Olimpíada é bastante motivador por dar significado à Matemática. E partindo do seguinte problema: "Como a OBMEP pode contribuir para melhoria do ensino de matemática" ele desenvolve seu trabalho.

O autor enfatiza que o objetivo principal do trabalho não é falar como preparar os alunos para se tornarem vencedores de uma competição, mas sim de como contribuir para a melhora da Educação Matemática, e a maneira que a OBMEP pode contribuir para isso. A metodologia usada foi a aplicação de questionários, um deles, com três problemas do material didático desta competição, executadas com alunos de uma turma do segundo ano do ensino Médio. Porém, não houve a pretensão de se fazer uma descrição detalhada das experiências, apenas comentando pontos positivos e negativos

desta aplicação. Para analisar os dados obtidos em sua pesquisa foi feito um exame das estratégias empregadas pelos alunos na resolução dos problemas propostos, como também, foi discutida a maneira como havia sido aplicado o questionário, mais especificamente sobre a socialização feita pelos alunos ao resolverem a lista em grupo, compartilhando seus conhecimentos.

E em suas conclusões o autor considera que a OBMEP pode ser entendida com extensão da ideia, de ser apenas de uma olimpíada científica, mas também como um programa que possibilita ao professor uma oportunidade de reflexão sobre sua prática docente. E que o ensino de matemática via Resolução de Problemas pode potencializar o ensino, dando significado ao ensino, e tornando o aluno mais confiante e autônomo.

Lucione de Bitencourt Martins é a autora da Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências *Um Estudo Sobre as Estratégias de Resolução de Questões da OBMEP*, produzida na Universidade Federal do Rio Grande do Sul, em Porto Alegre, e orientada pelo Professor Doutor Alvino Alves Sant'Ana, no ano de 2015. Seu tema central, assim como na pesquisa citada anteriormente, também é a resolução de problemas e (MARTINS, 2015) justifica sua pesquisa explicitando a possibilidade que a metodologia de Resolução de Problemas dá ao aluno a oportunidade de não estar restrito a aplicação de técnicas e conceitos, por outro lado ter a liberdade de pôr em prática seu raciocínio e sua criatividade. Partindo do seguinte problema de pesquisa: As estratégias desenvolvidas pelos alunos para a resolução de provas da OBMEP contribuem para a aprendizagem e para o desenvolvimento do raciocínio matemático?

Esta obra tem como objetivo principal, elaborar uma sequência de atividades ou material didático que evidencie a importância das estratégias usadas pelos alunos na resolução de problemas. E seus objetivos específicos são: propiciar ao aluno a oportunidade de pensar, não apenas copiar ou reproduzir soluções e criar uma sequência de atividades ou material didático que proporcione ao aluno um ambiente de Aprendizagem que favoreça o pensamento e o raciocínio matemáticos.

A metodologia utilizada, segundo a própria autora, foi a de estudo de caso sendo salientado que tal metodologia é uma abordagem qualitativa. E sua pesquisa de campo se deu com 22 questões da OBMEP, estas, com registros escritos de todos os participantes, porém a pesquisadora escolheu apenas nove delas para analisar. O critério utilizado para escolha destas nove questões foi em suas palavras "Aplicação do primeiro passo sugerido pelas pesquisadoras Onuchic e Allevato", um passo dado, na

utilização de um esquema sugerido por eles. No primeiro encontro, em uma reunião com os alunos foram apresentados: a proposta de trabalho do grupo de estudo, o cronograma de trabalho e o termo de autorização para participação na pesquisa. O trabalho nos demais encontros se desenvolveu de maneira coletiva. Nestas aulas a autora fez observações sobre as atividades respondidas pelos alunos observando que, na maioria dos casos, as respostas eram incompletas deixando de lado, por exemplo, as unidades de medidas necessárias na resolução dos problemas. Mas as soluções sempre eram socializadas dentre os participantes do grupo.

A autora coloca nas considerações finais de seu trabalho que na sua pesquisa esteve evidente que a Resolução de Problemas propicia aos alunos um trabalho cooperativo e colaborativo, favorecendo a construção do conhecimento, assim como sugerem seus referenciais teóricos. Contudo, o passo a passo apresentado por Onuchic e Allevato, em geral, foi alterado na resolução dos problemas pelos alunos, pois em algumas delas os passos eram alterados. E finaliza destacando a premiação de cinco de seus alunos na edição de 2014 da OBMEP, fato que, segundo ela, ocorreu pela primeira vez na sua escola de atuação. Declarando que mesmo não sendo este (buscar premiações) o objetivo da pesquisa, a participação e premiação na OBMEP ajudaram a promover conquistas pessoais.

A quarta pesquisa correlata é de autoria de Paulo Henrique das Chagas Silva e orientada pelo Professor Doutor Antônio Gomes Nunes, na UFERSA, campus Mossoró – RN. Ela é intitulada de *Análise e Avaliação das Questões dos Níveis 1 e 2 da Primeira Fase da OBMEP sob uma Perspectiva de Resolução de Problemas*, e versa sobre a Resolução de Problemas.

O autor justifica sua pesquisa afirmando que o método heurístico, aplicado à resolução de problemas, promove a aprendizagem da Matemática de forma significativa e eficiente. E que são essas indagações e pesquisas que levam o discente a elaborar e questionar problemas que acarretam na produção de mais problemas e questionamentos, potencializando a assimilação do conhecimento matemático. Ainda reforça discorrendo sobre a importância da Resolução de Problemas no que se refere à aprendizagem em matemática. Tudo isso motivado pelo seguinte questionamento: De que forma a OBMEP pode ser usada no ambiente de Resolução de Problemas?

Em seus objetivos ele busca fazer uma análise de conteúdo dos itens das provas da OBMEP e suas respectivas respostas, pautada nos pressupostos da Resolução de

Problemas. Como também, apontar a importância da Resolução de Problemas; destacar o papel do professor e do aluno na Resolução de Problemas; expor as etapas do processo heurístico da Resolução de Problemas; Apontar a importância da OBMEP; fazer um estudo geral sobre o desempenho dos alunos da escola observada e analisar as provas da primeira fase da OBMEP, nos níveis 1 e 2.

A metodologia desta pesquisa, tem cunho descritivo e quantitativo. O campo de pesquisa foi realizado com a análise de questões da OBMEP, essa análise baseou-se nos pressupostos da Teoria Clássica dos Testes. Aconteceram os estudos de questões das provas de nível 1 e nível 2 da edição de 2016 da OBMEP, e nessas análises alguns aspectos investigados foram as habilidades necessárias para a resolução da questão e o parâmetro de discriminação.

O autor considera, em suas conclusões que as Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas têm proporcionado aos alunos, da rede pública, a oportunidade de resolver problemas em diversas áreas da Matemática e em vários níveis de dificuldade, e que enquanto professores, devemos nos esforçar e potencializar essa experiência. Porém, ele ainda conclui que é necessário rever a primeira Fase da OBMEP, pois, seu nível de dificuldade é elevado, devido à conclusão de que nenhuma das quarenta questões analisadas foi considerada fácil.

A pesquisa produzida na UEPB é uma dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Educação Matemática, de autoria de Joselito Elias de Araújo, orientado pelo Professor Doutor José Lamartine Barbosa, no ano de 2018. Tem como título: *Um estudo dos registros de representação semiótica aplicado à problemas da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP)*, e seu tema central é a análise das representações feitas por alunos na resolução de problemas propostos em uma edição da OBMEP. O autor justifica enfatizando a importância das representações semióticas na resolução de problemas matemáticos, e propondo o estímulo do ensino de matemática por meio da Resolução de Problemas, assim como fazemos aqui nesta pesquisa, que por sinal é o objetivo principal da OBMEP, como afirma o próprio ARAÚJO (2018).

Os objetivos propostos por ele são os de analisar soluções dadas em problemas da OBMEP, tendo como referência a Teoria dos Registros de Representações Semióticas; apresentar a Teoria dos Registros de Representações Semióticas; apresentar como a OBMEP pode contribuir para visibilidade da Matemática; identificar em

problemas matemáticos as várias representações semióticas e produzir um material didático que possa servir de orientação para professores e alunos de escolas públicas da Educação Básica.

Essa pesquisa foi aplicada com um caráter descritivo-interpretativista, com abordagem tanto qualitativa, quanto quantitativa. As atividades foram aplicadas na Escola Técnica Agrícola Joaquim Limeira de Queiroz, em Puxinanã-PB. O instrumento de investigação utilizado foi o caderno de provas da edição da OBMEP 2017, nível 2. O autor analisou a possibilidade de conversões de registros como é apresentado na Teoria das Representações Semióticas de Durval.

Por fim, as conclusões são de que a Teoria das Representações Semióticas traz valiosas contribuições para o estudo das provas da OBMEP, pois quando os alunos não conseguem chegar a uma solução correta para o problema eles buscam algum resultado em linguagem natural para auxiliá-lo a chegar a uma solução.

3. REFERENCIAIS TEÓRICOS

3.1 Teoria dos Campos Conceituais na Resolução de Problemas

A Teoria dos Campos Conceituais é, sem dúvidas, o grande referencial para o ensino de ciências, assim como para pesquisa nessa área. É sabido, que a Teoria dos Campos Conceituais foi desenvolvida especificamente sob a perspectiva da aprendizagem da matemática. Contudo, hoje em dia, podemos observar aplicações dentro de muitos outros domínios, relativos a várias outras áreas do conhecimento, tanto das ciências, quanto do ensino das ciências.

Gérard Vergnaud, é um grande pesquisador francês que por um lado, foi bastante influenciado de forma direta pelas ideias de Piaget ampliando, inclusive, seus estudos referentes às estruturas do pensamento. Porém, diferente de Piaget, Vergnaud foca no próprio conteúdo a ser estudado e na análise conceitual do domínio do conhecimento, não focando seus estudos em estruturas lógicas. Por outro lado, Vergnaud também foi muito influenciado pelos estudos de Vygotsky, o que fica evidenciado pela persistente preocupação com as interações sociais, pela linguagem e pela simbolização.

Segundo Vergnaud (1990), todo conhecimento se organiza em campos conceituais, isto é, se estruturam em um agrupamento de problemas diversos, situações, conceitos, relações, estruturas, propriedades, conteúdos e operações de pensamentos conectados durante o processo de formação dos conceitos. Com esse ponto de vista, um conceito não pode, ou não deve ser formado em intervalos de tempo curtos. O que ocorre é a formação do conceito com o desenvolvimento do estudo de novos problemas, novas situações e novas propriedades em períodos longos, até que os alunos consigam dominá-lo por completo.

O próprio Vergnaud (1990) define sua teoria dos campos conceituais como uma teoria cognitiva do processo de conceitualização do real, pois não se pode perceber e discutir sobre as dificuldades encontradas pelos alunos no processo de conceitualização, se não for levado em conta todas as particularidades dos conteúdos e se não se levar a sério esse processo de conceitualização do real do qual o sujeito faz parte. Dessa maneira, para Vergnaud, ela é uma teoria pragmática que implica na aquisição do conhecimento por meio de interações com situações problemas e as ações de cada

indivíduo quando colocados em confronto com tais situações (VERGNAUD, 1994. P.47).

Para a Teoria dos Campos Conceituais são inúmeros os fatores que estão envolvidos, tanto com a formação, quanto com o desenvolvimento de conceitos. Apontando para o fato de que a definição de um objeto não é suficiente para a formação do conceito, conforme diz (ALBUQUERQUE e BORGES NETO, 2005) "...um conceito não pode ser reduzido à sua definição, principalmente se o interesse é por sua aprendizagem e seu ensino".

Vergnaud considera, na Teoria dos Campos Conceituais, que um campo conceitual pode ser entendido como um agrupamento de situações em que o saber está condicionado a vários outros saberes, procedimentos e representações de muitas naturezas. Para ele um campo conceitual é um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, que estão conectados uns aos outros e provavelmente entrelaçados no processo de aquisição.

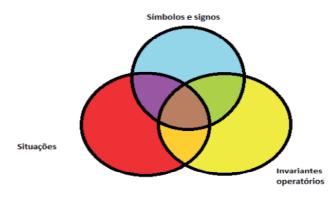


Figura 1. OS conjuntos que compõe um Campo Conceitual.

Fonte: Própria autoria

Assim, os conceitos são definidos por três conjuntos: o primeiro é um conjunto de situações que constituem o referente do conceito, o segundo é um conjunto de invariantes operatórios que dão o significado ao conceito, e o terceiro é um conjunto de representações lingüísticas e não lingüísticas que permitem representar simbolicamente o conceito, suas propriedades, as situações às quais ele se aplica e os procedimentos que dele derivam.

Sobre as representações Araújo (2018 p.23) afirma que "Na matemática, as representações ganham relevo, pois estas não estão mais relacionadas com a função de comunicar ou evocar algo, mas aparecem atreladas ao próprio desenvolvimento da atividade matemática", isto é, a matemática é uma ciência na qual as representações têm um cunho de ir muito além de apenas informar ou comunicar.

O objetivo principal da Teoria dos Campos Conceituais é nos dar um referencial para que consigamos conectar as ideias por nós criadas, relativas a cada conhecimento, para que assim, seja possível criarmos as conexões existentes entre elas. Em outras palavras, "a teoria dos campos conceituais visa à construção de princípios que permitam articular competências e concepções constituídas em situação, e os problemas práticos e teóricos em que essas competências e concepções se constituem" (FRANCHI, 1999).

Da definição de conceito como a reunião tríplice desses conjuntos decorre que Vergnaud formulou três argumentos principais que o levaram ao conceito de campo conceitual (VERGNAUD,1983)

- Não dá para se formar um conceito dentro de um único tipo de situação;
- Não dá para analisar uma situação com apenas um conceito;
- A construção e apropriação de todas as propriedades de um conceito ou de todos os aspectos de uma situação é um processo longo, que se desenrola ao longo dos anos, às vezes dezenas deles, incluindo inclusive, mal-entendidos entre situações diversas.

Na Teoria dos Campos Conceituais as ideias fundamentais são a do próprio campo conceitual e também a de esquema (esta sendo o maior legado da teoria de Piaget existente na teoria de Vergnaud), situação, invariante operatório e conceito. Mesmo valorizando bastante o conceito em sua teoria, Vergnaud os coloca como a segunda entrada do campo conceitual, pois a primeira dessas entradas são, para ele, as situações Vergnaud (1990). Para Franchi (1999), uma situação é algo que pode ser pensado como um dado complexo de objetos, propriedades e relações em um espaço e tempo determinados, envolvendo o sujeito e suas ações.

Daí se torna evidente outra concepção de campo conceitual, a de conjunto de situações. Por conseguinte, campo conceitual é o conjunto de problemas e situações nas quais estão envolvidos os conceitos. Um campo conceitual é entendido como um conjunto de situações nas quais a abordagem requer o domínio de diversos conceitos de naturezas diferentes. De acordo com Vergnaud (1990), uma situação é algo que se

aproxima bastante de uma tarefa podendo ser caracterizada, inclusive, como uma combinação de tarefas, no caso, de situações mais complexas.

