UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ADRIANA DA SILVA VELOZO BEZERRA

# CONCEITO E REPRESENTAÇÕES DE FUNÇÃO VIA RESOLUÇÃO, PROPOSIÇÃO E EXPLORAÇÃO DE PROBLEMAS: UM TRABALHO COM ALUNOS DE GRADUAÇÃO

CAMPINA GRANDE – PB
2017

**ADRIANA DA SILVA VELOZO BEZERRA**

# CONCEITO E REPRESENTAÇÕES DE FUNÇÃO VIA RESOLUÇÃO, PROPOSIÇÃO E EXPLORAÇÃO DE PROBLEMAS: UM TRABALHO COM ALUNOS DE GRADUAÇÃO

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, da Universidade Estadual da Paraíba, área de concentração em Educação Matemática, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

**Área de concentração:** Educação Matemática

**Orientador:** Prof. Dr. Silvanio de Andrade

**CAMPINA GRANDE – PB**
**2017**

B574c Bezerra, Adriana da Silva Velozo.

Conceito e representações de função via resolução, proposição e exploração de problemas [manuscrito] : Um trabalho com alunos de graduação / Adriana da Silva Velozo Bezerra. - 2017.

319 p. : il. color.

Digitado.

Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2017.

"Orientação: Prof. Dr. Silvanio de Andrade, Departamento de Matemática".

1. Ensino-aprendizagem. 2. Função matemática. 3. Matemática - Resolução de problemas. I. Título.

21. ed. CDD 515.25

ADRIANA DA SILVA VELOZO BEZERRA

# CONCEITO E REPRESENTAÇÕES DE FUNÇÃO VIA RESOLUÇÃO, PROPOSIÇÃO E EXPLORAÇÃO DE PROBLEMAS: UM TRABALHO COM ALUNOS DE GRADUAÇÃO

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, da Universidade Estadual da Paraíba, área de concentração em Educação Matemática, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática.

Aprovada em 20/02/2017

**BANCA EXAMINADORA**

Silvanio de Andrade

Prof. Dr. Silvanio de Andrade (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Maria Isabelle Silva

Profª. Dr. Maria Isabelle Silva
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Prof. Dr. Luis Havelange Soares
Instituto Federal da Paraíba (IFPB)

Ao meu filho, Jhonatas, presente de Deus e razão do meu viver.

A Josivaldo, meu esposo, por todo amor, dedicação e companheirismo.

# AGRADECIMENTOS


Ao meu Deus, em primeiro lugar, por me guiar nesta caminhada, me dando discernimento, sabedoria e forças para seguir em frente. Sem Ele nada seria e jamais teria chegado até aqui. Meu refúgio e minha fortaleza.

A Josivaldo, meu esposo, por todo apoio e dedicação para que eu conseguisse alcançar esta conquista, sempre me dando forças com amor, carinho e muita paciência nos momentos difíceis.

Ao professor Dr. Silvanio de Andrade, pela excelente forma de orientar, com dedicação e paciência, me direcionando no caminho a ser percorrido para a realização deste trabalho. Também quero agradecer pelo grande exemplo de profissional que é, o qual sempre busquei me espelhar na minha prática como educadora.

Aos professores da banca, Drª. Maria Isabelle Silva e Dr. Luís Havelange Soares, por aceitarem o convite e pelas excelentes contribuições que deram na qualificação e na defesa, as quais foram importantíssimas para a conclusão deste trabalho.

Aos professores do Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba.

Aos colegas do Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática, em especial, os colegas da turma 2014.1.

Aos colegas do Grupo de Estudo e Pesquisa sobre Educação e Pós-modernidade (GEPEP).

De modo especial, as minhas amigas Aylla e Andriely, companheiras nesta caminhada, desde a graduação.

Ao amigo Tiêgo, pela importante contribuição para o levantamento de dados para este trabalho.

À amiga Maria da Penha, pela dedicação na revisão de Português deste trabalho.

A todos os alunos, futuros professores de matemática, que participaram e contribuíram para esta pesquisa. Em especial, os participantes da oficina.

A todas as pessoas não mencionadas, porém não esquecidas, que direta ou indiretamente contribuíram e torceram pela realização deste trabalho.

“Como educador matemático procuro utilizar aquilo que aprendi como matemático para realizar minha missão de educador.” (Ubiratan D’ Ambrósio)

## RESUMO

BEZERRA, Adriana da Silva Velozo. **Conceito e representações de função via resolução, proposição e exploração de problemas:** um trabalho com alunos de graduação. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciência e Educação Matemática). Campina Grande: UEPB, 2017.

O presente trabalho analisa as compreensões essenciais e dificuldades dos alunos de graduação no ensino-aprendizagem de função, e a partir daí propõe atividades via resolução, proposição e exploração de problemas que contribuam para que alunos de um curso de Licenciatura em Matemática desenvolvam um melhor entendimento do conceito e das representações de função, tanto no que diz respeito à compreensão do conceito, como também despertar a reflexão sobre suas práticas como futuros professores de matemática. Para isto, tomamos como base as dificuldades relatadas em algumas pesquisas (COELHO COSTA, 2004; COSTA, 2008; BRANDÃO, 2014; SILVA, 2013) e as cinco grandes ideias essenciais para o desenvolvimento do conceito de função propostas por Cooney, Beckmann e Lloyd (2010), que são: conceito de função, covariação e taxa de variação, famílias de funções, combinação e transformação de funções e representações de funções. A metodologia de pesquisa escolhida foi a qualitativa na modalidade de pesquisa pedagógica (LANKSHEAR e KNOBEL, 2008), em que o professor pesquisa sua própria prática, e está aberto a mudanças em suas conclusões e explicações, entendendo de forma mais ampla as situações e os desafios que surgirem. No desenvolvimento da pesquisa, foram aplicados questionários com o intuito de identificar que compreensões essenciais e dificuldades os alunos apresentavam. Na sequência, foi ministrada uma oficina sobre função para alunos de um curso de Licenciatura em Matemática, onde aplicamos atividades a partir da metodologia de ensino via resolução, proposição e exploração de problemas, procurando evidenciar as ideias essenciais trabalhadas em cada atividade. Dentre os resultados, percebemos que os alunos se tornaram mais ativos, procuraram refletir sobre suas práticas como futuros professores de matemática e demonstraram ter tido uma melhor compreensão do conceito e das representações de função, pois conseguiram perceber o conceito de função no decorrer das resoluções e identificar as representações de função que contribuíam mais para a resolução das atividades. Destacamos também que os alunos superaram a dependência da confirmação do professor, que apresentaram inicialmente, em relação a suas repostas, demonstrando mais segurança na verificação de suas resoluções, além disso, no decorrer da oficina, a partir da nossa mediação, não apresentaram mais tanta resistência em montar e analisar a tabela. Os alunos demonstraram uma mudança significativa na postura e segurança, pois buscaram explorar, nas situações propostas, aspectos além dos que eram pedidos, e a partir daí, procuraram eles mesmos verificarem seus resultados. Sendo assim, das cinco grandes ideias essenciais, conseguimos desenvolver bem as quatro ideias essenciais: conceito de função, covariação e taxa de variação, famílias de função e representações de função. Portanto, a metodologia de ensino por meio da resolução, proposição e exploração de problemas muito contribuiu para que os alunos se tornassem mais ativos e trabalhassem o conceito e as representações de função de forma mais compreensível, refletindo também sobre suas práticas como futuros professores de Matemática.
.



**Palavras-Chave:** Ensino-Aprendizagem. Função. Compreensões Essenciais. Dificuldades. Resolução, Proposição e Exploração de Problemas.

## ABSTRACT

BEZERRA, Adriana da Silva Velozo. **Concept and function representations through resolution, proposition and exploration of problems:** a work with undergraduate students. Dissertation (Master's Degree in Science Teaching and Mathematics Education). Campina Grande: UEPB, 2017.

The present piece of research analyzes the essential understandings and difficulties of undergraduate students in the teaching-learning of function, and from this aspect, it proposes activities through resolution, proposition and exploration of problems that help the students from a licentiate degree in mathematics develop a better understanding of the concept and function representations, both in terms of understanding the concept and awakening the reflection on their practices as future mathematics teachers. On that account, we considered the difficulties reported in some studies (COELHO COSTA, 2004; COSTA, 2008; BRANDÃO, 2014; SILVA, 2013) and the five main ideas essential for the development of the function concept proposed by Cooney, Beckmann and Lloyd (2010), which are: concept of function, covariation and rate of change, families of functions, combination and transformation of functions and representations of functions. The chosen research methodology was based on the qualitative approach in the modality of pedagogical research (LANKSHEAR and KNOBEL, 2008), in which the teacher researches his/her own practice, and is open to changes in his/her conclusions and explanations, understanding broadly the situations and the challenges that arise. In the research development, questionnaires were applied in order to identify which essential understandings and difficulties were presented by the students. Afterwards, it was held a workshop about function for students of a mathematics licentiate course, where activities were applied based on the teaching methodology through resolution, proposition and exploration of problems, seeking to highlight the essential ideas worked in each activity. Among the results, we noticed that the students became more active, sought to reflect on their practices as future mathematics teachers and demonstrated having had a better understanding of the function concept and representations, since they were able to perceive the function concept in the course of the resolutions and identify the function representations that mostly contributed to the resolution of activities. We also emphasized that the students overcame the dependence of the teacher's confirmation, which was initially presented in relation to their answers, demonstrating more reliability in the verification of their resolutions; in addition, during the workshop, from our mediation, they did not present much resistance in assembling and analyzing the table. The students demonstrated a significant change in posture and reliability, as they sought to explore, in the proposed situations, aspects beyond those that were requested, and thenceforth, they verified their results. Thus, of the five great essential ideas, we have been able to develop the four essential ideas successfully: concept of function, covariation and rate of change, families of functions and function representations. Therefore, the teaching methodology through resolution, proposition and exploration of problems greatly contributed to the students becoming more active and that they could work the function concept and representations in a more understandable way, reflecting also on their practices as future mathematics teachers.

**Keywords:** Teaching-Learning. Function. Essential Understandings. Difficulties. Resolution, Proposition and Exploration of Problems.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

# LISTA DE QUADROS

# SUMÁRIO

# INTRODUÇÃO

O conceito de função é um dos mais importantes da Matemática, tendo aplicações nas mais diversas situações da vida, com uma grande utilidade prática, pois auxilia na compreensão de conteúdos abstratos. Dessa forma, é importante que nossos alunos tenham uma melhor e mais ampla compreensão deste conceito. Portanto, vemos a necessidade de buscar meios de auxiliar nossos alunos na compreensão do conceito de função, principalmente alunos do curso de Licenciatura em Matemática, futuros professores da disciplina.

O conteúdo de função é apresentado aos alunos no final do ensino fundamental e com mais intensidade no ensino médio. Quando adentram no ensino superior, em especial no curso de Licenciatura em Matemática, os alunos necessitam do conteúdo de função como base, principalmente, na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. No entanto, quando os alunos não têm se apropriado deste conceito da maneira que deveriam, passam a surgir dificuldades que trazem problemas para o desenvolvimento destes futuros professores de matemática.

Sendo assim, alunos de graduação têm enfrentado muitas dificuldades na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, e isso pode ser constatado de acordo com o número de trabalhos que temos visto em que abordam conteúdos de Cálculo. Podemos citar como exemplo os trabalhos apresentados nos Encontros Nacionais de Educação Matemática (ENEM), em que Nasser (2016) fez um levantamento dos trabalhos relacionados ao ensino superior, e chegou à conclusão que o interesse por este tema é motivado pelos altos índices de reprovação e evasão nos cursos de Cálculo. Nasser (2016) destaca ainda, que a principal causa das dificuldades dos alunos tem relação com a má compreensão do conceito de função construída no ensino básico.

Temos observado que mesmo discutindo-se muito sobre o tema "função", continua havendo uma grande tendência em apresentá-lo aos alunos de modo formal, seguindo sempre a mesma sequência que inicia com a definição formal de função e termina com a lista de exercício, dando sempre mais ênfase à representação algébrica e pouco explorando outras representações. Em relação aos concluintes do curso de matemática, o que percebemos é que estes acabam, na maioria das vezes, repetindo em sala de aula práticas semelhantes as que foram utilizadas com eles, e em alguns casos pode ocorrer também a repetição de erros de compreensão aos quais estes alunos foram submetidos ao longo de sua formação.

O ensino de Matemática, de um modo geral, tem apresentado alguns problemas, pois em alguns casos são adotados métodos repetitivos com muitas aplicações diretas de fórmulas, que não contribuem para uma formação critica dos alunos, em que possam pensar e aplicar estratégias de resolver situações problemas.

De acordo com Silva Andrade (2010).

> É conhecida a dificuldade que muitos alunos têm em aprender Matemática. As razões desse fato não são muito claras. Aponta-se, por exemplo, a infra-estrutura das escolas ou a falta de preparo dos professores que não se dedicam a programas de atualização curricular. Percebe-se ainda, a perda de interesse dos alunos, o que se justifica pela frustração que encontram ao não compreenderem os conceitos com os quais a matemática lida, alguns com alto grau de abstração. Essa situação faz com que os estudantes não gostem do estudo da Matemática.

Temos visto que o ensino-aprendizagem de função apresenta problemas desde o ensino básico até o ensino superior. Os alunos no ensino básico muitas vezes são levados apenas a fazer manipulações algébricas que não contribuem para o entendimento do conceito de função, nesse período da vida escolar do aluno surgem as dificuldades e quando chegam ao ensino superior se deparam com um ensino não reflexivo que acaba por piorar as dificuldades existentes.

> A maioria dos alunos, tanto no ensino médio como no ensino universitário, apresentam dificuldades que vão desde a compreensão do próprio conceito, a representação gráfica, a determinação do domínio e da imagem, indo até à classificação a partir de propriedades, como par e ímpar, crescente, decrescente e constante, entre outras. (SILVA ANDRADE, 2010, p. 3).

No que diz respeito ao ensino superior, especialmente o curso de Licenciatura em Matemática, temos que pensar como essas dificuldades podem estar prejudicando a formação dos nossos futuros professores de matemática. A partir daí surgem questionamentos em relação ao conhecimento desses futuros professores no que diz respeito ao conteúdo de função, pois alguns deles acabarão por repetir erros de entendimento adquiridos em sua formação.

> (...) o professor tem contato com este objeto matemático desde a Educação Básica, ora de modo intuitivo, ainda no Ensino Fundamental, ora de modo formal, nos Ensinos Médio e Superior. De um modo geral, a sua imersão neste assunto segue uma linha metodológica de apresentação e desenvolvimento que consiste, inicialmente, na apresentação da definição formal de função com instruções relativas à sua manipulação. Embora este conceito possua várias representações, tais como: tabelas, gráficos, expressões algébricas e diagrama de setas, destaca-se a representação algébrica, presente nas equações ou fórmulas que descrevem as "leis de formação". (COSTA, 2008, p. 2).

Portanto, é necessário que busquemos métodos que possam contribuir para o ensino-aprendizagem de função, principalmente no ensino superior, no que diz respeito à formação dos futuros professores de matemática. No entanto, podemos perceber que algumas pesquisas têm proposto inovações para o ensino-aprendizagem de função, como pudemos observar em nosso levantamento bibliográfico.

Diante da importância do conceito de função para a Matemática, é necessário pensar nos problemas que existem em seu ensino aprendizado, pois temos constatado, de acordo com algumas pesquisas (COELHO COSTA, 2004; COSTA, 2008; BRANDÃO, 2014; SILVA, 2013), que os alunos têm enfrentado diversas dificuldades no estudo deste conteúdo, dificuldades estas que ocorrem tanto no ensino básico, como também no ensino superior.

Em nosso levantamento bibliográfico, percebemos que as principais dificuldades apresentadas por alunos de graduação no que diz respeito ao conteúdo de função têm relação com a não compreensão do conceito de função e das representações de função. De acordo com Cooney, Beckmann e Lloyd (2010), estas são duas das cinco grandes ideias essenciais para o desenvolvimento do conceito de função, dessa forma, decidimos centrar o foco de nossa pesquisa na busca por meios de proporcionar a alunos de graduação, oportunidades para que possam desenvolver um melhor entendimento do conceito e das representações de função.

Silva (2013) e Brandão (2014) procuraram dar significado ao conceito de função para alunos do Ensino Médio, evidenciando as ideias essenciais e fazendo uso da metodologia de ensino via resolução, proposição e exploração de problemas. Coelho Costa (2004) trabalhou com alunos do curso de Licenciatura em Matemática, evidenciando a importância do conceito de função para o estudo de Matemática. Costa (2008) buscou investigar o conhecimento que professores de Matemática tinham do conceito de função.

Constatamos assim, que muitas pesquisas têm se voltado para o ensino-aprendizagem de função, identificando as dificuldades apresentadas pelos alunos, como também propondo métodos que auxiliem alunos na compreensão do conceito de função.

No entanto, em nosso levantamento bibliográfico, não encontramos pesquisas que tenham trabalhado, especificamente, as grandes ideias essenciais para o desenvolvimento do conceito de função a partir da metodologia de ensino de matemática via resolução, proposição e exploração de problemas com alunos do ensino superior, o que despertou ainda mais o nosso interesse em trabalhar este assunto.

Portanto, a partir da análise das pesquisas, pudemos definir os caminhos que iríamos seguir. Dessa forma, a nossa pesquisa buscou, inicialmente, identificar as compreensões essenciais e dificuldades que alunos de um curso de Licenciatura em Matemática apresentam no ensino-aprendizagem de função, e a partir daí, ministrar uma oficina de função evidenciando principalmente as ideias essenciais, conceito de função e representações de função, fazendo uso da metodologia de ensino de matemática via resolução, proposição e exploração de problemas. Tudo isso, visando proporcionar contribuições para a formação de graduandos, tanto no que diz respeito a uma melhor compreensão do conceito, como também despertar a reflexão sobre suas práticas como futuros professores de matemática.

Dessa forma, em nossa pesquisa destacamos as cinco grandes ideias essenciais para o desenvolvimento do conceito de função idealizadas por Cooney, Beckmann e Lloyd (2010) que são: conceito de função, covariação e taxa de variação, famílias de funções, combinação e transformação de funções e representações de função. Destas grandes ideias essenciais, a única que não foi trabalhada em nossa pesquisa, foi a quarta ideia essencial, combinação e transformação de funções, devido aos conteúdos abordados nas atividades não exigirem estes procedimentos.

Ao final de nossa pesquisa pretendemos responder a duas questões: Que compreensões essenciais os alunos do curso de Licenciatura em Matemática demonstram ter com relação ao conceito de função? Quais as contribuições da abordagem de ensino de Matemática via resolução, proposição e exploração de problemas para o entendimento do conceito e das representações de função?

A partir daí, nosso principal objetivo foi elaborar e aplicar uma sequência didática que contribuísse para um melhor entendimento do conceito e das representações de função via resolução, proposição e exploração de problemas no ensino superior, evidenciando as ideias essenciais para o desenvolvimento do conceito de função.

Ao procurarmos identificar as compreensões essenciais e principais dificuldades dos alunos investigados, aplicamos um questionário (Apêndice A) com seis questões abertas, onde pudemos constatar que nenhum dos alunos investigados havia se apropriado de uma compreensão adequada do conceito de função, como também pudemos perceber que o trabalho com as representações de função parece não ter sido explorada de modo a contribuir para um melhor entendimento por parte dos alunos.

No que diz respeito à metodologia de pesquisa, utilizamos a pesquisa qualitativa (LÜDKE e ANDRÉ, 1986; BOGDAN e BIKLEN, 1994) na modalidade de pesquisa pedagógica (LANKSHEAR e KNOBEL, 2008), em que o professor/pesquisador pesquisa a sua própria prática, estando aberto para mudanças em suas conclusões e explicações, entendendo de forma mais ampla as situações e os desafios que surgirem. Para a aplicação das atividades da oficina de função, decidimos utilizar a metodologia de ensino de matemática por meio da resolução, proposição e exploração de problemas por acreditar que esta nos forneceria as ferramentas necessárias para dar um melhor significado ao conceito de função, tornando os alunos de um curso de Licenciatura em Matemática mais ativos e fazendo com que refletissem mais sobre as situações propostas e a busca por estratégias de resolução.

A pesquisa foi realizada com alunos de um curso de Licenciatura em Matemática, que foram convidados para participar de uma oficina de função, onde trabalhamos atividades que continham sequências didáticas. Para o desenvolvimento da oficina utilizamos a metodologia de ensino de matemática via resolução, proposição e exploração de problemas, em que procuramos evidenciar as ideias essenciais e desenvolver nos alunos uma melhor compreensão do conceito e das representações de função.

Sendo assim, em nossa pesquisa, buscamos identificar as compreensões essenciais e dificuldades de alunos de um Curso de Licenciatura em Matemática com relação ao conceito e as representações de função, propor atividades com foco na compreensão dos conceitos por meio da resolução, proposição e exploração de problemas, e a partir daí, analisar como tais atividades puderam contribuir para o ensino-aprendizagem de função.

O nosso trabalho está organizado da seguinte forma:

No segundo capitulo, apresentamos a justificativa destacando o nosso interesse em pesquisar este tema, apresentamos também a descrição, em que evidenciamos cada passo que foi dado para realização desta pesquisa e os objetivos da pesquisa.

No terceiro capitulo, apresentamos a fundamentação teórica sobre o ensino-aprendizagem de função e resolução, proposição e exploração de problemas. Neste capitulo destacamos as dificuldades existentes no ensino-aprendizagem de função que influenciam no ensino superior, analisamos algumas pesquisas que trabalharam esse tema, apresentamos um breve histórico deste conceito tão importante, destacamos as ideias essenciais do conceito de função e destacamos a importância da metodologia de ensino-aprendizagem por meio da resolução, proposição e exploração de problemas.

No quarto capitulo, apresentamos o desenvolvimento da pesquisa, destacando a problemática, a metodologia de pesquisa utilizada e a descrição do nosso trabalho de campo.

No quinto capitulo, apresentamos as análises dos questionários aplicados, evidenciando os problemas e dificuldades do ensino-aprendizagem de função que são relatados pelos alunos e que são constatados em algumas pesquisas. Neste capitulo, também apresentamos a descrição e análise da oficina de função que aplicamos a alunos de um curso de Licenciatura em Matemática.

E por fim, apresentamos as considerações finais, destacando todos os resultados da nossa pesquisa.

# CAPITULO 2 – A PESQUISA

Neste capitulo, apresentamos inicialmente a nossa justificativa, explicando porque surgiu o interesse em pesquisar o ensino-aprendizagem de função. Em seguida, fazemos uma descrição geral da pesquisa, destacando como se deu nossa fundamentação teórica, a escolha da metodologia de ensino e a definição dos nossos objetivos. E apresentamos também nosso objetivo geral, seguido dos objetivos específicos.

## 1.1.Justificativa

Diante da importância do conceito de função para Matemática, e de acordo com as dificuldades no ensino-aprendizagem de função, relatadas em algumas pesquisas, despertou em nós o interesse em realizar esta pesquisa, buscando propor atividades que tenham foco na compreensão dos conceitos, fazendo uso da metodologia de ensino-aprendizagem por meio da resolução, proposição e exploração de problemas.

A partir da análise de algumas pesquisas, que apresentamos no capitulo três, percebemos como o ensino-aprendizagem de função tem apresentado problemas, que surgem muitas vezes ainda no ensino básico e perduram até o ensino superior. A partir daí, cria-se um círculo de dificuldades, pois os alunos começam a ter dificuldades no ensino básico por diversos fatores, como por exemplo, a forma que este conteúdo é apresentado com sua definição formal, exercícios resolvidos, exercícios propostos, dando ênfase a representação algébrica. (BRANDÃO, 2014, p. 12). Ao adentrarem no ensino superior, em especial os estudantes do curso de Licenciatura em Matemática, continuam a ter dificuldades, concluem o curso e como professores continuam a reproduzir erros de compreensão que muitas vezes foram trazidos do próprio ensino básico.

Sendo assim, constatamos, de acordo com nossas análises, que várias pesquisas têm procurado trazer benefícios para o ensino-aprendizagem de funções, propondo novas metodologias e novos recursos, tanto no ensino básico como no ensino superior.

Em nossa pesquisa para o Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) da Licenciatura em Matemática, evidenciamos as principais dificuldades apresentadas por alunos que haviam cursado a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, entre as quais: deficiências trazidas do ensino básico e metodologia utilizada por alguns professores de Cálculo. Diante disso, e a partir das pesquisas que analisamos, surgiu em nós o desejo de propor algo que pudesse contribuir para a formação de futuros professores de Matemática.

Depois de muitas leituras e análises, decidimos trabalhar com o ensino-aprendizagem de função, principalmente no que diz respeito à compreensão do conceito e as representações de função, principais dificuldades evidenciadas nas pesquisas. Além disso, sabemos que este é um dos conceitos mais importantes da Matemática e de extrema importância para entender algumas aplicações a situações da vida.

Dessa forma, ao analisarmos as pesquisas de Silva (2013) e Brandão (2014), chegamos à conclusão que seria de grande relevância para nosso estudo, destacar as cinco grandes ideias essenciais para o desenvolvimento do conceito de função propostas por Cooney, Beckmann e Lloyd (2010) e utilizar a metodologia de ensino de matemática via resolução, proposição e exploração de problemas.

Em nosso levantamento bibliográfico, não encontramos pesquisas que tivessem trabalhado as ideias essenciais a partir da resolução, proposição e exploração de problemas com alunos do ensino superior, o que reforçou ainda mais o nosso desejo de realizar esta pesquisa.

Optamos pela metodologia de ensino-aprendizagem por meio da resolução, proposição e exploração de problemas por percebermos que tal metodologia nos forneceria os recursos necessários para dar melhor significado e compreensão ao conceito de função. Dessa forma, nesta pesquisa, tivemos um cenário de ensino-aprendizagem diferente do que os alunos estão normalmente acostumados, pois os alunos tiveram a oportunidade de se tornarem mais ativos e construírem seu próprio conhecimento.

Portanto, nossa pesquisa buscou, a partir da resolução, proposição e exploração de problemas, trabalhar o conceito de função e as representações de função de forma mais compreensível para os alunos, de modo que pudessem desenvolver um melhor entendimento deste conceito, tanto no que diz respeito a compreensão do conceito em si, como também despertar a reflexão sobre suas práticas como futuros professores de matemática.

## 1.2.Descrição Geral da Pesquisa

A partir do crescente número de pesquisas em que os autores demonstram preocupação com o ensino-aprendizagem de função, que evidenciam um cenário de dificuldades apresentadas por alunos, e da importância deste conceito para a Matemática e para a vida, sentimos o desejo de propor algo que pudesse contribuir para um melhor aprendizado e compreensão, por parte dos alunos de um curso de Licenciatura em Matemática, do conceito e das representações de função.

Inicialmente, realizamos um levantamento bibliográfico (Capitulo 3) com relação à influência do ensino-aprendizagem de função nas dificuldades existentes no ensino superior, e apresentamos em nossa pesquisa, o relato de alguns autores (NASSER, 2007; REZENDE, 2004; MOMETTI, 2007) sobre as causas dessas dificuldades, as quais destacamos, as lacunas deixadas pelo ensino básico, o impacto sofrido por alunos ao ingressarem no ensino superior, cursos que não favorecem a formação dos futuros professores de Matemática e o grande favorecimento da abordagem algébrica.

Em relação ao ensino-aprendizagem de função no ensino superior, constatamos que a aprendizagem do conceito de função tem apresentado alguns problemas, pois muitas vezes os alunos não compreendem bem este conceito no ensino básico, passam pelo ensino superior e ainda apresentam falhas na compreensão, e por fim, quando voltam ao ensino básico, agora como professores, acabam repetindo erros de compreensão. (COELHO COSTA, 2004; COSTA, 2008).

Na análise de algumas pesquisas que trabalharam o conceito de função, percebemos que as principais dificuldades apresentadas pelos sujeitos investigados foram em relação à compreensão do conceito de função e das representações de função. (COELHO COSTA, 2004; COSTA, 2008; BRANDÃO, 2014; SILVA, 2013). Decidimos então, centrar o foco de nossa pesquisa nesses dois tópicos, trabalhando essencialmente com alunos de um curso de Licenciatura em Matemática.

Duas das pesquisas analisadas (BRANDÃO, 2014; SILVA, 2013) destacaram as cinco grandes ideias do conceito de função propostas por Cooney, Beckmann e Lloyd (2010), as quais: conceito de função, covariação e taxa de variação, famílias de funções, combinação e transformação de funções e representações de função. Após a análise das pesquisas, consideramos de grande relevância tomar estas cinco grandes ideias como base para nosso estudo.

Ainda com base nas duas pesquisas, percebemos que a metodologia que iria nos fornecer as ferramentas necessárias para dar um melhor significado e compreensão ao conceito de função seria a metodologia de ensino-aprendizagem por meio da resolução, proposição e exploração de problemas. Quando trabalhada corretamente, ela permite que o aluno reflita sobre as situações propostas e seja mais ativo diante delas, ou seja, proporciona um ambiente diferente daquele em que os alunos estão acostumados.

Procuramos destacar também, a evolução e a importância do conceito de função ao longo do tempo, embora não tenhamos trabalhado a parte histórica em nossa pesquisa, apresentando alguns pontos do processo gradativo que este conceito passou até chegar à importância que tem hoje. Além disso, apresentamos a importância da resolução, proposição e exploração de problemas a partir dos relatos de alguns autores, evidenciando como foi trabalhada em nossa pesquisa.

Uma vez definidos nosso referencial teórico, nossos sujeitos da pesquisa e a metodologia de ensino, partimos para a definição de nosso objetivo. Portanto, nossa pesquisa teve como objetivo elaborar e aplicar uma sequência didática que contribuisse para um melhor entendimento do conceito e das representações de função via resolução, proposição e exploração de problemas no ensino superior, evidenciando as ideias essenciais para o desenvolvimento do conceito de função.

Chegamos à conclusão que para atingir nosso objetivo seria importante elaborar e aplicar um questionário (Apêndice A) para identificar as compreensões essenciais e dificuldades apresentadas pelos alunos em relação ao conceito de função, e elaborar e ministrar uma oficina sobre função, propondo atividades a partir da metodologia de ensino via resolução, proposição e exploração de problemas para alunos de um curso de Licenciatura em Matemática, evidenciando o conceito e as representações de função.

Após elaborar o questionário, realizamos uma análise de cada questão (Capitulo 4) tentando antecipar, com base em nosso referencial teórico, as respostas dos alunos. Em relação às atividades para oficina, após sua elaboração, também fizemos uma análise destacando o objetivo de cada atividade, as ideias essenciais trabalhadas, o conteúdo trabalhado, bem como dificuldades que pudessem surgir por parte dos alunos ao trabalharem estas atividades.

Depois de aplicarmos o questionário, fizemos uma análise das respostas dos alunos (Capitulo 5), evidenciando suas principais dificuldades, seu domínio de conteúdo e a importância que consideravam ter os gráficos de função, relacionando os dados encontrados com os dados evidenciados em algumas pesquisas.

E assim, após aplicarmos a nossa oficina de função, fizemos a descrição e análise de cada um das seis etapas em que foi dividida, evidenciando as ideias essenciais trabalhadas, bem como as contribuições proporcionadas pela metodologia de ensino de matemática por meio da resolução, proposição e exploração de problemas para a melhor compreensão do conceito e das representações de função.

Por fim, apresentamos as nossas considerações finais, destacando os principais pontos da nossa pesquisa, os resultados e as nossas observações sobre alguns aspectos detectados no desenvolvimento da oficina de função.

## 1.3. Objetivos

### 1.3.1. Objetivo Geral

Elaborar e aplicar uma sequência didática que contribua para um melhor entendimento do conceito e das representações de função via resolução, proposição e exploração de problemas para alunos de um curso de Licenciatura em Matemática, evidenciando as ideias essenciais para o desenvolvimento do conceito de função.

### 1.3.2. Objetivos Específicos

- Identificar que compreensões essenciais e dificuldades alunos de um curso de Licenciatura em Matemática apresentam no ensino-aprendizagem de função;
- Ministrar uma oficina sobre função para alunos de um curso de Licenciatura em Matemática, evidenciando a compreensão do conceito de função e as representações de função;
- Verificar como atividades com foco na compreensão dos conceitos podem contribuir para que alunos tenham um melhor entendimento sobre o conteúdo de função no ensino superior, bem como auxiliar na superação das dificuldades apresentadas por eles.

# CAPITULO 3 – O ENSINO-APRENDIZAGEM DE FUNÇÃO E A RESOLUÇÃO, PROPOSIÇÃO E EXPLORAÇÃO DE PROBLEMAS.

Neste capitulo, em um primeiro momento, apresentamos nossa fundamentação teórica, onde destacamos as dificuldades existentes no ensino-aprendizagem de função que influenciam no ensino superior, e alguns problemas que têm interferido na aprendizagem do conceito de função e que prejudicam a formação dos futuros professores de matemática. A partir daí, destacamos que as principais dificuldades estão relacionadas à compreensão do conceito de função e das representações de função. Em seguida, destacamos a importância da metodologia de ensino de matemática por meio da resolução, proposição e exploração de problemas, apresentando as considerações de alguns autores (ANDRADE, 1998; ONUCHIC, 2013; POLYA, 1995) sobre as contribuições que esta metodologia pode proporcionar se for utilizada de maneira adequada, destacando também, como trabalhamos esta metodologia em nossa pesquisa.

## 2.1. A influência do ensino-aprendizagem de função nas dificuldades existentes no ensino superior

Ultimamente temos nos deparado com um crescente número de pesquisas voltadas para os problemas existentes no Ensino Superior, em especial no que diz respeito à Educação Matemática. Essa preocupação não tem sido apenas nacional, muitas das pesquisas são internacionais. Além disso, muitas das pesquisas apresentam dados bem alarmantes em relação a índices de reprovação. Em meio a tantas pesquisas, um dos temas que mais tem sido abordado são as dificuldades existentes no Ensino de Cálculo.

Rezende (2004) destaca que:

> As dificuldades de aprendizagem em relação ao ensino de Cálculo parecem se perpetuar ao longo do tempo. Barufi (1999), Rezende (2003), Bean (2004) e Pereira (2009) apresentam em suas pesquisas dados alarmantes sobre a tão propalada crise do ensino de Cálculo. Os índices de não-aprovação em um curso inicial de Cálculo Diferencial e Integral, nas universidades pesquisadas, à época de seus trabalhos, encontram-se na faixa de 45% a 95%. Dados mais recentes, obtidos junto à Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática revelam que nos períodos letivos de 2011 e 2012 o índice de não aprovação em disciplinas de Cálculo 1 encontra-se na faixa de 55% a 74%.

Muitas podem ser as causas das dificuldades apresentadas por alunos no Ensino de Cálculo, entre elas algumas das que são destacadas dizem respeito às deficiências trazidas pelos alunos do ensino básico e ao grande impacto que os alunos sofrem ao adentrarem no ensino superior.

> A análise de atividades investigativas com alunos do Ensino Médio e da disciplina de Cálculo indica que grande parte dessas dificuldades se deve a lacunas na aprendizagem de conteúdos da Educação Básica ou de dificuldades de leitura e interpretação dos enunciados dos problemas propostos. (NASSER, 2007).

Sendo assim, as deficiências deixadas por um ensino básico cheio de lacunas pode causar sérios problemas aos alunos que ingressam no ensino superior, pois estes passam a sentir dificuldades por falta de conhecimentos básicos necessários a compreensão dos conceitos estudados, além das dificuldades causadas pela transição entre ensino básico e ensino superior.

Diante deste cenário crescente de dificuldades, buscar formas para sanar tais problemas é fundamental, pois é importante utilizar métodos que auxiliem os alunos na compreensão dos conceitos de forma que tenham um aprendizado bem mais satisfatório. É importante que os alunos sejam levados a realizar sequências de atividades em que possam construir seu conhecimento com uma melhor compreensão do que estão estudando.

Pallis (2013) nos diz que:

> O conceito de função é certamente uma noção fundamental dentre as estudadas nos cursos de Cálculo no início do ciclo universitário na área técnico-científica. Ao mesmo tempo, o ensino e a aprendizagem desse conceito têm sido considerados bastante problemáticos. É necessário ir além da identificação das dificuldades discentes e propor sequências de atividades que possam ser trabalhadas com esses alunos e que tenham um potencial significativo de avanço na aprendizagem do conceito de função e no seu emprego na resolução de problemas.

Portanto, há deficiências não só no ensino básico, mas também no ensino superior, pois os alunos são levados a repetir técnicas de forma mecânica sem que haja a menor compreensão do que está sendo realizado, dessa forma a disciplina de Cálculo Diferencial e integral não tem o menor sentido para os alunos, pois estes não encontram e nem compreendem aplicações práticas dos conteúdos de Cálculo em situações que lhes são familiares.

Observa-se então, a necessidade de que o Ensino de Cálculo seja mais voltado para a formação do professor, e tenha um caráter menos procedimental, de maneira que passe a formar profissionais mais preparados para fazer seus alunos raciocinarem logicamente, e não apenas aplicarem técnicas mecânicas.

> No que tange a formação dos alunos do curso de Matemática, futuros professores de matemática, há de se pensar com mais critério. Em especial, para essa clientela, o curso de Cálculo deveria ser mais *formativo* do que procedimental. Entretanto, recentes pesquisas relacionadas aos saberes docentes do professor de matemática da educação básica sobre o conceito de função, que é um dos principais conceitos estruturais do Cálculo, têm apresentado fortes indicadores de que tal fato não vem ocorrendo. (REZENDE, 2004).

Além disso, de acordo com algumas pesquisas, o ensino de Cálculo tem se voltado muito para uma abordagem algébrica, pouco explorando outras representações que certamente poderiam favorecer a compreensão dos alunos.

De acordo com Mometti (2007):

> Na ocasião do ICME 10 – International Congresson Mathematical Education – 2004, Barra, Depueto e Impedovo apresentam um resumo da pesquisa sobre ensino e aprendizagem de Cálculo, Probabilidade e Estatística na Itália, de 2000 a 2003 e, especificamente, sobre o ensino de Cálculo, afirmando que tal ensino tem favorecido uma abordagem algébrica, negligenciando outros contextos como, por exemplo, a representação geométrica, a aproximação numérica e a abordagem histórica via problemas significantes. (MOMETTI, 2007, p. 30).

Portanto, de acordo com as pesquisas consultadas, o ensino de Cálculo não tem tido uma abordagem que favoreça um aprendizado com compreensão dos conceitos envolvidos, a partir daí surgem dificuldades que levam alunos ao fracasso, trazendo grandes problemas para a formação dos futuros profissionais.

## 2.2.O ensino-aprendizagem de função no ensino superior

Indiscutivelmente, o conceito de função é um dos mais importantes da Matemática, sendo aplicado nas mais variadas situações da vida e também na própria Matemática, e dessa forma, se torna necessário que os alunos tenham uma melhor compreensão deste conceito.

Entretanto, o que temos constatado, de acordo com diversas pesquisas, é que esse conceito não vem sendo trabalhado de forma a contribuir para uma boa compreensão por parte dos alunos. Desde o Ensino Básico, percebemos que existem alguns fatores que comprometem o entendimento do conceito de função, e isso acaba trazendo uma serie de dificuldades para estes alunos quando ingressam no Ensino Superior. Além disso, tais dificuldades acarretam problemas principalmente para alunos do curso de Licenciatura em Matemática, futuros professores de Matemática.

De acordo com Costa (2008):

> Ao longo de grande parte de sua vida acadêmica, o futuro professor de Matemática tem contato com o conteúdo de funções. Desde as séries finais do Ensino Fundamental até as etapas finais da graduação, tal objeto matemático é estudado. Entretanto, o tempo de exploração e contato não têm sido suficientes para conferir seu bom aprendizado. (COSTA, 2008, p.1).

Diante disso, é possível constatar que alunos de graduação têm enfrentado muitas dificuldades no estudo de funções. A partir daí, é importante destacar também a grande importância deste conceito no Ensino de Cálculo, e como este ensino tem apresentado índices alarmantes de fracasso entre os alunos.

Nasser (2016) fez um levantamento dos trabalhos que foram apresentados no Grupo de Trabalho de Educação Matemática no Ensino Superior (GT4) dos Seminários Internacionais de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM), do destaque que foi dado a este tema nos Encontros Nacionais de Educação Matemática (ENEM) e também discutiu sobre as investigações envolvendo o ensino-aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral. A partir daí, Nasser (2016) afirmou que:

> Muitos desses trabalhos são motivados pelos altos índices de reprovação e de evasão nos cursos de Cálculo, que remetem a investigações sobre suas causas, buscando sugestões para tentar reverter esse quadro. Em geral, chega-se à constatação de que um dos vilões das dificuldades dos alunos é o conceito de função, em geral, mal construído na Educação Básica. (NASSER, 2016, p. 5).

Portanto, de acordo com Nasser (2016), as pesquisas produzidas no campo da Educação Matemática no Ensino Superior deixam evidentes questões variadas e complexas, que são pertinentes ao Ensino Superior.

Sendo assim, podemos ressaltar a forma que o conceito de função tem sido apresentado aos alunos tanto no ensino básico como no ensino superior, com sua definição formal seguida de procedimentos para sua manipulação, prevalecendo sempre à ênfase a sua representação algébrica, e pouco explorando outras representações que poderiam favorecer uma melhor compreensão do conceito. Dessa forma, o ensino de função nos cursos de Cálculo não tem favorecido a formação de nossos futuros professores de Matemática, pois de acordo com Costa (2008):

> Mesmo com todos estes anos de estudo, tanto na Educação Básica quanto no Ensino Superior, podemos observar que, na maioria das vezes, após completar o seu ciclo de formação, o professor de matemática ainda possui uma visão fragmentada do conceito de função, reproduzindo em sala de aula o mesmo modelo de ensino com o qual teve contato na sua Educação Básica. (COSTA, 2008, p. 2).

Portanto, percebemos que os alunos de graduação mesmo após concluírem seu curso superior ainda apresentam dificuldades ao lidarem com o conceito de função, acabando por adotar em sua prática uma postura semelhante aos professores que tiveram contato em seu Ensino Básico.

É importante elaborar atividades que explorem as várias representações de função, de forma que tais atividades possam auxiliar os alunos para que desenvolvam um pensamento funcional mais eficaz que os ajude a trabalhar com as representações de funções.

De acordo com Reis e Martins Júnior (2016), a utilização das tecnologias computacionais proporciona a possibilidade de visualização e a múltipla representação de muitos conteúdos que são trabalhados na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. Portanto:

> Enfatizamos que a visualização depende de uma experiência anterior e se aprimora conforme as etapas vão sendo construídas, isto contribui tanto para professores como para os alunos alcançarem um nível cognitivo mais avançado. Aqui, faz necessário entrar em cena o professor que conecta as informações visuais e as algébricas, para mostrar aos alunos como a utilização de atividades exploratórias pode ser usada para oferecer subsídios que se tornam indispensáveis no processo de ensino para a aprendizagem de definições de gráficos com funções Derivadas. (REIS e MARTINS JÚNIOR, 2016, p. 11).

Sendo assim, o uso das tecnologias de computação podem ser um importante aliado na exploração das representações de função, pois pode proporcionar uma visualização rápida e dinâmica.

É evidente a grande ênfase que é dada a representação algébrica de função, explorando-se muito pouco as outras representações, e, dessa forma, surgindo obstáculos no aprendizado dos alunos. No estudo de funções, tanto no Ensino Básico, como no Superior, explora-se muito pouco a representação gráfica, na maioria das vezes é utilizado apenas esboços de gráficos como ilustrações dos conceitos estudados. A representação tabular também ocupa um espaço bem pequeno no ensino de funções. Vale destacar a importância de se utilizar as várias representações de funções de forma que contribuam para o ensino-aprendizagem de funções,

> Cabe ressaltarmos, também, as múltiplas interfaces de tal conceito, ou seja, uma relação funcional pode ser representada através de um diagrama de setas, uma tabela de variáveis, um gráfico no plano cartesiano ou através de uma expressão algébrica. Cada uma destas representações evidencia um ou alguns dos aspectos do conceito em detrimento de outros. (COSTA, 2008, p. 9).

Portanto, muito se tem discutido sobre as dificuldades existentes no ensino-aprendizagem de funções, dificuldades essas, que têm origem ainda no Ensino Básico e se agravam ainda mais no Ensino Superior. Podemos confirmar isto, pelo crescente número de pesquisas existentes nesse tema, que realizam vários estudos sobre estas dificuldades e propõem métodos para auxiliar o ensino-aprendizagem de funções.

> Dificuldades concernentes à aprendizagem do conceito de função têm sido motivo de preocupação de estudiosos em Educação Matemática de diferentes países. As pesquisas desenvolvidas nesse âmbito assinalam que alunos recém-ingressos nas universidades e até mesmo concluintes apresentam dificuldades no que se refere a tal conceito. (COELHO COSTA, 2004, p. 18).

Por isso, a importância de estudar os fatores que têm trazido prejuízo para o ensino-aprendizagem do conceito de função, e a partir daí, buscar métodos para que se possa mudar esta situação, pois o conceito de função é muito importante não só para a vida acadêmica dos alunos, mas também para que possam compreender melhor situações do dia a dia.

> Seguramente, o avanço de um educando em direção a um conhecimento maior do conceito de *função* deverá levá-lo a uma compreensão melhor de seu dia-a-dia, disponibilizando-lhe ferramentas úteis ao exercício de sua cidadania como, por exemplo, o reconhecimento de variáveis em situações do cotidiano e o estabelecimento de relações entre elas. Esse alcance confere ao referido conteúdo uma relevância incontestável na matemática escolar. (BRAGA, 2006, p. 17).

Então, se faz necessário a busca por novas metodologias de ensino que venham favorecer o aprendizado dos alunos, que tornem o conteúdo de funções mais próximo da realidade, com aplicações práticas que proporcionem uma melhor compreensão dos conceitos envolvidos.

## 2.3.O ensino-aprendizagem de função em algumas pesquisas

É considerável o número de pesquisas que temos encontrado sobre o ensino-aprendizagem de funções, em que são evidenciadas dificuldades existentes, novas metodologias e a forma como este conceito tem sido apresentado. Portanto, destacaremos algumas pesquisas de grande relevância para nosso trabalho.

Coelho Costa (2004), em sua pesquisa intitulada "Conhecimentos de estudantes universitários sobre o conceito de função", teve como objetivo contribuir para o ensino de função, e para atingir seu objetivo buscou investigar as concepções de estudantes universitários do curso de Licenciatura em Matemática sobre o conceito de função. A pesquisa de Coelho Costa (2004) teve um caráter diagnostico e foi desenvolvida em duas fases, e em ambas foi utilizado o questionário como um dos instrumentos de coleta de dados.

Coelho Costa (2004) afirma que sua pesquisa se destina a investigar conhecimentos sobre a noção de função, os quais graduandos possam produzir ao longo de sua formação acadêmica, e para isso apresenta como referencial teórico em suas análises, as noções de conceito imagem e conceito definição desenvolvidas por Tall e Vinner (1981).

Na primeira fase da pesquisa, Coelho Costa (2004) aplicou um questionário que considerou como piloto, o qual foi respondido por alunos do 1º e 2º ano do curso de Licenciatura em Matemática, de forma individual e por escrito. A partir dos resultados deste questionário piloto foi possível fazer alguns ajustes nas questões.

A segunda fase foi dividida em duas etapas. Na etapa um, Coelho Costa (2004) aplicou um questionário com questões abertas aos mesmos alunos do 2º ano que haviam participado da primeira fase, eles foram divididos em duplas. E finalmente na etapa dois, Coelho Costa selecionou uma dupla que participou da etapa um, e então realizou uma investigação com estes alunos com o intuito de aprimorar os dados que foram obtidos na etapa um.

Portanto, a partir das análises das respostas dos alunos, Coelho Costa (2004) destacou que foi possível "inferir elementos que compõem o conceito imagem relativo ao conceito de função mobilizados pelos sujeitos investigados", que são: "o gráfico de uma função deve ser continuo; cada valor de x deve estar associado a um único y; o gráfico de uma função deve ser linear quando solicitado traçar possíveis funções através de pontos fixos". A autora também destaca que apenas um dos sujeitos investigados forneceu respostas e comentários que possibilitaram identificar que suas dificuldades com relação à definição de função eram o domínio e imagem.

A pesquisa intitulada "O conhecimento do professor de matemática sobre o conceito de função", de autoria de Costa (2008), teve o intuito de verificar o conhecimento de professores de Matemática em relação ao conceito de função. O autor levantou os seguintes questionamentos: "será que o professor domina o conceito de função a tal ponto de transmiti-lo com segurança e clareza? Ou ainda, será que a graduação lhe forneceu elementos que reforçassem a abordagem deste assunto?" (COSTA, 2008). A partir destes questionamentos Costa (2008) estabeleceu sua pesquisa sobre duas questões: "O nosso professor domina o conceito de função e aplicações? Como medir tal conhecimento?".

Costa (2008) desenvolveu sua pesquisa no Curso de Especialização em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da UFRJ, mais especificamente na disciplina de

Funções Reais, a qual a turma era formada por professores de Matemática do Ensino Básico. A esta turma foi aplicado um caderno de atividades relativo ao questionário utilizado na pesquisa, com o objetivo de avaliar o conhecimento, a priori dos, então chamados, professores-alunos sobre o assunto de funções. No capitulo dois o autor apresenta as atividades do questionário e evidencia os aspectos que serão observados de acordo com o quadro teórico construído por Even. Costa (2008) também aplicou um questionário situacional, com o intuito de obter informações sobre formação, tempo de magistério e de graduação para, a partir daí, traçar o perfil dos professores-alunos envolvidos na pesquisa.

O autor realizou entrevistas, no final do curso de funções reais, com alguns dos professores que haviam respondido ao caderno de atividades do questionário, e no capitulo cinco de sua pesquisa, comenta as entrevistas fazendo paralelos com as respostas dadas ao questionário pelos professores. Ao final das entrevistas, o autor observou que os professores, mesmo ao concluírem o curso, não conseguiram corrigir suas respostas incorretas, e concluiu que "provavelmente alguns conhecimentos e procedimentos estão tão enraizados, que a sua reconstrução fica comprometida" (COSTA, 2008).

Portanto, o autor afirma que existe uma distância entre o que se quer com o ensino de Matemática e o que realmente acontece nas salas de aulas. E é nesse meio que está o professor, muitas vezes desprovido de ferramentas necessárias, ou mesmo, não sabendo usar de forma adequada o que adquiriu ao longo de sua formação.

Brandão (2014) em sua pesquisa intitulada "Ensino-aprendizagem de função através da resolução de problemas e representações múltiplas", teve como objetivo "identificar as dificuldades e possibilidades da utilização da metodologia de resolução de problemas e do uso das representações múltiplas, durante a formação do conceito de função" (BRANDÃO, 2014). A metodologia utilizada pelo autor foi de caráter qualitativo na modalidade de pesquisa pedagógica, a qual o pesquisador pesquisa sua própria sala de aula.

Ao final de sua pesquisa, Brandão (2014) buscou responder a seguinte questão: "quais as possíveis dificuldades da metodologia de resolução de problemas, aliada ao trabalho com as representações múltiplas para a formação do conceito de função, em sala de aula?".

Para desenvolver sua pesquisa, o autor se apoiou nas grandes ideias essenciais para aquisição do conceito de função, que foram destacadas por Cooney, Beckmann e Lloyd (2010). Estes autores apresentam cinco grandes focos, os quais: "o conceito de função; covariação e taxa de variação; família de funções; combinação de funções e representações de funções". (BRANDÃO, 2014).

O autor desenvolveu sua pesquisa em uma turma do 1º ano do Ensino Médio em uma escola pública da rede estadual da Paraíba. Brandão (2014) formulou e aplicou atividades com o intuito de que os alunos compreendessem o conceito de função, trabalhando com as representações verbal, tabular, algébrica e gráfica. A coleta de dados foi feita a partir de notas de aula e as produções dos alunos.

Brandão (2014) destacou algumas pesquisas em seu trabalho com a intenção de identificar o que tem sido tratado sobre o ensino-aprendizagem de função e fundamentar sua visão sobre tal conceito. Porém, o autor toma como base as ideias essenciais de funções de acordo com a visão de Cooney, Beckmann e Lloyd (2010) e considera ser o que há de mais atualizado em nível internacional. Portanto, a metodologia de ensino-aprendizagem usada pelo autor foi a resolução, proposição e exploração de problemas.

O autor desenvolveu sua pesquisa ao longo de 23 encontros com a turma pesquisada, desenvolvendo atividades com objetivos de introduzir o conceito de função, a representação gráfica, a institucionalização do conceito de função e abordar a função afim.

Brandão (2014) afirmou que sua pesquisa teve bons resultados, pois os alunos passaram a compreender melhor o conteúdo de função e a pensar mais sobre os problemas a partir da metodologia utilizada, e também demonstraram um bom desempenho ao trabalharem com a passagem de uma representação para outra de funções. Portanto, o autor ressalta a importância de se utilizar a metodologia de resolução de problemas no ensino-aprendizagem de funções.

Silva (2013), em sua pesquisa intitulada "Compreensão de ideias essenciais ao ensino-aprendizagem de funções via resolução, proposição e exploração de problemas", teve como objetivo "investigar as compreensões e ideias essenciais do conceito de função e analisar as contribuições da metodologia de ensino-aprendizagem de matemática via resolução,proposição e exploração de problemas, aliada às representações múltiplas". Sendo assim, o autor situou seu problema de pesquisa ao que se refere ao ensino-aprendizagem de função dentro da Álgebra Escolar, buscando responder as seguintes questões: "*que compreensões de ideias essenciais de funções apresentam os alunos? Quais as contribuições da metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática via resolução, proposição e exploração de problemas, aliada ao uso de representações múltiplas, para o estudo de funções?*".

O autor se fundamentou teoricamente nos autores Goldin e Shteingold e Tabach, no que se refere às representações múltiplas, e nos autores Conney, Beckmann e Lloyd que apresentam as ideias essenciais do conceito de função. E ainda destaca o tópico relativo à presença da função ao longo do currículo de Matemática, evidenciando os autores Kilpatrick e Izsák.

Para o desenvolvimento da pesquisa, Silva (2013) optou por uma pesquisa qualitativa na modalidade de pesquisa pedagógica, onde o professor pesquisa sua própria prática. Na coleta de dados, utilizou como instrumentos: aulas ministradas, notas de aulas, descrições e análises de aulas e produções dos alunos. A pesquisa foi desenvolvida em uma turma do 1º ano do Ensino Médio de uma escola pública, aplicando um conjunto de atividades envolvendo situações-problemas através da metodologia de resolução, proposição e exploração de problemas, aliando a esta metodologia, as representações múltiplas.

A partir de suas análises, Silva (2013) destacou que as maiores dificuldades na compreensão do conceito de função apresentadas pelos alunos, continuam sendo nos elementos componentes, que são: domínio, imagem, regra de associação e as diferentes representações. O autor ainda evidencia que uma das maiores dificuldades detectadas no estudo de funções diz respeito à representação gráfica. Entretanto, o autor destaca que de acordo com as atividades aplicadas, os alunos puderam desenvolver habilidades e estratégias que fluíram em meio à ideias essenciais do conceito de função, e que este estudo trouxe contribuições e avanços para uma melhor compreensão do conteúdo de funções em sala de aula.

Portanto, estas quatro pesquisas destacadas, são de grande relevância na fundamentação de nossa pesquisa, pois cada uma apresenta elementos muito importantes que nos ajudaram na decisão dos passos que devíamos seguir para alcançar nossos objetivos.

Após a análise de cada pesquisa, sentimos a necessidade de melhor evidenciar seus elementos, sendo assim, elaboramos uma quadro resumo, assim como na pesquisa de Brandão (2014).

Quadro 1: Resumo das pesquisas analisadas

| **Autor – Ano** | COELHO COSTA, Acylena (2004) | COSTA, Claúdio Bispo de Jesus da (2008) | BRANDÃO, Jefferson Dagmar Pessoa (2014) | SILVA, Ledevande Martins (2013) |
|---|---|---|---|---|
| **Sujeitos da Pesquisa** | Alunos do 1º e 2º ano do curso de Licenciatura em Matemática, inscritos nas disciplinas Fundamentos da Matemática Elementar I e Cálculo I. | 36 professores de Matemática do Ensino Básico, que cursavam a disciplina Funções Reais no Curso de Especialização em Ensino de Matemática do Instituto de | Uma turma do 1º ano do Ensino Médio composta por 28 alunos. | Uma turma do 1º ano do Ensino Médio composta por 44 alunos. |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | Matemática da UFRJ. | | |
| **Objetivo** | Contribuir com o ensino de função, tendo a convicção de que esse conceito é fundamental para os estudos em Matemática. | Verificar o conhecimento de professores de Matemática em relação ao conceito de função. | Identificar as dificuldades e possibilidades da utilização da metodologia de resolução de problemas e do uso das representações múltiplas, durante a formação do conceito de função. | Investigar as compreensões e ideias essenciais do conceito de função e analisar as contribuições da metodologia de ensino-aprendizagem de matemática via resolução, proposição e exploração de problemas, aliada às representações múltiplas. |
| **Metodologia de Sala de Aula** | Aplicação de questionários e intervenções. | Aplicação de um caderno de atividades. | Resolução, proposição e exploração de problemas. | Resolução, proposição e exploração de problemas. |
| **Fundamentação Teórica** | TALL e VINNER (1981) – Conceito imagem e conceito definição. | EVEN (1990) – Sete aspectos pertinentes ao conhecimento de um tópico matemático. CARNEIRO, FANTINEL e SILVA (2003) – Pesquisa baseada no Modelo Teórico dos Campos Semânticos. | CONNEY, BECKMANN E LLOYD (2010) – As grandes ideias essenciais para aquisição do conceito de função. | GOLDIN e SHTEINGOLD (2001) e FRIEDLANDER e TABACH (2001) – Representações múltiplas; CONNEY, BECKMANN E LLOYD (2010) – Ideias essenciais ao ensino-aprendizagem de funções; KILPATRICK e IZSÁK (2008) e Documentos Curriculares Nacionais e Internacionais – Função ao longo do currículo de Matemática. |
| **Dificuldades** | Compreensão do conceito e aplicação da definição de função. | Definição de função, representações de função e temor ao formalismo e ao rigor matemático. | Aplicações práticas do conceito de função e representações de função. | Elementos componentes do conceito de função, representações de função e linguagem matemática formal. |

Fonte: Elaborado pelo autor.

Ao analisar as pesquisas, percebemos que as principais dificuldades apresentadas pelos sujeitos investigados dizem respeito à compreensão do conceito de função e as representações de função. No desenvolvimento da oficina também pudemos constatar algumas dificuldades, como por exemplo; os alunos tiveram dificuldades em perceber a relação entre as representações de uma mesma função, pois na primeira atividade, os alunos resolveram os itens e tiveram dúvidas se o item que pedia a lei de formação se referia apenas ao item anterior a ele, demonstrando não ter uma boa compreensão do conceito de função e das representações de função.

Os alunos também tiveram muita dificuldade para encontrar a lei de formação de algumas funções, destacamos também, que ao aplicarmos parte da nossa oficina em uma turma do mestrado e em um minicurso no IX Encontro Paraibano de Educação Matemática (EPBEM), também houve dificuldade na busca pela lei de formação. Portanto, pudemos observar que a lei de formação parece ser um dos aspectos mais difíceis no estudo de função, pois percebemos que tem gerado dificuldades em todos os níveis de escolaridade.

Acreditamos que um dos fatores que influenciam tais dificuldades, é o fato de que a lei de formação muitas vezes acaba nem sendo trabalhada no ensino básico, sendo assim, na maioria das vezes se apresenta o conteúdo, alguns exemplos e exercícios. A partir daí, se os alunos conseguiram reproduzir os procedimentos apresentados, subentendesse que eles aprenderam, mas sabemos que esta prática não tem favorecido um aprendizado eficaz.

Sendo assim, na análise das pesquisas, podemos observar que Brandão (2014) e Silva (2013) estão preocupados em dar significado ao conceito de função para alunos do Ensino Médio, evidenciando as ideias essenciais deste conceito e fazendo uso da metodologia de ensino via resolução, proposição e exploração de problemas. Já Coelho Costa (2004) procura trazer contribuições para o ensino de função evidenciando a importância deste conceito para o estudo da Matemática. Na pesquisa de Costa (2008), ele busca investigar o conhecimento que professores de Matemática têm sobre o conceito de função.

As pesquisas de Brandão (2014) e Silva (2013) fizeram uso de sequências didáticas, propondo várias situações-problemas relacionadas ao cotidiano dos alunos.

As pesquisas de Coelho Costa (2004) e Costa (2008) utilizaram questionários que continham atividades que envolviam o conceito de função.

De acordo com as análises que realizamos nestas pesquisas, percebemos que nossa pesquisa tem similaridades com as de Brandão (2014) e Silva (2013), pois temos o intuito de dar significado ao conceito de função fazendo uso da metodologia de resolução, proposição e exploração de problemas a partir de sequências de atividades, dando ênfase principalmente ao que diz respeito ao conceito de função e às representações de função.

No entanto, a nossa pesquisa difere, essencialmente, destas duas no que diz respeito aos sujeitos investigados, pois trabalhamos com alunos de um curso de Licenciatura em

Matemática, procurando desenvolver um melhor entendimento do conceito e das representações, tanto em relação à compreensão do conceito, como também despertando a reflexão sobre a prática como futuros professores de matemática.

Os pontos em comum com as pesquisas de Coelho Costa (2004) e Costa (2008), dizem respeito ao fato de que trabalhamos com alunos de um curso de Licenciatura em Matemática, buscando proporcionar uma melhor compreensão do conceito de função e contribuir com o ensino-aprendizagem de função de um modo geral, e portanto, nosso foco é a formação dos futuros professores de Matemática.

Em relação a estas pesquisas, a nossa se diferencia pela metodologia de ensino utilizada, que foi a resolução, proposição e exploração de problemas, e também pelas ideias essenciais para o desenvolvimento do conceito de função que destacamos em nossa pesquisa.

Portanto, pudemos perceber que são poucos autores que têm atentado as ideias essenciais para o desenvolvimento do conceito de função. Muitos trabalhos têm se voltado para o ensino-aprendizagem de função, como por exemplo, Ribeiro e Cury (2015) que discutem sobre o ensino-aprendizagem de equação e função e as dificuldades no estudo destes conteúdos, no entanto, não destacam as ideias essenciais.

## 2.4.O conceito de função ao longo do tempo

Embora não tenhamos trabalhado em nossa pesquisa aspectos históricos do conceito de função, consideramos ser importante destacar o desenvolvimento e a importância deste conceito. Portanto, a seguir apresentamos alguns pontos do processo gradativo que o conceito de função passou até chegar à importância que tem hoje.

O conceito de função é um dos mais importantes conceitos da Matemática, mas até chegar ao lugar que ocupa hoje,passou gradativamente por um processo de evolução. De acordo com Coelho Costa (2004), "tal evolução iniciou-se há cerca de 4000 anos e somente os três últimos séculos apresentam verdadeiramente o desenvolvimento da noção de função, tendo estreita ligação com problemas de Cálculo e Análise".

Braga (2006) afirma que não há nenhum outro conteúdo que esteja tão ligado aos movimentos inovadores no ensino de Matemática como o conceito de função está. Sendo assim, este conceito se torna muito importante não só para a Matemática, mas também para o nosso cotidiano, pois segundo Braga (2006), "essa relação de *função* com a vida cotidiana moderna chegou a tal ponto, que passou a fazer parte de critérios de alfabetismo matemático". (BRAGA, 2006, p. 15).

Braga (2006), ainda cita que levantamentos feitos pelo INAF (Indicador Nacional de Alfabetismo Funcional) tinham o objetivo de mostrar o nível de alfabetismo funcional em matemática no Brasil. O autor destaca que essa pesquisa revela a importância que é dada as representações funcionais tabular e gráfica.

O conceito de função aparece de forma intuitiva na Idade da Pedra, pois as pessoas realizavam comércio entre si e era necessário registrar a parte que cabia a cada família em relação à caçada, e tais atividades dependiam da ideia de contar. (EVES, 2011, p. 23).

O desenvolvimento do conceito de função passou por um grande processo ao longo do tempo, tal conceito ainda não estava definido quando Nicole Oresme (1323-1382) usou as coordenadas latitude e longitude, antecipando assim, aspectos da geometria analítica fazendo uso da representação gráfica, onde confrontou variável dependente (latitude) com a independente (longitude) (EVES, 2011, p. 382), dando origem assim, a uma das mais importantes representações de função.

Sabe-se que o surgimento do conceito de função, de forma mais clara e como objeto matemático, remonta ao final do século XVII, formando-se de modo um pouco confuso nos "fluentes" e "fluxões" de Newton (1642-1727). Mas foi Leibniz (1646-1716) o primeiro a usar o termo de função, ainda de maneira muito geral, introduzindo também os termos constante, variável e parâmetro. (CAMPITELI e CAMPITELI, 2006, p. 13). Leibniz utilizou este termo "inicialmente para expressar qualquer quantidade associada a uma curva, como, por exemplo, as coordenadas de um ponto da curva, a inclinação de uma curva e o raio da curvatura de uma curva". (EVES, 2011, p. 660).

Segundo Eves (2011), Johann Bernoulli (1667-1748) chegou a considerar "uma função como uma expressão qualquer formada de uma variável e algumas constantes", mas algum tempo depois Euler (1707-1783) considerou "uma função como uma equação ou fórmula qualquer envolvendo variáveis e constantes", sendo esta última, correspondente a ideia do conceito de função tida por alunos dos cursos elementares de matemática. (EVES, 2011, p. 660).

A evolução do conceito de função foi bastante marcada pelos trabalhos de Fourier (1768-1830), os quais se ocupavam de problemas de condução de calor em objetos materiais, onde considerou "a temperatura de um corpo como uma função de duas variáveis: o tempo e o espaço". (CAMPITELI e CAMPITELI, 2006, p. 14).

O inicio da representação algébrica de função está ligado a Fermat (1601-1665) e Descartes (1596-1650), que dispunham de novos simbolismos e processos algébricos. A partir daí, Descartes apresentou uma importante aproximação do conceito de função: "*uma equação* *em x e y (é) um meio para introduzir uma dependência entre quantidades variáveis de modo a permitir o cálculo de uma delas correspondendo aos valores da outra*". Desde então, vários outros matemáticos contribuíram para o desenvolvimento do conceito de função, mas em 1837, Dirichlet (1805-1859) apresentou uma definição mais ampla de função: "*se uma variável y está relacionada com uma variável x de tal modo que, sempre que é dado um valor numérico a x, existe uma regra segundo a qual um valor único de y fica determinado, então diz-se que y é função da variável x*". (BRAGA, 2006).

Com o passar do tempo foi surgindo a necessidade de ampliar ainda mais o conceito de função, e então nos anos 30 do século XX, o grupo Boubarki apresentou a formalização de uma nova conceituação, e nos anos 60 do mesmo século, essa nova concepção de função é adotada pelo Movimento da Matemática Moderna. (BRAGA, 2006).

Segundo Silva (2013), a definição de função utilizada nos dias atuais "foi atribuída ao matemático alemão Dirichlet (1805-1859) e ao grupo de jovens matemáticos franceses Bourbaki do início do século XX que se ocuparam em estudar e desenvolver teorias matemáticas".

> De acordo com Eves (1997), a definição Dirichlet-Bourbaki formulada em 1934 apresenta *função* como uma associação de um conjunto a outro, e é visto como um conjunto de pares ordenados, explicitamente: $f$ é uma função de um conjunto a outro, digo de A para B, se $f$ é um subconjunto do produto cartesiano de A (o domínio) e B (contradomínio), tal que para cada $a \in A$ há exatamente um$b \in B$ com $(a, b) \in f$. Entendemos por isto, que o conceito de *função* foi se tornando cada vez mais formal, passando a ser definido como uma relação entre conjuntos ou subconjunto de uma relação e não mais como uma relação de dependência entre grandezas. No entanto, tais definições trouxeram mudanças importantes para o campo de estudo da Ciência Matemática. (SILVA, 2013, p. 54).

Entretanto, mesmo a definição Dirichlet-Bourbaki sendo a mais correta, surgem dúvidas se é a mais adequada para atingir objetivos pedagógicos na educação escolar, pois podem haver lacunas entre definições formais e as imagens criadas pelos alunos. (SILVA, 2013, p. 55).

## 2.5.Ideias essenciais do conceito de função

O conceito de função é um dos mais importantes da Matemática, tendo aplicações nas mais variadas situações da vida, e dessa forma, se faz necessário que nossos alunos tenham uma compreensão mais significativa ao estudar tal conceito. Portanto, é preciso buscar alternativas para favorecer o ensino-aprendizagem de função, pois temos encontrado muitas pesquisas que evidenciam as dificuldades enfrentadas por alunos no ensino-aprendizagem deste conceito. Dessa forma, é preciso proporcionar condições necessárias para que os alunos tenham uma compreensão mais ampla do conceito de função.

> Acreditamos que, para compreender o formalismo matemático do conceito de função, o aluno deve ser colocado em um ambiente que inclua a experiência do dia a dia, exemplos concretos, vários tipos de representação e, em linhas gerais, seguindo o percurso semelhante ao historicamente construído fazendo com que o aluno forme a estrutura conceitual com compreensão. (BRANDÃO, 2014, p. 30).

Sendo assim, é de grande relevância para nossa pesquisa, destacar as ideias essenciais do conceito de função na visão dos autores Cooney, Beckmann e Lloyd (2010). Portanto, estes autores apresentam o que consideram ser as cinco grandes ideias para o desenvolvimento do conceito de função no livro Developing Essential Understanding of Functions Grades 9-12, que é uma publicação do NCTM (National Council Teachers Mathematics – Conselho Nacional de Professores de Matemática dos Estados Unidos) de 2010.

Dessa forma, destacam que as principais ideias do conceito de função para as séries, que aqui no Brasil são equivalentes às séries que vão do 9º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio, são: o conceito de função; covariação e taxa de variação; família de funções; combinação e transformação de funções e representação de funções. (BRANDÃO, 2014, p. 30).

É importante destacar que em nossa pesquisa trabalhamos com alunos do ensino superior, especificamente de um curso de Licenciatura em Matemática, mas temos constatado de acordo com pesquisas, que a grande maioria dos alunos adentra o ensino superior e ainda não conseguem compreender bem conceitos básicos do conteúdo de função. Portanto, vemos que o ensino-aprendizagem de função tem apresentado muitas lacunas desde o nível fundamental até o nível superior, dessa forma, acreditamos ser de grande relevância para nossa pesquisa trabalhar as cinco grandes ideias essenciais para o desenvolvimento do conceito de função.

A primeira ideia, o conceito de função, se faz presente na vida dos alunos desde muito cedo na Matemática escolar, sendo assim, é necessário que se busque métodos que auxiliem os alunos na compreensão dos conceitos, e que as situações propostas estejam ligadas ao cotidiano dos alunos. Vale ressaltar que o conceito de função pode ser aplicado nas mais variadas situações da vida, e principalmente é aplicado em muitos outros assuntos da

Matemática, e diante destas muitas aplicações é importante que ao se estudar o conceito de função sejam apresentados todos os exemplos de função. (SILVA, 2013, p. 52).

É importante chamar a atenção para o caráter multidisciplinar que o conceito de função tem, sendo este conceito essencial para diversos campos da Matemática Aplicada. Mas infelizmente temos percebido que o conceito de função vem sendo apresentado de maneira tradicional, que consiste na apresentação da definição formal, exercícios resolvidos e propostos, prevalecendo a representação algébrica, e na grande maioria das vezes seguindo-se rigorosamente a sequência estabelecida pelo livro didático. (BRANDÃO, 2014, p. 31). Dessa forma, temos visto que a abordagem tradicional que é dada a este conceito não vem favorecendo para que alunos tenham uma compreensão eficaz.

A covariação e taxa de variação, segunda ideia do conceito de função, nos mostra que as funções nos dão meios para relacionar quantidades que estão variando juntas, nos permitindo prever relações quando observamos uma taxa em que determinada quantidade está variando em relação à outra. Portanto, estamos quantificando a covariação quando "a taxa de variação de uma função é a taxa em que a saída da função muda em relação a uma mudança na entrada". (SILVA, 2013, p. 69).

Ao se introduzir o conceito de função, é importante fazer com que os alunos compreendam a ideia de covariação e taxa de variação, levando-os a observar como duas grandezas estão variando entre si. (BRANDÃO, 2014, p. 34).

As famílias de funções, terceira ideia, têm suas características próprias, compartilhando do mesmo tipo de taxa de variação. A função afim, função quadrática, função exponencial e função trigonométrica, são as quatro famílias mais estudadas no Ensino Médio. Mas os autores Conney, Beckmann e Lloyd (2010), incluem ainda a progressão aritmética e a progressão geométrica, que podem ser consideradas como subfamílias das funções afim e exponencial, respectivamente. (SILVA, 2013, p. 73).

> As funções podem ser classificadas em diferentes famílias de funções, cada uma com suas próprias características únicas. Famílias diferentes podem ser usadas para modelar diferentes fenômenos do mundo real. (COONEY, BECKMANN E LLOYD, 2010, apud. BRANDÃO, 2014, p. 36).

É importante que os alunos percebam as características de uma família de função, e para isto, deve-se levá-los a identificar e se familiarizarem com os padrões e as mudanças apresentadas pela situação que estão estudando. (BRANDÃO, 2014, p. 37).

A quarta grande ideia do conceito de função, combinação e transformação de funções, é uma técnica muito utilizada na Matemática, principalmente a combinação aritmética. Com esse procedimento muitas funções podem ser combinadas pela adição, subtração, multiplicação e composição das funções. Podemos também, decompor e transformar funções para estudar suas relações de várias maneiras diferentes. (SILVA, 2013, p. 79).

Sendo assim, as funções podem ser desmontadas para serem analisadas de diferentes formas, o que pode facilitar o entendimento dos alunos. Portanto, pode-se facilmente prever o comportamento do gráfico de uma função após fazer uma transformação na função, e a partir daí, pode-se esboçar o gráfico de forma mais simples. (BRANDÃO, 2014, p. 38).

E por último temos as representações de funções, ideia muito importante na compreensão do conceito de função. Podemos destacar cinco formas diferentes para representar ou interpretar uma função: dentro de um contexto, por meio de uma tabela que contém valores, através da própria linguagem, por meio de gráficos e também pela equação. Portanto, cada uma das representações vai expressar a mesma função, mas de modos diferentes, permitindo olhares diferentes sobre o fenômeno estudado. (SILVA, 2013, p. 84).

> Funções podem ser representadas de várias formas, incluindo a forma algébrica (simbólico), representações gráficas, verbais e tabulares. Ligações entre essas diferentes representações são importantes para estudar as relações e mudanças. (COONEY, BECKMANN E LLOYD, 2010, apud BRANDÃO, 2014, p. 39).

Portanto, deve-se trabalhar as representações de função de forma conjunta, sem privilegiar nenhuma delas, mas o que temos percebido é que o ensino de função vem dando muita ênfase a representação algébrica, enquanto as outras representações são pouco exploradas, gerando assim, um ensino muito mecânico de procedimentos algorítmicos, o que não favorece um aprendizado eficaz por parte dos alunos. (BRANDÃO, 2014, p. 39).

Dessa forma, nossa pesquisa procurou trabalhar as cinco grandes ideias para o desenvolvimento do conceito de função, dando ênfase principalmente ao conceito de função e as representações de função, principais focos de nossa pesquisa, buscando proporcionar aos alunos um ambiente diferente do que estão acostumados e lhes dando a oportunidade de construírem um conhecimento mais eficaz e com mais compreensão dos conceitos envolvidos.

Desse modo, percebemos a importância de levar em consideração tais ideias no ensino-aprendizagem de função, pois é preciso fazer com que os alunos reflitam de forma diferente e com maior compreensão sobre o que está sendo estudado, explorando várias possibilidades para que consigam construir seu conhecimento e encontrar significado no que estão estudando.

## 2.6.Resolução, proposição e exploração de problemas

Na presente pesquisa buscamos dar significado ao conceito de função para alunos do ensino superior, utilizando a metodologia de ensino-aprendizagem de matemática por meio da resolução, proposição e exploração de problemas. Optamos por tal metodologia por acreditarmos que esta nos forneceria as ferramentas necessárias para que os sujeitos desta pesquisa pudessem refletir sobre as situações propostas em um ambiente favorável a seu aprendizado, proporcionando aos alunos um cenário bem diferente do que estão acostumados no seu cotidiano escolar.

A resolução de problemas torna os alunos mais ativos no processo de ensino-aprendizagem, pois eles são levados a avaliar seu próprio trabalho e refletir sobre os caminhos que devem ser seguidos para solucionar as situações propostas.

De acordo com Andrade (1998) um problema "é entendido como um projeto, uma questão, uma tarefa, uma situação em que:"

> **a) O aluno não tem ou não conhece nenhum processo que lhe permita encontrar de imediato a solução**. O problema deve exigir, da parte do aluno, a realização de um trabalho não-repetitivo, não rotineiro. O problema deve estabelecer conexão entre o que o aluno já sabe e aquilo que ele ainda não sabe. O problema deve ser um nó entre o que o aluno sabe e aquilo que ele não sabe.
> **b) O aluno deseja resolver, explorar ou realizar algum trabalho efetivo**. Esse projeto, essa questão posta, essa tarefa ou a situação dada deve despertar o interesse do aluno. Quando isso não acontece, cabe ao professor iniciar um trabalho de problematização que possa despertar o interesse do aluno pela situação.
> **c) Se introduz ou se leva o aluno à realização de algum trabalho efetivo**. Nesse ponto, o essencial é que o trabalho seja feito com bastante esforço e dedicação por parte do aluno. Não importa se o aluno tenha conseguido resolver ou não resolver o problema mas, importa o seu trabalho desde que haja o seu envolvimento efetivo, desde que ele se sinta engajado. O que se espera é que o aluno trabalhe o máximo possível. O que o aluno produziu nesse trabalho deve ser o ponto de partida do caminhar que o professor deve trilhar com ele. Nesse caminhar, não há um ponto fixo de chegada. A missão do professor é levar o aluno e a classe até o ponto em que eles possam ir (ANDRADE, 1998, p. 23-24).

Portanto, qualquer situação que exige de nós a busca por diferentes estratégias para que encontremos uma solução, pode vir a ser considerado um problema, sendo assim, um problema matemático não é só aquele que apresenta um enunciado predefinido. Dessa forma, em nossa pesquisa propomos aos alunos atividades que apresentam diversas situações em que está presente o conceito de função, para que eles trabalhem na busca de estratégias para resolvê-las.

Onuchic (2013) comenta que:

> De acordo com Stanic e Kilpatrick (1989), problemas nos currículos remontam pelo menos aos antigos egípcios, chineses e gregos. Os autores citam, como exemplos, o Papiro de Ahmes, copiado pelo escriba homônimo, em 1650 a.C., de um documento ainda mais antigo, um manuscrito matemático egípcio que contém uma coleção de problemas; e um documento chinês de cerca de 1000 a.C. Esses problemas, segundo eles, eram criados por alguém que os apresentava a outros, os quais passavam a conhecê-lo e conseguiam chegar à solução. (ONUCHIC, 2013, p. 94).

Sabe-se que as pesquisas sobre resolução de problemas tiveram inicio com o trabalho de George Polya, em seu livro intitulado “A arte de resolver problemas”, propondo neste livro, a resolução de problemas em quatro etapas: 1º) compreender o problema; 2º) estabelecer um plano; 3º) executar o plano e; 4º) fazer um retrospecto da resolução completa. (POLYA, 1995).

De acordo com Andrade (1998)

> Na metade da década de 1980, Resolução de Problemas passa a ocupar a atenção de quase todos os congressos de nível internacional. É nessa década que o Brasil, de fato, começa a trabalhar sobre Resolução de Problemas. Fiorentini (1994, p. 189) disse que “Os estudos relativos ao ensino de resolução de problemas só seriam iniciado, de modo mais efetivo, a partir da segunda metade da década de 80. Esses estudos se restringem, quase que absolutamente, a trabalhos traduzidos em dissertações de Mestrado e teses de Doutorado”. (ANDRADE, 1998, p. 9).

Silva (2013) destaca em sua pesquisa as três concepções de ensino da resolução de problemas apresentadas por Schroeder e Lester (1989):

> 1) Ensinar para a resolução de problemas, ou seja, tendo o fim na resolução de certos problemas, geralmente ficando para o final da apresentação do conteúdo, como os problemas de aplicação; 2) Ensinar sobre a resolução de problemas enfatizando as heurísticas e as quatro fases do Polya: compreensão do problema, planejamento de um plano de ação, execução do plano e fazer retrospecto. [...] 3) Ensinar via/através da resolução de problemas, tomando como ponto de partida o problema para fazer toda a construção do saber e do saber fazer matemático. (SILVA, 2013, p. 96).

A partir da resolução de problemas, o problema passa a ser olhado de uma forma diferente, em que os alunos são desafiados a buscar suas próprias estratégias para resolvê-lo, pois não são apresentados a eles técnicas ou algoritmos diretos para resolver a situação, se apresenta a situação e eles devem utilizar os conhecimentos que têm para encontrar os caminhos a serem seguidos. Neste processo, o foco principal está na ação dos alunos e o professor desempenha um papel de mediador, interferindo apenas quando é necessário, mas sem dar respostas prontas aos alunos, indicando apenas pontos a serem refletidos pelos alunos.

> [...] se o aluno conseguir resolver o problema que lhe é apresentado, terá acrescentado alguma coisa à sua capacidade de resolver problemas. Não devemos, então, esquecer de que nossas indagações são genéricas, aplicáveis a muitos casos. Se a mesma indagação for proveitosamente repetida, dificilmente o estudante deixará de notá-la e será induzido a formular, ele próprio, essa indagação em situação semelhante. (POLYA, 1995, p. 3).

Portanto, em nossa pesquisa, não apresentamos aos alunos nenhum tipo de técnica ou algoritmo para resolver as atividades, mas mediamos para que eles encontrassem estratégias para resolver as atividades propostas. Dessa forma, as atividades apresentavam situações desafiadoras, de modo que os alunos tinham que buscar formas de resolver os itens propostos, além disso, fazíamos questionamentos para mediar à busca por estratégias de resolução, fazendo com que os alunos explorassem mais as situações. No entanto, é importante destacar, que a grande maioria das explorações feitas além do proposto nas atividades, foram realizadas pela iniciativa dos próprios alunos na busca de respostas para seus próprios questionamentos.

No ensino tradicional, a maioria das situações propostas aos alunos não se constituem como problemas matemáticos, pois não é necessário que se busque estratégias diferenciadas para resolvê-lo, em alguns casos os professores já têm apresentado o conteúdo com algum exemplo semelhante, restando aos alunos apenas reproduzir os procedimentos utilizados. De acordo com Onuchic (2013), até pouco tempo ensinar resolução de problemas se constituía em apresentar os problemas e possivelmente introduzir alguma técnica especifica de resolução.

