



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PRÓ-REITORIA DE PÓS GRADUAÇÃO E PESQUISA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA

JOEL SILVA DE OLIVEIRA

A ENGENHARIA DIDÁTICA COMO REFERENCIAL PARA A AÇÃO
PEDAGÓGICA REFLEXIVA: O CASO DA ÁREA DE FIGURAS PLANAS
IRREGULARES COM O *GEOGEBRA*

CAMPINA GRANDE – PB
2017

JOEL SILVA DE OLIVEIRA

A ENGENHARIA DIDÁTICA COMO REFERENCIAL PARA A AÇÃO
PEDAGÓGICA REFLEXIVA: O CASO DA ÁREA DE FIGURAS PLANAS
IRREGULARES COM O *GEOGEBRA*

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática (Mestrado acadêmico) do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento à exigência para a obtenção do grau de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Orientadora: Cibelle de Fátima Castro de Assis - UFPB

CAMPINA GRANDE – PB
2017

É expressamente proibido a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano do trabalho.

- O48e Oliveira, Joel Silva de.
A engenharia didática como referencial para a ação pedagógica reflexiva [manuscrito] : o caso da área de figuras planas irregulares com o GeoGebra / Joel Silva de Oliveira. - 2017.
121 p. : il. colorido.
- Digitado.
Dissertação (Mestrado em Acadêmico em Ens. de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2018.
"Orientação : Profa. Dra. Cibelle de Fátima Castro de Assis, UFPB - Universidade Federal da Paraíba."
1. Engenharia didática. 2. GeoGebra. 3. Geometria escolar. 4. Recursos didáticos.

21. ed. CDD 371.33

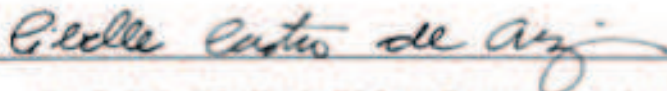
JOEL SILVA DE OLIVEIRA

A ENGENHARIA DIDÁTICA COMO REFERENCIAL PARA A AÇÃO
PEDAGÓGICA REFLEXIVA: O CASO DA ÁREA DE FIGURAS PLANAS
IRREGULARES COM O *GEOGEBRA*

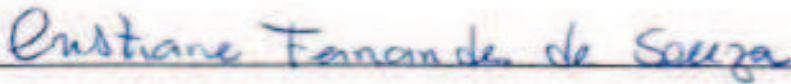
Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática (Mestrado acadêmico) do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento à exigência para a obtenção do grau de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Aprovado em 18 de dezembro de 2017.

Banca Examinadora



Prof. Dr. Cibelle de Fátima Castro de Assis - Orientadora
Universidade Federal da Paraíba – UFPB



Prof. Dr. Cristiane Fernandes de Souza - Examinadora Externo
Universidade Federal da Paraíba – UFPB



Prof. Dr. Marcus Bessa de Menezes - Examinador Interno
Universidade Federal de Campina Grande – UFCG

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a Deus, por me permitir concluir esta etapa em minha vida profissional, sem Ele nada seria possível.

À universidade Estadual da Paraíba - UEPB e ao programa de pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela oportunidade de realização do curso de mestrado.

À coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela concessão de bolsa de mestrado.

Aos meus pais, João Antônio de Oliveira e Joana Freire da Silva (*in memoriam*), que fizeram sempre o possível para eu conseguir sempre lograr êxito, sem eles seria difícil. Agradeço muito à eles por ter conquistado tudo que eu possuo.

Aos meus irmãos Anselmo, Roseane, Damião, Josely, José e Suely, próximos ou não, sempre buscaram me motivar a conseguir e conquistar algo.

À minha noiva Tamara que sempre colaborou com meu “sucesso”. Obrigado pelo amor, companheirismo, amizade, compreensão e cumplicidade durante todos os momentos da vida e da carreira acadêmica e profissional dos últimos anos.

À minha amiga Jéssica Lohrany, desde a graduação, foi uma das pessoas que mais me incentivou a entrar no mestrado, mostrando-me que tudo é possível quando desejamos algo.

À minha orientadora Prof^ª. Dra. Cibelle de Fátima Castro de Assis, por sua compreensão, apoio e paciência. Obrigado pelos ensinamentos, pude aprender bastante.

Aos amigos do mestrado que estiveram presentes durante as disciplinas cursadas. Não citarei todos, no entanto cabe destacar aqueles que foram mais próximos como Elivelton Silva, Leonardo Lira, Izidio Soares e Wellison Casado.

Agradeço também aos professores, Dr. Eduardo Gomes Onofre, Dr. Jose Joelson Pimentel de Almeida, Dr. Jose Lamartine da Costa Barbosa, Dr. Marcus Bessa de Menezes, Dr. Roger Ruben Huaman Huanca, Dr. Silvanio de Andrade e Dra. Zélia Maria de Arruda Santiago, onde tive o prazer de estudar com eles, exemplos a serem seguidos.

A todos os meus familiares e aqueles que de alguma forma contribuíram para que eu pudesse chegar até aqui.

OBRIGADO!

Aos meus pais, João
Antônio de Oliveira e Joana
Freire da Silva

Talvez não tenha conseguido fazer o melhor, mas lutei para que o melhor fosse feito. Não sou o que deveria ser, mas Graças a Deus, não sou o que era antes.

Marthin Luther King

OLIVEIRA, J. S. A ENGENHARIA DIDÁTICA COMO REFERENCIAL PARA A AÇÃO PEDAGÓGICA REFLEXIVA: O CASO DA ÁREA DE FIGURAS PLANAS IRREGULARES COM O *GEOGEBRA*. 2017. 119 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Educação Matemática, Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2017.

RESUMO

O objetivo geral desta pesquisa é investigar aspectos relativos ao ensino do cálculo de áreas de figuras planas irregulares que podem ser trabalhados com o suporte do *software GeoGebra*. Trata-se de uma Pesquisa Intervenção de análise qualitativa em que o pesquisador desenvolveu uma proposta de ensino seguindo as orientações da Engenharia Didática. Esta pesquisa foi desenvolvida em três momentos: o primeiro compreendeu as *análises prévias*, onde consideramos as dimensões epistemológica, didática e cognitiva. Nesta última aplicamos e analisamos um questionário onde identificamos variáveis didáticas. No segundo momento, *as variáveis didáticas em jogo*, onde discutimos as dificuldades dos alunos no questionário, levando em consideração as variáveis didáticas constatadas. Por último, no terceiro momento, *concepções e análises a priori*, elaboramos uma proposta de atividade que consiste em encontrar a área do mapa da região da Paraíba como objetivo de discutir processos para o ensino e aprendizagem de áreas de figuras planas irregulares com contornos curvos com suporte do *GeoGebra*. Com relação ao conteúdo de Geometria, a busca por melhores metodologias de ensino é uma questão importante na área da Educação e no campo da Didática. A contribuição desse trabalho para o docente que deseja trabalhar área de figuras planas irregulares com seus alunos está centrada tanto no auxílio do uso das ferramentas e funcionalidades do *GeoGebra* quanto na perspectiva reflexiva que buscamos enaltecer para a elaboração de uma proposta de ensino no contexto da prática docente.

Palavras-chave: Engenharia Didática, figuras planas irregulares, *GeoGebra*.

OLIVEIRA, J. S. DIDACTIC ENGINEERING AS REFERENTIAL FOR REFLECTIVE PEDAGOGICAL ACTION: THE CASE OF THE AREA OF IRREGULAR PLANE FIGURES WITH THE *GEOGEBRA*. 2017. 119 f. Dissertation (Master degree) - Mathematics Education Course, Science and Technology Center, State University of Paraíba, Campina Grande, 2017.

ABSTRACT

The general objective of this research is to investigate aspects related to teaching the calculation of areas of irregular flat figures that can be worked with the support of the GeoGebra software. It is a research intervention of qualitative analysis in which the researcher developed a teaching proposal following the guidelines of the didactic engineering. This research was developed in three moments: the first understood the previous analyses, where we consider the dimensions epistemological, didactic and cognitive. In this last we applied and analyzed a questionnaire where we identified didactic variables. In the second moment, the didactic variables at stake, where we discuss the difficulties of the students in the questionnaire, taking into account the didactic variables found. Finally, in the third moment, conceptions and analyses a priori, we draw up an activity proposal that consists of finding the area of the region of Paraiba as the objective of discussing processes for the teaching and learning of areas of irregular flat figures with contours Curved with GeoGebra support. With regard to the content of geometry, the search for better teaching methodologies is an important issue in the area of education and in the field of Didactics. The contribution of this work to the teacher who wants to work area of irregular flat figures with his pupils is centered both in the use of the tools and functionalities of the GeoGebra as in the reflective perspective that we seek to extol to the elaboration of a Educational proposal in the context of the teaching practice.

Key words: Didactic Engineering, Irregular flat figures, *GeoGebra*.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Tela principal do <i>GeoGebra</i>	32
Figura 2- A Engenharia Didática e suas Fases.....	38
Figura 3 - Igualdade entre figuras de acordo com Euclides	53
Figura 4 - Cálculo de área através de peças (diagrama sobre a hipotenusa)	54
Figura 5 - Ilustração da unidade quadrado como unidade de medida	56
Figura 6 - Decomposição do paralelogramo em retângulo	56
Figura 7 - Decomposição de figura em triângulos e quadriláteros.....	57
Figura 8 - Polígonos regulares.....	57
Figura 9 - Octógono regular	59
Figura 10 - Exemplos onde podemos encontrar figuras planas regulares e irregulares.....	59
Figura 11–Método de Gauss para o cálculo de área	60
Figura 12 - Figura irregular plana sobre um plano cartesiano e suas coordenadas	61
Figura 13 - Multiplicações de x por y e de y por x	61
Figura 14 - Polígono irregular de 8 lados	62
Figura 15 - Justaposição de dois polígonos simples ao longo de arestas	63
Figura 16 - Área de uma região vista por satélite	64
Figura 17 - Desenho de um polígono irregular sobre a área a ser calculada	64
Figura 18 - Exemplos de figuras não planas no livro do 6º ano.....	70
Figura 19 - Exercício de cálculo de área encontrado no livro do 6º ano	70
Figura 20 - Equivalência entre áreas usando o <i>Tangram</i>	73
Figura 21 - Construções regulares no <i>software GeoGebra</i>	73
Figura 22 - Exemplos de construções irregulares com a ferramenta Polígono	75
Figura 23 - Figuras feitas unindo pontos	76
Figura 24 - Respostas apresentadas pelos Alunos A, B e C para a questão 1	77
Figura 25 - Imagem da segunda questão	78
Figura 26 - Respostas dos alunos para a questão 2	80
Figura 27 - Figuras da questão 3	81
Figura 28 - Respostas dos alunos R e J.....	83
Figura 29 - Imagem da questão 4	83
Figura 30 - Respostas de alguns alunos para a alternativa A	85
Figura 31 – Modelando uma solução para a alternativa B da questão 4	86
Figura 32- Resposta de um aluno para a alternativa B da questão 4	86
Figura 33 - Dados da questão 4, alternativa C	87
Figura 34- Respostas dadas por alunos na questão 4	88
Figura 35 - Região da questão 5	88
Figura 36 - Resposta do Aluno R para a questão 5.....	90
Figura 37 - Quadrados internos e externos à figura	90
Figura 38 – Imagens da sexta questão	91
Figura 39 - Resposta correta do aluno P para a questão 6	92
Figura 40 – Resposta do aluno R.....	93
Figura 41 - Tipos de figuras regulares e irregulares da questão 2.....	99
Figura 42 - Figuras sobre a malha – Questões 3 e 5	100
Figura 43 - Traços internos do aluno O para obter a área das figuras.....	101

Figura 44 – Superfície da Atividade.....	103
Figura 45 – Possíveis respostas para o item a) da Atividade 6	105
Figura 46 – Possíveis respostas para o item b) da Atividade 6	106
Figura 47 – Possível resposta para o item c) da Atividade 6	108

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Resultados obtidos na questão 2	79
Tabela 2 - Comparativo entre as figuras 1 e 2 da sexta questão	93
Tabela 3 - Descrição de cada questão com suas respectivas dificuldades.....	94

LISTA DE QUADROS

Quadro 1-Distribuição dos conceitos geométricos nos anos finais do Ensino Fundamental	69
Quadro 2 - O cálculo de área de figuras irregulares: <i>Matemática: compreensão e prática</i>	72

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1- Estatística de acertos em cada figura.....	82
Gráfico 2 - Estatística de erros e acertos para a questão 4	84
Gráfico 3 - Índice de acertos e erros da questão 6	91

SUMÁRIO

1	Introdução.....	13
1.1	A escolha do Tema da Pesquisa	13
1.2	Apresentando os objetivos da pesquisa	15
1.3	Apresentando os capítulos da Dissertação	15
2	A formação dos professores de Matemática e algumas considerações sobre a Geometria escolar e as Tecnologias	17
2.1	A formação de professores de Matemática e os Saberes Docentes	17
2.2	A Geometria Escolar	25
2.3	As Tecnologias e a Formação de professores	30
3	Apresentando a Engenharia Didática e suas fases	35
3.1	A Engenharia Didática e a formação de um professor reflexivo	35
3.2	As diferentes fases da Engenharia Didática	37
3.2.1	<i>Primeira fase: As análises prévias</i>	39
3.2.2	<i>Segunda fase: Concepção e Análise a priori</i>	40
3.2.3	<i>Terceira fase: Experimentação</i>	43
3.2.4	<i>Quarta fase: Análise a posteriori e Validação</i>	44
4	Procedimentos Metodológicos para o desenvolvimento da pesquisa	46
4.1	A natureza da Pesquisa	46
4.2	Os Momentos da Pesquisa	47
5	Análises prévias e o cálculo de área de figuras planas irregulares.....	52
5.1	Análises Prévias: Perspectiva epistemológica	52
5.1.1	<i>O cálculo de área de figuras planas regulares e irregulares</i>	55
5.2	Análises Prévias: A dimensão Didática	66
5.2.1	<i>Abordagem geométrica nos livros didáticos</i>	69
5.2.2	<i>Possibilidades do GeoGebra para o estudo das figuras poligonais</i>	73
5.3	Análises Prévias: A Dimensão cognitiva	76
5.3.1	<i>Questão 1</i>	77
5.3.2	<i>Questão 2</i>	78
5.3.3	<i>Questão 3</i>	81
5.3.4	<i>Questão 4</i>	83
5.3.5	<i>Questão 5</i>	88
5.3.6	<i>Questão 6</i>	90
5.4	Análise comparativa das questões	94
6	Concepção da proposta e Análise a priori.....	97

6.1 Antecipando algumas escolhas globais e hipóteses da pesquisa	97
6.2 As Variáveis Didáticas identificadas na pesquisa.....	98
6.2.1 <i>Variável tipo de figura</i>	99
6.2.2 <i>Variável posição da figura com relação a malha</i>	100
6.2.3 <i>Variável hachuramento</i>	100
6.2.4 <i>Variável malha quadriculada</i>	101
6.2.5 <i>Variável dados fornecidos para a solução</i>	101
6.3 Apresentando a atividade	102
6.3.1 Atividade – Cálculo da área do Estado da Paraíba.....	102
7 Conclusões.....	109
Referências	115
Apêndice	119
Apêndice A - Questionário diagnóstico.....	119

1 Introdução

1.1 A escolha do Tema da Pesquisa

A escolha do tema desta pesquisa teve sua origem na nossa trajetória acadêmica vivenciada durante o curso de Licenciatura em Matemática na Universidade Federal de Campina Grande – UFCG. De fato, foi durante a graduação (2009-2014) que ocorrerem os primeiros contatos com a tecnologia, mais precisamente na disciplina *Computador no ensino da Matemática*. Na oportunidade, discutimos o ensino da Geometria, da Álgebra e do Cálculo apoiados em diversos *software s* educacionais.

Tal experiência nos motivou para a elaboração de uma monografia ao final do curso de graduação intitulada “O ensino de Geometria na concepção dos professores do Ensino Fundamental de Barra de Santa Rosa-PB” (OLIVEIRA, 2014), cujo objetivo foi investigar a concepção dos professores das escolas públicas sobre a Geometria, porém, sempre destacando a importância da utilização dos *softwares* educacionais nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática. No trabalho citado, através de questionários aplicados com a colaboração de docentes, pudemos constatar despreparo, falta de motivação, de recursos e de apoio da gestão escolar para lecionar Geometria nos anos finais do Ensino Fundamental. Provocando certo abandono quanto ao ensino de conteúdos de Geometria Plana. Esse fato nos motivou a continuar pesquisando sobre o tema e buscando contribuir positivamente para o ensino-aprendizagem de conceitos dessa área da Matemática.

Sendo assim, demos continuidade ao estudo aprofundando nossos saberes como estudante do Mestrado Acadêmico do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática – PPGCEM, da Universidade Estadual da Paraíba – UEPB, investigando e discutindo na formação de professores de Matemática, questões relacionadas ao ensino e a aprendizagem do cálculo de áreas de figuras planas irregulares poligonais e não poligonais com uso do recurso computacional o *software GeoGebra*.

Para essa discussão focamos no trabalho que deve ser realizado pelo professor e nas estratégias que permitam desenvolver uma proposta de ensino que contemple aspectos essenciais ao tema e que, ao mesmo tempo, considere as dificuldades dos alunos.

Assim, este trabalho fundamenta-se em estudos realizados em torno de três linhas de discussão e que fazem parte das nossas escolhas: os *Saberes Docentes* discutidos centralmente por Tardif (2002); a *Engenharia Didática* proposta por Brousseau e Artigue discutidos por

Teixeira e Passos (2013), Pommer (2013), Carneiro (2005), Almouloud e Silva (2012) entre outros; e os recursos da *Geometria Dinâmica* discutidos por Ponte (2014), Miskulin e Silva (2010).

Atualmente quando falamos em tendência para ensinar Geometria, esperamos uma promoção da aprendizagem baseada na experimentação, na manipulação e utilização de programas de Geometria Dinâmica, isto é, de *softwares* geométricos, como no nosso caso o *GeoGebra* que entre outros possui enormes potencialidades.

Os *softwares* de Geometria Dinâmica possuem uma relação próxima aos saberes docentes e ao mesmo tempo justificam-se pelo tratamento possível para o estudo de áreas de figuras planas irregulares poligonais ou não, melhorando a compreensão e o entendimento dos seus alunos, assim como, os conhecimentos que os professores já possuem e podem ser aprofundados ao se utilizar tal recurso. Tardif (2002) enfatiza na formação docente os saberes necessários nesses e para esses processos. A formação docente de acordo com esse autor merece destaque pelo fato de muitas influências em sua disseminação, inclusive de fatores externos. A formação de professores reflete tendências teóricas ou áreas de conhecimento que foram predominantes em épocas distintas, isso pode explicar o motivo das diferenças na formação desses profissionais, como reflexo de certas concepções a respeito dos processos de ensino-aprendizagem da matemática.

Na formação inicial de professores de Matemática deve haver o aprofundamento de diversas questões, principalmente as inerentes ao processo formativo, mas de maneira reflexiva em que os docentes sejam capazes de perspectivar caminhos de mudanças e de desenvolvimento de novas e importantes habilidades necessárias da profissão.

Por fim, com o suporte da Engenharia Didática é possível conceber e desenvolver produtos de ensino relacionando o ensino habitual de uma sala de aula com mecanismos que possam auxiliar a crítica e a reflexão desse ensino pelo professor. De acordo com Brousseau (2008, *apud* ALMOULOUD e SILVA, 2012, p. 23.), a Engenharia Didática propriamente dita acompanha os dispositivos que são produzidos por um conjunto de estudos e de análises que dão as características a um certo produto/conceito de acordo com os devidos conhecimentos científicos teóricos e principalmente os experimentais do momento.

Esses estudos de acordo com a Engenharia Didática podem não chegar aos professores, agentes da educação, todavia são indispensáveis para análises das muitas observações das atividades de ensino que são efetivamente realizadas. Assim, conforme as etapas da Engenharia Didática são possíveis conceber e discutir uma proposta que permita

trazer significados para o ensino do cálculo da área de figuras planas irregulares com o auxílio do *software GeoGebra*.

Nesta pesquisa buscaremos investigar *como o cálculo de áreas de figuras planas irregulares pode ser mediado pelo software GeoGebra?* Pretendemos responder esse questionamento com o desenvolvimento da nossa investigação.

1.2 Apresentando os objetivos da pesquisa

O objetivo geral desta pesquisa é *investigar aspectos relativos ao ensino do cálculo de áreas de figuras planas irregulares que podem ser trabalhados com o suporte do GeoGebra*.

Para alcançar tal objetivo, delineamos os objetivos específicos a seguir:

- Identificar saberes necessários para a elaboração de uma proposta de ensino sobre o cálculo de áreas de figuras planas irregulares a partir da Engenharia Didática;
- Levantar formas de utilização do *GeoGebra* para o ensino de áreas de figuras planas irregulares;
- Estruturar uma proposta didática considerando as fases *Análises prévias e Concepção e análise à priori*.

1.3 Apresentando os capítulos da Dissertação

Este texto, considerando como primeiro capítulo a **Introdução**, está organizado em sete capítulos. No segundo, intitulado **A formação dos professores de Matemática e algumas considerações sobre a Geometria escolar e as Tecnologias** fizemos um estudo sobre a formação de professores para a atuação na Educação Básica, em especial nos anos finais do Ensino Fundamental, nosso foco de pesquisa. Para tanto, apoiamos-nos em estudos realizados por autores como Tardif (2002), Silva (2013), Ponte (2014), entre outros. Também neste capítulo, fizemos algumas considerações sobre a Geometria escolar, investigamos alguns fatos que contribuem tanto de forma positiva quanto negativa para seu ensino-aprendizagem, e abordamos também as tecnologias, dando ênfase ao *software GeoGebra*.

No terceiro capítulo, com o título **Apresentando a Engenharia Didática e suas fases**, fizemos a apresentação da metodologia utilizada neste trabalho para a elaboração da sequência didática na qual utilizamos autores como Artigue (1996, *apud* CARNEIRO, 2005), Pommer (2013), Machado (2008) entre outros. Neste capítulo também falamos das possíveis

contribuições da Engenharia Didática para a formação de um professor reflexivo. Elaboramos também um mapa da Engenharia Didática de acordo com Carneiro (2005).

No quarto capítulo **Procedimentos metodológicos para o desenvolvimento da pesquisa**, apresentamos a natureza desta pesquisa e os momentos de desenvolvimento da mesma. Assim, a pesquisa foi organizada da seguinte maneira: análises prévias (1º momento), *análises prévias* e as variáveis didáticas em jogo (2º momento) e, por último, concepção e análise *a priori* (3º momento).

No quinto capítulo intitulado **Análises Prévias e o cálculo de áreas de figuras planas irregulares** foram apresentadas, de acordo com a primeira fase da Engenharia Didática, as *Análises Prévias*. Consideramos e desenvolvemos as três dimensões epistemológica, didática e cognitiva. Ainda neste capítulo fizemos as análises das questões do questionário aplicado como elemento da dimensão cognitiva.

No capítulo 6, cujo título é **Concepções da Proposta e análise a priori**, nós identificamos e discutimos as variáveis didáticas, bem como apresentamos a atividade e as análises prévias relativas ao seu desenvolvimento.

O último capítulo, capítulo 7, **Conclusões**, tratamos dos resultados da pesquisa destacando o processo de construção da sequência de ensino e do uso das ferramentas do *GeoGebra* como auxílio para o ensino-aprendizagem do cálculo de áreas de figuras planas irregulares, principalmente aquelas com contornos circulares.

2 A formação dos professores de Matemática e algumas considerações sobre a Geometria escolar e as Tecnologias

2.1 A formação de professores de Matemática e os Saberes Docentes

As investigações sobre a formação de professores constituem um campo considerado novo, pois por mais que existam muitos estudos relacionados, as pesquisas ainda se concentram em temas semelhantes (TARDIF, 2002).

Esses temas se referem às dificuldades da formação quanto ao uso e incorporação de metodologias diferenciadas como a Modelagem Matemática, Resoluções de Problemas, e também na perspectiva da utilização das Tecnologias da Informação e Comunicação. Dessa maneira, estudar a formação de professores representa um desafio. Subdividida em formação inicial e continuada, a formação de professores é dinâmica.

Historicamente, a preocupação por uma cultura voltada para a formação docente surgiu nas Escolas Normais. Essas escolas eram instâncias responsáveis pela divulgação e propagação do saber, das normas e principalmente das técnicas necessárias à formação de professores. Com efeito, foi nas Escolas Normais e nos institutos de educação até os anos de 1970, em que as questões sobre a formação específica de professores foram motivadas. Havia uma necessidade de se ter planos de ensino satisfatórios e cada vez mais atuais. Para tanto, o professor “precisaria apropriar-se dos fenômenos envolvidos nas relações de ensino e aprendizagem, processos paralelos e diferentes, mas complementares” na visão de Silva (2013, p.30).

Para Ponte (2014), bem como para Silva (2013), a formação de professores de Matemática constitui-se como uma área de interesse da *Didática da Matemática*¹, e que por isso interessa esse processo de formação e seus aparentes problemas que geralmente são frequentes, tanto na formação inicial como na continuada.

Ponte (2014) enfatiza que a formação inicial de professores de Matemática deve se aprofundar em questões inerentes ao processo formativo, mas de maneira reflexiva de forma que os docentes sejam capazes de perspectivar caminhos de mudanças e de desenvolvimento de novas e importantes habilidades necessárias da profissão.

¹Didática da matemática é o estudo das relações de ensino e aprendizagem de matemática, relaciona-se com a psicologia e pedagogia. A DM investiga as situações de ensino, isto é, as situações didáticas, assim como aquelas não didáticas para propor mudanças nas metodologias utilizadas pelos docentes.

No Brasil, essa discussão teve um novo direcionamento com a aprovação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei Nº 9.394/1996) - LDBEN que redefiniu os debates a respeito dos rumos que as licenciaturas teriam à época e, das políticas públicas direcionadas para esse fim, passando então, a formação de professores a ter um reforço legal, tornando uma “obrigação” a preocupação com a formação docente. De fato, vejamos o que diz a Lei:

Art. 61º. A formação de profissionais da educação, de modo a atender aos objetivos dos diferentes níveis e modalidades de ensino e às características de cada fase do desenvolvimento do educando, terá como fundamentos:

I - A associação entre teorias e práticas, inclusive mediante a capacitação em serviço;

II - Aproveitamento da formação e experiências anteriores em instituições de ensino e outras atividades. (BRASIL, 1996).

De acordo com esse artigo (Art. 61) podemos considerar como pontos principais a valorização das experiências anteriores, mas principalmente a capacitação em serviço dos professores, que infelizmente foi pouco valorizada em legislações anteriores. Para Silva (2013), percebe-se com relação ao que já foi abordado, que a formação de professores de Matemática vem se constituindo como importante enfoque no âmbito das discussões educacionais. De fato, com a LDBEN, por exemplo, percebe-se um diferencial que, anteriormente não existia.

Entre os anos de 1997 a 2002, o Conselho Nacional de Educação - CNE elaborou pareceres, resoluções e orientações, com o objetivo de redimensionar os projetos dos cursos de formação de professores nas instituições formadoras, com base na instauração de diretrizes curriculares e linhas norteadoras para tais projetos. Desta maneira, é necessário conhecer os moldes das primeiras formações docentes que foram responsáveis por se pensar em novas diretrizes com o objetivo de formar professores capacitados para todos os níveis de educação.

Foi no início do século XX que surgiram as primeiras preocupações com relação às formações docentes para o ensino “secundário” (corresponde aos nossos atuais anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio), em cursos regulares e específicos, com o objetivo de substituir os professores autodidatas, ou seja, aqueles sem formação que ensinavam por insistência e esforços próprios.

No final da década de 1930, os cursos de formação docente, impulsionados pela formação de bacharéis nas poucas instituições formadoras da época começam a seguir o modelo conhecido como “3 + 1”, ou seja, três anos de conteúdo específico e apenas um ano de conteúdo didático pedagógico. Mas, com a criação de legislações e de documentos como os do CNE, por exemplo, houve muitas mudanças nas quais as instituições foram obrigadas a ter números mínimos de disciplinas pedagógicas e específicas compondo assim um currículo, o que influenciaria a formação docente.

De acordo com Silva (2013), os documentos que sustentam a nova legislação sobre a formação de professores reforçam a necessidade de basear em um novo paradigma que redefine e altera o processo formativo normatizado em legislações passadas. As mudanças enfrentadas refletem nas instituições de formação e principalmente nos cursos de licenciaturas. Silva (2013) coloca que:

Com a aprovação das Diretrizes Curriculares Nacionais, vive-se um momento de transição nos cursos de licenciatura. As instituições que os oferecem precisam adequar-se às normatizações vigentes desde outubro de 2005. Essas diretrizes se constituem numa proposta de formação que prevaleceu desde a criação dos cursos de licenciatura. (SILVA, 2013, p. 33).

As Diretrizes Curriculares Nacionais – DCN fixadas pelo CNE, citadas pela autora, são normas obrigatórias para a Educação Básica, servindo de orientação e planejamento curricular para as escolas e os sistemas de ensino. De fato, com essas diretrizes houve uma transição importante para os cursos de licenciaturas que visam promover a equidade de aprendizagem, garantindo que os conteúdos básicos sejam ensinados para todos os alunos, levando em consideração o contexto em que os mesmos estão inseridos.

Toda essa insistência e motivação em estabelecer uma política que privilegie a formação do professor através de programas e legislações vigentes, refletem o problema que ainda rodeia a formação desses profissionais: os problemas desde o século passado não cessaram, apenas ficaram adormecidos em alguns momentos, e hora ou outra tornam a aparecer e a interferir nos cursos de licenciatura.

Para a autora Silva (2013), muitas propostas têm por questões a modificação da racionalidade que envolve a identidade docente nos currículos de formação dos mesmos. Ela define e resume duas importantes racionalidades que prevalecem hoje nas propostas

educativas para a formação de professores que são: *a racionalidade técnico-instrumental e a racionalidade prático-reflexiva*.

A racionalidade técnico-instrumental enquadra-se na perspectiva da construção da identidade profissional e se constitui do somatório do domínio dos conteúdos específicos da especialidade juntamente com o preparo básico em metodologia e nas técnicas pedagógicas. Uma grande falha dessa perspectiva refere-se à ênfase que é dada na instrumentalização, inclusive dos alunos fazendo com que os mesmos não consigam reinventar conhecimentos que se apresentam fora do contexto estritamente definido pelo professor.

Com relação à racionalidade prático-reflexiva, a autora afirma que nesse tipo de racionalidade o trabalho docente é que ganha a maior importância, pois ele é visto como o domínio de um profissional independente crítico, reflexivo e que é capaz de tomar suas próprias decisões sobre suas ações pedagógicas. O profissional docente nesse tipo de racionalidade é aquele que compreende a ação pedagógica como instável, singular e complexa, sabendo que a mesma pode gerar muitos conflitos porque está inserida em ambientes de valores e muitas inseguranças, afirma a autora Silva (2013).

Essas duas racionalidades estão relacionadas com nosso problema de pesquisa. De fato, enquanto uma se preocupa com a construção do profissional docente, como cita Tardif (2002), ser essa construção indispensável para a formação de um bom profissional, a outra requer do docente criticidade e reflexão. O nosso problema de pesquisa busca investigar essa capacidade de um docente fazer uso de tecnologias em suas práticas de salas de aula, de maneira que o mesmo consiga refletir se estará de fato sendo consistente em suas aplicações.

As muitas pesquisas realizadas nacional e internacionalmente apontam para a discussão na formação de professores na perspectiva da racionalidade prático-reflexiva. Os conceitos de professor reflexivo e pesquisador, bem como os saberes docentes também são muito divulgados, incluindo muitas abordagens teóricas e metodológicas.

Autores citados por Silva (2013) como Pimenta (2002) e Santos (2005), ressaltam a necessidade de formar professores reflexivos, mas também relatam que há um risco, o risco desses professores desenvolverem uma visão reducionista do conceito de professor reflexivo. Silva (2013, p.41) afirma que “nessa direção, vale ressaltar, um dos desafios que acompanha a história da educação tem sido superar o uso da reflexão como prática exclusivamente individual e restrita à própria prática”.

Apesar de constantes estudos sobre a educação Matemática e pesquisas que estudam as teorias sobre o ensino-aprendizagem, percebemos uma grande distância dessas, com relação à

prática de sala de aula. “Nesse sentido a formação do professor vem passando por uma revisão em que se alargam os referenciais de análise sobre os processos formativos” (SILVA, 2013, p. 16).

Segundo Valente (2008), para o entendimento do profissional professor e para a compreensão do problema enfrentado na formação dos nossos atuais docentes, é necessário recorrer e analisar os contextos históricos. De fato, para Valente (2008)

Considerar o trabalho do professor de Matemática numa dimensão histórica permite uma compreensão diferente do sentido das ações realizadas nas salas de aula hoje. Ter ciência de contextos de outros tempos do ensino de Matemática possibilita o entendimento do que são novidades e continuidades, na tarefa cotidiana de ensinar Matemática a crianças, jovens e adultos. (VALENTE, 2008, p. 11).

De acordo com o que Valente (2008) expõe e considerando a árdua tarefa de formar professores capazes, críticos e atuantes, a Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SBEM elegeu como foco principal de suas ações a formação de professores de Matemática nos cursos de licenciatura, o que possibilitou nos últimos anos variadas discussões em eventos nacionais e regionais, como o Encontro Nacional de Educação Matemática - ENEM, promovido pela própria SBEM. Incluindo discussões em mesas redondas, sessão de comunicações científicas e relatos de experiências a fim de aprofundar os debates para melhorar essa formação.