Um dos pressupostos que norteiam a Teoria dos Campos Conceituais é de que as competências envolvidas com os conceitos estão inter-relacionadas com esquemas, Vergnaud (1990) chama de esquema, as organizações invariantes de comportamento para determinadas classes de situações. Esquema é o conceito trazido por Piaget para atacar as formas de organização de habilidades cognitivas, sensório-motoras e intelectuais. Em um esquema a seqüência de ações a ser desenvolvida varia de acordo com as necessidades surgidas com a situação. Segundo (FRANCHI, 1999) esquema é a "organização invariante da atividade do sujeito para uma classe de situações dadas". Pois, para Vergnaud na resolução de alguns problemas é possível se fazer uso de outros esquemas já utilizados na resolução de alguns problemas anteriores, assim as atitudes são caracterizadas como atos mecanizados ou automáticos. Porém, existem situações para as quais o uso de esquemas já elaborados não é suficiente para resolução do problema, nelas o indivíduo pode modificar, agrupar, combinar, reorganizar esquemas prontos para a resolução dos novos problemas.

Ainda nesse sentido, Albuquerque e Borges Neto (2005), afirmam que Vergnaud divide em duas classificações as situações referentes à aprendizagem. Segundo eles, em "uma classe que o sujeito dispõe, no seu repertório, das competências necessárias ao tratamento relativamente imediato da situação; outra classe em que o sujeito não dispõe de todas as competências necessárias, o que o obriga a um tempo de reflexão e tentativas de várias abordagens, levando-o eventualmente ao sucesso ou ao fracasso". A primeira dessas classificações ocorre quando o esquema criado pelo aluno se adapta perfeitamente ao problema. Já no segundo caso, ocorre em um grande número de tentativas de uso de esquemas.

3.2 A Resolução de Problemas

Todo conhecimento relacionado à matemática, ao seu ensino, ou ao ensino de ciências produzido evidencia os problemas como estopim da atividade de sua criação. À medida que desviamos o olhar para o processo de construção deste conhecimento, notase simplesmente que:

...ele é dinâmico, caracterizado por incontáveis momentos em que prevalecem resultados obtidos experimental e indutivamente. Quantos não

são os casos, na História da Matemática, em que constatamos a construção de conhecimento a partir da busca pela solução de um problema específico? Muitos resultados matemáticos não teriam sido obtidos não fosse a persistência e a criatividade de pessoas motivadas por uma dúvida, por um problema e pela ânsia de resolvê-lo. Não terá sido esse o caso do matemático inglês Andrew Willes, ao demonstrar o Último Teorema de Fermat? A demonstração desse teorema foi um problema que desafiou matemáticos por aproximadamente 350 anos (SINGH 2008, apud ALLEVATO, 2005, p.38).

No decorrer da história, os problemas, dentre eles os matemáticos, surgiram como desafios que causaram, por algum tempo, descompasso, mesmo entre as mentes mais brilhantes do planeta. As tentativas de resolvê-los implicaram, em diversos casos, nos processos que expuseram a produção de novos saberes. Como podemos ler em BRASIL (1997).

...a História da Matemática mostra que a Matemática foi construída como resposta a perguntas provenientes de diferentes origens e contextos, motivadas por problemas de ordem prática (divisão de terras, cálculo de créditos), por problemas vinculados a outras ciências (Física, Astronomia), bem como por problemas relacionados a investigações internas à própria Matemática. BRASIL (1997, p. 42)

Sabe-se ainda, que um dos termos mais usados durante o processo de ensinoaprendizagem do conhecimento matemático, durante as aulas, sem dúvida alguma, é "Resolução de Problemas". Este termo figura quer seja em aulas de uma turma do Ensino Básico, quer seja em aulas de uma turma do Ensino Superior. E é indiscutível que das metodologias em destaque atualmente, uma bastante produtiva seja a de Resolução de Problemas, principalmente por sua natureza de experimentação, justificativas lógicas, análise e críticas aos resultados.

Sobre a Resolução de Problemas:

Como as entendemos as aplicações do conhecimento matemático incluem a resolução de problemas, essa arte intrigante que, por meio de desafios, desenvolve a criatividade, nutre a auto-estima, estimula a imaginação e recompensa o esforço de aprender (LIMA, 2007. P 141).

Nesse mesmo sentido,

É possível por meio da resolução de problemas desenvolver no aluno iniciativa, espírito explorador, criatividade, independência e a habilidade de elaborar o raciocínio lógico e fazer uso inteligente e eficaz dos recursos disponíveis para que ele possa propor boas soluções às questões que surgem no seu dia a dia, na escola ou fora dela (DANTE, 2007, p. 11-12).

Evidenciando assim, o grande valor relacionado a esta linha. Apesar disso, o significado do termo algumas vezes foi mal compreendido (SCHROEDER e LESTER, 1989). Ainda nesta linha de raciocínio,

... tem havido um desencontro entre o que a literatura acadêmica diz sobre Resolução de Problemas e o que, de fato, os professores sabem e fazem nas suas salas de aula. Enquanto nas pesquisas a Resolução de Problemas é concebida como um meio de ensinar matemática, como uma metodologia de ensino, na prática escolar ela não é percebida nem mesmo como aplicação de conteúdo, mas simplesmente como aplicação de técnicas, receitas, treinos etc (ANDRADE, 2008).

Apontando para o fato de que resolver problemas, mesmo sendo uma tarefa comum para a maioria das pessoas, em especial, para alunos e professores, nas aulas de matemática, em grande parte dos casos, é uma tarefa que explora apenas a repetição de técnicas e a mecanização das soluções. Contudo, devemos deixar claro que tal tarefa está estruturada como uma metodologia, bastante efetiva, para o ensino de matemática e das ciências. O próprio Vergnaud considera, em seus estudos sobre Campos Conceituais, a importância da resolução de problemas na formação de conceitos, sobretudo problemas matemáticos, nos quais durante o processo de resolução os alunos estão sujeitos a duas fases: a primeira é quando se faz a seleção e a arrumação dos dados e informações do problema; e a segunda quando se destina ao processo de resolução propriamente dito.

As pesquisas sobre o ensino de matemática utilizando a resolução de problemas principiaram por influência de Dewey no início do século XX, enfatizando como aspectos principais dessa metodologia o estado de dúvida e todo percurso que envolve a identificação do problema, às relações cognitivas relacionadas e a comprovação sucessiva de hipóteses. Porém, o pioneirismo da utilização de tal metodologia remete diretamente ao matemático húngaro George Polya, que propunha em sua obra *A Arte de Resolver Problemas*, um método, em etapas, que caracterizava uma abordagem para a resolução de problemas baseada em um processo heurístico¹. Polya (1995), sugere um esquema no qual são quatro as principais etapas para a resolução de um problema:

• Compreender o problema;

¹A heurística é o ramo da filosofia que se dedica a inventar diferentes maneiras de resolver problemas. Como ciência, ela tem o objetivo de compreender o processo que leva à solução dos problemas, enfocando aqueles que envolvem operações mentais e a necessidade de raciocínio elaborado, baseado em conhecimentos anteriores.

- Elaborar um plano;
- Executar o plano;
- Fazer o retrospecto ou verificação.

Compreender o problema trata-se de entender o que se pede no problema, ou seja, quais são os dados e as condições do problema por muitas vezes verificar se é possível fazer uma figura, um esquema ou um diagrama, se é possível estimar a resposta. Elaborar um plano é decidir qual é o plano para resolver o problema, a estratégia com a qual se tentará desenvolver, tentar organizar os dados em tabelas ou gráficos, tentar resolver o problema por partes. Executar o plano é colocar em prática o plano elaborado, verificando-o passo a passo. Fazer o retrospecto ou verificação é um dos passos de maior importância, pois é o momento em que se verifica se a solução obtida está correta, se existe outra maneira de resolver o problema, se é possível usar o método empregado para resolver problemas semelhantes. É nesse momento que se evidencia uma das grandes potencialidades dessa metodologia que é a oportunidade de utilização de um problema como ponto de partida na formação de conceitos matemáticos.

Ainda segundo Polya (1995) existe uma analogia interessante sobre a resolução de um problema. Para ele, a resolução de problemas é uma habilidade prática como, por exemplo, a natação. Polya afirma que na Resolução de Problemas adquirem-se as competências por meio da imitação e da prática. Quando se tenta nadar, imitamos o que os outros fazem com as mãos e os pés para manterem suas cabeças fora d'água e, afinal, aprendemos a nadar pela prática da natação. E quando se tenta resolver problemas, temos de observar e imitar o que fazem outras pessoas quando resolvem os seus e, por fim, aprendemos a resolver problemas, resolvendo-os. (POLYA, 1995, p. 3).

Em consequência, muito se produziu em relação ao que se refere à metodologia de Resolução de Problemas, contudo, durante algum tempo esta Resolução de Problemas foi encarada apenas como um processo de repetição, como podemos ler em Menino, (2013), quando a autora afirma que "A crença de que **só se aprende** a resolver problemas por imitação, ou seja, imitando as atividades e procedimentos de quem os resolve, predominou e, infelizmente, ainda predomina em muitas salas de aula" (*Negrito nosso*) colocando que essa perspectiva pode, sem dúvidas, servir para alguns alunos, mas não para a maioria deles.

Diversos autores sugerem que a Resolução de Problemas não deve ser um processo de repetições como podemos ler:

A resolução de problemas não deve se constituir em experiências repetitivas, através da aplicação dos mesmos problemas (com outros números) resolvidos pelas mesmas estratégias. O interessante é resolver diferentes problemas com a mesma estratégia e aplicar diferentes estratégias para resolver o mesmo problema. Isso facilitará a ação futura dos alunos diante de um problema novo (DANTE, 2007).

Aqui, temos a preocupação de se trabalhar com esta metodologia de ensino considerando a recomendação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) que "essa opção traz implícita a convicção de que o conhecimento matemático ganha significado quando os alunos têm situações desafiadoras para resolver e trabalham para desenvolver estratégias de resolução" (BRASIL, 1998).

A Resolução de Problemas é uma metodologia de extrema importância no processo de ensino-aprendizagem da Matemática, assim como para a avaliação, tanto no ensino de matemática, como também, no ensino de ciências. O estudo dos referenciais teóricos relacionados ao referido tema faz com que surja a discussão sobre algumas concepções do que é um Problema em Matemática. Dentre as diversas definições dadas para um problema destacamos as seguintes:

- Para Brasil (1997), "Um problema matemático é uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, no entanto é possível construí-la".
- Para Onuchic (1999), problema é "tudo aquilo que não sabemos fazer, mas que estamos interessados em fazer". (ONUCHIC, 1999).
- Polya (1995) diz que um problema surge quando procuramos meios para conseguir um objetivo, para isso, ocupando a racionalidade e a criatividade em busca de solução satisfatória.

Nesta pesquisa um problema será entendido da mesma maneira que em (ONUCHIC, 1999) e destaca-se a Resolução de Problemas como uma metodologia passível de estar presente na sala de aula, bem como, na prática docente.

3.3 Esquemas na Resolução de Problemas

Nesta seção apresentamos algumas estratégias para resolução de problemas matemáticos, nela, além de considerar a proposta de (POLYA, 1995) aplicamos as ideias sugeridas por alguns autores, dentre os quais, (MORGADO, 2006) e (TAO, 2013). Tais estratégias são a base para a construção dos esquemas que serão discutidas em sala de aula durante a aplicação desta pesquisa.

Destacando a definição dada por (VERGNAUD, 1983) sobre conceito, na qual ele afirma que um conceito é formado em diversas situações nas quais ele se aplica, é possível utilizar métodos com características comuns para resolver problemas que envolvam conceitos aplicados em situações diversas, são elas "os esquemas", estes dependem principalmente da natureza do problema, como pode-se ter um exemplo em (MORGADO, 2006), ao propor um esquema para problemas de contagem:

... a estratégia básica para resolver problemas de combinatória:

1)Postura. Devemos sempre nos colocar no papel da pessoa que deve fazer a ação solicitada pelo problema e ver que decisões tomar.

2) Divisão. Devemos, sempre que possível, dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples.

3)Não adiar dificuldades. Pequenas dificuldades adiadas costumam se transformar em imensas dificuldades. Se uma das decisões a serem tomadas for mais restrita que as demais, essa é a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar.(MORGADO, 2006).

Neste esquema Morgado sugere um "caminho" para atacar problemas de análise combinatória, aqui trataremos os problemas de combinatória apenas por problemas de contagem, tendo em vista que análise combinatória abrange uma gama de conceitos muito maior do que se aborda no ensino médio.

Pode-se ler em Oliveira (2010), um esquema de resolução de problemas que consiste em tomar como premissas umas "regras gerais" que são nada mais nada menos que um esquema geral para nortear a resolução de um problema de matemática. Essas premissas são:

- R1) Ler bem o enunciado do problema e utilizar *todas* as informações disponíveis.
- R2) Fazer casos particulares ou casos mais simples de problemas similares, para adquirir familiaridade com o problema.
- R3) Mudar a representação do problema, transformando-o em um problema equivalente.
- R4) Usar a imaginação pesquisando caminhos alternativos. Extrapolar os limites!

Nessa abordagem, ficam implícitas ideias tanto da abordagem de Polya, quanto da Teoria dos Campos Conceituais.

Outra proposta estratégica para abordagem da Resolução de Problemas é proposta por Terence Tao. Terence Chi-Shem Tao é um matemático australiano de origem chinesa, que já aos onze anos de idade, em 1986, conseguiu uma medalha de bronze nas Olimpíadas Internacionais de Matemática (IMO), uma competição extremamente difícil para jovens no fim do ensino secundário. Nos anos seguintes Tao conseguiu respectivamente as medalhas de prata e ouro nesta competição. Talvez o fato dele ser genial tenha vindo hereditariamente, pois seus dois irmãos também eram jovens com inteligências excepcionais, contudo Terence foi acompanhado por seus pais e uma equipe com professores e pediatra desde cedo, possibilitando seu rápido progresso em matemática.

Bastante precoce, Tao escreveu o livro *Como Resolver Problemas Matemáticos: Uma Perspectiva Pessoal*, já aos quinze anos, nesta obra ele discorre sobre estratégias para soluções de problemas, regras gerais para abordar os problemas, escolher linguagem adequada para potencializar a resolução, e também, reúne alguns problemas de Combinatória, Álgebra, Análise e Teoria dos Números.

No ano de 2006 Tao recebeu, das mãos do rei da Espanha, a medalha Fields², durante o 25° Congresso Internacional de Matemática (ICM), nesta oportunidade foram entregues mais três medalhas, para Andrei Okounkov, Wendelin Werner e Grigori Perelman, este último que havia demonstrado a Conjectura de Poincaré e ficou conhecido pela mídia mundial, por seu aspecto peculiarmente excêntrico que culminou na recusa pela medalha.

