UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO ACADÊMICO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

FABÍOLA DA CRUZ MARTINS

ENSINO-APRENDIZAGEM DE SISTEMAS LINEARES NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA VIA EXPLORAÇÃO, RESOLUÇÃO E PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS

Campina Grande – PB
2019

FABÍOLA DA CRUZ MARTINS

ENSINO-APRENDIZAGEM DE SISTEMAS LINEARES NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA VIA EXPLORAÇÃO, RESOLUÇÃO E PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, área de concentração em Educação Matemática, na linha de pesquisa Metodologia, Didática e Formação do Professor no Ensino de Ciências e Educação Matemática, em cumprimento à exigência para obtenção do grau de mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Silvanio de Andrade

Campina Grande – PB

2019

M386e Martins, Fabíola da Cruz.

Ensino-aprendizagem de sistemas lineares na formaçãodoprofessor de matemática via exploração, resolução e proposição de problemas [manuscrito] / Fabíola da Cruz Martins. - 2019.

139 p. : il. colorido.

Digitado.

Dissertação (Mestrado em Acadêmico em Ens. de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia , 2019.

"Orientação : Prof. Dr. Silvanio de Andrade , Coordenação do Curso de Matemática - CCT."

1. Formação inicial. 2. Formação docente. 3. Representações múltiplas. 4. Educação algébrica. I.Título

21. ed. CDD 371.12

Elaborada por Giulianne M. Pereira - CRB-15/714 BC/UEPB

FABÍOLA DA CRUZ MARTINS

ENSINO-APRENDIZAGEM DE SISTEMAS LINEARES NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA VIA EXPLORAÇÃO, RESOLUÇÃO E PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, área de concentração Educação Matemática, na linha de pesquisa Metodologia, Didática e Formação do Professor no Ensino de Ciências e Educação Matemática, em cumprimento à exigência para obtenção do grau de mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Aprovado em 26/04/2019.

Silvanio de Andrade

Prof. Dr. Silvanio de Andrade (Orientador) - UEPB

Lourdes de la Rosa Onuchic

Profª Dra. Lourdes de la Rosa Onuchuc - UNESP

Prof. Dr. Roger Ruben Huaman Huanca - UEPB

Fabíola da Cruz Martins

Assinatura da aluna

Dedico este trabalho aos meus pais, Pedro e Lindalva, por sempre acreditarem em mim e incentivarem o meu crescimento.

AGRADECIMENTOS

A Deus, meu refúgio e minha fortaleza. Nos momentos de escuridão, Ele foi minha luz, nos momentos de solidão, foi meu amparo, nos momentos de desespero, foi minha esperança e, nos momentos de ansiedade, foi a minha PAZ.

Ao meu orientador, Professor Dr. Silvanio de Andrade, pela confiança, pelo respeito às minhas ideias e pelas valiosas contribuições que me direcionaram no desenvolvimento deste trabalho. Agradeço por ser essa fonte de inspiração que trouxe um diferencial para minha formação, como exemplo de dedicação, competência e compromisso com a profissão.

Aos professores Roger Ruben Huaman Huanca e Lourdes de la Rosa Onuchic, que fizeram parte da Banca Examinadora e enriqueceram o meu trabalho com suas valiosas contribuições.

A minha família, em especial, aos meus pais, Pedro e Lindalva, e aos meus irmãos Fabio, Fabiana e Felipe, que nunca mediram esforços para me auxiliar, me abrigaram com suas orações, me encorajaram e, com seus ensinamentos, baseados no respeito e na humildade, conduziram o meu percurso.

Ao meu namorado, Neto Olegário, por toda a paciência, apoio e incentivo. Obrigada por sempre compreender minhas ausências e por ser presença nos momentos precisos.

Aos colegas do PPGECM, em especial, ao Grupo de Estudo e Pesquisa sobre Educação e Pós-modernidade (GEPEP), que contribuíram desde a elaboração do projeto até o desenvolvimento do material para a pesquisa.

Agradeço, principalmente, aos amigos que o PPGECEM me presenteou e que levarei para minha vida: Vanessa Lays, Jonatas Marques e Sidney Moreira. Obrigada, meus amigos, por todo apoio e companheirismo! Compartilhar com vocês sorrisos e lágrimas, ansiedades e calmarias, correrias e descontrações foi o que tornou minha caminhada mais segura e significativa.

Às Instituições de Ensino Superior UEPB e UFCG, por me darem condições de realizar este trabalho.

Aos alunos, futuros professores de matemática, que não mediram esforços para participar e contribuir no desenvolvimento desta pesquisa.

A todos, o meu muito obrigada!

"Sempre me pareceu estranho que todos aqueles que estudam seriamente esta ciência acabam tomados de uma espécie de paixão pela mesma. Em verdade, o que proporciona o máximo prazer não é o conhecimento e sim a aprendizagem, não é a posse mas a aquisição, não é a presença mas o ato de atingir a meta". (Carl Friedrich Gauss).

RESUMO

MARTINS, Fabíola da Cruz. **Ensino-aprendizagem de Sistemas Lineares na Formação do Professor de Matemática via Exploração, Resolução e Proposição de Problemas**. 2019, 138 p. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), Campina Grande, 2019.

O presente trabalho tem como objetivo analisar as contribuições da metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas, aliada às Representações Múltiplas de Álgebra no ensino de Sistemas Lineares. Optou-se pelo conteúdo de Sistemas Lineares por compreendermos a necessidade de uma investigação no campo da Álgebra mediante um conteúdo que abrangesse a educação básica e a educação superior, visto que a grande problemática percebida no ensino de Álgebra, revelada na literatura, trata do possível distanciamento entre a Álgebra ensinada na Licenciatura e a Álgebra ensinada na Educação Básica. A pesquisa caracteriza-se como qualitativa (BOGDAN; BIKLEN, 1994; YIIN, 2016), na modalidade pesquisa pedagógica (LANKSHEAR; KNOBEL, 2008). A investigação foi desenvolvida em uma turma do 5º período do curso de Licenciatura em Matemática de uma Universidade Federal na Paraíba, em que a professora da turma era a própria pesquisadora. Utilizou-se da pesquisa pedagógica justifica-se por haver interesse em não somente levantar dados, mas em aprimorar a prática pedagógica da professora enquanto pesquisadora e, sobretudo, contribuir para a formação dos licenciandos em Matemática a partir de novas ideias de Álgebra e por meio de vivências teórico-práticas proporcionadas pela metodologia de ensino-aprendizagem da Matemática através da Resolução de Problemas. Para tanto, utilizou-se como instrumento de levantamento de dados uma Oficina, com atividades planejadas à luz de Friedlander e Tabach (2001) e desenvolvidas utilizando a metodologia de ensino-aprendizagem da Matemática através da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas (ANDRADE, 1998; 2017). As descrições e a análise dos encontros apontam que, embora os alunos aparentassem ter concepções teóricas que correspondem às perspectivas atuais da Resolução de Problemas, a utilização desta como metodologia de ensino foi algo novo para eles, visto que embora os discentes conhecesse princípios teóricos sobre a Resolução de Problemas no ensino de matemática, eles não possuíam vivências práticas de tal perspectiva. Pode-se afirmar que os estudantes compreenderam e incorporaram a Exploração e Proposição de Problemas ao trabalho com Resolução de Problemas. Isso foi algo que ficou evidente nos seminários realizados pelos discentes, uma vez que eles não finalizavam a atividade ao obter a resposta do problema, ao contrário, procuravam ir além, buscando novos resultados e novas sínteses. Dessa forma, ao tratar do ensino de Sistemas Lineares, foi notório o avanço dos alunos, sobretudo na transição entre as representações, visto que eles passaram a utilizar a linguagem matemática para expressar as resoluções dos problemas, não recorrendo à tentativa e erro como no início da Oficina. Portanto, os resultados evidenciaram que as Representações Múltiplas de Álgebra e a transição entre elas favorecem uma aprendizagem de Sistemas Lineares com mais compreensão. Conclui-se, assim, que a metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática através da Proposição, Resolução e Exploração de Problemas contribui para a construção de uma nova postura frente ao ensino de Sistemas Lineares.

Palavras-chave: Formação Inicial; Formação Docente; Representações Múltiplas; Educação Algébrica.

ABSTRACT

MARTINS, Fabíola da Cruz. **Ensino-aprendizagem de Sistemas Lineares na Formação do Professor de Matemática via Exploração, Resolução e Proposição de Problemas.** 2019, 138 p. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba (UEPB), Campina Grande, 2019.

The present work aims to analyze the contributions of the teaching-learning methodology of Mathematics through Problem Solving, together with the Multiple Representations of Algebra in the teaching of Linear Systems. In this study, the content of Linear Systems was chosen, looking for an investigation in the field of Algebra that contemplates both basic and higher education, since the great problem perceived in the teaching of Algebra, revealed in the literature, deals with the distance between Algebra degree in Mathematics and Algebra taught in Basic Education. The research is characterized as qualitative (BOGDAN; BIKLEN, 1994; YIIN, 2016), in the modality of pedagogical research (LANKSHEAR; KNOBEL, 2008). The research was developed in a class of the 5th period of the Degree in Mathematics of a Federal University in Paraíba, where the class teacher was the researcher herself. The pedagogical research was chosen because there is interest not only in raising data, but also in improving the pedagogical practice of the teacher as a researcher and, above all, to contribute to the training of students in Mathematics from new ideas of Algebra, as well as by theoretical-practical experiences provided by the teaching-learning methodology of Mathematics through the Resolution, Exploration and Proposition of Problems. For this, a Workshop was used as a data collection tool, with activities planned in the light of Friedlander and Tabach (2001) and developed using the teaching-learning methodology of Mathematics through Exploration, Resolution and Problem Proposition (ANDRADE, 1998; 2017). The descriptions and analyzes of the meetings point out that although the students seem to have theoretical conceptions that correspond to the current perspectives of Problem Solving, their use as teaching methodology was something new for them, since these conceptions were very limited. That is, students had theoretical principles on problem solving in mathematics teaching, but had no practical experience of such a perspective. Thus, we realized that students understood and incorporated Exploration and Problem Solving to work with Problem Solving. This was evident in the seminars held by the students, since they did not finish the activity getting the answer to the problem, instead, they tried to go further, seeking new results and new syntheses. In this sense, when dealing with the teaching of Linear Systems, students' progress was noted, especially in the transition between the representations, since they began to use mathematical language to express the resolutions of the problems, not immediately resorting to judgment and error as in beginning of the workshop. Therefore, the results showed that the Multiple Representations of Algebra and the transition between them favor a learning of Linear Systems with greater understanding. It is concluded, therefore, that the teaching-learning methodology of Mathematics through the Proposition, Resolution and Exploration of Problems contributes to the construction of a new posture against the teaching of Linear Systems.

Keywords: Initial formation; Teacher formation. Multiple Representations; Algebraic Education.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Ao longo da minha trajetória acadêmica no curso de Matemática, tive algumas oportunidades de experiência profissional docente, tanto como integrante de Programas oferecidos pela Universidade, a exemplo do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) e em Monitoria de disciplinas, quanto por meio de vínculos empregatícios, exercendo a função de Professora de Matemática na rede pública e privada. Estas experiências me possibilitaram identificar e conviver com alguns limites e inquietações no ensino-aprendizagem da Matemática, sobretudo, nos conteúdos relacionados à Álgebra.

No âmbito da Educação Básica, os questionamentos frequentes dos alunos eram voltados para a utilidade dos conteúdos na vida cotidiana, como também para uma justificativa sobre a utilização de "letras" em operações, que ora resultava em determinado valor numérico, ora em outro. No Ensino Superior, na formação inicial do professor de Matemática, os questionamentos eram ainda mais frequentes e sempre direcionados à utilização dos conteúdos mais abstratos de Álgebra na futura prática pedagógica.

Particularmente, me questionei bastante sobre isso, bem como indaguei colegas e professores acerca do assunto, mas as respostas, na maioria das vezes, não eram convincentes. Na verdade, muitas vezes, nós não compreendíamos a essência dos conteúdos, apenas memorizávamos teoremas e demonstrações. Contudo, é indiscutível que todas as disciplinas que compõem a grade curricular da Licenciatura em Matemática têm seus objetivos específicos para a formação do professor. No entanto, nem sempre tais objetivos ficam claros ao aluno da licenciatura.

No programa de pós-graduação, como aluna em diferentes disciplinas, amadureci minhas indagações e percebi que a investigação à qual nos propomos a fazer tem sua relevância teórica e é um tema discutido há anos. Desse modo, ao aprofundar nossa revisão de literatura, delimitamos nosso objeto de estudo e demos prosseguimento a esta investigação, buscando responder o seguinte questionamento: *Até que ponto a utilização da Resolução de Problemas como metodologia de ensino, aliada às Representações Múltiplas de Álgebra, pode contribuir no ensino-aprendizagem de Sistemas Lineares?*

Optamos pela escolha do conteúdo Sistemas Lineares por compreendermos a necessidade de uma investigação no campo da Álgebra através de um conteúdo que abrangesse os dois níveis escolares – Educação Básica e Educação Superior, visto que, a grande problemática percebida no ensino de Álgebra, destacada na literatura, trata do possível distanciamento entre a Álgebra ensinada na Licenciatura e a Álgebra ensinada na Educação Básica.

O conteúdo Sistemas Lineares é amplo, abrange diversas áreas e compreende um vasto campo de aplicações. Contudo, é ao mesmo tempo um estudo que não envolve, em sua essência, conceitos abstratos. É um assunto introduzido nos anos finais do Ensino Fundamental, aprofundado no Ensino Médio e presente em disciplinas de cursos de nível superior da área de exatas, tais como: Matemática, Física, Ciências da Computação, Engenharias, entre outras.

No entanto, embora pareça um conteúdo básico, enfrentamos muitas dificuldades no ensino-aprendizagem de Sistemas Lineares, principalmente, no que diz respeito ao seu significado, aos processos de resolução, à tradução da linguagem verbal para a linguagem matemática e à natureza de sua solução (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009).

Pesquisas recentes sobre este tema (BATTAGLIOLI, 2008; RANGEL, 2011; JORDÃO, 2011; BERTOLAZI, 2012) discutem tais limites e apontam algumas possibilidades como enfoques teórico-metodológicos no ensino de Sistemas Lineares, considerando-os enquanto alternativas para aprimorar o ensino e, possivelmente, minimizar as dificuldades enfrentadas em sala de aula.

Nosso trabalho busca diferenciar-se das pesquisas existentes, ao desenvolver uma Oficina com os alunos da Licenciatura em Matemática, procurando proporcionar, por meio das Representações Múltiplas de Álgebra, novas ideias de Sistemas Lineares, ao utilizar uma metodologia não contemplada nas pesquisas analisadas, a saber: a Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas.

A elaboração da Oficina e o planejamento de seu desenvolvimento foram realizados à luz dos estudos de Friedlander e Tabach (2001), no que diz respeito às Representações Múltiplas de Álgebra, e de diversos pesquisadores que trabalham com a Resolução de Problemas, sobretudo, dos estudos de Van de Walle (2009), Onuchic e Allevato (2011), Serrazina (2017) e Andrade (1998, 2017).

Buscaremos realizar esta Oficina não somente com a finalidade de levantar dados, mas desenvolvê-la de modo que as ideias exploradas e fortalecidas possam contribuir tanto para a formação específica, quanto para a formação pedagógica dos futuros professores, podendo, assim, subsidiar, futuramente, suas práticas docentes.

Acreditamos que uma das decisões mais importantes que o professor realiza regularmente, em sua prática docente, incide sobre as atividades que propõe em sala, uma vez que é em torno delas que o professor vislumbra o alcance de seus objetivos pedagógicos. Essas atividades são ancoradas, na maioria das vezes, no livro didático adotado pela escola, em manuais escolares e até mesmo em *sites* da internet.

No entanto, a forma como essas atividades estão estruturadas nem sempre colaboram com as necessidades dos alunos e nem para o alcance dos objetivos do professor. Diante disso, pretendemos despertar o olhar crítico e reflexivo dos futuros professores para a importância dessas atividades, não somente na elaboração, mas também na sua prática.

Sabe-se que a Álgebra assume papel importantíssimo na formação dos alunos. No entanto, é perceptível que o seu ensino não tem sido representado, para os estudantes, como algo relevante em seu desenvolvimento. De acordo com Sousa, Panossian e Cedro (2014, p. 46) “a álgebra tem se tornado, quase que a fonte principal do processo de alienação dos estudantes em relação à aprendizagem dos conhecimentos matemáticos”.

Desse modo, desenvolvemos este trabalho com o objetivo de analisar as contribuições da metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas, aliada às Representações Múltiplas de Álgebra no ensino de Sistemas Lineares.

Além disso, como contribuição à formação dos participantes desta pesquisa, buscamos, especificamente, alcançar os seguintes objetivos: i) proporcionar aos futuros professores reflexões quanto ao ensino-aprendizagem de Sistemas Lineares aliado ao uso das Representações Múltiplas de Álgebra; ii) possibilitar experiências com a utilização da Resolução de Problemas como Metodologia de Ensino; iii) contribuir na construção de uma nova postura frente ao ensino de Sistemas Lineares.

Este trabalho está organizado em cinco capítulos, distribuídos da seguinte maneira: no primeiro capítulo, contemplamos esta introdução; no segundo capítulo, trazemos o nosso levantamento bibliográfico e embasamento teórico, objetivando situar o leitor em nossa pesquisa, de modo que possa compreender as discussões atuais, identificar novos enfoques teórico-metodológicos e perceber a relevância desta pesquisa para o ensino da Matemática. Assim, apresentamos, inicialmente, considerações relacionadas à formação inicial do professor de Matemática e à Álgebra, bem como concepções de Álgebra ao longo da história. Em seguida, trazemos o levantamento de dissertações e teses realizadas nos últimos anos sobre esta temática, como também uma discussão sobre o ensino de Sistemas Lineares, as Representações Múltiplas de Álgebra no ensino de Sistemas Lineares e a Resolução de Problemas como Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática.

No terceiro capítulo, discorremos sobre a forma como esta pesquisa foi desenvolvida. Apresentamos a natureza da pesquisa, a caracterização dos sujeitos da pesquisa e, também, as justificativas para a escolha da Pesquisa Qualitativa na modalidade Pesquisa Pedagógica, o instrumento de levantamento de dados e sua descrição; no quarto capítulo, apresentamos a descrição das atividades desenvolvidas a partir do levantamento de dados, bem como as análises e discussões destas. Optamos por fazer isso conjuntamente, por percebermos que, em alguns momentos, a separação não propiciaria ao leitor clareza suficiente das vivências deste momento tão importante de nossa pesquisa; por fim, no quinto capítulo, trazemos nossas considerações finais.

2 O ENSINO-APRENDIZAGEM DE SISTEMAS LINEARES NA PERSPECTIVA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Neste capítulo, temos como objetivo apresentar o nosso levantamento bibliográfico e embasamento teórico, para, assim, situarmos o leitor em nossa pesquisa, de modo que se possa compreender as discussões atuais, identificar novos enfoques teórico-metodológicos e perceber a relevância desta pesquisa para o ensino da Matemática.

Para tanto, apresentamos, inicialmente, aspectos relacionados à Formação Inicial do professor de Matemática e à Álgebra, como também uma discussão sobre a Álgebra ao longo da história. Em seguida, trazemos o levantamento de dissertações e teses realizadas nos últimos anos acerca desta temática e, também, uma discussão sobre o ensino de Sistemas Lineares, as Representações Múltiplas de Álgebra no ensino de Sistemas Lineares e a Resolução de Problemas como Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática.

2.1 A Formação Inicial do professor de Matemática e a Álgebra

Esta pesquisa versa sobre um tema de grande pertinência no ensino da Matemática – o ensino de Álgebra, contudo, tem uma abrangência ainda maior, pois contempla também a Formação Inicial do Professor de Matemática. Por esse motivo, para situarmos nossa discussão sobre a Álgebra, consideramos pertinente pensarmos, inicialmente, sobre este tema.

Ao tratarmos de Formação Inicial, nos referimos à Licenciatura em Matemática, que é condição essencial para que o professor de Matemática assuma, efetivamente, as atividades docentes e curriculares na Educação Básica. Embora atualmente esta não seja a realidade de muitas escolas, esse requisito indispensável constitui a 15º meta do Plano Nacional de Educação (PNE) nº 13.005/2014, que indica que "todos os professores e as professoras da educação básica possuam formação específica de nível superior, obtida em curso de licenciatura na área de conhecimento em que atuam". (Meta 15, PNE 2011-2020, p. 48).

De acordo com as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN), parecer nº CNE/CES 1.302/2001, os cursos de Licenciatura em Matemática têm como objetivo principal a formação do professor de Matemática e desejam-se as seguintes características para o Licenciado:

- Visão de seu papel social de educador e capacidade de se inserir em diversas realidades com sensibilidade para interpretar as ações dos educandos.
- Visão da contribuição que a aprendizagem da Matemática pode oferecer à formação dos indivíduos para o exercício de sua cidadania.
- Visão de que o conhecimento matemático pode e deve ser acessível a todos, e consciência de seu papel na superação dos preconceitos, traduzidos pela angústia, inércia ou rejeição, que muitas vezes ainda estão presentes no ensino-aprendizagem da disciplina.

Diante desses objetivos, as Instituições de Ensino Superior (IES) têm a autonomia de formular o currículo de seus cursos, desde que contemplem ao longo do curso de Matemática os seguintes conteúdos: Cálculo Diferencial e Integral; Álgebra Linear; Fundamentos de Análise; Fundamentos de Álgebra; Fundamentos de Geometria; Geometria Analítica; incluindo também: a) conteúdos matemáticos presentes na Educação Básica nas áreas de Álgebra, Geometria e Análise; b) conteúdos de áreas afins à Matemática, que são fontes originadoras de problemas e campos de aplicação de suas teorias; c) conteúdos da Ciência da Educação, da História e Filosofia das Ciências e da Matemática.

Ao tratar de Álgebra, podemos observar que as DCN (2001) destacam os seguintes conteúdos como obrigatórios, podendo ser distribuídos ao longo do curso de acordo com o currículo proposto pela IES:

- Álgebra Linear;
- Fundamentos de Álgebra;
- Conteúdos matemáticos presentes na Educação Básica na área de Álgebra.

As diretrizes apresentam princípios genéricos que devem ser considerados na construção do projeto pedagógico dos cursos, no entanto, não adentram as particularidades da formação do professor de Matemática, deixando, assim, algumas lacunas a serem preenchidas pelas instituições.

Há anos, existe a necessidade de discussões entre a Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) e a Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) a respeito da licenciatura em Matemática. Essa necessidade foi ampliada durante o IV Fórum Nacional de Licenciaturas em Matemática, ocorrido em 15 e 16 de abril de 2011, na Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo (FE/USP).

Na ocasião, surgiu a iniciativa da elaboração de um documento com uma análise crítica dos Referenciais Curriculares Nacionais para Cursos de Licenciatura em Matemática. Publicado pela SBEM em fevereiro de 2013, o documento intitulado "A formação do professor de matemática no curso de licenciatura: reflexões produzidas pela comissão paritária SBEM/ SBM" ressalta que o curso de Licenciatura em Matemática atual ainda se assemelha bastante com o primeiro curso de Matemática, criado na Universidade de São Paulo (USP), em 1934:

> Na maioria das instituições, as disciplinas ainda são agrupadas em conteúdo específico e conteúdos pedagógicos, com tendência a valorizar mais o primeiro grupo que o segundo, mesmo em se tratando da formação do professor de Matemática e não do bacharel em Matemática. (SBEM, 2013, p. 04).

Essa afirmativa a respeito do modelo de curso que muitas instituições ainda utilizam assemelha-se não somente ao primeiro curso de Matemática do Brasil, mas à formulação dos currículos das primeiras licenciaturas no Brasil, conhecido pelo sistema 3 + 1, ou licenciatura = bacharelado + didática. De acordo com Moreira (2012), este sistema é denominado desta forma, pois o "três" se refere aos três anos da formação dedicados ao estudo do conteúdo específico da área e o "um" representa um ano de formação dedicado ao estudo da didática.

Por isso, o documento discute sobre os conhecimentos trabalhados na Licenciatura em Matemática, e ressalta:

> Devem fazer sentido dentro do mundo do educando e envolver uma matemática que não se volte exclusivamente para seus fundamentos lógicos, para uma linguagem formal artificializada, para a extrema precisão exigida pelo rigor científico correspondente ao atual estágio de desenvolvimento da matemática acadêmica […] uma matemática que ultrapasse o simples uso mecânico de fórmulas, algoritmos e procedimentos memorizados, sem consistência, sem origem e sem finalidade, pelo menos para os estudantes em formação escolar. (SBEM, 2013, p. 05).

Diante disso, percebemos a necessidade de romper com o método utilizado tradicionalmente, que separa a formação matemática das questões referentes ao trabalho docente escolar. O conhecimento matemático deve ser trabalhado de maneira que considere as características e os objetivos da prática dos licenciandos em formação.

A Álgebra, juntamente com a Aritmética, está presente nos dezessete temas citados no documento, que justifica a importância da retomada deste tema no Ensino Superior, no sentido de aprofundar e solidificar os conhecimentos matemáticos tratados nesta área do conhecimento, como também para ampliar as discussões referentes ao ensino desse assunto na Educação Básica.

O documento explica que o título geral de “Álgebra” compreende diversas disciplinas, a saber: teoria dos conjuntos, teoria dos números, a álgebra linear etc., sendo que sua essência aponta para estruturas operatórias. As estruturas algébricas surgem da necessidade de resolver problemas. Assim, é de extrema importância, no ensino de Álgebra, mostrar a profundidade da ideia de estruturas algébricas. O documento ainda salienta que “desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, o avanço da aprendizagem de números e da aritmética se baseia fundamentalmente nas estruturas algébricas dos conjuntos numéricos”. (SBEM, 2013, p. 23).

As estruturas algébricas são, geralmente, muito questionadas na Licenciatura, em que, muitas vezes, não fica claro o que de fato elas representam e como estão fundamentadas. Diante do exposto no documento, percebemos a necessidade de um repensar sobre o ensino dessa disciplina, como também de outras no campo da Álgebra.

Vale salientar que, ao discutir sobre o ensino de Álgebra na Licenciatura em Matemática, não requeremos um ensino simples e superficial, ao contrário, prezamos pela rigorosidade matemática, mas que aconteça de modo que se tenha compreensão e faça sentido para o licenciando.

Corroborando dessa ideia, Fiorentini e Oliveira (2013) destacam:

> Defendemos que o professor de matemática precisa conhecer, com profundidade e diversidade, a matemática enquanto prática social e que diz respeito não apenas ao campo científico, mas, sobretudo, à matemática escolar e às múltiplas matemáticas presentes e mobilizadas/produzidas nas diferentes práticas cotidianas. (FIORENTINI; OLIVEIRA, 2013, p. 924).

Assim, compreendemos que o licenciando precisa estar em contato, em sua formação, com situações que o levem a refletir e compreender a matemática como campo de conhecimento, para que, dessa forma, o conhecimento construído possa ampliar a visão dos futuros professores e proporcionar, futuramente, o desenvolvimento de práticas em sala de aula que levem uma matemática com mais compreensão e que, principalmente, faça sentido para os seus alunos.

Nessas condições, destacamos o apontado por Cavalcante (2011):

> Para se pensar em uma Formação Inicial de Professores de Matemática nas Licenciaturas mais significante e atual, deve-se procurar a compreensão das problemáticas surgidas no âmbito escolar, implicando numa reestruturação relacionada de forma mais incisiva com a mobilização de saberes docentes nas práticas de formação, levando em consideração que tal mobilização associa ações como a produção, transmissão, assimilação e utilização desses saberes, por parte dos professores, bem como parte dos alunos, futuros professores. (CAVALCANTE, 2011, p. 21)

Os saberes docentes aos quais o autor se refere vêm se desenvolvendo como campo de pesquisa na formação de professores e objetiva traçar novos caminhos para o trabalho em sala de aula. Esses saberes são baseados nas definições de Tardif (2000), o qual apresenta um sentido amplo que “engloba os conhecimentos, as competências, as habilidades (ou aptidões) e as atitudes, isto é, aquilo que muitas vezes foi chamado de saber, saber-fazer e saber-ser”. (TARDIF, 2000, p. 10-11).

De acordo com Cavalcante (2011), a apresentação de como acontece a mobilização dos saberes docentes necessários para a prática profissional do professor, nas disciplinas de práticas de formação de um curso de Licenciatura, é viabilizada e potencializada através dos estudos desenvolvidos sobre esses saberes.

É nesse sentido que desenvolvemos essa pesquisa no âmbito de uma disciplina voltada para a prática profissional do professor, com o intuito de realizar ações que possibilitem a mobilização desses saberes. Contudo, acreditamos que essas ações “implicarão na constituição de um conjunto de significados que inter-relacionam os conhecimentos, competências, atitudes, crenças e concepções e estruturam a atividade do professor na complexidade da sala de aula”. (CAVALCANTE, 2011, p. 22).

Corroboramos, portanto, das ideias de Tardif (2000), que aponta que a formação docente passa a se estabelecer em um contexto não mais de mera transmissão de saberes docentes, mas de produção de conhecimento, sendo a prática de sala uma ressignificação, pois a mesma se torna também um campo de produção.

Assim, acreditamos nessa pesquisa como uma fonte não somente de levantamento de dados, mas de uma oportunidade de mobilização de saberes e construção de conhecimentos acerca de saberes construídos previamente pelos futuros professores em suas vivências com a matemática.

2.2 Concepções de Álgebra ao longo da história

A Álgebra está presente nos currículos da Educação Básica, nos cursos de Licenciatura, Bacharelado, Pós-Graduação, dentre outros. Ela consiste em um ramo da Matemática que compreende diversos campos e áreas, tendo em cada campo o seu objeto de estudo, suas aplicações e suas especificidades.

De acordo com Miguel, Fiorentini e Miorim (1992), o interesse legal em introduzir a Álgebra no ensino brasileiro ocorreu com a Carta Régia de 19 de agosto de 1799. Conforme a Carta, a Álgebra seria introduzida de forma independente, assim como a Aritmética, a Geometria e a Trigonometria, disciplinas que já faziam parte do ensino.

Segundo Sousa, Panossian e Cedro (2014), no século XVIII, a Álgebra poderia ser compreendida de duas formas: tanto pela determinação de incógnitas, a partir do uso de signos e símbolos e a manipulação destes, como poderia também ser considerada simplesmente uma aritmética generalizada.

A partir da primeira metade do século XIX, estabeleceu-se um debate, motivado pelos trabalhos dos matemáticos George Peacock (1791-1858), Augustus de Morgan (1815-1864) e Evariste Galois (1811-1832), a respeito da natureza da Álgebra. De acordo com Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), duas concepções de Álgebra eram evidenciadas nesse debate. Por um lado, uma tendência tradicional, em que a Álgebra era considerada como uma Aritmética universal ou generalizada e, por outro lado, uma tendência moderna, em que a Álgebra consistia em um sistema simbólico postulacional. Ao realizarem uma análise sobre o desenvolvimento histórico da Álgebra, Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) identificam algumas concepções que se revelam ao longo da história, e que serão apresentadas a seguir.

Uma primeira concepção de Álgebra, denominada Processológica, considera a Álgebra como um conjunto de procedimentos, isto é, de técnicas algorítmicas direcionadas a problemas cuja resolução é baseada no seguimento de uma sequência de regras. Essa concepção não relaciona um pensamento algébrico a uma linguagem específica.

A segunda concepção, nomeada como Linguístico-estilística, encara a Álgebra como uma linguagem específica, que tem como objetivo expressar, concisamente, os procedimentos explicitados na concepção Processológica. Ao explicar essa concepção, Veiga (2016) destaca que ela cria uma distinção entre a forma de pensamento e a forma de expressar esse pensamento, uma vez que "considera a linguagem natural como um obstáculo, desejando uma ruptura com essa expressão primitiva utilizando-se de uma nova linguagem que permita desenvolver essa forma de pensamento". (VEIGA, 2016, p. 46).

A terceira concepção, nomeada como Linguístico-sintático-semântica, se assemelha com a anterior, pois também considera a Álgebra como linguagem particular e específica. No entanto, seu poder criativo e instrumental reside na dimensão sintático-semântica. Nesta concepção, os signos adquirem o caráter de símbolos e é estabelecida distinção entre o uso da letra para representar genericamente quantidades discretas e contínuas.

Por fim, a quarta concepção, nomeada como Linguístico-postulacional, se assemelha bastante à concepção Linguístico-sintático-semântica, pois também reconhece a Álgebra como uma linguagem simbólica. No entanto, o que a diferencia é que ela confere aos signos um grau de abstração e generalidade sem precedentes, estendendo o domínio da Álgebra a todos os campos da Matemática, atingindo um nível máximo de abstração e generalização.

De acordo com Damazio et al. (2012, p. 288), esta concepção "eleva a Álgebra ao status de ciência das estruturas próprias de toda a Matemática como também da Lógica". Para os autores, a característica simbólica dos signos se torna mais abrangente nessa concepção, pois ultrapassa a representação de quantidade geral (discreta ou contínua) e atinge entidades matemáticas que extrapolam o teor quantitativo como, por exemplo, as estruturas (ordem, topológica, algébrica e vetorial).

Essas concepções de Álgebra trazem um aporte histórico em relação ao desenvolvimento deste ramo da matemática. De acordo com Sousa, Panossian e Cedro (2014):

> A análise dessas concepções nos permite entender que a álgebra pode ser compreendida tanto como uma linguagem quanto como um mero conjunto de procedimentos que valorizam ora o desenvolvimento do pensamento, ora a compreensão da linguagem algébrica. (SOUSA; PANOSSIAN; CEDRO, 2014, p. 27-28).

Sob outro ponto de vista, a partir dessas concepções de Álgebra, podemos perceber que elas não surgiram isoladamente, mas que evoluíram e se complementaram, no sentido de um aperfeiçoamento de sua linguagem própria.

Buscando esclarecer sobre a especificidade da Álgebra e o papel por ela desempenhado na história do pensamento humano, Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) destacam concepções de Educação Algébrica que se manifestaram e repercutiram a partir de três momentos: antes, durante e depois do Movimento da Matemática Moderna e, que, historicamente, vem exercendo maior influência no ensino de Matemática elementar.

Uma primeira concepção de Educação Algébrica é denominada linguístico-pragmática, que predominou durante o século XIX, se estendendo até a metade do século XX. Essa concepção vincula o papel pedagógico da Álgebra, como instrumento de resolução de problemas, à concepção Linguístico-sintático-semântica dessa disciplina.

Nessa concepção, acredita-se que as técnicas adquiridas pelo transformismo algébrico[1] são necessárias e suficientes para que o aluno adquira a capacidade de resolver problemas. Esse transformismo algébrico mencionado pelos autores é totalmente independente de objetos concretos, figuras ou ilustrações, ele se caracteriza por uma sequência de tópicos que, partindo do estudo das expressões algébricas, passava pelas operações, chegando às equações, para, finalmente, utilizá-las na resolução de problemas.

Podemos elucidar essa concepção por meio do exemplo a seguir:

Exemplo 1. Efetue o quadrado da soma de a e b.

Resolução:

$$(a+b)^2 = (a+b).(a+b) = a^2 + a.b + a.b + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

[1] “Processo de obtenção de expressões algébricas equivalentes mediante o emprego de regras e propriedades válidas”. (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993, p.83).

A segunda concepção, que iria contrapor a concepção anterior, é denominada concepção fundamentalista-estrutural. Nela, a Álgebra tem como papel pedagógico fornecer fundamentos referentes aos vários campos da Matemática escolar. Além disso, nessa concepção acredita-se que introduzir propriedades estruturais das operações, que justifiquem cada passagem do transformismo algébrico, capacita o estudante a identificar e aplicar essas estruturas em diferentes contextos.

Vejamos, a seguir, o exemplo dessa concepção:

Exemplo 2. Sejam m e n inteiros quaisquer. Mostre que m é par se, e somente se, $m+\ 2n$ é par.

Demonstração:

$$Suponhamos\ que\ m\ \text{é}\ par, logo\ pode\ ser\ escrito\ como\ m = 2k, \forall\ k \in \mathbb{Z}.$$

$$Substituindo\ m\ em\ m + 2n, temos:$$

$$m + 2n = 2\ k\ +\ 2n$$

$$Pela\ propriedade\ distributiva, temos\ que:$$

$$2k + 2n = 2(k + n)$$

$$Como\ qualquer\ n\text{ú}mero\ multiplicado\ por\ 2\ \text{é}\ par, temos\ que\ 2\ (k\ + n)\ \text{é}\ par.$$

$$Logo, m\ + 2n\ \ tamb\text{é}m\ \text{é}\ par!$$

$$Por\ outro\ lado, suponhamos\ que\ m + 2n\ \text{é}\ par, logo, podemos\ escrever:$$

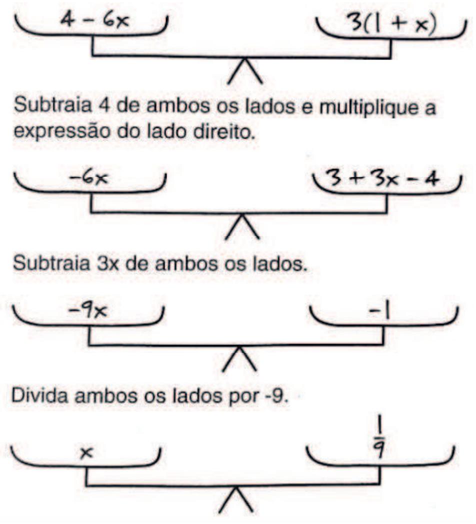
$$m\ + 2n\ =\ 2k\ \Rightarrow m = 2k - 2n = 2(k - n)\forall\ (k - n) \in \mathbb{Z}.$$

$$Pelo\ argumento\ anterior, temos\ que\ m\ \text{é}\ par.$$

A terceira concepção é a fundamentalista-analógica, ela tenta sintetizar as duas concepções anteriores. Por um lado, procura recuperar o valor instrumental da Álgebra e, por outro, preservar o caráter fundamentalista, isto é, utilizando modelos analógicos geométricos (blocos de madeira ou mesmo figuras geométricas) ou físicos (como a balança) que facilitam a visualização e a justificação das passagens utilizadas no transformismo algébrico.

Podemos ver, a seguir, o exemplo desta concepção:

Exemplo 3. Resolução da equação $4 - 6x = 3(1 + x)$ utilizando a balança.



Fonte: Van de Walle, 2009, p. 293.

Em resumo, para a concepção linguístico-pragmática, o foco do ensino da Álgebra é o domínio das técnicas de manipulação algébrica, mesmo que de forma mecânica, isto é, nem sempre há um significado na aprendizagem algébrica. Já a concepção fundamentalista-estrutural busca justificar e fundamentar os procedimentos algébricos por meio de propriedades estruturais. Por fim, a concepção, fundamentalista-analógica une as duas anteriores, porém, ao buscar justificar os procedimentos algébricos, ela opta pela utilização de elementos visuais que facilitam, de maneira concreta, a visualização.