Por exemplo, no último ENEM, realizado em 2016, o eixo temático "Formação de professores que ensinam Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio", tem o foco na importância dada para a preparação do professor desses níveis de ensino. Nesse eixo temático o objetivo foi discutir as diversas pesquisas e relatos de experiência sob o olhar da formação inicial de professores de Matemática da Educação Básica. Contemplando, desse modo, os cursos de licenciaturas em Matemática nas modalidades presencial e também a distância, mediada pela tecnologia. Esse eixo possibilita ricas discussões que permitem novas maneiras de agir perante a formação docente.

As temáticas abordadas nesse eixo fazem referência, dentre outros aspectos, ao currículo da licenciatura, práticas de ensino como componente curricular, formação específica e didático-pedagógica. Além disso, pertencem a esse eixo temático trabalhos com potenciais de criação de materiais didáticos para a formação de professores de Matemática, bem como as experiências de formação vinculadas a projetos de extensão.

Apesar dos debates a respeito da formação dos professores e das iniciativas citadas, percebemos que os professores que lecionam através de metodologias monótonas, terminam caindo em uma rotina de aulas desestimulantes, mecânicas e pouco motivadoras, fazendo com que muitos alunos acabem se entediando com a Matemática e desse modo perdendo o interesse pelo estudo.

A maneira de ensinar Matemática dos professores é, para Silva (2013), considerada retrógrada com a predominância da dicotomia entre teoria e prática. A autora coloca uma crítica a respeito do que vem sendo dito e a verdadeira realidade das salas de aulas.

Quando olhamos o que vem sendo dito e publicado e a realidade das salas de aulas, podemos inferir que a mudança percebida acontece no âmbito do discurso. Hoje quase todos falam do professor como profissional reflexivo, investigador de sua prática, produtor de saberes, elemento-chave das inovações curriculares na escola e principal responsável por seu desenvolvimento profissional, mas, ainda há pouca clareza e concordância sobre o significado desses termos. (SILVA,2013, p. 33).

Silva (2013) analisa a dimensão formativa dos cursos de Licenciatura em Matemática para tentar compreender como os sujeitos diretamente envolvidos nesse processo representam a sua formação. Notamos semelhança nos trabalhos de Ponte (2014), pois para um ensino de Matemática com qualidade é indispensável uma boa formação, bem como competências reconhecidas no campo didático. Além de qualidade humana e profissional, como exemplos, o bom convívio com os alunos e a capacidade de se sobressair de problemas corriqueiros.

Tudo isso depende, naturalmente, da capacidade do professor de se atualizar profissionalmente. Para que o professor possa ter todas estas características, é necessário dispor de uma formação adequada e, para isso, é requerido o concurso de diversas áreas do saber, desde a Matemática à Educação em geral, incluindo, naturalmente, a Didática da Matemática (PONTE, 2014, p. 344).

Caso contrário, o profissional docente pode gerar aprendizagens superficiais ou deficientes. Tardif (2002) afirma que para ser um professor ideal, o mesmo deve conhecer bem a matéria, a disciplina e o programa proposto por cada instituição, além disso, deve possuir certos conhecimentos relativos às ciências da educação e à pedagogia e desenvolver saberes práticos baseados em experiências cotidianas com os alunos. Ele explica que os saberes docentes não podem ser separados das dimensões do ensino, nem dos trabalhos

realizados cotidianamente, ou seja, o trabalho do docente em sala não se limita à sala, é uma construção com atores externos também.

[...] o saber não é uma coisa que flutua no espaço: o saber dos professores é o saber *de/les* e está relacionado com a pessoa e a identidade deles, com a sua experiência de vida e com a sua história profissional, com as suas relações com os alunos em sala de aula e com outros atores escolares na escola, etc. (TARDIF, 2002, p. 11).

Os saberes docentes em Tardif (2002) têm influenciado diversas pesquisas na área da formação do professor. O autor cita que a relação dos professores com os saberes não se limita à transmissão de conhecimentos constituídos. A prática dos professores integra diferentes saberes, com os quais eles mantêm diferentes relações.

Através de pesquisas realizadas com o intuito de conhecer o que pensam os professores sobre os seus saberes, Tardif destaca que o saber docente é um saber plural, “formado de diversos saberes provenientes das instituições de formação, da formação profissional, dos currículos e da prática cotidiana” (TARDIF, 2002, p. 54). Desse ponto de vista, existe uma ideia de pluralidade, onde o autor debate sobre a possibilidade de uma colocação coerente desses “saberes” que os docentes detêm, associados a diferentes fontes de aquisição.

O saber docente se compõe, na verdade, de vários saberes provenientes de diferentes fontes. Esses saberes são os saberes profissionais (incluindo os das ciências da educação e da pedagogia), disciplinares, curriculares e experienciais (TARDIF, 2002, p. 33).

O autor considera como saberes profissionais, aqueles que fazem parte do conjunto de saberes transmitidos pelas instituições formadoras. O professor, bem como o ensino, são objetos de saber para as ciências humanas e as ciências da educação, apesar de ser raro ver teóricos e pesquisadores das ciências da educação atuarem diretamente no meio escolar, em contato com os professores (TARDIF, 2002, p. 37). Mas, a prática docente não é apenas um objeto de saber das ciências da educação, é também uma atividade que envolve outros saberes, saberes esses que podem ser chamados de pedagógicos.

Os saberes pedagógicos apresentam-se como doutrinas ou concepções provenientes de reflexões sobre a prática educativa no sentido amplo do termo, reflexões racionais e normativas que conduzem a sistemas mais ou menos coerentes de representação e de orientação da atividade educativa. (TARDIF, 2002, p. 37).

Para Tardif (2002), os docentes precisam adquirir os saberes fundamentais à sua formação profissional, os saberes profissionais e pedagógicos. Além desses, é importante a aquisição daqueles saberes que integram a prática docente através de sua formação, seja ela inicial ou continuada, nas diferentes disciplinas oferecidas pelas universidades. Esses saberes podem ser classificados como disciplinares e curriculares. Estes possuem uma estreita relação, sendo que o último se apresenta em forma de programas (objetivos, conteúdos, métodos), tanto para a escola como para as universidades. Tardif (2002) esclarece:

Os saberes disciplinares são saberes que correspondem aos diversos campos do conhecimento, aos saberes de que dispõe a nossa sociedade, tais como se encontram hoje integrados nas universidades, sob a forma de disciplinas, no interior de faculdades e de cursos distintos. Já os saberes curriculares correspondem aos discursos, objetivos, conteúdos e métodos a partir dos quais a instituição escolar categoriza e apresenta os saberes sociais por ela definidos e selecionados como modelos da cultura erudita e de formação para a cultura erudita (TARDIF, 2002, p. 38).

Aos professores é indispensável capacidade de desenvolver saberes específicos, saberes esses adquiridos com o seu trabalho cotidiano e na convivência do seu meio, esses são os chamados de experienciais: “eles incorporam à experiência individual e coletiva sob a forma de *habitus* e habilidades, de saber-fazer e saber-ser” (TARDIF, 2002, p. 39).

Percebemos que o autor tem uma preocupação de estabelecer um significado para cada tipo de saber necessário ao docente e busca estabelecer relação entre os aspectos sociais e individuais dos saberes. Além disso, por mais que a existência dos saberes dependa ligeiramente dos professores, os mesmos não são os únicos atores promovedores de saberes. Tardif (2002) aborda também em seu texto, dois pontos importantes, o *mentalismo* e o *sociologismo*, onde são chamados por ele de perigos, perigos esses que Tardif (2002) tenta escapar no desenvolver do seu trabalho.

O mentalismo para Tardif consiste na redução do saber, de forma exclusiva ou principalmente a processos mentais, que são: crenças, imagens, representações, processos de informação, entre outros. O mentalismo causa um impacto principalmente nos saberes experienciais, pois esses saberes são os mais influenciáveis por fatores externos e ao mesmo tempo capazes de criar barreiras para o desenvolvimento da profissão docente.

O sociologismo visa à eliminação total das contribuições de atores na construção sólida dos saberes docentes, tratando a formação dos professores como uma produção social em si mesma, isto é, independente dos contextos de trabalhos dos professores.

Para Tardif (2002), o professor aprende a partir de sua prática. No mentalismo, o meio social é parte integrante da construção dos saberes docentes, enquanto no sociologismo o caminho é o inverso, pois ele elimina contribuições de atores para a construção concreta dos saberes docentes. Tardif (2002, p. 14) diz que no sociologismo há uma subordinação “antes de mais nada, a mecanismos sociais, a forças sociais quase sempre exteriores à escola, tais como as ideologias pedagógicas, as lutas profissionais, a imposição e a inculcação da cultura dominante, a reprodução da ordem simbólica, etc”.

O processo de constituição dos saberes profissionais e sua aquisição, de acordo com Tardif (2002) é algo que não se limita simplesmente ao presente, é um misto de passado, presente e futuro. O passado pode fornecer os conhecimentos que precisamos para atuar bem no presente como professores, e o futuro serve como meta para alcançarmos nossos objetivos educacionais. Esses conhecimentos são decisivos também para a nossa constituição de uma identidade profissional. Dessa maneira, o autor justifica que os saberes dos professores possuem uma característica temporal.

Outro ponto que percebemos em Tardif (2002, p. 15) é que o processo de construção dos saberes dos professores não é uma construção individual, ou seja, por mais que consideremos o agir individual do mesmo, as relações estabelecidas ao longo da sua vida, na família e, na escola, com os alunos e colegas de profissão, interferem nas decisões a respeito de suas ações. Desse ponto de vista devemos ponderar que os saberes têm origens diversas e que devemos considerá-los em todos os seus aspectos.

2.2 A Geometria Escolar

Não sabemos ao certo quando e onde houve a primeira aplicação da Geometria, mas é possível que sua utilização tenha começado na era pré-histórica. De fato, algumas pesquisas de historiadores revelam áreas de cultivo bem divididas, outros citam que apenas formas rudimentares de aplicação da mesma só vieram acontecer por volta de 3.000 a.C na China. No entanto, o que se sabe é que foram com as grandes civilizações, com os egípcios e suas famosas pirâmides que houve aplicação de conhecimentos rigorosos e aprimorados da Geometria (BALDISSERA, 2013).

Nesse período o conhecimento geométrico era somente intuitivo e não havia necessidade de estudos aprofundados. Atualmente, o conhecimento intuitivo não é o bastante para a formação do indivíduo. Há uma necessidade de institucionalização do saber e conseqüentemente, sua difusão através do ensino na escola. No século XVIII existiam dois

tipos de ensino geométrico no Brasil: o clássico-literário ensinado nas escolas religiosas e o ensino nas escolas militares onde o conhecimento era específico e as aulas que estruturavam os cursos tinham um único propósito, o de formar mão de obra qualificada e especializada (LORENZATO, 1995).

De qualquer forma, o conhecimento geométrico possibilita a compreensão das formas, o desenvolvimento do raciocínio lógico e a compreensão do mundo em que vivemos, serve também de instrumento para outras áreas de conhecimento como, por exemplo, nas Engenharias, no Desenho e na Arquitetura, além de outras, sendo necessária pela sua imensa utilidade em muitas das atividades que realizamos cotidianamente. É comum nos depararmos com formas geométricas e conceito de medida em situações diversas, como por exemplo, nas obras de arte, nas paisagens, nos objetos e suas formas ao nosso redor ou simplesmente ao nos deslocarmos de um lugar para outro usamos Geometria seja direta ou indiretamente.

Na escola, a Geometria é sem dúvida um campo da Matemática importante na formação do aluno. Os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1998) destacam os conceitos geométricos por constituírem uma parte importante do currículo de Matemática e pela sua imensa influência na vida do estudante. Segundo os PCN, é através desse conhecimento que os alunos desenvolvem um pensamento que lhes permitem compreender o mundo ao seu redor, bem como descrever e representá-lo de forma organizada.

No entanto, durante muito tempo o ensino de Geometria tem se concentrado na transmissão de noções de ponto, reta e plano, para em seguida inserir novos conceitos oriundos dessas noções ditas “básicas”. Todavia, surgem questionamentos quanto ao aprendizado, tomando como referência o aluno com suas capacidades cognitivas durante cada uma das etapas da vida escolar.

Desse modo, há algum tempo, o ensino de Geometria nas escolas vem recebendo críticas severas sob diversos aspectos. Por exemplo, Pavanello (1993) e Lorenzato (1995) que discutem o tema há pelo menos 20 anos, destacaram, à época, um gradual abandono do ensino da Geometria no Brasil. Tal fato preocupou os educadores matemáticos brasileiros e, embora refletisse uma tendência geral, era mais evidente nas escolas da rede pública do que nas escolas particulares. Segundo Pavanello (1993), o abandono da Geometria ocorreu principalmente após a implantação de leis e decretos, como é o exemplo na década de 1970, da Lei nº 5692/71, que permitia as escolas decidirem sobre o programa de conteúdos nas diferentes disciplinas.

Lorenzato (1995), em seu trabalho “Por que não ensinar Geometria? ”, coloca que o Movimento da Matemática Moderna - MMM que surgiu no final da década de 1950, também tem uma parcela de contribuição no atual caos do ensino da Geometria. Para o autor esse movimento influenciou o ensino no Brasil e em outros países e o modo que se ensinava Geometria Euclidiana foi modificado e a Matemática passou a favorecer a Teoria dos Conjuntos e a Álgebra Vetorial.

Antes do MMM no Brasil, o ensino da Geometria era marcadamente logico-dedutivo, com demonstrações. Este movimento veio com a proposta de algebrizar a Geometria, que não deu certo, mas como consequência eliminou o método anterior, criando assim uma lacuna nas práticas pedagógicas o que comprometeu gerações de professores.

Assim, a Geometria não fazia mais parte do currículo da Matemática nas escolas e universidades. Tentando modificar o caos já presente, surgiram matérias como Desenho Geométrico fazendo assim uma distinção da Matemática e da Geometria, como se ambas não fizessem parte de um mesmo grupo, como se fossem duas coisas totalmente diferentes. (LORENZATO, 1995).

Alguns dos problemas com o ensino de Geometria nas escolas estão relacionados com a formação de professores, suas metodologias de ensino e seus recursos. Manrique, Silva e Almouloud (2002) mostram alguns fatores que podem ser considerados como a origem das dificuldades que os professores encontram para o ensino de conteúdos geométricos tais quais: formação precária em Geometria; não integração nos cursos iniciais de reflexões profundas a respeito do ensino de Geometria e algumas modalidades de formação contínuas que não estão ainda atendendo os objetivos em relação a conceitos geométricos.

Pavanello (2001), afirma que algumas limitações dos professores de matemática relativas a um determinado conhecimento, no caso, a Geometria, podem interferir na aprendizagem dos alunos sobre o mesmo assunto. A autora cita que:

[...] muitas das dificuldades das crianças em relação ao tema estudado podem estar relacionadas à atuação didática do professor, que se limita a “cobrar” dos alunos somente o nome das figuras, sem se preocupar com o reconhecimento de propriedades e componentes das figuras, importante do ponto de vista da matemática (PAVANELLO, 2001, p. 183).

As metodologias adotadas por muitos docentes, quando empregadas, também parece ser um problema para o ensino de conceitos de Geometria. É comum aos professores ensinar tais conceitos através de repetição e memorização desnecessárias.

Sobre a formação dos professores, os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN, (BRASIL, 1998) deixam claro que há uma necessidade de revisão nos modelos de formação de professores para que desse modo seja possível programar alternativas capazes de diagnosticar dificuldades de ensino, visando discussões a respeito de como e quando ensinar um determinado conteúdo.

Sabemos que a Geometria exige dos docentes e dos alunos atenção, requerendo, naturalmente, além do entendimento, a capacidade de visualização e construção do raciocínio. Assim, alguns professores apontam dificuldades no ensino de Geometria relacionando com a sua formação e, como a mesma se encontra nos livros didáticos (RESENDE; MESQUITA, 2013, p. 216).

Entre as orientações para o trabalho do professor, os PCN indicam que o mesmo deve ensinar a Geometria explorando o conhecimento que o aluno possui, ou seja, aqueles conhecimentos prévios que servirão de base para o aprendizado e manutenção de outros novos conhecimentos, de modo que seja possível relacioná-los com o cotidiano desses estudantes. De fato, cada ser humano possui implícita ou explicitamente noções geométricas, cabendo ao professor investigar o nível de conhecimento e buscar aprimorar os mesmos, assim o papel do professor para o ensino de Geometria não é considerado fácil.

Os alunos devem conhecer, explorar e conquistar o espaço em que vive. De acordo com os PCN (BRASIL, 1998) a construção geométrica em sala de aula é indispensável para a visualização de conceitos e propriedades:

O trabalho com espaço e forma pressupõe que o professor de Matemática explore situações em que sejam necessárias algumas construções geométricas com régua e compasso, como visualização e aplicação de propriedades das figuras, além da construção de outras relações (BRASIL, 1998, p. 51).

Neste sentido, os PCN também consideram os instrumentos de desenho e de construção de figuras geométricas, além das ferramentas de cálculo, presentes nos programas educacionais. No entanto, mais do que isso, afirmam também que a tecnologia pode ser um agente transformador da sala de aula, devido à grande influência que causa na aprendizagem dos alunos e na forma de ensinar do professor:

A utilização desses recursos traz significativas contribuições para se repensar sobre o processo de ensino e aprendizagem de Matemática à medida que evidencia para os alunos a importância do papel da linguagem gráfica e de

novas formas de representação, permitindo novas estratégias de abordagem de variados problemas; - possibilita o desenvolvimento, nos alunos, de um crescente interesse pela realização de projetos e atividades de investigação e exploração como parte fundamental de sua aprendizagem; - permite que os alunos construam uma visão mais completa da verdadeira natureza da atividade Matemática e desenvolvam atitudes positivas diante de seu estudo. (BRASIL, 1998, p. 43-44).

Os PCN destacam que os computadores e seus programas como planilhas eletrônicas, processadores de texto, banco de dados, entre outros, servem a Matemática por desempenharem várias finalidades como: fonte de informação e recurso para alimentar o processo de ensino e aprendizagem; como recurso auxiliar no processo de construção de conhecimento; como meio para desenvolver autonomia pelo uso de *software* que possibilite pensar, refletir e criar soluções e como ferramenta para realizar determinadas atividades (BRASIL, 1998, p. 44).

Nos últimos anos o uso das tecnologias em sala de aula tem sido bastante discutido pelos educadores matemáticos. Eles buscam uma melhor integração desses recursos ao processo de ensino e da aprendizagem da Matemática, entre os quais os *softwares* se destacam pelo fato de serem fáceis de utilizar, em grande parte são gratuitos, e com isso a sua popularização acontece mais facilmente.

Para Bolgheroni e Silveira (2008), ensinar Geometria usando *software* s geométricos possibilita o desenvolvimento de habilidades como a visualização, pois o uso dessas ferramentas ajuda na representação do objeto geométrico em estudo e o entendimento sobre o conteúdo se torna mais dinâmico, pois o aluno é ativo no processo de ensino-aprendizagem.

Entre os *softwares*, os de Geometria Dinâmica têm a particularidade de permitir que o aluno veja e manipule figuras, arrastando-as, soltando-as e “observando” seus comportamentos à medida que cada variação seja executada. A aplicação e uso do computador são indicados nos PCN (BRASIL, 1998), porém é destacada também a importância de se escolher um *software* adequado com o objetivo que se deseja alcançar,

[...] o bom uso que se possa fazer do computador na sala de aula também depende da escolha de *software* s, em função dos objetivos que se pretende atingir e da concepção de conhecimento e de aprendizagem que orienta o processo (BRASIL, 1998, p. 44).

Quando criamos figuras geométricas com os alunos em um *software* é possível realizar simulações de diversos materiais concretos, pois os mesmos possuem uma grande

proximidade da realidade. Assim, o aluno desperta para novas formas de exploração que permite ao aluno exercitar sua autonomia. Essas diversas possibilidades de construções com *software* s possibilitam a exploração de conhecimentos geométricos de forma não estática, diferenciando das abordagens que geralmente ocorrem em sala de aula, temos assim um ganho significativo, pelo simples fato do aluno não mais ser um mero espectador.

2.3 As Tecnologias e a Formação de professores

No ensino de Matemática, mesmo com o advento das Tecnologias da Informação e Comunicação – TIC, ainda é comum usar como instrumentos para a elaboração e execução de uma aula o quadro, o lápis para quadro e o livro didático. Embora existam recursos tecnológicos cada vez mais específicos para apoiar os processos de ensino e aprendizagem em Matemática, ainda há muitas discussões a respeito de quando e como inseri-los na aula.

Tornar as salas de aula mais modernas não é sinônimo de modernizar o ensino. Uma metodologia não muda simplesmente por causa da inserção da tecnologia, até por que a tecnologia sozinha não muda nada, ela é uma ferramenta e, por sua vez, deve ser vista como tal. O professor e aluno sim, eles podem fazer a diferença.

Para preparar os professores sobre como usar determinados equipamentos tecnológicos, é preciso romper barreiras. Os professores foram criados e formados em épocas em que as tecnologias eram outras bem diferentes, sem uso das tecnologias digitais em suas formações. Porém, os alunos da atualidade, eles sim sofrem uma enorme influência dessas tecnologias, cabendo ao professor buscar meios de se especializar para suprir as carências desses alunos.

Não restam dúvidas sobre a intensa presença da tecnologia na vida dos jovens – uma geração que já nasceu conectada com o mundo virtual – esses jovens causam um enorme impacto no ambiente escolar. Dessa maneira, esse contexto lança o desafio para professores e escola sobre como usar recursos tecnológicos a favor do ensino desses alunos. Lutar a favor da presença desses novos recursos não é mais uma questão de opção, estamos no século XXI, não há mais a possibilidade de lecionar conteúdos, principalmente matemáticos, como há 20 anos. A escola que ignora a presença tecnológica em seu meio está de fato se atrasando, pois, a presença das tecnologias nos ambientes educativos pode ser proveitosa no estudo interativo de conteúdos, tornando o aluno mais participativo.

As TIC, segundo Ponte (2000), trazem desafios ainda maiores para a formação de professores, pois, por um lado, precisa ter a incorporação das mesmas, no entanto, alguns a

olham com desconfiança, procurando evitar ao máximo a sua utilização em ambientes educacionais. Outros a usam em suas vidas diárias, porém, sem saber como integrar em suas vidas profissionais e, ainda, tem aqueles que tentam fazer uso em suas aulas sem, contudo, alterar as suas práticas (PONTE, 2000, p. 64).

Quando falamos de formação de professores e uso de tecnologias, partimos da premissa de que uma interfere no desenvolvimento da outra e, que o uso das TIC é um campo de investigação crescente, implicado diretamente na formação docente e, portanto, na composição dos saberes docentes.

A Educação Matemática, consciente dessa realidade, destaca que não devemos estar ou ficar alheios ao desenvolvimento e ao avanço tecnológico que perpassa nosso país. Porém, a introdução das TIC no sistema educacional ainda deve ser tratada com muita cautela. O uso de TIC na Educação Básica está intensamente inserido no discurso educacional oficial, e já deve estar inserido no discurso de muitos professores (FROTA; BORGES, 2004).

As TIC para a educação básica estão relacionadas à aprendizagem significativa, ou seja, espera-se que os recursos tecnológicos auxiliem as práticas docentes em sala de aula. Lorenzato em 1976 em sua tese, já falava sobre a aprendizagem significativa, para ele o que se deve é “evitar a memorização, o verbalismo e a aprendizagem mecânica que já foram criticados anteriormente” (LORENZATO, 1976).

Percebemos que essas inquietações com relação, principalmente a Matemática, são bastante antigas e norteiam muitas pesquisas em educação.

Na formação inicial é comum disciplinas e professores formadores falando da importância dessas ferramentas para o ensino, no entanto, o que poucos veem é uma maneira de se utilizar tais ferramentas na Educação Básica. Ponte (2000) fala do desafio imposto pelas TIC para a formação do professor, se acredita demais de onde tem pouco retorno, segundo esse autor.

As TIC desenvolvem o papel de ferramenta auxiliadora, dessa maneira deve ser usada de modo que seja capaz de propiciar liberdade e criatividade para alunos e professores, e não simplesmente manter aquela visão, comum a muitos docentes, de que o simples uso dessas ferramentas em sala de aula já é suficiente para resolver todos os problemas presentes no processo de ensino-aprendizagem.

Entre as tecnologias com suporte nos programas computacionais atuais que tem desempenhado um papel importante nos processos de ensino e aprendizagem, têm-se os *softwares* educacionais. De fato, os *softwares* trouxeram a possibilidade de modificar a

relação, por exemplo, com os objetos geométricos e de conceitos desse ramo da Matemática ao permitir a movimentação das figuras de maneira interativa.

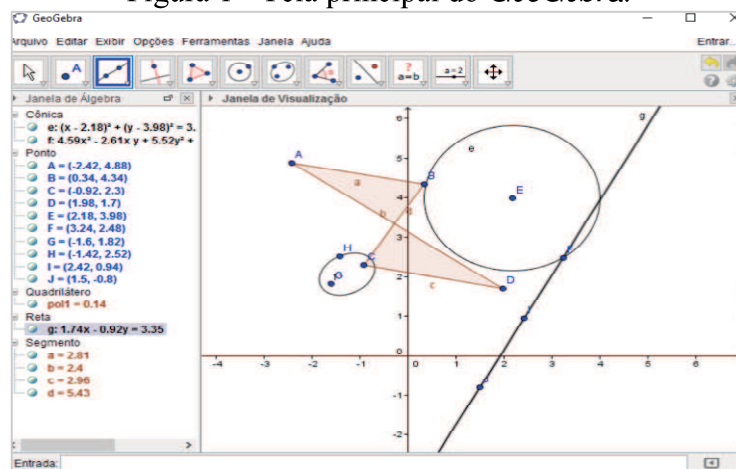
Entre os *softwares* educacionais disponíveis atualmente, escolhemos para o suporte desta pesquisa o *GeoGebra*. Candido (2013), ao escrever sobre o mesmo em seu trabalho, apresenta inúmeras possibilidades de como se fazer uma boa utilização e cita que pode ser utilizado em diversos níveis de ensino, desde o Fundamental até o Ensino Superior.

O *GeoGebra* é um *Software* de matemática dinâmica que junta Geometria, álgebra e cálculo. Foi desenvolvido para aprender e ensinar matemática nas escolas. Markus Hohenwarter, professor de Matemática Austríaco, criou o *GeoGebra* como parte de sua Dissertação de Mestrado em Educação Matemática e Ciência da Computação, na Universidade de Salzburgo na Áustria. Continuou o Desenvolvimento do *Software* durante o seu Doutorado em Educação Matemática (CANDIDO, 2013, p. 16).

Com o *GeoGebra* é possível trabalhar tanto com a Geometria Euclidiana Plana como é o caso do cálculo de áreas de figuras poligonais e irregulares, como a Geometria Espacial. Como o nosso objetivo de pesquisa é dar ênfase as peculiaridades do ensino de cálculo de áreas de figuras poligonais e irregulares planas, utilizaremos apenas a interface e os recursos de duas dimensões do *GeoGebra*.

O *GeoGebra* é gratuito e permite uma exploração simples. Permite trabalhar a Geometria, o Cálculo e Álgebra. Este *software* permite construções bem precisas que podem ser modificadas e animadas e ainda é possível a exploração das figuras geométricas de diferentes vistas. A figura a seguir ilustra a tela principal no *GeoGebra* com alguns objetos geométricos.

Figura 1 - Tela principal do *GeoGebra*.



Fonte: Autor (2017)

Mostramos com essas imagens algumas das possibilidades de construção nesse *software*, onde as mesmas podem ser animadas e suas propriedades observadas de diferentes vistas. Na imagem, no lado esquerdo vemos a “Janela de Álgebra” que nos mostra algebricamente tudo que aparece na “Janela de Visualização” além de podermos inserir no espaço “Entrada” algumas fórmulas para facilitar a apresentação.

Ainda, Miskulin e Silva (2010) afirmam que muitos *softwares* foram criados com o intuito de reforçar a destreza computacional. Para as autoras, no nosso país é utilizado entre outros recursos, a instrução programada ou instrução assistida por computadores, na qual a relação do estudante como um certo conhecimento se processa de maneira passiva, controlada, sem a interação aluno-objeto do conhecimento. A citação a seguir de Miskulin e Silva (2010) reforça esse ponto de vista:

Sabemos que em muitas escolas, brasileiras e em nível internacional, *software* s cada vez mais sofisticados são utilizados como meros recursos didáticos, sem uma postura teórico-filosófica que lhes dê a consistência teórica-metodológica. Sendo assim, tais programas não atuam efetivamente no processo de ensino-aprendizagem dos conceitos matemáticos, pois não existe envolvimento, ou mesmo interação, por parte dos alunos, ou seja, nesse contexto somente prevalece o aspecto “utilização” do artefato (MISKULIN e SILVA,2010, p. 110).

A partir da citação acima percebemos um reflexo da carência da formação docente para utilizar as tecnologias, não basta ter a tecnologia ao nosso alcance, devemos saber utilizá-la eficientemente. As TIC proporcionam uma nova linguagem e, como consequência, novas formas de pensar, portanto, as abordagens sobre o modo como refletirmos sobre essas formas de pensar precisa atualizar-se por parte dos educadores. Devemos pensar, em como será dada a formação de professores para o século XXI e, no nosso caso, a formação de professores de Matemática, principalmente os alunos de licenciaturas, ou seja, os futuros professores. Acreditamos que é nesse estágio onde a interferência positiva possui maiores chances de serem admitidas.

A utilização das TIC possui uma relação próxima com os saberes docentes, pelo motivo de estarem ligados ao cotidiano, principalmente com relação aos experienciais, como cita Tardif (2002). O uso da tecnologia pode facilitar esses tipos de saberes, proporcionando um melhor desenvolvimento dos mesmos. Assim como os saberes que os docentes já detêm podem ser melhorados e aprofundados ao se utilizar ferramentas tecnológicas.

Para os alunos, ao inserirmos a tecnologia, principalmente *softwares* geométricos em sala de aula, espera-se promover uma aproximação com o objeto matemático do estudo de modo que seja possível suprir deficiências encontradas em sala de aula ao passo que supere a limitação da exposição de conteúdos e de desenhos geométricos feitos no quadro.

Os *softwares* geométricos permitem que os alunos criem suas próprias construções geométricas, saiam da passividade e se mostrem ativos no desenvolvimento de conhecimentos, potencializando suas aprendizagens. E mais, os recursos computacionais possibilitam uma interação entre os alunos, porque os mesmos permitem realizações de trabalhos em grupos, possibilitando a discussão das dificuldades, fazendo com que o conhecimento seja consolidado de forma dinâmica, e atrativa (BRAZÃO, 2015, p. 116).

3 Apresentando a Engenharia Didática e suas fases

3.1 A Engenharia Didática e a formação de um professor reflexivo

Assim como a ideia de professor reflexivo faz uma relação entre teoria e prática, a Engenharia Didática também aproxima a pesquisa e a prática educativa. Segundo Carneiro (2005), a Engenharia Didática possui relação direta com a valorização do saber prático/teórico do professor, onde o mesmo possui a consciência de que esse saber não é o bastante e que deve ir ao encontro, de forma racional, da realização didática na sala de aula como prática de investigação.

A Engenharia Didática - ED surgiu a partir de estudos sobre a Didática da Matemática no início dos anos de 1980 na França e compara o trabalho do docente com o do engenheiro: este ao realizar seu trabalho faz uso de conhecimentos científicos que domina, entretanto é obrigado a trabalhar com outros externos à ciência, para que possa contornar dificuldades inerentes do campo de atuação (ALMOULOU; COUTINHO, 2008).

A Engenharia Didática está relacionada com certa “ideologia da inovação” presente no domínio educativo, criando caminhos para a experiência em sala de aula de forma bastante peculiar. É conceituada por Artigue como *metodologia de pesquisa*, caracterizando-se por esquemas experimentais que se baseiam em realizações didáticas na sala da aula. Por meio da Engenharia Didática podemos pensar em concepções, realizações, observações e análises de sessões de ensino-aprendizado voltado para o desenvolvimento de um dado conhecimento matemático. A Engenharia Didática é também considerada como uma *pesquisa experimental*, visto que se espera com a mesma uma validação e diante de uma análise preliminar são feitas comparações com uma análise posterior para dar sentido à pesquisa (CARNEIRO, 2005).

Segundo Artigue (1996, *apud* BRUM, 2014, p. 2), “a Engenharia Didática é um processo empírico que objetiva conhecer, realizar, observar e analisar as situações didáticas. A Engenharia Didática não se reduz apenas a uma boa maneira ou um modelo de ensinar um determinado conceito ou ideia científica. É preciso uma metodologia de investigação científica que procure extrair relação entre pesquisa e ação sobre o sistema baseado em conhecimentos didáticos preestabelecidos. Desse modo, a Engenharia Didática enquanto metodologia de pesquisa é caracterizada como produto didático, onde envolve plano de ensino, criação de materiais didáticos e esquemas experimentais baseados em situações didáticas em sala de aula.

Desse modo, compreendemos a mesma como um referencial para desenvolvermos produtos úteis para o ensino, gerados com a união de conhecimentos práticos e teóricos. Nessa direção, a Engenharia Didática pode ser vista como metodologia qualitativa de pesquisa na área de Matemática, sendo relativamente útil na elaboração de situações de ensino-aprendizagem significativas. Esse tipo de pesquisa se diferencia daquelas que são transversais a conteúdos, mesmo que o objeto de ensino seja matemático, um saber ou um saber-fazer. Esta metodologia pode relacionar algumas questões como a pesquisa e o sistema de ensino, bem como nos ajudam na consideração da escolha do lugar propício para sua realização, pois esse trabalho dar-se-á pelas suas fases.

