UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS
E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO ACADÊMICO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

PAULO HENRIQUE FREITAS SILVA

ENSINO-APRENDIZAGEM DE FRAÇÕES: UM OLHAR PARA AS PESQUISAS E PARA A SALA DE AULA

CAMPINA GRANDE – PB
2017

PAULO HENRIQUE FREITAS SILVA

ENSINO-APRENDIZAGEM DE FRAÇÕES: UM OLHAR PARA AS PESQUISAS E PARA A SALA DE AULA

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento à exigência para obtenção do grau de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática

Orientador: Prof. Dr. Silvanio de Andrade

Campina Grande – PB
2017

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano da dissertação.

S586e Silva, Paulo Henrique Freitas.
Ensino-aprendizagem de Frações [manuscrito] : um olhar para as pesquisas e para a sala de aula / Paulo Henrique Freitas Silva. - 2017.
164 p. : il. color.

Digitado.
Dissertação (Mestrado Acadêmico em Ens. de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2017.
"Orientação: Prof. Dr. Silvanio de Andrade, Departamento de Matemática".

1. Frações. 2. Números racionais. 3. Ensino-aprendizagem. 4. Alternativas didáticas. I. Título.

21. ed. CDD 513.26

PAULO HENRIQUE FREITAS SILVA

ENSINO-APRENDIZAGEM DE FRAÇÕES: UM OLHAR PARA AS PESQUISAS E PARA A SALA DE AULA

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, da Universidade Estadual da Paraíba, em cumprimento à exigência para obtenção do grau de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática

Aprovado em 04 de maio de 2017

BANCA EXAMINADORA

Silvanio de Andrade

Dr. Silvanio de Andrade - UEPB

Dr. José Joelson Pimentel de Almeida - UEPB

Izabel Maria Albuquerque

Dra. Izabel Maria Barbosa de Albuquerque - UFCG

Dedico aos meus pais, Marinêz Arruda de Freitas e Severino Gomes da Silva.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus, o Criador, pela força, por ter permitido a escrita deste trabalho.

Também agradeço às pessoas que Deus colocou no meu caminho, que, de algum modo, contribuíram para a concretização deste trabalho:

Aos meus pais, Marinêz Arruda de Freitas e Severino Gomes da Silva, pessoas simples que vieram da roça e não tiveram a oportunidade de estudar, mas que sempre se preocuparam em procurar vagas em escolas públicas para que eu pudesse estudar;

Ao professor e orientador Silvanio de Andrade, pela oportunidade e pelas sugestões para a elaboração deste trabalho;

Ao professor Joelson de Almeida, pelas dicas e pelo incentivo em iniciar esse curso;

À professora Izabel de Albuquerque, pelas dicas e por aceitar participar, junto com Silvanio de Andrade e Joelson de Almeida, da banca examinadora deste trabalho;

A todos os demais professores do PPGECEM, que tive a oportunidade de conhecer durante a realização desse curso, e que também colaboraram com a minha formação;

Ao Grupo de Estudo e Pesquisa sobre Educação e Pós-Modernidade (GEPEP), grupo que contribuiu com sugestões para o desenvolvimento do questionário utilizado nesta pesquisa;

A todos os professores que colaboraram em responder as perguntas do questionário; e

Ao meu irmão, Sérgio Arruda, pelo incentivo.

O homem faz seus projetos, mas a resposta vem de Deus. (Provérbios 16:1).

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo identificar como tem sido o ensino-aprendizagem de frações na sala de aula e nas pesquisas, e quais as possíveis aproximações das pesquisas com a sala de aula. Para isso, foram analisadas pesquisas sobre o referido tema e analisados dados fornecidos por 25 professores do Ensino Fundamental, que foram levantados por meio de um questionário aberto composto por 10 perguntas. Os dados obtidos são do tipo qualitativo e foram analisados conforme o método qualitativo de pesquisa, na abordagem do Discurso do Sujeito Coletivo (DSC). Todas as pesquisas analisadas neste trabalho, quando propõem atividades sobre o tema frações, mostram, direta ou indiretamente, que é importante trabalhar com outras representações de frações, como figuras geométricas e materiais manipuláveis - além da notação barra-fracionária - para que os alunos possam compreender esse conteúdo. Além disso, os pesquisadores mostram alternativas para amenizar problemas citados pela literatura, como falta de atenção e dificuldade para compreender as ideias de equivalência, comparação e operações com frações, e afirmam que em sala de aula há uma preocupação mais voltada para a memorização de fórmulas e de procedimentos e também com a resposta correta, o que não implica, necessariamente, em compreensão do conteúdo estudado. Isso evidencia um distanciamento da sala de aula e as pesquisas, já que essas, geralmente, trazem alternativas e discussões cujo foco principal é a promoção de uma aprendizagem com compreensão desse conteúdo.

Palavras-chave: Frações. Números racionais. Ensino-aprendizagem. Alternativas didáticas.

ABSTRACT

This work has objective identify how is the teaching and learning of fractions in the classroom and researches, and what the approximations between classrooms and researches. For this, were analyzed researches about the fractions theme and informations provided by 25 elementary school teachers, collected through an open questionnaire composed for 10 questions. The data collected are of the qualitative type and were analyzed according to the method qualitative research, in a Discurso do Sujeito Coletivo approach. All the research analyzed in this work, when they propose activitys about the fractions theme, they show, directly or indirectly, that is important to work this theme with others representations - like geometrics figures and manipulables materials - beyond of fractional bar notation, for the students understand this content. Beyond this, the searchers shows alternatives for decrease the problems cited in the literature, like lack of attention and difficulties of understand the equivalence and comparation ideas, and operations with fractions. They also affirm that, in classroom, there are a preocupation with memorization of formulas and procedures and correct answer, too, but this does not necessaryli imply in understanding to conteude studed. This shows a distance between classroom and the researches, since the researches, usually, they propose alternatives and discussions whose main focus is a concern in learning with understand of the fraction theme.

Key-words: Fractions. Rational numbers. Teaching and learning. Didatics alternatives.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE FOTOGRAFIAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Temos observado que a promoção de compreensão tem sido uma preocupação das pesquisas sobre o ensino-aprendizagem de frações. Segundo Forgues, Tian e Siegles (2015), há décadas, não só no Brasil, mas também em países como os Estados Unidos da América (EUA) e a China, por exemplo, pesquisadores desenvolvem atividades com o propósito de contribuir para que o aluno tenha uma aprendizagem com compreensão do conteúdo de frações, mas as pesquisas, como a de Oliveira (1996) e a de Valio (2014), por exemplo, afirmam que a prioridade, em sala de aula, está em proporcionar aos alunos a memorização do conteúdo estudado.

Forgues, Tian e Siegles (2015) também dizem que nos EUA, atualmente, depois de 3 décadas de reformas educacionais e de bilhões de dólares gastos na área da educação, pouca ou nenhuma melhora foi percebida no desenvolvimento de compreensão do conteúdo de frações, pelos alunos.

A situação não tem sido diferente no Brasil. Oliveira (1996) diz que já em 1996 havia uma preocupação demasiada com a "resposta correta", mas não com o processo de ensino-aprendizagem, no qual ocorrem erros que deveriam ser explorados para que os alunos desenvolvam compreensão sobre o conteúdo de frações. Decorridas quase duas décadas após a afirmação de Oliveira (1996), Valio (2014) diz que ainda há práticas de ensino de matemática que não proporcionam a concretização da aprendizagem, pois priorizam a memorização da forma como são realizadas as operações com frações, por exemplo.

Além disso, as pesquisas apontam que não apenas as crianças sentem dificuldades de compreensão do conteúdo de frações, mas também professores de séries iniciais da Educação Básica. A pesquisa de Biffi (2001), por exemplo, que envolveu alunas de pedagogia, mostrou que até professoras que já ensinavam a um tempo considerável (11 professoras tinham mais de 8 anos de experiência de sala de aula) apresentaram muitas dificuldades de compreensão desse conteúdo.