Segundo Ribeiro e Cury (2015):

> Em termos metodológicos, os PCN[1] sustentam que a prática mais frequente em sala de aula consiste em ensinar um conceito e depois apresentar um problema para cuja solução o aluno empregue o referido conceito. Posicionando-se contrário a essa prática, os PCN apresentam a resolução de problemas como abordagem preferencial para o ensino de Matemática e consideram que se deve partir de um problema para que, nas tentativas de resolvê-lo,o aluno se aproxime sucessivamente do conceito que, posteriormente,será sistematizado. (RIBEIRO e CURY, 2015, p. 51).

---

[1] Parâmetros Curriculares Nacionais.

Ao se fazer uso da resolução de problemas, tem-se a oportunidade de analisar toda a ação do aluno e tudo o que ele produziu, isso desde a discussão que é gerada entre alunos até a produção escrita, levando-se em consideração os acertos e erros ao longo do processo de resolução da situação.

Andrade (1998) relata em sua pesquisa:

> Mostramos que a avaliação que se faz do trabalho dos alunos, em Resolução de Problemas, deve ser feita, realmente, a partir do que eles fizeram e fazem (o certo ou o errado) com seus significados, indicando assim o ponto de partida do caminho que o professor deve percorrer com eles. Queremos dizer que a melhoria do trabalho dos alunos é decorrência desse caminhar conjunto, e nessa perspectiva a resolução de problemas deve ser assumida como uma atividade multicontextual. A Resolução de Problemas como uma metodologia de ensino-aprendizagem necessita ser pensada globalmente. Considerar a RP como uma abordagem de ensino de Matemática envolve muito mais do que conceitos e processos matemáticos; conduz a considerar objetivos relativos à educação em geral e à educação matemática em particular. A sala de aula precisa ser enfocada sob uma perspectiva global. (ANDRADE, 1998, p. 17).

Portanto, a resolução de problemas como uma metodologia de ensino-aprendizagem fornece possibilidades para transformar o ambiente de sala de aula, pois professor e alunos passam a assumir posturas diferentes do que estamos acostumados a ver no ensino tradicional. Dessa forma, quando o professor propõe um problema para seus alunos ele não tem ideia das situações que podem surgir, mas é a partir dessas situações que o professor deve mediar o processo para se atingir os objetivos, ou seja, a partir do que é feito pelos alunos, é que o professor deve fazer questionamentos, fazendo-os refletirem sobre a situação proposta.

Em nossa pesquisa procuramos proporcionar a alunos de um curso de Licenciatura em Matemática, um ambiente diferente do que estão acostumados, pois, tanto os alunos, como o professor pesquisador, puderam assumir uma postura diferente em sala de aula. Os alunos se mostraram mais ativos na busca por estratégias, e o professor pesquisador buscou mediar a situação a partir das dúvidas e questionamentos que surgiam diante de cada atividade.

Para Andrade (1998):

> Dentro dessa proposta de ensino, o contexto do aluno e o do professor são de grande importância. Um professor que propõe um problema "x" para os seus alunos e trabalha com eles para desenvolver a teoria das seqüências geométricas a partir dele, é porque viu que, matematicamente, o problema exige esse conteúdo. Ele tem, a nosso ver, o direito e o dever de dirigir esse trabalho com os alunos, dialogicamente nesse sentido, mas o que ele não pode é desconsiderar que o trabalho dos alunos possa levar a conteúdos e problemas que ele sequer imaginou. Ele deve avançar e melhorar esse trabalho que gerou problemas e conteúdos inesperados. Num ensino de Matemática via Resolução, Exploração, Codificação e Descodificação de Problemas, não podemos desconsiderar nem o contexto do aluno, nem o contexto do professor. (ANDRADE, 1998, p. 31).

Esta metodologia de ensino permite ao professor e aos alunos ir muito além de apenas achar uma resposta para o problema, surgindo questionamentos e outras formas de explorar a situação. Na resolução de um problema os alunos podem encontrar aspectos que instiguem sua curiosidade e a partir daí façam questionamentos que levem a outras formas de explorar o problema, e há casos em que alunos percebem aspectos que o próprio professor jamais teria pensado em explorar, nesse momento cabe ao professor mediar a situação e levar os alunos a explorarem o problema de forma a construírem o conhecimento objetivado.

Ao trabalharmos esta metodologia de ensino em nossa pesquisa, pudemos explorar as situações além do que era proposto em cada atividade, pois os próprios alunos faziam questionamentos e explorações sobre outros aspectos das situações, os quais tinham curiosidade de explorar. A partir daí, procurávamos mediar com questionamentos para que explorassem a situação de modo que tivessem uma melhor compreensão do conceito de função.

Andrade (1998) nos diz que:

> [...] o trabalho de **exploração de problemas** é inacabado, vai além da busca da solução do problema e refere-se a tudo que se faz nele a partir da relação P-T-RS[2]. No trabalho de **exploração de problemas,** há um prazer e uma alegria de ir cada vez mais longe, um ir cada vez mais profundo, um ir cada vez mais curioso, há um ir que chega e nunca chega, um ir que pode sempre ir, um ir que sempre se limita ao contexto do aluno, do professor, da Matemática, da escola ... e por isso pode ir outra vez e mais outra vez ... [...]. (ANDRADE, 1998, p. 24).

Sendo assim, ao se trabalhar com a resolução de problemas, tem-se a oportunidade de ir além, em uma situação proposta, instigando a curiosidade e criatividade dos alunos, desenvolvendo neles habilidades que os auxiliem na construção do seu conhecimento.

Portanto, concluímos que a metodologia de ensino-aprendizagem por meio da resolução, proposição e exploração de problemas muito contribuiu para que pudéssemos alcançar nossos objetivos, pois deu a oportunidade de que os alunos fossem mais ativos, desenvolvendo sua criatividade, tomando iniciativas, refletindo e explorando as situações de diferentes maneiras, tudo isso de forma a contribuir para que os alunos tenham uma melhor compreensão dos conceitos estudados.

---

[2] Problema-Trabalho-Reflexões e Síntese.

# CAPITULO 4 – O DESENVOLVIMENTO DA PESQUISA

Este capitulo detalha o desenvolvimento de nossa pesquisa, apresentando inicialmente a nossa problemática, onde são evidenciadas as perguntas norteadoras do nosso trabalho. Descrevemos também o nosso caminhar metodológico, detalhando nossa metodologia de pesquisa, a qual é a pesquisa qualitativa na modalidade de pesquisa pedagógica, em que o professor pesquisa sua própria pratica, e apresentamos também a descrição de todos os procedimentos metodológicos da pesquisa. Também descrevemos o nosso trabalho de campo, apresentando a análise inicial das perguntas do questionário e das atividades da oficina, bem como a descrição de como será desenvolvida a oficina.

## 4.1.Problemática

É evidente o fato de muitas pesquisas estarem voltadas para o ensino-aprendizagem de função, evidenciando as dificuldades existentes e propondo alternativas para auxiliar alunos na aprendizagem deste conceito.

A partir daí, podemos concluir que essa preocupação se deve principalmente, a grande importância que o conceito de função tem para o ensino da Matemática, e sabemos que o ensino-aprendizagem de função tem apresentado muitos problemas. De acordo com Campiteli e Campiteli (2006), se queremos que as atividades que utilizamos estejam baseadas em uma matemática mais atualizada e dinâmica, não podemos esconder do aluno o conceito primeiro, e mais fundamental da matemática, que é o conceito de função. Este conceito é considerado o "primeiro e fundamental porque assinala o inicio da matemática moderna "clássica", que nele tem encontrado a base para desenvolver-se". (CAMPITELI e CAMPITELI, 2006, p. 16).

Diante da importância do conceito de função para o ensino de Matemática, é de extrema necessidade auxiliar nossos alunos para que tenham um aprendizado mais eficaz, que contribua para a construção de um conhecimento verdadeiramente significativo.

No ensino de Matemática em geral, temos nos deparado com o fato deste ensino estar sendo muito mecânico e procedimental, o que não tem contribuído para que alunos tenham uma boa compreensão dos conceitos envolvidos. No que diz respeito ao ensino de função, de acordo com Campiteli e Campiteli (2006), o tratamento não vem sendo adequado, pois não tem sido dado um lugar de destaque a relação da matemática com a realidade. Além disso, no ensino de função tem prevalecido o fato de alunos serem levados a aprenderem técnicas e algoritmos que eles mesmos devem aplicá-las em outras matérias. (CAMPITELI e CAMPITELI, 2006, p. 15).

Nas pesquisas que analisamos, constatamos que os sujeitos pesquisados apresentaram dificuldades principalmente no que diz respeito à compreensão do conceito de função e as representações de funções. Duas dessas pesquisas trabalharam com alunos do ensino superior (COELHO COSTA, 2004; COSTA, 2008), o que nos leva a confirmar que mesmo ao adentrar e concluir o ensino superior, alguns alunos ainda permanecem com dificuldades de compreensão do conceito de função. Portanto, isso vem a reforçar ainda mais a nossa preocupação com a formação de nossos futuros professores de matemática.

Em nossa pesquisa, procuramos levar os alunos de um curso de Licenciatura em Matemática a terem uma melhor compreensão do conceito e das representações de função a partir de uma sequência didática aplicada em uma oficina, fazendo uso da metodologia de ensino-aprendizagem de matemática por meio da resolução, proposição e exploração de problemas, proporcionando aos alunos um cenário em que a participação ativa deles era fundamental, tendo a oportunidade de se tornarem mais ativos e buscarem suas próprias estratégias para resolver as situações propostas.

Sendo assim, a partir do que constatamos em algumas pesquisas, em relação às dificuldades apresentadas por alunos no ensino-aprendizagem de função, nossa pesquisa buscou inicialmente responder a seguinte pergunta: Que compreensões essenciais os alunos do curso de Licenciatura em Matemática demonstram ter com relação ao conceito de função?

As funções podem ser representadas de várias formas como, dentro de um contexto, em forma de tabela, a partir de gráficos e na forma algébrica. Tais representações se bem exploradas podem contribuir de maneira muito significativa na aprendizagem dos alunos. Segundo Campiteli e Campiteli (2006), “o ensino de funções deve atender à necessidade de articular de forma permanente as três maneiras de representação conhecidas dos alunos: numérico, gráfico e algébrico”. Dessa forma, é importante levar os alunos a fazerem transições entre as representações de função para que compreendam o conceito de função e desenvolvam habilidades ao trabalhar este conceito.

Portanto, é de extrema importância que os alunos construam um conhecimento mais significativo do conceito de função, com uma compreensão mais eficaz, para que saibam utilizar tal conceito no estudo da Matemática, de um modo geral.

Sendo assim, em nossa pesquisa propomos aos alunos um cenário de ensino-aprendizagem onde a participação e o envolvimento deles foi fundamental para atingir os objetivos de aprendizagem. Para isso, fizemos uso da metodologia de ensino-aprendizagem de matemática por meio da resolução, proposição e exploração de problemas.

A partir daí, procuramos responder também a pergunta: Quais as contribuições da abordagem de ensino de Matemática via resolução, proposição e exploração de problemas para o entendimento do conceito e das representações de função?

Optamos pela metodologia de ensino-aprendizagem de matemática via resolução, proposição e exploração de problemas, pois esta nos forneceu os subsídios necessários para dar um melhor significado ao conceito de função, dando a oportunidade de fazer com que os alunos fossem mais ativos nesse processo de ensino-aprendizagem. De acordo com Campiteli e Campiteli (2006), "chega-se, portanto, à constatação de que o professor precisa planejar ações educativas a serem desenvolvidas em sala de aula, de maneira a possibilitar a superação de problemas de aprendizagem".

É importante destacar que no desenvolvimento de nossa pesquisa não estávamos presos apenas a responder as perguntas norteadoras, mas buscamos também estar refletindo sobre a prática docente desenvolvida, de forma que esta contribuísse de forma significativa para que alunos tivessem uma melhor compreensão do conceito e das representações de função, pois o desenvolvimento deste processo de ensino-aprendizagem estava dependendo da mediação do professor pesquisador.

## 4.2.Caminhar metodológico

### 4.2.1. Pesquisa qualitativa na modalidade de pesquisa pedagógica

A metodologia escolhida para presente pesquisa foi a qualitativa, pois esta nos deu possibilidades de compreender com maior profundidade o fenômeno que estávamos estudando. Ou seja, não buscamos apenas uma explicação para as causas das dificuldades dos alunos de ensino superior, mas queríamos entender como se dá todo esse processo. Segundo Lüdke e André (1986), "A pesquisa qualitativa tem o ambiente natural como sua fonte direta de dados e o pesquisador como principal instrumento". Portanto, de acordo com Bogdan e Biklen (1994):

> Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produto. [...] Por exemplo, em estudos relativos ao ensino integrado nas escolas, os investigadores estudaram primeiro as atitudes dos professores para com determinadas crianças, estudando posteriormente o modo como tais atitudes eram traduzidas nas intenções diárias e como estas representavam as atitudes iniciais [...]. (BOGDAN e BIKLEN, 1994, p. 49).

Dessa forma, a partir dos dados levantados e do contato com os sujeitos da pesquisa, procuramos entender o processo pelo qual alunos de graduação passam ao enfrentarem dificuldades no ensino-aprendizagem de função, e como atividades com foco na compreensão dos conceitos poderiam contribuir para um melhor aprendizado, pois os dados coletados em uma pesquisa qualitativa são muito ricos, trazendo descrições detalhadas dos sujeitos e das situações trabalhadas em sala de aula, permitindo assim, uma análise mais profunda do fenômeno estudado.

> A investigação qualitativa é descritiva. Os dados recolhidos são em forma de palavras ou imagens e não de números. Os resultados escritos da investigação contêm citações feitas com base nos dados para ilustrar e substanciar a apresentação. Os dados incluem transcrições de entrevistas, notas de campo, fotografias, vídeos, documentos pessoais, memorandos e outros registros oficiais. Na sua busca de conhecimento, os investigadores qualitativos não reduzem as muitas paginas contendo narrativas e outros dados a símbolos numéricos. Tentam analisar os dados em toda a sua riqueza, respeitando, tanto quanto o possível, a forma em que estes foram registrados ou transcritos. (BOGDAN e BIKLEN, 1994, p. 48).

A pesquisa foi desenvolvida a partir de uma oficina que nos deu a possibilidade de levantarmos os dados necessários, e neste ambiente o principal instrumento foi o próprio pesquisador. De acordo com Bogdan e Biklen (1994):

> Os investigadores introduzem-se e despendem grandes quantidades de tempo em escolas, famílias, bairros e outros locais tentando elucidar questões educativas. Ainda que alguns investigadores utilizem equipamento vídeo ou áudio, muitos limitam-se exclusivamente a utilizar um bloco de apontamentos e um lápis. Contudo, mesmo quando se utiliza o equipamento, os dados são recolhidos em situação e complementados pela informação que se obtém através do contato direto. (...) Os investigadores qualitativos frequentam os locais de estudo porque se preocupam com o contexto. Entendem que ações podem ser melhor compreendidas quando são observadas no seu ambiente habitual de ocorrência. (BOGDAN e BIKLEN, 1994, p. 47).

Portanto, de acordo com as modalidades de pesquisas qualitativas em educação, a nossa pesquisa se enquadra na modalidade chamada de pesquisa pedagógica, pois o professor pesquisa sua própria prática, ou seja, é ao mesmo tempo professor e pesquisador. Embora, nesta pesquisa, não tenhamos um cenário cotidiano de sala de aula e o pesquisador não seja o professor dos sujeitos, buscamos aplicar atividades que pudessem contribuir para uma melhor compreensão por parte dos alunos, do conceito de função, ou seja, desenvolvemos uma proposta de ensino-aprendizagem de função e ao mesmo tempo investigamos como isso contribuía na superação das dificuldades dos alunos.

De acordo com Lankshear e Knobel (2008)

> (...) a pesquisa pedagógica pode ser realizada em salas de aula, bibliotecas, nos lares, em comunidades e em qualquer outro lugar onde se possa obter, analisar e interpretar informações pertinentes às orientações por um pesquisador enquanto professor. Ela pode ser realizada dentro de programas acadêmicos oficiais, ou como empreendimento individual, inteiramente autodirigido, ou ainda sob quaisquer arranjos semiformais que existam entre esses dois extremos. A pesquisa pedagógica pode envolver a observação empírica de salas de aula (a própria ou a de colegas), a reflexão sistemática documentada e sobre as próprias experiências ou o engajamento com textos e questões teóricas ou conceituais; pode usar pessoas, textos de manuais, materiais da internet, conjuntos de dados secundários, e outros tantos, como fontes de informação; finalmente, pode ser fundamentada em dados do presente ou do passado e até mesmo em dados relacionados ao futuro. Seu escopo e variedade potenciais são enormes. (LANKSHEAR e KNOBEL, 2008, p. 18).

Dessa forma, a pesquisa pedagógica pode ser realizada na sala de aula ou em qualquer outro lugar que possa fornecer as informações necessárias e pertinentes ao objetivo de ensino do professor pesquisador.

Portanto, ao fazer uso da pesquisa pedagógica, não estávamos apenas levantando dados para pesquisa, mas estávamos aplicando uma proposta que levou os alunos a construírem seu próprio conhecimento, e ao mesmo tempo tivemos uma experiência diferenciada em nossa prática. Assim, a partir da pesquisa pedagógica em sala tivemos a oportunidade de transformar este ambiente, pois o professor passou a assumir uma postura diferente que trouxe muitas contribuições para o ensino-aprendizagem em sala.

Sendo assim, a pesquisa pedagógica dá a oportunidade de o professor refletir sobre sua própria prática, e a partir daí fazer julgamentos que o leve ao aprimoramento profissional. Além disso, a pesquisa pedagógica pode contribuir muito para a formação dos alunos, pois ao realizar uma pesquisa em sua sala de aula, o professor está atento ao método utilizado, e pode facilmente detectar se tal método não está contribuindo para um bom rendimento dos alunos, e a partir daí, o professor poderá fazer mudanças e colocá-las em prática para que os resultados do ensino sejam melhorados. (LANKSHEAR e KNOBEL, 2008, p. 14).

Segundo Lankshear e Knobel (2008):

> Vários autores (por exemplo, Cochran-Smith e Lytle, 1993; Hopkins, 1993; Fishmane McCarthy, 2000) agruparam uma série de visões amplamente compartilhadas sobre os propósitos e ideais da pesquisa pedagógica, em torno de dois conceitos fundamentais. Um deles diz respeito a melhorar a percepção do papel e da identidade profissional dos professores. O outro é a ideia de que o envolvimento com a pesquisa pedagógica pode contribuir para um ensino e uma aprendizagem de melhor qualidade nas salas de aula. (LANKSHEAR e KNOBEL, 2008, p. 14).

Desse modo, a pesquisa pedagógica muito contribuiu para que pudéssemos atingir o nosso objetivo, pois no desenvolvimento das atividades propostas nesta pesquisa, estávamos atentos a todo o processo, buscando mediar as situações para que os alunos tivessem uma melhor compreensão do conceito de função.

Sendo assim, o pesquisador ao utilizar a pesquisa pedagógica não está preocupado apenas em aplicar um método que funcione, mas sim, em entender como e porque tal método funciona e como pode ser adaptado para funcionar em outros casos. Sendo assim, a pesquisa pedagógica consiste em o professor estar aberto a mudanças em suas conclusões e explicações, entendendo de forma mais ampla e de diferentes perspectivas as situações e desafios que surgirem. (LANKSHEAR e KNOBEL, 2008, p. 19).

### 4.2.2. Descrição dos procedimentos

A pesquisa teve inicio com o levantamento bibliográfico para a fundamentação teórica, seguida da análise de algumas pesquisas, focando principalmente nas dificuldades evidenciadas e nos recursos utilizados. A partir das análises destacamos duas dificuldades: compreensão do conceito de função e representações de função. Entre os recursos utilizados, duas das pesquisas analisadas fizeram uso da metodologia de resolução, proposição e exploração de problemas, metodologia que também foi utilizada em nossa pesquisa, pois nos forneceu os recursos necessários para alcançar nossos objetivos.

A partir daí, sentimos a necessidade de elaborar um questionário que indicasse as dificuldades e o domínio de conteúdo do grupo de alunos participantes desta pesquisa. Após, buscamos elaborar uma sequência de atividades que pudessem contribuir principalmente para as duas dificuldades evidenciadas nas pesquisas. Para cada atividade elaborada, fizemos uma análise inicial destacando o nosso objetivo em cada atividade, as ideias essenciais e o conteúdo que estava sendo trabalhado, tentando prever os procedimentos que seriam usados pelos alunos para resolver cada atividade.

No desenvolvimento da pesquisa ministramos uma oficina sobre o conteúdo de funções, em que os alunos foram convidados a participar. Inicialmente aplicamos o questionário que tinha como objetivo investigar as dificuldades existentes nos sujeitos da pesquisa, no que diz respeito ao conteúdo de função, e qual o domínio de conteúdo que eles tinham em relação às ideias essenciais do conceito de função. Em seguida aplicamos a sequência de atividades para que os alunos construíssem seu próprio conhecimento de forma mais significativa e compreensível.

No decorrer da oficina fizemos uso da metodologia de ensino-aprendizagem por meio da resolução, proposição e exploração de problemas, que nos deu possibilidades de fazer com que os alunos refletissem sobre o que estavam estudando e se tornassem mais ativos no processo de ensino-aprendizagem.

O levantamento de dados foi feito a partir das aulas ministradas na oficina, das notas de aulas do professor pesquisador, anotações no decorrer dos acontecimentos, descrições escritas após as aulas e produções dos alunos. Todos esses elementos nos auxiliaram nas análises, em que buscamos trazer fragmentos dos diálogos em sala.

Portanto, ao analisar os dados levantados, estávamos refletindo sobre todo o processo de ensino-aprendizagem, desde o planejamento das aulas até a construção do conhecimento por parte dos alunos, ou seja, estávamos refletindo sobre a nossa própria prática.

## 4.3.Trabalho de campo

### 4.3.1. O questionário

A seguir temos uma breve análise do questionário, destacando o objetivo de cada questão e antecipando o que poderíamos encontrar nas respostas dos alunos. De modo geral, este questionário teve como objetivo identificar as dificuldades enfrentadas pelo grupo alunos participantes desta pesquisa no que diz respeito ao ensino aprendizado de funções, bem como investigar o domínio apresentado por estes alunos em relação a alguns conceitos importantes do conteúdo de funções.

Questão 1

*Comente como foi sua experiência com o ensino de funções na universidade.*

Esta questão pretendeu identificar a percepção dos alunos sobre como foi apresentado o conteúdo de função para eles e quais suas dificuldades em relação a este conteúdo. Esperávamos que os alunos relatassem um pouco do que vivenciaram no ensino-aprendizagem de função nas disciplinas que cursaram ao longo do curso de Licenciatura em Matemática. Esperávamos que esta pergunta também pudesse levar os alunos a comentarem sobre dificuldades vindas do ensino básico, pois como algumas pesquisas destacam, parte das dificuldades enfrentadas por alunos universitários estão relacionadas a lacunas deixadas pelo ensino básico.

De acordo com Silva (2013):

> Dos tópicos de Álgebra, trabalhados no Ensino Fundamental e Médio, pesquisas indicam que o conteúdo função tem trazido inúmeras dificuldades no aprendizado por parte dos alunos. Há falta de uma integração entre Aritmética e Álgebra, ou mesmo a falta de elementos basilares que possam ajudar os alunos no Ensino Médio a poder formalizar, sistematizar e aplicar conteúdos que deveriam ter sido construídos na Educação Fundamental. (SILVA, 2013, p. 24).

Sendo assim, de acordo com algumas pesquisas, percebemos que a experiência de grande parte dos alunos com o ensino-aprendizagem de funções não tem sido satisfatória, são muitos os problemas que envolvem o ensino de funções, problemas que na maioria das vezes têm origem ainda no ensino básico, continuam no ensino superior e podem acabar influenciando muito a prática de nossos futuros professores de Matemática.

Questão 2

*Quais as dificuldades que você encontrou ao estudar o conteúdo de funções?*

A segunda questão teve o objetivo de identificar as dificuldades dos alunos no ensino-aprendizagem de funções. Esperávamos que os alunos falassem um pouco sobre as dificuldades enfrentadas e destacassem os principais conteúdos em que ocorreram tais dificuldades. Esperávamos que esta pergunta pudesse fazer com que os alunos também citassem alguns pontos sobre a metodologia de ensino adotada por seus professores, bem como dificuldades advindas de conteúdos do ensino básico.

De acordo com Costa (2008):

> (...) o nosso professor, quando confrontado com questões envolvendo as funções que usualmente são abordadas na Educação Básica, apresenta um fraco desempenho, demonstrando limitações incompatíveis com o seu grau de formação, ora reproduzindo os erros dos alunos desta etapa da educação, ora reproduzindo em sala de aula erros de abordagem e de conceito. (COSTA, 2008, p. 93).

Portanto, ao analisar as pesquisas que destacamos em nosso trabalho, pudemos perceber que nossos futuros professores enfrentam dificuldades com o conteúdo de funções desde o ensino básico, dificuldades que muitas vezes são agravadas ainda mais no ensino superior, e acabam influenciando muito a prática profissional desses futuros professores, pois alguns deles acabarão por repetir em sala de aula metodologias e compreensões equivocadas que eram utilizadas por seus antigos professores.

Questão 3

*Fale um pouco sobre o que você considera ter aprendido do conteúdo de funções.*

Esta questão teve o objetivo de investigar os conteúdos em que os alunos consideravam ter mais domínio e os conceitos que tinham melhor compreensão. Esperávamos que os alunos citassem alguns conteúdos que consideravam ter domínio. Mas sabíamos que algumas respostas poderiam não nos dar muitos detalhes destes domínios e dos conceitos envolvidos. Sabemos que no ensino de Matemática em geral, os alunos são levados muitas vezes apenas a repetir procedimentos mecânicos que não contribuem em nada na compreensão dos conceitos envolvidos, e isto pode acontecer desde o ensino básico até o ensino superior.

> De modo geral, o contato do aluno com esse conceito se dá por uma sequência que consiste, inicialmente, da apresentação da definição formal seguida de exercícios resolvidos e exercícios propostos considerando-se primordialmente, a forma algébrica, apesar de existirem outras formas de representá-la, como tabelas, gráficos e outros. A partir de nossa experiência em sala de aula este tipo de abordagem não gera, no aluno, a devida compreensão e o mesmo chega ao final do Ensino Médio sem saber o que é uma função. (BRANDÃO, 2014, p. 12).

A partir do nosso levantamento bibliográfico, vimos que é evidente como após o termino do ensino médio e também no decorrer do curso de Licenciatura em Matemática, os alunos não têm adquirido uma boa compreensão do conceito de função, e isso é preocupante, pois sabemos a importância do conceito de função para a Matemática e para a vida de um modo geral. A partir daí temos visto muitas pesquisas que procuram propor alternativas que contribuam com o ensino-aprendizagem de função (COELHO COSTA, 2004; COSTA, 2008; BRANDÃO, 2014; SILVA, 2013).

Questão 4

*Para você, o que é uma função?*

A partir desta questão, tínhamos o intuito de investigar qual a noção que os alunos tinham do conceito de função, e se tinham ou não uma boa compreensão do conceito de função. Esperávamos que os alunos respondessem esta questão de acordo com a compreensão que possuíam do conceito de função e descrevessem com suas palavras. Mas sabíamos que poderíamos encontrar respostas em que os alunos apresentassem apenas a definição de função da forma que memorizaram, de maneira muito formal.

De acordo com Silva (2013):

> (...) nas nossas práticas docentes, há uma tendência muito forte ao formalismo, à apresentação da definição formal de função seguida de lista de exercícios. Frequentemente acabamos repetindo o modelo de ensino de Matemática no qual fomos formados, com seu caráter de rigor e precisão de acordo como eles nos foram apresentados durante a formação inicial, muito embora reconhecêssemos a importância de se trabalhar resolução de problemas nas aulas de Matemática. (SILVA, 2013, p. 12).

Considerando a análise que fizemos de algumas pesquisas, ficou evidente como a formalização dos conteúdos tem predominado no ensino-aprendizagem de funções. Temos constatado a maneira formal em que os conceitos são apresentados aos alunos, estes muitas vezes memorizam definições formais no ensino básico, adentram ao ensino superior e são submetidos a mais formalização de conceitos, ao termino do curso, estes, agora professores de Matemática, retornam ao ensino básico e passam a repetir basicamente os mesmos métodos tradicionais que eram submetidos por seus professores do ensino básico.

Questão 5

*Para você, qual a importância de estudar gráficos de funções?*

Com esta questão, tivemos o objetivo de investigar qual a importância dos gráficos de funções para os alunos e quais os conceitos que eles consideravam que os gráficos poderiam auxiliar em sua compreensão. Esperávamos que esta pergunta permitisse identificar também o domínio que os alunos tinham na interpretação e construção de gráficos de funções. Mas sabíamos que poderíamos encontrar respostas muito diretas, não tão detalhadas, que deixassem transparecer a pouca atenção que é dada ao trabalho com gráficos de funções em sala, pois temos constatado que no ensino de funções é dada uma grande ênfase a representação algébrica, enquanto outras representações são pouco exploradas, ou mesmo não são apresentadas.

Costa (2008) nos diz que:

> Embora este conceito possua várias representações, tais como: tabelas, gráficos, expressões algébricas e diagrama de setas, destaca-se a representação algébrica, presente nas equações ou fórmulas que descrevem as "leis de formação".

> Continuando o seu aprendizado, lhe são apresentados alguns tipos de funções, suas propriedades gráficas e manipulações algébricas, predominando esta última em exercícios do tipo *"determine x na expressão dada"* ou *"calcule o valor da função para determinado x0"*. (COSTA, 2008, p. 2).

Portanto, pelo que pudemos constatar em algumas pesquisas, a pouca exploração das representações de funções muitas vezes compromete o aprendizado dos alunos, pois muitos conceitos podem ser melhor compreendidos a partir da exploração e manipulação de outras representações de funções, como por exemplo os gráficos. Em nossa pesquisa, procuramos dar uma maior atenção à representação gráfica, pois de acordo com algumas pesquisas analisadas, este tem sido um tópico em que os alunos têm apresentado muitas dificuldades.

Questão 6

*Escreva sobre outros pontos do ensino de funções que você desejar.*

Nesta ultima questão, deixamos um espaço livre para que os alunos relatassem algo mais que sentissem necessidade sobre o conteúdo de funções, algum ponto que considerassem importante e que não encontraram espaço para relatar nas outras questões. Sabíamos que alguns alunos poderiam deixar esta questão em branco, mas consideramos ser importante deixar um espaço em que os alunos se sentissem a vontade para responder ou não.

Portanto, no quarto capitulo apresentamos a análise das respostas dadas pelos alunos ao nosso questionário e podemos destacar de um modo geral, que constatamos que o ensino-aprendizagem de função tem apresentado diversos problemas, pois os alunos demonstraram não ter uma compreensão eficaz do conceito de função e evidenciaram algumas dificuldades ao trabalhar com este conteúdo. Dessa forma, percebemos a grande necessidade de buscar alternativas que favoreçam o ensino-aprendizagem de função, pois este conceito é de fundamental importância para Matemática e para a vida.

### 4.3.2. A oficina

Sendo um dos objetivos desta pesquisa a aplicação de uma oficina, a seguir apresentamos a descrição de como foram organizados as etapas da nossa oficina. No desenvolvimento desta oficina procuramos evidenciar o conceito de função e as representações de funções, principais focos de nossa pesquisa, bem como as outras ideias essenciais para o desenvolvimento do conceito de função presentes em cada atividade.

Os alunos de um curso de Licenciatura em Matemática, público alvo de nossa pesquisa, foram convidados a participar da oficina, a partir de uma divulgação (Anexo C) feita na universidade em que estavam cursando, e também por meio de redes sociais. Disponibilizamos vinte vagas para os alunos e deixamos claro que os participantes da oficina receberiam certificados.

Os interessados entraram em contato conosco por e-mail, a partir daí, solicitamos os dados necessários para efetuarmos a inscrição.

No planejamento inicial da oficina, dividimos em cinco etapas com duração de quatro horas cada, totalizando uma carga horária de vinte horas. As cinco etapas seriam distribuídas ao longo de cinco dias de uma semana. E desenvolveríamos a oficina no período da tarde, tendo em vista que as aulas do curso de Licenciatura em Matemática aconteciam nos períodos da manhã e da noite.

No entanto, após analisarmos melhor nosso planejamento, chegamos à conclusão que para uma melhor distribuição da carga horária, era necessário fazer algumas alterações. Então, dividimos a oficina em seis etapas, distribuídas em duas semanas, que totalizavam uma carga horária de trinta horas.

Assim, no novo planejamento, além das vinte atividades programadas, acrescentamos na sexta etapa, a apresentação dos participantes sobre o ensino-aprendizagem de função, e a participação do Prof. Dr. Sivanio de Andrade falando sobre a pesquisa em Educação Matemática e o ensino-aprendizagem de função.

Em cada uma das cinco primeiras etapas, aplicamos atividades a partir da metodologia de ensino-aprendizagem via resolução, proposição e exploração de problemas, com o intuito de auxiliar os alunos na aprendizagem do conceito de função, e identificar quais as contribuições desta metodologia para o ensino de funções.

A oficina foi desenvolvida no laboratório de informática do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba (PPGECEM – UEPB), pois exploramos com o auxilio do computador, algumas das atividades propostas, fazendo uso de um software de matemática dinâmica bem conhecido, o GeoGebra. Sendo assim, para o melhor desenvolvimento de nossa oficina, verificamos com antecedência, se o software estava instalado nos computadores que seriam utilizados. Escolhemos o GeoGebra, por ser um software que reúne a geometria, a álgebra e o cálculo, nos fornecendo assim, várias formas de explorar as representações de função.

É importante destacar que fizemos uma breve explicação sobre os comandos do software GeoGebra, tendo em vista que mesmo sendo bem conhecido, alguns alunos não tinham tanta familiaridade com seus comandos. Sendo assim, fizemos uma breve apresentação do GeoGebra, bem como dos comandos básicos necessários nas atividades propostas.

Na primeira etapa da oficina, pedimos aos alunos que se dividissem em duplas, deixando-os a vontade para continuarem ou mudarem as duplas no decorrer dos outros dias da oficina, no entanto, as duplas permaneceram as mesmas em todas as etapas.

Da primeira a quinta etapa da oficina, aplicamos atividades a partir da metodologia de ensino-aprendizagem de matemática por meio da resolução, proposição e exploração de problemas. No decorrer da oficina, entregamos para os alunos as atividades, de forma impressa. Cada aluno de cada dupla recebeu a atividade, cabendo a cada um fazer as anotações correspondentes as suas resoluções, e no final deveriam nos entregar apenas uma das folhas com as respectivas anotações, mas em algumas atividades, os alunos nos entregaram tudo o que haviam feito.

A seguir apresentamos um quadro com o cronograma de atividades, o qual serviu de roteiro no desenvolvimento da oficina. Temos um total de vinte atividades que foram divididas em cinco etapas, na sexta etapa tivemos a apresentação dos alunos sobre o ensino-aprendizagem de função e a participação do Prof. Dr. Silvanio de Andrade.

Evidenciamos no quadro abaixo, o conteúdo que foi trabalhado em cada atividade, bem como as ideias essenciais para o desenvolvimento do conceito de função presentes em cada atividade, que são: conceito de função (CF), representações de função (RF), covariação e taxa de variação (CTV), famílias de função (FF) e combinação e transformação de funções (CTF). Destacamos também, quais atividades foram trabalhadas com o auxilio do GeoGebra.

Quadro 2: Cronograma de atividades da oficina

| Etapas | Atividades | Conteúdo | Ideias essenciais |
|---|---|---|---|
| 1ª | Conhecendo o GeoGebra. | - | - |
| | Atividade 1 | Noção intuitiva de função | CF, RF e CTV |
| | Atividade 2 | Aplicações da derivada – velocidade e aceleração | CF, RF, CTV e FF |
| | Atividade 3 | Função afim | CF, RF e CTV |
| | Atividade 4 (verificação no GeoGebra) | Função derivada | CF, RF, CTV e FF |
| 2ª | Atividade 5 | Noção intuitiva de função | CF, RF e CTV |
| | Atividade 6 | Função afim | CF, RF e CTV |
| | Atividade 7 | Máximo ou mínimo da função quadrática | CF, RF e CTV |
| | Atividade 8(verificação no GeoGebra) | Limite de uma função quando a variável tende ao infinito | CF, RF e CTV |
| | Atividade 9 (verificação no | Função afim | CF, RF e CTV |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | GeoGebra) | | |
| 3ª | Atividade 10 | Máximo ou mínimo da função quadrática | CF, RF e CTV |
| | Atividade 11 | Aplicações da derivada – taxa de variação | CF, RF, CTV e FF |
| | Atividade 12 | Função afim | CF, RF e CTV |
| 4ª | Atividade 13 | Gráfico da função afim | CF, RF e CTV |
| | Atividade 14 (verificação no Geogebra) | Crescimento e decrescimento de uma função quadrática | CF, RF e CTV |
| | Atividade 15 | Estudo do sinal da função afim | CF, RF e CTV |
| | Atividade 16 | Volume de um sólido obtido pela rotação em torno do eixo x | CF, RF, CTV e FF |
| 5ª | Atividade 17(verificação no GeoGebra) | Funções crescentes e decrescentes | CF, RF, CTV e FF |
| | Atividade 18 | Aplicações da derivada – taxa de variação | CF, RF, CTV e FF |
| | Atividade 19 | Crescimento e decrescimento de uma função quadrática | CF, RF e CTV |
| | Atividade 20 | Volume de um sólido obtido pela rotação em torno do eixo y | CF, RF, CTV e FF |
| 6ª | Apresentação dos participantes sobre o ensino-aprendizagem de função. | - | - |
| | Mesa redonda sobre a pesquisa em Educação Matemática e o ensino-aprendizagem de função. | - | - |

Fonte: Elaborado pelo autor.

É importante destacar que planejamos trabalhar em cada etapa apenas uma atividade com o auxilio do GeoGebra, tendo em vista que o foco de nossa pesquisa não é o uso de tecnologia, mas sim, o desenvolvimento de uma melhor compreensão do conceito e das representações de função a partir da metodologia de ensino-aprendizagem via resolução, proposição e exploração de problemas. Dessa forma, decidimos utilizar um software de matemática dinâmica em algumas atividades, porque ao se falar em gráficos de função é de extrema importância citar o grande auxilio que a tecnologia oferece para visualização e exploração de conceitos matemáticos.

Portanto, o principal objetivo desta oficina, de um modo geral, é proporcionar aos alunos um ambiente diferente do que tradicionalmente estão acostumados, em que possam ser mais ativos e desenvolver suas habilidades, trabalhando o conceito e as representações de função de forma que adquiram uma melhor compreensão deste conceito.

No tópico seguinte apresentamos uma análise inicial das atividades trabalhadas na oficina.

### 4.3.3. As Atividades

A seguir, apresentamos uma análise inicial das atividades aplicadas na oficina, destacando o objetivo de cada atividade, o conteúdo trabalhado, bem como as ideias essenciais que trabalhamos com a atividade, além disso, tentamos antecipar as ações dos alunos ao explorarem estas atividades.

Atividade 1

**Objetivo:** trabalhar o conceito e as representações de função a partir de uma situação de fácil exploração para os alunos.

**Ideias essenciais:** conceito de função, representações de função e covariação e taxa de variação.

**Conteúdo:** noção intuitiva de função.

*Na cidade, um veículo de passeio consome um litro de gasolina a cada 9 quilômetros rodados.*

a) *Monte uma tabela mostrando a relação entre o número de litros de gasolina consumidos e a distância percorrida em quilômetros.*
b) *Faça um esboço gráfico dessa relação entre o número de litros de gasolina e quilômetros rodados.*
c) *Quantos litros de gasolina consumiu um veículo que rodou 121,5 quilômetros? E um que rodou 200 quilômetros?*
d) *Escreva uma expressão matemática que possa representar esta situação.*
e) *E se o veículo apresentasse um problema mecânico que o fizesse consumir um terço a mais do que consumia antes, quantos quilômetros ele poderia rodar com 3 litros de gasolina? E com 9 litros? E com 20 litros? E com 50 litros?*

(retirada e adaptada de IEZZI et. al., 2010, vol. 1, p. 45)

Esta atividade propõe uma situação simples do dia a dia, onde está presente o conceito de função. O objetivo desta atividade era levar os alunos a trabalharem o conceito de função a partir de uma situação de fácil exploração, observando as relações existentes e suas representações. Elaboramos uma sequência didática de itens a serem respondidos que guiaram os alunos na construção do conhecimento.

No enunciado da atividade temos na forma escrita uma das representações de função. O primeiro item da atividade propõe que os alunos construam uma tabela que relacione litros de gasolina consumidos e a distância percorrida, esperávamos que os alunos percebessem a relação existente na variação das grandezas e a representação da função em uma tabela. Em seguida, os alunos deveriam passar para outra representação de função que é o esboço do gráfico, o qual proporcionaria uma visão mais ampla do comportamento desta função.

No item seguinte, os alunos foram levados a explorar um pouco mais a situação, pois a partir de uma dada distância percorrida eles tiveram que encontrar quantos litros de gasolina foram gastos. Em seguida, a atividade pedia que escrevessem uma expressão matemática que representasse esta situação, que é a representação algébrica, esperávamos então, que após terem explorado nos outros itens a relação existente, encontrassem facilmente uma representação algébrica para relação. E por fim, é proposta uma exploração diferente da situação, para que os alunos agora utilizassem os conhecimentos adquiridos e resolvessem facilmente o problema proposto no ultimo item.

Esperávamos que os alunos não apresentassem nenhuma dificuldade quanto a montar uma tabela que representasse a situação em questão, e que percebessem a relação existente e quais grandezas estavam sendo evidenciadas. A tabela construída auxiliaria o esboço do gráfico. Também esperávamos que os alunos não tivessem dificuldades em encontrar uma expressão matemática que representasse a situação, e assim, depois de já terem adquirido conhecimento da situação, pudessem explorá-la de outras formas como indicado no ultimo item da atividade.

Com esta atividade trabalhamos o conceito de função, presente em todo o contexto da situação, as representações de função e a covariação e taxa de variação. A partir desta atividade, esperávamos que os alunos compreendessem com mais facilidade o conceito de função trabalhando com vários tipos de representações de função e observando a variação entre as grandezas.

Atividade 2

**Objetivo:** levar os alunos a trabalharem o conceito e as representações de função explorando a situação proposta, guiados pela sequência de itens presentes na atividade.

**Ideias essenciais:** conceito de função, representações de função, covariação e taxa de variação e famílias de função.

**Conteúdo:** aplicações da derivada no que diz respeito à velocidade e aceleração.

*No instante t = 0 um corpo inicia um movimento em linha reta. Sua posição no instante t é dada por* $s(t) = 16t - t^2$.

a) *Monte uma tabela que relacione a posição do corpo em determinados instantes.*
b) *Esboce o gráfico desta relação.*
c) *Qual a velocidade média do corpo no intervalo de tempo [2, 4]?*
d) *Calcule* $s'(t) = v(t)$.
e) *Qual a velocidade do corpo no instante t = 2?*
f) *Calcule a aceleração media no intervalo [0; 4];*
g) *Calcule* $s''(t) = a(t)$.
h) *Qual a aceleração no instante t = 4? E no instante t=6?*

(retirada e adaptada de FLEMMING, 2006, p. 242)

A partir desta atividade, tivemos o intuito de que os alunos explorassem o conceito de função presente em uma situação simples, e que compreendessem melhor o que estavam estudando a cada item respondido. No desenvolvimento da atividade, estivemos sempre buscando mediar e incentivar os alunos a explorarem os conceitos de forma que fornecessem subsídios necessários para que tivessem um aprendizado eficaz do conceito de função.

No enunciado da atividade é apresentada a situação e a sua representação algébrica. No primeiro item, os alunos deveriam montar uma tabela que relacionasse a posição do corpo em determinados instantes de tempo, esta tabela, que é outra representação da situação, auxiliaria os alunos no próximo item, que pedia o esboço do gráfico, o que resulta em outra forma de representar e analisar a situação proposta. No item seguinte, os alunos foram questionados sobre a velocidade média do corpo em um determinado intervalo de tempo, sabíamos que nesse momento os alunos poderiam apresentar algumas dúvidas com relação à forma de encontrar essa velocidade média, mas mediamos a situação para que os alunos refletissem sobre o item proposto e superassem tais dificuldades.

No quarto item, os alunos deveriam calcular a primeira derivada da função dada e encontrar a função que representava a velocidade do corpo, e então, no próximo item deveriam calcular a velocidade deste corpo para um determinado instante de tempo. Em seguida, foram questionados sobre a aceleração média do corpo em um determinado intervalo de tempo, esperávamos que ao responderem este item não surgissem mais dificuldades, levando em consideração o entendimento que adquiriram com relação a velocidade média.

Após, deveriam calcular a segunda derivada da função dada e encontrar a função que representava a aceleração do corpo. Por fim, foram questionados sobre a aceleração deste corpo em alguns instantes de tempo.

Dessa forma, esperávamos que a partir da exploração desta atividade os alunos adquirissem uma melhor compreensão principalmente do conceito e das representações de função, principais focos de nossa pesquisa, bem como das outras ideias essenciais do conceito de função evidenciadas nesta atividade, que são covariação e taxa de variação e famílias de função. Sendo assim, nosso principal intuito nesta atividade foi contribuir com o ensino-aprendizagem de função propondo aos alunos uma maneira diferente de trabalhar os conceitos, de forma que propiciasse uma melhor e mais eficaz compreensão do conteúdo estudado.

Atividade 3

**Objetivo:** trabalhar o conceito e as representações de função a partir de uma situação do cotidiano.

**Ideias essenciais:**conceito de função, representações de função e covariação e taxa de variação.

**Conteúdo:**função afim.

*Júlio resolveu fazer uma viagem em seu próprio veículo, a uma cidade distante 200 km. Seu automóvel se desloca a uma velocidade média de 120 km/h. Após iniciar sua viagem, Júlio percebeu que a cada 20 minutos seu carro havia percorrido 10 km a menos. Quanto tempo gastou para chegar a seu destino?*

a) *Monte uma tabela que relacione tempo e quilômetros percorridos.*
b) *Esboce o gráfico desta situação.*
c) *Qual a resposta para o enunciado da atividade?*
d) *Escreva uma expressão matemática que represente esta situação.*
e) *E se Júlio resolvesse seguir a diante para outra cidade, gastando mais 30 minutos, quantos quilômetros teria percorrido no total?*
f) *Se seu carro passasse agora a percorrer 15 km a menos, quanto tempo levaria para chegar a seu destino?*

(elaborada pelo autor)

A atividade apresenta uma situação simples em que está presente o conceito de função. A partir desta situação, tivemos o intuito de fazer com que os alunos explorassem o conceito e as representações de função observando a relação existente, trabalhando de forma a construir um conhecimento com mais compreensão. Para que os alunos construíssem seu conhecimento, elaboramos uma sequência didática que os guiou neste processo de ensino-aprendizagem.

O enunciado da atividade apresenta a situação em uma representação escrita. No primeiro item os alunos deveriam construir uma tabela que relacionasse tempo gasto e quilômetros percorridos, representando assim na forma tabular, onde começaram a se familiarizar com a relação existente. Em seguida, deveriam esboçar o gráfico a partir dos dados da tabela, passando então, para a representação gráfica da situação, após, deveriam encontrar a resposta para a pergunta do enunciado da atividade. Esperávamos que após a exploração dos primeiros itens, os alunos não tivessem dificuldades em encontrar essa resposta.

Após responderem a pergunta do enunciado, deveriam encontrar uma expressão matemática que representasse a situação, passando assim, para a representação algébrica. Em seguida, nos últimos itens, deveriam explorar a situação considerando outros aspectos, sendo assim, esperávamos que os alunos não sentissem dificuldades, pois já esperávamos que estivessem familiarizados com a situação, tendo conhecimentos necessários para tal exploração.

Portanto, ao explorarem esta atividade, os alunos trabalharam o conceito de função, as representações de função e a covariação e taxa de variação, ideias essenciais para o desenvolvimento do conceito de função. Sendo assim, esperávamos que os alunos tivessem uma melhor compreensão deste conceito tão importante para a matemática, e que posteriormente possam aplicar os conhecimento adquiridos em sua vida.

Atividade 4

**Objetivo:** trabalhar o conceito e as representações de funções a partir de uma sequência didática que guiará os alunos na construção de seu conhecimento e explorar também, as contribuições do software GeoGebra na verificação dos conceitos envolvidos.

**Ideias essenciais:** conceito de função, representações de funções, covariação e taxa de variação e famílias de funções.

**Conteúdo:** função derivada.

*Uma partícula se move sobre uma trajetória obedecendo à equação horária* $S(t) = 2t^3 + t + 1$ *(**S** dado em metros e **t** dado em segundos).*

a) *Derive a função horária.*
b) *Quais grandezas estão sendo relacionadas na função S'(t)?*
c) *Monte uma tabela que relacione essas grandezas.*
d) *Faça um esboço gráfico dessa relação entre a velocidade e o tempo gasto.*
e) *Qual a velocidade da partícula no instante de 2 segundos? E no instante de 5 segundos?*
f) *Derive a função S'(t).*
g) *Quais grandezas estão sendo relacionadas agora na função S''(t).*
h) *Agora monte outra tabela que relacione essas grandezas.*
i) *Esboce o gráfico dessa relação.*
j) *Qual a aceleração dessa partícula no instante de 3 segundos? E no instante de 10 segundos?*

*2ª parte da atividade 4*

k) *Agora no computador, utilizando o software GeoGebra, insira a função S(t) na caixa de entrada, substituindo a variável t por x.*
l) *No canto inferior direito clique em comando e escolha derivada, na caixa de entrada digite f.*
m) *O gráfico que aparece corresponde exatamente ao gráfico esboçado por você no item (d)? Explique.*
n) *Insira o ponto A (opção novo ponto, 2ª janela) sobre o gráfico de f' e o movimente (opção mover, 1ª janela) observando na janela algébrica os valores correspondentes da abscissa e ordenada. Você consegue encontrar valores correspondentes aos que estão na tabela construída por você no item (c)? Explique.*
o) *Use novamente o comando derivada e digite na caixa de entrada f'.*
p) *O gráfico que aparece corresponde exatamente ao que você esboçou no item (i)? Explique.*
q) *Insira o ponto B sobre o gráfico de f' e o movimente observando na janela algébrica os valores correspondentes da abscissa e ordenada. Você consegue encontrar valores correspondentes aos que estão na tabela construída por você no item (h)? Explique.*
r) *Que conclusões você chegou ao resolver a primeira parte desta atividade com lápis e papel e a segunda parte explorando no GeoGebra?*

(retirada e adaptada de DANTE, 2004, vol. 3, p. 267)

A partir dos itens existentes nesta atividade, elaboramos outros, construindo assim, uma sequência com o intuito de contribuir para que os alunos pudessem construir um conhecimento com mais compreensão sobre o conceito de função. Sendo assim, esta atividade teve como objetivo trabalhar as ideias essenciais do conceito de função de modo que contribuísse para um melhor entendimento do conceito e das representações de função.

Dividimos a atividade em duas partes para que em um primeiro momento os alunos trabalhassem apenas com lápis e papel utilizando seus conhecimentos e criando estratégias de resolução, e depois, no segundo momento, utilizassem o software GeoGebra para que pudessem verificar o trabalho que fizeram, observando as contribuições do uso da tecnologia no estudo de funções.

A atividade traz em seu enunciado a representação algébrica da situação, relacionando distância e tempo, esperávamos que os alunos percebessem facilmente esta relação. No primeiro item, os alunos deveriam derivar a função horária e encontrar uma nova relação, agora entre velocidade e tempo. Em seguida, eles deveriam identificar quais grandezas estavam envolvidas nesta nova relação, sabemos que neste momento poderiam surgir algumas dúvidas sobre estas grandezas, buscamos então, mediar para que os alunos superassem estas dificuldades.

Após identificarem as grandezas envolvidas, os alunos deveriam construir uma tabela que as relacionasse. Em seguida, deveriam fazer o esboço do gráfico desta situação, e então, explorar um pouco a situação, analisando a velocidade da partícula em determinados instantes de tempo. No item seguinte, os alunos deveriam derivar mais uma vez a função, e encontrar uma nova relação, entre aceleração e tempo. Novamente, deveriam identificar as grandezas envolvidas, montar uma tabela que as relacionasse e esboçar o gráfico. Por fim, deveriam analisar a aceleração desta partícula para determinados instantes de tempo.

A segunda parte desta atividade teve o intuito de levar os alunos a verificarem o trabalho feito por eles com o auxilio de um software de matemática dinâmica, explorando a situação de uma forma diferente. Ao final da segunda parte, questionamos os alunos sobre suas conclusões acerca da resolução da atividade com lápis e papel e com a exploração no GeoGebra. Esperávamos que eles comentassem sobre quais contribuições o uso da tecnologia poderia trazer para a verificação dos conceitos envolvidos.

Tivemos o intuito de, a partir desta atividade, fazer com que os alunos trabalhassem o conceito de função, as representações de função, a covariação e taxa de variação e algumas famílias de funções. Esperávamos que a cada item respondido eles construíssem seu conhecimento e compreendessem os conceitos envolvidos de forma mais significativa, e a partir daí, tivessem condições de explorar as atividades. Esperávamos também que os alunos percebessem facilmente que a partir de cada derivada surgem novas relações envolvendo outras grandezas e percebessem ao final da atividade, quais as contribuições do uso da tecnologia, principalmente na exploração de gráficos de funções.

Atividade 5

**Objetivo:** contribuir com ensino-aprendizagem de funções levando os alunos a trabalharem com o conceito e as representações de funções a partir de uma situação simples.

**Ideias essenciais:** conceito de função, as representações de funções e a covariação e taxa de variância.

**Conteúdo:** noção intuitiva de função.

*A tabela abaixo indica o custo de produção de certo número de peças para informática. Complete a tabela, relacionando o número de peças e o custo de produção.*

| *Número de peças* | *Custo (R$)* |
|---|---|
| *1* | |
| *2* | |
| | *3,60* |
| *4* | *4,80* |
| *10* | |
| *25* | |
| *40* | |
| *P* | |

*a) A cada número de peças corresponde um único valor em reais? Justifique.*

*b) Quais as grandezas envolvidas na situação? Elas variam?*

*c) Para cada peça produzida qual o custo de produção?*

*d) Qual o custo de produção de 200 peças? E de 325 peças?*

*e) É possível escrever uma expressão matemática para determinar qualquer valor que relacione o custo de produção C, com o número P de peças produzidas?*

*f) Represente graficamente esta situação.*

g) *Se fosse produzido outro tipo de peças que tivesse o custo de produção equivalente a três quartos do custo de produção das peças em questão, qual seria o custo de produção de 50 peças deste outro tipo? E de 125? E de 500 peças?*

(retirada e adaptada de DANTE, 2003, vol. 1, p. 38; BRANDÃO, 2014, p. 190)

Na atividade proposta por Brandão (2014), intitulada "Mistura de tinta e água", ele teve como objetivo fazer com que os alunos completassem a tabela, identificassem as grandezas envolvidas e tivessem contato com a noção de função. Além dos objetivos de Brandão (2014), o objetivo da atividade 5 que propomos, era fazer com que os alunos trabalhassem o conceito de função e percebessem a variação existente entre as grandezas envolvidas, e também trabalhassem com as representações de função, que muito contribuem para o entendimento da situação em questão.

Logo de inicio, a atividade traz uma das representações de função para a situação em questão, que é uma tabela, que esta incompleta e é pedido para que seja completada. Ao completar a tabela, esperávamos que os alunos percebessem a relação existente, quais grandezas estavam envolvidas e a variação que ocorre entre elas.

Ao responderem o primeiro item, os alunos estavam refletindo sobre a noção de função. Em seguida, eles deveriam identificar quais grandezas estavam envolvidas e se ocorria variação. No terceiro item, esperávamos que os alunos respondessem com muita facilidade, pois o preenchimento da tabela os auxiliaria neste item. Após, os alunos seriam levados a explorar um pouco mais a situação, identificando custos de produção que não estavam presentes na tabela.

A sequência de itens analisados pelos alunos deu subsídios necessários para que encontrassem uma expressão matemática para esta situação, ou seja, uma representação algébrica. Em seguida, os alunos deveriam esboçar o gráfico desta situação, o qual lhes auxiliaria na visualização do comportamento da função em questão. Ao final, é proposto aos alunos explorar um pouco mais a situação, analisando agora, o custo de produção de um novo tipo de peça que terá três quartos do custo de produção das peças já analisadas, dessa forma, os alunos foram levados a utilizar os conhecimentos adquiridos para resolver um novo problema.

A partir desta atividade, tivemos o objetivo de trabalhar as ideias essenciais: conceito de função, representações de função e covariação e taxa de variação. Esperávamos que esta atividade contribuísse para que os alunos tivessem uma melhor compreensão do conceito de função e das representações de função, como também, no que diz respeito a variação entre as grandezas presentes na situação.

Atividade 6

**Objetivo:** levar os alunos a desenvolverem um conhecimento com mais compreensão do conceito e das representações de função, a partir de uma situação de fácil entendimento.

**Ideias essenciais:** conceito de função, representações de função e covariação e taxa de variação.

**Conteúdo:** função afim.

*Um automóvel move-se em uma estrada plana e reta, e seu velocímetro marca, em todo trajeto, a velocidade de 60 km/h. Qual a relação entre o espaço percorrido e o tempo despendido?*

a) *Monte uma tabela relacionando espaço percorrido e tempo.*
b) *Esboce graficamente a situação*
c) *Qual sua resposta para a pergunta do enunciado da atividade?*
d) *Ao percorrer um espaço de 300 km, quanto tempo despendeu? E um espaço de 475 km?*
e) *Qual o espaço percorrido em 1 hora e 25 minutos? E em 2 horas e 45 minutos?*

(retirada e adaptada de CAMPITELI e CAMPITELI, 2006, p. 72)

A partir desta situação presente na atividade, tivemos o intuito de levar os alunos a desenvolverem o conceito e as representações de função com mais compreensão do que está sendo estudado, de forma que construíssem um conhecimento mais eficaz. É importante fazer com que os alunos explorem aplicações práticas do conteúdo, de forma que encontrem sentido no que estão estudando, portanto, esperávamos que os alunos, ao trabalharem com esta atividade não tivessem dificuldades e desenvolvessem um melhor entendimento do conceito de função.

Inicialmente, a atividade apresenta a situação em seu enunciado, na sua representação escrita. No primeiro item os alunos deveriam montar uma tabela a partir da relação existente, o que os auxiliaria no esboço do gráfico, pedido no próximo item. Até aqui os alunos passariam por mais duas representações de função, a tabular e a gráfica. Em seguida, deveriam encontrar uma resposta para a questão proposta no enunciado da atividade, após, analisar a situação para determinados espaços percorridos, e por fim, explorar a situação para determinadas quantidades de tempo.

Sendo assim, a partir desta atividade esperávamos fazer com que os alunos tivessem uma melhor compreensão do conceito e das representações de função, explorando tal conceito em uma situação simples do cotidiano, trabalhando também, as ideias essenciais que são o conceito de função, as representações de função e a covariação e taxa de variação. Dessa forma, esperávamos também, estar contribuindo para o ensino-aprendizagem de função, de forma que os alunos se tornem mais ativos e críticos neste processo.

Atividade 7

**Objetivo:** fazer com que os alunos tenham uma melhor compreensão do conceito e das representações de função a partir de uma situação de fácil exploração.

**Ideias essenciais:** conceito de função, representações de função e covariação e taxa de variação.

**Conteúdo:** valor máximo ou mínimo da função quadrática.

*Uma pessoa tem um rolo de tela com 20 metros de comprimento para construir um galinheiro retangular. Para um de cujos lados será aproveitada parte de um muro já existente. Dimensione esse galinheiro de modo a deixá-lo o mais espaçoso possível.*

a) *Esboce um desenho para a situação.*
b) *Monte uma tabela com alguns possíveis valores para os lados e a área obtida.*
c) *A partir dos dados obtidos na tabela, esboce o gráfico no plano cartesiano.*
d) *De acordo com a tabela e o gráfico é possível escrever uma expressão matemática que represente esta situação?*
e) *Quais as dimensões do galinheiro mais espaçoso?*
f) *E se fosse construir um galinheiro sem considerar um muro como um dos lados, quais seriam as dimensões do galinheiro mais espaçoso?*

(retirada e adaptada de CAMPITELI e CAMPITELI, 2006, p. 99)

Pretendíamos, com esta atividade, levar os alunos a explorarem o conceito de função de forma diferente da tradicional, de forma que desenvolvessem um melhor entendimento deste conceito, bem como de suas representações. Portanto, a partir de um contexto eles deveriam construir seu conhecimento guiados por uma sequência didática, de forma que participassem de maneira mais ativa no processo de ensino-aprendizagem do conceito de função.

Esta atividade apresenta em seu enunciado, uma situação em que está presente a noção de função em uma representação escrita. No primeiro item é pedido para que os alunos esbocem um desenho que represente a situação, com intuito de que eles começassem a se familiarizar com a situação e entendessem melhor o que estava sendo pedido na atividade. Em seguida, deveriam montar uma tabela com alguns valores de acordo com a relação que está definida na situação, o que iria ajudá-los no próximo item, que é o esboço do gráfico. Dessa forma, estariam trabalhando mais duas representações da situação, que é a tabular e a gráfica.

Continuando, os alunos deveriam analisar a tabela e o gráfico que construíram e encontrar uma expressão matemática que pudesse representar a situação, e assim, estariam trabalhando agora com a representação algébrica. Após, é retomado o que foi proposto no enunciado, em que os alunos deveriam encontrar as dimensões do galinheiro mais espaçoso de acordo com os aspectos a serem considerados na situação. E por fim, os alunos iriam explorar um pouco mais a atividade considerando agora outros critérios, esperávamos que eles não tivessem dificuldades nesta exploração, tendo em vista os conhecimentos que foram adquiridos ao longo da resolução da atividade.

Sendo assim, a partir desta atividade, tivemos o intuito de proporcionar aos alunos, uma melhor compreensão do conceito e das representações de função, trabalhando de uma forma diferente do que estavam acostumados, evidenciando também as ideias essenciais para o desenvolvimento do conceito de função, que são: conceito de função, representações de função e covariação e taxa de variação. Diante disso, esperávamos que os alunos desenvolvessem um conhecimento mais eficaz, com mais significado para eles, diferente da forma mecânica e procedimental que tradicionalmente é adotada e que não vem favorecendo o ensino de função.

Atividade 8

**Objetivo:** trabalhar o conceito e as representações de função a partir de uma situação concreta e também utilizar o software GeoGebra na exploração do gráfico da função proposta, para verificar alguns conceitos.

**Ideias essenciais:** conceito de função, representação de funções e covariação e taxa de variação.

**Conteúdo:** limite de uma função quando a variável tende ao infinito.

*Um determinado tipo de árvore cresce de acordo com a função:* $h(t) = \frac{24t+4}{t+2}$ *em que h representa a altura da árvore, em metros, e t o tempo, em anos, desde que foi plantada.*

*a) Monte uma tabela que relacione a altura da árvore a cada ano.*

*b) Esboce o gráfico dessa relação entre altura e anos.*

*c) Qual a altura da árvore quando foi plantada?*

*d) Quanto tempo leva para a árvore atingir 22 metros de altura?*

*e) Calcule o limite da função quando t tende ao infinito.*

*f) Qual a altura máxima que essa árvore pode atingir?*

*g) Que altura tem uma árvore que foi plantada há 86 anos?*

*2ª parte da atividade 8*

*h) Agora utilizando o GeoGebra, insira a função h(t) na caixa de entrada, substituindo h por f e t por x.*

*i) O gráfico que aparece corresponde ao esboçado por você no item (b)? Explique.*

*j) Reduza a janela geométrica (opção reduzir, 11ª janela) para ter uma visão mais ampla do gráfico. Que conclusões você chegou ao observar o gráfico?*

*k) Insira o ponto A (opção novo ponto, 2ª janela) sobre o gráfico de f e o movimente (opção mover, 1ª janela) observando na janela algébrica os valores correspondentes da abscissa e ordenada. Você consegue encontrar valores correspondentes aos que estão na tabela construída por você no item (c)? Explique.*

*l) Que conclusões você chegou ao utilizar o GeoGebra nesta atividade?*

(retirada e adaptada de GIOVANNI e BONJORNO, 2005, vol. 3, p. 234)

Na situação proposta na atividade 8, tivemos como foco fazer com que os alunos trabalhassem o conceito e as representações de função de forma a contribuir para que tivessem uma compreensão mais significativa do que estavam estudando. Dividimos a atividade em duas partes, para que os alunos no primeiro momento refletissem e criassem suas estratégias de resolução, e no segundo momento verificassem os conceitos no GeoGebra, de forma que percebessem como um software de matemática dinâmica pode auxiliá-los na exploração da atividade.

O enunciado da atividade apresenta a representação algébrica e indica a relação existente, bem como as grandezas envolvidas. No primeiro item, os alunos deveriam construir uma tabela relacionando a altura da árvore e anos, em seguida, deveriam esboçar o gráfico desta situação. Após, iriam descobrir a altura da árvore quando ela foi plantada, nesse momento poderiam surgir algumas dúvidas entre os alunos, mas esperávamos que rapidamente concluíssem que deviam calcular a altura da árvore quando não houve variação de tempo, ou seja, para t igual a zero.

Em seguida, os alunos deveriam descobrir qual a variação de tempo para que a árvore atingisse a altura de vinte e dois metros. No próximo item, era pedido que os alunos calculassem o limite da função dada quando o tempo tendia a infinito, e após, eram questionados sobre a altura máxima que a árvore podia atingir, ou seja, qual o limite de altura máxima que essa árvore poderia crescer. E por fim, os alunos iriam calcular a altura de uma árvore que foi plantada há oitenta e seis anos.

Nos itens que vão do (h) ao (l), tivemos o intuito de fazer com que os alunos utilizassem o software GeoGebra para explorar a situação de forma mais dinâmica e fácil, verificando o trabalho que foi feito na primeira parte da atividade. Esperávamos que o software auxiliasse os alunos a superarem dúvidas que pudessem ter surgido na resolução da atividade, observar aspectos que não foram vistos na resolução da primeira parte e que percebessem as contribuições do GeoGebra na exploração do gráfico da função.

Dessa forma, com esta atividade, tivemos o intuito de trabalhar o conceito de função, as representações de função e a covariação e taxa de variação. Esperávamos que os alunos tivessem uma melhor compreensão dos conceitos envolvidos a medida que fossem respondendo cada item, e que não apresentassem maiores dificuldades no decorrer desta atividade.

Atividade 9

**Objetivo:** trabalhar o conceito e as representações de função a partir de uma situação concreta, fazendo com que os alunos tenham um melhor entendimento do conceito de função a partir da exploração dos itens propostos nesta atividade e também utilizar o software GeoGebra na exploração do gráfico da função.

**Ideias essenciais:** conceito de função, representações de função e covariação e taxa de variação.

**Conteúdo:** função afim.

*Em certo país, as pessoas maiores de 21 anos pagam um imposto progressivo sobre os rendimentos. Esse imposto corresponde a 10% sobre as primeiras 1.000 unidades monetárias recebidas e 20% sobre os ganhos que ultrapassam esse valor.*

*a) Monte uma tabela que relacione a renda em unidades monetárias e imposto a ser pago.*

*b) Uma pessoa com um rendimento de 500 unidades monetárias pagará quanto de imposto? E uma pessoa com 1500 unidades?*

*c) Nessas condições, indicando **i** para o valor do imposto e por **r** uma renda superior a 1.000, escreva uma forma geral para o cálculo do imposto.*

*d) Esboce o gráfico desta situação.*

*e) E se fosse cobrado um imposto de 30% pelos ganhos que ultrapassem 2.000 unidades, quanto pagará uma pessoa com uma renda de 2.300 unidades? E uma com 3.100 unidades?*

*2ª parte da atividade 9*

*f) Agora utilizando o Geogebra, insira na caixa de entrada a forma geral para o cálculo do imposto, escrita por você no item (c), lembrando de substituir a variável dependente por f e a independente por x.*

*g) O gráfico que aparece corresponde ao esboçado por você no item (d)? Explique.*

*h) O gráfico construído no GeoGebra representa fielmente a situação proposta nesta atividade? Explique.*

*i) Insira o ponto A (opção novo ponto, 2ª janela) sobre o gráfico de f e o movimente (opção mover, 1ª janela) observando na janela algébrica os valores correspondentes da abscissa e ordenada. Você consegue encontrar valores correspondentes aos que estão na tabela construída por você no item (c)? Explique.*

*j) O que você pode concluir sobre o uso do GeoGebra nesta atividade?*

(retirada e adaptada de NOGUTI, 2014, p. 152)

Na atividade proposta por Noguti (2014), ela relata que os alunos tiveram dúvidas ao responder a atividade, principalmente em relação ao esboço do gráfico, e destacaram que era muito dificil esboçar o gráfico desta situação, dessa forma, esperávamos que dúvidas semelhantes pudessem surgir em nossa atividade, mas buscamos mediar as dúvidas para que os alunos tivessem uma melhor compreensão dos conceitos envolvidos. Portanto, pensando nas dúvidas que pudessem surgir quanto ao gráfico da função, resolvemos utilizar o software GeoGebra em um segundo momento nesta atividade, para que os alunos pudessem explorar o gráfico e verificar aspectos, e a partir daí tirassem suas conclusões sobre a situação proposta.

O enunciado da atividade apresenta a representação escrita da relação existente entre a renda em unidades monetárias e o imposto a ser pago. No primeiro item, os alunos deveriam montar uma tabela que representasse esta relação, em seguida, eram questionados sobre o imposto a ser pago para determinadas rendas, sendo assim, pretendíamos a partir do item (b), fazer com que os alunos refletissem um pouco sobre algumas situações, como uma pessoa que tem uma renda de 500 unidades e uma pessoa que tem uma renda de 1500 unidades. Após, os alunos deveriam encontrar uma expressão matemática para esta situação, ou seja, uma representação algébrica, e então, deveriam esboçar o gráfico, passando assim, para representação gráfica.

No último item, os alunos iriam explorar a situação agora com outra porcentagem de imposto a partir de 2000 unidades monetárias, analisando situações com determinadas rendas que ultrapassavam esse número de unidades monetárias, dessa forma, buscamos levar os alunos a explorarem a situação de outras formas, tentando imaginar outros critérios para serem analisados.

Na segunda parte desta atividade, pretendíamos levar os alunos a explorarem a atividade no GeoGebra, verificando conceitos e explorando o gráfico da função. Esperávamos que com o auxilio do software os alunos pudessem superar dúvidas que tivessem surgido quanto a interpretação do gráfico, e pudessem tirar suas conclusões quanto a representação da situação proposta.

Portanto, pretendíamos com esta atividade fazer com que os alunos trabalhassem com o conceito de função, as representações de função e covariação e taxa de variação, de forma que refletissem sobre a situação proposta e a explorassem de outras formas, para que tivessem uma melhor compreensão sobre os conceitos envolvidos, e assim, construíssem seu próprio conhecimento.

Atividade 10

**Objetivo:** trabalhar o conceito e as representações de função, partindo de uma aplicação prática da noção de função, de forma que os alunos desenvolvam uma compreensão eficaz de tal conceito.

**Ideias essenciais:** conceito de função, representações de função e covariação e taxa de variação.

**Conteúdo:** valor máximo ou mínimo da função quadrática.

*Um fruticultor, no primeiro dia da colheita de sua safra anual, vende cada fruta por R$ 2,00. A partir daí o preço de cada fruta decresce R$ 0,02 por dia. Considere que esse fruticultor colheu 80 frutas no primeiro dia e a colheita aumenta uma fruta por dia.*

*a) Monte uma tabela relacionando o valor que as frutas serão vendidas e a quantidade de frutas.*

*b) Esboce o gráfico desta situação.*

*c) Qual o ganho do fruticultor no 5º dia de colheita? E no 9º dia? E no 11º dia?*

*d) Expresse o ganho do fruticultor com a venda das frutas como função do dia de colheita.*

*e) Qual o dia da colheita de maior ganho para o fruticultor?*

*f) Se não houvesse decrescimento do preço de cada fruta, qual seria o ganho do fruticultor no 6º dia? E no 8º dia?*

*g) Sem decrescimento de preço ainda estaria definida a mesma função? Comente.*

(retirada e adaptada de GIOVANNI e BONJORNO, 2005, vol. 1, p. 187)

Com esta atividade, esperávamos levar os alunos a trabalharem o conceito e as representações de função de forma diferente, de maneira que construíssem um conhecimento mais significativo que eles consigam utilizar em suas vidas. Sendo assim, elaboramos uma sequência de itens para guiar os alunos na construção do conhecimento, e assim, a cada item respondido eles tivessem uma melhor compreensão dos conceitos envolvidos.

Esta atividade apresenta a situação em seu enunciado, em uma representação escrita. A partir daí, no primeiro item, os alunos deveriam montar uma tabela com alguns valores para relação existente, e em seguida esboçar o gráfico, trabalhando assim, com duas representações de função, a tabular e a gráfica. Continuando, deveriam encontrar o ganho do fruticultor em determinados dias da colheita, e em seguida, deviam escrever uma expressão matemática que representasse a situação, ou seja, a representação algébrica.

A seguir, os alunos teriam que encontrar o dia da colheita em que o fruticultor teve o maior ganho, ou seja, deviam encontrar o valor máximo da função. Em seguida, os últimos itens tinham o intuito de fazer com que os alunos explorassem a situação de outras formas, considerando outros aspectos, mas esperávamos que eles não tivessem dificuldades nesse momento, pois ao longo da atividade deveriam ter adquirido conhecimentos necessários para isso.

Dessa forma, tivemos o intuito de proporcionar aos alunos um ambiente diferenciado do que tradicionalmente estavam acostumados, em que eles pudessem ser mais ativos e críticos, e assim, desenvolvessem um conhecimento com mais compreensão do conceito e das representações de função, trabalhando também com as ideias essenciais, que são o conceito de função, as representações de função e a covariação e taxa de variação. Portanto, esperávamos contribuir com o ensino-aprendizagem de função, fazendo com que os alunos tivessem um entendimento mais eficaz dos conceitos envolvidos.

Atividade 11

**Objetivo:** trabalhar o conceito e as representações de função a partir de uma situação simples, buscando assim, contribuir para um melhor entendimento do conceito de função por parte dos alunos.

**Ideias essenciais:** conceito de função, representações de função, covariação e taxa de variação e famílias de funções.

**Conteúdo:** aplicações da derivada explorando principalmente a taxa de variação.

*Sabemos que a área de um quadrado é em função de seu lado. Sendo assim:*

a) *Monte uma tabela que relacione o lado de um quadrado e sua área.*
b) *Esboce o gráfico desta situação.*
c) *Escreva uma expressão matemática que represente esta situação.*
d) *Qual a taxa de variação média da área de um quadrado em relação ao lado quando este varia de 2,5 m a 3 m?*
e) *Derive a função que representa esta situação.*
f) *Qual a taxa de variação da área em relação ao lado quando este mede 4 m?*

(retirada e adaptada de FLEMMING, 2006, p. 245)

A partir desta atividade, tivemos o intuito de levar os alunos a trabalharem o conceito de função de uma forma diferente da que estavam acostumados, procurando fazer com que construíssem um conhecimento mais significativo e tivessem uma compreensão mais clara dos conceitos estudados. Sendo assim, a cada item respondido os alunos eram levados a explorar conceitos que os auxiliariam na aquisição de subsídios para resolver a situação proposta.

A atividade traz em seu enunciado a representação escrita de uma função em que relaciona área e lado de um quadrado. No primeiro item, os alunos deveriam montar uma tabela que relacionasse as grandezas envolvidas na situação, a área e lado do quadrado, e dessa forma, estavam representando a situação de outra forma. Em seguida, passariam para outra representação, que era o esboço do gráfico, e então, deveriam encontrar uma expressão matemática para a situação, que é a representação algébrica.

No item seguinte, os alunos eram questionados sobre a taxa de variação média da área de um quadrado em relação ao lado quando há uma determinada variação, ou seja, deveriam calcular a taxa de variação das áreas em relação à taxa de variação dos lados. Acreditávamos que nesse momento poderiam surgir algumas dúvidas sobre como proceder para encontrar a taxa média de variação, mas buscamos mediar o caminhar dos alunos para que descobrissem os passos a serem seguidos.

Após, os alunos iriam derivar a função que representava esta situação, pois esta derivada será necessária no próximo item. E por fim, deveriam encontrar a taxa de variação da área em relação ao lado quando este mede 4 m, nesse momento deveriam utilizar a derivada encontrada no item anterior, mas sabíamos que os alunos poderiam ter algumas dúvidas quanto a este item, entretanto, buscamos levar os alunos a compreenderem os passos a serem seguidos.

Com esta atividade, tivemos o objetivo de trabalhar o conceito de função, as representações de função, a covariação e taxa de variação e famílias de funções. Esperávamos que os alunos superassem as dificuldades que pudessem surgir para responder os itens propostos. Esperávamos também que esta atividade contribuísse para que os alunos tivessem uma melhor compreensão dos conceitos envolvidos

Atividade 12

**Objetivo:** propor uma situação do cotidiano que envolve o conceito e as representações de funções, de forma que, a exploração de seus itens possa contribuir com o ensino-aprendizagem de função para que os alunos compreendam este conceito tão importante da Matemática.

**Ideias essenciais:** conceito de função, representações de função e covariação e taxa de variação.

**Conteúdo:** função afim.

*Nas estantes que faz, além dos R$30,00 pelo carreto de entrega, Luciano cobra R$8,00 por metro quadrado da madeira que efetivamente usa. Quanto cobrará por uma estante em que gastou x metros quadrados de madeira?*

*a) Quais as grandezas envolvidas nesta situação?*

*b) Monte um tabela que relacione metros quadrados de madeira utilizados e valor a ser pago.*

*c) Esboce um gráfico para esta situação.*

*d) Quanto seria cobrado por uma estante com 1 metro de altura e 4 prateleiras com 1 metro de comprimento, tendo largura de 40 cm?*

*e) Qual a sua resposta para pergunta do enunciado desta atividade?*

*f) E se uma pessoa A pedisse uma estante com 2 metros de altura e 5 prateleiras com 1 metro de comprimento, também com largura de 40 cm, quanto pagaria?*

*g) Se outra pessoa B pedisse uma estante com 1,50 metros de altura, 3 prateleiras com 1 metro de comprimento e largura de 40 cm, pagaria o mesmo valor que a pessoa A?Explique.*

(retirada e adaptada de NOGUTI, 2014, p. 98)

A partir da atividade proposta por Noguti (2014), elaboramos outros itens que se fizeram necessários para alcançar nossos objetivos, além disso, fizemos algumas adaptações na atividade para que esta definisse uma função, pois na atividade original a autora trabalhou com o conteúdo de equação do primeiro grau com duas incógnitas. Em sua pesquisa, Noguti (2014) afirma que os alunos tiveram dúvidas ao responder a atividade e que não conseguiam chegar a um raciocínio algébrico, por acreditarem que faltavam dados no enunciado, sendo necessário que a professora fizesse várias perguntas que mediassem o raciocínio dos alunos. Dessa forma, acreditávamos que em nossa atividade pudessem surgir algumas dificuldades também, que procuramos mediar para que os alunos construíssem seus conhecimentos.

Esta atividade traz uma situação do cotidiano, mostrando a relação entre metros quadrados de madeira utilizados e o valor a ser pago por estantes fabricadas. O enunciado da atividade traz uma determinada situação sobre a fabricação de estantes e pergunta o valor que será cobrado por determinada estante. No primeiro item da atividade, os alunos deviam identificar quais as grandezas envolvidas, e após, deveriam construir uma tabela que as relacionasse, e então, esboçar o gráfico desta situação, e dessa forma, estariam explorando outras representações da situação.

Após a análise dos quatro itens iniciais, os alunos deveriam responder a pergunta proposta pelo item seguinte, que apresenta um determinado tipo de estante com medidas definidas e pergunta o valor que será cobrado por ela, e eles teriam que descobrir quantos metros quadrados de madeira era preciso. Em seguida, os alunos deveriam responder a pergunta do enunciado da atividade, ou seja, deveriam encontrar uma expressão matemática que representasse esta situação. Os dois últimos itens propõem situações com tipos determinados de estantes e perguntam sobre o valor a ser pago por estas estantes e se nas duas situações seria pago o mesmo valor.

Nesta atividade, pretendíamos trabalhar o conceito de função, as representações de função e a covariação e taxa de variação. Sabíamos que poderiam surgir algumas dúvidas na interpretação da situação, mas esperávamos que os alunos conseguissem vencer as dificuldades e compreender os conceitos envolvidos a partir da exploração de cada item e de nossa mediação.

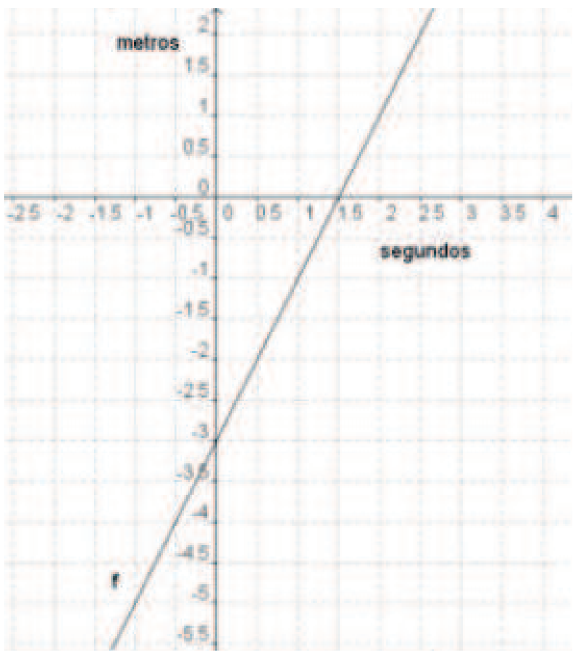
Atividade 13

**Objetivo:** desenvolver um conhecimento com mais compreensão do conceito e das representações de função partindo de uma situação de fácil exploração.

**Ideias essenciais:** conceito de função, representações de função e covariação e taxa de variação.

**Conteúdo:** gráfico da função afim.

*Um corpo se movimenta em velocidade constante de acordo com o gráfico abaixo, em que s indica a posição do corpo (em metros) no instante t (em segundos).*




a) *Monte uma tabela relacionando a posição do corpo em determinados instantes.*
b) *Qual a posição do corpo no instante de 5 segundos? E no instante de 9 segundos?*
c) *Quanto tempo é necessário para o corpo atingir a posição de 3 metros? E para a posição de 9 metros?*

*d) Escreva uma expressão matemática que represente esta situação.*
(retirada e adaptada de DANTE, 2003, vol. 1, p. 97)

Partindo desta atividade, buscamos desenvolver nos alunos uma melhor compreensão do conceito e das representações de função, de forma que eles fossem mais ativos no processo de ensino-aprendizagem, pensando de maneira mais critica sobre a situação proposta. Sendo assim, é de extrema importância dar ao aluno a oportunidade de construir seu próprio conhecimento, procurando oferecer a ele um ambiente diferente do tradicional, pois temos constatado que os métodos mecânicos, usados tradicionalmente não têm favorecido para que os alunos tenham um bom entendimento dos conceitos.