Ao sintetizar as três concepções de Educação Algébrica, Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) deixam claro que, em suma, elas reduzem o pensamento algébrico à linguagem algébrica, isto é, se reduzem ao transformismo algébrico, considerado pelos autores como um ponto negativo.

Na tentativa de definir Álgebra, Usiskin (1995) reconhece que não é fácil propor uma definição, uma vez que a Álgebra ensinada na escola média[2] tem uma conotação muito diferente daquela ensinada em cursos superiores de matemática. Desse modo, o autor relaciona a Álgebra da escola média à compreensão do significado das "letras" (hoje comumente chamadas *variáveis)* e das operações com elas, e considera que os alunos estão estudando Álgebra quando encontram variáveis pela primeira vez. No entanto, salienta que esta compreensão não é capaz de definir a Álgebra na escola média em sua totalidade, visto que o conceito de variável tem múltiplas faces.

---

[2] Refere-se aos anos médios dos Estados Unidos (6º, 7º e 8º anos).

De acordo com Van de Walle (2009, p. 290), “as variáveis são um dispositivo de representação extremamente poderoso que permite a expressão de generalizações”. Nessa perspectiva, o autor aponta para a necessidade de os alunos trabalharem com expressões envolvendo variáveis sem que pensem no valor específico que essas letras possam assumir. Isto é, trabalhar com os próprios símbolos, uma vez que as letras podem ser usadas como valores desconhecidos (incógnitas) ou como quantidades que variam (variáveis).

Usiskin (1995, p. 11) defende que “as finalidades do ensino de Álgebra, as concepções que tenhamos dessa matéria e a utilização de variáveis estão intrinsecamente inter-relacionadas”. Nesse sentido, o autor aponta quatro concepções de Álgebra, cujas suas finalidades são explicadas de acordo com a funcionalidade das variáveis, deixando claro que as variáveis não variam só de valores, mas também de conceitos.

Na primeira concepção, a Álgebra é considerada uma aritmética generalizada, em que as variáveis são vistas como generalizadoras de modelos, assim, dentro desta concepção, os alunos são instruídos a traduzir e generalizar. O autor apresenta alguns exemplos, como podemos ver a seguir:

Exemplo 4. Ao generalizar o modelo:

$$-1\,.\,5 = -5$$

$$-2\,.\,5 = -10$$

Podemos tirar propriedades como – $x\,.\,y = -xy$.

A segunda concepção reconhece a Álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas, em que as variáveis assumem o papel de incógnitas ou constantes, assim, dentro desta concepção, os alunos são instruídos a simplificar e resolver.

Usiskin (1995, p.14) apresenta o exemplo a seguir:

Exemplo 5. Problema: Adicionando 3 ao quíntuplo de um certo número, a soma é 40. Achar o número.

Resolução: $Somamos\ (-3)\ a\ ambos\ os\ membros$:

$$5x + 3 + (-3) = 40 + (-3)$$

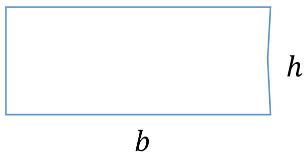
$$E\ obtemos: 5x = 37$$

$$Dividimos\ ambos\ os\ lados\ por\ 5\ e\ obtemos: x = 7{,}4.$$

Ao apresentar este problema, Usiskin (1995) menciona que, na concepção de álgebra como aritmética generalizada, o problema termina ao ser traduzido para a linguagem algébrica da forma: $5x + 3 = 40$. Para essa segunda concepção, o problema está apenas começando, pois resolvemos a equação utilizando todo um procedimento, como elucidado no exemplo 5.

A terceira concepção denomina a Álgebra como o estudo de relações entre grandezas, portanto, o que a diferencia das anteriores é que as variáveis variam. Para elucidar essa relação entre grandezas, Usiskin (1995) apresenta o exemplo a seguir:

Exemplo 6. A fórmula $A = bh$ que calcula a área de um retângulo.



Onde,

A: Área; b: base; h: altura.

Outro exemplo que podemos destacar são as funções, uma vez que, nessa concepção, uma variável é um argumento (representa os valores do domínio de uma função) ou um parâmetro (número no qual dependem outros números).

A quarta concepção entende a Álgebra como o estudo das estruturas, é uma concepção totalmente diferente das anteriores, pois não se trata de nenhuma função ou relação, não há uma equação a ser resolvida, nem um modelo aritmético a ser generalizado. Ela trata das variáveis como objeto arbitrário de uma estrutura estabelecida por certas propriedades.

Como exemplo, Usiskin (1995) destaca o seguinte:

Exemplo 7. Fatoração do polinômio $3x^2 + 4ax - 132a^2$.

$$(3x + 22a)(x - 6a)$$

Por este exemplo, podemos perceber claramente que, nessa concepção de Álgebra como Estrutura, a variável é utilizada como um símbolo arbitrário.

Ao apresentar as quatro concepções de Álgebra, Usiskin (1995) sintetiza a relação de tais concepções com os diferentes usos das variáveis, como podemos ver por meio do quadro abaixo:

Quadro 1 – O significado das variáveis nas concepções de Álgebra

Concepção de Álgebra	**Uso das Variáveis**
Aritmética generalizada	Generalizadora de modelos (traduzir, generalizar)
Meio de resolver certos problemas	Incógnitas, constantes (resolver, simplificar)
Estudo de relações entre grandezas	Argumentos, parâmetros (relacionar, gráficos)
Estrutura	Sinais arbitrários no papel (manipular, justificar)

Fonte: (USISKIN, 1995, p. 20).

Ao realizar uma análise destas concepções de Álgebra (USISKIN, 1995) e de Educação Algébrica (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993), os autores Sousa, Panossian e Cedro (2014) percebem certa ênfase na linguagem algébrica em detrimento do destaque no ensino de uma linguagem já constituída mediante a assimilação do transformismo algébrico.

Em seus estudos, Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) pontuam que o pensamento algébrico pode se manifestar não somente nos diferentes campos da Matemática, mas também em outras áreas de conhecimento. Dessa maneira, existem diferentes formas de expressar o pensamento algébrico, seja pela linguagem natural, linguagem aritmética, linguagem geométrica ou por meio da criação de uma linguagem específica, isto é, por meio de uma linguagem algébrica de natureza estritamente simbólica.

Ponte, Branco e Matos (2009) destacam que o pensamento algébrico é algo amplo, que abrange muitas competências, tais como: lidar com expressões algébricas, equações, inequações, sistemas de equações e de inequações, funções, estruturas matemáticas, que podem ser usadas na interpretação e Resolução de Problemas matemáticos ou de outras áreas. Nessa perspectiva, esses autores enfatizam que o trabalho com a Álgebra não se reduz ao simbolismo formal, ao contrário, aprender Álgebra implica ter a habilidade de pensar algebricamente em diversas situações.

Sob o mesmo ponto de vista, Van de Walle (2009, p. 287) afirma que “o pensamento algébrico envolve formar generalizações a partir de experiências com números e operações, formalizar essas ideias com o uso de um sistema de símbolos significativo e explorar os conceitos de padrão e de função”. Segundo as definições do autor, o pensamento algébrico está presente em toda a Matemática e é fundamental para torná-la útil na vida cotidiana.

No início do século XIX, a Álgebra foi introduzida pela primeira vez no ensino secundário brasileiro e, até meados do século XX, a Álgebra ocupava grande espaço nos programas do ensino básico e secundário. Muitos educadores se movimentaram para recuperar o ensino da Geometria nessa época, o que contribuiu para que o espaço da Álgebra no currículo fosse se perdendo, fazendo-a retornar ao papel exercido anteriormente, conforme destacam Miguel, Fiorentini e Miorim (1992):

> Mas se, por um lado, na proposta da CENP (Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas) a Geometria passa a dar sustentação à metodologia do ensino da Aritmética e da Álgebra, por outro lado, o próprio ensino de Álgebra não apenas perde aquelas características que a Matemática moderna lhe havia atribuído como também parece retomar – sem, é claro, aquelas regras e aqueles excessos injustificáveis do algebrismo - o papel que ele desempenhava no currículo tradicional, qual seja o de um estudo introdutório – descontextualizado e estático – necessário a resolução de problemas e equações. (MIGUEL; FIORENTINI; MIORIM, 1992, p. 51).

Nos últimos anos, começaram as articulações sobre a importância da Álgebra, que, de acordo com Ponte, Branco e Matos (2009), juntamente com a Geometria e com a Análise Infinitesimal, passou a constituir um dos grandes ramos da Matemática.

No fim do século XX e começo do século XXI, como ressaltam Sousa, Panossian e Cedro (2014), houve grande valorização na perspectiva que considera a Álgebra como uma ferramenta para a resolução de problemas. Esta visão objetiva possibilitar aos alunos resolver problemas típicos da Álgebra, não utilizando necessariamente o transformismo algébrico, podendo recorrer a outras representações, tais como tabelas, planilhas e outros.

Artigue (2002 *apud* Sousa, Panossian e Cedro, 2014) aponta uma perspectiva que vai além da visão de Álgebra como ferramenta para a resolução de problemas. A autora destaca sua importante contribuição no processo de compreensão dos objetos algébricos envolvidos.

Nesse sentido, Sousa, Panossian e Cedro (2014) explicam:

> Em outras palavras, em vez de pensar os conceitos e as técnicas separadamente, ou seja, separar a generalização da transformação, um ponto de vista mais interessante é perceber que as técnicas envolvem também os conceitos. Logo a aprendizagem de um envolve a aprendizagem do outro. (SOUSA; PANOSSIAN; CEDRO, 2014, p. 36).

Essa separação ainda é uma problemática emergente em nossas salas de aulas nos anos atuais, tanto na Educação Básica, quanto no Ensino Superior, quando não há a percepção de que a aprendizagem das técnicas deve ser embasada na aprendizagem dos conceitos. Isso dificulta a aprendizagem de nossos estudantes, uma vez que eles dedicam muito tempo com repetições exaustivas em listas de exercícios e, na maioria das vezes, não absorvem o conceito.

2.3 Um olhar para a literatura

Para situarmos o nosso objeto de pesquisa e destacarmos sua relevância para a literatura, apresentaremos, a seguir, o mapeamento de pesquisas desenvolvidas e finalizadas nos últimos anos no Brasil.

Corroborando das ideias de Gray (2012), uma revisão bibliográfica é essencial porque cumpre uma série de propósitos, dentre eles: i) identificar questões e temas importantes que se apresentem para mais pesquisas, particularmente onde houver lacunas no conhecimento atual; ii) orientar o desenvolvimento de temas e perguntas de pesquisa; iii) auxiliar futuros pesquisadores a entender por que a pesquisa foi feita, seu desenho e sua direção, e ajudar outros a replicarem o processo de pesquisa; iv) apresentar os tipos de metodologias e ferramentas de pesquisa usados em outros estudos, que possam guiar o esboço do estudo proposto.

Nesse sentido, buscamos na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), inicialmente, por pesquisas que tratam sobre o ensino de Álgebra. Na ocasião, constatamos inúmeras pesquisas sobre esse tema, no entanto, nos limitamos às pesquisas que tinham o foco na formação inicial do professor de Matemática. Em seguida, para delimitarmos a nossa busca, realizamos uma nova procura sobre pesquisas que versam, exclusivamente, sobre o ensino de Sistemas Lineares. É importante ressaltar que, embora todos os trabalhos que destacaremos a seguir tenham sujeitos de pesquisas diferentes, seja o professor formador, o licenciando, o licenciado ou a disciplina, todos os estudos têm, em sua essência, a preocupação com o ensino-aprendizagem da Álgebra. A partir das pesquisas apresentadas, podemos perceber diversos enfoques teórico-metodológicos para a abordagem de Álgebra e, especificamente, dos Sistemas Lineares, o que auxilia na compreensão do nosso objeto de pesquisa.

Battaglioli (2008) aponta para a necessidade de contemplar as conversões entre os registros gráfico, algébrico e de língua natural, sobretudo, que se explore o registro gráfico, pois acredita neste como uma forma de auxiliar o aluno na análise e compreensão dos resultados obtidos; Mondini (2009) aponta para a necessidade de outras investigações que busquem esclarecer perspectivas da presença da Álgebra no curso de Licenciatura em Matemática em sintonia com a formação do professor de Matemática; Rangel (2011) sugere a utilização de Projetos de Modelagem Matemática, uma vez que estes podem proporcionar uma aproximação da Matemática ao contexto social em que o aluno se encontra, simplificando as abstrações existentes e criando uma fundamentação consistente dos significados que um conjunto-solução de um sistema possui; Jordão (2011) ressalta a importância da diversidade de registros e articulação entre eles no ensino de Sistemas Lineares 3x3. Nesse contexto, apresenta o Winplot como software potencial, pois viabiliza a visualização e compreensão dos Sistemas Lineares em 3D; Bertolazi (2012) identifica as dificuldades e incompreensões dos alunos da Licenciatura em Matemática no conteúdo Sistemas Lineares e orienta a utilização da Resolução de Problemas no ensino, acreditando nesta como uma forma de o aluno perceber a aplicação e, assim, valorizar a aprendizagem do mesmo; Santos (2016) sugere que sejam desenvolvidos, na licenciatura, metodologias e métodos de ensino baseados em estudos exploratórios, em atividades investigativas, de modo que promovam reflexões quanto à relação entre teoria e prática, nas diversas disciplinas do curso de licenciatura; Ferreira (2017) menciona sobre a emergência de romper com metodologias tradicionais e aponta a Resolução de Problemas como um elemento diferencial no ensino, na aprendizagem e na avaliação de matemática.

De forma cronológica, apresentaremos, a seguir, uma síntese de cada pesquisa analisada:

1. A dissertação de Mestrado da autora Carla dos Santos Moreno Battaglioli (BATTAGLIOLI, 2008), desenvolvida no Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP, fundamentada nos Registros de Representação

Semiótica de Duval (2003) e na aprendizagem significativa de Ausubel (1999), tem como objetivo fazer uma análise qualitativa sobre a abordagem de Sistemas Lineares apresentada por três livros didáticos do Ensino Médio, aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (PNLEM). Nessa análise, a autora busca identificar quais as representações semióticas dos Sistemas Lineares são apresentadas pelos livros didáticos e quais conversões de representações são propostas em seus exercícios.

Vale salientar que, embora o foco da pesquisa seja os registros de representação, a autora considera de extrema importância que o professor explore a definição de um sistema com os alunos, sobretudo, pensando no fato de que o conjunto solução necessita satisfazer todas as equações do sistema.

De acordo com essa pesquisa, a autora percebe que o registro algébrico tem destaque na abordagem de Sistemas Lineares nos livros didáticos, seja na apresentação do conteúdo, ou nos exercícios resolvidos e propostos. Quanto às conversões de registros, a autora pontua a existência predominante da conversão da língua natural para o registro algébrico, tendo uma carência de exercícios resolvidos ou propostos que sugerem conversões do registro gráfico para o algébrico, do algébrico para o da língua natural e do gráfico para o da língua natural.

Diante disso, a autora ressalta que cabe ao professor buscar atividades que contemplem essa carência dos livros didáticos, de modo que o registro gráfico seja mais explorado, pois ele pode contribuir para que os alunos tenham maior facilidade não só para entender o conjunto solução de um sistema linear, mas também para classificá-lo e discuti-lo quando necessário. Assim sendo, a abordagem desse tema não ficaria apenas no desenvolvimento dos algoritmos, mas auxiliaria o aluno na análise e melhor compreensão dos resultados obtidos.

2. A dissertação de mestrado da autora Fabiane Mondini (MONDINI, 2009), elaborada junto ao curso de Pós-Graduação em Educação Matemática, na UNESP-Rio Claro - SP, fundamentada nas compreensões de Álgebra apresentadas por Kluth (2005), teve como objetivo estudar as concepções que os professores de Álgebra dos cursos de Licenciatura em Matemática apresentam sobre o ensino e aprendizagem dessa disciplina em tais cursos.

No início de seu trabalho, a autora destaca que utilizou como ponto de partida desse estudo outras pesquisas realizadas sobre essa temática e justifica a formação de professor como seu público alvo, por existir diversos trabalhos que descrevem e constatam problemas enfrentados pelos alunos ao estudarem a Álgebra, mas uma grande carência de trabalhos relacionados à abstração, ao formalismo, aos conceitos algébricos e outros temas intrínsecos aos processos de ensino e de aprendizagem da Álgebra na Educação Básica.

A pesquisa foi realizada com onze professores, por intermédio de entrevista, tendo a seguinte pergunta disparadora: qual a relevância da Álgebra para a formação de professores de Matemática? No decorrer do diálogo mantido, algumas outras perguntas também foram incorporadas às entrevistas: quais conteúdos de Álgebra consideravam importantes serem trabalhados na Licenciatura em Matemática e por que viam esses conteúdos como relevantes?

De acordo com a análise, Mondini (2009) destaca alguns pontos importantes expostos nos depoimentos: i) a necessidade de pensar a formação do professor para atuar na Educação Básica; ii) pensar numa formação sólida composta pela base matemática e pedagógica; iii) a organização dos cursos de Licenciatura em Matemática, criticando a junção de cursos (Matemática, Física, Engenharia, ...) na mesma disciplina; iv) o público da Licenciatura em Matemática é caracterizado como vindouro de escolas públicas e/ou são pessoas que trabalham em horário oposto, sendo estes fatores contribuintes para dificuldades na construção de conceitos mais elaborados na Licenciatura e disponibilidade de tempo aos estudos.

3. A dissertação de Mestrado do autor Walter Sérvulo Araújo Rangel (RANGEL, 2011), apresentada ao Mestrado Profissional em Educação Matemática, UFOP - Ouro Preto - MG, busca contribuir para a discussão sobre o ensino de Sistemas Lineares a partir da utilização de Projetos de Modelagem Matemática como uma alternativa pedagógica para professores de Matemática em formação. De acordo com esse autor, atrelar a discussão de Sistemas Lineares à Modelagem Matemática, pode proporcionar uma aproximação da Matemática ao contexto social em que o aluno se encontra, simplificando as abstrações existentes nessa discussão e criando uma fundamentação consistente dos significados que um conjunto-solução de um sistema possui.

O autor realiza, inicialmente, uma investigação em livros didáticos, tradicionalmente utilizados em cursos de Licenciatura em Matemática, sobre a existência e a natureza de atividades propostas relacionadas às aplicações de Sistemas Lineares. Pela análise, o autor assegura que a preocupação dos autores dos livros didáticos não aponta para a apresentação de um modelo matemático, isto é, o foco está no produto e não no processo.

Em seguida, Rangel (2011), fundamentado em Bassanezi (2009), desenvolve o Projeto de Modelagem Matemática em uma turma de Licenciatura em Matemática, na disciplina Matemática Básica III, que, na ocasião, iria introduzir o conteúdo de Sistemas Lineares. De modo geral, percebe-se que o projeto pôde contribuir para a formação dos professores de Matemática nos seguintes aspectos: estímulo a pesquisas a partir de aplicações matemáticas, desmistificação da matemática, ambiente de aprendizado mais prazeroso e instigante, interação e envolvimento da turma, experiência com a prática docente, dentre outros.

4. A dissertação de Mestrado da autora Ana Lucia Infantozzi Jordão (JORDÃO, 2011), desenvolvida no Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, PUC -SP, tem como objetivo elaborar, aplicar e analisar uma sequência didática que aborda a resolução algébrica e gráfica dos Sistemas Lineares quadrados com o auxílio do software educacional Winplot. Tendo como público alvo os alunos do 2º ano do ensino médio, a autora buscou identificar as compreensões destes alunos sobre a resolução de Sistemas Lineares 3x3 em meio às diversas representações favorecidas pelo software.

Apoiada na Teoria dos Registros sobre Representações semióticas (DUVAL, 2003), a autora ressalta a importância da diversidade de registros e articulação entre eles nas atividades matemáticas, o que por sua vez é dificultoso aos alunos do ensino médio, quando se trata de Sistemas Lineares 3x3. Assim, a partir da utilização do Winplot, a autora aponta potencialidades no ensino de sistemas, sobretudo, na visualização e compreensão dos Sistemas Lineares em três dimensões (3D).

5. A dissertação de Mestrado da autora Kátia Socorro Bertolazi (BERTOLAZI, 2012), desenvolvida no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, UEL - Londrina – PR, teve como objetivo investigar processos de pensamento matemático avançado manifestados em registros escritos de estudantes de Licenciatura em Matemática em tarefas sobre sistemas de equações lineares. A autora buscou identificar, nos registros escritos dos alunos, relatos e indícios que manifestassem a presença de processos de pensamento matemático avançado, conforme Dreyfus (1991) e Resnik (1987), como também indícios e atitudes de um professor reflexivo à luz de Freire (2004, 2011).

A pesquisa consistiu na elaboração de uma proposta de avaliação reflexiva sobre sistemas de equações lineares e aplicação desta em uma turma da 4º série do curso de licenciatura em Matemática de uma Universidade Estadual do norte paranaense. Os resultados da pesquisa apontam que, embora os alunos já tenham tido contato com o conteúdo de Sistemas Lineares na Educação Básica, eles se sentem inseguros frente ao conteúdo e até mesmo mostram dificuldades para lidar com ele. Em contrapartida, sinalizam para a necessidade de trabalhar o conteúdo através da Resolução de Problemas, justificando que, ao perceber a aplicabilidade do conteúdo, os alunos dão mais atenção às aulas e aos seus estudos.

6. A tese de doutorado da autora Daniela Miranda Fernandes Santos (SANTOS, 2016), desenvolvida no Programa de Pós-Graduação em Educação, UNESP – Presidente Prudente – SP, tem como objetivo investigar a relação entre a Álgebra acadêmica e a Álgebra escolar, expressa nas concepções de Álgebra e de seu ensino entre professores e licenciandos matriculados no curso de licenciatura em matemática da Faculdade de Ciências e Tecnologia (FCT) – Unesp de Presidente Prudente, tendo em vista subsidiar reflexões sobre a formação inicial de professores de matemática.

Santos (2016) caracteriza sua pesquisa como qualitativa, uma vez que utiliza, no processo de levantamento de dados, a análise documental e bibliográfica, entrevista semiestruturada com professores que desenvolveram as disciplinas relacionadas à Álgebra e seu ensino no momento da pesquisa, bem como questionários e entrevistas semiestruturadas com alunos.

Para o desenvolvimento desse estudo, a pesquisadora apoiou-se nas concepções de educação algébrica, abordadas por Usiskin (1995), Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), Lins e Gimenez (1997), PCN (1998) e Lee (2001). Em seus resultados, a autora destaca aspectos relacionados à metodologia utilizada, em que tanto os professores quanto os alunos apontam a supervalorização de conceitos nas aulas, não havendo uma relação da disciplina com a prática docente na Educação Básica. E constata que a Álgebra Elementar, no curso investigado, é ensinada a partir da metodologia de ensino tradicional, baseado na repetição e memorização, acreditando que, para ensinar bem, basta o conhecimento sólido da matemática.

No entanto, a autora ressalta que, com base na análise do projeto pedagógico do curso, foi cogitada a existência da relação entre a Álgebra acadêmica e a Álgebra escolar nas disciplinas. Porém, isso não se confirma na fala dos professores e alunos.

Esse fato também é percebido pela ao consultar a bibliografia utilizada nas disciplinas desse curso, em que nenhum livro apontava para uma conexão entre teoria e prática.

A autora identifica que os licenciandos participantes da pesquisa tiveram, na Educação Básica, uma vivência com a Álgebra marcada pela aula expositiva e por conteúdos que não foram significativos, visto que, em resposta aos questionários, os alunos não apontam indicativos de aulas problematizadas, como também não aparentam ter clareza dos conteúdos relacionados à Álgebra.

Por fim, a partir das concepções dos professores do curso, a autora identifica certas fragilidades na relação entre a Álgebra acadêmica e a Álgebra escolar, “uma vez que eles deixam a cargo do aluno fazer por si só a transposição dos conceitos e habilidades estudados na universidade com o que vão trabalhar na educação básica”. (SANTOS, 2016, p. 180). A autora também aponta a supervalorização das disciplinas específicas, pois muitos ainda consideram que o domínio sólido dos conteúdos é suficiente para ser um bom professor de matemática na Educação Básica.

Em síntese, Santos (2016, p. 191) conclui que “a relação entre a Álgebra acadêmica e Álgebra escolar na formação inicial do licenciando não é significativa a ponto de ressignificar os conhecimentos sobre ensino de Álgebra do futuro professor”. Assim, sugere desenvolver, junto aos futuros professores, metodologias e métodos de ensino baseados em estudos exploratórios, em atividades investigativas, de modo que promovam reflexões quanto à relação entre teoria e prática nas diversas disciplinas do curso de licenciatura.

7. A tese de doutorado do autor Nilton Cezar Ferreira (FERREIRA, 2017), desenvolvida no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, UNESP - Rio Claro – SP, tem como objetivo investigar as contribuições que a Álgebra Abstrata Moderna (AAM) (na qual se trabalha as teorias de Grupos, Anéis e Corpos, dentre outras), ministrada como uma disciplina em cursos de Licenciatura em Matemática no Brasil, poderia dar à Formação Inicial de Professores de Matemática.

O estudo de caráter qualitativo foi desenvolvido a partir de uma pesquisa de campo com uma turma do quinto período de Licenciatura em Matemática, na qual foi elaborado e implementado um projeto reestruturando a disciplina de AAM, de modo a utilizar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. Esse projeto teve como intuito auxiliar os alunos da turma a construírem um conhecimento satisfatório de AAM e mostrar a relação de seus conteúdos com os da Educação Básica.

De acordo com os dados, Ferreira (2017) afirma que, mesmo com o grande nível de abstração da AAM, é possível, e mais fácil, ensinar seus conteúdos a partir de conexões entre conhecimentos dos próprios alunos, como os aprendidos na Educação Básica ou em outras disciplinas de matemática do Ensino Superior.

Diante da observação dos licenciandos durante a pesquisa e das atividades desenvolvidas por eles, Ferreira (2017) destaca as seguintes contribuições que a AAM, bem como outras disciplinas de matemática no Ensino Superior, pode trazer aos alunos, a saber:

- Como agente motivador mediante sua relação entre teoria e prática;
- Como instrumento para criar justificativas formais de propriedades e de definições trabalhadas na Educação Básica;
- Auxiliar a identificar semelhanças e diferenças entre os conteúdos da futura prática profissional na Educação Básica e, com isso, ensinar um novo conteúdo, baseando-se nas semelhanças ou diferenças entre esse novo assunto e os outros conteúdos já trabalhados;
- Tornar o aluno mais criterioso em relação às hipóteses de propriedades matemáticas e cautelosos com a composição da estrutura e dos elementos trabalhados;
- Tornar o aluno crítico, isto é, não aceitar um resultado sem justificativa;
- Aprimorar a escrita matemática do estudante.

No entanto, o autor salienta que, para que tais contribuições sejam alcançadas, é necessário que sejam trabalhadas de maneira que possibilite ao aluno um conhecimento satisfatório e promova uma relação entre a teoria e a prática. E acrescenta: “Para que isso ocorra, precisamos de professores formadores de professores experientes e, realmente, comprometidos com o processo de formação de professores”. (FERREIRA, 2017, p. 234).

Nesse sentido, o autor menciona a emergência em romper com metodologias tradicionais e aponta a Resolução de problemas como um elemento diferencial no ensino, na aprendizagem e na avaliação de matemática, uma vez que, “além de ser um elemento motivador, coloca o aluno como principal agente no processo de ensino-aprendizagem-avaliação, levando-o a refletir, discutir e tirar suas próprias conclusões…” (FERREIRA, 2017, p. 240).

Para finalizar, Ferreira (2017) ressalta a necessidade de mais diálogo, formação continuada para os professores da Licenciatura e mais pesquisas que busquem associar a formação teórica com a prática do professor.

Com o intuito de fornecer uma visão geral das pesquisas analisadas, organizamos seus principais aspectos no quadro a seguir:

Quadro 2 – Síntese de Pesquisas analisadas em Educação Algébrica

Pesquisa	Pressupostos Teóricos	Foco dos dados	Apontamentos (Resultados encontrados)
1	Representação Semiótica (DUVAL, 2003). Aprendizagem Significativa (AUSUBEL, 1999).	Análise de livros didáticos de Matemática do ensino médio.	A importância de contemplar as conversões entre os registros gráfico, algébrico e da língua natural no ensino de Sistemas Lineares.
2	Compreensões de Álgebra (KLUTH, 2005).	Professores de Álgebra na Licenciatura em Matemática.	Esclarecer perspectivas da presença da Álgebra no curso de Licenciatura em Matemática em sintonia com a formação do professor.
3	Modelagem Matemática (BASSANEZI, 2009).	Alunos da Licenciatura em Matemática.	Projetos de Modelagem Matemática como fonte de aproximação da Matemática com o contexto social em que o aluno se encontra.
4	Representações semióticas (DUVAL, 2003).	Alunos do ensino médio.	As potencialidades do software Winplot na articulação e diversidade de representações no ensino de Sistemas Lineares.
5	Pensamento Matemático avançado (DREYFUS, 1991; RESNIK, 1987);	Licenciandos em Matemática (4º período).	A Resolução de Problemas no ensino de Sistemas Lineares como forma de proporcionar a percepção

	Professor reflexivo (FREIRE, 2004; 2011).		de sua aplicação e, assim, a valorização de seu estudo.
6	Educação Algébrica (USISKIN, 1995; FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993; LINS; GIMENEZ, 1997; PCN, 1998; LEE, 2001).	Professores e alunos do curso de licenciatura em matemática.	A importância de desenvolver metodologias de ensino baseadas em estudos exploratórios e atividades investigativas, de modo que promova reflexões quanto à relação entre teoria e prática nas disciplinas da licenciatura.
7	Modelo metodológico (ROMBERG, 2007; ONUCHIC et al, 2014)	Licenciandos em Matemática.	Necessidade do rompimento com metodologias tradicionais e apontamento da Resolução de Problemas como um elemento diferencial no ensino, na aprendizagem e na avaliação de matemática.

Fonte: Organizado pela pesquisadora.

Como podemos ver no quadro acima, embora todos esses estudos tenham sujeitos de pesquisa diferente, eles sinalizam para a necessidade de um ensino de Álgebra com mais compreensão, em particular, de Sistemas Lineares, em que, na maioria das vezes, o foco encontra-se na representação algébrica de um sistema e no ensino dos métodos de resolução. É perceptível que, frequentemente, a forma como a Álgebra é trabalhada, seja nas disciplinas da licenciatura ou no conteúdo da Educação Básica, dá ênfase, prioritariamente, ao algoritmo, isto é, aos métodos algébricos de resolução.

As pesquisas apresentadas apontam alguns enfoques teórico-metodológicos pertinentes ao ensino de Sistemas Lineares, tais como a utilização de Projetos de Modelagem Matemática, o Software Winplot e as Representações Semióticas. Nesse contexto, nosso trabalho tem como objetivo analisar as contribuições da Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas, aliada às Representações Múltiplas de Álgebra no ensino de Sistemas Lineares. Para tanto, iremos, nesta pesquisa, elaborar, aplicar e analisar uma Oficina sobre o ensino de Sistemas Lineares, aliado ao uso das Representações Múltiplas, na perspectiva da Resolução de Problemas, com os alunos da Licenciatura em Matemática, buscando, dessa forma, alcançar os seguintes objetivos específicos: i) proporcionar aos futuros professores reflexões quanto ao ensino-aprendizagem de Sistemas Lineares aliado ao uso das Representações Múltiplas de Álgebra; ii) possibilitar experiências com a utilização da Resolução de Problemas como Metodologia de Ensino; e iii) contribuir na construção de uma nova postura frente ao ensino de Sistemas Lineares.

2.4 O Ensino de Sistemas Lineares

Os Sistemas de Equações Lineares constituem um tópico de grande importância dentro da Álgebra, uma vez que podem possibilitar a modelagem de diversos problemas, como também, podem ser utilizados como ponto de partida para teorias matemáticas relevantes e atuais. Seu estudo é introduzido desde os anos finais do ensino fundamental, sendo aprofundado no ensino médio e em disciplinas de cursos de nível superior da área de exatas, tais como: Matemática, Física, Ciências da Computação, Engenharias e outras.

A utilização de Sistemas de Equações Lineares para a resolução de determinados problemas não é algo recente. Como referendado em Zuin e Santos (2019), registros antigos de povos Babilônios, Egípcios, Chineses, Gregos, Hindus e Árabes evidenciam traços dessa utilização. Mesmo antes da Álgebra tornar-se um campo de estudo da Matemática, indícios apontam a utilização de técnicas aritméticas para solucionar problemas modeláveis através de sistemas de equações com várias incógnitas.

Antes de adentrarmos nas discussões sobre o ensino de Sistemas de Equações Lineares, vamos esclarecer o que entendemos por Sistemas de Equações Lineares, ou simplesmente, Sistemas Lineares – nomenclatura utilizada no decorrer deste trabalho, pois acreditamos que para entender os conceitos é importante ter a compreensão do significado das palavras.

De modo geral, quando nos referimos a sistemas, tratamos de um conjunto de elementos que estão interligados, que possuem uma relação entre si. Já quando nos referimos a sistematizar, nos referimos a organizar estes elementos em um sistema. Dessa forma, podemos perceber que o próprio nome deste tópico matemático nos direciona para um significado. No entanto, para que haja compreensão é preciso que se tenha clareza sobre o significado dessas palavras sob o ponto de vista matemático.

Iniciaremos elucidando o que entendemos por equações. As equações são definidas como uma igualdade de duas expressões algébricas, que pode envolver duas ou mais incógnitas, em que o primeiro lado da igualdade é denominado 1º membro e o outro lado é denominado 2º membro.

Vale salientar a importância da compreensão do sinal de igualdade (=) existente nas equações, que é considerado "um dos símbolos mais importantes na aritmética elementar, na álgebra e em toda matemática ao usar números e operações". (VAN DE WALLE, 2009, p. 288). No entanto, como destaca Van de Walle (2009), este símbolo "=" é muito mal compreendido, pois muitos alunos o utilizam como "separador", no qual, de um lado, fica o problema e, depois do sinal, a resposta. De acordo com o autor, o sinal de igualdade deve ser compreendido como "ser o mesmo que", isto é, uma relação de equivalência entre as expressões de ambos os lados da igualdade.

Há muitos tipos de equações. Especificamente, neste trabalho, nos detemos às equações lineares. A palavra "linear" é utilizada para caracterizar as equações de grau 1, isto é, cujo expoente da incógnita, ou das incógnitas, da equação é 1. Dessa forma, podemos afirmar que uma equação linear é uma equação de primeiro grau, com uma ou mais incógnitas. Assim, as equações lineares possuem grau 1.

Da Língua Portuguesa, a palavra linear significa algo referente a linhas, ou que se assemelha a uma linha (OLINTO, 2000). Sob o olhar matemático, esse significado pode ser visto por intermédio da representação gráfica de uma equação linear, uma vez que, graficamente, podemos representá-lo por meio de uma reta.

Portanto, um "Sistema de Equações Lineares é definido como sendo uma coleção finita de equações lineares, que pode simplesmente ser denominado de Sistema Linear". (BERTOLAZI, 2012, p. 58). Um sistema linear $m \, x \, n$ é definido como um conjunto S de m equações e n incógnitas, podendo ser representado da seguinte forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2017), documento que fixa os conteúdos mínimos para o ensino fundamental, o estudo de Sistemas Lineares $2x2$ inicia-se na Educação Básica, a partir do 8º ano do ensino fundamental, tendo como objetivo o desenvolvimento das habilidades de "resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso". (BRASIL, 2017, p. 265).

Assim, percebemos que, embora os Sistemas Lineares proporcionem ampla abrangência, seu estudo é considerado acessível aos estudantes da Educação Básica, pois não demanda a utilização de conceitos sutis ou complexos.

No entanto, as vivências na Educação Básica e o levantamento de pesquisas desenvolvidas nas salas de aula nos permitem afirmar que mesmo com essa baixa complexidade, os alunos se mostram inseguros frente ao conteúdo, tendo dificuldades nos métodos de resolução, na modelagem de um problema, na interpretação dos resultados, dentre outros.

De acordo com Ponte, Branco e Matos (2009, p. 151), as principais dificuldades encontradas pelos alunos da Educação Básica podem ser agrupadas em três grandes categorias:

(i) Compreender a noção de um sistema de equações e a natureza de sua solução;

(ii) Compreender os processos de resolução de sistemas de equações e executá-los corretamente até obter a solução;

(iii) Ser capaz de resolver problemas dados por enunciados verbais, traduzindo as condições dadas por um sistema de equações e interpretando a solução do sistema de acordo com as condições dadas.

Consideramos a visão do autor de grande pertinência para a reflexão sobre o ensino de Sistemas Lineares, por esse motivo, analisaremos, a seguir, o conteúdo na ótica das categorias citadas.

Na primeira categoria, os autores tratam de dois aspectos importantes: a noção de sistema e a natureza da solução. Acreditamos que os alunos persistem com essas dificuldades por não realizarem conexões entre o conteúdo de Sistemas Lineares e os conhecimentos já adquiridos em Álgebra.

Sobre a natureza da solução, geralmente, esse estudo é voltado para a discussão de sistemas, com uma classificação superficial entre Sistema Impossível,

Possível e Determinado e Possível Indeterminado. Compreendemos que a apresentação da classificação de sistemas, apenas de modo expositivo, sem que o aluno passe por experiências que possibilite a compreensão e a retirada de conclusão a respeito da classificação do sistema, é um forte aliado a essa dificuldade.

Esclarecendo esta discussão, o Sistema Impossível é aquele que não tem solução, isto é, não existe ênupla ordenada que satisfaça, simultaneamente, todas as equações do sistema. Por outro lado, o Sistema Possível e Determinado tem uma única solução, ou seja, uma única ênupla ordenada que satisfaça, simultaneamente, todas as equações do sistema. Já o Sistema Possível e Indeterminado é aquele que tem infinitas soluções, isto é, existem infinitas ênuplas ordenadas que satisfaçam, simultaneamente, todas as equações do sistema.

Em um Sistema Linear $2 \, x \, 2$, podemos fazer essa classificação de maneira trivial, apenas observando a representação gráfica do sistema. No entanto, nem sempre é tão simples que os alunos façam essa classificação por outros meios, acarretando, assim, as dificuldades apontadas por Ponte, Branco e Matos (2009).

Na segunda categoria, os autores destacam as dificuldades relacionadas à compreensão e à execução correta dos processos de resolução de sistemas de equações. Como os autores tratam de execução, acreditamos que eles se referem aos processos algébricos que são tradicionalmente utilizados e propostos pelos livros didáticos, sendo eles: método da substituição, método da adição, método da comparação, método do escalonamento, método da regra de Cramer, dentre outros.

Assim, buscamos evidenciar, nesta pesquisa, que todos estes métodos são plausíveis na resolução de Sistemas Lineares. No entanto, esta resolução deve ir além da execução de um método de solução. É preciso que eles sejam vistos pelos alunos como aliados no processo de resolução e não como mais um procedimento algébrico a ser memorizado e executado mecanicamente.

