



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Mestrado Profissional - PROFMAT/UEPB



# Matemática e Música: Uma Proposta Pedagógica

Tiago Beserra Maciel

Trabalho de Conclusão de Curso

Orientador: Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo

Campina Grande - PB  
Julho/2018



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA**  
**Programa de Pós-Graduação em Matemática**  
**Mestrado Profissional - PROFMAT/UEPB**

## **Matemática e Música: Uma Proposta Pedagógica**

por

**Tiago Beserra Maciel<sup>†</sup>**

Trabalho Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UEPB, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

---

<sup>†</sup> Bolsista CAPES



É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

M152m Maciel, Tiago Beserra.  
Matemática e música [manuscrito] : uma proposta pedagógica / Tiago Beserra Maciel. - 2018.  
56 p. : il. colorido.  
Digitado.  
Dissertação (Mestrado em Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual da Paraíba, Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa, 2018.  
"Orientação : Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo, Departamento de Matemática - CCT."  
1. Ensino da Matemática. 2. Música. 3. Pitágoras. 4. Escalas Musicais. 5. Xukuru do Ororubá. I. Título  
21. ed. CDD 372.7

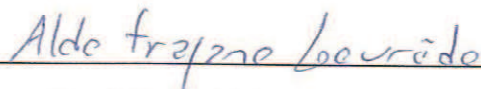
# Matemática e Música: Uma Proposta Pedagógica

por

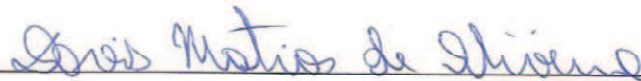
**Tiago Beserra Maciel**

Trabalho de Conclusão de curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UEPB, modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

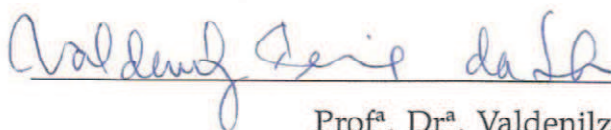
Aprovado por:



Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo - UEPB



Prof. Dr. Davis Matias de Oliveira - UEPB



Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Valdenilza Ferreira da Silva - UFPB

Universidade Estadual da Paraíba

Centro de Ciências e Tecnologia

Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Julho/2018

# Dedicatória

Ao meu filho Rafael Melo Beserra Maciel, à minha esposa Raquel Silva de Melo Maciel, à minha mãe Maria de Lourdes Maciel Beserra, ao meu pai Edival Beserra Leite e a minha irmã Raquel Maciel Beserra

# Agradecimentos

Em primeiro lugar, à minha amada esposa, Raquel Silva de Melo, pela paciência, incentivo e apoio todos os dias, me possibilitando o máximo de tempo para poder dedicar às atividades do curso.

A minha mãe, Maria de Lourdes Beserra Maciel, por ser um exemplo de dedicação e superação, me mostrando que sempre é possível alcançar os nossos objetivos, sendo sempre o meu porto seguro em todos os momentos da minha vida.

Ao meu pai, Edival Beserra Leite, por ter sempre estado presente, mostrando-me como sempre ser uma pessoa melhor.

Ao meu filho, Rafael Melo Beserra Maciel, que cresceu junto com o curso, quando com apenas 6 meses de idade, ficava ao meu lado enquanto estudava para as primeiras disciplinas, e a paciência para deixar o papai estudar, mesmo querendo brincar e por ser o motivo pelo qual busco sempre melhorar.

Aos amigos que fiz nessa jornada, em especial a Elania Hortins, com quem tive o prazer de concluir o curso, e aprender durante longos dias de estudo e ao grande amigo João Batista, o qual fez nossos dias de curso mais alegres, em meio a toda tensão que o curso proporciona, com a sua simplicidade e as histórias da sua filha Lalinha.

Aos meus professores da graduação do IFPE - Pesqueira, por serem sempre um exemplo, em especial ao professor Ms Olavo Otávio Nunes, por ser o meu maior exemplo de amor e dedicação à matemática, por todos os puxões de orelha, para que pudesse me tornar um melhor estudante de matemática.

Ao meu orientador, professor Dr. Aldo Trajano Lourêdo, por todo o companheirismo, durante o curso na disciplina que ministrou, e em especial durante a construção desse trabalho, com sua paciência e atenção, sempre disposto a auxiliar no que fosse necessário.

Aos meus alunos do terceiro ano B da escola EREM Senador Vitorino Freire.

À UEPB em parceria com o a SBM, por acreditar sempre na melhoria do ensino da matemática, oferecendo essa oportunidade aos que buscam ampliar os seus conhecimentos, para tornarem-se melhores profissionais.

Por fim, agradeço a todos que de forma direta ou indireta também contribuíram para que eu pudesse chegar até aqui.



*Mude, que quando a gente muda  
o mundo muda com a gente, a  
gente muda o mundo na mudança  
da gente e quanto a gente muda a  
gente anda pra frente  
(Gabriel o Pensador)*

## Resumo

O presente trabalho buscou, através de uma análise histórica, refletir a cerca da temática, matemática e música, e como estas estão relacionadas, observando que ambas surgem a partir da necessidade da vida em comunidade, como elementos de organização e manifestação cultural. Ainda discutimos como se deu o surgimento das escalas musicais, e como os matemáticos Pitágoras, D'Alembert e outros, foram fundamentais para a evolução da teoria musical, assim também como os conceitos matemáticos de frações, sequências e logaritmos, por exemplo. Verificamos o quanto esses dois elementos, matemática e música, são importantes para diversas culturas em destaque para o povo indígena Xukuru do Ororubá. Desenvolvendo uma atividade prática de construção de um pífano, com alunos da terceira série do ensino médio da Escola de Referência em Ensino Médio Senador Vitorino Freire, localizado na cidade de Arcoverde no sertão pernambucano, foi possível apresentar ao estudantes de maneira lúdica, como a música pode ser utilizada para facilitar o ensino/aprendizagem da matemática, obtendo um resultado bem significativo com relação à prática e à teoria.

Palavras Chaves: Ensino da Matemática. Música. Pitágoras. Escalas Musicais. Xukuru do Ororubá.

## Abstract

The present work sought, through a historical analysis, to reflect on the theme, mathematics and music, and how these are related, noting that both arise from the necessity of community life as elements of organization and cultural manifestation. We have discussed how the emergence of musical scales took place, and how the mathematicians Pythagoras, D'Alembert, and others, were fundamental to the evolution of musical theory, as well as mathematical concepts of fractions, sequences and logarithms, for example. We verified how much these two elements, mathematics and music, are important for diverse cultures in prominence for the indigenous people Xukuru of the Ororubá. Developing a practical activity of construction of a fife, with students of the third grade of the High School Reference School Senador Vitorino Freire, located in the city of Arcoverde in the hinterland of Pernambuco, it was possible to present to the students in a playful way, how music can be used to facilitate teaching/learning of the mathematics, obtaining a very significant result in relation to practice and theory.

Keywords: Mathematics Teaching. Music. Pythagoras. Musical Scales. Xukuru of the Ororubá.

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Notas da Escala Cromática . . . . .	2
Figura 2 – Lira e Monocorde sendo tocado por Pitágoras . . . . .	3
Figura 3 – Pentagrama: Símbolo da escola Pitagórica . . . . .	5
Figura 4 – Consonância Pitagórica . . . . .	6
Figura 5 – Gráfico da função logarítmica e Piano . . . . .	10
Figura 6 – Relação entre as notas musicais, intervalos e frequências correspon- dentes . . . . .	11
Figura 7 – Escala Maior . . . . .	13
Figura 8 – Grau da escala cromática . . . . .	14
Figura 9 – Figuras Musicais . . . . .	16
Figura 10 – Claves de Sol e Fá . . . . .	17
Figura 11 – Acidentes . . . . .	17
Figura 12 – Bequadro . . . . .	17
Figura 13 – Escala de Lá Maior . . . . .	18
Figura 14 – Compasso . . . . .	18
Figura 15 – Fração de Compasso . . . . .	19
Figura 16 – Ondas Sonoras . . . . .	20
Figura 17 – Índios Xukuru com o Jupago . . . . .	23
Figura 18 – Maraca - instrumento musical indígena . . . . .	23
Figura 19 – Artesanato e Pintural Corporal Xukuru . . . . .	24
Figura 20 – Barretina - o principal símbolo da cultura Xukuru . . . . .	24
Figura 21 – Mestre Medalha tocando a Memby . . . . .	26
Figura 22 – Memby e suas Dimensões . . . . .	27
Figura 23 – Gráfico 1 . . . . .	28
Figura 24 – Aula exposição da temática matemática e música . . . . .	29
Figura 25 – Analisando as medidas da flauta e serrando o PVC . . . . .	29
Figura 26 – Medindo os intervalos entre os furos e verificando a afinação . . . . .	30
Figura 27 – Gráfico 2 . . . . .	31
Figura 28 – Gráfico 3 e 4 . . . . .	31
Figura 29 – Gráficos 5 e 6 . . . . .	32

## Lista de Símbolos e Siglas

$\mathbb{N}$	.....	Conjunto dos números naturais
$\mathbb{Z}$	.....	Conjunto dos números inteiros
$\mathbb{Q}$	.....	Conjunto dos números racionais
$\mathbb{R}$	.....	Conjunto dos números reais
$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$	.....	Conjunto dos números irracionais
EREM	.....	Escola de Referência em Ensino Médio
IFPE	.....	Instituto Federal de Pernambuco
IMPA	.....	Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada
PROFMAT	.....	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
SBM	.....	Sociedade Brasileira de Matemática

# Sumário

<b>Lista de ilustrações</b>	iii
<b>Introdução</b>	1
<b>1 A ESCOLA PITAGÓRICA E A MÚSICA</b>	4
1.1 A Escola Pitagórica	4
1.2 Os pitagóricos e o seu amor pela a Música	5
<b>2 A ESCALA PERFEITA</b>	8
<b>3 OS INTERVALOS MUSICAIS</b>	12
<b>4 MATEMÁTICA E RITMOS</b>	16
4.1 A matemática do som	20
<b>5 A MÚSICA E A ETNOMATEMÁTICA DO POVO INDÍGENA XUKURU DO ORORUBÁ</b>	22
<b>6 ATIVIDADES PRÁTICAS</b>	28
6.1 Atividades Práticas: Aplicação em Sala de Aula	28
<b>7 CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	33
<b>REFERÊNCIAS</b>	35

# Introdução

É notório desde o princípio da civilização, a necessidade de organização entre os povos. Para isso as primeiras comunidades iniciam a prática do comércio, através de trocas. Porém, seriam essas trocas realmente justas? É com esse contexto que surge a necessidade de contar, medir, pesar, e dividir, com o intuito de dar um caráter justo ao comércio. A esta ciência, responsável por esse trabalho, damos o nome de matemática. No entanto não é apenas esse o papel desempenhado por esta fantástica ciência, que começa a expandir-se para explicar as mais diversas obras da natureza, buscando uma relação entre formas e números.

Buscando sempre explicar as relações entre números e natureza, ou mesmo em resolver problemas simples do cotidiano, como determinar uma área de uma colheita, ou mais complexos como desvendar uma mensagem criptografada, a matemática vem evoluindo no decorrer dos séculos. Essa evolução ocorre pelo simples fato da inquietação dos matemáticos, estes na antiguidade, em sua grande maioria filósofos, empenhados em desvendar os segredos dos números e como estes estão em todos os aspectos da nossa vida. Para Galileu Galilei (1564 - 1642) “A matemática é o alfabeto no qual Deus escreveu o universo.”