Um importante elemento que fica caracterizado nesta metodologia é a necessidade de o professor fazer ele mesmo uma revisão bibliográfica com relação ao objeto matemático ou a busca das suas origens. Esse aspecto permite ao professor um aprimoramento de sua relação com o saber em jogo e possibilita um incremento crítico que pode fomentar e fundamentar o trabalho na sala de aula.

A Engenharia Didática como metodologia de ensino também permite ao professor fazer uma reflexão sobre a sua prática de sala de aula. O docente ao fazer essa reflexão pode repensar seu agir para criar aulas interessantes, dinâmicas e muito mais atraentes, tanto para ele quanto para seus alunos. De acordo com Tardif (2002, p. 108), essa reflexão pode permitir que o docente se sinta mais seguro em suas aulas, tenha um maior controle emocional, para lidar com os alunos e colegas, enfim, é possível que o mesmo seja capaz de contornar os problemas advindos da profissão.

Alguns autores utilizam o termo *professor reflexivo* para designar uma característica particular desse profissional, é o caso de Miranda (2006), que diz: “professor reflexivo é aquele que reconstrói reflexivamente seus saberes e sua prática” (MIRANDA, 2006, p. 132).

Silva (2013) tem uma visão crítica do professor como um ser reflexivo, ela afirma que há equívocos e contradições nessa definição, visto que, o termo “professor reflexivo” vem perdendo seu sentido, pois o mesmo foi apropriado por formações baseadas na racionalidade técnica, porém, esse termo surgiu justamente contra isso, ou seja, há uma inversão de sentido, segundo a autora.

A autora cita outros autores para defender a ideia de que há a possibilidade de superar essa visão que ela chama de reducionista a respeito do professor reflexivo e, defende que as críticas e reflexões individuais e principalmente coletivas vão além da sala de aula e da escola, isso evidencia um caráter político da atividade do professor.

Considerando o que dizem Darsie e Carvalho (1996, p. 91),

A formação de professor deve passar pela reflexão sobre o seu saber, assim como, diante da nova aprendizagem, refletir sobre essa e sua utilização. Teorias, práticas e experiências escolares passadas deverão ser contempladas como objeto de estudo e de reflexão, pois elas são indissociáveis e a mudança de uma delas implica o repensar e o mudar de outra (DARSIE e CARVALHO, 1996, p. 91).

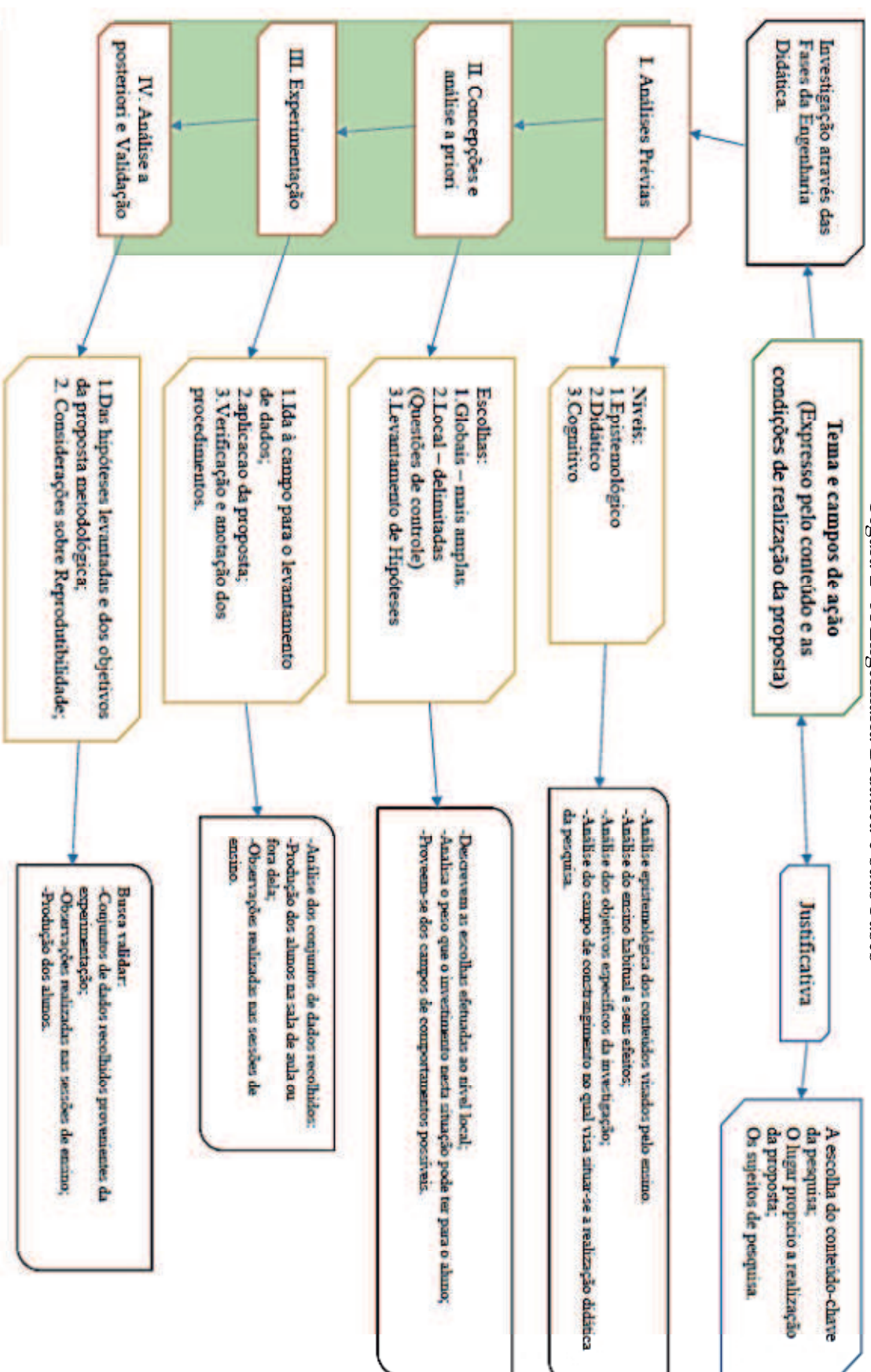
Percebemos que desde a sua formação inicial, para um professor ser reflexivo é necessário dele uma análise constante de como está ocorrendo a sua produção de saber que será de grande valia em um futuro próximo na sua carreira profissional. Teorias, práticas e as experiências acadêmicas na formação devem ser contempladas como objetos de estudos e também de reflexão.

3.2 As diferentes fases da Engenharia Didática

A Engenharia Didática conforme propõe Artigue é composta por quatro fases: (1^a) *Análises preliminares*; (2^a) *Concepção e análise a priori*; (3^a) *Experimentação* e (4^a) *Análise a posteriori e Validação*. Veremos a seguir com mais detalhes cada uma dessas fases e para uma melhor compreensão de seus objetivos e da relação entre elas, elaboramos um mapa (Figura 2) adaptado do artigo de Carneiro (2005).

Este mapa tem como objetivo permitir o entendimento geral de cada uma das quatro fases da Engenharia Didática, bem como de apresentar o roteiro para a execução desta pesquisa.

Figura 2 - A Engenharia Didática e suas Fases



Adaptado de Carneiro (2005)

Fonte:

3.2.1 Primeira fase: As análises prévias

A fase inicial é aquela em que são realizadas algumas análises preliminares. Essa fase objetiva conhecer o funcionamento do ensino habitual de certo conteúdo para propor uma intervenção que modifique para melhor a sala de aula usual (CARNEIRO, 2005, p. 89). Esta análise é feita com o objetivo de esclarecer os efeitos do *ensino tradicional*² e esclarecer também as concepções dos estudantes e as dificuldades e obstáculos que afetam as concepções.

Artigue (1996, *apud* CARNEIRO 2005) sugere que essa análise inclua a distinção de três dimensões definidas como: 1) dimensão epistemológica, 2) dimensão didática e 3) dimensão cognitiva.

A dimensão epistemológica diz respeito às características do saber em questão, desde seu aspecto histórico até sua abordagem atual. Relaciona os saberes inerentes aquele conteúdo considerando sua natureza mutável e suas diferentes conotações. A dimensão didática relaciona-se ao modo como determinado conceito deverá ser transmitido. Essa dimensão está associada às características do funcionamento do sistema de ensino. Já a dimensão cognitiva, está associada às características do público ao qual está dirigido o ensino, características como comportamento dos alunos em sala, a sua situação social, convivência em grupos, enfim, as características que devem ser consideradas quando falamos do processo de ensino-aprendizagem.

O professor/pesquisador é responsável, ao se trabalhar com essa fase da Engenharia Didática, por fazer uma revisão da literatura envolvendo as condições presentes em muitos níveis da produção didática, bem como no ambiente onde acontece a pesquisa. De acordo com Chevallard (2009b, *apud* ALMOULOU; SILVA, 2012, p. 23), essa revisão permite identificar duas orientações, por um lado, uma orientação de investigação em didática, por outro, uma orientação de desenvolvimento, que parece estranho a princípio para a tradição em didática da matemática, no entanto tem se mostrado eficiente. É responsável também por detectar os obstáculos encontrados no contexto do ensino. Para Almouloud e Coutinho (2008) a metodologia da Engenharia Didática compreende as seguintes vertentes:

²É a abordagem de ensino predominante no país e por isso mesmo a mais conhecida dos pais. Nas escolas tradicionais, o foco está no professor, que detém conhecimentos e repassa ao aluno. O estudante tem metas a cumprir dentro de determinados prazos, que são verificadas por meio de avaliações periódicas. **Fonte:** disponível em: <<http://www.capesesp.com.br/conheca-os-metodos-de-ensino-das-escolas>>. Acesso em: 07 de nov. 2016.

Epistemológica dos conteúdos visados pelo ensino; do ensino usual e seus efeitos; das concepções dos alunos, das dificuldades e dos obstáculos que marcam sua evolução; das condições e fatores de que depende a construção didática efetiva; a consideração dos objetivos específicos da pesquisa; o estudo da transposição didática do saber considerando o sistema educativo no qual insere-se o trabalho (ALMOULOU; COUTINHO, 2008. p. 66).

Essa fase não é simplesmente usada e esquecida ao longo da pesquisa, ela pode e deve ser retomada sempre que apareça uma necessidade emergente. Os autores Almouloud e Coutinho (2008) explicam que o termo “preliminar” ou “prévia” são relativos pois se referem a um primeiro nível de organização. Na realidade o que se espera é que seja feita o uso dessa fase paralelamente com as demais. Essas análises preliminares devem propiciar ao pesquisador identificar muitas didáticas potenciais que serão objeto de estudo nas fases posteriores a essa, segundo a Engenharia Didática.

A fase das Análises Prévias marca uma evolução do conteúdo a ser estudado, de acordo com Artigue (1996, *apud* BRUM, 2014, p. 3). Portanto, nesta etapa, realiza-se uma revisão literária envolvendo as condições e contextos presentes nos vários níveis de produção didática e no ambiente onde ocorrerá a pesquisa, assim como uma análise geral quanto aos aspectos histórico-epistemológicos dos assuntos do ensino a serem trabalhados e dos efeitos por eles provocados, da concepção, das dificuldades e obstáculos encontrados pelos alunos dentro deste contexto de ensino (BRUM, 2014, p. 3).

3.2.2 Segunda fase: Concepção e Análise *a priori*

A segunda fase presente nesta metodologia é a Concepções e Análise *a priori*, ou seja, antes da experimentação. Tanto a fase das Análises Prévias quanto essa fase funcionam como mecanismos de orientação para o desenvolvimento da terceira fase desta metodologia, isto é, a fase da experimentação.

Essas duas fases antecedem a experimentação considerando as variáveis que podem ou não interferir e/ou influir na aplicação da mesma. Na verdade, objetiva determinar as escolhas quanto às variáveis em sala, permite controlar os alunos de forma comportamental e explicar os sentidos desse comportamento. Almouloud e Coutinho (2008) afirmam que dessa maneira ao fazer uma análise *a priori* devemos:

Descrever as escolhas das variáveis locais e as características da situação didática desenvolvida; analisar a importância dessa situação para o aluno e,

em particular, em função das possibilidades de ações e escolhas para construção de estratégias, tomadas de decisões, controle e validação que o aluno terá. As ações do aluno são vistas no funcionamento quase isolado do professor, que, sendo o mediador no processo, organiza a situação de aprendizagem de forma a tornar o aluno responsável por sua aprendizagem; prever comportamentos possíveis e tenta mostrar como a análise feita permite controlar seu sentido, assegurando que os comportamentos esperados, se e quando eles intervêm, resultam do desenvolvimento do conhecimento visado pela aprendizagem. (ALMOULOU; COUTINHO, 2008. p. 67).

A citação anterior reforça a ideia de que o aluno deve agir e ser capaz de desenvolver seu conhecimento. O professor é nesse caso o agente mediador que tem um importante papel, o de motivar e auxiliar seu aluno nos seus processos de desenvolvimento e aprendizagem.

Segundo Artigue (1996, *apud* CARNEIRO, 2005, p. 96), essa segunda fase envolve a definição das variáveis que estarão sob controle, comportando uma parte descritiva, e outra preditiva, ou seja, podem-se fazer afirmações com antecedência sobre as variáveis assumidas, escolhas pertinentes do sistema sobre o qual o ensino pode atuar. O conceito de variável didática foi proposto por Guy Brousseau em sua teoria das Situações Didáticas (TEIXEIRA; PASSOS, 2013).

Para o desenvolvimento de uma sequência de Engenharia Didática é necessário que utilizemos as variáveis locais e/ou globais pertinentes ao sistema didático, ou seja, as variantes gerais, mais amplas, relacionadas com a organização, a exposição e aplicação do processo de ensino, que pode ser relativa ou não a um determinado conteúdo matemático.

Essas variantes globais são muito úteis nessa fase de construção e de análise *a priori*, responsáveis por um delineamento que permite escolher variáveis locais, dentre as gerais, isto é, mais restritas, que podem ser a organização de uma sessão ou de uma fase de ensino. Percebemos que tanto as variáveis globais quanto as locais devem ser consideradas pelo professor ou pesquisador a fim de progredir nas fases dessa metodologia.

As escolhas das variáveis nessa fase da Engenharia Didática permitem percepções de características que ajudam a desenvolver o aprendizado de certo conhecimento matemático de forma mais coerente e eficaz, pelo fato de entendermos as limitações e as dificuldades, principalmente a de gerenciar tais conhecimentos.

Santos (2005) em seu trabalho apresenta reflexões sobre a utilização de algumas variáveis didáticas na resolução de problemas, onde esses envolviam os conceitos relacionados a área do paralelogramo. Uma das variáveis destacada na pesquisa foi a *posição relativa dos lados do paralelogramo*, ou seja, um dos lados na posição horizontal, vertical ou

ambos nas posições oblíquas. Vemos na citação a seguir que as variáveis a destacar e as dificuldades dos alunos estão intimamente relacionadas. Vejamos.

A identificação de variável didática é fortemente imbricada com o estudo das dificuldades que os alunos encontram na resolução dos problemas e das respostas corretas ou erradas que fornecem. Da mesma forma, os objetivos de aprendizagem de uma situação problema são intrinsecamente ligados aos valores das variáveis. É, portanto, necessário conhecê-las para otimizar as aprendizagens que estão realmente em jogo. (SANTOS, 2005, p. 41).

Santos (2005) constatou esse fato pesquisando em livros didáticos das series finais do Ensino Fundamental do 6º ao 9º, fazendo abordagens da área do paralelogramo. A autora cita a importância do uso descontextualizado em que o conceito de área pode ser inserido.

Um ponto que devemos levar em consideração no grande problema que cerca o ensino-aprendizagem de área de figuras geométricas é o da escolha de dois pólos apenas, superfície e número, ou seja, para uma superfície fixa, a área é considerada como um número, uma unidade adotada que pode ser o metro quadrado, por exemplo. A área como uma grandeza, entretanto pode permitir aos alunos estabelecer relações necessárias entre os quadros geométricos e numéricos, porém, não é tão considerada em livros didáticos e em muitas técnicas de ensino de muitos professores (SANTOS, 2005).

Sobre a situação adidática proposta nesta fase da metodologia, segundo Brousseau (1986*apud* TEIXEIRA; PASSOS, 2013, p. 164) é:

[...] representada pelo esforço independente do aluno, em certos momentos de aprendizagem. Quando o aprendiz tem dificuldades na resolução de uma situação adidática, o professor deve expressar intenção de orientá-lo no encaminhamento da resolução, caracterizando, assim, uma situação didática. Portanto, toda situação adidática pode tornar-se um tipo de situação didática (TEIXEIRA; PASSOS, 2013, p. 164).

Em síntese, o professor tem o papel de oferecer ao aluno um conjunto de boas ideias e de situações de ensino, de modo que o mesmo possa aperfeiçoar sua ação autônoma. Estas ideias devem permitir que o discente atue sobre uma situação com a mínima interferência explícita ou condução por parte do professor, afinal, não há sentido para o aluno receber do professor as respostas e caminhos facilmente, sem que esse aluno seja capaz de pensar e agir sozinho.

3.3.3 Terceira fase: Experimentação

A terceira fase, a da Experimentação, é quando o professor vai a campo para aplicação da sequência didática com um grupo de estudantes. Assim, os registros das observações que serão realizadas durante o decorrer dessa fase serão de suma importância para atingir o objetivo de análise esperado. De acordo com Pommer (2013), esta fase corresponde basicamente ao desenvolvimento da aplicação da Engenharia Didática, arquitetada a um grupo de estudantes, com o objetivo de verificar as hipóteses levantadas durante a análise *a priori*. Desse modo a experimentação segundo esse autor pressupõe:

Uma explicação dos objetivos e das condições de realização da pesquisa a população de estudantes que participará da experimentação; o estabelecimento do contrato didático; a aplicação do instrumento de pesquisa; e, principalmente, o registro das observações feitas durante a experimentação. (POMMER, 2013, p. 25).

O autor afirma ser necessário o atendimento das condições de realização da pesquisa tanto da parte do professor/pesquisador como dos estudantes que participarão. Sobre o Contrato Didático, termo definido por Guy Brousseau (1986, *apud*, TEIXEIRA; PASSOS, 2013), entende-se como sendo a totalidade de comportamentos do docente esperados pelo aluno e a totalidade dos comportamentos do aluno que são esperados por esse docente, ou seja, são as expectativas do professor em relação ao aluno e deste em relação ao professor, incluindo-se o saber e as maneiras como esse saber é tratado por ambas as partes.

Brousseau (1986, *apud* TEIXEIRA; PASSOS, 2013, p. 163), diz que o contrato didático é “[...] uma série de acordos bilaterais entre professor e aluno, alguns explícitos e outros não, com os quais estão pautadas as relações que vigoram na relação didática entre eles, as quais permitam a ambos, mas não necessariamente, condições favoráveis para que a aprendizagem ocorra”.

É importante frisar que no Contrato Didático estabelecido pelos alunos e professor não devem existir interferências objetivas de conhecimentos, evitando certas explicações, para desse modo, facilitar as soluções dos alunos, permitindo assim condições que fazem os alunos mobilizar-se em enfrentar certas situações problemas, principalmente aquelas direcionadas com o seu cotidiano.

3.3.4 Quarta fase: Análise *a posteriori* e Validação

A quarta fase, correspondendo a Análise *a posteriori* e Validação. De acordo com Artigue (1996, *apud* POMMER, 2013, p. 26) ela se apoia sobre o conjunto de dados obtidos ao longo da fase da Experimentação através das observações do pesquisador, pelo registro sonoro ou através da produção escrita. Esta fase pode nos indicar uma necessidade de retomada das fases anteriores da Engenharia Didática para um processo de complementação.

De acordo com Pommer (2013) baseado em Artigue (1996), essa quarta fase da Engenharia Didática se caracteriza pelo tratamento dos dados coletados e a devida confrontação com a análise *a priori* que permite interpretações dos resultados e em que condições as questões levantadas foram solucionadas. Desse modo, podemos analisar se ocorrem e quais as contribuições para superação do problema, caracterizando a generalização local, onde permitirá a validação interna do objetivo da pesquisa.

O êxito da quarta fase da Engenharia Didática dependerá das ferramentas técnicas (material didático, vídeos, etc.) ou teóricas (contrato didático, teoria das situações) utilizadas como meios para se coletar os dados que permitirão a construção dos protocolos de pesquisa. Esses protocolos serão analisados intimamente pelo pesquisador onde as informações que resultam são confrontadas com a análise *a priori* realizada, bem como na quarta fase dessa metodologia (ALMOULOU; COUTINHO, 2008, p. 68).

Assim, esta fase é consequência da experimentação, das observações feitas dos alunos ao trabalharem com o objeto de investigação, objeto da pesquisa, em sala de aula ou fora dela. Ao coletar os dados através de mecanismos para tal objetivo, sejam eles, questionários, entrevistas coletivas ou principalmente individuais realizadas em vários momentos, nos possibilitam um aprofundamento para a análise *a posteriori*. É feita à luz da análise *a priori*, dos fundamentos teóricos e, das hipóteses, bem como da problemática que gira em torno da questão em discussão no momento. O objetivo aqui é a relação entre os objetivos definidos *a priori* e estimar a (re) produtividade e a regularidade dos fenômenos didáticos identificados, segundo Almouloud e Coutinho (2008).

Acreditamos que a Engenharia Didática, como campo metodológico, pode contribuir para a melhoria da sala de aula: ela provê possibilidades de fundamentação teórica que permite ao professor conhecer o significado e ampliar seu repertório a respeito de um conteúdo matemático, possibilitando ainda a formação de ligações entre a teoria e a prática de sala de aula.

A Engenharia Didática representa um método, um caminho ou um meio adequado para que alcancemos determinadas metas e/ou objetivos. Tem a pretensão de promover a reflexão do pesquisador/professor a fim de instigar um novo olhar sobre o mundo, olhar esse que seja organizador, curioso, dedutivo, criativo e indagador (POMMER, 2013, p. 20).

Existe nas fases dessa metodologia certo movimento em busca de valorizar o trabalho do docente e a valorização do saber prático. Carneiro (2008), afirma que as teorias desenvolvidas em outros ambientes que não sejam na/para sala de aula são insuficientes para captar a complexidade do sistema e para, de alguma forma, influir nas transformações das tradições do ensino. Desta forma, a validação consiste em afirmar, ou reafirmar a possibilidade de agir de maneira racional, usando conhecimentos distintos e matemáticos, dando destaque a importância da realização didática na sala de aula como prática de investigação.

Essa metodologia permite o desenvolvimento de uma ponte entre a teoria e a prática docente. A principal diferença entre uma pesquisa que se baseia na Engenharia Didática e outra que não utiliza tal teoria, é observada na profundidade das análises preliminares, bem como pelo fato de a validação das hipóteses serem realizadas por meio do confronto entre as análises *a priori* e *a posteriori*.

Como já havíamos nos referido anteriormente, a validação, na Engenharia Didática, é essencialmente interna e esse fato compõe uma das originalidades desse método. É importante salientar que esse processo de verificação, isto é, de validação, se instaura desde a fase da análise *a priori*. Artigue (1988, *apud* MACHADO, 2008), descreve que:

A análise *a priori* deve ser concebida como uma análise de controle do sentido, pois a teoria das situações didáticas que serve de referência à metodologia da Engenharia Didática teve, desde sua origem, a ambição de se construir como uma teoria de controle das relações entre sentido e situações.

[...] o objetivo da análise *a priori* é determinar no que as escolhas feitas permitem controlar os comportamentos dos alunos e o significado de cada um desses comportamentos. Para isso, ela vai se basear em hipóteses e são essas hipóteses cuja validação estará, em princípio, indiretamente em jogo, na confrontação entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori* a ser operada na quarta fase (ARTIGUE, 1988, p. 293, *apud* MACHADO, 2008, p. 242).

É pertinente colocar que na pesquisa que desenvolvemos aplicamos a primeira e a segunda fase da Engenharia Didática, isto é, as fases das *Análises Prévias* e *Construção e Análise a priori*. Os capítulos 4, 5 e 6 foram dedicados a essas fases, respectivamente.

4 Procedimentos Metodológicos para o desenvolvimento da pesquisa

4.1 A natureza da Pesquisa

Para o alcance dos objetivos listados, realizamos uma pesquisa de caráter qualitativo. A pesquisa qualitativa não se preocupa com a representação numérica, mas, sim, com o aprofundamento da compreensão de certo grupo social, ou de outro grupo qualquer. Quando optamos, na posição de pesquisador por trabalhar com uma abordagem qualitativa estamos sendo opostos aqueles que defendem um modelo único de pesquisa para todas as ciências. De fato, as ciências sociais têm certas especificidades que permitem uma metodologia própria de investigação, com inúmeras formas e contextos de trabalho que permitem várias possibilidades de fazer pesquisas. Segundo Minayo (2001), uma pesquisa dessa natureza preocupa-se com um nível de realidade que, simplesmente, não pode ser somente quantificada, ou seja, a mesma possui uma subjetividade envolvendo um universo de:

[...]significados, motivos, aspirações, crenças, valores e atitudes, o que corresponde a um espaço mais profundo das relações, dos processos e dos fenômenos que não podem ser reduzidos à operacionalização de variáveis. (MINAYO, 2001, p. 21-22).

O pesquisador ao fazer uso de métodos qualitativos busca explicar o porquê das coisas, exprimindo o que convém ser feito, mas sem quantificar determinados valores ou trocas simbólicas, até por que os dados que são analisados são não-numéricos e podem conter diferentes interpretações (SILVEIRA; CÓRDOVA, 2009, p. 32).

O pesquisador também é considerado, nesse tipo de abordagem, como sujeito e objeto de suas pesquisas, o desenvolvimento de suas pesquisas nesse caso é imprevisível. O conhecimento do pesquisador sobre determinado tema é parcial e limitado. Para Silveira e Córdova (2009), o objetivo da amostra é de produzir informações aprofundadas e ilustrativas: seja ela pequena ou grande, de modo que seja possível produzir informações novas e significativas. A pesquisa qualitativa tem como características:

[...] a objetivação do fenômeno, hierarquização das ações de descrever, compreender, aplicar, precisão entre o global e o local em um determinado fenômeno, também, a observância das diferenças entre o mundo social e o mundo natural; respeito ao caráter interativo entre os objetivos buscados pelos investigadores, suas orientações teóricas e seus dados empíricos; busca

de resultados os mais fidedignos possíveis; oposição ao pressuposto que defende um modelo único de pesquisa para todas as ciências (SILVEIRA e CÓRDOVA, 2009, p. 32).

Esse nosso estudo também pode ser considerado como uma Pesquisa Intervenção. Segundo Rocha e Aguiar (2003, p. 66), “a pesquisa-intervenção consiste em uma tendência das pesquisas participativas que busca investigar a vida de coletividades na sua diversidade qualitativa, assumindo uma intervenção de caráter socioanalítico”.

Damiani *et al* (2013) caracterizam a Pesquisa Intervenção por alguns de seus objetivos: a tentativa de resolução de um problema; o caráter aplicado da pesquisa; a necessidade de diálogo com um referencial teórico e a possibilidade de produzir conhecimento.

Diferentemente da Pesquisa Ação, também do tipo participativa, nas pesquisas interventivas, é o pesquisador quem identifica o problema e decide como fará para resolvê-lo, embora permaneça aberto a críticas e sugestões, levando em consideração as eventuais contribuições dos sujeitos-alvo da intervenção, para o aprimoramento do trabalho (DAMIANI *et al*, 2013).

4.2 Os Momentos da Pesquisa

Neste capítulo buscamos explicitar de que forma nos baseamos nos pressupostos da Engenharia Didática para delinear nossas ações. Como dito anteriormente, desenvolvemos a primeira e a segunda fase da Engenharia Didática, isto é, as fases *As análises prévias* e *Construção e Análise a priori*. Dessa forma estruturamos a pesquisa em três momentos para os quais explicitaremos a seguir.

Momento 1 – Análises prévias

De acordo com Artigue (1996, *apud* CARNEIRO, 2005) a análise prévia é feita a fim de esclarecer os efeitos do ensino tradicional, as concepções dos alunos e as dificuldades e obstáculos que marcam a evolução das concepções quanto ao ensino-aprendizagem de determinado conhecimento. Isto é, nesta primeira fase da metodologia têm-se como objetivos analisar o funcionamento do ensino habitual para, a partir dessa análise, propor intervenções que o modifique em sala de aula.

Nesse momento, analisamos previamente o conteúdo considerando as três dimensões de análise: o epistemológico, didático e cognitivo.

Na *dimensão epistemológica* fizemos análises de acordo com as características do ensino-aprendizado do cálculo de áreas de figuras planas considerando uma perspectiva histórica, isto é, o estudo de áreas de figuras planas como parte integrante da Geometria Euclidiana, onde teve seu surgimento na Grécia antiga embasada nos estudos iniciais do ponto, da reta e do plano. As demais formas planas existentes são construídas levando em consideração tais estudos o que denota certa necessidade de se fazer este estudo nesta perspectiva.

Na *dimensão didática*, que engloba análises com relação ao funcionamento no sistema de ensino, o nosso objetivo foi de inferir possíveis estratégias de ensino utilizadas por docentes com relação a esse conceito de um ponto de vista teórico considerando também o tratamento e apresentação do conteúdo no Ensino Fundamental nos livros didáticos. Para essa análise buscamos 4 livros didáticos da coleção “Matemática: compreensão e prática” de Ênio Silveira (2015), destinados aos anos finais do Ensino Fundamental, sobre a abordagem do assunto em questão e também os livros didáticos do autor Bigode (2013), cujo título de sua coleção é “Projeto Valear - Matemática”. Também utilizamos pesquisas em âmbito nacional, como os documentos oficiais, onde podemos citar os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN, e algumas Resoluções do Conselho Nacional de Educação - CNE, disponíveis do sítio do Portal do Ministério da Educação - MEC. Ainda na dimensão didática, trouxemos algumas possibilidades do *GeoGebra* para o estudo das figuras planas poligonais regulares e irregulares.

Com relação à *dimensão cognitiva*, fizemos referência às características do público onde foi desenvolvida a pesquisa, ou seja, os estudantes do Ensino Fundamental. Essa análise teve suas primeiras considerações relacionadas a identificação, as características desses alunos, bem como o espaço em que vivem, sendo possível identificar problemas que podem dificultar o aprendizado do cálculo de áreas de figuras planas. Essa análise nos levou a compreender dificuldades de aprendizado que somente na escola, muitas das vezes não é possível compreender. Justificando assim, a necessidade de um estudo diagnóstico para identificar essas dificuldades e conhecimentos prévios.

Com o objetivo de identificar possíveis dificuldades de alunos foi elaborado e aplicado um questionário diagnóstico (Apêndice A). A aplicação ocorreu na turma do 9º ano, pela manhã do dia 18 de maio de 2017, em uma Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio,

na cidade de Barra de Santa Rosa – PB e contou com um grupo constituído por 29 (vinte e nove) alunos. A fim de facilitar as nossas análises, a compreensão do leitor e preservar a identidade dos participantes, identificamos os alunos através das letras do alfabeto.

Dessa forma, elaboramos e aplicamos um questionário diagnóstico. O questionário apresentou 6 (seis) questões abertas e, para cada uma, teceremos considerações a seguir. Dentre as questões, algumas foram criadas e outras foram adaptadas.

A Questão 1 foi criada com o objetivo de coletar informações sobre a compreensão dos alunos a respeito do conceito que tinham sobre área. Mais precisamente, queríamos saber dos alunos, de forma escrita, se os mesmos sabiam o significado da expressão “área de uma superfície plana”.

As Questões 2, 4 e 5 foram criadas por nós a partir de imagens de figuras retiradas da internet. Tínhamos como objetivo identificar processos de cálculo de área de figuras planas pelos alunos. Com a Questão 2, gostaríamos de saber se eles conseguem diferenciar figuras regulares e irregulares. Na Questão 4, propusemos aos alunos encontrar áreas de figuras compostas e, na Questão 5, se eles estimam uma área de modo a aproximar da área final da figura.

A Questão 3 foi adaptada de Secco (2007). Esse autor tratou do conceito de área fazendo um estudo da composição e decomposição de figuras até chegar às fórmulas de área. A Questão 6 foi adaptada do livro didático de Fini *et al*/ (2013) destinada ao 8º ano do Ensino Fundamental.

De maneira geral, as questões 1 e 2 se caracterizam por serem mais conceituais, ou seja, o aluno deveria ter conceitos formados para poder solucioná-las: a primeira questão por exemplo, o aluno precisava entender o que é ou o que representa uma área de uma superfície geométrica; a questão 2 por sua vez, o aluno deveria saber o que é ou não é uma figura regular identificando-as através de alguns exemplos.

As questões 3, 4, 5 e 6, em comum tem o objetivo de verificar conhecimentos prévios sobre cálculo de áreas de figuras irregulares. Na terceira questão era esperado que os alunos realizassem a contagem de quadradinhos (como unidade) internos a cada figura; a quarta questão pedia aos alunos que calculassem a área de cada figura composta de retângulos triângulos, trapézios e quadrados, porém, sem o recurso da malha quadriculada; a quinta questão pedia uma estimativa da área de uma figura irregular. O aluno poderia contar, ou utilizar outros meios que lhe fosse conveniente para dar a estimativa; na sexta questão além de contar os quadradinhos, era necessário aplicar a média aritmética das duas quantidades de

quadrinhos (os internos e externos à figura) e, por fim os alunos deveriam ainda multiplicar o resultado da média aritmética pelo valor dado na questão.

A questão 4 se diferenciava da grande maioria, pelo fato de não conter a malha, sendo que dessa forma o aluno deveria utilizar outros meios para o cálculo da área das figuras apresentadas.