Em seu livro Tao coloca que a resolução de um problema é uma tarefa que não se limita aos aspectos físicos, pois nela pode-se a qualquer momento "recomeçar do zero, experimentar novas vias de ataque, ou retroceder a qualquer instante". (TAO, 2013, p. 1). O que sugere que na resolução de um problema, podemos convenientemente experimentar "caminhos" até se chegar numa solução desejada e adequada. Ainda nesse sentido ele afirma que "em geral há um primeiro palpite que quase funciona, e depois o ajustamos um pouco para que fique mais correto; ou então modificamos os requisitos a que o objeto a encontrar deve obedecer, de modo que eles

²A medalha Fields é o maior prêmio dado um matemático, se diz que é mais difícil ganhá-la do que ganhar um prêmio Nobel. Elas são conferidas a algum matemático que tem destaque nos (ICM)s, ou seja, apenas de quatro em quatro anos, um dos critérios para sua concessão é que o vencedor não tenha completado quarenta anos de idade até o fim do ano anterior ao congresso. O professor de Princeton, Andrew Wiles, por exemplo, que na década de 90 demonstrou o Último Teorema de Fermat, não pôde recebê-la por ter mais de quarenta anos.

sejam mais fáceis de satisfazer" (TAO, 2013. p.2), deixando claro que neste tipo de abordagens os diversos esquemas que englobam o mesmo conceito podem ser testados, pois cada um deles tem uma importância fundamental.

4. ASPECTOS METODOLÓGICOS

4.1 Estrutura Metodológica

Como o objetivo central é a investigação de conceitos matemáticos formados por alunos da educação básica, participantes de turmas de treinamento olímpico, bem como, a elaboração de elementos capazes de propiciar a criação de campos conceituais envolvidos nas quatro áreas em que está dividida a matemática olímpica (Teoria dos números, Geometria, Álgebra e Combinatória), tomamos como principais referências para base teórica nesta pesquisa, a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud e os esquemas de resolução de problemas de Polya, Terence Tao e Morgado.

A abordagem feita será a de uma análise quantitativa e qualitativa, haja vista que desta maneira se poderá trazer informações que possam ser quantificadas, ou seja, traduzir em números as opiniões e informações para então obter a análise dos dados e, posteriormente, chegarmos a algumas conclusões. Evidenciando o fato de que essa modalidade requer o uso de estatísticas e de recursos, como, porcentagens, média, gráficos, tabelas entre outros, com o objetivo de apurar as opiniões explícitas e resoluções de determinados problemas, pelos participantes.

4.2 O locus da investigação

A investigação será aplicada na Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Walnyza Borborema Cunha Lima (WBCL), uma escola pública, da rede estadual da Paraíba, situada na zona rural do município de Campina Grande, mais precisamente, no Sítio Estreito, localizado a cerca de 14 km do centro da cidade. A referida escola possui, segundo os dados do Censo/2016: Alimentação escolar para os alunos, água filtrada, água da rede pública, energia da rede pública, fossa, lixo destinado à coleta periódica, acesso à internet, 5 salas de aulas, sala de professores, quadra de esportes coberta, cozinha e banheiro dentro do prédio.

A turma em questão será uma turma de sétimo ano do Ensino Fundamental, na qual estão matriculados 31 alunos, dos quais todos freqüentam as aulas com

regularidade e o pesquisador, que também é professor da turma, irá trabalhar com o projeto de preparação para Olimpíadas de Matemática.

4.3 Um programa de treinamento olímpico

O programa OBMEP na Escola é um programa no qual alunos de escolas públicas da educação básica são preparados para participar de olimpíadas de matemática, e também para os professores de Matemática das escolas públicas e para os alunos de licenciatura em Matemática, nele o foco é estimular atividades extraclasse com o uso dos materiais da OBMEP, tais como provas e Bancos de Questões. Para a formação das turmas são selecionados professores e alunos de todo o país, os quais são preparados para desenvolver essa atividade em suas escolas ou em escolas vizinhas.

São objetivos da OBMEP na Escola estimular e promover o estudo da Matemática entre alunos das escolas Públicas; melhorar a qualidade do ensino de Matemática na Educação Básica; aperfeiçoar os professores das escolas públicas, contribuindo para a sua valorização profissional; integrar as escolas públicas com as universidades públicas, os institutos de pesquisa e as sociedades científicas; promover a inclusão social por meio da difusão do conhecimento.

Além da atuação do professor como formador de uma turma no programa desde o ano de 2017, a escolha da turma para que fosse desenvolvida essa pesquisa levou em consideração o fato de grande parte dos alunos dela estarem atuando no programa OBMEP na Escola.

4.4 Os instrumentos de investigação

Utilizamos como instrumento de coleta de dados questionários, que foram aplicados na turma pesquisada, e tais questionários caracterizamos como listas de problemas (Tarefas) que tomaram como pressuposto que toda bagagem escolar e cultural dos alunos influenciou no momento em que eles precisaram resolver as listas de problemas, caracterizando o problema como ponto de partida no processo de formação dos conceitos.

As tarefas foram compostas, em sua maioria, por questões abertas, porém, também existem nelas algumas questões objetivas, todas voltadas para a preparação das turmas para Olimpíadas de Matemática, mais especificamente para a OBMEP.

Buscamos com isso, que se testem de forma precisa, as hipóteses levantadas, estas atividades foram elaboradas considerando a abordagem de Resolução de Problemas e os problemas escolhidos foram propostos em edições de competições olímpicas de Matemática e também sugeridos em bancos de questões fornecidos pelos elaboradores de olimpíadas de matemática.

5. ANÁLISE DE DADOS

Neste capítulo fazemos uma análise das tarefas aplicadas, para que possamos comprovar as hipóteses de que o uso dos problemas escolhidos realmente contribuiu para que os alunos pudessem formar os conceitos matemáticos envolvidos. A aplicação das tarefas ocorreu no período de Junho à Agosto de 2018, nas duas primeiras delas, os alunos tiveram o tempo de duas aulas de cinquenta minutos, para resolver os problemas deixando os quinze minutos finais para discutir as soluções dadas por eles. Já nas demais tarefas, em um total de seis tarefas, reservamos alguns minutos a mais, no final da aula, para que eles pudessem discutir as soluções, pois, observamos nas primeiras aplicações que o momento de discussões era de uma riqueza impensável, pelo fato de os alunos explicitarem suas soluções, suas estratégias, seus esquemas, e ainda opinar sobre a solução dada por algum colega, levantando as hipóteses e as validando ou as descartando.

5.1 Tarefa 1

A tarefa 1, foi aplicada no mês de Junho, uma semana após a aplicação da prova da primeira fase da OBMEP 2018. Ela foi proposta como uma lista de problemas entregue para que os alunos a resolvessem em duas aulas de cinquenta minutos, porém, os quinze minutos finais da segunda aula ficariam destinados a discussão das soluções encontradas por eles.

Tal tarefa foi constituída por uma lista com cinco problemas sobre área de triângulos, nos quais os alunos precisaram elaborar esquemas de resolução, afim de formar o conceito de área de triângulos explorando a ideia de que "se dois triângulos possuem as bases, e as alturas, em relação a essas bases, respectivamente com mesmas medidas, então suas áreas são equivalentes". Na aplicação desta tarefa estavam presentes 26 alunos, e todos responderam a atividade. O gráfico abaixo mostra o desempenho dos alunos da turma, presentes no dia da aplicação, em relação às suas respostas.

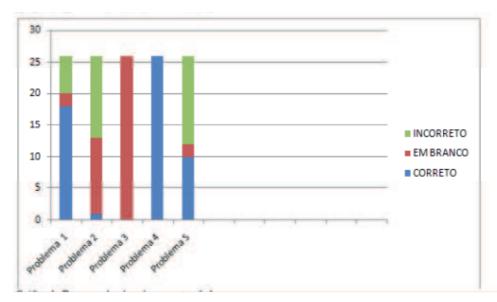


Gráfico 1- Desempenho dos alunos na Tarefa 1

O primeiro problema dá três triângulos equiláteros, todos com suas bases contidas na mesma reta, de modo que seus vértices estejam, também, colineares e pede para que se calcule a área de um triângulo formado por dois vértices de um triângulo e um vértice de um dos outros, de maneira que as bases e as alturas, dos quatro triângulos, sejam equivalentes, conhecendo a área de um dos triângulos equiláteros. Provavelmente seja este o problema mais fácil desta tarefa, contudo ele pode servir como ponto de partida na criação de um esquema, como é exposto por (OLIVEIRA, 2010) ao sugerir que se devem resolver casos particulares ou casos mais simples de problemas similares, para adquirir familiaridade com o problema.

Dos vinte e seis alunos que fizeram a atividade, vinte e quatro responderam ao primeiro problema, e destes, dezoito obtiveram uma resposta correta, como exposto no gráfico a seguir:

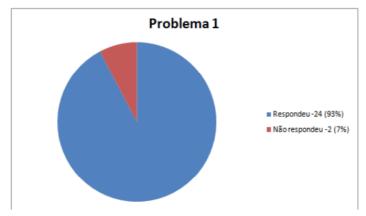


Gráfico 2 – Percentual de respostas para o primeiro problema.

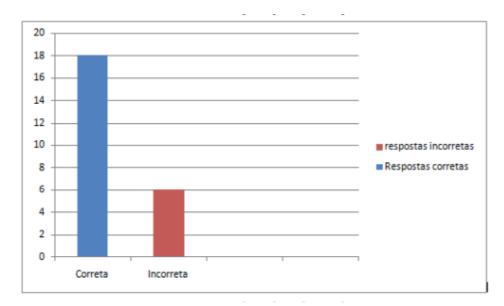
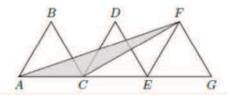


Gráfico 3 – Quantidade de respostas corretas.

O primeiro problema proposto na tarefa 1, era o seguinte:

1. Na figura a seguir, ABC, CDE e EFG são triângulos equiláteros com 60 cm² de área cada um. Se os pontos A, C, E e G são colineares, determine a área do triângulo AFC.



Observamos que poucos dos alunos que o responderam, escreveram um argumento que justificasse a propriedade utilizada na resolução do problema, mesmo sendo possível perceber que a usaram quando eles discutiram suas soluções. Abaixo mostramos duas das respostas dadas pelos alunos.

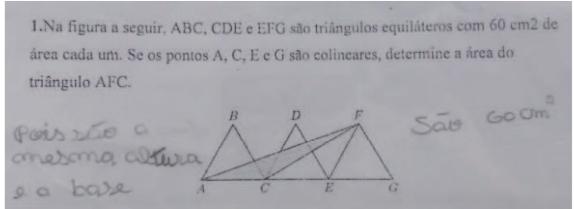


Figura 2- Resposta de um aluno, para o problema 1 (Tarefa 1), evidenciando a propriedade utilizada.

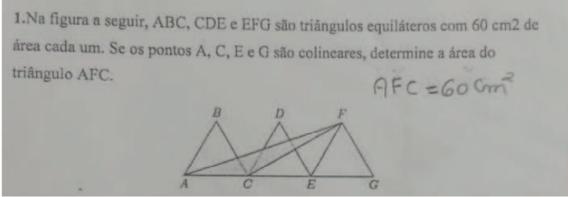
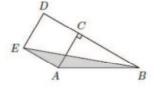


Figura 3- Resposta de um aluno, para o problema 1 (Tarefa 1), não explicitando a propriedade utilizada.

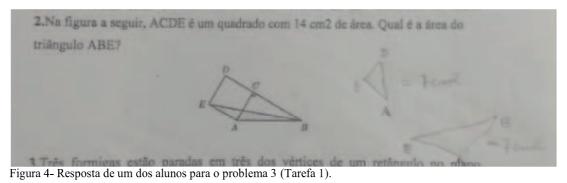
É possível verificarmos que mesmo quando os alunos expuseram uma resposta correta, eles utilizaram linguagem coloquial, fato que enfatiza as diversas possibilidades de representar os elementos do campo conceitual como Vergnaud explicita na Teoria dos Campos Conceituais, e uma notação difícil de ser compreendida, mas de qualquer maneira, conseguiram mostrar que haviam compreendido a situação em que o conceito estava aplicado.

O problema 2 propunha o seguinte:

2. Na figura a seguir, ACDE é um quadrado com 14 cm² de área. Qual é a área do triângulo ABE?



Tal problema parecia ter um nível de dificuldade semelhante ao problema 1, foi respondido por todos os alunos, porém apenas um deles deu uma resposta correta. E inclusive o aluno que deu uma resposta correta para o problema expressou esta resposta de maneira bastante informal como vemos abaixo:



Todavia, compreendemos que o aluno percebeu que os triângulos *AED* e *AEB* possuem bases congruentes, e alturas também congruentes pelo fato de as retas que contém os segmentos *DC* e *AE* serem paralelas.

A questão levantada pelo problema 3 era:

3. Três formigas estão paradas em três dos vértices de um retângulo no plano. As formigas se movem uma por vez. A cada vez, a formiga que se move o faz segundo a reta paralela à determinada pelas posições das outras duas formigas. É possível que, após alguns movimentos, as formigas se situem nos pontos médios de três dos lados do retângulo original?

Ela não foi respondida por nenhum dos 26 alunos presentes nessa tarefa, tal questão pode ser considerada como difícil, considerando o nível de difículdade das questões anteriores. Mas acreditamos que questões como esta, que conduzem os alunos utilizarem propriedades geométricas para resolver problemas "práticos", fazendo valer a construção de argumentos baseados no levantamento de suas hipóteses, são bastante proveitosas.

O objetivo do problema 3, era de que os alunos percebessem que sempre que uma das formigas se desloca, o triângulo com vértices nas suas posições tem área congruente ao triângulo formado em suas posições iniciais, por ter medida da base congruente a ele, e medida da altura também congruente, já que a formiga que se desloca percorre uma direção paralela à reta formada pelas outras duas. E caso, fosse possível elas ocuparem os pontos médios dos lados do retângulo, o triângulo formado por elas teria área inferior a área do triângulo inicial.

Também com um grau de dificuldade considerado fácil, o problema 4, que podemos ver abaixo, foi respondido corretamente por todos os alunos presentes.

4. Dois segmentos dividem o retângulo da figura a seguir em três triângulos. Um deles tem área 24 e o outro tem área 13. Determine a área do terceiro triângulo.



Nele, os alunos precisavam perceber que fazendo a decomposição do retângulo nos três triângulos, seria possível agrupar dois deles e formar outro triângulo, de modo que a

base do novo triângulo formado tenha base igual a do terceiro, e a altura deles também seria congruentes, desta forma a área dos dois é a mesma.

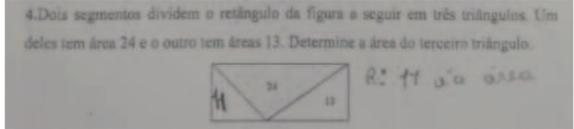
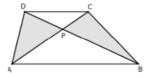


Figura 5 – Solução dada por um dos alunos para o problema quatro (Tarefa 1).

Notamos que mais uma vez os alunos chegaram a uma resposta correta mesmo utilizando uma linguagem e uma notação não adequadas.

No problema 5, era proposto o que segue:

5. A figura ABCD abaixo é um trapézio, sabe-se que AB = 14cm, CD = 5cm, e a área do triângulo APD é 12 cm^2 . Determine a área do triângulo BPC.



Os alunos precisavam concluir que os triângulos ABD e ABC possuem bases congruentes e alturas, também, com a mesma medida, portanto têm a mesma área. Daí como ABC podia ser decomposto em dois triângulos ABP e BPC, e ABD, também podia ser decomposto em ABP e APD, então as áreas de APD e BPC são equivalentes. O grau de dificuldade deste problema era médio, porém apenas 10 alunos deram uma resposta correta para o problema, contudo, mesmo os que responderam que a área do triângulo BPC era de $12cm^2$ não conseguiram escrever um argumento que justificasse a ocorrência deste fato.