Inicialmente a atividade apresenta a situação, trazendo a sua representação gráfica. No primeiro item, os alunos deviam montar uma tabela a partir dos dados que eram visualizados no gráfico, assim, estariam se familiarizando com a relação existente e passando a situação para a representação tabular. Em seguida, iriam encontrar a posição para determinados instantes de tempo, e após, deveriam encontrar o tempo necessário para que o corpo atingisse determinadas posições. Por fim, deveriam encontrar uma expressão matemática que representasse a situação, ou seja, a representação algébrica da função. Acreditávamos que nesta atividade os alunos não teriam maiores dúvidas, pois é uma situação de simples exploração.

Portanto, esperávamos desenvolver nos alunos uma melhor compreensão do conceito e das representações de função, a partir de uma situação simples, evidenciando as ideias essenciais que são o conceito de função, as representações de função e covariação e taxa de variação. Sendo assim, é preciso buscar métodos que favoreçam o ensino-aprendizagem de função, pois sabemos da importância deste conceito para a Matemática e temos visto o quanto este ensino tem apresentado problemas em todos os níveis.

Atividade 14

**Objetivo:** levar os alunos a desenvolverem uma melhor compreensão do conceito e das representações de função, a partir de uma situação de fácil exploração, e para a verificação dos conceitos envolvidos foi utilizado o software Geogebra.

**Ideias essenciais:** conceito de função, as representações de função e a covariação e taxa de variação.

**Conteúdo:** crescimento e decrescimento de uma função quadrática.

*Uma empresa apresenta o lucro mensal de acordo com a equação $L = -t^2 + 25t$, onde t é a quantidade de toneladas vendidas mensalmente e L (lucro) é dado na proporção de 1 (um) por R$ 1.000,00 (um mil reais).*

a) *Monte uma tabela que relacione o lucro obtido e toneladas vendidas.*
b) *Esboce o gráfico dessa relação.*
c) *Qual o lucro da empresa ao vender 7 toneladas? E ao vender 12 toneladas?*
d) *Quantas toneladas devem ser vendidas para que a empresa tenha um lucro de R$ 150.000,00? E para um lucro de R$ 50.000,00?*
e) *Quanto maior for a venda mensal maior será o lucro? Comente.*
f) *Qual o maior lucro que essa empresa pode obter? Quantas toneladas devem ser vendidas para isso?*

*2ª parte da atividade 14*

g) *Agora utilizando o GeoGebra, insira a equação L na caixa de entrada, substituindo L por f(x) e t por x.*
h) *Reduza a janela geométrica (opção reduzir, 11ª janela) para ter uma visão mais ampla do gráfico.*
i) *O gráfico que aparece corresponde ao esboçado por você no item (b)? Explique.*
j) *Insira o ponto A (opção novo ponto, 2ª janela) sobre o gráfico de f e o movimente (opção mover, 1ª janela) observando na janela algébrica os valores correspondentes da abscissa e ordenada. Você consegue encontrar valores correspondentes aos que estão na tabela construída por você no item (a)? Explique.*
k) *Quais as vantagens do uso do GeoGebra nesta atividade?*

(retirada e adaptada de GIOVANNI e BONJORNO, 2005, vol. 1, p. 193)

Esperávamos, a partir desta atividade, que os alunos explorassem o conceito de função de uma forma diferente, com mais compreensão do que estava sendo estudado, e assim, pudessem pensar de maneira mais critica sobre a situação que estava sendo proposta. Portanto, os alunos resolveram a situação, guiados por uma sequência didática que os auxiliou na construção de um conhecimento com mais compreensão.

Esta atividade, traz inicialmente em seu enunciado, a apresentação da situação dentro de um contexto, ou seja, na representação escrita, e o enunciado apresenta também, a representação algébrica da situação. No primeiro item, os alunos deveriam montar uma tabela a partir da relação presente na situação, e em seguida, iriam esboçar o gráfico, fazendo uso assim, das representações tabular e gráfica. Após, deveriam encontrar o lucro da empresa para determinadas quantidades de toneladas vendidas, e em seguida, encontrariam a quantidade de toneladas vendidas para determinados lucros obtidos.

Continuando a resolução, nos próximos dois itens, os alunos foram levados a refletirem e analisarem a situação, sendo questionados sobre alguns aspectos como, quanto maior a venda, maior será o lucro? E deveriam encontrar o maior lucro que essa empresa podia ter e quantas toneladas a empresa devia vender para isso. Esperávamos que esta atividade desenvolvesse nos alunos um pensamento mais reflexivo e critico, que os levasse a tomadas de atitudes no processo de ensino-aprendizagem.

A segunda parte desta atividade teve o intuito de fazer com que os alunos verificassem o seu trabalho ao longo da resolução da situação, percebendo como um software de matemática dinâmica poderia contribuir na visualização e exploração de alguns conceitos.

Portanto, tivemos o objetivo de levar os alunos a trabalharem o conceito e as representações de função de maneira mais compreensível, tornando os alunos mais ativos e responsáveis pela construção do seu conhecimento, evidenciando também as ideias essenciais para o desenvolvimento do conceito de função que são o conceito de função, as representações de função e a covariação e taxa de variância. Sendo assim, é importante proporcionar aos alunos um ambiente diferente do tradicional, onde podem desenvolver suas habilidades com mais autonomia, e dessa forma, participem melhor do processo de ensino-aprendizagem.

Atividade 15

**Objetivo:** trabalhar o conceito e as representações de função a partir de uma situação de fácil exploração, buscando fazer com que os alunos tenham uma melhor compreensão deste conceito.

**Ideias essenciais:** conceito de função, representações de função e covariação e taxa de variação.

**Conteúdo:** estudo do sinal da função afim.

*Ana é dona de uma loja de roupas femininas, e na compra de um lote de blusas ela gastou R$ 500,00. Cada blusa deve ser vendida a R$ 25,00.*

a) *Monte uma tabela que relacione o lucro e o número de blusas vendidas.*
b) *Esboce o gráfico da situação.*
c) *Qual o valor obtido na venda de 30 blusas? E na venda de 45 blusas?*

d) *Escreva uma expressão matemática que represente esta situação.*
e) *Qual o número mínimo de blusas que devem ser vendidas para que Ana não tenha prejuízo?*
f) *Para qual número de blusas vendidas Ana não terá nem lucro nem prejuízo?*

(elaborada pelo autor)

A partir desta atividade, tivemos o intuito de levar os alunos a trabalharem o conceito e as representações de função de uma forma diferente do que estavam acostumados, sendo mais ativos e críticos no processo de ensino-aprendizagem, e dessa forma, construindo um conhecimento com mais compreensão dos conceitos envolvidos. Portanto, procuramos elaborar uma sequência didática que auxiliou os alunos na construção do conhecimento, pois a cada item respondido estavam trabalhando de forma autônoma, e assim, desenvolvendo uma melhor compreensão do conceito de função.

Em seu enunciado a atividade apresenta a situação proposta em uma representação escrita. No primeiro item, os alunos deveriam construir uma tabela para relacionar o lucro e o número de blusas vendidas, representando a situação de forma tabular, o que os auxiliaria na representação gráfica, no item seguinte. Após, os alunos deveriam encontrar o valor obtido na venda de determinados número de blusas vendidas, e em seguida, escrever uma expressão matemática que representasse está situação, ou seja, a representação algébrica.

Os dois últimos itens da atividade, tinham o intuito de levar os alunos a explorarem um pouco mais a situação, identificando para qual número de blusas não se teria lucro, ou não se teria lucro nem prejuízo, que na verdade é o estudo do sinal da função. Esperávamos que os alunos não apresentassem maiores dificuldades ao trabalhar na resolução desta atividade, e que compreendessem melhor os conceitos envolvidos.

Sendo assim, tivemos o objetivo de contribuir para o ensino-aprendizagem de função, fazendo com que os alunos assumissem uma postura diferente no processo de ensino-aprendizagem, tornando-se mais críticos e ativos diante dos problemas propostos, desenvolvendo assim, uma melhor compreensão do assunto estudado. Objetivávamos evidenciar também, as ideias essenciais: conceito de função, representações de função e covariação e taxa de variação. Portanto, esperávamos contribuir para que os alunos tivessem uma compreensão mais eficaz do conceito de função, conceito de extrema importância para o ensino de Matemática.

Atividade 16

**Objetivo:** levar os alunos a explorarem o conceito e as representações de função a partir da situação proposta, utilizando uma sequência didática que os guiou na construção do conhecimento.
**Ideias essenciais:** conceito de função, representações de função, covariação e taxa de variação e famílias de funções.
**Conteúdo:** aplicações da integral no que diz respeito ao volume de um sólido obtido pela rotação em torno do eixo x.

*Qual o volume do solido obtido pela rotação, em torno do eixo x, do conjunto de todos os pares (x, y) tais que* $\frac{1}{x} \leq y \leq x, 1 \leq x \leq 2$*?*

a) *Monte uma tabela que relacione alguns valores para* $y = x$ *e uma tabela que relacione alguns valores para* $y = \frac{1}{x}$.
b) *Esboce separadamente, o gráfico de cada função no plano cartesiano.*
c) *Chame de A1 a área delimitada por* $y = x$ *e A2 a área determinada por* $y = \frac{1}{x}$ *no intervalo dado.*
d) *Esboce os sólidos de volume V1 e V2, determinados pela rotação em torno do eixo x.*
e) *Qual o volume (V1) do solido determinado pela rotação, em torno do eixo x, da área A1? E o volume (V2) da área A2?*
f) *Calcule V=V2 – V1.*
g) *Esboce o sólido de volume V.*
h) *Qual a sua resposta para a pergunta do enunciado da atividade?*

(retirada e adaptada de GUIDORIZZI, 2001, vol. 1, p. 402)

A partir desta atividade, tivemos o intuito de contribuir com uma melhor compreensão do conceito de função, explorando uma atividade de maneira diferente do que os alunos estavam acostumados, pois esperávamos que ao responderem cada item, e com nossa mediação, compreendessem os conceitos estudados e adquirissem conhecimentos necessários para resolver o problema proposto na atividade. Sendo assim, é importante proporcionar aos alunos oportunidades para que possam eles mesmos construírem seu conhecimento de maneira mais compreensível.

O enunciado da atividade questiona sobre o volume de um sólido obtido pela rotação em torno do eixo x, apresentando também, as duas funções que definem a área que deve ser rotacionada e o intervalo que deve ser considerado. No primeiro item, os alunos deveriam montar uma tabela para alguns valores de cada função, isso os auxiliaria no próximo item, onde deviam esboçar graficamente cada uma das duas funções no plano cartesiano, esperávamos que até aqui não surgissem dúvidas. No item seguinte, os alunos deveriam apenas nomear as áreas delimitadas como A1 e A2, para facilitar a exploração da atividade, e em seguida, deveriam esboçar os sólidos determinados pela rotação de cada uma das áreas em torno do eixo x.

No item seguinte, os alunos eram questionados sobre o volume de cada um dos sólidos esboçados, sabíamos que poderiam surgir algumas dúvidas quanto ao cálculo desses volumes, mas mediamos a situação para que os alunos encontrassem os caminhos a serem seguidos. Após, deveriam calcular a diferença entre os volumes dos dois sólidos, esboçar o sólido que resultava desta diferença e concluir com a resposta para o enunciado da atividade. Sabíamos que no decorrer desta atividade poderiam surgir algumas dificuldades por parte dos alunos, pois de acordo com o relato de pesquisas, muitos são os problemas enfrentados por alunos nas disciplinas de Cálculo, problemas que na maioria das vezes estão ligados a compreensão dos conceitos. Portanto, buscamos fazer com que os alunos superassem tais dificuldades e compreendessem melhor os conceitos estudados.

Dessa forma, pretendíamos fazer com que os alunos tivessem uma melhor compreensão dos conceitos a partir da exploração desta atividade, buscando explorar o conceito de função, as representações de função, a covariação e a taxa de variação e algumas famílias de funções. Portanto, esperávamos que esta atividade contribuísse para que os alunos tivessem um melhor entendimento do conceito de função e das representações de função.

Atividade 17

**Objetivo:** trabalhar o conceito e as representações de função a partir da exploração de uma função de terceiro grau, para que os alunos trabalhem os conceitos de uma forma diferente, e que contribua para uma melhor compreensão, e também explorar o gráfico da função a partir do software GeoGebra.

**Ideias essenciais:** conceito de função, representações de função, covariação e taxa de variação e famílias de função.

**Conteúdo:** funções crescentes e decrescentes.

*Dada a função $f(x) = x^3 + 1$, quais os intervalos em que ela é crescente ou decrescente?*

*a) Calcule $f'(x)$.*

*b) Para quais valores de x temos $f'(x) > 0$ e $f'(x) < 0$ ?*

*c) Monte uma tabela com alguns valores do domínio e imagem desta função.*
*d) Esboce o gráfico da função.*
*e) Em qual intervalo f(x) é crescente.*
*f) Em qual intervalo f(x) é decrescente.*

*2ª parte da atividade 17*

*g) Agora no computador, utilizando o software GeoGebra, insira a função f(x) na caixa de entrada.*
*h) No canto inferior direito clique em comando e escolha derivada, na caixa de entrada digite f.*
*i) O gráfico que aparece corresponde ao gráfico esboçado por você no item (d)? Explique.*
*j) Insira o ponto A (opção novo ponto, 2ª janela) sobre o gráfico de f e o movimente (opção mover, 1ª janela) observando na janela algébrica os valores correspondentes da abscissa e ordenada. Você consegue encontrar valores correspondentes aos que estão na tabela construída por você no item (c)? Explique.*
*k) Que conclusões você chegou ao resolver a primeira parte desta atividade com lápis e papel e a segunda parte explorando no GeoGebra?*

(retirada e adaptada de FLEMMING, 2006, p. 268)

Nesta atividade, pretendíamos fazer com que os alunos explorassem os conceitos de forma diferente da que estavam acostumados, de maneira que, ao responder cada item eles compreendessem melhor os conceitos trabalhados e construíssem seu próprio conhecimento, e assim, tivessem um aprendizado bem mais eficaz do conteúdo de função. Esperávamos que ao utilizar o GeoGebra, os alunos percebessem como a tecnologia poderia auxiliar na exploração e verificação dos conceitos, facilitando a visualização de aspectos que muitas vezes são difíceis de serem observados com uso apenas de lápis e papel.

A atividade apresenta em seu enunciado uma função de terceiro grau em sua representação algébrica e questiona sobre quais intervalos em que ela é crescente ou decrescente. No primeiro item da atividade, os alunos deveriam calcular a derivada da função, e em seguida, observar para quais valores f' era maior ou menor do que zero, este procedimento foi importante para que os alunos observassem o crescimento ou decrescimento da função, mas sabíamos que poderiam surgir algumas dúvidas na compreensão deste conceito, dessa forma, buscamos nesse momento auxiliar os alunos para que conseguissem compreender bem o que estavam estudando.

No item seguinte, os alunos deveriam montar uma tabela que relacionasse alguns valores do domínio e imagem da função, além de estarem trabalhando com mais uma representação da função, esta tabela os auxiliaria na construção do gráfico, que era o próximo item, e assim, teriam a representação gráfica da função. Nos últimos itens, eles deveriam concluir em qual intervalo a função era crescente e em qual intervalo a função era decrescente.

A segunda parte da atividade teve o objetivo de fazer com que os alunos percebessem como o uso de um software de matemática dinâmica poderia auxiliar na interpretação de gráficos de funções. Esperávamos que eles relatassem suas observações quanto às contribuições do uso de tecnologia no ensino de funções.

Portanto, com esta atividade tivemos o intuito de levar os alunos a trabalharem o conceito de função a partir de uma sequência de itens que os auxiliou na construção do conhecimento, evidenciando, no decorrer da atividade, o conceito de função, as representações de função, a covariação e taxa de variação e algumas famílias de função, ideias essenciais do conceito de função. Sendo assim, esperávamos que o desenvolvimento desta atividade contribuísse para que os alunos tivessem uma melhor compreensão dos conceitos ao estudar o conteúdo de função.

Atividade 18

**Objetivo:** levar os alunos a compreenderem melhor o conceito e as representações de função a partir da exploração de uma situação do cotidiano.

**Ideias essenciais:** conceito de função, representações de função, covariação e taxa de variação e famílias de funções.

**Conteúdo:** aplicações da derivada no que diz respeito à taxa de variação.

*Uma cidade X é atingida por uma moléstia epidêmica. Os setores de saúde calculam que o número de pessoas atingidas pela moléstia depois de um tempo t (medido em dias a partir do primeiro dia da epidemia) é, aproximadamente, dado por $f(t) = 64t - \frac{t^3}{3}$:*

a) *Monte uma tabela relacionando o número de pessoas atingidas em alguns dias.*
b) *Esboce o gráfico desta situação.*
c) *Calcule $f'(t)$.*

*d) Qual a razão da expansão da epidemia no tempo t = 4?*

*e) Qual a razão da expansão da epidemia no tempo t = 8?*

*f) Quantas pessoas serão atingidas pela epidemia no 5º dia? E no 6º dia?*

(retirada e adaptada de FLEMMING, 2006, p. 246)

A partir desta atividade, propomos uma situação para que os alunos refletissem sobre a relação e os conceitos envolvidos, e que a medida que fossem explorando os itens, adquirissem uma melhor compreensão do que estavam estudando, pois é necessário utilizar metodologias que contribuam para um melhor aprendizado do conceito de função, conceito de extrema importância para a Matemática.

A atividade apresenta em seu enunciado uma situação que relaciona o número de pessoas atingidas por uma moléstia em certo tempo, que é representada por uma função em sua forma algébrica. O primeiro item da atividade pede que os alunos montem uma tabela com alguns valores dessa relação, e no próximo item deveriam construir o gráfico. Nesses dois primeiros itens os alunos estavam trabalhando com duas representações de função, a tabular e a gráfica, esperávamos que não surgissem dificuldades nesses itens. Em seguida, deveriam derivar a função, passo necessário para que pudessem responder os dois itens seguintes, que questionavam sobre a razão da expansão da epidemia em determinados dias, sabíamos que poderiam surgir algumas dúvidas nesses itens, no que diz respeito a forma de encontrar essas razões, buscamos então, auxiliar os alunos para que encontrassem o caminho a ser seguido nesse momento, e compreendessem os conceitos envolvidos.

No último item, os alunos deveriam encontrar o número de pessoas atingidas pela epidemia em determinados dias, nesse momento também poderiam surgir algumas dúvidas sobre como determinar esses números de pessoas, mas mediamos os passos dos alunos para que chegassem à conclusão de que deviam encontrar a diferença entre o número de pessoas atingidas até o dia considerado e o número de pessoas atingidas até o dia anterior. É importante destacar a importância da mediação do professor no momento que surgem as dúvidas, porque nesse momento é imprescindível que o professor leve o aluno a refletir sobre a situação para que ele mesmo descubra o que deve ser feito, pois é a partir dessas descobertas que o aluno irá ter um entendimento eficaz do conceito envolvido.

Portanto, nesta atividade tivemos o intuito de contribuir para o ensino-aprendizagem de função, propiciando aos alunos uma melhor compreensão dos conceitos estudados, e um melhor entendimento das ideias essenciais do conceito de função, que são: conceito de função, representações de função, covariação e taxa de variação e famílias de funções. Sendo assim, os alunos devem ser auxiliados para que tenham um bom aprendizado do conteúdo de funções, pois é um conhecimento de extrema importância para a Matemática e para a vida.

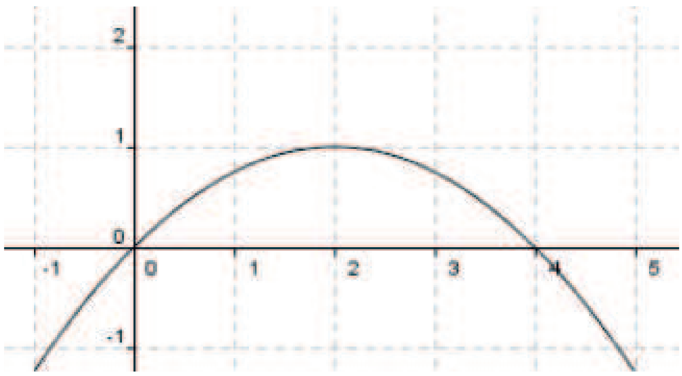
Atividade 19

**Objetivo:** fazer com que os alunos tenham uma melhor compreensão do conceito e das representações de função, a partir de uma situação de fácil exploração.

**Ideias essenciais:** conceito de função, representações de função e covariação e taxa de variação.

**Conteúdo:** crescimento e decrescimento de uma função quadrática.

*As trajetórias dos animais saltadores são, normalmente, parabólicas. O gráfico mostra o salto de uma rã representado em um sistema de coordenadas cartesianas. O alcance do salto é de 4 metros e a altura máxima atingida é de um metro.*




*a) Monte uma tabela que relacione a altura atingida e os metros alcançados.*

*b) Qual a altura atingida pela rã para 1,5 metro? E para 3,5 metros?*

*c) Quantos metros são alcançados quando a rã está a uma altura de 0,5 metros? E quando está a uma altura de 0,75 metros?*

*d) Escreva uma expressão matemática que represente a trajetória da rã.*

(retirada e adaptada de GIOVANNI e BONJORNO, 2005, vol. 1, p. 192)

A partir desta atividade, tivemos o intuito de desenvolver nos alunos uma melhor compreensão do conceito e das representações de função, a partir da resolução de uma situação simples, de forma que os alunos participassem do processo de ensino-aprendizagem de uma maneira diferente do que tradicionalmente estavam acostumados. Sendo assim, é preciso buscar métodos que possam auxiliar os alunos na aquisição do conhecimento, proporcionando oportunidades de favorecer a construção do conhecimento pelo próprio aluno, para que assim, tal conhecimento tenha mais sentido para eles.

A atividade apresenta de inicio, a situação em uma representação escrita, e traz também a representação gráfica. No primeiro item, é pedido que os alunos montem uma tabela que represente a relação existente, a partir dos dados observados no gráfico. Em seguida, deveriam encontrar a altura atingida pela rã para determinados valores em metros, e após, iriam encontrar a distância alcançada pela rã para determinadas alturas. Por fim, os alunos deviam escrever uma expressão matemática para a situação, ou seja, a representação algébrica da função. Acreditávamos que nesta atividade não fosse surgir dificuldades, tendo em vista o fato de ser uma situação simples.

Portanto, esperávamos com esta atividade, contribuir para que os alunos tivessem um bom entendimento do conceito e das representações de função, evidenciando também as ideias essenciais para o desenvolvimento do conceito de função presentes nesta atividade, que são: o conceito de função, as representações de função e a covariação e taxa de variação. Dessa forma, é importante destacar a necessidade de fazer com que nossos alunos tenham uma melhor compreensão do que estão estudando, para que possam aplicar tais conhecimentos em situações da sua vida, principalmente o conceito de função que está presente em diversas situações do cotidiano.

Atividade 20

**Objetivo:** trabalhar o conceito e as representações de função explorando uma atividade de forma diferente do que os alunos estão acostumados, seguindo uma sequência didática que os auxilie na compreensão dos conceitos envolvidos.

**Ideias essenciais:** conceito de função, as representações de função, a covariação e taxa de variação e as famílias de funções.

**Conteúdo:** aplicações da integral com relação ao volume de um sólido obtido pela rotação em torno do eixo y.

*Qual o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo y, do conjunto de todos os pares (x, y) tais que* $x^2 \leq y \leq 4, x \geq 0$*?*

a) *Monte uma tabela que relacione alguns valores para* $y = x^2$.
b) *Esboce graficamente no plano cartesiano as duas funções.*
c) *Esboce o sólido determinado pela rotação da área delimitada, em torno do eixo y?.*
d) *Qual a sua resposta para o enunciado da atividade?*
e) *Qual o volume do sólido para y=2? E para y=5?*

(retirada e adaptada de GUIDORIZZI, 2001, vol. 1, p. 408)

Com esta atividade, pretendíamos levar os alunos a explorarem uma aplicação da integral de forma diferente, trabalhando o conceito de função e as representações algébrica, tabular e gráfica. No decorrer da atividade, buscamos auxiliar os alunos para que refletissem sobre cada um dos passos que estavam dando e sobre os conceitos presentes, de forma que tudo isso proporcionasse uma melhor compreensão do conceito de função.

O enunciado da atividade questiona sobre o volume de um sólido obtido pela rotação de uma determinada área em torno do eixo y, apresenta as funções que delimitam a área que deve ser rotacionada e o intervalo a ser considerado. No primeiro item, os alunos deviam montar uma tabela com valores para uma das funções dadas, para outra função não é pedido a construção de tabela, pois ela é constante, esperávamos que os alunos não tivessem dificuldades no próximo item, em que deviam esboçar o gráfico das duas funções. Após, deveriam esboçar o sólido determinado pela rotação da área delimitada pelas funções, em torno do eixo y, e então, deviam encontrar o volume deste sólido, sabíamos que dúvidas poderiam surgir, mas estávamos mediando a situação para que as superassem.

No último item, os alunos iriam explorar a situação de outra forma, considerando agora outras funções constantes, que delimitavam sólidos maiores ou menores, esperávamos que neste item os alunos não tivessem dificuldades, tendo em vista a exploração dos itens anteriores que lhes forneceram subsídios necessários para tal exploração. De maneira geral, sabíamos que os alunos iriam apresentar algumas dúvidas no decorrer desta atividade que exigiram de nós as ações necessárias para que eles superassem tais dificuldades e alcançassem um melhor entendimento dos conceitos trabalhados.

Sendo assim, a partir desta atividade, tivemos o intuito de fazer com que os alunos compreendessem de forma mais eficaz o conceito de função, as representações de função, a covariação e taxa de variação e algumas famílias de funções, contribuindo assim, para aprendizagem deste conceito tão importante que é o conceito de função.

# CAPITULO 5 – DESCRIÇÕES E ANÁLISES DOS RESULTADOS

O quinto capitulo apresenta a análise dos questionários aplicados, destacando as dificuldades relatadas pelos alunos em relação ao ensino-aprendizagem de função, as compreensões essenciais que demonstram ter, bem como a importância que eles atribuem aos gráficos de funções. Buscamos relacionar os aspectos destacados pelos alunos com os dados evidenciados em algumas pesquisas, e a partir daí pudemos constatar alguns problemas no ensino-aprendizagem de função que são destacados nas pesquisas. Neste capitulo também apresentamos todo o desenvolvimento e análises da oficina de função, evidenciando as ideias essenciais trabalhadas em cada atividade e, principalmente, as contribuições da metodologia de ensino de matemática por meio da resolução, proposição e exploração de problemas para o entendimento do conceito e das representações de função.

## 5.1.Análise dos questionários aplicados

Diante da importância do conceito de função para a Matemática, e dos problemas que temos constatado em seu ensino-aprendizagem, é importante buscar formas de compreender e auxiliar as dificuldades de alunos no ensino-aprendizagem deste conceito, isso tanto no ensino básico quanto no ensino superior. Sendo assim, se faz de extrema importância, buscar formas de auxiliar nossos futuros professores de Matemática, pois é a partir deles que outros alunos começarão a ter contato com o conceito de função em sala de aula.

Várias pesquisas têm relatado os problemas relacionados ao ensino-aprendizagem de função em todos os níveis de escolaridade, como destacamos em nossa fundamentação, e muitas destas pesquisas buscam propor metodologias inovadoras para auxiliar alunos na compreensão deste conceito.

Portanto, em nossa pesquisa buscamos inicialmente identificar que compreensões essenciais e dificuldades os alunos de um curso de Licenciatura em Matemática demonstram ter em relação ao conceito e a representação gráfica de funções. Para isto, aplicamos um questionário (Apêndice A) com seis questões abertas, e a seguir faremos a análise das respostas dos alunos para cada questão.

É importante destacar as dificuldades que enfrentamos para aplicar este questionário, pois a universidade que pretendíamos aplicá-lo se encontrava em greve. A partir daí, tivemos a ideia de aplicar o questionário de forma digital. Entramos em contato com a coordenação do curso de Licenciatura em Matemática, e perguntamos se seria possível encaminhar o questionário para os alunos por e-mail, a coordenadora do curso prontamente se disponibilizou a encaminhar aos alunos juntamente com o nosso e-mail para que enviassem diretamente para nós.

Aguardamos algumas semanas o recebimento dos questionários respondidos, mas tivemos um retorno muito pequeno, apenas quatro alunos nos enviaram os questionários (Anexo A). Decidimos então, partir para outra universidade que havia encerrado a greve. A partir daí, buscamos informações com professores, em quais turmas poderíamos aplicar nosso questionário, e então, aplicamos em duas pequenas turmas, conseguindo apenas que oito alunos respondessem ao questionário (Anexo B).

Dessa forma, conseguimos um total de doze questionários respondidos por alunos que cursavam períodos do curso de Licenciatura em Matemática que vão do 3º ao 9º períodos, sendo apenas um aluno que havia concluído o curso.

Destacamos ainda, que ao elaborarmos a nossa oficina de função, concluímos que seria interessante identificar as compreensões e dificuldades também dos participantes da oficina. Portanto, aplicamos o questionário no inicio da primeira etapa, aos seis alunos que estavam presentes (Anexo B). Dessa forma, passamos para um total de dezoito questionários aplicados. É importante destacar também, que os alunos que participaram da oficina cursavam períodos compreendidos entre o 2º e o 9º.

A seguir, apresentamos a análise das respostas dos alunos ao questionário, onde buscamos destacar suas principais dificuldades em relação ao conteúdo de função, suas compreensões essenciais, bem como a importância que os alunos atribuem aos gráficos de função, dessa forma, buscamos relacionar os dados encontrados nos questionários, com o que dizem as pesquisas.

Questão 1

*Comente como foi sua experiência com o ensino de funções na universidade.*

Analisando as respostas dos alunos, podemos perceber que a experiência que alguns tiveram em relação ao conteúdo de funções foi marcada por algumas dificuldades. Alguns alunos destacam que parte dessas dificuldades estão relacionadas a lacunas deixadas pelo ensino básico, como previsto na análise inicial que fizemos do questionário.

*A8[3]: Minha experiência com o ensino de funções na universidade foi muito desafiadora, visto que no Ensino Médio este conteúdo foi visto de forma superficial.*

*A11: Inicialmente eu vi o assunto de funções na disciplina de Cálculo I, senti dificuldade por não ter aprendido realmente na escola (ensino médio) e acabou prejudicando nesta disciplina citada e em outras.*

Portanto, podemos constatar que parte das dificuldades apresentadas por alunos de graduação no ensino-aprendizagem de função, tem relação com lacunas deixadas pelo ensino básico, e tais dificuldades acabam prejudicando o desenvolvimento destes alunos no decorrer do curso, como afirma o aluno 11.

Segundo Costa (2008):

> [...] pesquisas mostram que as dificuldades do professor em relação a este conceito têm origem anterior à sua graduação e nesta nem sempre ele é aprofundado. Algumas destas dificuldades advêm dos obstáculos de natureza epistemológica que são inerentes ao conceito e devem ser transpostos na medida em que são aceitos e compreendidos. (COSTA, 2008, p. 10).

Dessa forma, parte das dificuldades enfrentadas por alunos de graduação no ensino-aprendizagem de função, tem sua origem ainda no ensino básico, e muitas vezes são mais agravadas durante o ensino superior. A partir daí, quando este aluno volta para sala de aula do ensino básico, agora como professor de matemática, acaba não contribuindo como deveria para o aprendizado de seus alunos.

Podemos identificar ainda, que as dificuldades também são causadas pelo impacto que os alunos sentem ao adentrar o ensino superior, pois passam a se deparar com conteúdos em um nível bem diferente do que estavam acostumados no ensino básico. Mesmo existindo em alguns cursos, as disciplinas de Matemática Básica para auxiliar os alunos que ingressam no curso de Licenciatura em Matemática, o aluno 3 destaca que sentiu dificuldades nos conteúdos, devido a deficiências trazidas do ensino básico. Já o aluno 15 comenta que sentiu dificuldades também pela forma que o professor apresentou o conteúdo.

*A3: Como aluno da disciplina MATEMÁTICA BÁSICA I, foi muito difícil devido às deficiências oriundas da educação básica trazidas comigo para o curso; Como aluno das disciplinas de CÁLCULO (DIFERENCIAL, INTEGRAL, VETORIAL, VÁRIAS VARIÁVEIS, ETC.) foi bem satisfatória uma vez que as dificuldades já haviam sido vencidas e tive excelentes professores as ministrando; Como aluno de ANÁLISE MATEMÁTICA, algumas dificuldades apareceram novamente devido ao rigor matemático que Análise exige. Contudo,*

---

[3]Os questionários respondidos foram numerados para facilitar a análise das respostas, dessa forma, A8 indica aluno 8.

*aprendi não só com respeito a funções, mas com respeito a matemática de modo geral que certos conteúdos exigem também um pouco de maturidade matemática assim como experiência com o conteúdo (no sentido de ler, reler, praticar, aprender).*

*A15: Minha experiência não foi muito interessante. Salvo engano, estudei funções em Matemática Básica I e em Educação Matemática e Sociologia. Sendo que, a primeira foi muito complicada devido a forma que o professor da disciplina ensinava o conteúdo, pois grande parte dos alunos vieram do ensino médio e não tiveram uma boa base para o ensino de funções, comprometendo o aprendizado. Já a segunda disciplina citada, foi mais agradável, pois vimos o assunto de função de forma aplicada, através de seminários em sala de aula. Tudo aplicado a assuntos do dia a dia.*

Percebemos ainda, que o rigor com que estes conteúdos são apresentados na universidade, acaba causando dificuldades também, pois muitas vezes os alunos aprendem apenas manipular procedimentos mecânicos que não favorecem uma boa compreensão dos conceitos.

*A1: Durante o 2° período, na cadeira de Cálculo I, revemos conceitos intuitivos de limite, por meio de definições preconcebidas de função e seu comportamento em gráficos, bem como aprofundar em questões de domínio (x) e imagem de uma função f(x), sobremaneira no tópico Teorema do Valor Intermediário.*

*A2: A principio eu tive um pouco de dificuldade, pois o conteúdo de funções era ministrado em um nível muito elevado do que o ensino médio.*

*A13: Eu considero que foi de forma mecânica, mais ou menos parecido com o ensino médio.*

Observamos que muitas vezes as dificuldades surgem a partir do momento que os alunos se deparam com os conteúdos no ensino superior, em um nível bem diferente do que estavam acostumados no ensino básico, como bem relatou o aluno 2.

É importante destacar que em meio aos problemas existentes no ensino-aprendizagem de função, existem alunos que tiveram uma boa experiência com este conteúdo, tendo um bom aprendizado, como relatam alguns alunos.

*A4: Foi uma boa experiência, pois foi feita uma revisão de todo esse conteúdo. Confesso que não tive dificuldade porque eu já tinha estudado por conta própria no ensino médio, foi proveitoso, pois tirei dúvidas a cerca desse conteúdo.*

*A7: A experiência foi muito proveitosa. Houve um esclarecimento mais amplo referente ao ensino de funções, proporcionando uma melhor aprendizagem e solucionando dúvidas existentes nos ensinos fundamentais e médios.*

*A9: O ensino de funções no ensino superior, para mim, foi de grande auxilio. Tive uma melhor compreensão do conteúdo.*

*A18: Na ocasião, foi uma experiência proveitosa; além de ter um bom domínio no conceito intuitivo de funções, vinha me aperfeiçoando nos estudos mais aprofundados de cálculo envolvendo função.*

De modo geral, de acordo com as respostas dadas a esta questão, podemos constatar que o ensino-aprendizagem de função tem apresentado alguns problemas que não contribuem para uma compreensão eficaz do conceito de função. Identificamos que as principais dificuldades destacadas estão relacionadas às lacunas deixadas pelo ensino básico, ao grande impacto que os alunos sentem ao adentrar no ensino superior e ao rigor com que o conteúdo de funções é abordado. Dessa forma, podemos confirmar alguns dos problemas existentes no ensino-aprendizagem de função, relatados em algumas pesquisas.

Segundo Costa (2008):

> Tanto no Ensino Médio quanto no Ensino Superior, avaliações institucionais e pesquisas apontam as dificuldades e falhas na aquisição deste tipo de conhecimento matemático. Tais resultados têm sido analisados sob vários aspectos. Alguns pesquisadores os justificam sob o ponto de vista cognitivo. Outros julgam que as dificuldades são de natureza didática. E há ainda os que defendem que as dificuldades encontradas são de natureza epistemológica. (COSTA, 2008, p. 1).

Sendo assim, percebemos que os alunos têm enfrentado muitos obstáculos no estudo do conteúdo de função, o que tem causado diversas dificuldades que impedem a compreensão deste conceito tão importante, diante disso, é importante buscar alternativas que modifiquem este cenário e que possam levar os alunos a uma compreensão mais eficaz do conceito de função.

Questão 2

*Quais as dificuldades que você encontrou ao estudar o conteúdo de funções?*

De acordo com as respostas, vemos que alguns alunos citaram a dificuldade de trabalhar com gráficos de funções, dessa forma, é importante destacar que as representações de funções são de fundamental importância no ensino-aprendizagem deste conteúdo, e devem ser bem exploradas para que os alunos tenham uma melhor compreensão dos conceitos envolvidos.

*A4: Os gráficos, pois eu não tinha habilidade de desenhar.*

*A7: As principais dificuldades foram encontrar aplicações que possamos fazer uso de funções e estudos dos comportamentos dos gráficos.*

*A9: Construção e interpretação de gráficos.*

*A16: Análise de gráfico, o reconhecimento de crescente/decrescente e construção de assíntotas foi realmente o que encontrei mais dificuldades.*

*A17: Inicialmente foi para analisar os gráficos.*

Sendo assim, vale ressaltar a importância de se explorar as representações de função, não só a gráfica, mas todas as outras, levando os alunos a explorarem uma função de várias formas, onde possam compreender melhor a relação existente. Portanto, de acordo com as respostas dos alunos, pudemos constatar que o trabalho com gráficos de função tem causado algumas dificuldades nos alunos, como afirmam algumas pesquisas.

Silva (2013) nos diz que:

> Os pesquisadores verificaram que a passagem da representação algébrica para a gráfica foi mais fácil que no sentido contrário. Eles apontam que isso acontece porque, na passagem da representação gráfica para a algébrica, as manipulações algébricas envolvidas são mais complicadas. Podemos concluir a partir desses resultados de pesquisa que a conversão gráfica para algébrica também vai exigir uma análise e interpretação do gráfico minuciosa para se chegar à forma algébrica. (SILVA, 2013, p. 28).

Os alunos também citam a dificuldade de identificar funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras, dificuldades em trabalhar com funções inversas e a composição de funções. Sendo assim, podemos destacar que tais conceitos são introduzidos no ensino médio, e no ensino superior são pré-requisitos necessários para o estudo de outros conceitos, mas o que podemos perceber é que os alunos não conseguem compreender bem esses conceitos no ensino básico, passam por um curso de licenciatura e ainda continuam com as mesmas dificuldades de compreensão. Isso é preocupante, pois estes alunos, futuros professores, irão para sala de aula e acabarão negligenciando a abordagem desses conceitos, ou mesmo apresentando de forma equivocada para seus alunos.

*A1: Identifiquei alguns obstáculos envolvendo gráficos de função e de uma não-função, sobretudo na cadeira de Básica I, além de não conseguir classificar as funções em sobrejetora, injetora ou bijetora (função inversa).*

*A3: A maior dificuldade foi encontrada no início do curso, uma vez que o meu conhecimento acerca de funções era insuficiente para obter êxito, isto é, bom rendimento na disciplina. Contudo, com respeito a uma característica de funções que tive certa dificuldade (a priori) foi a ideia de provar a sobrejetividade de certas funções.*

*A5: Eu senti muita dificuldade em encontrar o domínio das funções e algumas delas como exponencial e as trigonométricas de fazer o gráfico. Também achei difícil aprender a classificar em bijetora, sobrejetora e injetora, assim como estudar funções compostas.*

*A18: Relações entre máximo e mínimo, funções inversas e composição de funções foram as barreiras mais difíceis de lidar.*

Identificamos também que alguns alunos tiveram dificuldades no que diz respeito ao domínio, contradomínio e imagem de funções, isso demonstra que o conceito de função não foi bem apropriado por parte dos alunos, o que acaba causando dificuldades também em conteúdos posteriores.

*A8: Primeiramente, foi identificar quando uma equação era uma função. Além disso, encontrar o domínio e o contradomínio de uma função.*

*A10: Uma das principais dificuldades era associar o conteúdo de funções ao cotidiano, além disso, estabelecer o domínio, contradomínio e imagem, durante o ensino médio e fundamental.*

*A11: Eu não sabia identificar determinados domínios e nem as imagens das funções, ou quando o pontinho, referente aos intervalos, era aberto ou fechado. E como o gráfico iria se comportar para funções do tipo $f(x)=x^3$ ou quando tinha raízes.*

De acordo com Silva (2013):

> Efetivamente, existem alunos que sentem dificuldade de localizar pontos de coordenadas no gráfico, principalmente os pontos de coordenadas que passam pelos eixos das abscissas (0, x) e eixos das ordenadas (0, y) e muitos não identificam os conjuntos domínio e contradomínio por meio dos eixos dos x e dos y, respectivamente. Diante do exposto, há fortes indícios da existência de dificuldade atribuída ao conceito de função para muitos alunos em fazer conexão entre os componentes da definição verbal (domínio, contradomínio) de função e os componentes da representação gráfica (pré-imagem, imagem). (SILVA, 2013, p. 27).

Podemos perceber na resposta do aluno 8 a dificuldade em transitar de uma equação para uma função, dessa forma, fica evidente a dificuldade de compreender o conceito de função, e a partir daí, tal dificuldade pode comprometer o bom aprendizado do aluno. Diante disso, é importante destacar a necessidade de se buscar métodos que auxiliem alunos na compreensão deste conceito tão importante que é o conceito de função. Dessa forma, Silva

(2013) relata em sua pesquisa algumas dificuldades apresentadas por alunos, que comprometem a compreensão do conceito de função.

> Essas transições da Aritmética para Álgebra e da Álgebra das equações para a Álgebra das funções confundem os nossos alunos, de tal maneira que na nossa experiência docente no Ensino Médio podemos encontrar a mesma dificuldade de compreensão em relação à função, pois o sinal de (=) passa a adquirir um sentido ligeiramente diferente, não mais uma equivalência de expressão algébrica como na equação e sim como uma relação entre grandezas variáveis, ou seja, o (=) passa a significar *definido por.* (SILVA, 2013, p. 23).

Sendo assim, podemos constatar que as principais dificuldades relatadas são: a não compreensão do conceito de função e o trabalho com gráficos de funções. Dessa forma, as dificuldades encontradas estão de acordo com as principais dificuldades destacadas nas pesquisas que analisamos, e são as principais ideias essenciais que abordamos em nossa pesquisa. Percebemos então, a necessidade de se buscar alternativas que favoreçam o ensino-aprendizagem de função e que auxiliem alunos para que superem suas dificuldades, sendo assim, os alunos devem ser levados a construir seu próprio conhecimento, de maneira que tenham uma melhor compreensão dos conceitos que estão estudando.

Questão 3

*Fale um pouco sobre o que você considera ter aprendido do conteúdo de funções.*

Analisando as respostas, vemos que alguns alunos destacam que aprenderam sobre as famílias de funções, domínio, contradomínio e imagem. Percebemos então, que os alunos não dão muitos detalhes dos conceitos que aprenderam, mas podemos observar, de acordo com a resposta do aluno 3, que a forma em que o conteúdo de função foi apresentado a ele, consiste na forma tradicional, definição, exercícios, grande ênfase a representação algébrica, etc, como destacamos na análise inicial do questionário.

> *A1: Basicamente, aprendi – e apreendi – conceitos de função voltados ao diagrama que estabelece o domínio, o contradomínio e a imagem, além dos tipos de função estudada durante os anos iniciais do ensino médio (afim, quadrática, exponencial, logarítmica, modular, inversa, trigonométrica ou transcendentes). As aplicações contextuais também foram essenciais para melhor absorver todos os conceitos matemáticos que regem o conteúdo de função.*
>
> *A2: Eu aprendi o zero da função, os tipos de função e o domínio da função.*

*A3: Função, o seu conceito mais simples possível é uma relação de dependência entre duas grandezas quaisquer. Toma-se um elemento de um conjunto o qual é chamado de DOMÍNIO, e esse elemento será levado (via lei de formação) a UM ÚNICO elemento de um outro conjunto chamado de CONTRA-DOMÍNIO, em simbologia matemática: Sejam A, B conjuntos não vazios. Então uma função é uma aplicação*

$$f: A \to B$$
$$a \mapsto f(a) = b$$

*Onde A – domínio; B – contra-dominio e*

$$Im(f) = \{f(a) \in B\ ; a\ \in A\}$$

*Esse conjunto é chamado de Imagem.*

*As funções são divididas em várias classes de acordo com características especiais que cada uma apresenta. Irei listar algumas aqui sem definir rigorosamente para não tornar o depoimento longo e enfadonho: Funções Polinomiais, Funções Trigonométricas, Funções Periódicas, Funções Limitadas, Funções Mensuráveis, Funções Diferenciáveis, Funções Integráveis, Funções Lipschitzianas, Funções Contínuas, Funções uniformemente contínuas, etc.*

*A10: Funções monótonas, Domínio, contradomínio, imagem, Função Linear, Afim, polinomiais, exponencial, inversa, logarítmica, Classificação: injetiva e/ou sobrejetiva. Gráficos de funções.*

*A12: Os vários tipos de funções e a sua importância no nosso cotidiano.*

De acordo com as pesquisas analisadas, constatamos que a forma tradicional em que tem sido abordado o conteúdo de funções não tem favorecido o ensino aprendizado deste conteúdo, e são muitos os problemas encontrados neste cenário.

Segundo Coelho Costa (2004):

> Diversas pesquisas realizadas sobre a noção de função, em particular as pesquisas realizadas no ensino universitário, indicam que os estudantes sentem dificuldades em compreender as definições apresentadas sobre função. É nossa conjectura que os professores utilizam as abordagens apresentadas nos livros didáticos, podendo então ser um fator a interferir na aprendizagem a maneira como são apresentadas a introdução do conceito de função nos livros didáticos. (COELHO COSTA, 2004, p. 25).

Alguns alunos indicaram que aprenderam aplicações práticas, mas sabemos que grande parte dos conteúdos de função não são relacionados a situações práticas do dia a dia que poderiam auxiliar alunos na compreensão dos conceitos, como já destacamos, é dada muita atenção a manipulação da forma algébrica, o que acaba causando muitas dificuldades nos alunos.

*A4: As aplicações no dia a dia.*

*A6: Até o presente consigo perceber a grande possibilidade de contextualização, principalmente com a matemática financeira, que o estudo de função traz como facilitada do ensino*

*A7: O conceito de funções, as aplicações e as utilidades, foram assuntos importantes do conteúdo de funções que aprendi durante os estudos em tal conteúdo.*

*A13: Acho que foi mínimo e preciso me aprofundar mais. Aprendi em funções a exemplo do crescimento de uma bactéria, a conta de água e de energia se processa através do meu consumo e outros.*

*A15: Acredito que o que eu aprendi de funções, são através de aplicações na sociedade, principalmente quando relacionamos algo com outra coisa. Assim, temos esse algo em função ou em relação de outras qualquer.*

*A18: As aplicações de funções no dia-a-dia (a exemplo de exponencial, afim e trigonométrica) foram decisivas para que eu pudesse incorporar a aprendizagem na física e na biologia, por exemplo.*

Alguns alunos também destacam que aprenderam a construir os gráficos de funções e a identificar uma função, isso demonstra que os alunos consideram ter um bom entendimento do conceito de função e da representação gráfica de função. É importante destacar o fato dos alunos não citarem outras representações de função além da algébrica e gráfica, acreditamos que isso deve-se ao fato de outras representações não serem tão exploradas no ensino-aprendizagem de função.

*A5: Eu aprendi como representar as funções no gráfico, como identificá-las, como encontrar a inversa, como fazer estudo do sinal, como identificar seus elementos (domínio, imagem), dentre outros.*

*A8: Diante do conteúdo de "Funções" visto na minha vida acadêmica considero ter aprendido os seguintes tópicos: Identificação de uma função, Classificação das funções e a construção de gráficos.*

*A9: Podemos fazer representações tanto algébricas quanto gráficas de diversas situações do cotidiano.*

*A16: Formulação ou esboçamento do gráfico. Estudo do gráfico e algumas propriedades de muita relevância.*

Sendo assim, acreditamos que os alunos continuam sendo submetidos a uma abordagem tradicional do conteúdo de funções, seguindo sempre uma mesma sequência de procedimentos mecânicos, e portanto, estes futuros professores poderão acabar repetindo estas mesmas abordagens em suas salas de aula.

De acordo com Costa (2008):

> É fato que muitos professores, principalmente os iniciantes, lecionam com base em experiências adquiridas no período de sua formação básica, denotando assim que, apesar de alguns esforços, a graduação pouco acrescentou a este futuro professor. (COSTA, 2008, p. 9).

Portanto, é de extrema importância buscar formas de auxiliar nossos futuros professores de matemática para que tenham uma melhor compreensão do conceito de função, para que ao retornarem a sala de aula como professores não acabem cometendo erros de compreensão ou mesmo deixem de apresentar conceitos, devido a lacunas deixadas pela sua formação.

Questão 4

*Para você, o que é uma função?*

Nesta pergunta observamos então, que alguns alunos estão impregnados do formalismo ao qual foram submetidos, como havíamos previsto, pois suas respostas demonstram que eles buscam se aproximar da definição formal de função. Sendo assim, percebemos como estes alunos ainda não conseguiram se apropriar de uma compreensão significativa do conceito de função, pois foram muito influenciados pela forma em que foram apresentados a tal conceito.

> *A1: Dada uma terna (x,f(x),a → b), uma sentença matemática é dita função, quando se atribui cada valor de x associado a um único f(x) correspondente, para qualquer valor real que satisfaça as três condições acima estabelecidas.*
>
> *A4: É uma correspondência biunívoca que associa a cada elemento de um conjunto A algum elemento de um conjunto B.*
>
> *A5: Dados dois conjuntos $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$, $\forall x \in A$, se existe uma correspondência de x com um único $y \in B$, temos uma função de A em B.*
>
> *A8: Dados dois conjuntos A e B não-vazios, dizemos que uma função é uma correspondência biunívoca que relaciona cada elemento do conjunto A a um único elemento do conjunto B.*
>
> *A10: É uma relação entre dois conjuntos A e B, onde cada elemento do conjunto A está relacionado a um elemento do conjunto B. denominamos A de domínio, B de contradomínio e*

*o conjunto dos elementos de B, a qual os elementos de A estão relacionados, denominamos de Imagem.*

É importante destacar a importância de uma boa compreensão do conceito de função, pois este conceito é muito presente em diversas aplicações da Matemática, é fundamental que alunos se apropriem deste conhecimento, mas o que temos visto é que isto não tem ocorrido, há uma barreira muito grande entre os conteúdos que são ensinados e a real compreensão de seus conceitos.

De acordo com Costa (2008):

> [...] o que parece definido para os matemáticos ainda não se encontra amadurecido no cotidiano escolar, principalmente nas abordagens efetuadas pelo professor de Matemática. Então, como queremos que o nosso aluno, ao entrar em contato com o conceito de função, tenha a clareza necessária para manipular este novo objeto matemático? (COSTA, 2008, p. 8).

Sendo assim, como podemos esperar que os alunos tenham uma boa compreensão do conceito de função se os professores que devem transmitir tal conhecimento, ainda não se apropriaram deste conceito? Portanto, é necessário buscar formas de auxiliar nossos futuros professores de matemática no ensino-aprendizagem de função.

Alguns alunos buscaram explicar o que é uma função de maneira mais simples, demonstrando a forma que eles compreendem este conceito, podemos perceber que nesta forma mais simples de explicar está presente aspectos da definição formal de função, e em alguns casos encontramos explicações muito diretas. Além disso, vale destacar que em algumas respostas percebemos como o conceito de função ainda não foi bem compreendido pelos alunos, pois mesmo alguns alunos tentando explicar com suas palavras, acabam recaindo na essência da definição formal.

*A2: E uma relação entre dois conjuntos, que liga um elemento do conjunto a outro domínio, que denotamos a imagem da função.*

*A6: É uma relação entre dois elementos de um conjunto qualquer (ou numérico), em que um está relacionado com o outro de maneiras pré-determinadas.*

*A7: Uma função é uma ligação de um dado elemento <u>a</u> pertencente a um domínio que ocasionado em um outro elemento <u>b</u> chamado de elemento de imagem da função.*

*A9: Uma sentença na qual uma variável depende de outra ou de outras.*

*A11: É algo dependente em relação a uma variável, do tipo $f(x) = ax + b$, esta em função de x ou seja dependendo de x.*

*A12: Função em matemática é uma expressão que possui uma ou mais variável dependente(s) e uma ou mais independente(s) e pode ser de grau 1, 2, 3, 4,... etc, ou seja, uma variável em função.*

*A18: É uma relação que associa um termo a outro de tal forma que satisfaça à condição estabelecida: um único elemento para um único resultado.*

Portanto, percebemos que o formalismo dos conceitos continua muito presente no ensino aprendizado de funções, e que consequentemente, nossos futuros professores ao serem submetidos a este processo, poderão acabar por repetí-los em suas práticas. Sendo assim, se faz necessário buscar novos métodos que possam contribuir com uma melhor compreensão do conceito de função, não se pode deixar que o ensino de Matemática, de modo geral, seja apenas um processo mecânico e repetitivo, os alunos precisam ser levados a desenvolver um raciocínio critico das situações estudadas.

Questão 5

*Para você, qual a importância de estudar gráficos de funções?*

Os alunos destacam alguns pontos em que os gráficos de funções auxiliam a melhor compreensão de conceitos, entre eles: o comportamento de funções e os tipos de funções. Entretanto, os gráficos de funções que podem ser explorados para estudar muitos outros aspectos das funções, se bem explorados auxiliam na compreensão significativa de muitos conceitos que causam dificuldades nos alunos.

*A1: Analisar, além do comportamento da função, outras condições pelas quais a mesma é contínua, ou se é possível identificar se é uma função afim, quadrática, exponencial, logarítmica, modular, inversa, etc.*

*A2: Porque percebemos o comportamento da função através do gráfico se ele esta crescendo ou decrescendo.*

*A3: Essencial no seu estudo, pois nos auxilia geometricamente no que diz respeito a enxergar seu comportamento. É através do gráfico que podemos, inclusive fazer previsões acerca de resultados futuros, coisa que não é tão clara do ponto de vista algébrico.*

*A5: Estudar gráficos de funções é importante para analisar qual o comportamento da função e identificar melhor seus elementos: domínio, imagem. E fazer um melhor estudo do sinal.*

*A6: Após aprender a analisar pontos, linhas e figuras em um plano cartesiano, se faz importante analisar gráfico de funções, percebendo assim, sua continuidade ou não.*

*A7: Os gráficos ajudam a esclarecer de uma forma muito significativa as dúvidas por muitas vezes geradas com os cálculos das funções, no que diz respeito ao comportamento das funções e qual sua imagem.*

*A10: De extrema importância, pois facilita o entendimento do comportamento das funções, além de verificar visualmente propriedades especificas de cada tipo de função.*

*A11: É saber como o gráfico vai se comportar, se é uma reta ou parábola, ou dependendo da função assumir outras formas.*

De acordo com as respostas, observamos que os alunos não dão muitos detalhes dos conceitos que podemos estudar ao explorar a representação gráfica de função. Dessa forma, é importante destacar a importância da exploração, não só de gráficos de funções, mas de todas as representações de funções, pois cada uma das representações apresenta características importantes, dependendo da situação estudada.

De acordo com Costa (2008):

> O próprio aluno, conduzido ou não pelo professor, nos primeiros contatos com a definição, evoca imagens mentais que servirão de referência quando tal assunto for retomado. Neste contexto, o professor deverá ter claro que estas representações devem complementar-se na apresentação e no desenvolvimento do estudo de funções. (COSTA, 2008, p. 9).

Portanto, cabe ao professor levar os alunos a explorarem as várias representações de uma função, de modo que, contribua para o entendimento dos conceitos estudados.

Silva (2013) nos diz que:

> As pesquisas têm evidenciado que é mais fácil para os alunos lidarem com a representação gráfica de função do que com a forma algébrica. A razão disso é, provavelmente porque a representação gráfica é mais visual, favorecendo assim uma leitura e análise mais rápida de suas informações. (SILVA, 2013, p. 27).

Um aluno destaca a importância dos gráficos de função no auxilio da determinação do domínio, contradomínio e imagem, e assim, como destacamos na análise da questão dois, uma das dificuldades apresentadas por alunos é a identificação destes elementos em uma função, dessa forma, a representação gráfica, assim como as outras representações, também podem auxiliar os alunos no entendimento dos conceitos envolvidos.

*A8: O estudo de gráficos de funções é de fundamental importância para o aluno, pois é através da representação gráfica que ele vai identificar o domínio, contradomínio e imagem de uma função.*

Segundo Brandão (2014);

> Percebemos que, muitas vezes, o ensino de função na escola tem privilegiado as expressões algébricas em detrimento das outras representações, acarretando um ensino de procedimentos algorítmicos e não levando o aluno a compreender o conceito. Cada uma das representações é apenas uma maneira diferente de expressar funções, embora de grande importância, pois permite que o aluno desenvolva a compreensão completa desse importante conceito. (BRANDÃO, 2014, p. 39).

Sendo assim, como já havíamos destacado na análise inicial, constatamos que as representações de função não vêm sendo bem exploradas, normalmente é dada muita mais atenção a representação algébrica, o que causa muitas dificuldades nos alunos, pois as outras representações deveriam ser utilizadas para auxiliar os alunos na melhor compreensão de conceitos que muitas vezes a representação algébrica não permite sua visualização.

Questão 6

*Escreva sobre outros pontos do ensino de funções que você desejar.*

Como já havíamos previsto na análise inicial, alguns alunos não responderam esta questão. O aluno 2 destaca os conteúdos de funções que considera interessantes, que são: tipos de funções (famílias de funções) e a lei de formação de uma função. Mas, não dá mais detalhes dos conceitos envolvidos.

*A2: Os conteúdo interessantes que funções apresentam são: os tipos de funções, a lei de formação de uma função e etc.*

Um dos alunos sugere que deveriam ser utilizados softwares matemáticos para explorar gráficos de funções, o que contribuiria com uma melhor visualização por parte dos alunos. Realmente os recursos computacionais são ótimas ferramentas para trabalhar diversos conteúdos matemáticos, pois permitem que os alunos manipulem os objetos matemáticos e verifiquem conceitos e propriedades, entretanto sabemos que existem alguns empecilhos que impedem o uso de tais recursos, em alguns casos os próprios professores apresentam certa resistência em usá-los, e em outros casos estes recursos não estão disponíveis ou não estão em bom estado.

*A8: Utilização de softwares matemáticos para a construção de gráficos para uma melhor visualização dos alunos.*

Alguns alunos comentam sobre a importância do conceito de função e destacam que este assunto deve ser abordado de forma que chame mais a atenção dos alunos. De acordo com as respostas, percebemos a preocupação de alguns alunos em buscar apresentar o conteúdo de função de forma mais compreensível. O aluno 6 destaca que é preciso fazer com que os alunos tenham um melhor entendimento dos elementos envolvidos no estudo de função e uma melhor compreensão do conceito de função. Já o aluno 7 afirma que é necessário melhorar a qualidade do ensino de funções e instigar a curiosidade dos alunos desde o ensino fundamental.

*A5: Eu considero o ensino de funções importantíssimo principalmente no ensino básico, pois é um conteúdo essencial na graduação, onde muitos sentem dificuldades e acabam se prejudicando.*

*A6: Acredito em álgebra básica, precisamos esclarecer e familiarizar mais os alunos com os termos variável, incógnita, parâmetro e saber se uma equação pode ou não ser lei de formação de função!*

*A7: Um conteúdo muito importante que deve ser ensinado com uma melhor qualidade e de forma que chamem atenção e instiguem a curiosidade dos alunos, principalmente nas séries do ensino fundamental.*

*A11: É importante explicar bem sobre função exponencial, pois muitos alunos confundem esse gráfico desta função com gráfico de funções lineares.*

*A12: As Funções podem e devem ser ensinadas tanto de uma forma mais algébrica, como mais contextualizada.*

*A15: No estudo do ensino de funções, é um campo muito amplo. Prova disso, é que muitos professores passam por "cima" do conteúdo e aplicam poucas coisas sobre isso. Se bem que, ao relacionar o estudo de funções com a resolução de problemas em sala de aula, além de saber o conteúdo, o aluno poderá desenvolver o raciocínio lógico.*

*A18: Desde quando as funções adentraram às áreas do conhecimento das exatas (física, química, matemática e ciências correlatas), o ensino de tal conteúdo em sala de aula é um desafio incessante aos professores e futuros professores, quando da adoção de uma metodologia que dinamize o processo de ensino-aprendizagem. De tal forma que o aluno* *possa compreender os fenômenos que regem o universo matemático e histórico do qual a noção de função comunga.*

Silva (2013) nos diz que:

> [...] faz-se necessário criarmos em sala de aula um ambiente escolar que forneça possibilidades de colocar os alunos a se engajarem ativamente na resolução de problemas e de conscientizarem-se dos problemas que existem à nossa volta como, por exemplo, os problemas que envolvem temas sócio-político-culturais. (SILVA, 2013, p. 102).

De modo geral, constatamos de acordo com as respostas dadas ao questionário, que o ensino-aprendizagem de função apresenta alguns problemas, pois acreditamos que a abordagem dada ao conteúdo de função não tem favorecido uma boa compreensão de seus conceitos por parte dos alunos, acarretando assim, diversas dificuldades na compreensão do conceito. Portanto, nossa pesquisa procurou propor atividades sobre o conteúdo de função que fizessem os alunos refletirem e trabalharem de uma forma diferente com o conceito de função a partir da metodologia de ensino via resolução, proposição e exploração de problemas, a partir daí, esperamos que os alunos construam um conhecimento mais significativo e com uma maior compreensão do conceito e das representações de função.

A seguir apresentamos todo o desenvolvimento e análises da oficina de função proposta a graduandos de um curso de Licenciatura em Matemática.

## 5.2. Oficina de função: estudando o conceito e as representações de função por meio da resolução, proposição e exploração de problemas

A oficina foi realizada nos dias 9, 10, 11, 16, 17 e 18 de março de 2016, no horário das 13h00 às 18h00, e totalizou uma carga horária de 30 horas. Dos onze alunos inscritos, apenas seis compareceram no primeiro dia e a partir do segundo dia, estiveram presentes apenas cinco, os quais participaram até o final da oficina.

É importante destacar que todas as etapas da oficina foram desenvolvidas no laboratório de informática do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba (PPGECEM – UEPB), de modo que, os alunos se concentraram em uma mesa grande ao centro da sala, e quando a atividade exigia o uso do GeoGebra, as duplas se dirigiam aos computadores. Sendo assim, não enfrentamos nenhum tipo de dificuldade ao usar os recursos tecnológicos, pois utilizamos apenas três computadores, tendo em vista que participaram apenas seis alunos, os quais foram divididos em duplas.

Os computadores utilizados já possuíam o software GeoGebra instalado, fato que foi verificado por nós com antecedência.

Destacamos que o foco de nossa pesquisa não é o uso de tecnologia no ensino-aprendizagem de função, no entanto, se fez necessário citar este recurso em nossa pesquisa, pois ao se falar em gráfico de funções, temos a tecnologia como uma grande aliada na exploração e verificação de muitos conceitos.

Portanto, utilizamos o software GeoGebra na exploração de algumas atividades, de modo que os alunos pudessem verificar suas resoluções de forma mais rápida, e a partir desta verificação, buscamos identificar as contribuições do uso do software para a resolução e o entendimento das atividades em questão.

A seguir apresentamos as descrições e análises de cada etapa da oficina.

### 5.2.1. 1ª Etapa (09/03/2016)

No primeiro dia da oficina havia apenas seis alunos presentes, mesmo assim iniciamos a primeira etapa ainda com a esperança de que chegasse mais algum aluno. De inicio, fizemos nossa apresentação, falando de forma breve, sobre nossa trajetória como aluno de graduação até chegar ao mestrado.

Pedimos que os alunos se apresentassem e falassem um pouco sobre sua experiência com o ensino-aprendizagem de função. De modo geral, afirmaram ter tido uma boa experiência até então, mas alguns consideraram que precisavam conhecer mais do assunto.

Em seguida, falamos sobre nossa pesquisa, destacando alguns pontos da nossa fundamentação teórica, o nosso problema de pesquisa e o que algumas pesquisas relatavam sobre o ensino-aprendizagem de função.

Após, falamos sobre a programação da oficina, explicando o porquê da mudança na programação. Nesse momento, alguns alunos aproveitaram para falar sobre a dificuldade em ficar até o final do horário por morar em cidades distantes, dependendo de transporte público. Portanto, pedimos a esses alunos que participassem o máximo possível de cada etapa, e destacamos que entendíamos suas dificuldades, pois também já fomos alunos de graduação como eles. Avisamos também, que em cada etapa faríamos um intervalo de quinze minutos.

Depois de deixar tudo claro quanto ao desenvolvimento da oficina, pedimos aos alunos que respondessem ao questionário de nossa pesquisa, e estipulamos um tempo para que pudessem responder.

Então, iniciamos a programação da oficina, começando por uma breve apresentação do software GeoGebra. Primeiramente, perguntamos aos alunos se já conheciam o software. Alguns já conheciam, mas não tinham tanta habilidade com seus comandos. Portanto, fizemos uma breve apresentação dos comandos que seriam necessários em algumas atividades da oficina.

Perguntamos se algum dos alunos já havia trabalhado com resolução de problemas, mas alguns nos responderam que não e outros comentaram ter tido contato com a metodologia apenas de forma teórica em disciplinas do curso de Licenciatura em Matemática, no entanto, não deram maiores detalhes sobre a forma que tiveram contato com a resolução de problemas.

Antes de entregar a primeira atividade da oficina, algumas orientações foram dadas aos alunos. Explicamos que poderiam trabalhar as atividades em dupla ou individual, estariam à vontade para escolher. Pedimos que não apagassem nada de suas anotações, pois todas as suas produções seriam muito importantes para nossa pesquisa. Explicamos ainda, que cada aluno iria receber uma cópia da atividade, mas que seria necessário que apenas um aluno de cada dupla nos entregasse as suas anotações no fim da atividade.

Após os alunos formarem suas duplas, indicamos a ordem das duplas para facilitar a nossa análise, e pedimos que ao nos entregar as atividades indicassem por escrito o número da dupla. Destacamos também, que de forma alguma haveria identificação dos participantes em nossa pesquisa.

Como havia apenas seis alunos, foram formadas três duplas. Entregamos a atividade 1 de forma impressa para cada um dos alunos e disponibilizamos folhas para rascunho, e ainda reforçamos o pedido de que não apagassem suas anotações.

Nesta primeira etapa estavam programadas quatro atividades, mas devido ao tempo de apresentação inicial e o tempo decorrido nas primeiras atividades, foram aplicadas apenas três atividades.

Para melhor observar o trabalho realizado nesta primeira etapa, abaixo apresentamos um quadro com as atividades que foram trabalhadas, com seus respectivos conteúdos e ideias essenciais evidenciadas. Destacamos ainda, que a atividade 4, que não pôde ser aplicada na primeira etapa, foi aplicada na quinta etapa.

Quadro 3: Atividades trabalhadas na 1ª Etapa

| Atividade | Conteúdo | Ideias essenciais |
|---|---|---|
| Atividade 1 | Noção intuitiva de função | CF, RF e CTV |
| Atividade 2 | Aplicações da derivada – velocidade e aceleração | CF, RF, CTV e FF |
| Atividade 3 | Função afim | CF, RF e CTV |

Fonte: Elaborado pelo autor.

Atividade 1[4]

*Na cidade, um veículo de passeio consome um litro de gasolina a cada 9 quilômetros rodados.*

a) *Monte uma tabela mostrando a relação entre o número de litros de gasolina consumidos e a distância percorrida em quilômetros.*
b) *Faça um esboço gráfico dessa relação entre o número de litros de gasolina e quilômetros rodados.*
c) *Quantos litros de gasolina consumiu um veículo que rodou 121,5 quilômetros? E um que rodou 200 quilômetros?*
d) *Escreva uma expressão matemática que possa representar esta situação.*
e) *E se o veículo apresentasse um problema mecânico que o fizesse consumir um terço a mais do que consumia antes, quantos quilômetros ele poderia rodar com 3 litros de gasolina? E com 9 litros? E com 20 litros? E com 50 litros?*

O objetivo desta atividade era fazer com que os alunos trabalhassem o conceito e as representações de função a partir de uma situação de fácil exploração, e dessa forma, trabalhar as ideias essenciais para o desenvolvimento do conceito de função presentes na atividade, as quais: conceito de função, representações de função e covariação e taxa de variação.

Após distribuirmos a atividade, os alunos em silêncio leram a atividade, e a partir daí, observamos que começaram a resolver de forma individual, não havendo maiores discussões entre as duplas. Ao observamos cada dupla, nos pareceu estarem inibidos, pois a interação entre os alunos estava sendo pouca.

Destacamos que a primeira ideia essencial, conceito de função, estava presente em toda a atividade, e dessa forma, os alunos começaram a trabalhar esta ideia a partir do momento que leram o enunciado e procuraram refletir sobre a situação.

[4]Retirada e adaptada de IEZZI et. al., 2010, vol. 1, p. 45.

**Análise:**

Inicialmente, observamos que os alunos começaram a responder a atividade de forma individual, havendo pouquíssima discussão entre as duplas. Os alunos demonstraram de inicio, estarem um pouco inibidos, acreditamos que por não se conhecerem, e também por não estarem acostumados a trabalhar com a metodologia de ensino por meio da resolução de problemas.

Ao passar pelas duplas, observamos que a dupla 2 escreveu inicialmente uma expressão matemática para a situação, e a partir daí, passou a resolver os itens propostos na atividade. A dupla montou a tabela com alguns valores, esboçou o gráfico e encontrou os valores solicitados no item (c).

No entanto, observamos que a dupla 2 começou a levantar alguns questionamentos em relação ao item (d), pois um dos alunos queria saber se o item estava relacionado ao item anterior. Diante de suas dúvidas, a dupla 2 solicitou nossa presença e nos questionou:

*D2[5]: A D é em relação a C?*
*PP[6]: Você acha que é só em relação a C?*
*D2: É o mais próximo!*

Com o nosso questionamento queríamos fazer a dupla refletir sobre o que era solicitado no item (c) e sobre a situação proposta, de modo que compreendessem a relação existente.

É importante destacar que ao resolverem o item (d), os alunos já haviam trabalhado a quinta ideia essencial, representações de função, pois analisaram a situação nas representações escrita, tabular, gráfica e algébrica.

Assim, ao analisar a tabela com alguns valores, por exemplo, os alunos trabalharam também a segunda ideia essencial, covariação e taxa de variação, pois puderam observar a variação das grandezas na situação proposta.

**Análise:**

Observamos neste momento, que os alunos tendem a não perceber a relação entre as formas de se representar uma função, demonstrando

[5] Dupla 2.
[6] Professor Pesquisador.

dificuldades na compreensão do conceito de função, pois esta dupla já havia construído a tabela com alguns valores, construído o gráfico, encontrado os valores solicitados no item(c), mas ainda tiveram dúvidas se o item(d) estava relacionado apenas com o item(c).

É importante destacar também, que a dupla 2 já havia encontrado no inicio da atividade, a relação entre litros de gasolina consumida e quilômetros rodados, dessa forma, também percebemos que há uma grande tendência em buscar primeiro a expressão algébrica, para então responder a atividade. Portanto, destacamos que os alunos tendem a responder a atividade de forma não reflexiva, sem parar para pensar sobre o que estão executando, e dessa forma, muitas vezes não percebem as relações existentes entre os itens.

Após refletir melhor sobre o item (d) e a situação proposta, a dupla 2 escreveu no item (d) a mesma expressão matemática que havia escrito no inicio de sua resolução, e então nos chamou novamente:

*D2: Tá correto a expressão* $f(x) = 9x$ *?*

Não respondemos se estava correto ou não, mas questionamos a dupla buscando fazer com que refletissem e verificassem se sua resposta estava correta, encorajando-os a ter mais segurança em suas respostas.

**Análise**:

Percebemos então, que os alunos mesmo já estando no ensino superior, e sendo futuros professores, ainda insistem que o professor fale se suas respostas estão corretas ou não, demonstrando assim, insegurança em seu trabalho com as atividades. Esse fato demonstra que os alunos ainda carregam consigo características do ensino básico, buscando sempre a confirmação do professor quanto as suas respostas.

Tudo leva a crer que os alunos não tiveram nenhuma dificuldade em montar a tabela e esboçar o gráfico desta atividade, itens (a) e (b), os quais responderam rapidamente. No item (c) utilizaram regra de três para responder. Todos encontraram a expressão matemática para a situação. Mas o item (e) gerou muita discussão entre as duplas, pois ao procurar resolver este item, os alunos demonstraram entender de formas diferentes, e a partir daí, fizeram alguns comentários:

*D3: A letra E faz refletir mais.*

*D2: A E gera várias interpretações.*

*D1: Usei regra de três na E. A função não ajudou.*

Diante dos comentários e das diferentes formas que os alunos demonstraram ter interpretado o item, as duplas 1 e 2 buscaram encontrar uma expressão matemática para o item(e). Sendo assim, ao refletir sobre o item, a dupla 1 levanta o seguinte questionamento:

*D1: Um terço a mais de litro ou um terço a menos de quilômetros?*

Portanto, percebemos que a dupla estava com dúvidas quanto ao que deveria considerar, se um terço a mais de litros de gasolina, ou se um terço a menos de quilômetros rodados. A partir daí, os alunos fizeram algumas tentativas para verificar se seus pensamentos estavam corretos e continuaram discutindo sobre o item. Então a dupla 1 chegou a conclusão que um terço a menos de quilômetros rodados não seria válido para a situação.

*D1: Um terço a menos de quilômetros não funciona.*

*PP: Já pensaram em uma expressão para a letra E?*

*D2: Não conseguimos.*

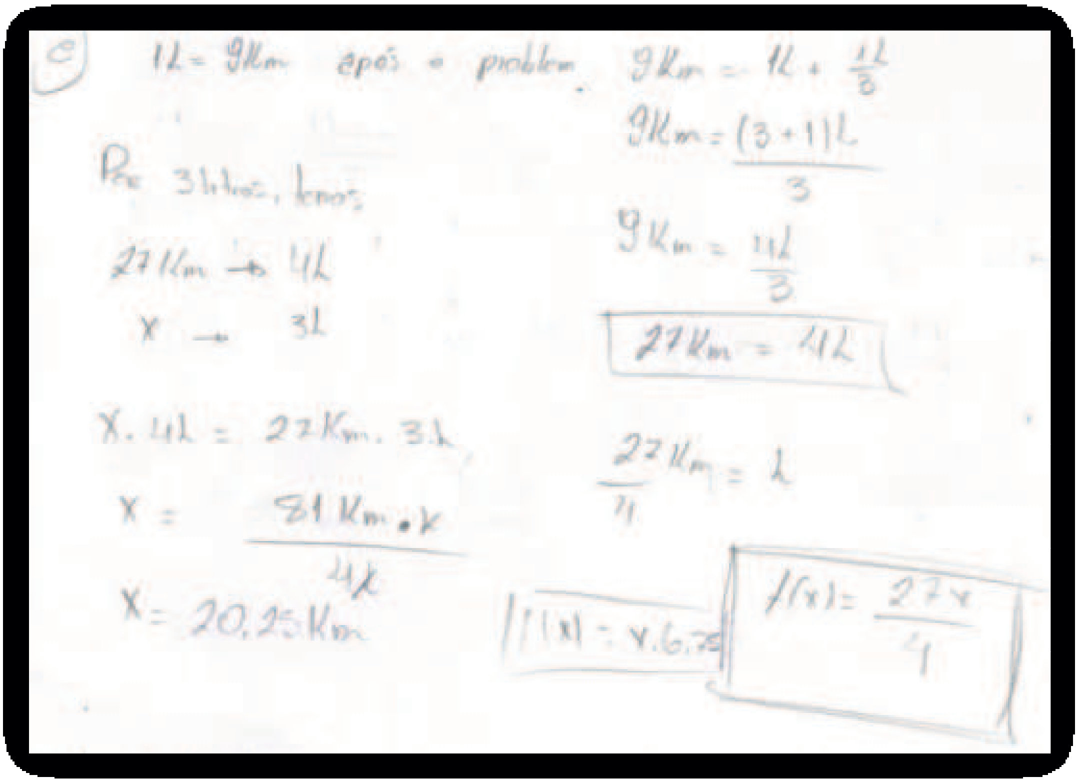
*PP: Os alunos no ensino básico, o que fariam?*

*D2: Desistiriam!*

Após verificarem que ao considerar um terço a menos de quilômetros não funcionaria, questionamos se os alunos haviam conseguido escrever uma expressão matemática que representasse a nova situação proposta no item (e), e também perguntamos como reagiriam os alunos do ensino básico diante de uma atividade como essa. A dupla 2 afirmou que os alunos do ensino básico desistiriam de resolver a atividade, diferente destes alunos participantes da oficina, que fizeram várias tentativas para resolver o item (e), o qual gerou diferentes interpretações.

No momento de nosso questionamento os alunos ainda não haviam conseguido uma expressão matemática, mas depois de mais algumas tentativas, resolveram o item (e) e a dupla 1 chegou a uma expressão matemática. Abaixo temos a resolução da dupla 1 para o item (e).

Figura 1: Resposta da dupla 1 referente ao item (e)




Fonte: Produções dos alunos.

Na resolução da dupla 1, observamos que partiram da relação verificada inicialmente na atividade, para encontrar uma nova relação, considerando agora um terço a mais de litros de gasolina. Ao encontrar a nova relação, a dupla utilizou regra de três para encontrar um dos valores solicitados no item (e).

A dupla 1 encontrou uma nova relação e a partir dela escreveu uma nova expressão matemática, mas não utilizou a nova expressão para responder o item, pois como observamos em sua resolução, usaram regra de três para isso. A dupla também não respondeu para os outros valores que eram solicitados no item (e).

Na resolução deste último item da atividade, pudemos perceber que os alunos não procuraram resolvê-lo da mesma forma que haviam resolvido os itens anteriores, pois em nenhum momento procuraram montar uma tabela, por exemplo, com alguns valores, para observar como seria o comportamento da nova situação em questão, e assim tirar algumas conclusões que auxiliassem na resolução do item. Sendo assim, observamos que os alunos resolveram o item (e) fazendo tentativas.

Portanto, ao concluírem a resolução desta atividade, os alunos escreveram o número de cada dupla em suas produções e nos entregaram. Enquanto recolhíamos as resoluções, os alunos comentaram sobre sua satisfação em ter trabalhado com este tipo de atividade, pois afirmaram ter percebido o conceito de função em toda a atividade.

**Análise**:

Na resposta da dupla 1, vemos que buscaram encontrar uma nova relação, e ao encontrar a igualdade $27km = 4L$, utilizaram regra de três para descobrir quantos quilômetros o carro iria rodar com 3 litros de gasolina. A dupla encontrou uma expressão matemática para a nova situação ($f(x) = x \cdot 6{,}75$), mas não utilizou-a para calcular os valores pedidos. A dupla não calculou para os outros valores pedidos no item (e).

Os alunos não utilizaram os conhecimentos adquiridos nos itens anteriores para resolver a situação proposta, resolveram por tentativa, ou seja, continuaram usando os procedimentos aos quais estavam acostumados. Dessa forma, Brandão (2014) comenta em sua pesquisa, que a partir de sua prática, percebeu que o ensino de função no Ensino Médio do Brasil continua seguindo um formato tradicional, o qual muitas vezes segue rigorosamente o que é proposto no livro didático.

A partir daí, podemos destacar que mesmo tendo analisado os itens anteriores, que sugeriam uma sequência didática para a resolução da situação, os alunos não procuraram refletir da mesma forma no item (e), partindo então, para procedimentos não reflexivos. Sendo assim, no último item não aconteceu o que esperávamos, pois os alunos demonstraram uma grande tendência em utilizar procedimentos aos quais estavam acostumados.

Portanto, nesta atividade parece não ter ocorrido maiores dificuldades na resolução da situação, entretanto, pudemos perceber algumas características decorrentes do ensino tradicional ao qual foram submetidos, como por exemplo, o fato de estarem sempre buscando a confirmação do professor em relação as suas respostas, e também a grande tendência em executar a resolução de forma um tanto não reflexiva.

Entretanto, pudemos perceber que os alunos tiveram uma melhor compreensão do conceito de função, de modo que, os próprios alunos ao final da atividade comentaram entre si sobre o modo como exploraram esta atividade, destacando a satisfação em ter percebido o conceito de função em toda a atividade.

Destacamos também, que o objetivo da atividade foi alcançado. Trabalhamos as ideias essenciais: conceito de função, representações de função e covariação e taxa de variação.

Após recolhermos a atividade 1 e as duplas terminarem seus comentários sobre a satisfação em ter trabalhado esta atividade, distribuímos a atividade 2.

Atividade 2[7]

*No instante t = 0 um corpo inicia um movimento em linha reta. Sua posição no instante t é dada por* $s(t) = 16t - t^2$.

a) *Monte uma tabela que relacione a posição do corpo em determinados instantes.*
b) *Esboce o gráfico desta relação.*
c) *Qual a velocidade media do corpo no intervalo de tempo [2, 4]?*
d) *Calcule* $s'(t) = v(t)$.
e) *Qual a velocidade do corpo no instante t = 2?*
f) *Calcule a aceleração media no intervalo [0; 4];*
g) *Calcule* $s''(t) = a(t)$.
h) *Qual a aceleração no instante t = 4? E no instante t=6?*

O objetivo da atividade 2 era levar os alunos a trabalhar o conceito e as representações de função a partir da exploração da situação proposta, guiados pela sequência de itens presentes na atividade. Além disso, tínhamos o intuito de trabalhar as ideias essenciais: conceito de função, representações de função, covariação e taxa de variação e famílias de função.

Portanto, assim como na atividade 1, nesta atividade os alunos começaram a trabalhar a primeira ideia essencial, conceito de função, a partir do momento que leram o enunciado, pois esta ideia estava presente em toda a atividade.

[7]Retirada e adaptada de FLEMMING, 2006, p. 242

Os alunos leram a atividade e começaram a responder, e a partir daí foi surgindo algumas discussões. Entre as discussões, surgiu a dúvida de como calcular velocidade média, no entanto, os próprios alunos trocaram seus conhecimentos, relembrando uns aos outros o que era necessário.