Observamos que há uma quantidade considerável de pesquisas sobre o tema frações, e muitas delas trazem sugestões de um trabalho alternativo de ensino-aprendizagem.

As pesquisas têm apresentado alternativas que, de acordo com os pesquisadores, favorecem uma aprendizagem com compreensão do conteúdo de frações, mas as salas de aula parecem não estar acompanhando esse desenvolvimento.

Assim, o nosso trabalho tem como objetivo identificar ou propor alternativas para o ensino-aprendizagem de frações e verificar quais as possíveis aproximações entre a sala de aula e as pesquisas sobre esse tema.

Para identificarmos as contribuições das pesquisas o nosso foco se dirige às dissertações de mestrado e a uma tese de doutorado. Com relação à sala de aula, o nosso olhar se dirige aos professores de Ensino Fundamental.

Com base no objetivo desta pesquisa, nós procuramos responder as perguntas seguintes:

> **1.** Como tem sido o ensino-aprendizagem de frações, a partir de um olhar para as pesquisas?
> **2.** Como tem sido o ensino-aprendizagem de frações, a partir do olhar dos professores?

Este trabalho tem como base o método qualitativo de pesquisa e apresenta, por meio do Discurso do Sujeito Coletivo (DSC), mais detalhado no quarto capítulo, a análise dos dados coletados por meio de um questionário aberto aplicado a professores do Ensino Fundamental. O DSC se refere a um discurso emitido por uma coletividade, para expressar as ideias, opiniões, sugestões etc, de um determinado grupo social, e tem sido muito utilizado em pesquisas cujos dados também envolvem discursos. "O Discurso do Sujeito Coletivo é, em suma, uma forma ou um expediente destinado a fazer a coletividade falar diretamente". (LEFÈVRE; LEFÈVRE, 2005, p. 16).

Em vez de considerarmos somente a quantidade de dados iguais ou semelhantes que surgiram no decorrer desta pesquisa, para com base nela fazer as análises, o que caracterizaria uma pesquisa quantitativa, nós utilizamos a metodologia qualitativa porque ela permite fazer uma descrição mais detalhada das informações coletadas. Segundo Lankshear e Knobel (2008, p. 66), "a pesquisa qualitativa está principalmente interessada em como as pessoas experimentam, entendem, interpretam e participam de seus mundos social e cultural".

Ao todo foram cinco capítulos, além da introdução e das considerações finais.

O segundo capítulo foi desenvolvido com o propósito de compreendermos melhor como o conteúdo de frações está sendo abordado nas pesquisas e o que essas relatam sobre as práticas de ensino do referido conteúdo nas salas de aula.

No terceiro capítulo, nós procuramos aprofundar o conteúdo discutido neste trabalho. Fizemos consultas a outras fontes de literatura sobre o tema frações, como livros e artigos, por exemplo, além da pesquisa de Botta (1996), e isso nos trouxe, além de sugestões, mais evidências sobre o quanto as frações têm sido um conteúdo de difícil compreensão para os alunos. Geralmente as discussões se referem às dificuldades dos discentes e às alternativas para o ensino-aprendizagem desse conteúdo.

No quarto capítulo são discutidas a metodologia de pesquisa e o Discurso do Sujeito Coletivo (DSC), com explicitações sobre os procedimentos de tabulação e análise dos dados decorrentes do questionário. O DSC nos permitiu organizar os discursos dos professores de uma forma que favoreceu a análise dos dados.

O quinto capítulo contém as tabulações e análises - de acordo com o DSC - das respostas do questionário fornecidas pelos professores participantes desta pesquisa, e, na sequência, os resultados e as considerações finais, conforme os dados dispostos ao longo desta pesquisa.

2 ENSINO-APRENDIZAGEM DE FRAÇÕES: UM OLHAR A PARTIR DAS PESQUISAS

Lankshear e Knobel (2008) afirmam que é importante verificar pelo menos alguns estudos referentes ao tema pesquisado, para conhecer o que outros pesquisadores relatam, sugerem, que pode ser acrescentado ao trabalho desenvolvido.

Assim, neste capítulo nós trazemos um olhar das pesquisas sobre o tema 'frações', com o propósito de identificar contribuições e possíveis características sobre o ensino-aprendizagem desse conteúdo, nas salas de aula. Isso nos dá fundamentação para responder a questão: "Como tem sido o ensino-aprendizagem de frações, a partir de um olhar para as pesquisas"?

Nós focamos em pesquisas, escolhidas de forma aleatória, sobre o tema frações. Os autores Oliveira (1996) Polese (2011), por exemplo, procuraram identificar as vantagens de um método de ensino-aprendizagem baseado no construtivismo, para fazer uma abordagem sobre a ideia parte-todo e adição de frações, entre outras ideias; Biffi (2001) utilizou os registros de representação semiótica para também trabalhar a ideia parte-todo e operações com frações; Lima (2013) e Valio (2014) fizeram uso da engenharia didática como metodologia de pesquisa, e concluíram que essa metodologia favorece a aprendizagem do conteúdo abordado.

A pesquisa de Raquel Gomes de Oliveira, intitulada **Aprendizagem de frações: uma análise comparativa de dois processos de ensino na 5ª série do 1º grau**, concluída em 1996, na Universidade Estadual de Campinas, teve como objetivo analisar, em duas turmas de 6º ano do Ensino Fundamental, a aprendizagem de frações. Para isso foi utilizado, em cada uma das turmas, um método de ensino diferente.

O Quadro seguinte traz uma síntese desse trabalho.

Quadro 1 – Síntese do trabalho de Oliveira (1996)

Objetivo(s) da pesquisa	Público alvo	Ideias abordadas sobre frações	Metodologia e/ou recursos didáticos no ensino de frações
“Verificar a existência de diferenças significativas no desempenho de alunos de 5ª série, em relação ao conceito de fração, quando esses alunos, divididos em dois grupos, são submetidos a dois processos de ensino: convencional e sistematizado”.	Alunos do Ensino Fundamental	Quociente; operador; e a ideia, ordem e equivalência de frações	Jogos matemáticos e materiais manipuláveis

Fonte: Elaborado pelo autor.

Oliveira focou o ensino da ideia, ordem e equivalência de frações, e teve como problema de pesquisa verificar se existem diferenças significativas na aprendizagem dos alunos, quando os elementos propostos por Piaget (1948) (conhecimento físico e conhecimento lógico-matemático) são considerados no ensino-aprendizagem do conteúdo abordado.

Segundo Oliveira, na explicação de Piaget sobre a origem do conhecimento, são considerados o conhecimento físico e o conhecimento lógico-matemático. O conhecimento físico é construído por abstração simples (também chamada de empírica). A abstração simples é a abstração de propriedades que são observadas nos objetos, porque são inerentes a eles ou, de forma geral, à realidade exterior. Dessa forma, a cor, a textura, o peso, por exemplo, estão no objeto, e as crianças percebem essas características através da manipulação dele. O conhecimento lógico-matemático refere-se às ações, coordenações, operações que são criadas pelo sujeito durante a interação com os objetos (materiais manipuláveis).

A pesquisa envolveu 58 crianças (27 meninos e 31 meninas) com idades entre 10 e 17 anos, estudantes de uma escola estadual pública da cidade de Presidente Prudente – SP.

Oliveira afirma que em uma das turmas foi utilizada a metodologia convencional, tradicional, cuja característica, no caso do ensino de matemática, é a apresentação de fórmulas e de algoritmos seguidos de muitos exercícios, com o objetivo de os alunos memorizarem os procedimentos realizados durante a resolução.