Escolhemos uma turma do 9º ano porque nessa etapa do Ensino fundamental muitos desses alunos já tiveram contato com o tema abordado, em anos anteriores e no próprio ano letivo, onde esse fato facilitaria a nossa compreensão das dificuldades desses alunos.

Solicitamos ao docente responsável pela turma que nos consentisse a aplicação do questionário. Na oportunidade o professor estava lecionando o conteúdo de áreas em sala e queria concluí-lo, alegando que seus alunos estariam mais preparados para responder ao questionário.

No dia da aplicação o docente deixou o pesquisador a vontade e na oportunidade explicamos o nosso objetivo. O pesquisador falou da não necessidade dos alunos se identificarem o que favoreceu a participação dos alunos. Utilizamos duas horas aulas no total até que o último aluno nos entregasse seu questionário.

Momento 2 – Análises prévias: as variáveis didáticas em jogo

A partir do questionário diagnóstico aplicado, iniciamos um processo de análise das respostas dos alunos. Buscamos identificar as dificuldades e as variáveis didáticas que influenciaram o resultado e a avaliação do questionário. Aplicamos e analisamos este questionário entre os meses de maio a junho de 2017. Sobre as variáveis didáticas, identificamos cinco variáveis que nortearam a nossa pesquisa nas etapas que se sucederam, ou seja, durante a construção da atividade com o auxílio do *software GeoGebra*. As variáveis didáticas foram as seguintes: *Variável tipo de figura; variável posição da figura com relação a malha; variável hachuramento; variável malha quadriculada e variável dados fornecidos para a solução.*

Momento 3 – Concepção e análise a priori

Nesse momento pensamos e elaboramos uma proposta didática sobre o tema, fazendo uso do *software GeoGebra*. O período de realização dessa etapa foi no mês de julho, logo

após o término das análises dos dados coletados no questionário diagnóstico. Desenvolvemos uma atividade que tinha como requisito encontrar a área da região do mapa da Paraíba.

5 **Análises prévias e o cálculo de área de figuras planas irregulares**

Nesse capítulo apresentamos, de acordo com a primeira fase da Engenharia Didática, as análises prévias de ordem epistemológica, didática e cognitiva relativa ao cálculo de área das figuras planas regulares e irregulares.

5.1 Análises Prévias: Perspectiva epistemológica

Como toda a Matemática, os conhecimentos da Geometria nasceram das necessidades do homem em compreender tudo aquilo que estava ao seu redor, poder usar e compreender os artefatos da natureza, compreender as variadas formas e poder operar com as mesmas (BRASIL, 1998, p. 25).

O estudo de áreas de figuras planas está ligado aos conceitos pertencentes à Geometria Euclidiana e teve seu surgimento na Grécia antiga, embasada, basicamente nos estudos do ponto, da reta e do plano. Ao nosso redor, existem inúmeras formas planas, que derivam desses elementos básicos. Seja com objetivos de plantação, divisão de propriedades ou simplesmente para a construção de moradia, o homem sempre necessitou medir superfícies de área (ROCHA; ANDRADE, 2008).

Por volta de 300 anos a.C., o grego geômetra Euclides produziu a obra mais imponente que atravessou gerações e ainda é motivo de forte influência no currículo escolar na Educação Básica, *Os Elementos*³. Além da Geometria, *Os Elementos* também contemplam a Teoria dos Números e Álgebra Elementar ou Geométrica.

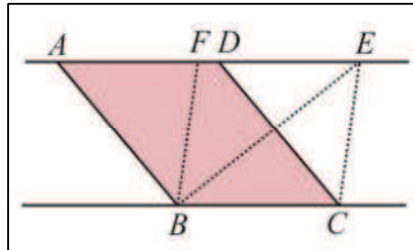
'*Os Elementos*' de Euclides continha cerca de quatrocentas e sessenta e cinco proposições distribuídas em treze livros ou capítulos. A distribuição nos livros é disposta da seguinte forma: os seis primeiros são relacionados a Geometria Plana, os três seguintes foram reservados a Teoria dos Números, o décimo volume tratava das incomensuráveis e os três últimos tratam da Geometria no Espaço.

Euclides não se preocupou com a definição de área, no entanto, a ideia considerada por ele estava associada ao conceito de igualdade entre figuras, segundo Rocha e Andrade (2008). Isto é evidenciado quando ele enuncia que triângulos que possuem bases iguais, estando situados entre as mesmas paralelas, são iguais, isto é, figuras iguais ou equivalentes, e

³Esta obra de matemática da antiguidade clássica, é composta por 13 livros em que, além de definições, postulados e noções comuns/axiomas, demonstram-se diversas proposições, em forte sequência lógica, referentes à Geometria Euclidiana, a da régua e compasso, e à aritmética, isto é, à teoria dos números. Fonte: Disponível em <<http://editoraunesp.com.br/catalogo/9788571399358,os-elementos>>. Acesso em: 01 jan. 2017.

que os paralelogramos que tinham as bases iguais também eram figuras iguais. Ou seja, considerava duas figuras equivalentes quando as mesmas possuíam a mesma grandeza, ou mesma área (Figura 3).

Figura 3 - Igualdade entre figuras de acordo com Euclides



Fonte: <http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/2011/04/o-teorema-de-pitagoras-segundo-euclides.html>. Acesso em 15 de mar. 2017.

Na figura 3 percebe-se, de acordo com os princípios de Euclides, a seguinte proposição: se um paralelogramo e um triângulo tem a mesma base BC (base do paralelogramo ABCD e do triângulo EBC) então o paralelogramo é o dobro do triângulo. Desse modo, Euclides conseguiu demonstrar que, traçando a diagonal AC que divide o paralelogramo em duas partes iguais, os triângulos ABC e EBC são iguais e tem mesma área, cuja base BC é comum e está entre as mesmas paralelas BC e AE. Logo EBC é a metade do quadrilátero ABCD.

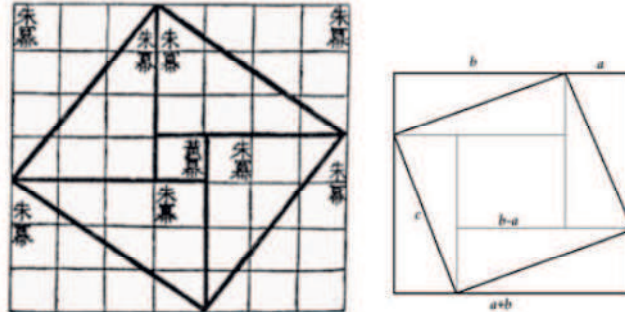
De acordo com o que é exposto em Rocha e Andrade (2008), Euclides utilizava nas suas demonstrações a estratégia de decomposição das figuras em triângulos, justificando assim a atenção dada ao triângulo e, ao cálculo de sua área. Euclides ainda “demonstrou que quaisquer figuras limitadas com lados retos podem ser divididas em triângulos” (ROCHA; ANDRADE, 2008, p.5). Isso foi amplamente usado em demonstrações de figuras planas.

Rocha e Andrade (2008, p. 5) afirmam que os povos gregos foram os responsáveis por transformar os conhecimentos empíricos de outros povos como os egípcios e babilônicos em um conhecimento sistemático, baseado em argumentos, assim como na demonstração, os conhecimentos matemáticos que foram produzidos em seguida sempre estiveram impregnados nesse modo de se fazer Matemática.

Para os chineses, quando se remete ao cálculo de áreas, muitos problemas aparecem na obra “Nove Capítulos sobre a Arte Matemática”, do século I d.C. Essa obra possuía problemas de mensuração, engenharia, impostos, soluções de equações e de Geometria, e também tratava de áreas de figuras planas a partir de manipulações de peças de quebra-

cabeça. Na figura 4, vemos a ilustração dessas peças que tem um aspecto semelhante ao conhecido *Tangram*.

Figura 4 - Cálculo de área através de peças (diagrama sobre a hipotenusa)



Fonte: <http://www.mat.uc.pt/~mat0703/PEZ/China2.htm>. Acesso em 15 de mar. 2017.

Conforme a figura, a área do quadrado exterior, de lado $a + b$, é igual à soma da área do quadrado de lado c com a área de quatro triângulos de catetos a e b .

De acordo com Carneiro (2005), citando os textos de Eves (1992) e Lindquist; Shulte (1994) foi elaborado um quadro que mostra parcialmente a evolução histórica da Geometria ao longo dos séculos, salientando a natureza mutável da mesma, com diferentes conotações: Geometria Intuitiva, Geometria Científica, Geometria Dedutiva, Geometria das Transformações e Geometria Avançada.

A Geometria Intuitiva foi a propulsora para a evolução das demais, surge basicamente, da observação do espaço físico real. O homem observa, compara, reconhece. Surgem as noções primitivas de distâncias, figuras simples, perpendicularismo, paralelismo, entre outras.

Na Geometria escolar, principalmente no Ensino Fundamental anos finais, é introduzida pelos professores o ensino de áreas de figuras planas elementares como o paralelogramo, o triângulo, retângulos, quadrado e outras figuras, mostrando algumas poucas relações com o cotidiano do estudante e na sequência são introduzidas suas respectivas fórmulas. A noção intuitiva, tais como o ponto, reta e plano, apesar de ser utilizada, é pouco explorada (CARNEIRO, 2005).

A Geometria Científica surge como consequência das noções primitivas, ou seja, constitui-se uma evolução, a necessidade de provar a Geometria que antes, apenas observações já eram suficientes. Trata-se de um trabalho da mente humana que age diretamente sobre as noções intuitivas, onde há a consolidação, considerando um conjunto de regras e leis mais gerais (CARNEIRO, 2005).

A Geometria Dedutiva também conhecida por demonstrativa surgiu com os gregos, corresponde ao pensamento lógico dedutivo para ampliar o corpo de leis e regras iniciais e constitui na verdade a Geometria Euclidiana. É justamente nessa concepção em que o “espaço” deixa de ser o real, passando a ser imaginado, idealizado, para que objetos possam ser livremente manipulados e comparados uns com os outros (CARNEIRO, 2005). Esse tipo de Geometria é o mais explorado quando pensamos em formação de professores de matemática.

A Geometria das Transformações é uma maneira mais geral do que restrita. De acordo com Carneiro (2005) esta Geometria está na percepção da existência de outras Geometrias, ou seja, a Euclidiana e não Euclidiana, criadas no século XIX. Seguindo a ideia da Geometria Dedutiva em que o espaço pode ser tido como o lugar onde podemos comparar objetos entre si. A ideia principal dessa Geometria passa a ser um grupo de transformações congruentes (simetria, movimentos rígidos) do espaço em si mesmo e “a Geometria passa a ser considerada como o estudo das propriedades das configurações de que permanecem inalteradas quando o espaço circundante é sujeito a essas transformações” (EVES, 1992, p. 27, *apud* CARNEIRO 2005, p. 90). Na Geometria das Transformações existe uma certa abstração ao se tratar do espaço, visto que devemos tê-lo como um lugar de comparações, ou seja, temos que “imaginar” certas transformações geométricas para compreender o que cada uma representa (CARNEIRO, 2005).

No Brasil, segundo Carneiro (2005), o ensino de Geometria está claramente centrado na Geometria Intuitiva, com passagem pela Geometria Científica. Apenas em textos didáticos e acadêmicos bem mais recentes, nota-se uma evolução na direção da Geometria das Transformações.

5.1.1 O cálculo de área de figuras planas regulares e irregulares

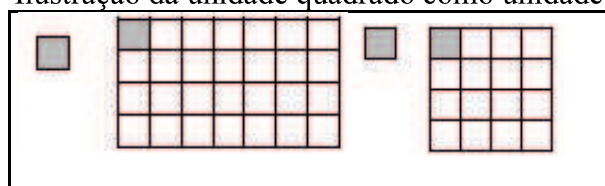
Centrando a discussão no estudo das figuras planas, esta apresenta aspectos a serem considerados no que diz respeito ao cálculo de suas áreas. Primeiramente, o conceito de área é muito rico do ponto de vista da Matemática, pois, é um conceito que congrega muitos eixos temáticos como os dos Números, da Geometria, das Grandezas e Medidas e da Álgebra. O cálculo de áreas no currículo em nosso país prevalece o conceito de área como grandeza, segundo Rocha e Andrade (2008). Assim, o conceito de área é entendido como um saber

matemático capaz de propiciar comparações entre medições de uma superfície. Quando falamos de superfície, Rocha e Andrade (2008) a definem como:

[...] uma porção do plano limitada por uma figura plana. Medir uma superfície significa obter um número que represente a porção do plano ocupada por essa região. Essa medida é chamada de *Área* (ROCHA; ANDRADE, 2008, p. 5).

Para medir a superfície de uma região uma possibilidade é fazer uso de outra superfície, onde a mesma sirva como unidade de medida, de modo que possa verificar quantas vezes seja possível colocá-la dentro da região que se fará a medição. Em geral, o quadrado é a unidade de medida. A figura 5, a seguir, ilustra essa possibilidade. Na primeira situação temos uma área de 28 unidades e na segunda, uma área de 16 unidades.

Figura 5 - Ilustração da unidade quadrado como unidade de medida



Fonte: Adaptado de Rocha e Andrade (2008)

Não se sabe ao certo quanto a escolha do quadrado como unidade de área. De acordo com Rocha e Andrade (2008), das muitas versões apresentadas, as mais interessantes são as que dizem que essa escolha foi baseada nos ladrilhos de mosaicos hindus e chineses e/ou sugeridas pelos padrões que decoravam as cerâmicas quadriculadas, produzidas e utilizadas pelos babilônios. Desse modo, o cálculo da área é obtido a partir do número de vezes em que a unidade de área cabe dentro da região.

Os autores Rocha e Andrade (2008) afirmam que podemos ainda, fazer uso da decomposição de figuras desconhecidas em outras já conhecidas, a fim de facilitar os cálculos. Para tanto é exigido do aluno o conhecimento prévio do cálculo de área de figuras planas como o do quadrado, do triângulo, do retângulo, do trapézio e do losango, para que seja possível operar após a realização dos procedimentos de decomposição. Como exemplo, veremos na figura 6, a proposta de decomposição do paralelogramo em um retângulo.

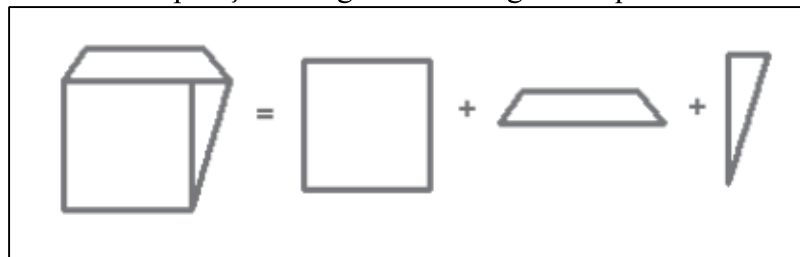
Figura 6 - Decomposição do paralelogramo em retângulo



Fonte: Adaptado de Rocha e Andrade (2008)

Considerando, por exemplo, o polígono da Figura 7, é possível decompô-lo em quadriláteros e triângulos. Uma vez conhecidas as dimensões dos lados encontramos a área da figura inicial. A soma destas áreas será igual à área total da figura inicial. Uma decomposição possível é a seguinte, onde usamos dois quadriláteros e um triângulo.

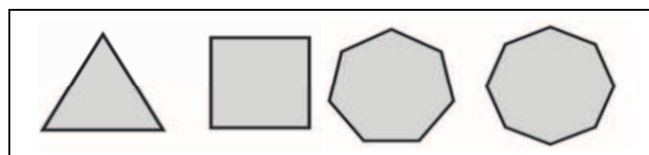
Figura 7 - Decomposição de figura em triângulos e quadriláteros



Fonte: http://www.prof2000.pt/users/hjacinto/re_mat/tema_1/decomp1.htm.
Acesso em 28 de mar. 2017.

Os polígonos regulares são os polígonos que tem os seus lados, bem como seus ângulos internos congruentes. Na Figura 8 ilustramos alguns polígonos regulares como o triângulo equilátero, o quadrado, o pentágono regular e o hexágono regular.

Figura 8 - Polígonos regulares



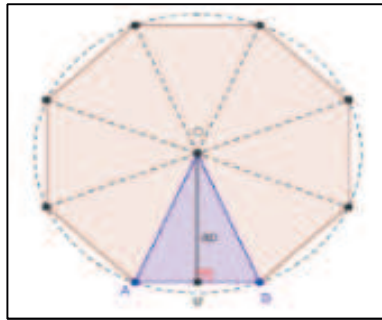
Fonte: <http://www.dibujoindustrial.es/geomplana/Geometriabasica/poligonos/>.
Acesso em: 16 de mar. 2017.

Nestes casos, as medidas de suas áreas podem ser obtidas também através de fórmulas Matemáticas. Por exemplo, como $A=l^2$ para calcular a área do quadrado de lado l e $A = (b * h) / 2$ para calcular a área de um triângulo de base b e de altura h .

No entanto, quando um polígono regular tiver mais lados, podemos decompor o mesmo em triângulos e aplicar a fórmula $A = (n * b * h) / 2$, é o caso da Figura 9 a seguir, que

nos mostra um octógono regular. Essa fórmula implica multiplicamos o número de lados n , pela área de cada triângulo gerado na decomposição. Através dessa decomposição mantemos a relação com as figuras que já sabemos como calcular sua área.

Figura 9 - Octógono regular



Fonte: <http://www.amma.com.pt/?p=7390>. Acesso em 15 de mar. 2017.

As figuras irregulares são aquelas que não possuem os ângulos com medidas iguais e os lados não tem tamanhos iguais. Embora elas estejam presentes em nosso dia a dia, tanto quanto as regulares, as mesmas ainda são pouco exploradas na escola (ROCHA; ANDRADE, 2008).

Assim, podemos contextualizar o ensino de área de figuras planas regulares e irregulares de modo a contribuir para o desenvolvimento geométrico dos estudantes, explorando áreas com alunos nas obras de arte, na natureza, nos prédios e casas, também podemos utilizar imagens cartográficas de satélites, rios, lagos, entre outros, como mostra a figura 10.

Figura 10 - Exemplos onde podemos encontrar figuras planas regulares e irregulares



Fonte: <https://www.artmajeur.com/pt/gallery/marthacarvalhopinturas/collection/ultimas-obras/1608139>. Acesso em: 18 de mar. 2017.

Sabemos que existem outros recursos que podem ser utilizados para calcular a área de figuras planas irregulares poligonais, como, por exemplo, o método de Gauss e a fórmula de Pick que passaremos a considerar nos próximos parágrafos.

O método de Gauss é muito utilizado na engenharia, onde se calcula a área a partir das coordenadas X (longitude) e Y (latitude) em um plano cartesiano. Também conhecido como

método analítico esse método sempre partirá das coordenadas absolutas⁴, obtidas através da transformação das coordenadas polares em retangulares. O objetivo, após estas transformações, ou obtenção das coordenadas absolutas (retangulares), será conhecer a área do polígono que se deseja calcular. Esse método é muito útil para se calcular área de regiões irregulares poligonais para aquelas pessoas que praticam ou estudam a topografia.

Para se calcular a área pelo método de Gauss deve-se que seguir alguns critérios. Tomemos a Figura 11, onde dadas as coordenadas (X, Y) dos pontos da figura fechada, pretende-se determinar a área desta figura. As coordenadas do ponto de partida e de chegada devem ser as mesmas, isto é, repete-se a primeira coordenada no final para o fechamento da figura poligonal. Veremos a seguir, no esboço da figura 11.

Figura 11–Método de Gauss para o cálculo de área



Fonte: [http://www2.uefs.br/geotec/topografia/apostilas/topografia\(12\).htm](http://www2.uefs.br/geotec/topografia/apostilas/topografia(12).htm)
Acesso em 3 mar. 2017

Percorrendo a poligonal no sentido horário, somam-se as ordenadas (Y) dos pontos, aos pares, ou seja, de duas em duas. Na sequência, porém em sentido contrário, subtraem-se as abscissas (X) dos pontos, também aos pares. Os resultados de cada soma e subtração, para um mesmo ponto, são multiplicados entre si (Y · X). Somam-se, algebricamente, todos os produtos encontrados (X · Y). A área final é dada pela seguinte relação.⁵

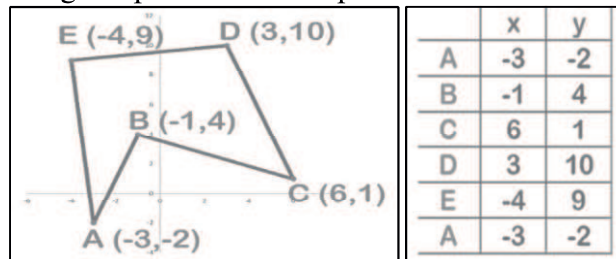
$$2S = \sum_{i=1}^n Y_{i+1} + Y_i \cdot X_{i+1} - X_i \quad (*)$$

⁴ Este tipo de coordenada ganha este nome, por sempre usar como referência o zero absoluto do plano cartesiano, ou seja, todas as referências partem sempre do encontro dos dois eixos. Fonte: Disponível em: <<http://fapires.com/wp-content/uploads/2011/09/Coordenadas.pdf>>. Acesso em 31 de mar. 2017.

⁵ Informações disponíveis em: <[http://www2.uefs.br/geotec/topografia/apostilas/topografia\(12\).htm](http://www2.uefs.br/geotec/topografia/apostilas/topografia(12).htm)>. Acesso em 3 de mar. 2017.

Como exemplo, vamos a seguir, encontrar a área da figura poligonal irregular ilustrada na Figura 12, seguindo o método de Gauss. Para isso será necessário observar os valores de cada um dos pontos expressos em forma de coordenadas, assim iremos escrevê-las em uma tabela.

Figura 12 - Figura irregular plana sobre um plano cartesiano e suas coordenadas



Fonte: <https://pt.linkedin.com/pulse/%C3%A1rea-de-pol%C3%ADgonos-irregulares-m%C3%A9todo-gauss-do-c%C3%A1lculo-rodrigo>. Acesso em 7 de abr. 2017.

Quando realizamos o procedimento a seguir (Figura 13) referente aos cálculos do método de Gauss, efetuamos a subtração e em seguida dividimos por dois, ou seja, $82 - (-38) = 120$ e quando dividimos esse resultado por dois, concluímos que a área do polígono da figura 12 é exatamente 60ua. Observe que esse método prático nada mais é do que uma simplificação de sua fórmula, a fórmula (*), vista anteriormente, facilitando o processo final de obtenção da área, sendo este mais popular. Uma observação importante é que devemos considerar o resultado da subtração em módulo, para assim, evitar eventuais resultados negativos.

Figura 13 - Multiplicações de x por y e de y por x

	x	y	
A	-3	-2	
B	-1	4	$-3 \times 4 = -12$
C	6	1	$-1 \times 1 = -1$
D	3	10	$6 \times 10 = 60$
E	-4	9	$3 \times 9 = 27$
A	-3	-2	$-4 \times -2 = 8$
			82

	x	y	
A	-3	-2	
B	-1	4	$-2 \times -1 = 2$
C	6	1	$4 \times 6 = 24$
D	3	10	$1 \times 3 = 3$
E	-4	9	$10 \times -4 = -40$
A	-3	-2	$9 \times -3 = -27$
			-38

Fonte: <https://pt.linkedin.com/pulse/%C3%A1rea-de-pol%C3%ADgonos-irregulares-m%C3%A9todo-gauss-do-c%C3%A1lculo-rodrigo>. acesso em 7 abr. 2017

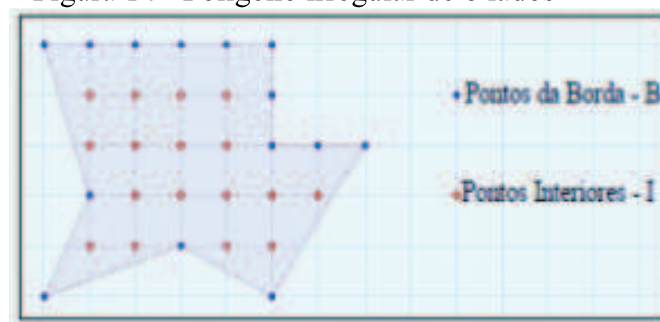
A fórmula de Pick é mais um recurso útil para o cálculo de área de polígonos simples com seus vértices sobre os pontos de uma malha quadriculada. O teorema afirma que “A área de um polígono simples representado em uma malha quadriculada é dada por $A = B^2 + I - 1$. Onde I é a quantidade de pontos interiores do polígono e B é a quantidade de pontos da borda do polígono” (DAFNE, 2015, p. 2).

No teorema de Pick fazemos uso de uma rede de pontos (HERMES, 2005, p. 204). Uma rede de pontos no plano é um conjunto de pontos dispostos regularmente ao longo de retas horizontais e verticais, de modo que a distância de um para outro é a mesma, ou seja, tanto na horizontal quanto na vertical, e essa medida é exatamente 1.

No entanto, algumas definições precisam ser ressaltadas para que se compreenda o teorema. Por exemplo, *Polígono simples* é um polígono formado por segmentos de reta que não se cruzam; *Pontos interiores (I)*: são os pontos da malha quadriculada que fazem parte do interior do polígono; *Pontos da borda (B)*: são os pontos que se encontram em cima dos lados (segmentos de reta) do polígono (DAFNE, 2015, p. 2).

Na Figura 14, a seguir, temos um exemplo de uma aplicação do Teorema de Pick em um polígono irregular de oito lados trazido por Dafne (2015). Na imagem, o polígono irregular de 8 lados possui 14 pontos de borda (B) e 17 pontos em seu interior, desse modo, com a aplicação do Teorema de Pick podemos obter sua área da seguinte maneira: $A = 14^2 + 17 - 1 = 7 + 17 - 1 = 23$ u.a.

Figura 14 - Polígono irregular de 8 lados



Fonte: Dafne (2015, p.3)

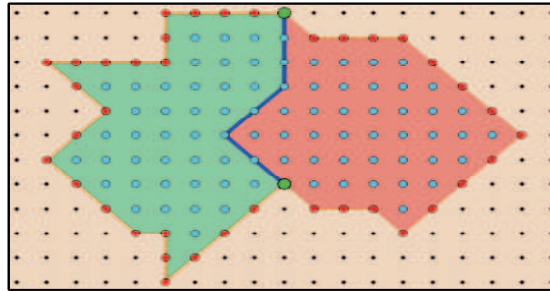
Vejamos a seguir a demonstração do Teorema de Pick, de acordo com Rocha e Andrade (2008, p.17). Esses autores afirmam que esta demonstração é validada quando conseguimos provar a aditividade do teorema, ou seja:

Primeiro observemos que, se o número de Pick de um polígono simples é sua área, então ele deve ser aditivo, isto é, se P é um polígono simples obtido pela

justaposição dos polígonos simples P_1 e P_2 ao longo de pelo menos uma aresta, então $Pick(P) = Pick(p_1) + Pick(p_2)$. (ROCHA; ANDRADE 2008, p. 17).

A figura a seguir, figura 15, representa a ideia da aditividade da fórmula de Pick, de acordo com os autores Rocha e Andrade (2008).

Figura 15 - Justaposição de dois polígonos simples ao longo de arestas



Fonte: <http://cmup.fc.up.pt/cmup/pick/pick2.html>
Acesso em: 16 de mar. 2017

Desse modo, considerando algumas características poderemos demonstrar a fórmula de Pick, ou seja, a fórmula da aditividade do teorema vista anteriormente e reforçada pela figura 12, isto é, $Pick(P) = Pick(p_1) + Pick(p_2)$. Considerando $P(P_k) = \frac{1}{2}B_k + I_k - 1$, com $k \in \{1,2\}$.

Admitindo assim, o número de Pick P_k e V de vértices da fronteira comum aos dois polígonos P_1 e P_2 , ou seja, a aditividade de Pick deve ser observada quando unimos dois polígonos em que suas extremidades possuem pelo menos um lado em comum que se unem, tornando uma figura única P_k . Dessa maneira verificamos que, dois desses pontos serão pontos de fronteira do polígono P e, os vértices que sobram, isto é, $(V - 2)$ serão pontos interiores da união desses polígonos.

Segue assim, que, o número I de pontos interiores de P pode ser representado por $I = I_1 + I_2 + v - 2$ e o número B pontos da borda ou fronteira de P será dado por $B = B_1 + B_2 - 2(v - 2)$. Portanto,

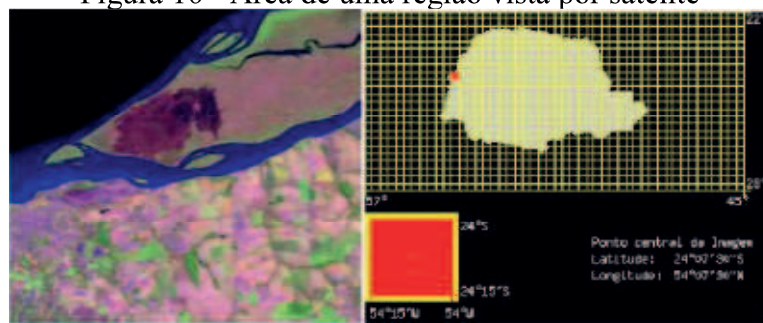
$$\begin{aligned} Pick(P) &= \frac{1}{2}B + I - 1 \\ &= \frac{1}{2}[B_1 + B_2 - 2(v - 2)] + (I_1 + I_2 + V - 2) - 1 \\ &= \frac{1}{2}B_1 + \frac{1}{2}B_2 - V + 1 + I_1 + I_2 + V - 2 - 1 \\ &= \left(\frac{1}{2}B_1 + I_1 - 1\right) + \left(\frac{1}{2}B_2 + I_2 - 1\right) \\ &= Pick(P_1) + Pick(P_2) \end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar, ou seja, provamos que justapondo-se dois polígonos simples ao longo de uma aresta, os respectivos números de Pick adicionam-se, assim como suas respectivas áreas, (ROCHA; ANDRADE, 2008, p. 18).

Essa demonstração é particularmente importante, pois possibilita a decomposição de um polígono qualquer P em uma justaposição de polígonos, sendo estes mais simples, para os quais o Teorema de Pick possa ser facilmente aplicado.

Sendo assim, o Teorema de Pick pode ser ainda aplicado no caso de figuras irregulares não poligonais. Isto é, tomemos como exemplo o cálculo da área de uma região desmatada vista através de satélite. Nesse caso basta considerar uma escala para a redução da imagem e sobrepor uma malha quadriculada, como na Figura 16, e aplicando o Teorema de Pick encontramos uma área bem próxima da realidade.

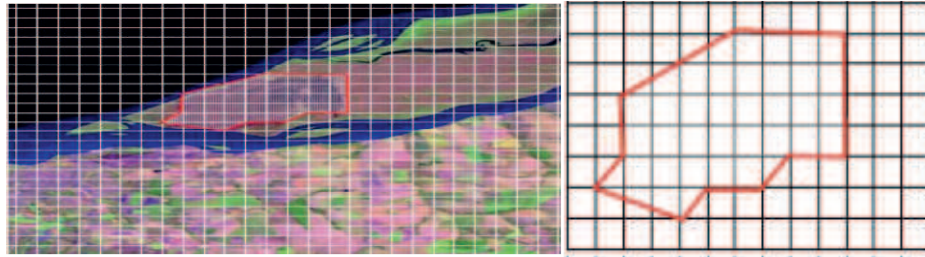
Figura 16 - Área de uma região vista por satélite



Fonte: Rocha e Andrade (2008, p. 20)

Através da Figura 16, podemos obter uma boa aproximação da área desmatada que aparece em destaque na mesma. Desse modo os autores aplicaram a escala de 1: 25.000, sob uma malha quadriculada de 0,5 cm (ROCHA; ANDRADE, 2008). Para o cálculo dessa figura, podemos fazer uma aproximação a uma figura regular, Figura 17, na qual representa a região desmatada construída de forma aproximada a uma figura irregular poligonal de modo que seja mais facilmente compreendida e para uma melhor aplicação do Teorema de Pick.

Figura 17 - Desenho de um polígono irregular sobre a área a ser calculada



Fonte: Rocha e Andrade (2008, p. 21)

Como a área que queremos calcular teve seus lados sobrepostos pelos lados do polígono irregular, temos desse modo que sua área será aproximada. Utilizando as informações que já detemos, contamos os pontos da borda (B) e os pontos interiores (I). Vemos claramente que $B = 20$ e $I = 27$, desse modo a área do polígono é $A = 20 \cdot 2 + 27 - 1 = 36u.a$. Devido a escala dada, temos que a área de cada uma das células corresponde a 15.625 m^2 . Desse modo, ao multiplicar esse valor pela área encontrada iremos ter uma área aproximadamente de 562.500 m^2 , ou seja, a área aproximada da região desmatada. (ROCHA; ANDRADE, 2008, p. 22).

No entanto, cabe-nos afirmar que quando usamos fórmulas, mesmo se tratando das figuras irregulares sejam elas poligonais ou não poligonais, o tratamento do conteúdo pode ocorrer de maneira inadequada recorrendo a estratégias mecanicistas. Dessa forma, os alunos não irão compreender bem os conteúdos e irão apenas memorizar alguns conceitos com o intuito de obter êxito em testes ou exercícios em sala (ROCHA; ANDRADE, 2008).

Qualquer região irregular pode ser decomposta em figuras mais simples, porém, em algumas situações, o cálculo pode ficar um pouco mais complexo. Para tais situações, seriam necessárias outras ferramentas para encontrarmos uma solução. Como por exemplo, o cálculo superior, ou seja, a integral. No entanto, nos anos finais do Ensino Fundamental, não trabalhamos com essa ferramenta, mas existem diversas outras que podemos fazer uso, como o teorema de Gauss, o teorema de Pick, estimativas e aproximações.