A dupla 2 demonstrou estar com dúvida quanto a posição da concavidade, então questionamos para fazer com que refletissem um pouco melhor sobre suas conclusões, pois observamos que a dupla não havia refletido sobre a expressão algébrica contida no enunciado da atividade, a qual fornecia as informações necessárias para sanar tal dúvida.Também sugerimos que atribuíssem valores maiores, no intuito de que analisassem melhor o comportamento do gráfico, porque também observamos que os valores que haviam atribuído a tabela não contribuiriam para uma visualização mais ampla do comportamento do gráfico.

*D2: Como é velocidade média?*

*D1: Delta da posição sobre o delta do tempo!*

*D1: Que velocidade é essa?*

*D3: Velocidade instantânea porque é no instante t!*

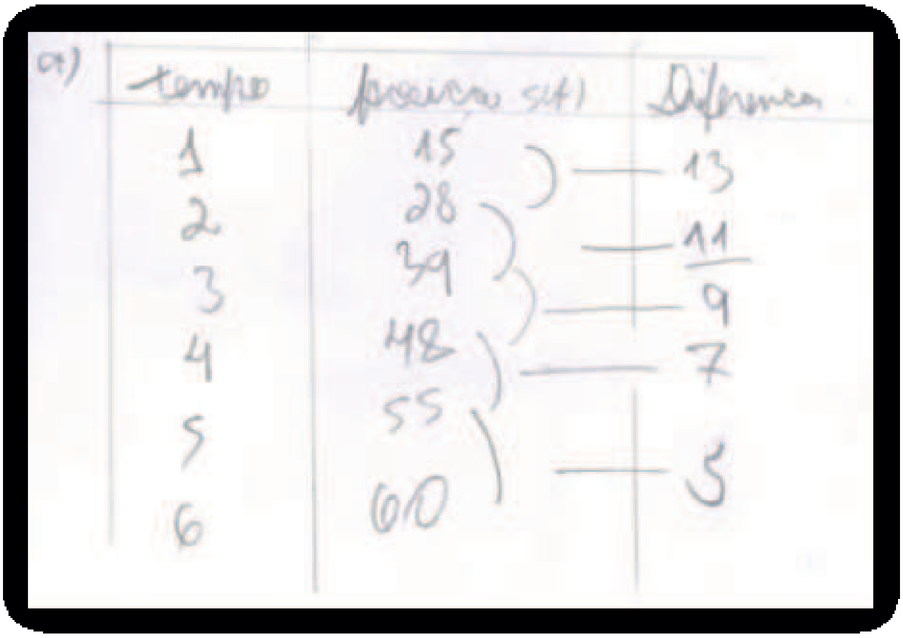
*D2: A concavidade fica para cima.*

*PP: Fica para cima mesmo? Atribua números maiores!*

*D2: Ah, entendi!*

Abaixo temos a tabela construída pela dupla 2.

Figura 2: Tabela construída pela dupla 2



a)

| tempo | posição s(t) | Diferença |
|---|---|---|
| 1 | 15 | 13 |
| 2 | 28 | 11 |
| 3 | 39 | 9 |
| 4 | 48 | 7 |
| 5 | 55 | 5 |
| 6 | 60 | |

Fonte: Produções dos alunos.

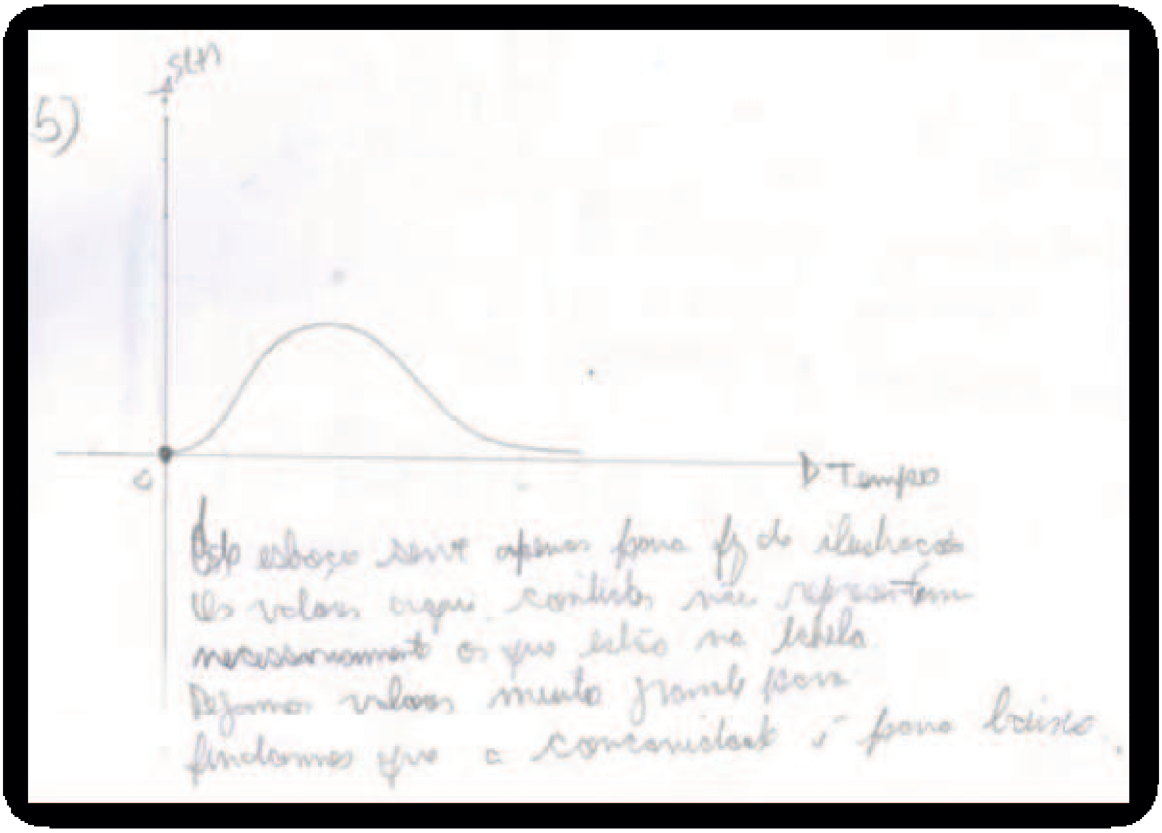
**Análise**:

Observamos que os alunos da dupla 2 não analisaram a expressão algébrica da função, a qual fornecia uma informação básica sobre a concavidade, o termo ao quadrado era negativo, o que indicava que a concavidade seria voltada para baixo.

Observamos também, que os alunos haviam atribuído na tabela, valores que não os ajudaram a perceber o comportamento do gráfico, ou seja, valores muito pequenos. Acreditamos que isso tenha ocorrido pelo fato dos alunos estarem acostumados desde o ensino básico, a atribuir sempre os mesmos valores quando é necessário esboçar o gráfico de uma função, sem refletir melhor ou analisar a variação dos dados obtidos.

Depois de nossos questionamentos, a dupla 2 demonstrou ter analisado melhor a situação, e a partir daí, esboçou o gráfico de forma correta. Destacamos que esta dupla procurou esboçar o gráfico da atividade de forma ilustrativa, sem evidenciar valores no plano cartesiano. Sendo assim, no gráfico abaixo, os próprios alunos evidenciaram este fato de forma escrita.

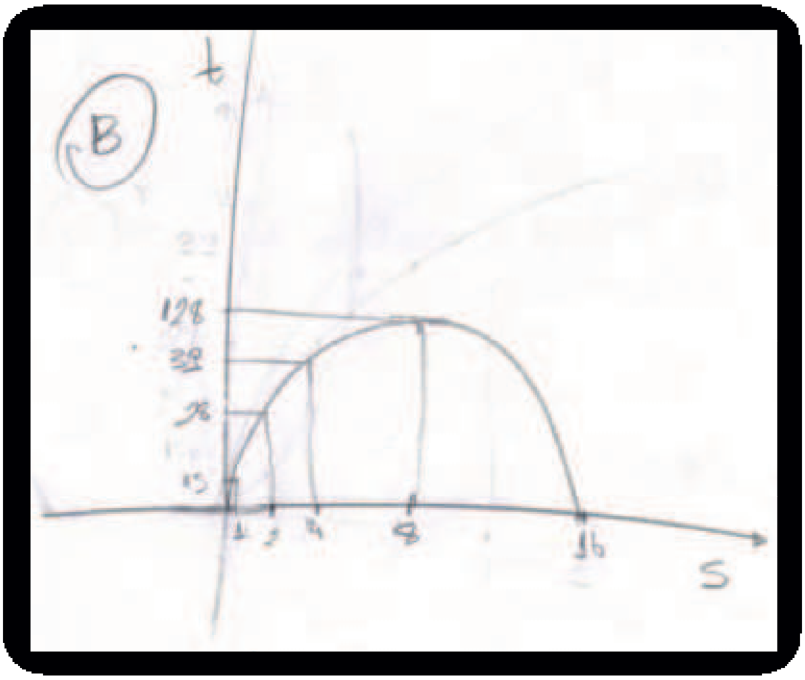
Figura 3: Esboço do gráfico feito pela dupla 2




Fonte: Produções dos alunos.

Ao passarmos pelas duplas, observamos que a dupla 1 havia construído apenas metade da concavidade, e voltada para cima, e discutiam entre si sobre o gráfico.Mas, a partir de suas discussões,analisaram com mais atenção e esboçaram o seguinte gráfico:

Figura 4: Gráfico construído pela dupla 1




Fonte: Produções dos alunos.

Neste momento da resolução da atividade, os alunos já haviam trabalhado a quinta ideia essencial, representações de função, pois tinham analisado a situação nas representações algébrica, tabular e gráfica.

Ao explorar a tabela e o gráfico da função em questão, os alunos puderam observar a variação das grandezas, e dessa forma, trabalharam a segunda ideia essencial, covariação e taxa de variação.

**Análise**:

Portanto, pudemos observar que os alunos construíram a tabela facilmente, mas surgiram algumas dúvidas quanto à construção do gráfico, pois não analisaram a representação algébrica, e também os valores atribuídos na tabela não contribuíram para uma melhor visualização do comportamento da função.

Observamos então, que os alunos tendem a não refletir sobre os dados presentes na atividade, e assim, constatamos mais uma vez que acabam executando seus procedimentos de resolução de forma não reflexiva, e isso acaba levando a uma má interpretação dos dados. Entretanto, com nossos questionamentos conseguimos mediá-los, e a partir daí, os alunos refletiram melhor sobre os itens, compreendendo melhor o conceito de função.

Passando pelas duplas, observamos que a dupla 2 teve dúvida em como resolver o item (h), pois no item anterior tinham encontrado a expressão matemática $a(t) = -2$. Diante da dúvida da dupla, perguntamos o que esta expressão significava, no intuito de fazê-los refletirem e interpretar suas resoluções para que percebessem que a aceleração era constante.

*D2: Como resolver H? $a(t)$ deu igual a $-2$ !*
*PP: O que isso significa?*

Nesta atividade, os alunos trabalharam também a terceira ideia essencial, famílias de função, pois exploraram uma função quadrática e uma função afim, que são duas das famílias mais estudadas no ensino médio.

**Análise**:

É importante destacar o fato de que os alunos resolvem a atividade, chegam aos resultados, mas muitas vezes não conseguem interpretar esses resultados. Observamos neste momento, que os alunos demoraram um pouco para perceber que a aceleração era constante e ficaram com dúvidas de como iriam resolver o item (h) da atividade. Percebemos também, certa insegurança que os alunos demonstram em suas respostas, pois no item (g), eles encontraram como resposta que a aceleração era constante, mas ao ler o item (h), tiveram dúvidas de como iriam responder.

Pudemos constatar que os alunos demonstraram muito interesse pelas atividades, pois ao final desta atividade discutiram sobre as atividades propostas, pensando como havia contribuído para uma melhor compreensão do conceito de função e como seria a utilização delas em suas práticas como futuros professores de matemática.

Entre suas discussões, afirmaram que a situação proposta na atividade 2 poderia gerar interdisciplinaridade, e também comentaram que a atividade exigiu deles mais conhecimento do assunto e mais atenção na resolução.

*D2: A situação pode gerar interdisciplinaridade.*

*D3: Exigiu mais conhecimento e atenção.*

Em suas discussões, os alunos também falaram sobre o ensino de matemática, destacando como o uso desse tipo de atividade poderia trazer boas contribuições para o ensino de matemática, pois levam o aluno a compreender melhor o conceito. Entretanto, eles admitiram que no dia a dia da sala de aula seria difícil utilizar essas atividades, pelo fato de exigir mais tempo para exploração, mas mesmo assim, afirmaram que seria muito bom utilizar a metodologia de resolução de problemas na sala de aula.

**Análise**:

Os alunos consideraram as atividades muito interessantes, e demonstraram ter ficado motivados, ao perceberem como a atividade tinha contribuído para uma melhor compreensão do conceito. Constatamos então, como um ambiente de sala de aula diferente do tradicional pode favorecer o ensino-aprendizagem de função, e também tornar os alunos mais ativos e motivados a estudar. Sendo assim, de acordo com Brandão (2014), para que o aluno compreenda o formalismo matemático do conceito de função, deve-se colocá-lo em um ambiente onde estejam incluídos a experiência do cotidiano, exemplos concretos, diferentes tipos de representações, de modo que o aluno forme a estrutura conceitual com compreensão em um percurso que se assemelhe ao historicamente construído.

É importante destacar também, que além dos alunos demonstrarem ter tido uma melhor compreensão, também começaram a refletir sobre suas práticas como futuros professores, pensando como seria a utilização da metodologia de ensino e de tais atividades em seu dia a dia.

Após os alunos nos entregarem suas resoluções da atividade 2 e terminarem seus comentários sobre as contribuições dela para o entendimento do conceito de função, distribuímos a atividade 3.

Atividade 3[8]

*Júlio resolveu fazer uma viagem em seu próprio veículo, a uma cidade distante 200 km. Seu automóvel se desloca a uma velocidade média de 120 km/h. Após iniciar sua viagem, Júlio*

[8]Elaborada pelo autor

*percebeu que a cada 20 minutos seu carro havia percorrido 10 km a menos. Quanto tempo gastou para chegar a seu destino?*

a) *Monte uma tabela que relacione tempo e quilômetros percorridos.*
b) *Esboce o gráfico desta situação.*
c) *Qual a resposta para o enunciado da atividade?*
d) *Escreva uma expressão matemática que represente esta situação.*
e) *E se Júlio resolvesse seguir a diante para outra cidade, gastando mais 30 minutos, quantos quilômetros teria percorrido no total?*
f) *Se seu carro passasse agora a percorrer 15 km a menos, quanto tempo levaria para chegar a seu destino?*

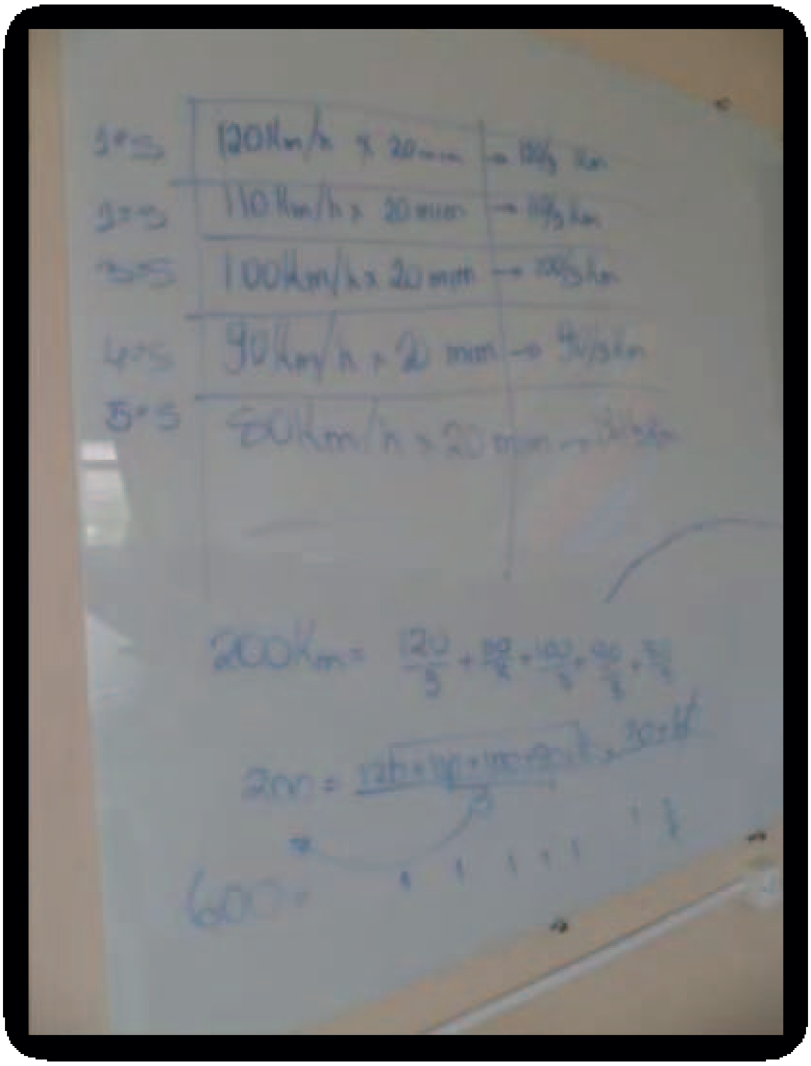
A atividade 3 tem como objetivo trabalhar o conceito e as representações de função a partir de uma situação do cotidiano, além disso, temos o intuito de explorar três ideias essenciais nesta atividade, que são: conceito de função, representações de função e covariação e taxa de variação.

A primeira grande ideia essencial para o desenvolvimento do conceito de função, estava presente em toda a atividade, e dessa forma, os alunos exploraram o conceito de função em todos os momentos de suas resoluções.

As duplas, ao receberem a atividade, leram o enunciado e começaram a tentar resolvê-la. A partir daí, observamos que a dupla 1 estava tentando responder primeiro a pergunta do enunciado, deixando de lado os itens propostos na atividade. Assim, percebemos que os alunos da dupla estavam fazendo algumas tentativas, e então, a dupla 1 chegou a alguns resultados. Um dos alunos chegou ao tempo de 1h20min e o outro 2h46min.

Em meio a busca da resolução da atividade, surgiram algumas discussões entre os alunos, pois eles estavam tentando interpretar a informação da atividade que indicava que o carro havia percorrido *10 km a menos*. Diante das discussões, um aluno da dupla 1 resolveu ir ao quadro mostrar o que havia pensado.

Figura 5: Exposição de um aluno da dupla 1 no quadro



Fonte: Registros fotográficos do autor.

O aluno montou uma tabela com alguns valores, iniciando a tabela com 120 km/h e cada novo valor diminuía 10 km/h, onde cada valor era multiplicado por 20 minutos, que foi considerado pelo aluno como um terço de hora. Ele explicou que achava que o somatório desses resultados seria 200 km, ou seja, a distância que seria percorrida na situação proposta na atividade.

No entanto, o aluno afirmou que não sabia calcular para verificar seu raciocínio, e também não sabia se seria daquela forma que deveria resolver a atividade, e então, insistiu para que nós disséssemos se o seu raciocínio estava correto ou não.

Nesse momento buscamos questionar os alunos sobre alguns pontos, para refletirmos juntos sobre a situação. Perguntamos sobre a tabela e o gráfico, mas os outros alunos não haviam feito esses itens, estavam buscando a resposta para o enunciado da atividade, entretanto, não conseguiam concretizar um raciocínio.

**Análise**:

Observamos como os alunos se prenderam a buscar a resposta do enunciado da atividade, deixando de lado os outros itens que poderiam auxiliá-los na análise da atividade. Mesmo com nossos questionamentos sobre os itens da atividade, houve uma grande resistência em tentar analisar a tabela.

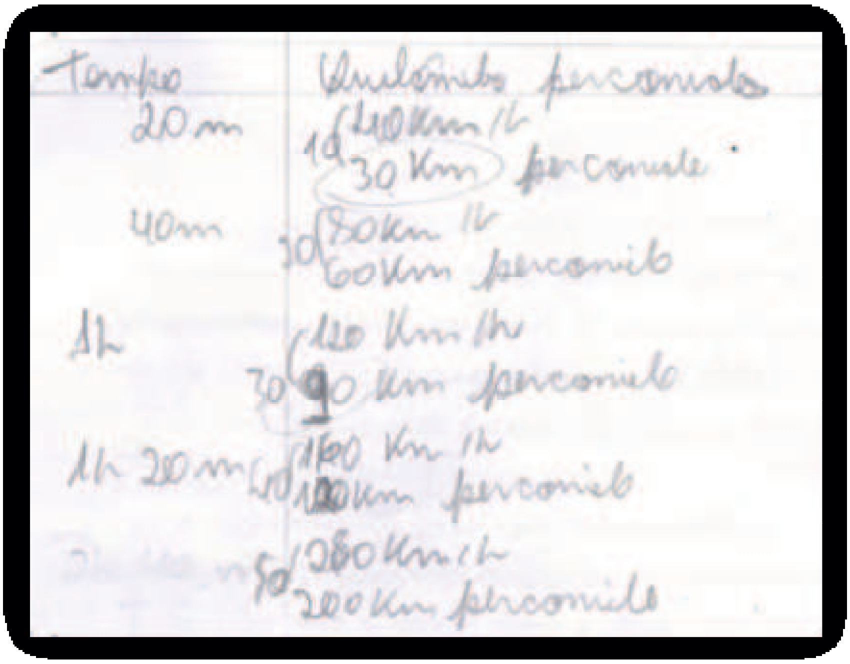
A dupla 1 depois de ter exposto no quadro o que pensava, praticamente desistiu da atividade, afirmaram que não conseguiam entender a atividade, mas queriam a nossa confirmação se o que tinham feito estava correto ou não. Mais uma vez destacamos o fato dos alunos buscarem a confirmação do professor para só então prosseguirem a resolução da atividade.

Brandão (2014) também destacou em sua pesquisa, que inicialmente os alunos se mostraram dependentes da resposta do professor e inseguros quanto as suas resoluções, geralmente desistindo de resolver o problema nos primeiros obstáculos. No entanto, Brandão (2014) buscou ao máximo, mediar as situações para que eles encontrassem caminhos para resolver o problema.

Sendo assim, pudemos perceber em nossa pesquisa, que mesmo os alunos estando no ensino superior ainda carregam consigo características muito fortes do ensino básico.

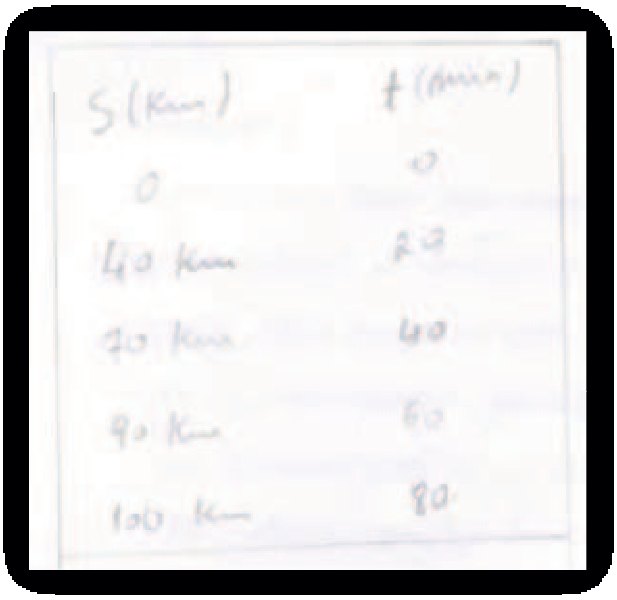
Continuamos insistindo para que os alunos construíssem a tabela e analisassem para cada valor obtido, tentando refletir e compreender a situação apresentada na atividade. A dupla 2 começou a construir a tabela, e a dupla 3 já havia construído uma tabela. Abaixo temos as construções das duplas:

Figura 6: Tabela construída pela dupla 2




Fonte: Produções dos alunos.

Figura 7: Tabela construída pela dupla 3



| S (Km) | t (min) |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 40 Km | 20 |
| 70 Km | 40 |
| 90 Km | 60 |
| 100 Km | 80 |

Fonte: Produções dos alunos.

A dupla 2 construiu a tabela a partir de nossas perguntas, além disso, sugerimos que analisassem para valores que iam de vinte em vinte minutos, com o intuito que observassem os valores obtidos. Dessa forma, a dupla 2 foi montando a tabela com base na velocidade média apresentada na atividade, e assim, para cada valor obtido era feito a subtração que achavam necessária.

Sendo assim, questionamos também se os valores obtidos poderiam indicar uma nova velocidade média. A dupla 2 afirmou que sim, pois seria agora 90 km/h. Mesmo a dupla afirmando isso, demonstrou estar com dúvidas em relação a atividade.

A dupla 3, se manteve apenas observando os procedimentos da dupla 2, e não alterou a tabela que havia construído. Na tabela construída pela dupla 3, observando a diferença entre as distâncias diminui dez quilômetros a cada novo valor, e dessa forma, pudemos constatar que esta dupla interpretou a situação de outra forma. No entanto, a dupla 3 também demonstrou estar com dúvidas nesta atividade.

Em relação à quinta ideia essencial, representações de função, os alunos trabalharam apenas as representações escrita e tabular, pois não construíram o gráfico e também não escreveram uma expressão matemática para a situação.

Ao analisarem a tabela, os alunos trabalharam a segunda grande ideia essencial, covariação e taxa de variação, pois observaram a variação das grandezas para alguns valores, entretanto, percebemos que não ficaram convictos que a tabela seria da forma que construíram. Ainda destacamos que cada dupla construiu a tabela de uma forma diferente, o que demonstra que cada dupla interpretou de maneira diferente a situação, e dessa forma, analisaram variações diferentes.

**Análise**:

Percebemos que houve diferentes interpretações para a atividade, no entanto, os alunos não conseguiram concretizar um raciocínio sobre a situação, consideraram a atividade muito difícil.

Destacamos também, o fato dos alunos se sentirem desmotivados nos primeiros obstáculos, e a partir daí, querer desistir da atividade. Outro fato a ser destacado, é que os alunos estão sempre buscando a confirmação do professor para poderem continuar respondendo a atividade.

Tivemos que recolher a atividade sem que fosse terminada, pois o horário da primeira etapa havia acabado. Explicamos que na segunda etapa retomaríamos de forma breve a atividade para fins de esclarecimentos, mas que não devolveríamos as produções para que terminassem as respostas.

Em nosso planejamento, tínhamos preparado quatro atividades para esta primeira etapa, mas devido ao atraso inicial e ao tempo decorrido em cada atividade, conseguimos aplicar apenas três atividades, de modo que a terceira não foi possível concluir sua resolução.

**Análise:**

Portanto, pudemos observar nesta primeira etapa que os alunos se mostraram bem motivados ao resolver as atividades propostas. Inicialmente se mostraram um pouco inibidos, mas logo as discussões fluíram, e pudemos perceber a satisfação dos alunos ao trabalharem com tais atividades. Apenas na atividade 3 os alunos se mostraram um pouco desmotivados, mas acreditamos que o cansaço também contribuiu para isso.

De modo geral, os alunos tiveram uma melhor compreensão do conceito de função, pois além de desenvolverem suas estratégias de resolução, os próprios alunos comentaram que as atividades contribuíram para um melhor entendimento.

### 5.2.2. 2ª Etapa (10/03/2016)

Ao iniciar a segunda etapa, como havíamos avisado na etapa anterior, retomamos de forma breve a terceira atividade. Fomos ao quadro, e começamos a discutir a atividade junto com os alunos, fazendo questionamentos sobre cada item, e chamando atenção sobre o fato de não terem tentado analisar cada item para que pudessem interpretar melhor a atividade. Entretanto, ao termino da discussão da atividade, os alunos ainda afirmaram ter dúvidas quanto à interpretação da atividade.

Em seguida, explicamos que seguiríamos a programação de cada etapa, e para não comprometer o desenvolvimento da oficina,a atividade 4, programada para a primeira etapa, não seria aplicada nesta segunda etapa.

Comentamos também, que ainda não tínhamos utilizado o GeoGebra, pois estava justamente programado para ser utilizado na atividade 4, que era a última da primeira etapa, e nesta segunda etapa também estava programado para a última atividade, que era a atividade 8. Então, para não correr o risco de novamente não dar tempo de aplicar esta atividade e utilizar o software GeoGebra, avisamos que começaríamos por ela.

Nesta segunda etapa estavam presentes apenas cinco alunos, pois um dos alunos da dupla 3 não compareceu mais a oficina, dessa forma, passaremos a indicar agora como aluno 3.

Para melhor observar o trabalho realizado nesta segunda etapa, abaixo apresentamos um quadro com as atividades na sequência que foram trabalhadas, com seus respectivos conteúdos e ideias essenciais evidenciadas.

Quadro 4: Atividades trabalhadas no 2ª Etapa

| Atividade | Conteúdo | Ideias essenciais |
|---|---|---|
| Atividade 8 (verificação no GeoGebra) | Limite de uma função quando a variável tende ao infinito | CF, RF e CTV |
| Atividade 5 | Noção intuitiva de função | CF, RF e CTV |
| Atividade 6 | Função afim | CF, RF e CTV |
| Atividade 7 | Máximo ou mínimo da função quadrática | CF, RF e CTV |

Fonte: Elaborado pelo autor.

Atividade 8[9]

*Um determinado tipo de árvore cresce de acordo com a função:* $h(t) = \frac{24t+4}{t+2}$ *em que h representa a altura da árvore, em metros, e t o tempo, em anos, desde que foi plantada.*

a) *Monte uma tabela que relacione a altura da árvore a cada ano.*
b) *Esboce o gráfico dessa relação entre altura e anos.*
c) *Qual a altura da árvore quando foi plantada?*
d) *Quanto tempo leva para a árvore atingir 22 metros de altura?*
e) *Calcule o limite da função quando t tende ao infinito.*
f) *Qual a altura máxima que essa árvore pode atingir?*
g) *Que altura tem uma árvore que foi plantada há 86 anos?*

A atividade 8 tem como principal objetivo trabalhar o conceito e as representações de função a partir de uma situação concreta, e além disso, utilizar o software GeoGebra para a exploração do gráfico da função em questão, de modo que contribua na verificação de alguns conceitos.

Com esta atividade também trabalhamos três grandes ideias essenciais para o desenvolvimento do conceito de função, as quais: conceito de função, representações de função e covariação e taxa de variação.

[9]Retirada e adaptada de GIOVANNI e BONJORNO, 2005, vol. 3, p. 234.

A primeira grande ideia essencial, conceito de função, foi trabalhada em toda a resolução da atividade, assim como trabalhamos nas atividades anteriores.

Os alunos leram a atividade, e após analisarem a situação começaram a responder os itens propostos. Depois de terem respondido a maioria dos itens, as duplas começaram a fazer alguns comentários.

*D1: Professora, essa árvore vai crescer infinitamente!*

*A3[10]: Não, eu não diria!*

*PP: Ela vai crescer infinitamente?*

*A3: Não, porque diz: qual a altura máxima que essa árvore pode atingir?*

*PP: Qual a altura máxima que ela pode atingir? Ela vai crescer infinitamente?*

*A3: Não.*

*A3: Vai ter um momento que ela vai parar de crescer. Tem um limite aqui.*

*PP: Qual a altura que ela pode atingir?*

A dupla 1 concluiu que a árvore nunca iria parar de crescer, ou seja, cresceria infinitamente, no entanto, o aluno 3 comentou que haveria um limite, pois a árvore teria uma altura máxima.Nesse momento os alunos fizeram cálculos e tentativas para descobrir a altura máxima que a árvore podia atingir.

É importante destacar que os alunos já haviam calculado o limite da função quando t tendia ao infinito no item (e), ou seja, já haviam encontrado a altura máxima que a árvore poderia atingir, mas percebemos que os alunos não pararam para refletir o que aquele limite representava na situação.

Então as duplas continuaram discutindo sobre o item (f), tentando encontrar uma forma de resolver o item:

*A3: Mas uma coisa é certa, ela vai diminuir o crescimento.*

*D2: Não, tá claro!*

*D1: Isso é claro!*

*PP: Mas tem um momento que ela vai parar?*

*A3: O crescimento vai ser tão pequeno.*

*PP: Qual a altura máxima?*

*A3: Eu apliquei pelo limite.*

*PP: Encontraram a altura máxima?*

---

[10] Aluno 3.

*A3: Aproximadamente 24.*

Observamos que o aluno 3 chegou a conclusão que o cálculo do limite tendendo ao infinito forneceria a altura máxima da árvore, que era vinte e quatro metros.

Os alunos calcularam a altura da árvore para intervalos de tempo grandes como, por exemplo, mil anos e vinte e quatro mil anos, e perceberam que a altura se aproximava de vinte e quatro metros, afirmaram então, que a árvore cresceria milimetricamente ao passar de muito tempo, pois o crescimento seria bem pequeno, mas sempre iria crescer. Entretanto, de acordo com os alunos, o crescimento iria ser tão pequeno que seria quase zero.

> **Análise**:
>
> É importante destacar que os alunos já haviam respondido o item (e) que pedia o limite da função quando t tende ao infinito, mas ao analisarem o item (f), eles demoraram um pouco para concluir que a altura máxima da árvore seria exatamente o limite da função que representa seu crescimento. Após muitas discussões os alunos compreenderam que a altura máxima da árvore era exatamente o limite da função. Observamos como a atividade motivou os alunos e gerou muitas discussões, pois buscaram analisar a atividade para intervalos de tempo bem grandes, concluindo dessa forma, que o crescimento da árvore seria bem pequeno, mas que sempre cresceria, se aproximando de vinte e quatro metros.

Os alunos analisaram a situação de várias formas, e após muitas discussões sobre o crescimento da árvore, um dos alunos da dupla 1 levantou a seguinte questão para o aluno 3:

*D1: Eu só quero que você me mostre qual o ano que ela vai parar de crescer!*

Isso gerou mais discussões entre as duplas, pois passaram a tentar descobrir quando a árvore iria parar de crescer. Os alunos começaram a analisar o gráfico da função, e comentavam que no inicio o gráfico cresceria mais rápido, porque o crescimento da árvore era maior, mas ao passar dos anos cada vez seria menor. No entanto, não encontraram uma resposta para a questão levantada pela dupla 1.

Os alunos buscaram analisar o crescimento da árvore para diferentes valores, observando a variação das grandezas, e dessa forma, trabalharam a segunda grande ideia essencial para o desenvolvimento do conceito de função, que é a covariação e taxa de variação.

Ao procurar analisar o gráfico, os alunos chegaram à conclusão que seria melhor de visualizar o que eles buscavam, no GeoGebra, pois poderiam utilizar o zoom para analisar melhor o comportamento da função. Entretanto, os alunos continuaram discutindo sobre a altura máxima que a árvore podia atingir. O aluno 3 comentou que de acordo com suas análises a altura máxima nunca iria chegar em vinte e quatro metros, apenas se aproximaria, ou seja, vinte e quatro era o limite.

Já um dos alunos da dupla 1 afirmou que mesmo assim, a árvore continuaria crescendo, pois ao se aproximar de vinte e quatro, o crescimento seria cada vez menor, mas sempre estaria crescendo. No entanto, o outro aluno da dupla 1 questionou como a árvore continuaria crescendo se o crescimento parava em vinte e quatro? E o aluno 3 também questionou como existiria altura máxima se a árvore nunca parasse de crescer?

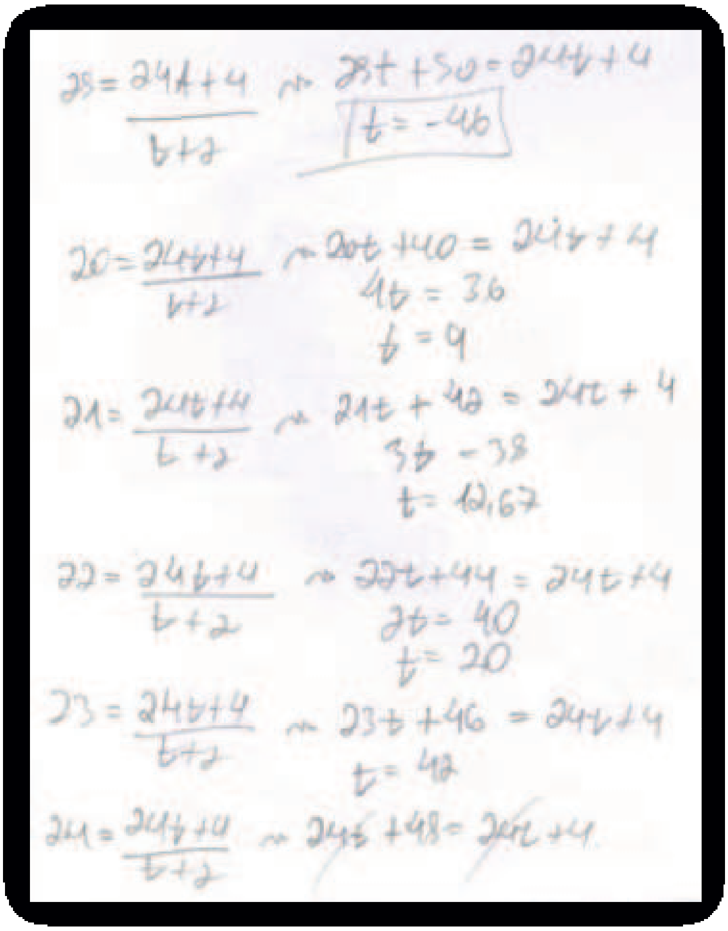
Diante dos questionamentos um dos alunos da dupla 2 apresenta sua análise:

*D2: Professora, eu acredito que, por exemplo, esse negócio de altura máxima. Eu substitui aqui no h(t), que é a altura. Fui substituindo de 20 até 25, em termos de altura, para achar os anos. Ai o que ocorre: quando a pessoa substitui a altura 20, o t é 9; quando a pessoa substitui a altura 21, o t é 12,67; e 22 o t é 20; e 23 o t é 42; mas quando chega em 24 fica uma indeterminação. Ai quando você já pula para 25, ai o t vai ser -46. Ai não tem ano negativo!*

*PP: Com essa sua análise, o que você conclui?*

*D2: Eu concluo que... Eu acredito que a altura máxima dela é 23. Entre 23 e 24.*

Figura 8: Cálculos do item (f) feitos pelo aluno da dupla 2




Fonte: Produções dos alunos.

Diante de tantos questionamentos sobre a altura máxima da árvore, a dupla 2 resolveu analisar a situação para alguns valores. Dessa forma, a dupla utilizou a expressão algébrica substituindo a altura para encontrar o tempo em anos, e a partir de seus cálculos, concluiu que a árvore não atingiria a altura de vinte e quatro metros, pois para esse valor encontrou uma indeterminação.

É importante destacar que a estratégia utilizada pela dupla 2 para analisar a altura máxima da árvore, foi a mesma utilizada para resolver o item (d), o qual questionava sobre o tempo necessário para a árvore atingir a altura de vinte e dois metros.

Após a apresentação da análise da dupla 2, os alunos concluíram que a altura máxima da árvore seria menos que vinte e quatro, pois a árvore nunca iria atingir a altura de vinte e quatro metros. No entanto, mesmo após essas conclusões, os alunos ainda discutiram sobre a altura máxima.

Destacamos que os alunos utilizaram a expressão algébrica para analisar alguns valores na situação e esboçar o gráfico da função, e dessa forma, trabalharam a quinta ideia essencial, representações de função.

**Análise:**

Diante de tantos questionamentos sobre a altura máxima, um dos alunos da dupla 2 buscou analisar a atividade para solucionar suas dúvidas. Ele utilizou a expressão algébrica substituindo a altura para encontrar o tempo em anos, e chegou à conclusão que realmente a árvore não atingiria a altura de vinte e quatro metros, pois para essa altura o aluno encontrou uma indeterminação.

É importante destacar a estratégia que o aluno utilizou para analisar o item (f), substituindo a altura para encontrar o tempo em anos, mesma estratégia utilizada para responder o item (d). Portanto, mesmo calculando o limite da função, os alunos não ficaram satisfeitos e buscaram refletir e analisar melhor a atividade. Percebemos então, que a atividade motivou os alunos, pois gerou muitas discussões e a busca por estratégias para resolver a situação. Acreditamos que a atividade também contribuiu para uma melhor compreensão do limite de uma função quando a variável tende ao infinito.

Portanto, como os alunos já haviam respondido todos os itens da primeira parte e as discussões sobre a altura máxima havia acabado, passamos para a segunda parte da atividade, utilizando o GeoGebra.

*2ª parte da atividade 8*

*h) Agora utilizando o GeoGebra, insira a função h(t) na caixa de entrada, substituindo h por f e t por x.*

*i) O gráfico que aparece corresponde ao esboçado por você no item (b)? Explique.*

*j) Reduza a janela geométrica (opção reduzir, 11ª janela) para ter uma visão mais ampla do gráfico. Que conclusões você chegou ao observar o gráfico?*

*k) Insira o ponto A (opção novo ponto, 2ª janela) sobre o gráfico de f e o movimente (opção mover, 1ª janela) observando na janela algébrica os valores correspondentes da abscissa e ordenada. Você consegue encontrar valores correspondentes aos que estão na tabela construída por você no item (c)? Explique.*

*l) Que conclusões você chegou ao utilizar o GeoGebra nesta atividade?*

Após receberem o roteiro da segunda parte da atividade 8, cada dupla se dirigiu a um computador, e como esta foi a primeira atividade trabalhada no GeoGebra, surgiu algumas pequenas dúvidas sobre os comandos do software, as quais fomos mediando.

As dúvidas que surgiram foram em relação a como inserir a função na caixa de entrada do GeoGebra, pois houve casos em que os alunos estavam esquecendo de alguns elementos, como, por exemplo, sinais. E dessa forma, o software não entendia a função, ou entendia uma função diferente da que estava sendo considerada.

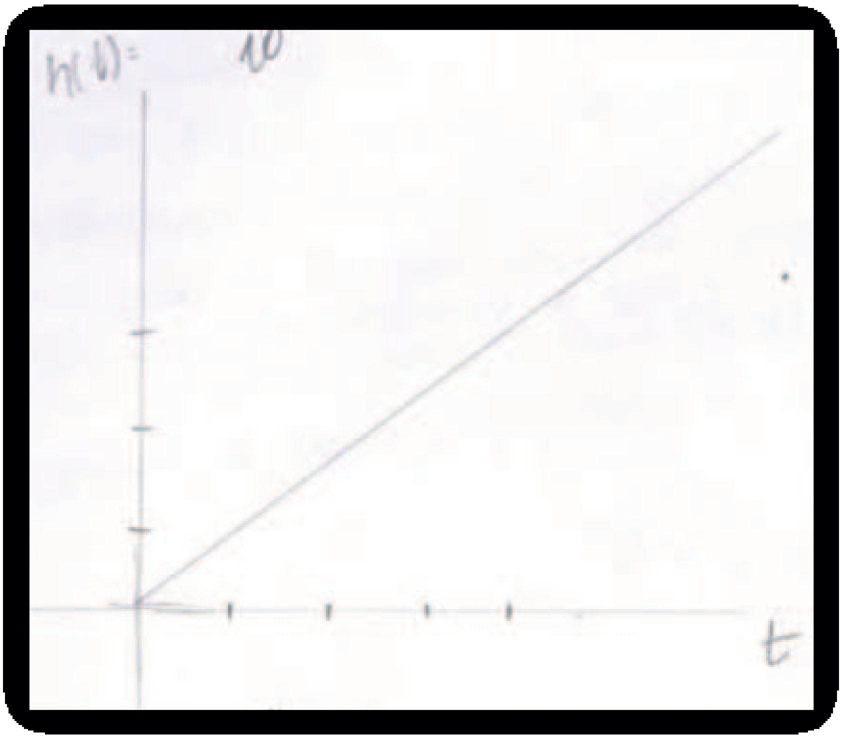
No entanto, as dúvidas foram resolvidas rapidamente e os alunos puderam analisar a função da situação proposta.

Os alunos analisaram o gráfico da função com o auxilio do GeoGebra e responderam aos itens da segunda parte da atividade.

Nesta segunda parte não surgiram maiores discussões, pois os alunos buscaram verificar seu trabalho na primeira parte

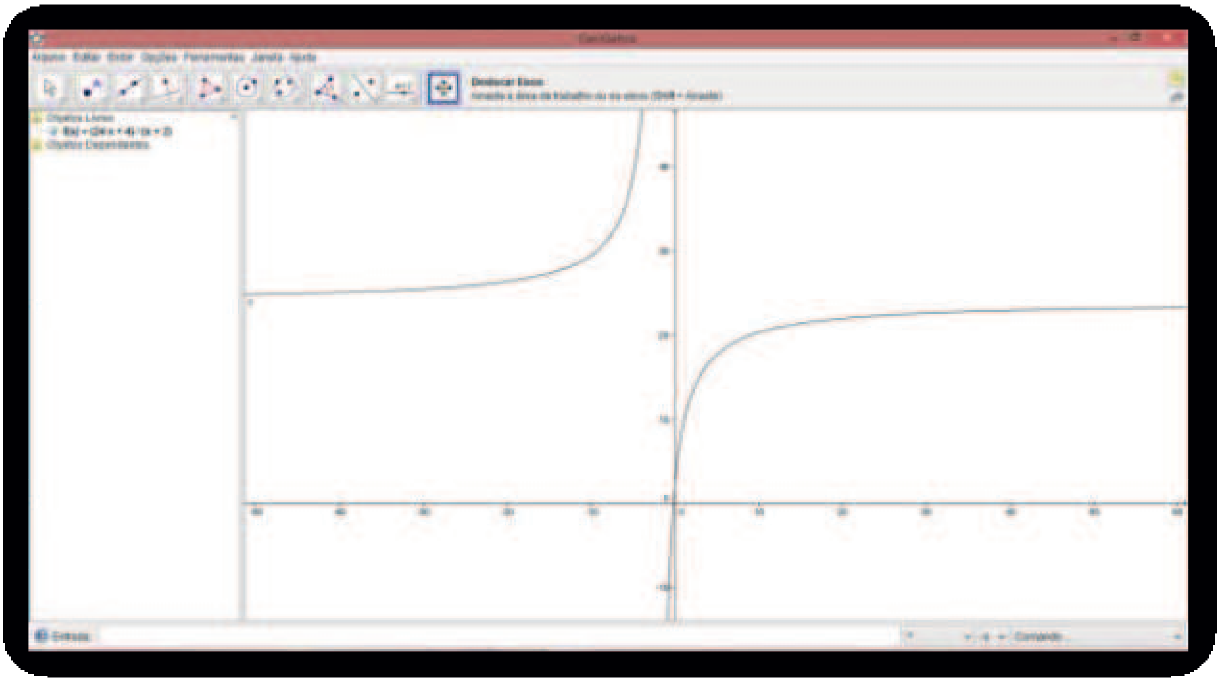
Observamos que a dupla 2 se confundiu na construção do gráfico, pois achou que o gráfico seria uma reta, mas ao analisar no GeoGebra, pode observar melhor o comportamento do gráfico, constatando que não seria uma reta.

Figura 9: Gráfico construído pela dupla 2




Fonte: Produções dos alunos.

Figura 10: Gráfico construído com o GeoGebra



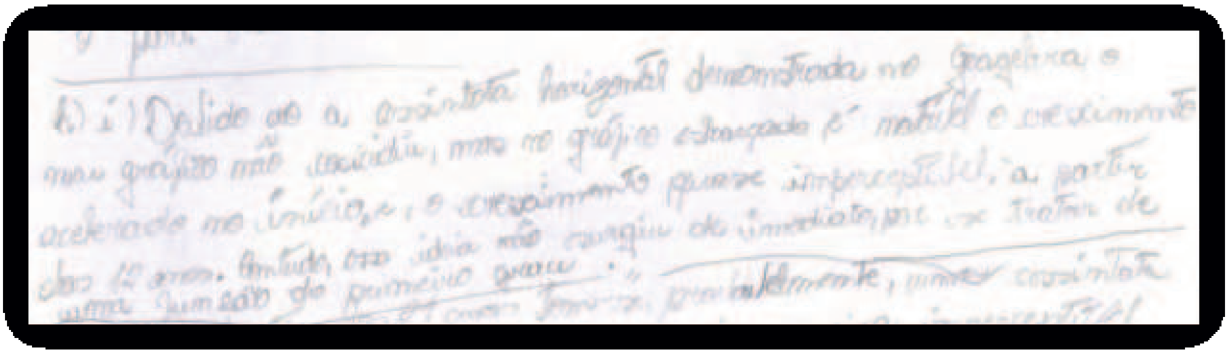
Fonte: Elaborado pelo autor.

A dupla 2 se mostrou um pouco surpresa ao visualizar o gráfico definido pela função em questão, pois inicialmente, acreditavam que seria uma reta.

Na resposta do item (i), a dupla comentou o fato do gráfico construído por eles não coincidir com o gráfico visualizado no GeoGebra. Entretanto, destacou que ao analisar o gráfico no GeoGebra pode perceber o crescimento mais acelerado no inicio e que depois passa a ser quase imperceptível, fato que haviam analisado na busca da altura máxima da árvore.

A dupla também destacou que acreditava se tratar de uma função do primeiro grau, dessa forma, imaginamos que eles possam ter tirado essa conclusão por não observar nenhum expoente na variável.

Figura 11: Resposta da dupla 2 para o item (i)



Fonte: Produções dos alunos.

A dupla 1 e o aluno 3 perceberam que a função definia uma curva, e assim, construíram o gráfico apenas para valores positivos. No entanto, ao analisar o gráfico no GeoGebra, observaram que havia uma parte do gráfico para valores negativos, mas comentaram que deveriam apenas considerar para valores positivos, pois não existia tempo negativo.

Ao explorar a situação no GeoGebra, os alunos comentaram que o software contribuiu para que tivessem uma melhor compreensão do conceito de função, pois puderam manipular a função em questão e verificar alguns aspectos.

Os alunos também comentaram que sentiam falta de que fosse mais trabalhado o uso de softwares como o GeoGebra em disciplinas do curso de Licenciatura em Matemática, pois isto contribuiria tanto para uma melhor compreensão dos conteúdos, como também para a formação dos alunos como futuros professores de Matemática.

**Análise:**

Os alunos da dupla 2 se confundiram achando que a função seria de primeiro grau, acreditamos que a confusão ocorreu pelo fato de não terem visto na expressão, nenhum termo com expoente.

A dupla 1 e o aluno 3 haviam construído o gráfico apenas para intervalos de tempo positivos, e só depois de analisar no GeoGebra, descobriram que existia outra parte do gráfico para valores negativos, mas todos concluíram que para a situação em questão, deveríamos considerar apenas valores positivos, pois não existe tempo negativo.

Portanto, o GeoGebra permitiu aos alunos a verificação da resolução da primeira parte, e também uma melhor análise de alguns conceitos, o que gerou uma melhor compreensão do comportamento da função. Como, por exemplo, a altura máxima da árvore, ou seja, o limite da função quando o t tende ao infinito, em que os alunos puderam manipular o gráfico e constatar as suas conclusões.

Sendo assim, acreditamos que os alunos não tiveram dúvidas ao construir a tabela, entretanto, ao construir o gráfico, a dupla 2 se confundiu achando que seria uma função de primeiro grau, no entanto, puderam visualizar melhor com a ajuda do software. Quanto aos outros itens, tudo leva a crer que não tiveram dificuldades em calcular, mas houve muita discussão sobre a altura máxima que a árvore poderia atingir. Após as análises da atividade, tanto de forma escrita, como também no GeoGebra, percebemos que compreenderam os conceitos envolvidos.

Dessa forma, pudemos perceber que a atividade muito contribuiu, tanto para a compreensão do conceito de função, como também para a motivação dos alunos. Os próprios alunos afirmaram que o software ajudou na compreensão, pois puderam manipular a função. Entretanto, um dos alunos comentou sobre o fato de sentir falta nas disciplinas do curso de matemática, que fosse mais trabalhado o uso de softwares de matemática dinâmica como o GeoGebra.

Portanto, após os alunos concluírem a resolução da atividade 8 e terminarem seus comentários, recolhemos a atividade e em seguida distribuímos a atividade 5. Chamamos a atenção para o fato de que agora seguiríamos a sequência das atividades propostas para essa segunda etapa.

Atividade 5[11]

*A tabela abaixo indica o custo de produção de certo número de peças para informática. Complete a tabela, relacionando o número de peças e o custo de produção.*

| *Número de peças* | *Custo (R$)* |
|---|---|
| *1* | |
| *2* | |
| | *3,60* |
| *4* | *4,80* |
| *10* | |
| *25* | |
| *40* | |
| *P* | |

*a) A cada número de peças corresponde um único valor em reais? Justifique.*
*b) Quais as grandezas envolvidas na situação? Elas variam?*
*c) Para cada peça produzida qual o custo de produção?*
*d) Qual o custo de produção de 200 peças? E de 325 peças?*
*e) É possível escrever uma expressão matemática para determinar qualquer valor que relacione o custo de produção C, com o número P de peças produzidas?*
*f) Represente graficamente esta situação.*
*g) Se fosse produzido outro tipo de peças que tivesse o custo de produção equivalente a três quartos do custo de produção das peças em questão, qual seria o custo de produção de 50 peças deste outro tipo? E de 125? E de 500 peças?*

O objetivo da atividade 5 era contribuir com o ensino-aprendizagem de função, fazendo com que os alunos trabalhassem o conceito e as representações de função a partir de uma situação simples.

Nesta atividade também trabalhamos as ideias essenciais: conceito de função, representações de função e covariação e taxa de variação.

[11]Retirada e adaptada de DANTE, 2003, vol. 1, p. 38; BRANDÃO, 2014, p. 190

A primeira grande ideia essencial, conceito de função, foi trabalhada em toda a resolução da atividade, desde o momento que leram o enunciado até o fim da resolução.

Ao receberem a atividade os alunos leram o enunciado, começaram a preencher a tabela e em seguida passaram a tentar resolver os itens propostos. A partir daí, a dupla2 e o aluno 3 começaram a discutir sobre a interpretação da atividade, e fizeram várias conjecturas e questionamentos. Os alunos se perguntavam se a situação definia uma PA (Progressão Aritmética) ou uma PG (Progressão Geométrica).

*A3: É uma PA!*

*D1: Com apenas dois termos, professora, eu posso somar ou uma PA ou uma PG.*

*D1: Porque se eu usar um incremento de um termo para outro eu encontro uma PA, e se eu usar uma razão, ai é uma PG.*

*A3: A razão de uma PA é a diferença. A razão de uma PG é a divisão.*

*D1: Sim, mas a razão de uma PA você soma, é um incremento, e a de uma PG é uma razão mesmo. É um produto.*

Portanto, a atividade motivou os alunos a explorar aspectos que não eram solicitados, sendo assim, percebemos que os alunos se sentiram muito motivados pela situação proposta.

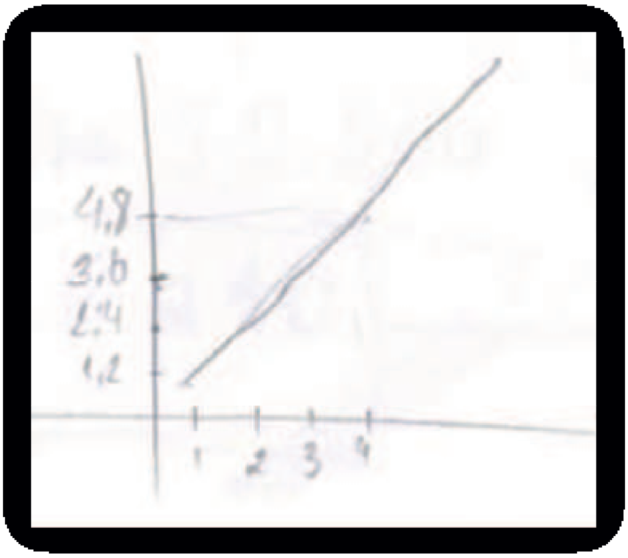
Destacamos também que os alunos ao preencherem a tabela, puderam analisar a variação das grandezas, e dessa forma, estavam trabalhando a segunda grande ideia essencial, covariação e taxa de variação.

**Análise:**

Os alunos buscaram identificar se a situação definia uma PA ou uma PG. É interessante destacar como a atividade motivou os alunos a explorar outros aspectos, ou seja, os alunos buscaram ir além do que era pedido nos itens. Brandão (2014) destaca, de acordo com Cooney, Beckmann e Lloyd (2010), que “a análise de sequências pode ser um ponto de partida para o estudo de outras funções, pois, por exemplo, a Progressão Geométrica é uma restrição da função exponencial para números inteiros”.

Nesta atividade é importante destacar os gráficos construídos pelos alunos, pois todos construíram como sendo retas. Observamos que eles não pararam em nenhum momento para pensar sobre o domínio da função proposta na atividade, pois deveriam considerar apenas números inteiros de peças, e dessa forma, o gráfico seria formado apenas por pontos.

Figura 12: Gráfico construído pela dupla 1



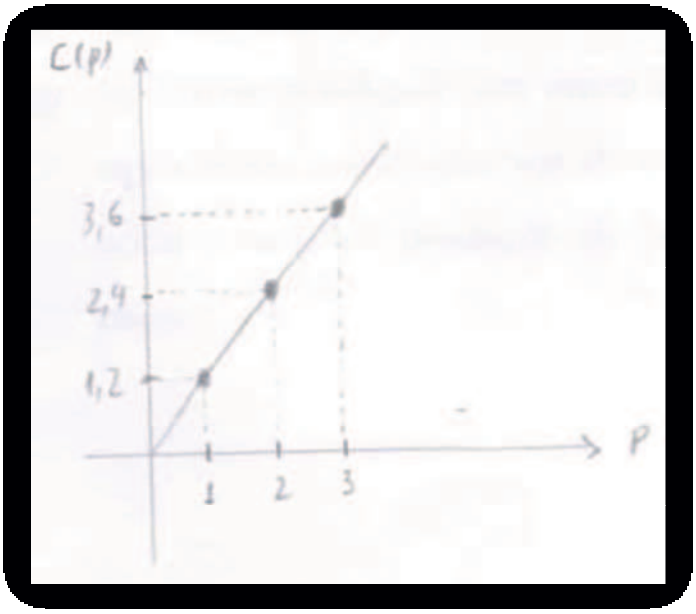

Fonte: Produções dos alunos.

Figura 13: Gráfico construído pela dupla 2

Fonte: Produções dos alunos.

O aluno 3 destacou alguns pontos no gráfico que ele construiu, mas os ligou formando uma reta também.

Figura 14: Gráfico construído pelo aluno 3




Fonte: Produções dos alunos.

**Análise:**

As dupla 1 e 2 esboçaram os gráficos como sendo retas, e o aluno 3 destacou os pontos, mas os ligou com uma reta. Observamos então, que os alunos não procuraram refletir sobre como seria o gráfico que representa a situação, e qual seria o domínio da função, pois nesta situação não seriam produzidas peças pela metade, por exemplo. Sendo assim, poderíamos considerar apenas números inteiros de peças, ou seja, o domínio é o conjunto dos números inteiros positivos. Dessa forma, no gráfico não poderíamos ligar os pontos. Destacamos mais uma vez, o fato dos alunos procederem de forma não reflexiva, sem procurar refletir um pouco mais sobre a situação.

No último item da atividade surgiram algumas dúvidas na interpretação, pois observamos que um dos alunos da dupla 2 estava se confundindo ao tentar calcular três quartos do valor inicial das peças.Diante de suas dúvidas o aluno nos questionou:

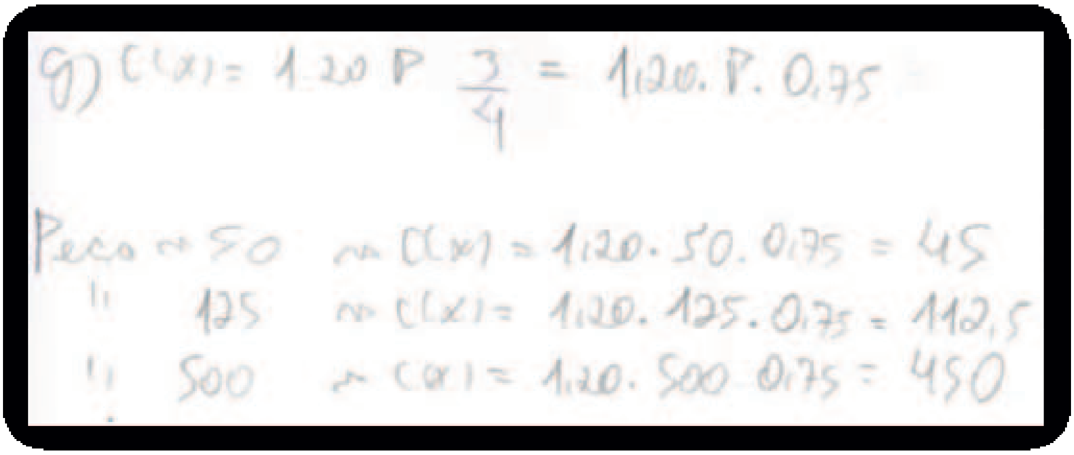
*D2a[12]: Esse custo de produção equivalente a três quartos. No caso, vai ser menos três quartos do valor que a gente calculou inicialmente?*

[12] Aluno (a) da dupla 2.

Entretanto, antes que pudéssemos comentar algo, o outro aluno da dupla 2 apresentou a forma que havia feito os cálculos:

*D2b: Eu multipliquei 1.20 vezes o p, vezes 0.75 que é três quartos.*

Figura 15: Resposta do aluno (b) da dupla 2 para o item (g)




Fonte: Produções dos alunos.

Destacamos então, que os alunos da dupla 2 estavam resolvendo de forma individual, e dessa forma, observamos que fizeram cálculos diferentes para o item (g), o que demonstrou que fizeram interpretações diferentes.

Os outros alunos perguntaram por que o aluno (b) da dupla 2 havia multiplicado por 0.75 e houve muita discussão, pois o aluno (a) da dupla 2 continuava afirmando que seria três quartos a menos do custo de produção inicial. Já um dos alunos da dupla 1, comentou que seria três quartos mais cara, cada nova peça. Neste momento pedimos para que os alunos lessem o item com atenção, para interpretar o que estava sendo pedido.

A partir daí, ao analisarem com mais atenção o item, o aluno (a) da dupla 2 nos explicou o que concluiu:

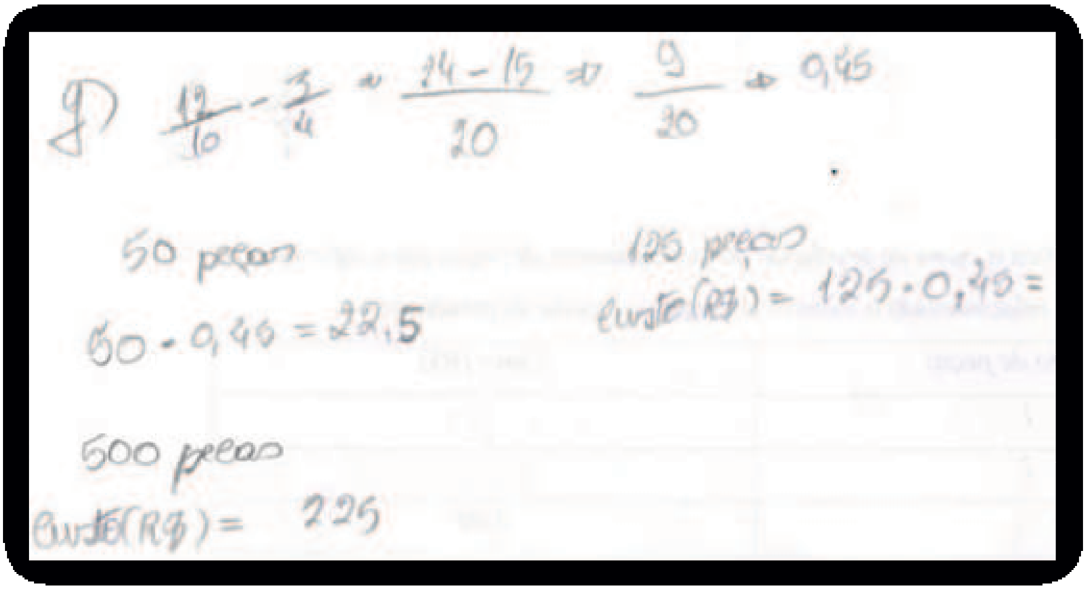
*D2a: Se a peça inicialmente custava 1,20, quer dizer que para transformar em fração vai para doze sobre dez avos, ai menos três quartos. Porque não é três quartos da produção inicial? Ai vai ficar, transformando para decimais, vai ficar 0,45.*

*PP: 0,45 vai ser o valor dessa nova peça?*

*D2: Dessa nova peça!*

*PP: 0,45 é três quartos de 1,20?*

Figura 16: Resposta do aluno (a) da dupla 2 para o item (g)




Fonte: Produções dos alunos.

O aluno (a) da dupla 2 se confundiu ao calcular três quartos do valor inicial da peça em questão, acreditamos que isso tenha ocorrido pela forma que o aluno havia interpretado o item (g). Mas após nossa pergunta, o aluno procurou fazer uma nova comprovação do que havia concluído. A dupla 2 discutiu entre si e com os outros alunos, e depois de analisarem novamente o item, fazendo novos cálculos, chegaram a conclusão que três quartos de 1,20 era 0,90.

Destacamos que o aluno (b) da dupla 2 pensou em apagar sua resolução após ter observado a resolução do aluno (a), pois considerou que seu raciocínio não estava correto, no entanto, ao refletirem juntos sobre o item, o aluno (b) percebeu que seu raciocínio estava correto.

Portanto, nesta atividade os alunos também trabalharam a quinta ideia essencial, representações de função, pois analisaram a situação nas representações tabular, algébrica e gráfica.

**Análise:**

Um dos alunos da dupla 2 se confundiu ao interpretar o item (g), e concluiu que o custo de produção do novo tipo de peça seria três quartos a menos do custo de produção do primeiro tipo de peça, e também estava se confundindo ao calcular três quartos de R$ 1,20. Entretanto, após nossos questionamentos os alunos refletiram melhor sobre o item e compreenderam o que deveriam fazer.

É importante destacar que nessa atividade os alunos estavam trabalhando de maneira mais individual, e dessa forma, cada aluno da dupla 2 estava resolvendo a atividade com procedimentos diferentes. Sendo assim, o aluno (a) da dupla 2, buscou convencer os outros, expondo seu raciocínio. No entanto, ao analisarem com mais atenção o que o item (g) pedia, e o que o aluno (b) da dupla 2 havia feito, chegaram a conclusão de que o custo de produção do novo tipo de peça seria R$ 0,90.

Observamos também nesta atividade, que os alunos continuavam sem ter segurança em suas respostas, pois quando o aluno (a) da dupla 2 apresentou sua resolução, o aluno (b) pensou em apagar sua resolução, mas ao refletir melhor sobre seus procedimentos de resolução, percebeu que estava correto.

Ao concluírem a resolução desta atividade, os alunos comentaram que não tiveram tantas dúvidas porque a atividade era mais direta, e dessa forma, cada um utilizou procedimentos bem parecidos. Diferente das atividades anteriores que exigiram mais interpretação, o que causou mais discussões.

Portanto, recolhemos a atividade 5 e em seguida distribuímos a atividade 6.

Atividade 6[13]

*Um automóvel move-se em uma estrada plana e reta, e seu velocímetro marca, em todo trajeto, a velocidade de 60 km/h. Qual a relação entre o espaço percorrido e o tempo despendido?*

a) *Monte uma tabela relacionando espaço percorrido e tempo.*
b) *Esboce graficamente a situação*
c) *Qual sua resposta para a pergunta do enunciado da atividade?*
d) *Ao percorrer um espaço de 300 km, quanto tempo despendeu? E um espaço de 475 km?*
e) *Qual o espaço percorrido em 1 hora e 25 minutos? E em 2 horas e 45 minutos?*

[13]Retirada e adaptada de CAMPITELI e CAMPITELI, 2006, p. 72.

O objetivo desta atividade era fazer com que os alunos desenvolvessem um conhecimento com mais compreensão do conceito e das representações de função, a partir de uma situação de fácil entendimento.

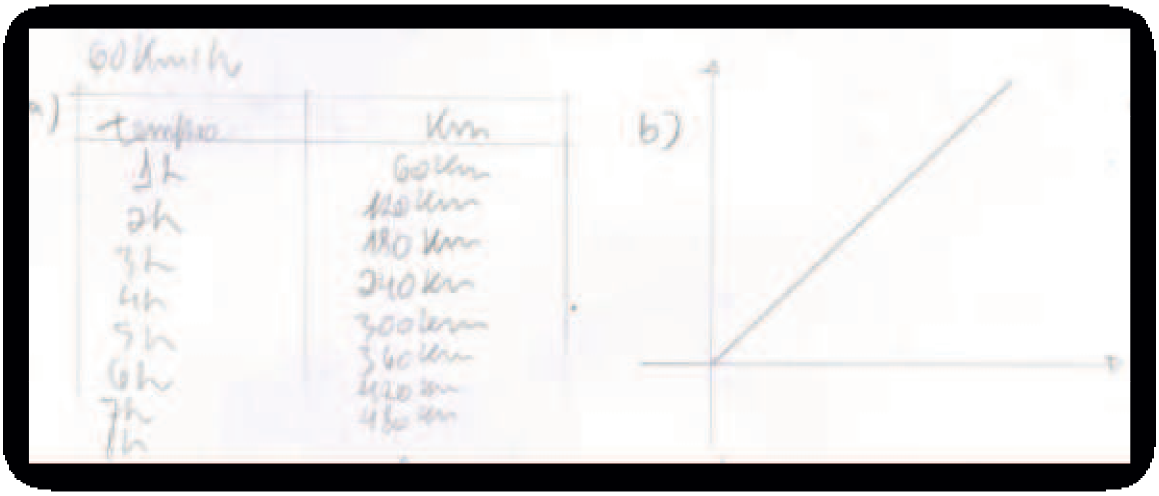
Com esta atividade também trabalhamos três grandes ideias essenciais para o desenvolvimento do conceito de função, as quais: conceito de função, representações de função e covariação e taxa de variação.

A primeira ideia essencial, conceito de função, foi trabalhada em toda a atividade.

Os alunos receberam a atividade, leram o enunciado e começaram a resolvê-la, então, observamos que não surgiram discussões, pois os alunos demonstraram não ter dúvidas, resolvendo tranquilamente os itens. Montaram a tabela facilmente e afirmaram que a construção do gráfico também seria simples, a partir da tabela.

Abaixo temos a tabela e o gráfico construídos pela dupla 2.

Figura 17: Tabela e gráfico construído pela dupla 2




Fonte: Produções dos alunos.

Portanto, tudo leva a crer que os alunos não tiveram dúvidas na interpretação da situação, de modo que construíram a tabela e o gráfico rapidamente.

Sendo assim, ao analisarem a tabela com alguns valores, os alunos puderam observar a variação das grandezas, e dessa forma, trabalharam a segunda ideia essencial, covariação e taxa de variação.

**Análise:**

Acreditamos que a atividade não gerou dúvidas entre os alunos. Dessa forma, os itens (a) e (b) foram rapidamente resolvidos. Os próprios alunos comentaram que a construção do gráfico seria fácil a partir da tabela.

No último item surgiram algumas discussões, pois alguns alunos comentaram que seria necessária transformação de unidades de medidas para que pudessem resolver, mas um dos alunos da dupla 1 expôs sua observação quanto a forma de resolução, afirmando que não seria necessária a transformação da unidades de medida.

*D1: Uma hora representa sessenta quilômetros (referindo-se a situação em questão). Com uma velocidade de sessenta quilômetros por hora, é! Isso é a velocidade do carro. Então em sessenta minutos ele vai percorrer sessenta quilômetros. Um minuto, um quilômetro, e vinte e cinco minutos, vinte e cinco quilômetros.*

Portanto, o aluno da dupla 1 percebeu uma relação que simplificava os cálculo, pois como a velocidade era 60 km/h, isso indicava que seria um quilômetro por minuto, e a partir daí, seria muito fácil calcular os valores solicitados no item (e).

É importante destacar que os alunos ao analisarem a situação nas representações escrita, tabular, gráfica e algébrica, trabalharam a quinta ideia essencial, representações de função.

**Análise:**

Ao observar o item (e), os alunos pensaram em transformação de unidades de medidas, mas um dos alunos notou uma relação que simplificava os cálculos. Portanto, percebemos que os alunos estão acostumados a recorrer a procedimentos não reflexivos, e dessa forma, deixam de perceber relações que podem simplificar sua resolução.

Os alunos resolveram a atividade de forma rápida, sendo assim, tudo leva a crer que não houve dúvidas, acreditamos que o fato de ser uma situação de fácil entendimento pode ter contribuído para não surgir maiores discussões.

Após os alunos concluírem a resolução da atividade 6, nós a recolhemos e distribuímos a atividade 7.

Atividade 7[14]

*Uma pessoa tem um rolo de tela com 20 metros de comprimento para construir um galinheiro retangular para um de cujos lados será aproveitada parte de um muro já existente. Dimensione esse galinheiro de modo a deixá-lo o mais espaçoso possível.*

a) *Esboce um desenho para a situação.*
b) *Monte uma tabela com alguns possíveis valores para os lados e a área obtida.*
c) *A partir dos dados obtidos na tabela, esboce o gráfico no plano cartesiano.*
d) *De acordo com a tabela e o gráfico é possível escrever uma expressão matemática que represente esta situação?*
e) *Quais as dimensões do galinheiro mais espaçoso?*
f) *E se fosse construir um galinheiro sem considerar um muro como um dos lados, quais seriam as dimensões do galinheiro mais espaçoso?*

A atividade 7 tem como principal objetivo fazer com que os alunos tenham uma melhor compreensão do conceito e das representações de função a partir de uma situação de fácil exploração.

Nesta atividade também trabalhamos três ideias essenciais, as quais: conceito de função, representações de função e covariação e taxa de variação.

A primeira ideia essencial, conceito de função, foi trabalhada em toda a atividade.

Assim que entregamos a atividade, o aluno 3 comentou que era sobre área máxima, já a dupla 2 considerou a atividade mais difícil que as outras resolvidas até então. Depois de ler a atividade, os alunos começaram a buscar interpretar a situação, e a partir daí começaram as discussões. Inicialmente a dupla 2 nos perguntou:

*D2: Esse PARA UM DE, é em relação a um dos lados é?*

A dupla 2 demonstrou estar com dúvida na interpretação da situação, pois ainda não haviam tentado resolver, estavam observando o enunciado da atividade.

Lemos a atividade junto com os alunos, procurando fazê-los compreender o que a situação indicava. Sendo assim, alguns dos alunos entenderam que em um dos lados do galinheiro seria aproveitado um muro já existente, e diante dessa interpretação houve alguns comentários.

---

[14]Retirada e adaptada de CAMPITELI e CAMPITELI, 2006, p. 99.

*D1a: Uma lateral completa vai ser o muro, então!*

*D1b: Ah, então vai utilizar três lados.*

*D1a: E outra coisa, é um retangular.*

*A3: É!*

*D1b: Ou seja, 10 metros já sei que é a frente do galinheiro!*

*D1a: Dois lados... Tem que ser igual dois a dois. Ele pode ser um quadrado!*

*D1b: Pode ser, mas pode ser também um retângulo.*

*A3: Mas de forma que a área seja máxima!*

*D1a: Os dois lados que estão ligados ao muro têm que ter tamanhos iguais.*

*D1b: Então vai ser 5 metros e a frente dele vai ser 10 metros. Só que ele quer saber se essa área é grande realmente!*

A partir do diálogo dos alunos, pudemos perceber que conseguiram entender o que a situação propunha, e assim, começaram comentar sobre a forma que o galinheiro poderia ter e quais poderiam ser suas possíveis dimensões. No entanto, observamos que a dupla 2 não participou da discussão, continuavam demonstrando não estar entendendo a atividade.

**Análise:**

Ao interpretar a situação, os alunos fizeram conjecturas sobre o formato que o galinheiro iria ter e suas possíveis dimensões. Neste momento apenas a dupla 1 e o aluno 3 discutiram, pois a dupla 2 demonstrava não ter compreendido bem a atividade.

A partir daí, a dupla 2, buscando compreender a atividade, nos apresentou sua interpretação:

*D2: No caso professora, deixa eu ver se entendi o problema! Ele tem um rolo de 20 metros, que ele quer utilizar no galinheiro todo, não é assim?*

*PP: Para construir um galinheiro.*

*D2: Então no caso, os comprimentos do galinheiro tem que ser menor do que 20 metros?*

Pudemos perceber que a dupla 2 ainda não havia entendido a situação, pois achava que as dimensões do galinheiro tinham que ser menores que vinte metros.

Neste momento lemos novamente a atividade junto com os alunos, e chamamos atenção para o fato de um dos lados do galinheiro ser aproveitado parte de um muro.

Questionamos os alunos sobre como deveria ser utilizado os 20 metros de tela nesta situação, e um dos alunos da dupla 1 afirmou que seria utilizada apenas em três lados. Portanto, a dupla 2 demonstrou ter entendido a situação, mas afirmou não estar conseguindo encontrar uma forma de resolver a atividade.

Então os alunos ficaram em silêncio, cada um analisando a atividade para encontrar uma estratégia de resolvê-la. Perguntamos então, se já haviam montado a tabela e diante do nosso questionamento, a dupla 1 e aluno 3 fizeram alguns comentários sobre suas resoluções:

*D1: Por exemplo, se eu utilizar aqui, que a frente dele é 12 metros e cada lateral é 4 metros. Ou seja, base vezes altura, vai ser 12 vezes 4, vai ser 48 metros quadrados. Essa que eu utilizei, já nessa outra vai ser 50 metros quadrados.*
*PP: Você está colocando isso na tabela?*
*D1: Vou colocar.*
*A3: Eu fiz exatamente desse jeito. Ao pegar o comprimento de 10 e a largura de 5, a área deu 50, que é a máxima que tem. Ao pegar 8 de comprimento, 6 de largura, 48. Ai a medida que decresce o comprimento, aumenta a largura, e a altura tende a diminuir. Então o comprimento e a área são diretamente proporcionais, porque tanto o comprimento, quanto a área decresce.*

A dupla 1 e o aluno 3 calcularam para algumas possíveis dimensões do galinheiro em questão, mas não estavam colocando esses valores na tabela. Em seus cálculos, o aluno 3 comentou que havia encontrado a área máxima do galinheiro, que era 50 metros quadrados. Mais uma vez destacamos, que a dupla 2 não participou da discussão, mesmo tendo demonstrado que havia entendido a situação.

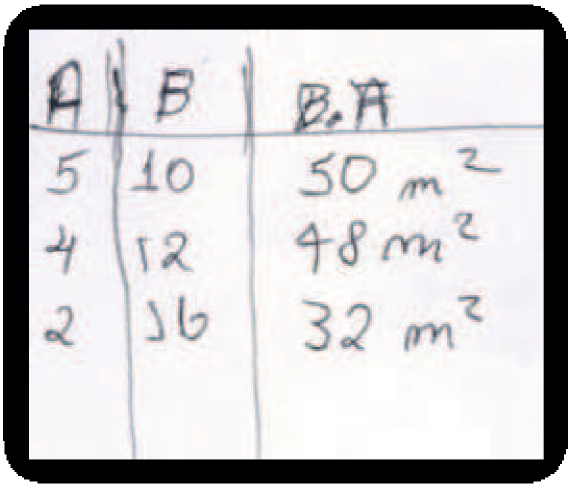
**Análise:**

A dupla 1 e o aluno 3 estavam analisando a situação para encontrar estratégias para resolver a atividade, mas não estavam tentando responder o que os itens pediam, então questionamos sobre a montagem da tabela que ainda não haviam feito. Entretanto, eles tinham analisado alguns possíveis valores para as dimensões do galinheiro, e encontrado a maior área, mas não haviam colocado na tabela. Destacamos o fato dos alunos se prenderem a busca de uma forma de resolver a situação sem analisar os itens propostos, que poderiam auxiliá-los na análise e compreensão da situação.

> De acordo com Silva (2013), além das dificuldades relacionadas à complexidade conceitual, existem as que são causadas pela concepção de ensino que interferem para que os alunos tenham uma compreensão efetiva e significativa de função. Por exemplo, tradicionalmente a aula inicia com a definição, o professor apresenta exemplos, resolve algumas questões e os alunos respondem uma lista de exercício, muitas vezes sem compreensão, reproduzindo apenas procedimentos mecânicos.
>
> Portanto, em nossa pesquisa, percebemos que os alunos apresentaram uma tendência em resolver as atividades de forma não reflexiva, buscando encontrar procedimentos diretos para resolver as situações.

Os alunos montaram a tabela, e ao analisá-la perceberam que havia valores diferentes que davam a mesma área, mas a dupla 1 e o aluno 3 não colocaram esses valores na tabela que construíram. Afirmaram que a área máxima era 50 metros quadrados, pois as outras áreas encontradas estavam sempre diminuindo. Mostraram-se muito motivados com as conclusões tiradas a partir de suas análises.

Figura 18: Tabela construída pela dupla 1



| A | B | B.A |
|---|---|---|
| 5 | 10 | 50 m² |
| 4 | 12 | 48 m² |
| 2 | 16 | 32 m² |

Fonte: Produções dos alunos.

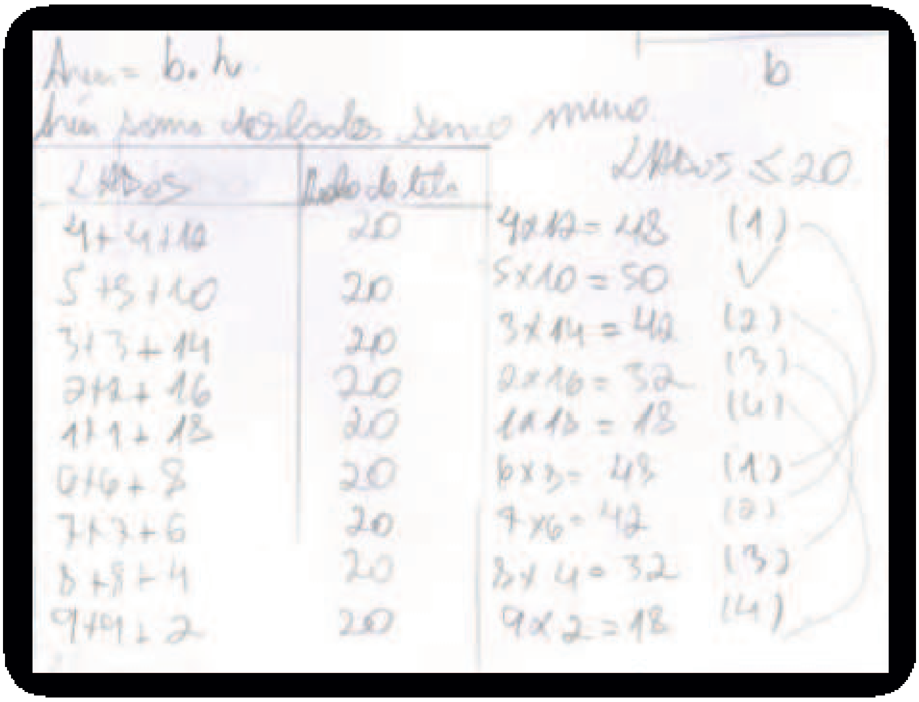
Figura 19: Tabela construída pelo aluno 3

| C | l | A |
|---|---|---|
| 10 | 5 | 50 |
| 8 | 6 | 48 |
| 6 | 7 | 42 |
| 4 | 8 | 32 |

Fonte: Produções dos alunos.