Na terceira categoria, os autores mencionam as dificuldades na transição da linguagem verbal para a linguagem algébrica, bem como destacam obstáculos no que se refere à interpretação da solução no contexto do problema. Mesmo sabendo que com exercícios e repetição as dificuldades voltadas à resolução de sistemas possam ser superadas, isso não é possível nesta categoria, uma vez que exige do aluno criatividade e compreensão sobre a natureza de um sistema linear.

Desse modo, destacamos, nesta pesquisa, a importância de abordar este conteúdo através da Resolução de Problemas, pois acreditamos que por meio de experiências em situações que façam sentido para o aluno, ele pode atribuir um maior significado na atividade de transição da linguagem verbal para a linguagem algébrica.

Ao se referir à abordagem do conteúdo de Sistemas Lineares, Lima (2007, p. 91) destaca que "sua abordagem nos compêndios adotados em nossas escolas é, na maioria das vezes, obsoleta, árida e desmotivada. Em certos casos, até mesmo contém erros matemáticos de fato". Embora, no estudo da Matemática, seja necessário um conhecimento de conceitos, é importante uma abordagem que faça sentido aos alunos iniciantes nos seus estudos, pois se não houver clareza desde então, o aprofundamento e prosseguimento dos conteúdos pode se tornar crítico.

Assim, Lima (2007) orienta a utilização de problemas, em sala de aula, que conduzam a utilização de Sistemas Lineares em sua modelagem e/ou resolução. Problemas estes que podem ser propostos tanto pelo professor, como também pelos alunos, pois, acredita-se que, dessa forma, os discentes podem ser levados a retirar conclusões sobre a importância dos Sistemas Lineares e deixar de vê-los como algo inventado apenas por capricho dos professores.

De acordo com Ponte, Branco e Matos (2009), uma boa alternativa para promover o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas e da comunicação matemática dos alunos é a Resolução de Problemas. Esses autores sugerem que os problemas podem ser formulados, inicialmente, em linguagem natural e, por fim, discutidos com toda a turma.

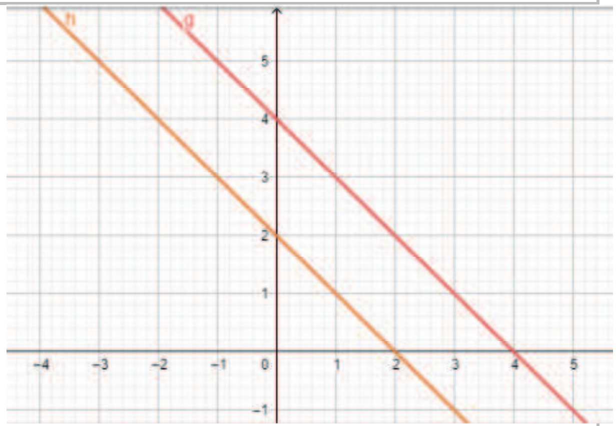
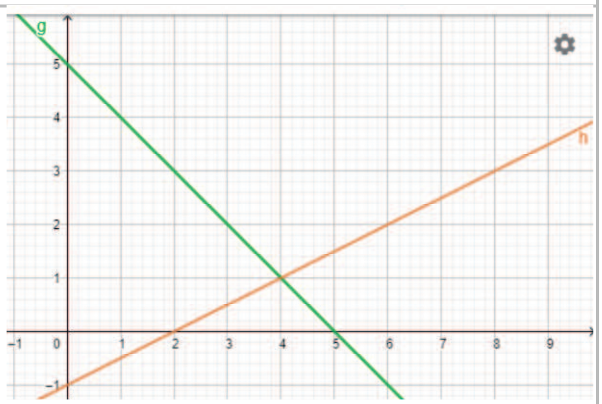
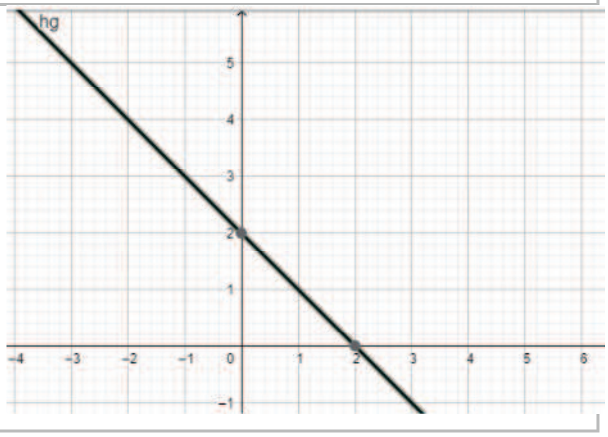
As Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006) recomendam, no estudo de Sistemas Lineares, um trabalho que vá além da técnica de resolução de sistemas, colocando a Álgebra sob o olhar da geometria:

> A resolução de um sistema $2\ X\ 2$ de duas equações e duas variáveis pode ser associada ao estudo da posição relativa de duas retas no plano. Com operações elementares simples, pode-se determinar a existência ou não de soluções desse sistema, o que significa geometricamente os casos de intersecção / coincidência de retas ou paralelismo de retas. (BRASIL, 2006, p.77-78).

Em outras palavras, a partir da interpretação geométrica de um Sistema Linear, podemos observar sua solução, discussão e classificação, sendo esta mais uma alternativa a ser considerada no ensino de Sistemas Lineares.

Para melhor elucidarmos estas possibilidades citadas, exemplificamos, no quadro a seguir, as três possibilidades de interpretação geométrica de Sistemas Lineares $2x2$:

Quadro 3 – Interpretação Geométrica e Classificação de Sistemas Lineares $2x2$

Interpretação Geométrica e Classificação de Sistemas Lineares 2x2		
Sistema Impossível (SI) As retas não se interceptam, logo, são paralelas.	$\begin{cases} x + y = 4 \\ x + y = 2 \end{cases}$	
Sistema Possível e Determinado (SPD) As retas se interceptam em um único ponto, logo, são concorrentes.	$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$	
Sistema Possível e Indeterminado (SPI) As retas se interceptam em infinitos pontos, logo, são coincidentes.	$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$	

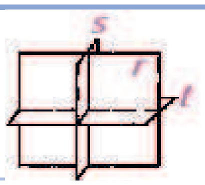
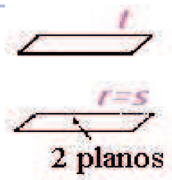
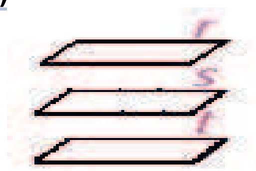
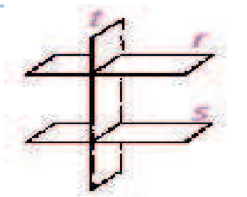
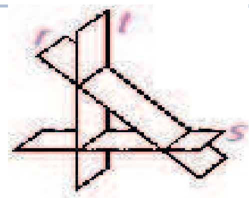
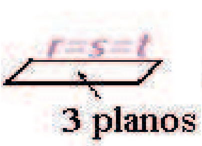
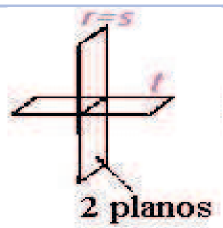
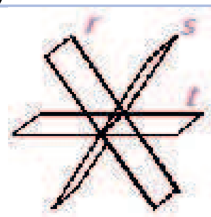
Fonte: Organizado pela pesquisadora.

Como podemos ver acima, a representação geométrica facilita a compreensão da classificação. No primeiro gráfico, temos duas retas que nunca irão se interceptar, o que nos faz entender o porquê deste sistema ser classificado como impossível. No segundo gráfico, temos duas retas que se interceptam em um único ponto, tornando visível que o ponto em comum é a solução do sistema possível e determinado. No terceiro gráfico, temos duas retas coincidentes, que se interceptam em infinitos pontos, logo, fica perceptível que esse sistema é possível e indeterminado.

Da mesma forma, podemos compreender a classificação dos Sistemas Lineares $3x3$. No entanto, esta visualização não é mais no plano ($\mathbb{R}^2$), mas no espaço ($\mathbb{R}^3$). Também vale destacar que, nos Sistemas Lineares $2x2$, temos apenas um caso para cada tipo de Sistema, já nos Sistemas Lineares $3x3$, em alguns tipos de sistema, temos mais casos.

A seguir, apresentamos a representação geométrica de Sistema Lineares 3x3:

Quadro 4 – Classificação e representação geométrica de Sistemas Lineares 3x3

<table>
<tr><th colspan="6">Sistema Possível Determinado (SPD)</th></tr>
<tr><td colspan="6"></td></tr>
<tr><td colspan="6">Os três planos têm um único ponto em comum.</td></tr>
<tr><th colspan="6">Sistema Impossível (SI)</th></tr>
<tr><td colspan="3">
</td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="3">Os planos $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$ coincidem e o plano $\boldsymbol{t}$ é paralelo a eles.</td><td colspan="3">Os planos r, s e t são paralelos dois a dois.</td></tr>
<tr><td colspan="3"></td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="3">Os planos $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$ são paralelos e o plano $\boldsymbol{t}$ os intersecta segundo retas paralelas.</td><td colspan="3">Os planos r, s e t se intersectam, dois a dois, segundo retas paralelas umas às outras.</td></tr>
<tr><th colspan="6">Sistema Possível e Indeterminado (SPI)</th></tr>
<tr><td colspan="2">
</td><td colspan="2">
</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">Os planos $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}$ e $\boldsymbol{t}$ coincidem.</td><td colspan="2">Os planos r e s coincidem e o plano t os intersecta segundo uma reta.</td><td colspan="2">Os planos $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}$ e $\boldsymbol{t}$ são distintos e têm uma reta em comum.</td></tr>
</table>

Fonte: Adaptado de Mello (2007)[3]

[3] Disponível em: <https://www1.folha.uol.com.br/fsp/fovest/fo1906200705.htm> Acesso em jun. de 2018.

Como podemos observar, para os Sistemas Lineares $3x3$, temos maior quantidade de representações geométricas, sobretudo, para o Sistema Linear Impossível, visto que temos quatro possibilidades de representação.

Como destaca Lima (2007, p. 93), "essa variedade de interpretações enriquece a gama de aplicações que tem seu estudo e, por outro lado, permite a utilização de diferentes instrumentos para resolvê-lo". Nesse contexto, o autor apresenta três interpretações a nível elementar que podem ser utilizadas no ensino de Sistemas Lineares, a saber:

i) Interpretação geométrica: cada solução pode ser olhada como um ponto no espaço. Dessa forma, cada uma das equações do sistema é a equação de um plano nesse espaço e as soluções do sistema são os pontos comuns a esses planos.

ii) Interpretação matricial: o sistema pode ser representado em três matrizes, sendo a primeira matriz (a), com os coeficientes das equações, a segunda matriz (x), com os termos independentes e, a terceira matriz (d), com os determinantes. Utilizando a multiplicação de matrizes, o sistema pode ser escrito sob a forma $a.x = d$.

iii) Interpretação vetorial: as colunas do sistema serão consideradas vetores a, b e c do espaço numérico $\mathbb{R}^3$. Assim, resolver o sistema significa exprimir d como combinação linear dos vetores a b e c na forma $x.a + y.b + z.c = d$.

Diante das dificuldades expostas por Ponte, Branco e Matos (2009) e considerando as habilidades destacadas pela BNCC (2017), as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006) e as interpretações expostas por Lima (2007), percebemos a necessidade de descentralizar o ensino de Sistemas Lineares dos meros procedimentos algébricos, considerando as outras formas de representação como aliadas ao seu ensino.

2.5 As Representações Múltiplas de Álgebra no ensino de Sistemas Lineares

As discussões feitas até agora apontam para a necessidade de um ensino de Sistemas Lineares aliado a outras representações, nesse sentido, utilizaremos, nesta pesquisa, das Representações Múltiplas de Álgebra, pois consideramos que elas podem proporcionar uma aprendizagem que contribua para a construção, aquisição e compreensão do conteúdo de maneira significativa.

A ideia da utilização das Representações Múltiplas no ensino de Álgebra está presente nos documentos oficiais, sendo recomendada inicialmente nos *Principles and Standards for School Mathematics*, documento organizado pelo *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM), no ano 2000, nos EUA.

De acordo com o *Standards* (2000, p. 75), a representação é considerada como um padrão de procedimento, dessa forma, "o termo representação refere-se tanto ao processo como ao resultado – por outras palavras, à aquisição de um conceito ou de uma relação matemática expressa numa determinada forma à forma em si mesma".

Friedlander e Tabach (2001) apresentam a ideia de Representações Múltiplas de Álgebra a partir de quatro representações, a saber: representação verbal, representação numérica, representação gráfica e representação algébrica. De acordo com os autores, o uso das representações tem o potencial de tornar o processo de aprendizagem de Álgebra significativo e efetivo.

A representação verbal geralmente é usada para apresentar um problema e é necessária na interpretação final dos resultados obtidos na solução do processo. A representação numérica é familiar para os estudantes no início da fase do estudo de Álgebra, sendo importante para adquirir uma primeira compreensão de um problema e para a investigação de casos particulares. A representação gráfica é eficaz em fornecer uma imagem clara de uma função real de uma variável real. A representação algébrica é concisa, geral e efetiva na apresentação de padrões e modelos matemáticos.

Podemos relacionar as Representações Múltiplas da Álgebra citadas com as Representações Semióticas apresentadas por Duval (2003), a saber: sistemas de numeração, figuras geométricas, escritas algébricas e formais, as representações gráficas e a língua natural.

De acordo com Duval (2003), a compreensão de um saber é manifestada a partir da apresentação das diversificadas formas de representação e a apropriação do seu significado acontece por meio das conversões estabelecidas entre as diversas formas de representar o objeto.

De acordo com o autor "as conversões são transformações de representações que consistem em mudar de registro conservando os mesmos objetos denotados: por exemplo, passar da escrita algébrica de uma equação à sua representação gráfica". (DUVAL, 2003, p. 16).

No entanto, tradicionalmente, estas representações são utilizadas de maneira isolada, sendo priorizada a representação algébrica e, mais adiante, a representação gráfica, não havendo transições entre as representações. De acordo com Friedlander e Tabach (2001), se utilizadas dessa forma, nenhuma das representações consegue abranger a totalidade de um conteúdo, pois, embora possuam inúmeras vantagens, elas também possuem desvantagens, como podemos ver no quadro a seguir:

Quadro 5 – Vantagens e desvantagens das Representações Múltiplas de Álgebra

Representação	Vantagens (potencialidades)	Desvantagens (limitações)
Verbal	• Possibilita ambiente natural para entender seu contexto e comunicar sua solução; • Facilita a apresentação e aplicação de padrões gerais; • Possibilita a conexão entre a matemática e outras áreas;	• Pode ser ambígua e provocar associações irrelevantes ou enganosas; • É menos universal; • Sua dependência do estilo pessoal pode ser um obstáculo na comunicação matemática;
Numérica	• Familiar para os estudantes na fase inicial com Álgebra; • Oferece uma ponte eficaz para Álgebra e precede as outras representações; • Importante na compreensão inicial de um problema e na investigação de casos particulares;	• Pode não ser eficaz em fornecer um quadro geral; • Alguns aspectos ou soluções importantes de um problema podem ser perdidos; • É uma ferramenta limitada na resolução de problemas;
Gráfica	• Eficaz em fornecer uma imagem clara de uma função real estimada de uma variável real; • Os gráficos são intuitivos e atraentes aos que gostam de uma abordagem visual;	• Pode não ter a precisão necessária, é influenciada por fatores externos (como escala); • Sua utilidade como ferramenta matemática varia de acordo com a tarefa em questão;
Algébrica	• Concisa, geral e efetiva na apresentação de padrões e modelos matemáticos; • A manipulação de objetos algébricos às vezes é o único método de justificar ou provar declarações gerais.	• O uso exclusivo de símbolos (em qualquer estágio de aprendizagem) pode dificultar o significado matemático ou natureza dos objetos representados, causando, dificuldades na interpretação dos seus resultados.

Fonte: Organizado pela pesquisadora.

Destacamos as vantagens e desvantagens de cada representação no sentido de apresentar as potencialidades e limitações de cada representação e de evidenciar a importância e necessidade de utilização simultânea de várias representações, uma vez que, isoladamente, nenhuma representação pode abranger todas as potencialidades.

Friedlander e Tabach (2001) apontam para a necessidade de os professores e desenvolvedores do currículo estarem conscientes da necessidade de trabalhar em um ambiente de múltiplas representações, isto é, um ambiente que permita a representação de um problema e sua solução de várias maneiras, pois acreditam que esta é uma forma de atender aos estilos individuais de pensamento dos alunos, como também, acreditam que a utilização combinada das múltiplas representações pode cancelar as desvantagens e ser uma ferramenta efetiva no ensino.

No capítulo 4, no qual apresentamos as descrições e análises das atividades realizadas, pontuamos diversos momentos em que as vantagens e desvantagens citadas pelo autor se fazem presentes.

Acreditamos que a utilização das diferentes representações e a transição entre elas pode facilitar a compreensão do aluno sobre os conceitos matemáticos, como também, o trabalho do professor, no que diz respeito à avaliação contínua do desenvolvimento do aluno, uma vez que “a originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo o momento de registro de representação”. (DUVAL, 2003, p. 14).

Nesse sentido, vale salientar dois pontos importantes destacados por Duval (2003) sobre as conversões: i) o ponto de vista matemático e ii) o ponto de vista cognitivo. De acordo com esse autor, se olharmos do ponto de vista matemático, a conversão intervém somente na escolha do registro mais conveniente naquele momento, considerado apenas como uma atividade lateral. Já do ponto de vista cognitivo, ela é fundamental, pois é a atividade de conversão que conduz aos mecanismos implícitos à compreensão.

Nesse contexto, acreditamos na Resolução de Problemas, aliada às Representações Múltiplas de Álgebra, como metodologia conveniente no ensino de Sistemas Lineares, visto que pode proporcionar conversões pretendidas e, possivelmente, facilitar a compreensão do conteúdo.

Friedlander e Tabach (2001) destacam as diversas contribuições que o problema apresentado em múltiplas representações pode proporcionar, tais como: i) incentiva a flexibilidade na escolha de representações dos alunos em seu caminho de solução e aumenta sua conscientização sobre seu estilo de solução; ii) dá legitimação ao uso das diversas representações no processo de solução; iii) proporciona transições involuntárias entre as representações, fazendo com que o aluno as perceba como uma necessidade natural e não como um requisito arbitrário.

2.6 A Resolução de Problemas como Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática

A Resolução de Problemas é utilizada por diversos povos em situações do cotidiano e, nas aulas de Matemática, em todos os níveis de escolaridade há muito tempo. No entanto, nem sempre essa abordagem aconteceu da mesma forma, pois diversas concepções sobre a utilização da Resolução de Problemas no ensino da Matemática têm sido discutidas e modificadas ao longo da história.

Em 1945, o matemático húngaro George Polya, considerado o Pai da Resolução de Problemas, publicou o primeiro livro nessa temática, intitulado *"How to Solve It",* conhecido no Brasil como "A arte de resolver problemas". O livro é fundamentado em um longo e sério estudo dos métodos de resolução, denominado "heurística", o qual proporciona a percepção de dois aspectos da Matemática: i) a rigorosa ciência de Euclides, isto é, uma ciência dedutiva e sistemática; ii) a matemática em desenvolvimento, que se apresenta como uma ciência indutiva e experimental.

De acordo com Polya (1945), o professor de Matemática tem uma grande oportunidade, quando ele desafia a curiosidade dos alunos, apresentando-lhes problemas compatíveis com o conhecimento deles, o que poderá despertar nos discentes o gosto pelo raciocínio independente e proporcionar meios para o alcance desse objetivo. Entretanto, se ele apenas estimula seus alunos a exercitar operações rotineiras, ele desperdiça essa oportunidade, pois isto minimiza o interesse e dificulta o desenvolvimento intelectual do aluno.

Nesse sentido, Polya (1945) apresenta um roteiro que, na ocasião, auxiliaria o professor no trabalho com a Resolução de Problemas em sala de aula. Esse roteiro é composto por quatro fases: i) compreensão do problema; ii) estabelecimento de um plano; iii) execução desse plano; iv) retrospecto.

Na compreensão do problema, o autor chama a atenção para três pontos que são considerados por ele as partes principais do problema: a incógnita, os dados e a condicionante. O aluno precisa considerar esses três pontos, atento, repetidamente e sob várias óticas. Assim, após ter compreendido o problema, o aluno estará preparado para o estabelecimento de um plano. A execução do plano é considerada como a parte mais tranquila e essencial, pois é o momento da resolução. Se o plano foi feito corretamente, essa será a fase mais simples para o aluno e para o professor. Por fim, ao tratar do retrospecto, Polya (1945, p. 10) destaca que "se fizerem um retrospecto da resolução completa, reconsiderando e examinando o resultado e o caminho que levou até este, eles poderão consolidar o seu conhecimento e aperfeiçoar sua capacidade de resolver problemas".

Na década de 1960, sob a influência de Polya, iniciaram-se as investigações em Resolução de Problemas enquanto campo de pesquisa em Educação Matemática. De acordo com Andrade (1998), a partir do final desta década, a prática comum nessa metodologia de investigação era voltada para sessões de resolução de problemas em grupo e com os alunos se manifestando em voz alta. Nessa perspectiva, "o ensino de Resolução de problemas limitava-se ao ensino da busca da solução, tipo treino, num esquema cognitivo estímulo-resposta". (ANDRADE, 1998, p. 8).

Schroeder & Lester (1989) identificam e apresentam três modos diferentes de abordar a Resolução de Problemas nas aulas de Matemática: ensinar *sobre* resolução de problemas; ensinar Matemática *para* resolver problemas; e ensinar Matemática *através* da Resolução de Problemas. Esse debate tem sido atualizado em diferentes pesquisas, como aponta Andrade (2017).

Schroeder & Lester (1989) explicam que, ao ensinar sobre a Resolução de Problemas, o professor enfatiza o modelo de Polya (1945) – i) compreensão do problema; ii) estabelecimento de um plano; iii) execução do plano; iv) retrospecto; ou alguma variação dele. Ao ensinar Matemática para resolver problemas, o professor foca na maneira como a matemática é ensinada e como aplicá-la na resolução de problemas, isto é, o objetivo para aprender Matemática é a capacidade de saber aplicá-la. Já no terceiro modo, ao tratar do ensino da Matemática através da Resolução de Problemas, ela é vista como uma metodologia de ensino, como um ponto de partida e um meio de ensinar Matemática.

De acordo com Onuchic e Allevato (2005), a partir dos anos 90, a Resolução de Problemas, como uma metodologia de ensino, passa a ser o lema das pesquisas e estudos em Resolução de Problemas. As autoras atribuem essa nova visão de ensino-aprendizagem da Matemática aos estudos desenvolvidos pelo NCTM, por meio da publicação dos *Standards 2000*, intitulado *Principles and Standards for School Mathematics* (Princípios e Padrões para a Matemática Escolar).

Os estudos sobre a Resolução de Problemas, nessa perspectiva, avançaram no Brasil a partir de 1992, ano que deu início, na UNESP – Rio Claro, ao Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas – GTERP, coordenado pela Prof.ª Dr.ª Lourdes de la Rosa Onuchic, em que trabalhavam a Matemática para a sala de aula usando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Nesse cenário, surge, no Brasil e no mundo, uma nova perspectiva de Resolução de problemas, em que ela passa a ser considerada em sala de aula como um ponto de partida. De acordo com Allevato e Onuchic (2009), ao considerar o problema como ponto de partida, ele é proposto aos alunos antes de lhes ter sido apresentado formalmente o conteúdo matemático necessário ou mais apropriado à sua resolução.

Allevato e Onuchic (2009) explicam a utilização da palavra composta “Ensino-Aprendizagem-Avaliação”, destacando compreender que ensino e aprendizagem devem ocorrer simultaneamente durante a construção do conhecimento, tendo o professor como guia e os alunos como co-construtores desse conhecimento. Já no que diz respeito à avaliação, essa metodologia integra uma concepção mais atual sobre avaliação, em que é construída durante a resolução do problema, associando-se ao ensino e objetivando acompanhar o crescimento dos alunos.

Allevato (2014) destaca que a perspectiva atual de Resolução de Problemas como metodologia de ensino engloba os três modos diferentes de abordar a Resolução de Problemas mencionados por Schroeder e Lester (1989), uma vez que “quando o professor adota essa metodologia, os alunos podem aprender tanto sobre Resolução de Problemas quanto aprendem Matemática para resolver novos problemas enquanto aprendem Matemática através da Resolução de Problemas”. (ALLEVATO, 2014, p. 215).

Na Paraíba, a Resolução de Problemas vem ganhando forte atenção nos últimos anos, estando presente em disciplinas de Licenciatura em Matemática, como também em Programas de Pós-graduação em Educação Matemática, projetos de pesquisa e extensão, publicações em livros e periódicos, entre outras realizações.

A Resolução de Problemas é um dos caminhos destacados pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, 1998) para fazer Matemática em sala de aula. O documento destaca uma proposta resumida nos seguintes princípios:

- A atividade matemática deve utilizar a situação-problema como o ponto de partida, não como definição;
- Um problema não pode ser incorporado em sala de aula de forma mecânica, ele deve instigar o aluno a compreender o enunciado da questão e a estruturar a situação que lhe é apresentada;
- Aproximações sucessivas ao conceito são construídas para resolver um certo tipo de problema, que, em um outro momento, o aluno utiliza o que aprendeu para resolver outros problemas;
- Ao resolver um problema, o aluno não constrói um único conceito, ele constrói um campo de conceitos que tomam sentido num campo de problemas;
- A Resolução de Problemas não é uma atividade independente, ela é uma orientação para a aprendizagem.

Diante de tais orientações, os PCN (1998) apontam para a problemática existente relativa a problemas que, na maioria das vezes, não tem desempenhado seu papel no ensino, uma vez que as práticas de ensino predominantes consistem em ensinar o conceito, procedimento ou técnica e, em seguida, apresentar um problema para avaliar se os alunos são capazes de empregar o que lhes foi ensinado.

Nesta pesquisa, utilizamos a Resolução de Problemas como metodologia de ensino-aprendizagem. Desse modo, consideramos imprescindível esclarecer nossa ideia de problema e de que forma ele é considerado nesta proposta. A partir das concepções a seguir, elucidaremos nossa compreensão.

De acordo com Van de Walle (2009), "problema" é qualquer tarefa ou atividade para a qual não se tem métodos ou regras prescritas ou memorizadas, nem a percepção de que haja um método específico para chegar à solução correta. Onuchic e Allevato (2011, p. 81) definem "problema" como "tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em fazer". Assim, podemos perceber que o que é um problema para uma pessoa, pode não ser para outra, visto que, para ser problema, deve haver algo novo nele, de modo que seja algo que a pessoa venha a descobrir, e, acima de tudo, deve haver o interesse da pessoa para resolver o problema. Para Serrazina (2017, p. 60) o “problema é uma situação a qual se procura uma solução, não existindo à partida um procedimento que conduza a essa solução, havendo uma fronteira tênue entre problema e tarefa de investigação”.

Nessa perspectiva, Andrade (1998, 2017) entende o Problema como um projeto, uma questão, uma tarefa, uma situação em que: i) o aluno não tem ou não conhece algum processo que lhe permita de imediato encontrar a solução; ii) o aluno deseja resolver, explorar ou realizar algum trabalho efetivo; iii) introduz-se e/ou se leva o aluno à realização de algum trabalho efetivo.

Consideramos, portanto, que, no contexto da Resolução de Problemas, conceitos e habilidades são aprendidos. Assim, é nesse ponto de vista e na perspectiva de Van de Walle (2009), Onuchic e Allevato (2011), Serrazina (2017) e Andrade (1998, 2017) que compreendemos o que é um problema e que elaboramos a sequência de atividades utilizadas na Oficina desenvolvida nesta pesquisa, utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas.

Allevato e Onuchic (2009) destacam que a utilização dessa metodologia em pesquisas com alunos e em atividades de formação de professores tem favorecido significativos avanços na compreensão de conceitos e conteúdos matemáticos e no aprimoramento da prática docente do professor.

Ao adotar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, o GTERP utiliza um roteiro o qual pode ser destinado à orientação de professores para a condução de suas aulas. A saber: 1) Formar grupos; 2) Preparação do problema; 3) Leitura individual; 4) Leitura em conjunto; 5) Resolução do problema; 6) Observar e incentivar; 7) Registro das resoluções na lousa; 8) Plenária; 9) Busca do consenso; 10) Formalização do conteúdo; 11) Proposição de problemas.

O último item do roteiro, a Proposição de problemas, foi adicionado recentemente, no ano de 2015, por Lourdes de la Rosa Onuchic e Norma Suely Gomes Allevato, no VI Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM).

Vale ressaltar que este roteiro não é um caminho único para se trabalhar a Resolução de Problemas, pois não há forma fixa ou receita para utilização de qualquer metodologia de ensino, uma vez que o público-alvo se diferencia, pois, cada turma, em particular, cada aluno, tem a sua subjetividade. Contudo, o modelo das autoras pode servir aos professores de Matemática como orientação para ensinar Matemática através da Resolução de Problemas.

Nos últimos anos, Andrade (2017) tem dado forte atenção ao trabalho com Proposição de Problemas, utilizando a expressão Exploração, Resolução e Proposição de Problemas, ou somente Exploração de Problemas, por compreender que a Exploração envolve tanto a Proposição, quando a Resolução de Problemas. O autor destaca que a Exploração de Problemas não tem o propósito de contrapor a Resolução de problemas, e justifica sua proposta, afirmando que, em muitas abordagens, a utilização da Resolução de Problemas limita-se apenas à busca da solução do problema, sem ir além do problema inicialmente dado. Já a proposta de Exploração de Problemas busca a solução, bem como abrange outros pontos.

Nesse sentido, Andrade (2017) esclarece que, em sua proposta, seu interesse principal está centrado no desencadeamento da realização de algum trabalho efetivo que, a partir da mediação-refutação do professor e dos próprios alunos, possa se chegar à solução e muito além dela. Assim, esta compreensão de problema se mostra como algo que envolve não somente a resolução, mas a sua exploração em múltiplos contextos.

Andrade (2017) explica ainda como o problema é trabalhado na perspectiva da Exploração:

> Inicialmente, é dado ou proposto um problema ou situação-problema, que pode partir tanto do professor como dos alunos, em que os alunos realizaram um trabalho sobre ele e, juntos, professor e alunos, discutem o trabalho desenvolvido num processo de reflexões e sínteses. Chegando assim, possivelmente, à solução do problema, a novas reflexões e novas sínteses. Nesse processo, o trabalho da exploração de problemas é inacabado, podendo ir além da busca da solução do problema e refere-se a tudo que se faz nele a partir do movimento de P-T-R-S (Problema – Trabalho – Reflexões e Sínteses). (ANDRADE, 2017, p. 365-366).

Vale salientar que esta proposta de Exploração, Resolução e Proposição de Problemas precisa ser entendida como uma proposta aberta, embora não solta, para que, dessa forma, seja possível compreender todos os aspectos que configuram o cotidiano da sala de aula.

A Proposição de Problemas é um tema emergente na Educação Matemática que vem ganhando nos últimos anos vasta proporção em termos de pesquisas e práticas educativas, tendo destaque em eventos e publicações internacionais e também estado presente no currículo educacional de muitos países. Ela constitui o 17° *Topic Study Group - TSG* (Tópico Grupo de Estudos) do 14° *International Congress on Mathematical Education - ICME* (Congresso Internacional de Educação Matemática) que será realizado em Shanghai – China, no ano 2020.

De acordo com Silver et al. (2019), há uma preocupação com a Resolução de Problemas e Proposição de Problemas em relação ao ensino e aprendizagem de matemática. A Resolução de Problemas tem sido foco de investigações em Educação Matemática por mais de 70 anos, por comparação, a Proposição de Problemas é um campo mais jovem de investigação em Educação Matemática. Assim, destaca que a justaposição desses dois tópicos no TSG mescla um campo maduro de pesquisa com um mais emergente, reconhecendo nisso que ambos são de grande interesse para as comunidades de pesquisa e prática da Educação Matemática neste momento.

As pesquisas em Resolução de Problemas têm aumentado e trazido novas perspectivas para o ensino da Matemática, a exemplo da utilização da Resolução de Problemas como metodologia no Ensino Superior, como mencionam Ferreira, Silva e Martins (2017). Essa utilização possibilita ensinar um conceito novo ou iniciar conteúdos e procedimentos de disciplinas de Matemática de um curso superior. No entanto, as pesquisas que apresentam essa proposta ainda são recentes, havendo poucos trabalhos nessa perspectiva. Os estudos mais frequentes desenvolvidos na Licenciatura em Matemática utilizam conteúdo da Educação Básica.

Contudo, embora os conceitos utilizados nas pesquisas na Licenciatura sejam da Educação básica, Ferreira, Silva e Martins (2017) destacam que essa abordagem proporciona um caminho viável para a criação de novas perspectivas, novas possibilidades em Educação Matemática, priorizando o aluno como protagonista de seu aprendizado.

Diante dos estudos e investigações desenvolvidos pelo GTERP, que têm considerado a Resolução de Problemas como metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática, Onuchic e Allevato (2011) destacam que, dado seu alcance ao trabalho de alunos, professores, ensino, aprendizagem, avaliação, trabalho cooperativo e colaborativo, trabalho do professor em sala de aula e reflexão na ação e sobre a ação, esta forma de trabalho vai além desta concepção. Como discutido por Leal Junior (2018), a Resolução de Problemas é considerada, atualmente, como uma forma de Filosofia de Educação Matemática, sendo esta a perspectiva mais atual de Resolução de Problemas no campo de pesquisa em Educação Matemática.

3 DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA

Neste capítulo, discorremos sobre a forma como esta pesquisa foi desenvolvida. Assim, apresentamos, inicialmente, aspectos relacionados à Metodologia de Pesquisa Qualitativa (BOGDAN; BICKLEN, 1994; YIIN, 2016), na modalidade de Pesquisa Pedagógica (LANKSHEAR; KNOBEL, 2008), pontuando em quais momentos nossa pesquisa corresponde à metodologia e modalidade citada e justificando os motivos para esta escolha. Em seguida, trazemos o detalhamento da pesquisa, apontando as etapas, caracterizando os sujeitos da pesquisa e fornecendo informações sobre o instrumento de levantamento de dados.

3.1 Metodologia da Pesquisa

Para a realização desta pesquisa científica, optamos por um estudo qualitativo, pois compreendemos que este tipo de estudo pode proporcionar maiores possibilidades para a compreensão do fenômeno de interesse.

Como destacado por Yiin (2016), a Pesquisa Qualitativa tem uma amplitude que abrange um mosaico de orientações, bem como de escolhas metodológicas. Diante disso, dentro da Pesquisa Qualitativa, optamos pela utilização da modalidade de Pesquisa Pedagógica (LANKSHEAR; KNOBEL, 2008). Esta escolha foi realizada mediante os problemas evidenciados na literatura e identificados no âmbito de trabalho da professora-pesquisadora.

Para melhor entendimento, apresentamos, a seguir, algumas considerações que justificam a caracterização referida, expondo, inicialmente, aspectos referentes à metodologia de Pesquisa Qualitativa e, em seguida, à modalidade de Pesquisa Pedagógica.

Nossa compreensão sobre Pesquisa Qualitativa é fundamentada nos estudos de Bogdan e Biklen (1994) e Yiin (2016), no sentido de que os autores não apresentam uma definição singular de Pesquisa Qualitativa, mas apontam algumas características a serem consideradas no âmbito desta metodologia.

De acordo com Bogdan e Biklen (1994), a Pesquisa Qualitativa tem as seguintes características: i) a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal; ii) a investigação qualitativa é descritiva; iii) o processo é tão importante quanto os resultados ou produtos; iv) os dados são analisados de maneira indutiva e v) o significado é de importância essencial na abordagem qualitativa.

Para Yiin (2016), esse tipo de pesquisa envolve as seguintes particularidades: i) estudar o significado da vida das pessoas, nas condições da vida real; ii) representar as opiniões e perspectivas das pessoas de um estudo; iii) abranger as condições contextuais em que as pessoas vivem; iv) contribuir com revelações sobre conceitos existentes ou emergentes que podem ajudar a explicar o comportamento social humano; v) esforçar-se por usar múltiplas fontes de evidência em vez de se basear em uma única fonte.

Como mencionado, não temos uma definição única para a Pesquisa Qualitativa, mas sim alguns aspectos que ajudam a caracterizá-la. Podemos perceber que as características citadas pelos autores são semelhantes e se complementam. Nesse sentido, destacamos, a seguir, alguns pontos de nossa pesquisa que acreditamos corresponder aos aspectos citados:

- O ambiente natural desta pesquisa foi uma turma que cursou a disciplina “Ensino da Matemática através da Resolução de Problemas”, em que a professora da turma era a própria pesquisadora, responsável pela elaboração do material para levantamento de dados, como também pela aplicação, observação, descrição e análise, sendo esta disciplina o instrumento principal da pesquisa.
- Os dados foram levantados por meio de uma Oficina desenvolvida na disciplina, através dos registros escritos dos alunos na resolução das atividades, diálogos registrados durante as aulas e seminários apresentados pelos alunos.
- O propósito das atividades desenvolvidas não era centrado no resultado obtido, mas no percurso de cada aluno durante a resolução do problema.
- A partir das discussões e ao analisarmos o desenvolvimento dos alunos no decorrer da Oficina, unimos pressupostos relevantes para a discussão acerca da utilização das Representações Múltiplas de Álgebra no ensino de Sistemas Lineares, como também sobre as contribuições da metodologia Resolução de Problemas no estudo deste conteúdo.
- Ao considerar que os alunos da licenciatura já haviam tido contato com o conteúdo abordado, o diálogo durante a Oficina buscou identificar as

> concepções que os alunos construíram ao longo de sua vida acadêmica, proporcionando a ampliação delas a partir de uma aprendizagem com mais compreensão e, até mesmo, contribuir no desenvolvimento de novos conceitos.

Diante disso, caracterizamos nossa escolha metodológica como uma Pesquisa Pedagógica, por corroborarmos das ideias de Lankshear e Knobel (2008), que a descreve como uma pesquisa conduzida com base na própria prática profissional do professor, em que os propósitos da pesquisa são frutos de questões, problemas existentes ou percebidos, ou das preocupações dos próprios professores.

Outro ponto importante que destacamos diz respeito aos pesquisadores pedagógicos, identificados por Lankshear e Knobel (2008) como os profissionais da sala de aula, em todos os níveis de escolaridade, que estejam envolvidos em investigação que seja realizada com o intuito de aprimorar suas vocações como educadores profissionais.

Nesse sentido, ressaltamos que, ao realizar esta Pesquisa Qualitativa na modalidade de Pesquisa Pedagógica, não levantamos apenas dados, também buscamos aprimorar nossa prática pedagógica e, sobretudo, contribuir para a formação desses futuros professores de Matemática, levando novas ideias de Álgebra e a oportunidade de aprofundar seus conhecimentos quanto ao Ensino da Matemática através da Resolução, Exploração e Proposição de Problemas.