Secco (2007) em seu trabalho tratou do cálculo de área a partir da malha quadriculada como um recurso facilitador da obtenção da mesma. Percebemos esse recurso de certo modo inibe o uso de fórmulas, o aluno conta as unidades de área para dar a área da figura. Esse fato foi confirmado ao decorrer de suas análises. Para esse autor ao se desvincular da malha quadriculada o índice de acertos em questões que pediam o cálculo de área cai drasticamente. Quase 100% dos alunos que tentaram responder uma questão sem o auxílio da malha

quadriculada erraram a questão. Ainda para Secco (2007) os alunos, dessa forma, não se apropriaram do conceito de área em anos anteriores.

5.2 Análises Prévias: A dimensão Didática

Os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1998) do Ensino Fundamental apresentam a Geometria como meio de propiciar capacidades cognitivas fundamentais nos alunos, e quanto ao seu ensino, deve apresentar aspectos inovadores, não apenas na dimensão de conceitos, mas também na dimensão de procedimentos e atitudes. O domínio de conceitos como de áreas de figuras planas, tem uma importante funcionalidade social na medida em que precisamos desses conceitos constantemente em nossas vidas.

Os PCN trazem uma sessão em que especifica os conceitos de Geometria Euclidiana plana e a forma de abordagem em cada ano do ensino fundamental, no qual há também a especificação do conteúdo áreas de figuras planas irregulares (BRASIL, 1998, p. 74 e 89).

Os PCN fazem uma apresentação geral da Geometria, enquadrando a área de figuras planas no bloco *Espaço e Forma*, (BRASIL, 1998, p. 51), e relacionando-a com o bloco *Grandezas e Medidas*, pois nesse bloco, a obtenção de algumas medidas não diretamente acessíveis requer o envolvimento de conceitos e procedimentos geométricos (BRASIL, 1998, p. 52).

A Geometria do bloco *Espaço e Formas* tem o objetivo de desenvolver no aluno um tipo essencial de pensamento, que permite ao mesmo “compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive” (BRASIL, 1998).

Os PCN (BRASIL, 1998) ainda afirmam que:

Deve destacar-se também nesse trabalho a importância das transformações geométricas (isometrias, homotetias), de modo que permita o desenvolvimento de habilidades de percepção espacial e como recurso para induzir de forma experimental a descoberta, por exemplo, das condições para que duas figuras sejam congruentes ou semelhantes. (BRASIL, 1998, p. 51).

Já com relação ao bloco *Grandezas e Medidas* a Geometria é vista pela sua relevância social e seu caráter prático e sua utilidade, também pela sua possibilidade de variadas conexões com áreas de conhecimentos afins, entre outras. Na vida e na sociedade encontramos conceitos de Geometria, desse modo, desempenha um importante papel no currículo, pois se mostra claramente ao discente a utilidade desse conhecimento no dia a dia.

É importante pensar em Geometria como uma possibilidade de manter articulações férteis com muitos outros blocos de conteúdos. Também, em relação aos conteúdos, os PCN (BRASIL, 1998) relatam que:

No desenvolvimento de conteúdos referentes à geometria e medidas, os alunos terão também oportunidades de identificar regularidades, fazer generalizações, aperfeiçoar a linguagem algébrica e obter fórmulas, como para os cálculos das áreas (BRASIL, 1998, p. 118).

Espera-se que o aluno tenha um bom domínio de conceitos geométricos de maneira que observe padrões e regularidades, e que seja capaz de fazer deduções simples. Os PCN (BRASIL, 1998) afirmam que a tecnologia, por exemplo, pode servir de veículo para o desenvolvimento de tais habilidades.

Para Rocha e Andrade (2008), um aspecto que dificulta o processo de aprendizado desse conceito nos anos finais do Ensino Fundamental, é a abordagem minimalista e reducionista que se limita ao ensino de fórmulas. De acordo com Rocha e Andrade (2008), o conceito de área ensinado é geralmente restringido as figuras poligonais, a exceção é o círculo, não dando atenção a figuras irregulares, principalmente aquelas não poligonais que, dificilmente são abordados em livros didáticos.

Alunos do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental, como cita Duarte (2004), precisam aprender significativamente as noções de áreas para compreender problemas diários que aparentemente possam parecer simples, mas que podem se tornar grandes obstáculos. Duarte (2004) também afirma que o domínio desses conceitos evita equívocos dos alunos com relação a diferença entre perímetro e área.

Duarte (2004) faz uso dos textos de Baltar (1996) que pesquisou sobre a dificuldade com relação ao conceito de área na educação francesa, no entanto, a problemática era perfeitamente aplicada ao Brasil, os alunos possuíam uma grande dificuldade em construir o conceito de área. Este autor ainda afirma que, dentre os principais erros cometidos pelos estudantes os mais comuns relacionavam-se à:

Confusão entre área e perímetro, a utilização de fórmulas errôneas e o uso inadequado de unidades (a expressão da medida da área de uma superfície cujo comprimento dos lados é dado em metros, por exemplo, é dada em metros, em metros cúbicos ou mesmo em centímetros, ao invés de metros quadrados) (DUARTE, 2004, p. 1).

Ainda de acordo com Duarte (2004), a característica do conceito de área segue a partir da distinção de três quadros: o geométrico, o numérico e as grandezas. Cada quadro possui características importantes e únicas o que não significa que eles não têm certa relação um com os outros, pelo contrário. Desse modo o quadro geométrico é aquele que possui como características as figuras planas, tais como, os quadrados, retângulos, triângulos, entre outras. O quadro numérico consiste nas medidas das superfícies, ou seja, em um conjunto de números reais não negativos. O quadro das grandezas envolve justamente o contexto próprio da noção de área, que faz parte dos dois primeiros, sendo formalmente caracterizado como classes de equivalência de áreas iguais.

Didaticamente para esse autor, tem-se como hipótese que deve ser considerada no estudo de conceitos de áreas de figuras planas, a distinção e articulação de cada um desses quadros, para suprir possíveis carências provocadas pelo uso, em alguns casos, unitário do livro didático como cita Rocha e Andrade (2008).

Esses autores afirmam que os professores de Matemática em sua maioria no Ensino Fundamental, desenvolvem as noções de áreas apoiando-se unicamente nos livros didáticos, introduzindo esses conceitos associando a uma superfície particular e regular, e logo passam ao cálculo da área, sem dar ênfase nas propriedades e aplicando simplesmente fórmulas.

Para se calcular áreas de figuras irregulares sejam elas poligonais ou não poligonais, podemos aplicar diferentes estratégias, como a decomposição de figuras e o Teorema de Pick como vimos nas figuras 16 e 17. Os professores no ensino fundamental geralmente limitam-se ao ensino de figuras simples, tendo como consequência um aprendizado pouco eficiente. De acordo com Rocha e Andrade (2008), as dificuldades no ensino-aprendizado de conceitos de áreas em geral vêm dos próprios docentes que restringem tais estratégias em suas aulas.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1998) mostraram índices de avaliações feitas nos anos 1990 onde se percebeu certa insatisfação quanto à Matemática, visto que o rendimento geral se situou abaixo de 50%, destacando um ensino que não leva em consideração os aspectos vinculados a prática cotidiana e que o pior índice referia justamente ao campo da Geometria.

Os estudos apresentados ressaltam a importância de investimento na Educação Básica principalmente no Ensino Fundamental, mas, também, requer pesquisas que supram essa carência e que proporcionem um aprendizado mais ligado ao cotidiano do aluno.

Esperamos que com essa pesquisa que trata do ensino-aprendizagem de áreas de figuras planas irregulares, utilizando como metodologia a Engenharia Didática, tendo o

auxílio de um *software* geométrico que permite Geometria Dinâmica, possa nos propiciar meios para desenvolver conceitos mais significativos.

5.2.1. Abordagem geométrica nos livros didáticos

Nesta sessão apresentaremos uma análise prévia da forma como o estudo dos conceitos de Geometria é abordado em uma coleção de livros didáticos de Matemática, principalmente com relação ao cálculo de área de figuras irregulares nos anos finais do Ensino Fundamental. Consideramos o livro didático como um recurso importante da ação do professor, seja ela antes na preparação da aula ou durante a aula, na sala.

Tomamos como referência a coleção de quatro livros intitulada “*Matemática: compreensão e prática*”, do autor Silveira (2015), publicada em 2015 para os anos finais do Ensino Fundamental e que está sendo utilizada na escola de referência desta pesquisa.

O Quadro 1 nos mostra os conteúdos de Geometria no Ensino Fundamental dedicado a esses anos.

Quadro 1-Distribuição dos conceitos geométricos nos anos finais do Ensino Fundamental

Distribuição dos conteúdos geométricos –Anos do Ensino Fundamental			
6º ano	7º ano	8º ano	9º ano
(Cap. 4): Sólidos geométricos, Poliedros; Corpos redondos; Planificação de sólidos geométricos. (Cap. 9): Figuras geométricas planas, Representação do ponto, da reta e do plano; Polígonos; Triângulos, Quadriláteros; Circunferência e círculo. (Cap. 11): Medidas de superfície, Metro quadrado; Área do retângulo e Área do quadrado.	(Cap. 6): Ângulos e seus elementos, Medida de ângulos; Transformação de unidades; Ângulos Congruentes, Adjacentes; Bissetriz de um ângulo; Ângulos complementares e suplementares e Ângulos opostos pelo vértice.	(Cap. 6): Polígonos e simetria, Polígonos convexo e não convexo; Classificação, Perímetro, Diagonais, Ângulos externos e internos de um polígono; Simetria. (Cap. 10): Triângulos, Classificação; Casos de Congruências; Soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo; Propriedades dos triângulos isósceles e retângulos. (Cap. 11): Quadriláteros - soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero convexo; Paralelogramos e trapézios.	(Cap. 9): Polígonos regulares, Relações métricas nos polígonos regulares. (Cap. 10): Áreas de figuras planas, área do retângulo, do quadrado e do paralelogramo; Área do trapézio e do losango; Área de um polígono regular; Área do círculo.

Fonte: Silveira (2015)

Os conteúdos geométricos no 6º ano (estudo de sólidos geométricos e algumas de suas especificações como a planificação dos mesmos) encontram-se a partir do quarto capítulo e no nono capítulo o autor destaca o estudo de figuras geométricas.

Notamos no livro do 6º ano que o autor quis enfatizar o estudo das figuras planas a partir das não planas. O autor Silveira (2015) mostra exemplos de formas não planas destacando sua importância e presença no dia a dia, relacionando-as com as encontradas naturalmente em ruas, na natureza, entre outras, como mostra a Figura 18.

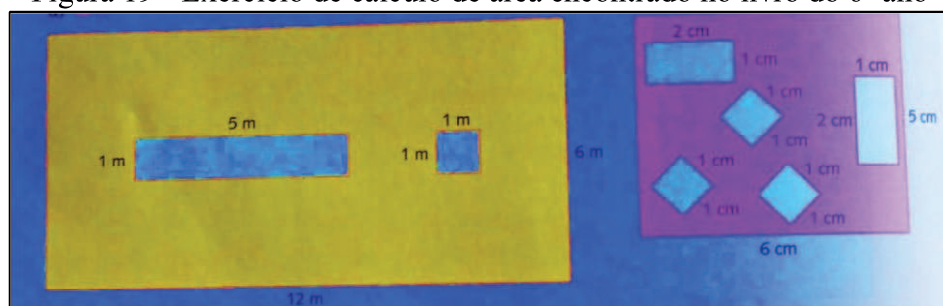
Figura 18 - Exemplos de figuras não planas no livro do 6º ano



Fonte: Silveira (2015, p. 82)

O cálculo de área de figuras planas é discutido no capítulo 11, penúltimo capítulo do livro. É feita a priori uma introdução, onde o autor Silveira (2015) mostra algumas imagens e sugere que sejam feitas observações a respeito das unidades de medidas como metro quadrado, metros cúbicos, e outras. Em seguida o autor, mostra as fórmulas do quadrado e do retângulo em seguida propõe alguns exercícios, como na Figura 19. Neste exercício pede-se que seja calculada a área da figura colorida (amarelo e rosa), usando as fórmulas dadas anteriormente.

Figura 19 - Exercício de cálculo de área encontrado no livro do 6º ano



Fonte: Silveira (2015, p. 262)

No livro do 8º ano, composto por 12 capítulos, três são reservados para os conceitos geométricos (capítulos 6, 10 e 11). O sexto capítulo trata de “polígonos e simetria”. O autor

inicia com uma breve definição de polígonos, polígonos convexos e não convexos, classificando os mesmos (baseados no critério de polígonos convexos), isto é, em triângulos, quadriláteros, pentágonos, e assim por diante.

Um fato importante e que nos chamou a atenção foi o autor trabalhar perímetro, isso pode ser útil em capítulos seguintes, para a questão do estudo de áreas, o aluno que compreende bem esse conceito terá um pouco mais de facilidade quando for estudar a área de tais polígonos. Como afirma Duarte (2004), o aluno deixa de cometer o equívoco de trocar área por perímetro e vice-versa quando o mesmo domina os dois conceitos.

Não notamos no livro do 8º ano, livro do aluno, nenhuma sugestão para se trabalhar com as tecnologias para o ensino de conceitos de Geometria, faltou, ao nosso ver um pouco de iniciativa por parte do autor em propor atividades fazendo uso das TIC em sala de aula. Sabemos que ao utilizar as TIC como meio auxiliador o ensino-aprendizagem pode sofrer influência positiva.

Outro capítulo que está relacionado à Geometria é o capítulo 10, nele o autor Silveira (2015) apresenta a definição de triângulos, trabalha a soma dos ângulos internos e externos, os casos de congruências, e demais especificações dos triângulos. Já no capítulo 11, o autor retoma parte vista no capítulo 6, ou seja, o estudo dos quadriláteros, desta vez dando um pouco mais de atenção. Silveira (2015) mostra a soma dos ângulos internos dos quadriláteros, depois parte para a definição de paralelogramos e trapézios.

Com relação aos conteúdos referentes ao 9º ano, estão assim expostos: capítulo 9, definição de polígonos regulares e relações métricas nos mesmos; capítulo 10, inicia com as áreas de figuras planas, ou seja, a área do retângulo, do quadrado e do paralelogramo, bem como a área do trapézio e do losango e área de um polígono regular.

Os conteúdos de Geometria que tratam do nosso foco de estudo são colocados nos últimos capítulos dos livros analisados. Esse fato pode ser um dos motivos pelos quais professores não lecionem tais conteúdos, pois ouvimos constantes reclamações de professores que afirmam não dar tempo de lecionar tudo, e vez ou outra, muitos conteúdos importantes acabam sendo preteridos pelos docentes. Além disso, se isto ocorre, podemos associar também ao fato do livro didático ser utilizado como roteiro que guia o currículo a ser ensinado.

No Quadro 2, a seguir, situamos o estudo do cálculo de área de figuras irregulares (poligonais ou não poligonais) de acordo com a coleção do autor Silveira (2015) utilizada na escola de referência e adotada nos anos finais do Ensino Fundamental.

Quadro 2 - O cálculo de área de figuras irregulares: *Matemática: compreensão e pratica*

Cálculo de área de figuras irregulares poligonais e não poligonais			
6º ano	7º ano	8º ano	9º ano
Área do retângulo	Não aborda cálculo de área de figuras planas	Não aborda cálculo de áreas de figuras planas	Área do retângulo; do triângulo; área do losango e do círculo

Fonte: Silveira (2015)

No 6º ano, no único momento que o autor trata do cálculo da área de uma figura poligonal irregular é para o caso do retângulo. O ensino do cálculo de área do retângulo se remete ao uso de fórmulas. Assim como no livro do 9º ano, para os cálculos das áreas do triângulo, com exceção do triângulo equilátero que é regular, área do losango, exceto o losango com ângulos retos que também é regular, e a área do círculo.

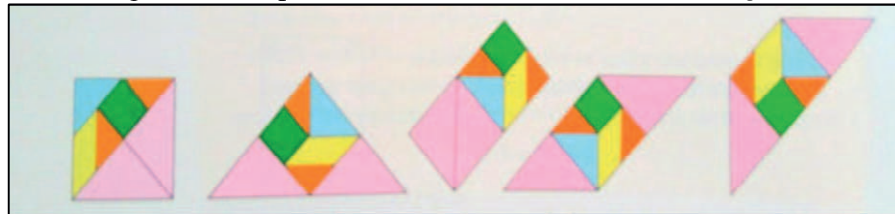
As dificuldades com relação ao conteúdo de cálculo de área de figuras planas irregulares são relacionadas às formas como essas figuras são apresentadas. Quando pensamos em figuras poligonais conseguimos através de algumas técnicas como o uso da decomposição em figuras com aspectos conhecidos como quadriláteros e triângulos, encontrar a sua área, porém quando temos uma figura não poligonal os procedimentos se tornam um pouco mais complicados tanto para o docente, quanto para o aluno, pois no processo de ensino-aprendizado de áreas de figuras planas, existe um certo receio em trabalhar com figuras áreas de figuras planas irregulares (BIGODE, 2013, p. 42).

Numa outra coleção de quatro livros/manuais do professor para os anos finais do Ensino Fundamental do autor Antônio Lopes (BIGODE, 2013), analisamos o tratamento dado pelo autor para o tema cálculo de áreas de figuras planas irregulares. Percebemos que o tema não está sendo explorado, no máximo são apresentadas figuras irregulares planas para o conhecimento do aluno. O autor não trabalha estratégias para o cálculo dessas áreas. Para as figuras irregulares, mas poligonais, são utilizadas as decomposições em outras figuras, fato esse, percebido também na coleção de Silveira (2015).

Bigode (2013) sugere no livro do 8º ano, que o ensino do cálculo de áreas de figuras planas irregulares possa ser intermediado usando o *Tangram*. Segundo o autor, dificuldades podem ser superadas com o uso desse instrumento, uma vez que, os alunos terão a oportunidade de entender a equivalência entre áreas. Na figura 20, a metodologia adotada tem o objetivo de deduzir a fórmula das áreas de triângulos e quadriláteros a partir de alguns

teoremas que podem ser intuídos pelos alunos por meio da manipulação do *Tangram* (BIGODE, 2013).

Figura 20 - Equivalência entre áreas usando o *Tangram*



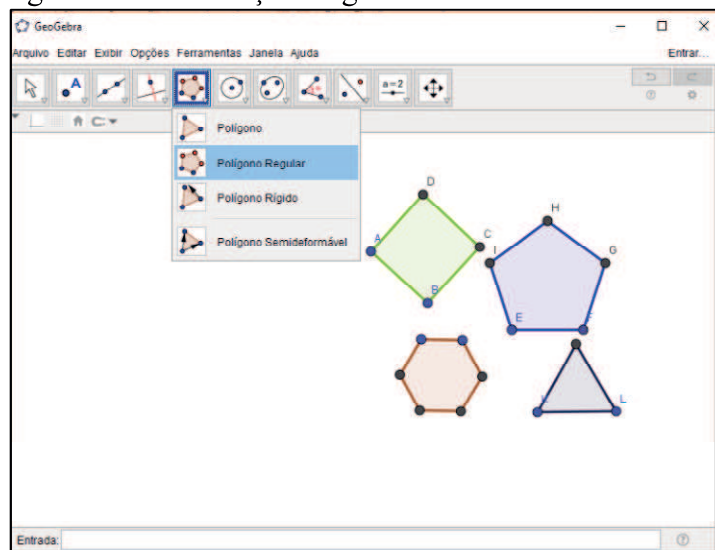
Fonte: Bigode (2013, p. 50)

5.2.2 Possibilidades do GeoGebra para o estudo das figuras poligonais

Nesta dimensão didática, também podemos considerar as possibilidades para o trabalho dos alunos e do professor no que diz respeito ao estudo das figuras poligonais irregulares apoiados no *software GeoGebra*.

No *GeoGebra* existe uma ferramenta chamada *polígono* a partir da qual é possível a obtenção dos polígonos regulares e irregulares sem qualquer conhecimento sobre suas propriedades. De fato, para polígonos regulares basta que o aluno acesse o *menu* e escolha a ferramenta *polígono regular* onde abrirá uma janela para que o mesmo escolha a quantidade de lados do polígono na figura a seguir fizemos polígonos com 3, 4, 5 e 6 lados.

Figura 21 - Construções regulares no *software GeoGebra*

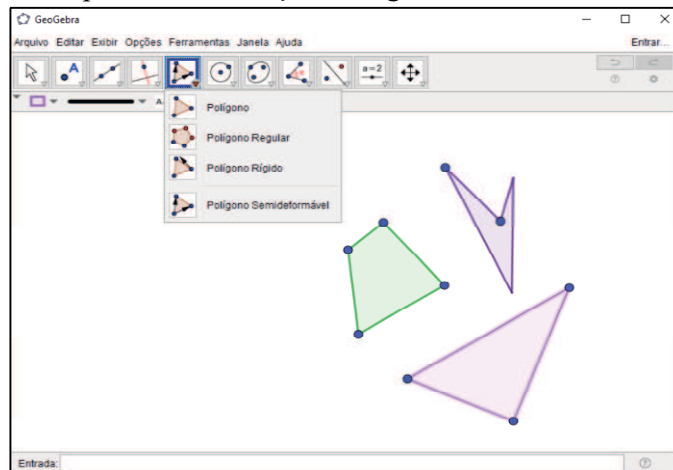


Fonte: Autor (2017)

No caso das figuras regulares, quando movimentamos seus vértices, elas não sofrem alterações nas suas propriedades mantendo os lados iguais e as medidas dos seus ângulos. A única modificação acontece com relação ao seu tamanho.

Para obter figuras irregulares utilizando a mesma ferramenta, ou seja, *polígono*, podemos utilizar os demais itens desse *menu*, que gera polígonos regulares. Na figura a seguir (figura 22) ilustramos alguns casos.

Figura 22 - Exemplos de construções irregulares com a ferramenta Polígono



Fonte: Autor (2017)

A figura de cor verde foi gerada usando polígono em que vamos unindo pontos até fechar a figura tornando-a, de fato, um polígono; a figura de cor roxa foi criada utilizando *polígono rígido*. Esse tipo de figura irregular caracteriza-se por se manter inalterada, isto é, conseguimos movimentá-la de um lado para outro sem que sua forma se altere; por fim, para a figura cor de rosa, fizemos a construção de um polígono irregular usando o *polígono semi deformável* onde podemos movimentar alguns de seus pontos, enquanto o primeiro ponto construído, ao ser movimentado, move a figura por completa e não altera a forma, os demais pontos podem alterar a imagem transformando-a, por exemplo, em uma reta. Esse tipo de construção diferencia da figura de cor verde porque é possível sofrer modificações a partir de todos os seus pontos.

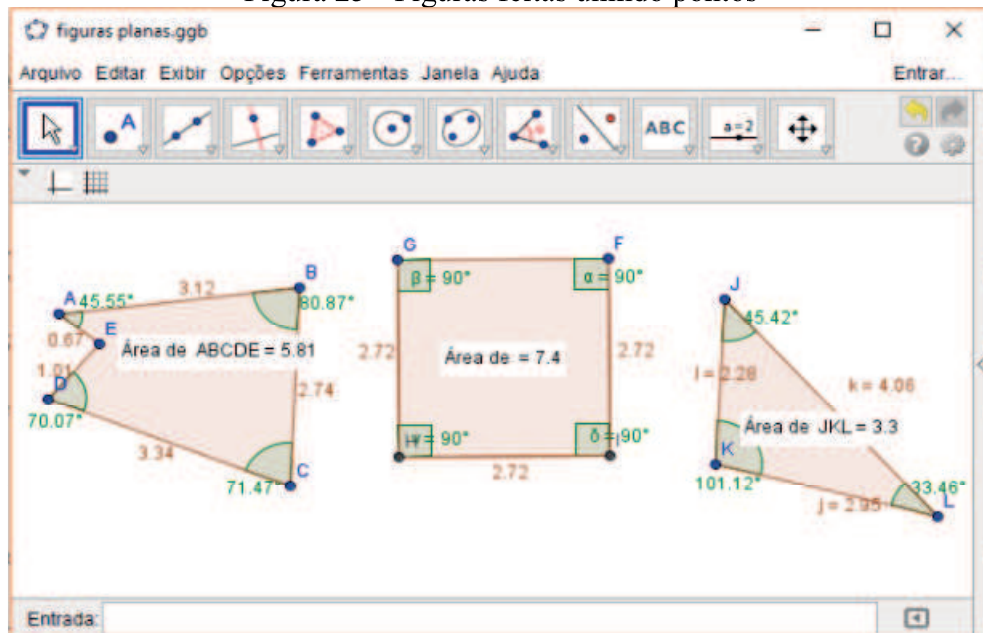
Nesse caso podemos obter polígonos irregulares como em formato de “pipa”, triângulos, retângulos trapézios, entre outros. Alternativamente, também podemos construir figuras regulares e irregulares através de ferramentas simples de desenhos. Estas podem ser do tipo “robustas” porque resistem a ação de arrastar de qualquer um dos seus vértices, ou tipo “mole”, quando ao contrário.

Nas construções robustas, as figuras são obtidas através de procedimentos de construção geométrica. Estas representam aos alunos construções que diferem daquelas tradicionais que o mesmo costuma fazer com o lápis e papel. Quando pedimos para que eles utilizem o *software GeoGebra*, por exemplo, um simples traçar de uma reta acaba se tornando uma construção robusta, ou seja, o elemento novo, é na verdade o conceito de construções robustas, em meio a isso, está a dificuldade de manuseio técnico deste *software* (ARAÚJO, 2007, p. 212).

Para construir figuras planas irregulares no *software GeoGebra*, além do uso da ferramenta *polígono*, também permite a construção a partir de pontos aleatórios, unindo-os até fechar a figura. Nesse caso a figura não resiste à ação de arrastar qualquer vértice. Chamamos essa construção de *construção livre*. Para unir os pontos traçados aleatoriamente podemos clicar nos pontos até formar o polígono, utilizando a ferramenta *polígono*. Outra maneira é, utilizar a ferramenta *segmentos* e unir os pontos através de segmentos.

A seguir, na figura 23, temos alguns polígonos obtidos no *GeoGebra* a partir de construções livres. Os pontos foram criados de maneira aleatória. Podemos ver os valores da área (dada em cm^2) do triângulo JKL e dos quadriláteros ABCDE e FGHI, ambos criados a partir de pontos aleatórios.

Figura 23 - Figuras feitas unindo pontos



Fonte: Autor (2017)

5.3 Análises Prévias: A Dimensão cognitiva

A identificação das dificuldades dos alunos em relação ao tema abordado é indispensável para se pensar em práticas de intervenções ou em processos metodológicos futuros para a sala de aula. Esse levantamento está de acordo com a primeira fase da metodologia da Engenharia Didática que visa conhecer um ambiente em que se desenvolve certo conteúdo.

Neste tópico descreveremos e comentaremos, para cada uma das seis questões, os resultados da aplicação do questionário diagnóstico.

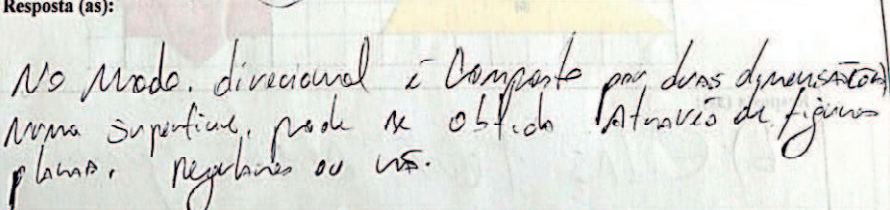
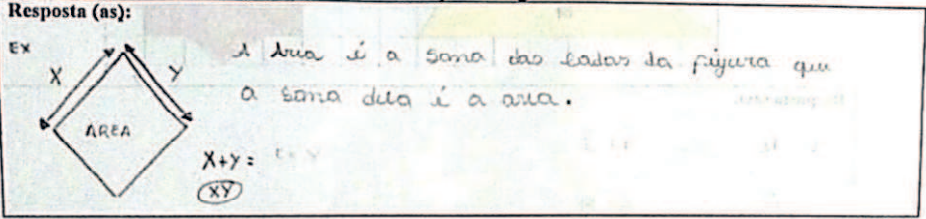
5.3.1 Questão 1

Com a primeira questão perguntamos: “para você, o que significa área de uma superfície geométrica?”. Tínhamos o objetivo de identificar o conceito ou a ideia de área que os alunos possuem ou se tais respostas eram adequadas. Uma análise quantitativa dos resultados nos mostram que:

- 12 (doze) alunos, isto é 41%, apresentaram respostas que podemos considerar satisfatória, de modo que podemos afirmar que os alunos formaram um conceito de área coerente.
- 5 (cinco) alunos ou 18% confundiram área como sendo a soma das medidas dos lados, ou seja, área como sendo o perímetro de uma figura. Notamos que essa troca de conceitos não se tratou de casos isolados, o que mostra uma dificuldade de alguns alunos em compreender e utilizar a definição de área de figuras planas.
- 12 (doze) alunos não souberam responder, ou seja, 41% dos alunos questionados erraram.

Para ilustrar as respostas dadas a essa primeira questão, traremos alguns registros dos alunos para exemplificar.

Figura 24 - Respostas apresentadas pelos Alunos A, B e C para a questão 1

Aluno A	
Resposta (as):	
Aluno B	
Resposta (as):	
Aluno C	
Resposta (as):	A ÁREA

Fonte: Questionário diagnóstico

A resposta do aluno A foi bem interessante, apesar de ele não exemplificar na sua resposta o conceito de área, mostrou um conhecimento de dimensão muito importante na

Geometria Euclidiana plana. Na resposta do Aluno B, observamos que há um engano na formação do conceito de área ao confundir o cálculo da área com o cálculo do perímetro da figura. Sabemos que em Geometria a área equivale a medida da superfície de uma figura geométrica (dimensão numérica da área, o que é dado maior ênfase nos anos finais do Ensino Fundamental segundo (DUARTE, 2004).

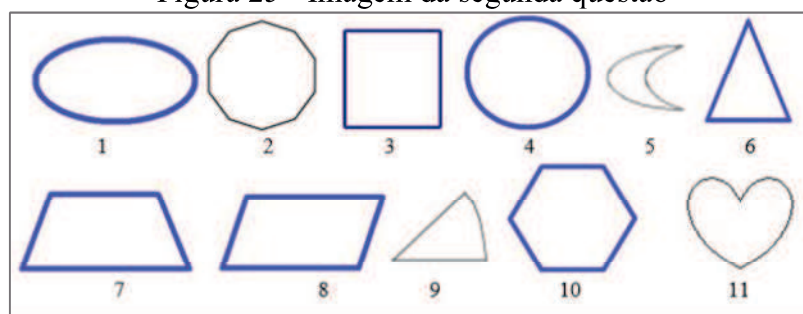
A resposta do aluno C, não apresentou sentido, mas achamos interessante mostrar pelo fato de ser uma resposta inesperada. Essas dificuldades são inerentes dos alunos nesta etapa do Ensino Fundamental como afirma Duarte (2004). Esse fato foi constatado quando alguns alunos apresentaram a área como sendo a soma dos lados.

5.3.2 Questão 2

A segunda questão tinha o objetivo de saber se os alunos conheciam a definição ou conceito de figuras planas regulares. Desse modo esperávamos que os alunos indicassem como resposta certa aquelas figuras em que todos os lados fossem iguais assim como os ângulos.

A pergunta era a seguinte “*Observe as figuras a seguir. Entre elas, quais podem ser classificadas como superfície plana regular ou superfície plana irregular?*”. Vejamos a figura 25, extraída do questionário.

Figura 25 - Imagem da segunda questão



Fonte: https://www.google.com.br/search?q=figura+plana&source=lnms&tbm=isch&as=X&ved=0ahUKEwjso-fy_rvUAhVM2SYKHUMgB-UQ_AUIBigB&biw=1366&bih=672. Acesso em 29 de jun. 2017

Vemos nas 11 (onze) figuras da imagem, coletadas da internet, exemplos de figuras regulares e irregulares. Uma figura é considerada regular quando os seus lados e seus ângulos internos e externos são todos iguais. Sendo assim, podemos considerar como figuras regulares

no quadro, as figuras 2, 3 e 10. As demais são irregulares, sejam por conter linhas curvas ou por ter lados diferentes e/ou ângulos diferentes. Quanto às respostas dos alunos, temos que:

- 4 (quatro) alunos, isto é, 14% afirmaram que as figuras regulares são as figuras 2, 3 e 10, portanto também acertaram as figuras irregulares. Podemos concluir que esses alunos souberam identificar de figuras planas regulares.
- Os demais alunos, contabilizado 86% isto é, 25 alunos, não souberam responder à questão adequadamente. No entanto, chegaram a colocar as figuras 2,3 e 10 como regulares, mas também colocaram outras figuras irregulares como regulares. Por exemplo, as figuras 6 e 8, mostrando um equívoco com relação a definição de figura regular.

Vamos ver, em seguida, para cada figura o total de acertos, lembrando que essa relação não contraria as análises anteriores dessa questão. Nosso objetivo é de analisar quais figuras irregulares são comumente confundidas com regulares e vice-versa. Vejamos a Tabela 1 a seguir.