No geral, um dos momentos mais importantes na aplicação desta atividade foi a discussão final, na qual os alunos puderam explicar para os demais presentes, professor e colegas, o motivo de ter dado suas respostas. E nesse momento pudemos notar que os alunos "atacaram" os cinco problemas de maneira semelhante, suas falas remetiam as tentativas, mesmo as frustradas para resolver o problema, e também, ao processo de decomposição das figuras.

Pudemos ver que na solução do problema 2 um dos alunos pôde utilizar, adaptando, o esquema que utilizou no problema 1, se fazendo valer do que (TAO, 2013)

afirma que dar um primeiro palpite e depois ajustá-lo para que fique correto; ou então modificá-lo para as condições a que o objeto a encontrar deve cumprir.

A utilização de diferentes esquemas para resolver problemas diversos caracteriza o campo conceitual envolvido em cada uma das situações, reforçando o que afirma o próprio Vergnaud, que explicita que um campo conceitual é definido por três conjuntos que são (o conjunto dos símbolos e signos que representam o conceito, o conjunto das situações nas quais se aplica o conceito e o conjunto dos invariantes operatórios), mostrando assim, que o aluno se apropriou daquele campo conceitual.

Tanto o momento da resolução, quanto a discussão posterior apontam que o uso destes esquemas corrobora as representações utilizadas pelos alunos e as diversas maneiras com as quais eles podem escrever suas soluções. Enfatiza também as situações diversas onde se aplica o conceito e os invariantes operatórios relacionados ao campo conceitual que estão envolvidos em cada uma das resoluções.

5.2 Tarefa 2

A Tarefa 2, foi aplicada na última semana do mês de Junho. Nela constava, assim como na Tarefa 1, uma lista de problemas, entregue para que os alunos os resolvessem em duas aulas de cinquenta minutos. Também tivemos, na aplicação desta tarefa, a preocupação de reservar os quinze minutos finais da segunda aula para discussão das soluções propostas pelos alunos.

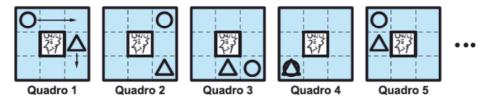
Tal tarefa foi composta por cinco problemas sobre divisão, nos quais se fez necessário, para os alunos, elaborar esquemas de resolução, afim de formar o conceito de divisão euclidiana. Na aplicação desta tarefa estavam presentes 25 alunos, e todos os presentes se envolveram com a atividade. O gráfico abaixo mostra a participação dos alunos da turma, presentes na aplicação desta tarefa.



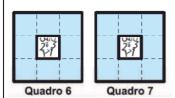
Gráfico 4, participação dos alunos na Tarefa 2.

O primeiro problema desta tarefa propunha:

1. Na sequência de quadros abaixo, uma bolinha e um triângulo caminham no sentido horário pelas casas azuis. De um quadro para o seguinte, o triângulo passa de uma casa para a casa vizinha, e a bolinha pula uma casa.



a) Desenhe a bolinha e o triângulo do Quadro 6 e do Quadro 7 da sequência



- b) Continuando a sequência, qual é o número do primeiro quadro em que a bolinha e o triângulo estão na mesma posição do Quadro 1?
- c) Desenhe a bolinha e o triângulo do Quadro 2015.



Quadro 2015

Nele observamos uma sequência de figuras na qual um círculo e um triângulo tomam posições diferentes a cada termo seguinte. Fez-se necessário perceber que as posições, do círculo e do triângulo, a partir de um dado momento passaria a ser uma posição já ocupada por eles anteriormente, daí as imagens resultantes formavam uma sequência circular.

A maioria dos alunos conseguiu dar uma solução correta para o *item (a)*, e grande parte destes apenas desenhou os símbolos correspondentes a sua solução, sem justificá-los. Porém, foi exposto por um deles que "o *triângulo poderia ocupar todas as casinhas do tabuleiro já que dava passos de uma em uma casinha, e o círculo ocuparia apenas as casinhas das quinas do tabuleiro por dar passos de duas em duas casinhas"*.

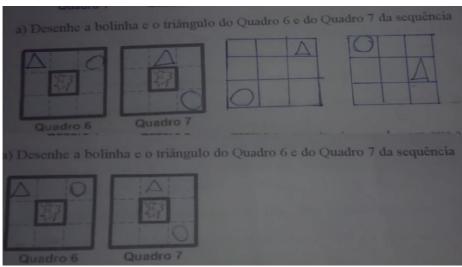


Figura 6 – Soluções dadas por dois alunos para o *item (a)* do problema um (Tarefa 2).

Nos demais itens desta questão os alunos também apresentaram soluções sem justificativas, mas assim como em relação ao exposto acima, durante o momento de discussão foi mostrado por eles que haviam compreendido que a partir de uma determinada figura o padrão se repetiria, portanto bastava fazer uma simples divisão para descobrir as posições destas repetições. Implícito ao discurso dos alunos está o esquema de resolução de problemas proposto por (OLIVEIRA, 2010), em que se sugere que sejam resolvidos casos particulares, mais simples, do problema para se levantar algumas hipóteses.

O segundo problema abordava a seguinte temática:

```
2.Na soma 2 + 0 + 1 + 6 + 2 + 0 + 1 + 6+... +2 + 0 + 1 + 6 = 2016, quantos sinais de adição foram usados?

a) 896 b) 895 c) 2016 d) 224 e) 223
```

Nele, os alunos deveriam observar que a quantidade de parcelas iguais era a mesma para cada um valor de parcela exposto, portanto seria possível agrupar a soma como $2+0+1+6+2+0+1+6+\cdots+2+0+1+6=2016$, e cada um destes agrupamentos teria uma soma igual a 9, logo bastava fazer uma divisão por 9 pra saber quantos destes grupos seriam utilizados na referida soma.

Alguns alunos deram a resposta correta, talvez por sorte, já que o problema tinha alternativas, possibilitando o "chute", pois não houveram soluções apresentadas para este problema e mesmo quando foram contestados, no momento seguinte de discussão, sobre o caminho utilizado por eles, os alunos não conseguiram dar uma justificativa razoável para a resposta assinalada.

O terceiro problema:

3. Você pode encontrar cinco números ímpares cuja soma seja 100? Justifique a sua resposta.

Foi respondido corretamente apenas por dois alunos, um deles conseguiu dar uma excelente justificativa, já o outro não escreveu um argumento tão bom, mas no momento em que foi questionado, mostrou ter compreendido bem o problema e pôde melhorar sua justificativa.

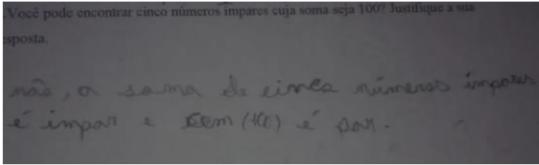


Figura 7. Solução dada por uma aluno para o problema 3 (Tarefa 2).

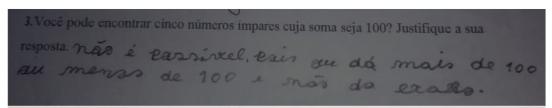


Figura 8. Solução dada por uma aluno para o problema 3 (Tarefa 2).

Porém, observando a resposta dada na figura 7, conjecturamos que provavelmente a via de ataque feita pelo aluno foi a estratégia da tentativa e erro, fazendo uma costura com o que (TAO, 2013) propõe ao dizer que é comum termos um palpite que, mesmo que não nos dê uma solução correta, ela pode ser ajustada até que fique mais próxima de uma solução plausível.

O quarto problema:

4. Um grilo pode dar pulos de duas distâncias: 9 e 8 metros. Ele disputa uma corrida de 100 metros que vai até a beira de um penhasco. Quantos pulos o grilo deve dar para chegar ao fim da corrida, mas sem passar do ponto final e cair do penhasco?

Neste problema, os alunos precisavam perceber que dando apenas pulos de nove metros o grilo poderia se deslocar apenas as distâncias, em metros: 0, 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99. Daí não seria possível chegar ao final da corrida, caso ele se deslocasse 99 metros e desse mais um pulo cairia no penhasco, indo contra a condição dada pelo problema. E que, caso ele escolhesse dar apenas pulos de 8 metros, o mesmo ocorreria. Portanto seria necessário que o grilo desse pulos de oito metros intercalados por pulos de nove metros também, assim a distância total da corrida e o deslocamento causado pelos pulos de nove metros precisariam ter uma diferença divisível por oito, isto é, seria necessário dar 4 pulos de 9 metros (36 metros) e oito pulos de oito metros (64 metros).

Este problema foi escolhido pelas possibilidades de abordagens a diversos conteúdos que ele aponta, tanto conteúdos mais triviais como a divisão, quanto outros mais elegantes. Durante a resolução os alunos presentes não conseguiram chegar a uma solução correta para este problema, a maioria deles considerou o grilo dando onze pulos de nove metros e completando uma distância de noventa e nove metros.

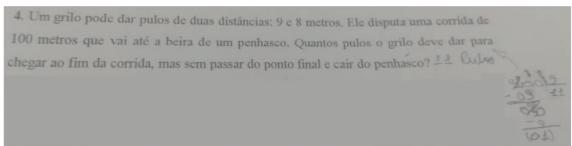


Figura 9. Solução dada por uma aluno para o problema 4 (Tarefa 2).

4. Um grilo podé dar pulos de duas distâncias: 9 e 8 metros. Ele disputa uma corrida de 100 metros que vai até a beira de um penhasco. Quantos pulos o grilo deve dar para chegar ao fim da corrida, mas sem passar do ponto final e cair do penhasco?

Figura 10. Solução dada por uma aluno para o problema 4 (Tarefa 2).

Contudo, durante a discussão levantamos o seguinte questionamento para eles: "Dando onze pulos de nove metros o grilo consegue realmente vencer a corrida?", considerando que na metodologia de resolução de problemas o papel do professor deve

ser de mediador entre os alunos e a formação de conceitos. Após o questionamento grande parte deles concordou que realmente seria necessário que o grilo desse tanto pulos de nove metros, quanto pulos de oito metros.

O quinto problema:

5. Numa árvore pousam pássaros. Se pousarem dois pássaros em cada galho, fica um galho sem pássaros. Se pousar um pássaro em cada galho, fica um pássaro sem galho. Determine o número de pássaros e o número de galhos.

Os alunos precisavam notar que ao resolver o problema, encontrariam dois números naturais consecutivos, pois no enunciado é dito que se pousa um pássaro em cada galho fica um pássaro voando, além disso, o número de pássaros excede o número de galhos em uma unidade. E também que o fato de dois pássaros pousando em cada galhos deixar um galho vazio implicava, pelo algoritmo de Euclides, em $p=g-1\cdot 2$, com p representando o número de pássaros e q representando o número de galhos. Daí facilmente, usando a transitividade e resolvendo a equação 2g-2=g+1 perceberiam que q=3, e consequentemente q=4.

Porém, a maior parte dos alunos, 18 deles, conseguiu chegar a uma solução correta apenas utilizando o método da tentativa e erro, como vemos exemplos abaixo:

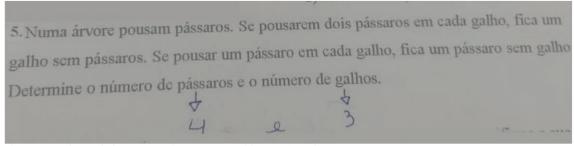


Figura 11. Solução dada por uma aluno para o problema 5 (Tarefa 2).

5. Numa árvore pousam pássaros. Se pousarem dois passaros em cada galho, fica um pássaro sem galho. galho sem pássaros. Se pousar um pássaro em cada galho, fica um pássaro sem galho. Determine o número de pássaros e o número de galhos.

Figura 12. Solução dada por uma aluno para o problema 5 (Tarefa 2).

Evidenciando, mais uma vez, a aplicação de um esquema de resolução para atacar problemas dos quais o conceito ainda não está formado.

Nesta tarefa, observamos que quando os alunos utilizam esquemas de resolução recorrendo a resolver casos particulares do problema, ou mesmo, quando recorrem à estratégia da tentativa e erro, eles estão amadurecendo o domínio que tem sobre o campo conceitual, Vergnaud entende essa relação como a interação entre elementos de um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, que estão relacionados uns aos outros e que estão travados no processo de cognição.

Desta maneira, os alunos exploraram os significantes envolvidos, seja por atacar diferentes situações nas quais podemos perceber o conceito envolvido, seja por maturar seus esquemas ou adaptá-los para resolver outros problemas situados no mesmo domínio.

5.3 Tarefa 3

A aplicação da Tarefa 3, ocorreu na primeira semana do mês de Julho. Nesta aula estavam presentes todos os alunos da turma, e a tarefa constava, também, de uma lista de problemas, que foi entregue para os alunos, com o intuito de que eles a resolvessem em duas aulas de cinquenta minutos. Porém, desta vez, reservamos os vinte e cinco minutos finais da aula para discussão dos problemas e das soluções propostas pelos alunos.

A tarefa era composta por cinco problemas sobre paridade, nos quais estava implícito o objetivo de formar o conceito de paridade (número par, número ímpar e as propriedades de adição e multiplicação com números pares e ímpares). Na aplicação desta tarefa todos os alunos da turma se envolveram com a atividade.

O primeiro problema:

1. Um dado está colocado sobre uma casa preta de um tabuleiro quadriculado. Em cada jogada o dado é tombado para uma casa vizinha. Após 2017 jogadas é possível o dado voltar para a sua posição inicial?



Neste problema a ideia era que todas as vezes que o dado era tombado um número par de vezes, ele terminaria o movimento em uma "casa" preta, e sempre que ele fosse tombado um número ímpar de vezes ele terminaria o movimento em uma "casa" branca, logo, após 2017 jogadas ele teria que estar sobre uma "casa" branca, portanto não poderia estar na posição inicial.

Apenas dois alunos chegaram à conclusão de que não era possível voltar para "casa" inicial, desta forma pudemos ver que os esquemas por eles utilizados puderam contribuir na formação do conceito. Abaixo observamos algumas soluções dadas pelos alunos, em seguida as comentamos:

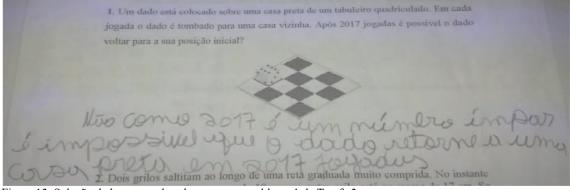


Figura 13. Solução dada por um dos alunos para o problema 1 da Tarefa 3.

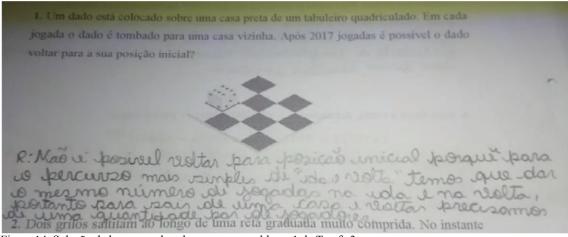


Figura 14. Solução dada por um dos alunos para o problema 1 da Tarefa 3.