Outro elemento importante na organização da vida em comunidade é a diversão, o lazer. Para tal propósito inúmeras comunidades utilizavam e ainda utilizam a música. “O que a gente pode afirmar... é que os elementos formais da música... são tão velhos como o homem.” [1](p. 13)

*“O homem na antiguidade é um ser mais propriamente coletivo que individual. Todas as manifestações dele são por isso muito mais sociais que individualistas. ... a música tomava parte direta nas manifestações coletivas do povo” [1](p. 25)*

Não é de admirar então que, tanto a matemática quanto a música tenham tido uma evolução paralela. “Ambas são parte de uma linguagem universal, utilizada pelas comunidades para expressar as mais diversas situações.” [8](p. 5)

*“Os gregos antigos os equiparam com uma origem comum e parece que sua evolução foi feita de forma paralela.”* [8](p. 5)

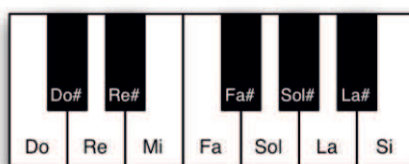
Apesar da sua evolução paralela, é bastante aceitável que pensemos que matemática e música são duas coisas disjuntas. Mas seriam mesmo essas duas línguas universais tão diferentes? Ou teriam, essas duas, formas de linguagem mais em comum do que possamos imaginar?

Para os pitagóricos a relação entre a matemática e a música vai muito além da sua evolução paralela. Na visão dos pitagóricos essa duas formas de linguagem não eram elementos disjuntos e sim repletos de pontos em comum.

*“Entre os campos artísticos que podem ser ilustrados com um olhar matemático, a música é provavelmente a melhor. Por sinal, entre os gregos, a música e a matemática têm uma origem comum.”* [8](p. 6)

Há mais de dois mil e quinhentos anos os pitagóricos, nome dado aos participantes da escola fundada por Pitágoras, analisavam relações entre a música e as proporções matemáticas. Para eles a música era sobretudo uma questão de proporções, “as proporções pitagóricas foram feitas para desvendar os segredos da música.” [8](p. 5 e 6) A música e a matemática não pararam sua evolução. As escalas, nas quais eram separados os tons, inicialmente era pentatônica, escala de 5 notas, passando a escala heptatônica, escala de 7 notas, e a escala cromática formada por 12 notas sendo elas, C, C#, D, D#, E, F, F#, G, G#, A, A# e B, que podemos ilustrar como sendo as teclas pretas e brancas do piano. Ver figura 1 abaixo:

Figura 1 – Notas da Escala Cromática



Fonte: <https://aulasparticularesbh.files.wordpress.com/2016/05/musica2.jpg>

Ao falarmos sobre as frequências dos sons, nos remetemos aos trabalhos dos gregos, os quais desenvolveram os seus conhecimentos musicais com instrumentos como



a lira ou, mais simples, como o monocorde. Ver figura 2, abaixo. Ao observar que posicionando o dedo exatamente no meio de uma corda percebeu-se que essa produzia, na corda completa e na sua metade, sons de mesma frequência, o que denominavam de oitava, representado pela relação de 2 para 1. Assim puderam observar os primeiros termos de uma sequência harmônica.

Figura 2 – Lira e Monocorde sendo tocado por Pitágoras



Fonte: <https://revistas.elheraldo.co/miercoles/delmy-recuerdo/la-lira-instrumento-de-angeles-y-poetas-130681>

Fonte: <http://blogdohenriqueautran.blogspot.com/2013/09/>

Observamos que não apenas os pitagóricos demonstraram apreço pela relação entre matemática e música. O filósofo e músico muçulmano Al Farabi dividiu a oitava em 25 intervalos desiguais. Já os chineses utilizavam o seu sistema musical baseando-se através dos furos de uma flauta de bambu. No entanto, todos esses utilizavam-se de divisões de frequências racionais. Foi apenas através de D'Alembert, no século XVII, que foi observado a possibilidade de frequências irracionais.

Os pitagóricos observaram que pegando objetos semelhantes, por exemplo um vaso, de volume  $K$  e outro de volume  $2K$ , ambos reproduzem um acorde de oitava, e isso não importava o material utilizado, desde que a razão de semelhança entre as dimensões fossem de 1 para 2. Esse método de observação nada mais é do que o método científico utilizado hoje, porém ele ficou esquecido durante séculos. Analisaremos um pouco mais das descobertas dos pitagóricos mais a diante.

# 1 A Escola Pitagórica e a Música

## 1.1 A Escola Pitagórica

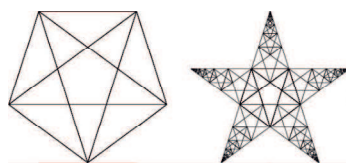
Pitágoras de Samos (570 a.C - 496 a.C) foi um filósofo e matemático grego considerado fundador de uma sociedade secreta que “adorava os números”, os participantes dessa sociedade ficaram conhecidos como pitagóricos. Para Pitágoras e seus seguidores os números eram a razão de tudo, qualquer coisa poderia ser explicada através dos números.

Para os pitagóricos desde as formas das constelações, o número de estrelas que as compõe, as formas geométricas, a música, tudo poderia ser expresso por números. Eram então os números a essência de tudo. Para eles tudo poderia ser medido ou contado através de uma unidade. São creditadas também à Pitágoras a origem das palavras filosofia e matemática.

A matemática antes de Pitágoras não tinha uma abstração. Era utilizada apenas para resolver problemas cotidianos, como determinar uma certa área, ou contar um certo número de animais. Foi com Pitágoras e seus seguidores que a matemática iniciou um novo rumo, o da abstração e demonstrações, como por exemplo o teorema que leva o seu nome, relacionado às medidas dos lados de um triângulo retângulo, o qual já era conhecido pelos babilônicos muito antes de Pitágoras, porém foi ele o primeiro a demonstrar que essa relação era válida para qualquer triângulo retângulo.

O símbolo que representava a escola pitagórica era a estrela de cinco pontas, formada ao se traçar as diagonais de um pentágono regular. Os pitagóricos tinham um certo misticismo com essa figura pelo fato das diagonais se intersectarem em uma determinada razão, formando um novo pentágono regular. A essa razão foi atribuída o termo “razão áurea” ou “número de ouro”.

Figura 3 – Pentagrama: Símbolo da escola Pitagórica



Fonte: <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm17/escpita.htm>

Deve-se aos pitagóricos também a descoberta dos números amigáveis: números cuja a soma dos seus divisores, exceto o próprio número, é igual ao o outro. Por exemplo, 220 e 284, cuja a soma dos divisores de 220 é igual a 284 e a soma dos divisores de 284 é igual a 220; e números perfeitos, cuja a soma dos seus divisores, excetuando ele mesmo, é igual a ele próprio; por exemplo 28, os seus divisores, diferentes de 28, são 1, 2, 4, 7 e 14, onde sua soma é igual a 28.

Além dessas descobertas, talvez a mais significativa tenha sido a dos números irracionais. Até então acreditava-se que tudo podia ser medido ou contado através de uma determinada unidade ou frações dessa unidade, porém, ao tentar construir um triângulo retângulo e isósceles de catetos medindo unidade cada um, constatou-se que não era possível tomar a hipotenusa desse triângulo usando a mesma unidade dos catetos, não importando qual fosse ela. A esses números, conhecidos como incomensuráveis, hoje denominamos de irracionais.[2]

## 1.2 Os pitagóricos e o seu amor pela a Música

A escola pitagórica dividia seus estudos em 4 grandes áreas, Aritmética, Geometria, Astronomia e Música. Para eles “a sabedoria da matemática e a beleza da música andam de mãos dadas” [8](p. 10). A partir da escola de Pitágoras, a matemática começa a ter uma autonomia, e a música lhe dá um amplo campo de investigação. Os pitagóricos descobriram que a harmonia da música se dava através de razões matemáticas, ao pegar um corda e dividi-la pressionando em alguns lugares, ou colocar água em alguns potes semelhantes, onde existe-se uma razão, por exemplo, de 1 para 2, entre o nível de água, observando tonalidades semelhantes.

Devido a escola pitagórica ser repleta de segredos e misticismo, é difícil creditar os trabalhos à alguma pessoa em específico, até mesmo ao próprio Pitágoras, porém, em relação à música podemos destacar três grandes nomes além de Pitágoras:

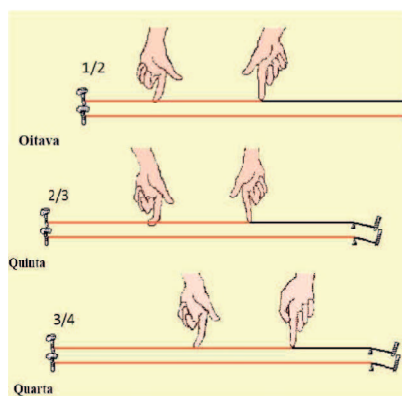
*São eles: Hippase de Métafonte, que mediu os três acordes fundamentais (oitava, quinta, e quarta), Philolaos de Crotona, que descobriu a medição harmônica, uma ferramenta necessária para a teoria e finalmente, Arquitas de*

Tarento, que estabelece os gêneros em harmônico, cromático e diatônico.[8](p. 11)

Através de experimentos com discos grossos de mesmo diâmetro porém de espessuras uma o dobro da outra; jarros com água, um cheio e outro pela metade; uma corda esticada e outra do mesmo comprimento pressionada ao meio, os pitagóricos observaram que o som produzido era sempre o mesmo desde que a razão entre os elementos fosse sempre de 1 para 2, e assim denominaram a fração  $\frac{1}{2}$  de oitava. Mantendo esse método de experimentos conseguiram então determinar outras razões, a razão de  $\frac{2}{3}$  denominada de quinta e a razão de  $\frac{3}{4}$  denominada de quarta. Os pitagóricos tinham um grande apreço pelos números 1, 2, 3 e 4, devido a sua soma ser igual a 10, que é a base do sistema decimal, por isso, sempre os utilizavam para explicar os mais diversos problemas, não sendo diferente na música. Esses intervalos eram chamados de “Consonância Pitagórica” [6]

Mas qual o real significado de uma oitava, uma quinta e uma quarta? Suponhamos que uma determinada corda esticada ao ser tocada produza originalmente um Dó. Ao pressionar a corda ao meio, veja figura 4 abaixo, ou seja, na razão de 1 para 2, e produzir uma oitava, isso significa que o som produzido pelo novo pedaço será uma oitava, ou seja, 8 tons acima do original, portanto o som será novamente um Dó. Ao pressionar a corda na razão de 2 para 3, obtendo uma quinta, isso significa obter um som 5 tons acima do original, ou seja, obtemos um Sol. Pressionando agora a corda na razão de 3 para 4, obteremos uma quarta, ou seja, o novo som produzido será 4 tons acima do original e, neste caso obteremos um Fá.