A outra turma passou a ser o grupo experimental, na qual foi utilizada uma metodologia de ensino baseada em atividades envolvendo jogos com frações. Para isso, foram consideradas as ideias de Clements e Battista (1990) - que afirmam que os conceitos matemáticos são desenvolvidos através de ações mentais e físicas - e também algumas ideias de Piaget, conforme comentado anteriormente.

Foi utilizada uma metodologia quantitativa de análise de dados. Oliveira não relatou muitos detalhes sobre as atitudes dos alunos durante a realização das atividades. Ela utilizou dados numéricos (notas e médias) obtidos a partir dos testes aplicados aos alunos participantes de sua pesquisa.

Oliveira diz que, de acordo com as experiências dela, lecionando em turmas do Ensino Fundamental e Médio, verificou que as dificuldades dos alunos, sobre os números fracionários, se estendem por toda a Educação Básica e que não há uma etapa exclusiva da educação na qual os discentes sentem dificuldades de compreender esse conteúdo.

Ela também afirma que as dificuldades dos discentes têm favorecido o surgimento de métodos de ensino baseados em princípios construtivistas, os quais dão ênfase à compreensão e que, sob a perspectiva do construtivismo, as atividades de ensino de fração consideram pontos como:

- Utilização de problemas que provoquem o interesse dos discentes;
- Permitir que haja, durante o ensino, a descoberta, a compreensão dos processos que envolvem o conteúdo matemático abordado;
- A elaboração de uma sequência didática a ser aplicada conforme o desenvolvimento cognitivo dos alunos, pois, como afirma Piaget (1960), a habilidade de comparar partes em relação ao todo, que garante as primeiras noções de fração, é operatória;

- Os princípios pedagógicos referenciados no construtivismo piagetiano ressaltam a importância de haver interação entre as crianças, no processo de aprendizagem. Desse modo, é importante que sejam desenvolvidos trabalhos em grupo;
- Permitir que haja correção e reflexão sobre os erros cometidos durante a aprendizagem;
- Proporcionar o tempo necessário para que os discentes compreendam a ideia de fração na forma simbólica (na notação barra-fracionária);
- Permitir que os alunos expliquem os pensamentos que motivam as ações deles durante as atividades, pois dessa forma eles dão pistas ao professor sobre as representações mentais que eles fazem sobre o conteúdo estudado. Isso facilita a intermediação do professor, a fim de proporcionar compreensão aos discentes.

Oliveira também diz que as diferentes ideias que os números racionais podem representar (parte-todo e operador, por exemplo) se apresentam como mais um obstáculo na aprendizagem dos alunos, e que algumas pesquisas desenvolvidas por Sowell (1989) mostram que há uma melhora no desempenho dos alunos, com relação à aprendizagem de matemática, quando há a utilização, em longo prazo, de materiais concretos, mas que para isso é necessário que os professores saibam utilizar corretamente tais materiais.

Em uma das atividades a autora utilizou discos de cartolina para desenvolver atividades envolvendo a ideia parte-todo. Conforme foi exposto por ela, após os alunos fazerem trocas de peças de cartolina por apenas uma peça que equivalia ao tamanho delas, representando $2 \times \frac{1}{10} = \frac{1}{5}$, por exemplo, a turma ainda apresentou falta de compreensão do conceito de equivalência de frações.

Durante o estudo da ideia de operadores as crianças não sentiram dificuldades de representar, através de partes de discos de cartolina, $\frac{3}{5}$ de 15 grãos de feijão, mas demonstraram não compreender a mesma ideia quando passaram a utilizar a forma convencional (notação barra-fracionária) de representar frações e o algoritmo da multiplicação de números fracionários.

Apesar de ter apresentado um desempenho melhor que a outra turma também participante da pesquisa, a turma experimental, na qual foram desenvolvidas atividades com jogos e materiais manipuláveis, também apresentou dificuldades de compreensão dos números fracionários. Algumas crianças, mesmo trabalhando a ideia de dividir e de tomar partes de um todo, utilizando discos de cartolina representando um todo dividido em partes iguais, tiveram dificuldades para compreender a ideia de numerador e de denominador.

Assim, as duas turmas, tanto a que teve aulas baseadas na apresentação de fórmulas e algoritmos, quanto a que teve aulas nas quais foram utilizados jogos matemáticos e materiais manipuláveis, apresentaram dificuldades de compreensão do conteúdo de frações. Entretanto, Oliveira afirma que os resultados das análises mostraram que os alunos da turma experimental tiveram um desempenho melhor que o da turma na qual os discentes assistiram aulas sob a forma tradicional de ensino. Essa conclusão foi baseada na média das notas obtidas pelas turmas, no pós-teste.

Esse trabalho também evidencia que as dificuldades de aprendizagem e compreensão do conteúdo de frações não são exclusivas de crianças das séries iniciais do Ensino Fundamental. Segundo Oliveira, não há uma etapa exclusiva da educação, na qual os discentes sentem dificuldades de compreender esse conteúdo.

Além disso, apesar de ter concluído que a turma experimental teve um índice maior de aprendizagem, em relação à turma que teve aulas sob o método de ensino tradicional, Oliveira mostrou que a utilização de jogos e de materiais manipuláveis também pode dar, às vezes, uma ideia equivocada de que os alunos compreenderam o conteúdo de frações, pois nem sempre que realizam as atividades propostas pelo professor significa que houve assimilação da ideia abordada.

Ao tentarem explicar, por exemplo, o motivo pelo qual as frações $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$ e $\frac{4}{8}$ são equivalentes, alguns discentes afirmaram que um é metade de dois, dois é metade de quatro e quatro é metade de oito, e por isso as frações são iguais. Oliveira afirma que eles se expressaram conforme uma regularidade que verificaram nas frações, mas que não conseguiram demonstrar, explicar o motivo pelo qual as frações citadas são equivalentes.

Bertoni (2008) diz que, de acordo com Nunes e Bryant (1997), algumas pesquisas demonstram que as ações de crianças dividindo e pintando figuras geométricas podem representar não mais que uma ilusão de aprendizagem dos números fracionários.

Dessa forma, não é suficiente que o professor provoque nos alunos um empenho em desenvolver as atividades propostas. Também é importante perceber que relações mentais eles estabelecem entre suas ações e o conteúdo estudado. Fazer com que os discentes se expressem oralmente, expliquem cada procedimento que realiza, é uma forma de perceber o quanto eles assimilaram do conteúdo matemático estudado, e assim fazer as intermediações que julgar necessárias para proporcionar a compreensão desejada.

A dissertação intitulada **Conceito de frações através do estudo dos registros de representação**, de Darcy de Liz Biffi, concluída em 2001 no Mestrado Interinstitucional da Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) e da Universidade do Planalto Catarinense (UNIPLAC), traz uma investigação sobre a aprendizagem dos números fracionários através da utilização de diversos registros de representações semióticas e de análise de livros didáticos.

Vejamos, no quadro a seguir, uma síntese desse trabalho.

Quadro 2 – Síntese do trabalho de Biffi (2001)

Objetivo(s) da pesquisa	Público alvo	Ideias abordadas sobre frações	Metodologia e/ou recursos didáticos no ensino de frações
Verificar as possíveis contribuições dos registros de representação para o ensino-aprendizagem dos números fracionários	Alunos de pedagogia	Parte-todo; quociente; frações equivalentes, próprias, impróprias e aparentes; e quantidades discretas e contínuas	Representações semióticas; materiais manipuláveis; e figuras geométricas

Fonte: Elaborado pelo autor.

Biffi utilizou os registros de representação semiótica como metodologia de ensino-aprendizagem. Ela afirma que, segundo Duval (1993), o ensino-aprendizagem de conteúdos matemáticos através da assimilação e conversões de tais registros possibilita o desenvolvimento de compreensão.