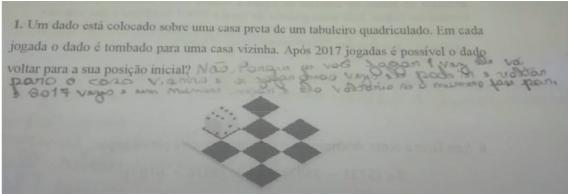


Figura 15. Solução dada por um dos alunos para o problema 1 da Tarefa 3.

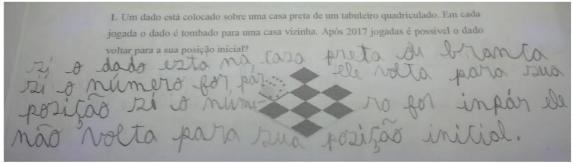


Figura 16. Solução dada por um dos alunos para o problema 1 da Tarefa 3.

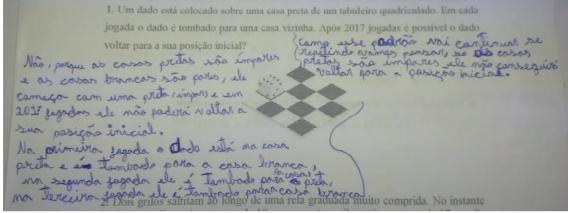


Figura 17. Solução dada por um dos alunos para o problema 1 da Tarefa 3.

Na figura 12 vemos que o aluno consegue utilizar um argumento razoável para justificar sua resposta, tal argumento se sustenta no fato de um percurso de ida e volta ter um número par de jogadas. Já na figura 14 uma solução dada por outro aluno sugere um esquema de resolução no qual casos mais simples são resolvidos para ajudar na generalização da ideia que resolve o caso geral, e em especial, o caso particular de 2017 jogadas.

Na parte final da aula, a discussão sobre as soluções, os alunos que responderam ser possível retornar a casa inicial com 2017 jogadas, facilmente se convenceram de que tal feito não seria possível. Bastou para isso, um aluno justificar que não seria

recorrendo a casos particulares, logo todos concordaram que apenas aconteceria se o número de jogadas fosse par. E mais uma vez ficou evidente que os alunos utilizaram o esquema sugerido por (Oliveira, 2010), no qual se resolvem casos semelhantes, mais simples, para atacar os problemas.

O segundo problema:

2. Dois grilos saltitam ao longo de uma reta graduada muito comprida. No instante inicial um grilo está na marca de 10 cm e o outro grilo está na marca de 17 cm. Se cada grilo salta 2 cm para a esquerda ou para a direita, em algum momento eles podem estar no mesmo local?



A ideia do problema dois era explorar a soma e a subtração de números pares e ímpares com outro número par, no caso o dois (tamanho do salto dos grilos), e observar que dessa maneira a paridade fica conservada, daí como um dos grilos está na marca 10, ele poderá ocupar, apenas, posições marcadas com números pares. Enquanto que o grilo que está na marca 17 poderá apenas ocupar posições que estão marcadas por um número ímpar. Logo, os dois grilos jamais poderiam estar ocupando a mesma posição, com esses dados do problema.

Apenas onze alunos chegaram a uma solução correta para este problema, porém algumas destas soluções tiveram um pouco mais de destaque, pela maneira com a qual foram apresentadas, mostrando um grau bem maior de amadurecimento de seus argumentos, em relação às apresentadas nas tarefas anteriores.

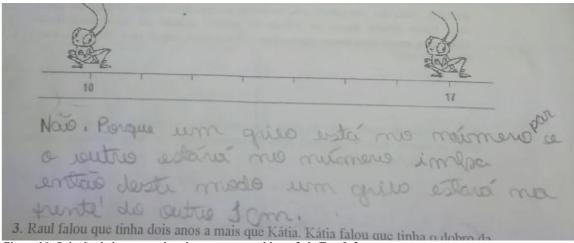


Figura 18. Solução dada por um dos alunos para o problema 2 da Tarefa 3.

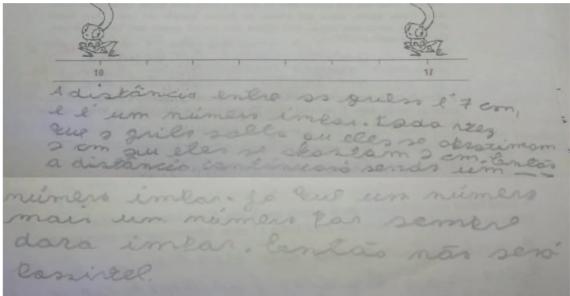


Figura 19. Solução dada por um dos alunos para o problema 2 da Tarefa 3.

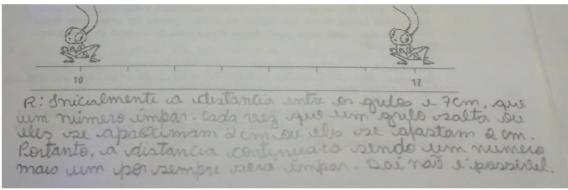


Figura 20. Solução dada por um dos alunos para o problema 2 da Tarefa 3.

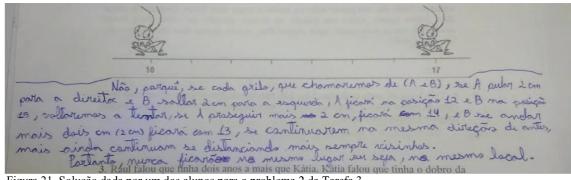


Figura 21. Solução dada por um dos alunos para o problema 2 da Tarefa 3.

Nas figuras acima podemos ver o quanto os alunos evoluíram, no que se refere a formulação de seus argumentos para justificar a resposta de um problema.

O terceiro problema:

3. Raul falou que tinha dois anos a mais que Kátia. Kátia falou que tinha o dobro da idade de Pedro. Pedro falou que Raul tinha 17 anos. Mostre que um deles mentiu.

Este era um problema bem parecido com o anterior, pois envolvia também, a ideia de soma, diferença e produto de números pares e impares. Nele os alunos precisavam fazer a seguinte dedução:

Se Raul e Kátia falam a verdade, então a paridade da idade de Kátia é a mesma que a paridade da sua idade e, além disso, ambos tem idade par, já que a idade de Kátia é o dobro da idade de Pedro, assim Pedro seria o mentiroso por afirmar que a idade de Raul é 17 anos (ímpar). Se Raul e Pedro falam a verdade, temos o seguinte cenário, Kátia só pode ter uma idade ímpar, 15 anos, que não pode ser o dobro da idade de Pedro. Por fim, se Kátia e Pedro falam a verdade, A idade de Kátia é um número par e a idade de Raul um número ímpar, logo Raul não pode ser dois anos mais velho que Kátia.

Não obtivemos nenhuma solução com uma justificativa razoável para este problema, provavelmente pelo fato de os alunos estarem procurando quem seria o mentiroso (um deles apenas) e não compreendendo que havia uma condicional relacionada a solução do problema, que possibilitava qualquer um deles a ser o mentiroso.

O quarto problema:

4. Sem fazer a conta, determine se o seguinte número é par ou ímpar.

$$3x$$
 5731 - 3597 2017 + $(9876 - 6789)^{1500}$

A ideia aqui era que os alunos observassem a paridade dos produtos, adições, subtrações e potências de números pares e impares, apenas discutindo as paridades dos números operados. Todos os alunos responderam corretamente a este problema, mas universalmente a solução foi feita com um cálculo mental sobre a paridade das operações realizadas.

O quinto problema:

5. No reino da Frutilândia, existe uma árvore mágica que possui 2005 maçãs e 2006 tomates. Todo dia, um garoto sobe na árvore e come duas frutas. Quando ele come duas frutas iguais, nasce um tomate na árvore; quando ele come duas frutas diferentes, nasce uma maça. Após alguns dias, restará apenas uma fruta na árvore. Que fruta será?

Neste problema os alunos precisariam observar que a paridade da quantidade de maçãs era não variável, independentemente da escolha feita pelo garoto (comer duas frutas iguais ou comer duas frutas diferentes).

Pois, caso ele escolha comer duas frutas iguais teremos dois casos: O garoto come duas maçãs, e daí a paridade da quantidade das maçãs e dos tomates não se altera, contudo nasce um tomate e a paridade da quantidade de tomates se altera de par para ímpar. O segundo caso é quando o garoto escolhe comer dois tomates, de maneira análoga, ao comer dois tomates as paridades da quantidade de tomates e maçãs não se alteram, mas como nasce um tomate ao serem comidas duas frutas iguais a quantidade de tomates muda de par para ímpar. Se o garoto escolher comer duas frutas diferentes teremos as paridades tanto dos números de tomates, quanto do número de maçãs alterada, já que ele comeu uma fruta de cada. Porém, nascerá uma maçã e, portanto, a quantidade de maçãs terá sua paridade alterada novamente. Este problema, certamente, foi o problema mais difícil da lista e não tivemos nenhuma solução correta para ele.

Concluímos com a aplicação da tarefa que os esquemas observados nas resoluções dos problemas apontam para o desenvolvimento de habilidades, por parte dos alunos, para relacionar a aquisição do conhecimento e interagir com situações problemas valorizando as ações, utilização de estratégias e a pluralidade de ataques, quando colocados em confronto com tais situações, alentando o que Vergnaud diz sobre as interações entre o sujeito e os elementos do campo conceitual na formação de um conceito.

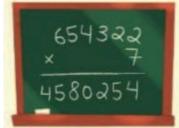
5.4 Tarefa 4

A aplicação da Tarefa 4, ocorreu na segunda semana do mês de Julho. Nesta tarefa constavam dez problemas sobre multiplicidade, divisibilidade, mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum. Sua aplicação ocorreu em duas aulas de cinquenta minutos, isto é, em um encontro de cem minutos, dos quais os vinte e cinco minutos finais foram reservados para que os alunos pudessem conversar, tanto com os colegas de turma, quanto com o professor sobre suas soluções apresentadas para os problemas. Na aplicação desta tarefa estavam presentes todos os alunos da turma, os quais se envolveram com a atividade.

O primeiro problema:

1. (Prova da 1ª fase OBMEP 2015 – Nível 1 – Questão 2) O número 4580254 é múltiplo de 7. Qual dos números abaixo também é múltiplo de 7?

- (a) 249 580 4
- (b) 248 580 4
- (c) 257 580 4
- (d) 256 580 4
- (e) 245 580 4



Neste problema a ideia era de os alunos descobrirem qual dos números expostos nas alternativas era múltiplo de sete. Mesmo parecendo um problema fácil no qual os alunos poderiam apenas dividir cada um destes números por sete, utilizando o algoritmo da divisão de Euclides, ocorreu que apenas seis alunos chegaram a uma resposta correta e a maioria desses apenas testou as alternativas, utilizando o método da chave para verificar se o número era ou não múltiplo de sete.

No entanto, um dos alunos apresentou a seguinte solução:

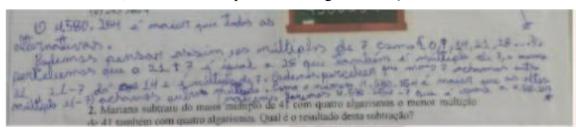


Figura 22. Solução dada por um dos alunos para o problema 1 da Tarefa 4.

Nela o aluno utiliza um argumento que recorre a simplificar o problema a casos mais simples, inclusive triviais, assim como sugere (OLIVEIRA, 2010) no esquema proposto que indica atacar os problemas resolvendo problemas semelhantes, mais simples. Tal abordagem, segundo Vergnaud, é uma categoria de operação de pensamento que permite a assimilação de elementos importantes para resolução do problema, tornando assim o conceito envolvido significativo, justificando a operacionalidade do esquema e, portanto, constituindo sentido para o conceito.

O segundo problema:

2. Mariana subtraiu do maior múltiplo de 41 com quatro algarismos o menor múltiplo de 41 também com quatro algarismos. Qual é o resultado desta subtração?

O exposto nesse problema levantava a discussão sobre multiplicidade junto à ideia do sistema de numeração decimal, era um problema com nível de dificuldade um pouco superior ao problema anterior, porém mais alunos apresentaram uma solução correta para ele, foram 22 dois deles, destacamos uma das soluções na figura abaixo:

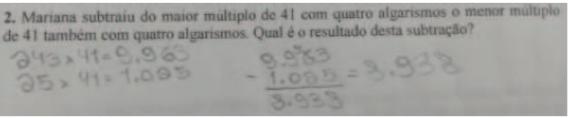


Figura 23. Solução dada por um dos alunos para o problema 2 da Tarefa 4.

Nela o aluno apresenta um esquema, que dialoga com o esquema de (MORGADO, 2006), dividindo a resolução em etapas e mostrando que indiscutivelmente é um caso no qual o aluno organiza seus invariantes de ação e cria uma estratégia para resolver o problema.

O terceiro problema:

3. (Prova da 1ª fase da OBMEP 2014 – N1 – questão 13) O produto de um número de dois algarismos pelo número formado pelos mesmos dois algarismos, escritos em ordem inversa, é 2944. Qual é a soma dos dois números multiplicados?

Dezesseis alunos apresentaram soluções corretas neste problema destacamos duas delas abaixo:

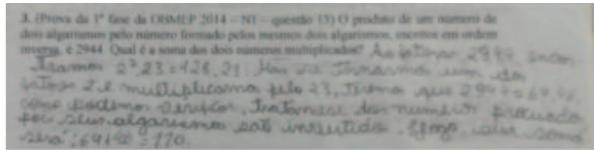


Figura 24. Solução dada por um dos alunos para o problema 3 da Tarefa 4.

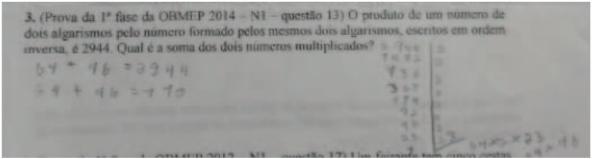


Figura 25. Solução dada por um dos alunos para o problema 3 da Tarefa 4.

Eles apresentam soluções em que utilizam a fatoração do número 2944 para decompor em dois fatores que tenham os algarismos em ordem inversa, mas percebemos pelas soluções apresentadas, mesmo que de forma implícita, que o esquema da tentativa foi utilizado para agrupar os fatores e formar os números 64 e 46.

O quarto problema:

4. (Prova da 1ª fase da OBMEP 2012 – N1 – questão 17) Um feirante tem cinco cestas que contêm limões e laranjas. A quantidade total de frutas em cada cesta está indicada pelo número correspondente. Ele apontou para uma das cestas e disse: "Se eu vender esta cesta, o número de limões passará a ser o dobro do número de laranjas". Quantas frutas tem a cesta para a qual ele apontou?



Nenhum dos alunos apresentou uma solução correta e durante a discussão final também não houveram sugestões para se chegar a uma solução adequada, portanto o professor contribuiu com algumas sugestões, tentando induzir os alunos a alguma estratégia de solução, mas como não obteve sucesso nessa empreitada, então resolveu o problema para os alunos.

O quinto problema:

5. (Prova da 1ª fase da OBMEP 2011 – N1 – questão 18) Um salão de festas comporta 700 pessoas, entre convidados e garçons. Um garçom atende no máximo 10 convidados e todo convidado deve ser atendido por um garçom. Qual é o número máximo de pessoas que podem ser convidadas para uma festa nesse salão?