Portanto, a dupla 2 conseguiu compreender a situação, pois pudemos constatar a partir da tabela que a dupla construiu. Observamos que analisaram as medidas dos lados fazendo a soma, que tinha que ser igual a 20 metros. A partir daí, calcularam a área determinada pelas medidas dos lados que haviam atribuído, entretanto, não organizaram esses valores em uma ordem que facilitasse a visualização.

Figura 20: Tabela construída pela dupla 2

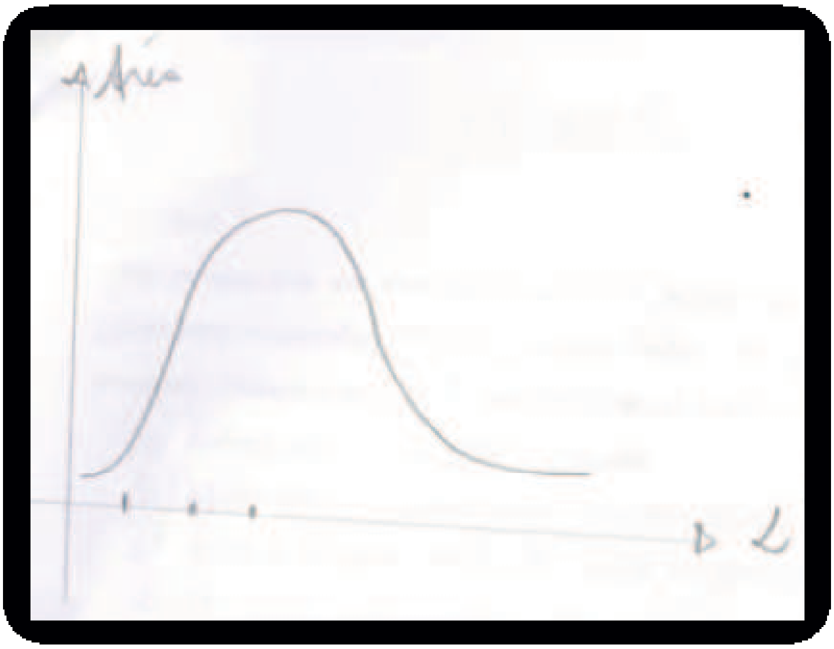



Fonte: Produções dos alunos.

Ao analisarem a tabela, os alunos trabalharam a segunda ideia essencial, covariação e taxa de variação, pois puderam analisar a variação das grandezas.

A partir da tabela, os alunos concluíram que a situação definia uma função quadrática, e esta assumia máximo, e dessa forma, o gráfico seria uma parábola com concavidade voltada para baixo. Abaixo temos um dos gráficos construídos.

Figura 21: Gráfico construído pela dupla 2



Fonte: Produções dos alunos.

As duplas 1 e 2 esboçaram os gráficos sem maiores detalhamentos, acreditamos que esboçaram para dar apenas a ideia do seu comportamento. Já o aluno 3 construiu apenas uma parte do gráfico, mas não conseguimos entender porque construiu dessa forma, pois em todos os momentos da resolução ele demonstrou estar compreendendo bem a situação.

Figura 22: Gráfico construído pelo aluno 3

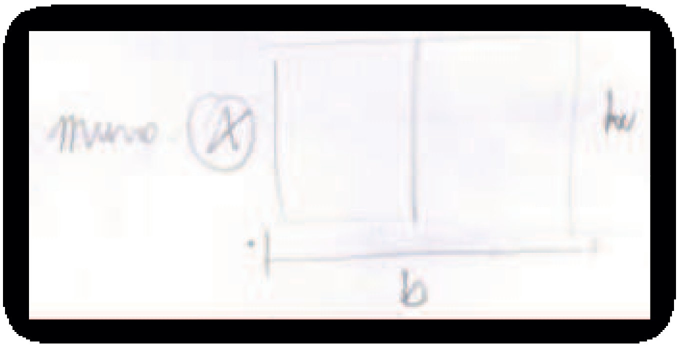

Fonte: Produções dos alunos.

**Análise:**

Ao analisar a tabela, os alunos concluíram facilmente que se tratava de uma função quadrática que assumia máximo, e dessa forma, o gráfico seria uma parábola com concavidade voltada para baixo. Destacamos então, como a análise dos itens os ajudou a compreender e resolver a situação, pois antes de responder os itens, os alunos se mostraram um pouco perdidos, sem saber quais caminhos percorrer.

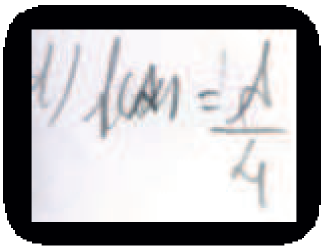
O item (d), que pedia uma expressão matemática para a situação, apenas a dupla 2 e o aluno 3 responderam, de modo que encontraram expressões diferentes. No entanto, os alunos se confundiram na construção da expressão, acreditamos que isso pode ter ocorrido tanto pela interpretação que fizeram, como também pela forma que esboçaram o desenho do galinheiro. É importante destacar que os alunos em nenhum momento verificaram as expressões para valores atribuídos a tabela.

Figura 23: Resposta da dupla 2 para o item (a)



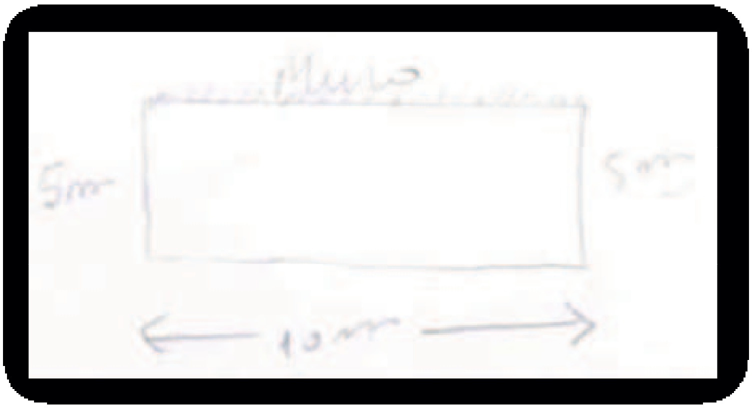

Fonte: Produções dos alunos.

Figura 24: Resposta da dupla 2 para o item (d)



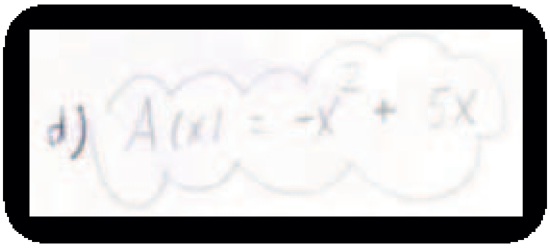

Fonte: Produções dos alunos.

Figura 25: Resposta do aluno 3 para o item (a)




Fonte: Produções dos alunos.

Figura 26: Resposta do aluno 3 para o item (d)




Fonte: Produções dos alunos.

E no último item, todos concluíram rapidamente que o galinheiro mais espaçoso deveria ter o formato de um quadrado com lado medindo 5 metros.

Os alunos exploraram a atividade nas representações escrita, tabular, gráfica e, mesmo se confundindo, a algébrica, e dessa forma, trabalharam a quinta ideia essencial, representações de função.

Portanto, observamos que os alunos se sentiram muito motivados ao resolver a atividade, e comentaram que a situação proposta na atividade era muito interessante.

**Análise:**

Ao analisar as expressões matemáticas escritas pelos alunos, percebemos que se confundiram na construção da expressão. Acreditamos que a confusão pode ter sido gerada por uma má interpretação dos dados obtidos, e também pela forma que esboçaram a situação no primeiro item. Além disso, observamos que os alunos não procuraram testar as expressões para os valores escritos na tabela.

> Portanto, a resolução da atividade foi muito proveitosa, pois percebemos o quanto os alunos se sentiram motivados e consideraram a atividade muito interessante. Destacamos também, como a sequência de itens ajudou os alunos na construção do conhecimento, contribuindo para uma melhor compreensão do conceito.

E assim, ao concluírem a resolução da atividade 7, tínhamos chegado ao fim da segunda etapa, já que a atividade 8 havia sido aplicada no inicio. Recolhemos a atividade 7 e comentamos que havíamos concluído a programação da segunda etapa, tanto em relação as atividades, como em relação ao horário.

### 5.2.3. 3ª Etapa (11/03/2016)

No inicio da terceira etapa tivemos um pequeno contratempo, e como a primeira atividade desta terceira etapa necessitaria do uso do GeoGebra, começamos a terceira etapa com a atividade 10.

Para melhor observar o trabalho realizado nesta terceira etapa, abaixo apresentamos um quadro com as atividades na sequência que foram trabalhadas, com seus respectivos conteúdos e ideias essenciais evidenciadas. Destacamos ainda, que devido ao contratempo no inicio desta etapa e o tempo decorrido nas atividades, não foi possível trabalhar a atividade 12 nesta etapa, a qual foi aplicada na quarta etapa.

Quadro 5: Atividades trabalhadas no 3ª Etapa

| Atividade | Conteúdo | Ideias essenciais |
|---|---|---|
| Atividade 10 | Máximo ou mínimo da função quadrática | CF, RF e CTV |
| Atividade 9 (verificação no GeoGebra) | Função afim | CF, RF e CTV |
| Atividade 11 | Aplicações da derivada – taxa de variação | CF, RF, CTV e FF |

Fonte: Elaborado pelo autor.

Atividade 10[15]

*Um fruticultor, no primeiro dia da colheita de sua safra anual, vende cada fruta por R$ 2,00. A partir daí o preço de cada fruta decresce R$ 0,02 por dia. Considere que esse fruticultor colheu 80 frutas no primeiro dia e a colheita aumenta uma fruta por dia.*

[15]Retirada e adaptada de GIOVANNI e BONJORNO, 2005, vol. 1, p. 187.

a) *Monte uma tabela relacionando o valor que as frutas serão vendidas e a quantidade de frutas.*
b) *Esboce o gráfico desta situação.*
c) *Qual o ganho do fruticultor no 5º dia de colheita? E no 9º dia? E no 11º dia?*
d) *Expresse o ganho do fruticultor com a venda das frutas como função do dia de colheita.*
e) *Qual o dia da colheita de maior ganho para o fruticultor?*
f) *Se não houvesse decrescimento do preço de cada fruta, qual seria o ganho do fruticultor no 6º dia? E no 8º dia?*
g) *Sem decrescimento de preço ainda estaria definida a mesma função? Comente.*

O objetivo da atividade 10 era trabalhar o conceito e as representações de função, partindo de uma aplicação prática da noção de função, de forma que os alunos desenvolvessem uma compreensão eficaz do conceito.

Com esta atividade trabalhamos três ideias essenciais para o desenvolvimento do conceito de função, as quais: conceito de função, representações de função e covariação e taxa de variação.

O conceito de função, primeira ideia essencial, foi trabalhada em toda a resolução da atividade.

Ao lerem o enunciado, percebemos que a atividade fez surgir alguns questionamentos, pois observamos que os alunos tiveram algumas dúvidas quanto a sua interpretação. Diante disso, um dos alunos da dupla 1 levantou o seguinte questionamento:

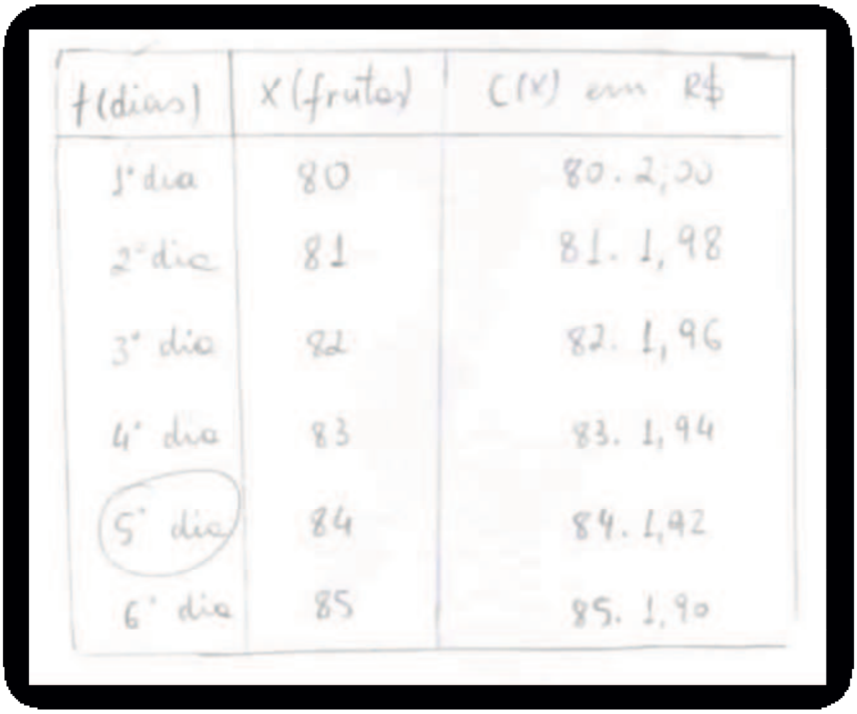
*D1: Só que essas 80 frutas do primeiro dia, ele já vendeu? Quando fizer a colheita do dia seguinte. Ele já vendeu ou não?*

A partir daí, os alunos tentaram interpretar a situação. Observamos que a dupla 2 buscou analisar o lucro do fruticultor em alguns dias.

Após uma análise detalhada da tabela, o aluno 3 considerou que seria uma função quadrática, pois analisou a diferença entre os lucros de cada dia e percebeu que a cada dia o lucro era menor. Diante disso, o aluno 3 afirmou que chagaria um dia em que o fruticultor não teria mais nenhum lucro, e assim, passaria a ter prejuízo.

Destacamos que o aluno 3 tirou suas conclusões a partir da análise da tabela, pois ainda não havia esboçado o gráfico e nem encontrado a expressão matemática.

Figura 27: Tabela construída pelo aluno 3



| t(dias) | x(frutos) | C(x) em R$ |
|---|---|---|
| 1º dia | 80 | 80 . 2,00 |
| 2º dia | 81 | 81 . 1,98 |
| 3º dia | 82 | 82 . 1,96 |
| 4º dia | 83 | 83 . 1,94 |
| 5º dia | 84 | 84 . 1,92 |
| 6º dia | 85 | 85 . 1,90 |

Fonte: Produções dos alunos.

Ao analisar a tabela, o aluno trabalhou a segunda ideia essencial, covariação e taxa de variação, pois pôde observar a variação das grandezas.

**Análise:**

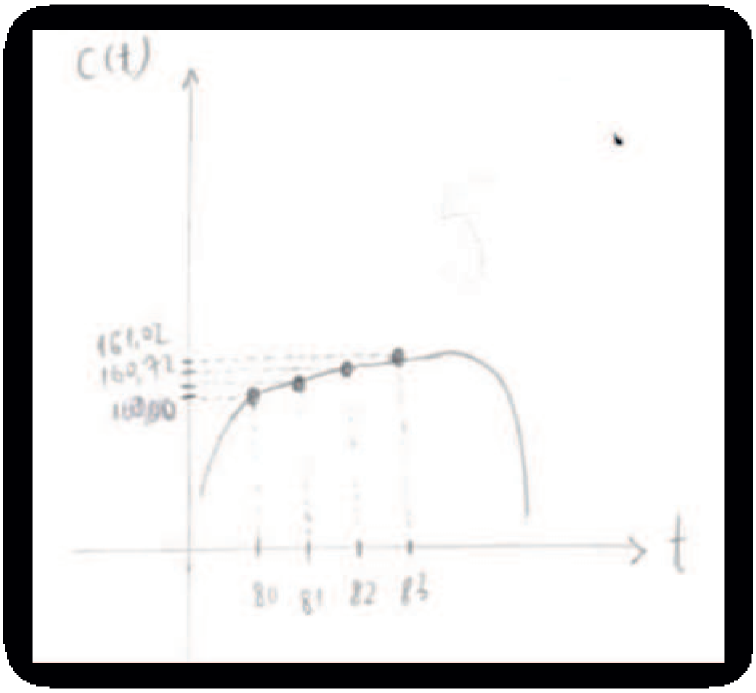
O aluno 3 construiu a tabela e analisou a variação entre os valores ao longo de seis dias, e a partir de sua análise pôde tirar algumas conclusões sobre a situação. Percebemos então, que o aluno conseguiu compreender a situação mesmo sem observar outras representações, como o gráfico e a expressão algébrica. Destacamos como o aluno teve uma compreensão ampla da situação analisando apenas a variação de alguns termos na tabela, e dessa forma, demonstrou um bom entendimento do conceito.

Os alunos continuaram analisando a atividade, e então o aluno 3 comentou sobre sua dúvida. Ele questionava se o gráfico iria considerar o custo em relação à produção, ou o custo em relação aos dias. Diante disso, perguntamos qual relação ele achava que a situação apresentava. A partir daí, ele nos explicou seu pensamento:

*A3: É que eu fico com aquela interrogação, porque vai ter um tempo em que vai ter um prejuízo aqui a mais. Então, considerando aqui um C(t), vai ter uma curva descendente, onde a medida em que os tempos vão passando, ai a produção decresce.*

Diante de sua análise, o aluno 3 comentou que haveria um lucro máximo, mas percebemos que o aluno continuava com a dúvida em relação as variáveis que iria considerar no gráfico. Abaixo temos o gráfico inicialmente construído pelo aluno 3:

Figura 28: Primeiro gráfico construído pelo aluno 3



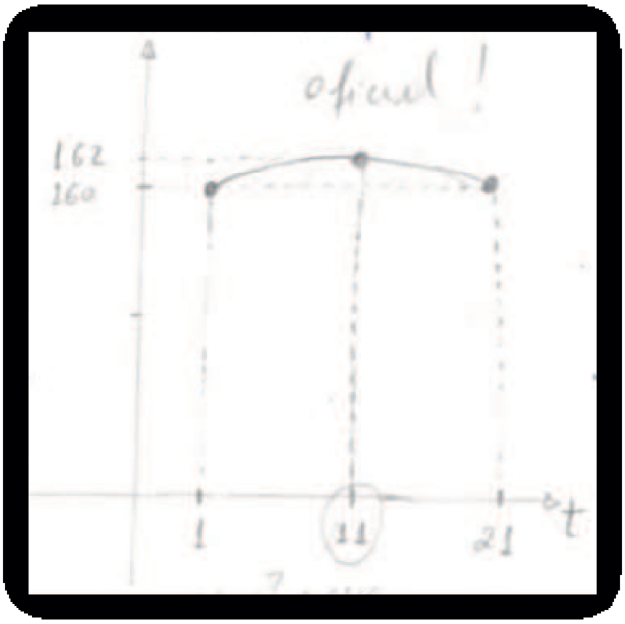

Fonte: Produções dos alunos.

**Análise:**

Percebemos que o aluno 3 estava com algumas dúvidas na interpretação da atividade, e estava com dificuldade na compreensão da relação existente na situação, e diante disso, estava com dúvida sobre o que iria relacionar para construir o gráfico.

Mas, depois de continuar analisando a situação, o aluno construiu o seguinte gráfico:

Figura 29: Segundo gráfico construído pelo aluno 3




Fonte: Produções dos alunos.

O aluno 3 relacionou as variáveis corretamente, mas esboçou apenas parte do gráfico, assim como havia feito na atividade 7.

A dupla 2 havia feito uma análise detalhada da tabela para alguns valores, chegando a conclusão que as frutas iam parar de dar lucro no 11° dia, e a partir daí, haveria dias em que teriam o mesmo lucro de dias anteriores. Então a dupla 2 explicou o seguinte:

*D2: Professora, eu acredito o seguinte, segundo nossos cálculos, essa fruta vai parar de dar lucro no 11º dia. Porque, como no dia 1 são 80, ai a cada dia que vai passando aumenta 1 fruta, e também a cada dia vai decrescendo 2 centavos em relação ao preço final. Então eu calculando aqui, quando chegou no 11º dia, ai vai ficar, no caso que são 90 frutas, vai ficar 162 reais. Só que no 12º dia, ela vai começar a ser no mesmo valor do dia anterior, 10º dia. No caso, 12º vai ser igual ao 10º, 13º dia vai ser igual ao 9º, ai sempre vai caindo o valor.*
*PP: E como fica isso no gráfico?*

A dupla 2, assim como nas outras atividades, fez um esboço do gráfico sem maiores detalhamentos. O gráfico esboçado era uma parábola com concavidade voltada para baixo.

A dupla 2 comentou, que em sua análise, ao observar a diferença dos lucros de cada dia, também perceberam que enquanto o valor de cada fruta decrescia dois centavos, o valor do lucro decrescia quatro centavos.

Os alunos começaram a discutir sobre alguns pontos, pois questionaram que a atividade não deixava claro se o fruticultor estava vendendo ou estocando, e queriam saber se ele estava vendendo por semana ou por ano. Também questionaram o fato de aumentar uma fruta por dia, e se seria considerado para cada dia uma nova colheita com uma fruta a mais, ou se seria a mesma colheita do dia anterior com uma fruta a mais. Houve muita discussão, pois os alunos buscaram interpretar as informações da atividade, e diante da discussão, apresentaram suas conclusões:

*D2: Se ele fala que ele pegou 80 frutas no primeiro dia, mas tem a condição que no segundo dia vai aumentar 1 a mais, então no primeiro dia, se eu peguei 80, então amanhã eu vou pegar 81, no outro dia 82, porque é a condição inicial.*
*D1b: Mas pode ser assim... 80 frutas no primeiro dia, no segundo vai pegar mais 81, ou seja, 161 frutas no total.*
*D2: Porque eu peguei assim... Se ele diz assim... Considere que esse fruticultor colheu 80 frutas no primeiro dia, ai, e a colheita, no caso, 80 frutas, aumenta uma fruta por dia.*
*D2: Ai eu fiz assim, os 80 aumenta 1 fruta por dia.*
*A3: Olha como eu fiz! No primeiro dia tem 80 vezes 2 reais, 160. No segundo dia, teve 81 frutas colhidas a preço de 1 e 98, 160 reais e 38. Ele lucrou 38 centavos entre os dois primeiros dias.*

Os alunos apresentaram diferentes interpretações para a situação, procurando defender seus pontos de vista. Eles se mostraram muito motivados a resolver a atividade e não buscaram nossa confirmação em relação as suas resoluções, dessa forma, observamos que os alunos demonstraram estar mais seguros em suas estratégias de resolução.

**Análise:**

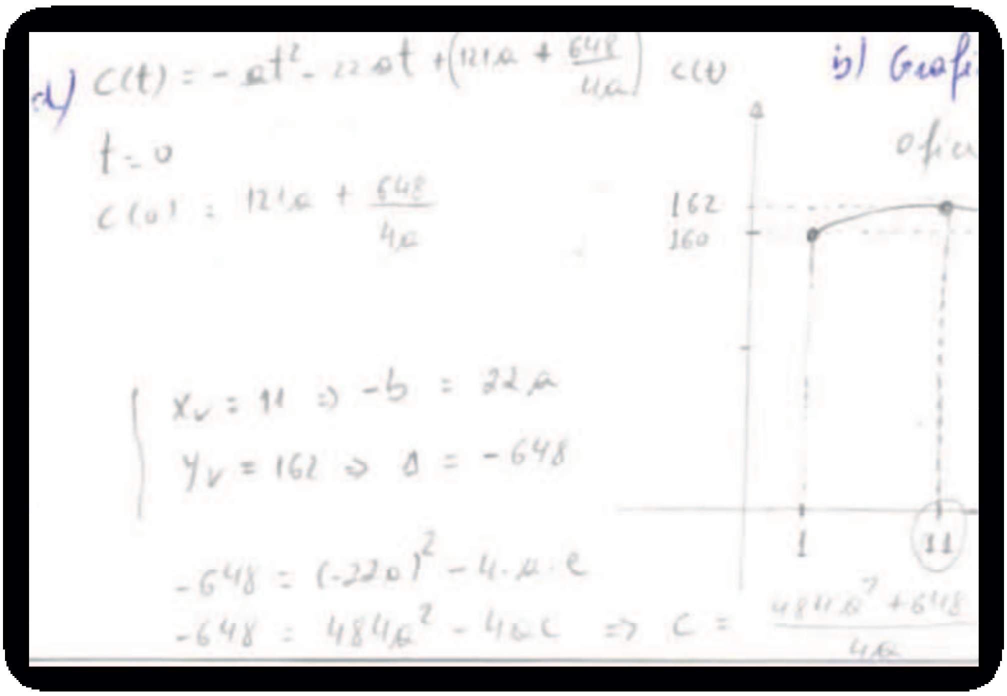
É importante destacar como a atividade motivou os alunos, pois houve muita discussão e os alunos buscaram interpretar todas as informações existentes na atividade, e cada um procurou apresentar seus questionamentos e conclusões. Percebemos então, que a metodologia modificou o ambiente de sala de aula, tornando os alunos muito mais ativos e motivados a buscar a resolução da situação proposta. Destacamos também, o fato dos alunos não se mostrarem mais dependentes da confirmação do professor, pois passaram a apresentar suas conclusões, defendendo suas estratégias diante dos outros alunos.

Portanto, os alunos responderam os itens da atividade, mas não estavam conseguindo a expressão matemática que era pedida no item (d). O aluno 3 comentou que a dificuldade estava em montar a expressão com base nas raízes, pois não sabia quem eram os zeros da função.

A dupla 2 também comentou que não estava conseguindo encontrar a expressão, e já haviam feito várias tentativas. Então, chamamos a atenção dos alunos para a forma que haviam colocado os valores na tabela, e perguntamos como poderiam generalizar os cálculos que haviam feito para esses valores? Entretanto, os alunos continuaram afirmando que estava sendo muito difícil encontrar a expressão, e novamente insistimos para analisarem a tabela, e perguntamos como ficaria se fosse generalizado para um número n de dias? Diante disso, o aluno 3 nos apresentou seu raciocínio:

*A3: Eu tô trabalhando a lei de formação em função das coordenadas do vértice. Primeiro, porque o x do vértice é 11, e o y do vértice é 162. Ai é aquela historinha, menos b sobre dois a, menos delta sobre quatro a. Ai eu cheguei a essa equação aqui...*

Figura 30: Cálculos do aluno 3 para o item (d)




Fonte: Produções dos alunos.

O aluno 3 buscou encontrar a expressão matemática a partir das coordenadas do vértice, mas não encontrou uma expressão que fosse válida para a situação.

**Análise:**

Os alunos apresentaram uma grande dificuldade em encontrar uma expressão matemática que representasse a situação, fizeram muitas tentativas, mas não conseguiram. Mesmo com nossos questionamentos, tentando chamar a atenção deles para que encontrassem um caminho, eles não procuraram refletir sobre nossos questionamentos. Destacamos nesta atividade, que não esperávamos que os alunos tivessem tanta dificuldade em encontrar a representação algébrica da situação.

É importante destacar também, que ao aplicarmos parte desta oficina em uma turma do mestrado e em um minicurso apresentado no IX Encontro Paraibano de Educação Matemática (EPBEM), a dificuldade em encontrar a lei de formação da função persistiu. Portanto, pudemos perceber que este aspecto parece ser um dos mais difíceis no estudo de função.

Diante dos questionamentos e tentativas para encontrar uma expressão matemática, percebemos que o aluno (a) da dupla 1 havia interpretado a atividade de outra forma, e comentou que o inicio da situação estava inconstante, pois os valores que estavam variando eram sempre os anteriores. Na forma que entendeu, ele comentou que se houvessem cem colheitas, a primeira não teria nenhum lucro e a última seria a colheita de maior lucro.

Os outros alunos demonstraram não estar entendendo o que o aluno comentava, e perguntaram se ele estava fazendo de trás para frente. Este mesmo aluno da dupla 1, não havia tentado resolver os itens propostos, pois estava buscando encontrar uma expressão matemática para então, responder os itens. Diante das afirmações do aluno, nós lemos o enunciado da atividade junto com todos os alunos, chamando a atenção para as informações fornecidas pela atividade, e assim, o aluno da dupla 1 percebeu que tinha interpretado a situação de forma diferente.

**Análise:**

Portanto, acreditamos que o aluno (a) da dupla 1 tenha feito uma leitura rápida do enunciado e a partir daí buscou encontrar uma expressão algébrica para a situação. Observamos que ele não procurou refletir sobre as informações

> contidas no enunciado, e como ele mesmo afirmou, não procurou resolver os itens propostos, queria encontrar a expressão algébrica primeiro, para responder os itens a partir dela.
>
> Dessa forma, destacamos o fato do aluno não procurar ler novamente o enunciado e refletir sobre a situação, para que pudesse encontrar estratégias para resolvê-la. Também destacamos, a dependência da expressão algébrica, pois como o aluno mesmo afirmou, queria encontrá-la para resolver os itens. Portanto, de acordo com Silva (2013), muitas vezes a manipulação de objetos algébricos é o único meio para justificar ou provar declarações gerais, mas usar apenas símbolos algébricos pode causar um bloqueio ou uma obstrução do significado matemático, levando a dificuldades em algumas interpretações dos resultados.

Sendo assim, os alunos resolveram todos os outros itens, mas não conseguiram encontrar uma expressão matemática para a situação mesmo com nossos questionamentos.

Dessa forma, os alunos analisaram a situação nas representações escrita, tabular e gráfica, não conseguindo a representação algébrica. Mesmo não explorando todas as representações, os alunos trabalharam a quinta ideia essencial, representações de função.

Então, após recolhermos suas produções, fomos ao quadro para junto com eles montar uma tabela e a partir dela procurar generalizar para um número n de dias.

Dessa forma, ao atribuirmos valores na tabela, fizemos perguntas aos alunos de como deveríamos proceder para atender as condições contidas na situação, chamando atenção para as operações realizadas. Logo abaixo temos uma tabela construída com o mesmo raciocínio utilizado em sala.

Tabela 1: Tabela construída com as sugestões dos alunos a partir de nossas perguntas

| | Dia | Colheita | Preço | Lucro |
|---|---|---|---|---|
| $n = 1$ | 1º | 80 | 2,00 | $80 \cdot 2{,}00 = 160$ |
| $n = 2$ | 2º | 81 | 1,98 | $(80 + 1) \cdot (2{,}00 - 0{,}02)$ |
| $n = 3$ | 3º | 82 | 1,96 | $(80 + 2) \cdot (2{,}00 - 0{,}02 \cdot 2)$ |
| $n$ | n | $80 + (n - 1)$ | $2{,}00 - 0{,}02(n - 1)$ | $[80 + (n - 1)] \cdot [2{,}00 - 0{,}02(n - 1)]$ |

Fonte: Elaborada pelo autor.

Ao construir a tabela dessa forma, os alunos começaram a observar as operações efetuadas, e ao chegar ao terceiro dia de colheita, afirmaram ter entendido como encontrar uma expressão para a situação.

**Análise:**

De modo geral, a atividade proporcionou um ambiente de sala de aula diferente, pois os alunos assumiram uma postura mais ativa na busca das resoluções. Também puderam analisar a situação de formas diferentes, chegando a várias conclusões que contribuíram para a compreensão da situação, e consequentemente, para a compreensão do conceito de função. Portanto, de acordo com Brandão (2014), quando representamos uma função através de uma tabela, de um gráfico, de uma regra verbal ou de uma expressão algébrica, de modo que essas representações estejam associadas entre si, gera-se uma compreensão mais abrangente do conceito.

Portanto, nesta atividade, mesmo não conseguindo a representação algébrica, os alunos não deixaram de explorá-la, com exceção do aluno (a) da dupla 1, que fez uma interpretação diferente para a situação. Observamos também, que os alunos se mostraram mais seguros em suas respostas, pois não buscaram a confirmação do professor e procuraram defender seus pontos de vista diante dos outros alunos.

Sendo assim, após concluirmos a montagem da tabela e os alunos afirmarem ter entendido como encontrar a expressão matemática que representava a situação, distribuímos a atividade 9. Atividade esta, que deveria ter sido a primeira da terceira etapa, mas devido ao contratempo inicial deixamos para ser aplicada neste momento da terceira etapa.

Atividade 9[16]

*Em certo país, as pessoas maiores de 21 anos pagam um imposto progressivo sobre os rendimentos. Esse imposto corresponde a 10% sobre as primeiras 1.000 unidades monetárias recebidas e 20% sobre os ganhos que ultrapassam esse valor.*

*a) Monte uma tabela que relacione a renda em unidades monetárias e imposto a ser pago.*

*b) Uma pessoa com um rendimento de 500 unidades monetárias pagará quanto de imposto? E uma pessoa com 1500 unidades?*

[16]Retirada e adaptada de NOGUTI, 2014, p. 152.

c) *Nessas condições, indicando* ***i*** *para o valor do imposto e por* ***r*** *uma renda superior a 1.000, escreva uma forma geral para o cálculo do imposto.*
d) *Esboce o gráfico desta situação.*
e) *E se fosse cobrado um imposto de 30% pelos ganhos que ultrapassem 2.000 unidades, quanto pagará uma pessoa com uma renda de 2.300 unidades? E uma com 3.100 unidades?*

O objetivo da atividade 9 era trabalhar o conceito e as representações de função a partir de uma situação concreta, fazendo com que os alunos tenham um melhor entendimento do conceito de função através da exploração dos itens propostos nesta atividade e também utilizar o software GeoGebra na exploração do gráfico da função.

Nesta atividade também trabalhamos três ideias essenciais, as quais: conceito de função, representações de função e covariação e taxa de variação.

A primeira ideia essencial, conceito de função, assim como nas outras atividades, foi trabalhado em toda a resolução, desde a leitura do enunciado até o último item proposto.

Os alunos inicialmente fizeram a leitura do enunciado, e ao buscar interpretar a situação, comentaram que se uma pessoa tivesse apenas uma unidade monetária a mais do que as primeiras mil, pagaria imposto de 20% em cima dessa única unidade monetária.

Diante da análise dos alunos, e assim como na atividade anterior, insistimos para que montassem a tabela. Então, a dupla 2 apresentou alguns questionamentos:

*D2a: Porque aqui ta dizendo que vai pagar 10% sobre as primeiras mil unidades... Mas se, por exemplo, ele tirar só 200 ou 100 unidades, ele vai diminuir a porcentagem para pagar? Ou ele não vai pagar nada?*
*D2b: Mas não está falando assim, que esse imposto corresponde aos 10% de 1000? 10% de 1000, não são 100?*
*D2a: Sim, e se ele não chegar a 1000?*

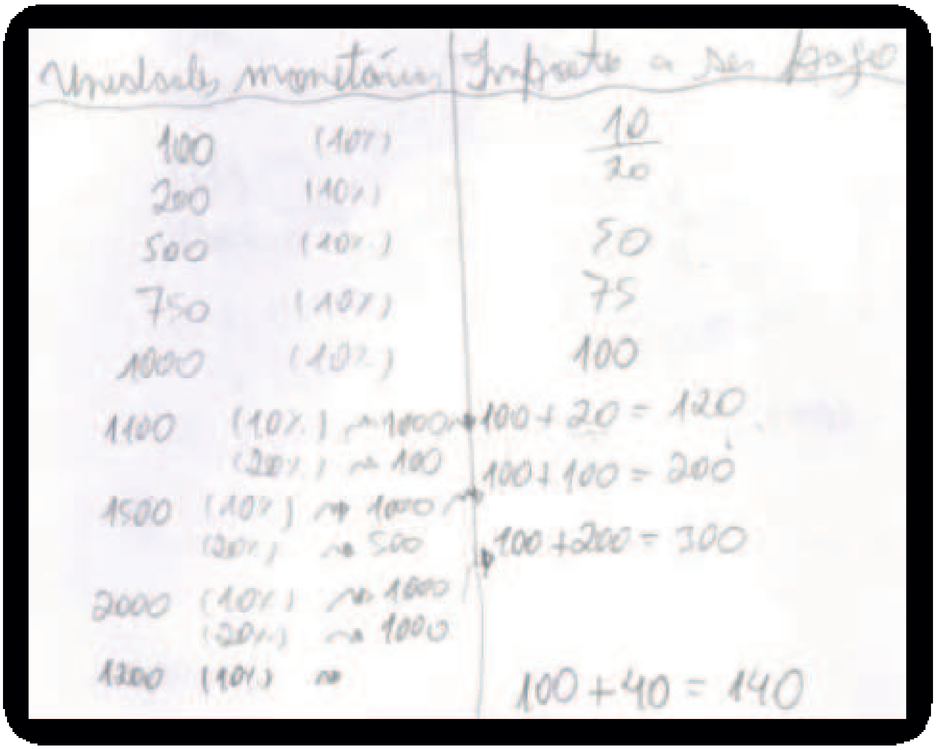
Os alunos estavam procurando refletir para o caso de uma pessoa não atingir as mil unidades monetárias, a partir daí, questionamos como eles poderiam interpretar esse fato na situação em questão. E assim, o aluno (b) da dupla 2 comentou que já havia feito três interpretações diferentes, mas nenhuma estava dando certo. Considerando este fato, houve muita discussão, pois os alunos tentaram encontrar respostas para seus questionamentos.

**Análise:**

Observamos nesta atividade, assim como na anterior, uma postura mais ativa dos alunos, procurando refletir sobre vários pontos da atividade, ou seja, buscando solução para seus próprios questionamentos. No inicio da atividade, os alunos procuraram refletir sobre os rendimentos de uma pessoa que não atingiu as mil unidades monetárias, para saber como seria o imposto que essa pessoa iria pagar. Entretanto, os alunos continuavam um pouco resistentes a montar a tabela e analisá-la.

No entanto, após nossa insistência quanto a montagem da tabela, os alunos procuraram montar a tabela. Abaixo apresentamos uma das tabelas construídas pelos alunos.

Figura 31: Tabela construída pela dupla 2



| Unidade monetária | | Imposto a ser pago |
|---|---|---|
| 100 | (10%) | 10 |
| 200 | (10%) | 20 |
| 500 | (10%) | 50 |
| 750 | (10%) | 75 |
| 1000 | (10%) | 100 |
| 1100 | (10%) → 1000<br>(20%) → 100 | 100 + 20 = 120<br>100 + 100 = 200 |
| 1500 | (10%) → 1000<br>(20%) → 500 | 100 + 200 = 300 |
| 2000 | (10%) → 1000<br>(20%) → 1000 | |
| 1200 | (10%) → | 100 + 40 = 140 |

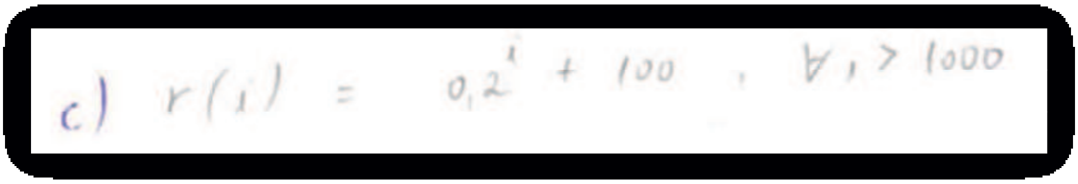
Fonte: Produções dos alunos.

Observamos que a dupla 2 e o aluno 3, calcularam os impostos para alguns valores menores do que mil. Sendo assim, acreditamos que eles entenderam como seriam os impostos pagos no país considerado na atividade.

Destacamos que ao analisar a variação das grandezas na tabela, os alunos trabalharam a segunda grande ideia essencial para o desenvolvimento do conceito de função, covariação e taxa de variação.

A partir daí, perguntamos se já haviam escrito uma expressão matemática para a situação, e então o aluno 3 nos apresentou a seguinte expressão:

Figura 32: Resposta do aluno 3 para o item (c)




Fonte: Produções dos alunos.

Portanto, o aluno 3 escreveu uma expressão em que está definida uma função exponencial, onde a renda está dependendo do imposto. Acreditamos que o aluno tenha se confundido na interpretação da situação, além disso, acreditamos que o aluno não procurou verificar se a expressão escrita por ele era válida para os valores da tabela.

É importante destacar também, que assim como na atividade anterior, os alunos tiveram muita dificuldade na busca de uma expressão matemática para a situação, mesmo nós chamando atenção para o fato de que podiam utilizar o mesmo raciocínio usado na atividade anterior.

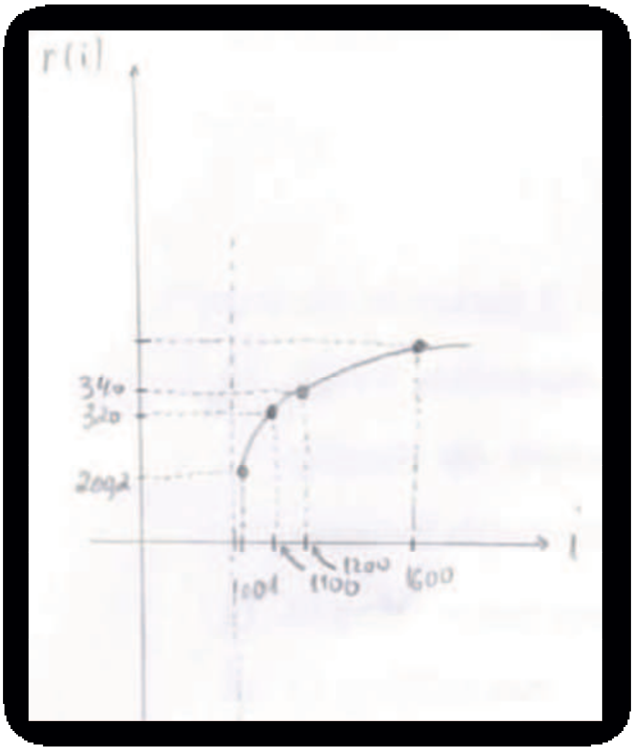
**Análise:**

Acreditamos que o aluno 3 tenha se confundido na interpretação do item (c) e também na interpretação da situação em questão, pois na análise dele, a situação definia uma função exponencial, na qual a renda estava dependendo do imposto. Portanto, nesta atividade os alunos também tiveram dificuldade em encontrar uma expressão algébrica que representasse a situação. É importante destacar, que mesmo ao sinalizarmos que poderiam utilizar o mesmo raciocínio utilizado na atividade anterior para encontrar uma expressão, eles continuaram com dificuldades.

O aluno 3 construiu o gráfico utilizando os valores atribuídos a tabela, e acreditamos que por influência da expressão escrita por ele, desenhou o gráfico como sendo uma curva. Então, observou o gráfico construído e de acordo com suas análises, fez alguns comentários:

*A3: Eu constatei uma coisa aqui em relação ao comportamento do gráfico. Se olharmos para os impostos em função da taxa monetária que eles cobram. Além do ganho, eles têm um imposto que eles vão cobrar de tal forma que eles não façam uma reta. Não é uma reta, é uma curva do tipo* $0{,}2^{i} + 100$.

Figura 33: Gráfico construído pelo aluno 3




Fonte: Produções dos alunos.

O aluno 3 ainda acrescentou que a sua observação não era válida para qualquer valor de i, mas apenas para valores maiores que mil. Acreditamos que esta observação foi feita com base na expressão matemática escrita pelo aluno, no entanto, observamos que o aluno não procurou refletir sobre os valores contidos na tabela, ou seja, não buscou verificar suas conclusões.

**Análise:**

> Acreditamos que o aluno não tenha feito uma verificação para saber se a expressão que ele havia encontrado era válida, ou seja, não atribuiu valores contidos na tabela para conferir os resultados. Já na construção do gráfico ele utilizou os valores da tabela, mas acreditamos que por influência da expressão matemática que ele escreveu, acabou desenhando o gráfico como sendo uma curva.

Portanto, nessa primeira parte da atividade, apenas o aluno 3 escreveu uma expressão matemática para a situação, as duplas 1 e 2 não conseguiram escrever nenhuma expressão. Então, como todos já haviam resolvido os outros itens, distribuímos aos alunos a segunda parte da atividade.

*2ª parte da atividade 9*

*f) Agora utilizando o GeoGebra, insira na caixa de entrada a forma geral para o cálculo do imposto, escrita por você no item (c), lembrando de substituir a variável dependente por f e a independente por x.*

*g) O gráfico que aparece corresponde ao esboçado por você no item (d)? Explique.*

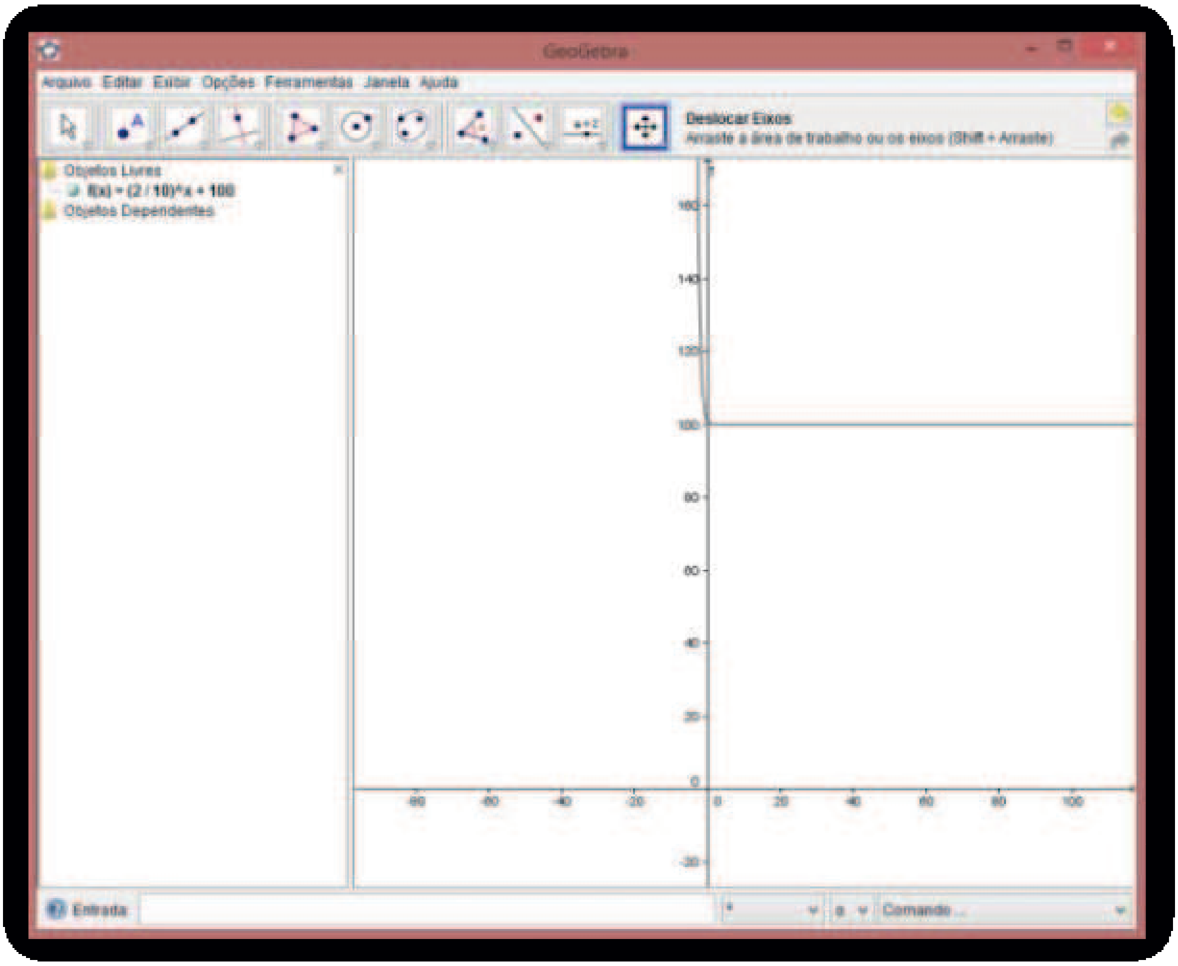
*h) O gráfico construído no GeoGebra representa fielmente a situação proposta nesta atividade? Explique.*

*i) Insira o ponto A (opção novo ponto, 2ª janela) sobre o gráfico de f e o movimente (opção mover, 1ª janela) observando na janela algébrica os valores correspondentes da abscissa e ordenada. Você consegue encontrar valores correspondentes aos que estão na tabela construída por você no item (c)? Explique.*

*j) O que você pode concluir sobre o uso do GeoGebra nesta atividade?*

O aluno 3 se dirigiu a um dos computadores para verificar suas respostas. Ao inserir no GeoGebra a expressão matemática escrita por ele, encontrou o seguinte gráfico:

Figura 34: Gráfico construído no GeoGebra referente a expressão escrita pelo aluno 3




Fonte: Elaborado pelo autor.

O aluno ficou muito surpreso com o gráfico encontrado, pois era muito diferente do gráfico que havia construído. Perguntamos então, se ele havia testado a sua expressão matemática com os valores que foram atribuídos a tabela. Ele afirmou que havia testado os valores.

**Análise:**

Acreditamos que o aluno 3 tenha cometido alguns enganos em suas verificações, e dessa forma, encontrou uma expressão matemática que não representava a situação e definia um gráfico totalmente diferente do que o aluno havia construído. Observamos que o gráfico construído pelo aluno continha os valores que foram atribuídos a tabela. Questionamos o aluno se havia feito a verificação da sua expressão utilizando os valores que ele atribuiu a tabela, e ele afirmou que havia feito essa verificação, entretanto, acreditamos que ele não deve ter feito essa verificação.

Dessa forma, fomos ao quadro para montarmos uma expressão matemática junto com os alunos, assim como fizemos na atividade anterior. Abaixo apresentamos uma tabela que representa o raciocínio utilizado em sala.

Tabela 2: Tabela construída com as sugestões dos alunos a partir de nossas perguntas

| Unidades Monetárias (r) | Imposto |
|---|---|
| 1000 | 100 |
| 1100 | $100 + 0{,}2(1100 - 1000) = 120$ |
| 1500 | $100 + 0{,}2(1500 - 1000) = 200$ |
| R | $100 + 0{,}2(r - 1000)$ |

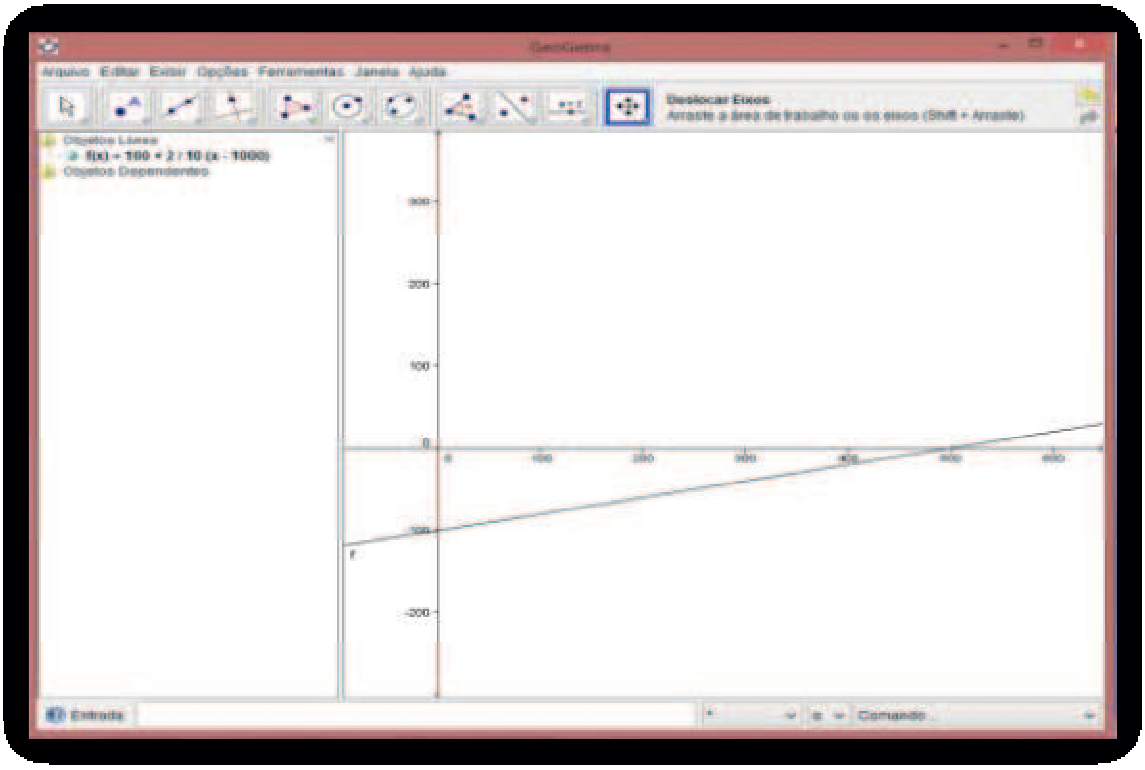
Fonte: Elaborada pelo autor.

Assim como na atividade anterior, os alunos compreenderam como seria a expressão matemática que representaria a situação, construída a partir da tabela. Após essa compreensão, todos os alunos se dirigiram aos computadores.

Ao inserir no GeoGebra a expressão matemática que encontramos juntos, o aluno 3 comentou que era uma função afim, pois observou que o gráfico construído era uma reta, pois todos os alunos pensavam que seria uma curva.

Abaixo apresentamos o gráfico encontrado pelos alunos ao inserir a expressão matemática no GeoGebra.

Figura 35: Gráfico construído no GeoGebra referente a expressão encontrada junto com os alunos a partir da tabela

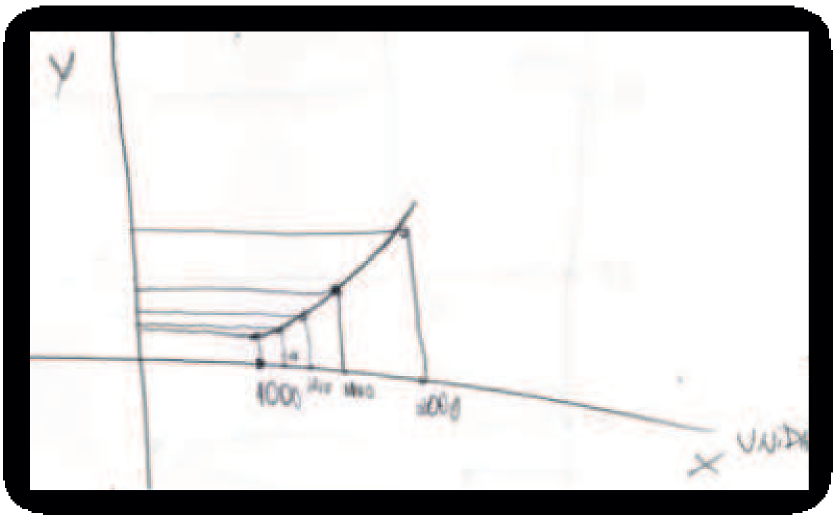


Fonte: Elaborado pelo autor.

Sendo assim, os alunos encontraram o gráfico como sendo uma reta, e se mostraram surpresos já que esperavam encontrar uma curva como haviam esboçado.

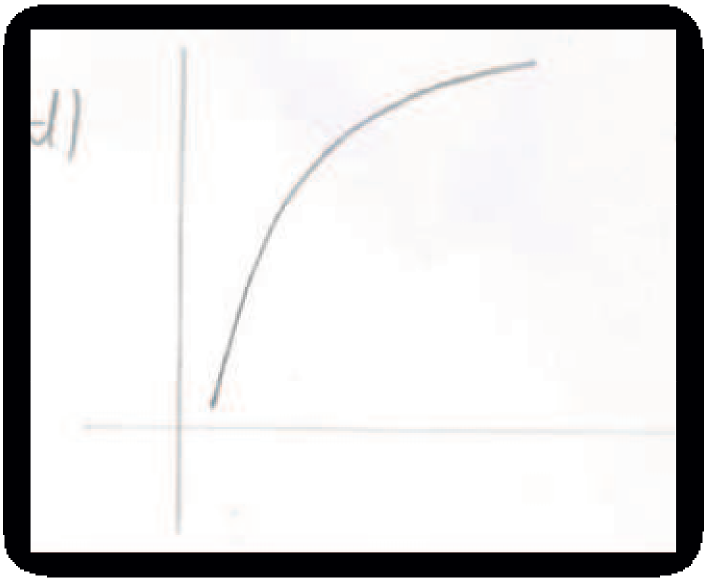
Abaixo temos os gráficos construídos pelas duplas 1 e 2.

Figura 36: Gráfico construído pela dupla 1



Fonte: Produções dos alunos.

Figura 37: Gráfico construído pela dupla 2



Fonte: Produções dos alunos.

Portanto, acreditamos que as duplas 1 e 2 tenham construído o gráfico como sendo uma curva influenciados pelos comentários do aluno 3. Além disso, observamos que os alunos não procuraram refletir sobre a variação dos dados para perceber o comportamento do gráfico.

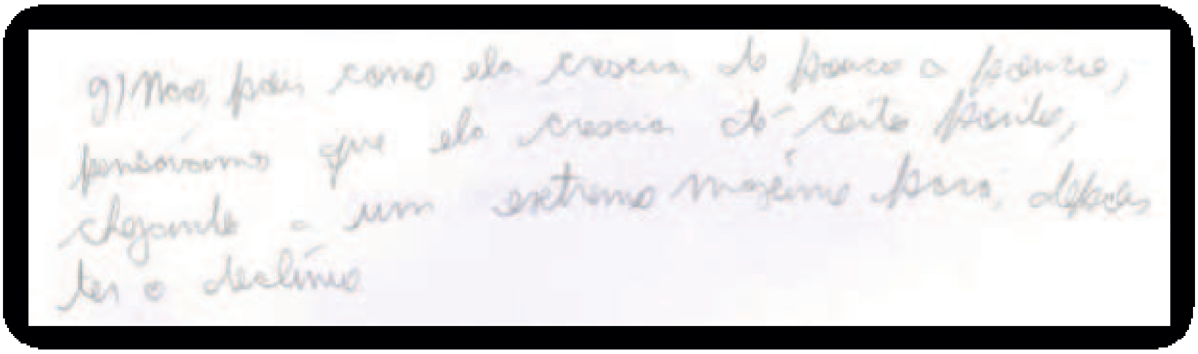
Após observar no GeoGebra, o gráfico que representava a situação, o aluno 3 comentou que montou sua expressão matemática baseado na fórmula para o cálculo de juros compostos.

**Análise:**

Os alunos pensavam que o gráfico que representava a situação era uma curva, mas acreditamos que as duplas 1 e 2 fizeram essa interpretação um pouco influenciados pelas conclusões do aluno 3. Observamos que os alunos não analisaram a variação dos valores para identificar o comportamento da função. Destacamos também, o fato do aluno 3 ter associado a situação a fórmula de juros compostos, a partir daí, percebemos que em alguns casos os alunos procuram utilizar fórmulas diretas.

Portanto, os alunos não esperavam que o gráfico fosse uma reta, e comentaram isso em suas respostas ao item (g).

Figura 38: Resposta da dupla 2 para o item (g)



g) Nós pois como ela crescia de pouco a pouco, pensávamos que ela crescia de certo ponto, chegando a um extremo máximo para depois ter o declínio

Fonte: Produções dos alunos.

A dupla 2 acreditava que o gráfico crescia de pouco a pouco no inicio e depois teria um declínio, já o aluno 3 achava que a situação definia uma função exponencial, mas constatou que se tratava de uma função afim.

Nesta atividade os alunos puderam explorar a situação nas representações escrita, tabular, algébrica e gráfica, trabalhando assim, a quinta ideia essencial, representações de função. Mesmo surgindo algumas dúvidas, a partir de nossa mediação os alunos compreenderam como seria a expressão algébrica, e a partir daí, puderam explorar o gráfico no GeoGebra.

**Análise:**

Sendo assim, surgiram dúvidas quanto à resolução de alguns itens da atividade, mas acreditamos que algumas foram superadas ao longo da atividade. Esperávamos que nesta atividade os alunos não tivessem mais tanta dificuldade em encontrar uma expressão matemática que representasse a situação, mas ainda houve muita dificuldade.

Portanto, após os alunos concluírem a exploração da atividade no GeoGebra, a recolhemos e distribuímos a atividade 11.

Atividade 11[17]

*Sabemos que a área de um quadrado é em função de seu lado. Sendo assim:*

*a) Monte uma tabela que relacione o lado de um quadrado e sua área.*

[17]Retirada e adaptada de FLEMMING, 2006, p. 245.

b) *Esboce o gráfico desta situação.*

c) *Escreva uma expressão matemática que represente esta situação.*

d) *Qual a taxa de variação média da área de um quadrado em relação ao lado quando este varia de 2,5 m a 3 m?*

e) *Derive a função que representa esta situação.*

f) *Qual a taxa de variação da área em relação ao lado quando este mede 4 m?*

O objetivo desta atividade era trabalhar o conceito e as representações de função a partir de uma situação simples, buscando contribuir para um melhor entendimento do conceito de função por parte dos alunos.

Além disso, com esta atividade trabalhamos quatro ideias essenciais, as quais: conceito de função, representações de função, covariação e taxa de variação e famílias de função.

A primeira ideia essencial, conceito de função, foi trabalhada em toda a resolução da atividade.

Os alunos, ao lerem o enunciado, demonstraram inicialmente, ter considerado a atividade bem interessante e mais fácil do que as outras atividades até então analisadas.

O aluno 3 assim que leu o enunciado da atividade, afirmou que se tratava de uma função quadrática. A partir daí, não houve maiores discussões, pois tudo leva a crer que os alunos não tinham dúvidas.

**Análise:**

Observamos que a atividade não gerou muitas discussões, pois os alunos demonstraram não ter dúvidas, além disso, eles próprios afirmaram ter considerado a situação de fácil resolução.

Observamos que um dos alunos da dupla 1 se confundiu ao calcular a taxa de variação pedida no item (d), calculando a medida do lado sobre a área. Então, o aluno comentou sobre o resultado que encontrou:

*D1a: A razão deu, nessa variação, deu 2 sobre 11.*

*PP: A taxa de variação?*

*D1a: Eu fiz a variação do lado sobre a variação da área.*

*PP: Você fez lado sobre área?*

Portanto, pudemos perceber que o aluno (a) da dupla 1 se confundiu com a ordem dos termos considerados, e também não procurou refletir sobre o resultado que havia encontrado.

Nesse momento, procuramos ler o item (d) junto com o aluno, de forma que ele procurasse refletir um pouco sobre a pergunta em questão e sobre o resultado que ele havia encontrado. A partir daí, o aluno 3 também procurou refletir sobre a questão, e comentou o seguinte:

*A3: Quando se fala de taxa de variação, falasse necessariamente de porcentagem de diferença. É porque é uma porcentagem em cima de 6,25. Porque, por exemplo, pegando aqui... A diferença de delta A é 2,75 metros quadrados, ou seja, 2,75 sobre 6,25 vezes 100. É 44% de taxa de variação.*

O aluno 3 se mostrou muito motivado a explorar a atividade, e dessa forma, procurou analisar aspectos que não eram solicitados, ou seja, foi além do que era proposto na atividade.

**Análise:**

Acreditamos que o aluno (a) da dupla 1 tenha feito uma má interpretação da ordem dos termos ao procurar resolver o item (d), e também não procurou refletir sobre o resultado que havia encontrado. Já o aluno 3 demonstrou-se muito interessado pela atividade, analisando todos os aspectos possíveis na situação. De modo geral, percebemos que a atividade motivou os alunos, e mesmo com alguns enganos, acreditamos que os alunos compreenderam a situação.

Um dos alunos da dupla 2 estava com dúvida no item (d), pois em sua interpretação achava que as medidas dadas seriam áreas de quadrados. Então ele nos perguntou:

*D2b: Professora, nessa letra D, quando ele fala em relação a 2,5 a 3 metros. 2,5 é uma área de um quadrado e 3 metros é outra área? Ou 2,5 é um lado e 3 metros é outro lado?*

Então lemos o item junto com o aluno para que ele pudesse interpretar e compreender o que significava aquelas medidas, mas percebemos que o aluno continuou com dúvida. No entanto, o aluno afirmou ter feito alguns cálculos, mas não tinha certeza se estavam corretos.

*D2b: Porque eu tinha feito agorinha... Eu botei 7,5 sobre 0,5 que dava 15.*
*PP: O lado mede quanto? E depois passa a medir quanto?*

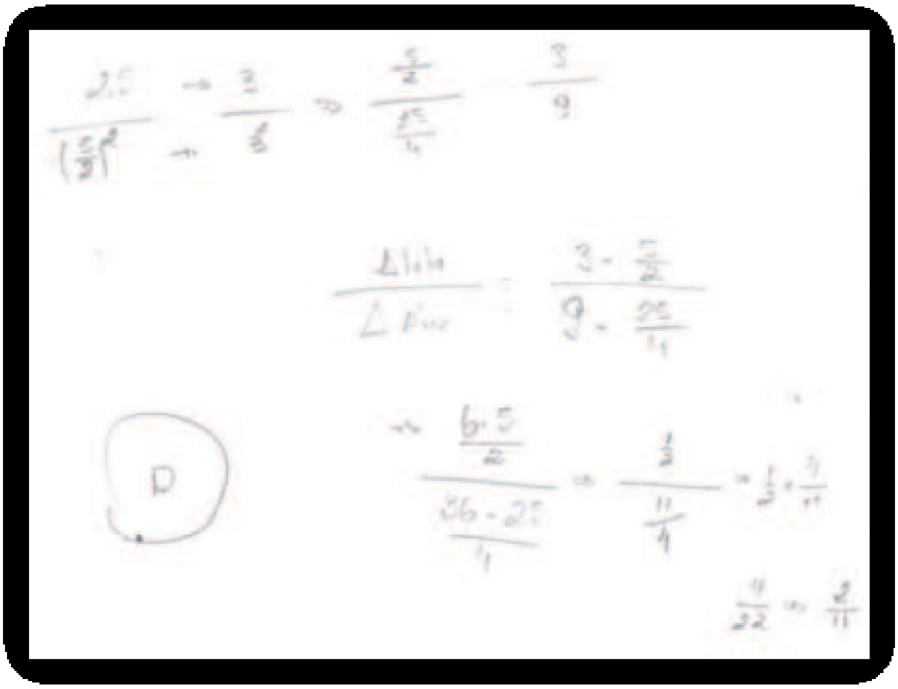
Mesmo após a leitura da atividade e nossos questionamentos, observamos que o aluno ainda continuava com dúvida. A partir daí, ele nos perguntou:

*D2b: Em relação a variar, é somar ou subtrair? Variar... É subtrair? 3 menos 2,5. O final menos o inicial.*
*D1a: Eu fiz assim... Eu fiz o delta lado sobre delta área.*

Portanto, o aluno (b) da dupla 2 apresentou algumas dúvidas em relação a atividade, mas pelo que observamos as dúvidas estavam relacionadas a interpretação. É importante destacar também, que acreditamos que os alunos tenham se confundido em alguns momentos devido ao cansaço, pois já estávamos no final da terceira etapa, e ocorreram casos em que não conseguiam refletir sobre aspectos simples. O próprio aluno (b) da dupla 2 afirmou não estar conseguindo pensar, pois se sentia com a mente cansada.

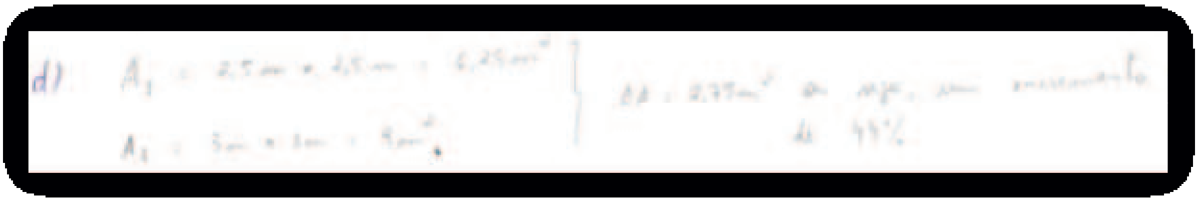
Sendo assim, ao observar as resoluções do aluno 3 e da dupla 1, e também pelos comentários que já haviam feito anteriormente, percebemos que eles resolveram o item (d) de formas diferentes:

Figura 39: Cálculos da dupla 1 para o item (d)



Fonte: Produções dos alunos.

Figura 40: Cálculos do aluno 3 para o item (d)



Fonte: Produções dos alunos.

O aluno (a) da dupla 1 calculou a taxa de variação do lado em relação a área, como havia comentado anteriormente, já o aluno3 calculou a porcentagem de diferença como havia citado também anteriormente.

Nesta atividade os alunos resolveram rapidamente os itens que pediam tabela, gráfico, expressão matemática e derivada, então acreditamos que os alunos não tenham tido dificuldades nestes itens. No entanto, os itens que solicitavam taxa de variação os alunos apresentaram algumas dúvidas.

A segunda ideia essencial, covariação e taxa de variação, foi trabalhada na análise dos valores na tabela e nos itens (d) e (f). Entretanto, no cálculo da taxa de variação solicitadas nestes itens, os alunos cometeram alguns enganos.

As famílias de função, terceira ideia essencial, foram trabalhadas duas nesta atividade, a quadrática, e a partir da derivada, a função afim.

As representações de função, quinta ideia essencial, foi trabalhada a partir da exploração da situação nas representações escrita, tabular, gráfica e algébrica.

**Análise:**

Percebemos que os alunos fizeram diferentes interpretações para o item (d), apresentando um pouco de dificuldade para resolvê-lo. Acreditamos que isto tenha ocorrido também, pelo cansaço que os alunos demonstravam, pois já estávamos no final da terceira etapa. Em alguns momentos, os alunos não estavam conseguindo refletir sobre aspectos simples, como foi o caso do aluno (b) da dupla 2, em que ele mesmo afirmou estar com a mente cansada.

Ao que tudo indica os alunos não tiveram dificuldade em relação à tabela, gráfico, expressão matemática e derivada. No entanto, não conseguiram interpretar os itens (d) e (f), os quais tratavam sobre taxa de variação.

Como havia chegado ao fim o horário da terceira etapa, pedimos que nos entregassem o que haviam feito, e avisamos que na etapa seguinte retomaríamos a atividade de forma breve, para discutirmos e fazermos alguns esclarecimentos.

Explicamos ainda, que a atividade 12 estava programada para esta terceira etapa, mas como as outras atividades demandaram mais tempo, não foi possível aplicá-la.

### 5.2.4. 4ª Etapa (16/03/2016)

Como havíamos avisado na etapa anterior, retomamos de forma breve a atividade 11. Fomos ao quadro e analisamos junto com os alunos a atividade. Os itens iniciais, como mencionamos na etapa anterior, os alunos não demonstraram ter tido dificuldades. Entretanto, os itens que envolviam taxa de variação, os alunos cometeram alguns enganos.

Portanto, fomos fazendo questionamentos para que os alunos refletissem e compreendessem o que deveria ser feito para resolver os itens propostos. Observamos que os alunos compreenderam a atividade, e dessa forma, acreditamos que conseguiram esclarecer suas dúvidas.

Em seguida, continuamos a programação da oficina para a quarta etapa, distribuindo assim, a atividade 13.

Para melhor observar o trabalho realizado nesta quarta etapa, abaixo apresentamos um quadro com as atividades na sequência que foram trabalhadas, com seus respectivos conteúdos e ideias essenciais evidenciadas. Como nesta etapa, os alunos foram mais rápidos em suas resoluções, pudemos aplicar a atividade 12 que não havia sido aplicada na terceira etapa.

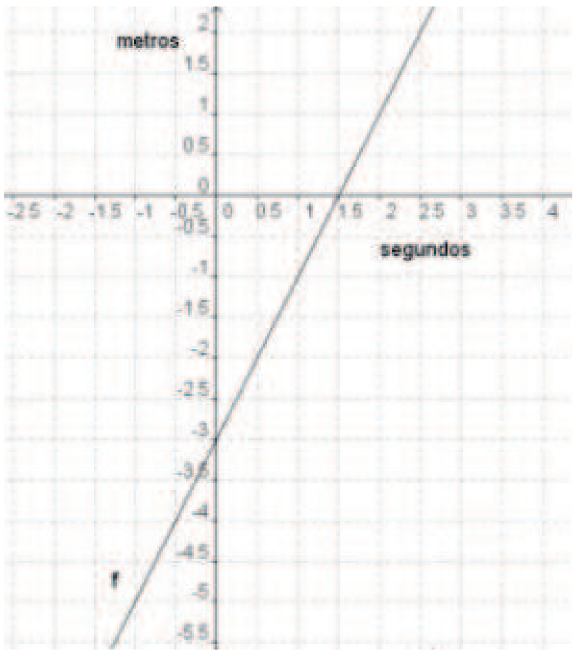
Quadro 6: Atividades trabalhadas no 4ª Etapa

| Atividade | Conteúdo | Ideias essenciais |
|---|---|---|
| Atividade 13 | Gráfico da função afim | CF, RF e CTV |
| Atividade 14 (verificação no Geogebra) | Crescimento e decrescimento de uma função quadrática | CF, RF e CTV |
| Atividade 15 | Estudo do sinal da função afim | CF, RF e CTV |
| Atividade 16 | Volume de um sólido obtido pela rotação em torno do eixo x | CF, RF, CTV e FF |
| Atividade 12 | Função afim | CF, RF e CTV |

Fonte: Elaborado pelo autor.

Atividade 13[18]

*Um corpo se movimenta em velocidade constante de acordo com o gráfico abaixo, em que s indica a posição do corpo (em metros) no instante t (em segundos).*




a) *Monte uma tabela relacionando a posição do corpo em determinados instantes.*
b) *Qual a posição do corpo no instante de 5 segundos? E no instante de 9 segundos?*
c) *Quanto tempo é necessário para o corpo atingir a posição de 3 metros? E para a posição de 9 metros?*

[18]Retirada e adaptada de DANTE, 2003, vol. 1, p. 97.

*d) Escreva uma expressão matemática que represente esta situação.*

O objetivo da atividade 13 era desenvolver um conhecimento com mais compreensão do conceito e das representações de função partindo de uma situação de fácil exploração.

Com esta atividade trabalhamos três ideias essenciais, que foram: conceito de função, representações de função e covariação e taxa de variação.

O conceito de função, primeira ideia essencial, foi trabalhado em toda a resolução da atividade, desde o momento que os alunos leram o enunciado, até o fim das suas resoluções.

Inicialmente observamos que não houve discussões, pois os alunos demonstraram não ter dúvidas.

A partir daí, um dos alunos da dupla 1 comentou que estava tentando encontrar a expressão matemática para poder responder o item (b). Portanto, o aluno continuava buscando encontrar primeiro a expressão matemática, assim como em atividades anteriores, pois considerava que dessa forma poderia resolver a atividade rapidamente.

Destacamos que o aluno (a) da dupla1 se mostrou sempre muito resistente a analisar os itens propostos nas atividades, antes de encontrar a expressão algébrica.

**Análise:**

O aluno (a) da dupla 1 continuava sempre buscando primeiro a expressão matemática para resolver a atividade. Dessa forma, podemos destacar que este aluno demonstrou-se muito dependente da representação algébrica, e resistente a analisar os outros itens antes de encontrar a expressão. Observamos que o aluno sempre considerava que com a expressão algébrica poderia resolver a atividade rapidamente, e assim, percebemos como o aluno estava acostumado com uma forma não reflexiva de resolver as situações.

Os alunos continuaram analisando a atividade, e a partir daí, surgiram alguns comentários dos alunos sobre a atividade, entre os comentários o aluno 3 apresentou algumas de suas considerações:

*A3: Eu analisei aqui essa reta de tal forma que pela tabela deu* $f(x) = 2x - 3$. *X é zero quando y for -3, e assim, como y é a função de x, matematicamente falando, y é* $2x - 3$, *ou* $2x - y - 3$ *é zero, que é a equação geral da reta.*

*A3: Eu também transformei a equação geral na forma segmentaria, porque ele assume uma segmentação da reta que corta dois pontos. Porque além de ser uma função linear, ela é função afim. Porque se fosse linear ele cortaria a origem, só a origem.*

Sendo assim, o aluno3 se mostrou sempre muito motivado a analisar as atividades, procurando explorar diversos aspectos. Em seu comentário ele fala da expressão algébrica que escreveu e das transformações que fez.

Portanto, os alunos consideraram que a atividade era fácil de ser explorada e que o gráfico ajudou muito nessa exploração, pois comentaram que não tiveram dificuldades em encontrar uma expressão matemática para a situação. Sendo assim, também observamos que não houve dificuldades na interpretação da situação.

O aluno (a) da dupla 1 comentou que era melhor analisar as situações a partir de um gráfico, do que de uma tabela, e o aluno 3 acrescentou que o gráfico contribuiu para que pudesse analisar vários aspectos da situação.

Acreditamos que os alunos não tiveram dificuldades em construir a tabela, no entanto, observamos que consideraram números negativos. Sendo assim, pudemos perceber que os alunos não pararam para refletir se esses números negativos poderiam ser considerados para a situação em questão.

Abaixo temos uma das tabelas construídas pelos alunos.

Figura 41: Tabela construída pela dupla 1

| Segundos | Metros |
|---|---|
| -1 | -5 |
| - 0,5 | -4 |
| 0 | -3 |
| 0,5 | -2 |
| 1 | -1 |
| 1,5 | 0 |
| 2 | 2 |

Fonte: Produções dos alunos.

Ao montar e analisar a tabela, os alunos puderam observar a variação das grandezas, e dessa forma, trabalharam a segunda ideia essencial, covariação e taxa de variação.

Nesta atividade, os alunos analisaram a situação nas representações escrita, gráfica, tabular e algébrica, e assim, trabalharam a quinta ideia essencial, representações de função.

**Análise:**

Os alunos consideraram que a atividade foi fácil de ser analisada, pois o gráfico ajudou na visualização de muitos aspectos. Tudo leva a crer que não tiveram dificuldade de encontrar uma expressão matemática que representasse a situação, e também acreditamos que não surgiu nenhuma dúvida quanto à interpretação. O aluno (a) da dupla 1 afirmou que conseguia analisar melhor as situações a partir de um gráfico, do que a partir de uma tabela. O aluno 3 também comentou que o gráfico possibilitou analisar muitos aspectos da função. Sendo assim, de acordo com Silva (2013), é evidenciado nas pesquisas que os alunos têm mais facilidade de lidar com a representação gráfica do que com a representação algébrica, e isso se deve provavelmente, pelo gráfico ser mais visual, o que favorece uma rápida análise das informações.

Ao que tudo indica os alunos não tiveram dificuldade ao construir a tabela, mas observamos que todos consideraram números negativos em suas análises, ou seja, em nenhum momento questionaram o fato do gráfico trazer uma parte negativa que não era válida para a situação em questão.

Portanto, acreditamos que os alunos tiveram uma boa compreensão do conceito, pois não surgiu maiores dúvidas quanto à atividade, e dessa forma, resolveram de forma muito rápida a atividade.

Após os alunos concluírem a resolução, recolhemos a atividade 13 e distribuímos a atividade 14.

Atividade 14[19]

*Uma empresa apresenta o lucro mensal de acordo com a equação $L = -t^2 + 25t$, onde t é a quantidade de toneladas vendidas mensalmente e L (lucro) é dado na proporção de 1 (um) por R$ 1.000,00 (um mil reais).*

*a) Monte uma tabela que relacione o lucro obtido e toneladas vendidas.*

*b) Esboce o gráfico dessa relação.*

*c) Qual o lucro da empresa ao vender 7 toneladas? E ao vender 12 toneladas?*

*d) Quantas toneladas devem ser vendidas para que a empresa tenha um lucro de R$ 150.000,00? E para um lucro de R$ 50.000,00?*

*e) Quanto maior for a venda mensal maior será o lucro? Comente.*

*f) Qual o maior lucro que essa empresa pode obter? Quantas toneladas devem ser vendidas para isso?*

O objetivo da atividade 14 era levar os alunos a desenvolverem uma melhor compreensão do conceito e das representações de função, a partir de uma situação de fácil exploração, e para a verificação dos conceitos envolvidos, utilizar o software GeoGebra.

Nesta atividade também trabalhamos as ideias essenciais: conceito de função, representações de função e covariação e taxa de variação.

[19] Retirada e adaptada de GIOVANNI e BONJORNO, 2005, vol. 1, p. 193.

A primeira ideia essencial, conceito de função, foi trabalhada em toda a resolução da atividade.

Após analisarem a atividade os alunos começaram a discutir e afirmaram que chagaria um momento em que não haveria mais lucro.

*PP: Então vai ter um momento que não vai ter lucro?*

*D2: Pela tabela.*

*A3: À medida que as toneladas aumentam...*

*D2: Tem um decrescimento de 2.*

*PP: Não vai ter lucro? E prejuízo vai ter?*

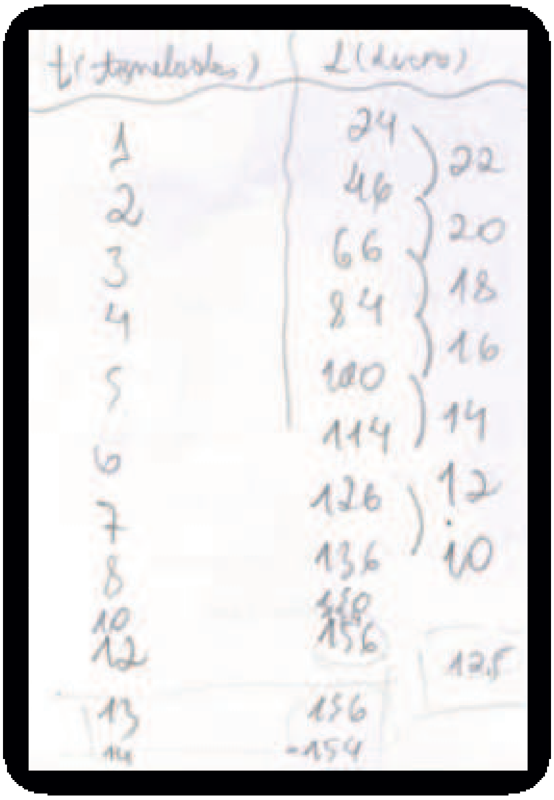
*D2: Bem, se ele vai decrescendo sempre 2, 2, 2. Chega um momento que ele cai, -2.*

*A3: Ele vai ter um lucro máximo, né? Ai chega um momento que decresce. E chega a um prejuízo, agora a partir de quantas toneladas...*

Percebemos que os alunos já haviam analisado bem a situação a partir da tabela, chegando a várias conclusões, demonstrando um bom entendimento da situação. Então o aluno 3 percebeu que haveria um lucro máximo, e que depois esse lucro decresceria chegando a um prejuízo.