Um meio pode ser representado pelo símbolo $\frac{1}{2}$, mas também, por exemplo, por um desenho ilustrando uma das partes de um círculo dividido ao meio. Assim, quando fala em representações semióticas, a autora se refere às diferentes formas de representar algo; e fazer conversão, no caso dos números fracionários, é o ato de, por exemplo, expressar uma fração representada por um desenho ilustrando duas partes de uma pizza dividida em três pedaços iguais, pelo símbolo $\frac{2}{3}$, e vice-versa. Biffi diz que cada conteúdo da matemática possui diversos registros de representação, e que a compreensão ocorre mais facilmente quando são apresentadas as diversas representações do que é ensinado e quando se faz conversões dos registros.

Continuando, ela afirma que

> É comum abrirmos um livro, uma apostila, um manual e encontrarmos, ao lado do texto escrito, desenhos, imagens, fotografias, gráficos ou fórmulas que têm a função de proporcionar melhor compreensão do que está expresso na língua natural. Em todas as obras que apresentam conhecimento estão presentes esses diferentes registros de representação, que não estão ali por acaso ou apenas para ilustrar didaticamente, mas sim com o propósito de reforçar a compreensão do objeto em estudo. (BIFFI, 2001, p. 8).

Ao longo da pesquisa a autora procurou responder a pergunta: “a utilização de diferentes registros de representação semiótica e a conversão entre esses registros de representação possibilitam aos alunos a aquisição do conceito sobre frações”? (BIFFI, 2001, p. 3). Para isso ela partiu das hipóteses: com a utilização de diferentes registros de representação semiótica é possível desenvolver mais compreensão, caso o conteúdo matemático seja bem definido pelo professor, e se os alunos perceberem as relações existentes entre os diferentes registros.

O objetivo geral foi:

> Contribuir para uma prática pedagógica, fazendo uso de diferentes registros de representação semiótica e a conversão entre esses registros de representação, que possibilitem não somente a aquisição do conceito de frações, mas oportunizem uma metodologia para o ensino e aprendizagem da matemática, na formação dos professores das séries iniciais. (BIFFI, 2001, p. 4).

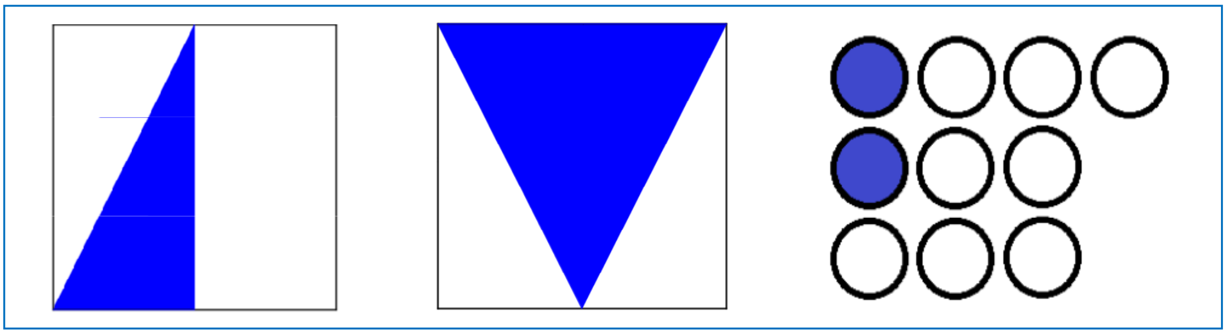
Os objetivos específicos foram os seguintes: fazer um levantamento de pesquisas recentes sobre o ensino de frações; analisar alguns livros utilizados nas escolas públicas do município de Lages - SC, identificando os registros de representação semiótica mais utilizados neles; identificar quais são os registros de representação semiótica necessários à aquisição do conceito de frações; propor uma sequência didática que possibilite a aquisição do conceito de frações, através da utilização de diferentes registros de representação semiótica e de conversões entre eles.

A turma na qual foi realizada a pesquisa continha 44 alunas do 3º semestre do curso de Pedagogia - Séries Iniciais, da Universidade do Planalto Catarinense (UNIPLAC).

Biffi aplicou um pré-teste para verificar o nível de conhecimento e as dificuldades das 44 alunas, sobre o conteúdo de frações, e para saber quantas delas já atuavam como professoras e quanto tempo de experiência de ensino elas possuíam.

As questões do pré-teste, que se referiram ao conteúdo de frações, foram elaboradas levando em consideração os diferentes registros de representação semiótica e mostraram, segundo Biffi, que as dificuldades das alunas foram além das expectativas. Muitas alunas não conseguiram representar corretamente, através da notação barra-fracionária, frações ilustradas por figuras geométricas - semelhantes às expostas abaixo - não reconheceram erros feitos de propósito pela autora, em operações de adição de frações, e não souberam fazer distinção entre grandezas contínuas e discretas.

Figura 1: Representações geométricas de frações 1



Fonte: Elaborada pelo autor.

Das 44 alunas da turma participante da pesquisa de Biffi, 35 se submeteram aos testes e atividades. Dessas 35 alunas, 18 já atuavam na Educação Básica. Dessas 18, apenas 3 afirmaram, no pré-teste, que tinham domínio do conteúdo de frações. As demais alunas, com exceção de uma que não quis se pronunciar sobre o assunto, assumiram ter dificuldades de compreensão do referido conteúdo.

Biffi também fez algumas considerações sobre as diferentes ideias da notação barra-fracionária. Ela afirma que Kieren (1989) foi o primeiro educador matemático a identificar a multiplicidade de ideias dessa notação, e que ele as chamou de subconstrutos e deu-lhes, a cada uma, o nome de parte-todo (medida), quociente, razão e operador.

A autora pretendeu propor uma abordagem diferenciada para as ideias parte-todo e quociente.

> Desenvolvemos este estudo sobre o ensino e aprendizagem das frações, considerando as relações parte/todo (medida) e quociente, de quantidades contínuas e discretas, através de diferentes registros ou formas de representações, utilizando a teoria de Raymond Duval como um suporte teórico metodológico para a aquisição desse conhecimento. (BIFFI, 2001, p. 37).

A análise de livros didáticos consistiu em verificar oito obras, cada uma composta por quatro volumes (livros do 2º ao 5º ano do Ensino Fundamental). Biffi constatou que há diferentes registros de representação nos livros que abordam o conteúdo de frações, mas não há representações diversas para as ideias quociente, razão e operador, e que a apresentação das operações com frações costuma ser desvinculada de aplicações.

Para a realização das atividades, Biffi utilizou materiais concretos, tais como barbantes e fichas, para trabalhar a ideia de quantidades discretas e contínuas; pedaços de papel recortados em formas de círculos, retângulos, quadrados e triângulos, para trabalhar a ideia de fração como parte-todo; além de retas e outros desenhos geométricos para fazer uma abordagem sobre as ideias parte-todo e quociente, e frações equivalentes, próprias, impróprias e aparentes.

Biffi destacou a importância que a utilização da reta numérica teve para proporcionar a algumas alunas a compreensão do significado de frações próprias, aparentes e impróprias, pois diferentemente de figuras que ilustram um todo dividido em partes iguais, através de uma mesma reta é possível representar frações menores ou maiores que um, e também equivalentes aos números naturais.