Apenas um aluno apresentou uma solução adequada para este problema, contudo sua solução apenas apresentava a resposta, sem justificativa alguma. Durante a discussão no final da aula ele explicou que fez uso do método de tentativas para encontrar a solução correta.

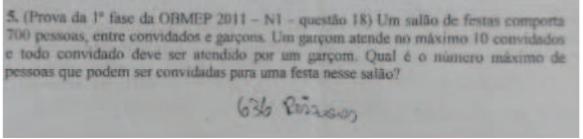


Figura 26. Solução correta dada por um dos alunos para o problema 5 da Tarefa 4.

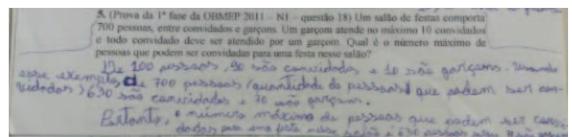


Figura 27. Solução incorreta dada por um dos alunos para o problema 5 da Tarefa 4.

Acima temos a solução correta apresentada (Figura 24) e uma das soluções não corretas (Figura 25) apresentadas por dois alunos, segunda damos um destaque pelo argumento utilizado, que mesmo não conduzindo a uma solução correta mostra que o aluno tem formado o conceito de proporcionalidade.

5.5 Tarefa 5

A aplicação da tarefa 5 ocorreu na primeira semana do mês de Novembro, e estavam presentes os trinta e um alunos da turma. O tempo dedicado as atividades também foi de duas aulas de cinquenta minutos divididas da seguinte maneira: os

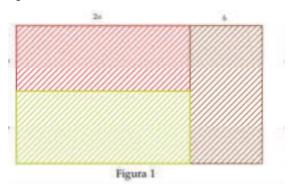
setenta minutos iniciais dedicados para que os alunos escrevessem suas soluções e os trinta minutos finais sendo destinados a discussão sobre suas soluções, os caminhos tomados por eles ou os esquemas que utilizaram. Esta tarefa foi composta por quatro questões sobre a introdução da notação algébrica, o objetivo principal dela era potencializar a formação do conceito de generalização, como também favorecer no amadurecimento das ideias de trabalho com grandezas de valores variáveis.

É importante ressaltar que a aplicação de tal tarefa não atingiu seu principal objetivo, que era de inicialmente obter as soluções dos alunos para os problemas para que, em seguida, discutíssemos tanto as respostas, quanto as estratégias por eles utilizadas para que fosse possível formular conclusões, já que grande parte dos alunos, realmente uma enorme maioria, entregou os problemas sem solução alguma. Mas, vale dizer que a aula na qual houve esta aplicação foi bastante proveitosa, pois durante a discussão final o professor dirigiu a construção das ideias induzindo os alunos a formar os conceitos, e ao final muitos alunos puderam dizer que compreenderam as ideias envolvidas nos problemas.

Os problemas da Tarefa 5:

- **1.** Utilize símbolos matemáticos e letras para representar as grandezas e reescrever as sentenças abaixo.
- a) O perímetro de um quadrado e o quádruplo da medida do seu lado.
- b) A área de um quadrado e o quadrado da medida do seu lado.
- c) A metade da raiz quadrada de um número é menor que o triplo desse número.
- d) O salário de Rodrigo e setecentos reais mais vinte por cento do valor de suas vendas.
- **2.** Seja l a medida da aresta de um cubo. Determine as expressões correspondentes
- a) a sua área A.
- b) ao seu volume V.
- c) a soma S das medidas de todas as arestas
- **3.** A figura abaixo é o desenho de um terreno retangular dividido em três retângulos menores. Determine:
- a) uma expressão que representa o perímetro Pdo terreno.

- b) uma expressão que representa a quantidade *Q* de cerca gasta, se todos os retângulos serão cercados e lados comuns recebem cerca apenas uma vez.
- c) uma expressão que representa a área A do terreno.



4. Diz a lenda que no tumulo de Diofanto (matemático grego da antiguidade) havia o seguinte problema: Viajante, aqui estão as cinzas de Diofanto. E milagroso que os números possam medir a extensão de sua vida: 1/6 dela foi uma bela infância; depois de 1/12 de sua vida, sua barba cresceu; 1/7 de sua vida passou em um casamento sem filhos; cinco anos após isso nasceu seu primeiro filho, que viveu metade da vida de seu pai; e, em profundo pesar, o pobre velho terminou seus dias na terra quatro anos após perder seu filho. Quantos anos viveu Diofanto? Construa uma equação, utilizando os dados do túmulo, na qual seja possível calcular a idade de Diofanto e a resolva.

Provavelmente a maior dificuldade apresentada pelos alunos na falta de tentativas, como também na discussão feita no final da aula, ocorreu devido a eles não conseguirem compreender a ideia de utilizar um símbolo para representar o valor de uma grandeza variável. Apresentamos as soluções dadas pelo único aluno que respondeu a tarefa.

```
1. Utilize simbolos matematicos e letras para representar as grandezas e reescrever as sentenças abaixo

a) O perimetro de um quadrado é o quadraplo da medida do sea lado. P = 4x L

b) A area de um quadrado é o quadrado da medida do sea lado. A = = ± L

c) A metade da máz quadrada de um numero é menor que o triplo desse número = 3x(N)

d) O salário do Rodrigo e setecentos reais máis vinte por cento do valor de sous vendos

5 = 700 + 10 × √
```

Figura 28. Solução apresentada por um dos alunos para o problema 1 da Tarefa 5.

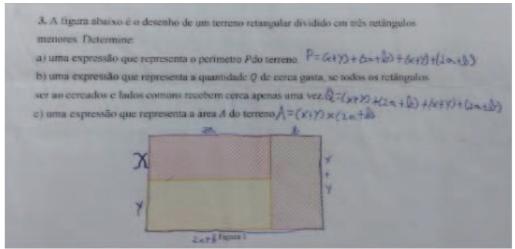


Figura 29. Solução apresentada por um dos alunos para o problema 3 da Tarefa 5.

Sobre essas soluções comentaremos apenas que mesmo não apresentando respostas corretas o aluno mostrou ter noção da utilização de símbolos para representar as variáveis, mas ainda utilizou uma linguagem algébrica que mistura símbolos de "tipos" diferentes, o que nos permite crer que pelo menos um destes alunos, quando colocado em uma situação problema "nova" buscou criar uma estratégia levando-o a desenvolver novas competências. Consideraremos esta situação como nova, pelo fato destes alunos estarem no sétimo ano do Ensino Fundamental, e até então não terem abordado esse tema nas aulas regulares.

5.6 Tarefa 6

A aplicação da tarefa 6, que aconteceu na segunda semana do mês de Novembro, teve 28 alunos presentes. Nela constava uma lista com seis problemas sobre contagem, e tinha o objetivo de amadurecer o conceito de contagem por agrupamentos utilizando o princípio aditivo e o princípio multiplicativo da contagem.

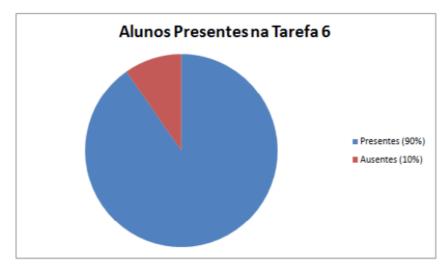


Gráfico 5: Percentual dos alunos presentes na Tarefa 6.

O tempo de aplicação dela foi de duas aulas de cinquenta minutos, sendo os setenta minutos iniciais dedicados a resolução dos problemas, bem como a redação das respostas e os trinta minutos finais reservados para a discussão das estratégias e as soluções encontradas pelos alunos.

O primeiro problema:

1. No país Arnaldos Unidos cada bicicleta tem que possuir uma placa com três letras, a primeira do conjunto {A, B, C, D, E}, a segunda do conjunto {F, G, H} e a terceira do conjunto {I, J, K, L}. Existem quantas placas de bicicleta possíveis em Arnaldos Unidos?

Neste problema os alunos precisavam perceber que ao formar uma placa qualquer, eles estariam tendo que tomar três decisões, que são de escolher uma letra de cada um dos conjuntos. Com isso, o esquema proposto por (MORGADO, 2006), no qual ele sugere a divisão de um problema, em outros problemas menores e mais simples, para que seja resolvido em etapas. Abaixo mostramos byb o índice de acerto deste problema foi alto, pois dos 28 alunos presentes apenas 5 não apresentaram uma solução correta.

O segundo problema:

2. O presidente de Arnaldos Unidos decide aumentar o numero placas de bicicleta colocando duas letras novas, X e Y , nesses conjuntos. Cada letra será adicionada a exatamente um conjunto e as duas letras podem ser adicionadas ao mesmo conjunto ou a conjuntos diferentes. Por exemplo, se as duas letras são adicionadas ao primeiro conjunto, então o a primeira letra da placa pertence ao {A, B, C, D, E, X, Y} e os

demais conjuntos não se alteram. Qual é o número máximo de novas placas após Arnaldão (o presidente) colocar as letras novas?

Para resolução deste problema os alunos precisariam ter resolvido o problema anterior, pois o enunciado pede a diferença entre o número de placas ocorrido após a inclusão das novas letras e o número de placas encontrado no problema anterior. E nele, havia a possibilidade de os alunos dividirem em alguns casos, a saber: Quando as duas letras são incluídas no conjunto que já possui cinco letras; Quando as duas letras são acrescidas ao conjunto que possui quatro letras; Quando as duas letras são acrescidas ao conjunto que possui três letras; Quando uma delas é acrescida a o conjunto que possui cinco letras e outra ao conjunto que possui três letras; Quando uma é acrescida ao conjunto que possui cinco letras e a outra ao que possui quatro; Quando uma letra é incluída ao conjunto que possui quatro letras e a outra é acrescida a o conjunto que possui três.

Daí, era possível fazer a aplicação do princípio aditivo junto ao multiplicativo para chegar a solução, porém nenhum dos alunos chegou a uma solução correta para o problema. Contudo, grande parte deles chegou a seguinte solução:

$$7 \cdot 4 \cdot 3 = 84$$

Ou seja, considerando apenas a inclusão das duas letras no conjunto que possui cinco letras, assim como foi mostrado exemplificando no enunciado do problema.

O terceiro problema:

3. Considere três cidades A, B e C, de forma tal que existem três estradas ligando A à B e dois caminhos ligando B à C.



- a) De quantas formas diferentes podemos ir de A até C, passando por B?
- b) De quantas formas diferentes podemos ir de A até C, passando por B, e voltar para A novamente, passando por B?

c) De quantas formas diferentes podemos ir de A até C, passando por B, e depois voltar para A sem repetir estradas e novamente passando por B?

Os questionamentos levantados pelo problema acima eram, provavelmente, mais fáceis que os demais problemas dessa tarefa, obtivemos resultados que validam esta hipótese na aplicação dessa tarefa. Pelo fato de obtermos vinte e oito respostas corretas para os itens (a) e (b) desse problema e também vinte respostas corretas para o item (c).

Abaixo seguem algumas respostas dadas por alguns alunos:

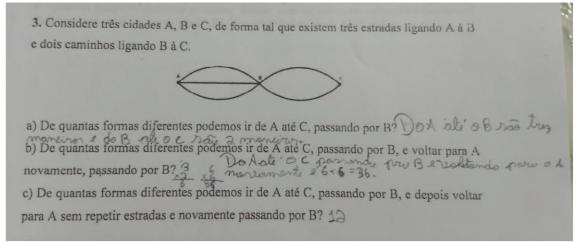


Figura 30. Solução apresentada por um dos alunos para o problema 3 da Tarefa 6.

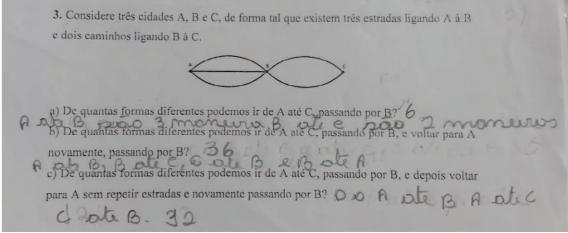


Figura 31. Solução apresentada por um dos alunos para o problema 3 da Tarefa 6.

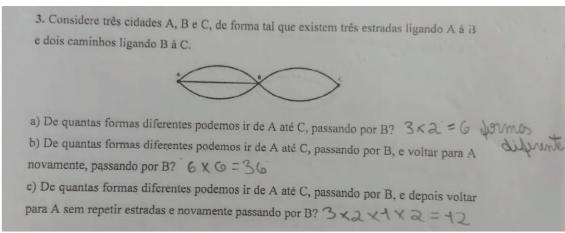


Figura 32. Solução apresentada por um dos alunos para o problema 3 da Tarefa 6.

A maior parte dos alunos utilizou a estratégia de dividir o problema em casos, como quando no *item (a)* consideram que há três maneiras de A até B e duas maneiras de ir de B até C, assim como sugere MORGADO (2006). Consequentemente, temos que os alunos atingiram as duas fases de resolução de problemas, que Vergnaud cita em sua Teoria dos Campos Conceituais, primeiro ao selecionar as informações dadas pelo problema os alunos puderam dividir o problema em etapas, depois entraram propriamente no processo resolutivo.

O quarto problema:

- **4.** Dispondo dos algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, pode-se formar quantos números
- a) de quatro algarismos?
- b) de quatro algarismos distintos?
- c) impares de três algarismos distintos?

Assim como no problema anterior os alunos utilizaram a estratégia de dividir o problema em casos mais simples, que neste aqui, consistiu em tomar a decisão de escolher os números repartida em outras decisões mais simples de escolher algarismo por algarismo. Abaixo vemos algumas soluções dos alunos:

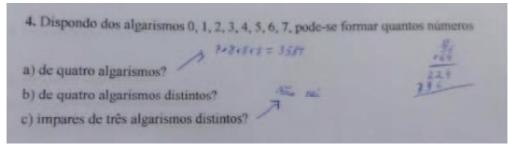


Figura 33. Solução apresentada por um dos alunos para o problema 4 da Tarefa 6.

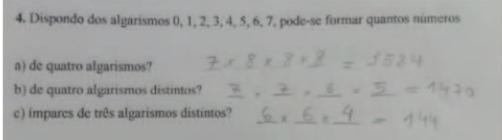


Figura 34. Solução apresentada por um dos alunos para o problema 4 da Tarefa 6.

É importante ressaltar que existia uma sutileza neste problema envolvendo a utilização do algarismo zero, e tal obstáculo foi superado pelos alunos sem tantas dificuldades. Inclusive durante a discussão, vários deles comentaram o fato de que, caso o algarismo zero fosse escolhido pra ocupar a casa decimal que está mais a esquerda do número este teria uma casa decimal a menos, isto é, no *item (a)* a utilização do zero para ocupar a ordem das dezenas de milhares faria com que o número tivesse apenas três algarismos.