Abaixo temos uma das tabelas construídas pelos alunos.

Figura 42: Tabela construída pela dupla 2



Fonte: Produções dos alunos.

Portanto, neste momento os alunos haviam trabalhado a segunda ideia essencial, covariação e taxa de variação, pois analisaram a variação das grandezas a partir da tabela.

**Análise:**

Percebemos nesta atividade, que os alunos estavam procurando analisar a situação a partir da tabela, chegando a algumas considerações. Portanto, os alunos procuraram analisar os itens propostos, e ao construírem a tabela, tiveram uma melhor compreensão da situação.

A partir daí, questionamos se os alunos já haviam esboçado o gráfico, afirmaram que não, mas que iriam esboçar. Então, a dupla 2 comentou que as observações que foram feitas quanto a lucro e prejuízo, podiam ser percebidas apenas ao analisar a expressão algébrica contida no enunciado, pois continha um termo ao quadrado e negativo. Dessa forma, podia ser previsto que haveria um crescimento e depois um decrescimento, e assim, o gráfico seria uma parábola com concavidade voltada para baixo.

Ao fazer tais observações, a dupla 2 comentou que não havia necessidade nem de fazer a tabela, poderia apenas ter analisado a expressão algébrica no enunciado.

Portanto, pudemos perceber que os alunos estavam bem mais seguros em suas respostas, e buscavam analisar a situação de diferentes formas, demonstrando uma postura bem mais ativa em sala de aula.

**Análise:**

Ao fazer suas observações, a dupla 2 demonstrou mais segurança e uma melhor compreensão na análise das representações de função. Nesta situação, a dupla percebeu que a análise da representação algébrica lhe forneceria algumas informações importantes sobre a situação. Dessa forma, percebemos que a metodologia de ensino e as atividades contribuíram para que os alunos desenvolvessem estratégias de resolução e conseguissem analisar uma situação de diferentes formas.

Ao analisar esta atividade os alunos se mostraram bem mais seguros em suas resoluções, assumindo uma postura muito mais ativa, bem diferente da que tinham na primeira etapa da oficina. Segundo Silva (2013), os alunos irão compreender Matemática, quando tiverem a capacidade de avaliar suas ideias e de seus colegas, cabendo ao professor encorajá-los a levantar suas hipóteses, testando e desenvolvendo nos alunos habilidades de pensar matematicamente.

Em seguida, a dupla 2 iniciou uma discussão em relação ao lucro máximo que a empresa poderia ter, mas surgiram algumas dúvidas sobre o ponto máximo da função que representava a situação.

*D2b: Quando chegar em 13 toneladas, ela não tem mais lucro.*

*D2a: Qual é o ponto de máximo dela?*

*D2b: 13... Quando chega em 12, vai dar 156. Quando dá 13, vai dar 156. Ai quando é 14, ai vai dar -154. Então vai reduzir mais 2.*

*D2a: Então o ponto de máximo é 12?*

*D2b: Acho que é 13, que dá o mesmo.*

*D2a: Qual seria o mais conveniente? O primeiro ponto que a gente encontrou ou o segundo, que os dois deram lucro igual?*

*D1a: Se eles deram lucro igual é porque tem um ponto máximo ai no meio.*

*PP: Calcula um ponto no meio dos dois pra ver.*

A dupla 2 estava com dúvida quanto ao ponto de máximo da função, pois o maior lucro que encontraram pela tabela, era o mesmo para dois valores distintos. Então um dos alunos da dupla 1 chamou a atenção dos colegas, pois o ponto de máximo poderia estar entre os dois pontos que a dupla2 havia calculado.

Dessa forma, a dupla2 calculou para 12,5 toneladas e encontrou o maior lucro, que era 156,25 mil reais.

**Análise:**

Os alunos da dupla 2 tiveram dúvida sobre qual seria o ponto de máximo da função, pois o maior lucro que encontraram, pela tabela, era o mesmo para dois valores distintos. Entretanto, ao comentarem sua dúvida, um dos alunos da dupla 1 chama a atenção dos colegas, sugerindo que o ponto de máximo possa estar entre os dois pontos que a dupla 2 havia calculado. Dessa forma, pedimos para que a dupla calculasse para um valor qualquer entre estes dois pontos. A dupla 2 calculou para 12,5 toneladas e encontrou um lucro de 156,25 mil reais, ou seja, o lucro máximo que a empresa poderia ter. Portanto, ao analisarem um pouco mais os dados, a dupla pôde tirar melhores conclusões sobre a situação. É importante destacar que nesta atividade os alunos procuraram analisar a tabela, e dessa forma, puderam chegar a algumas conclusões a partir dela.

Observamos que os alunos responderam a maioria dos itens com o auxilio da tabela que haviam construído. Portanto, nesta atividade não houve resistência em analisar a tabela, acreditamos que os alunos procuraram fazer essa análise devido a nossa insistência nas atividades anteriores de que montassem a tabela e analisassem.

Sendo assim, os alunos consideraram a atividade de fácil interpretação, e dessa forma, resolveram os itens em pouco tempo, não tendo maiores dúvidas. Então passamos para a resolução da segunda parte da atividade 14.

*2ª parte da atividade 14*

*g) Agora utilizando o GeoGebra, insira a equação L na caixa de entrada, substituindo L por f(x) e t por x.*

*h) Reduza a janela geométrica (opção reduzir, 11ª janela) para ter uma visão mais ampla do gráfico.*

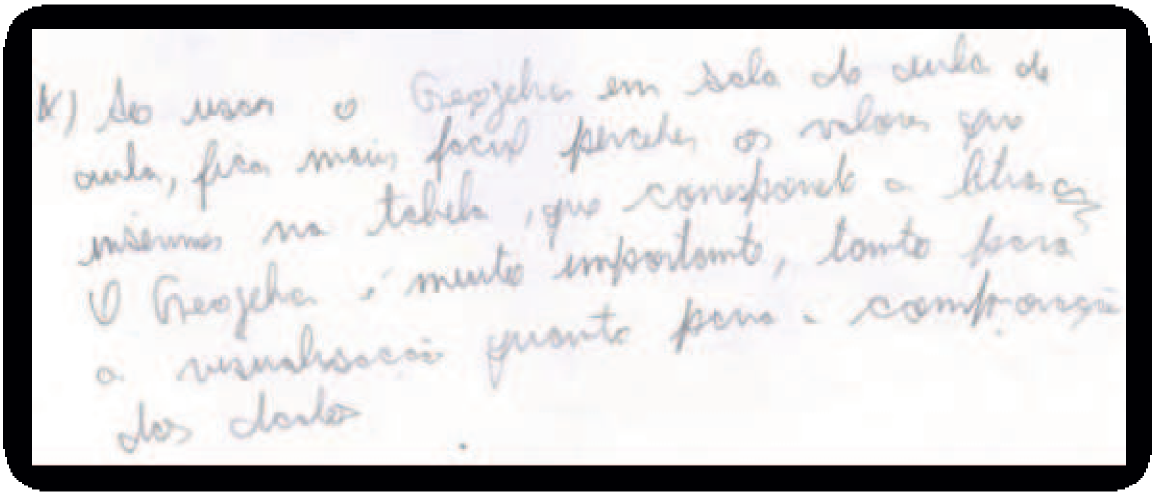
*i) O gráfico que aparece corresponde ao esboçado por você no item (b)? Explique.*

*j) Insira o ponto A (opção novo ponto, 2ª janela) sobre o gráfico de f e o movimente (opção mover, 1ª janela) observando na janela algébrica os valores correspondentes da abscissa e ordenada. Você consegue encontrar valores correspondentes aos que estão na tabela construída por você no item (a)? Explique.*

*k) Quais as vantagens do uso do GeoGebra nesta atividade?*

Como os alunos não apresentaram dificuldades na primeira parte, a segunda parte também foi respondida de forma rápida, pois confirmaram tudo que haviam feito. Portanto, os alunos destacaram as vantagens do uso do GeoGebra para a análise da atividade:

Figura 43: Resposta da dupla 2 para o item (k)




Fonte: Produções dos alunos.

Portanto, os alunos destacaram o fato do GeoGebra permitir a visualização e comprovação dos dados e estratégias utilizadas na resolução da atividade. Os alunos também destacaram que o GeoGebra deu a oportunidade de verificar os valores que haviam atribuído a tabela.

E assim, os alunos puderam trabalhar a quinta ideia essencial, representações de função, pois exploraram a situação nas representações algébrica, tabular e gráfica.

**Análise:**

> De modo geral, os alunos tiveram uma boa compreensão do conceito de função, pois não apresentaram maiores dificuldades na análise da situação. Destacamos que os alunos tiveram uma visão ampla da situação a partir da análise da tabela, ou seja, a representação tabular da função contribuiu muito para a compreensão do conceito. Já na segunda parte, os alunos puderam constatar como o software GeoGebra pôde contribuir para uma rápida verificação e visualização do trabalho que haviam realizado na primeira parte da atividade.
>
> É importante destacar como à medida que fomos trabalhando cada atividade, os alunos foram se mostrando cada vez mais seguros em suas respostas e mais rápidos em encontrar estratégias de resolução. Os alunos também demonstraram muita motivação ao analisar as atividades, buscando sempre observar cada aspecto apresentado pela situação.

A resolução da atividade 14 também foi rápida, então a recolhemos e distribuímos a atividade 15.

Atividade 15[20]

*Ana é dona de uma loja de roupas femininas, e na compra de um lote de blusas ela gastou R$ 500,00. Cada blusa deve ser vendida a R$ 25,00.*

a) *Monte uma tabela que relacione o lucro e o número de blusas vendidas.*
b) *Esboce o gráfico da situação.*
c) *Qual o valor obtido na venda de 30 blusas? E na venda de 45 blusas?*
d) *Escreva uma expressão matemática que represente esta situação.*
e) *Qual o número mínimo de blusas que devem ser vendidas para que Ana não tenha prejuízo?*
f) *Para qual número de blusas vendidas Ana não terá nem lucro nem prejuízo?*

O objetivo desta atividade era trabalhar o conceito e as representações de função a partir de uma situação de fácil exploração, buscando fazer com que os alunos tenham uma melhor compreensão deste conceito.

---

[20] Elaborada pelo autor.

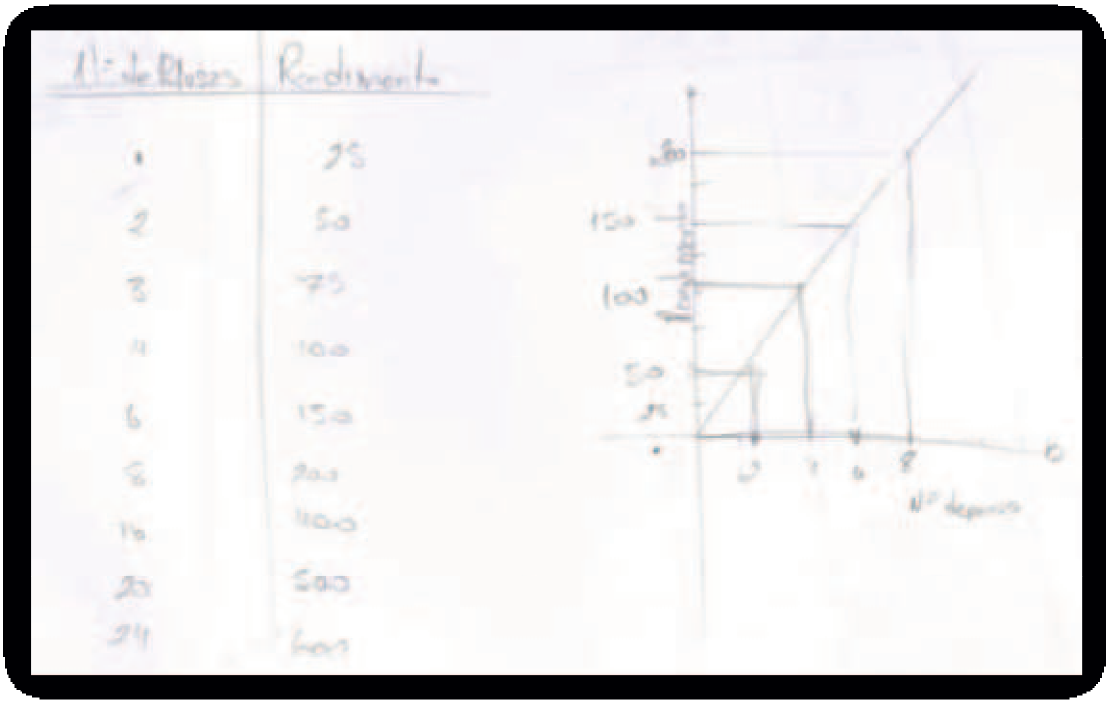
As ideias essenciais trabalhadas nesta atividade foram: conceito de função, representações de função e covariação e taxa de variação.

A primeira ideia essencial, conceito de função, foi trabalhada em toda a resolução da atividade, deste que os alunos leram o enunciado.

Ao lerem a atividade, observamos que não houve maiores discussões, pois os alunos demonstraram não ter dúvidas na interpretação da situação.

Tudo leva a crer que os alunos não tiveram dificuldades ao construir a tabela e o gráfico. Abaixo apresentamos a tabela e o gráfico construídos pela dupla 1.

Figura 44: Tabela e gráfico construídos pela dupla 1



Fonte: Produções dos alunos.

Portanto, ao analisarem a tabela, os alunos puderam observar a variação das grandezas, e dessa forma, trabalharam a segunda ideia essencial, covariação e taxa de variação.

Então, nos itens iniciais os alunos não apresentaram dúvidas, mas ao tentar interpretar o item (e) começou a surgir alguns comentários. A partir daí, os alunos iniciaram uma pequena discussão em relação ao número mínimo de blusas que deveriam ser vendidas para que não houvesse prejuízo.

*A3: A gente não sabe quanto ela vai ganhar, nem quanto ela vai perder.*

*D2: Ela não gastou 500 reais? Pra comprar esse lote de blusas que a gente não sabe quantas foi.*

*A3: 500 reais... Foi!*

*D2: Então quer dizer, cada uma a preço de venda que dá 25. Então provavelmente ela deve vender 20. No mínimo.*

*D1: Se ela vender um número de blusas que seja inferior a 500 reais, ela vai ter prejuízo.*

*D2: Se ela vender 20 blusas, ela não vai ter nem lucro, nem prejuízo, porque foi o mesmo valor que ela gastou ao adquirir o lote.*

Os alunos procuraram entender juntos qual seria o número mínimo de blusas para que não houvesse prejuízo. Assim, demonstraram uma boa compreensão da situação, e, além disso, não apresentaram mais resistência em construir e analisar a tabela, como também não demonstraram dificuldades em encontrar uma expressão matemática que representasse a situação.

Nesta atividade, os alunos trabalharam a quinta ideia essencial, representações de função, pois puderam explorar a situação nas representações escrita, tabular, gráfica e algébrica.

**Análise:**

Portanto, tudo leva a crer que os alunos compreenderam bem a atividade, e dessa forma, as pequenas dúvidas que surgiram foram rapidamente superadas.

Os alunos não demonstraram mais tanta resistência em construir a tabela e analisá-la. Também não tiveram dificuldade para encontrar uma expressão matemática que representasse a situação, demonstrando uma boa compreensão da situação, e consequentemente, do conceito de função.

Os alunos concluíram a resolução da atividade 15 de forma rápida, então após recolhermos suas produções, distribuímos a atividade 16.

Atividade 16[21]

*Qual o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo x, do conjunto de todos os pares (x, y) tais que* $\frac{1}{x} \leq y \leq x, 1 \leq x \leq 2$*?*

[21]Retirada e adaptada de GUIDORIZZI, 2001, vol. 1, p. 402.

a) *Monte uma tabela que relacione alguns valores para $y = x$ e uma tabela que relacione alguns valores para $y = \frac{1}{x}$.*
b) *Esboce separadamente, o gráfico de cada função no plano cartesiano.*
c) *Chame de A1 a área delimitada por $y = x$ e A2 a área determinada por $y = \frac{1}{x}$ no intervalo dado.*
d) *Esboce os sólidos de volume V1 e V2, determinados pela rotação em torno do eixo x.*
e) *Qual o volume (V1) do solido determinado pela rotação, em torno do eixo x, da área A1? E o volume (V2) da área A2?*
f) *Calcule V=V2 – V1.*
g) *Esboce o sólido de volume V.*
h) *Qual a sua resposta para a pergunta do enunciado da atividade?*

A atividade 16 tinha como principal objetivo levar os alunos a explorarem o conceito e as representações de função a partir da situação proposta, utilizando uma sequência didática para guiá-los na construção do conhecimento.

Com esta atividade, trabalhamos quatro ideias essenciais para o desenvolvimento do conceito de função, que foram: conceito de função, representações de função, covariação e taxa de variação e famílias de função.

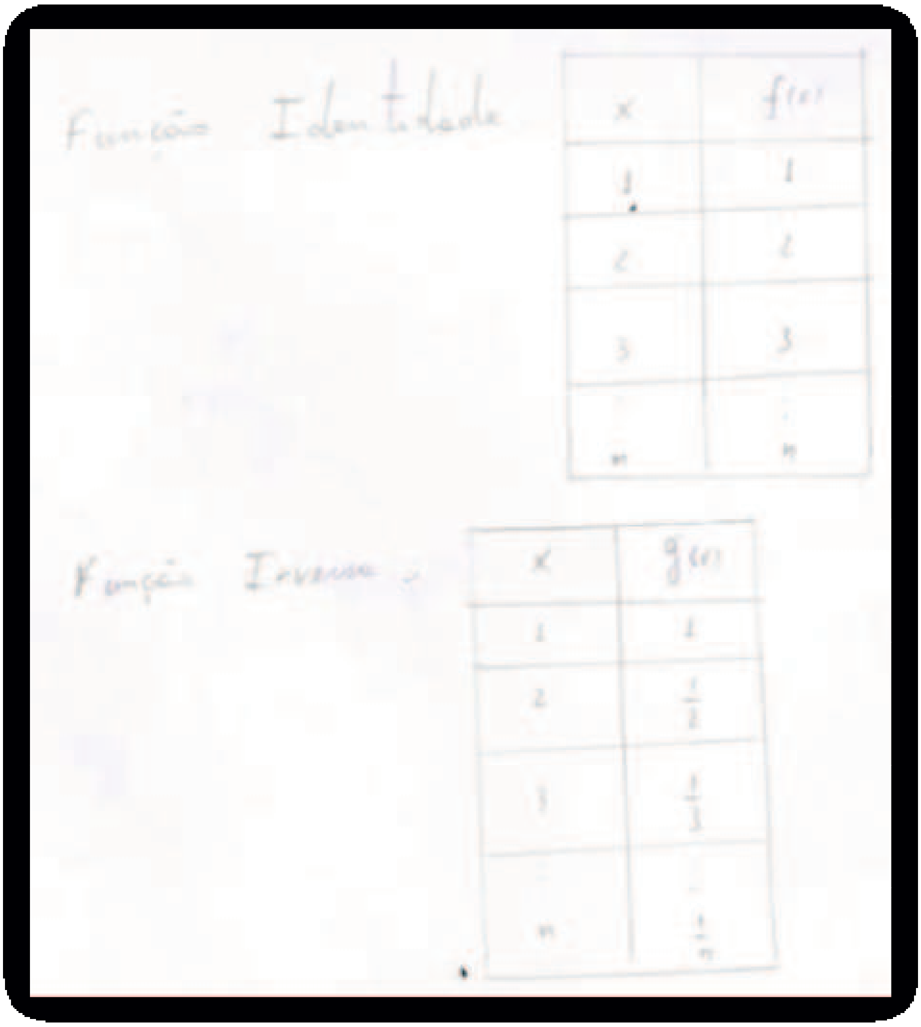
O conceito de função, primeira ideia essencial, foi trabalhado desde a primeira leitura do enunciado, até a conclusão da resolução.

Logo de inicio, ao observarem a atividade, os alunos comentaram que era difícil. No entanto, o aluno 3 demonstrou estar muito motivado com a atividade e comentou que era aplicação da integral.

Um dos alunos da dupla 1 comentou que não conseguiria resolver a atividade, então buscamos encorajá-los. Pedimos que montassem a tabela para iniciar a análise da situação, mas os alunos se mostraram um pouco resistentes em construir a tabela para esta atividade. Entretanto, ao insistirmos os alunos construíram.

Abaixo apresentamos as tabelas construídas pelo aluno 3.

Figura 45: Tabelas construídas pelo aluno 3



Fonte: Produções dos alunos.

Portanto, os alunos montaram a tabela e puderam observar a variação das grandezas, e assim, trabalharam a segunda ideia essencial, covariação e taxa de variação.

Continuando a resolução, percebemos que os alunos estavam se confundindo na interpretação dos dados da atividade. Então, chamamos a atenção dos alunos para observar o intervalo considerado na atividade, e a partir daí, a dupla 2 nos questionou:

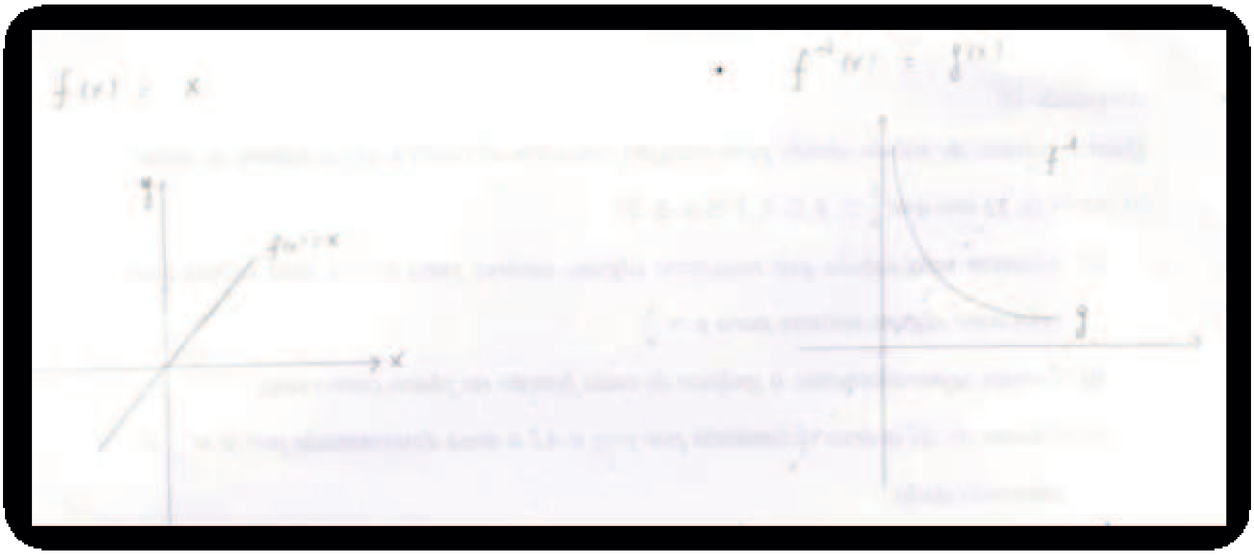
*D2: Quando fala sobre esses intervalos... Então no caso, esse segundo aqui... Os valores dados pra x, só vai ser até 2?*

*PP: Tem que considerar o intervalo dado.*

Nesse momento lemos junto com os alunos o enunciado da atividade, para que refletissem e interpretassem os dados contidos na situação, pois os alunos estavam se confundindo quanto ao intervalo que deveria ser considerado no gráfico.

Abaixo temos os gráficos construídos pelo aluno 3.

Figura 46: Gráficos construídos pelo aluno 3



Fonte: Produções dos alunos.

Portanto, tivemos que procurar encorajar os alunos a resolver a atividade, pois apenas o aluno 3 se mostrou motivado com a atividade, os outros alunos consideraram a atividade difícil, afirmando que não iam conseguir resolver a atividade. Então, procuramos mediar para que começassem analisar os itens e tentar compreender a situação.

Destacamos que os alunos trabalharam a quinta ideia essencial, representações de função, pois analisaram as duas funções que delimitavam o sólido em questão, nas representações algébrica, tabular e gráfica.

**Análise:**

Observamos que os alunos apresentaram certa dificuldade ao analisar esta atividade, acreditamos que o fato dos alunos terem considerado, inicialmente, a atividade difícil, influenciou um pouco na motivação, pois tivemos que encorajá-los na resolução da situação. Portanto, percebemos que quando os alunos identificam um assunto que têm dificuldade, passam a considerar a atividade difícil, e em um primeiro momento, acreditam que não vão conseguir resolver a situação, mas ao mediarmos, os alunos procuraram resolver os itens.

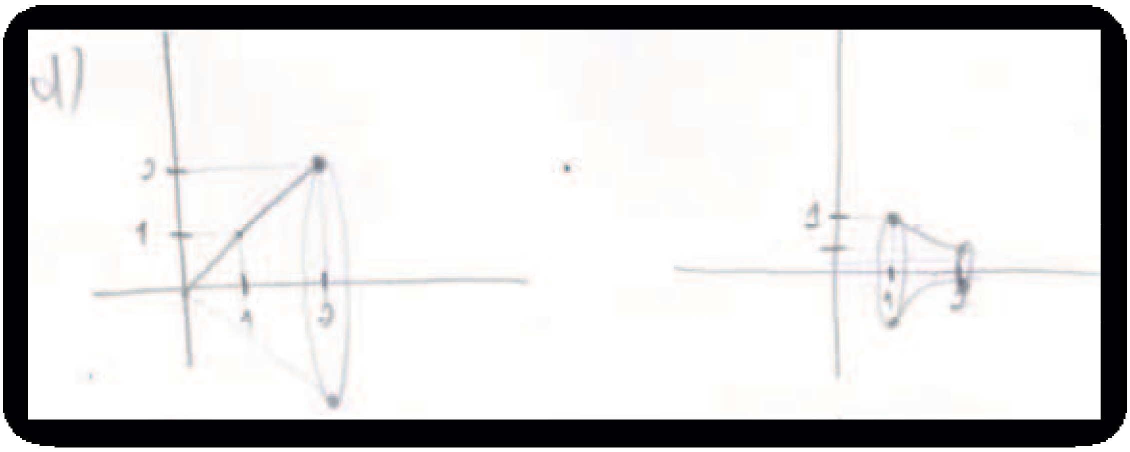
Ao buscar resolver os itens da atividade, os alunos discutiram sobre a forma das figuras obtidas, ao rotacionar os gráficos das funções apresentadas na situação, considerando o intervalo dado.

*A3: Não é um cone todo não, é apenas um tronco de cone.*
*D1: A do tronco de cone dá pra fazer, mas a outra?*
*A3: Eu to calculando aqui o tronco de cone, porque o tronco de cone é o volume 1. E aqui o volume 2, a gente tem que tomar cuidado em relação ao intervalo, porque aqui diz que é de 1 até 2.*

Os alunos estavam com algumas dúvidas em relação às figuras obtidas ao rotacionar os gráficos em torno do eixo x, no entanto, percebemos que o aluno 3 compreendeu e comentou qual intervalo seria considerado.Então, procuramos chamar atenção quanto à forma que seria a rotação dos gráficos, pois observamos que o aluno 3 havia se confundido ao rotacionar a área determinada pelo segundo gráfico que construiu.

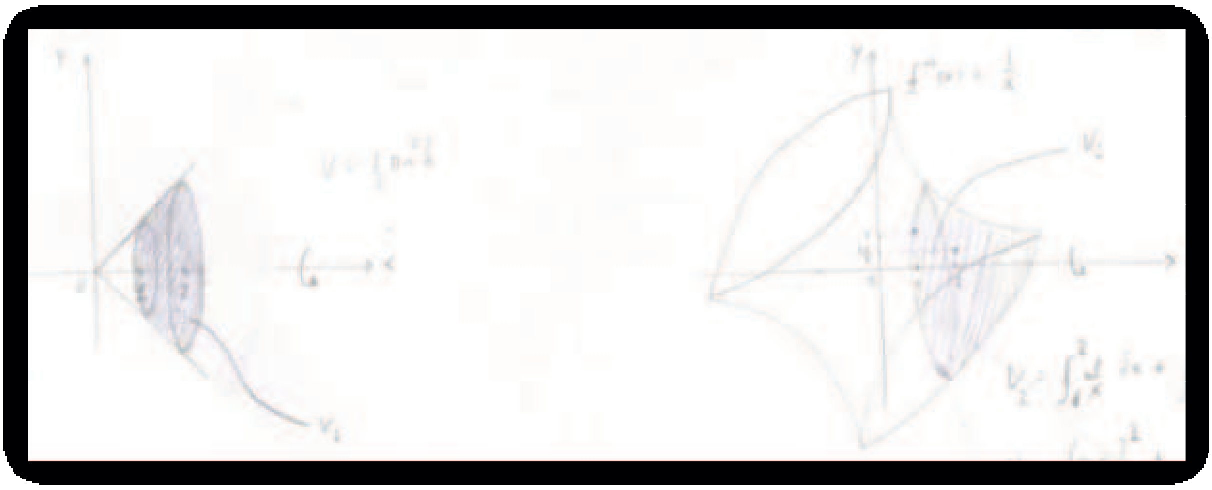
Portanto, a dupla 2 se confundiu ao considerar o intervalo no primeiro gráfico construído, obtendo uma figura diferente do esperado na atividade. Mesmo com a nossa mediação, percebemos que a dupla 2 estava um pouco desmotivada por considerar a atividade difícil.

Figura 47: Figuras obtidas pela dupla 2




Fonte: Produções dos alunos.

Figura 48: Figuras obtidas pelo aluno 3



Fonte: Produções dos alunos.

O aluno 3, ao rotacionar a área determinada pelo segundo gráfico obteve uma figura totalmente diferente do esperado na atividade. Observamos que ele cometeu alguns enganos ao procurar fazer a rotação da área determinada pelo segundo gráfico.

**Análise:**

Observamos que o aluno 3 se confundiu ao rotacionar uma das áreas. Já a dupla 1 não estava conseguindo entender como deveria considerar as áreas definidas pelos gráficos e como seria a rotação. Mesmo com nossos questionamentos, percebemos que a dupla demonstrou-se um pouco desmotivada, pois considerou a atividade difícil e acreditaram que não conseguiriam resolver. Portanto, é muito importante encorajar os alunos para que superem suas dificuldades e percebam que são capazes de resolver as situações propostas.

Questionamos o aluno 3 se a figura ficaria daquela forma mesmo, entretanto, o aluno continuou convicto de suas respostas. Então, procuramos chamar atenção para as áreas que foram delimitadas no item (c), para que pudessem refletir sobre como ficaria as figuras definidas pela rotação dessas figuras em torno do eixo x.

Perguntamos também, qual era a área delimitada pelas duas funções que daria origem ao sólido em questão. No entanto, o aluno 3 comentou:

*A3: A gente não sabe nem a função que delimita isso aqui.*

*PP: Mas a gente pode ver uma área que está sendo delimitada por estes dois gráficos.*

Os alunos demonstraram ter dúvidas quanto à forma do sólido em questão, a partir daí, questionamos sobre qual seria a área delimitada por esses dois gráficos. E após insistirmos para que observassem essa área, o aluno 3 disse que havia entendido e apresentou seu pensamento:

*A3: Ah! Porque você pega o menor e diminui do maior. Porque tipo, se você pegar aqui... Tô entendendo agora.*

A partir daí, o aluno demonstrou ter entendido como seria o sólido em questão e como deveria calcular sua área, sendo assim, aplicou a integral definida para calcular o volume do sólido considerado na situação.

**Análise:**

Portanto, a partir de nossos questionamentos os alunos conseguiram entender o que deveriam fazer para resolver a situação. Nesta atividade, tivemos que interferir mais vezes, fazendo alguns questionamentos para que os alunos compreendessem a situação e buscassem suas estratégias para resolvê-la. Percebemos que a maioria dos alunos se mostrou um pouco desmotivados por considerarem a atividade difícil, no entanto, o aluno 3 demonstrou ter gostado da atividade. De modo geral, consideramos que a atividade desafiou os alunos, pois de inicio acreditaram que não conseguiriam resolvê-la, mas fizeram uma boa análise da situação, e dessa forma, mesmo com o surgimento de algumas dúvidas, a atividade contribuiu para a compreensão do conceito de função.

Como nesta etapa os alunos resolveram de forma mais rápida as atividades que estavam programadas, houve tempo para que pudéssemos aplicar a atividade 12, que não havia dado tempo na etapa em que estava programada. Portanto, após recolhermos a atividade 16, explicamos que iríamos aproveitar o tempo que tínhamos, para aplicar a atividade 12.

Atividade 12[22]

*Nas estantes que faz, além dos R$ 30,00 pelo carreto de entrega, Luciano cobra R$ 8,00 por metro quadrado da madeira que efetivamente usa. Quanto cobrará por uma estante em que gastou x metros quadrados de madeira?*

a) *Quais as grandezas envolvidas nesta situação?*
b) *Monte um tabela que relacione metros quadrados de madeira utilizados e valor a ser pago.*
c) *Esboce um gráfico para esta situação.*
d) *Quanto seria cobrado por uma estante com 1 metro de altura e 4 prateleiras com 1 metro de comprimento, tendo largura de 40 cm?*
e) *Qual a sua resposta para pergunta do enunciado desta atividade?*
f) *E se uma pessoa A pedisse uma estante com 2 metros de altura e 5 prateleiras com 1 metro de comprimento, também com largura de 40 cm, quanto pagaria?*
g) *Se outra pessoa B pedisse uma estante com 1,50 metros de altura, 3 prateleiras com 1 metro de comprimento e largura de 40 cm, pagaria o mesmo valor que a pessoa A?Explique.*

O objetivo desta atividade era propor uma situação do cotidiano que envolvia o conceito e as representações de função, de forma que, a exploração de seus itens pudesse contribuir com o ensino-aprendizagem de função para que os alunos compreendessem este conceito tão importante da Matemática.

Nesta atividade também trabalhamos três ideias essenciais, as quais: conceito de função, representações de função e covariação e taxa de variação.

Assim como nas outras atividades, nesta também trabalhamos o conceito de função, primeira ideia essencial, em toda a resolução da atividade.

Ao distribuirmos a atividade, observamos que inicialmente não houve discussões nem questionamentos, pois os alunos não demonstraram nenhuma dúvida quanto à interpretação.

Entretanto, após analisarem melhor a atividade, um dos alunos da dupla 2 comentou que estava com dúvida no item (d), pois afirmou não estar compreendendo a relação existente entre as prateleiras. Então lemos o item junto com os alunos, para que procurassem refletir e interpretar o que estava sendo pedido. Diante disso, os alunos resolveram esboçar um desenho das estantes que seriam construídas.

[22]Retirada e adaptada de NOGUTI, 2014, p. 98.

Ao buscar esboçar esses desenhos, a dupla 1 apresentou alguns questionamentos.

*D1: Mas tem que considerar que essa estante aqui é só prateleira assim? Ela tem um forro atrás? Ela é uma base de ferro?*

A partir daí, pedimos aos alunos que analisassem a atividade considerando os tipos de estantes que eles estavam imaginando, para ver a que conclusões eles iriam chegar.

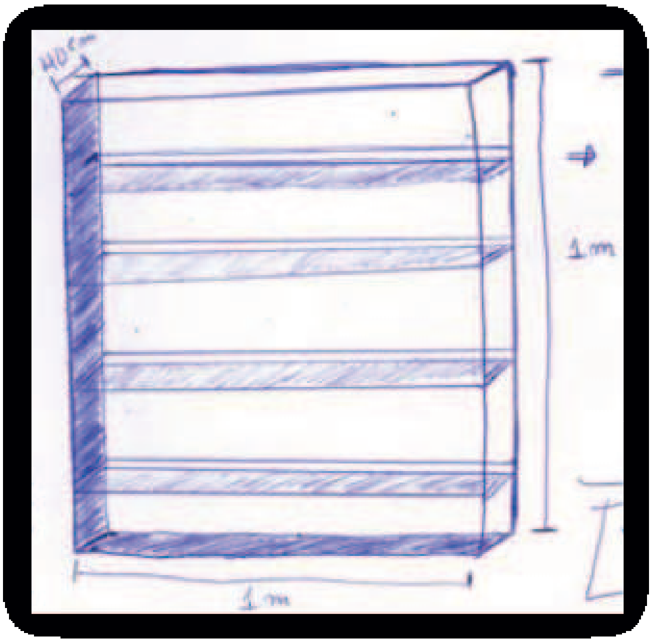
Então, a dupla 2 comentou que a atividade não fornecia a espessura da madeira, e, portanto, estavam com dúvida de como calcular a quantidade de metros quadrados efetivamente usados. Chamamos atenção sobre o fato da atividade não mencionar espessura em nenhum momento, apresentando apenas dados referentes à altura, largura e número de prateleiras. Sendo assim, pedimos que a dupla 2 fizesse os cálculos considerando a estante que haviam pensado.

**Análise:**

Observamos que estavam surgindo algumas dificuldades relacionadas à interpretação da situação proposta, e assim, os alunos não estavam concretizando um raciocínio quanto ao formato das estantes que seriam fabricadas. A partir daí, procuraram esboçar desenhos das estantes para conseguirem visualizar melhor.

O aluno (b) da dupla 1, fez o seguinte desenho:

Figura 49: Desenho feito pelo aluno (b) da dupla 1




Fonte: Produções dos alunos.

Nesta estante, o aluno considerou que no forro de atrás também seria utilizado madeira. A partir daí, o aluno fez alguns comentários sobre seu desenho:

*D1b: Professora, o forro aqui é 1 $m^2$.*

*PP: A sua estante tem forro, não é?*

*D1b: As prateleiras são 4 prateleiras, e cada prateleira, tem 1 metro de largura por 40 centímetros.*

*D2a: Dá um total de quanto de madeira cada uma?*

*PP: Nessa sua estante, essa parte de cima e essa parte de baixo não pode ser considerada como prateleira também não?*

*D2a: Ai não seriam 4, seriam 6.*

Dessa forma, os alunos chegaram à conclusão que para o tipo de estante considerada pelo aluno da dupla 1, a parte de cima e a parte de baixo também gastariam madeira, e assim, estariam sendo consideradas seis prateleiras e não as quatro que eram indicadas no item (d).

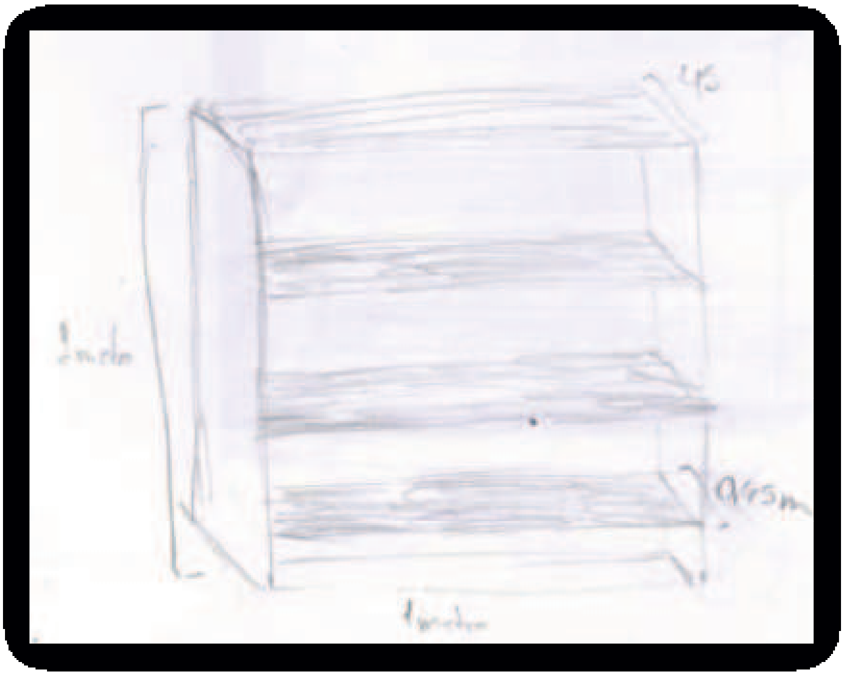
Novamente o aluno (a) da dupla 2 comentou que tinha dúvida em relação ao item (d), pois a atividade não dava a espessura da madeira. No entanto, questionamos o aluno se era necessário saber a espessura da madeira para calcular quantos metros quadrados seriam gastos em uma estante.

**Análise:**

O aluno (a) da dupla 2 insistia em saber a espessura da madeira para poder efetuar seus cálculos, entretanto, não parou para refletir que este era um dado que não influenciava na situação em questão.

Abaixo temos a estante considerada pelo aluno (a) da dupla 1.

Figura 50: Desenho feito pelo aluno (a) da dupla 1



Fonte: Produções dos alunos.

Em seguida o aluno (a) da dupla 1 apresentou seu raciocínio:

*D1a: Eu contei 6 prateleiras... Essas 4, e essas 2 adicionais é do lado! Como o comprimento dessa prateleira é igual a essa, é igual à altura dessas que estão na vertical, vai ser o mesmo custo, porque a largura também é a mesma. Então eu fiz 6 vezes 4,5. Porque esse 0,5 é a área. Superfície em metros quadrados de cada prateleira.*

Acreditamos que o aluno se confundiu com a largura das prateleiras, considerando 45 centímetros. Os outros alunos perceberam e questionaram o porquê do aluno (a) da dupla 1 utilizar 0,45 m como largura da prateleira, no entanto, ele percebeu que havia se confundido com este valor.

Destacamos que os alunos já haviam montado a tabela, esboçado o gráfico e encontrado uma expressão matemática para a situação, e assim, tudo leva a crer que não houve dúvidas nestes itens.

A partir daí, os alunos trabalharam a quinta ideia essencial, pois analisaram a situação nas representações escrita, tabular, gráfica e algébrica. E ao analisar a tabela, trabalharam a segunda ideia essencial, covariação e taxa de variação, onde puderam observar a variação das grandezas.

Em relação aos desenhos das estantes em questão, cada aluno desenhou uma estante diferente para o item (d), o que indica que cada um pode ter feito uma interpretação diferente.

Portanto, acreditamos que a atividade tenha contribuído para uma melhor compreensão do conceito de função por parte dos alunos, pois se mostraram bem mais seguros em suas resoluções.

**Análise:**

Acreditamos que os alunos não tiveram dificuldade em montar tabela, esboçar o gráfico e encontrar uma expressão matemática que representava a situação. No entanto, houve muita discussão ao considerar um determinado tipo de estante no item (d). É importante destacar que ao analisar este item, cada aluno considerou uma estante diferente, ou seja, cada um fez uma interpretação diferente.

Nesta atividade os alunos não apresentaram nenhuma dificuldade quanto ao conceito de função, e dessa forma, podemos constatar as contribuições da metodologia de ensino e das atividades para a melhor compreensão do conceito, pois os alunos se mostraram mais seguros em suas respostas e compreenderam bem as situações.

Então, após os alunos concluírem as suas resoluções, recolhemos a atividade e comentamos que as resoluções das atividades desta quarta etapa tinham sido mais rápidas. Dessa forma, os alunos comentaram que a maioria das atividades deste dia foram de fácil interpretação, e assim, conseguiram resolvê-las mais rapidamente.

### 5.2.5. 5ª Etapa (17/03/2016)

Nesta quinta etapa, como não havia ficado nenhuma atividade da etapa anterior que precisasse ser retomada, iniciamos com a atividade que estava programada, a atividade 17.

Para melhor observar o trabalho realizado nesta quinta etapa, abaixo apresentamos um quadro com as atividades na sequência que foram trabalhadas, com seus respectivos conteúdos e ideias essenciais evidenciadas. Como nesta etapa, os alunos foram mais rápidos em suas resoluções, assim como na quarta etapa, pudemos aplicar a atividade 4 que não havia sido aplicada na primeira etapa.

Quadro 7: Atividades trabalhadas no 5ª Etapa

| Atividade | Conteúdo | Ideias essenciais |
|---|---|---|
| Atividade 17 (verificação no GeoGebra) | Funções crescentes e decrescentes | CF, RF, CTV e FF |
| Atividade 18 | Aplicações da derivada – taxa de variação | CF, RF, CTV e FF |
| Atividade 19 | Crescimento e decrescimento de uma função quadrática | CF, RF e CTV |
| Atividade 4 (verificação no GeoGebra) | Função derivada | CF, RF, CTV e FF |
| Atividade 20 | Volume de um sólido obtido pela rotação em torno do eixo y | CF, RF, CTV e FF |

Fonte: Elaborado pelo autor.

Atividade 17[23]

*Dada à função $f(x) = x^3 + 1$, quais os intervalos em que ela é crescente ou decrescente?*

a) *Calcule $f'(x)$.*
b) *Para quais valores de x temos $f'(x) > 0$ e $f'(x) < 0$ ?*
c) *Monte uma tabela com alguns valores do domínio e imagem desta função.*
d) *Esboce o gráfico da função.*
e) *Em qual intervalo f(x) é crescente.*
f) *Em qual intervalo f(x) é decrescente.*

O objetivo desta atividade era trabalhar o conceito e as representações de função a partir da exploração de uma função de terceiro grau, para que os alunos trabalhassem os conceitos de uma forma diferente, buscando contribuir para uma melhor compreensão, e, além disso, explorar o gráfico da função a partir do software GeoGebra.

[23]Retirada e adaptada de FLEMMING, 2006, p. 268.

Com esta atividade também trabalhamos as ideias essenciais: conceito de função, representações de função, covariação e taxa de variação e famílias de função.

A primeira ideia essencial, conceito de função, foi trabalhada em toda a resolução da atividade.

Ao receberem a atividade, os alunos leram atentamente e após algumas análises, o aluno 3 comentou algumas estratégias de resolução:

*A3: Se você quiser, você vai fazer o seguinte. Pra encontrar se a função é crescente ou decrescente, primeiro, encontre os pontos críticos. Mas pra encontrar os pontos críticos, iguale a derivada a zero. Em seguida, você vai identificar quais os intervalos ela é crescente a partir desse ponto critico, se ela é positiva ou negativa.*

Portanto, o aluno 3 expôs para os colegas algumas das estratégias que poderiam ser feitas para resolver a situação proposta.

A partir daí, os alunos iniciaram uma discussão sobre como resolver a atividade, realizando uma troca de conhecimentos entre eles. Diante desta discussão, o aluno (a) da dupla 1 comentou os seguinte:

*D1a: Quando você faz a derivada primeira e iguala a zero, você vai encontrar um valor pra x. Quando fizer a derivada segunda e igualar à zero novamente, vai encontrar o ponto de inflexão, e se os dois forem o mesmo, quer dizer que esse ponto não é ponto de extremo.*

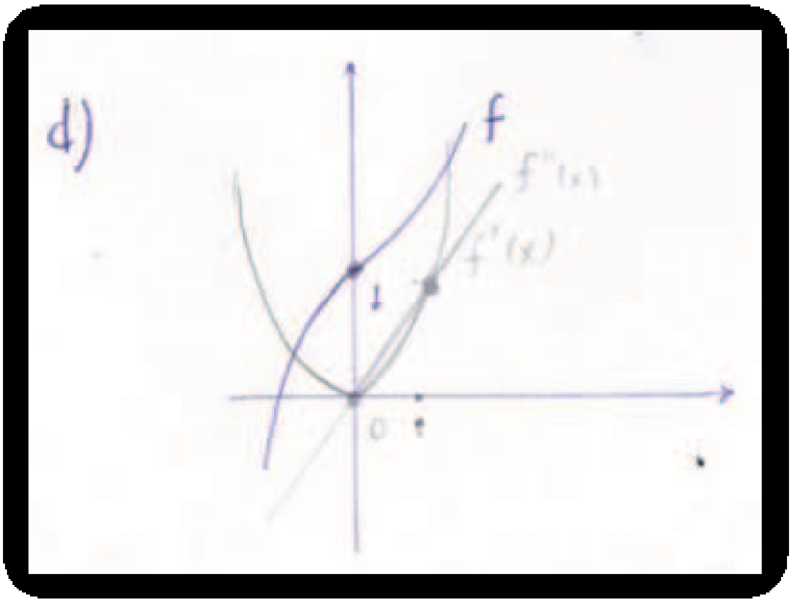
Sendo assim, observamos que os alunos procuraram resolver a atividade todos juntos, realizando uma troca de conhecimentos. Além disso, demonstraram ter uma boa compreensão da atividade, e assim, acreditamos que até esta parte da atividade não houve dificuldades na resolução.

**Análise:**

É importante destacar o fato dos alunos realizarem uma troca de conhecimentos na resolução desta atividade, pois procuraram resolver todos juntos, sempre havendo discussões sobre os aspectos da situação. Percebemos também, que os alunos demonstraram ter uma boa compreensão da situação e, consequentemente, do conceito de função, pois não demonstraram maiores dificuldades na resolução da atividade.

O aluno 3 analisou muitos aspectos da atividade, demonstrando um ótimo entendimento da situação, e dessa forma, tudo leva a crer que não teve nenhuma dificuldade para resolver a atividade. Abaixo temos o gráfico construído pelo aluno:

Figura 51: Resposta do aluno 3 para o item (d)




Fonte: Produções dos alunos.

Dessa forma, o aluno 3 construiu o gráfico da função e também os gráficos da primeira e segunda derivadas, e assim, demonstrou que tinha um bom entendimento e domínio do assunto.

**Análise:**

O aluno 3 não só construiu o gráfico da função, mas também construiu os gráficos da primeira e segunda derivadas, demonstrando assim, um bom domínio do assunto. Portanto, o aluno também demonstrou um bom entendimento do conceito de função nesta atividade, como também uma grande habilidade em esboçar e analisar gráficos de funções.

Entretanto, alguns alunos se confundiram em suas conclusões ao analisar quais intervalos a função era crescente ou decrescente, como foi o caso do aluno (a) da dupla 1.

*D1a: Maior que zero é crescente, menor que zero é decrescente.*

Portanto, nos parece que o aluno não refletiu sobre o crescimento e decrescimento da função em questão, além disso, acreditamos que o aluno possa ter se confundido ao analisar os gráficos, pois ele também havia construído os gráficos da primeira e segunda derivada.

**Análise:**

Sendo assim, acreditamos que o aluno (a) da dupla 1 não tenha procurado refletir um pouco mais sobre o crescimento da função, ou tenha se confundido na análise dos gráficos, já que construiu também os gráficos da primeira e segunda derivadas.

A dupla 2 estava com dúvida na construção da tabela, pois se perguntavam se deviam construir a tabela para a função que estava no enunciado, ou para a função obtida com a derivação. A partir daí, questionamos os alunos sobre o que faria mais sentido para a situação, a construção da tabela para a função em questão, ou a tabela de sua derivada? E procuramos fazê-los refletirem sobre o que mais ajudaria na resolução da atividade, a tabela da função, ou tabela da derivada.

A partir de nossos questionamentos os alunos comentaram:

*D2b: Eu acredito que seja da derivada.*
*A3: Pela derivada, porque além de você encontrar os pontos críticos, você pega por meio desses pontos críticos quais condições ele cresce ou decresce.*

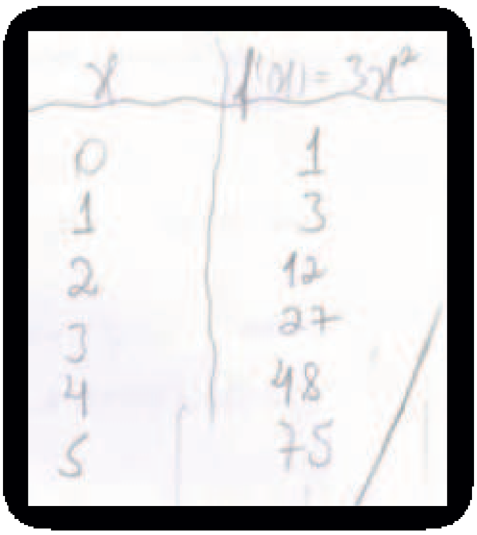
Abaixo temos as tabelas construídas pelos alunos.

Figura 52: Tabela construída pela dupla 1

| $x$ | $y = x^3 + 1$ |
|---|---|
| -2 | -7 |
| -1 | 0 |
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 9 |

Fonte: Produções dos alunos.

Figura 53: Tabela construída pela dupla 2



| $x$ | $f(x) = 3x^2$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 3 |
| 2 | 12 |
| 3 | 27 |
| 4 | 48 |
| 5 | 75 |

Fonte: Produções dos alunos.

Figura 54: Tabela construída pelo aluno 3

| x | f(x) |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 1 |
| 2 | 9 |
| 3 | 28 |

Fonte: Produções dos alunos.

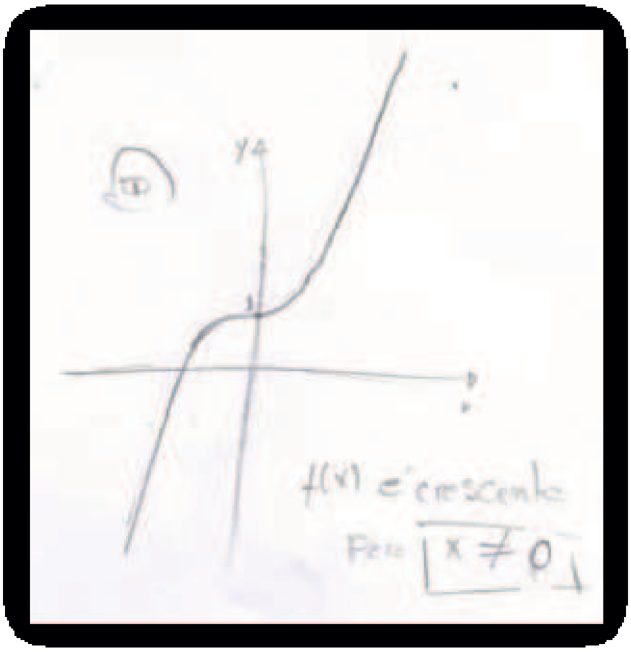
Observamos que os alunos construíram tabelas para diferentes funções, pois a dupla 1 considerou a função em questão, a dupla 2 considerou a derivada e o aluno 3 se confundiu na construção de sua tabela, e dessa forma, não conseguimos identificar a função que foi considerada pelo aluno.

Destacamos que ao analisarem a tabela, os alunos trabalharam a segunda ideia essencial, covariação e taxa de variação, pois puderam observar a variação das grandezas.

A partir daí, as duplas 1 e 2 construíram os gráficos, pois o aluno 3 já havia construído o gráfico corretamente, mas havia se confundido na construção da tabela.

Abaixo temos os gráficos construídos pelas duplas 1 e 2.

Figura 55: Gráfico construído pela dupla 1




Fonte: Produções dos alunos.

Figura 56: Gráfico construído pela dupla 2

Fonte: Produções dos alunos.

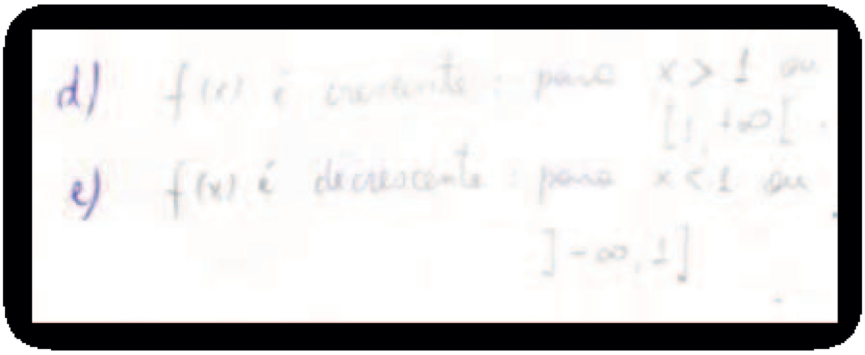
Observamos que a dupla 1 destacou em seu gráfico que a função seria crescente para todo x diferente de zero. A dupla 2 concluiu que a função seria sempre crescente pois era uma função de terceiro grau.

Figura 57: Resposta da dupla 2 para o item (e)


Fonte: Produções dos alunos.

No entanto, o aluno 3 se confundiu em suas conclusões, afirmando que haveria um intervalo em que a função seria decrescente. Abaixo temos a resposta do aluno.

Figura 58: Resposta do aluno 3 para os itens (e) e (f)




Fonte: Produções dos alunos.

Portanto, ao analisar a situação nas representações algébrica, tabular e gráfica, os alunos trabalharam a quinta ideia essencial, representações de função.

Os alunos também trabalharam a terceira ideia essencial, famílias de função, pois ao calcular a primeira e segunda derivada da função, exploraram uma função quadrática e uma função afim, duas das famílias mais estudadas.

Os alunos fizeram alguns comentários sobre a primeira parte desta atividade, afirmando que a análise da tabela não ajudou muito, pois em outras atividades anteriores havia contribuído para a exploração da situação. Além disso, eles também falaram sobre o fato de sempre procurarem atribuir valores fáceis de serem calculados, mas que em alguns casos não favorece a análise da situação.

Portanto, já havíamos destacado este fato anteriormente em outras atividades, no entanto, neste momento os próprios alunos procuraram refletir sobre isto.

**Análise:**

Portanto, os alunos construíram diferentes tabelas, a partir daí, também puderam construir o gráfico e concluir em quais intervalos a função era crescente. Percebemos que, mesmo surgindo algumas dúvidas, os alunos demonstraram uma boa compreensão da situação.

Acreditamos que o aluno 3 se confundiu em suas análises, chegando à conclusão que a função teria um intervalo que seria decrescente.

Ao concluírem esta primeira parte da atividade, os alunos comentaram que a tabela não ajudou tanto nesta atividade, em outras anteriores sim, mas nesta não ajudou muito. Eles mesmos afirmaram que estão condicionados a atribuir sempre valores que são fáceis de calcular, e em algumas situações é necessária à análise de números que não são inteiros para poder tirar conclusões sobre a situação.

Portanto, em outras atividades já havíamos identificado este fato, mas nesta atividade os próprios alunos comentaram sobre a forma que atribuíam valores a tabela.

A partir desta atividade, pudemos concluir que os alunos tiveram uma boa compreensão do conceito de função, demonstrando também, estarem muito mais ativos, buscando a resolução da atividade. Portanto, percebemos que a metodologia e as atividades transformaram a postura dos alunos, pois ao passar do tempo se mostravam mais seguros em suas respostas e não desistiam de buscar eles mesmos respostas para seus questionamentos.

Após os alunos concluírem seus comentários sobre a primeira parte, passamos então para a segunda parte da atividade 17.

*2ª parte da atividade 17*

g) *Agora no computador, utilizando o software GeoGebra, insira a função f(x) na caixa de entrada.*
h) *No canto inferior direito clique em comando e escolha derivada, na caixa de entrada digite f.*
i) *O gráfico que aparece corresponde ao gráfico esboçado por você no item (d)? Explique.*

*j) Insira o ponto A (opção novo ponto, 2ª janela) sobre o gráfico de f e o movimente (opção mover, 1ª janela) observando na janela algébrica os valores correspondentes da abscissa e ordenada. Você consegue encontrar valores correspondentes aos que estão na tabela construída por você no item (c)? Explique.*

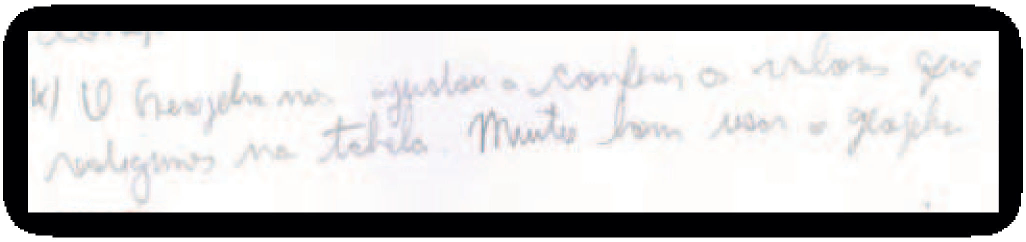
*k) Que conclusões você chegou ao resolver a primeira parte desta atividade com lápis e papel e a segunda parte explorando no GeoGebra?*

Os alunos se dirigiram para os computadores para fazer a verificação de suas respostas no GeoGebra. Neste momento, houve apenas alguns comentários entre as duplas.

Sendo assim, os alunos puderam verificar as resoluções feitas na primeira parte, pois como não houve maiores dúvidas, apenas confirmaram o que haviam feito.

Quanto as contribuições do uso do GeoGebra, abaixo temos algumas respostas dadas pelos alunos.

Figura 59: Resposta da dupla 2 para o item (k)


k) O Geogebra nos ajudou a confirmar os valores que realizamos na tabela. Muito bom usar o grafico

Fonte: Produções dos alunos.

Figura 60: Resposta do aluno 3 para o item (k)

Fonte: Produções dos alunos.

Dessa forma, ao usar o GeoGebra os alunos se mostraram muito satisfeitos, pois puderam confirmar de forma rápida suas respostas para a atividade, visualizando os aspectos que haviam analisado em suas resoluções. Assim, percebemos que os alunos demonstraram uma postura bem mais segura nesta atividade.

**Análise:**

Portanto, o GeoGebra contribui para uma rápida visualização e análise dos aspectos da situação, principalmente no que diz respeito à análise do gráfico da função. Dessa forma, os alunos se mostraram muito satisfeitos ao utilizar o GeoGebra e poder confirmar suas respostas. De modo geral, percebemos que nesta atividade os alunos se mostraram muito mais seguros em suas resoluções.

Então, os alunos concluíram suas respostas da segunda parte, em seguida recolhemos suas produções e distribuímos a atividade 18.

Atividade 18[24]

*Uma cidade X é atingida por uma moléstia epidêmica. Os setores de saúde calculam que o número de pessoas atingidas pela moléstia depois de um tempo t (medido em dias a partir do primeiro dia da epidemia) é, aproximadamente, dado por* $f(t) = 64t - \frac{t^3}{3}$*:*

a) *Monte uma tabela relacionando o número de pessoas atingidas em alguns dias.*
b) *Esboce o gráfico desta situação.*
c) *Calcule* $f'(t)$.
d) *Qual a razão da expansão da epidemia no tempo t = 4?*
e) *Qual a razão da expansão da epidemia no tempo t = 8?*
f) *Quantas pessoas serão atingidas pela epidemia no 5º dia? E no 6º dia?*

O objetivo da atividade 18 era levar os alunos a compreenderem melhor o conceito e as representações de função a partir da exploração de uma situação do cotidiano.

Nesta atividade trabalhamos quatro ideias essenciais para o desenvolvimento do conceito de função, as quais: conceito de função, representações de função, covariação e taxa de variação e famílias de função.

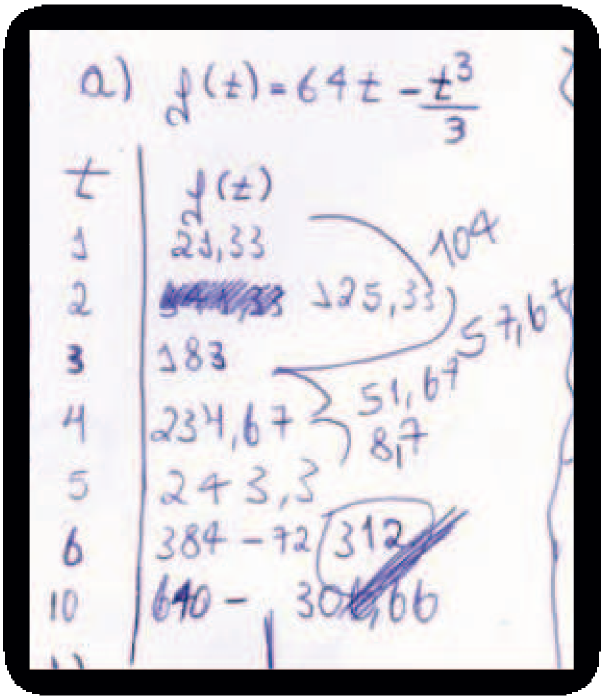
O conceito de função, primeira ideia essencial, foi trabalhada em toda a resolução da atividade.

[24]Retirada e adaptada de FLEMMING, 2006, p. 246.

Depois de lerem a atividade, os alunos comentaram que iriam montar a tabela, questionamos então, sobre quais valores eles iam atribuir, se seriam valores que consideravam mais fáceis de calcular.

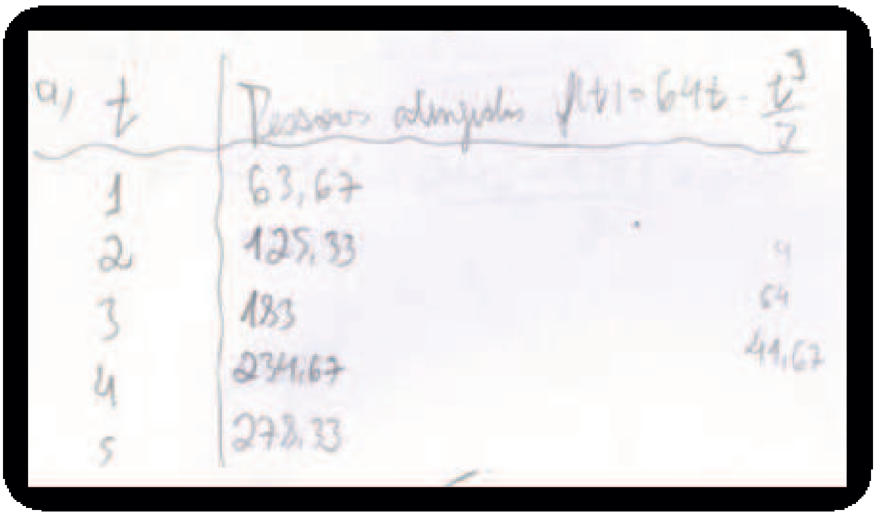
Abaixo temos as tabelas construídas pelos alunos.

Figura 61: Tabela construída pela dupla 1



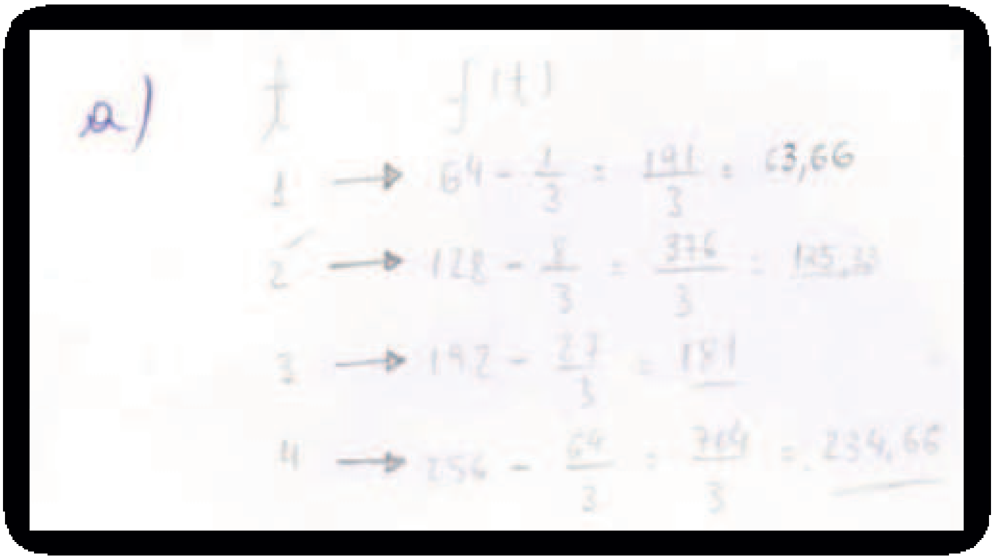

Fonte: Produções dos alunos.

Figura 62: Tabela construída pela dupla 2




Fonte: Produções dos alunos.

Figura 63: Tabela construída pelo aluno 3



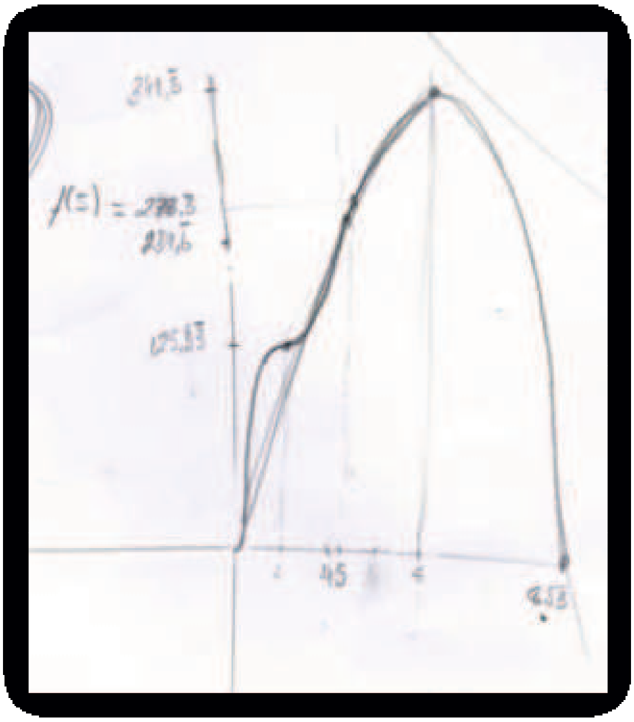

Fonte: Produções dos alunos.

Portanto, mesmo os próprios alunos tendo comentado na atividade anterior sobre os valores que atribuíam à tabela, nesta atividade continuaram atribuindo valores fáceis de ser calculados.

Destacamos que ao analisarem a tabela, os alunos puderam observar a variação das grandezas, e assim, trabalharam a segunda ideia essencial, covariação e taxa de variação.

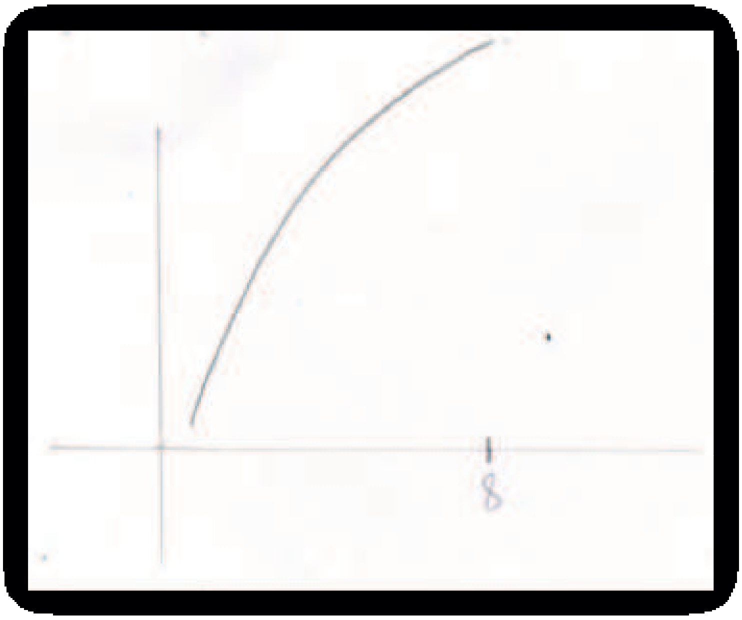
A partir daí, após construírem a tabela, os alunos esboçaram o gráfico, como podemos observar abaixo.

Figura 64: Gráfico construído pela dupla 1




Fonte: Produções dos alunos.

Figura 65: Gráfico construído pela dupla 2




Fonte: Produções dos alunos.

Figura 66: Gráfico construído pelo aluno 3


Fonte: Produções dos alunos.

E assim, pudemos observar que os alunos das duplas 1 e 2 consideraram apenas partes positivas do gráfico, o que demonstra que refletiram sobre a situação em questão, no entanto percebemos que cometeram alguns enganos em suas construções. Já o aluno 3 se confundiu e construiu um gráfico totalmente diferente do esperado na atividade.

Destacamos que os alunos exploraram a situação nas representações algébrica, tabular e gráfica, e dessa forma, trabalharam a quinta ideia essencial, representações de função.

**Análise:**

Observamos que os alunos se confundiram ao esboçar o gráfico, pois consideraram apenas parte do gráfico, e o aluno 3 cometeu alguns enganos. Acreditamos que os alunos não tenham tanta habilidade em construir gráficos de funções de terceiro grau, e também os valores atribuídos não contribuíram para que tivessem uma melhor compreensão do comportamento do gráfico.

Percebemos que nesta situação seria interessante o uso do GeoGebra para uma melhor exploração do gráfico, pois o software muito contribuiria para uma melhor visualização e compreensão do comportamento da função.

Ao procurar responder o item (d), surgiu a dúvida se o tempo em questão seria substituído na derivada ou na função inicial. A partir daí, os alunos discutiram entre si.

*D1: Esse t do tempo vai ser substituído na primeira derivada ou nessa primeira aqui em cima? Esse t 4?*
*D1: Na primeira derivada, no oitavo dia, t 8, dá zero.*
*D2: Na primeira derivada dá zero.*
*PP: O que significa isso?*
*D1: Qual a razão da expansão?*
*D2: Quer dizer que no oitavo dia...*
*D1: Não tem expansão.*
*D2: Porque no quarto dia vai chegar em 48, a razão, e no oitavo dia não vai ter.*
*PP: E se vocês calculassem mais algum outro valor ai no meio?*

Os alunos procuraram calcular a razão para um número próximo de oito e também para outros valores. Depois de analisarem seus cálculos, concluíram que a razão da expansão seria calculada a partir da derivada.

Os alunos também tiveram dúvida se o item (f) seria respondido a partir da função inicial, então lemos o enunciado junto com os alunos, e a partir daí, concluíram que realmente iriam utilizar a função apresentada no enunciado da atividade.

**Análise:**

A atividade fez surgir algumas dúvidas, mas a partir de nossos questionamentos, os alunos procuraram refletir e analisar melhor a atividade, e sem maiores dificuldades conseguiram resolver os itens propostos. Percebemos que os alunos a cada nova atividade, demonstravam segurança, boa compreensão do conceito e mais habilidade na resolução das situações propostas.

Em relação ao item (f), os alunos chegaram a alguns valores, entretanto procuramos fazê-los refletirem sobre suas respostas.

*D1: No quinto dia professora, dá...*
*A3: 835 sobre 3, no quinto dia. Ou 243,33.*

Então chamamos atenção para o enunciado da atividade, onde indicava que o tempo t era medido em dias a partir do primeiro dia da epidemia. A partir daí, questionamos os alunos sobre como eles interpretaram aquele dado. Sendo assim, os alunos começaram a comentar seus pensamentos.

*D1: Então vai fazer à somatória.*

*A3: Então esse primeiro dia tem um valor fixo né?*

*PP: No quinto dia vocês encontraram que número?*

*A3: 243,33.*

*PP: 243 pessoas, vamos dizer. Mas essas 243 pessoas serão atingidas só no quinto dia?*

*A3: Não, inclui os que estão sendo atingidos nos dias anteriores.*

*PP: Mas quantas pessoas serão atingidas pela epidemia no quinto dia?*

*D1: Só no quinto dia.*

*D1: Então é só pegar o quinto dia e subtrair o quarto dia.*

Os alunos demonstraram estar com algumas dúvidas na interpretação do item (f), mas a partir de nossos questionamentos procuraram analisar melhor os dados. Estavam com dúvida também se iriam utilizar a função inicial ou a sua derivada. Com o surgimento das dúvidas, os alunos comentaram que seria bom verificar no GeoGebra, no entanto, pedimos que procurassem resolver a situação primeiro, para depois fazer a verificação no software. Após refletirem juntos, chegaram a algumas conclusões.

*D1: Professora, se eu pegar o quinto dia e subtrair pelo quarto dia, eu vou obter, na realidade, só um dia. É, porque esse quarto dia foi à somatória do terceiro, do segundo e do primeiro dia.*

*D2: Quantas pessoas foram atingidas pela epidemia no quinto dia? Tá perguntando no quinto dia. Se fosse assim: quantas pessoas serão atingidas pela epidemia até o quinto dia? Ai seria somatória.*

Observamos que os alunos procuravam refletir e interpretar os dados da atividade, demonstrando uma postura mais ativa, dessa forma, as dúvidas que surgiam eram rapidamente solucionadas.

**Análise:**

Percebemos que os alunos cada vez estavam mais atentos aos dados, e a partir de nossos questionamentos, rapidamente chegavam às conclusões que nós esperávamos. As dúvidas que surgiram nessa atividade, os alunos conseguiram superá-las rapidamente, demonstrando um melhor domínio e uma boa compreensão do conceito.

Continuando a análise da situação, os alunos também concluíram que ao passar dos dias, o número de pessoas infectadas iria caindo.

*D1: Conforme vai aumentando os dias professora, vai diminuindo a quantidade de infectados.*
*D2: Há um decrescimento, cada dia que se passa parece que vai decrescendo a quantidade de pessoas.*
*PP: O que isso significa?*

Portanto, os alunos perceberam que iria chegar um dia em que a epidemia não iria mais se alastrar, ou seja, iria ser controlada. Para chegar a essa conclusão, analisaram na tabela a diferença entre o número de pessoas infectadas para cada dia, percebendo que havia um decrescimento desta diferença.

Os alunos se mostraram muito motivados a explorar a situação, e assim, também pudemos perceber que tiveram uma boa compreensão da atividade.

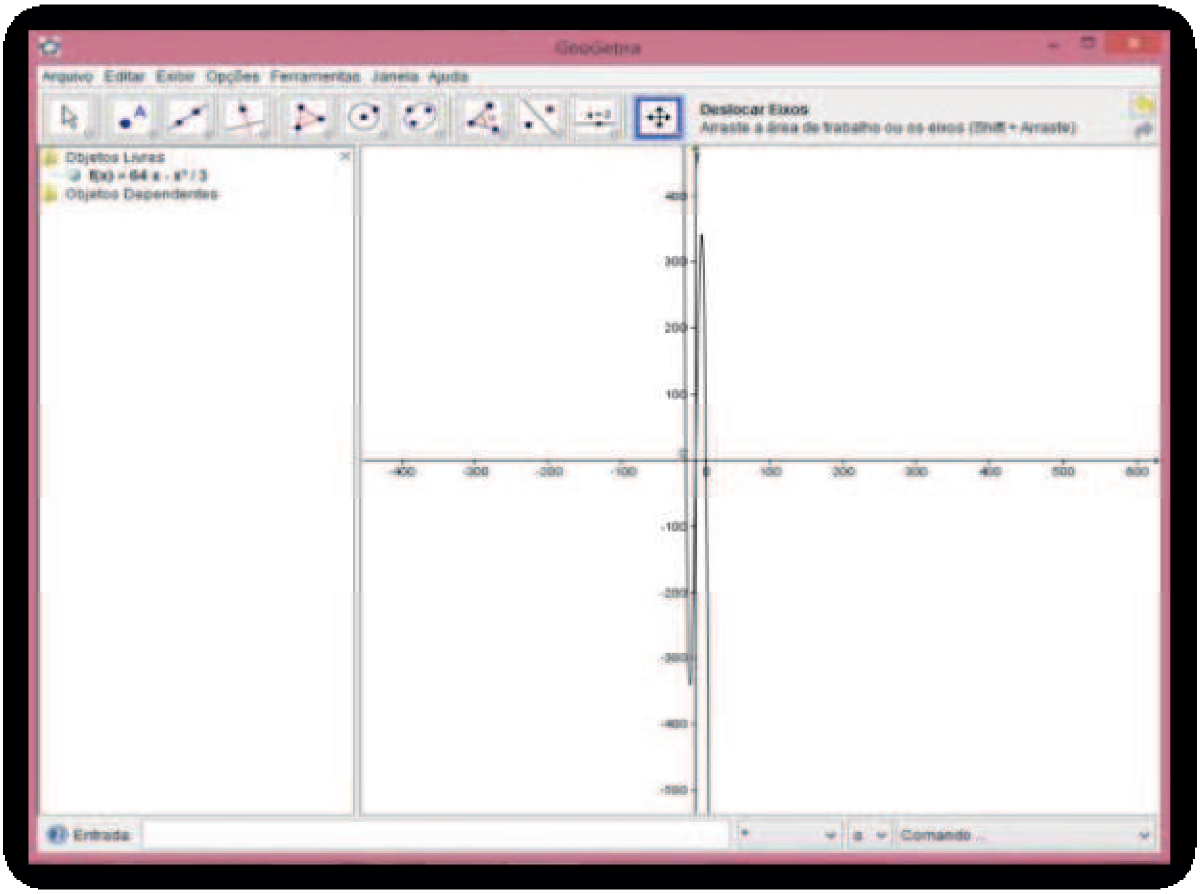
**Análise:**

Os alunos fizeram uma análise detalhada da situação, observando a diferença entre o número de pessoas infectadas em cada dia. Dessa forma, constataram que havia um decrescimento nesse número de pessoas, e assim, puderam concluir que chegaria um dia em que as pessoas não seriam mais infectadas.

É importante destacar a motivação dos alunos em explorar a atividade, e como demonstraram uma ótima compreensão da situação e do conceito de função. Portanto, pudemos perceber como o uso da metodologia e das atividades contribuiu para desenvolver nos alunos uma postura diferenciada, em que se tornaram mais ativos.

Após terminar a resolução da atividade, o aluno (a) da dupla 1 verificou no GeoGebra se havia esboçado o gráfico corretamente. Abaixo temos o gráfico construído no Geogebra.

Figura 67: Gráfico construído no GeoGebra




Fonte: Elaborado pelo autor.

O aluno (a) da dupla 1 observou que havia construído apenas parte do gráfico e se mostrou surpreso ao ver o comportamento do gráfico.

Portanto, pudemos perceber que os alunos não apresentaram maiores dificuldades na resolução desta atividade, de modo que concluíram sua resolução de forma rápida.

**Análise:**

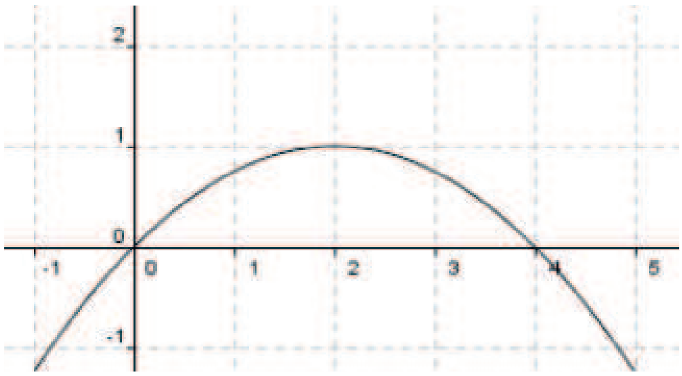
O aluno pôde constatar que havia esboçado apenas uma parte do gráfico da função, se mostrando um pouco surpreso com o comportamento do gráfico. Destacamos o fato do software muito contribuir para uma rápida visualização do comportamento de uma função.

> De modo geral, os alunos não demonstraram dificuldades na resolução desta atividade, pois as pequenas dúvidas que surgiram rapidamente foram superadas. A atividade foi resolvida de forma mais rápida, o que demonstrou que os alunos haviam adquirido mais habilidades em suas estratégias de resolução.

Os alunos resolveram a atividade 18 rapidamente, então ao concluírem a resolução, recolhemos suas produções e distribuímos a atividade 19.