Sobre a utilização da reta numérica, Silva e Amouloud (2008, p. 59) afirmam que,

> Comumente, o ensino utiliza e prioriza o trabalho com a concepção parte-todo baseado, principalmente, em figuras que representam grandezas contínuas, tais como segmentos, polígonos e círculos, sendo, por isso, natural o uso dessas figuras para a compreensão das regras operatórias com números fracionários. No entanto, um primeiro ponto que deve ser considerado é a impossibilidade de o resultado ser maior que um inteiro, pois, se para a fração $\frac{2}{3}$, por exemplo, a criança compreende que o inteiro foi dividido em três partes de mesma área ou “iguais”, das quais duas estão sendo consideradas, como explicar a fração $\frac{5}{3}$? Como obter cinco partes se o inteiro foi dividido em três? Dessa forma, acreditamos que, para situações que envolvam mais do que um inteiro, as concepções de medida e quociente se mostram boas alternativas. No primeiro caso, utilizando a reta numerada e, no segundo, situações de distribuição, embora em ambos os casos possamos mobilizar também a concepção parte-todo.

Biffi diz que é comum o aluno saber que para obter uma fração equivalente a outra, basta multiplicar ou dividir, dependendo do caso, o numerador e o denominador da fração por um número inteiro, mas não saber explicar o motivo de, por exemplo, $\frac{2}{3}$ ser equivalente a $\frac{4}{6}$. Ela também afirma que a carência de livros didáticos bons e a falta de leitura são fatores que resultam em insegurança nos professores, durante o ensino do conteúdo de frações.

Os dados levantados por Biffi levaram ela à conclusão de que as frações devem ser ensinadas por meio de atividades ou situações-problema que permitam o desenvolvimento de compreensão, pois ela afirma que a utilização de regras e algoritmos, preocupando-se somente em proporcionar memorização, nas séries iniciais, é um fator que causa atraso na construção do conceito de fração pelas crianças. Os alunos, concentrados em memorizar regras, perdem a oportunidade de compreender ideias sobre a notação barra-fracionária.

Biffi também ressaltou que é possível que as dificuldades de compreensão sobre os números fracionários, que as alunas de pedagogia participantes de sua pesquisa apresentaram, tenham sido decorrentes de uma forma de ensinar, cuja preocupação principal foi a de memorizar o conteúdo de frações, durante a formação delas na Educação Básica, e concluiu que a ideia de registro de representação da teoria de Raymond Duval, cada vez mais utilizada para a promoção de aprendizado, particularmente de conhecimentos matemáticos, se apresentou como suporte indispensável à pesquisa dela, pois estimulou a reflexão e a compreensão das alunas.

O pós-teste mostrou um resultado satisfatório das atividades aplicadas durante a pesquisa, para a aprendizagem da turma de licenciandas de pedagogia, pois 100% delas acertaram questões envolvendo quantidades discretas e contínuas, conversões de representações de frações da forma geométrica para a forma numérica, e representações fracionárias de pontos sobre a reta. Por outro lado, antes da aplicação das atividades, nenhuma das alunas soube explicar o que são quantidades discretas e quantidades contínuas; apenas 17,2% marcaram corretamente, em uma reta, pontos representando números fracionários; e somente 38% delas conseguiram fazer a conversão da forma geométrica para a forma numérica corretamente.

Esses foram alguns dos dados que levaram Biffi a atribuir como positivos os resultados da utilização das representações semióticas no ensino-aprendizagem do conteúdo de frações. Ela afirma que quanto mais habilidade de fazer conversões de representações de frações as alunas apresentavam, mais ficava claro para elas a ideia de fração como parte de um todo.

A partir do estudo de Biffi (2001) podemos destacar a importância atribuída à reta numérica para ensinar a ideia de fração imprópria. Além disso, das 18 alunas de pedagogia participantes dessa pesquisa, que também eram professoras de Ensino Fundamental, séries iniciais, 11 tinham entre 9 e 24 anos de atuação como docentes, e 7 delas tinham uma experiência de até 3 anos. Isso pode refletir diretamente na aprendizagem dos alunos delas, pois, como já comentado, nenhuma delas sabia explicar o que são quantidades contínuas e discretas, e menos de 40% delas soube marcar em uma reta - de forma correta - pontos representando números fracionários e expressar corretamente, através da notação barra fracionária, frações representadas por meio de figuras geométricas divididas em partes iguais.

Assim, Biffi (2001) também nos mostra que é importante que haja uma atenção voltada para a formação continuada dos professores que lecionam matemática, e isso também é evidenciado por outros pesquisadores. Proença (2015) diz que, de acordo com algumas pesquisas, como a de Costa e Poloni (2012), por exemplo, muitos professores de pedagogia demonstram ter dificuldades de preparar aulas e de lecionar sobre o conteúdo de frações.

O trabalho de Marques (2013), baseado em entrevistas e observações em salas de aula, relatou que as docentes polivalentes entrevistadas, participantes de sua pesquisa, elaboravam as aulas delas com base, principalmente, em livros didáticos e em textos retirados da internet, e conclui que há a necessidade de haver políticas públicas voltadas para a formação e valorização dos professores de matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

A pesquisa de Costa e Poloni (2012) foi realizada com alunos de pedagogia de 5 universidades da cidade de São Paulo - SP, e teve como objetivo investigar as percepções de concluintes de pedagogia, quanto ao conhecimento matemático, didática, currículo e planejamento. A coleta de dados foi realizada através de questionários e entrevistas. Poloni constatou que os alunos de pedagogia, mesmo em estágio de conclusão de curso, demonstraram falta de preparo para lecionar geometria, tratamento da informação e operações com frações.

Assim, essas pesquisas evidenciam a necessidade de aperfeiçoamento por parte dos professores, mas também mostram que nem sempre os professores são formados de modo a estarem completamente preparados para o trabalho no qual devem atuar. Segundo Albuquerque (2016, p. 8), os “cursos de formação de professores está muito aquém das necessidades e das condições consideradas ‘satisfatórias’ para mudar o ensino e aprendizagem da matemática”.

A dissertação intitulada **Análise de uma proposta construtivista de ensino de frações por meio da resolução de problemas**, de autoria de Felipe Polese, concluída em 2011 na Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, teve como objetivo geral avaliar a aprendizagem de frações por meio da utilização da resolução de problemas como metodologia de ensino-aprendizagem, sob uma perspectiva construtivista.

O Quadro seguinte traz uma síntese do trabalho de Polese.

Quadro 3 – Síntese do trabalho de Polese (2011)

Objetivo(s) da pesquisa	Público alvo	Ideias abordadas sobre frações	Metodologia e/ou recursos didáticos no ensino de frações
Avaliar a aprendizagem de frações, através da utilização da resolução de problemas como metodologia de ensino-aprendizagem, sob uma perspectiva construtivista	Alunos do Ensino Fundamental	Relação parte-todo; quociente; ordem; equivalência; e adição de frações	Resolução de problemas

Fonte: Elaborado pelo autor.

A pesquisa foi realizada em uma turma com 21 alunos do 6º ano, de uma escola particular do município de Anta Gorda, Rio Grande do Sul, e os objetivos específicos foram os seguintes:

> Identificar os conhecimentos prévios dos alunos sobre frações; acompanhar, com registros sistemáticos, os trabalhos desenvolvidos pelos alunos ao longo da implementação da proposta; analisar a aprendizagem dos alunos no estudo de frações a partir da resolução de problemas, através da comparação entre seus conhecimentos prévios e a aprendizagem que persistiu após um semestre de realização das atividades. (POLESE, 2011, p. 15).