3.2 Descrição do desenvolvimento da Pesquisa

A pesquisa foi dividida em quatro fases, as quais aconteceram em momentos distintos, mas não necessariamente de forma cronológica. A seguir, descrevemos as fases e as ações que foram desenvolvidas em cada uma delas.

A primeira fase foi dedicada à revisão de literatura, para que pudéssemos situar nossa questão de pesquisa e os nossos objetivos. Em seguida, realizou-se o levantamento bibliográfico, com o intuito de obtermos um aprofundamento na elaboração da proposta e discussão dos dados.

A segunda fase da pesquisa consistiu na elaboração do instrumento de pesquisa – Oficina, como também em sua avaliação, uma vez que grande parte das atividades desenvolvidas na Oficina foi aplicada no Grupo de Estudos e Pesquisas de Educação e Pós-Modernidade (GEPEP), o qual é composto por alunos e ex-alunos do Programa de Pós-Graduação de Ensino de Ciências e Educação Matemática (PPGECEM) da UEPB, coordenado pelo Professor Dr. Silvanio de Andrade. A partir das discussões realizadas no grupo acerca das atividades, as mesmas foram adaptadas e reorganizadas pela pesquisadora.

A terceira fase constituiu-se no levantamento de dados, a qual foi realizada por meio de uma Oficina composta por 10 encontros. Cada encontro tinha a duração de 2 horas (duas aulas de 1h), totalizando 20 aulas, realizadas durante a disciplina "Ensino da Matemática através da Resolução de Problemas", composta por alunos do 5º período do curso de Licenciatura em Matemática de uma Universidade Federal localizada na Paraíba.

Por fim, a quarta fase constituiu-se na descrição e na análise dos dados, a qual teve início concomitante à terceira fase, pois à medida que as atividades eram aplicadas, era realizada a descrição e feitas às análises iniciais dos dados.

A seguir, apresentamos caracterizações dos sujeitos que compõe esta pesquisa, bem como o detalhamento do levantamento de dados.

3.3 Caracterização dos sujeitos

Os alunos participantes da pesquisa estavam matriculados regularmente na disciplina "Ensino da Matemática através da Resolução de Problemas", de um curso de Licenciatura em Matemática (diurno) de uma Universidade Federal localizada na Paraíba, em que a Professora titular da disciplina era a própria Pesquisadora.

Todas as aulas aconteceram no Laboratório de Matemática, local espaçoso, arejado, contendo datashow, computador, lousa, três mesas retangulares grandes, o que facilitou o desenvolvimento das atividades em grupo e propiciou maior interação da turma.

A disciplina é ofertada para os alunos integrantes do 5º período do curso de Licenciatura em Matemática diurno e 6º período para os alunos do curso noturno, tendo uma carga horária total de 60h. Os pré-requisitos para matricular-se nesta disciplina são os componentes curriculares de Metodologia do Ensino da Matemática I e II. É importante ressaltar também que a disciplina "Ensino da Matemática através da Resolução de Problemas" é pré-requisito para cursar o Estágio Supervisionado I.

A turma foi composta por treze alunos, sendo oito mulheres e cinco homens, matriculados regularmente no curso diurno. Mesmo ainda na graduação, alguns alunos já atuam ou atuaram como professores na Educação Básica, outros tiveram a experiência docente por meio do Programa de Iniciação à Docência (PIBID) e Monitoria de disciplinas na universidade. Somente três dos alunos da turma mencionada nunca tiveram experiência de docência.

No momento em que foi dado início à pesquisa na referida turma, as aulas do período letivo já haviam começado. Assim, o primeiro encontro da Oficina foi realizado no 5º encontro da disciplina. Por esse motivo, os alunos já haviam realizado estudo sobre marcos importantes da Resolução de Problemas no ensino da Matemática, como, por exemplo, a influência de Polya nas investigações em Resolução de Problemas enquanto campo de pesquisa em Educação Matemática e os modos de conceber a Resolução de Problemas nas aulas de Matemática apresentados por Schroreder e Lester (1989).

Para a realização da pesquisa na referida turma, a escolha teve como base os seguintes fatores:

i. Ao estarem cursando a disciplina, os alunos já haviam integralizado parte da Licenciatura em Matemática e, dessa forma, esperava-se que tivessem maturidade para a exploração dos conceitos abordados na Oficina;
ii. A integralização da disciplina compõe um dos pré-requisitos para o Estágio Supervisionado. Dessa forma, além de alcançarmos os objetivos de nossa pesquisa, podemos contribuir na formação dos estudantes, proporcionando reflexões quanto a novas ideias de Sistemas Lineares;
iii. A forma como a Oficina foi estruturada é pertinente aos objetivos da disciplina. Assim, ao mesmo tempo em que os alunos contribuem com o desenvolvimento da pesquisa, eles reconhecem os aspectos importantes referentes à utilização da metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas.

A seção seguinte busca descrever as ações desenvolvidas para levantamento e registro de dados.

3.4 Levantamento de dados

Como instrumento de levantamento de dados, utilizamos uma Oficina sobre o conteúdo Sistemas Lineares, tendo como objetivo promover o estudo de Sistemas

Lineares, aliado às Múltiplas Representações de Álgebra, através da Resolução, Exploração e Proposição de Problemas.

Durante a Oficina, utilizamos como registro dos dados as notas de aula da professora-pesquisadora, atividades impressas, registros dos alunos na resolução das atividades, imagens fotográficas de resoluções na lousa e outras produções dos alunos.

Para auxiliar na descrição das atividades e melhor compreensão do raciocínio dos alunos, também utilizamos, como registro, as suas falas, uma vez que, no decorrer das aulas, a professora-pesquisadora buscou anotar diálogos e comentários pertinentes, sempre procurando transcrevê-los ao final das aulas. Para identificar os alunos e preservar suas identidades, os nomeamos em ordem alfabética, como disposto no diário de classe, por: $A1, A2, A3, \ldots, A13$.

Optamos por não utilizar recursos de gravação de voz e filmagem por prezarmos pela espontaneidade dos alunos, de modo que agissem da forma que estavam adaptados. E pelo fato de a Oficina ter sido desenvolvida no âmbito de trabalho da Professora-Pesquisadora, procuramos atuar de maneira que os alunos não se sentissem inibidos e não viessem a ter o desempenho na disciplina comprometido.

A Oficina foi composta por 10 encontros de 2h, cada encontro durava duas aulas de 1h, totalizando 20 aulas, as quais foram divididas em dois momentos: i) atividades elaboradas e mediadas pela professora-pesquisadora (6 encontros); ii) atividades elaboradas e apresentadas pelos alunos, por meio de seminários (4 encontros).

As atividades realizadas no primeiro momento foram fundamentadas nas Representações Múltiplas da Álgebra apresentadas por Friedlander e Tabach (2001) e na perspectiva de Ensino-Aprendizagem da Matemática através da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas (ANDRADE, 1998, 2017).

O ciclo de Seminários, que ocorreu no 2º momento, foi organizado e apresentado pelos alunos. Nessa etapa, a turma dividiu-se em quatro grupos e cada grupo ficou responsável por organizar uma aula, de carga horária 2h, com o nível de escolaridade à escolha do grupo, tendo como exigência apenas o tema “Ensino de Sistemas Lineares através da Resolução de Problemas”.

Estes seminários foram idealizados como uma forma de avaliação, para que a partir deles pudéssemos acompanhar o desenvolvimento dos alunos, aprimorar o ensino e torná-los mais responsáveis pelo seu processo de construção de conhecimento.

No quadro abaixo, apresentamos um roteiro com uma síntese dos tópicos abordados na Oficina desenvolvida, expondo o conteúdo estudado e as ideias matemáticas trabalhadas.

Quadro 6 – Desenvolvimento da Oficina

Momento	Atividade	Conteúdo	Ideias matemáticas trabalhadas
1º	1. Calculando as calorias	Equações lineares de duas variáveis	• Natureza da solução de equações lineares.
	2. A Balança em equilíbrio	Introdução aos Sistemas Lineares	• A linguagem algébrica dos Sistemas Lineares.
	3. Escalando a montanha	Os Sistemas lineares 2×2	• A modelagem de Problemas via Sistemas Lineares.
	4. A venda de limões e maçãs	Solução de Sistemas Lineares $2x2$	• Métodos de resolução de Sistemas Lineares 2x2.
	5. A venda de figurinhas	Discussão de Sistemas Lineares	• Discussão e classificação de Sistemas Lineares.
	6. Propondo problemas	Interpretação de Sistemas Lineares	• Transição entre as representações múltiplas de Sistemas Lineares.
2º	Seminários	Apresentação dos participantes	• Ensino de Sistemas Lineares através da Resolução de Problemas.

Fonte: Organizado pela pesquisadora.

A Oficina será melhor detalhada no próximo capítulo, no qual apresentaremos os objetivos traçados, traremos as descrições das atividades, os procedimentos metodológicos e a análise de dados.

4 DESCRIÇÃO E ANÁLISES DOS DADOS

Neste capítulo, apresentamos a descrição das atividades desenvolvidas, bem como a análise e discussões destas. Optamos por fazê-las conjuntamente, por percebermos que, em alguns momentos, sua separação não propiciaria ao leitor clareza suficiente das vivências desse momento tão importante de nossa pesquisa.

4.1 Descrição e análise dos encontros: algumas considerações

Na descrição desses encontros, apresentaremos, em determinados momentos, alguns diálogos, isto é, a fala dos alunos e da Professora-Pesquisadora. Para uma melhor organização e preservação da identidade dos alunos, adotamos as seguintes convenções:

- $A1, A2, A3, \dots, A13$ será utilizado conforme a ordem do diário de classe para fazer referência a cada aluno que participou do diálogo.
- P será utilizado para fazer referência à Professora-Pesquisadora.
- $PA1, PA2, PA3, \dots, PA13$ será utilizado nos diálogos dos seminários para diferenciar os alunos que estavam mediando a aula dos alunos da turma.
- Usaremos a palavra “Comentarista” quando fizermos algum comentário sobre a aula descrita.
- Usaremos a palavra “Alunos” quando nos referirmos à fala de mais de um aluno, não necessariamente todos.
- Usaremos “(Silêncio)” para indicar os momentos em que a turma não interagiu.

Apresentaremos, a seguir, as descrições e análises dos 10 encontros realizados no desenvolvimento da Oficina, sendo do 1º ao 6º referentes às atividades desenvolvidas e mediadas pela Professora-Pesquisadora e do 7º ao 10º referentes aos seminários organizados e apresentados pelos alunos.

4.1.1 1º Encontro – Introduzindo Sistemas Lineares

No primeiro encontro da Oficina, antes de iniciar a primeira atividade, a Professora-Pesquisadora fez uma breve roda de diálogo e questionou os alunos sobre quais eram suas concepções de “Problemas”.

Utilizando a nuvem de palavras, podemos representar as respostas dos alunos da seguinte forma:

Figura 1 - Concepções dos alunos sobre Problema

Fonte: Organizada pela pesquisadora.

Desse modo, sintetizamos as concepções dos alunos para “Problema” como sendo uma situação que ainda não se conhece a solução e precisa ser resolvida, ou seja, que perpassará um caminho de reflexão para chegar à solução. Assim, podemos afirmar que as compreensões dos alunos sobre o que é um problema se assemelham às concepções defendidas neste trabalho, as quais são apresentadas por Van de Walle (2009), Onuchic e Allevato (2011), Serrazina (2017), Andrade (1998, 2017) e Andrade e Onuchic (2017).

Durante a conversa, a professora informou que a turma estaria participando de sua pesquisa de mestrado e esta seria desenvolvida em uma perspectiva coincidente com os objetivos da disciplina “Ensino da Matemática através da Resolução de Problemas”, não ocasionando, assim, prejuízos aos participantes.

Vale salientar que a professora não mencionou nada sobre o conteúdo a ser trabalhado, nem o objetivo da Oficina, para que, dessa forma, os alunos ficassem livres com relação à escolha do conteúdo matemático a ser utilizado na resolução dos problemas, não se prendendo aos Sistemas Lineares.

Por fim, podemos afirmar que, por parte dos alunos, foi unânime a aceitação da participação na pesquisa. Eles não demonstraram, em nenhum momento, desinteresse ou descumprimento das atividades. Dessa forma, com a presença de todos os alunos, deu-se início à Atividade 1. A professora entregou, inicialmente, a cada aluno uma cópia impressa da primeira parte do problema. Em seguida, foi realizada a leitura e solicitada à resolução com os registros escritos.

Atividade 1 – Calculando as calorias[4]

Objetivos:

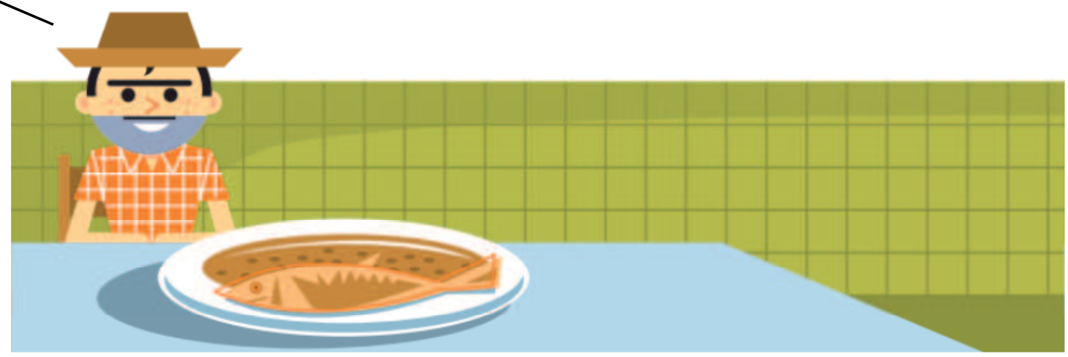
- Representar problema por meio de equação linear com duas incógnitas.
- Explorar o conceito de soluções de uma equação linear com duas incógnitas.
- Introduzir conversa sobre Sistemas Lineares.

Primeira parte do problema

Calculando as calorias

Você sabia?

Quando as pessoas andam, trabalham ou fazem esporte, o corpo gasta energia e necessita de calorias. Dependendo de uma série de fatores, um homem necessita de 1800 a 3200 quilocalorias por dia.



Rui gosta de feijão e de peixe e tem facilidade para obter esses alimentos. Ele procura ingerir 1880 Kcal por dia, tomando como base os dois alimentos. Olhando em uma tabela, verificou que:

• 100 g de feijão fornecem 330 Kcal.
• 100 g de peixe fornecem 70 Kcal.

Ele concluiu que:

• 1 grama de feijão fornece 3,3 Kcal.
• 1 grama de peixe fornece 0,7 Kcal.

Para ter o total de 1880 Kcal, o que Rui pode fazer?

Comentarista: Nesta primeira parte, esperávamos que os alunos traduzissem o problema da linguagem verbal para a linguagem algébrica, percebendo que existem inúmeras soluções para a composição desta refeição, podendo, dessa forma, representar a situação por meio de uma equação linear com duas variáveis e assim poderíamos discutir a natureza de sua solução.

[4] Retirado e adaptado de Coleção Gestar (2008). Manteve-se a imagem.

No entanto, essa não foi a solução imediata dos alunos, o que é comum ocorrer na Resolução de Problemas, como destacado por Andrade (2017):

> Nessa ideia aqui de problema, não estamos interessados, em primeira instância, que o aluno resolva a tarefa ou a questão proposta, mas que a situação ou tarefa proposta possa desencadear no aluno a realização de algum trabalho efetivo, que num processo de reflexão e síntese, com a mediação-refutação do professor e/ou dos próprios alunos, possa então se chegar à resolução e solução da tarefa proposta e ir inclusive além dela. (ANDRADE, 2017, p. 365)

Pelo diálogo abaixo, podemos perceber a presença dos aspectos citados:

A4: *Professora, pode dar valor aproximado? Porque se não puder vai demorar muito para chegar a exatamente 1880 Kcal.*

P: *Qual o valor aproximado que você encontrou? E de que forma?*

A4: *Dividi 1880 por 2, para que ele comesse aproximadamente a mesma quantidade de Kcal de feijão e de peixe. Então percebi que ele comendo 285 g de feijão, obteria 940,5 Kcal, fazendo uma regra de três com os valores de Kcal de feijão e de peixe, obtive que ele comeria 1342 g de peixe, que equivale a 939,4 Kcal, obtendo um total de 1879,9 Kcal.*

P: *Boa estratégia! Mas, o problema pede uma quantidade de gramas de feijão e gramas de peixe, que forneçam exatamente 1880 Kcal.*

A4: *Então eu vou pensar em outra estratégia.*

Comentarista: Pela fala inicial de A4, quando mencionou que “se não puder ser um valor aproximado vai demorar muito”, percebemos que ele ainda não havia visualizado que, utilizando uma equação linear de duas variáveis, ele poderia encontrar esse valor, ou o conjunto de valores.

Diante da explicitação do raciocínio de A4, o aluno ao lado, A8, declarou ter tido a mesma ideia, com uma pequena mudança no momento das aproximações, e explicou:

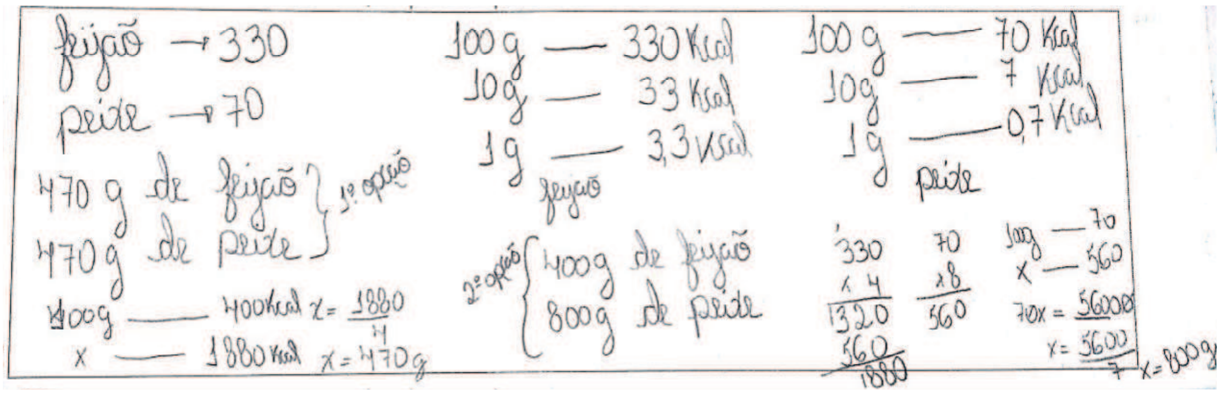
A8: *Eu dividi 1880 por 4, para ter um valor base. Em seguida, fui atribuindo valores. O valor mais próximo encontrado foi 480 g de feijão e 423 g de peixe, totalizando, assim, as 1880,1Kcal.*

__P:__ Um valor também muito próximo! Mas qual seria a quantidade de gramas de feijão e peixe para obter exatamente 1880 Kcal?

Outros alunos também encontraram valores aproximados e levantaram questionamentos semelhantes aos anteriores. Com o passar de alguns minutos, A3 menciona ter terminado. A professora verifica e aguarda mais alguns minutos para que a turma responda. Ao perceber que somente A3 havia encontrado a resposta que satisfazia o problema, a professora o convida a expor sua solução na lousa e explicar para a turma.

__A3:__ Bem… eu fiz uma relação entre g e kcal para 100, 10 e 1. Em seguida, fui fazendo as somas, multiplicações, sempre obedecendo os valores correspondentes a 100, 10 e 1, até que encontrasse 1880 kcal.
__P:__ Qual o valor encontrado?
__A3:__ Na verdade, foram os valores, percebi que tinha 2 opções de cardápio. Ele poderia comer 470 g de feijão e 470 g de peixe, ou comer 400 g de feijão e 800 g de peixe.

Figura 2 - Registro da resolução do A3



Fonte: Registrado pela pesquisadora.

Nesse momento, a professora convidou a turma para calcular se os valores encontrados pelo colega satisfaziam o problema. Ao verificarem que sim, a professora continuou a mediação:

__P:__ Então obtivemos duas opções de cardápio para o problema, alguém encontrou outra opção?
(Silêncio)

***P:** Teriam outras opções?*
(Silêncio)

Como destacado por Friedlander e Tabach (2001), a utilização de valores numéricos é importante para uma primeira compreensão do problema e para a investigação de casos particulares, oferecendo uma ponte conveniente em relação à Álgebra. Nesse sentido, a professora continuou:

***P:** Vamos verificar novamente os valores encontrados:*

$$3{,}3\ kcal/g.470g\ feijão + 0{,}7\ kcal/g\ .470g\ peixe\ =\ 1880\ kcal$$
$$3{,}3\ kcal/g.400g\ feijão\ +\ 0{,}7\ kcal/g\ .800g\ peixe\ =\ 1880\ kcal$$

Comentarista: Há, nesse caso, um parâmetro livre, e para esse vão-se atribuindo valores e o outro será obtido dependendo dele. Isto é, se atribuirmos valores para x, o valor de y dependerá deste valor.

Nessa abordagem, a professora foi questionando os alunos sobre outros valores para feijão e peixe que totalizassem 1880 kcal e fez o registro na lousa, como podemos ver na tabela a seguir:

Tabela 1: Composição da refeição (peixe e arroz)

Feijão (g) x	**Feijão (Kcal)** $\frac{3,3Kcal}{g}.x$	**Composição da refeição** $1880Kcal - \frac{3,3Kcal}{g}.x = 0,7y$	**Peixe (Kcal)** $0,7y$	**Peixe (g)** y
$400\ g$	$1320\ Kcal$	$1880Kcal - 1320\ Kcal = 560\ Kcal$	$560\ Kcal$	$800\ g$
$410\ g$	$1353\ Kcal$	$1880Kcal - 1353\ Kcal = 527\ Kcal$	$527\ Kcal$	$752{,}8571\ g$
$420\ g$	$1386\ Kcal$	$1880Kcal - 1386\ Kcal = 494\ Kcal$	$494\ Kcal$	$705{,}7143\ g$
$430\ g$	$1419\ Kcal$	$1880Kcal - 1419\ Kcal = 461\ Kcal$	$461\ Kcal$	$658{,}5714\ g$
$440\ g$	$1452\ Kcal$	$1880Kcal - 1452\ Kcal = 428\ Kcal$	$428\ Kcal$	$611{,}4286\ g$
$450\ g$	$1485\ Kcal$	$1880Kcal - 1485\ Kcal = 395\ Kcal$	$395\ Kcal$	$564{,}2857\ g$
$460\ g$	$1518\ Kcal$	$1880Kcal - 1518\ Kcal = 362\ Kcal$	$362\ Kcal$	$517{,}1429\ g$
$470\ g$	$1551\ Kcal$	$1880Kcal - 1551\ Kcal = 329\ Kcal$	$329\ Kcal$	$470\ g$

Fonte: Organizada pela pesquisadora.

A primeira coluna da tabela foi destinada à variável x, que se referia à quantidade de gramas de feijão. Consideramos o x como o parâmetro livre, assim, mediante a resolução de A3, os alunos foram atribuindo os valores. Na segunda coluna, representamos por $\frac{\mathbf{3{,}3Kcal}}{\boldsymbol{g}}.\boldsymbol{x}$ o valor de Kcal obtidos pelas gramas determinadas de feijão.

Tendo a quantidade de Kcal de feijão e sabendo a quantidade de Kcal que a refeição deveria totalizar, realizamos a subtração desses dois valores na coluna 3 e conhecemos a quantidade de Kcal que ainda faltavam para completar a refeição. Essa quantidade foi representada na quarta coluna por 0,7y, visto que as Kcal que faltavam seriam completadas por peixe, que fornece a quantidade de Kcal citadas.

Por fim, foi representado na quinta coluna o valor de y, isto é, a quantidade de gramas de peixe necessárias a cada refeição. Para a obtenção desse valor, foi realizada a divisão do valor encontrado na coluna anterior por 0,7, que é a quantidade de Kcal fornecida por cada grama de peixe ingerida.

Após reunir diversas possibilidades para a solução do problema, como apresentado na tabela anterior, a professora introduziu o conceito de equações lineares com duas variáveis, como podemos ver no diálogo a seguir:

P: *Quais conceitos matemáticos foram utilizados no problema?*

Alunos: *As quatro operações e equação.*

P: *O que é uma equação?*

A2: *É uma igualdade em que existe um valor desconhecido que é representado por uma incógnita.*

P: *No caso do nosso problema, qual a equação que foi utilizada?*

A1: *Pela equação* $3{,}3x + 0{,}7y = 1880$*, onde x corresponde ao feijão e y ao peixe.*

Nesse momento, alguns alunos mencionaram que também haviam encontrado essa equação, mas que não conseguiram associá-la à resolução do problema, pois não tiveram a percepção de que o problema poderia ter um conjunto de soluções. Por outro lado, afirmaram que, ao ver as diversas soluções do problema, não compreenderam de imediato que poderia ser representado por uma equação de duas incógnitas, sendo isso percebido apenas no momento em que a professora colocou os casos particulares de modo organizado na lousa.

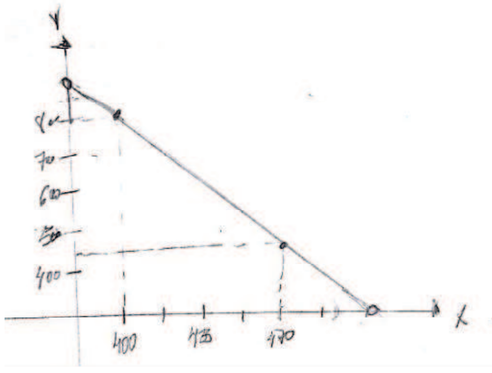
A professora considerou as falas dos alunos, explanou sobre equação linear e, em seguida, formalizou o conceito e a natureza da solução: denomina-se equação linear de n variáveis a toda equação que pode ser escrita na forma: $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b,$ em que $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ são as incógnitas, $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ são números reais chamados coeficientes das incógnitas e $\boldsymbol{b}$ é o termo independente. Assim, dada a equação linear $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b$, dizemos que a ênupla ordenada de números reais $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ é solução da equação se, e somente se, $a_1\boldsymbol{a_1} + a_2\boldsymbol{a_2} + a_3\boldsymbol{a_3} + \ldots + a_n\boldsymbol{a_n} = b$.

A professora mencionou sobre as inúmeras formas de composição do cardápio e sobre a possibilidade de esboçá-las através de um gráfico, levando a ideia de que todas essas composições poderiam ser visualizadas por meio de uma reta. Os alunos acenaram que concordariam e reagiram com semblante admirado, pois não haviam pensado nessa possibilidade.

Então, a professora questionou aos alunos como poderia representar as composições do cardápio graficamente. Diante das soluções encontradas anteriormente, os alunos mencionaram que poderiam elencar dois valores dos já encontrados e traçar a reta, uma vez que por dois pontos passa uma única reta. Os alunos mencionaram que a melhor escolha para representar no gráfico seriam os pontos: (470, 470) e (400, 800), pois se trata de números naturais, o que facilita a precisão do gráfico.

Das representações gráficas da turma, nos chamou atenção a representação do aluno A1, que está ilustrada logo a seguir:

Figura 3 - Registro da resolução de A1.



Fonte: Registrado pela pesquisadora.

Comentarista: Essa representação nos chamou atenção porque ele restringiu a solução ao primeiro quadrante, traçando, assim, um segmento de reta, enquanto os demais alunos traçaram uma reta, dando a ideia de infinita.

Ao observar a representação de A1, a professora solicitou que ele explicasse o que tinha feito.

> ***A1****: Primeiramente liguei os pontos (470, 470) e (400, 800), logo após, tracei a reta. Foi quando percebi que se a reta cortasse o eixo x e o eixo y e fosse para o 2º e 4º quadrante, iria assumir valores negativos, que não fazem parte da solução do problema, já que estávamos tratando de gramas, por isso só vai até o eixo.*
>
> ***P****: Exatamente! Mais alguém havia percebido isso?*
>
> ***Alunos****: Não...*
>
> ***P****: Teria mais alguma restrição nessa representação?*

Comentarista: O último questionamento feito pela professora teve a intenção de analisar se os alunos perceberam que, ao tocar o eixo, o segmento seria representado por uma bola aberta, pois x e y não podem assumir o valor zero, já que é necessário haver feijão e peixe na refeição.

De início, os alunos responderam que não teria outra restrição, entretanto, ao refletirem um pouco mais, mencionaram sobre a necessidade dos dois alimentos na refeição, assim nenhum deles poderia assumir o valor zero.

Vale salientar que essa discussão sobre a restrição da representação gráfica não estava prevista em nosso planejamento, com isso, destacamos a importância do professor estar atento às oportunidades de aprendizado durante os diálogos, como também estar preparado para a mediação em sala de aula, não se limitando somente ao que está no seu planejamento.

Finalizada a discussão sobre a representação gráfica, a professora entregou a segunda parte do problema para a turma e realizou a leitura:

Segunda parte do problema

Ao tentar resolver a situação, Rui descobriu que haveria muitas soluções para ela. Conforme comesse um tanto de feijão, ele teria que comer determinada quantidade de peixe para completar as Kcal. Dessa forma, Rui resolveu que comeria de peixe

o dobro da quantidade que comesse de feijão. Nessas condições, quantos gramas de cada Rui deveria comer?

Atenção: *Embora tenhamos encontrado uma forma de obter as quilocalorias diárias necessárias a Rui, essa não é uma boa solução alimentar. Esses dois alimentos não fornecem a porcentagem de gordura necessária em cada refeição.*

Comentarista: Nessa segunda parte, esperávamos que os alunos identificassem a informação dada como uma segunda equação com duas incógnitas que, juntamente com a equação do problema anterior, formaria um Sistema Linear e, dessa forma, introduziríamos a conversa sobre Sistemas Lineares.

No entanto, no momento da plenária, percebemos que os alunos, em sua maioria, responderam ao problema utilizando tentativa e erro e que somente dois alunos (A6 e A8) chegaram ao resultado utilizando o método algébrico, sendo que A8 montou o sistema linear e respondeu pelo método da substituição e A6 não montou o sistema, substituiu, de imediato, $y = 2x$ na primeira equação.

Com o intuito de introduzir a conversa sobre os Sistemas Lineares, a professora levantou os seguintes questionamentos: i) o que diferencia essa segunda parte da anterior? ii) a informação dada na segunda parte facilita ou dificulta a solução do problema? iii) que conteúdo matemático nos auxilia na resolução desse problema?

Para o primeiro questionamento, os alunos mencionaram que, na primeira parte do problema, eles poderiam atribuir quantidades aleatórias para cada opção, já na segunda parte, era preciso obedecer à seguinte condição: comer de peixe o dobro da quantidade de feijão. No segundo questionamento, os alunos responderam que a informação apresentada facilita, pois, levando em consideração que um valor deveria ser o dobro do outro, isso diminui as tentativas na atribuição de valores. O aluno que respondeu utilizando a relação $y = 2x$ mencionou que facilitou bem mais, já que a condição dada possibilitou um caminho eficaz para chegar à solução. No terceiro questionamento, alguns alunos responderam que o conteúdo matemático que auxiliaria a resolução do problema seria Sistemas Lineares.

Ao serem questionados sobre o porquê utilizar Sistemas Lineares, os alunos ficaram em silêncio por um instante e, em seguida, destacaram que não havia uma única equação que satisfizesse todo o problema, desse modo, seria necessário recorrer a um Sistema Linear. Dando continuidade ao diálogo, a professora questionou aos alunos: “O que são Sistemas Lineares”? De modo bastante participativo, eles foram complementando a resposta e formalizaram da seguinte forma: “Chamamos de sistema várias equações ligadas por uma chave e, para resolvê-lo, devemos levar em consideração todas as equações”.

Diante disso, a professora concluiu: um Sistema linear é um conjunto de duas ou mais equações lineares. De forma geral, um sistema linear de m equações e n incógnitas também pode ser chamado de sistema linear m × n (lê-se “m por n”). Um sistema linear $m\,x\,n$ é definido como um conjunto S de m equações e n incógnitas, conseguindo ser representado da seguinte forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Em seguida, a professora retomou o problema, destacando que, na primeira parte, pedia um cardápio formado por feijão e peixe, de modo que totalizassem 1880 Kcal, em seguida, mencionou a condição da segunda parte, em que a quantidade de peixe deveria ser o dobro da quantidade de feijão. Diante disso, apresentou a solução de A6, que considerou a necessidade de encontrar uma quantidade de peixe e de feijão, de modo que satisfizesse, simultaneamente, as duas condições do problema e resolveu a questão utilizando um Sistema Linear.

Posteriormente, ocorreu o que chamamos de Exploração de Problemas, em que foi possível chegar ao que destaca Andrade (2017, p. 365): “à solução do problema, a novos conteúdos, a novos problemas, à realização de novos trabalhos, a novas reflexões e novas sínteses”.

Nessa fase, a professora questionou os alunos sobre a variação desse problema, perguntando quais seriam as outras condições para a criação de um novo cardápio. À medida que se lançava o questionamento, a turma ia respondendo. Dentre os problemas criados e resoluções dadas, podemos destacar os seguintes: i) E se ele comesse o triplo de peixe? R. Considerando o feijão x e o peixe y, representaríamos por y= 3x; ii) E se ele não quisesse comer feijão, apenas peixe? R. Facilitaria ainda mais, pois poderíamos representar por uma equação com apenas uma incógnita: 0,7y = 1880; iii) E se ele resolvesse adicionar legumes ao prato? Bem, aí deveria ter as informações da quantidade de calorias por gramas de legumes, então já representaríamos por uma equação com três variáveis.

No momento da exploração de problemas, pudemos perceber um primeiro avanço, uma vez que os alunos apresentaram um maior domínio na representação algébrica, utilizando esta como uma linguagem matemática para expressar a resolução do problema, não recorrendo imediatamente a tentativa e erro como no início da atividade proposta.

4.1.2 2º Encontro – Transitando entre as representações Múltiplas de Álgebra e resolvendo Sistemas Lineares.

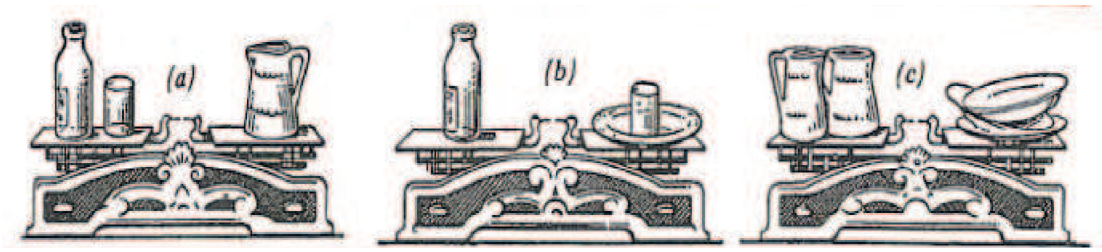
Atividade 2 – A Balança em Equilíbrio[5]

Objetivos:

- Proporcionar a transição entre as representações Múltiplas de Álgebra por meio de Sistemas Lineares.
- Reconhecer as potencialidades dos Sistemas Lineares na Resolução de Problemas.

A Balança em Equilíbrio

Observe a figura a seguir e responda as questões abaixo.



Observação: todos os objetos repetidos têm o mesmo peso.

a) Como você representaria esta situação?
b) Quantos copos têm o peso equivalente ao de uma garrafa?
c) Sabendo que o peso de um prato é 350g, qual o peso dos outros objetos?
d) Quais as outras equivalências que podemos obter?
e) Como encontrar a equivalência do copo e garrafa manipulando apenas os objetos na balança (podendo utilizar garrafas, pratos, jarras e copos

[5]Adaptada de Clube de Matemática da OBMEP. Sala de Problemas. Disponível em: <http://clubes.obmep.org.br/blog/sala-de-problemas/> Acesso em: 23 de mar. de 2018.

auxiliares de mesma medida), de modo que as três balanças permaneçam em equilíbrio?

Neste encontro, faltaram quatro alunos. Com um número menor de apenas nove alunos, foi possível reunir todos ao redor de uma só mesa do laboratório de Matemática, os discentes receberam uma cópia impressa do problema, realizou-se a leitura e foi solicitada a resolução do primeiro item “a”.

Como podemos ver, a atividade apresenta uma imagem de três balanças em equilíbrio, as quais contêm quatro tipos de objetos distribuídos em diferentes quantidades. A balança de dois pratos é um recurso fortemente recomendado para o ensino de equações, uma vez que, por meio do equilíbrio dos pratos, podemos visualizar a definição de equações e inequações, como também possibilita ao aluno a observação de possibilidades e, através das balanças, permite discutir a manipulação de termos, minimizando os efeitos da passagem da linguagem usual para a linguagem algébrica.

Vale ressaltar que, além das possibilidades, esse recurso também apresenta alguns limites, como, por exemplo, a impossibilidade de representar na balança quantidades negativas e o número zero. Porém, como em nossa atividade utilizamos de objetos para a representação de quantidades, esses limites não foram considerados empecilhos.

Os diversos itens da atividade apontam para as diferentes formas de modelar o problema, de modo que não seja repetitivo e favoreça somente algum tipo de pensamento. Nesse sentido, o item “a” da atividade busca identificar as representações múltiplas da álgebra utilizada pelos alunos para expressar situações; o item “b” estimula a resolução do sistema de equações; o item “c” investiga a interpretação do aluno quanto à representação e ao valor encontrado para cada incógnita das equações dos sistemas; o item “d” busca analisar a capacidade de se expressar algebricamente e realizar operações algébricas; o item “e” objetiva explorar aspectos de álgebra e pensamento algébrico na manipulação de objetos concretos.

Os alunos foram informados pela professora que poderiam ficar livres para expressar a situação da maneira que achassem conveniente, como pedido no item “a”. Diante disso, ao ouvir os estudantes ao final da resolução do item “a”, pudemos identificar as seguintes representações:

Quadro 7 – Representações utilizadas pelos alunos

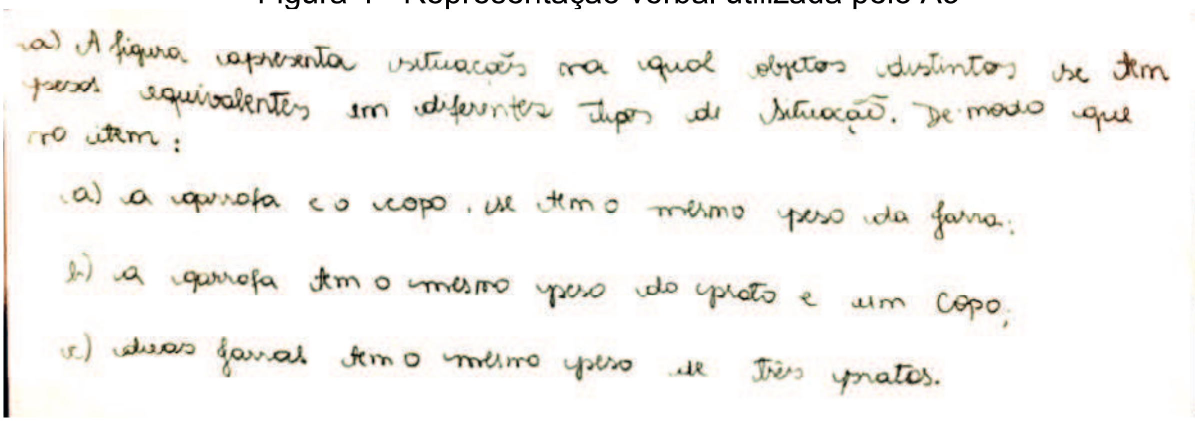
Representação	Quantidade de alunos
Sistema linear	Um
Equações	Três
Verbal	Cinco

Fonte: Organizado pela pesquisadora.