Figura 4 – Consonância Pitagórica



Fonte: <http://auladeviola.com/aula-de-viola-para-iniciantes-a-matematica-dos-acordes-musicais>

Apesar da quarta ter sido medida por um Pitagórico, Hippase de Métaponte,

a escala de Pitágoras utilizava apenas os números 1, 2 e 3. Utilizando somente os números 1 e 2 obtemos sempre a mesma nota, pois teremos apenas oitavas, surgindo a necessidade de introduzir um novo número, sendo esse o 3. Assim foi possível a obtenção de novas notas, dividindo então o intervalo entre o som original da corda e a sua oitava. Portanto, para os pitagóricos, todos os sons derivam da razão  $\frac{2^n}{3^p}$  e, no entanto, pelo fato de  $2^n$  ser par e  $3^p$  ser ímpar não seria possível obter  $\frac{2^n}{3^p} = 1$  ou  $\frac{2^n}{3^p} = \frac{1}{2}$ , exceto se fosse tomado  $n = 0$  e  $p = 0$  ou  $n = 1$  e  $p = 0$ . Observe que no segundo caso teríamos,  $\frac{2}{1} = \frac{1}{2}$ , vale ressaltar que estamos analisando o fato de que ambas as razões representam a divisão de uma corda em segmentos de 1 para 2. [8](p.15)

Ao passo de que a razão  $\frac{2^n}{3^p}$  se aproxima de 1, obtemos assim uma escala com  $p$  notas, conforme a tabela 1:

Tabela 1: Escalas

p	n	$2^n / 3^p$	Escala
5	8	1,05349794 ...	Pentatônica
7	11	0,93644261 ...	Heptatônica
12	19	0,98654036 ...	Cromática

Fonte: [8](p.17)

O amor dos pitagóricos pela música os levou a determinar mais uma média. Além das médias aritmética e geométrica, obtiveram então a média harmônica. Podemos ilustrar tal fato ao tentar determinar onde fazer os furos em um flauta, ou para determinar o som médio entre duas oitavas em uma corda, o que seria a média aritmética entre suas frequências, para isso devemos determinar a distância onde a corda deve ser precionada, através da fórmula  $(\frac{1}{k}) + (\frac{1}{2k}) = (\frac{2}{d})$ , onde  $k$  é o comprimento da corda, então a distância onde encontraremos a frequência procura é obtida através da média harmônica dos comprimentos, assim  $d = (\frac{4}{3})k$ , ou seja, uma quarta de  $k$ .

Apesar do empenho dos pitagóricos, tendo contribuído de forma extremamente significativa para a evolução da teoria da música, a escala pitagórica utilizava-se apenas de quintas ( $\frac{2^n}{3^p}$ ), o que não é suficiente pra representar todos os acordes. Surge então a necessidade de uma escala perfeita, uma escala mais harmoniosa, que possa representar todos as notas.

## 2 A Escala Perfeita

Durante muito tempo matemáticos e músicos tentaram proceder utilizando as ideias dos pitagóricos, formando suas próprias escalas. Por exemplo, os chineses, utilizando uma corda que inicialmente produzia uma nota Dó, dividiram-na em 3 partes e obtiveram a nota Sol. Repartindo, a partir de Sol, novamente em 3 partes, obtiveram a nota Ré. Mantendo esse procedimento, encontraram as notas Lá, Mi e Si, porém, pelo fato do som da nota Si estar muito próximo da nota Dó, os chineses não gostaram do som, e por isso desconsideraram a nota Si, ficando assim sua escala de notas apenas com as notas Dó, Sol, Ré, Lá e Mi, uma escala pentatônica.

Então outros matemáticos, como Arquitas de Tarento<sup>1</sup>, depois de algum tempo encontraram outra fração que era “boa” para os ouvidos, a fração de  $\frac{4}{5}$ , denominada então como terceira, podendo assim determinar seqüências de notas. O filósofo e muçulmano turco Al Farabi dividiu a oitava em 25 intervalos desiguais. Giuseffo Zarlino<sup>2</sup> utilizando outros novos intervalos para dividir a corda, diferente dos intervalos pitagóricos, que dividia em no máximo 4 partes, usou a divisão do  $\frac{4}{5}$  e  $\frac{3}{5}$  e  $\frac{5}{6}$ , porém, era necessário sempre uma escala diferente para cada tonalidade. Por esse motivo os órgãos<sup>3</sup> tinham várias teclas para se adaptar a mudança de tonalidade de cada escala e, para isso, deveriam ter em torno de 53 teclas. Além desses, outros grandes matemáticos tiveram influência na evolução da música e criação das escalas, como Euclides; Arquimedes; Aristóteles; D’Alembert; Fourier. Suas contribuições, para o estudo das ondas sonoras, serão apresentadas mais adiantes.

Vamos no entanto voltar nossos olhares para o filosofo, matemático e físico francês D’Alembert. Todos os intervalos musicais eram sempre dados por divisões racionais, o que não permitia encontrar uma escala completamente harmoniosa, no entanto, foi D’Alembert o primeiro a propor a divisão de uma oitava em intervalos não racionais. Como vimos mais a cima, os chineses, utilizando divisões de quintas em um corda inicialmente tocando a nota Dó, após algumas divisões chegavam a nota Sí. Por esta nota ter seu som muito próximo ao Dó, foi então descartada e os intervalos entre essas notas eram de meio tom. No entanto D’Alembert propôs dividir a oitava em 12 intervalos iguais, ou seja, de meio em meio tom.

<sup>1</sup> Matemático grego. Um dos mais importantes alunos da escola pitagórica.

<sup>2</sup> Gioseffo Zarlino foi um teórico musical italiano e compositor da Renascença.

<sup>3</sup> Instrumento constituído de teclado, pedaleira e tubos, que são os principais responsáveis pela produção do som em consequência do ar que neles é introduzido sob pressão.

Utilizando então as frequências<sup>4</sup> produzidas pelas notas, observa-se que a frequência de uma oitava é o dobro da frequência do som fundamental da corda, portanto a construção proposta por D'Alembert, que consistia em dividir a oitava em 12 intervalos iguais, essa divisão deveria fazer com que a frequência produzida por cada um dos intervalos desse origem a uma progressão geométrica, cujo a razão é a  $\sqrt[12]{2}$ , tendo em vista que ao se chegar na oitava, que seria o décimo segundo intervalo, a frequência deveria dobrar. Na proposta de D'Alembert, utilizando a frequência de um nota inicial, a partir dela deveríamos multiplicar essa frequência por  $\sqrt[12]{2} \approx 1,0594630944$ , chegando assim a frequência da próxima nota, meio tom acima. Portanto, tomando a frequência de uma nota como referência, as próximas notas são encontradas multiplicando-se a frequência da primeira por  $\sqrt[12]{2^n}$  com  $n \in \mathbb{N}$  e  $n \geq 0$ .

Por exemplo:

Seja  $f$  a frequência da nota Dó, então:

$$\text{Dó} = f \cdot 2^{\frac{0}{12}};$$

$$\text{Dó\#} = f \cdot 2^{\frac{1}{12}};$$

$$\text{Ré} = f \cdot 2^{\frac{2}{12}};$$

$$\text{Ré\#} = f \cdot 2^{\frac{3}{12}};$$

⋮

$$\text{Sí} = f \cdot 2^{\frac{11}{12}};$$

$$\text{Dó(uma oitava acima)} = f \cdot 2^{\frac{12}{12}}$$

Essa sequência retrata uma progressão geométrica. Com essa divisão chegamos então a escala musical mais utilizada atualmente, denominada de escala temperada ou escala cromática (C, C#, D, D#, E, F, F#, G, G#, A, A#, B).

Mas como determinar o valor, pelo o qual devemos multiplicar a frequência da nota dó, por exemplo, para encontrar as demais notas da escala temperada? Fazer isso hoje é relativamente simples pois com o auxílio de um computador ou calculadora podemos determinar um valor aproximado para  $\sqrt[12]{2}$  rapidamente. Porém isso não era tão simples quando D'Alembert propôs esse método. Para isso ele utilizou mais um ramo do conhecimento matemático, como por exemplo, os logaritmos<sup>5</sup>. Com o auxílio de uma *tábua de logaritmos*<sup>6</sup> podemos determinar um valor aproximado da  $\sqrt[12]{2}$ .

<sup>4</sup> A frequência de um som corresponde ao número de ciclos de uma onda sonora por segundo. A unidade de medida é hertz (Hz).

<sup>5</sup> Conceito desenvolvido por John Napier, matemático escocês, em 1614 e Joost Bürgi, matemático e inventor suíço em 1620.

<sup>6</sup> Uma tabela contendo os valores para alguns logaritmos de base 10. Podemos encontrar uma tábua de logaritmos no site: [www.matematicadidatica.com.br/TabuaLogDec.aspx](http://www.matematicadidatica.com.br/TabuaLogDec.aspx)

**Definição 2.1** Dados dois números reais positivos  $a$  e  $b$ , com  $b \neq 1$ , definimos o logaritmo de  $a$  na base  $b$ , como sendo:

$$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a.$$

Os logaritmos de base 10 são denotados apenas por  $\log a = x$ , sendo a base omitida na escrita. Propriedade fundamental dos logaritmos:

$$\log_b(ac) = \log_b a + \log_b c.$$

Outra propriedade importante é a da potência:

$$\log_b a^n = n \log_b a, \text{ com } n \in \mathbb{Q}$$

Portanto para determinar um valor aproximado da  $\sqrt[12]{2}$ , temos:

$\sqrt[12]{2} = f$ , aplicando logaritmo de base 10 em ambos os lados:

$$\log \sqrt[12]{2} = \log f \Rightarrow \log 2^{1/12} = \log f \Rightarrow \frac{1}{12} \log 2 = \log f.$$

Utilizando uma tábua de logaritmos verificamos que  $\log 2 \approx 0,301$ , logo:

$$\log f \approx \frac{1}{12} 0,301 \Rightarrow \log f \approx 0,02508 \Rightarrow f \approx 10^{0,02508}.$$

O valor de  $10^{0,02508}$  é por vezes chamado de antilogaritmo de 0,02508. No entanto basta procurar na tábua de logaritmo o número cujo o log é 0,02508, encontrando o valor aproximado de 1,0594.

Talvez seja devido a essa relação da música com os logaritmos que os pianos tenha o seu formato semelhante ao gráfico da função logarítmica.

Figura 5 – Gráfico da função logarítmica e Piano



Fonte: Gráfico - Elaborada pelo Autor, Piano: [8](p.33)



Observe a figura 6 abaixo, que mostra a relação entre a escala determinada através da divisão da corda em intervalos racionais, e a escala temperada.