Atividade 19[25]

*As trajetórias dos animais saltadores são, normalmente, parabólicas. O gráfico mostra o salto de uma rã representado em um sistema de coordenadas cartesianas. O alcance do salto é de 4 metros e a altura máxima atingida é de um metro.*




a) *Monte uma tabela que relacione a altura atingida e os metros alcançados.*
b) *Qual a altura atingida pela rã para 1,5 metro? E para 3,5 metros?*
c) *Quantos metros são alcançados quando a rã está a uma altura de 0,5 metros? E quando está a uma altura de 0,75 metros?*
d) *Escreva uma expressão matemática que represente a trajetória da rã.*

O objetivo desta atividade era fazer com que os alunos tivessem uma melhor compreensão do conceito e das representações de função, a partir de uma situação de fácil exploração.

Com esta atividade também trabalhamos as ideias essenciais: conceito de função, representações de função e covariação e taxa de variação.

---

[25]Retirada e adaptada de GIOVANNI e BONJORNO, 2005, vol. 1, p. 192.

A primeira ideia essencial, conceito de função foi trabalhada em a resolução desta atividade, desde a leitura do enunciado, até a conclusão da resolução.

Então, os alunos leram a atividade e começaram a expor suas conclusões. Dessa forma, o aluno (a) da dupla 1 comentou sobre como seria a expressão que representava a situação.

*D1a: A cada metro de altura, 4 de comprimento. Ai acho que,* $4x$. $f(x) = 4x$.
*A3: Não, mas vê a concavidade, avalia.*
*D1a: Mas é isso, é* $4x$ *mesmo, só que ela não vai... O intervalo dela vai ser, x menor que 1.*
*D2a: Subentende-se que x não seria linear, e como é uma parábola não deveria ser ao quadrado? Pra dar uma parábola?*
*PP: Esse gráfico é o que?*
*D2a: Uma parábola!*
*D1a: Mas aqui não tá representando o gráfico de uma função, mas do movimento da rã.*
*D1b: Mas aqui tem uma parábola.*

Portanto, o aluno (a) da dupla 1 considerou que o gráfico estava representando apenas o movimento da rã, e não a função do movimento.

Neste momento, chamamos a atenção dos alunos para o enunciado da atividade, buscando fazê-los refletir e interpretar a situação em questão. A partir daí, os alunos continuaram analisando a atividade, sem maiores discussões.

Após algumas análises, os alunos começaram uma nova discussão, pois o aluno (a) continuou afirmando que a expressão matemática seria $f(x) = 4x$, mas os outros alunos discordaram dizendo que pra essa expressão o gráfico seria uma reta e a atividade apresentava uma parábola. Novamente o aluno afirmou que o gráfico não representava a função, mas apenas o movimento que a rã fez. No entanto, os outros alunos continuaram discordando do aluno (a) da dupla 1.

**Análise:**

Mais uma vez destacamos a segurança dos alunos ao defenderem seus pontos de vista, neste caso, o aluno (a) da dupla 1 fez uma interpretação na qual o gráfico apresentado não representava a função da trajetória da rã, mas apenas o movimento que ela fez. Entretanto, os outros alunos procuraram fazê-lo entender que sua linha de raciocínio não era válida. Percebemos que o aluno

> da dupla 1, não buscou verificar se a expressão que ele encontrou seria válida para a situação.

Os alunos passaram então a buscar a expressão matemática para resolver os itens propostos. Fizeram muitas tentativas para encontrar uma expressão que representasse a situação.

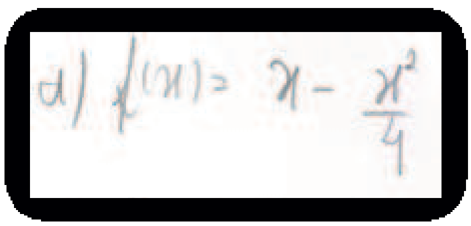
A partir daí, afirmaram estar com dúvidas na resolução da atividade, pois não estavam conseguindo montar a tabela e também tiveram dificuldades em encontrar uma expressão matemática.

Após muitas tentativas a dupla 2 encontrou uma expressão matemática que representava a situação, e um dos alunos explicou suas estratégias para encontrar essa expressão.

> *D2b: Eu tava olhando para o 0, para o 2 e para o 4. Eu tava tentando achar alguma coisa que substituindo 0, dá 0, o 2 dava 1 e o 4 dava 0. Ai eu fiquei pensando, também tem que ser um valor que substituindo 1 e 3, dê a mesma.*
> *PP: Foi por teste?*
> *D2b: Foi por teste.*

Portanto, o aluno (b) da dupla 2 encontrou uma expressão matemática a partir de várias tentativas.Abaixo temos a expressão escrita pelo aluno da dupla 2.

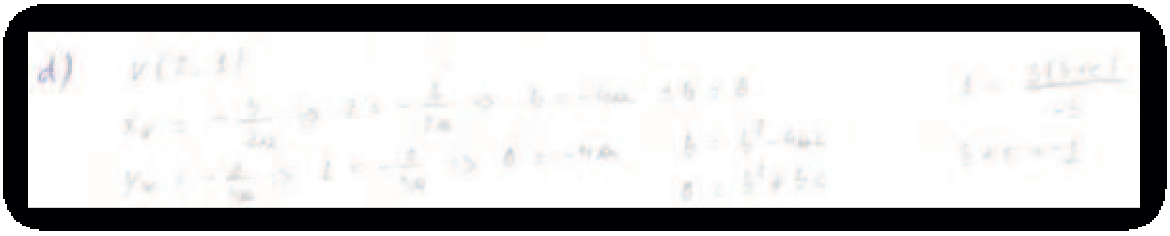
Figura 68: Expressão escrita pela dupla 2




Fonte: Produções dos alunos.

Apenas o aluno 3 buscou encontrar a expressão matemática usando pontos do gráfico, fazendo uso das coordenadas do vértice e sistemas de equações, mas não conseguiu êxito em seus cálculos.

Figura 69: Resoluções do aluno 3 para o item (d)



Fonte: Produções dos alunos.

**Análise:**

Os alunos mesmo com dificuldades e dúvidas, não se sentiram desmotivados, e procuraram encontrar uma expressão matemática a partir de tentativas. Destacamos o fato dos alunos partirem para a tentativa e erro, sem buscar outras estratégias que utilizassem, por exemplo, alguns pontos do gráfico.

Apenas o aluno 3 tentou encontrar a expressão a partir dos pontos encontrados no gráfico, usando recursos como as fórmulas para coordenadas do vértice e sistemas de equações, mas não obteve êxito.

Após conseguirem encontrar a expressão matemática, a dupla 2 passou a resolver os outros itens da atividade, e afirmaram ter encontrado resultados que já eram esperados por eles.

Abaixo temos a tabela construída pela dupla 2.

Figura 70: Tabela construída pela dupla 2

| h | Salto | h | Salto |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 4 | 0 |
| 1 | 0,75 | 3 | 0,75 |
| 2 | 1 | | |

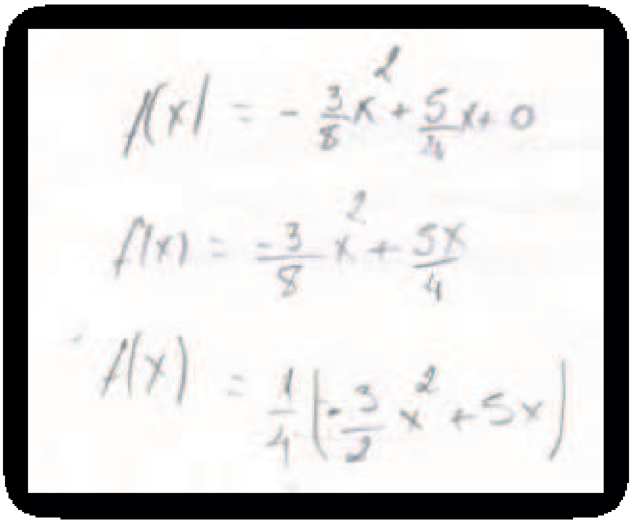
Fonte: Produções dos alunos.

Ao analisar a tabela, os alunos puderam observar a variação das grandezas, e dessa forma, trabalharam a segunda ideia essencial, covariação e taxa de variação.

O aluno (a) da dupla 1, após muitas tentativas, conseguiu chegar a uma expressão matemática, então resolveu verificar no GeoGebra.

A seguir temos a expressão matemática escrita pelo aluno (a) da dupla 1.

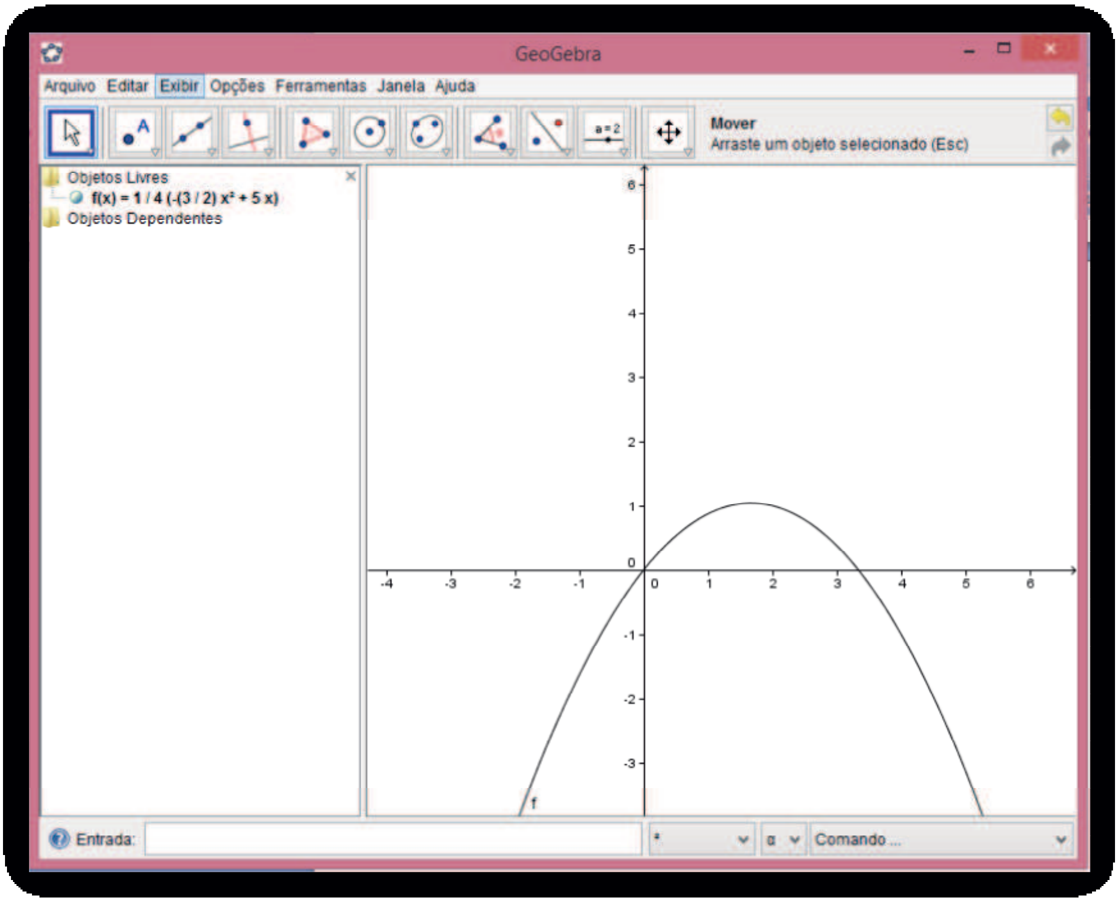
Figura 71: Expressão escrita pelo aluno (a) da dupla 1




Fonte: Produções dos alunos.

A expressão encontrada pelo aluno da dupla 1 era bem diferente da encontrada pela dupla 2, no entanto, ao visualizar no GeoGebra, ele percebeu que o gráfico definido pela expressão escrita quase coincidia com gráfico em questão.

Figura 72: Gráfico construído no GeoGebra referente a expressão escrita pelo aluno (a) da dupla 1




Fonte: Elaborado pelo autor.

Os alunos estavam muito motivados com a atividade, e dessa forma, mesmo a dupla 2 tendo encontrado uma expressão matemática válida, os outros alunos procuraram concluir seus cálculos e verificar se eram válidos.

Nesta atividade, os alunos puderam explorar a situação nas representações escrita, gráfica, tabular e algébrica, trabalhando assim, a quinta ideia essencial, representações de função.

**Análise:**

O aluno (a) da dupla 1 encontrou uma expressão diferente da que foi encontrada pela dupla 2 e ficou surpreso, pois o gráfico definido por esta expressão, era muito parecido com o gráfico dado na atividade. É importante destacar, a grande motivação apresentada pelos alunos, pois mesmo uma dupla encontrando uma expressão válida, os outros alunos continuaram buscando

> concluir seus raciocínios para encontrar uma expressão também, ou seja, não quiseram apenas copiar a expressão dos colegas e terminar de resolver a atividade.
>
> Portanto, a metodologia e as atividades trouxeram grandes contribuições para a mudança na postura dos alunos em sala, e também para uma melhor compreensão dos alunos do conceito de função.

Portanto, os alunos concluíram suas resoluções e em seguida recolhemos suas produções.

Nesta quinta etapa da oficina, percebemos que teríamos tempo suficiente para aplicar a atividade 4, que não foi aplicada na etapa um por questões de tempo. Então decidimos aplicá-la antes da atividade 20, que era a última desta etapa.

Atividade 4[26]

*Uma partícula se move sobre uma trajetória obedecendo à equação horária* $S(t) = 2t^3 + t + 1$ *(**S** dado em metros e **t** dado em segundos).*

a) *Derive a função horária.*
b) *Quais grandezas estão sendo relacionadas na função S'(t)?*
c) *Monte uma tabela que relacione essas grandezas.*
d) *Faça um esboço gráfico dessa relação entre a velocidade e o tempo gasto.*
e) *Qual a velocidade da partícula no instante de 2 segundos? E no instante de 5 segundos?*
f) *Derive a função S'(t).*
g) *Quais grandezas estão sendo relacionadas agora na função S''(t).*
h) *Agora monte outra tabela que relacione essas grandezas.*
i) *Esboce o gráfico dessa relação.*
j) *Qual a aceleração dessa partícula no instante de 3 segundos? E no instante de 10 segundos?*

O objetivo da atividade 4 era trabalhar o conceito e as representações de função a partir de uma sequência didática que iria guiar os alunos na construção de seu conhecimento e

[26]Retirada e adaptada de DANTE, 2004, vol. 3, p. 267.

explorar também, as contribuições do software GeoGebra na verificação dos conceitos envolvidos.

Nesta atividade, trabalhamos as ideias essenciais: conceito de função, representações de função, covariação e taxa de variação e famílias de função.

A primeira ideia essencial, conceito de função, foi trabalhada em toda a resolução desta atividade.

Os alunos leram a atividade e após resolverem os primeiros itens, surgiram algumas dúvidas quanto ao item (e).

*D2a: Qual a velocidade da partícula no instante de 2 segundos? Vamos jogar na função ou na derivada primeira?*

*A3: Velocidade instantânea você usa na derivada.*

*D2a: Mas no caso não tá pedindo velocidade instantânea não, tá pedindo só a velocidade da partícula no instante de 2 segundos.*

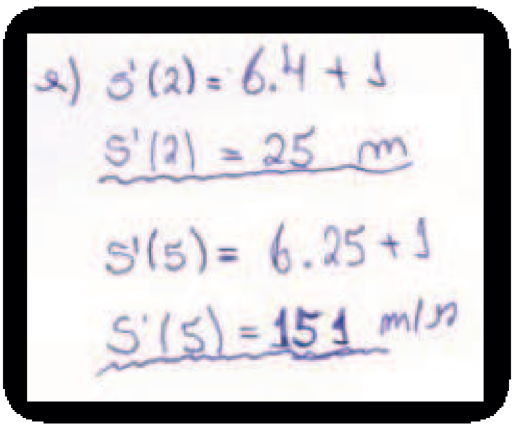
*A3: No instante 2. Então é só substituir no lugar do d2, em V. Em que a derivada de S é a velocidade em função de t.*

*D1b: Na derivada primeira substitui.*

Um dos alunos da dupla 2 estava com dúvida sobre qual função considerar para responder o item (e), pois queria saber se devia substituir na função em questão ou em sua derivada. A partir daí, as dúvidas foram superadas entre os alunos, pois discutiram juntos as estratégias de resolução.

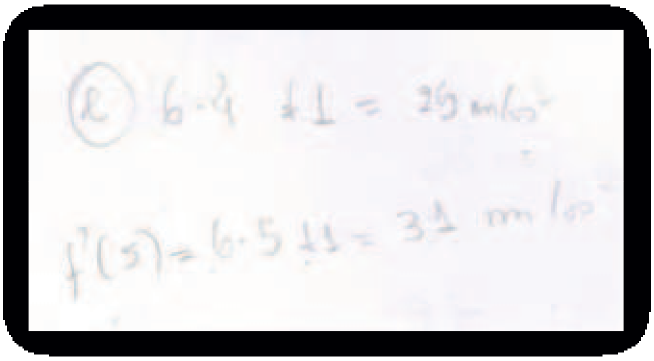
Abaixo temos as resoluções dos alunos para o item (e).

Figura 73: Resposta da dupla 1 para o item (e)



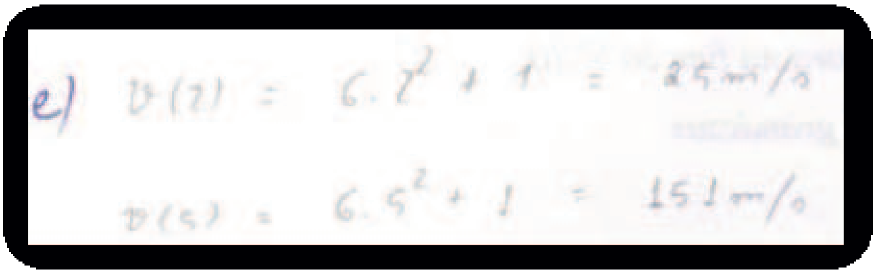

Fonte: Produções dos alunos.

Figura 74: Resposta da dupla 2 para o item (e)



Fonte: Produções dos alunos.

Figura 75: Resposta do aluno 3 para o item (e)



Fonte: Produções dos alunos.

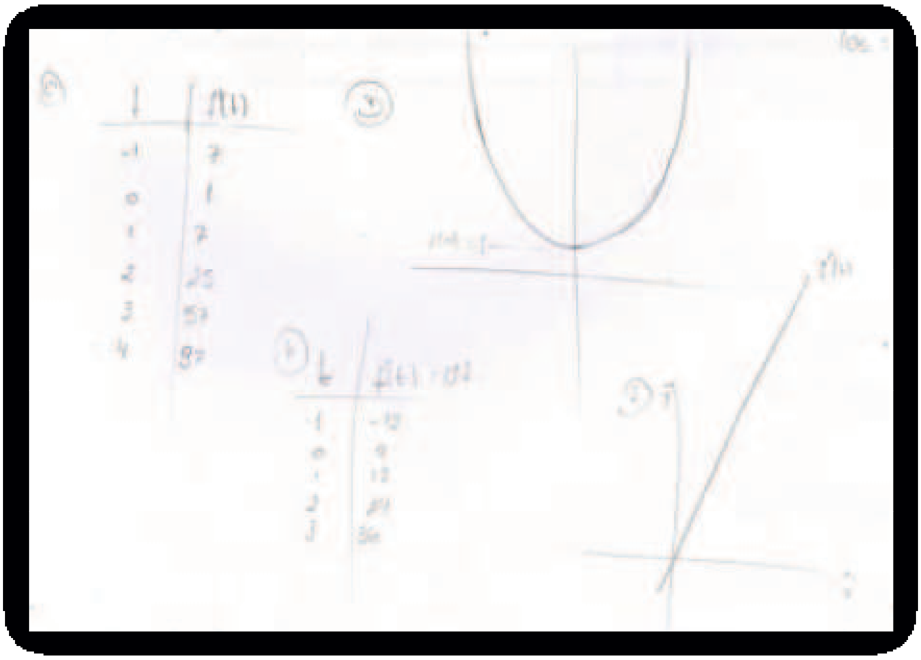
**Análise:**

Os alunos procuraram tirar suas dúvidas entre si, desenvolvendo uma troca de conhecimentos. É muito importante essa interação dos alunos em sala, e dessa forma, os alunos demonstram não estarem mais dependentes das respostas do professor.

Com esta atividade, percebemos que os alunos demonstraram uma ótima compreensão da situação e das relações apresentadas, e dessa forma não apresentaram dificuldades na resolução. Portanto, afirmaram que os conhecimentos adquiridos nas atividades anteriores contribuíram para que tivessem uma melhor compreensão do conceito.

Acreditamos que os alunos não tiveram dificuldades em construir a tabela e o gráfico desta atividade. Abaixo apresentamos estas construções.

Figura 76: Tabelas e gráficos construídos pela dupla 1

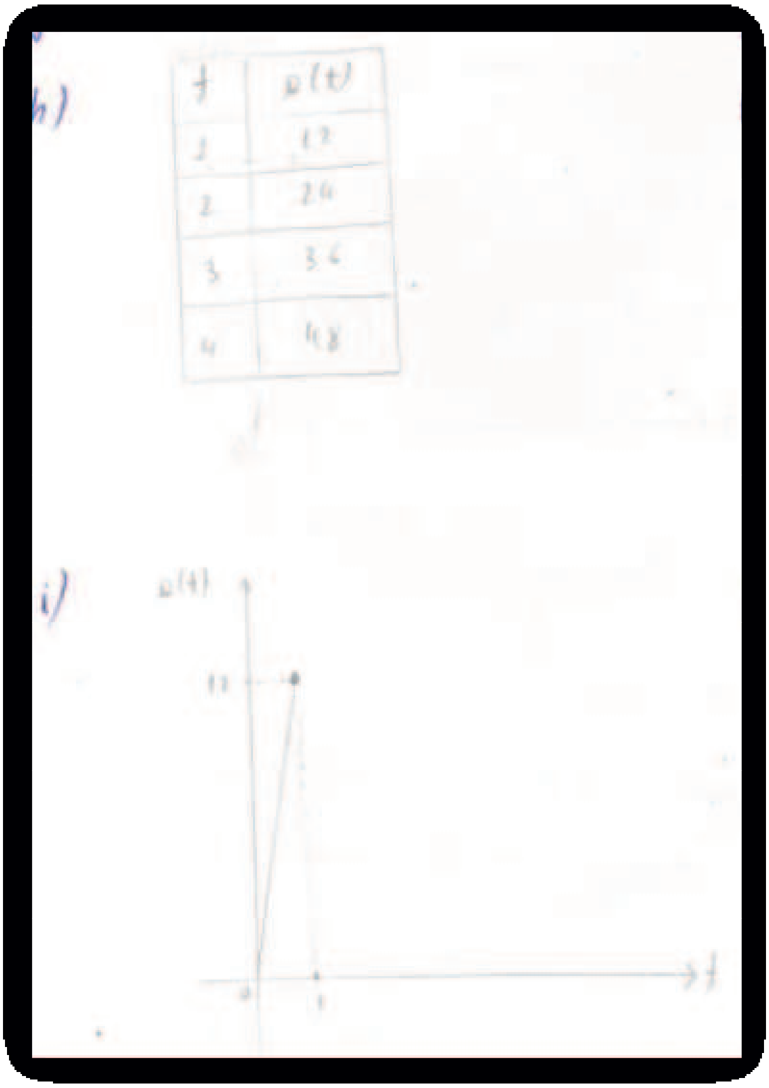


Fonte: Produções dos alunos.

Figura 77: Tabela e gráfico construído pela dupla 2

Fonte: Produções dos alunos.

Figura 78: Tabela e gráfico construído pelo aluno 3



Fonte: Produções dos alunos.

Portanto, os alunos trabalharam a quinta ideia essencial, representações de função, pois analisaram a situação nas representações algébrica, tabular e gráfica. E também trabalharam a segunda ideia essencial, covariação e taxa de variação, pois analisaram a tabela e observaram a variação das grandezas.

Nesta atividade, os alunos também trabalharam a terceira ideia essencial, famílias de função, pois a partir das derivadas puderam explorar uma função quadrática e uma função afim, que são duas das famílias de funções mais estudadas.

**Análise:**

Acreditamos que os alunos não tiveram dificuldades em montar as tabelas e esboçar os gráficos, e dessa forma, resolveram de forma rápida a primeira parte da atividade, a partir daí, passamos para a segunda parte da atividade.

Os alunos resolveram rapidamente a primeira parte da atividade, então distribuímos a segunda parte da atividade 4.

*2ª parte da atividade 4*

*k) Agora no computador, utilizando o software GeoGebra, insira a função S(t) na caixa de entrada, substituindo a variável t por x.*

*l) No canto inferior direito clique em comando e escolha derivada, na caixa de entrada digite f.*

*m) O gráfico que aparece corresponde exatamente ao gráfico esboçado por você no item (d)? Explique.*

*n) Insira o ponto A (opção novo ponto, 2ª janela) sobre o gráfico de f' e o movimente (opção mover, 1ª janela) observando na janela algébrica os valores correspondentes da abscissa e ordenada. Você consegue encontrar valores correspondentes aos que estão na tabela construída por você no item (c)? Explique.*

*o) Use novamente o comando derivada e digite na caixa de entrada f''.*

*p) O gráfico que aparece corresponde exatamente ao que você esboçou no item (i)? Explique.*

*q) Insira o ponto B sobre o gráfico de f' e o movimente observando na janela algébrica os valores correspondentes da abscissa e ordenada. Você consegue encontrar valores correspondentes aos que estão na tabela construída por você no item (h)? Explique.*

*r) Que conclusões você chegou ao resolver a primeira parte desta atividade com lápis e papel e a segunda parte explorando no GeoGebra?*

Usando o GeoGebra, os alunos puderam verificar o trabalho realizado na primeira parte, e como não houve dificuldades na primeira parte, os alunos se mostraram muito satisfeitos ao observarem os gráficos no GeoGebra, como afirmou o aluno (a) da dupla 2:

*D2a: Na primeira parte com lápis e papel, a gente explora mais o nosso conhecimento, o conhecimento que nós temos sobre gráficos e os conteúdos que está sendo abordado. Já no GeoGebra, há uma visualização melhor e mais rápida, não precisamos utilizar tanto dos nossos conhecimentos, só a parte de interpretação de gráficos.*

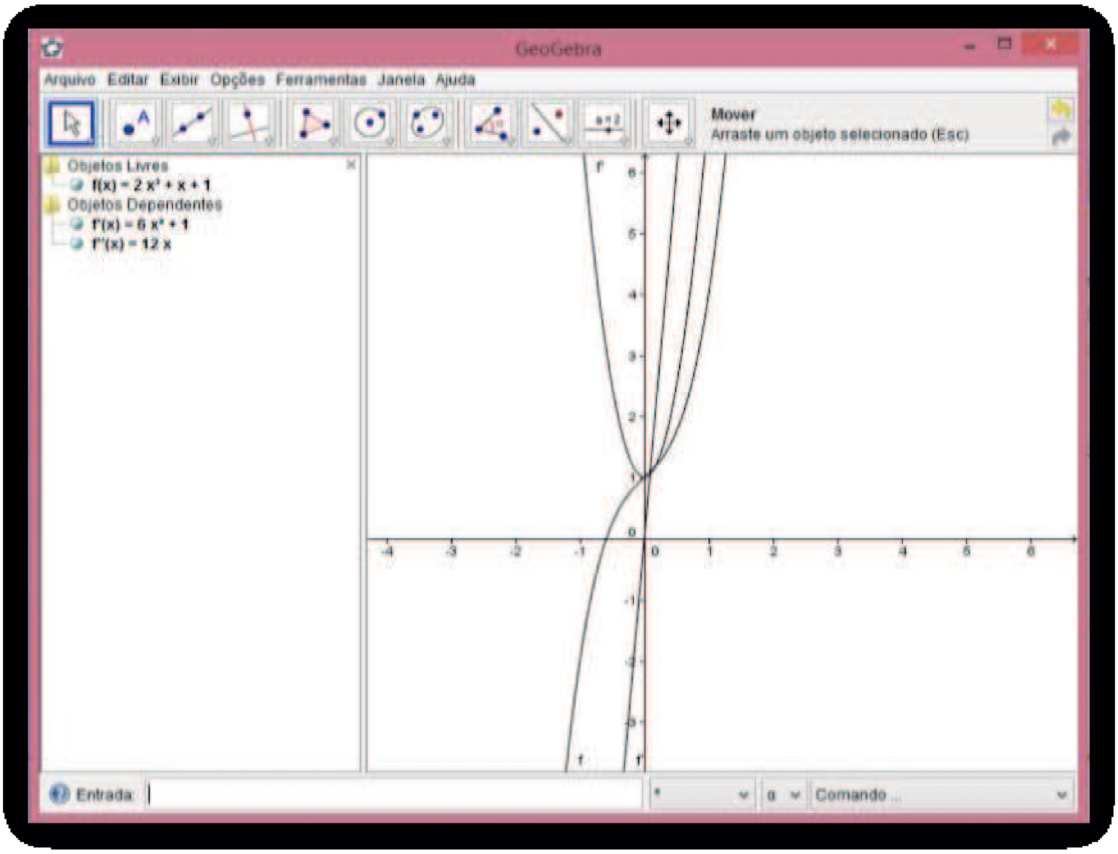
Então, um dos alunos da dupla 2 procurou expor sua opinião sobre o uso do GeoGebra na resolução da atividade, afirmando que o software favorece uma visualização melhor e mais rápida.

**Análise:**

Portanto, pudemos constatar que o uso do GeoGebra muito contribui para uma melhor e mais rápida exploração dos gráficos de função, isso ficou claro tanto pelo desenvolvimento apresentado pelos alunos, como pela própria fala de alguns.

Sendo assim, ao observarem os gráficos no GeoGebra, os alunos confirmaram que correspondiam aos gráficos construídos por eles com lápis e papel.

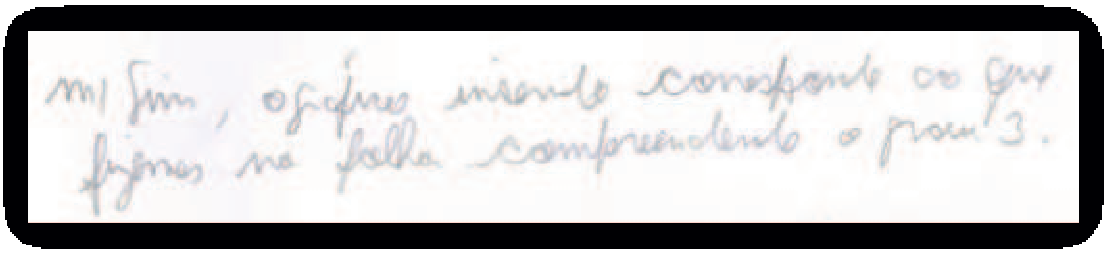
Figura 79: Gráficos construídos no GeoGebra




Fonte: Elaborado pelo autor.

A partir daí, os próprios alunos afirmaram em suas respostas da segunda parte da atividade, que os gráficos encontrados no software correspondiam aos construídos por eles.

Figura 80: Resposta da dupla 2 para o item (m)




Fonte: Produções dos alunos.

**Análise:**

Portanto, esta atividade foi resolvida de forma rápida, pois ao que tudo indica, não surgiram dificuldades de interpretação, nem dificuldades na resolução, o que demonstrou que os alunos apresentavam uma ótima compreensão do conceito e mais habilidades na busca por estratégias de resolução.

Ao concluir a resolução da atividade 4, recolhemos as produções dos alunos e aplicamos então a atividade 20, que estava programada para esta quinta etapa.

Atividade 20[27]

*Qual o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo y, do conjunto de todos os pares (x, y) tais que* $x^2 \leq y \leq 4, x \geq 0$*?*

a) *Monte uma tabela que relacione alguns valores para* $y = x^2$.
b) *Esboce graficamente no plano cartesiano as duas funções.*
c) *Esboce o sólido determinado pela rotação da área delimitada, em torno do eixo y?.*
d) *Qual a sua resposta para o enunciado da atividade?*
e) *Qual o volume do sólido para y=2? E para y=5?*

[27]Retirada e adaptada de GUIDORIZZI, 2001, vol. 1, p. 408.

O objetivo desta atividade era trabalhar o conceito e as representações de função explorando uma atividade de forma diferente do que os alunos estão acostumados, seguindo uma sequência didática que iria auxiliá-los na compreensão dos conceitos envolvidos.

Nesta atividade, trabalhamos quatro ideias essenciais, as quais: conceito de função, representações de função, covariação e taxa de variação e famílias de função.

O conceito de função, primeira ideia essencial, foi trabalhada em toda a resolução da atividade.

Ao observarem a atividade, consideraram que seria difícil de resolver, assim como consideraram a atividade 16 que pedia o volume de um sólido obtido pela rotação em torno do eixo x, mas buscamos encorajá-los para que começassem analisar a atividade por partes, procurando responder cada item para que pudessem entender a atividade. Chamamos a atenção para o item (a) e pedimos que montassem a tabela. Questionamos ainda, qual a outra função presente na atividade?

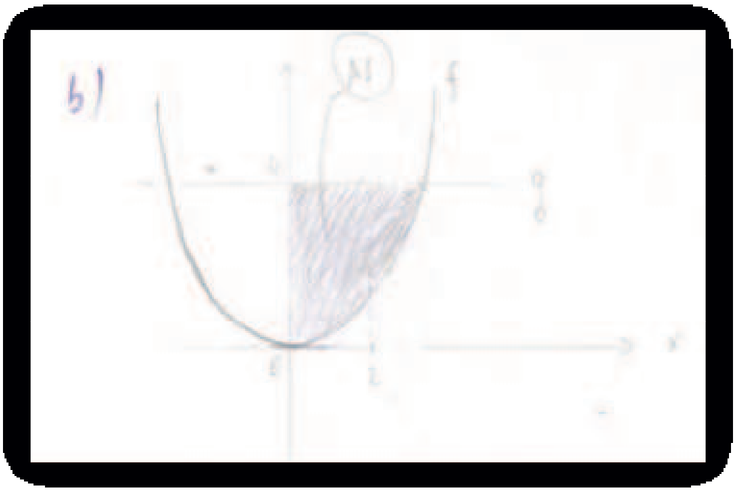
*A3: Então tem que ter duas condições, ou y é uma parábola, ou y é uma função constante.*
*PP: Ele está delimitando uma área não é?*
*A3: É, mas pra todo x positivo. Extremamente positivo.*
*PP: Essa área está delimitada entre duas funções, quais são?*
*D2b: Professora, eu acredito que esse troço aqui, o x vai ser 0 e 1... Não, 0, 1 e 2.*
*D1a: O x vai ser maior que 0.*
*D2b: Porque se eu botar 0, ai vai ficar, o y vai ser, entre 0 e 4, o 1, ai vai ser entre 1 e 4, se eu botar 2, ai vai ser 4. Ai tem que ser até 4.*

No entanto, mesmo com o entendimento que já tinham da situação e sabendo qual seria a área delimitada, percebemos que as duplas 1 e 2 não estavam conseguindo identificar a outra função que delimitava a área, ou seja, a função constante. E dessa forma, ao procurar resolver o item (b), o aluno (b) da dupla 2 ficou se perguntando qual seria a outra função além da função $y = x^2$, que deveria ser esboçado o gráfico.

Então, observamos que o aluno 3 compreendeu que havia uma função constante que delimitava a área junto com a função quadrática, e dessa forma, ele esboçou os dois gráficos em um mesmo plano cartesiano para observar a área delimitada.

Abaixo temos os gráficos construídos pelo aluno 3.

Figura 81: Gráficos esboçados pelo aluno 3



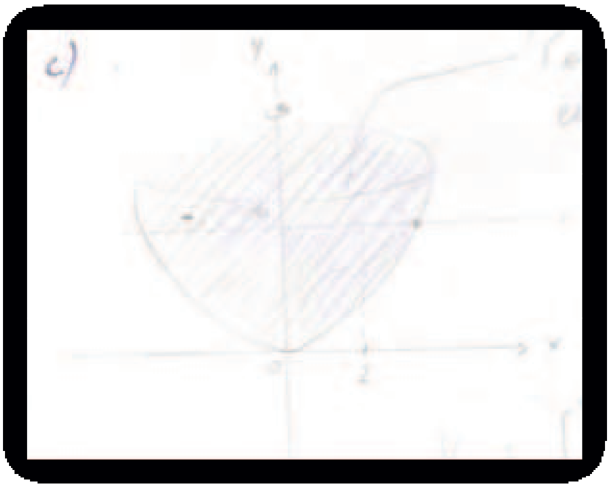
Fonte: Produções dos alunos.

**Análise:**

Observamos que os alunos entenderam que a área estava delimitada entre o gráfico da função $y = x^2$ e $y = 4$, mas não estavam considerando este $y = 4$ como uma função. Acreditamos que os alunos não pensaram em uma função constante. Entretanto, o aluno 3 compreendeu bem a situação e esboçou os dois gráficos em um mesmo plano, e assim, observamos que ele identificou a função constante, a qual chamou de g.

Após analisar melhor a situação e os dados, e a partir de nossos questionamentos, o aluno (b) da dupla 2 compreendeu que a outra função em questão, seria a função constante $y = 4$.Então, o aluno 3 construiu a seguinte figura a partir da rotação da área em torno do eixo y:

Figura 82: Figura obtida pelo aluno 3

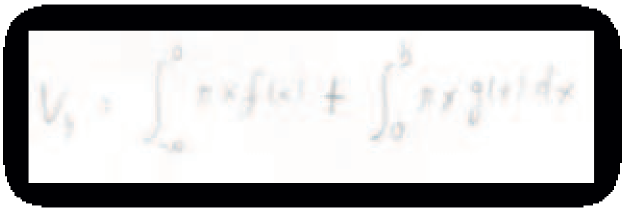


Fonte: Produções dos alunos.

Nesta atividade, o aluno 3 não demonstrou dificuldade em compreender como seria rotacionada a área delimitada, pois na atividade 16 havia se confundido na forma de rotacionar a área em questão.

Para calcular o volume do sólido, o aluno 3 utilizou a seguinte fórmula:

Figura 83: Fórmula usada pelo aluno 3

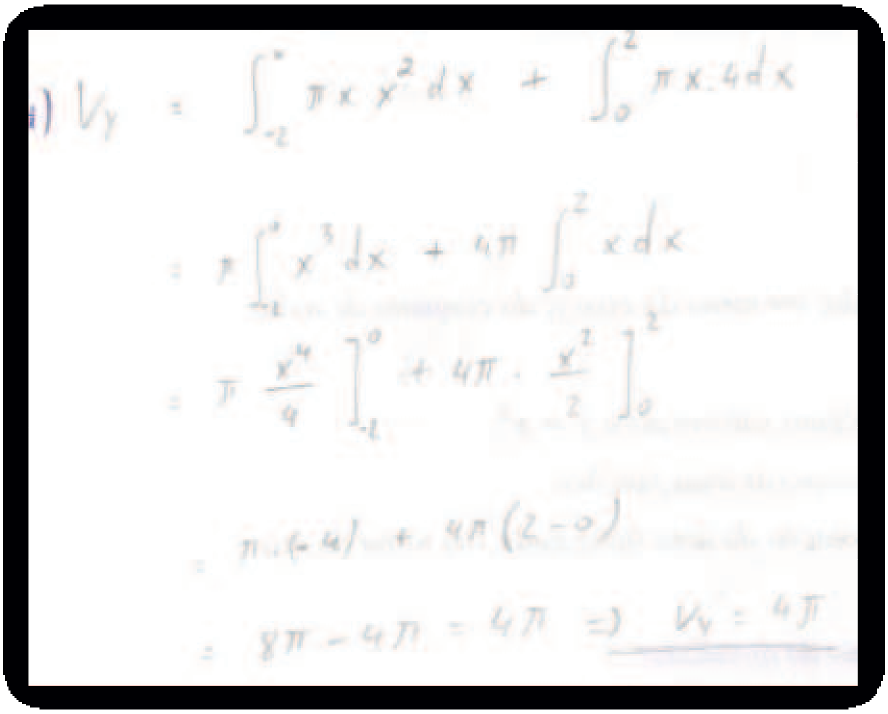


Fonte: Produções dos alunos.

Na fórmula o aluno considerou os valores de x, questionamos então, se os valores a serem considerados seriam o de x ou o de y? Mas o aluno não deu muita atenção ao nosso questionamento e continuou o seu raciocínio.

Abaixo apresentamos os cálculos do aluno 3.

Figura 84: Resposta do aluno 3 para o item (d)




Fonte: Produções dos alunos.

A partir daí, questionamos novamente o aluno 3 sobre o cálculo do volume deste sólido, se realmente seria considerado a variável x, mas o aluno continuou seguro de seus cálculos.

Portanto, os alunos trabalharam nesta atividade a quinta ideia essencial, representações de função, pois puderam explorar a situação nas representações algébrica, tabular e gráfica. Também trabalharam a segunda ideia essencial, covariação e taxa de variação, ao analisar a variação dos dados na tabela.

**Análise:**

Questionamos várias vezes se realmente o cálculo do volume do sólido seria feito em relação a x, perguntando em torno de qual eixo era a rotação e qual o intervalo considerado? Questionamos também se a fórmula seria aquela mesmo? Mas o aluno 3 continuou convicto de seus cálculos.

Assim como ocorreu na atividade 16, os alunos consideraram difícil ao observarem a atividade em um primeiro momento, a partir daí, tivemos que encorajá-los e fazer a mediação para que os alunos buscassem a resolução da atividade. Portanto, percebemos que os alunos se sentem um pouco desmotivados quando se deparam com uma atividade que consideram difícil, no entanto, nesta última atividade não se mostraram resistentes em tentar resolvê-la.

Após os alunos concluírem as suas resoluções, recolhemos suas produções e comentamos que havíamos aplicado todas as atividades programadas para esta oficina. Então, os alunos fizeram algumas perguntas sobre como seria a sexta etapa, explicamos que inicialmente teríamos a apresentação deles e em seguida o nosso orientador Prof. Dr. Silvanio de Andrade daria continuidade a etapa.

### 5.2.6. 6ª Etapa (18/03/2016)

Neste última etapa, como estava programado, os alunos deveriam fazer uma apresentação sobre o ensino-aprendizagem de função. Sendo assim, durante as etapas anteriores, os alunos nos questionaram sobre como deveria ser essa apresentação. Explicamos para eles que estariam à vontade para apresentar de forma prática, com atividades, ou de forma teórica.

Explicamos também, que inicialmente teríamos as apresentações deles, em que cada dupla teria um tempo de quarenta e cinco minutos, e para concluir a oficina, teríamos a presença do nosso orientador, Prof. Dr. Silvanio de Andrade, comentando sobre a pesquisa em Educação Matemática e o ensino-aprendizagem de função.

Então pedimos que se apresentassem na ordem das duplas, e dessa forma, a dupla 1 iniciou propondo aos colegas uma atividade.

O aluno (b) da dupla 1 aplicou a seguinte atividade:

Figura 85: Atividade proposta pelo aluno (b) da dupla 1

1) O preço de uma certa máquina nova é 10.000,00. Admitindo-se que ela tenha sido projetada para durar 8 anos e que sofre uma depreciação linear com o tempo.

a) Monte uma tabela referente aos 8 anos de uso?

b) Esboce o gráfico que representa este problema em $o<t<8$?

c) Qual o valor da máquina no período de 3 anos? de 4 anos e 6 meses? De 1 mês?

d) Ache qual o tipo de função e determine a formula geral que da o preço $P(t)$ da máquina após t anos de funcionamento?

e) Qual sua opinião do problema apresentado, que grau de dificuldade ela se encaixa? pontos positivos e negativos?

Fonte: Material trazido pelo aluno (b) da dupla 1.

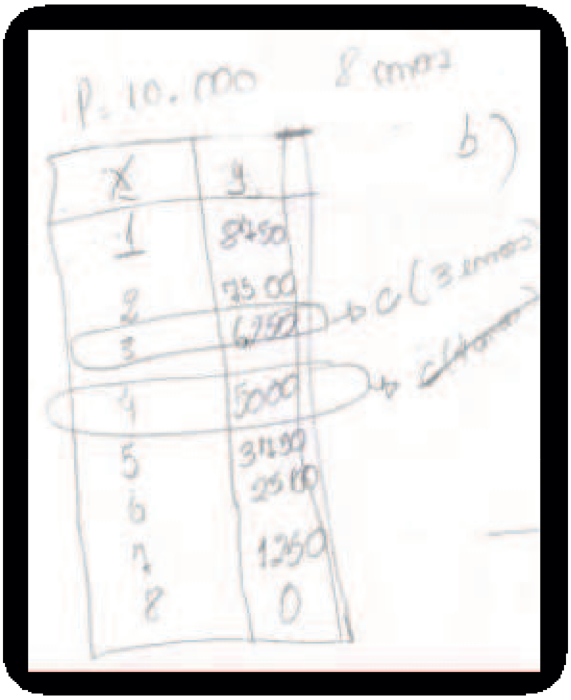
Após analisar de forma breve a atividade, o aluno (b) da dupla 2 afirmou que não havia entendido a atividade, então o aluno (b) da dupla 1 leu a atividade junto com os outros para que compreendessem. A partir daí, os alunos fizeram alguns comentários sobre a atividade:

*A3: Então existe ai um preço fixo, seguido de uma variável que vai depender do tempo.*
*D1b: Ela vai durar 8 anos. Se ela vai durar 8 anos, com 8 anos, subentende-se que ela não vai valer nada.*
*A3: Então podemos concluir o seguinte, que... se existir um decréscimo, vai ter um momento em que... vai ter um prejuízo né? Porque tipo... Se você pegar aqui P(t) e igualar a 0, você esta encontrando o tempo necessário para que...*
*D1b: Monte a tabela!*

Após esse momento de discussão, o aluno (b) da dupla 2 demonstrou ter compreendido a situação, e assim, procurou montar a tabela.

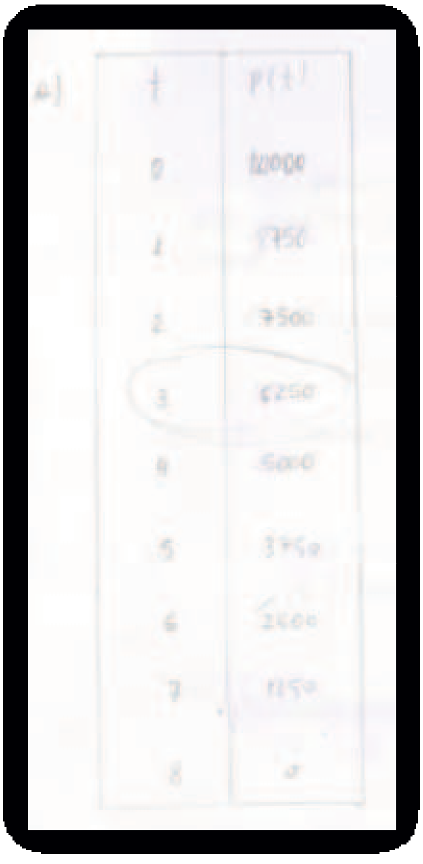
Abaixo temos as tabelas montadas pela dupla 2 e pelo aluno 3.

Figura 86: Tabela construída pela dupla 2




Fonte: Produções dos alunos.

Figura 87: Tabela construída pelo aluno 3




Fonte: Produções dos alunos.

Portanto, ao analisar a tabela, os alunos puderam observar a variação das grandezas, e dessa forma, trabalharam a segunda ideia essencial, covariação e taxa de variação.

Ao montarem a tabela, os alunos passaram a analisar e discutir sobre alguns aspectos da situação.

*A3: Além de ser uma função, podemos dizer que ela será uma progressão. Por quê? Porque ela tende a diminuir a razão de 1250.*
*D1b: É essa queda.*
*A3: O um oitavo de 10 mil, né?*
*D1b: Se eu mudasse o valor dela, se dissesse que foi 20 mil reais, esses anos... Ia mudar o valor, que iria ser aumentado.*

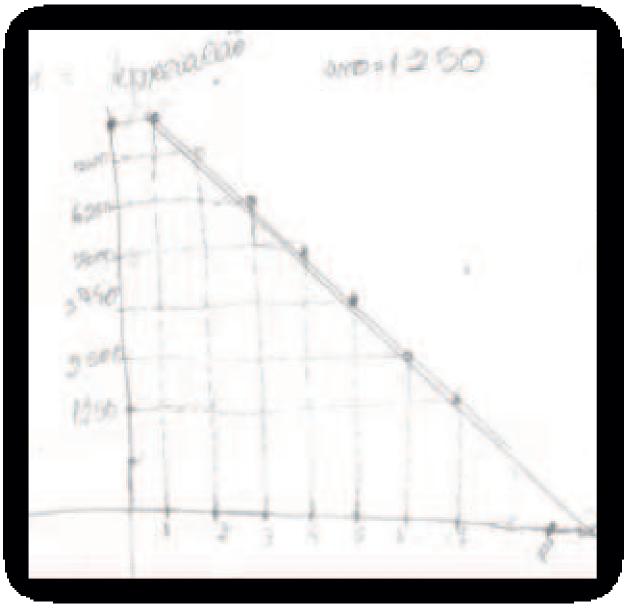
Observamos que os alunos se sentiram motivados a explorar a situação, pois além de procurarem analisar vários aspectos, também pensaram em como seria a situação se a máquina tivesse custado vinte mil reais.

**Análise:**

Observamos que o aluno da dupla 1 propôs uma atividade baseado na oficina, buscando utilizar a mesma metodologia proposta em nossa oficina. E assim, o aluno procurou assumir uma postura parecida com a nossa em sala, fazendo questionamentos para mediar os colegas na resolução da situação. Dessa forma, tanto o aluno que propôs a atividade, quanto os outros alunos, demonstraram uma grande familiaridade com a metodologia e com a atividade. Sendo assim, tudo leva a crer que não surgiram dificuldades na resolução da atividade proposta.

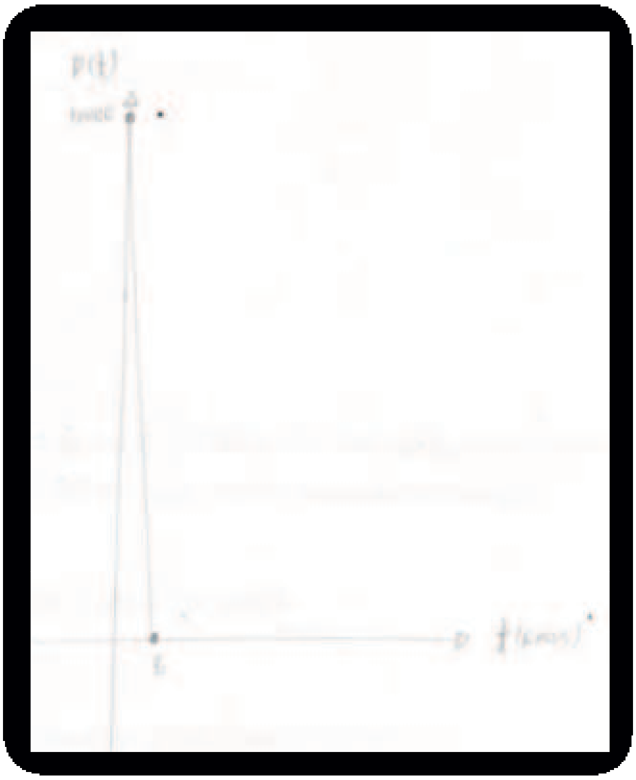
Logo após analisarem as tabelas construídas, os alunos procuraram esboçar o gráfico. O aluno 3 comentou que a situação definia uma função afim decrescente.

Figura 88: Gráfico construído pela dupla 2



Fonte: Produções dos alunos.

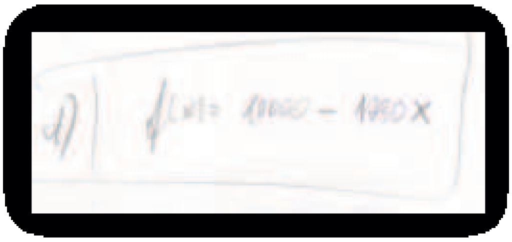
Figura 89: Gráfico construído pelo aluno 3



Fonte: Produções dos alunos.

Observamos que os alunos não demonstraram dificuldades ao procurar esboçar o gráfico da situação, dessa forma, os alunos pareciam ter tido uma boa compreensão da atividade. Além disso, percebemos que os alunos encontraram rapidamente uma expressão matemática a partir da tabela.

Figura 90: Expressão escrita pela dupla 2



Fonte: Produções dos alunos.

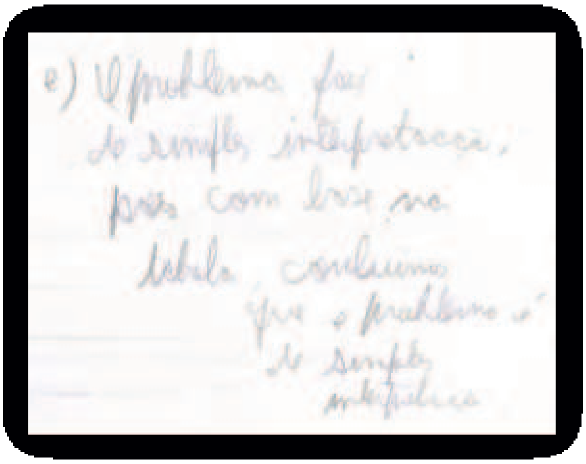
Portanto, os alunos trabalharam a quinta ideia essencial, pois analisaram a situação nas representações escrita, tabular, gráfica e algébrica.

**Análise:**

Acreditamos que os alunos não tiveram nenhuma dificuldade em esboçar o gráfico, e dessa forma, demonstraram ter uma ótima compreensão do conceito de função nesta situação. Também não tiveram dificuldades em encontrar uma expressão matemática a partir da tabela.

Resolveram a situação de forma rápida, e consideraram a atividade de fácil interpretação. Abaixo temos a resposta da dupla 2 para o item (e), afirmando este fato.

Figura 91: Resposta da dupla 2 para o item (e)



Fonte: Produções dos alunos.

Sendo assim, pudemos constatar que os alunos tiveram uma boa mudança em sua postura, pois se tornaram mais ativos na busca por estratégias de resolução. O aluno (b) da dupla 1 se mostrou muito seguro ao aplicar a atividade aos colegas, procurando sempre mediar à resolução.

**Análise:**

Portanto, a atividade proposta pelo aluno (b) da dupla 1 foi de fácil interpretação, baseada nas atividades da oficina, e fazendo uso da metodologia de resolução de problemas. Percebemos que a oficina contribuiu para uma mudança na postura dos alunos, tanto como alunos, como também como futuros professores, e dessa forma, esperamos que em suas práticas também procurem utilizar metodologias que contribuam para o ensino-aprendizagem de função.

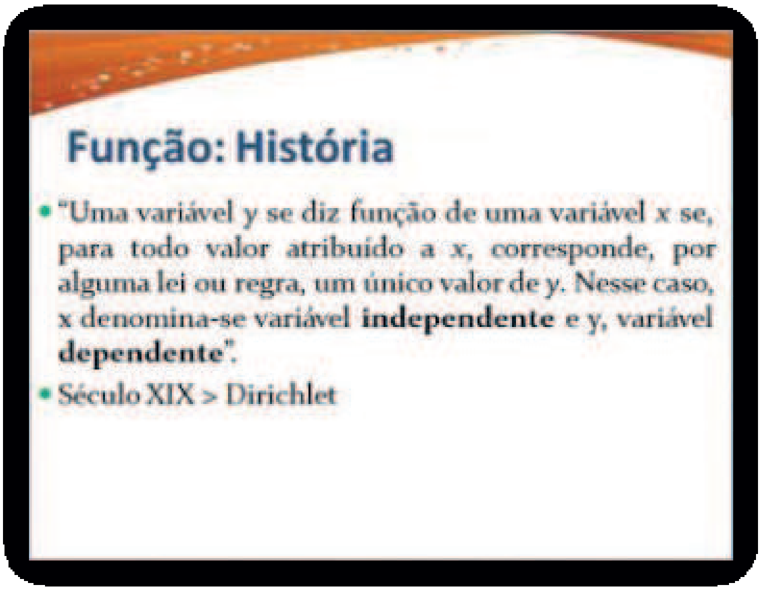
O aluno da dupla 1 não deixou claro se a atividade foi elaborada por ele, ou se foi retirada de algum lugar e adaptada para sua apresentação. No entanto, a partir de sua apresentação, o aluno demonstrou muita segurança e ótima compreensão do conceito de função.

Os alunos concluíram a resolução da atividade, então recolhemos suas produções e passamos para a apresentação da dupla 2. O aluno (b) da dupla 2 iniciou sua apresentação falando de modo mais teórico, sobre o ensino-aprendizagem de função. Ele comentou que, como a oficina foi mais prática, resolveu apresentar uma parte teórica como complemento.

O aluno falou da importância de estudar função desde o ensino fundamental até o ensino superior. E assim, destacou que havia consultado três livros didáticos do ensino médio para fundamentar sua apresentação, e nestes livros procurou observar como eram abordados aspectos como definição, domínio, imagem e contradomínio.

Primeiramente, comentou da parte mais histórica, trazendo um pouco da evolução da definição de função. Abaixo temos um dos slides de sua apresentação com a definição de função segundo Dirichlet.

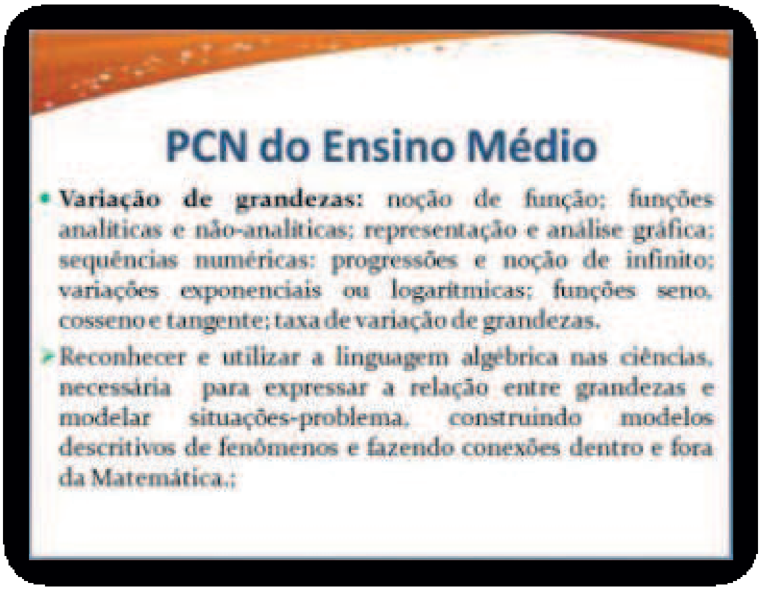
Figura 92: Slide da apresentação da dupla 2




Fonte: Apresentação de slides da dupla 2.

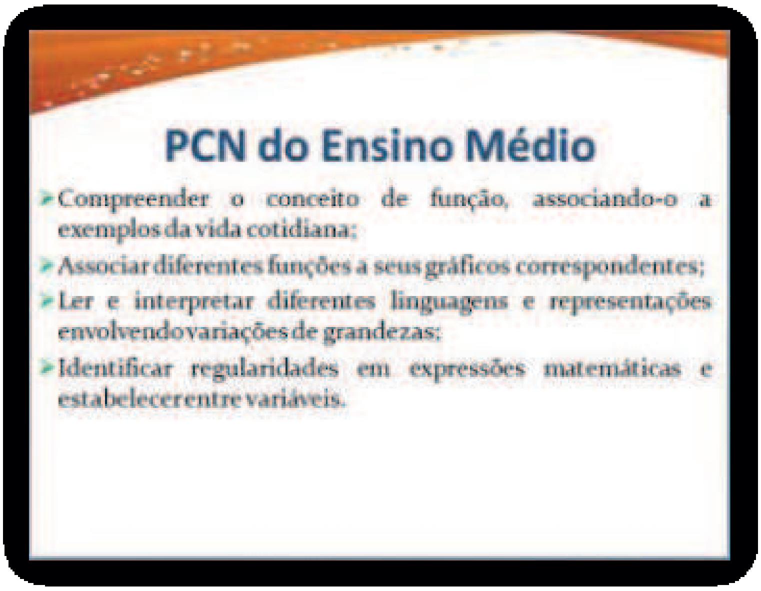
Em seguida, o aluno comentou a importância de se estudar função e apresentou o que dizem os PCN's sobre ensino-aprendizagem de função.

Figura 93: Slide da apresentação da dupla 2




Fonte: Apresentação de slides da dupla 2.

Figura 94: Slide da apresentação da dupla 2




Fonte: Apresentação de slides da dupla 2.

O aluno (b) da dupla 2 durante sua apresentação, sempre procurava destacar momentos da oficina em que observou o uso dos parâmetros que estava apresentando.

**Análise:**

O aluno se preocupou em analisar livros didáticos, onde observou como eram abordados aspectos como definição, domínio, imagem e contradomínio. Apresentou o que dizem os PCN's sobre ensino-aprendizagem de função e a todo momento fazia paralelos com a oficina, destacando momentos em que observou o uso desses parâmetros.

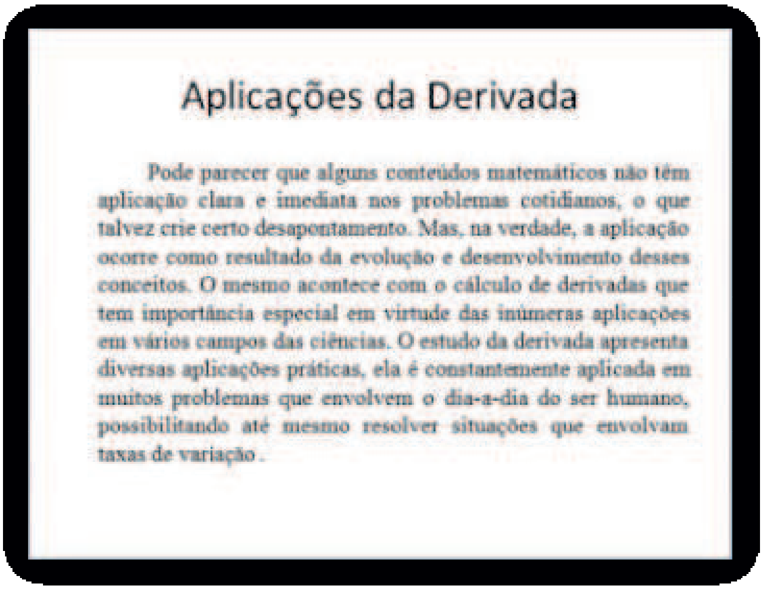
Portanto, a partir da apresentação do aluno, pudemos constatar que a oficina trouxe contribuições para esses alunos no que diz respeito ao ensino-aprendizagem de função. Acreditamos que a oficina contribuiu não só para uma melhor compreensão do conceito por parte dos alunos, mas também para que eles refletissem sobre esse ensino-aprendizagem, como futuros professores de matemática.

Em seguida, o aluno apresentou os objetivos das seguintes disciplinas do curso de Licenciatura em Matemática: Matemática Básica I, Cálculo Diferencial, Cálculo Integral, Cálculo Vetorial e Funções de Várias Variáveis. Destacou ainda, os conteúdos de função que são estudados em cada disciplina.

Na sequência, o aluno (a) da dupla 2 deu continuidade à apresentação falando sobre as aplicações da derivada. Destacou que, como seu colega havia apresentado de forma teórica, sua apresentação seria relacionada à prática.

Abaixo temos um dos slides da apresentação do aluno (a) da dupla 2 sobre aplicações da derivada.

Figura 95: Slide da apresentação da dupla 2




Fonte: Apresentação de slides da dupla 2.

O aluno comentou sobre aplicações da derivada chamando a atenção para um fato que ocorre desde o ensino básico, que é o questionamento dos alunos sobre onde iram utilizar os conteúdos matemáticos em sua vida. O aluno também destacou que ainda faz esse tipo de questionamento diante dos conteúdos estudados no curso de Licenciatura em Matemática.

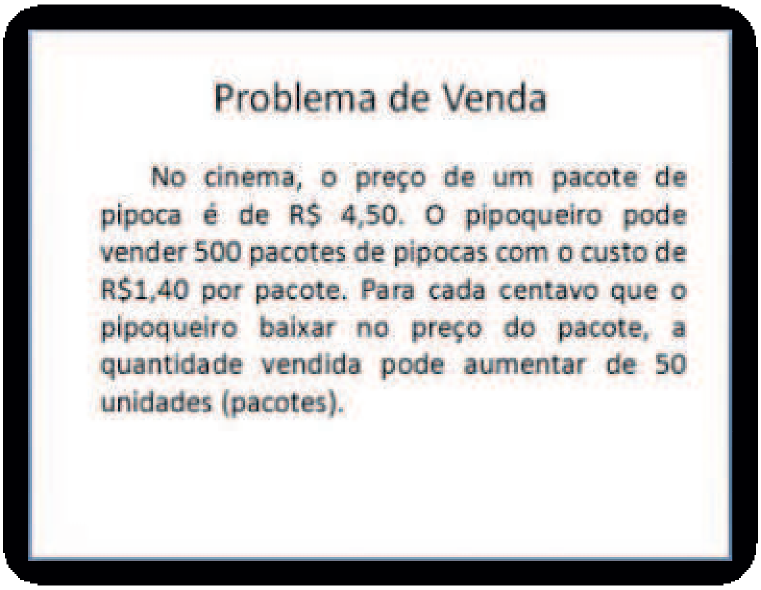
**Análise:**

Percebemos que os alunos elaboraram suas apresentações dando mais ênfase ao ensino superior. O aluno (a) da dupla 2 se preocupou com a aplicação prática de função, em especial aplicações da derivada.

A partir do que expôs sobre aplicações da derivada, o aluno propôs aos colegas o seguinte problema[28]:

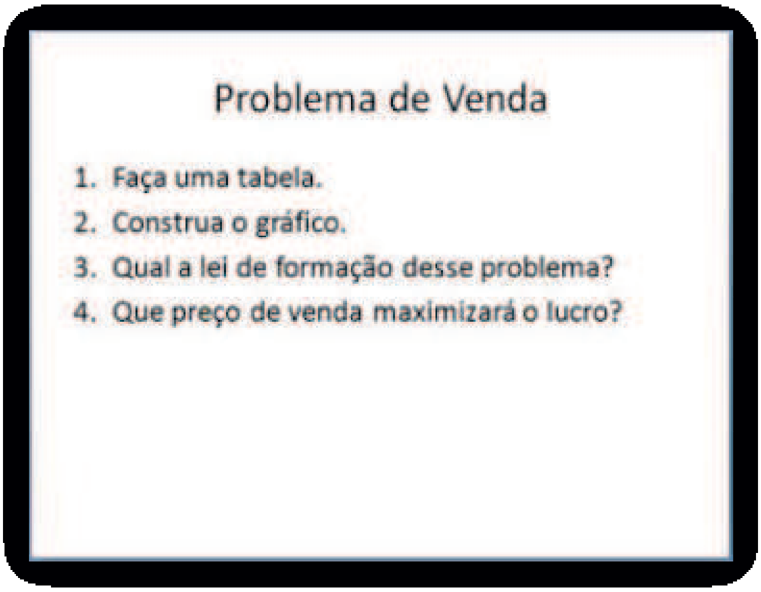
[28] Site onde o aluno retirou o problema: www.dmejp.unir.br/menus_arquivos/1787_anderso_marcolino.pdf.

Figura 96: Slide da apresentação da dupla 2




Fonte: Apresentação de slides da dupla 2.

Figura 97: Slide da apresentação da dupla 2




Fonte: Apresentação de slides da dupla 2.

Após lerem o enunciado, os alunos iniciaram uma discussão tentando entender o problema. A partir daí, um dos alunos comentou:

*D1b: Então é referente aos 500 pacotes, né? Por exemplo, se ele vender 550 pacotes, então o preço da pipoca vai ser 1 real e 39 centavos. Se ele aumentar mais 50, então o preço da pipoca vai ser 1 real e 38 centavos.*

O aluno (b) da dupla 1 explicou como interpretou a situação e os outros alunos afirmaram ter entendido da mesma forma. E ainda comentaram que o valor de R$ 4,50, não influenciava em nada no problema.

No entanto, os alunos afirmaram estar com dúvidas em relação ao que o problema pedia, e dessa forma, consideraram a situação difícil de resolver. Então o aluno (a) da dupla 2, afirmou que escolheu este problema por acreditar que se tratava de um problema simples.

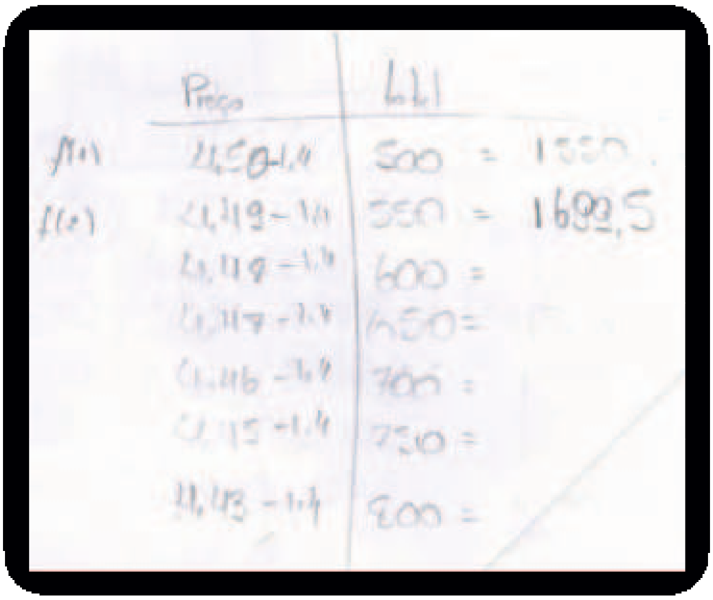
**Análise:**

A principio, o aluno que propôs o problema pensava ser uma situação de simples interpretação, mas ao analisar junto com os colegas, encontrou algumas dificuldades de interpretação.

Surgiu então, a dúvida sobre qual valor utilizar para montar a tabela: R$ 1,40 ou R$ 4,50? Os alunos continuaram discutindo e tentando interpretar a situação. Entretanto, um dos alunos da dupla 1 afirmou que o valor a ser utilizado seria R$ 1,40.

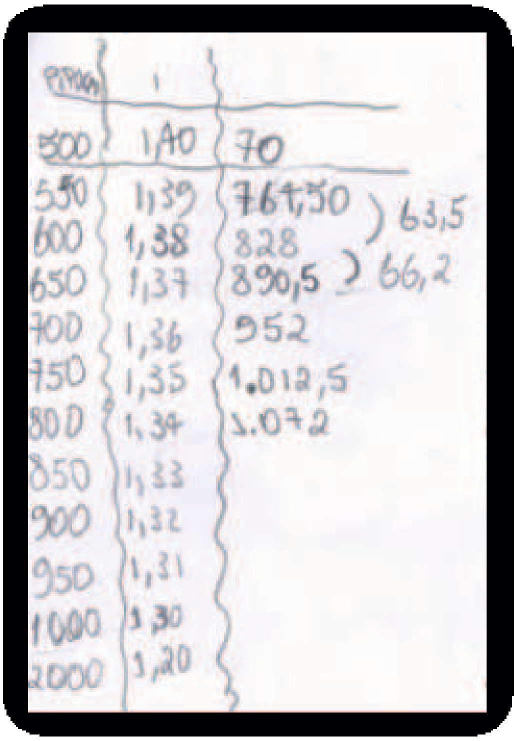
Abaixo temos as tabelas construídas pelos alunos da dupla 1.

Figura 98: Tabela construída pelo aluno (b) da dupla 1




Fonte: Produções dos alunos.

Figura 99: Tabela construída pelo aluno (a) da dupla 1




Fonte: Produções dos alunos.

Os alunos da dupla 1 consideraram valores diferentes, e assim, analisaram a situação de formas diferentes.

Ao analisar a tabela, os alunos trabalharam a segunda ideia essencial, covariação e taxa de variação, pois puderam observar a variação das grandezas.

Após algumas análises e várias discussões entre os alunos, chamamos a atenção deles para o enunciado do problema, questionando sobre o que significava aqueles valores de R$ 4,50 e R$ 1,40. A partir daí, os alunos observaram que o primeiro valor era o preço que seria vendido o pacote de pipoca, e o segundo valor era o custo de um pacote de pipoca.

*D2a: Então quer dizer que ele está ganhando 3 e 10?*

*PP: Qual é o lucro dele?*

*D2b: 500 vezes 3,10. Em cima dos 500. Se for seguir esse negocio que ele gasta 1 e 40 e vende por 4 e 50, então vai ter lucro de 3 e 10. Em cima dos 500 pacotes, se ele vender tudo, vai dar 1550.*

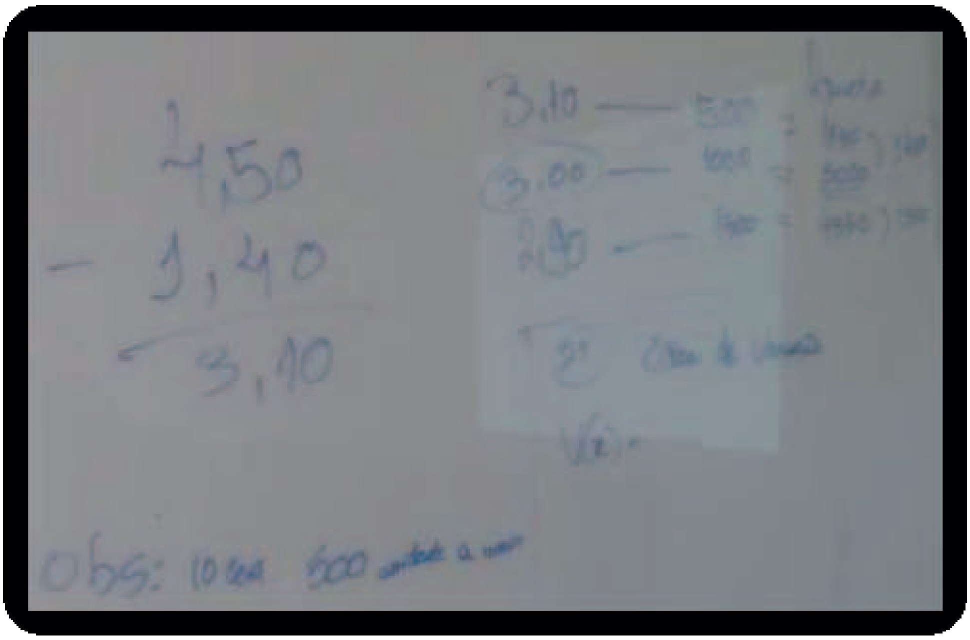
Portanto, os alunos inicialmente haviam desconsiderado o valor de R$ 4,50, mas a partir de nossos questionamentos compreenderam que este seria o preço de venda do pacote de pipoca.

**Análise:**

Inicialmente, apenas o aluno (a) da dupla 1, havia considerado o preço de R$ 4,50, os outros alunos desconsideraram este valor, mas a partir de nossos questionamentos compreenderam a situação e conseguiram tirar algumas conclusões sobre o lucro do pipoqueiro.

Como o tempo da dupla 2 estava acabando, o aluno (a) foi ao quadro para concluir seu raciocínio junto com os colegas.

Figura 100: Cálculos feitos no quadro pelo aluno (a) da dupla 2




Fonte: Registros fotográficos do autor.

Então, o aluno considerou o lucro inicial do pipoqueiro de R$ 3,10, e à medida que aumentava 500 pacotes de pipoca, o lucro decrescia 10 centavos. A partir daí, todos demonstraram ter compreendido a situação, mas como o tempo da dupla 2 havia acabado, não foi possível resolver todos os itens propostos na atividade.

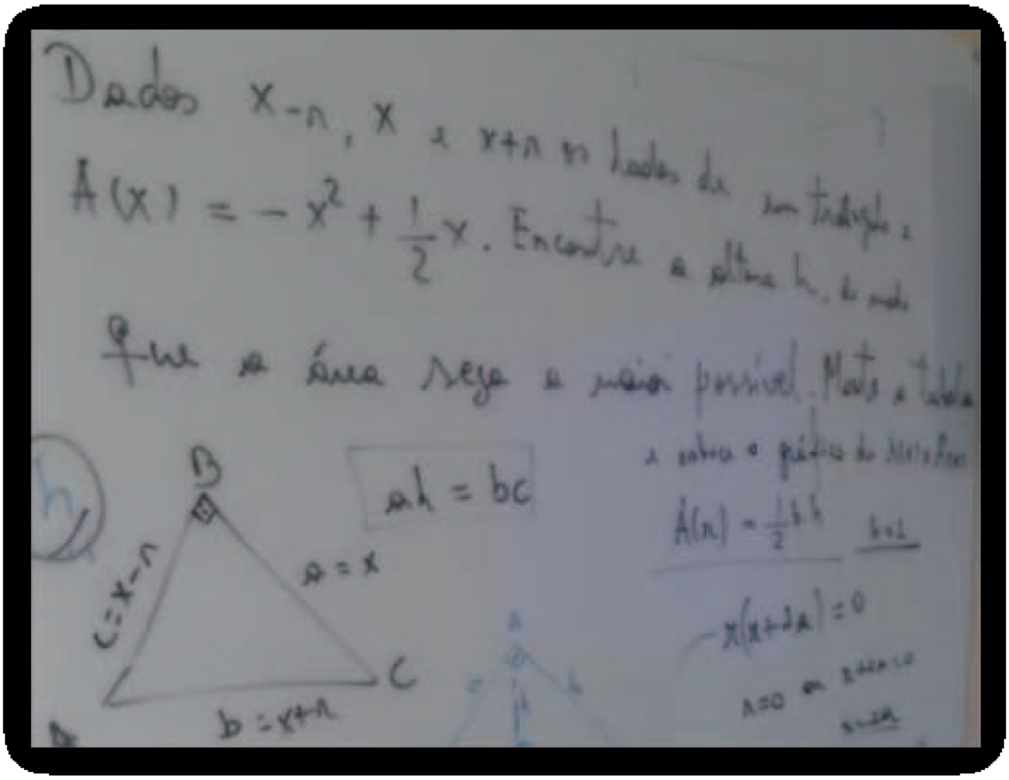
**Análise:**

Acreditamos que os alunos tenham feito uma leitura rápida do problema, tirando algumas conclusões precipitadas, mas ao fazê-los analisar o enunciado com mais atenção, conseguiram compreender a situação. No entanto, devido ao tempo estipulado para cada dupla, não foi possível resolver todos os itens propostos pelo aluno (a) da dupla 2.

De modo geral, a apresentação da dupla 2 demonstrou a preocupação em analisar o ensino-aprendizagem de função desde a evolução da definição, passando pelos objetivos deste ensino até chegar a aplicação prática do conceito de função. Percebemos também nesta dupla, que a oficina muito contribuiu para uma melhor compreensão do conceito de função, pois os alunos várias vezes fizeram comentários sobre momentos da oficina que foram importantes para eles.

Em seguida, passamos para a apresentação do aluno 3. Ele propôs o seguinte problema para os seus colegas:

Figura 101: Problema escrito no quadro pelo aluno 3




Fonte: Registros fotográficos do autor.

No problema proposto, dado um triângulo, os alunos deveriam encontrar a altura h, de modo que a área fosse à máxima.

Houve algumas discussões, no entanto, mesmo o aluno 3 tendo pedido para que fosse montada uma tabela e esboçado o gráfico, os outros alunos tiveram muitas dúvidas.

Um dos alunos da dupla 1 afirmou que o problema não podia ser resolvido para um triângulo qualquer, mas apenas para um triângulo retângulo.

A partir daí, os alunos buscaram encontrar a área máxima, mas continuaram tendo dúvidas sobre a resolução.

**Análise:**

Acreditamos que devido à forma em que o problema estava elaborado, não contribuiu para que os alunos tivessem uma boa compreensão do que deveria ser feito para resolver a situação. E assim, houve muitas dúvidas sobre como proceder para encontrar a área máxima e a altura.

O problema foi elaborado pelo aluno 3, e se tratava de uma dúvida que ele tinha e queria resolver junto com seus colegas, isso ele mesmo afirmou. Entretanto, os alunos não conseguiram concretizar um raciocínio em relação ao problema, então, ao concluir o tempo do aluno 3, fizemos um intervalo para os alunos irem comer algo.

Após o intervalo, tivemos a presença do nosso orientador, Prof. Dr. Silvanio de Andrade, que inicialmente pediu para que cada aluno falasse um pouco da oficina.

Abaixo temos os comentários de dois alunos.

*D1a: O que eu achei muito bom, muito bom, foi, descubra a lei de formação. Você buscar a função daquele valor, ai ficou muito legal.*

*D2a: Eu acho interessante também, que muitas vezes quando um professor recém-formado vai para a sala de aula, mesmo com a sua formação de determinadas coisas, práticas e tudo, ele pega, bota o problema já pronto, para utilizar métodos já convencionais. E nessa eu pude ver e viver... Viver mesmo, saber como passar para meus futuros alunos. Que eu posso levar um problema, e a resolução dele, fazer com que eles descubram novos meios de resolver, sem ser os métodos convencionais, aquela coisa bem mecânica, ou seja, eu sei como passar porque eu vivi aqui. Eu não tive oportunidade disso anteriormente.*

Depois dos alunos falarem sobre a oficina, o professor Silvanio propôs a leitura do seguinte texto: Indústria do couro gera problemas ao ambiente e à população[29] (Anexo D). O texto fala da cidade paulista de Bocaina, que passou por um grande crescimento na atividade coureira, o que levou a cidade a produzir diariamente cerca de trinta toneladas de lixo. A partir daí, discute sobre o perigo da contaminação proveniente dos resíduos químicos jogados no meio ambiente e também sobre as medidas que devem ser tomadas para resolver tais problemas. (MORAIS, 2008, p. 22-25).

Após os alunos terminarem a leitura, o professor Silvanio pediu para que a partir do texto, os alunos pensassem como eles o abordariam em sala com os alunos, que perguntas poderiam ser feitas aos alunos utilizando este texto. E também, como eles podiam proceder para trabalhar o texto em sala, que atividades eles poderiam passar para seus alunos.

Então, os alunos se dividiram em dois grupos e discutiram sobre quais problemas poderiam ser elaborados a partir do texto.

Após os alunos analisarem e discutirem sobre o texto, cada um falou o que havia pensado. Sendo assim, um dos alunos da dupla 2 comentou que, como o texto falava sobre questões ambientais e projeto sustentável, poderia trabalhar o texto relacionando ao dia a dia dos alunos, levando eles para visitar industrias de tratamento de lixo, procurando também promover uma interdisciplinaridade com outras disciplinas. Além disso, poderia ser trabalhado o conteúdo de função, considerando a quantidade de lixo produzido por dia, mês, ano, etc.