Das representações utilizadas, pudemos perceber que quatro alunos utilizaram a representação algébrica e cinco alunos utilizaram a representação verbal. Dos alunos que representaram algebricamente, somente um aluno utilizou o sistema linear para representar a situação, os demais, representaram uma equação separadamente para cada balança.

Para melhor elucidarmos o quadro acima, trouxemos um registro de cada representação mencionada:

Figura 4 - Representação verbal utilizada pelo A5


a) A figura representa situações na qual objetos distintos se têm pesos equivalentes em diferentes tipos de situação. De modo que no item:

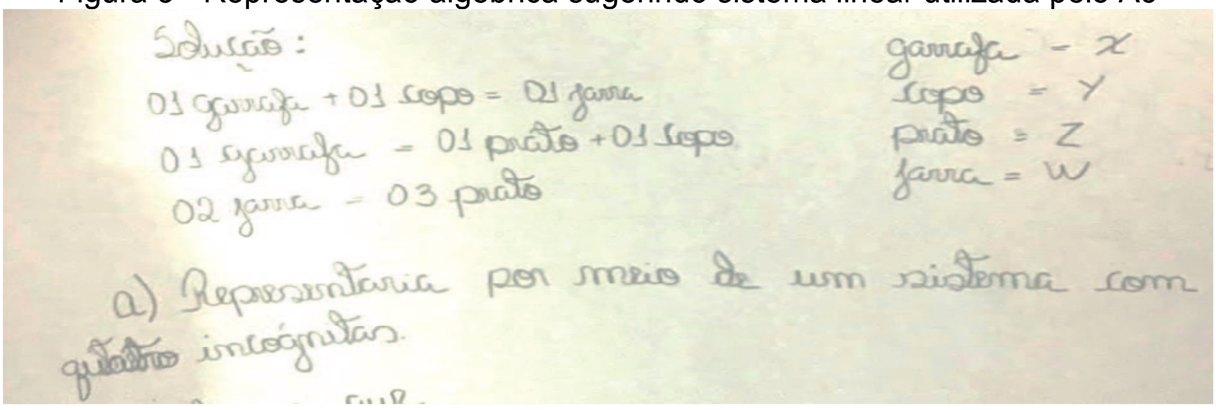
a) a garrafa e o copo, se têm o mesmo peso da jarra;

b) a garrafa têm o mesmo peso do prato e um copo;

c) duas jarras têm o mesmo peso de três pratos.

Fonte: Registrado pela pesquisadora.

Figura 5 - Representação algébrica sugerindo sistema linear utilizada pelo A3


Solução:

01 garrafa + 01 copo = 01 jarra

01 garrafa = 01 prato + 01 copo

02 jarra = 03 prato

garrafa - x

copo = y

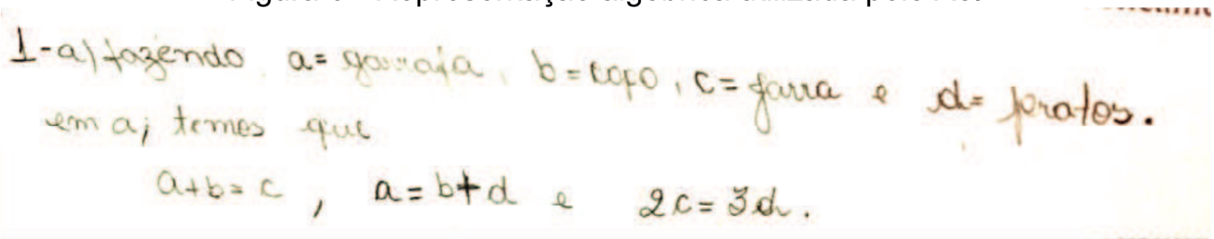
prato = z

jarra = w

a) Representaria por meio de um sistema com quatro incógnitas.

Fonte: Registrado pela pesquisadora.

Figura 6 - Representação algébrica utilizada pelo A8.



1-a) fazendo a= garrafa, b=copo, c=jarra e d=pratos.
em a) temos que
$a+b=c$, $a=b+d$ e $2c=3d$.

Fonte: Registrado pela pesquisadora.

No momento da plenária, em que cada aluno explicou sobre sua representação, pudemos registrar o seguinte diálogo:

P: *O que aconteceria se eu retirasse um copo da primeira balança?*

A7: *Teríamos um desequilíbrio.*

A12: *Uma desigualdade!*

P: *Seria possível representar este desequilibro ou desigualdade?*

A3: *Sim, bastava desenhar o primeiro lado da balança com a garrafa mais acima e o lado da jarra mais abaixo e ia analisando as outras…*

P: *Poderíamos expressar isso algebricamente?*

(SILÊNCIO)

P: *Teria como expressar utilizando equação?*

A2: *Só se quebrar uma parte da jarra.*

(RISOS)

A12: *Seria praticamente impossível quebrar exatamente o peso do copo.*

P: *Permanecendo na situação, em que de um lado temos uma garrafa e, do outro, uma jarra, teria alguma forma de expressar algebricamente?*

A3: *Acho que algebricamente não, porque a equação representa uma igualdade de lados, e aí não temos igualdade.*

P: *E o que é uma equação?*

A9: *É uma expressão que contém uma igualdade de lados e nestes lados temos um valor ou valores desconhecidos. Para resolver a equação, precisamos encontrar esse valor ou os valores que satisfaçam a igualdade.*

P: *Quais aspectos da situação não correspondem à definição de equação?*

A9: *Sabemos que um lado é mais pesado que o outro, logo, o sinal de igual não pode ser utilizado.*

P: *Numa equação, o que significa o sinal de igual?*

A3: *Significa que de um lado temos o mesmo que do outro lado.*

P: *Exatamente! Então, por que não podemos utilizar uma equação para representar a situação?*

A9: *Porque nessa variação do problema não temos uma igualdade, pois um lado é mais pesado que o outro.*

P: *Então temos uma desigualdade! Como podemos representar a desigualdade?*

(Silêncio)

P: *Quem lembra dos símbolos >, <, ≤ e ≥?*

A3: *Ah!!! É verdade. > (maior que), < (menor que), ≤ (maior ou igual que) e ≥ (menor ou igual que).*

A8: *Não ia lembrar nunca disso...*

A9: *Usamos inequação pra representar uma desigualdade, é verdade...*

Comentarista: Os questionamentos da professora, neste momento, foram direcionados à utilização da linguagem algébrica para representar situações. Nesse sentido, os alunos mostraram-se firmes quanto à utilização de equações para representar igualdades, no entanto, não demonstraram firmeza quanto à utilização de inequações para representar desigualdades.

Na exploração do item “a” da atividade, que questionava sobre a representação do problema, pudemos identificar o movimento P-T-RS (Problema-Trabalho-Reflexões e Sínteses), mencionado por Andrade (2017), em que foi perceptível, principalmente, a realização de novas reflexões e de novas sínteses.

Diante das dificuldades dos alunos no item “a” da atividade, pudemos destacar o seguinte comentário do aluno A8:

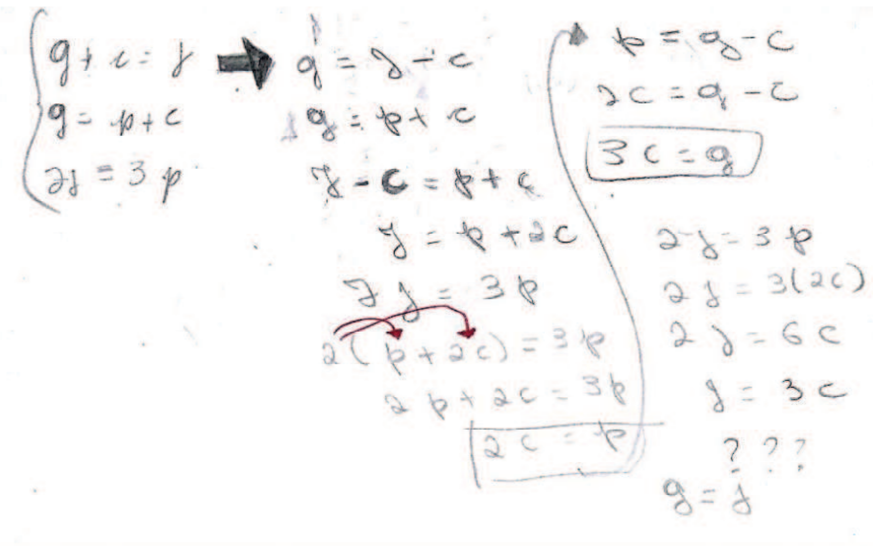
A8*: O problema é que, muitas vezes, não estamos adaptados com esse tipo de situação, em que precisamos expressar algo matematicamente, na maioria das vezes, o nosso interesse é aplicar determinado conteúdo para encontrar o resultado.*

Diante da fala do A8, percebemos que a perspectiva a qual ele se refere é semelhante à destacada por Schroeder & Lester (1989) – ensinar Matemática *para* resolver problemas. Nesta perspectiva, o professor foca no modo como a matemática é ensinada e visa sua aplicação na resolução de problemas. Embora nos últimos anos a Resolução de Problemas como campo de pesquisa tenha aumentado e ela tenha passado a assumir uma perspectiva de metodologia de ensino, o ensino para resolver problemas ainda é muito frequente em nossas salas de aula.

Assim, ressaltamos a importância da Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas, pois ela trata do problema em uma perspectiva atual, focada na aprendizagem e desenvolvimento do aluno, não com mera aplicação de conteúdo.

No item "b" da atividade, os alunos apresentaram dificuldades no ato da resolução do sistema, contudo, eles próprios admitiram ter chegado a absurdos, concluindo que suas resoluções não estavam corretas. Dos equívocos encontrados, é possível destacar o registro do aluno A6, que concluiu que "o peso de uma garrafa é igual ao peso de uma jarra", como podemos ver abaixo.

Figura 7 - Registro da resolução de A6.

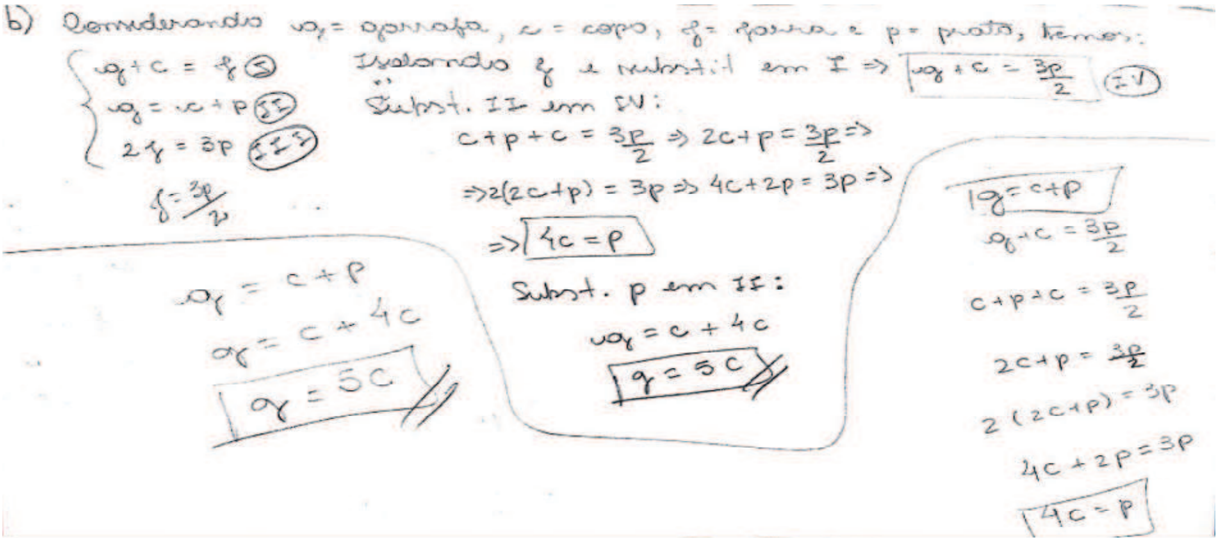


Fonte: Registrado pela pesquisadora.

Diante desse registro, pudemos notar que a conclusão do aluno foi oriunda de um erro na propriedade distributiva, em que ele multiplicou apenas o p e repetiu o $2c$, como destacado em vermelho.

Outros alunos responderam corretamente, utilizando métodos conhecidos, como o método da substituição, como podemos ver a seguir:

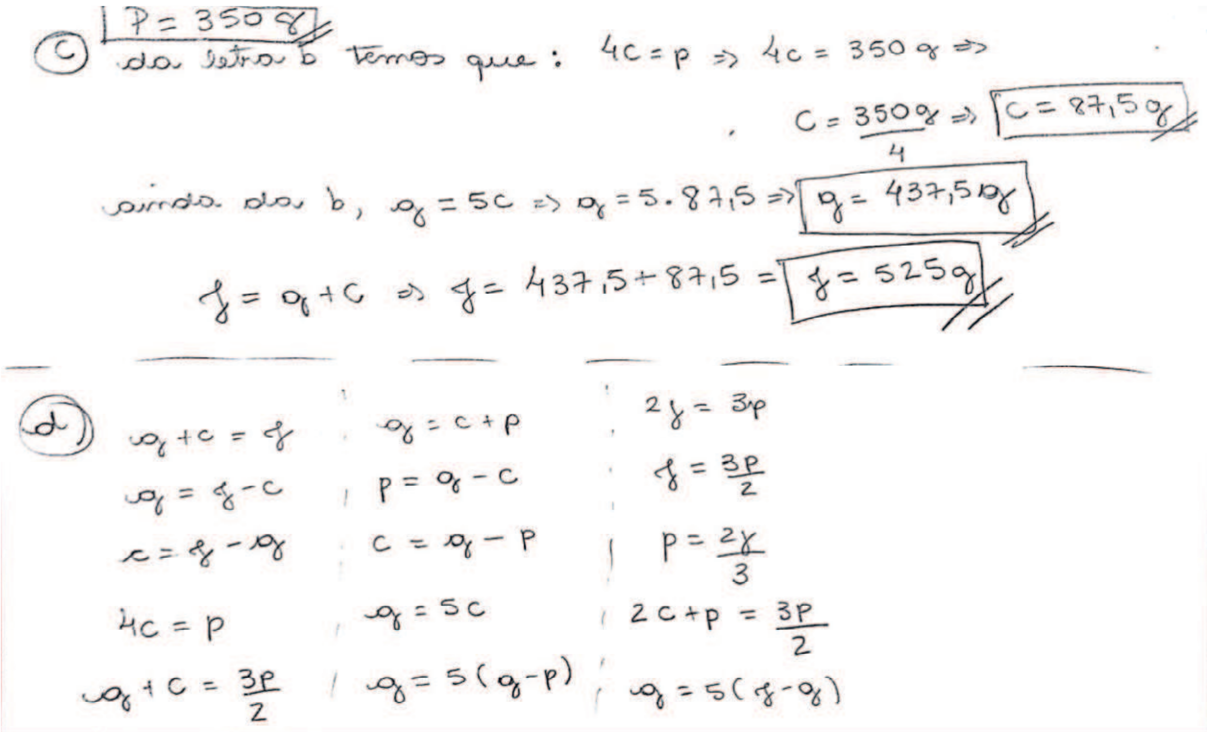
Figura 8 - Registro da resolução de A5.



Fonte: Registrado pela pesquisadora.

Nos itens “c” e “d”, os alunos não tiveram dificuldades, uma vez que o item “b” possibilitou a manipulação dos termos das equações, deixando claras as equivalências e facilitando a substituição dos valores. Podemos ver essa facilidade pelo registro de A5, que continuou utilizando o mesmo raciocínio do item “b”:

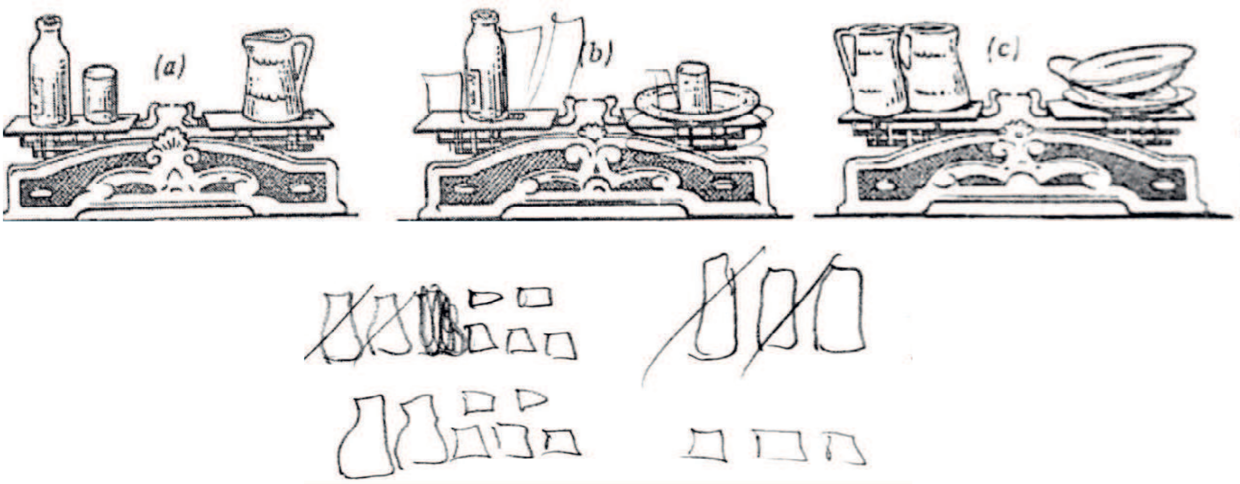
Figura 9 - Registro da resolução de A5.



Fonte: Registrado pela pesquisadora.

Já no item “e”, os alunos apresentaram muitas dificuldades, pois não conseguiam visualizar a manipulação dos objetos. Dos nove alunos presentes, somente um aluno conseguiu finalizar a questão. Ao apresentar a solução para a turma, o aluno A13 ilustrou da seguinte forma:

Figura 10 - Ilustração da resolução do A13.



Fonte: Registrado pela pesquisadora.

Ao apresentar essa ilustração para a turma, o aluno explicou ter seguido os seguintes passos:

A13:

1° *Sabendo que o peso de 2 jarras equivale ao peso de três pratos, adicionei-os à segunda balança, obtendo, de um lado, duas jarras e uma garrafa e, do outro, quatro pratos e um copo.*

2° *Multiplicando a primeira balança por dois, temos que duas jarras equivalem a duas garrafas mais dois copos. Assim, substituindo na segunda balança, obtemos três garrafas mais dois copos no primeiro lado igual a quatro pratos e um copo.*

3° *Adicionando 3 copos a ambos os lados da 2º balança, obtemos, de um lado, três garrafas mais cinco copos e, no segundo lado, 4 pratos mais quatro copos, que podem ser substituídos por quatro garrafas.*

4° *Assim, obtemos a seguinte igualdade: três garrafas mais cinco copos têm o mesmo peso que quatro garrafas.*

5° *Retirando três garrafas de ambos os membros, chegamos à conclusão de que uma garrafa equivale ao peso de cinco copos.*

Responder um sistema de tal forma possibilita o entendimento da representação, das substituições de equações e da manipulação de termos. No entanto, acreditamos que a dificuldade apresentada pelos alunos na visualização da manipulação dos objetos sem representá-los por símbolos é decorrente da habitual manipulação algébrica sem utilizar um pensamento algébrico, em que, muitas vezes, é feita sem significado, não permitindo, assim, uma transição entre as múltiplas representações.

4.1.3 3º Encontro – Resolvendo problemas utilizando Sistemas Lineares

Atividade 3 – O encontro na montanha[6]

Objetivo:

- Utilizar linguagem algébrica e representação gráfica para modelar e resolver problema.

O encontro na montanha
Marta começa a subir a montanha, num percurso de 14 quilômetros, até o acampamento onde a aguarda sua amiga Noêmia. Na mesma altura, esta parte ao seu encontro. Marta, ao subir, tem uma velocidade média de 2 quilômetros por hora, enquanto que Noêmia, descendo a montanha, faz 6 quilômetros por hora. a) A que distância do acampamento se encontram? b) Qual a representação gráfica da situação descrita?

Neste encontro, dois alunos faltaram à aula. Para iniciar, a professora solicitou que formassem duplas e entregou a atividade impressa para cada. Foi proposta a leitura inicial e, em seguida, foi questionado o que os alunos haviam compreendido sobre o problema. Após a professora esclarecer o problema, os alunos iniciaram a resolução do item “a”.

Em silêncio, a professora passeava pela sala e observava as duplas nas resoluções. Pelas estratégias utilizadas e pelos diálogos presenciados, a professora percebeu que alguns alunos ainda não tinham compreendido o contexto do problema.

O problema pode ser respondido utilizando diferentes conteúdos matemáticos, dessa forma, deixamos os alunos livres na resolução, interferindo apenas quando

[6]Tarefa adaptada de Ponte, Matos e Branco (2009).

necessário. Na maioria das vezes, quando questionada, a professora buscava responder com outros questionamentos, sempre incentivando o diálogo entre a dupla.

Durante a resolução, algo inusitado ocorreu e achamos válido ressaltar. A dupla 1, formada pelos alunos A2 e A8, respondeu recorrendo aos conceitos de Física, utilizando a fórmula da velocidade média.

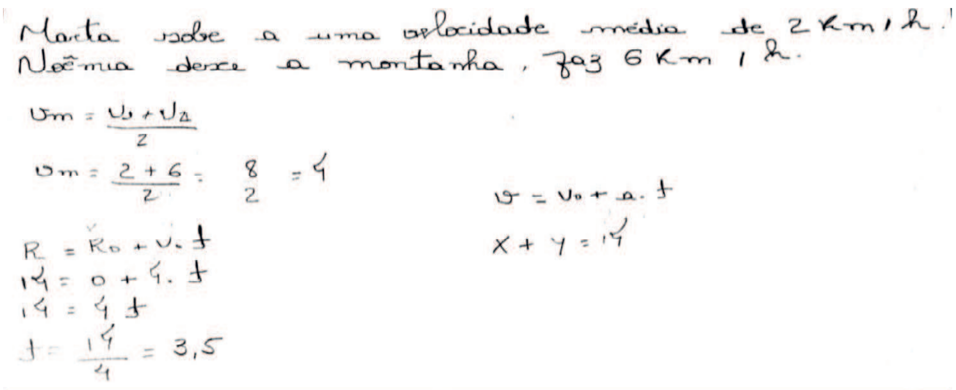
Na Física, a velocidade é uma grandeza que identifica o deslocamento de um corpo num determinado tempo. Assim, a velocidade média (Vm) mede, em um intervalo de tempo médio, a rapidez da deslocação de um corpo. Para calcular a velocidade média de um corpo num espaço percorrido em um determinado tempo gasto no percurso, utiliza-se a seguinte expressão:

$$Vm = \frac{\Delta\text{S (Sfinal} - \text{Sinicial)}}{\Delta\text{T (Tfinal} - \text{Tinicial)}}, onde,$$

ΔS: $intervalo\ de\ deslocamento\ (posição\ final\ menos\ a\ posição\ inicial)$

ΔT: $intervalo\ de\ tempo\ (tempo\ final\ menos\ o\ tempo\ inicial)$

Figura 11 - Registro da resolução da dupla formada pelos alunos A2 e A8



Fonte: Registrado pela pesquisadora.

Ao escrever a resolução, apresentada no registro acima, explicaram:

A8: *Como sabemos a velocidade de Marta e Noêmia, tentamos resolver o problema usando velocidade média, mas não temos a certeza que estamos chegando ao resultado correto.*

P: *Vocês poderiam explicar como resolveram?*

A2: *Usamos a velocidade média e depois aplicamos na outra fórmula* $R = r_0 + v.t$ *para obtermos o tempo.*

P*: O que foi encontrado inicialmente?*

> ***A8:*** *Encontramos a média entre as duas velocidades, que foi 4. Em seguida aplicamos na fórmula para encontrar o tempo.*

Comentarista: A fórmula a que os alunos se referem é a seguinte: $S = So + V.t$, em que S - posição final, So - posição inicial, V – velocidade e t – tempo.

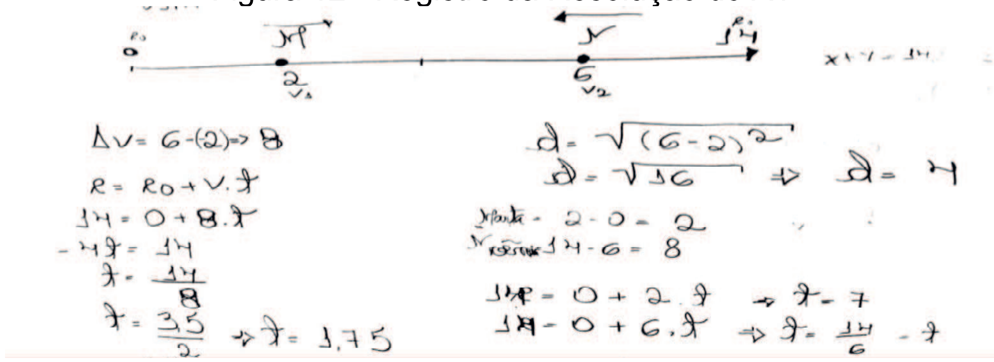
> ***A2****: Como sabemos que o espaço todo são 14 quilômetros, vamos considerar que, para chegar lá, partimos do quilômetro 0 a uma velocidade média de 4 km. Aplicando na fórmula, obtemos que o tempo gasto será 3,5.*
>
> ***P:*** *Certo, mas o que o problema está pedindo?*

Podemos observar que, inicialmente, os alunos fazem uma pequena confusão com a velocidade, uma vez que eles calculam a média das duas velocidades e não a velocidade média, como mencionado. Em seguida, utilizam outra fórmula e adicionam ao problema a variável tempo e o encontram, sendo que o problema questionava a distância.

Outros alunos se envolveram na discussão, afirmando que também recorreram à Física para encontrar a solução, mas utilizando outro caminho:

> ***A1:*** *Primeiro encontramos a velocidade da seguinte forma: como sabemos que as duas estão indo em sentidos opostos, consideramos a velocidade final positiva (6) e a velocidade inicial negativa (-2), e, assim, fizemos* $\Delta V = 6 - (-2) = 8$*. Em seguida, aplicamos na fórmula citada anteriormente pelos colegas, porém, como a velocidade mudou, encontramos que o tempo é igual a* $1{,}75$*.*
>
> ***A1:*** *Tentamos também considerando outras velocidades, tais como somente a de Marta ou somente a de Noêmia, mas sempre encontrávamos o tempo, foi quando tivemos a ideia de utilizar a fórmula de distância de dois pontos. E obtivemos* $D = 4$*.*

Figura 12 - Registro da Resolução do A1



Fonte: Registrado pela pesquisadora.

A9: *Eu também utilizei a fórmula de distância entre dois pontos, mas da seguinte forma* $Dmn = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40} = 6{,}32\ km.$

P: *Por que vocês consideraram os pontos 6 e 2?*

A9: *Porque eu considerei que eles estão em uma reta, onde enquanto uma está no km 2 a outra está no km 6.*

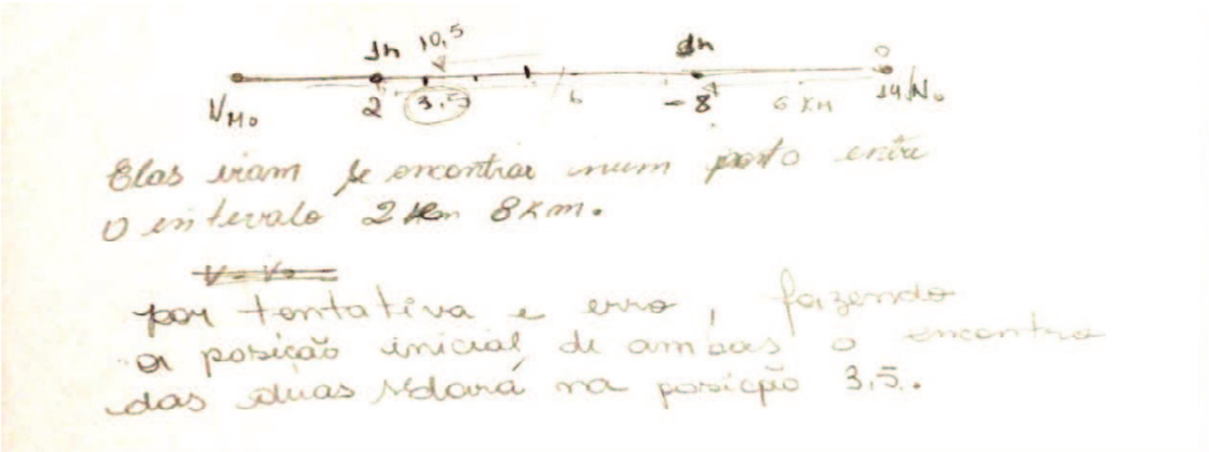
A1: *Eu não sei, mas usei a fórmula porque eu quero encontrar a distância.*

P: *Vamos reler o problema… (leitura do problema). Percebam que, quando se passa 1 hora, Marta tem subido 2 km e Noêmia tem descido 6 km.*

Diante do exposto, podemos perceber nos alunos certa dificuldade de interpretação do problema, como também, uma visão linguístico-pragmática de Álgebra, que considera o mero transformismo algébrico como necessário e suficiente para que o aluno resolva problemas.

Outros alunos responderam utilizando a estratégia tentativa e erro:

Figura 13 - Registro da resolução dos alunos A7 e A12.



Fonte: Registrado pela pesquisadora.

Ao ser questionado sobre o registro, A12 explica:

A12: *Como sabemos que Marta sobe a 2km/h e Noêmia desce a 2 km/h, fiz a simulação para a primeira hora. Logo, percebi que elas se encontrariam no intervalo entre 2 km e 8km. E, assim, fui fazendo as tentativas aumentando o tempo e observando aonde elas iriam se encontrar. E percebi que se encontrariam no quilômetro 3,5.*

P: *Ótimo! Parabéns! E se fosse um percurso maior, vocês também fariam dessa forma?*

A7: *Dependendo dos valores poderia tornar o trabalho cansativo...*

P: *Teria outra forma para resolver o problema?*

A7: *Deve ter alguma forma de representar a situação e facilitar a resolução.*

P: *Pensem um pouco sobre o problema e tentem representar algebricamente.*

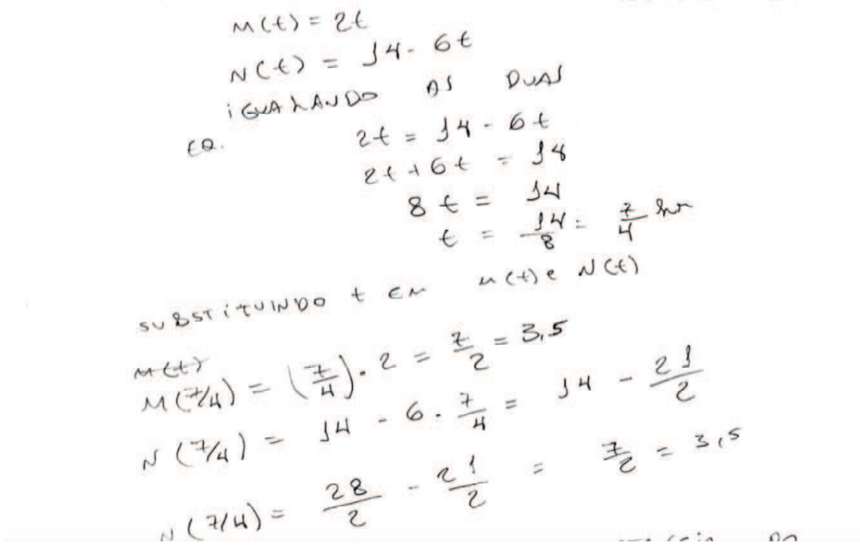
Embora o objetivo dessa atividade seja o de estimular a representação algébrica, consideramos a resolução da dupla correta, pois, como aponta Friedlander e Tabach (2001), no processo de resolver um problema, isolar representações pode ser difícil. Assim, na maioria das situações, qualquer abordagem é acompanhada por explicações verbais ou por cálculos numéricos.

Por isso, partimos da resolução do aluno e questionamos sobre outras possibilidades, para que eles pudessem tirar conclusões sobre sua resolução. Ao mencionarem que “dependendo dos valores poderia tornar o trabalho cansativo...”, os alunos corroboram de Friedlander e Tabach (2001), quando apontam que uma das desvantagens da representação numérica é que seu potencial como ferramenta para resolver problemas pode ser, às vezes, bastante limitado.

A dupla formada pelos alunos A11 e A13 explicam seu raciocínio ao resolver o problema pelo conteúdo de funções:

A11*: Inicialmente, representamos a velocidade de Marta e Noêmia pelas funções* $M(t) = 2t$ *e* $N(t) = 14 - 6t$*, como queremos encontrar o ponto de encontro em determinado tempo, igualamos as duas funções e encontramos o tempo, em seguida, aplicamos o tempo encontrado em cada uma função e encontramos o ponto de encontro.*

Figura 14 - Registro da Resolução do A11.



Fonte: Registrado pela pesquisadora.

Os alunos parabenizaram os colegas pela solução e alegaram ter compreendido o raciocínio da dupla, afirmando que, dessa forma, poderiam concluir que, de fato, o raciocínio utilizado está correto, não necessitando de um esforço para utilização de fórmula como anteriormente.

A partir dessa resolução da dupla, a professora continua a mediação com outros questionamentos: Quantos quilômetros foram percorridos por cada uma até o ponto de encontro? Teríamos outra forma para representarmos matematicamente a situação?

Como os alunos não conseguiram visualizar de início o sistema linear, lançamos estes questionamentos para estimulá-los a identificar as equações, a fim de que, em seguida, pudéssemos modelar e resolver o problema utilizando Sistemas Lineares.

P: *Vamos observar os dados do problema! Observem que temos uma montanha de 14 km a ser escalada, Marta está embaixo e subirá, já Noêmia, que está no topo, descerá. As duas irão se encontrar em um certo ponto. Como podemos expressar algebricamente a situação?*

A9: $x + y = 14$

P: *Isso! Além destes dados, temos algum dado ou condicionante?*

A2: *Temos que a velocidade de Marta é 2km/h e a de Noêmia 6 km/h.*

P: *Qual a incógnita do problema?*

A3: *Qual o ponto de encontro entre as duas.*

P: *Isso! Percebam que queremos descobrir em que ponto o percurso realizado por Marta, a* $2\ km/h$*, será igual ao percurso de Noêmia a* $6\ km/h$*. Como podemos traduzir isto para a linguagem algébrica?*

A1:$2x = 6y$

P: *Quem é x e quem é y?*

A1: *2x é o tempo gasto por Marta em um percurso x e 6y tempo gasto por Noêmia em um percurso y.*

P: *Vamos analisar a representação, testando alguns casos particulares:*

- *Se Marta andar 1 km, ela gasta 2 horas, dessa forma, em 2 horas Noêmia anda 0,33 km.*
- *Se Marta andar 1,5 km, ela gasta 3 horas, dessa forma, em 3 horas Noêmia anda 0,5 km.*

P: *Percebam que Marta está andando mais rápido que Noêmia, é isso que o problema nos diz?*

A2: *No caso, não é uma multiplicação e sim uma divisão, porque no problema diz que é 2km/h e não 2h/km.*

P: *Isso mesmo, como podemos representar?*

A2: $x/2 = y/6$

A3: *Podemos representar também por* $3x = y$

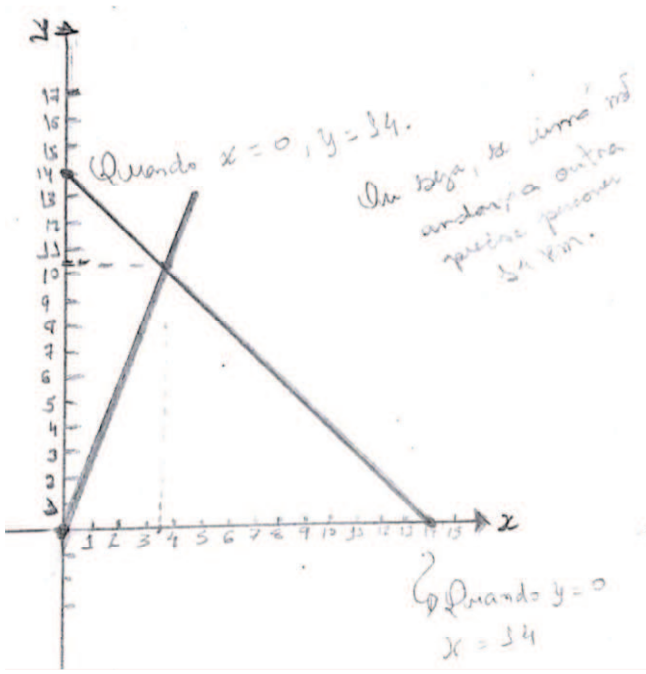
P: *Isso, pois são equações equivalentes. As equações encontradas são suficientes para representarmos o problema?*

A4: *Sim, agora podemos montar o sistema* $\begin{cases} x + y = 14 \\ 3x = y \end{cases}$

Diante do diálogo, ficou notória a dificuldade dos alunos na interpretação do problema e na tradução para a linguagem algébrica, sendo, portanto, necessária a intervenção da professora para esta transição.

Por fim, a professora questionou quanto à representação algébrica desse sistema. Os alunos discutiram em grupos e criaram a representação gráfica do problema, como podemos ver no registro a seguir:

Figura 15 - Registro da representação gráfica do A10.



Fonte: Registrado pela pesquisadora.