Figura 6 – Relação entre as notas musicais, intervalos e frequências correspondentes

<i>Nota musical</i>	<i>Intervalo com a nota fundamental</i>	<i>Afinação natural</i>	<i>Frequência (Hz)</i>	<i>Afinação temperada</i>	<i>Frequência (Hz)</i>
Dó	Dó uníssono	1/1=1,000	132,000	1,000	132,000
Dó #	Semitom	25/24=1,042	137,544	1,059	139,788
Ré b	Segunda diminuta	27/25=1,080	142,560	1,059	139,788
Ré	Segunda maior	9/8=1,125	148,500	1,122	148,104
Ré #	Segunda aumentada	76/74=1,172	154,704	1,189	156,948
Mi b	Terça menor	6/5=1,200	158,400	1,189	156,948
Mi	Terça maior	5/4=1,250	165,000	1,260	166,320
Fá b	Quarta diminuta	32/25=1,280	168,960	1,260	166,320
Mi #	Terça aumentada	125/96=1,302	171,864	1,335	176,220
Fá	Quarta perfeita	4/3=1,333	175,956	1,335	176,220
Fá #	Quarta aumentada	25/18=1,389	183,348	1,414	186,648
Sol b	Quinta diminuta	36/25=1,440	190,080	1,414	186,648
Sol	Quinta perfeita	3/2=1,500	198,000	1,498	197,736
Sol #	Quinta aumentada	25/16=1,563	206,316	1,587	209,484
La b	Sexta menor	8/5=1,6	211,200	1,587	209,484
Lá	Sexta maior	5/3=1,667	220,044	1,682	222,024
Lá #	Sexta aumentada	152/72=1,737	229,284	1,782	235,224
Si b	Sétima menor	9/5=1,800	237,600	1,782	235,224
Si	Sétima maior	15/8=1,875	247,500	1,888	249,216
Dó b	Oitava diminuta	48/25=1,920	253,440	1,888	249,216
Si #	Sétima aumentada	125/64=1,953	257,796	2,000	264,000
Dó	Oitava perfeita	2/1=2,000	264,000	2,000	264,000

Fonte: [http://www.das.inpe.br/~alex/FisicadaMusica/fismus\\_escalas.htm](http://www.das.inpe.br/~alex/FisicadaMusica/fismus_escalas.htm)

### 3 Os Intervalos Musicais

Como visto no capítulo anterior uma oitava pode ser dividida em doze semitons, igualmente espaçados por  $\sqrt[12]{2}$  compondo a escala cromática, determinada por C (Dó), C# (Dó sustenido), D (Ré), D# (Ré sustenido), E (Mi), F (Fá), F# (Fá sustenido), G (Sol), G# (Sol sustenido), A (Lá), A# (Lá sustenido) e B (Si). Vale ressaltar que os sustenidos, que representam meio tom acima da nota anterior, também representam meio tom abaixo da sua sucessora, recebendo a denominação de bemol. Representado com o índice b, por exemplo, F# é equivalente a Gb.

*O intervalo entre duas notas pode ser pensado informalmente como a “distância” entre seus dois campos associados. [...] O piano é afinado usando temperamento igual [...] o que significa que o intervalo entre duas teclas adjacentes (branco ou preto) é o mesmo. Esse intervalo é chamado de semitom. O intervalo de dois semitons é um passo, ou segundo maior, portanto, um semitom é um meio-passo, às vezes chamado de segundo menor. Uma oitava é de 12 semitons.*[10](p.6)

Utilizando esses intervalos, podemos então construir as escalas musicais, que são seqüências de notas em uma determinada ordem. Vamos analisar as duas principais, a escala MAIOR e a escala MENOR. Observe a seqüência Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá, Si, Dó. Essa seqüencia que vai de Dó à Dó, e depois o ciclo se reinicia, é denominada de escala maior de Dó, observe o intervalo entre as notas iniciando em Dó, (tom, tom, semitom, tom, tom, tom, semitom). Utilizando essa mesma seqüência e mudando a nota inicial podemos construir as escalas maiores. De maneira análoga devemos proceder para determinar as escalas menores, escolher a nota inicial e proceder com o mesmo raciocínio da escala maior, porém utilizando a seqüência de intervalos, (tom, semitom, tom, tom, semitom, tom, tom). Podemos então determinar a construção de uma escala por uma seqüência de frações, onde o número 1 representa um tom, e  $\frac{1}{2}$  um semitom. [4].

#### Seqüência da Escala Maior

$$1, 1, \frac{1}{2}, 1, 1, 1, \frac{1}{2} \quad (3.1)$$

#### Seqüência da Escala Menor

$$1, \frac{1}{2}, 1, 1, \frac{1}{2}, 1, 1 \quad (3.2)$$

A figura 7 abaixo ilustra as escalas maiores das notas C, D, E, F, G, A e B.

Figura 7 – Escala Maior

Intervalos da escala	Tom	Tom	Semi-Tom	Tom	Tom	Tom	Semi-Tom
Escala Dó maior	C	D	E	F	G	A	B
Escala Ré maior	D	E	F#	G	A	B	C#
Escala Mi maior	E	F#	G#	A	B	C#	D#
Escala Fá maior	F	G	A	Bb	C	D	E
Escala Sol maior	G	A	B	C	D	E	F#
Escala Lá maior	A	B	C#	D	E	F#	G#
Escala Si maior	B	C#	D#	E	F#	G#	A#

Fonte: <http://www.descomplicandoamusicacomusicais.com/escalas-musicais/>

Assim como a música utiliza-se de seqüências de tons e semitons para determinar suas escalas maiores e menores, podemos fazer uma relação dessas seqüências de tons com as seqüências numéricas, que vamos definir a seguir.

**Definição 3.1** *Seqüência é toda aplicação  $a$  de  $\mathbb{N}$  em  $\mathbb{R}$ , que a cada número natural  $i$ , está associado um número real  $a_i$ .*

É usual indicarmos a seqüência  $a$  apenas descrevendo a sua imagem.

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_i, \dots).$$

Os números reais  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_i, \dots$ , são chamados de termos da seqüência.

**Exemplo 3.1** *A seqüência dos números naturais pares:*

$$(0, 2, 4, 6, 8, \dots).$$

Para a matemática, o interesse maior se dá pelas seqüências que apresentam uma lei de formação, como é o caso das seqüências da escala das notas maiores e menores. A seqüência de Fibonacci, que a cada termo a partir do segundo é igual a soma dos dois outros termos anteriores. As progressões aritméticas, onde cada termo a partir do segundo é igual a soma do anterior com um número real  $r$ , denominado de razão da PA<sup>1</sup>. As progressões geométricas, onde cada termo a partir do segundo é igual ao produto do anterior por um número real  $q \neq 0$ , denominado de razão da PG<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> Abreviação usualmente utilizada para representar uma Progressão Aritmética.

<sup>2</sup> Abreviação usualmente utilizada para representar uma Progressão Geométrica.

Voltando a música, os 12 semitons da escala cromática, são também representados através de uma outra nomenclatura, o grau. Utilizemos por exemplo a escala de Sol maior, conforme a figura 5, temos então a seguinte relação entre as notas e o grau, apresentada na tabela 2.

Tabela 2: Graus da escala de Sol maior

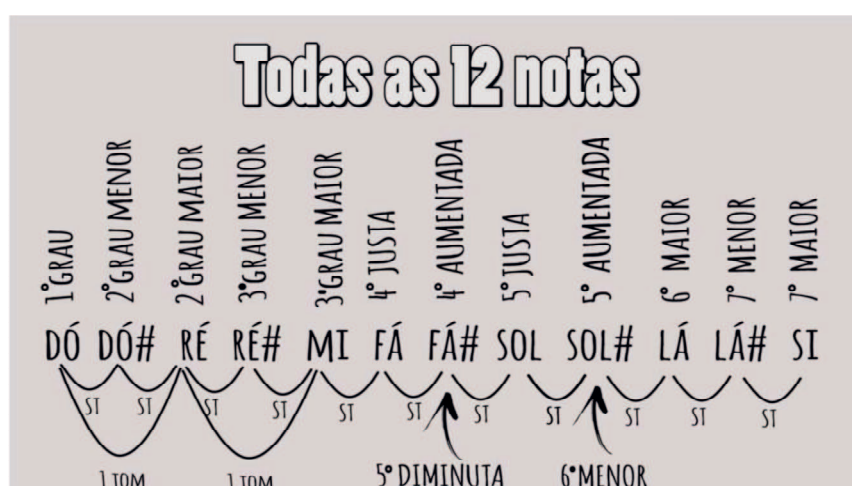
Notas	G	A	B	C	D	E	F#
Grau	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°

Fonte: Elaborada pelo Autor

Portanto se solicitarmos à um músico que toque a quinta, ou a nota de 5° grau da escala de sol maior, ele deverá tocar a nota D.

No entanto essa nomenclatura traz a necessidade de se saber qual a escala de referência, ou seja, a nota inicial, e se é menor ou maior. Para resolver esse problema vamos então utilizar a escala cromática, escala das 12 notas. Temos então a seguinte nomenclatura para os 12 semitons da escala ilustrados na figura 8 abaixo. Com essa nomenclatura fica mais fácil determinar a nota a ser tocada, pois não é necessário determinar se a escala é maior ou menor, basta determinar a sua nota inicial.

Figura 8 – Grau da escala cromática



Fonte: <https://www.youtube.com/watch?v=EWb1ZoOjY6E&t=318s>

Portanto ao solicitar que se toque a nota que representa a quinta aumentada a partir de Dó, saberemos imediatamente que trata-se da nota Sol#, pelo fato da quinta aumentada estar a uma "distância" de 4 tons, ou 8 semitons, da nota Dó. Podemos então proceder da mesma maneira pra as demais notas. O que precisamos é saber o

intervalo de tons e semitons entre a nota inicial para cada nomenclatura.

## 4 Matemática e Ritmos

Analisaremos alguns símbolos, os quais representam intervalos musicais e como eles podem representar uma música, através do que chamamos de partitura. Observe a sequência de símbolos contidas na figura 4.1.

Figura 9 – Figuras Musicais

**FIGURAS RÍTMICAS**

Semibreve	Mínima	Semínima	Colcheia	Semicolcheia	Fusa	Semifusa
4	2	1	1/2	1/4	1/8	1/16

**PAUSAS**

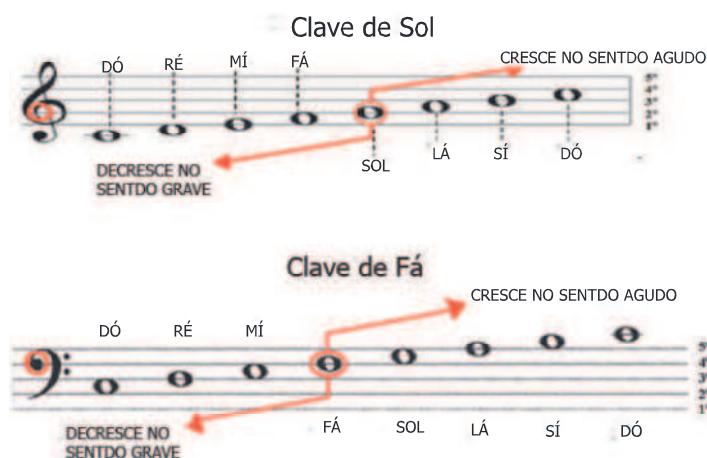
Semibreve	Mínima	Semínima	Colcheia	Semicolcheia	Fusa	Semifusa
4	2	1	1/2	1/4	1/8	1/16

Fonte: <http://guiadoviolinoeviolao.com/teoria-musical/>

Vamos entender melhor essas razões, observe que cada valor é metade do anterior. Por exemplo, suponha que um semibreve tenha uma duração de 16 segundos, então uma mínima terá duração de 8 segundos, uma semínima 4 segundos e assim sucessivamente. Da mesma maneira segue-se para as pausas. São esses intervalos de tempo que determinam o ritmo da música que está sendo tocada. Observando a figura 9, podemos verificar que nela temos alguns feixes de linhas paralelas cortadas por alguns segmentos perpendiculares. A essa representação chamamos de partitura, e cada espaço entre os segmentos perpendiculares denomina-se compasso. Na partitura cada linha e cada espaço entre as linhas representa uma nota. Analisando ainda a figura 9 acima, observa-se um símbolo no início da partitura, o qual denomina-se clave, que é utilizado para determinar a nota de uma linha específica. As claves mais utilizadas são a clave de Sol, e Fá. A figura 10 abaixo apresenta as notas nas claves de Sol e Fá respectivamente.