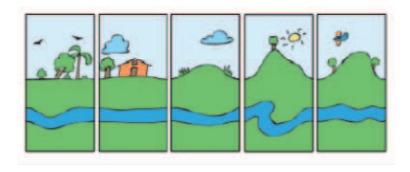
O quinto problema:

5. De quantas formas seis pessoas podem sentar-se em numa fileira de seis cadeiras se duas delas (Geraldo e Francisco) recusam-se a sentar-se um do lado do outro?

Este problema tinha um grau de dificuldade maior que os outros desta tarefa, nenhum dos alunos conseguiu apresentar uma solução correta para ele, e, portanto durante a discussão o professor o resolveu para os alunos, na resolução tomamos o cuidado de apresentar para eles duas soluções que exploram estratégias diferentes: uma construtiva, na qual fomos mostrando caso a caso todas as possibilidades; e outra destrutiva, na qual apresentamos todos os casos e eliminamos os que não satisfazem a condição imposta pelo problema. Apresentamos nos apêndices tais soluções.

O sexto problema:

1
6. Podemos montar paisagens colocando lado a lado, em qualquer ordem, os cinco
quadros da figura. Trocando a ordem dos quadros uma vez por dia, por quanto tempo,
aproximadamente, é possível evitar que uma paisagem se repita?



Todos os alunos responderam corretamente a este problema, durante a discussão eles o consideraram como um problema fácil, mesmo tendo apenas um aluno que tomou o cuidado de dar uma resposta em meses, é claro que sabemos que o enunciado não exigia tal conversão, mas durante a discussão falamos sobre a elegância da solução dada pelo aluno que a fez.



Gráfico 6: Respostas corretas e não corretas dadas pelos alunos para o problema 6 da Tarefa 6.

As soluções apresentaram o esquema de dividir o problema em casos mais simples, porém um deles (mostramos abaixo na figura 32) chamou atenção para o fato das decisões tomadas uma a uma estarem bem explicitas.

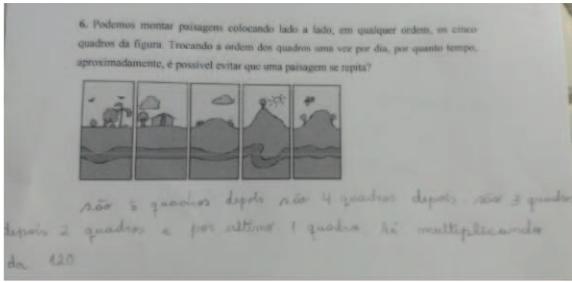


Figura 35. Solução apresentada por um dos alunos para o problema 6 da Tarefa 6.

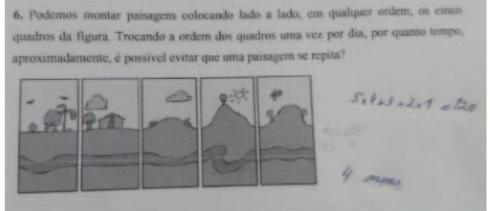


Figura 36. Solução apresentada por um dos alunos para o problema 6 da Tarefa 6.

Nessas resoluções os alunos se apropriaram do que Vergnaud considera como organizações invariantes de comportamento para determinadas classes de situações, pois são diversas situações (os problemas propostos na tarefa) que foram atacadas utilizando o esquema proposto por (MORGADO, 2006).

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta pesquisa procuramos verificar como os esquemas elaborados pelos alunos de uma turma do sétimo ano do Ensino Fundamental, de uma escola da zona rural de Campina Grande, poderiam de alguma forma, contribuir para a formação de conceitos matemáticos, e auxiliar no processo de ensino-aprendizagem. Para isso, aplicamos seis tarefas, nas quais figuram problemas olímpicos, tanto de edições de olimpíadas de matemática, quanto dos bancos de questões e materiais de preparação para olimpíadas voltados para preparação dos alunos.

Para fundamentar a discussão de a Resolução de Problemas, buscamos aqui discorrer um pouco sobre as ideias sobre Resolução de Problemas de autores como (LIMA, 2007), (DANTE, 2007), (ANDRADE, 2008), (ONUCHIC, 1999), (TAO, 2013), (MORGADO, 2006) e principalmente (POLYA, 1995), valorizando o que se refere ao processo, já que os estudos sobre esta área valorizam direta, ou indiretamente, os esquemas de resolução dos problemas. Também levantamos a discussão sobre a Teoria dos Campos Conceituais de Gerrard Vergnaud, tendo em vista que os esquemas de resolução de problemas, definidos como em (FRANCHI, 1999), se caracterizam por ter um caráter invariante, desta maneira se aproximando dos invariantes operatórios que compõem um campo conceitual, compondo um dos conjuntos relativos aos objetos do campo conceitual, como define Vergnaud.

Na análise das atividades, observamos aspectos diversos, dentre os quais, se a solução apresentada pelos alunos, para o problema, estava correta ou não. Tanto nos casos em que a solução apresentada pelo aluno estava correta, quanto nos casos em que a solução não estava, observamos como eles utilizaram os esquemas e estratégias (invariantes operatórios) envolvidos com o conceito a se formar, ou seja, como eles conseguiram relacionar os problemas criando os esquemas de resolução, outro aspecto relevante observado foi a evolução dos alunos, durante o decorrer das tarefas, no que se refere a linguagem tanto na escrita das suas soluções para os problemas, quanto na fala, durante a formulação de argumentos nas discussões sobre as tarefas.

É importante dizer que a maneira com a qual aplicamos as tarefas, deixando alguns minutos no final da aula, para a discussão sobre as respostas, e as tentativas feitas pelos alunos, para os problemas, mostrou-se interessante. Apesar de termos decidido apenas após a aplicação das duas primeiras tarefas que deveríamos dedicar um

pouco mais de tempo, já que a discussão, nas duas primeiras, havia acontecido com contorno agradável.

Foi neste momento de discussão que os alunos, que não haviam respondido um dos problemas corretamente, se mostram de alguma forma capazes de elaborar argumentos razoáveis ou alguma estratégia para a resolução, levantando a possibilidade de este aluno estar em um nível mais avançado, em relação a formação do conceito, do que tem mostrado com seus registros escritos. Podemos dizer que nos casos em que ocorreram tais respostas erradas, as aulas tomaram um caminho interessante para uma aula de Resolução de Problemas, quando surge uma resposta não tão boa e ela conduz a discussão para que se aprenda algo com este erro, e se criam hipóteses que ao se confirmarem apontam para uma solução correta do problema.

As análises das tarefas aplicadas puderam nos mostrar que de fato os alunos utilizam esquemas de resolução, e estes esquemas favorecem a formação dos conceitos, validando assim a discussão sobre o comportamento intelectual dos sujeitos quando colocados no desafio de resolver um problema, problema esse que, em geral, pode aparecer colocado de diversas maneiras compondo novas situações e buscando sentido para os conceitos. Portanto, podemos dizer que alcançamos uma resposta satisfatória para nossa pergunta de pesquisa, já que foi possível perceber que os alunos puderam, em diversas oportunidades, utilizar esquemas, dos quais já haviam se apropriado, para resolver novas situações. Nos anexos deixamos as tarefas que foram aplicadas, porém não exporemos as soluções para os problemas, já que estas podem ser encontradas nos sites da OBMEP, POTI, Portal da Matemática, dentre outros.

Por fim, dizemos que esta pesquisa pode ser utilizada por professores de matemática com a intenção de dar uma pequena contribuição aos processos de ensino-aprendizagem, bem como, que desejamos que surjam muitas outras pesquisas, nesta mesma linha, que busquem analisar e estudar o impacto e o papel pedagógico das olimpíadas de matemática, não só da OBMEP, fazendo aprofundamento deste tema ou outras abordagens.

7. REFERÊNCIAS

ALBUQUERQUE, I. M. C. e BORGES NETO, H. **O Conceito De Grupo: Sua Formação Por Alunos De Matemática**. 333f. Tese (Ensino de Matemática). Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2005.

ALLEVATO, N. S. G. Associando o computador à resolução de problemas: análise de uma experiência, 2005. Tese (Doutorado em Educação Matemática) UNESP-Rio Claro.

ALVES, W. J. S. O Impacto da Olimpíada de Matemática em Alunos da Escola Pública. São Paulo – SP: 2010. 91f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) Pontificia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP

ANDRADE, S. A. pesquisa em educação matemática, os pesquisadores e a sala de aula: um fenômeno complexo, múltiplos olhares um tecer de fios. Tese (Doutorado em Educação). Campinas: USP, 2008.

ARAÚJO, J. E. Um estudo dos registros de representação semiótica aplicado à problemas da Olimpíada Brasileira das Escolas Públicas (OBMEP). Dissertação de Mestrado (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática PPGECEM). Campina Grande: UEPB, 2018.

BANCO INDUTOR DO PROFMAT http://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes/ Acesso em 10 de Abril de 2017.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto e Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Matemática: Ensino de primeira à quarta série. Brasília: MEC/SEF, 1997. 142p.

BRASIL. Ministério da Educação; Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

COSTA, Regiane Quezia Gomes da. **Análise da prova da primeira fase da OBMEP como subsídio para a prática docente.** Brasília, 2015. Dissertação (Mestrado em Matemática) Pontificia Universidade de Brasília – UnB. Disponível em: http://repositorio.unb.br/handle/10482/20316> Acesso em: 12 de set. 2017.

COCCO, Eliane Maria. **OBMEP e avaliação em larga escala no município de Frederico Westphalen:** discussões e encaminhamentos. X ANPED SUL, Florianópolis, outubro de 2014. Disponível em: http://xanpedsul.faed.udesc.br/arq pdf/1711-0.pdf>. Acesso em: 18 set. 2017.

DANTE, Luiz Roberto. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática.**12ª. ed. 10 impr. São Paulo: Ática, 2007.

- FRANCHI, A. Considerações sobre a teoria dos campos conceituais. In: FRANCHI, A. et AL Educação Matemática: uma introdução. São Paulo: Ed. PUC, 1999.
- FIDELES, Eduardo Cordeiro. **A OBMEP Sob uma Perspectiva de Resolução de Problemas**. Brasília DF: 2014. 58f. Dissertação (Mestrado em Matemática) Pontificia Universidade de Brasília UnB.
- GODOY, A. S. Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades. RAE Revista de Administração de Empresas, São Paulo, v.35, n2, p.57-63, 1995.
- LIMA, Elon Lages; **Matemática e Ensino**. SBM, Rio de Janeiro, 2007.
- MARTINS, Lucione de Bitencourt. **Um Estudo Sobre as Estratégias de Resolução de Questões da OBMEP.** Porto Alegre RS: 2015. 162f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) Universidade Federal do Rio Grande do Sul UFRGS
- MENINO, F. dos S. **Resolução de problemas no cenário da matemática discreta**. Tese (Doutorado). Rio Claro, Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2013, 289 f.
- MORGADO, Augusto Cesar; **A Matemática do Ensino Médio** 6ª Ed., volume 2. SBM, Rio de Janeiro, 2006.
- OLIVEIRA, K. I. M. **Iniciação à Matemática:** um curso com problemas e soluções. 2ª Edição. SBM, Rio de Janeiro, 2010.
- ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.(Org.). Pesquisa em Educação Matemática. São Paulo: Editora UNESP,1999. cap.12, p.199-220.
- POLYA, G. F. **A arte de resolver problemas:** Um novo aspecto do método matemático. 7º edição. Tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo. Editora Interciência, 1995.
- SCHROEDER, T.L., LESTER Jr., F.K. **Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving**, TRAFTON, P.R., SHULTE, A.P. (Ed.) *New Directions for Elementary School Mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics, 1989. (Year Book).
- SILVA, Paulo Henrique das Chagas. **Análise e Avaliação das Questões dos Níveis 1 e 2 da Primeira Fase da OBMEP sob uma Perspectiva de Resolução de Problemas.** Mossoró RN: 2017. 145f. Dissertação (Mestrado em Matemática) Universidade Federal Rural do Semi-Árido UFERSA
- SINGH, S. **O Último Teorema de Fermat:** a história que confundiu as maiores mentes do mundo durante 358 anos. Tradução: Jorge Luiz Calife. 13a edição. Record, Rio de Janeiro, 2008.

TAO, T. Como Resolver Problemas matemáticos: Uma perspectiva pessoal. Tradução de Paulo Boa Ventura. SBM, Rio de Janeiro, 2013.

VERGNAUD, G. Quelques problèmes theóriques de la didactique a propos d'um example: lês structures additives. Atelier International d'Eté: Réchercheen Didactique de la Physique. La Londeles Maures, França, 1983.

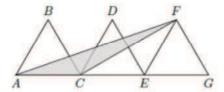
VERGNAUD, G. La théorie dês champs conceptuels. Récherches em Didactique dês Mathématiques, 10.2, 133-170, 1990.

VERGNAUD, G.; **Multiplicative conceptual field:** what and why? In Guershon, H. and Confrey, J. (Eds) The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics. Albany, N.Y.: State University of New York Press, 1994.

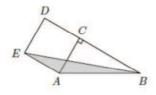
ANEXOS

ANEXO 1 (TAREFA 1)

1. Na figura a seguir, ABC, CDE e EFG são triângulos equiláteros com 60 cm2 de área cada um. Se os pontos A, C, E e G são colineares, determine a área do triângulo AFC.



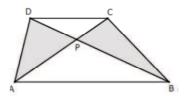
2. Na figura a seguir, ACDE é um quadrado com 14 cm² de área. Qual é a área do triângulo ABE?



- **3.** Três formigas estão paradas em três dos vértices de um retângulo no plano. As formigas se movem uma por vez. A cada vez, a formiga que se move o faz segundo a reta paralela à determinada pelas posições das outras duas formigas. É possível que, após alguns movimentos, as formigas se situem nos pontos médios de três dos lados do retângulo original?
- **4.** Dois segmentos dividem o retângulo da figura a seguir em três triângulos. Um deles tem área 24 e o outro tem áreas 13. Determine a área do terceiro triângulo.

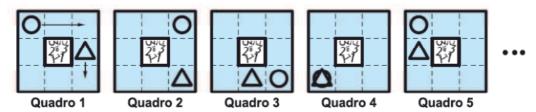


5. A figura ABCD abaixo é um trapézio, sabe-se que AB = 14cm, CD = 5cm, e a área do triângulo APD é 12 cm^2 . Determine a área do triângulo BPC.

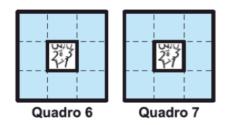


ANEXO 2 (TAREFA 2)

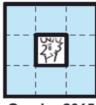
1. Na sequência de quadros abaixo, uma bolinha e um triângulo caminham no sentido horário pelas casas azuis. De um quadro para o seguinte, o triângulo passa de uma casa para a casa vizinha, e a bolinha pula uma casa.



a) Desenhe a bolinha e o triângulo do Quadro 6 e do Quadro 7 da sequência



- b) Continuando a sequência, qual é o número do primeiro quadro em que a bolinha e o triângulo estão na mesma posição do Quadro 1?
- c) Desenhe a bolinha e o triângulo do Quadro 2015.



Quadro 2015

- **2.** Na soma 2+0+1+6+2+0+1+6+...+2+0+1+6=2016, quantos sinais de adição foram usados?
- a) 896
- b) 895
- c) 2016
- d) 224
- e) 223
- **3.** Você pode encontrar cinco números impares cuja soma seja 100? Justifique a sua resposta.