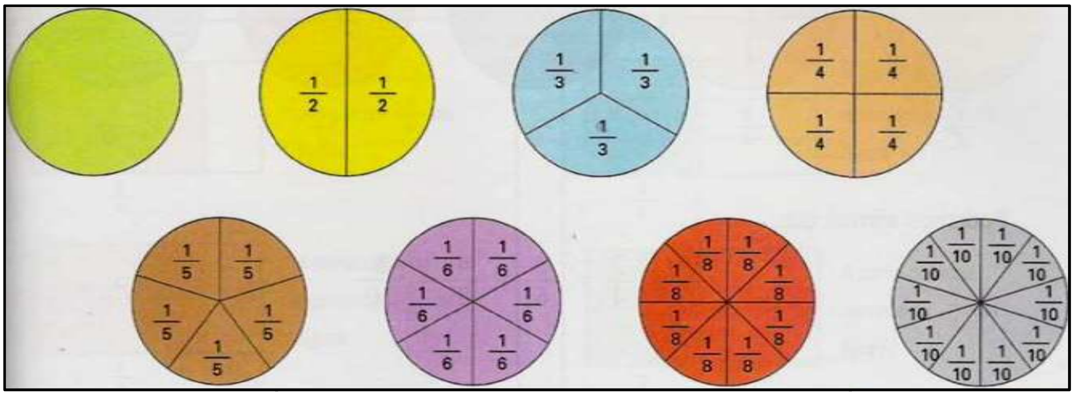
Segundo o autor, considerando os objetivos específicos, o problema central da pesquisa foi “como a resolução de problemas, numa perspectiva construtivista, contribui para a aprendizagem dos alunos de uma turma de 6º ano do Ensino Fundamental”? (POLESE, 2011, p. 15).

Polese fez uso da metodologia qualitativa de pesquisa. Inicialmente ele aplicou um questionário para verificar os conhecimentos e dificuldades que os alunos tinham sobre o conteúdo de frações e o reaplicou 6 meses após a aplicação de todas as atividades desenvolvidas durante a realização da pesquisa, para a avaliação dos conhecimentos que persistiram.

As atividades realizadas foram aplicadas de forma que os alunos puderam participar ativamente e expressar seus pensamentos.

O autor fez bastante uso de materiais manipuláveis para abordar a ideia parte-todo, equivalência e adição de frações. Em uma das atividades realizadas, foram utilizados discos coloridos de E.V.A. Um disco inteiro e outros recortados em duas, três, quatro, cinco, seis, oito e dez partes iguais, conforme a Figura 2.

Figura 2 – Discos fracionários



Fonte: Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr. (2002), apud Polese (2011, p. 43).

Polese solicitou que os alunos, postos em grupos, recortassem os discos e que conferissem como eles poderiam sobrepor o disco verde, de modo que fosse possível cobri-lo utilizando apenas duas peças. Os discentes utilizaram as peças amarelas, e então Polese explicou que o disco formado por elas foi dividido em duas partes e que, numericamente, a representação para essa situação é feita na forma $1 \div 2 = \frac{1}{2}$. Dessa maneira, segundo o autor, solicitando que os alunos comparassem, sobrepusessem e combinassem as partes dos discos, foi possível trabalhar comparação, ordem, equivalência e adição de frações, de uma forma mais significativa para a turma.

Com relação aos problemas, depois de aplicá-los, Polese procurou interagir com a turma por meio de perguntas, estimulando os alunos à reflexão e ao desenvolvimento de respostas. Um dos problemas utilizados pelo autor, foi: “Maria fez uma torta de maçã e a dividiu em 8 pedaços iguais. Ela separou 3 pedaços de torta para sua amiga Sônia e 2 pedaços para sua amiga Laura, e guardou o restante. Como podemos representar os pedaços de torta que Maria separou para suas duas amigas”? (POLESE, 2011, p. 48). Polese afirma que alguns alunos responderam cinco oitavos, e solicitou que eles explicassem como chegaram a essa conclusão. “Após isso, questionei outros para que dissessem se concordavam com o que o colega falou e, após as colocações dos alunos, que estavam corretas, resumi o que disseram, para reforço da aprendizagem”. (POLESE, 2011, p. 48).

Questionários, observações durante a realização das atividades e um diário de aula foram utilizados como instrumentos de coleta de dados e submetidos a uma análise textual discursiva.

Levando em consideração o que Nunes (2003) afirma, que os discentes aprendem frações, mas logo se esquecem, Polese reaplicou um questionário (um conjunto de problemas) seis meses após ter aplicado as atividades aos discentes.

Polese afirma que um semestre após a realização das atividades os alunos demonstraram ter conhecimentos a mais, em relação aos que possuíam antes da aplicação das atividades desenvolvidas durante a pesquisa; que a utilização da resolução de problemas favoreceu a compreensão do conteúdo de frações; e que houve entusiasmo, dedicação e interesse dos discentes, pelas atividades desenvolvidas, fatos que também favoreceram a aprendizagem da turma.

O trabalho seguinte também traz alguns resultados sobre a utilização de materiais manipuláveis na sala de aula.

A dissertação de Fernanda Soto Lima, intitulada **Números racionais na forma fracionária: atividades para superar dificuldades de aprendizagem**, concluída em 2013, na Universidade Federal de São Carlos, pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), apresenta o desenvolvimento de atividades com materiais manipuláveis para o ensino-aprendizagem do conteúdo de frações.

Segue um Quadro com a síntese do trabalho de Lima.

Quadro 4 – Síntese do trabalho de Lima (2013)

Objetivo(s) da pesquisa	Público alvo	Ideias abordadas sobre frações	Metodologia e/ou recursos didáticos no ensino de frações
Verificar as possíveis contribuições da aplicação de atividades com a utilização de materiais manipuláveis	Alunos do Ensino Fundamental	Relação Fração (parte-todo); equivalência; e adição e subtração de frações	Cartão fractal; papel quadriculado; cortina fracionária

Fonte: Elaborado pelo autor.

A pesquisa foi realizada em uma turma de 6º ano do Ensino Fundamental II da Rede Municipal de Educação de Bariri, São Paulo.

Lima utilizou a Engenharia Didática como metodologia de pesquisa. Ela afirma que, segundo Zabala (1998), essa metodologia consiste no desenvolvimento e ordenação de atividades, de acordo com os objetivos que se pretende alcançar.

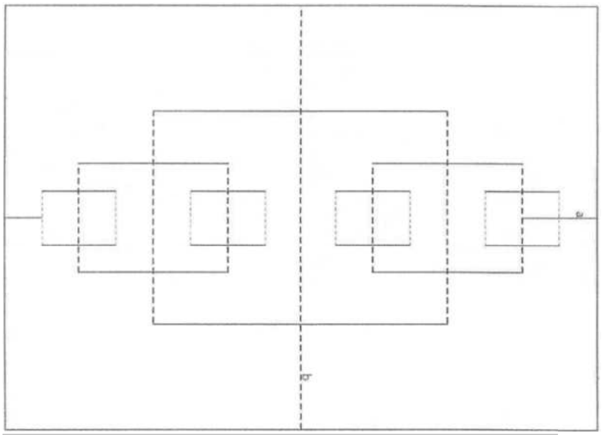
A autora realizou os seguintes procedimentos durante a sua pesquisa: investigação dos conhecimentos dos alunos, para identificar as dificuldades ou compreensões que eles possuíam sobre o conteúdo de frações, antes da aplicação de atividades com materiais manipuláveis; proposição de um planejamento e de uma sequência didática composta por atividades com materiais manipuláveis, para amenizar ou eliminar as dificuldades apresentadas pelos discentes; e acompanhamento do desenvolvimento da aprendizagem dos alunos. Com isso ela pretendeu responder à pergunta: A utilização de materiais manipuláveis melhora a compreensão dos conceitos relacionados aos números racionais na forma fracionária, de alunos do Ensino Fundamental II?

Para a realização das atividades, foram utilizados cartão fractal fracionário, papel quadriculado e uma cortina fracionária colorida. Lima elaborou as atividades e a professora da turma mencionada as aplicou.

Com a utilização dos materiais manipuláveis Lima pretendeu desenvolver nos alunos a compreensão de frações como uma relação parte-todo; fazê-los compreender o motivo de haver várias frações representando uma mesma quantidade (equivalência de frações); e introduzir a ideia de adição e de subtração de frações.