As partituras trazem inicialmente 5 linhas, no entanto podemos verificar na figura 10 que podem ser acrescentadas linhas tanto acima, quanto a baixo. Essas linhas são chamadas de suplementares. Nas partituras mostradas nas figuras anteriores, não te-

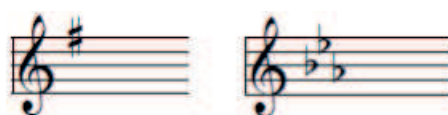
Figura 10 – Claves de Sol e Fá



Fonte: <http://www.descomplicandoamusic.com/partitura-clave-de-sol/>  
<http://www.descomplicandoamusic.com/clave-de-fa/>

mos as 12 notas da escala cromática, pois não temos as notas C# ou Db, D# ou Eb, F# ou Gb, G# ou Ab e A# ou Bb. Para representar essas notas é colocado no início da partitura, após a clave, os símbolos # ou b, para sustenido e bemol respectivamente, em alguma linha ou espaço, indicando que aquela nota sofrerá um aumento ou uma redução de meio tom ou, como visto anteriormente, um grau a cima ou um abaixo. Esses símbolos quando utilizados são chamados de acidentes ou armadura de clave, veja figura 11.

Figura 11 – Acidentes



Fonte: Elaborado pelo Autor

No entanto, em alguns momentos se faz necessário voltar a nota original, ou anular o efeito do acidente em um certo momento da música, e para isso utiliza-se antes da nota o símbolo denominado de bequadro, veja figura 12.

Figura 12 – Bequadro



Fonte:

<http://www.descomplicandoamusic.com/bequadro-dobrado-sustenido-bemol/>

É possível determinar qual a escala que está sendo utilizada na música, analisando os acidentes presentes na armadura da partitura, pois basta verificar qual das escalas que possui um acidente na nota descrita pela partitura, como no exemplo abaixo, que representa a escala de Lá maior, pois pela figura 7, a escala de Lá maior apresenta três acidentes, Dó#, Fá# e Sol#.

Figura 13 – Escala de Lá Maior



Fonte: <http://www.descomplicandoamusicacom.com/armadura-de-clave/>

Voltando a partitura, como mencionado anteriormente, os segmentos perpendiculares as linhas que determinam as notas, separam um compasso do outro. Portanto a soma das notas, dentro de cada compasso deve ser sempre a mesma, utilizando as frações da figura 9. Por exemplo, a figura 14 abaixo demonstra esse fato.

Figura 14 – Compasso



Fonte: Elaborado pelo Autor

Note que a cada compasso a soma dos intervalos das notas é sempre o mesmo.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3;$$

$$2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3;$$

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3;$$



Mas como é definida essa soma para cada compasso? Na armadura da partitura, após a clave, deve existir uma fração (fração de compasso) que determina o ritmo da música e a soma das notas em cada compasso. Observe a figura 15 abaixo:

Figura 15 – Fração de Compasso



Fonte: <http://www.descomplicandoamusica.com/compasso-musical/>

O denominador da fração indica uma nota como referência. No caso da imagem acima, o denominador 4 indica que a nota de referência é a semínima. O numerador da fração determina quantas dessas notas cabem no compasso. No caso do compasso de fração 4/4, cabem então 4 semínimas em cada compasso. Observe que ao dizer que cabem 4 semínimas em um compasso, não significa dizer que o mesmo deve ser composto apenas por semínimas. Como vimos na figura 9, uma semínima tem valor 1, então o compasso com 4 semínimas tem valor 4. Podemos então utilizar quaisquer notas ou pausas, contanto que a soma de seus valores sejam iguais a 4. Por exemplo, podemos então supor que o compasso da figura 14 seja um compasso 3/4, já que cabem 3 semínimas em cada compasso.

A tabela abaixo determina o valor de referência para cada nota.

Tabela 3: Valor de referência da notas

Notas	Semibreve	Mínima	Semínima	Colcheia	Semicolcheia	Fusa	Semifusa
Valor	1	2	4	8	16	32	64

Podemos então, com esses valores de referência, interpretar cada fração de compasso. Por exemplo:

5/4 - Cabem 5 semínimas;

3/8 - Cabem 3 colcheias;

7/64 - Cabem 7 semifusas;

3/1 - Cabem 3 semibreves;

4/2 - Cabem 4 mínimas;

5/16 - Cabem 5 semicolcheias;

Os compassos ainda são classificados como binários, ternários e quaternários, que podem ser simples, quando o numerador representa diretamente o compasso ou

compostos onde cada tempo é subdividido em 3 notas. Essa denominação também é matemática, através do conceito de múltiplos. O compasso binário tem em seu numerador sempre um múltiplo de 2, por exemplo  $2/4$  e  $2/8$  (simples),  $6/4$  e  $6/16$  (composto). O compasso ternário tem no numerador múltiplos de 3, por exemplo  $3/4$  e  $3/2$  (simples),  $9/8$  e  $9/4$  (composto). Os quartenários têm numerador múltiplo de 4, por exemplo  $4/4$  e  $4/16$  (simples),  $12/16$  e  $12/64$  (composto).

*O tempo definido para o compasso está relacionado com a pulsação que a música possui. Experimente pegar algumas partituras, ouvi-las e verificar sua fração de compasso. Você vai reparar que o compasso está marcando: o ritmo da música, a forma como os instrumentistas estão dividindo os acordes ou, simplesmente, o padrão rítmico que a melodia segue.<sup>[4]</sup>*

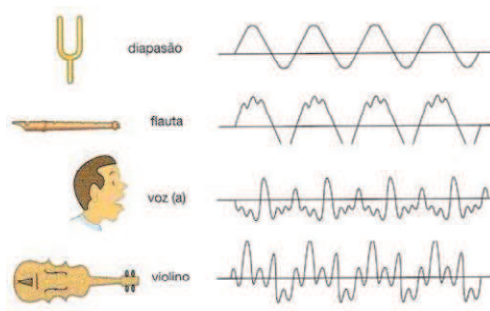
Para o compasso binário podemos citar o jazz, o frevo, o baião e o samba, como exemplos de ritmos que utilizam esse compasso. Já o compasso ternário é observado em ritmos como a valsa. O quaternário é o compasso mais utilizado e está presente em quase todos os estilos musicais.

Podemos propor exercícios utilizando esses conceitos musicais para nos auxiliar nas aulas de matemática, como por exemplo, em soma de frações. Alguns exemplos de atividades que podemos desenvolver estão apresentadas nos apêndices desse trabalho.

## 4.1 A matemática do som

A física nos mostra que o som se desloca em forma de ondas, no entanto nem todos os sons formam ondas perfeitas, mas podemos tomar com exemplo as ondas formadas por um diapasão<sup>[1]</sup>. As ondas são perfeitas, a sua representação é semelhante ao gráfico da função seno, sendo assim essas ondas sonoras são chamadas de senoides<sup>[2]</sup>.

Figura 16 – Ondas Sonoras



Fonte: <https://www2.ifsc.usp.br/portal-ifsc/a-fisica-nos-instrumentos-musicais/>

<sup>1</sup> Diapasão é um instrumento metálico utilizado para auxiliar na afinação de instrumentos musicais e vozes.

<sup>2</sup> Representação gráfica da função seno.

Muitos matemáticos dedicam-se a estudar essas ondas e as funções que as descrevem. Um exemplo é o matemático e físico francês Jean Baptiste Joseph Fourier, que buscou estudar as funções periódicas, cujos gráfcuos são semelhantes às sonoras, desenvolvendo um dos seus trabalhos mais importantes, conhecido como séries de Fourier. Porém por ser um estudo com um nível de complexidade mais elevado do que o qual se destina esse trabalho, deixamos apenas como informação para que o leitor perceba que a matemática e música vão além do que é apresentado até o momento. Caso deseje se aprofundar mais nas séries de Fourier uma sugestão é o livro “An Elementary Treatise on Fourier’s Series” de William Elwood Byerly<sup>3</sup> escrito em 1893.

---

<sup>3</sup> Matemático americano (13 de Dezembro de 1849 – 20 de Dezembro de 1935) professor da universidade de Havard.

## 5 A Música e a Etnomatemática do Povo Indígena Xukuru do Ororubá

O território indígena Xukuru do Ororubá está localizado no agreste pernambucano entre os municípios de Pesqueira e Poção, na Serra do Ororubá com uma extensão territorial de 27.555 hectares e uma população de mais de 11 mil indígenas, distribuídos em sua grande maioria entre as 24 aldeias que compõem o território. O povo Xukuru do Ororubá veio a ter o seu território demarcado e homologado em 2001, porém a luta pela reconquista do território sagrado do povo Xukuru foi árdua e muitas lideranças foram assassinadas nesse percurso, em destaque o Cacique Xikão, assassinado em 20 de Maio de 1998. O povo Xukuru se mantém forte durante séculos de perseguição, e para isso mantiveram viva a sua cultura, religião e tradições, dentre elas a música, que entoam em diversos momentos do convívio do povo.

Portanto ao falar de música e matemática, não poderia deixar de lado a importância de ambas para esse povo, assim como descrito no início desse trabalho, a música tem um papel fundamental na organização coletiva de um povo. Para os indígenas a música está presente tanto nos momentos de diversão quanto nos momentos sagrados, tradicionalmente na cultura Xukuru. Como instrumentos musicais presentes na cultura da etnia, temos o pífano<sup>1</sup>, presente em algumas festividades; a maraca e o memby utilizados na realização do toré<sup>2</sup>; e ainda podemos citar o jupago<sup>3</sup> como marcador de ritmo, durante a realização do toré.

---

<sup>1</sup> Flauta transversal.

<sup>2</sup> Ritual indígena em forma de dança, presente na cultura de várias etnias.

<sup>3</sup> Peça de madeira, semelhante a uma bengala, utilizado para dança e defesa pessoal pelos índios Xukuru do Ororubá.

Figura 17 – Índios Xukuru com o Jupago



Fonte: Acervo fotográfico de de Edy Silva

Figura 18 – Maraca - instrumento musical indígena



Fonte: Elaborado pelo Autor

Assim como a música, a matemática é bastante presente na cultura Xukuru do Ororubá, seja na forma de medir suas lavouras, utilizando a cubagem<sup>4</sup>; na produção

<sup>4</sup> Método utilizado pelos índios Xukuru para determinar áreas.

de artesanato, no formato da barretina<sup>5</sup> ou; até mesmo nas formas geométricas da sua pintura corporal. Segundo o professor Ubiratan D'Ambrosio<sup>6</sup> a matemática própria de cada grupo étnico deve ser respeitada e preservada. A essa matemática específica o professor denomina de etnomatemática.