Ao apresentarem as representações gráficas, os alunos mencionaram o quanto a interpretação gráfica enriquece o problema e relembraram da Atividade 1 de nossa

Oficina, que tratava da composição de um cardápio, como podemos ver no diálogo que segue:

> ***A10:*** *A representação desse problema é bem semelhante àquele do cardápio, ela está restrita somente ao primeiro quadrante.*
>
> ***P:*** *Por que este também é restrito ao primeiro quadrante? Vocês concordam com A10?*
>
> ***A8:*** *Concordo! Pois o problema deixa bem claro que se trata de um percurso de 14 km, não assumindo assim valores negativos.*
>
> ***P:*** *Teria outra restrição?*
>
> ***A11:*** *Só que o menor valor tanto para x quanto para y, deveria ser 0. Pois representa o ponto inicial 0km no tempo 0h.*
>
> ***P:*** *O que mais podemos observar?*
>
> ***A8:*** *Que o maior valor tanto de x quanto de y será 14.*
>
> ***P:*** *Quem é x? Quem é y?*
>
> ***A8:*** *Pode ser o percurso ou o tempo, nesse caso, é o percurso.*
>
> ***P:*** *Isso! Por isso a importância de nomearmos as retas, para destacarmos a quem estamos nos referindo.*
>
> ***A9:*** *Para melhorar, dizemos que na reta p:* $x + y = 14$*, x e y representa os quilômetros que as amigas irão percorrer.*
>
> ***P:*** *Exatamente! Então quando x for zero na reta p, o que isso significa?*
>
> ***A10:*** *Significa que quem está no ponto zero não percorreu nada. E a outra percorreu o trajeto sozinha.*

Ao final da aula, a professora discutiu sobre as ideias de Álgebra exploradas no problema e questionou a opinião dos alunos sobre a atividade trabalhada. Diante do questionamento, os alunos mencionaram a importância de problemas que os deixam livres para a resolução, pois esta é uma forma de explorar o conhecimento do aluno. Eles também citaram a importância da mediação durante a resolução, destacando que durante os diálogos eles precisaram pensar para responder, e isso é muito importante, pois os faz refletir sobre o seu próprio processo de ensino-aprendizagem.

Essa reflexão mencionada pelos licenciandos nos faz lembrar do conceito de metacognição, apresentado por Schoenfeld (1987) como sendo o pensamento sobre seu próprio pensamento, e isso é o que, muitas vezes, falta nas salas de aulas, quando os alunos não utilizam suas habilidades metacognitivas para resolver problemas.

De acordo com Schoenfeld (1987), ao resolver problemas, os alunos geralmente identificam apenas um item do problema, e buscam imediatamente uma resposta, apresentam dificuldade para traduzir as suposições presentes nos problemas em linguagem matemática e desenhos, como também, não utilizam adequadamente conhecimentos anteriores.

Consideramos a fala do autor como uma problemática subsistente neste trabalho, pois nas três atividades realizadas até aqui e descritas anteriormente, pudemos identificar os pontos destacados. No entanto, temos como ponto positivo e consideramos como um grande avanço a menção do aluno quando aponta que o diálogo o faz refletir sobre o seu próprio processo de ensino-aprendizagem.

4.1.4 4º Encontro – Explorando os métodos de resolução de Sistemas Lineares

Atividade 4: A venda de limões e maçãs[7]

Objetivo:

- Explorar diferentes métodos na resolução de Sistemas Lineares 2x2.
- Promover a aprendizagem de Sistemas Lineares através da Proposição de Problemas.

A venda de limões e maçãs
O seguinte problema foi inventado na Índia, por Mahavira, há mais de mil anos: "O preço de 9 limões e 7 maçãs é 107. O preço de 7 limões e 9 maçãs é 101. Responda rapidamente qual o preço de um limão e de uma maçã". *Observação: O valor foi pago em Rupia Indiana (INR).*

Neste encontro, estavam presentes oito alunos. No início da aula, a professora cumprimentou a turma e mencionou que tinha um desafio para eles. Todos ficaram curiosos e, então, a professora fez a leitura do problema. Após alguns minutos, a professora questionou os alunos sobre a resolução e entregou uma cópia escrita do problema, pedindo que registrassem a resolução.

No momento da plenária, foi observado que todos haviam representado o problema por meio de um sistema linear do tipo:

[7]Tarefa adaptada de Ponte, Matos e Branco (2009).

$$\begin{cases} 9\,L + 7\,M = 107 \\ 7\,L + 9\,M = 101 \end{cases}$$

Desse modo, percebemos mais um avanço, pois do início da Oficina até a atividade anterior, os alunos não utilizavam a linguagem matemática para a representação do problema, recorriam a anotações via representações verbais e resoluções amparadas na estratégia da tentativa e erro.

No entanto, nessa aula, o interesse era discutir sobre os métodos de resolução do sistema. O único método utilizado pelos alunos foi o método da Substituição, realizando um procedimento semelhante ao que descrevemos abaixo:

Isolando L na primeira equação, temos que:

$$9L = 107 - 7M$$

$$L = \frac{107 - 7M}{9}$$

Substituindo L na segunda equação temos:

$$\frac{7(107 - 7M)}{9} + 9M = 101$$

$$\frac{749 - 49M + 81M}{9} = 101$$

Multiplicando ambos os membros por 9, temos:

$$749 - 49M + 81M = 909$$

Assim,

$$32M = 160$$

$$M = 5$$

Assim, substituindo M na primeira equação, temos:

$$9\,L + 7\,(5) = 107 \rightarrow L = 8$$

Vale salientar que os alunos não utilizavam calculadora no decorrer das atividades. Diante disso, alguns alunos mencionaram ter tentado resolver utilizando o método da comparação, porém, ao se deparar com um cálculo que, possivelmente, requeria trabalho, decidiram realizar o método da substituição.

O cálculo a que os alunos se referiam foi o seguinte:

Da primeira equação, temos que$L = \frac{107-7M}{9}$

Da segunda equação, temos que $L = \frac{101-9M}{7}$

Igualando as duas equações, temos que:

$$\frac{107-7M}{9}=\frac{101-9M}{7}$$

Ao perceberem que a continuidade da equação seria um cálculo extenso e trabalhoso, optaram por resolver o sistema utilizando o método da substituição, descrito anteriormente.

Outro método bastante utilizado, principalmente quando os Sistemas Lineares são introduzidos na Educação básica, que não foi mencionado pelos alunos, é o método da adição. Acreditamos que os alunos não tentaram utilizar esse método por não terem se deparado com coeficientes de incógnitas iguais simétricos. Como destaca Iezzi (2000), o método da adição é o mais adequado, quando o coeficiente de uma das incógnitas é o simétrico do coeficiente da mesma incógnita da segunda equação, visto que, ao fazer a adição, uma incógnita é eliminada.

No entanto, há que se ter um cuidado a essas "regras" existentes para a utilização ou não de certos métodos, pois, mais adiante, veremos que, embora o método da adição pareça o mais trabalhoso, ele seria o mais conveniente a ser utilizado na resolução desse sistema.

Ao final da plenária, a professora propôs alguns questionamentos: Quanto custa uma maçã? R. R$ 5,00. E um limão? R. R$ 8,00. Encontrar esse preço foi uma tarefa fácil? R. Não. Foi um desafio responder o problema rapidamente? R. Sim. Teria outro método mais prático de resolver o problema? R. Os alunos procuraram outra forma mais rápida para resolver o problema, trocaram ideias com os colegas, mas não encontraram.

Então, a professora mencionou a estratégia abaixo, apresentada por Ponte, Matos e Branco (2009, p.161), como podemos ver no diálogo a seguir:

P: *Pessoal, outra forma de resolvermos o sistema seria utilizando o conhecido método da adição. Quem lembra desse método?*

A7: *Basta somar as equações do sistema.*

P: *Isso mesmo! Somando as equações, teremos quem?*

***Alunos**:*

$$\begin{array}{r} 9x+7y=107 \\ 7x+9y=101 \\ \hline 16x+16y=208 \end{array}$$

P: *Essa estratégia foi citada na brochura de Álgebra dos autores Ponte, Matos e Branco (2009). De acordo com os autores, essa seria a maneira mais conveniente para o desafio, que seria o de responder rapidamente qual é o preço de um limão e de uma maça. Vocês concordam com eles?*
A9: *Deve ter alguma coisa nessa equação que eu não estou visualizando, porque para mim, da forma que está, vai dar ainda mais trabalho.*
Alunos*: É verdade!!!!*
P: *Então, por que vocês acham que os autores preferem essa estratégia, ao invés dos métodos que utilizamos?*
(Silêncio)
P: *Vou deixar vocês pensarem um pouco.*

Ao passar alguns minutos, o diálogo continua:

A4: *Eu percebi que 208 é múltiplo de 16. Então, se dividirmos tudo por 16, vamos obter uma equação equivalente.*
P: *Que equivalência é essa? Registre no quadro para seus colegas verem.*
A4*: Teremos que* $16x + 16y = 208 \Leftrightarrow x + y = 13$
P: *E agora? Faremos o que?*
A4*: Acho que agora isolamos x ou y e substituímos na equação.*
P: *Vocês concordam que o método da adição foi o mais conveniente pra o desafio?*
A6*: Pra mim deu no mesmo.*
A4*: Também não vi diferença.*
A9*: Eu já entendi o que eles quiseram dizer com isso! Eu fiquei intrigado desde o início, me perguntando o que teria demais pra eles acharem esse método mais rápido. É o seguinte, com a equação* $x + y = 13$ *nós já temos a resposta do problema, porque ele não pede o preço individual, ele quer saber o preço dos dois.*
A4*: É verdade! O problema é que a gente nem leu o desafio direito, só queria responder o sistema.*

Esse diálogo nos lembra o que muitas vezes acontece nas aulas de Matemática: a falta de interpretação de problemas. Por isso a importância de estimular o uso da representação verbal, pois como destaca Friedlander e Tabach (2001), ela geralmente é utilizada para apresentar um problema e é necessária na interpretação final dos resultados obtidos na solução do processo. A leitura e escrita são tão importantes na resolução de problemas quanto o conteúdo matemático utilizado.

Após a discussão sobre a estratégia utilizada, com o intuito de promover a aprendizagem através da Proposição de Problemas, a professora solicitou que os alunos formassem duplas e, diante da situação trabalhada, criassem novos problemas.

Os problemas criados pelos alunos foram os seguintes:

Quadro 8 – Problemas propostos pelos alunos

Alunos	**Problema**	**Conteúdo**
A7 e A9	1. Mahavira fez a compra dos 16 limões e das 16 maçãs. No entanto, ao chegar em casa teve uma surpresa: ¼ dos limões e ½ das maças vieram estragadas. Como a feirinha era distante de sua casa ele não voltou à feira para trocá-las. De quanto foi o prejuízo de Mahavira?	Operações com frações
A6 e A13	2. No final da feira, o vendedor baixou o preço das frutas da seguinte forma: Maçã R$ 0,80 e Limão R$ 0,35. Elder fez uma compra de 18 unidades de frutas e pagou R$ 9,00. Quantas maçãs e quantos limões foram comprados por Elder?	Sistemas de equações
A1 e A4	3. Lilian ligou para o hortifruti e pediu que a enviassem 10 maçãs. Para que aumentasse sua duração, ela recomendou que mandassem metade das maças, verdes e a outra metade, maduras. Ao chegar as frutas, Lilian pegou duas maçãs, porém, não sabia diferenciar, qual era verde e qual era madura. Qual a probabilidade de pelo menos uma estar madura?	Probabilidade
A2 e A10	4. Temos três caixas de frutas. Uma contém apenas maçãs, outra contém apenas limões, e a última possui as duas frutas misturadas. Todas as caixas estão etiquetadas: uma diz “maçãs”; outra diz “limões”; a última diz “maçãs e limões”. Porém, nenhuma das caixas está etiquetada corretamente. Como você poderia etiquetá-las corretamente, se só lhe é permitido pegar uma fruta de apenas uma das caixas?	Raciocínio lógico

Fonte: Organizado pela pesquisadora.

O problema 1, que trata de operações com frações, pode ser trabalhado desde o 4º ano do ensino fundamental. Embora seja um problema considerado fácil, se olharmos a nível médio ou superior, ele foi considerado pela turma como um problema bem elaborado, pois não temos, de início, uma resposta para o problema, sendo preciso interpretá-lo, separar as variáveis e realizar os cálculos.

O problema 2 é semelhante aos problemas trabalhados até então na Oficina, pois aborda Sistemas Lineares. De acordo com a turma, o problema foi bem elaborado e eles não teriam dificuldades para resolver utilizando Sistemas Lineares, uma vez que é um conteúdo que vem sendo estudado. No entanto, na Educação Básica, os alunos não teriam a mesma facilidade.

O problema 3 foi considerado como o problema mais difícil, pois muitos alunos mencionaram não ter estudado Probabilidade e Estatística na Educação Básica e que a disciplina vista na licenciatura não aborda problemas elementares como estes, ficando essa lacuna na formação. Esse foi o problema que a discussão mais demandou tempo.

O problema 4, apresentado pelos alunos A2 e A10, não foi criado por eles, este é um enigma que eles já conheciam e adaptaram à situação para o utilizar com a turma. Permitimos a utilização, pois consideramos um problema interessante e que requer um raciocínio lógico para a resolução.

Esta foi uma etapa um pouco demorada, pois, embora os alunos tivessem respondido o problema anterior, eles disseram não estar habituados a criar problemas, mas apenas a resolvê-los. Em suas pesquisas, Andrade (2017) também percebe que a Proposição de Problemas parece ser a ferramenta mais difícil de ser trabalhada e desenvolvida nos alunos: “Temos observado que isso advém de uma prática de sala de aula que tem sido concentrada apenas na resolução de problemas oriunda de problemas propostos exclusivamente pelo professor e nunca pelos alunos”. (ANDRADE, 2017, p. 388).

Assim, devido ao tempo gasto na proposição de problemas, não conseguimos resolver todas as questões. Contudo, todos os grupos fizeram a leitura de seu problema e, em seguida, discutimos como seria a resolução destes problemas. Vale salientar que a Proposição de Problemas não é vista como um tema separado, mas como parte do processo de resolução e exploração de problemas.

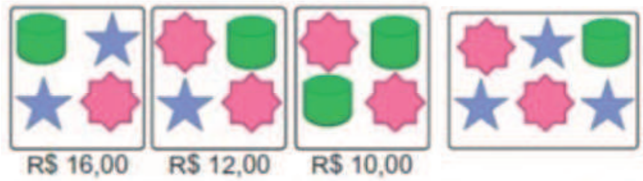
4.1.5 5º Encontro – Discutindo e classificando Sistemas Lineares através da Resolução de Problemas

Atividade 5 – A venda de figurinhas[8]

Objetivos:

- Aprofundar discussão sobre Sistemas Lineares $2x2$;
- Classificar Sistemas Lineares utilizando novos problemas.

Na figura abaixo, temos três cartelas com quatro adesivos e seus respectivos preços. Sabendo que o preço de uma cartela é a soma dos preços de seus adesivos, qual é o preço da quarta cartela?



Nesse encontro, todos os alunos compareceram. No início da aula, a professora entregou a atividade impressa a todos eles e fez a leitura do problema. Como de costume, aguardou que os alunos o respondessem e, após algum tempo, passou em suas carteiras para observar o andamento da atividade.

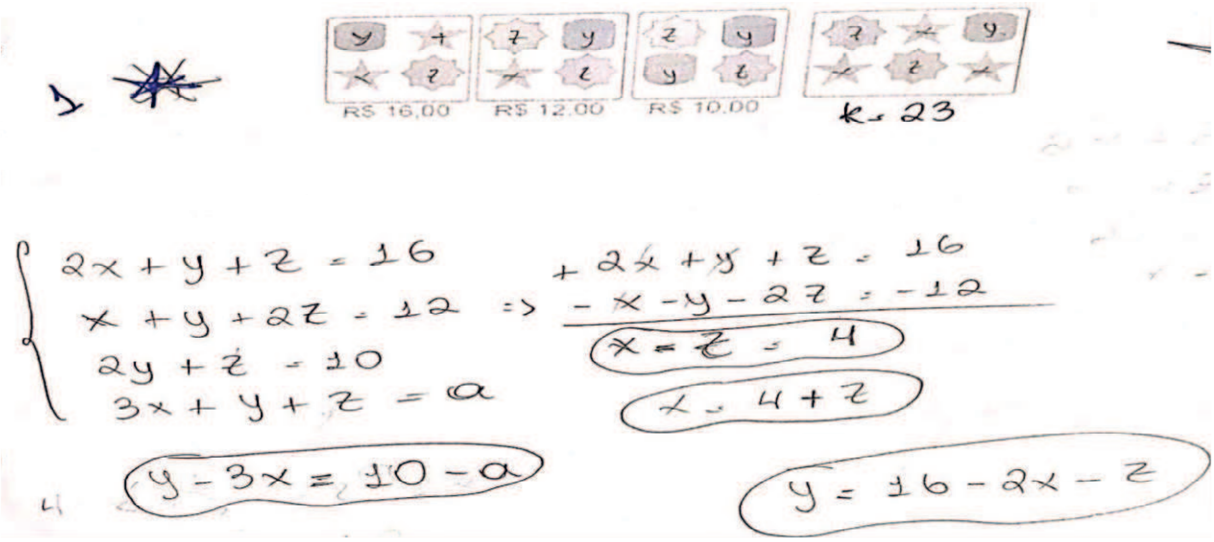
Pelos primeiros registros dos alunos na resolução desse problema, pudemos perceber claramente o processo de codificação e descodificação explicado por Andrade (1998, 2017). Esse processo é considerado de grande importância na resolução de problemas, pois a codificação e decodificação são ferramentas essenciais no desenvolvimento do processo como um todo. De acordo com Andrade (2017, p. 369),

> Codificar um problema é representá-lo em uma outra forma, outro código, outra linguagem, numa forma mais curta, mais simplificada e mais conveniente [...] descodificar um problema é procurar o seu significado, é procurar entende-lo, é decifrar a mensagem que ele expressa e, sobretudo, é também fazer uma análise crítica dessa mensagem.

[8]Adaptada de Olimpíada brasileira de matemática das escolas públicas (2016).

Inicialmente, identificamos o processo de codificação, uma vez que os alunos substituíram os desenhos por letras, sejam x, y e z, a, b e c ou c, e e b, e, em seguida, representaram algebricamente utilizando sistemas lineares, como podemos ver abaixo:

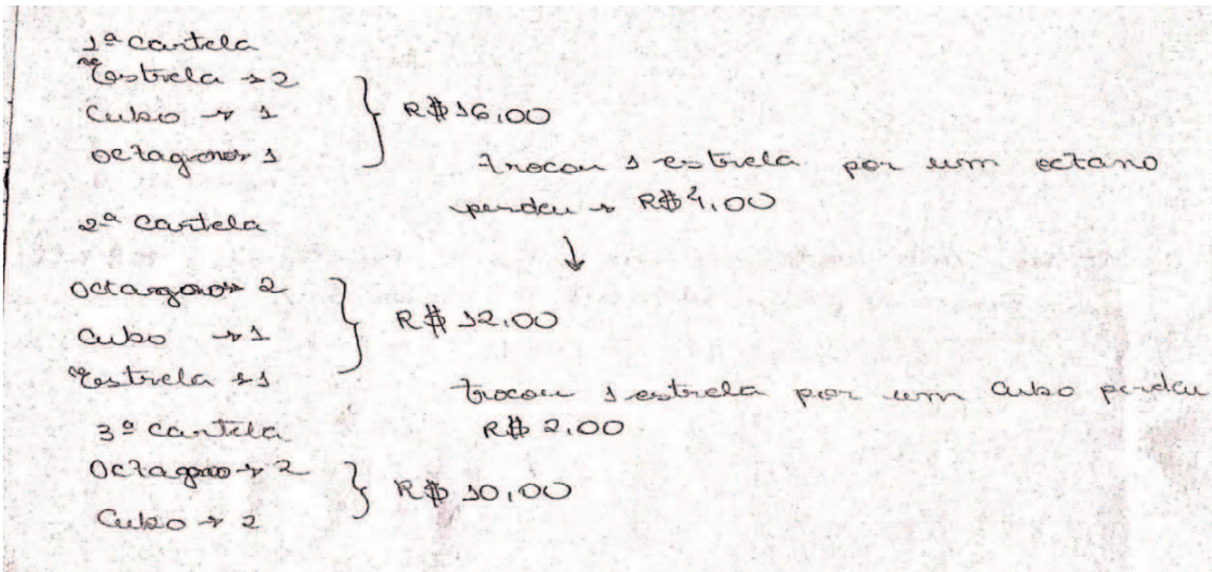
Figura 16 - Registro do processo de codificação realizado pelo A13.



Fonte: Registrado pela pesquisadora.

Como podemos ver abaixo, o aluno A8 registra seu processo de descodificação na resolução do problema:

Figura 17 - Registro do processo de descodificação realizado pelo A8

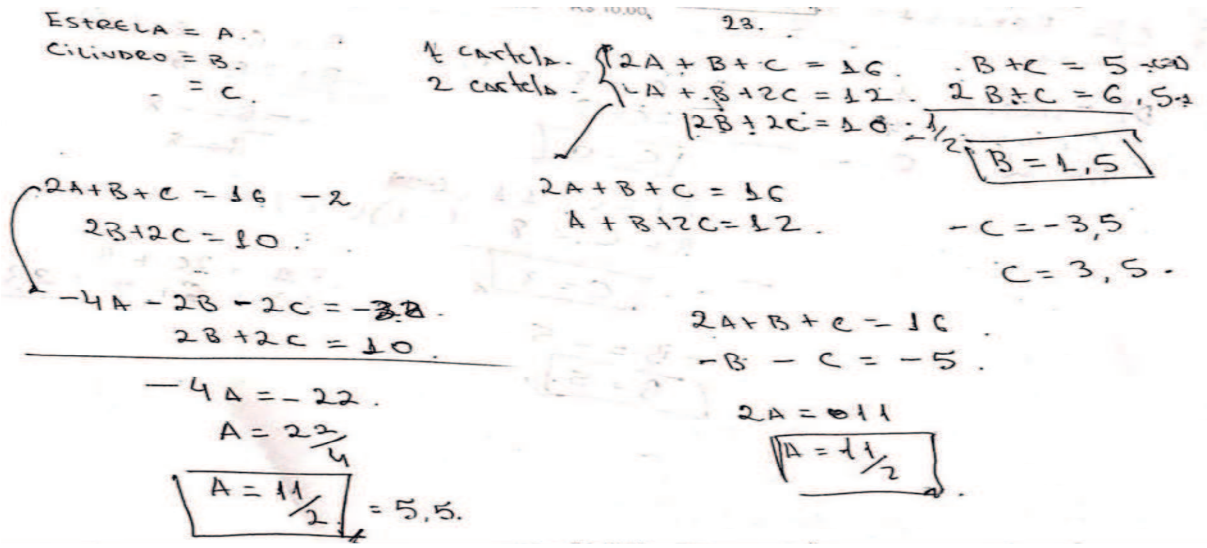


Fonte: Registrado pela pesquisadora.

Outros processos de descodificação também foram explicados pelos alunos, o que não conseguimos perceber se foi realizado antes ou depois da codificação. Como destaca Andrade (2017, p. 369), “quando o aluno busca compreender o problema que lhe é dado e procura representá-lo em um código possível de operacionalização, está fazendo quase que simultaneamente, um trabalho de descodificação e codificação”.

Os alunos responderam o problema utilizando o método da adição, substituição e até mesmo o raciocínio lógico, como veremos mais adiante. A seguir, apresentamos a resolução do aluno que utilizou o método da adição:

Figura 18 - Registro da resolução de A5 utilizando o método da adição.



Fonte: Registrado pela pesquisadora.

O aluno explica sua resolução da seguinte forma:

> ***A5:*** *Iniciei multiplicando a equação* $2a + b + c = 16$ *por* -2*, em seguida a somei com a equação* $2b + 2c = 10$ *e encontrei o valor de* $a = 5{,}5$*. Depois substitui o valor de* a *na equação* $2a + b + c = 16$*, multipliquei por* -1 *e obtive que* $-b - c = -5$*, mas, obtive novamente o valor de* a*. Em seguida, substitui* $a = 5{,}5$ *em* $a + b + 2c = 12$ *e obtive que* $b + 2c = 6{,}5$*. Ao somar* $b + 2c = 6{,}5$ *com* $-b - c = -5$*, obtive que* $b = 1{,}5$ *e que* $c = 3{,}5$*.*

Comentarista: Pela explicação do aluno, notamos um equívoco em seu registro, onde tem $2b + c = 6{,}5$, deveria ser $b + 2c = 6{,}5$.

O aluno A8 respondeu o problema utilizando o raciocínio lógico. Ele explica:

A8: *Eu fiquei observando as semelhanças e diferenças de uma cartela para a outra e observando também os preços. Ao fazer essas observações, percebi que, ao juntar as duas primeiras cartelas e subtrair delas a metade da terceira cartela, obteria exatamente a quarta cartela.*

Para melhor compreendermos o raciocínio explicado pelo aluno, ilustramos sua explicação logo a seguir:

Figura 19 - Ilustração do raciocínio utilizado pelo A5 na resolução do problema.

Fonte: organizado pela pesquisadora.

O aluno destaca que o raciocínio utilizado se assemelha com a atividade da balança, desenvolvida no 2º encontro. Ele afirma que a manipulação dos objetos é uma forma de dar mais sentido às operações em detrimento de uma mera manipulação algébrica.

Os alunos também relacionaram a atividade com a Atividade 4 – a venda de limões e maçãs, como podemos ver a seguir:

A5: *Outra coisa que só pude perceber agora, o problema pede o preço da cartela inteira, não de cada figura. Igual na atividade dos limões e maçãs.*
A13: *É verdade! E a gente se matando pra resolver esse sistema.*
A10*: Mas tá bom. Fizemos mais do que foi pedido. Agora, quando a professora for fazer as novas perguntas a gente já sabe as respostas.*

Por esse diálogo, quando o aluno menciona sobre as novas perguntas que a professora iria fazer, pudemos perceber que ele se referia à exploração do problema. Desse modo, entendemos que eles já estavam bem habituados à metodologia de ensino-aprendizagem através da Resolução de Problemas, pois sabiam que o problema não iria terminar com aquela solução.

Ao mencionarem que já saberiam a resposta para as novas perguntas, os alunos acreditavam que os novos problemas propostos diziam respeito ao valor de cada adesivo. No entanto, diferente do pensado, eles ainda não tinham a resposta para as perguntas preparadas. E, mesmo que tivessem, novas perguntas seriam feitas, pois o professor que trabalha com a exploração de problemas não precisa simplesmente preparar a aula, mas estar preparado para a aula.

Como afirma Andrade (2017):

> No cotidiano da sala de aula não é possível prescrever exatamente como podemos trabalhar com a exploração de problemas. O que temos são apenas ferramentas possíveis de serem ou não usadas na aventura da travessia de um rio ou de uma viagem qualquer. A proposta de Exploração-Resolução-Proposição de Problemas precisa ser sempre percebida como uma proposta aberta, não fechada, embora não solta. (ANDRADE, 2017, p. 367).

Após a discussão das resoluções dos alunos, a professora levantou os seguintes questionamentos: E se a cartela com seis adesivos tivesse apenas estrelas, quanto custaria? R. R$ 33,00. Qual o adesivo mais caro? R. Estrela. E o mais barato? R. Cilindro. Quanto custa cada adesivo? R. Estrela R$ 5,50; cilindro R$ 3,50; balão R$ 1,50. Por fim, questionou: E se um adesivo de estrela custasse 4 reais, qual seria o preço dos outros adesivos? Com esse questionamento, a professora objetivou iniciar a discussão de Sistemas Lineares, pois, sob essa condição, teríamos um Sistema Impossível.

Diante do questionamento, o aluno A13 prontamente respondeu:

A13: *Ah! Eu já tenho as relações, é só substituir.*

P: *Quais relações?*

A13: *Eu chamei estrela de x, ao fazer os cálculos que eu expliquei anteriormente, obtive que* $x = 4 + z$. *Assim, como* $x = 4$, *temos que* $z = 0$.

Comentarista: Essa relação está destacada em seu registro nas páginas anteriores.

P: *E quem é z?*

A13: *É essa figura que tem oito vértices.*

P: *Então o cilindro vale quanto?*

A13: *Pela cartela 1, temos que o cilindro vale R$ 8,00.*

A8: *Não, então assim, a cartela 3 tem que custar R$ 16,00.*

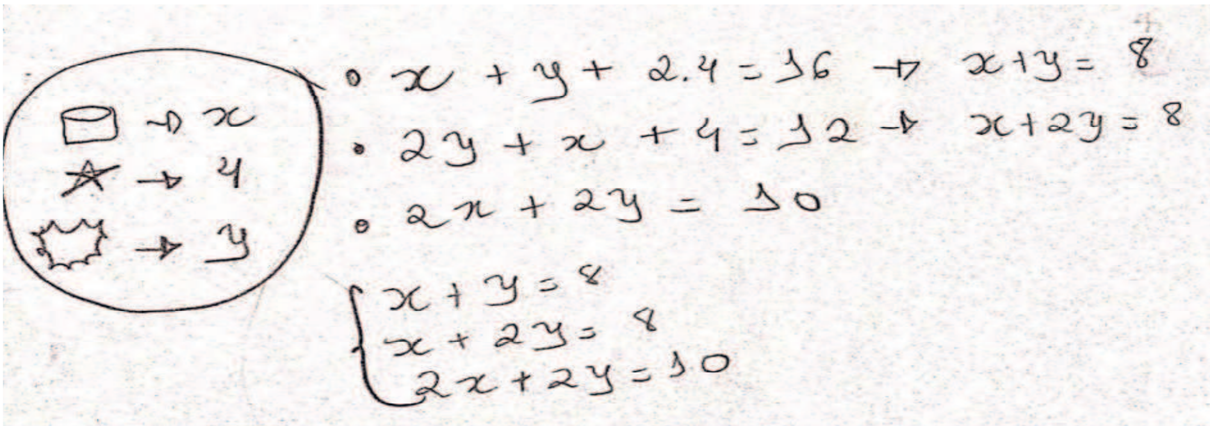
P: *Qual seria o valor do cilindro pela cartela 3?*

A8: *Como ele encontrou que o balão custa R$ 0,00, pela cartela 3 o cilindro custaria R$ 5,00.*

Nesse momento, outros alunos começaram a se exaltar e um enorme barulho surgiu na sala. Por isso, a professora interveio e pediu que eles escrevessem o novo sistema, de modo que obedecesse a condição inicial: “a estrela vale R$ 4,00”.

O aluno A5 representou como podemos ver abaixo:

Figura 20 - Registro da resolução do A5.



Fonte: Registrado pela pesquisadora.

Ao montar o sistema, poucos alunos tentaram resolvê-lo algebricamente. Alguns apenas observaram a equação e retiraram suas conclusões, como podemos observar no diálogo a seguir:

A5: *Chegamos a uma impossibilidade!*

P: *Por que?*

A5: *Como é que duas equações diferentes vão ser igual a 8?*

P: *Porque duas equações diferentes são iguais a 8 podemos concluir uma impossibilidade?*

A10: *Não! Pois seria possível se y fosse igual a 0.*

A6: *Pela primeira e terceira equação podemos garantir a impossibilidade, pois se dividirmos a terceira equação por 2, teremos equações iguais que totalizam valores diferentes.*

P: *Exatamente! Então o que isso significa?*

A2: *Que esse sistema é impossível.*

P: *O que mais vocês observaram?*

A1: *Se alterar o valor de qualquer figura nós chegamos a essa impossibilidade.*

P: *Vocês concordam com isso?*

A12: *Sim! Só daria certo se fosse um Sistema Possível e indeterminado, aí teríamos uma quantidade infinita de valores para essas figuras.*

Mediante o diálogo, os alunos foram percebendo e exemplificando a impossibilidade do sistema nas cartelas, sendo visualmente óbvio que teríamos um Sistema Impossível.

A discussão de um sistema linear foi realizada mediante sua resolução, isto é, ao compreendermos que ele pode ter uma, infinitas ou nenhuma solução. Diante disso, podemos classificar os Sistemas Lineares, em geral, por Impossível (SI), Possível e Determinado (SPD) e Possível e Indeterminado (SPI).

Assim, o Sistema Impossível é aquele que não tem solução, isto é, não existe ênupla ordenada que satisfaça, simultaneamente, todas as equações do sistema. Por outro lado, o Sistema Possível e Determinado, tem uma única solução, ou seja, uma única ênupla ordenada que satisfaça simultaneamente todas as equações do sistema, já o Sistema Possível e Indeterminado é aquele que tem infinitas soluções, isto é, existem infinitas ênuplas ordenadas que satisfaçam simultaneamente todas as equações do sistema.

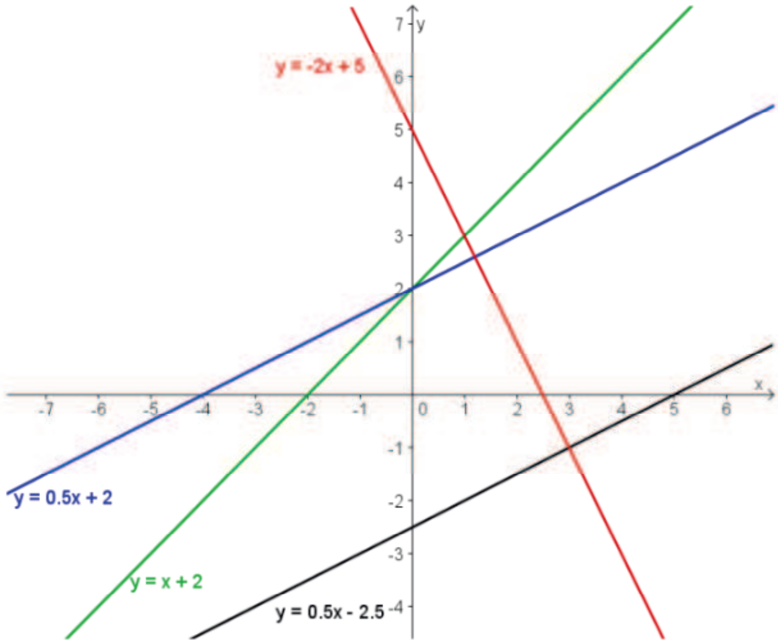
4.1.6 6º Encontro – Representando Sistemas e propondo problemas

Atividade 6 - Propondo Problemas[9]

Objetivos:

- Estimular a transição entre as representações de Sistemas Lineares;
- Promover o aprendizado de Sistemas Lineares através da Proposição de Problemas;

[9]Tarefa adaptada de Ponte, Matos e Branco (2009).



Nessa aula, compareceram 10 alunos. A turma recebeu a imagem acima e lhes foi proposto que se dividissem em três grupos e que, de acordo com o gráfico recebido, cada grupo representasse três sistemas, de modo que fossem, respectivamente, Sistema Linear Possível e Determinado, Possível e Indeterminado e Impossível.

Os grupos tiveram um pouco de dificuldade na manipulação das incógnitas, sendo necessária a intervenção da professora, como podemos ver a seguir:

A7: *É pra olhar esse gráfico e formar três sistemas?*

P: *Isso!*

A7: *Então a gente vai ter que responder de um em um pra saber qual é possível e impossível?*

P: *Só é possível fazer a classificação respondendo os sistemas?*

A1: *É possível também pelo gráfico, mas eu não lembro exatamente como.*

A3: *Eu também não! A professora traz coisas que a gente viu há muitos anos, não tem como lembrar de tudo.*

P: *Vamos relembrar! Observem o gráfico e escolham duas retas.*

A13: $y = x + 2$

A6: $y = -2x + 5$

P: *Organizando as variáveis das duas equações para formar um sistema linear. Como ficam?*

A10: *Temos* $-x + y = 2$ *e* $2x + y = 5$

P: *Agora que temos o sistema, esqueçam as outras equações e foquem somente nessas duas retas. O que vocês podem observar?*

A4: *Que elas têm um único ponto em comum, o ponto (1,3).*

P: *Então que tipo de sistema é esse?*

A5: *É um sistema possível e determinado.*

P: *Exatamente! Agora observem as demais equações e montem os outros sistemas.*

Após esse diálogo, a professora deu um tempo para a turma e eles formaram e apresentaram os seguintes sistemas:

Quadro 9 – Respostas dos grupos

Grupo	**SPD**	**SPI**	**SI**
01 (A6, A7, A10)	$\begin{cases} \boldsymbol{x - y = -2} \\ \boldsymbol{2x + y = 5} \end{cases}$	$\begin{cases} x - y = -2 \\ 2x - 2y = -4 \end{cases}$	$\begin{cases} \boldsymbol{0,5x - y = 2,5} \\ \boldsymbol{0,5x - y = -2} \end{cases}$
02 (A1, A2, A9, A13)	$\begin{cases} \boldsymbol{0,5x - y = -2} \\ \boldsymbol{2x + y = 5} \end{cases}$	$\begin{cases} -0{,}5x + y = 2 \\ -x + 2y = 4 \end{cases}$	$\begin{cases} 0{,}5x - y = 2{,}5 \\ 0{,}5x - y = -2 \end{cases}$
03 (A3, A5, A12)	$\begin{cases} \boldsymbol{2x + y = 5} \\ \boldsymbol{-x + y = 2} \end{cases}$	$\begin{cases} x + 0{,}5y = 2{,}5 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$	$\begin{cases} 0{,}5x - y = 2{,}5 \\ 0{,}5x - y = -2 \end{cases}$

Fonte: Adaptado aos dados da pesquisa.

Em seguida, foi solicitado que cada grupo escolhesse um tipo de sistema e criasse um problema. De início, a turma ficou surpresa, pois estavam habituados a receber o problema, no entanto, fizemos diferente, eram eles que precisariam propor o problema.

Os alunos mencionaram que nunca haviam realizado atividade como essa, parecia que estava tudo ao contrário, pois eles partiram de um gráfico, encontraram equações, chegaram aos sistemas e só depois iriam elaborar o problema.

No entanto, não tinha algo ao contrário, apenas estávamos retirando-os de suas zonas de conforto, uma vez que a proposição de problemas pode acontecer em diversos momentos, “ela pode ocorrer tanto antes como durante e depois do processo de resolução e exploração de problemas”. (ANDRADE, 2017, p. 389-390).

Os três grupos escolheram o Sistema Possível e Determinado, uma vez que somente nesse tipo de sistema é que se tem uma única solução que satisfaz o problema. Vejamos a seguir a descrição dos problemas criados pelos grupos, como também uma análise deles.

O grupo 1, formado pelos alunos A6, A7 e A10, apresentou o seguinte problema:

Problema	Representação Algébrica
Carlos e Joana são um casal que namoram há bastante tempo. Ambos têm filhos, porém, Carlos tem dois filhos a mais que Joana. A soma da quantidade de filhos de Carlos com o dobro da quantidade de filhos de Joana é igual a cinco. Quantos filhos cada um tem?	$\begin{cases} \boldsymbol{x - y = -2} \\ \boldsymbol{2x + y = 5} \end{cases}$

Fonte: Produção dos alunos.

O grupo iniciou a apresentação do problema pedindo que a turma não consultasse a visualização gráfica recebida inicialmente, para que todos interagissem e juntos construíssem a representação algébrica deste problema. Fizeram a leitura e questionaram a turma como poderiam resolver este problema.