Durante a aplicação da atividade com o cartão fractal, os alunos, organizados em grupos, foram postos a pintar, recortar e dobrar uma folha de papel ofício contendo um desenho tal qual o da Figura 3.

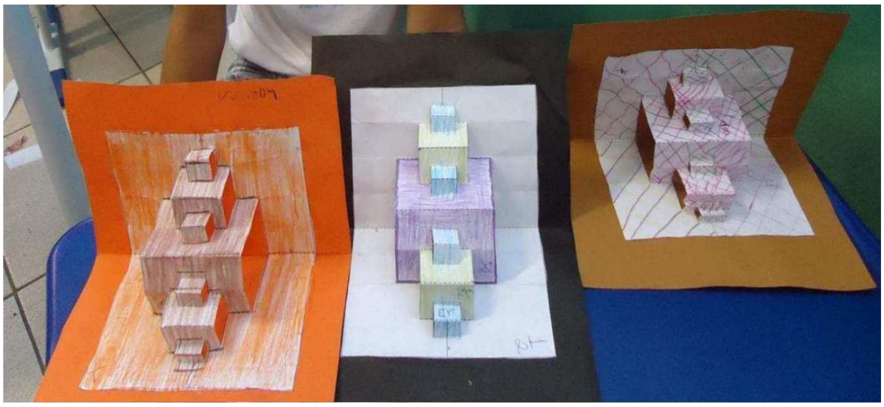
Figura 3 – Cartão fractal



Fonte: Brasil (2008), apud Lima (2013, p. 29).

Depois de recortados, pintados e dobrados pelos discentes, os cartões ficaram com as formas como mostra a Fotografia 1.

Fotografia 1: Fractais



Fonte: Lima (2013, p. 29).

Lima afirma que os alunos eram muito inquietos e por isso resolveu aplicar primeiro a atividade com o cartão fractal fracionário. Segundo essa autora, "concluída a parte de montagem em que os alunos socializaram suas produções [...] e se ajudaram em grupos, foi o momento de trabalhar os conceitos matemáticos, indagando que fração cada parte do cartão representava". (LIMA, 2013, p. 29). Ela afirma que com essa atividade os alunos puderam entender que a parte maior do fractal corresponde ao todo, e que as demais partes representam frações do todo, por serem menores e fazerem parte dele. Além disso, ela diz que a utilização de materiais manipuláveis foi uma alternativa eficaz para aumentar a atenção e o desempenho da turma durante as aulas, e que os fractais favoreceram o trabalho em grupo e permitiram que os alunos compreendessem fração como uma relação parte-todo.

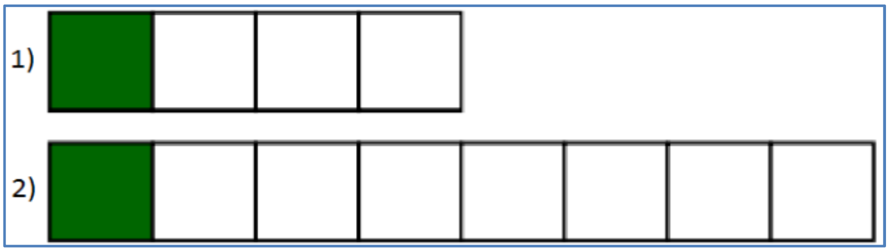
Com o papel quadriculado e a cortina fracionária foi possível trabalhar adição e equivalência de frações e a ideia parte-todo. Lima diz que os materiais manipuláveis podem contribuir para o ensino-aprendizagem de frações, mas que é necessário ter cuidado com a utilização de alguns deles, pois é possível, dependendo da forma que o professor interage com a turma, que os alunos criem ideias equivocadas sobre os conteúdos abordados.

Albuquerque (2016, p. 11) afirma que

> Quando se pensa em metodologias direcionadas para o ensino e a aprendizagem de quaisquer conteúdos, em especial os conteúdos matemáticos, um aspecto fundamental a ser considerado é que os conceitos se tornem mais acessíveis à compreensão do aluno e isso está diretamente associado à forma de abordagem dos mesmos.

Verificando a Figura 4, por exemplo, os discentes poderiam acreditar que $\frac{1}{4}$ equivale a $\frac{1}{8}$, pois, apesar do retângulo 1 ter um tamanho diferente do retângulo 2, as partes destacadas de verde possuem o mesmo tamanho. Para esse caso é necessário deixar claro que, apesar de serem congruentes, as partes pintadas representam, cada uma, a parte de um todo diferente.

Figura 4: Áreas iguais, frações distintas



Fonte: Lima (2013, p. 19), adaptada.

Concluindo, Lima afirma que - seguindo a sequência didática com as atividades com o cartão fractal, o papel quadriculado e a cortina colorida - os alunos mostraram um desenvolvimento nos itens seguintes, sobre o conteúdo de frações: escrita por extenso, representação com a notação barra-fracionária, comparação e realização de operações de adição e de subtração.

Da forma que foram aplicadas as atividades, permitindo que os alunos se expressassem, se manifestassem durante a realização das atividades, Lima diz que foi possível, também, desenvolver a autonomia da turma e melhorar o relacionamento entre os discentes e a professora.

Do trabalho de Lima se destaca, também, de acordo os seus relatos, a importância que materiais manipuláveis têm para despertar a atenção dos alunos, além de desenvolver autonomia e permitir alguma compreensão da ideia de parte todo da notação barra-fracionária, e a influência que a interação do professor tem, para que isso ocorra.

Entretanto, segundo Fiorentini e Miorim (1990), há professor que justifica a utilização de materiais manipuláveis pelo motivo desses tornarem as aulas mais alegres e descontraídas, ou simplesmente por ter ouvido falar que o ensino de matemática deve ser iniciado fazendo-se uso de ilustrações com materiais concretos. Assim, sem saber como trabalhar com esses materiais, o professor pode utilizá-los de forma a ditar passos para que os alunos realizem, o que não implica em um ensino diferente do tradicional. Sobre isso Van de Walle (2009, p. 31) afirma que "até mesmo com atividades envolvendo materiais ou modelos concretos, o professor tradicional continua guiando os estudantes, dizendo exatamente como usar os materiais de uma maneira bem prescrita".

Rêgo e Rêgo (2006) afirmam que a aprendizagem não reside na estrutura física do material concreto ou simplesmente no ato de manipulá-lo, pois é necessário que haja, durante as observações e manipulações realizadas, reflexões sobre as ideias matemáticas relacionadas aos objetos.

Dessa forma, e de acordo com Lorenzato (2006), é importante que o professor saiba utilizar corretamente os materiais didáticos manipuláveis, pois eles não ultrapassam a categoria de auxiliares para o ensino, de alternativas metodológicas à disposição do professor e do aluno e, portanto, a utilização deles não é garantia de um bom ensino, de uma aprendizagem com compreensão, e também não substitui o docente.

Com isso, de acordo com Lima (2013) e conforme o que foi dito anteriormente, para que os discentes desenvolvam autonomia e compreensão, quando fazem uso de materiais manipuláveis durante aulas de frações, é necessário que o professor saiba utilizar os referidos materiais, tenha o domínio do conteúdo matemático e permita que os discentes se expressem e se envolvam de modo que reflitam sobre as relações existentes entre os conteúdos matemáticos abordados e as ações deles sobre os objetos.

A próxima dissertação a ser comentada é a de Rogéria Malacrida Menotti. Intitulada **Frações e suas operações: resolução de problemas em uma trajetória hipotética de aprendizagem**, esse trabalho foi concluído em 2014, pela Universidade Estadual de Londrina, Paraná, e tem como objetivo principal apresentar uma proposta didática por meio de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA), com a utilização da resolução de problemas como metodologia de ensino-aprendizagem.

Segue um Quadro com uma síntese sobre esse trabalho.