Tabela 1 - Resultados obtidos na questão 2

Figuras	Classificação	Acertos (%)	Quantidades de alunos
1	Elipse (não regular)	62%	18
2	Decágono (regular)	72%	21
3	Quadrado (regular)	93%	27
4	Círculo (não regular)	55%	16
5	Meia lua (não regular)	93%	27
6	Triângulo (não regular)	31%	9
7	Trapézio (não regular)	69%	20
8	Paralelogramo (não regular)	44%	13
9	Setor circular (não regular)	89%	26
10	Hexágono (regular)	96%	28
11	Coração (não regular)	86%	25

Fonte: Questionário diagnóstico

Podemos observar que as figuras 1, 4, 6 e 7 todas irregulares, comumente são confundidas como regulares, ou seja, os alunos acabam afirmando que as mesmas são regulares por terem um aspecto conhecido/familiar como as elipses e o círculo, porém, em suas definições e pelos seus aspectos notamos que estas são irregulares, principalmente por não possuírem lados (possuem contornos), um dos requisitos para termos um polígono regular

é que o mesmo tenha lados iguais entre si. Outra figura que teve muitas respostas dos alunos afirmando que o mesmo é uma figura regular é a figura 7, ou seja, o trapézio, mas apesar de ser polígono ele tem, como é o caso da figura que foi apresentada no questionário, lados paralelos diferentes e sendo assim caracterizado por um polígono irregular.

Percebemos o oposto também, isto é, figuras que são regulares, alguns alunos afirmarem que eram irregulares, como as figuras 2, 3 e 10, esse fato demonstra falhas na construção do conceito de figuras regulares tanto na série atual como em anos anteriores dos alunos.

Figura 26 - Respostas dos alunos para a questão 2

Aluno K
<p>Resposta (as):</p> <p>PLANA REGULAR: 1, 3, 4, 6, 7, 8, 10</p> <p>PLANA IRREGULAR: 2, 5, 9, 11</p>
Aluno R
<p>Resposta (as):</p> <p>▶ Plana Regular são as que tem seu lados iguais ex: 3, 7, 8, 10, 6</p> <p>Plana irregular são as que tem seus medidos dos lados desiguais. ex: 1, 4, 5, 11, 9</p>
Aluno S
<p>Resposta (as):</p> <p>plana regular: 2, 3, 6, 10</p> <p>plana irregular: 1, 4, 5, 7, 8, 9, 11</p>

Fonte: Questionário diagnóstico

Nas imagens percebemos que em meio aos erros, os alunos colocaram figuras certas. Podemos observar nas respostas dos alunos K, R e S que colocaram corretamente as figuras 3 e 10 como regulares, porém as demais deveriam estar classificadas como irregulares.

As respostas desses três alunos foram comuns a outros 23 alunos, ou seja, 86% dos alunos questionados colocaram as respostas embaralhadas, figuras planas regulares com figuras planas irregulares como sendo a mesma coisa. Esse fato indica-nos que a um certo desconhecimento de teorias/definições como cita Manrique, Silva e Almouloud (2002).

De fato, as dificuldades com relação a conceitos geométricos de acordo com Manrique, Silva e Almouloud (2002), estão ligadas ao reconhecimento do estatuto, ou seja, definições, postulados e teoremas (hipóteses/conclusão) o que justifica a incoerência nas

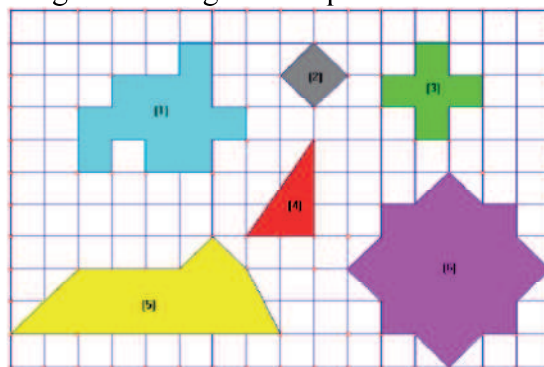
repostas da grande maioria dos alunos questionados. A falta de domínio do conceito de figura regular fica bem evidente com as análises de cada aluno como vimos na Figura 26.

As figuras poligonais irregulares são comumente confundidas com as poligonais regulares pois os alunos não se atentam para a definição de figuras regulares que tem lados e ângulos congruentes. Eles cometem equívocos, como no caso do aluno K, que afirmou que as figuras 7 e 8 são regulares quando não são, justamente por possuírem lados diferentes, na figura 7 temos um trapézio e na figura 8 um paralelogramo.

5.3.3 Questão 3

A terceira pergunta do questionário era: “*Observe as figuras (1, 2, 3, 4, 5 e 6) desenhadas na malha quadriculada. Sabendo que cada quadradinho da malha tem 1 u.a (unidade de área), a) Calcule a área de cada figura; b) O que acontece se em duas ou mais figuras tiver a mesma quantidade de quadradinhos?*”.

Figura 27 - Figuras da questão 3

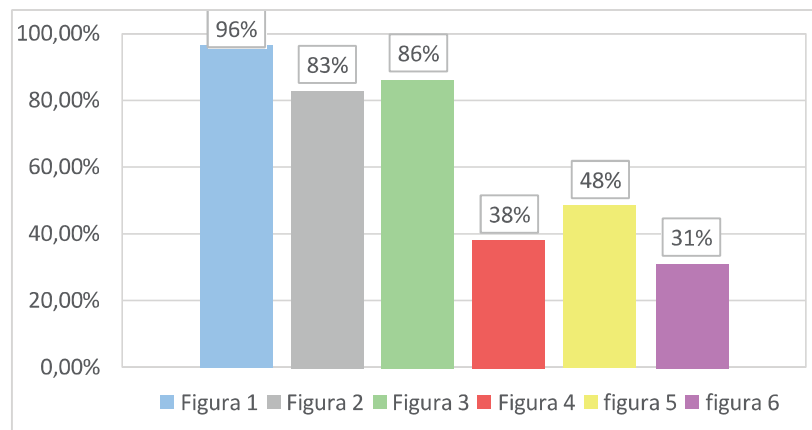


Fonte: Adaptado de SECCO (2007)

Com relação a quantidade de unidade de área, houve muitas respostas certas, principalmente para aquelas figuras em que a contagem de quadradinhos era direta, ou seja, tinha quadrados inteiros e pela metade, como é o exemplo das figuras 1, 2 e 3.

Já para as demais figuras o índice de acerto caiu consideravelmente devido à dificuldade em contar os quadrados. Apesar da figura 6 ser composta de quadradinhos inteiros e metades, o índice de acerto foi o mais baixo das seis figuras. Um dos motivos para que esse fato tenha ocorrido pode ser com relação à quantidade de unidades de área que possuía a maior figura. Vejamos a seguir o gráfico 1 que mostra os acertos dos alunos em cada figura.

Gráfico 1- Estatística de acertos em cada figura

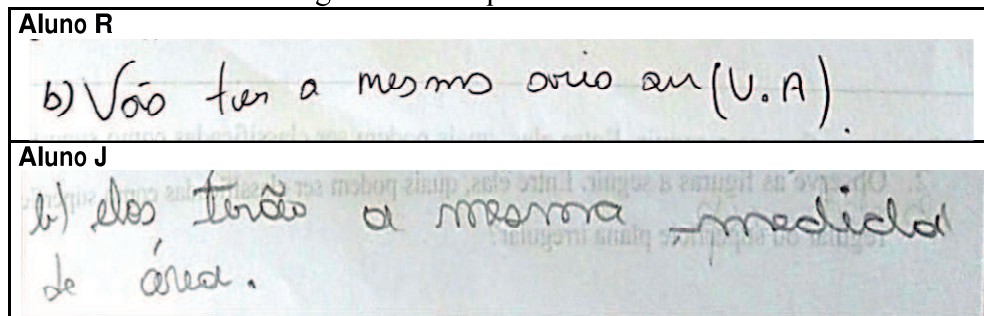


Fonte: Questionário diagnóstico

- As figuras cujas somas das unidades de área da malha quadriculada eram compostas de quadrados completos, como o caso das figuras 1 e 3, apresentaram acertos elevados de 96% e 86% respectivamente. A figura 2 também obteve um percentual de acerto alto pelo fato de ser formada por quatro metades de quadrados, o que facilitou muito a observação e contagem dos alunos. Em síntese essas três figuras apresentaram nível de dificuldade considerado baixo.
- É notória a queda de acertos nas questões em que os quadrados não foram divididos ao meio, como é o caso das figuras 4 e 5, que tiveram, respectivamente, 38% e 48% de acertos. Não houve tentativas de resoluções por fórmulas, apesar do docente responsável já ter trabalhado com as fórmulas das áreas do quadrado, triângulo, retângulo, trapézio entre outras. Concordamos com Secco (2007) ao afirmar que o uso da malha quadriculada inibe, de fato, o uso de fórmulas, o aluno fica habituado a contar os quadrados somente.
- A figura 6, ao contrário do que achávamos, gerou dificuldades. Ela é composta por 16 quadrados completos e 8 metades de quadrados, isto é, um total de 20 quadrados, 20 unidades de área. Talvez a dificuldade dos alunos tenha ocorrido devido à quantidade de quadrados, visto que essa era a maior figura da questão, ou simplesmente por descuido. Apenas 9 acertos para esta figura, o que corresponde a 31%, configurando-se assim como a figura que teve o maior índice de erro.

Com relação ao item b), esperávamos que os alunos afirmassem que elas são equivalentes ou que teriam a mesma área. No total 12 (doze) alunos, 41%, deram uma resposta coerente. Vejamos na figura 28, algumas soluções dos alunos.

Figura 28 - Respostas dos alunos R e J



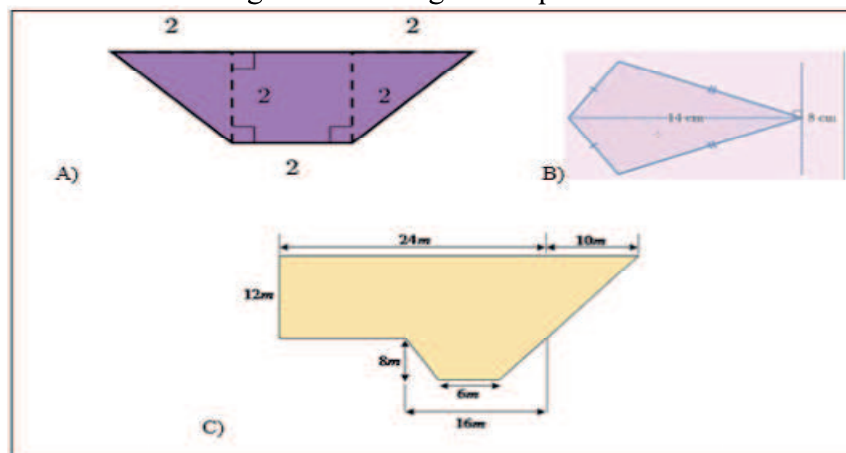
Fonte: Questionário diagnóstico

Os demais, 17 alunos, deixaram a alternativa b) em branco, em porcentagem esse valor corresponde à 59% dos alunos questionados. Talvez os mesmos não se atentaram para o enunciado da questão ou ficaram preocupados em dar a área da figura, o que se pedia no item a).

5.3.4 Questão 4

A questão 4 era a seguinte: “Calcule nas alternativas A, B e C as respectivas áreas de formas compostas”. Nessa questão usamos três figuras coletadas da internet. A figura 29, a seguir, apresenta a questão 4.

Figura 29 - Imagem da questão 4



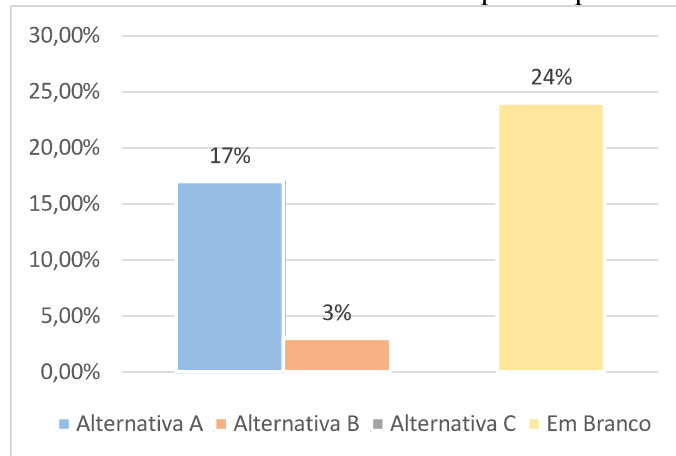
Fonte: <http://brasilecola.uol.com.br/matematica/area-uma-regiao-plana.htm>.
Acesso no dia 29 de jun. 2017

Notamos muitos erros nas alternativas. Nessa questão seria necessário que os alunos tivessem o conhecimento básico de como calcular a área de triângulos, retângulos, quadrados e trapézios. Essas fórmulas de áreas seriam pré-requisitos para encontrar as áreas das figuras que eram compostas por esses polígonos. Observemos que a composição foi de alguma forma

induzida no item A) pela marcação na figura, no item C) pelas medidas dadas, mas no item B) a composição da figura era a menos evidente.

A seguir, vemos no gráfico 2, a quantidade de acertos em cada alternativa e a porcentagem de alunos que não tentaram responder, ou seja, que deixaram a quarta questão em branco.

Gráfico 2 - Estatística de erros e acertos para a questão 4



Fonte: Questionário diagnóstico

De acordo com o gráfico, observamos que:

- 17% dos 29 alunos, porcentagem correspondente à 5 (cinco) alunos, conseguiram acertar a alternativa (A);
- Somente um aluno acertou a alternativa (B), esse valor em porcentagem equivale a 3% dos alunos do total de 29 alunos;
- Já para a alternativa (C) não teve nenhum aluno que conseguiu acertar;
- Os que não tentaram encontrar as áreas de cada item presente na questão 4, ou seja, deixando-as em branco, foram 7 alunos, representado 24% dos questionados.

É importante ressaltar que o único aluno que acertou a alternativa (B) foi um dos que também acertou a alternativa (A). A alternativa (A) era composta de um quadrado de lado 2 e dois triângulos cuja base e altura mediam 2. Portanto, a área total pode ser encontrada pela soma das áreas 1 e 2, como a seguir:

$$Area\ 1 = lado * lado = 2 * 2 = 4$$

$$Area\ 2 = 2 * \frac{base * Altura}{2} = 2 * \frac{2 * 2}{2} = 2 * 2 = 4$$

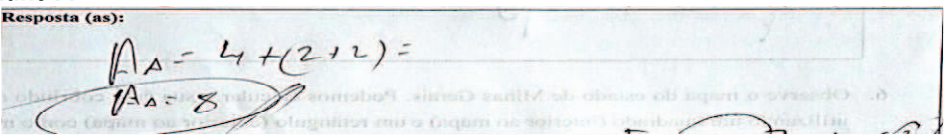
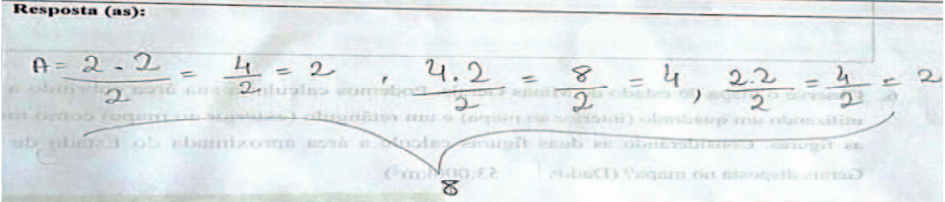
$$Area_{total} = 4 + 4 = 8$$

A área 1 é a área do quadrado de lado 2, e a área da 2 são os dois triângulos de base e altura 2, assim a área da figura composta por triângulos e um quadrado é no total 8, como não demos nenhuma unidade de medida, o aluno poderia simplesmente dizer que a área é 8 u.a, ou seja, 8 unidades de área.

Para essa alternativa esperávamos um índice de acerto muito grande, porém percebemos que os alunos, em sua maioria, não compreenderam os procedimentos para calcular área ou não possuem o domínio necessário para concretizar esse cálculo.

Dos alunos que acertaram a alternativa A, percebemos algumas técnicas de resoluções interessantes para obter o valor da área da figura composta. Vejamos a figura 30.

Figura 30 - Respostas de alguns alunos para a alternativa A

<p>Aluno A</p> <p>Resposta (as):</p> 
<p>Aluno C</p> <p>Resposta (as):</p> 

Fonte: Questionário diagnóstico

Notamos certa particularidade na resposta do aluno C quando afirma que a área do quadrado é $(2 \cdot 4)/2$ ao invés de simplesmente multiplicar os lados do mesmo. Esta maneira de responder nos chamou a atenção. Supomos que este aluno somou os lados obtendo 4 em seguida multiplicou por 2, obtendo como resultado o número 8 e por fim dividiu por 2, encontrando a resposta correta. Esse procedimento já não seria mais viável caso pegássemos um quadrado de lado 3, por exemplo.

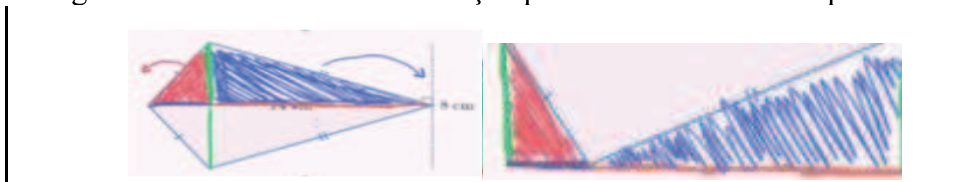
Outro passo interessante na resposta do aluno C é que o mesmo resolve por etapas, calculou a área do quadrado e em seguida encontrou as áreas de cada um dos triângulos, somando no final as áreas e encontrando como 8 como solução.

Haveria mais possibilidades como, por exemplo, o aluno tentar através da composição de polígonos, transformar tal figura em um retângulo unindo os dois triângulos dos extremos (ver figura 29, item A).

Já o aluno A, respondeu corretamente de maneira mais “clássica” calculando a área do quadrado de lado 2 e somando com as duas áreas dos triângulos cujas áreas eram 2 e 2, assim obteve a área pedida na alternativa.

Um dos alunos que acertou a alternativa (A) acertou também a Alternativa (B). Essa alternativa tinha uma particularidade, porém, os alunos não perceberam. A figura tem o nome de pipa e um lado é simétrico ao outro a transformando em um retângulo onde poderia ser facilmente encontrada a sua área multiplicando a base pela altura, vejamos um esboço a seguir.

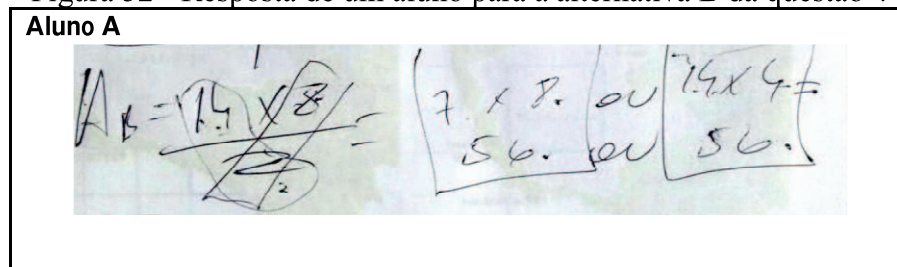
Figura 31 – Modelando uma solução para a alternativa B da questão 4



Fonte: <https://pt.khanacademy.org/math/basic-geo/basic-geo-area-and-perimeter/area-trap-composite/v/area-of-a-kite>. Acesso em 11 de nov. 2017

Ao transformar a pipa em um retângulo para encontrar a área da figura da alternativa (B) bastava multiplicar a base 14cm pela altura 4cm obtendo 56cm^2 . Essa seria uma possibilidade. Outra seria, por exemplo, multiplicar a diagonal maior (14cm) pela diagonal menor (8cm) e em seguida dividir o resultado por 2 (dois). Esta última solução seria interessante, pois o aluno não precisaria fazer nenhuma transformação facilitando seus cálculos. Vejamos a resposta do aluno que acertou essa alternativa.

Figura 32- Resposta de um aluno para a alternativa B da questão 4

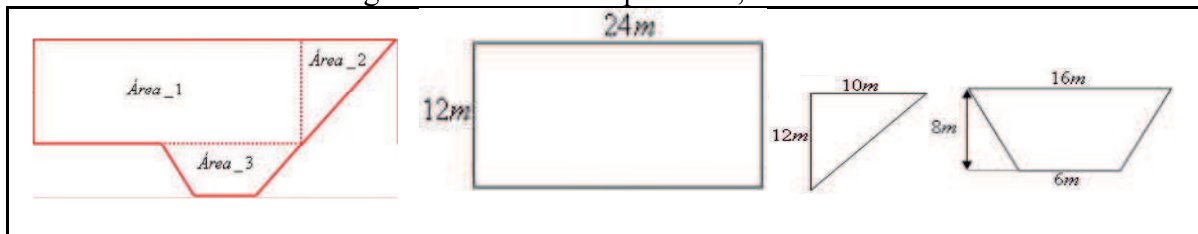


Fonte: Questionário diagnóstico

O aluno percebeu a simetria e calculou a área da figura multiplicando a base pela altura total e em seguida a dividiu por 2, obtendo $7 \cdot 8$. Caso dividíssemos o valor da base, ou $14 \cdot 4$, caso dividíssemos a altura por 2, de qualquer maneira o aluno conseguiu calcular, no entanto, esqueceu a unidade de área adequada.

A alternativa C era a mais extensa pois era composta por um retângulo, um triângulo e um trapézio. Nessa questão os alunos deveriam saber como calcular a área dessas formas geométricas. Tendo esse conhecimento prévio a questão seria de fácil resolução, mas também é necessário identificar as figuras que formam a figura composta.

Figura 33 - Dados da questão 4, alternativa C



Fonte: <http://brasilecola.uol.com.br/matematica/area-uma-regiao-plana.htm>. Acesso em 02 de jul. 2017

Dessa forma poderíamos calcular as áreas 1, 2 e 3. Veremos a seguir as três partes decompostas, onde teremos um retângulo de base 24m e altura 12m dando uma área $A1 = 24m \cdot 12m = 288m^2$; um triângulo de base 10m e altura 12m dando uma área de $A2 = (10m \cdot 12m) / 2 = 60m^2$ e, um trapézio de base maior 16m, base menor 6m e altura 8m logo a área dessa parte será de $A3 = [(16m + 6m) \cdot 8m] / 2 = 88m^2$. Portanto a área total era de $436m^2$.

Sobre a questão 4, podemos ainda acrescentar que registramos muitas respostas do tipo: “ não sei como faz isso”, “não me lembro mais”, entre outras (Figura 34). Ao analisarmos essas respostas, as mesmas nos causaram certo estranhamento visto que os alunos do 9º ano já viram o cálculo de área, inclusive no ano de 2017.

Figura 34- Respostas dadas por alunos na questão 4

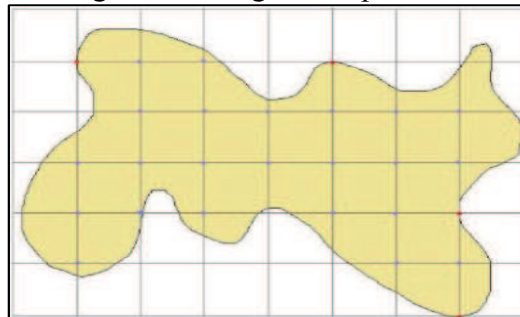
Aluno H Resposta (as): não sei, não me lembro como faz isso
Aluno O Resposta (as): não sei fazer a questão
Aluno F1 Resposta (as): não sei fazer isso

Fonte: Questionário diagnóstico

5.3.5 Questão 5

A quinta questão era uma estimativa de área e tinha o seguinte enunciado: “observe a região limitada por contornos curvos, estime a área e registre sua estimativa usando o como unidade de área.”

Figura 35 - Região da questão 5



Fonte: http://loeskakeados.com/joomla1cinco/index.php?option=com_content&view=article&id=7315:topografa-clculos-en-planos&catid=344:topografa&Itemid=287. Acesso em 6 de jul. 2017

A estimativa da área requeria uma contagem, ou seja, os quadradinhos completos dentro da figura juntamente com os pedaços. Assim, temos 10 quadrados completos dentro da figuras e 30 pedaços de quadrados, sendo 11 deles quase completos e outros bem pequenos. Dessa forma o aluno que estimasse a área em 25 unidades de área, estaria bem próximo da realidade. Portanto para analisarmos os dados das respostas dos alunos tomemos essa medida como a mais fidedigna, ou seja, quem estimou a área mais próxima de 25 quadrados (unidades de áreas) acertou a questão, considerando valores abaixo de 20 e maiores que 30 desproporcionais.

As respostas dos alunos foram assim registradas:

- 4 alunos, que corresponde a 14% dos alunos estimaram a área da figura em aproximadamente $18 u^2$;
- Outros 14% estimaram como área da imagem em $19 u^2$;
- 6 alunos, 21% estimaram em $20u^2$ como área da figura;
- 3% o que corresponde a um aluno estimou $22 u^2$ a área da figura;
- Outro aluno estimou em $25,5 u^2$ a área da figura, consideramos essa resposta como a estimativa que mais se aproxima do resultado da área da figura apresentada na questão.
- 4 alunos, 14% estimaram em $32 u^2$;
- 3% registraram suas estimativas em $34 u^2$ e $35 u^2$ como nessa ordem;
- E por fim os alunos que não deram nenhuma estimativa, ou seja, 7 alunos correspondem a 24% dos que responderam ao questionário.

A estimativa da área da figura dependia apenas de uma contagem onde os alunos chegariam a um valor aproximado, contando os quadrados completos e juntando os incompletos de modo que formem outros também completos. Podemos afirmar que a mesma não tinha uma solução exata, pois pedimos uma estimativa.

Ao observamos a imagem vemos que a mesma preenche cerca da metade da área total da malha quadriculada, ou seja, a área da malha quadriculada é de 48 quadrados, logo temos algo estimável próximo de 24 quadrados de área.

Vimos nas respostas dos alunos que quatro deles estimaram em 18 quadrados, quatro estimaram em 19 quadrados e outros quatro alunos estimaram em 32 quadrados. Logo, desses valores podemos descartar por estarem distantes dos 25 quadrados que consideramos como mais próxima da área da figura, bem como as estimativas de dois outros alunos que estimaram em 34 e 35 quadrados.

Dos alunos, seis deles estimaram a área em 20 quadrados. Ao olharmos para a figura ficamos com a sensação de a mesma possuir de 20 a 30 quadrados como a área, logo esse valor se enquadra na nossa estimativa. A estimativa de dois alunos em 22 e 25,5 quadrados, principalmente do aluno que estimou em 25,5 quadrados, revela uma atenção maior para o que se pedia na questão. Dos 29 alunos, muitos registraram sua resposta, no entanto, sete alunos deixaram em branco a pergunta como vimos no gráfico.

O aluno que estimou 25,5 quadrados como a área da figura, para nós, foi o que de fato, chegou mais próximo da resposta esperada. Veja seu registro na figura 36 a seguir.

Figura 36 - Resposta do Aluno R para a questão 5

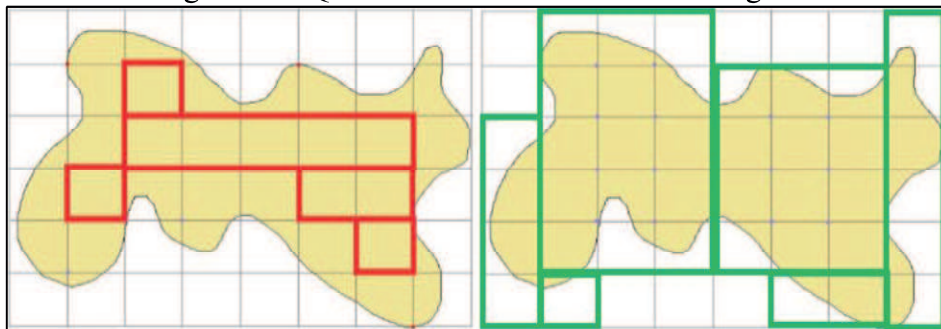
Resposta (as): 25,5 □ ▷

Fonte: Questionário diagnóstico

Percebemos na resposta que o aluno especificou 25 quadrados completos e meio quadrado (o triângulo). Vejamos que a questão 5 pedia que o aluno calculasse por estimativa a área da figura irregular.

Uma possibilidade é de contar os quadrados internos e externos à figura. Assim, teríamos 10 e 40 quadrados, respectivamente, sendo, nesse caso necessário calcular a média aritmética desses dois valores obtendo a área de 25 quadrados. Vejamos o esboço desse raciocínio na figura seguinte.

Figura 37 - Quadrados internos e externos à figura



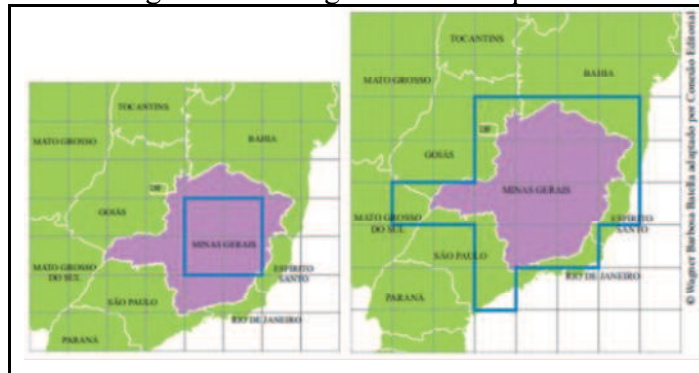
Fonte: Autor (2017)

A questão 5 e a questão 3 tem suas semelhanças, pois ambas pediam aos alunos que contassem os quadrados e dessem a área das figuras. No entanto o que diferencia uma da outra é a maneira como se apresenta cada figura. Enquanto na questão 3 as figuras eram todas poligonais com lados retos, facilitando a contagem dos quadrados internos, a figura da questão 5 tinha os lados irregulares com contornos curvos, dificultando a contagem. Esse fato ficou mais evidente quando foram analisadas as respostas dos alunos para essas questões, o nível de acertos na terceira questão foi bem superior aos acertos da quinta questão, mostrando assim certa dificuldade desses alunos em trabalhar com figuras irregulares desse tipo.

5.3.6 Questão 6

“Observe o mapa do estado de Minas Gerais. Podemos calcular a sua área cobrindo a região utilizando um quadrado (interior ao mapa) e um retângulo (exterior ao mapa) como mostram as figuras. Considerando as duas figuras calcule a área aproximada do Estado de Minas Gerais disposta no mapa. (Dados \square 53.000 km²).” Vejamos as imagens da sexta questão.

Figura 38 – Imagens da sexta questão

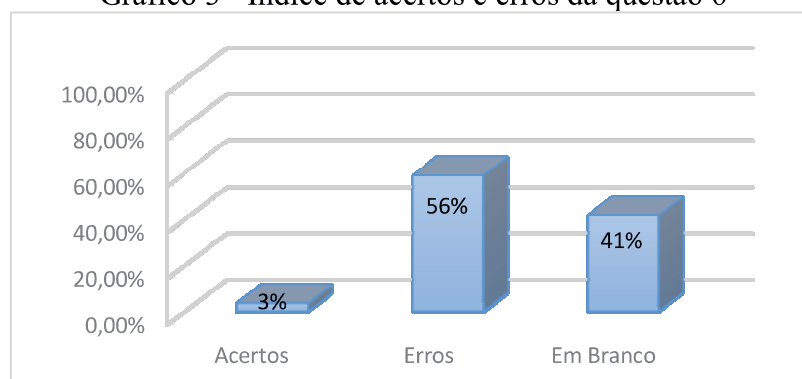


Fonte: Adaptada de Fini et al (2013)

Na questão, para calcular a área do mapa de Minas Gerais o aluno teria como recurso calcular a média aritmética dos quadrados internos e externos à região a ser encontrada, ou seja, 4 quadrados totalmente internos ao mapa e 18 que o cobre externamente de modo que o mesmo ficou totalmente inscrito.

Assim, somando as duas quantidades de quadrados e dividindo por 2 temos que o mapa tem, aproximadamente, 11 quadrados com dimensões de 53.000km². Assim, o que nos resta ao final é fazer a multiplicação desse valor por 11, encontrando uma área aproximada de 583.000km². Vemos no gráfico a seguir alguns índices, onde podemos fazer algumas análises quanto às respostas dos alunos.

Gráfico 3 - Índice de acertos e erros da questão 6



Fonte: Questionário diagnóstico

Os 3% de acertos correspondem a um único aluno. Como a questão tinha duas imagens e era necessário calcular a média aritmética das duas para se alcançar a resposta correta, o aluno que conseguiu obter a resposta entendeu que se calculássemos apenas a área da primeira figura encontraríamos uma área para o estado de Minas Gerais muito inferior, visto que estávamos calculando a área dos quatro quadrados inseridos dentro do mapa, e se calculássemos a área da segunda figura, estaríamos encontrando uma área muito superior a área do Estado. Dessa forma ao fazermos a média encontraríamos a área aproximada que estávamos à procura. Vejamos a resposta do aluno P que acertou a questão.

Figura 39 - Resposta correta do aluno P para a questão 6

Aluno P

Resposta (as):

$$A_{(MG)} = 110.2$$

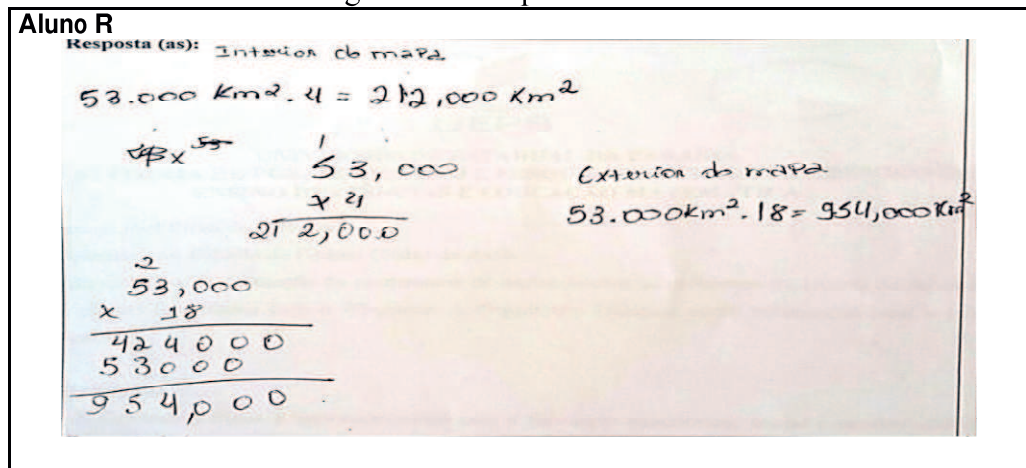
$$53000 - 110.2 = 52889.8$$

$$583.000 \text{ km}^2$$

Fonte: Questionário diagnóstico

Os alunos que acertaram a área da primeira imagem e a área da segunda, somaram 9. No entanto, faltou o cálculo da média aritmética das áreas, o que mostra uma falta de atenção ou de conhecimento dos mesmos sobre como lidar com esse tipo de situação. Vejamos a figura a seguir com uma solução do aluno R que foi comum aos 9 alunos citados.