*A etnomatemática do indígena serve, é eficiente e adequada para muitas coisas de fato muito importantes e não há por que substituí-la. A etnomatemática do branco serve para outras coisas, igualmente muito importantes, e não há como ignorá-la. Pretender que uma seja mais eficiente, mais rigorosa, enfim, melhor que a outra é, se removida do contexto, uma questão falsa e falsificadora. . . [3]*

Figura 19 – Artesanato e Pintural Corporal Xukuru



Fonte: Acervo fotográfico de Geovane Xukuru e Fernando Figueira

Figura 20 – Barretina - o principal símbolo da cultura Xukuru



Fonte: Acervo fotográfico de Edy Silva

<sup>5</sup> Tipo de chapéu utilizado pelo povo Xukuru do Ororubá, nos momentos de toré e festividades tradicionais.

<sup>6</sup> Matemático e teórico da educação, conhecido como o pai da etnomatemática.

Assim como a matemática está presente na construção de vários instrumentos musicais, a mesma se apresenta de forma etno, na construção do instrumento memby, uma espécie de flauta, que é um dos símbolos mais importantes da cultura Xukuru do Ororubá, anteriormente feita de taboca<sup>7</sup>. Hoje devido a dificuldade de encontrar a taboca, a memby é feita de cano pvc, com 5 furos, e um bico semelhante ao de uma flauta doce, sendo 4 furos circulares no fim do cano e um quadrangular mais próximo ao bico, o qual é feito com cera de uma espécie de abelha conhecida popularmente na região como aripuá. É descrito abaixo nas palavras do mestre no memby o toíope<sup>8</sup> Medalha, como é feita a construção e como o mesmo aprendeu a tocar o memby.

“O memby é o seguinte, 62 centímetros, esses aqui tem que ser tudo na mesma escala, a largura, se é o tamanho de um é do outro, esse aqui tem que ser quadrado, o complicado não é fazer a buraqueira, complicado é isso aqui, que é cera de aripuá, não é toda cera que dá praqui, e também tem que ser uma cera boa, tem que ser uma cera bem ligada, se for uma cera solta não presta, tem que ser uma cera que ela encaixe bem, quando vai colocar essa cera, tem uma vareta, maior que ela, entra aqui com essa grossura aqui, de fora a fora, pega a cera, coloca ela aqui, ai encarca ela, e vai com a vareta, batendo para ela encaixar bem a dispois que encaixa, a gente vai com um copo ou um caneco d’água, vai com a paleta, vai coloca essa paleta aqui, até romper, ai quando rompe, ai vai agraduando, molha a paleta na água e vai agraduando até ela chega ao som. Eu não tenho a medida certa, mas é na base do que, uns 4 centímetros, meu compasso é isso aqui, no final 4 dedos. Nela é tocada 5 peças, cada peça que é tocada significa um momento de oração, a última peça é tocada de ano em ano, na porta da igreja no encerramento, 4 horas da manhã a gente sai do salão e vai pra igreja e dá 3 voltas, eu fico na frente da igreja e é tocada essa peça. Se chama a peça da Vena, agradecendo a nosso pai Tupã, agradecendo a senhor São João e a nossa mãe Tamain.

Hoje nós estamos usando o cano prástico, porque não existe a taboca, a taboca é difícil né, porque antigamente não era cano prástico era taboca, como de fato a primeira gaita que eu ganhei foi do mestre chamava-se Ventura, eu passei por vários mestre de gaita aqui de Cana Brava, aqui do Gitó, então esses mestres fizeram a viagem, então ficou um único mestre que foi Ventura, ele morava em Pesqueira ele era aqui do Gitó, mas que ele morava em Pesqueira, então eu vi as tradição na época, era de ano em ano, então ele perguntou, eu lembro muito bem, na casa de um Caboco véi que se chama Rumão, aí a gaita estava em cima da mesa, gaita de taboca, perguntou se eu tinha

<sup>7</sup> Madeira semelhante ao bambu.

<sup>8</sup> Palavra do vocábulo Xukuru, que significa avô, velho, ancião.

vontade de aprender a tocar gaita, ai eu falei pra ele que tinha vontade, ai comecei, nunca tinha pegado né, comecei fazendo a comparação da terceira peça, mas fazendo só a comparação que eu não sabia, nunca tinha pego, então eu fui treinando, depois ele mandou uma gaita pra mim, ela quebrou aí ele fez outra já de plástico, e fui aprendendo e aprendendo e hoje, já ensino outros que estão aprendendo, a manter a tradição.”

A afinação do memby diferente por exemplo da afinação do pífano, que é feito nas dimensões e nas distâncias entre cada furo, a memby é afinada no bico, o que o mestre Medalha chama de “agradua”. Apesar de não serem usados conceitos matemáticos acadêmicos, é notório a importância da matemática, para a construção de tal instrumento, por exemplo, na forma dos furos, ou até mesmo no comprimento do cano/taboca. Afirmado ainda mais a relação entre a matemática e a música Xukuru do Ororubá.

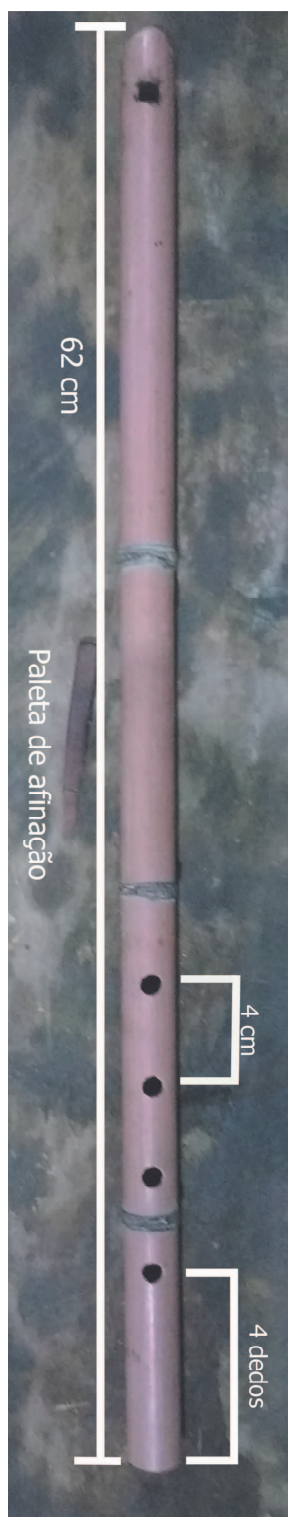
Figura 21 – Mestre Medalha tocando a Memby



Fonte: Elaborado pelo Autor



Figura 22 – Memby e suas Dimensões



Fonte: Elaborado pelo Autor

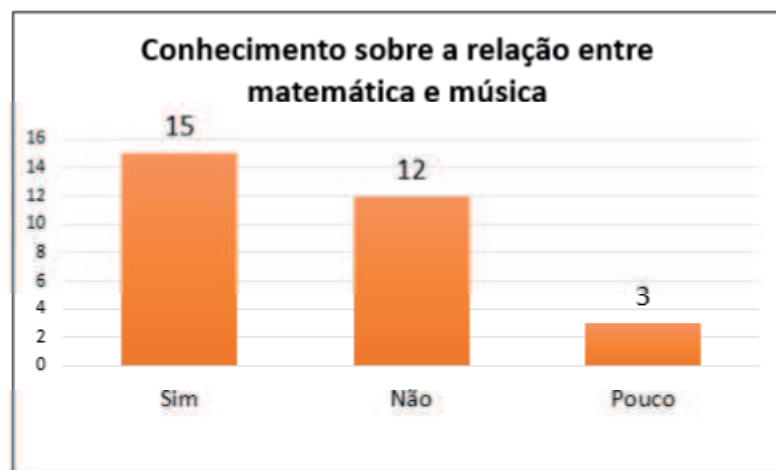
## 6 Atividades Práticas

### 6.1 Atividades Práticas: Aplicação em Sala de Aula

Como forma de fortalecer essa relação da matemática e música, podemos junto aos nossos educandos propor atividades práticas, por exemplo, a construção de um pífano utilizando cano pvc, ou encontrar as notas musicais utilizando copos ou garrafas de vidro. Com esse intuito foi desenvolvido na EREM<sup>1</sup> Senador Vitorino Freire, escola estadual localizada no município de Arcoverde no sertão Pernambucano, com alunos da turma do 3º ano B, a construção de um pífano onde os estudantes puderam utilizar seus conhecimentos matemáticos, tais como medidas de comprimento e diâmetro de uma circunferência, para criar um instrumento musical.

Antes da atividade prática foi explorado um pouco da relação entre a matemática e música, e como elas se desenvolveram desde os pitagóricos até os dias atuais. Fazendo uma reflexão sobre a importância da matemática para o desenvolvimento da música, e como esta pode nos auxiliar no aprendizado da matemática, como forma mais lúdica de se apresentar alguns temas. Essa explanação se faz necessária pois nem todos os alunos conheciam essa afinidade entre as duas áreas de conhecimento, como mostra o gráfico 1 abaixo, resultado de uma das questões respondidas pelos alunos, em um questionário aplicado ao final das atividades, sobre o seu conhecimento da relação entre a matemática e a música anterior a aula de explanação.

Figura 23 – Gráfico 1

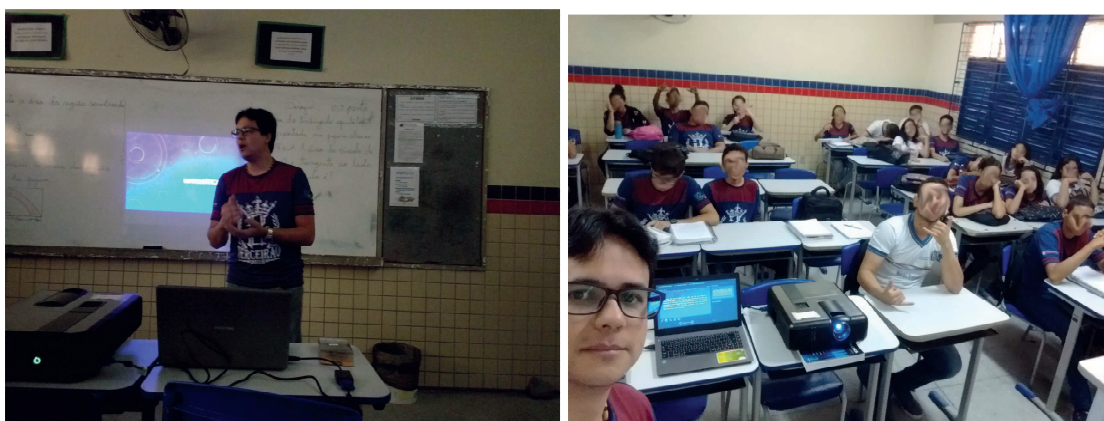


Fonte: Elaborado pelo Autor

<sup>1</sup> Escola de Referência em Ensino Médio

Dos 30 alunos presentes no momento das atividades, podemos observamos que 40% destes não tinham conhecimento sobre essa relação, e outros 10% pouco conhecimento. Aqueles que conheciam a relação entre matemática e música são alunos que já tiveram contato ou tocam algum instrumento musical.

Figura 24 – Aula exposição da temática matemática e música



Fonte: Elaborado pelo Autor

Após esse primeiro contato com tal relação, os alunos foram instigados a utilizar alguns dos seus conhecimentos matemáticos para construir um pífano, utilizando como matéria prima cano PVC. Foi utilizado como referência os valores de comprimento e diâmetro presentes em um PDF, disponibilizado no canal de vídeos do youtube **Manual do Mundo** onde o link do vídeo encontra-se na bibliografia e o PDF nos anexos desse trabalho.