O aluno 3 também comentou que poderia ser promovida uma interdisciplinaridade com outras disciplinas como Biologia e Química. E também elaborou uma questão envolvendo o conteúdo de função, que se assemelhava as questões do ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio), a qual estava relacionada com um tratamento da água em um preço mais acessível, no período de um ano.

Diante disso, o professor questionou como perderíamos atualizar o texto, ou seja, trazer a problemática para os dias atuais. Dessa forma, os alunos comentaram que poderíamos utilizar como exemplo, empresas da nossa região que trabalham com a fabricação de calçados.

A partir daí, o professor comentou que o texto poderia ser atualizado numa perspectiva local, numa perspectiva de novas informações sobre o assunto. Também podemos verificar numa perspectiva nacional, analisando se esse problema acontece só na cidade de Bocaina, ou ocorre em outras cidades brasileiras também.

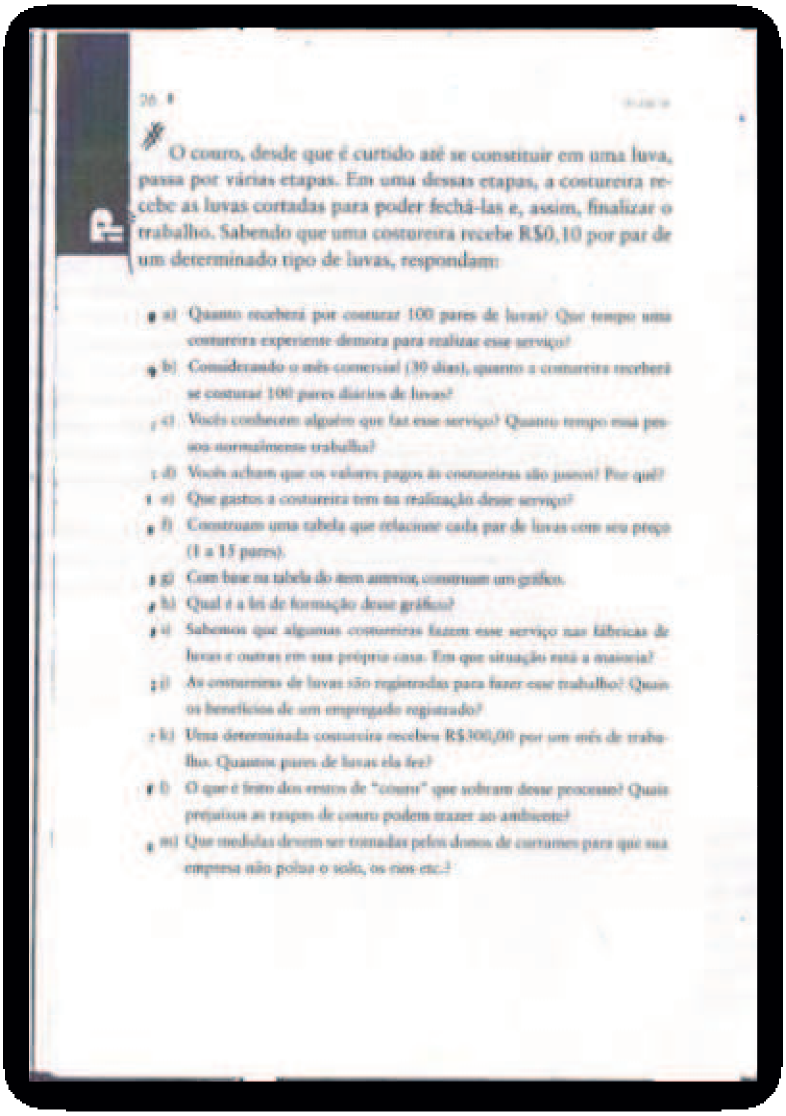
---

[29]In: MORAIS, M. S. S. et. al. Educação matemática e temas político-sociais. Campinas, SP: Autores Associados, 2008.

Em seguida, o professor Silvanio comentou que a ideia da interdisciplinaridade é um diálogo entre as disciplinas, pois em uma disciplina podem ser trabalhados problemas que são comuns a várias disciplinas. Portanto, a interdisciplinaridade ocorre a partir de problemas humanos.

Após concluir seus comentários, o professor Silvanio, passou então para a segunda parte do texto proposto por ele, trazendo a atividade do texto, em que falava sobre uma costureira que recebia as luvas cortadas para que fossem fechadas, e por cada par de luvas receberia R$ 0,10. Diante desta situação, a atividade propunha uma sequência de perguntas.

Figura 102: Atividade do texto



26

O couro, desde que é curtido até se constituir em uma luva, passa por várias etapas. Em uma dessas etapas, a costureira recebe as luvas cortadas para poder fechá-las e, assim, finalizar o trabalho. Sabendo que uma costureira recebe R$0,10 por par de um determinado tipo de luvas, respondam:

a) Quanto receberá por costurar 100 pares de luvas? Que tempo uma costureira experiente demora para realizar esse serviço?
b) Considerando o mês comercial (30 dias), quanto a costureira receberá se costurar 100 pares diários de luvas?
c) Vocês conhecem alguém que faz esse serviço? Quanto tempo essa pessoa normalmente trabalha?
d) Vocês acham que os valores pagos às costureiras são justos? Por quê?
e) Que gastos a costureira tem na realização desse serviço?
f) Construam uma tabela que relacione cada par de luvas com seu preço (1 a 15 pares).
g) Com base na tabela do item anterior, construam um gráfico.
h) Qual é a lei de formação desse gráfico?
i) Sabemos que algumas costureiras fazem esse serviço nas fábricas de luvas e outras em sua própria casa. Em que situação está a maioria?
j) As costureiras de luvas são registradas para fazer esse trabalho? Quais os benefícios de um empregado registrado?
k) Uma determinada costureira recebeu R$300,00 por um mês de trabalho. Quantos pares de luvas ela fez?
l) O que é feito dos restos de "couro" que sobram desse processo? Quais prejuízos as raspas de couro podem trazer ao ambiente?
m) Que medidas devem ser tomadas pelos donos de curtumes para que sua empresa não polua o solo, os rios etc.?

Fonte: Morais (2008, p. 26).

Os alunos procuraram responder os itens propostos, mas surgiu algumas dúvidas no primeiro item. Como saber quanto tempo uma costureira gastaria para costurar 100 pares de luvas?

*PS[30]: Mas você acha que 100 pares ela demora mais do que 1 dia?*

*D1a: Isso é o que não sabe... Eu acho que ela costura 300 pares de luvas por dia. Ai ia ter um rendimento de 30 reais...*

*PS: Então 100 pares, você acha que ela ia gastar quantas horas?*

*D1a: 1 terço de dia.*

*PS: Mas 1 dia de trabalho em geral são 8 horas. Então ela ia gastar, vamos dizer, uma média de 3 horas.*

*D1a: Um pouquinho menos.*

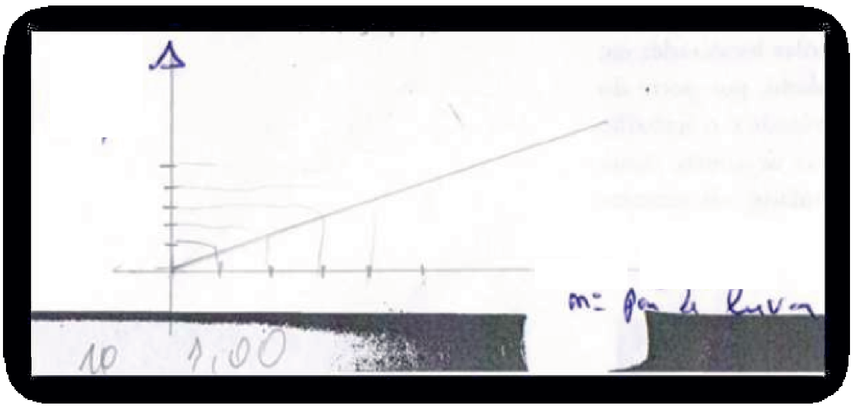
*PS: 2 horas e meia?*

*D2b: Acho que são 2 horas.*

*PS: Vamos considerar 2 horas. Considerando que ela é experiente.*

O professor Silvanio analisou os itens da atividade junto com os alunos, a partir daí, pediu que os alunos construíssem o gráfico solicitado no item (h).

Figura 103: Gráfico construído pelo aluno (b) da dupla 2



Fonte: Produções dos alunos.

Após os alunos construírem o gráfico, o professor observou cada um e afirmou que todos os gráficos estavam errados. Os alunos demonstraram não entender onde havia o erro. Então o professor questionou sobre quais eram as variáveis, e eles disseram que a variável independente era o número de par de luvas, e a variável dependente, o custo.

[30] Professor Silvanio.

Então o professor chamou a atenção dos alunos para o gráfico perguntando se poderíamos mesmo, unir os pontos referentes a número de par de luvas e o custo. Os alunos pensaram um instante e concluíram que não, pois dessa forma estaria sendo considerado, por exemplo, meio par de luvas, o que não seria válido para a situação.

A partir daí, o professor Silvanio chamou a atenção para o domínio da função, pois para a construção do gráfico há a necessidade de observar o domínio da função, e assim, na construção do gráfico teríamos apenas pontos, e não uma reta como os alunos haviam construído.

Portanto, o professor destacou a importância de estar atentos ao comportamento dos gráficos, principalmente quando consideramos situações deste tipo, pois a partir desta atividade pudemos perceber a importância de estar atentos ao domínio da função. A atividade proposta, por ser do cotidiano, ela problematizou e ajudou a perceber o significado da construção do gráfico de uma função.

A partir daí, quando contextualizamos um determinado assunto, estamos problematizando, e assim, podemos utilizar a matemática do mundo real. No entanto, temos que estar atentos para não cair em erros, como foi o caso dos gráficos construído pelos alunos para a situação dos pares de luvas.

Depois de o professor Silvanio concluir, tivemos um breve momento final da oficina, onde os alunos puderam expor para nós suas considerações finais a respeito da oficina.

Perguntamos o que acharam de trabalhar com a metodologia de resolução de problemas e esse tipo de atividade abordada na oficina, e os alunos afirmaram que não estavam acostumados a trabalhar dessa forma, pois sempre trabalharam os conteúdos de forma mais direta.

Afirmaram que cada atividade tinha um contexto diferente e era necessária uma interpretação, a busca por estratégias de resolução e conhecimentos prévios de determinados assuntos.

O aluno (b) da dupla 2 comentou que os momentos que considerou mais complicados, foi encontrar a lei de formação de algumas atividades, pois mesmo montando a tabela, havia momentos que era difícil visualizar como seria essa lei. A partir daí, comentamos que muitas vezes eles queriam encontrar primeiro a expressão matemática, para só depois resolver os outros itens.

Dessa forma, perguntamos se o ensino tradicional condicionava os alunos a agir dessa maneira, a querer encontrar primeiro a expressão matemática, já que a maioria dos exercícios tradicionais apresenta inicialmente a lei de formação da função.

*D2b: Eu acredito que sim professora. É questão assim, do condicionamento. Porque, por exemplo, quando a pessoa sai da universidade, a pessoa está cheio de ideias. Vou fazer isso, vou fazer aquilo... Ai quando você chega na sala de aula, a realidade é diferente.*

**Análise:**

De acordo com o comentário do aluno, percebemos que alguns dos alunos de graduação, futuros professores, saem da universidade cheios de expectativas, mas a realidade existente em algumas escolas acaba, em alguns casos, desmotivando esses futuros professores.

Diante de fatos assim, constatamos a necessidade de buscar meios de contribuir para o ensino-aprendizagem de matemática de um modo geral. Sendo assim, acreditamos que a oficina tenha contribuído para estes alunos refletirem um pouco mais sobre o ensino-aprendizagem de função, tanto como alunos, quanto como futuros professores de matemática.

Assim, podemos concluir que a oficina foi muito proveitosa, pois de acordo com os alunos, percebemos que houve uma mudança na postura deles e que passaram a refletir mais sobre o ensino-aprendizagem de função.

O aluno (b) da dupla 1 afirmou que gostou muito da oficina, pois foi muito significativa para ele, e destacou ainda, que vai procurar utilizar atividades desse tipo com seus alunos em sua prática como futuro professor de matemática.

Portanto, concluímos a oficina com o sentimento de objetivo alcançado, pois acreditamos que a metodologia de ensino e as atividades propostas contribuíram para que os alunos tivessem uma melhor compreensão do conceito e das representações de função.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em nossa pesquisa, propomos inicialmente identificar que compreensões essenciais e dificuldades, graduandos de um curso de Licenciatura em Matemática apresentam no ensino-aprendizagem de função e, posteriormente, aplicamos uma oficina de função evidenciando o conceito e as representações de função através da metodologia de ensino de matemática por meio da resolução, proposição e exploração de problemas.

Para a fundamentação do nosso trabalho, analisamos algumas pesquisas que trabalharam o conceito de função, e a partir daí, pudemos destacar que as principais dificuldades apresentadas por alunos, são em relação à compreensão do conceito e das representações de função.

Em nosso estudo, tomamos como base as cinco grandes ideias essenciais para o desenvolvimento do conceito de função destacadas por Cooney, Beckmann e Lloyd (2010), que são: conceito de função, covariação e taxa de variação, famílias de função, combinação e transformação de funções e representações de funções.

A metodologia de sala de aula que utilizamos foi a resolução, proposição e exploração de problemas, buscando evidenciar suas contribuições para o ensino-aprendizagem de função no ensino superior.

No que diz respeito à metodologia de pesquisa, utilizamos a pesquisa qualitativa na modalidade de pesquisa pedagógica, em que o professor/pesquisador pesquisa a sua própria prática.

Inicialmente, elaboramos e aplicamos um questionário que continha seis questões, a alunos de um curso de Licenciatura em Matemática, com o intuito de identificar que compreensões essenciais e dificuldades estes alunos apresentavam em relação ao ensino-aprendizagem de função.

A partir da análise das respostas dos alunos ao questionário, pudemos constatar algumas dificuldades apresentadas por esses alunos em relação ao conceito de função. As respostas dos alunos deixaram claro que eles ainda não haviam se apropriado de uma compreensão significativa deste conceito, e as representações de função não vêm sendo exploradas de modo que contribuam com o ensino-aprendizagem de função.

Após, elaboramos uma oficina de função para alunos que estavam no curso de Licenciatura em Matemática. A oficina foi dividida em seis etapas que totalizaram uma carga horária de trinta horas, em que aplicamos vinte atividades através da metodologia de ensino de matemática por meio da resolução, proposição e exploração de problemas. Estiveram presentes seis alunos na primeira etapa e, a partir da segunda etapa, apenas cinco.

Na última etapa da oficina, tivemos a apresentação dos alunos sobre o ensino-aprendizagem de função e, para finalizar, tivemos a participação do Prof. Dr. Silvanio de Andrade falando sobre a pesquisa em Educação Matemática e o ensino-aprendizagem de função.

As atividades tinham como objetivo, fazer com que os alunos trabalhassem o conceito e as representações de função a partir de sequências didáticas, evidenciando algumas ideias essenciais, de modo que contribuíssem para que os alunos desenvolvessem um entendimento com mais compreensão do conceito de função.

Ao desenvolvermos nossa pesquisa, temos a certeza que o nosso objetivo foi alcançado, pois percebemos que os alunos participantes da oficina tiveram uma mudança significativa em suas posturas, demonstrando uma melhor compreensão do conceito de função. Dessa forma, constatamos que a metodologia de ensino por meio da resolução, proposição e exploração de problemas possibilitou aos alunos a oportunidade de compreender melhor o conceito de função, contribuindo significativamente para o ensino-aprendizagem deste conteúdo.

Na primeira atividade aplicada na oficina, os alunos se mostraram um pouco inibidos, não havendo discussões entre as duplas. Ao procurar resolver a atividade os alunos demonstraram-se dependentes da confirmação do professor em relação as suas resoluções, sendo necessária a nossa mediação para que eles mesmos procurassem refletir sobre suas respostas, esse fato demonstrou que mesmo os alunos estando no ensino superior, ainda carregam consigo características muito fortes do ensino básico. No entanto, percebemos que à medida que os alunos iam resolvendo as atividades, adquiriam mais segurança em suas resoluções, não buscando mais a nossa confirmação.

Observamos inicialmente nos alunos, uma tendência em resolver a atividade de forma não reflexiva, o que levava eles a uma má interpretação dos dados e dos resultados obtidos, isso demonstrou que estavam acostumados a utilizar procedimentos de resolução muito diretos. Dessa forma, os alunos deixaram transparecer algumas características do que tradicionalmente acontece na sala de aula do ensino básico: apresentação da definição, exemplos, resolução de algumas questões e lista de exercícios onde os alunos reproduzem os procedimentos apresentados. (SILVA, 2013).

Percebemos também, em algumas situações, que os alunos chegavam a resultados corretos, mas não conseguiam interpretar estes resultados, o que gerava algumas dúvidas na resolução das situações. Entretanto, ao resolver as atividades, os alunos demonstraram estar muito entusiasmados com a forma que estavam trabalhando as atividades, pois estavam conseguindo perceber o conceito de função em toda a resolução.

Segundo Cooney, Beckmann e Lloyd (2010), o conceito de função é amplo e flexível, podendo ser aplicado a uma vasta gama de situações. Sendo assim, ao trabalhar este conceito em diferentes situações e em diferentes representações, pudemos perceber no decorrer da oficina, que os alunos apresentaram uma melhor compreensão do conceito de função.

Por exemplo, ao resolverem a atividade 8, que abordava o crescimento de uma árvore, os alunos se mostraram motivados a explorarem vários aspectos da situação, fazendo cálculos para intervalos de tempo muito grandes, buscando verificar suas hipóteses demonstrando uma boa compreensão do conceito de função.

Percebemos inicialmente, quando a atividade não apresentava a expressão algébrica que representava a função, os alunos se prendiam na busca por essa expressão, muitas vezes deixando de lado a análise dos itens propostos. Acreditamos que isso tenha ocorrido pelo fato do ensino tradicional dar muita ênfase a representação algébrica, pouco explorando as outras representações de função, e dessa forma, os alunos passam a ficar dependentes da representação algébrica.

Portanto, destacamos a importância da Álgebra para a formação dos alunos, no entanto, temos visto que seu ensino não tem favorecido o desenvolvimento destes sujeitos. Ao contrário do que se esperava, de acordo com Sousa (2014), o ensino da Álgebra tem sido fonte de alienação para os alunos no que diz respeito à aprendizagem dos conhecimentos matemáticos, pois perde toda a relevância na vida deles quando é entendida apenas como forma de manipulação de símbolos. (SOUSA, 2014, p. 46).

Pudemos observar que muitas vezes os alunos buscavam inicialmente a expressão algébrica por considerar que a partir dela poderiam resolver todos os itens rapidamente. Então, nos parece que os alunos, no ensino básico, foram levados a fazer manipulações partindo da expressão algébrica da função, usando procedimentos mecânicos, o que levou eles a considerar que a expressão algébrica da função seria um caminho mais direto para a resolução das atividades propostas.

De acordo com Ribeiro e Cury (2015), os PCN’s do Ensino Fundamental para Terceiro e Quarto Ciclo argumentam que na maioria das vezes o ensino da Álgebra é apoiado na manipulação algébrica, sem procurar desenvolver as capacidades de abstração e generalização.

Entretanto, sabemos que essa forma de ensinar matemática não gera nos alunos o desenvolvimento desejado, mas apenas leva esses alunos a realizarem procedimentos mecânicos de forma não reflexiva.

Observamos também, que no inicio da oficina os alunos demonstraram grande resistência em construir a tabela e analisá-la, o que em alguns casos comprometeu suas resoluções, no entanto, ao passar do tempo e com a nossa insistência, os alunos não demonstraram mais tanta resistência.

Em relação às representações de função, os alunos não tiveram maiores dificuldades na montagem de tabelas e esboços de gráficos, no entanto, é importante destacar o fato dos alunos atribuírem a tabela, valores que muitas vezes não favoreciam a construção do gráfico, ocorrendo em alguns casos erros de interpretação por não ser identificado o comportamento da função. Entretanto, destacamos que em algumas atividades a análise dos itens propostos foi fundamental para que os alunos compreendessem a situação e a resolvessem.

A busca pela a representação algébrica de algumas funções exigiu muitos esforços dos alunos, e assim, houve atividades em que não conseguiram encontrar a expressão algébrica, mesmo com nossa mediação. Então tivemos que intervir de forma mais direta, procurando construir a expressão junto com eles.

Portanto, não esperávamos que os alunos apresentassem tanta dificuldade para encontrar a expressão algébrica nas atividades propostas, mas segundo Sousa (2014), mesmo o uso do conceito de variável sendo uma prática comum na resolução de problemas, as dificuldades ao trabalhar este conceito aparecem nos alunos que demonstram ser os mais preparados, e estas dificuldades estão ligadas a álgebra que é ensinada na escola.

Observamos que quando os alunos se depararam com atividades que consideravam ter um conteúdo difícil, demonstraram estar desmotivados, pois acreditavam que não iriam conseguir resolver a situação. Este fato exigiu a nossa mediação buscando encorajar os alunos para que analisassem os itens para que conseguissem resolver a atividade. Portanto, os alunos foram desafiados, pois inicialmente acreditavam que não conseguiriam resolver, mas mesmo com algumas dúvidas, fizeram uma boa análise da situação que contribuiu para uma melhor compreensão do conceito de função.

No desenvolvimento da pesquisa, notamos uma mudança significativa na postura e na segurança dos alunos, pois a medida que trabalhavam as atividades, cada vez menos buscavam nossa confirmação, procurando eles mesmos verificar e explorar diferentes aspectos nas situações propostas. Em relação ao conceito de função, demonstraram uma melhor compreensão do conceito.

No decorrer da oficina conseguimos desenvolver bem quatro ideias essenciais, que foram: conceito de função, covariação e taxa de variação, famílias de função e representações de função.

A primeira grande ideia, conceito de função, foi trabalhada em todas as atividades no decorrer das resoluções. Percebemos que ao passar do tempo os alunos demonstravam cada vez mais, uma melhor compreensão, pois também apresentavam um grande entusiasmo por estar compreendendo bem o conceito de função presente nas situações propostas.

A segunda ideia essencial, covariação e taxa de variação, também foi trabalhada em todas as atividades, a partir daí, os alunos puderam observar a variação das grandezas e, em alguns casos chegaram a várias conclusões sobre a situação a partir das análises dessas variações. Os autores, Cooney, Beckmann e Lloyd (2010), destacam que é possível classificar, prever e caracterizar vários tipos de relações a partir da compreensão da taxa em que uma quantidade varia em relação à outra.

As famílias de funções, terceira ideia essencial, foi trabalhada apenas em algumas atividades, a partir daí, os alunos puderam explorar algumas das famílias de funções que são mais estudadas. De acordo com Cooney, Beckmann e Lloyd (2010), podemos utilizar famílias diferentes para modelar diferentes fenômenos do mundo real. Dessa forma, em algumas atividades, os alunos puderam trabalhar diferentes famílias de função dentro de uma mesma situação proposta.

As representações de função, quinta ideia essencial, e também um dos focos principais de nossa pesquisa, foi trabalhada em todas as atividades. Os alunos foram levados a explorar as situações nas representações escrita, tabular, gráfica e algébrica. Em algumas atividades não foi possível trabalhar todas as representações, no entanto, percebemos que os alunos conseguiram articular bem entre as representações, identificando quais representações contribuíram mais na resolução de determinadas situações.

Portanto, Cooney, Beckmann e Lloyd (2010), destacam em uma das compreensões consideradas mais significativas para os alunos aprenderem, em relação às representações de função, que algumas representações devem ser mais úteis do que outras, isso vai depender do contexto.

É importante ressaltar que as cinco ideias essenciais são destacadas por autores internacionais, no entanto, no Brasil a abordagem destas ideias ainda é muito tímida. Entre os trabalhos consultados, apenas Silva (2013) e Brandão (2014) destacaram as cinco grandes ideias para o desenvolvimento do conceito de função.

O livro de Ribeiro e Cury (2015) é um trabalho bem recente, que discute sobre o ensino-aprendizagem de equação e função, destacando dificuldades apresentadas por alunos e sugestões de atividades a serem trabalhadas, entretanto, os autores não destacam as ideias essenciais para o desenvolvimento do conceito de função. Estes autores chamam a atenção para a possibilidade de mudanças nos cursos de formação de professores, de modo que tais cursos estejam mais baseados nas práticas de sala de aula ao invés de estarem centrados na apresentação formal de conteúdos matemáticos.

Portanto, ao desenvolver a oficina de função com os futuros professores participantes desta pesquisa, esperamos que eles procurem refletir sobre suas práticas em sala de aula, levando em consideração as dificuldades que seus futuros alunos possam ter em relação aos conteúdos, e a partir daí, busquem metodologias de ensino para sanar tais dificuldades. Embora os sujeitos desta pesquisa não tenham apresentado tantas falas sobre contribuições da oficina para sua formação, temos certeza que nosso trabalho despertou neles alguns pontos a serem pensados na prática de sala de aula.

A sexta etapa deixou claro algumas influências da oficina na postura dos alunos, pois nas atividades apresentadas por eles, tentaram assumir uma postura semelhante a nossa, além disso, demonstraram uma maior segurança ao trabalhar o conceito de função. Dessa forma, em suas apresentações, fizeram uso da metodologia de ensino por meio da resolução, proposição e exploração de problemas e se mostraram focados mais no ensino superior.

É interessante destacar o fato da dupla 2 ter se preocupado em analisar livros didáticos, observando a abordagem feita a aspectos como definição, domínio, imagem e contradomínio de funções. A dupla também chamou a atenção para o que os PCN's dizem a respeito do ensino-aprendizagem de função, ressaltando pontos da oficina em que foi observado o uso desses parâmetros. Portanto, observamos que esta sexta etapa exigiu dos alunos uma reflexão sobre o ensino-aprendizagem de função.

Outro ponto muito importante nesta sexta etapa foi a participação do Prof. Dr. Silvanio de Andrade, que fez inicialmente os alunos refletirem sobre a ideia de interdisciplinaridade, que é um diálogo entre disciplinas e ocorre a partir de problemas humanos. O professor também fez os alunos perceberem a importância de estar atentos ao domínio de função quando contextualizamos um determinado assunto, pois temos que observar com muita atenção o comportamento do gráfico, principalmente quando consideramos situações do cotidiano.

Ao final da sexta etapa, os alunos comentaram sobre a satisfação em ter participado da oficina e destacaram que entre os momentos mais complicados, esteve a busca pela lei de formação de algumas funções, pois mesmo resolvendo os outros itens propostos era difícil visualizar como seria a lei de formação.

Os alunos também comentaram sobre o fato de muitas vezes buscarem encontrar primeiro a lei de formação para só depois resolver os outros itens, e afirmaram que acreditam ser uma consequência do ensino tradicional ao qual foram submetidos.

A partir daí, um dos alunos comentou sobre o fato de alguns alunos de graduação, futuros professores de matemática, saírem da universidade cheios de expectativas, entretanto, a realidade existente nas escolas acaba desmotivando estes alunos.

Em relação às contribuições da metodologia de ensino de matemática por meio da resolução, proposição e exploração de problemas, percebemos que os alunos modificaram sua postura em sala, pois ao longo da oficina se tornaram mais ativos e seguros em suas respostas, defendendo seus pontos de vista diante dos outros alunos. Além disso, passaram a refletir também como poderiam utilizar esta metodologia em suas práticas como futuros professores de matemática.

A resolução de problemas deu a oportunidade aos alunos de estar em um ambiente diferente do tradicional das salas de aula, onde puderam desenvolver suas estratégias de resolução. Inicialmente se mostraram um pouco inibidos, no entanto, ao passar do tempo as discussões foram fluindo, e a partir daí, os alunos buscavam explorar diversos aspectos das situações propostas.

Observamos que todos os alunos trabalharam as atividades sem que nenhum deles ficasse ocioso, pois na maioria das vezes as duplas resolviam de forma individual as atividades e depois analisavam e discutiam juntos. Entretanto, é importante destacar que a maioria das discussões ocorreu com todos os alunos juntos, havendo muitas trocas de conhecimentos.

No que diz respeito ao uso do software GeoGebra, na maioria das atividades exploradas no computador, os alunos conseguiram verificar o trabalho que haviam feito com lápis e papel, havendo poucos aspectos em que os alunos se confundiram e puderam visualizar no GeoGebra os seus enganos. Dessa forma, pudemos constatar que o GeoGebra pode contribuir muito para uma visualização mais rápida e dinâmica de muitos aspectos, pois os alunos puderam verificar suas resoluções de forma muito rápida.

Quanto à formação destes futuros professores, destacamos que a metodologia de ensino proporcionou contribuições significativas, pois os alunos procuraram refletir sobre a utilização de atividades deste tipo para contribuir na compreensão de seus futuros alunos.

Assim, esperamos que estes futuros professores tenham um olhar diferente na hora de apresentar os conteúdos para seus alunos.

Trabalhamos com um número bem pequeno de alunos na oficina, no entanto, isto favoreceu para que pudéssemos acompanhar o trabalho dos alunos e desenvolver melhor as mediações necessárias. Isso também proporcionou a oportunidade de uma melhor interação entre alunos, pois sempre que se iniciava uma discussão todos participavam.

A partir daí, vale ressaltar como poderia ser a aplicação deste trabalho no ensino médio, em que a realidade é bem diferente, pois sabemos que as turmas são bem numerosas e existe a dificuldade de motivar os alunos para que resolvam as atividades. Brandão (2014), citou em seu trabalho o fato dos alunos se sentirem desmotivados nos primeiros obstáculos de suas resoluções, sendo necessária a mediação do professor para que encontrassem caminhos para resolver a situação. Em relação ao tamanho da turma, seria difícil acompanhar de perto a resolução de todos os alunos, e dessa forma, haveria momentos que poderíamos não conseguir acompanhar os alunos na superação de suas dúvidas.

É importante destacar também, as contribuições para a nossa prática, pois este processo também modificou a nossa postura, e dessa forma, pudemos escutar mais os alunos e aceitar que eles podem encontrar caminhos diferentes dos que esperávamos.

Portanto, a metodologia de ensino por meio da resolução, proposição e exploração de problemas possibilitou aos alunos trabalhar o conceito de função de forma mais ativa, favorecendo um melhor entendimento, além disso, puderam trabalhar este conceito em suas diferentes representações identificando qual contribuía mais para sua compreensão.

Destacamos ainda, as contribuições desta pesquisa para a formação dos futuros professores participantes da oficina, pois ao vivenciar esta experiência, sabemos que estes sujeitos ao prepararem suas aulas, vão procurar refletir mais sobre o que deve ser feito para que seus alunos sejam mais ativos e compreendam melhor os conteúdos estudados.

Portanto, em nossa pesquisa, buscamos refletir sobre o ensino-aprendizagem de função no ensino superior, identificando as dificuldades e compreensões essenciais de alunos de um curso de Licenciatura em Matemática, futuros professores de matemática. Além disso, apresentamos possibilidades de contribuir para que futuros professores de matemática tivessem uma melhor compreensão do conceito de função a partir da metodologia de ensino por meio da resolução, proposição e exploração de problemas, evidenciando as ideias essenciais para o desenvolvimento do conceito de função.

Em nossa pesquisa, trabalhamos apenas com alunos que estavam em um curso de Licenciatura em Matemática, dessa forma, a maioria ainda não tinha experiência em sala de aula. A partir daí, pensamos que um ponto que poderá ser objeto de futuras pesquisas, será a investigação das dificuldades e compreensões essenciais de professores de matemática que já estão lecionando, procurando evidenciar também, o trabalho com as cinco grandes ideias essenciais para o desenvolvimento do conceito de função.

## REFERÊNCIAS

ANDRADE, S. **Ensino-aprendizagem de matemática via resolução, exploração, codificação e descodicação de problemas e a multicontextualidade da sala de aula**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). UNESP, Rio Claro, 1998.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Portugal: Editora Porto, 1994. v.12. (Coleção Ciências da Educação).

BRAGA, C. **Função**: a alma do ensino de matemática. São Paulo: Annablume; Fapesp, 2006.

BRANDÃO, J. D. P. **Ensino-aprendizagem de função através da resolução de problemas e representações múltiplas**. 2014. 211 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências e Tecnologias – CCT, Universidade Estadual da Paraíba – UEPB, Campina Grande, 2014.

CAMPITELI, H. C. CAMPITELI, V. C. **Funções.** Ponta Grossa: Editora UEPG, 2006.

COELHO COSTA, A. **Conhecimentos de estudantes universitários sobre o conceito de função**. 2004. 164 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP, São Paulo, 2004.

CONNEY, T. J.; BECKMANN, S.; LLOYD, G. M. et al. **Developing an essential understanding of functions:** fo teaching mathematics in grades 9-12. Reston, NCTM, 2010.

COSTA, C. B. J. **O conhecimento do professor de matemática sobre o conceito de função**. 2008. 117 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Instituto de Matemática – IM, Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, Rio de Janeiro, 2008.

D'AMBROSIO, U. **Educação matemática:** da teoria à prática. Campinas: Papirus, 1996. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

DANTE, L. R. **Matemática**: contexto e aplicações. vol. 1. 3. São Paulo: Editora Ática, 2003.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A**: funções, limite, derivação eintegração. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R. **Matemática completa**. vol. 1. 3. 2. ed. São Paulo: FTD, 2005.

GONÇALVES, M.B.; FLEMMING, D.M. **CálculoB**: Funções de várias variáveis,integrais múltiplas, integraiscurvilíneas e de superfície. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2007.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo**. vol. 1. 5.ed. Rio de Janeiro, LTC, 2001.

IEZZI, G. et. al. **Matemática**: ciência e aplicações. vol. 1. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

LANKSHEAR, C.; KNOBEL, M. **Pesquisa Pedagógica.** Porto Alegre: Artmed, 2008.

MOMETTI, A. L. **Reflexão sobre a prática: argumentos e metáforas no discurso de um grupo de professores de cálculo**. 2007. 273 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP, São Paulo, 2007.

MORAIS, M. S. S. et. al. **Educação matemática e temas político-sociais**. Campinas, SP: Autores Associados, 2008.

NASSER, L. Ajudando a superar obstáculos na aprendizagem de cálculo. In: IX Encontro Nacional de Educação Matemática, 2007, Belo Horizonte. **Anais** do IX Encontro Nacional de Educação Matemática. Belo Horizonte - MG: SBEM, 2007.

______. Ênfase nas pesquisas envolvendo o cálculo. In: XII Encontro Nacional de Educação Matemática, 2016, São Paulo. **Anais** do XII Encontro Nacional de Educação Matemática. São Paulo - SP: SBEM, 2016.

NOGUTI, F. C. H.**Um curso de matemática através da resolução de problemas para alunos ingressantes da universidade federal do pampa – Campus Alegrete.** 2014. 371 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista – UNESP, Rio Claro, 2014.

ONUCHIC, L. de la R. A resolução de problemas na educação matemática: onde estamos? E para onde iremos? **Espaço Pedagógico**, Passo Fundo, v. 20, n. 1, p. 88-104, jan/jun. 2013. Disponível em: <www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/.../artigo_l**onuchic**.pdf>. Acesso em: 12 jan2016.

PAIVA, M. **Matemática**. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2004.

PALIS, G. L. R. **Atividades que podem propiciar o desenvolvimento do Raciocínio Funcional no Alunado do Ensino Médio e Universitário Inicial**. Rio de Janeiro: SBM, 2013 (Artigo).

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**: um novo um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: Interciência, 1995. Disponível em:<http://www.mat.ufmg.br/~michel/inicmat2010/livros/polya.pdf>. Acesso em: 12 jan2016.

REIS, F. S.; MARTINS JÚNIOR, J. C. As contribuições da visualização proporcionada peloGeogebra à aprendizagem de funções derivadas em cálculo I. In: XII Encontro Nacional de Educação Matemática, 2016, São Paulo. **Anais** do XII Encontro Nacional de Educação Matemática. São Paulo - SP: SBEM, 2016.

REZENDE, W. M. O Ensino de Cálculo: um problema do ensino superior de matemática? Mesa redonda “Educação Matemática no ensino Superior”, **Anais** eletrônicos do VIII ENEM, Pernambuco: UFPE, 2004.

RIBEIRO, J. R.; CURY, H. N. **Álgebra para a formação do professor**: explorando os conceitos de equação e de função. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2015.

SILVA ANDRADE, F. C. **Funções no ensino médio**: conceitos, representações e uso, em uma abordagem multidisciplinar. 2010. 45 f. Monografia (Especialização em Matemática para professores) – Instituto de Ciências Exatas – ICEX, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2010.

SILVA, L. M. **Compreensão de ideias essenciais ao ensino-aprendizagem de funções via resolução, proposição e exploração de problemas**. 2013. 307 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Centro de Ciências e Tecnologia – CCT, Universidade Estadual da Paraíba – UEPB, Campina Grande, 2013.

SOUSA, M. C.; PANOSSIAN, M. L.; CEDRO, W. L. **Do movimento lógico e histórico à organização do ensino:** o percurso dos conceitos algébricos. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2014. – (Série Educação Matemática)

## APÊNDICE A - QUESTIONÁRIO

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

outubro-novembro de 2015

O presente questionário é parte integrante da Dissertação de Mestrado Profissional que será apresentada ao programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Esta pesquisa analisa as dificuldades dos alunos da Licenciatura em Matemática no ensino-aprendizagem de funções. Assim, gostaríamos de contar com sua colaboração respondendo este questionário. Informamos que não há identificação dos participantes. Desde já agradecemos sua colaboração.

Orientador: *Prof. Dr. Silvanio de Andrade*

Mestranda: *Adriana da Silva Velozo Bezerra*

**Questionário:**

**Período que está cursando**:______

1. Comente como foi sua experiência com o ensino de funções na universidade.

2. Quais as dificuldades que você encontrou ao estudar o conteúdo de funções?

3. Fale um pouco sobre o que você considera ter aprendido do conteúdo de funções.

4. Para você, o que é uma função?

5. Para você, qual a importância de estudar gráficos de funções?

6. Escreva sobre outros pontos do ensino de funções que você desejar.

## ANEXO A – QUESTIONÁRIOS RESPONDIDOS DE FORMA DIGITAL

1

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

outubro-novembro de 2015

O presente questionário é parte integrante da Dissertação de Mestrado Profissional que será apresentada ao programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Esta pesquisa analisa as dificuldades dos alunos da Licenciatura em Matemática no ensino-aprendizagem de funções. Assim, gostaríamos de contar com sua colaboração respondendo este questionário. Informamos que não há identificação dos participantes. Desde já agradecemos sua colaboração.

Orientador: *Prof. Dr. Silvanio de Andrade*

Mestranda: *Adriana da Silva Velozo Bezerra*

**Questionário:**

**Período que está cursando**:___ 3° __

1. Comente como foi sua experiência com o ensino de funções na universidade.

| |
|---|
| Durante o 2° período, na cadeira de Cálculo I, revemos conceitos intuitivos de limite, por meio de definições preconcebidas de função e seu comportamento em gráficos, bem como aprofundar em questões de domínio (x) e imagem de uma função f(x), sobremaneira no tópico Teorema do Valor Intermediário. |

2. Quais as dificuldades que você encontrou ao estudar o conteúdo de funções?

| |
|---|
| Identifiquei alguns obstáculos envolvendo gráficos de função e de uma não-função, sobretudo na cadeira de Básica I, além de não conseguir classificar as funções em sobrejetora, injetora ou bijetora (função inversa). |

3. Fale um pouco sobre o que você considera ter aprendido do conteúdo de funções.

| |
|---|
| Basicamente, aprendi – e apreendi – conceitos de função voltados ao diagrama que estabelece o domínio, o contradomínio e a imagem, além dos tipos de função estudada durante os anos iniciais do ensino médio (afim, quadrática, exponencial, logarítmica, |

modular, inversa, trigonométrica ou transcendentes). As aplicações contextuais também foram essenciais para melhor absorver todos os conceitos matemáticos que regem o conteúdo de função.

4. Para você, o que é uma função?

Dada uma terna (x,f(x),a $\longrightarrow$ b), uma sentença matemática é dita função, quando se atribui cada valor de x associado a um único f(x) correspondente, para qualquer valor real que satisfaça as três condições acima estabelecidas.

5. Para você, qual a importância de estudar gráficos de funções?

Analisar, além do comportamento da função, outras condições pelas quais a mesma é contínua, ou se é possível identificar se é uma função afim, quadrática, exponencial, logarítmica, modular, inversa, etc.

6. Escreva sobre outros pontos do ensino de funções que você desejar.

2

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

outubro-novembro de 2015

O presente questionário é parte integrante da Dissertação de Mestrado Profissional que será apresentada ao programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Esta pesquisa analisa as dificuldades dos alunos da Licenciatura em Matemática no ensino-aprendizagem de funções. Assim, gostaríamos de contar com sua colaboração respondendo este questionário. Informamos que não há identificação dos participantes. Desde já agradecemos sua colaboração.

Orientador: *Prof. Dr. Silvanio de Andrade*

Mestranda: *Adriana da Silva Velozo Bezerra*

**Questionário:**

**Período que está cursando**: 9º período______

1. Comente como foi sua experiência com o ensino de funções na universidade.

A principio eu tive um pouco de dificuldade, pois o conteúdo de funções era ministrado em um nível muito elevado do que o ensino médio.

2. Quais as dificuldades que você encontrou ao estudar o conteúdo de funções?

Algumas questões que não conseguir resolver, calcular a inversa de algumas questões que envolviam as compostas.

3. Fale um pouco sobre o que você considera ter aprendido do conteúdo de funções.

Eu aprendi o zero da função, os tipos de função e o domínio da função.

4. Para você, o que é uma função?

E uma relação entre dois conjuntos, que liga um elemento do conjunto a outro domínio, que denotamos a imagem da função.

5. Para você, qual a importância de estudar gráficos de funções?

Porque percebemos o comportamento da função através do gráfico se ele esta crescendo ou decrescendo.

6. Escreva sobre outros pontos do ensino de funções que você desejar.

Os conteúdo interessantes que funções apresentam são: os tipos de funções, a lei de formação de uma função e etc.

3

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

outubro-novembro de 2015

O presente questionário é parte integrante da Dissertação de Mestrado Profissional que será apresentada ao programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Esta pesquisa analisa as dificuldades dos alunos da Licenciatura em Matemática no ensino-aprendizagem de funções. Assim, gostaríamos de contar com sua colaboração respondendo este questionário. Informamos que não há identificação dos participantes. Desde já agradecemos sua colaboração.

Orientador: *Prof. Dr. Silvanio de Andrade*

Mestranda: *Adriana da Silva Velozo Bezerra*

**Questionário:**

**Período que está cursando**: Conclui no Período 2014.2

1. Comente como foi sua experiência com o ensino de funções na universidade.

Como aluno da disciplina MATEMÁTICA BÁSICA I, foi muito difícil devido às deficiências oriundas da educação básica trazidas comigo para o curso; Como aluno das disciplinas de CÁLCULO (DIFERENCIAL, INTEGRAL, VETORIAL, VÁRIAS VARIÁVEIS, ETC.) foi bem satisfatória uma vez que as dificuldades já haviam sido vencidas e tive excelentes professores as ministrando; Como aluno de ANÁLISE MATEMÁTICA, algumas dificuldades apareceram novamente devido ao rigor matemático que Análise exige. Contudo, aprendi não só com respeito a funções, mas com respeito a matemática de modo geral que certos conteúdos exigem também um pouco de maturidade matemática assim como experiência com o conteúdo (no sentido de ler, reler, praticar, aprender).

2. Quais as dificuldades que você encontrou ao estudar o conteúdo de funções?

A maior dificuldade foi encontrada no início do curso, uma vez que o meu conhecimento acerca de funções era insuficiente para obter êxito, isto é, bom rendimento na disciplina. Contudo, com respeito a uma característica de funções que tive certa dificuldade (a priori) foi a ideia de provar a sobrejetividade de certas funções.

3. Fale um pouco sobre o que você considera ter aprendido do conteúdo de funções.

Função, o seu conceito mais simples possível é uma relação de dependência entre duas grandezas quaisquer. Toma-se um elemento de um conjunto o qual é chamado de DOMÍNIO, e esse elemento será levado (via lei de formação) a UM ÚNICO elemento de um outro conjunto chamado de CONTRA-DOMÍNIO, em simbologia matemática: Sejam $A, B$ conjuntos não vazios. Então uma função é uma aplicação

$$f: A \to B$$
$$a \mapsto f(a) = b$$

Onde $A$ – domínio; $B$ – contra-dominio e

$$Im(f) = \{f(a) \in B\ ; a \in A\}$$

Esse conjunto é chamado de Imagem.

As funções são divididas em várias classes de acordo com características especiais que cada uma apresenta. Irei listar algumas aqui sem definir rigorosamente para não tornar o depoimento longo e enfadonho: Funções Polinomiais, Funções Trigonométricas, Funções Periódicas, Funções Limitadas, Funções Mensuráveis, Funções Diferenciáveis, Funções Integráveis, Funções Lipschitzianas, Funções Contínuas, Funções uniformemente contínuas, etc.

4. Para você, o que é uma função?

Respondido no item anterior

5. Para você, qual a importância de estudar gráficos de funções?

Essencial no seu estudo, pois nos auxilia geometricamente no que diz respeito a enxergar seu comportamento. É através do gráfico que podemos, inclusive fazer previsões acerca de resultados futuros, coisa que não é tão clara do ponto de vista algébrico.

6. Escreva sobre outros pontos do ensino de funções que você desejar.

Respondido no item 3

4

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

outubro-novembro de 2015

O presente questionário é parte integrante da Dissertação de Mestrado Profissional que será apresentada ao programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Esta pesquisa analisa as dificuldades dos alunos da Licenciatura em Matemática no ensino-aprendizagem de funções. Assim, gostaríamos de contar com sua colaboração respondendo este questionário. Informamos que não há identificação dos participantes. Desde já agradecemos sua colaboração.

Orientador: *Prof. Dr. Silvanio de Andrade*

Mestranda: *Adriana da Silva Velozo Bezerra*

**Questionário:**

**Período que está cursando**:____7__

1. Comente como foi sua experiência com o ensino de funções na universidade.

Foi uma boa experiência, pois foi feita uma revisão de todo esse conteúdo. Confesso que não tive dificuldade porque eu já tinha estudado por conta própria no ensino médio, foi proveitoso, pois tirei dúvidas a cerca desse conteúdo.

2. Quais as dificuldades que você encontrou ao estudar o conteúdo de funções?

Os gráficos, pois eu não tinha habilidade de desenhar.

3. Fale um pouco sobre o que você considera ter aprendido do conteúdo de funções.

As aplicações no dia a dia.

4. Para você, o que é uma função?

É uma correspondência biunívoca que associa a cada elemento de um conjunto A algum elemento de um conjunto B.

5. Para você, qual a importância de estudar gráficos de funções?

Para estudar situações práticas do dia a dia.

6. Escreva sobre outros pontos do ensino de funções que você desejar.

## ANEXO B – QUESTIONÁRIOS RESPONDIDOS DE FORMA PRESENCIAL

(5)

uepb
Universidade Estadual da Paraíba

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

outubro-novembro de 2015

O presente questionário é parte integrante da Dissertação de Mestrado Profissional que será apresentada ao programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Esta pesquisa analisa as dificuldades dos alunos da Licenciatura em Matemática no ensino aprendizagem de funções. Assim, gostaríamos de contar com sua colaboração respondendo este questionário. Informamos que não há identificação dos participantes. Desde já agradecemos sua colaboração.

Orientador: *Prof. Dr. Silvanio de Andrade*

Mestranda: *Adriana da Silva Velozo Bezerra*

**Questionário:**

**Período que está cursando:** 9º

1. Comente como foi sua experiência com o ensino de funções na universidade.

No início do curso eu não tinha domínio do conteúdo de funções e isso me atrapalhou muito. No 2º período quando comecei a disciplina de Cálculo I comecei a entender e aprender sobre funções. Logo depois fui bolsista e lá estudei todo livro de Ellon, vol. 1 "Matemática p/ o ensino médio", daí em diante consegui dominar mais o conteúdo até hoje.

2. Quais as dificuldades que você encontrou ao estudar o conteúdo de funções?

Eu senti muita dificuldade em encontrar o domínio das funções e algumas delas como a exponencial e as trigonométricas, de ~~[illegible]~~ fazer o gráfico. Também achei difícil aprender a classificar em injetora, sobrejetora e bijetora, assim como estudar funções compostas.

3. Fale um pouco sobre o que você considera ter aprendido do conteúdo de funções.

Eu aprendi como representar as funções no gráfico, como identificá-las, como encontrar a inversa, como fazer estudo de sinal, como identificar seus elementos (domínio, imagem) dentre outros.

4. Para você, o que é uma função?

Dados dois conjuntos $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$, $\forall x \in A$, existe uma correspondência de $x$ com um único $y \in B$, temos uma função de A em B.

5. Para você, qual a importância de estudar gráficos de funções?

Estudar gráficos de funções é importante para analisar qual o comportamento da função e identificar melhor seus elementos: domínio, imagem. E ~~[illegible]~~ fazer um melhor estudo do sinal.

6. Escreva sobre outros pontos do ensino de funções que você desejar.

Eu considero o ensino de funções importantíssimo principalmente no ensino básico, pois é um conteúdo essencial na graduação, onde muitos sentem dificuldades e acabam se prejudicando.

(6)

uepb
Universidade
ESTADUAL DA PARAÍBA

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

outubro-novembro de 2015

O presente questionário é parte integrante da Dissertação de Mestrado Profissional que será apresentada ao programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Esta pesquisa analisa as dificuldades dos alunos da Licenciatura em Matemática no ensino aprendizagem de funções. Assim, gostaríamos de contar com sua colaboração respondendo este questionário. Informamos que não há identificação dos participantes. Desde já agradecemos sua colaboração.

Orientador: *Prof. Dr. Silvanio de Andrade*

Mestranda: *Adriana da Silva Velozo Bezerra*

**Questionário:**

**Período que está cursando**: 6°

1. Comente como foi sua experiência com o ensino de funções na universidade.

Atualmente estudo funções como uma relação entre conjuntos numéricos, ou ainda como um subconjunto do produto cartesiano.

2. Quais as dificuldades que você encontrou ao estudar o conteúdo de funções?

No nível básico, não mais lembro. Estudando na Universidade, a falta de conhecimentos prévios, influenciam o entendimento para demonstrações envolvendo a linguagem de funções

3. Fale um pouco sobre o que você considera ter aprendido do conteúdo de funções.

Até o presente consigo perceber a grande possibilidade de contextualização, principalmente com a matemática financeira, que o estudo de função traz como realidade do ensino.

4. Para você, o que é uma função?

É uma relação entre dois elementos de um conjunto qualquer (ou numéricos), em que um está relacionado com o outro de maneiras pré-determinados.

5. Para você, qual a importância de estudar gráficos de funções?

Após aprender a analisar pontos, linhas e figuras em um plano cartesiano, se faz importante analisar gráficos de funções, percebendo assim sua continuidade ou não.

6. Escreva sobre outros pontos do ensino de funções que você desejar.

Acredito em álgebra básica, precisamos esclarecer e familiarizar mais os alunos com os termos variável, incógnita, parâmetro e saber se uma equação pode ou não ser lei de formação de função!

7

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

outubro-novembro de 2015

O presente questionário é parte integrante da Dissertação de Mestrado Profissional que será apresentada ao programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Esta pesquisa analisa as dificuldades dos alunos da Licenciatura em Matemática no ensino aprendizagem de funções. Assim, gostaríamos de contar com sua colaboração respondendo este questionário. Informamos que não há identificação dos participantes. Desde já agradecemos sua colaboração.

Orientador: *Prof. Dr. Silvanio de Andrade*

Mestranda: *Adriana da Silva Velozo Bezerra*

**Questionário:**

**Período que está cursando**: 7º

1. Comente como foi sua experiência com o ensino de funções na universidade.

A experiência foi muito proveitosa. Houve um esclarecimento mais amplo referente ao ensino de funções, proporcionando uma melhor aprendizagem e solucionar as dúvidas existentes nos ensinos fundamentais e médios.

2. Quais as dificuldades que você encontrou ao estudar o conteúdo de funções?

As principais dificuldades foram encontrar aplicações que pudessem fazer uso de funções e [illegible] estudos dos comportamentos dos gráficos.

3. Fale um pouco sobre o que você considera ter aprendido do conteúdo de funções.

O ~~conceito~~ d conceito de funções, as aplicações e as utilidades, foram assuntos importantes do conteúdo de funções que aprendi durante os estudos em tal conteúdo.

4. Para você, o que é uma função?

Uma função é uma relação de uma dado elemento ~~número ou dado~~ a pertencente a um domínio que é associado em um outro elemento ~~número~~ b chamado de elemento de ~~imagem~~ imagem da função

5. Para você, qual a importância de estudar gráficos de funções?

~~Os~~ Os gráficos ajudam a esclarecer de uma forma muito satisfatória as dúvidas por muitos tidas pelos alunos com os cálculos das funções, ou que diz respeito ao comportamento das funções e qual sua imagem.

6. Escreva sobre outros pontos do ensino de funções que você desejar.

Um conteúdo muito importante que deve ser ensinado com uma melhor qualidade e de formas que chamem atenção e instiguem a curiosidade dos alunos, principalmente nas séries do ensino fundamental

8

uepb
Universidade Estadual da Paraíba

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

outubro-novembro de 2015

O presente questionário é parte integrante da Dissertação de Mestrado Profissional que será apresentada ao programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Esta pesquisa analisa as dificuldades dos alunos da Licenciatura em Matemática no ensino aprendizagem de funções. Assim, gostaríamos de contar com sua colaboração respondendo este questionário. Informamos que não há identificação dos participantes. Desde já agradecemos sua colaboração.

Orientador: *Prof. Dr. Silvanio de Andrade*

Mestranda: *Adriana da Silva Velozo Bezerra*

**Questionário:**

**Período que está cursando:** 6º

1. Comente como foi sua experiência com o ensino de funções na universidade.

Minha experiência com o ensino de funções na universidade foi muito desafiadora, visto que no Ensino Médio este conteúdo foi visto ~~de~~ forma superficial.

2. Quais as dificuldades que você encontrou ao estudar o conteúdo de funções?

Primeiramente, foi identificar quando uma ~~[illegible]~~ equação era uma função. Além disso, encontrar o domínio e o contradomínio de uma função.

3. Fale um pouco sobre o que você considera ter aprendido do conteúdo de funções.

Diante do conteúdo de "Funções" visto na minha vida acadêmica considero ter aprendido os seguintes tópicos: Identificação de uma função, Classificações das funções e a construção de gráficos.

4. Para você, o que é uma função?

Dados dois conjuntos A e B não-vazios, dizemos que uma função é uma correspondência biunívoca que relaciona cada elemento do conjunto A a um único elemento do conjunto B.

5. Para você, qual a importância de estudar gráficos de funções?

O estudo de gráficos de funções é de fundamental importância para o aluno, pois é através da representação gráfica que ele vai identificar o domínio, contradomínio e imagem de uma função.

6. Escreva sobre outros pontos do ensino de funções que você desejar.

• Utilização de softwares matemáticos para a construção de gráficos para uma melhor visualização dos alunos.

9

uepb
Universidade Estadual da Paraíba

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

outubro-novembro de 2015

O presente questionário é parte integrante da Dissertação de Mestrado Profissional que será apresentada ao programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Esta pesquisa analisa as dificuldades dos alunos da Licenciatura em Matemática no ensino aprendizagem de funções. Assim, gostaríamos de contar com sua colaboração respondendo este questionário. Informamos que não há identificação dos participantes. Desde já agradecemos sua colaboração.

Orientador: *Prof. Dr. Silvanio de Andrade*

Mestranda: *Adriana da Silva Velozo Bezerra*

**Questionário:**

**Período que está cursando:** 5

1. Comente como foi sua experiência com o ensino de funções na universidade.

O ensino de funções no ensino superior, para mim, foi de grande auxílio. Aprendi tive uma melhor compreensão do conteúdo.

2. Quais as dificuldades que você encontrou ao estudar o conteúdo de funções?

Construção e interpretação de gráficos

3. Fale um pouco sobre o que você considera ter aprendido do conteúdo de funções.

Podemos fazer representações tanto algébricas quanto gráfica de diversas situações do cotidiano.

4. Para você, o que é uma função?

Uma sentença na qual uma variável depende de outra ou de outras

5. Para você, qual a importância de estudar gráficos de funções?

É poder analisar e comparar os termos algébricos

6. Escreva sobre outros pontos do ensino de funções que você desejar.

O fato de poder ~~~~ desmembrar funções de ~~gráficos~~ graus maiores em funções de grau menores

10

uepb
Universidade
ESTADUAL DA PARAÍBA

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

outubro-novembro de 2015

O presente questionário é parte integrante da Dissertação de Mestrado Profissional que será apresentada ao programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Esta pesquisa analisa as dificuldades dos alunos da Licenciatura em Matemática no ensino aprendizagem de funções. Assim, gostaríamos de contar com sua colaboração respondendo este questionário. Informamos que não há identificação dos participantes. Desde já agradecemos sua colaboração.

Orientador: *Prof. Dr. Silvanio de Andrade*

Mestranda: *Adriana da Silva Velozo Bezerra*

**Questionário:**

**Período que está cursando:** 5º

1. Comente como foi sua experiência com o ensino de funções na universidade.

Durante o curso de Cálculo diferencial e Integral I o professor revisou com uma aula todos os tipos de funções e respectivos gráficos.

2. Quais as dificuldades que você encontrou ao estudar o conteúdo de funções?

Uma das principais dificuldades era associar o conteúdo de funções ao cotidiano, além disso, estabelecer o domínio, contradomínio e imagem, durante o ensino médio e fundamental.

3. Fale um pouco sobre o que você considera ter aprendido do conteúdo de funções.

Funções monótonas, Domínio, contradomínio, imagem, Função Linear, Afim, polinomiais, exponencial, inversa logarítmica, Classificação: injetiva e/ou sobrejetiva. Gráficos de funções.

4. Para você, o que é uma função?

É uma relação entre dois conjuntos A e B, onde cada elemento do conjunto A está relacionado a um elemento do conjunto B. Denominamos A de domínio, B de contradomínio e o conjunto dos elementos de B, a qual os elementos de A estão relacionados denominamos de Imagem.

5. Para você, qual a importância de estudar gráficos de funções?

De extrema importância, pois facilita o entendimento do comportamento das funções, além de verificar visualmente propriedades específicas de cada tipo de função.

6. Escreva sobre outros pontos do ensino de funções que você desejar.

Nenhum.

11

uepb
Universidade Estadual da Paraíba

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

outubro-novembro de 2015

O presente questionário é parte integrante da Dissertação de Mestrado Profissional que será apresentada ao programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Esta pesquisa analisa as dificuldades dos alunos da Licenciatura em Matemática no ensino aprendizagem de funções. Assim, gostaríamos de contar com sua colaboração respondendo este questionário. Informamos que não há identificação dos participantes. Desde já agradecemos sua colaboração.

Orientador: *Prof. Dr. Silvanio de Andrade*

Mestranda: *Adriana da Silva Velozo Bezerra*

**Questionário:**

**Período que está cursando:** 9°

1. Comente como foi sua experiência com o ensino de funções na universidade.

Inicialmente eu vi o conteúdo de funções na disciplina de Cálculo I, tinha dificuldade por não ter aprendido realmente na escola (ensino médio) e acabou prejudicando nesta disciplina citada e em outras.

2. Quais as dificuldades que você encontrou ao estudar o conteúdo de funções?

Eu não sabia identificar determinados domínios e nem as imagens das funções, ou quando o professor pedia os intervalos para além do período. E como o gráfico iria se comportar para funções do tipo $f(x)=x^3$ ou quando tinha raízes.

3. Fale um pouco sobre o que você considera ter aprendido do conteúdo de funções.

Hoje mais aperfeiçoada no curso e estudando por conta própria superei as dificuldades citadas na questão anterior.

4. Para você, o que é uma função?

É algo dependente em relação a uma variável, do tipo $f(x) = ax + b$, está em função de x ou seja dependendo de x.

5. Para você, qual a importância de estudar gráficos de funções?

É saber como o gráfico vai se comportar, se é uma reta ou parábola, ou dependendo da função assumir outras formas

6. Escreva sobre outros pontos do ensino de funções que você desejar.

É importante explicar bem sobre função exponencial, pois muitos alunos confundem o gráfico dessa função com gráfico de funções lineares.

12

uepb

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA**
**PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA**
**CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA**
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**
**MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

outubro-novembro de 2015

O presente questionário é parte integrante da Dissertação de Mestrado Profissional que será apresentada ao programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Esta pesquisa analisa as dificuldades dos alunos da Licenciatura em Matemática no ensino aprendizagem de funções. Assim, gostaríamos de contar com sua colaboração respondendo este questionário. Informamos que não há identificação dos participantes. Desde já agradecemos sua colaboração.

Orientador: *Prof. Dr. Silvanio de Andrade*

Mestranda: *Adriana da Silva Velozo Bezerra*

**Questionário:**

**Período que está cursando:** 5º

1. Comente como foi sua experiência com o ensino de funções na universidade.

Na universidade comecei a ver funções na disciplina de MAT P ENSINO MÉDIO I no 1º período sobre várias tipos de funções tendo em vista ajudar os alunos para ter uma base boa para disciplina de calculo.

2. Quais as dificuldades que você encontrou ao estudar o conteúdo de funções?

Não encontrei muita dificuldade tendo em vista que já havia visto bem esse conteúdo e foi estudado aqui na universidade.

3. Fale um pouco sobre o que você considera ter aprendido do conteúdo de funções.

Os vários tipos de funções e a sua importância no nosso cotidiano.

4. Para você, o que é uma função?

Função em matemática é uma expressão que possui uma ou mais variável dependente e uma ou mais inde-pendente e pode ser de grau 1, 2, 3, 4, ... etc, ou seja, uma variável em função de outra.

5. Para você, qual a importância de estudar gráficos de funções?

É de suma importância, pois, através dos gráficos podemos dizer que função se trata.

6. Escreva sobre outros pontos do ensino de funções que você desejar.

As funções podem e devem ser ensinadas tanto de uma forma mais algébrica, como mais contextualizadas.

13

uepb
Universidade Estadual da Paraíba

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

março de 2016

O presente questionário é parte integrante da Dissertação de Mestrado Profissional que será apresentada ao programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Esta pesquisa analisa as dificuldades dos alunos da Licenciatura em Matemática no ensino aprendizagem de funções. Assim, gostaríamos de contar com sua colaboração respondendo este questionário. Informamos que não há identificação dos participantes. Desde já agradecemos sua colaboração.

Orientador: *Prof. Dr. Silvanio de Andrade*

Mestranda: *Adriana da Silva Velozo Bezerra*

**Questionário:**

**Período que está cursando:** 5º

1. Comente como foi sua experiência com o ensino de funções na universidade.

Eu considero que foi, de forma mecânica, mais ou menos parecido com o ensino médio.

2. Quais as dificuldades que você encontrou ao estudar o conteúdo de funções?

De compreender onde se aplicar no dia a dia.

3. Fale um pouco sobre o que você considera ter aprendido do conteúdo de funções.

Acho que foi mínimo e preciso me aprofundar mais. Aprendi em função o exemplo do crescimento de uma determinada bactéria, a conta de água e de energia se processa através do meu consumo e outros.

4. Para você, o que é uma função?

É a análise de determinado situações que ocorem em função de um grafo, de um determinado crescimento de população. Ou seja a ocorrência de algo em função de outra.

5. Para você, qual a importância de estudar gráficos de funções?

A importância é a representação visual daquela determinada situação, você pode analizar o comportamento de maneira visual

6. Escreva sobre outros pontos do ensino de funções que você desejar.

Onde se aplica e em qual situação de forma simplificada.

34

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

março de 2016

O presente questionário é parte integrante da Dissertação de Mestrado Profissional que será apresentada ao programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Esta pesquisa analisa as dificuldades dos alunos da Licenciatura em Matemática no ensino aprendizagem de funções. Assim, gostaríamos de contar com sua colaboração respondendo este questionário. Informamos que não há identificação dos participantes. Desde já agradecemos sua colaboração.

Orientador: *Prof. Dr. Silvanio de Andrade*

Mestranda: *Adriana da Silva Velozo Bezerra*

**Questionário:**

**Período que está cursando:** 02

1. Comente como foi sua experiência com o ensino de funções na universidade.

No primeiro período tive um bom contato com o conteúdo de funções. Entretanto, não foi apresentado-me a real utilização do conteúdo no cotidiano, devido a qual da [redacted] e também ao ensino mecânico deste conteúdo.

2. Quais as dificuldades que você encontrou ao estudar o conteúdo de funções?

As dificuldades surgiram à partir das funções exponenciais e logarítmicas, pois fazia-me não conseguia relacioná-la com conteúdos anteriores, não sabia o momento de utilizar e como utilizar, os conhecimentos que já tinha.

3. Fale um pouco sobre o que você considera ter aprendido do conteúdo de funções.

Aprendi sobre função afim e seus gráficos. Função quadrática (tenho poucas lembranças), especificamente, seu gráfico.

4. Para você, o que é uma função?

É um ponto em função do outro, por exemplo. Podemos através de uma determinada informação, descobrir outra que depende da antecessora, ou seja, é uma relação de dependência.

5. Para você, qual a importância de estudar gráficos de funções?

Ao estudá-los, compreendemos como interpretar determinados situações que seja considerados. Além disto, atualmente (séc. XXI), a maioria das informações estão contidas nos gráficos e diagramas. → V. RE

6. Escreva sobre outros pontos do ensino de funções que você desejar.

Apesar da necessidade das funções para a carreira acadêmica (cálculo diferencial, por exemplo) ~~a~~ até o presente momento, só consegui ~~ver~~ utilizar a função quadrática, me recuso-me as restantes. Diante da função quadrática, pude observar sua utilidade nas empresas (maximizar lucros e minimizar custos).

(5ª) ter um conhecimento básico para interpretá-los.

15

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

março de 2016

O presente questionário é parte integrante da Dissertação de Mestrado Profissional que será apresentada ao programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Esta pesquisa analisa as dificuldades dos alunos da Licenciatura em Matemática no ensino aprendizagem de funções. Assim, gostaríamos de contar com sua colaboração respondendo este questionário. Informamos que não há identificação dos participantes. Desde já agradecemos sua colaboração.

Orientador: *Prof. Dr. Silvanio de Andrade*

Mestranda: *Adriana da Silva Velozo Bezerra*

**Questionário:**

**Período que está cursando:** 9º

1. Comente como foi sua experiência com o ensino de funções na universidade.

Minha experiência não foi muito interessante. Sobre [illegible] estudei função em Matemática Básica I e em Educação Matemática e Sociedade. Sendo que, a primeira foi muito complicada devido a forma que o (Cont. ->)

2. Quais as dificuldades que você encontrou ao estudar o conteúdo de funções?

Sinto que, ao chegar na universidade, o aluno vem bastante "defasado" do ensino médio. Assim, ao chegar na universidade ele tem aquele choque de realidade ao sair (->)

3. Fale um pouco sobre o que você considera ter aprendido do conteúdo de funções.

Acredito que o que eu aprendi de funções, são através de aplicações na sociedade, principalmente quando relacionamos algo com outra coisa. Assim, temos isso algo em função ou em relação de outra qualquer.

(1) o professor da disciplina ensinava o conteúdo, pois grande parte dos alunos vieram do ensino médio e não tiveram uma boa base para o ensino de funções, comprometendo o aprendizado. Já a segunda disciplina citada, foi mais agradável, pois vimos o assunto de função de forma aplicada, através de seminários em sala de aula. Tudo aplicado a assuntos do dia a dia.

(2) que não aprendeu tudo ou o que deveria ser feito.

(5) em algum como se montarmos um gráfico fazendo essa relação, o aluno aprenderá de forma melhor. Assim, na variável X, se formos colocar os litros colocados no carro, e na variável Y o preço da gasolina, através do gráfico, o aluno poderá ter a noção e o conceito de função afim.

4. **Para você, o que é uma função?**

Para minha pessoa, função é quando colocamos algo em x em função de y, por exemplo tudo que notamos a solução de valores em função de outras coisas.

5. **Para você, qual a importância de estudar gráficos de funções?**

Se formos analisar as ações do dia a dia o mesmo de funções é bastante importante se formos pegar um exemplo do preço da gasolina em função dos litros colocados (Conta)

6. **Escreva sobre outros pontos do ensino de funções que você desejar.**

No estudo do ~~pro~~ ensino de funções, é um campo muito amplo. Diga disso, é que muitos professores passam por "cima" do conteúdo, aplicam poucas coisas sobre isso. Se bem que, se relacionarmos o estudo de funções com a resolução de problemas em sala de aula, além de saber o conteúdo, o aluno poderia desenvolver o raciocínio lógico e mental.

16

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

março de 2016

O presente questionário é parte integrante da Dissertação de Mestrado Profissional que será apresentada ao programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Esta pesquisa analisa as dificuldades dos alunos da Licenciatura em Matemática no ensino aprendizagem de funções. Assim, gostaríamos de contar com sua colaboração respondendo este questionário. Informamos que não há identificação dos participantes. Desde já agradecemos sua colaboração.

Orientador: *Prof. Dr. Silvanio de Andrade*

Mestranda: *Adriana da Silva Velozo Bezerra*

**Questionário:**

**Período que está cursando:** 4º

1. Comente como foi sua experiência com o ensino de funções na universidade.

Inicialmente pouco confuso, durante o ensino Médio tive o primeiro contato, porém apenas na graduação que tive a oportunidade de se estudar realmente de uma forma aplicada de como se deve ser.

2. Quais as dificuldades que você encontrou ao estudar o conteúdo de funções?

Análise de gráfico, o reconhecimento de crescente/decrescente e a construção de esboço foi realmente o que encontrei mais dificuldades.

3. Fale um pouco sobre o que você considera ter aprendido do conteúdo de funções.

Formulação ou Esboçamento do gráfico
Cálculo dos gráficos e algumas propriedades de muita relevância.

4. Para você, o que é uma função?

É uma expressão geralmente com duas variáveis e que uma é dependente da outra

5. Para você, qual a importância de estudar gráficos de funções?

A importância de reconhecer o modo e forma que ele se comporta.

6. Escreva sobre outros pontos do ensino de funções que você desejar.

Crescimento, Decrescimento, Domínio, Contra-Domínio, Imagem e representação Geométrica das funções.

17

uepb
Universidade Estadual da Paraíba

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA**
**PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA**
**CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA**
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**
**MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

março de 2016

O presente questionário é parte integrante da Dissertação de Mestrado Profissional que será apresentada ao programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Esta pesquisa analisa as dificuldades dos alunos da Licenciatura em Matemática no ensino aprendizagem de funções. Assim, gostaríamos de contar com sua colaboração respondendo este questionário. Informamos que não há identificação dos participantes. Desde já agradecemos sua colaboração.

Orientador: *Prof. Dr. Silvanio de Andrade*

Mestranda: *Adriana da Silva Velozo Bezerra*

**Questionário:**

**Período que está cursando:** 4 periodo

1. Comente como foi sua experiência com o ensino de funções na universidade.

O Ensino de funções não foi tão estudado como deveria ser, pois é um pré requisito basico para ser utilizado em outras cadeiras do curso de Matemática como derivada, Integral.

2. Quais as dificuldades que você encontrou ao estudar o conteúdo de funções?

Inicialmente foi para analisar os graficos

3. Fale um pouco sobre o que você considera ter aprendido do conteúdo de funções.

funções é um conteúdo fundamental como nas series iniciais se for bem ~~[illegible]~~ analisada fazendo o aluno questionar sobre seus termos dependentes e independentes atribuir valores para x e encontrar o valor de y ~~[illegible]~~ por meio de uma equação definida

4. Para você, o que é uma função?

É como algo se comporta por meio de uma formula estabelecida como por exemplo o espaço em função do tempo.

5. Para você, qual a importância de estudar gráficos de funções?

É de extrema importancia estudar o grafico de uma função, pois é com ela que pode ser analizado como se comporta através de uma equação estabelecida, analisa se é afim, de 2 grau, se é crescente ou decrescente.

6. Escreva sobre outros pontos do ensino de funções que você desejar.

funções que trabalhe com calculos do nosso dia-dia.

18

uepb
Universidade Estadual da Paraíba

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

março de 2016

O presente questionário é parte integrante da Dissertação de Mestrado Profissional que será apresentada ao programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Esta pesquisa analisa as dificuldades dos alunos da Licenciatura em Matemática no ensino aprendizagem de funções. Assim, gostaríamos de contar com sua colaboração respondendo este questionário. Informamos que não há identificação dos participantes. Desde já agradecemos sua colaboração.

Orientador: *Prof. Dr. Silvanio de Andrade*

Mestranda: *Adriana da Silva Velozo Bezerra*

**Questionário:**

**Período que está cursando:** 7º

1. Comente como foi sua experiência com o ensino de funções na universidade.

No começo, foi uma experiência proveitosa, além de ter um bom domínio no conceito intuitivo de funções, acabei me aprofundando ao estudar mais aprofundados de cálculo envolvendo função.

2. Quais as dificuldades que você encontrou ao estudar o conteúdo de funções?

Relações entre máximo e mínimo, funções inversas e composição de funções foram as temáticas mais difíceis de lidar.

3. Fale um pouco sobre o que você considera ter aprendido do conteúdo de funções.

As aplicações de funções no dia a dia (a exemplo de exponencial, afim e trigonométricas) foram essenciais para que eu pudesse incorporar a aprendizagem na física e na biologia, por exemplo.

4. Para você, o que é uma função?

É uma relação que associa um termo a outro de tal forma que satisfaça à condição estabelecida: um único elemento para um único resultado.

5. Para você, qual a importância de estudar gráficos de funções?

A necessidade de interpretar graficamente e analisar geometricamente uma função é fundamental para utilizar o gráfico ~~para~~ lançar uma problemática ao aluno.

6. Escreva sobre outros pontos do ensino de funções que você desejar.

Desde quando as funções adentraram às áreas do conhecimento das exatas (física, química, matemática e ciências correlatas), o ensino de tal conteúdo em sala de aula é um desafio incessante aos professores e futuros professores, quando da adoção de uma metodologia que dinamize o processo de ensino-aprendizagem, de tal forma que o aluno possa compreender os fenômenos que regem o universo matemático e histórico do qual a noção de função converge.

# ANEXO C – DIVULGAÇÃO DA OFICINA DE FUNÇÃO

| |
|---|
| **UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA**<br>**Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa - Centro de Ciência e Tecnologia**<br>**MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA** |

## OFICINA DE FUNÇÃO:

## ESTUDANDO O CONCEITO E AS REPRESENTAÇÕES DE FUNÇÃO POR MEIO DA RESOLUÇÃO, PROPOSIÇÃO E EXPLORAÇÃO DE PROBLEMAS

**MINISTRANTES**: Profa. Msn. Adriana da Silva Velozo Bezerra. Prof. Dr. Silvanio de Andrade.

**OBJETIVO**: Desenvolver atividades didáticas com foco na compreensão do conceito e das representações de função via resolução, proposição e exploração de problemas.

**COORDENAÇÃO DO EVENTO**: Prof. Dr. Silvanio de Andrade. Profa. Msn. Adriana da Silva Velozo Bezerra.

**DATA**: 09, 10, 11, 16, 17 e 18 de março de 2016 no estilo presencial, totalizando 30 horas. **HORÁRIO**: 13h às 18h

**LOCAL**: UEPB, campus I, CCT, Bloco C, segundo andar, sala C-308.

**INSCRIÇÃO**: Totalmente gratuita.

**PÚBLICO ALVO**: Alunos de Licenciatura em Matemática.

**NÚMERO DE VAGAS**: 20 vagas.

**PROGRAMAÇÃO**

| Dia 09 (1° momento) | Dia 10 (2° momento) | Dia 11 (3° momento) | Dia 16 (4° momento) | Dia 17 (5° momento) | Dia 18 (6° momento) |
|---|---|---|---|---|---|
| Conhecendo o GeoGebra. Noção intuitiva de função, aplicações da derivada função afim e função derivada. | Noção intuitiva, função afim, máximo ou mínimo da função quadrática e limite de uma função quando a variável tende ao infinito. | Função afim, máximo ou mínimo da função quadrática e aplicações da derivada. | Gráfico da função afim, crescimento e decrescimento de uma função quadrática, estudo do sinal da função afim e volume de um sólido obtido pela rotação em torno do eixo x. | Funções crescente e decrescentes, aplicações da derivada, crescimento e decrescimento de uma função quadrática e volume de um sólido obtido pela rotação em torno do eixo y. | Apresentação dos participantes sobre o ensino aprendizagem de função. Mesa redonda sobre a pesquisa em Educação Matemática e o ensino aprendizagem de função. |

**CERTIFICADO**: Apenas para quem cumprir frequência de 100% nos seis dias.

**INFORMAÇÕES E INCRIÇÕES**: Nos e-mail: adriana.vel@hotmail.com ou silvanio@usp.br.

# ANEXO D – TEXTO UTILIZADO NA SEXTA ETAPA DA OFICINA



In: MORAIS, M. S. S. et. al. Educação matemática e temas político-sociais. Campinas, SP: Autores Associados, 2008.

## Texto para leitura 1

### Indústria do couro gera problemas ao ambiente e à população

[...] Bocaina, cidade paulista situada no centro do estado, tem no acabamento do couro sua principal atividade e pode ser considerada um paradigma desse conflito que opõe desenvolvimento e preservação ambiental. Conhecida nacionalmente como a "capital da luva de raspa", enfrentou nos últimos dez anos um crescimento desenfreado da atividade coureira, que se mantém na região há cerca de 30 anos. Com apenas 10.565 habitantes, segundo dados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), Bocaina produz diariamente por volta de 30 toneladas de lixo provenientes das mais de cem empresas beneficiadoras de couro.

As empresas que processam o couro em Bocaina são de vários tipos, mas há basicamente dois grupos. A maioria produz luvas e aventais de trabalho. Outras, em menor número, operam com tingimento. O resíduo gerado pelo processo de acabamento pode ser sólido – como as aparas não aproveitadas do material e a serragem de couro – ou líquido – resultado da lavagem da peça e, principalmente, do ato de tingir. Em ambos os casos, o cromo está presente.

Segundo a Companhia de Tecnologia de Saneamento Ambiental (CETESB), apenas as empresas que tingem o couro devem realizar tratamento da água,



que exige investimento alto: um curtume de tingimento de médio porte gasta em torno de R$3 mil por mês para limpar 20 mil litros de água por dia. A água colorida da tintura é bombeada para um reator de coagulação, uma espécie de liquidificador que a mistura com diversos componentes químicos. O problema é que a limpeza produz um outro resíduo, o lodo cromado, que deve ser enviado a um aterro adequado.

Na opinião da população, as empresas não tratam corretamente seus efluentes, ou o fazem em apenas parte do volume utilizado, pois a contaminação das águas correntes é visível a olho nu. O córrego da Bocaina, que deu nome à cidade, já foi pintado de muitas cores: preto, azul, vermelho. Varia conforme a tinta utilizada para trabalhar o couro. Sempre que isso acontece, é difícil precisar quem é o autor da aquarela, pois há cinco curtumes próximos ao manancial. O Himalaia, outro curso de água que corta a cidade, também sofre com a deposição clandestina de efluentes industriais. Os dois córregos desembocam no rio Jacaré Pepira, um dos principais da região, parte integrante da bacia do Tietê.

Segundo José Luís Pedro, químico que presta consultoria para dez empresas em Bocaina, "mesmo em água corrente, o resíduo de curtume varre a vida por onde passa, causando a morte instantânea de qualquer ser vivo, seja bactéria, peixe ou planta". Grande parte dos moradores de casas e propriedades rurais à beira dos cursos de água do município cercou o acesso a eles.

A contaminação trazida pelos resíduos sólidos é mais sutil. Seus efeitos não podem ser vistos, mas são tão ou até mais graves que os causados pela poluição por efluen-



tes líquidos. A água da chuva descola os compostos químicos das aparas de couro depositadas no solo e os leva, com o tempo, até os lençóis freáticos mais profundos. Isso pode contaminar os postos de arrecadação de água tanto para consumo urbano quanto para abastecimento de fazendas. Infelizmente, ainda não existem estudos detalhados sobre o comprometimento real de solos e águas subterrâneas da região.

Antes da fiscalização, restos de raspa eram lançados sem cuidados na zona rural, em aterros de lixo comum, ou simplesmente espalhados pela cidade, à espera de ser recolhidos pelos caminhões de lixo da prefeitura. Chegava-se até a queimar raspa durante a noite. A fumaça branca, altamente tóxica e de cheiro insuportável, pairava sobre as casas próximas às empresas e atrapalhava o sono dos moradores.

A esse perigo soma-se um agravante: aquela é uma área de recarga do aqüífero Guarani, um dos maiores reservatórios subterrâneos de água doce do mundo. Ele aflora na região, ou seja, possui pontos próximos da superfície que não estão protegidos e, por isso, são sensíveis a alterações do meio ambiente.

A prefeitura implementará, ainda em 2007, o projeto Bocaina, Cidade Sustentável que prevê o monitoramento permanente da qualidade da água, recuperação de nascentes e a criação de um posto de entrega voluntária de aparas do couro, para receber o material dos pequenos produtores e enviá-lo à cidade de Paulínia, com o objetivo de reduzir a quantidade de sobras de raspa depositada clandestinamente.



Foi também criada, em outubro de 2006, a Câmara Ambiental de Couro e Calçado do Estado de São Paulo, composta por CETESB, Instituto de Pesquisas Tecnológicas (IPT), universidades públicas e representantes do setor. Atualmente, poucos processos são autorizados pela CETESB. Um deles é a extração dos componentes químicos dos restos de couro em etapas, desenvolvida pela pesquisadora Joana D'Arc. O método recupera o cromo e o colágeno – de grande valor para a indústria cosmética – e, no caso de couro tingido, também separa taninos e anilina. O que sobra é a própria fibra orgânica do couro, reutilizada no processo de separação.

O tratamento resolve o problema do lixo tóxico gerado pelos curtumes, mas muitos empresários esbarram no investimento inicial, de R$40 mil. "O retorno é grande, porque o colágeno tem alto valor no mercado, e o cromo reciclado sai muito mais barato", garante a química, que trabalha em parceria com um curtume em Franca e tem recebido propostas de implementação de sua idéia.

Outro processo autorizado pela CETESB é a reciclagem, mas com inúmeras restrições, e que por isso está longe de utilizar todo o material excedente. Apesar de não contar com a aprovação do órgão regulador, algumas empresas estão produzindo tijolos, telhas e divisórias de escritório com a serragem do couro. Muitos curtumes mandam as sobras de raspa para esses fabricantes, na expectativa de diminuir o lixo que será enviado ao aterro.

Texto extraído da revista *Problemas Brasileiros*. Disponível em: <http://www.sescsp.org.br/SESC/revistas_sesc/PB/artigo.cfm?Edicao_Id=274&breadcrumb=1&Artigo_ID=3347&IDCategoria=3633&reftype=1>. Acesso em: 31 mar. 2007.