Figura 40 – Resposta do aluno R



Fonte: Questionário diagnóstico

Com base nas respostas do questionário percebemos que existe uma imensa dificuldade dos alunos em compreender e trabalhar com questões envolvendo áreas de figuras geométricas, principalmente as figuras irregulares.

A seguir veremos um comparativo entre as duas figuras da sexta questão. Como já afirmamos, essa questão era composta de duas figuras para uma mesma região, isto é, o mapa de Minas Gerais, sendo esta, aproximada por retângulos. A primeira figura tem 4 quadrados internos ao mapa, já na segunda, temos 18 quadrados externamente ao mapa, onde pedimos aos alunos que dessem a área aproximada deste mapa. Vejamos o gráfico a seguir com os índices de acertos em cada figura.

Tabela 3 - Comparativo entre as figuras 1 e 2 da sexta questão

Figura	Acertos	Erros	Em branco
1	34%	17%	49%
2	31%	20%	49%

Fonte: Questionário diagnóstico

Na tabela 3, com base na figura 1, temos 34% de acertos, 17% de erros e 49% dos alunos não tentaram encontrar a área correspondente aos quatro quadrados internos ao mapa. Esses números representam em quantidade, respectivamente, 10, 5 e 14 alunos.

Com relação a segunda figura, temos algo em comum, a mesma quantidade de alunos que não tentou encontrar a área da primeira figura se repete em relação a segunda, ou seja 49% dos mesmos. Os acertos para a segunda figura somaram 31%, esse valor corresponde a 9 (nove) alunos, 20% erraram, representando 6 (seis) alunos.

Notamos que, por mais que eles tivessem o auxílio da malha quadriculada para contar os quadrados internos e externos ao mapa, o resultado ainda não foi satisfatório.

A análise individual de cada figura da sexta questão mostra-nos que alguns alunos acertaram as áreas da figura 1, a área da figura 2, e tiveram aqueles, ainda, que acertaram a área das duas simultaneamente, porém faltaram para alguns deles, o discernimento de calcular a média aritmética dos dois resultados encontrados para, enfim, chegar a resposta final. O fato de se calcular a média, não foi especificado por nós, pois queríamos entender a maturidade dos alunos para resolver problemas desse tipo.

5.4 Análise comparativa das questões

Para concluir, na tabela 4, organizamos uma estatística comparativa para cada questão do questionário diagnóstico. A mesma nos permite uma análise geral a respeito da dificuldade dos alunos ao se trabalhar com o cálculo de área de figuras planas irregulares. Essa tabela serve ainda, de certo modo, para um desfecho temporário da discussão que estamos tratando.

Tabela 2 - Descrição de cada questão com suas respectivas dificuldades

Questão	Objetivo	Acerto	Erro	Em Branco	Principal dificuldade
1	Definir área de uma superfície geométrica	41%	59%	0%	Diferenciar área de perímetro
2	Diferenciar superfície plana regular das irregulares	72%	28%	0%	Pouco domínio do conceito de figuras planas regulares e irregulares, as respostas certas em sua maioria foram dadas intuitivamente
3	Calcular área com o auxílio da malha quadriculada	64%	36%	0%	Utilizar composição e decomposição da unidade de área a partir da malha quadriculada
4	Calcular áreas de figuras compostas dadas as medidas	7%	69%	24%	Inadequação ou não uso de fórmulas necessárias a partir de valores oferecidos; Não identificação das figuras apresentadas na composição.
5	Estimar área com ajuda da malha quadriculada	28%	48%	24%	Calcular área de figuras com contornos curvos
6	Estimar a área do	3%		41%	Encontrar um valor final

	mapa do estado de Minas Gerais através da média por excesso e por falta		56%		para a área da figura não poligonal
--	---	--	-----	--	-------------------------------------

Fonte: Dados do questionário

A tabela 3 é um resumo de todas as questões com os erros e acertos, tipo de questão (objetivo) e as dificuldades percebidas em cada uma delas. Para as questões que possuíam várias alternativas ou vários itens, como os casos das questões 2, 3 e 4, calculamos a média dos acertos para ficar melhor expostos na tabela, não sendo desse modo, descartado nenhum dado.

As dificuldades em resolver as questões propostas ficaram evidenciadas com os índices de acertos muito baixos. Percebemos muitas dificuldades, onde listamos as mesmas na tabela, dando prioridade a principal, aquela que mais apareceu em cada questão. As dificuldades vão desde a confusão de área por perímetro até mesmo ao fato de não usar um dado do enunciado para encontrar a resposta adequada.

Com relação às respostas de cada aluno, como já foi especificado em análises anteriores, percebemos dificuldades deles em encontrar a área de uma figura básica e que eles deveriam possuir um domínio, como quadrado, retângulo e triângulos, por exemplo.

O principal problema encontrado nas análises do questionário diagnóstico está relacionado às questões com figuras irregulares. De fato, as dificuldades para este tipo de figuras ficaram mais evidentes devido à grande quantidade de erros.

Podemos citar as questões 3 e 4 compostas de figuras irregulares poligonais, sendo a terceira auxiliada pela malha quadriculada, onde a quantidade de erros foi um pouco menor (36%) e, a quarta sem esse recurso, que teve um dos maiores índices de erros (69%).

Para encontrar a área das figuras presentes na questão 4 onde havia figuras e suas respectivas medidas, como o triângulo, losango, retângulo, o procedimento seria utilizando fórmulas para encontrar sua área. Acreditamos que a presença e o uso da malha quadriculada nas demais questões inibiram o uso de fórmulas ou de outros métodos de cálculo. Além disso, falta para muitos alunos um domínio de conhecimentos adquiridos sobre como calcular áreas de figuras regulares como o triângulo, retângulo, quadrado, ou seja, figuras simples e que tem o cálculo de suas áreas também simples ou mesmo já conhecidas.

Outro fato constatado ao analisarmos o questionário foi com relação àquelas questões em que as figuras irregulares possuíam lados curvos, mesmo com a ajuda da malha, registramos grandes porcentagens de erros, exemplos das questões 5 (48%) e 6 (56%)

Portanto fechamos essa análise que servirá de subsídios para a proposta de nossa intervenção. Neste sentido organizamos tais dificuldades do ponto de vista das variáveis didáticas que serão apresentadas e justificadas no capítulo seguinte.

6 Concepções da proposta e Análise *a priori*

Seguiremos nossa discussão em meio a segunda fase da Engenharia Didática, ou seja, Concepções e análise *a priori*. Tanto essa fase quanto a primeira servem como mecanismo de orientação para a elaboração de atividades que abordam possíveis dificuldades identificadas.

Partindo das considerações sobre as dificuldades dos alunos com relação ao cálculo de área de figuras planas irregulares tratadas no capítulo anterior, apresentaremos uma proposta de atividades com o auxílio do *software* de Geometria Dinâmica *GeoGebra*.

6.1 Antecipando algumas escolhas globais e hipóteses da pesquisa

Serão aqui expostas nossas escolhas globais e nossas hipóteses que subsidiam o desenvolvimento da nossa proposta com o *software GeoGebra*:

- Situar os alunos em relação ao conteúdo áreas de figuras planas irregulares a partir dos seus conhecimentos prévios. Esse conhecimento prévio está relacionado a noção geométrica que os alunos já possuem, como por exemplo saber reconhecer figuras tais como o triângulo, quadrado e retângulo que será um ponto de partida para uma exploração posterior.
- Situar o estudo sobre área de figuras poligonais e não poligonais ao ambiente social e cultural do estudante. Buscaremos contextualizar com uma situação em que os alunos se utilizarão do mapa da Paraíba.
- Trabalhar com o *software GeoGebra* através da construção, da observação e da exploração das propriedades das figuras bem como com as ferramentas de cálculo de área de modo que o aluno contorne dificuldades diagnosticadas.
- Interferir, o docente, o mínimo possível no processo de exploração e investigação por parte do aluno. Porém, se necessário, o professor pode indicar possibilidades ao aluno para que o mesmo se mantenha em consonância com a proposta adotada. A investigação está relacionada a busca do aluno pelo conhecimento. O professor deve estimular o aluno a procurar desenvolvê-lo, sem que, seja necessário antecipar ou dar as respostas para os questionamentos que naturalmente vão surgindo.
- Trabalhar mantendo uma relação entre o uso do *software* com o livro didático, tendo como referências definições formais que este possui. O livro didático é na verdade uma ferramenta importante para o desenvolvimento da aula, pois o mesmo já faz parte, de forma histórica e culturalmente dos ambientes de sala de aula.

A partir dessas escolhas globais, seguiremos para um plano de ações onde definiremos as escolhas locais, mais limitadas. O plano consiste em encontros com os alunos organizados em horas/aula, esses encontros podem ser breves, mas terão o objetivo de colocar em prática situações didáticas propostas pelo pesquisador, essas propostas servirão para contornar as dificuldades apresentadas pelos alunos na resolução e obtenção de conhecimento sobre área de figuras planas irregulares, percebidas principalmente nas questões do questionário diagnóstico.

Como já foi explicado em parágrafos anteriores, essa análise *a priori* tem um aspecto de traçar percepções do ambiente de pesquisa, bem como dos sujeitos e dos conteúdos que servirão de norte para o desenvolvimento da proposta a ser pesquisada/investigada. Partiremos nos parágrafos a seguir para a definição das escolhas que nos permitam progredir na pesquisa e na proposta de ensino.

Cabe destacar que, embora a proposta não tenha sido aplicada em sala, mesmo assim é pertinente a realização das escolhas globais na perspectiva das fases da Engenharia Didática.

6.2 As Variáveis Didáticas identificadas na pesquisa

As Variáveis Didáticas estão relacionadas com o estudo das dificuldades que os alunos encontram na resolução de problemas e das respostas corretas ou erradas que estes fornecem. Dessa maneira devemos considerar essas variáveis como importante elemento influenciador no processo de aquisição de conhecimentos (PESSOA, 2010).

Nesse trabalho, temos o cálculo de área de figuras planas irregulares como objeto de estudo e conhecendo algumas das variáveis didáticas podemos propor sugestões de atividade que contornem e mesmo que trabalhem sobre e com tais dificuldades. É possível também, a partir das variáveis didáticas, identificar possíveis aspectos já compreendidos pelos alunos sobre o assunto. Em síntese entender as variáveis no processo de ensino-aprendizagem do cálculo de área de figuras planas irregulares é entender o que interfere ou auxilia para a concretização do mesmo.

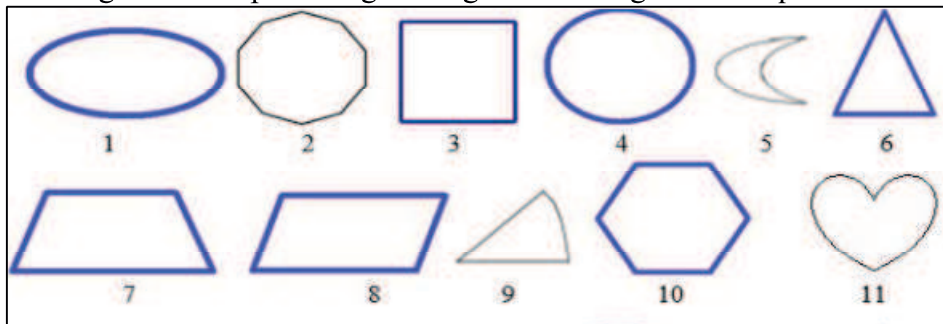
As variáveis didáticas que interferiram nas respostas dos alunos durante a realização do questionário diagnóstico foram assim percebidas: *Variável tipo de figura; variável posição da figura com relação a malha; variável hachuramento; variável malha quadriculada e variável dados fornecidos para a solução*. A seguir, apresentaremos e justificaremos as variáveis identificadas.

6.2.1 Variável tipo de figura

Para a variável *tipo de figura* distinguimos dois aspectos: 1) figuras planas (como o quadrado, o triângulo, o trapézio, o losango, o paralelogramo, essas figuras são conhecidas nos livros didáticos por triângulos e quadriláteros) em contraste com as figuras malcomportadas⁶; 2) as figuras do tipo poligonal ou não poligonal.

Observamos que na questão 2 (Figura 41) que pedia para que eles diferenciassem figuras regulares e irregulares, apesar de muitos deles não saberem a definição de ambas, conseguiram dizer, por exemplo que a figura 3 é regular e a figura 5 é irregular.

Figura 41 - Tipos de figuras regulares e irregulares da questão 2



Fonte: Questionário Diagnóstico

As figuras apresentadas podem ser figuras regulares ou irregulares. As figuras do tipo não poligonal foram tratadas com mais ênfases nas questões 4 e 5 do questionário, onde tinham contornos curvos. No entanto, abordamos algumas figuras nessa segunda questão como as figuras 1, 4, 5, 9 e 11 de modo a antecipá-las e instigar os alunos a pensarem a respeito de suas classificações quanto as regularidades.

Os alunos apresentaram dificuldades para diferenciar cada tipo de figura. Apesar de, nessa questão o cálculo de área não tivesse mencionado, pois não era o principal propósito da questão, visto que é necessário em primeiro lugar identificar a figura seja ela regular ou irregular, poligonal ou não poligonal.

Com relação as figuras poligonais, observamos na questão 4 que o fato das figuras serem compostas por figuras poligonais conhecidas e pelos dados do problema, para o aluno seria viável o uso de fórmulas. No entanto, os alunos não reconheceram tal composição, sendo

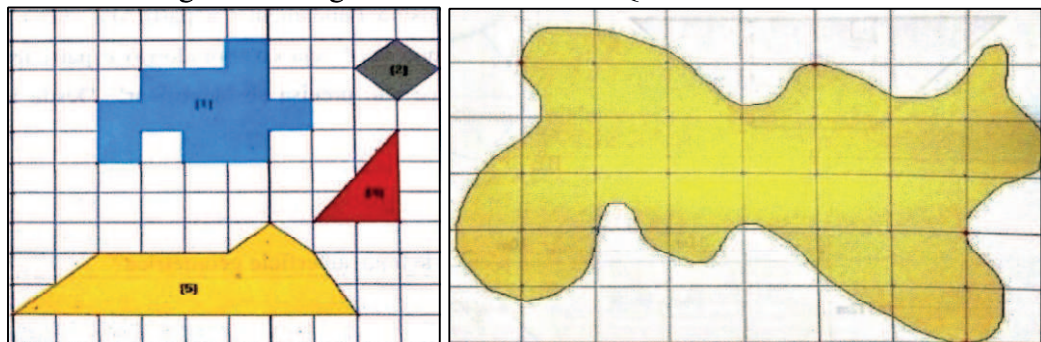
⁶Figuras que apresentam formas irregulares de diferentes tipos. Pode ser um polígono que possua lados e ângulos distintos, com suas diferentes dimensões, ou ainda como figuras com contornos curvos como um desenho feito a lápis por uma criança, onde se caracteriza por não ter lados identificáveis, assim como ângulos.

suas formas, nesse caso, um tanto estranhas aos seus olhos, acostumados a estudarem figuras prototípicas de quadrados e retângulos, por exemplo.

6.2.2 Variável posição da figura com relação a malha

Nas questões 3 e 5 do questionário as figuras foram dispostas sobre a malha quadriculada. Percebemos que quando os contornos das figuras coincidem com as linhas da malha (Figura 42), ou seja, quando a figura ocupa um quadradinho inteiro ou meio quadradinho da malha formando dois triângulos, os alunos conseguem dizer com um pouco mais de exatidão a área que a figura ocupa.

Figura 42 - Figuras sobre a malha – Questões 3 e 5



Fonte: Questionário Diagnóstico

Ao contrário, quando a figura tem formato sobre a malha que não ocupa de forma precisa uma parte do quadradinho, os alunos sentem muita dificuldade. Percebemos que essa variável esteve fortemente presente quando se tratou de uma figura com contornos curvos, isto é, uma figura não poligonal. Na figura da questão 5 percebemos muita discrepância tanto para mais quanto para menos, nas respostas dadas pelos alunos.

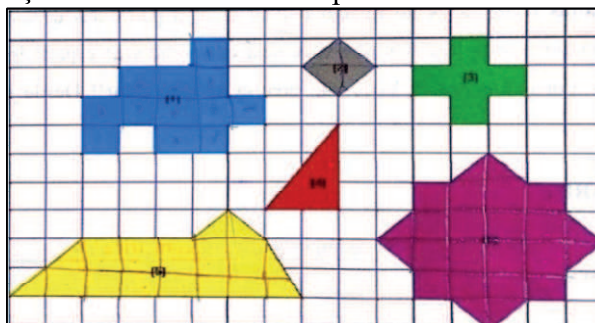
6.2.3 Variável hachuramento

A variável *hachuramento* foi percebida na questão 3. Como as figuras apresentadas não tinham preenchimento que permitissem visualizar as linhas da malha, alguns alunos não identificaram os quadradinhos. Esse fato dificultou a contagem de quadradinhos ocupados pelas figuras.

Na figura 43 a seguir temos os registros do aluno O. Através de um prolongamento das linhas externas à figura, o aluno identificou as unidades quadradas e suas partes

pertencentes ao interior da figura. Percebemos que aqueles alunos que procederam como o aluno O, obtiveram êxito nas respostas.

Figura 43 - Traços internos do aluno O para obter a área das figuras



Fonte: Questionário Diagnóstico

6.2.4 Variável malha quadriculada

A variável *malha quadriculada* foi percebida no questionário aplicado (Ver Apêndice A) quando em um primeiro momento, propusemos questões que tinham o auxílio da malha quadriculada e em seguida, quando retiramos a malha, na questão 4, os alunos ficaram sem saber como proceder.

As medidas relativas às figuras, no entanto, não foram suficientes visto que os alunos em sua grande maioria, não se atentaram para o uso das fórmulas, o que talvez seria o mais viável para expor uma resposta correta no contexto do problema.

6.2.5 Variável dados fornecidos para a solução

A Variável *dados fornecidos para a solução* diz respeito ao grau de informação dada nas questões para a sua solução (dados necessários, suficientes ou insuficientes). Percebemos essa variável principalmente na questão 6, onde tínhamos os dados referentes a convenção da escala para a obtenção da resposta final em km^2 (Ver Apêndice A).

Nesta questão também tivemos um dado omitido, pois tínhamos como proposta que a área do Estado de Minas Gerais fosse encontrada através do cálculo da área dos retângulos externos e internos ao mesmo, por tanto, por falta e por excesso. No entanto em nenhum momento deixamos claro ao aluno que ele deveria calcular também a média dessas duas áreas. Essa variável pode ter sido crucial e pode explicar muitas das respostas incompletas, erradas ou não encontradas por alguns alunos para a questão.

6.3 Apresentando a atividade

Neste item apresentamos a atividade elaborada e explicitamos, além da *variável didática*, os seguintes elementos do planejamento: *objetivos; a concepção da atividade; conteúdos matemáticos; recursos do GeoGebra; variáveis matemáticas consideradas; desenvolvimento da proposta e enunciado*.

6.3.1 Atividade - Cálculo da área do Estado da Paraíba

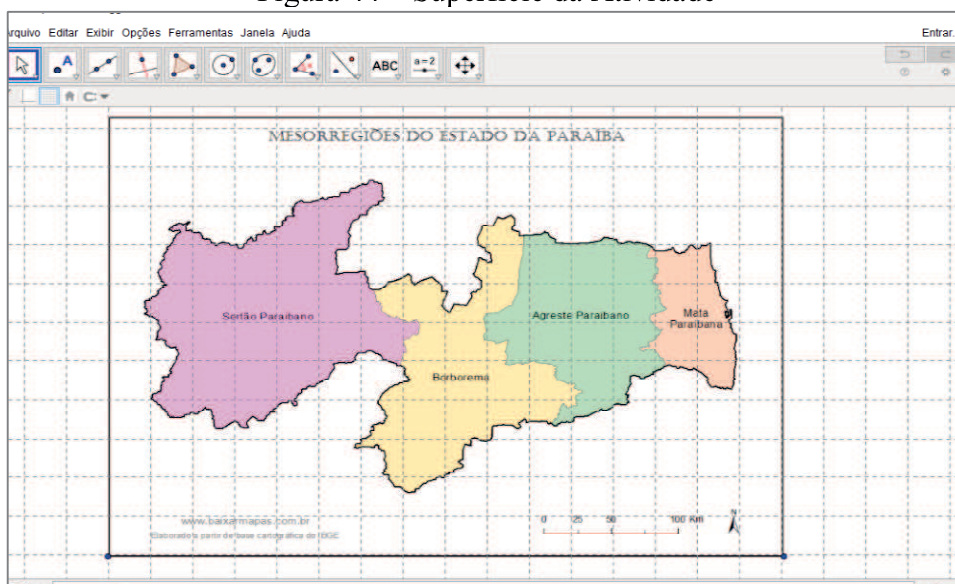
- **Objetivo:** Calcular a área aproximada para o Estado da Paraíba a partir de recursos do *GeoGebra*.
- **A concepção da atividade:** Essa atividade pretende fazer uma unificação das questões propostas no questionário, ou seja, buscamos explorar as funcionalidades do *software GeoGebra* seguindo as variáveis que surgiram no questionário diagnóstico. Entre as estratégias, vamos trabalhar a *priori* com polígonos em torno do mapa, no qual os alunos fizeram manipulações de modo a contornar internamente e externamente tal mapa a fim de fazer aproximações à área real dada pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística – IBGE. Utilizar como estratégia de cálculos a composição e decomposição de polígonos, de modo que tal atividade sirva de base para que os alunos possam generalizar para outras situações que envolva o cálculo de área desse tipo de figuras. Também vamos utilizar a estratégia da livre manipulação, ou seja, o aluno tem a possibilidade de conjecturar situações e buscar sua comprovação.
- **Conteúdos matemáticos:** Cálculo de área de figuras planas (regulares, irregulares e não poligonais); Composição e decomposição de figuras; conversão de área; média aritmética e áreas aproximadas pelo Teorema de Pick; Mapas e escalas.
- **Recursos do GeoGebra:** No desenvolvimento desta atividade exploraremos recursos do *software* como a malha quadriculada, as ferramentas ‘*Mover*’ (ferramenta útil para fazer ajustamentos entre a figura e os polígonos que utilizaremos para efetuar os devidos cálculos); *Polígono* (construções de figuras planas em torno, bem como no interior da região do mapa da Paraíba); e também a ferramenta *Área* para encontramos as respectivas áreas das figuras que serão obtidas. Nesta atividade consideramos a escolha pelo tipo de polígono, ou seja, ao tipo de construção feita pelo aluno, quando o mesmo utiliza a

ferramenta *Polígono* e escolhe aleatoriamente um tipo de construção seja ela livre, mole ou robusta. Tais construções corroboram para um melhor desenvolvimento da atividade em busca de uma solução por aproximação mais próxima possível da área real. Utilizaremos também a medida para saber quanto vale um centímetro no *GeoGebra* comparado com o real, para isso usamos Distância, comprimento ou perímetro.

- **Variáveis matemáticas consideradas:** Para essa atividade serão consideradas as variáveis didáticas: *variável dados fornecidos para a solução*; *variável malha quadriculada*; *variável hachuramento*; *variável posição da figura com relação a malha e variável tipo de figura*.
- **Desenvolvimento da proposta:** Esta atividade será desenvolvida tomando como ponto de partida a situação apresentada no enunciado a seguir.

Enunciado: Observe o mapa da Paraíba. Como podemos calcular a área da Paraíba fornecida pelo IBGE usando as ferramentas do *GeoGebra*? (Segundo dado do IBGE, a superfície do Estado da Paraíba possui área de 56.585 km²).

Figura 44 – Superfície da Atividade



Fonte: Autor (2017)

Deixaremos os alunos livres para encontrar diferentes estratégias que permitam calcular a área da figura apresentada bem como utilizar ferramentas do *GeoGebra*

anteriormente apresentadas. No entanto, para estruturar a atividade, pensamos nos seguintes itens:

- a) Crie polígono(s) ao redor (externamente) do mapa aproximando ao máximo as bordas da imagem. Qual seria a área desse(s) polígono(s)? Essa área seria uma boa aproximação para área do mapa?
 - b) Observe que no item (a) foi pedido que você desenhasse polígonos ao redor da figura. Agora construa polígono(s) no interior da mesma de modo que você obtenha uma área também aproximada da região do mapa da Paraíba. Qual a comparação entre as duas áreas? Essa área seria uma boa aproximação para área do mapa?
 - c) Agora utilizando o teorema de Pick, como calcular a área da região da Paraíba? Esta área é mais próxima ou não das áreas anteriormente calculadas? (Lembrando que para essa proposta serão utilizados os pontos internos e os que passam sobre os lados da região a ter a sua área calculada).
- **Análise a priori:** Para os itens a), b) e c) apresentaremos algumas estratégias de cálculo de área que podem ser conduzidas em sala. Para elas também indicaremos as variáveis didáticas contempladas.

a) Crie polígono(s) ao redor (externamente) do mapa aproximando ao máximo as bordas da imagem. Qual seria a área desse(s) polígono(s)? Essa área seria uma boa aproximação para área do mapa?

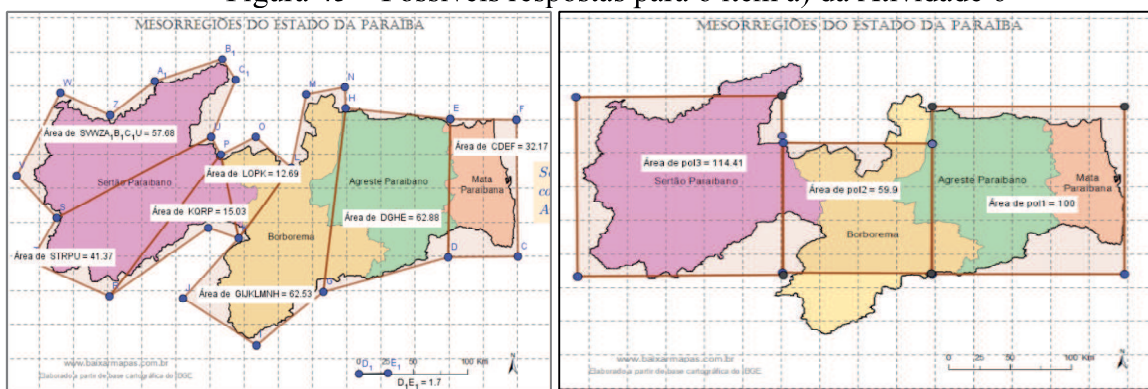
O aluno fará polígono(s) contornando externamente a imagem do mapa do Estado da Paraíba, de modo que seja possível através das funcionalidades do *software GeoGebra* encontrar a área. A área que será encontrada corresponderá a área do(s) polígono(s), sendo assim o aluno explora a área de figuras que podem ser irregulares, mas será uma área aproximada com sobras em relação à área fornecida no enunciado.

Os alunos ficarão livres para pensar e cobrir o mapa com um ou vários polígonos conhecidos ou não, esta escolha por parte dos alunos se enquadra na variável *tipo de figura*, pela variedade que pode vir a surgir com as respostas dos alunos.

Neste item a) usamos a variável *tipo de figura* uma vez que o aluno pode criar figuras que conhece ou não. Também consideramos a variável *dados fornecidos para a solução*,

sendo neste caso considerados, de certo modo insuficientes, uma vez que no enunciado deixamos de fora o dado referente a quantidade de polígonos que o aluno pode desenhar em torno da figura, podendo ser um ou vários. Omitimos tal dado, pois queremos que o aluno perceba que pode traçar um polígono (por exemplo, um retângulo exterior) ou construir vários polígonos, ou ainda construir segmentos de reta unindo seus pontos e usar a ferramenta *polígono*. O aluno encontrará a área correspondente de cada polígono(s) selecionando a ferramenta *área* e em seguida clicando no(s) polígono(s). Como exemplos, é possível que apareçam respostas como a seguir.

Figura 45 – Possíveis respostas para o item a) da Atividade 6



Fonte: Autor (2017)

Para a resposta 1 (figura da esquerda), temos polígonos que contornam cada região da Paraíba. Observemos também que essa área é maior do que a que procuramos, pois foram traçados os polígonos contornando externamente, sendo assim, o aluno deve perceber que a mesma é uma aproximação por sobre. Neste caso usamos a calculadora para somar as áreas encontradas pelo *GeoGebra*.

A partir da área encontrada, uma nova situação de investigação é proposta aos alunos: como eles podem comparar com a área dada pelo IBGE? Neste caso surge a variável *dados fornecidos para a solução* onde os dados são omitidos para que os alunos consigam através de alguns estímulos, que pode ser um incentivo do docente, investigar e aprender mais.

No caso do exemplo anterior, é preciso aproximar a área em cm^2 em km^2 . Como encontramos a área total dos polígonos como sendo $284,35 \text{ cm}^2$, multiplicamos pelo valor de $25.000.000 \text{ cm}$, pois esse valor é correspondente a $1,7 \text{ cm}$ na imagem, valor esse encontrado pela distância entre os pontos A e B da escala dada.

Dessa maneira $284,35 \cdot 25.000.000 = 7.108.750.000 \text{ cm}^2$ de área, mas é conveniente colocar esse valor em uma unidade mais apropriada, ou seja, por se tratar de uma região muito

grande o mais viável é utilizarmos a medida km^2 . Assim, dividimos o valor por 100.000, pois 1 km equivale a 1000 m e 1 m equivale a 100 cm, logo $1000 \cdot 100 = 100.000$. Portanto, com a calculadora encontraríamos em km^2 uma área de $71.087,5 \text{ km}^2$, uma área bem acima da área que o IBGE fornece, como esperado.

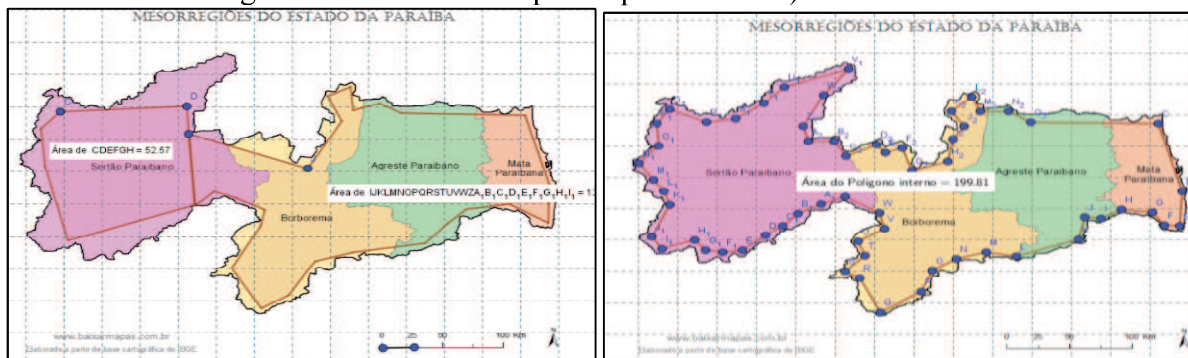
Para a resposta 2 (figura da direita), o número de polígonos foi menor, no entanto uma solução em cm^2 semelhante. De fato, foram usados apenas quadrados. Somamos as áreas e encontramos como total $274,31 \text{ cm}^2$ e, fazendo as mesmas manipulações aritméticas, ou seja, multiplicando o valor encontrado por 25.000.000 cm e depois dividindo por 100.000 encontramos a área de $68.577,5 \text{ km}^2$. Notamos que a área ficou mais próxima da área dada pelo IBGE, se comparada com a resposta 1.

A seguir discutiremos o item b) da Atividade.

b) Observe que no item (a) foi pedido que você desenhasse polígonos ao redor da figura. Agora construa polígono(s) no interior da mesma de modo que você obtenha uma área também aproximada da região do mapa da Paraíba. Qual a comparação entre as duas áreas? Essa área seria uma boa aproximação para área do mapa?

Assim como no item (a), os alunos trabalharão com polígono(s). Entretanto o(s) polígono(s) será(ão) interno(s) a imagem do mapa da Paraíba. Podemos propor ainda, que os alunos utilizem a malha quadriculada. Vimos que a área da região da Paraíba pode ser aproximada por aproximações de polígonos, no entanto se usássemos a malha poderíamos, por exemplo, ter uma melhor visão dos contornos onde passariam a margem desses polígonos. Como exemplos, é possível que apareçam respostas como a seguir.

Figura 46 – Possíveis respostas para o item b) da Atividade 6



Fonte: Autor (2017)

Observemos na resposta 1 (da esquerda) a existência de apenas dois polígonos. Na resposta 2 (da direita), utilizamos pontos interligados obtendo como área $199,81 \text{ cm}^2$. Ao fazermos as operações para converter esse valor, encontramos a área de aproximadamente, $49.952,5 \text{ km}^2$.