Figura 25 – Analisando as medidas da flauta e serrando o PVC



Fonte: Elaborado pelo Autor

Figura 26 – Medindo os intervalos entre os furos e verificando a afinação



Fonte: Elaborado pelo Autor

Durante esse processo de construção do pífano, foi perceptível a participação e entusiasmo dos alunos durante a aula. Isso fica ainda mais evidente nas palavras de alguns dos alunos, que responderam ao questionário, quando indagados sobre como a música pode auxiliar o aprendizado da matemática. Seguem abaixo algumas das frases escritas pelos alunos no questionário.

*“...com música, a matemática fica como método que quebra aquela dura rotina de que a matemática é um monstro.” (Aluno 1)*

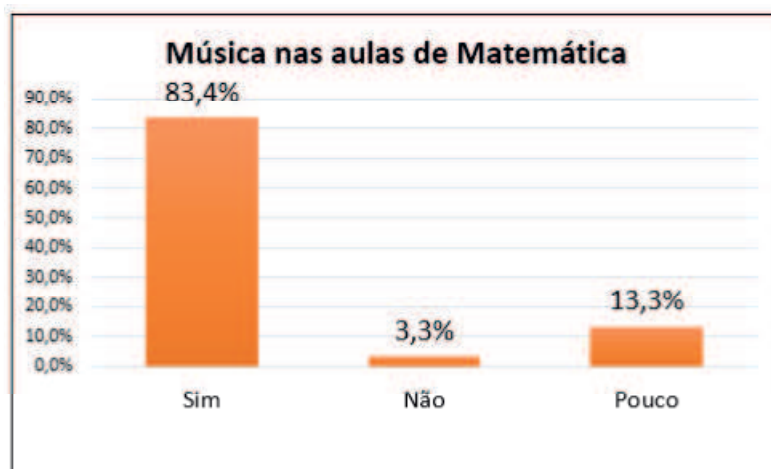
*“Pode tirar aquela fadiga de só estudar no quadro.” (Aluno 2)*

*“Por que as aulas ficam mais dinâmicas e acabam saindo da nossa rotina que é tudo muito repetitivo.” (Aluno 3)*

*“Porque a música auxilia no aprendizado prático, entendemos melhor como a matemática funciona e percebemos o quanto ela é incrível.”(Aluno 4)*

Além das frases descritas acima, os resultados do questionário, sobre a presença da música nas aulas de matemática, apresentam o quanto essas aulas foram positivas, como podemos observar no gráfico 2 abaixo, onde os alunos responderam se gostaram de trabalhar música nas aulas de matemática.

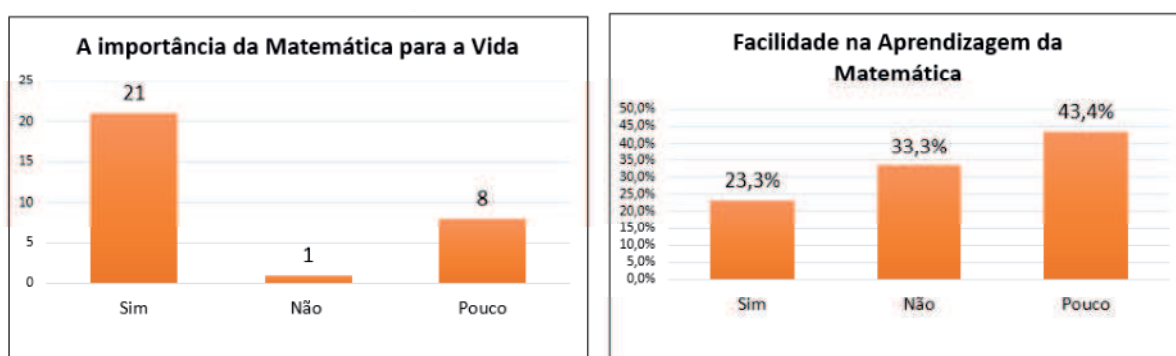
Figura 27 – Gráfico 2



Fonte: Elaborado pelo Autor

É fundamental que, como professores de matemática, busquemos sempre utilizar métodos que mostrem a importância da matemática, para os educandos e facilitem o aprendizado, através de temas que atraiam mais a sua atenção. Muitos dos alunos envolvidos na atividade exposta acima, reconhecem a importância dessa ciência, porém apresentam dificuldades na assimilação dos seus conceitos, como mostram os resultados do questionário, apresentados nos gráficos 3 e 4 abaixo, que buscou verificar como encaravam a importância da matemática para a sua vida, gráfico 3, e se acreditavam ter facilidade em assimilar os conceitos matemáticos, gráfico 4.

Figura 28 – Gráfico 3 e 4

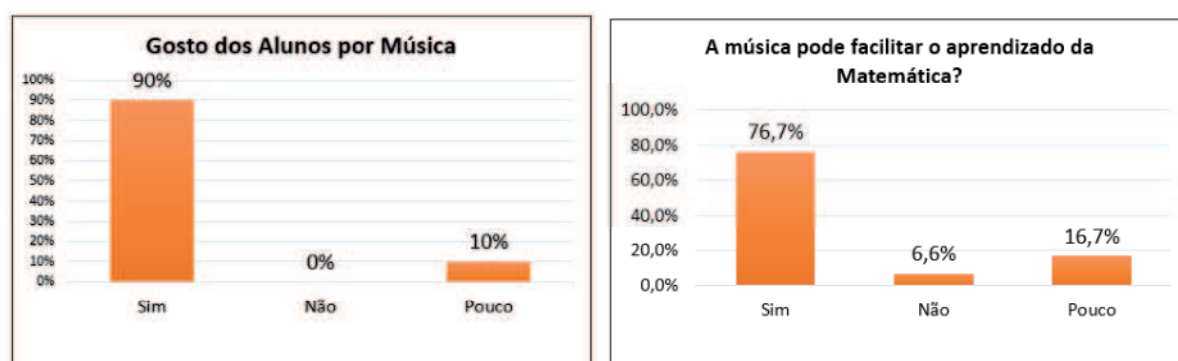


Fonte: Elaborado pelo Autor

Fica evidente que a música pode ser um dos suportes para desmistificar a ideia, presente de grande parte das pessoas, de que a matemática é difícil, é o Bicho-Papão das ciências e que, relacioná-la com um elemento que agrada a maior parte das pessoas, pode facilitar o seu aprendizado. Como fala o repórter Pebro Bassan, durante

série transmitida pelo Jornal Nacional em 14 de Novembro de 2017, que contou com a participação do professor Dr Marcelo Viana, atual diretor do IMPA<sup>2</sup>, sobre matemática e música, "...de Pitágoras a Vila Lobos a música evoluiu muito, a matemática também avançou, mas ainda não descobriu uma forma mais bonita de fazer contas de dividi". E não é apenas na divisão que a música poder servir de suporte para a aprendizagem, como mostrado durante todo o trabalho, são várias as possibilidades. E novamente os resultados coletados durante as aulas com o questionário nos mostra que o gosto pela música pode facilitar o aprendizado dos conceitos matemáticos, como podemos ver nos gráficos 5 e 6.

Figura 29 – Gráficos 5 e 6



Fonte: Elaborado pelo Autor

Existem outras atividades envolvendo a matemática e música que podem nos auxiliar em sala de aula. Um outro exemplo é determinar as notas musicais utilizando copos ou garrafas de vidro, podemos perceber uma relação entre as notas e o volume de água presente nos copos ou garrafas, assim como foi observado pelos pitagóricos.

A atividade executada acima, não necessariamente deve ser realizada com alunos do ensino médio, como foi o caso. A mesma pode ser desenvolvida com alunos desde o quinto ano do ensino fundamental até o terceiro do ensino médio, tendo em vista que os conhecimentos necessários são basicamente, do sistema de medidas, podendo o professor, dependendo do nível da turma, explorar de várias formas distintas a atividade.

<sup>2</sup> Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada

## 7 Considerações Finais

O presente trabalho buscou através de uma visão, inicialmente histórica e teórica da música, apresentar ao leitor como a matemática contribuiu e contribui para a evolução da música, apesar desta fazer parte das diversas culturas espalhadas pelo mundo e esta ser tão antiga quanto o homem. O seu desenvolvimento de forma teórica surge inicialmente com Pitágoras e seus discípulos, "...Pitágoras descobriu as frações que combinavam melhor, de certa forma o pai da matemática, pode ser considerado o autor da primeira composição da história, a escala."(Pedro Bassan) [7]

Toda a teoria musical traz consigo conceitos matemáticos, que variam desde a construção e características dos instrumentos, até a organização destes em uma orquestra, quando o maestro trabalha como um matemático organizando sequências numéricas em forma de notas.

É com esse contexto que o trabalho apresenta algumas ideias de como podemos utilizar a música para facilitar e atrair os olhares dos nosso educandos. Essas aplicações, em operações com frações, progressão geométrica, logaritmos, podem se dar de maneira prática ou teórica, como algumas atividades propostas. Podendo ser utilizadas e aplicadas nos mais diversos níveis de escolaridade, apresentando relações com frações, sistemas de medida, logaritmos, dentre outros conceitos matemáticos que podem ser apresentados com o auxílio da música.

Apresentamos também, de maneira breve, como a música e a matemática são importantes para a preservação dos costumes e tradições do povo Xukuru do Ororubá, tanto na confecção dos instrumentos, como em outros elementos da sua cultura. Devemos então valorizar e respeitar as diversas maneiras de manifestação cultural, como elementos fundamentais na proteção dos conhecimentos étnicos de um povo, sendo a música uma das principais.

A atividade de construção do pífano deixou claro o quanto a música pode ser útil para o processo de ensino e aprendizagem da matemática, onde os resultados apresentam que 76,7% dos alunos participantes do processo, pouco gostam ou não gostam da referida disciplina, porém, coincidentemente, 76,7% dos mesmo educandos, como vimos no gráfico 6, encaram de maneira positiva a utilização da música, como ferramenta para dinamizar e facilitar a introdução ou aperfeiçoamento de conceitos matemáticos.

É importante que nós professores busquemos sempre melhorar a nossa prática e, diversificar as formas de como abordamos a matemática é uma delas. O presente trabalho traz apenas uma pequena demonstração de como podemos fazer isso através da música, porém, cabe a todos nós educadores, buscar e utilizar os instrumentos matemáticos, presentes das mais diversas formas, como dispositivos facilitadores, da aprendizagem matemática.



# Referências

- [1] ANDRADE, Mario de Andrade; Pequena História da Música. 1942
- [2] BOYER, BOYER, C.B. História da matemática. Tradução de Elza F. Gomide. 2 ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.
- [3] D'AMBROSIO, Ubiratan. Etnomatemática. Campinas, SP: Papyrus, 1998.
- [4] DESCOMPLICANDOAMUSICA, Descomplicando a música. Disponível em <<http://www.descomplicandoamusica.com>>. Acesso em 12 de abr. 2018
- [5] DESCOMPLICANDOAMUSICA, Encontrando escalas na guitarra com uma Fita Métrica - Origem da música. Disponível em <<https://www.youtube.com/watch?v=MkHQUtVrr-A&t=12s>>. Acesso em 20 de jun. 2018.
- [6] GOMES, Carla Regina Gomes; PITÁGORAS DE SAMOS: SEU MITO E SUA HERANÇA CIENTÍFICO ? CULTURAL - (Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro - Campus Nova Iguaçu).
- [7] JORNAL NACIONAL, Mistérios da matemática: notas musicais são números em movimento, disponível em <<https://globoplay.globo.com/v/6289281/programa/>>. Acesso em 05 de maio 2018.
- [8] TANGENTE, Tangente Hers-série n 11, Maths & musique: Des destinées parallèles (Sous la direction de Gilles Cohen). Juin 2005.
- [9] THENÓRIO, Iberê Thenório. Como fazer flauta de PVC feat. Vinheteiro e Zé Graça. Disponível em <[https://www.youtube.com/watch?v=vYKZ\\_tah9xE](https://www.youtube.com/watch?v=vYKZ_tah9xE)>. Acesso em 10 de abr. 2018
- [10] WRIGHT, David Wright; Mathematics and Music - April 8, 2009.