Durante a resolução, surgiu um comentário importante, que queremos ressaltar:

> ***A13****: Se esse problema fosse apresentado aos alunos do ensino fundamental, com certeza eles não utilizariam Sistemas Lineares, iam no tentativa e erro.*
> ***A6****: Mas nós queremos por Sistemas Lineares.*

Nesse momento, a professora interveio e pediu que A13 explicasse melhor sobre a estratégia, após ele explicar algumas possibilidades, a professora pediu ao grupo 1 que organizasse uma tabela para as possibilidades citadas por A13, de acordo com a primeira condição do problema. Assim, obtivemos a seguinte tabela:

Tabela 2 – Possibilidade citadas por A13 na resolução do problema.

Filhos de Joana	Filhos de Carlos
1	3
2	4
3	5
4	6
5	7
6	8
...	...

Fonte: Registrado pela pesquisadora.

A6: *E agora, como fazemos?*
A13: *Basta observar em qual linha a soma da quantidade de filhos do Carlos com o dobro da quantidade de filhos de Joana é igual a cinco. De cara matamos a charada na primeira linha!*

Os alunos ficaram sem graça com a resposta imediata dos colegas e queriam finalizar a apresentação, então, a professora pediu para continuar e falou sobre a importância de casos particulares fornecerem um caso geral. Os alunos encontraram a representação aritmética, o próximo passo seria fazer uma transição para a representação algébrica.

Houve pequenas discussões sobre como partir dessa situação, observando a frase "Carlos tem dois filhos a mais que Joana" e por meio da tabela, os alunos perceberam que poderiam representar algebricamente da seguinte forma: $\boldsymbol{x+2=y}$, em que $\boldsymbol{x}$ representa os filhos de Joana e $\boldsymbol{y}$ representa os filhos de Carlos. Da mesma forma, foi solicitado que representassem algebricamente a segunda informação do problema, assim, representaram da seguinte forma: $\boldsymbol{y+2x=5}$.

O grupo juntou as duas equações, fez a manipulação algébrica necessária e escreveu o sistema linear como representação algébrica do problema. Em seguida, a professora pediu que os alunos resolvessem utilizando algum método e localizassem, no gráfico, as retas que correspondem ao problema.

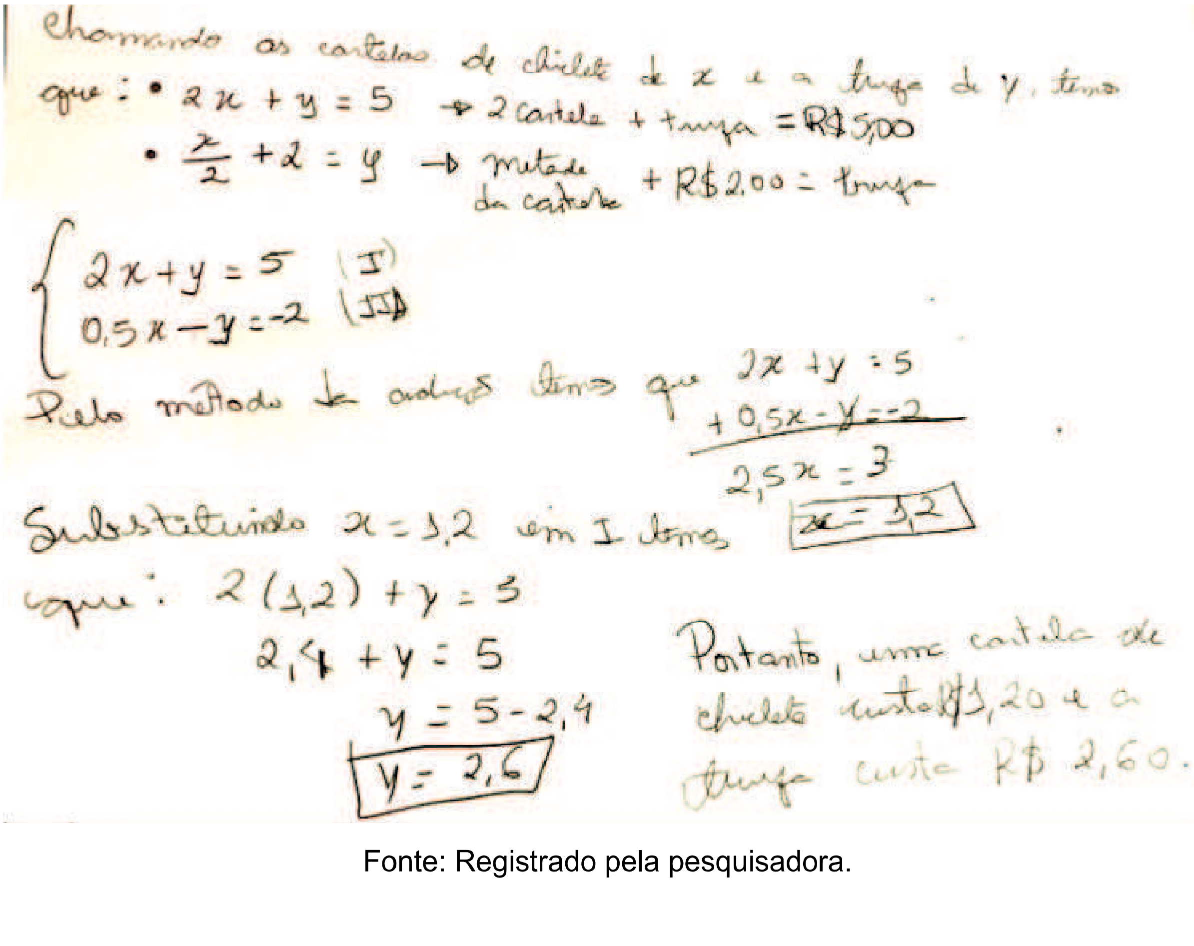
O grupo 02, formado pelos alunos A1, A2, A9 e A13, apresentou o seguinte problema:

Problema	Representação Algébrica
Numa determinada *bomboniere* da cidade, a soma do preço de duas cartelas de chiclete mais 1 trufa totaliza R$ 5,00. Sabendo que metade da cartela de chiclete custa R$ 2,00 a menos que a trufa, quanto custa a cartela inteira?	$\begin{cases} 0{,}5x - y = -2 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$

Fonte: Produção dos alunos.

A turma resolveu o problema sem apresentar dificuldades, como podemos ver a seguir no registro do aluno A12:

Figura 21 - Registro da resolução de A12.


Chamando as cartelas de chiclete de x e a trufa de y, temos que: • $2x + y = 5$ → 2 cartela + trufa = R$ 5,00

• $\frac{x}{2} + 2 = y$ → metade da cartela + R$ 2,00 = trufa

$\begin{cases} 2x + y = 5 & (I) \\ 0{,}5x - y = -2 & (II) \end{cases}$

Pelo método da adição temos que

$$\begin{array}{r} 2x + y = 5 \\ + \; 0{,}5x - y = -2 \\ \hline 2{,}5x = 3 \end{array}$$

$\boxed{x = 1{,}2}$

Substituindo $x = 1{,}2$ em I temos que: $2(1{,}2) + y = 5$

$2{,}4 + y = 5$

$y = 5 - 2{,}4$

$\boxed{y = 2{,}6}$

Portanto, uma cartela de chiclete custa R$ 1,20 e a trufa custa R$ 2,60.

Fonte: Registrado pela pesquisadora.

Optamos por apresentar o registro do A12 por considerarmos uma boa escrita matemática. E válido ressaltar que os alunos participantes dessa Oficina deixaram um pouco a desejar nesse ponto, como também no rigor e na justificativa matemática.

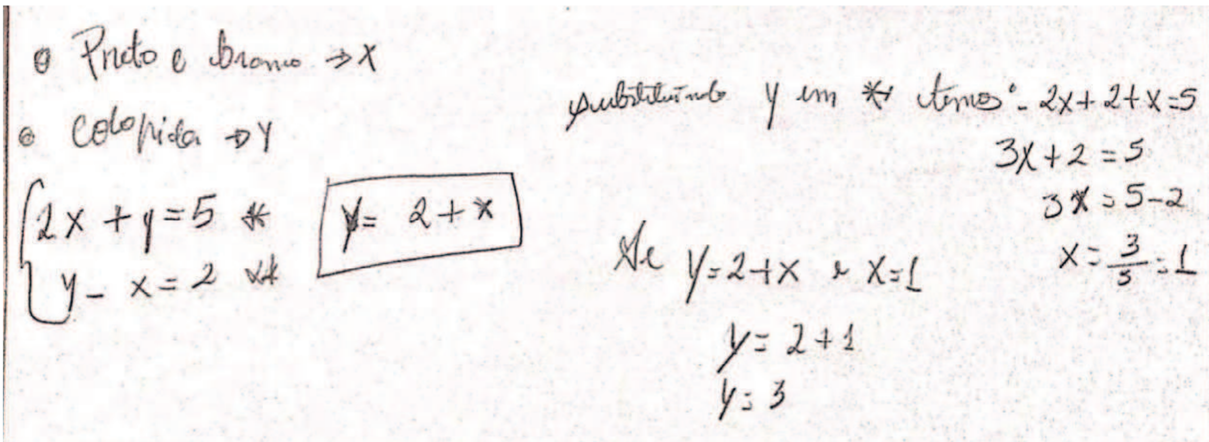
O grupo 03, formado pelos alunos A3, A5, A12, apresentou um sistema semelhante ao grupo 01, com o seguinte problema:

Problema	Representação Algébrica
Carlos foi à xerox da universidade e fez três impressões, sendo uma colorida e duas preto e branco e pagou um valor de R$ 5,00. Ao perceber que a impressão colorida era R$ 2,00 mais cara que a preto e branco, Carlos se arrependeu amargamente, pois deveria ter imprimido todas as folhas em preto e branco. Quanto custava cada tipo de impressão?	$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ -x + y = 2 \end{cases}$

Fonte: Produção dos alunos.

Na resolução desse problema, foram encontradas duas representações. Na primeira representação, que também foi pensada pelo grupo e está disposta acima, temos a impressão colorida representada por y e a impressão em preto e branco representada por x, como podemos ver no registro abaixo:

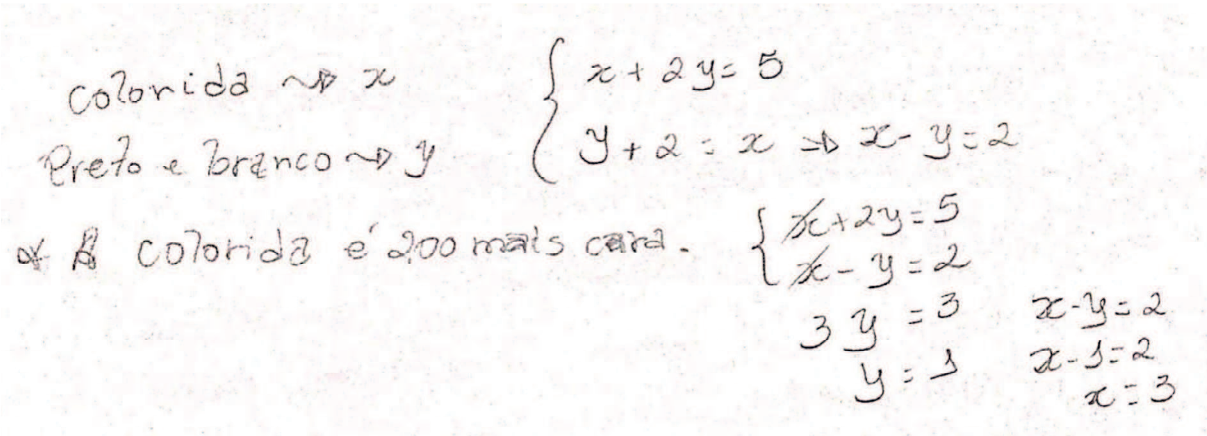
Figura 22 - Registro da resolução de A6.



Fonte: Registrado pela pesquisadora.

Na segunda representação, temos o sistema $\begin{cases} \boldsymbol{x + 2y = 5} \\ \boldsymbol{x - y = 2} \end{cases}$. Vemos, nesse sistema, que a impressão colorida é representada por x e a impressão em preto e branco representada por y, como podemos ver no registro a seguir:

Figura 23 - Registro da resolução de A10.



colorida $\rightarrow x$

Preto e branco $\rightarrow y$

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ y + 2 = x \Rightarrow x - y = 2 \end{cases}$$

A colorida é 200 mais cara.

$$\begin{cases} \cancel{x} + 2y = 5 \\ \cancel{x} - y = 2 \end{cases}$$

$3y = 3$

$y = 1$

$x - y = 2$

$x - 1 = 2$

$x = 3$

Fonte: Registrado pela pesquisadora.

Pudemos observar que, na resolução do problema, a utilização de variáveis diferentes não alterou a solução. Então, a professora questionou sobre o que aconteceu. Foi observado e se chegou ao consenso de que as duas representações estão corretas e coerentes ao problema, visto que, não houve misturas de variáveis, somente representações diferentes, que propiciaram uma solução correta.

4.1.7 7º Encontro – Seminário 01

Seminário – Grupo 01

O primeiro grupo, composto pelos alunos A2, A8 e A10, iniciou o seminário trazendo uma justificativa sobre o ensino de Sistemas Lineares através da Resolução de Problemas, explicando que os Sistemas Lineares são necessários na resolução de diversos problemas e podem modelar diversas situações do cotidiano. Por essa razão, seu estudo é necessário, tendo em vista a continuidade da carreira acadêmica dos alunos e a interpretação do comportamento de alguns fenômenos.

Os discentes ainda destacaram que a resolução de problemas é uma tendência em Educação Matemática e, assim, tem sua relevância teórica comprovada. Tratando-se de Sistemas Lineares, os alunos enfatizaram que, muitas vezes, os estudantes resolvem Sistemas Lineares usando os algoritmos necessários, porém, não conseguem interpretar o que significa o resultado por eles obtido. Assim, a perspectiva da Resolução de Problemas pode ser muito útil na abordagem desses conteúdos, visto que, os sistemas serão utilizados para modelar e representar matematicamente o problema, possibilitando, dessa forma, uma maior interpretação dos resultados obtidos.

Diante disso, os alunos afirmaram que elaboraram um problema a ser desenvolvido com a turma escolhido com base nos critérios de um bom problema dado por Lester (2012), que destaca que os problemas devem exigir um nível mais alto de pensamento matemático e abordar mais de um conteúdo. Na aplicação, se inspiraram nas fases de Polya, apresentando o seguinte problema:

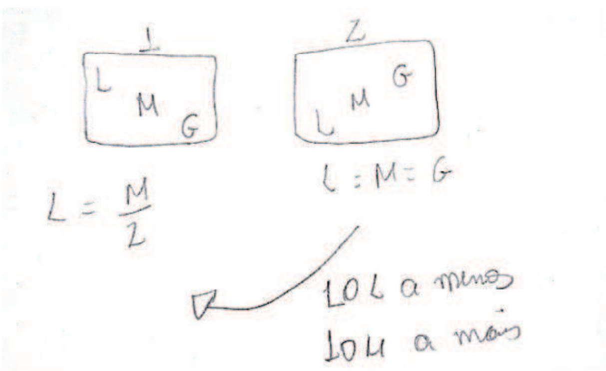
Duas caixas contêm laranjas, maçãs e goiabas. As duas caixas possuem o mesmo número de frutas. • Caixa 1: o número de laranjas é o dobro do número de maçãs; • Caixa 2: o número de laranjas, maçãs e goiabas são iguais. Sabendo que a caixa 2 possui 10 laranjas a menos e 10 maçãs a mais que a caixa 1, qual o número total de frutas em cada caixa?

Fonte: Produção dos alunos.

Os alunos demoraram bastante na resolução, sendo necessária a intervenção do grupo em diversos momentos. O grupo percebeu que os alunos estavam tentando resolver o problema sem mesmo ter compreendido. Então, falaram sobre a importância de compreender o problema antes de estabelecer ou executar um plano. Dessa forma, propuseram a ilustração do problema por meio de um desenho como forma para facilitar a compreensão.

O A13 representou da seguinte forma:

Figura 24 - Registro da resolução de A13.



Fonte: Registrado pela pesquisadora.

E explicou:

A13*: Temos duas caixas com laranjas, maçãs e goiabas. Na caixa 1, sabemos que o número de laranjas é o dobro de maçãs. Na caixa 2, temos uma quantidade de frutas iguais. Na caixa 2 temos 10 laranjas a mais que na caixa 1 e 10 maçãs a menos. Acredito que agora com essa ilustração dar pra prosseguir na resolução do problema.*

PA2*: Vamos analisar... De acordo com sua representação na caixa 1, se eu tiver 10 maçãs, terei quantas laranjas?*

A13*: 5 laranjas.*

PA2*: O que é que o enunciado do problema diz sobre a quantidade de laranjas e maçãs da caixa 1?*

A13*: Que o número de laranjas é o dobro do número de maçãs. Então eu representei errado, seria* $M = L/2$.

PA8*: Observe também que você representou as laranjas da caixa 1 por l e na caixa 2 também, dessa forma, elas teriam que assumir o mesmo valor. Assim acontece também com as outras frutas.*

A13*: Se na caixa 1 eu tenho laranjas e na caixa 2 também, porquê eu não posso chamar todas de l? São laranjas diferentes?*

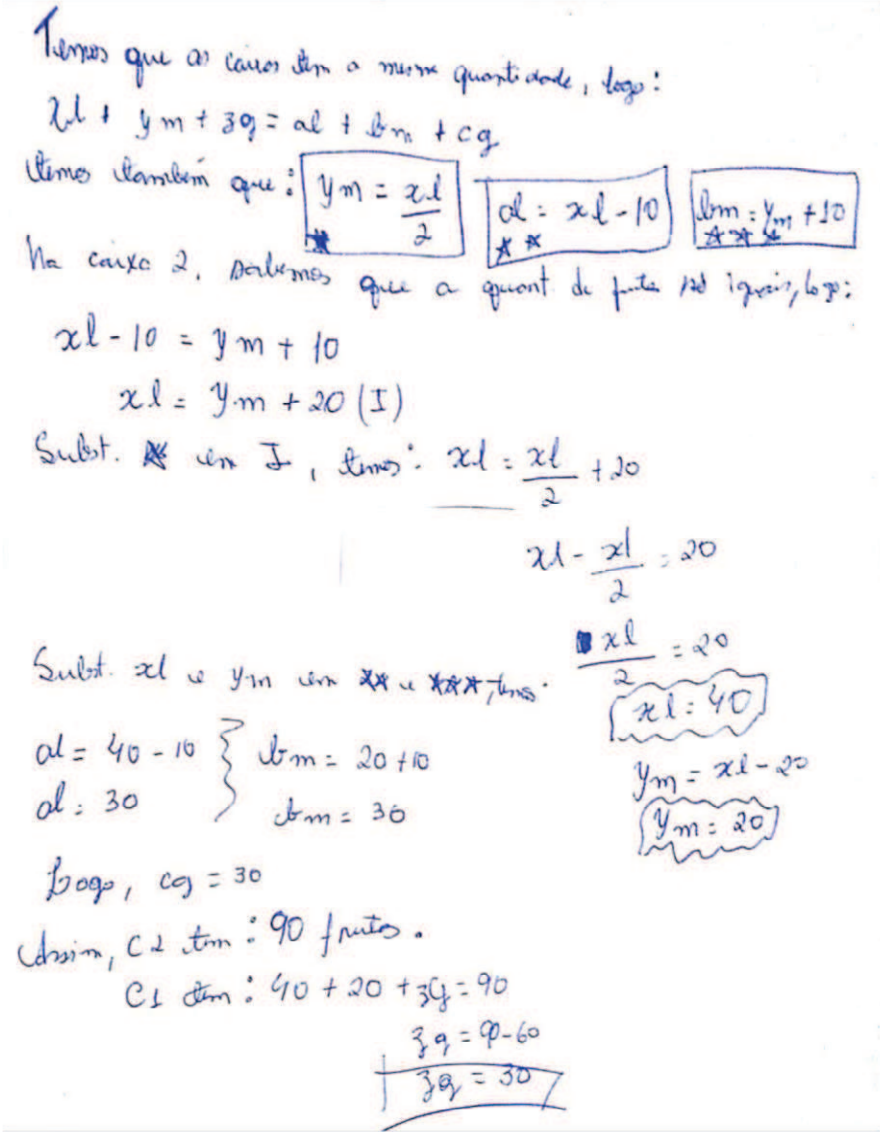
PA10: *São quantidades de laranjas diferentes. Então você deve usar o l como unidade e não como incógnita.*

PA2: *Vamos ler o problema novamente e registrar algebricamente. Observem que na caixa 1 temos* x *laranjas e na caixa 2 temos* a *laranjas. O problema garante que a caixa 2 tem 10 laranjas a menos que a caixa 1. Logo,* $a\,laranjas - 10 = x\,laranjas$. *Como podemos continuar?*

Comentarista: Aparentemente, o erro da resolução seria somente na representação da relação de dobro. Mas, ao analisarmos detalhadamente, percebemos uma concepção errônea de Álgebra, em que o aluno representa valores desconhecidos diferentes com a mesma incógnita. Apesar de ele ter separado as frutas das caixas por incógnitas diferentes, ele não percebe que, embora seja a mesma fruta, ele não pode representá-la em ambas as caixas pelas mesmas incógnitas, pois as caixas possuem quantidades de frutas diferentes.

Ao continuar o diálogo, os alunos se mostraram mais esclarecidos a respeito da representação algébrica e, assim, deu-se continuidade a atividade. Como podemos ver no registro abaixo, o aluno representou algebricamente, de maneira correta, e utilizou o método da substituição na resolução do Sistema:

Figura 25 - Registro da resolução de A6


Temos que as caixas têm a mesma quantidade, logo:

$xl + ym + zg = al + bm + cg$

Temos também que: $\boxed{ym = \frac{xl}{2}}$ * $\boxed{al = xl - 10}$ ** $\boxed{bm = ym + 10}$ ***

Na caixa 2, sabemos que a quant. de frutas são iguais, logo:

$xl - 10 = ym + 10$

$xl = ym + 20$ (I)

Subst. * em I, temos: $xl = \frac{xl}{2} + 20$

$xl - \frac{xl}{2} = 20$

$\frac{xl}{2} = 20$

$\boxed{xl = 40}$

$ym = xl - 20$

$\boxed{ym = 20}$

Subst. xl e ym em ** e ***, temos:

$al = 40 - 10$; $bm = 20 + 10$

$al = 30$; $bm = 30$

Logo, $cg = 30$

Assim, C2 tem: 90 frutas.

C1 tem: $40 + 20 + zg = 90$

$zg = 90 - 60$

$\boxed{zg = 30}$

Fonte: Registrado pela pesquisadora.

Ao ser solicitado pelo grupo para explicar o raciocínio utilizado, A6 explicou:

A6*: Representei primeiramente as frutas em cada caixa. Sabendo que a quantidade de frutas nas caixas é igual, igualei as duas equações. Depois representei as condições do problema. Em seguida, utilizei o método da substituição e cheguei aos valores desejados.*

Ao final da resolução, os alunos apresentaram novos questionamentos à turma, como podemos ver a seguir:

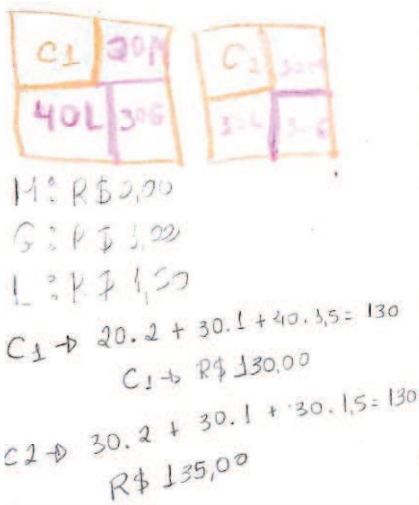
- Se uma maçã custa 2 reais, uma goiaba custa 1 real e duas laranjas custam 3 reais, qual o valor necessário para comprar cada caixa de frutas completa?
- Se cada maçã pesa 173 gramas, cada goiaba pesa 110 gramas e cada laranja pesa 0,09 quilos, qual das duas caixas é a mais pesada?

Fonte: Produção dos alunos.

Comentarista: A partir destes questionamentos, pudemos identificar a Exploração de Problemas no seminário dos alunos, uma vez que eles não finalizaram ao obter a resposta do primeiro problema, os discentes foram além, buscando novos resultados e novas ideias.

Os alunos não apresentaram dificuldades no primeiro questionamento, alguns fizeram mentalmente e outros fizeram o registro, como podemos ver abaixo:

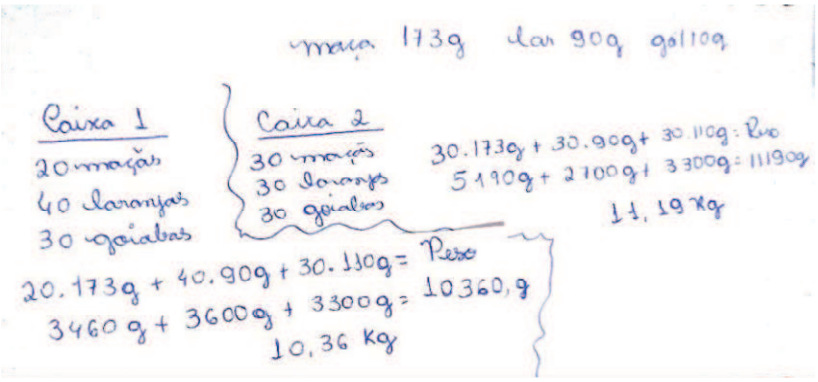
Figura 26 - Registro da solução de A3.



Fonte: Registrado pela pesquisadora.

Já o segundo questionamento demandou mais tempo. De início, alguns alunos mencionaram que a caixa mais pesada seria a caixa 2, outros a caixa 1. Assim, decidiram que precisariam fazer o registro para comparar as caixas. E registraram, como podemos ver abaixo:

Figura 27 - Registro da resolução de A5.



Fonte: Registrado pela pesquisadora.

De modo geral, podemos afirmar que o grupo obteve êxito no seminário, uma vez que os alunos se mostraram preparados, apresentando domínio tanto do conteúdo, quanto da metodologia, sabendo mediar bem todas as situações que apareceram.

4.1.8 8º Encontro – Seminário 02

Seminário – Grupo 02

O segundo grupo, formado pelos alunos A4, A6 e A9, iniciou a aula entregando uma cópia impressa a cada aluno da turma com o seguinte problema:

> Em um estacionamento no shopping Blue Beam há 18 vagas ocupadas por motocicletas e/ou carros em um mesmo horário. Sabendo que o número de total de rodas são 50, quantos carros e quantas motocicletas tinham nesse horário no estacionamento?
> Obs.: (Considerando que não houve entrada e saída de motocicleta ou carro).

Fonte: Produção dos alunos.

O grupo solicitou a leitura individual, em seguida, fizeram a leitura grupal e pediram que os alunos falassem com suas próprias palavras o que eles entenderam sobre o problema:

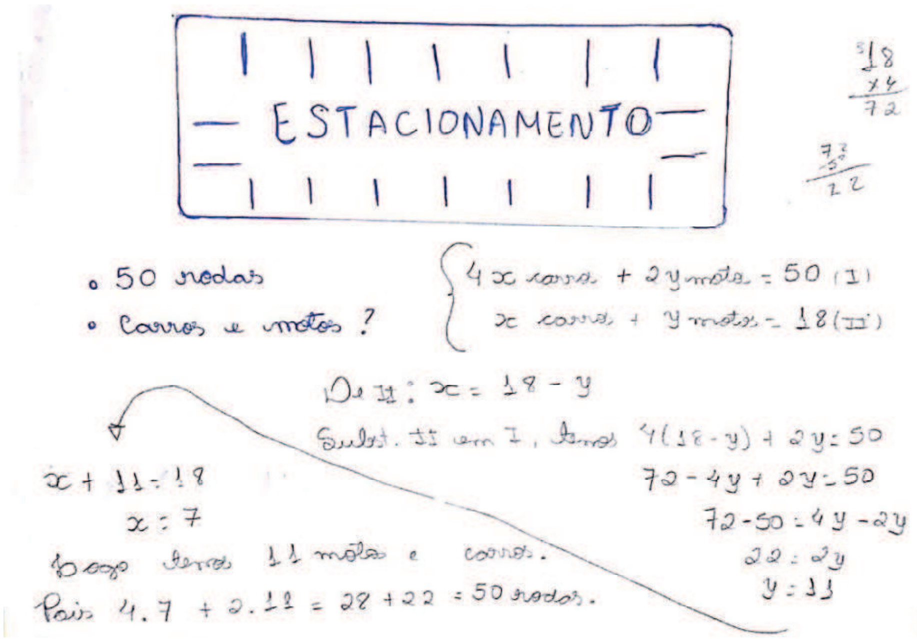
> ***A12****: Temos um estacionamento com carros e motos.*
> ***A1****: E rodas.*
> ***A2****: 50 rodas.*
> ***A12****: E o problema é saber quantos carros e quantas motos.*

Comentarista: Durante nossa Oficina, essa foi uma prática bem predominante, sempre frisávamos na importância de compreender o problema, antes de tentar resolvê-lo.

A turma resolveu o problema e o grupo solicitou que eles registrassem no quadro, de modo que cada aluno explicasse seu raciocínio.

Apresentamos abaixo o registro de A5, que utilizou o recurso do desenho para ilustrar o problema e empregou a representação algébrica na resolução. Ao final, o aluno ainda usou a representação numérica para justificar a solução encontrada.

Figura 28 - Registro da resolução de A5.



Fonte: Registrado pela pesquisadora.

Comentarista: Essa mobilização simultânea entre as representações nos permite visualizar a originalidade da atividade matemática realizada, como destacado por Duval (2003).

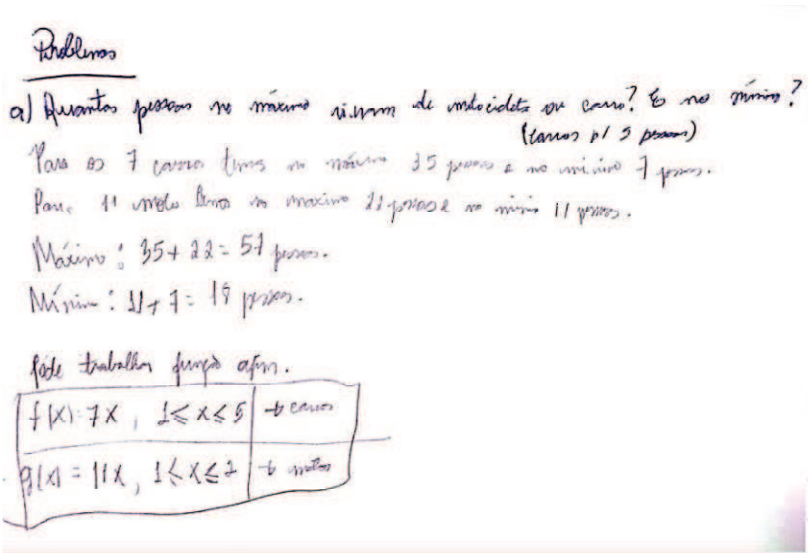
Os alunos mencionaram que esse problema estava em um nível fácil, visto que eles já resolveram problemas mais difíceis no decorrer da Oficina. Entretanto, destacaram que, se o problema tivesse sido apresentado no início da Oficina, eles teriam respondido pela estratégia da tentativa e erro, visto que possuíam bastante dificuldade em traduzir um problema da língua materna para a linguagem algébrica.

Em seguida, o grupo solicitou que a turma se juntasse em trios e, baseados no problema apresentado, criassem novos problemas. Exceto o grupo que estava apresentando, havia 10 alunos na classe, dessa forma, formaram-se dois trios e um quarteto:

> ***A2**: É pra fazer semelhante ao nosso grupo, manter a situação e questionar outras coisas. Né isso?*
> ***PA9**: Isso, vamos explorar o problema.*
> ***PA4**: Cada trio deve criar o seu problema, ou problemas.*
> ***A2**: Então deve ser mais de um problema?*
> ***PA4**: Pode ser sim. Bom trabalho!*

O trio formado pelos alunos A2, A7 e A13 apresentou o seguinte problema:

Figura 29 - Registro dos alunos A2, A7 e A13.


Problemas

a) Quantas pessoas no máximo viajam de motocicleta ou carro? E no mínimo?
(carros p/ 5 pessoas)

Para os 7 carros temos no máximo 35 pessoas e no mínimo 7 pessoas.

Para 11 motocicletas no máximo 22 pessoas e no mínimo 11 pessoas.

Máximo: 35 + 22 = 57 pessoas.

Mínimo: 11 + 7 = 18 pessoas.

Pode trabalhar função afim.

$f(x) = 7x$, $1 \leq x \leq 5$	→ carros
$g(x) = 11x$, $1 \leq x \leq 2$	→ motos

Fonte: Registrado pela pesquisadora.

O trio apresentou o problema e o grupo que estava mediando à aula questionou:

***PA9**: A que nível de escolaridade este problema pode ser apresentado?*

***Trio**: Depende, se for utilizando Sistemas Lineares, só depois do 7º ano. Agora se a primeira parte for resolvida antes, esse problema que fizemos pode ser resolvido até no 5º ano.*

***PA6**: É possível abordar outro conteúdo a partir deste problema?*

***Trio**: Sim! Poderíamos utilizar a função afim e questionar quem é o domínio e a imagem das funções.*

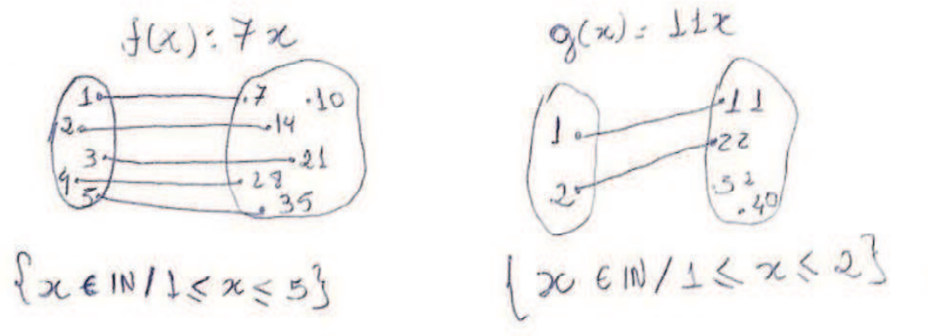
***PA4**: E quem é o domínio?*

***Trio**: São os valores que x pode assumir.*

Nesse momento, o grupo que estava mediando o seminário estendeu o questionamento sobre o domínio e a imagem dessa função para toda a turma.

Das resoluções dos alunos, destacamos o registro dos alunos A1, A8 e A10, que representaram a função por meio de um diagrama e domínio por meio de um intervalo, como podemos ver abaixo:

Figura 30 - Registro dos alunos A1, A8 e A10.

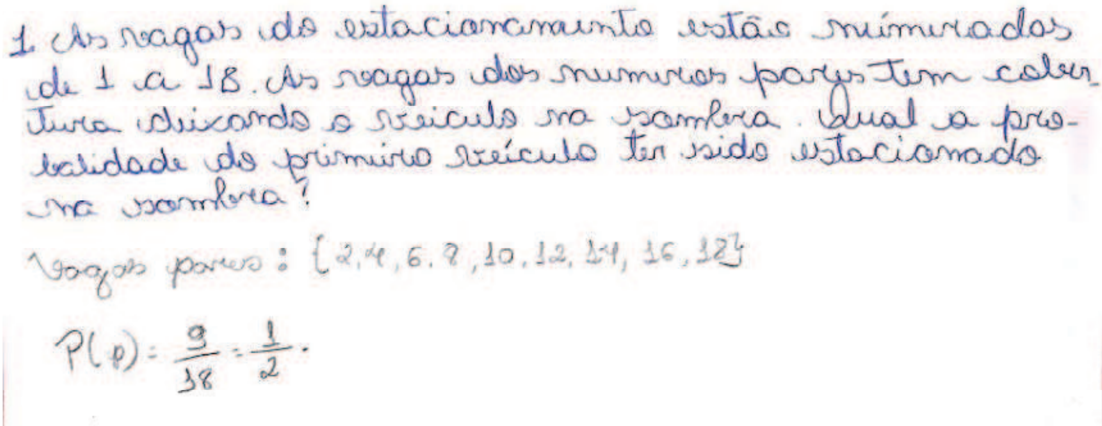


Fonte: Registrado pela pesquisadora.

Por meio desta mediação, podemos perceber que os alunos compreenderam a perspectiva da exploração de problemas, pois como destaca Andrade (2017), o trabalho com exploração de problemas não se limita apenas à busca da solução da tarefa proposta, pode ir muito além dela.

O quarteto, formado pelos alunos A3, A5, A11 e A12, apresentou o seguinte problema:

Figura 31 - Registro dos alunos A3, A5, A11 e A12.


1. As vagas do estacionamento estão numeradas de 1 a 18. As vagas dos numeros pares tem cobertura deixando o veiculo na sombra. Qual a probabilidade do primeiro veiculo ter sido estacionado na sombra?

Vagas pares: {2,4,6,8,10,12,14,16,18}

$P(p) = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$.

Fonte: Registrado pela pesquisadora.

Os alunos explicaram, fizeram a leitura do problema e deram um tempo para a turma responder. Ao final da resolução, questionaram:

PA6*: Que conteúdo matemático podemos abordar com este problema?*

Quarteto*: Probabilidade. Mais precisamente espaço amostral e evento.*

PA6*: A que nível de escolaridade esse problema pode ser apresentado?*

Quarteto*: Depende bastante a escola. Em algumas o conteúdo de probabilidade só é trabalhado no ensino médio.*

A1*: E tem outras que esse conteúdo não é trabalhado em nenhuma série.*

A7*: Eu mesmo estudei probabilidade aqui na universidade.*

A10*: Eu também! Quando fiz o ENEM que tinha uma questão de probabilidade, eu não sabia nem chutar.*

Comentarista: Essa discussão foi bastante pertinente no âmbito em que nossa pesquisa estava sendo desenvolvida. Como estamos em um curso de formação de professores de matemática, é importante que os universitários percebam seu compromisso com a formação dos estudantes da Escola Básica.

O grupo finalizou o trabalho assegurando que ficou surpreendido com os conteúdos abordados nos problemas criados pelos alunos. Destacou ainda que, em um problema aparentemente simples, podemos chegar a diversos conhecimentos matemáticos. Diante disso, o grupo mencionou as potencialidades da exploração de problemas, que possibilita o trabalho não somente com o que foi preparado, mas com toda a Matemática. Por isso, o professor deve estar sempre capacitado, tendo domínio não apenas do conteúdo que está sendo abordado, mas da Matemática como um todo.

4.1.9 9º Encontro – Seminário 03

Seminário – Grupo 03

O terceiro grupo, formado pelos alunos A5, A7, A11 e A12, iniciou o seminário trazendo uma discussão sobre o ensino de matemática atualmente nas escolas. O grupo destacou que a forma como esse ensino vem acontecendo tem provocado desinteresse quanto ao estudo de saberes inerentes à ciência matemática. O motivo desse desinteresse, segundo o grupo, é a falta de associação dos conteúdos trabalhados em sala de aula com o cotidiano dos alunos.