- **4.** Um grilo pode dar pulos de duas distâncias: 9 e 8 metros. Ele disputa uma corrida de 100 metros que vai até a beira de um penhasco. Quantos pulos o grilo deve dar para chegar ao fim da corrida, mas sem passar do ponto final e cair do penhasco?
- **5.** Numa árvore pousam pássaros. Se pousarem dois pássaros em cada galho, fica um galho sem pássaros. Se pousar um pássaro em cada galho, fica um pássaro sem galho. Determine o número de pássaros e o número de galhos.

ANEXO 3 (TAREFA 3)

1. Um dado está colocado sobre uma casa preta de um tabuleiro quadriculado. Em cada jogada o dado é tombado para uma casa vizinha. Após 2017 jogadas é possível o dado voltar para a sua posição inicial?



2. Dois grilos saltitam ao longo de uma reta graduada muito comprida. No instante inicial um grilo está na marca de 10 cm e o outro grilo está na marca de 17 cm. Se cada grilo salta 2 cm para a esquerda ou para a direita, em algum momento eles podem estar no mesmo local?



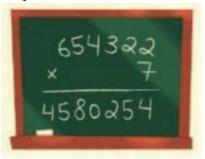
- **3.** Raul falou que tinha dois anos a mais que Kátia. Kátia falou que tinha o dobro da idade de Pedro. Pedro falou que Raul tinha 17 anos. Mostre que um deles mentiu.
- **4.** Pedro comprou um caderno com 96 folhas e numerou-as de 1 a 192. Vitor arrancou 25 folhas do caderno de Pedro e somou os 50 números que encontrou escritos nas folhas. Esta soma poderia ser igual a 1990? Justifique a sua resposta.
- 5. Sem fazer a conta, determine se o seguinte número é par ou impar.

$$3x$$
 5731 - 3597 2017 + $(9876 - 6789)^{1500}$

6. No reino da Frutilândia, existe uma árvore mágica que possui 2005 maçãs e 2006 tomates. Todo dia, um garoto sobe na árvore e come duas frutas. Quando ele come duas frutas iguais, nasce um tomate na árvore; quando ele come duas frutas diferentes, nasce uma maça. Após alguns dias, restará apenas uma fruta na árvore. Que fruta será?

ANEXO 4 (TAREFA 4)

- **1.** (Prova da 1ª fase OBMEP 2015 Nível 1 Questão 2) O número 4580254 é múltiplo de 7. Qual dos números abaixo também é múltiplo de 7?
- (a) 249 580 4
- (b) 248 580 4
- (c) 257 580 4
- (d) 256 580 4
- (e) 245 580 4



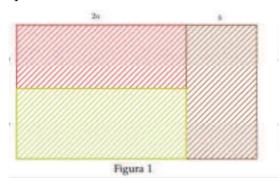
- **2.** Mariana subtraiu do maior múltiplo de 41 com quatro algarismos o menor múltiplo de 41 também com quatro algarismos. Qual é o resultado desta subtração?
- **3.** (Prova da 1ª fase da OBMEP 2014 N1 questão 13) O produto de um número de dois algarismos pelo número formado pelos mesmos dois algarismos, escritos em ordem inversa, é 2944. Qual é a soma dos dois números multiplicados?
- **4.** (Prova da 1ª fase da OBMEP 2012 N1 questão 17) Um feirante tem cinco cestas que contêm limões e laranjas. A quantidade total de frutas em cada cesta está indicada pelo número correspondente. Ele apontou para uma das cestas e disse: "Se eu vender esta cesta, o número de limões passará a ser o dobro do número de laranjas". Quantas frutas tem a cesta para a qual ele apontou?



5. (Prova da 1ª fase da OBMEP 2011 – N1 – questão 18) Um salão de festas comporta 700 pessoas, entre convidados e garçons. Um garçom atende no máximo 10 convidados e todo convidado deve ser atendido por um garçom. Qual é o número máximo de pessoas que podem ser convidadas para uma festa nesse salão?

ANEXO 5 (TAREFA 5)

- **1.** Utilize símbolos matemáticos e letras para representar as grandezas e reescrever as sentenças abaixo.
- a) O perímetro de um quadrado e o quádruplo da medida do seu lado.
- b) A área de um quadrado e o quadrado da medida do seu lado.
- c) A metade da raiz quadrada de um número é menor que o triplo desse número.
- d) O salário de Rodrigo e setecentos reais mais vinte por cento do valor de suas vendas.
- 2. Seja l a medida da aresta de um cubo. Determine as expressões correspondentes
 a) a sua área A.
 b) ao seu volume V.
 c) a soma S das medidas de todas as arestas
- **3.** A figura abaixo é o desenho de um terreno retangular dividido em três retângulos menores. Determine:
- a) uma expressão que representa o perímetro Pdo terreno.
- b) uma expressão que representa a quantidade *Q* de cerca gasta, se todos os retângulos ser ao cercados e lados comuns recebem cerca apenas uma vez.
- c) uma expressão que representa a área A do terreno.



4. Diz a lenda que no tumulo de Diofanto (matemático grego da antiguidade) havia o seguinte problema: Viajante, aqui estão as cinzas de Diofanto. E milagroso que os números possam medir a extensão de sua vida: 1/6 dela foi uma bela infância; depois de 1/12 de sua vida, sua barba cresceu; 1/7 de sua vida passou em um casamento sem filhos; cinco anos após isso nasceu seu primeiro filho, que viveu metade da vida de seu pai; e, em profundo pesar, o pobre velho terminou seus dias na terra quatro anos após perder seu filho. Quantos anos viveu Diofanto? Construa uma equação, utilizando os dados do túmulo, na qual seja possível calcular a idade de Diofanto e a resolva.

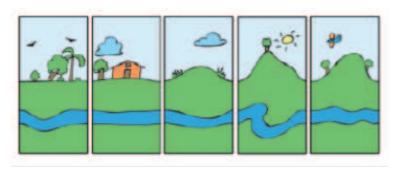
ANEXO 6 (TAREFA 6)

- **1.** No país Arnaldos Unidos cada bicicleta tem que possuir uma placa com três letras, a primeira do conjunto {A, B, C, D, E}, a segunda do conjunto {F, G, H} e a terceira do conjunto {I, J, K, L}. Existem quantas placas de bicicleta possíveis em Arnaldos Unidos?
- **2.** O presidente de Arnaldos Unidos decide aumentar o numero placas de bicicleta colocando duas letras novas, X e Y , nesses conjuntos. Cada letra será adicionada a exatamente um conjunto e as duas letras podem ser adicionadas ao mesmo conjunto ou a conjuntos diferentes. Por exemplo, se as duas letras são adicionadas ao primeiro conjunto, então o a primeira letra da placa pertence ao {A, B, C, D, E, X, Y} e os demais conjuntos não se alteram. Qual é o número máximo de novas placas após Arnaldão (o presidente) colocar as letras novas?
- **3.** Considere três cidades A, B e C, de forma tal que existem três estradas ligando A à B e dois caminhos ligando B à C.



- a) De quantas formas diferentes podemos ir de A até C, passando por B?
- b) De quantas formas diferentes podemos ir de A até C, passando por B, e voltar para A novamente, passando por B?
- c) De quantas formas diferentes podemos ir de A até C, passando por B, e depois voltar para A sem repetir estradas e novamente passando por B?

- **4.** Dispondo dos algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, pode-se formar quantos números
- a) de quatro algarismos?
- b) de quatro algarismos distintos?
- c) impares de três algarismos distintos?
- **5.** De quantas formas seis pessoas podem sentar-se em numa fileira de seis cadeiras se duas delas (Geraldo e Francisco) recusam-se a sentar-se um do lado do outro?
- **6.** Podemos montar paisagens colocando lado a lado, em qualquer ordem, os cinco quadros da figura. Trocando a ordem dos quadros uma vez por dia, por quanto tempo, aproximadamente, é possível evitar que uma paisagem se repita?



APÊNDICES

Apêndice 1

Uma solução para o problema da corrida dos grilos (Problema 4, Tarefa 2)

Problema da corrida do grilo

4. Um grilo pode dar pulos de duas distâncias: 9 e 8 metros. Ele disputa uma corrida de 100 metros que vai até a beira de um penhasco. Quantos pulos o grilo deve dar para chegar ao fim da corrida, mas sem passar do ponto final e cair do penhasco?

Solução.

Sejam x e y a quantidade de pulos, de nove e oito metros respectivamente, dados pelo grilo até chegar ao final da corrida. Temos com isso que:

$$9x + 8y = 100(1)$$

Como $x, y \in \mathbb{N}$ segue que a equação 1 é uma equação diofantina linear a duas incógnitas. Escrevendo o máximo divisor comum de 8 e 9 como combinação linear de oito e nove, como sugere a Identidade de Bezout temos:

$$9 \cdot 1 + 8 \cdot -1 = 1$$

Multiplicando ambos os lados dessa igualdade por 100:

$$9 \cdot 100 + 8 \cdot -100 = 100$$

Daí, encontramos uma solução particular $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}x\mathbb{Z}$ de (1), que é (100, -100). Para encontrar as soluções gerais fazemos $x = x_0 + \frac{b}{d}t$ e $y = y_0 - \frac{a}{d}t$, com d = mdc(8,9) e $t \in \mathbb{Z}$.

Assim:

$$x = 100 + 8t e y = -100 - 9t$$

Como x > 0 e y > 0, por serem números naturais, temos t > -12.5 e t < -11.111 ..., temos t = -12.

Implicando em $x = 100 + 8 \cdot (-12)$, isto é, x = 4 e $y = -100 - 9 \cdot (-12)$, ou seja, y = 8.

Apêndice 2

Resolução do problema das pessoas sentadas no banco (Problema 5, Tarefa 6)

5. De quantas formas seis pessoas podem sentar-se em numa fileira de seis cadeiras se duas delas (Geraldo e Francisco) recusam-se a sentar-se um do lado do outro?

Uma solução.

Consideremos que para que Geraldo e Francisco não sentem juntos (lado a lado) é necessário que haja, pelo menos, uma pessoa entre eles. Assim podemos dividir o problema em alguns casos:

• Primeiro: (Quando há exatamente uma pessoa entre eles).

Daí, teríamos três possibilidades:

- Quando um deles sentar em um dos assentos das pontas, assim as formas de escolher os assentos deles seria 2 maneiras, pois há dois assentos na ponta, 1 maneira de escolher o lugar onde o outro deles senta, pois há apenas um lugar com um assento entre eles quando se escolhe o assento da ponta, e 4! maneiras de escolher onde os outros sentarão. Contudo, há dois assentos nas pontas, logo são 2x1x4! = 48 maneiras de eles sentarem assim.
- ❖ Quando um deles sentar em um dos assentos vizinho aos da ponta, assim as formas de escolher os assentos deles, também seria 2 maneiras, e 1 maneira de escolher o lugar onde o outro deles senta, pois há apenas um lugar com um assento entre eles, e 4! maneiras de escolher onde os outros sentarão. Contudo, há dois assentos vizinhos aos das pontas, logo são 2x1x4! = 48 maneiras de eles sentarem assim.
- ❖ Quando um deles sentar em um dos assentos centrais, assim as formas de escolher os assentos deles, também seria 2 maneiras, e 2 maneiras de escolher o lugar onde o outro deles senta, pois há apenas um lugar com um assento entre eles, e 4! maneiras de escolher onde os outros sentarão. Contudo, há dois assentos vizinhos aos das pontas, logo são 2x2x4! = 96 maneiras de eles sentarem assim.

Portanto, pelo princípio aditivo da contagem eles teriam 48 + 48 + 96 = 192.

• Segundo: (Quando há exatamente duas pessoas entre eles).

Daí, teríamos três possibilidades:

- ❖ Quando um deles sentar em um dos assentos das pontas, assim as formas de escolher os assentos deles seria 2 maneiras, 1 maneira de escolher o lugar onde o outro deles senta, pois há apenas um lugar com dois assentos entre eles quando se escolhe o assento da ponta, e 4! maneiras de escolher onde os outros sentarão. Contudo, há dois assentos nas pontas, logo são 2x1x4! = 48 maneiras de eles sentarem assim.
- ❖ Quando um deles sentar em um dos assentos vizinho aos da ponta, assim as formas de escolher os assentos deles, também seria 2 maneiras, e 1 maneira de escolher o lugar onde o outro deles senta, pois há apenas um lugar com dois assentos entre eles, e 4! maneiras de escolher onde os outros sentarão. Contudo, há dois assentos vizinhos aos das pontas, logo são 2x1x4! = 48 maneiras de eles sentarem assim.
- ❖ Quando um deles sentar em um dos assentos centrais, assim as formas de escolher os assentos deles, também seria 2 maneiras, e 2 maneiras de escolher o lugar onde o outro deles senta, pois há apenas um lugar com um assento entre eles, e 4! maneiras de escolher onde os outros sentarão. Contudo, há dois assentos vizinhos aos das pontas, logo são 2x1x4! = 48 maneiras de eles sentarem assim.

Portanto, pelo princípio aditivo da contagem eles teriam 48 + 48 + 48 = 144.

• Terceiro: (Quando há exatamente três pessoas entre eles).

Daí, teríamos apenas duas possibilidades:

- ❖ Quando um deles sentar em um dos assentos das pontas, assim as formas de escolher os assentos deles seria 2 maneiras, 1 maneira de escolher o lugar onde o outro deles senta, pois há apenas um lugar com três assentos entre eles quando se escolhe o assento da ponta, e 4! maneiras de escolher onde os outros sentarão. Contudo, há dois assentos nas pontas, logo são 2x1x4! = 48 maneiras de eles sentarem assim.
- Quando um deles sentar em um dos assentos vizinho aos da ponta, assim as formas de escolher os assentos deles, também seria 2 maneiras, e 1

de escolher o lugar onde o outro deles senta, pois há apenas um lugar com três assentos entre eles, e 4! maneiras de escolher onde os outros sentarão. Contudo, há dois assentos vizinhos aos das pontas, logo são 2x1x4! = 48 maneiras de eles sentarem assim.

Portanto, pelo princípio aditivo da contagem eles teriam 48 + 48 = 96.

• Quarto: (Quando há exatamente quatro pessoas entre eles).

Nesse caso, um deles tem que estar em uma das pontas e o outro na outra, e isso pode ocorrer de 2x1x4! maneiras diferentes, analogamente aos casos anteriores, portanto existem 48 maneiras de sentarem com quatro pessoas entre eles.

Por fim, pelo princípio aditivo da contagem o número de formas como eles podem sentar com Geraldo e Francisco separados seria 192 + 144 + 96 + 48 = 480 maneiras diferentes.

Outra solução.

Seis pessoas podem sentar em banco de seis lugares de 720 maneiras diferentes, pois a permutação de seis elementos é $P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$. Porém, destes casos alguns tem Geraldo e Francisco juntos, e para eliminar esses casos podemos contá-los agrupando eles dois, isso pode ser feito de duas maneiras (Geraldo e Francisco ou Francisco e Geraldo), daí teríamos cinco elementos para permutar $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$, logo teríamos $2 \times 120 = 240$ possibilidades de deixálos juntos. Daí, 720 - 240 = 480, são as maneiras de sentá-los com Geraldo e Francisco separados.