Como alternativa para os itens a) e b), poderíamos propor aos alunos a utilização da malha quadriculada como referência para o cálculo através da contagem das unidades de área (quadrados da malha), assim como propomos nas questões 3,5 e 6 do questionário. No entanto, para fazer a conversão para o valor real da área que se aproxime do valor do IBGE, é necessário que mostremos aos alunos uma noção básica de convenção de valores de áreas, assim como também a utilização adequadamente da escala presente na questão. O trabalho com a variável *malha quadriculada* é importante, pois o aluno terá as distâncias de cada lado do quadrado como referência no momento de convenção da unidade.

Na continuidade da atividade é pertinente pedir que os alunos reflitam sobre entre as áreas encontradas quais se aproximam da área dada pelo IBGE ou ainda perguntar o que se pode fazer com as respostas dos itens a) e b) para que se aproximem ao máximo da área dada pelo IBGE. Neste caso, a atividade pode ser conduzida para o cálculo da média das áreas (excesso e falta).

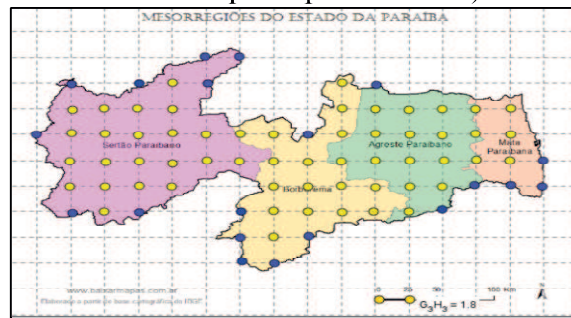
A seguir, discutiremos o item c) da Atividade.

c) Agora utilizando o teorema de Pick, como calcular a área da região da Paraíba? Esta área é mais próxima ou não das áreas anteriormente calculadas? (Lembrando que para essa proposta serão utilizados os pontos internos e os que passam sobre os lados da região a ter a sua área calculada).

Nesse item uma variável que se faz necessária é a variável *hachuramento*, pois ela é útil no momento de traçarmos os pontos interiores a figura, assim como as variáveis tipo de *malha quadriculada* e também variável *posição da figura com relação a malha*, pois partiremos da malha para retirar os dados necessários ao teorema de Pick.

No primeiro momento cabe uma discussão a respeito da disposição dos pontos sobre a região do mapa da Paraíba, identificando os pontos que ficariam dispostos sobre a borda e os que ficariam no interior do mapa. Recomendamos o uso de cores diferentes para os pontos de modo a facilitar os cálculos utilizando a fórmula de Pick. Como exemplo, trazemos a figura a seguir.

Figura 47 – Possível resposta para o item c) da Atividade 6



Fonte: Autor (2017)

Quando traçamos os pontos conforme a figura, poderemos utilizar a fórmula de Pick, que é dada por $A = B/2 + I - 1$, onde o B são os pontos que estão sobre a extremidade da região, e o I são os pontos que estão no interior da mesma. Dessa maneira os pontos amarelos correspondem a $I = 56$, os pontos que estão sobre a borda somam $B = 19$. Usando a fórmula de Pick verificamos que $A = 19/2 + 56 - 1$ ou $A = 64,5$ u.a.

Na escala dada pelo IBGE, cada 1 cm equivale a 25 km, ou seja, devemos a priori saber quanto vale 1 cm na malha dada pelo *GeoGebra*.

Usando a medida entre dois pontos encontramos a distância de 1,8 cm. Assim a área do quadrado é $3,24 \text{ cm}^2$, e, portanto, a cada 1 cm^2 da escala dada pelo IBGE equivale a $3,24 \text{ cm}^2$ no *GeoGebra*, fazendo as multiplicações necessárias para saber o valor aproximado em km^2 teremos, como anteriormente em outros cálculos, multiplicar por 25.000.000 e depois dividir tal valor por 100.000. Logo $(3,24 * 25.000.000) / 100.000 = 810 \text{ km}^2$.

Como a área encontrada pela fórmula de Pick foi de 64,5 u.a, e a unidade de área quadrada em km^2 no *GeoGebra* foi de 810, temos $64,5 * 810 \text{ km}^2 = 52.245 \text{ km}^2$. Portanto, o método que mais se aproximou do valor real da área dada pelo IBGE.

7 Conclusões

Quando nos propomos a dissertar sobre os problemas que estão presentes no processo de ensino-aprendizagem de Geometria, tínhamos em mente realizar um trabalho com relevância educacional: fosse por considerar um conteúdo pouco lecionado ou também pelo fato da pouca utilização de recursos tecnológicos em sala de aula para tratar do tema. Consideramos que a busca por melhores metodologias de ensino é uma questão importante na área da Educação e no campo da Didática.

Neste trabalho buscamos respostas para a seguinte pergunta norteadora: *como o cálculo de áreas de figuras planas irregulares pode ser mediado pelo software GeoGebra?*

Nossas inquietações com relação ao processo de ensino-aprendizagem do conteúdo *áreas de figuras planas irregulares* nos levaram a desenvolver uma experiência metodológica buscando melhores resultados na sua compreensão por parte dos alunos, mas também a partir de uma postura reflexiva do professor. Para tanto, nos baseamos nos princípios da Engenharia Didática – ED segundo Artigue e outros pesquisadores, particularmente nas duas primeiras fases, *Análises Prévias e Concepções e análises a priori*.

Traçamos como objetivo geral *investigar aspectos relativos ao ensino do cálculo de áreas de figuras planas irregulares que podem ser trabalhados com o suporte do GeoGebra*. Para alcançar tal objetivo, delineamos os objetivos específicos a seguir: Identificar saberes necessários para a elaboração de uma proposta de ensino sobre o cálculo de áreas de figuras planas irregulares a partir da Engenharia Didática; levantar formas de utilização do *GeoGebra* para o ensino de áreas de figuras planas irregulares; Estruturar uma proposta didática considerando as fases *Análises prévias e Concepção e análise à priori*.

Podemos caracterizar esta pesquisa como qualitativa. Minayo (2011) afirma que uma pesquisa dessa natureza se preocupa com um nível de realidade que, simplesmente não pode ser somente quantificado possuindo certa subjetividade. O nosso estudo também pode ser considerado como uma pesquisa intervenção devido ao caráter aplicado da pesquisa, a necessidade de diálogo com um referencial teórico e a probabilidade de produzir conhecimento (DAMIANI, 2013).

A pesquisa foi estruturada seguindo três momentos. No primeiro, compreendeu a elaboração e aplicação de um questionário diagnóstico, bem como a sua análise (correspondendo à dimensão *Análise prévia* da ED). No segundo, compreendeu a

identificação e elaboração das variáveis didáticas em jogo determinantes para a consecução da proposta de ensino. E por fim, no terceiro momento, concepção de uma proposta de atividade visando trabalhar área de figuras irregulares curvas, utilizando o *GeoGebra* (correspondendo à fase *Concepção e análise à priori*).

Na primeira etapa, anteriormente à elaboração do diagnóstico, foi feita uma discussão sobre a formação e saberes docentes, ou seja, a formação de professores de matemática na formação inicial e também continuada. Utilizamos autores como Silva (2013), Tardif (2002), Valente (2008), entre outros. Esses autores falam da formação docente levando em consideração os seus aspectos históricos e as dificuldades que esta tem, principalmente, em relacionar a teoria e prática. Destacamos a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional - LDBEN, (Art. 61, I.) que trata desta associação afirmando que é primordial tal relação para que consigamos formar bons profissionais professores.

Essas discussões sobre a formação de professores de matemática, naturalmente estão os saberes docentes citados por Tardif (2002), nos quais são subdivididos por ele em saberes profissionais, disciplinares, curriculares e experiências. Considerando tais saberes, esta discussão nos fez pensar ainda mais no nosso problema de pesquisa, visto que tal formação, em especial a formação do saber profissional, mostra certa fragilidade quando se falam do uso de tecnologias (saber tecnológico) apropriadas para o ensino-aprendizagem de conteúdos matemáticos. Essas considerações fizeram com que refletíssemos mais sobre como poderíamos contribuir com a teoria e prática desses profissionais com a nossa pesquisa. Além disso nos fez refletir que os saberes profissionais compõem-se de um conjunto de saberes transmitidos pelas instituições formadoras, e de certo modo passam a compor os saberes experienciais, o saber do cotidiano e da vivência do docente.

Na primeira fase da Engenharia Didática, *Análises prévias*, fizemos o estudo das três dimensões, a dimensão epistemológica, a dimensão didática, e pôr fim a dimensão cognitiva.

Na dimensão epistemológica, buscamos as características do conteúdo *cálculo de área de figuras planas*, consideramos seus aspectos históricos. O conceito de áreas de figuras planas está ligado aos conceitos pertencentes à Geometria Euclidiana e teve seu surgimento na Grécia antiga, embasada, basicamente nos estudos do ponto, da reta e do plano.

Nesta dimensão foram citados os trabalhos do grego Euclides, em que muitas de suas obras são até hoje utilizadas, a obra “Os Elementos” deste geômetra é responsável por inúmeros estudos relacionados à Geometria Euclidiana. Citamos as contribuições dos chineses

que tratam dos problemas de áreas em “Nove capítulos sobre a Arte Matemática” do século I d.c.

Na dimensão didática, como o objetivo foi de compreender os modos como o cálculo de área de figuras planas é trabalhado, consideramos as abordagens dadas pelos livros didáticos. Nas nossas leituras e levantamentos percebemos que esse assunto é pouco abordado e quando é, concentra-se em figuras planas regulares, trazendo as irregulares apenas como curiosidades. Esse fato foi também constatado nas análises de alguns livros didáticos que fizemos. Também buscamos caracterizar outras ferramentas como exemplo a Geometria Dinâmica - GD.

Quando falamos em tendências para ensinar Geometria, esperamos um melhor aprendizado baseado na experimentação e na utilização de programas de Geometria Dinâmica - GD, como o *software GeoGebra*.

A GD é um termo que possui basicamente como significado promover um ensino-aprendizagem de Geometria interativo, participativo em uma perspectiva construtivista, no qual espera-se do aluno que o mesmo construa seu conhecimento, e do professor, que seja apenas um mediador de saberes. Desse modo a GD está intimamente ligada ao problema de pesquisa, pois esperamos tais comportamentos, dos alunos e professores ao usar o *software GeoGebra*.

Na dimensão cognitiva, elaboramos e aplicamos um questionário diagnóstico. Tomamos como referência uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio José Luiz Neto, na cidade de Barra de Santa Rosa - PB.

Com este instrumento pudemos constatar e entender algumas dificuldades dos alunos sobre o cálculo de área de figuras planas irregulares, principalmente aquelas não poligonais, com contornos curvos. Dessa forma os erros foram melhor identificados através de um estudo das *variáveis didáticas* (BROUSSEAU, 1986, *apud* TEIXEIRA; PASSOS, 2013, p.163): *variável tipo de figura; variável posição da figura com relação a malha; variável hachuramento; variável malha quadriculada e variável dados fornecidos para a solução*.

De fato, os alunos não conseguiram perceber algumas composições de figuras, não souberam identificar quando o uso de fórmulas é necessário. Notamos também algumas facilidades dos alunos em encontrar a área de figuras quando tinham o apoio da malha quadriculada (*variável malha quadriculada e variável posição da figura com relação a malha*). Talvez esta variável tenha agido como uma espécie de inibição para que os alunos se acomodassem e não se preocupassem em usar as fórmulas.

Com relação a malha quadriculada percebemos que ela propicia a operação de medida da área através da contagem de quadradinhos, isto é, neste contexto corresponde a determinar quantas vezes temos o quadradinho cabendo dentro da figura. Dessa maneira realizamos duas operações distintas, uma geométrica e outra numérica. Nesse caso, calculando área de figuras planas irregulares com a malha quadriculada, a operação geométrica corresponde a ladrilhar a figura que terá sua área calculada e, a parte numérica consiste em contar a quantidade de superfícies dos quadradinhos que couberam na figura.

A *variável hachuramento* também é importante uma vez que as questões que possuíam figuras sem o preenchimento, ou seja, que não permitissem visualizar as linhas da malha, alguns alunos não identificaram os quadradinhos. Esse fato dificultou a contagem deles nas figuras dispostos na malha.

Outras variáveis foram detectadas como a variável *tipo de figura* uma vez que o aluno pode criar figuras que conhece ou não, ao contornar figuras. Também, a variável *dados fornecidos para a solução*, podendo ser suficiente ou insuficientes, de modo que o aluno possa conseguir dar respostas viáveis ao problema. O aluno fica à vontade quanto a quantidade de polígonos que ele pode desenhar em torno da figura, podendo ser um ou vários.

Na etapa seguinte, desenvolvemos a fase da ED *Concepção da proposta e análises a priori*.

A atividade consistiu em encontrar a área da região do estado da Paraíba. Para a atividade foram apresentados os seguintes elementos do planejamento: *objetivos; a concepção da atividade; conteúdos matemáticos; recursos do GeoGebra; variáveis matemáticas consideradas; desenvolvimento da proposta e enunciado*.

O *objetivo* da atividade é calcular a área do estado da Paraíba a partir dos recursos do *GeoGebra*, como *concepção da atividade* nos propomos fazer uma unificação das questões do questionário que aplicamos. Dentre os *conteúdos matemáticos* considerados destacamos: Cálculo de área de figuras planas (regulares, irregulares e não poligonais); média aritmética e áreas aproximadas pelo Teorema de Pick; Mapas e escalas.

Com relação ao auxílio do *GeoGebra*, utilizamos recursos como a malha quadriculada, a ferramenta “Mover”, muito útil para fazer ajustes entre a figuras e os polígonos construídos ao redor da mesma; utilizamos também, a ferramenta “Área” para encontrarmos as respectivas áreas das figuras que serão obtidas, entre outras.

Essa atividade foi proposta como meio de contornar as dificuldades constatadas no questionário diagnóstico. Propomos o uso do *software* de Geometria Dinâmica *GeoGebra* e

diferentemente do questionário diagnóstico aplicado, os alunos podem conseguir dar respostas realmente próximas da área da região da Paraíba dada pelo IBGE.

Elaboramos uma atividade que envolveu algumas dessas *variáveis didáticas* percebidas no questionário aplicado. A atividade usando a tecnologia foi pensada com relação a essas variáveis. As *variáveis matemáticas consideradas* foram *variável tipo de figura; variável posição da figura com relação a malha; variável hachuramento; variável malha quadriculada e variável dados fornecidos para a solução*.

Como estratégias de solução para o problema, propomos a utilização do teorema de Pick, bem como a decomposição de figuras em triângulos e quadriláteros, de modo a dividir a figura irregular, que pode apresentar-se de variadas formas, em figuras conhecidas.

Na proposta de atividade que desenvolvemos mostramos para os itens A e B possibilidades que o aluno teria, fazendo polígonos externamente e internamente, o passo seguinte, que ficou omitido, seria a necessidade de calcular a média, para aproximar o resultado.

Os cálculos podem ser executados de modo diferentes daquelas possibilidades que apresentamos. É interessante que possamos instruir os alunos a fazerem tais cálculos, por falta e excesso seguindo critérios de precisão (utilizando os traços da malha) para que no momento em que eles façam as devidas comparações os resultados apresentem alguma semelhança.

Esta proposta teve resultados e variáveis didáticas de acordo com a realidade particular que apresentamos e com o diagnóstico por nós realizado, claro que, em uma realidade diferente teríamos com certeza outros resultados, e possivelmente outras variáveis.

Considerando tal realidade os alunos, de fato, podem se sentir mais atraídos e motivados a resolver a atividade quando empregamos o *software GeoGebra*, pois o uso da tecnologia se distancia de suas realidades em salas de aulas, desse modo, usar o computador pode ser muito interessante para eles.

Podemos concluir que a realização da pesquisa trouxe contribuições para professores de Matemática que desejem trabalhar com o cálculo de área de figuras planas irregulares. De fato, eles terão uma alternativa para o trato com esse assunto, de modo a torná-lo mais dinâmico e interativo, podendo fazer adaptações de variadas figuras irregulares, não somente com relação a mapas.

Ao pensar em uma atividade para trabalhar com o tema cálculo de área de figuras planas irregulares, em sua sala poderia usar o *software GeoGebra*, visto que o mesmo pode proporcionar inúmeras alternativas (construções mais rápidas, dinâmica, movimentações e

observações de figuras) de modo a facilitar os cálculos e entendimento, principalmente quando se tratar de áreas de figuras planas irregulares como um mapa, assim como fizemos.

Utilizamos em nosso trabalho as etapas da Engenharia Didática com o objetivo de desenvolver produtos relacionando o ensino habitual de uma sala de aula com mecanismos que possam auxiliar a crítica e a reflexão desse ensino pelo professor/pesquisador.

Esperamos que este trabalho sirva como referência para professores de Matemática, quer seja pela proposição reflexiva que subsidiou a elaboração da atividade quanto pelo produto final, a atividade do mapa da Paraíba. Além disso, acreditamos que a partir da proposta, o professor interessado possa estender e fazer adaptações por muitos outros caminhos dentro da Matemática e também fora dela em uma perspectiva interdisciplinar.

Por restrições ligadas ao tempo e pela complexidade da aplicação da ED, não pudemos desenvolver toda a Engenharia Didática. De fato nos limitamos às duas primeiras fases da metodologia. Esperamos aprofundar essa pesquisa em investigações futuras desenvolvendo o processo completo da Engenharia Didática.

Referências

ALMOULOUD, S. A. COUTINHO, C. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19 / ANPEd. **Revemat: revista eletrônica de educação matemática**, v. 3, n. 1, Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC, 2008.

ALMOULOUD, S. A.; SILVA, M. J. F. Engenharia didática: evolução e diversidade *Didactic engineering: evolution and diversity*. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 22-52, dez. 2012. ISSN 1981-1322. Disponível em: <<https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p22>>. Acesso em: 25 fev. 2017.

ARAÚJO, I. B. **Uma abordagem para a prova com construções geométricas e cabrigéomètre**. 2007. 291 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Educação Matemática, Puc - São Paulo, São Paulo, 2007.

BALDISSERA, A. **A Geometria trabalhada a partir da construção de figuras e sólidos geométricos**. 2013. Santa Terezinha de Itaipu – Pr. Disponível em <<https://pt.scribd.com/document/61492665/Geometria-Por-Solidos-Geometricos>> Acesso em 23 dez. 2017.

BIGODE, A. J. L. **Matemática: projeto Valear**. São Paulo - SP: Scipione, 2013. 4v. Obra para alunos do 6º ao 9º ano.

BRASIL. Constituição (1996). **Lei de Diretrizes e B. Lei nº 9.394/96, de 20 de dezembro de 1996**. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/L9394.htm>. Acesso em: 17 jan. 2017.

_____. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática/Secretaria de Educação Fundamental**. Brasília: MEC/SEF, 1998. 148 p.

BRAZÃO, A. L. **Geometria Euclidiana plana e suas Aplicações no Ensino Básico**. 153f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo - USP, São Carlos, 2015. Cap. 10.

BRUM, W. P. Contribuições da Engenharia Didática no ensino de matemática: análise e reflexão de uma experiência didática para o estudo de Geometria Esférica. in: IV simpósio nacional de ensino de ciências e tecnologia, 4. 2014, Tijucas - SC. **Anais do SINECT**. Ponta Grossa - PR: Universidade Regional de Blumenau - Furb, 2014. p. 01 - 12.

BOLGHERONI, W; SILVEIRA I. F. *Software* livre aplicado ao ensino de Geometria e desenho geométrico. In: XXVIII Congresso da Sociedade Brasileira de Computação, 2008, Belém do Pará - PA. **Anais do Workshop de Informática na Escola**. Belém do Pará - PA: Sbc, 2008. p. 284 - 293.

CANDIDO, W. M. **uso do GeoGebra no ensino de Matemática com atividades de aplicação em Geometria analítica: as cônicas**. 2013. 58 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Federal de Rondônia, Porto Velho – Ro, 2013. Disponível em:

<http://bit.proformat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/225/2011_00064_WINDSON_MOREIRA_CANDIDO.pdf?sequence=1>. Acesso em: 25 ago. 2017.

CARNEIRO, V. C. G. Engenharia Didática: um referencial para ação investigativa e para formação de professores de matemática. **Zetetike**, v. 13, n. 23, p. 87-119, 2005.

DAFNE, A. Teorema de Pick e o estudo de Área e Perímetro no Geoplano online. **RENOTE**, v. 13, n. 2. 2015.

DARSIE, M. M. P.; CARVALHO, A. M. P. O início da formação do professor reflexivo. **Revista da Faculdade de Educação**, v. 22, n. 2, p. 90-108, 1996.

DAMIANI, M.F *et al.* Discutindo pesquisas do tipo intervenção pedagógica. **Cadernos de Educação**. 2013 FaE/PPGE/UFPel. Disponível em <<https://periodicos.ufpel.edu.br/ojs2/index.php/caduc/article/view/3822/3074>>. Acesso em: 23. Nov. 2016.

DUARTE, J. H. Análises de situações didáticas para a construção do conceito de área como grandeza no Ensino Fundamental. In: VIII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8. 2004. **Anais**. Recife - PE: Sbem, 2004. p. 01 - 10.

HERMES, J. D. V. O teorema de Pick. **Ciência e Natura**, [s. l], v. 37, p.203-213, 7 ago. 2015. Universidade Federal de Santa Maria. Disponível em <<http://dx.doi.org/10.5902/2179460x14606>> Acesso em: 22. set. 2017

FINI, M.I. et al. **Caderno do professor: matemática, ensino fundamental - 7a série**. 4. ed. São Paulo: SEE, 2013. 66p. Caderno do professor.

FROTA, M. C. R; BORGES, O. Perfis de entendimento sobre o uso de tecnologias na Educação Matemática. **Anais da 27ª reunião anual da Anped**, 2004. Caxambu, nov. 2004. CD-ROM.

LORENZATO, S. Por que não ensinar Geometria? **A Educação Matemática em Revista - SBEM**, Campinas - SP, v. 1, n. 4, p.03-13, jan. 1995. Semestral.

_____. **Subsídios metodológicos para o ensino da matemática: cálculos de áreas de figuras planas**. 1976. 352 f. Tese (Doutorado) - Curso de Educação, Universidade de Campinas - Unicamp, Campinas - SP, 1976. Cap. 5.

MACHADO, S. D. A. et al. Educação Matemática: uma (nova) introdução. **São Paulo: EDUC**, 2008.

MANRIQUE, A. L.; SILVA, M. J. F.; ALMOULOU, S. A. Conceitos geométricos e formação dos professores do ensino fundamental. 2002. In: **25a Reunião Anual da ANPED**. Disponível em:<<http://www.anped.org.br>> (GT19). Acesso em: 26 jan. 2017.

MINAYO, M. C. S. (org.). **Pesquisa Social**. Teoria, método e criatividade. 18 ed. Petrópolis: Vozes, 2001.

MIRANDA, M. G. O Professor Pesquisador e Sua Pretensão de Resolver a Relação Entre a Teoria e a Prática na Formação de Professores. In: Marli André (org). **O Papel da pesquisa na formação e na prática dos professores**. 5 ed. Papirus. Campinas - SP. 2006, p.129-143.

MISKULIN, R. G. S.; SILVA, M. R. C. Cursos de Licenciaturas de Matemática a distância: uma realidade ou uma utopia? In: JAHN, A. P.; ALLEVATO, N. S. G. **Tecnologias e Educação Matemática: ensino, aprendizagem e formação de professores**. 7. ed. Recife - PE. SBEM, 2010. Cap. 2. p. 105-124.

OLIVEIRA, J. S. **O ensino de Geometria na concepção dos professores do Ensino Fundamental de barra de santa rosa-PB**. 2014. 48 f. TCC (Graduação) - Curso de Licenciatura em Matemática, Centro de Educação e Saúde - CES, Universidade Federal de Campina Grande - UFCG, Cuité - PB, 2014.

PAVANELLO, R. M. Geometria: atuação de professores e aprendizagem nas séries iniciais. **Anais do I Simpósio Brasileiro de Psicologia da Educação Matemática**. Curitiba, p. 172-183, 2001.

. O abandono do ensino da Geometria no Brasil: causas e consequências. 1993. p. 7-18. **Zetetiké: Revista de Educação Matemática**, v. 1, n. 1. Disponível em <<https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646822/13724>> Acesso em 23 dez. 2017.

PESSOA, G. S. **Um estudo diagnóstico sobre o cálculo da área de figuras planas na malha quadriculada: influências de algumas variáveis**. 2010. 146 f. Dissertação (Mestrado), Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2010.

POMMER, W. M. **A Engenharia Didática em sala de aula: elementos básicos e uma ilustração envolvendo as Equações Diofantinas Lineares**. São Paulo - SP: Tabs, 2013. 72 p.

PONTE, J. P. **Práticas Profissionais dos Professores de Matemática**. 1ª ed. Lisboa - PT: Lisboa, 2014. 542 p.

. Tecnologias de Informação e Comunicação na Formação de Professores: que desafios? **Revista Iberoamericana de Educación**, Madrid - Espanha, n. 24, p.63-90, dez. 2000. Trimestral. Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura (OEI).

RESENDE, G.; MESQUITA, M. B. F. Principais dificuldades percebidas no processo ensino-aprendizagem de Matemática em escolas do município de Divinópolis, MG. **Puc-sp: Educação Matemática e Pesquisa**, São Paulo, v. 14, n. 1, p.199-222. 2013. Disponível em: <<https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/viewFile/9841/pdf>>. Acesso em: 11 nov. 2017.

ROCHA, T. M.; ANDRADE, D. **Áreas: das noções intuitivas ao teorema de Pick**. 2008. Disponível em: <www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/.../artigo_tania_marli_rocha.pdf>. Acesso em: 25 de out. 2016.

ROCHA, M. L.; AGUIAR, K. F. Pesquisa-intervenção e a produção de novas análises. **Psicologia: ciência e profissão**, v. 23, n. 4, p. 64-73, 2003.

SANTOS, M. R. Resoluções de problemas envolvendo área de paralelogramo: um estudo sob a ótica do contrato didático e das variáveis didáticas. Recife. 178f. Dissertação de mestrado (Mestrado em Ensino da Ciências). Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2005.

SECCO, A. **Conceito de área**: da composição a decomposição de figuras até as Fórmulas. 2007. 198 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, PUC/SP, São Paulo, 2007.

SILVA, R. D. **A Formação do Professor de Matemática: um estudo das representações sociais**. Campina Grande - PB: Eduepb, 2013. 317 p.

SILVEIRA, D. T.; CÓRDOVA, F. P. A pesquisa científica. In: GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. (Org.). **Métodos de pesquisa**. Porto Alegre - RS: UFRGS, 2009. p. 31-32.

SILVEIRA, E. **Matemática**: compreensão e prática. 3. ed. São Paulo SP: Moderna, 2015. 4v. para alunos do 6º ao 9º ano.

TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional**. 4. ed. Rio de Janeiro - RJ: Vozes, 2002. 325 p.

TEIXEIRA, P. J. M.; PASSOS, C. C. M. Um pouco da teoria das situações didáticas (tsd) de Guy Brousseau. **Zetetiké – FE**, São Paulo - SP, v. 21, n. 39, p.155-168, jun. 2013. Semestral.

VALENTE, W. R. **Quem somos nós, professores de Matemática?** 2008. Disponível em: <<https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/160379>>. Acesso em: 26 jan. 2017.

Apêndice

Apêndice A - Questionário diagnóstico



**UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA MESTRADO ACADÊMICO
EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

Mestrando: Joel Silva de Oliveira

Prof. Orientadora: Cibelle de Fatima Castro de Assis

Título do trabalho: A formação de professores de matemática e os processos de ensino de áreas de figuras planas irregulares com o *GeoGebra*: A Engenharia Didática como referencial para a ação investigativa

Caro(a) aluno(a),

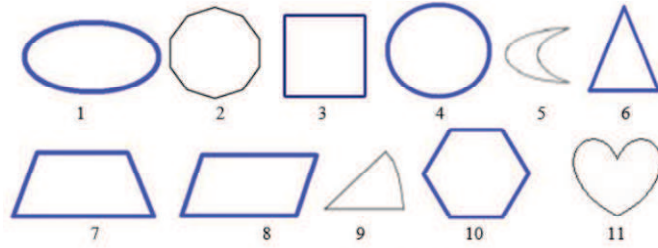
A Geometria Plana é importantíssima para a formação acadêmica, social e profissional de todos porque permite que consigamos resolver situações práticas como: saber calcular ou estimar a área de certa superfície ou região independente da forma. É importante também conhecer e saber distinguir figuras planas regulares daquelas não regulares. Por esse motivo pedimos a sua colaboração para realizar essa pesquisa que busca criar situações de ensino sobre o **cálculo de área de figuras planas irregulares** no Ensino Fundamental a partir das dificuldades que os alunos apresentam. Desta forma, pedimos que você seja colaborador(a) e participe da coleta de dados através do questionário a seguir. Você não precisa se identificar!! Desde já agradecemos a sua colaboração.

QUESTIONÁRIO

1. Para você, o que significa área de uma superfície geométrica?

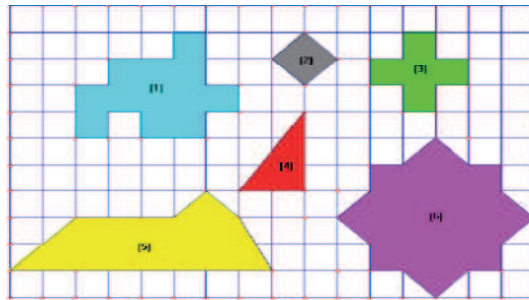
Resposta (as):

2. Observe as figuras a seguir. Entre elas, quais podem ser classificadas como superfície plana regular ou superfície plana irregular?



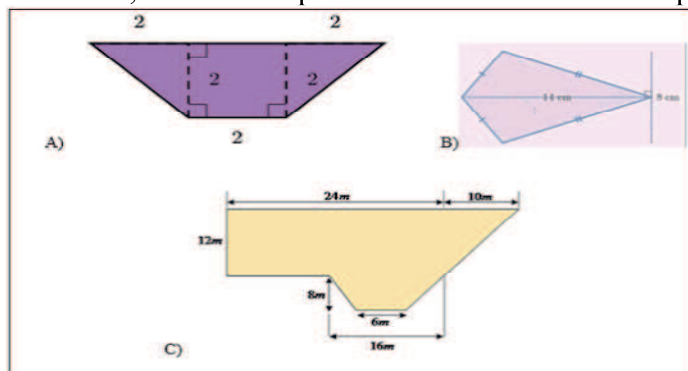
Resposta (as):

3. Observe as figuras (1, 2, 3, 4, 5 e 6) desenhadas na malha quadriculada. Sabendo que cada quadradinho da malha tem 1 u.a (unidade de área), a) Calcule a área de cada figura; b) O que acontece se em duas ou mais figuras tiver a mesma quantidade de quadradinhos?



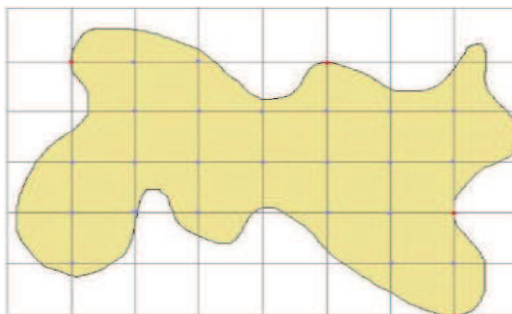
Resposta (as):

4. Calcule nas alternativas A, B e C as respectivas áreas de formas compostas.



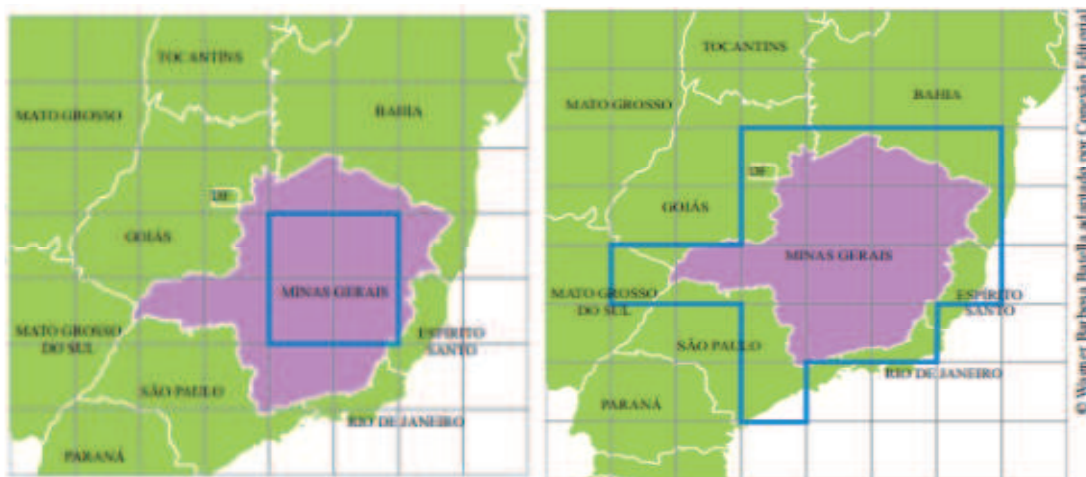
Resposta (as):

5. Observe as regiões limitadas por uma linha curva, estime a área e registre sua estimativa usando o \square como unidade de área.



Resposta (as):

6. Observe o mapa do estado de Minas Gerais. Podemos calcular a sua área cobrindo a região utilizando um quadrado (interior ao mapa) e um retângulo (exterior ao mapa) como mostram as figuras. Considerando as duas figuras calcule a área aproximada do Estado de Minas Gerais disposta no mapa? (Dados 53.000km²).



Resposta (as):