Em seguida, o grupo apresentou os objetivos da aula, os quais foram: i) resolver situações problemas que envolvam sistemas lineares; ii) compreender e analisar fatos, acontecimentos ou possibilidades, aplicando as relações conhecidas em situações novas; iii) tomar decisões apresentando argumentação e conclusão.

A equipe propôs que a turma se dividisse em três grupos, entregou uma cópia impressa do problema abaixo e realizou a leitura individual e conjunta. A equipe ainda orientou que os alunos deixassem os registros das ideias anotadas, para que pudessem discutir sobre o processo percorrido para chegar à solução:

Se um comerciante misturar 2kg de café em pó do tipo I com 3kg de café em pó do tipo II, ele obtém um tipo de café cujo preço é R$ 4,80 o quilograma. Mas, se misturar 3kg de café em pó do tipo I com 2kg de café do tipo II, a nova mistura custará R$ 5,20 o quilograma. Quais os preços do quilograma do café do tipo I e do quilograma do café do tipo II?

Fonte: Produção dos alunos.

No primeiro momento, a turma ficou um pouco confusa, pois não estava associando o valor dado ao quilograma, mas ao total da mistura. Os alunos fizeram a seguinte representação, como podemos ver no registro a seguir:

Figura 32 - Registro da representação de A13.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4,80 \\ 3x + 2y = 5,20 \end{cases}$$

Fonte: Registrado pela pesquisadora.

Pela representação, podemos perceber que A13 e os demais alunos consideraram que a mistura I custava R$ 4,80 e a mistura II custava R$ 5,20. Porém, esse valor era referente a cada quilo de cada mistura. Desse modo, o grupo interveio, chamou a atenção de todos para esta informação e solicitou nova leitura para melhor compreensão do problema. Em seguida, o grupo solicitou que resolvessem novamente o problema e que cada aluno registrasse sua resolução.

Como podemos ver abaixo, A9 respondeu o problema utilizando o método da substituição.

Figura 33 - Registro da resolução de A9.

$$\begin{cases} 2c1 + 3c_2 = 5.4,80 \\ 3c1 + 2c_2 = 5.5,20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2c1 + 3c_2 = 24 \ (I) \\ 3c1 + 2c_2 = 26 \ (II) \end{cases}$$

De I, sabemos que $2c1 = 24 - 3c_2$

$c1 = 24 - 3c_2$

Substituindo em II temos que $3(24 - 3c_2) + 2c_2 = 2$

$\dfrac{72 - 9c_2 + 2c = 26}{2}$

$72 - 9c_2 + 4c_2 = 26$

$72 - 5c_2 = 52$

$72 - 52 = 5c_2$

$20 = 5c_2$

$c_2 = 20/5$

$c_2 = 4$

Como $c_2 = 4$, temos:

$2c1 = 24 - 3.4$

$2c1 = 24 - 12$

$2c1 = 12$

$c = 12/2$

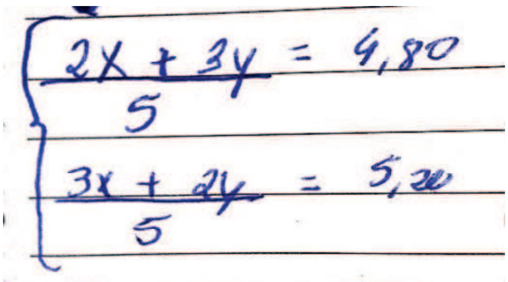
$c1 = 6$

Portanto, o c1 custa R$ 6,00 e o c2 custa R$ 4,00

Fonte: Registrado pela pesquisadora.

O grupo questionou à turma se alguém havia representado de outra forma. Então, A2 mencionou ter representado de maneira diferente, como podemos ver abaixo:

Figura 34 - Registro da representação de A2.



Fonte: Registrado pela pesquisadora.

Em seguida, o grupo solicitou que cada aluno explicasse como chegou ao resultado e questionou o que cada pessoa modificaria no problema, seja para tornar mais complexo ou para diminuir o nível de dificuldade.

A9: *Após a explicação, percebemos que o novo valor diz respeito ao valor da mistura.*

A1: *Como a segunda mistura é mais cara, percebemos que o café do tipo I é mais caro.*

A4: *Acho que deveria ter explicado melhor. Talvez se na escrita o problema tivesse sido, visualmente, melhor apresentado, não teria tido essa confusão.*

A8: *Concordo, deveria ter usado desenhos, ou mesmo aqueles marcadores de pontinhos, indicando cada mistura.*

A13: *Só pra acrescentar, poderia ter um novo questionamento perguntando quanto seria o valor da mistura de uma quantidade igual de café do tipo I e do tipo II.*

A2: *Poderia perguntar também em que quantidade de café do tipo I e do tipo II o valor da mistura iria ser igual.*

A3: *Concordo com os colegas! Daria pra aprofundar bastante...*

O grupo mencionou ter preparado outros questionamentos para a turma, porém, como a compreensão do problema demandou bastante tempo, não seria possível explorar no seminário, pois o tempo (2h) já estava acabando.

4.1.10 10º Encontro – Seminário 04

Seminário – Grupo 04

O quarto grupo, formado pelos alunos A1, A3 e A13, iniciou a aula apresentando o seguinte problema:

Luiz convidou 25 amigos para comemorar seu aniversário. Alguns vieram de carro, outros de motocicleta e um de carona. No total, em frente à casa de Luiz, haviam 62 rodas estacionadas. Quantos vieram de carro e quantos vieram de motocicleta?

Fonte: Produção dos alunos.

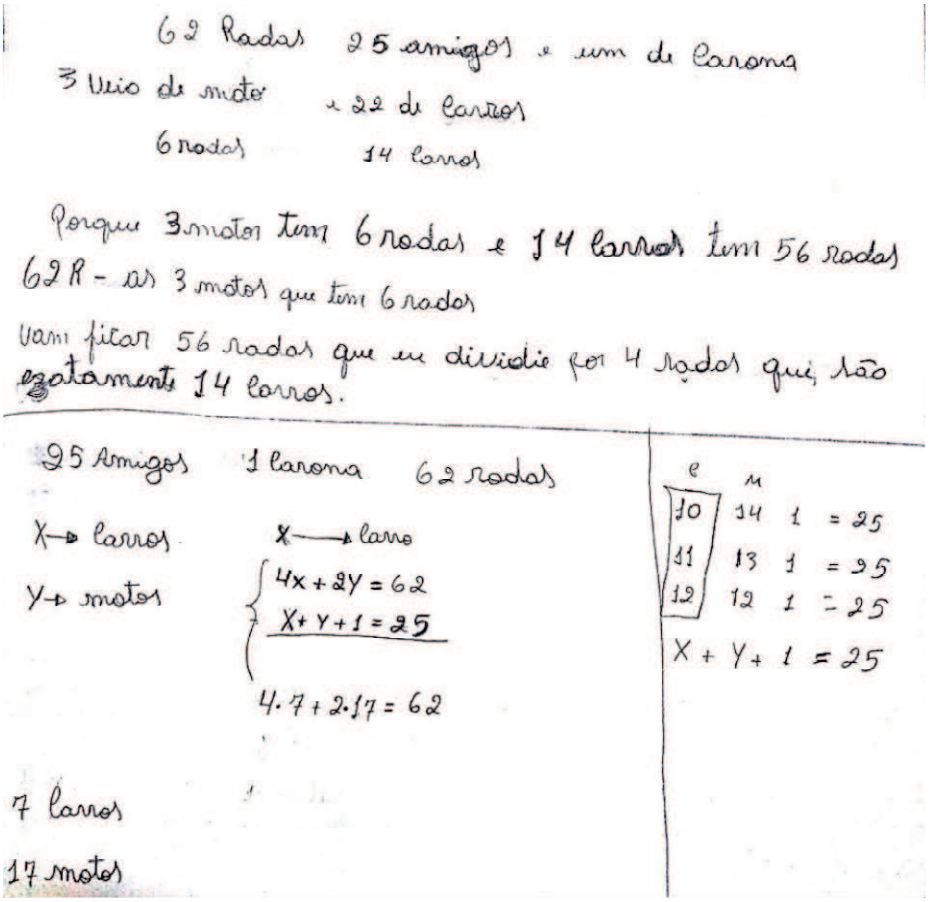
Após a leitura do grupo, houve o seguinte diálogo:

PA1*: Antes de iniciarmos, gostaria de perguntar: Pra vocês, este é um problema?*
Alunos*: Sim.*
PA3*: Por quê?*
A9*: Porque embora pareça simples, não sabemos a resposta de imediato. Vai ser preciso pensar um pouco a respeito, fazer alguns cálculos e chegar à solução.*
A7*: A gente até sabe que resolve por sistemas lineares, porque é o tema da oficina, mas é preciso observar atentamente todas as condições.*
PA3*: Isso mesmo, por isso nos falem com suas próprias palavras o que vocês compreenderam do problema.*
A6*: Sabemos que são 25 convidados, que vieram de carro, moto e um de carona. E sabemos que ao todo são 62 rodas.*
A5*: Pode acontecer de virem alguns de carro, outro de carona e nenhum de moto?*
PA13*: Não. Pois o problema deixa claro que vieram de carro, motocicleta e um de carona.*
A2*: Esse de carona pode ter sido deixado lá por alguém que ia passando?*
PA1*: Pode ser que sim. Pode ser que não. Vocês acham que isso influenciaria?*
A2*: Pode ser que sim. Pode ser que não.*
RISOS
PA1*: Vamos começar a resolução para retirarmos essas conclusões.*

O grupo deu um tempo para os alunos resolverem e foram passando nas cadeiras, acompanhando e observando o que cada aluno estava respondendo.

Rapidamente, o aluno A4 mencionou ter finalizado e apresentou a primeira parte do registro, como podemos ver abaixo:

Figura 35 - Registro da representação de A4.



Fonte: Registrado pela pesquisadora.

O PA13 observa o que ele fez e pede para que ele justifique o registro. Então, o aluno explica:

> ***A4**: Supondo que vieram 3 motos, assim, teriam 6 rodas. Então eu fui tentando... pra 22 passou... percebi que o total são 14 carros, que totaliza 56 rodas. Somando com as 6 rodas da moto, vai dar 62 rodas. E finalizado o problema.*
>
> ***PA13**: Você supôs que eram 3 motos. E se fossem 4?*
>
> ***A4**: Aí iria mudar...*

***P13**: Pois é! O problema não fixou a quantidade de motos e nem de carro. Você considerou todas as informações na resolução do problema? Vamos ler o problema novamente?*

Comentarista: O aluno P13 fez uma excelente mediação, pois ele percebeu que a resolução do A4 não estava correta e mesmo assim ele ouviu sua resolução, compreendeu a informação que o aluno não levou em consideração, o questionou e o convidou para uma nova leitura.

Após a leitura do problema, o aluno entendeu que ainda faltava considerar a quantidade de convidados. Destacou que para encontrar o número de rodas bastava considerar o carro como uma variável x, a moto como uma variável y e, em seguida, multiplicar x por 4 e y por 2, pois o carro tem 4 rodas, a moto 2, e igualar a 62. Após essa informação, o P13 convidou-o a fazer casos particulares para investigar como representar também algebricamente a informação da quantidade de convidados. E, então, o aluno registrou, como podemos ver acima na segunda parte da resolução.

Percebemos que o aluno assumiu a postura de professor mediador, destacada no passo "Observar e Incentivar" do roteiro de Allevato e Onuchic (2015), visto que ele levou A4 a pensar, dando-lhe tempo, incentivando a nova leitura e colocando-se como interventor e questionador.

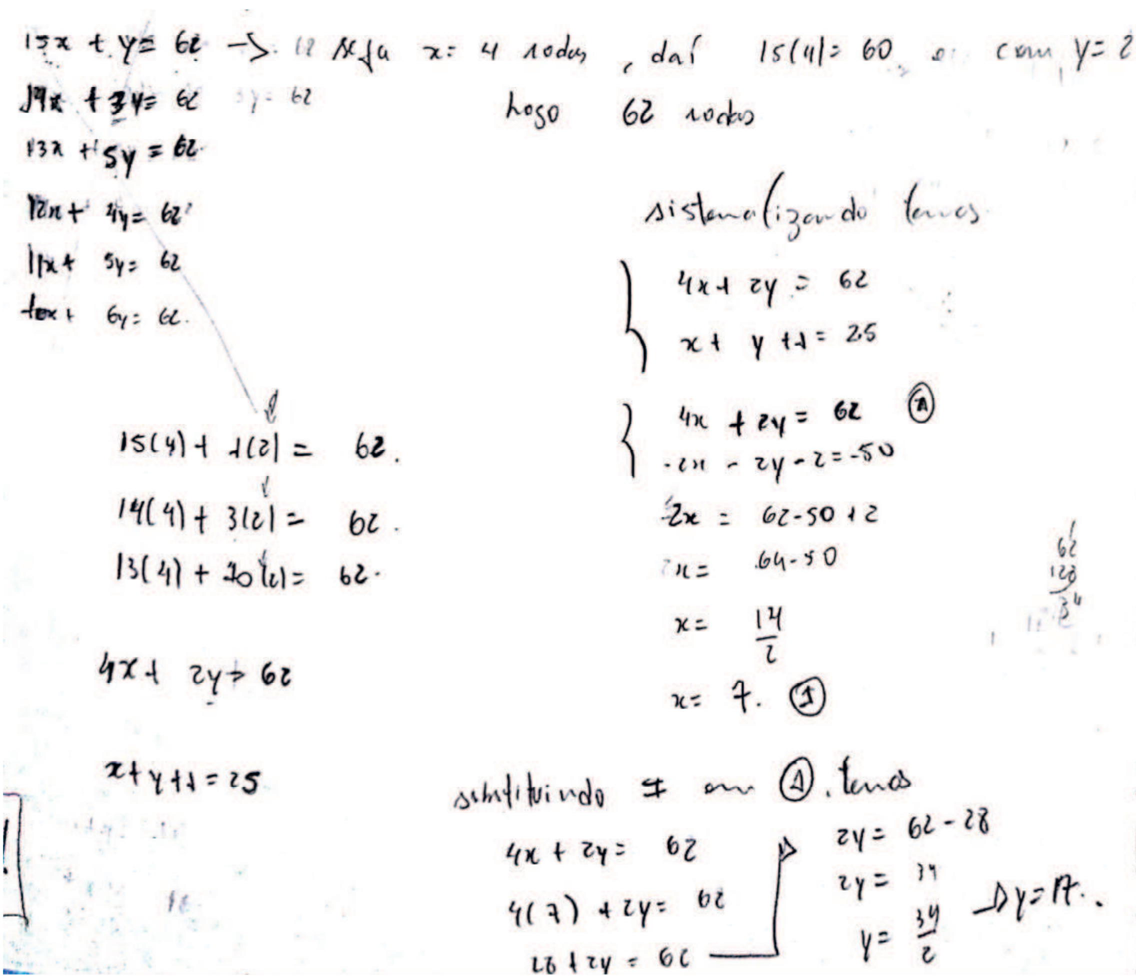
Essa postura assumida pelo aluno mediador é de extrema importância em nossas salas de aulas, uma vez que o cenário apresentado é muito frequente, em que o aluno não compreende o problema e quer resolver de imediato. E, muitas vezes, o professor não age da forma que o PA13 agiu, questionando o aluno e pontuando o que ele não levou em consideração, fazendo com que o discente reflita sobre a sua própria resolução.

Nesse problema, também podemos destacar os pontos positivos e negativos apresentados por Friedlander e Tabach (2001), a respeito da representação numérica utilizada. Na primeira resolução do A4, podemos identificar alguns pontos negativos, como, por exemplo, os aspectos importantes do problema que foram perdidos, isto é, a informação da quantidade de convidados. Já na segunda resolução do A4, podemos perceber o aspecto positivo, que é a ponte para Álgebra, oferecida pela representação numérica através da investigação dos casos particulares.

De modo semelhante, pudemos identificar os pontos positivos e negativos da representação algébrica na resolução do A7. Como podemos ver abaixo, ele comete um equívoco na representação algébrica, deixando a variável x como um valor fixo e variando o coeficiente. A variável x apresentada por ele está representando as 4 rodas e os coeficientes que estão variando estão representando a quantidade de carros.

Acreditamos que esse equívoco pode ser decorrente do uso exclusivo de símbolos ao longo de sua vida acadêmica. Como destacado por Friedlander e Tabach (2001), este uso exclusivo é um ponto negativo da representação algébrica que pode dificultar o significado matemático ou natureza dos objetos representados.

Figura 36 - Registro da resolução de A7.



Fonte: Registrado pela pesquisadora.

Ao visualizar a primeira representação algébrica de A7, o PA1 pede pra ele representar aritmeticamente, isto é, substituindo o x por 4, já que o 4 é fixo, e o y por 2, que também é fixo. Ao fazer três casos particulares, segue o diálogo:

***PA1**: Observando estes casos particulares, o que podemos perceber?*

***A7**: Se diminuirmos o número de carros, precisamos aumentar o número de motos.*

***PA1**: Como podemos representar esta relação algebricamente?*

O aluno representa algebricamente e responde o sistema linear pelo método da substituição, como podemos ver no registro acima.

Mais uma vez podemos observar nesse outro membro do grupo, a postura de professor mediador destacado por Allevato e Onuchic (2015, p. 8), que declaram que o professor ajuda não somente na resolução do problema proposto, como também "a resolver problemas secundários que podem surgir no decurso da resolução: notação; passagem da linguagem vernácula para a linguagem matemática; conceitos relacionados e técnicas operatórias; a fim de possibilitar a continuação do trabalho".

Ao final da atividade, o grupo solicitou que cada aluno falasse como respondeu ao problema, de que forma representou e respondeu o Sistema Linear. E finalizou com uma roda de conversa, na qual pudemos registrar o seguinte diálogo:

***PA13**: O que vocês acharam do problema?*

***A8**: De início um pouco complicado devido a pessoa que veio de carona, mas deu pra compreender.*

***PA3**: Vocês acham que o carona serviu apenas como um item para complicar o problema?*

***A9**: Com certeza! Se não fosse o carona seria mais fácil.*

***PA3**: Gente, na verdade o carona serviu para não darmos margem a outras respostas, pois quando afirmamos que só uma pessoa veio de carona, não teria como vir outros convidados no carro ou na moto.*

***PA2**: Verdade! Eu até pensei em argumentar que no carro poderia vir cinco convidados, mas depois lembrei que somente um veio de carona.*

***PA12**: Bem pensado!*

***PA1**: Qual a dificuldade que vocês encontraram no problema?*

***PA5**: Se fosse antes seria representar algebricamente, mas acredito que essa dificuldade já foi superada ao longo das aulas.*

Com esse diálogo, finalizamos as descrições das atividades e avaliamos os seminários positivamente, uma vez que, por meio deles, pudemos observar a concretização dos nossos objetivos.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como objetivo analisar as contribuições da metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas, aliada às Representações Múltiplas de Álgebra no ensino de Sistemas Lineares. Levando em consideração nosso percurso teórico-metodológico, cabe novamente fazermos o questionamento que impulsionou esta pesquisa: *até que ponto a utilização da Resolução de Problemas como metodologia de ensino, aliada às Representações Múltiplas de Álgebra, pode contribuir no ensino-aprendizagem de Sistemas Lineares?*

Para fundamentarmos nosso trabalho e o situarmos nas pesquisas atuais, analisamos algumas pesquisas sobre o ensino de Álgebra na formação inicial do professor de Matemática, bem como pesquisas que tinham como foco o ensino de Sistemas Lineares.

A partir dessa análise, pudemos identificar a necessidade de um ensino de Álgebra na Licenciatura mais compreensivo, tornando tal ensino significativo ao aluno, de modo que ele pudesse compreender a importância desse estudo para subsidiar suas futuras práticas docentes. Sobre o ensino de Sistemas Lineares, ficou perceptível a necessidade de um ensino que contemplasse as Representações Múltiplas de Álgebra, bem como a implementação de recursos metodológicos, especificamente: a Resolução de Problemas, os Projetos de Modelagem Matemática, as Tecnologias da Educação, dentre outros. Diante disso, nosso estudo tomou como base as Representações Múltiplas de Álgebra apresentadas por Friedlander e Tabach (2001), a saber: a representação verbal, a representação algébrica, a representação numérica e a representação gráfica.

Em sala de aula, utilizamos a metodologia através da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas (ANDRADE, 1998; 2017), buscando evidenciar suas contribuições no ensino-aprendizagem de Sistemas Lineares por meio de uma Oficina desenvolvida com licenciandos em Matemática.

No que diz respeito à metodologia da pesquisa, utilizamos uma abordagem qualitativa, na modalidade de pesquisa pedagógica, em que a professora titular da turma participante da pesquisa era a própria pesquisadora.

No início da pesquisa, realizamos uma roda de diálogo para identificar as compreensões dos alunos sobre a resolução de problemas. Pudemos perceber que os alunos apresentavam concepções teóricas que correspondiam às perspectivas atuais da Resolução de Problemas apresentadas pelos autores Van de Walle (2009), Onuchic e Allevato (2011), Serrazina (2017) e Andrade (1998, 2017). Entretanto, no decorrer da Oficina, pudemos concluir que, embora eles aparentassem conhecer as perspectivas atuais de Resolução de Problemas, essas concepções eram limitadas apenas à teoria, assim, a utilização desta como metodologia de ensino foi algo novo para eles.

Isso ficou perceptível ao identificarmos que os conhecimentos expostos pelos alunos se apresentavam de forma superficial, isto é, os estudantes conheciam princípios teóricos sobre a Resolução de Problemas no ensino de matemática, mas não possuíam vivências práticas com a utilização desta metodologia.

Diante disso, salientamos a importância da disciplina “Ensino da Matemática via/através da Resolução de Problemas” nos cursos de Licenciatura em Matemática e Programas de Pós-Graduação em Educação Matemática, pois ao aprimorar as concepções dos alunos e proporcionar experiências dentro das perspectivas atuais de Resolução de Problemas, ela pode tornar o trabalho com resolução de problemas mais significativo no ensino de Matemática, em especial ao futuro professor.

A respeito da exploração e proposição de problemas, pudemos identificar, em nossa pesquisa, a mesma percepção que aponta Andrade (2017) sobre as pesquisas desenvolvidas nos últimos anos. De acordo com o autor, no primeiro momento, emerge muito mais a Resolução de Problemas, no segundo momento, a exploração e, no terceiro momento, a proposição, sendo esta última considerada a ferramenta mais difícil de ser trabalhada e desenvolvida pelos alunos.

Percebemos que a proposição de problemas sempre era a etapa mais demorada. De acordo com o observado e mediante a fala dos alunos, isso aconteceu porque eles não estavam habituados a criar problemas, mas a apenas resolvê-los. No entanto, ao final da pesquisa de campo, podemos afirmar que os alunos compreenderam e incorporaram a Proposição e Exploração de Problemas ao trabalho com Resolução de Problemas, isto foi algo que ficou evidente nos seminários dos alunos, uma vez que eles não finalizavam a atividade ao obter a resposta do problema, mas iam além, buscando novos resultados e novas ideias.

Corroborando das ideias de Andrade (1998, 2017),

> No trabalho de exploração de problemas há um prazer e uma alegria de ir cada vez mais longe, um ir cada vez mais profundo, um ir cada vez mais curioso, há um ir que chega e nunca chega, um ir que pode

> sempre ir, um ir que sempre se limita ao contexto de aluno, do professor, da Matemática, da escola... e por isso pode ir outra vez e mais outra vez..." (ANDRADE, 1998, 2017, p. 366)

Outro ponto que identificamos em meio ao desenvolvimento das atividades utilizando a Resolução de Problemas e que vale ressaltar é a presença do movimento P-T-RS (Problema-Trabalho-Reflexões e Sínteses) (ANDRADE, 2017). Perceber esse movimento é muito positivo para nós, pois temos, de modo geral, um público que está acomodado, e que, muitas vezes, quer finalizar o trabalho ao chegar ao resultado, sem ao menos refletir sobre o processo.

Como destaca Andrade (2017):

> Nos primeiros momentos com a exploração de problemas, o professor-pesquisador precisa constantemente impulsionar o trabalho para que os alunos, com sua mediação-refutação, possam ir cada vez mais além da solução do problema". (ANDRADE, 2017, p. 388-389).

A importância da mediação-refutação do professor no trabalho com a Resolução de Problemas ficou bem evidente na Oficina, sobretudo, nos diálogos, quando os alunos apontam que essas interações os fazem refletir sobre o seu próprio processo de ensino-aprendizagem. Essa reflexão é o que, muitas vezes, falta nas salas de aulas, em que os alunos não utilizam suas habilidades metacognitivas para resolver problemas.

Essa discussão que evidencia a importância da reflexão sobre a própria aprendizagem nos remete à metacognição, a qual é explicada por Schoenfeld (1987). De acordo com o autor, o conhecimento do seu próprio processo de pensamento seria como você descreveria o seu próprio conhecimento. Nesse sentido, é importante o aluno ter ciência do que sabe, quais são os pontos fortes e fracos para se tornar um bom resolvedor de problemas, desenvolvendo, assim, este conhecimento na medida em que cresce.

Ao longo do desenvolvimento deste trabalho, a exemplo da atividade 5, percebemos, por parte dos alunos, o processo de codificação e descodificação explicado por Andrade (1998, 2017). De acordo com o autor,

> A codificação e a descodificação não são ferramentas a serem ensinadas explicitamente em sala de aula. Elas são adquiridas no trabalho do movimento da unidade Problema-Trabalho-Reflexões e sínteses-Resultados e quanto melhor for desenvolvida essa unidade melhor será o trabalho de codificação e descodificação. (ANDRADE, 1998, 2017, p. 370).

Destacamos também que nossa pesquisa atende questões levantadas por Jinfa Cai (2010) na medida em que observamos um impacto positivo dos participantes nas atividades realizadas, como também na aprendizagem matemática desses alunos – futuros professores de matemática, ao percebermos como de fato é a sala de aula quando utilizamos uma abordagem através da Resolução de Problemas e ao compreendermos como os professores podem aprender a ensinar matemática através da Resolução de Problemas.

Ao tratar do ensino de Sistemas Lineares, percebemos que, embora seja um conteúdo introduzido na Educação Básica, os alunos ainda não possuíam um conhecimento satisfatório. Essas dificuldades foram identificadas em meio aos problemas apresentados em que a maioria dos alunos não visualizava o Sistema Linear como uma forma para resolver o problema, sempre recorrendo a tentativa e erro.

Quanto à resolução do Sistema apresentado na linguagem algébrica, eles não apresentavam grandes dificuldades na execução de métodos de resolução. Contudo, a dificuldade era evidente quando havia necessidade de transição entre as representações.

Nas primeiras atividades, pudemos perceber um primeiro avanço, no qual os alunos começaram a apresentar domínio na representação algébrica, utilizando esta como uma linguagem matemática para expressar a resolução do problema, não recorrendo imediatamente a tentativa e erro como no início da Oficina. Porém, algo que sentimos falta e que notamos pouco avanço foi na escrita matemática, em que os alunos não utilizavam unidades e nem justificavam a escrita matematicamente.

Ao final da análise das atividades, os resultados evidenciaram que as Representações Múltiplas de Álgebra e a transição entre elas favorecem uma aprendizagem de Sistemas Lineares com mais compreensão. Conclui-se, assim, que a metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução, Proposição e Exploração de Problemas contribui para a construção de uma nova postura frente ao ensino de Sistemas Lineares.

Podemos afirmar que a pesquisa despertou nos licenciandos o interesse em revisar os conteúdos da Educação Básica e os relembrou sobre seus compromissos com este público, pois como destacam as DCN (2001), os cursos de Licenciatura em Matemática têm como objetivo principal a formação do professor de Matemática.

Como apontam Fiorentini e Oliveira (2013):

> Não basta o professor dominar procedimentos matemáticos e saber utilizá-los em demonstrações ou na resolução de exercícios e problemas. Para a docência em matemática é importante que o professor saiba justificar esses procedimentos, conheça outros procedimentos histórico culturalmente produzidos, conheça os conceitos e ideias atuais, bem como a evolução histórica dos mesmos. (FIORENTINI; OLIVEIRA, 2013, p. 924-925).

Assim, compreendemos que o licenciando precisa estar em contato, em sua formação, com situações que o levem a refletir e compreender a matemática como campo de conhecimento, para que, dessa forma, o conhecimento construído possa ampliar a visão dos futuros professores e proporcionar, futuramente, o desenvolvimento de práticas em sala de aula que levem uma matemática com mais compreensão e que, principalmente, faça sentido para os seus alunos.

Nessas condições, acreditamos ter contribuído para a formação dos participantes da Oficina, ao proporcionarmos experiências com a utilização da Exploração, Resolução e Proposição de Problemas como Metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática, possibilitando, assim, reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Sistemas Lineares, aliado ao uso das Representações Múltiplas de Álgebra, como também, na construção de uma nova postura frente ao ensino de Sistemas Lineares.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G. Trabalhar através da Resolução de Problemas: Possibilidades em dois diferentes contextos. **VIDYA**, Santa Maria - RS, 2013, v. 34, n. 1, p. 209-232. Jan./jun., 2014.

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. **Ensinando matemática na sala de aula através da resolução de problemas.** Boletim GEPEM, UFRJ, Rio de Janeiro, n. 55, jul./dez. 2009.

ANDRADE, S. **Ensino-aprendizagem de Matemática via resolução, exploração, codificação e decodificação de problemas**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1998.

ANDRADE, S. Um caminhar crítico reflexivo sobre Resolução, Exploração e Proposição de Problemas Matemáticos no Cotidiano da Sala de Aula. In: **Perspectivas para resolução de problemas** / Lourdes de la Rosa Onuchic, Luiz Carlos Leal Junior, Marcio Pironel, (organizadores). – São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017, p. 355-396.

BATTAGLIOLI, C. S. M. **Sistemas Lineares na segunda série do ensino médio:** um olhar sobre os livros didáticos. 2008. 116f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP), São Paulo, 2008.

BERTOLAZI, K. S. **Conhecimentos e Compreensões revelados por estudantes de Licenciatura em Matemática sobre Sistemas de Equações Lineares**. 2012. 227f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Londrina, 2012.

BODGAN, R. C.; BIKLEN, S. K**. Investigação qualitativa em educação:** uma introdução à teoria e aos métodos. Portugal: Editora Porto, v.12, 1994.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular:** educação é a base. Brasília, DF, 2017.

______. Ministério da Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática.** Brasília: 2001. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf> Acesso em jan. 2018.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Orientações curriculares para o Ensino Médio:** ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/SEB, 2006.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Programa Gestão da Aprendizagem Escolar - Gestar II.** Matemática: Atividades de Apoio à Aprendizagem 6 - AAA6: matemática nas migrações e em fenômenos cotidianos (Versão do Aluno). Brasília: MEC/SEB, 2008.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC / SEF, 1998.

______. **Planejando a Próxima Década:** Conhecendo as 20 Metas do Plano Nacional de Educação. Ministério da Educação / Secretaria de Articulação com os Sistemas de Ensino (MEC/ SASE), 2014.

CAI, J. Commentary on problem solving heuristics, affect, and discrete mathematics: a representational discussion. In: SRIRAMAN, B.; ENGLISH, L. (Eds.). **Theories of mathematics education: seeking new frontiers.** Berlin/Heidelberg: Springer, 2010. p. 251-258. (Advances in mathematics education).

CAVALCANTE, N. I. S. **Formação Inicial do Professor de Matemática:** a (in)visibilidade dos saberes docentes. 2011. 139f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba – UEPB, Campina Grande, 2011.

DAMAZIO, A. et. al. A Concepção de Álgebra na Proposição de Davydov para o Ensino de Número. **Revista do Programa de Pós-Graduação em Educação**. UNISUL, Tubarão, v. 5, n.9, p. 280 – 299. Jan./Jun. 2012.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: **Aprendizagem em Matemática:** Registros de Representação Semiótica / Silvia Dias Alcântara Machado (org.) – Campinas, SP. Papirus, 2003.

FERREIRA, N. C**. Uma proposta de ensino de álgebra abstrata moderna, com a utilização da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas, e suas contribuições para a formação inicial de professores de matemática.** 2017. 281 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática. - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2017.

FERREIRA, N. C.; SILVA, L. E.; MARTINS, E. R. Resolução de Problemas no Ensino Superior. In: **Perspectivas para resolução de problemas** / Lourdes de la Rosa Onuchic, Luiz Carlos Leal Junior, Marcio Pironel, (organizadores). – São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017, p. 189-220.

FIORENTINI, D; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. Contribuição para um repensar... a Educação Algébrica elementar. **Pro-Posições**, v. 4, n.1 (10), p. 78-91, 1993.

FIORENTINI, D.; OLIVEIRA, A. T. C. C. O Lugar das Matemáticas na Licenciatura em Matemática: que matemáticas e que práticas formativas? **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, Rio Claro (SP), v. 27, n. 47, p. 917-938, dez. 2013

FRIEDLANDER, A.; TABACH, M.. Promoting Multiple Representations in Álgebra. In: Cuoco, Albert A. **The roles of representation in school mathematics** / Albert A. Cuoco, Frances R. Curcio. p. cm. — (Yearbook; 2001)

GRAY, D. E. **Pesquisa no mundo real.** Tradução: Roberto Cataldo Costa. 2. Ed. Porto Alegre: Penso, 2012.

JORDÃO, A. L. I. **Um Estudo sobre a resolução algébrica e gráfica de Sistemas Lineares 3x3 no 2º ano do Ensino Médio.** 2011, 193f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP), São Paulo, 2011.

LANKSHEAR, C.; KNOBEL, M. **Pesquisa pedagógica:** do projeto à implementação. Porto Alegre: Artmed, 2008.

LEAL JUNIOR, L. C. **Tessitura sobre discursos acerca de Resolução de Problemas e seus pressupostos filosóficos em Educação Matemática**: Cosi è, se vi pare. 2018, 353f. Tese (Doutorado em Educação Matemática. - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2018.

LIMA, E. L. **Matemática e Ensino**. / Elon Lages Lima - 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

MIGUEL, A.; FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. Álgebra ou Geometria: Para onde Pende o Pêndulo? **Pró-Posições**, v. 3, n. 1(7), p. 39 – 54, mar. 1992.

MONDINI, F. **Modos de conceber a álgebra em cursos de formação de professores de matemática.** 2009. 168 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2009.

MOREIRA, P. C. 3+1 e suas (In) Variantes (Reflexões sobre as possibilidades de uma nova estrutura curricular na Licenciatura em Matemática). **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, Rio Claro (SP), v. 26, n. 44, p. 1137-1150, dez. 2012.

NCTM. **Princípios e normas para a matemática escolar**. (2000) / Tradução: Magda Melo. 2. ed. Lisboa: APM, 2008.

OBMEP. **Clube de Matemática da OBMEP:** Sala de Problemas. *Site*. Disponível em: <http://clubes.obmep.org.br/blog/sala-de-problemas/> acesso em: 23 de março de 2018.

OBMEP. **Olímpiada brasileira de matemática das escolas públicas.** Prova 1º Fase 2016 - Nível 1. Disponível em: < http://www.obmep.org.br/index.htm> acesso em março de 2018.

OLINTO, A. **Minidicionário Antônio Olinto da língua portuguesa** / supervisão do autor; organização Ubiratan Rosa. – São Paulo: Moderna, 200.

ONUCHIC, L R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Orgs). **Educação Matemática - pesquisa em movimento.** 2.ed. p. 213-231, São Paulo, 2005.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática**,** v. 25, n.41, Rio Claro (SP): UNESP – IGCE, p. 73-98, dez. 2011.

PONTE, J. P.; BRANCO, N; MATOS, A. **Álgebra no ensino básico.** Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC, 2009.

POLYA, G**. A arte de resolver problemas:** um novo aspecto do método matemático / G. Polya (1945); tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo. _ 2. Reimpr. – Rio de Janeiro: interciência, 1995.

RANGEL, W. S. A. **Projetos de Modelagem Matemática e Sistemas Lineares:** contribuições para a formação de professores de matemática. 2011. 139 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Ouro Preto, 2011.

SANTOS, D. M. F. **A relação entre a álgebra acadêmica e a álgebra escolar em um curso de licenciatura em matemática:** concepções de alunos e professores. 2016. 228 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente, 2016.

SBEM. **A formação do professor de matemática no curso de licenciatura:** reflexões produzidas pela comissão paritária SBEM/SBM. Brasília: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, Boletim no 21, fevereiro, p. 1-42, 2013.

SCHOENFELD, A. H. What's ali the fuss about metacognition? In: A. H. Schoenfeld (Ed.) **Cognitive science and mathematics education** (p. 189-215). Hillsdale, NJ: Erlbaum. 1987.

SCHROEDER, T. L.; LESTER, F. K. Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Eds.). **New Directions for Elementary School Mathematics**. Reston: NCTM, 1989.

SERRAZINA, L. Resolução de Problemas e Formação de Professores: um Olhar sobre a situação em Portugal. In: **Perspectivas para resolução de problemas** / Lourdes de la Rosa Onuchic, Luiz Carlos Leal Junior, Marcio Pironel, (organizadores). – São Paulo: Editora Livraria da Física, 2017, p. 55-84.

SILVER et al. **Problem Posing and Solving in Mathematics Education.** In: The 14th International Congress on Mathematical Education. Disponível em: <http://www.icme14.org/static/en/index.html>. Acesso em: abril 2019.

SOUSA, M. C.; PANOSSIAN, M. L.; CEDRO, W. L. **Do movimento lógico e histórico à organização do ensino:** o percurso dos conceitos algébricos / Maria do Carmo de Sousa, Maria Lúcia Panossian, Wellington Lima Cedro. - Campinas, SP: Mercado de Letras, 2014.

TARDIF, M. Saberes Profissionais dos Professores e Conhecimentos Universitários: elementos para uma epistemologia da prática profissional dos professores e suas consequências em relação a formação para o magistério. **Revista Brasileira de Educação**, nº 13, 5-24 p., 1º semestre de 2000.

USISKIN, Z. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: COXFORD, Arthur F. e SHULTE, Alberto P. **As ideias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental:** formação de professores e aplicação em sala de aula. / John A. Van de Walle; tradução Paulo Henrique Colonese. - 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VEIGA, M. S. **Concepções de Álgebra em Teses sobre cursos de Licenciaturas no Brasil.** 2016. 199f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP), São Paulo, 2016.

YIIN, R. K. **Pesquisa qualitativa do início ao fim.** Tradução Daniel Bueno. Revisão técnica: Dirceu da Silva. Porto Alegre: Penso, 2016.

ZUIN, E. S. L.; SANTOS, C. M. **Sistemas de equações lineares:** entre a História da Matemática e a História da Educação Matemática / Elenice de Souza Lodron Zuin, Célio Moacir dos Santos. – São Paulo: Editora Livraria da Física, 2019.