# Apêndice

Proposta de atividades para serem desenvolvidas em sala de aula, exercícios e suas resoluções, envolvendo conceitos matemático relacionados com a música.

**Exercício 7.1** - Observando as sequências das escalas maiores e menores, presentes nas 17 e 18, determine as escalas abaixo:

(a)  $F\sharp$  maior

**Resolução 1**  $F\sharp \rightarrow G\sharp \rightarrow A\sharp \rightarrow B \rightarrow C\sharp \rightarrow D\sharp \rightarrow F \rightarrow F\sharp$

(b) A menor

**Resolução 2**  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow A$

(c) C menor

**Resolução 3**  $C \rightarrow D \rightarrow D\sharp \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow G\sharp \rightarrow A\sharp \rightarrow C$

(d)  $G\sharp$  maior

**Resolução 4**  $G\sharp \rightarrow A\sharp \rightarrow C \rightarrow C\sharp \rightarrow D\sharp \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow G\sharp$

**Exercício 7.2** - Analise as sequências e determine o sexto termo de cada uma delas.

(a) (E,  $F\sharp$ , G, ...)

**Resolução 5** A sequência segue, 1 tom, 1/2 tom, logo é a escala menor de E, seguindo a sequência até o sexto termo, temos:

$E \rightarrow F\sharp \rightarrow G \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$

Portanto o sexto termo da sequência é a nota C(dó).

(b) ( $D\sharp$ , F, G, ...)

**Resolução 6** A sequência segue, 1 tom, 1 tom, logo é a escala maior de  $D\sharp$ , seguindo a sequência até o sexto termo, temos:

$D\sharp \rightarrow F \rightarrow G\sharp \rightarrow A\sharp \rightarrow C \rightarrow C$  Portanto o sexto termo da sequência é a nota C(dó).

(c) (2, 3, 5, 8, ...)

**Resolução 7** Observando a sequência, temos que a partir do terceiro termo, é igual a soma dos dois anteriores  $5 = 2 + 3$ ,  $8 = 5 + 3$ , seguindo a sequência até o sexto termo, temos:

(2, 3, 5, 8, 13, 21)

Portanto o sexto termo da sequência é 21.

**Exercício 7.3** - As sequências abaixo representam progressões aritméticas e geométricas, determine a razão o oitavo termo das sequências:

(a) (4, 7, 10, 13, ...)

**Resolução 8** Observando que  $7 - 4 = 3$ ,  $10 - 7 = 3$ , então a sequência descrita acima é uma PA, de razão  $r = 3$ , seguindo a sequência até o oitavo termo, temos:

(4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25)

Portanto o sexto termo da PA é  $a_8 = 25$

(b) (3, 6, 12, 24, ...)

**Resolução 9** Observando que  $6 = 3 \times 2$ , e  $24 = 12 \times 2$ , então a sequência descrita acima é uma PG, de razão  $q = 2$ , seguindo a sequência até o oitavo termo, temos:

(3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384)

Portanto o oitavo termo da PG é  $a_8 = 384$ .

(c)  $(1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots)$

**Resolução 10** Observando que  $\frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$ ,  $2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$  e  $\frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}$ , então a sequência descrita acima é uma PA, de razão  $r = \frac{1}{2}$ , seguindo a sequência até o oitavo termo temos:

$(1, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4, \frac{9}{2})$

Portanto o oitavo termo da PA é  $a_8 = \frac{9}{2}$

(d)  $(4, 2, 1, \frac{1}{2}, \dots)$

**Resolução 11** Observando que  $2 = 4 \times \frac{1}{2}$ ,  $1 = 2 \times \frac{1}{2}$  e  $\frac{1}{2} = 1 \times \frac{1}{2}$ , então a sequência descrita acima é uma PG de razão  $q = \frac{1}{2}$ , seguindo a sequência até o oitavo termo, temos:

$(4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32})$

Portanto o oitavo termo da PG é  $a_8 = \frac{1}{32}$

**Exercício 7.4** - Observe os compassos abaixo:





Determine o numerador da fração de compasso, de cada um dos compassos acima, sabendo que o compasso 1 tem a semínima como referência, os compassos 2 e 3 tem a colcheia como referência.

**Resolução 12** No compasso 1, como a nota de referência é a semínima, que tem como valor 1, basta determinar quantos 1, temos no compasso, como temos 4 semínimas e 2 colcheias que equivalem a uma semínima, então o valor do numerador é  $4 + 1 = 5$ .

A fração que determina o compasso é  $\frac{5}{4}$

No compasso 2 como a nota de referência é a colcheia, que tem como valor  $\frac{1}{2}$ , basta determinar quantos  $\frac{1}{2}$ , temos no compasso, como no compasso temos 7 colcheias, então o valor do numerador é 7.

A fração que determina o compasso é  $\frac{7}{8}$

No compasso 3 como a nota de referência é a colcheia, que tem como valor  $\frac{1}{2}$ , basta determinar quatos  $\frac{1}{2}$ , temos no compasso, como no compasso temos 11 colcheias, então o valor do numerador é 11.

A fração que determina o compasso é  $\frac{11}{8}$ .

**Exercício 7.5** - Considere um compasso  $2/4$ , de quantas maneiras podemos formar esse compasso utilizando apenas colcheias e semicolcheias, desconsiderando as suas posições, observando apenas os seus valores.

**Resolução 13** Devemos buscar combinações onde a soma dos valores seja igual a 2.  
Apenas colcheias (1):

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$$



## **Planos de Aulas**

### **Aula 1 Tema: Construindo uma Flauta/Pífano**

#### **Objetivos:**

- Observar a relação entre, o espaçamento de um furo para outro com as notas produzidas.
- Reconhecer a escala pentatônica.
- Compreender a importância do sistema de medidas para a construção da flauta/pífano.

#### **Material Utilizado**

- Cano PVC de 22mm;
- Rolha;
- Furadeira;
- Serra;
- Régua;
- Lixa;
- Tesoura;
- Celular;
- Internet;
- Esquema de construção da flauta/pífano.

#### **Tempo de Desenvolvimento**

- Duas a três aulas.

**Desenvolvimento:** Solicitar aos alunos que cortem os canos de pvc seguindo precisamente as instruções presentes no esquema de construção da flauta/pífano. Recortar a rolha também seguindo as instruções presentes no esquema, tampar com a rolha um dos lados do pvc, marcar os furos no pvc, seguindo as medidas dispostas no esquema, furar os locais marcados com a furadeira e utilizar uma tesoura para alargar mais os furos, no entanto isso deve ser feito utilizando o celular com algum software que mostre a nota que está sendo tocada, para que alargando os furos consiga se chegar as notas desejadas. Após executar esse procedimento com todos os furos, a flauta/pífano está pronta. Para finalizar a aula propor que os alunos juntos toquem alguma música.

## **Aula 2 Tema: Descobrimdo Oitavas**

### **Objetivos:**

- Proporcionar uma viagem no tempo, para a época dos pitagóricos.
- Vivenciar os experimentos realizados pelos pitagóricos.
- Determinar oitavas com o auxílio de régua.
- Observar a relação entre volume da água no copo/garrafa e as notas obtidas.

### **Material utilizado:**

- Copos ou Garrafas;
- Jarras com água;
- Régua;
- Celular.
- Internet.

### **Tempo de Desenvolvimento**

- Duas a três aulas.

**Desenvolvimento:** Antes das atividades práticas é explorado um pouco da relação entre a matemática e música, e como elas se desenvolveram com os pitagóricos. Após um primeiro contato com essa relação entre a matemática e música, os alunos são orientados para que encontrem notas utilizando copos com água ou garrafas, cada nível de água no copo/garrafa faz com que o mesmo produza um novo som, ou seja uma nota diferente, então os educandos devem em seus experimentos perceber essa relação, com o auxílio de algum software que facilite descobrir a nota encontrada, utilizando então uma régua o educando é levado a determinar um volume de água que represente uma oitava, uma quinta e uma quarta. Para finalizar os experimentos é proposto aos alunos tocarem alguma música utilizando as notas encontradas.

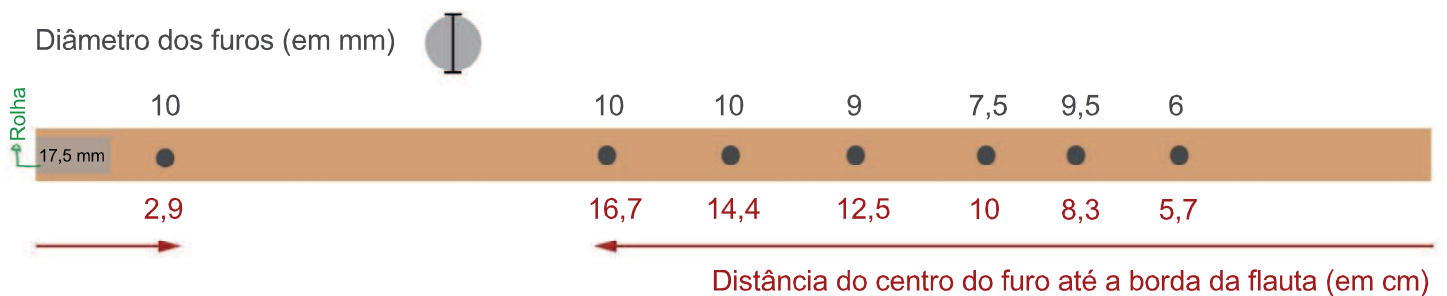
## Questionário

1. Você considera a matemática importante para a sua vida?
  - a) Sim
  - b) Não
  - c) Um Pouco
  
2. Você tem facilidade para aprender matemática?
  - a) Sim
  - b) Não
  - c) Um Pouco
  
3. Você gosta de música?
  - a) Sim
  - b) Não
  - c) Um Pouco
  
4. Antes das aulas sobre matemática e música, você sabia que existia uma relação entre elas?
  - a) Sim
  - b) Não
  - c) Um Pouco
  
5. Você gostou de trabalhar música nas aulas de matemática?
  - a) Sim
  - b) Não
  - c) Um Pouco
  
6. Você acredita que a música pode facilitar o aprendizado de matemática?
  - a) Sim
  - b) Não
  - c) Um Pouco
  
7. Com suas palavras descreva, brevemente, por que a música pode ajudar no aprendizado da matemática?



# Anexo

# FLAUTA DE PVC



Diâmetro do cano de PVC: 20 mm ou 1/2 polegada.  
Comprimento total da flauta: 33 cm.  
Ao amentar o furo, o som fica mais agudo.