Quadro 5 – Síntese do trabalho de Menotti (2014)

Objetivo(s) da pesquisa	Público alvo	Ideias abordadas sobre frações	Metodologia e/ou recursos didáticos no ensino de frações
Apresentar uma proposta didática por meio de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA), com a utilização da Resolução de Problemas como metodologia de ensino aprendizagem para o ensino dos números fracionários	Alunos do Ensino Fundamental	Parte-todo, quociente e operador, e as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de frações	Resolução de problemas

Fonte: Elaborado pelo autor.

Os objetivos específicos foram: desenvolver atividades para que os alunos identifiquem e simplifiquem frações equivalentes; compreendam os processos envolvidos nas operações de adição e de subtração de frações com o mesmo denominador ou com denominadores diferentes; resolvam situações-problema, utilizando frações como operadores, de modo que eles compreendam os processos envolvidos; e compreendam os processos envolvidos durante a realização de multiplicação e divisão de frações.

Menotti não apresentou uma questão norteadora, mas afirma que alunos que possuem grande dificuldade de aprender precisam ser motivados para que a aprendizagem aconteça, e que acredita que a resolução de problemas, juntamente com a THA, pode contribuir para desenvolver a aprendizagem dos alunos.

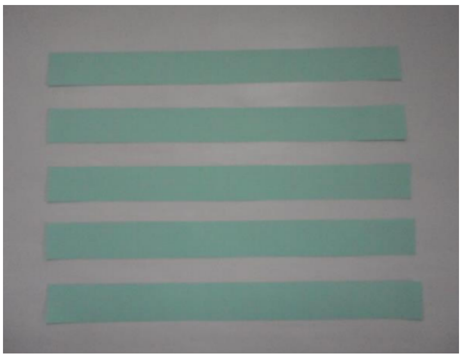
A autora também afirma que as tarefas propostas foram definidas considerando as dificuldades apresentadas pelos discentes durante o ensino-aprendizagem de frações. Assim, ela procurou investigar e mostrar os resultados do ensino de frações, por meio da resolução de problemas aliada a uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem.

Segundo Menotti, o maior problema no ensino dos números racionais está nas diferentes ideias que eles podem apresentar – fração, quociente, razão e operador, por exemplo – e que, no Ensino Fundamental, o ensino desses números está limitado à ideia de parte-todo e de operador.

Com a intenção de ampliar os conhecimentos sobre frações, de alunos de 7º ano, Menotti propôs a aplicação de um conjunto de tarefas, levando em consideração o ensino sob uma perspectiva construtivista, com o objetivo de estabelecer relações entre frações equivalentes e realizar, de forma compreensiva, simplificações de frações; abordar os processos que envolvem as operações de adição e de subtração com denominadores iguais ou diferentes, e de multiplicação e de divisão de frações.

Em uma das atividades planejada por Menotti, o professor utilizou tiras de papel, como mostra a Fotografia 2, com o objetivo de fazer com que os alunos, postos em duplas, relembrassem a ideia de fração.

Fotografia 2: Representação do todo por meio de tiras de papel

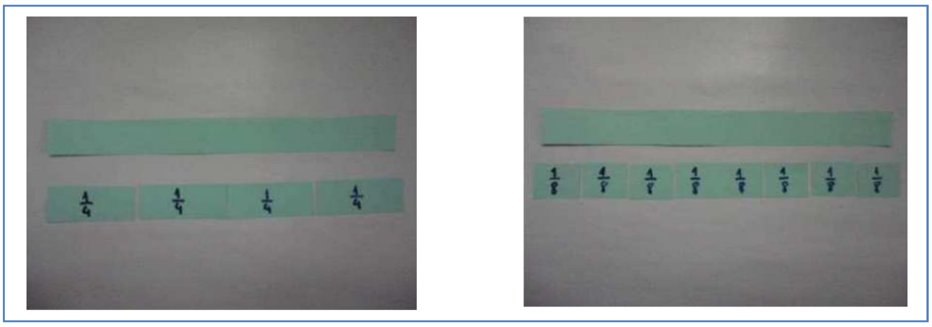


Fonte: Menotti (2014, p. 47).

O professor solicitou que os alunos dividissem as tiras em partes iguais e perguntou sobre o significado de cada parte em relação ao todo.

Depois que os alunos expressavam - verbalmente - as frações representadas pelas partes das tiras de papel, o professor as escrevia, como ilustrado na Fotografia 3. Dessa forma, os alunos puderam relembrar a ideia parte-todo, fazendo relações entre a notação barra-fracionária e as partes das tiras de papel.

Fotografia 3: Representação de frações por meio de partes de tiras de papel

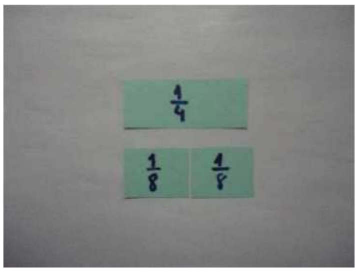


Fonte: Menotti (2014, p. 50-51).

Através das atividades com as tiras de papel também foi possível trabalhar comparação de frações.

Alguns alunos perceberam que $\frac{1}{4}$ é menor que $\frac{1}{8}$, quando fizeram comparações com os pedaços das tiras de papel, que representam essas frações, conforme mostra a Fotografia 4. Outro aluno pensou o seguinte: quando a tira é dividida em 8 partes iguais, obtém-se pedaços menores que outra tira de mesmo tamanho dividida em 4 partes iguais, o que implica dizer que $\frac{1}{8}$ é menor que $\frac{1}{4}$.

Fotografia 4: Comparação de frações



Fonte: Menotti (2014, p. 51).

Em uma das atividades o professor aplicou um problema para trabalhar com os alunos a ideia de adição e de subtração de frações com denominadores iguais.

O problema dizia que uma turma estava organizando uma festa de aniversário da escola, e que $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{9}$ e $\frac{4}{9}$ dos alunos ficaria responsável pelo refrigerante, pelo suco e pelos salgados, respectivamente. O restante da turma ficaria responsável pelos doces. Assim, o problema consistiu em perguntar qual é a fração que representa a parte da turma responsável pelos doces.

Durante a aplicação desse problema um dos alunos fez um desenho semelhante ao da Figura 5, para encontrar a soma das frações citadas anteriormente.

Figura 5: Solução geométrica de um problema envolvendo frações

Fonte: Menotti (2014, p. 71).

As cores azul, verde e amarela foram utilizadas para representar as partes da turma responsáveis pelo refrigerante, o suco e os salgados, respectivamente. O aluno afirmou que a representação numérica da fração ilustrada pelo desenho acima, destacada pelas cores, é $\frac{7}{9}$, mas quando o professor questionou sobre o resultado da adição $\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{4}{9}$ o aluno adicionou e escreveu $\frac{7}{27}$.

O professor fez intervenções por meio de perguntas, e os alunos, refletindo sobre o resultado obtido por meio da utilização da Figura 5, conforme dito anteriormente, chegaram à conclusão de que o correto é manter o denominador, quando se faz adição de frações com denominadores iguais.

Outros alunos também adicionaram numeradores com numeradores e denominadores com denominadores, mas a discussão que o professor provocou em sala de aula, considerando a Figura 5, permitiu que eles também concordassem que o correto, ao realizar adição de frações com denominadores iguais, é adicionar somente os numeradores e repetir o denominador.

Algo semelhante ocorreu quando os alunos fizeram operações de subtração de frações. Houve aluno que atribuiu $\frac{8}{0}$ como resultado para $\frac{9}{9}$ - $\frac{1}{9}$, mas a intervenção do professor (por meio de perguntas) os levou à conclusão de que o correto, ao efetuar subtração de frações com denominadores iguais, é repetir o denominador e realizar a subtração dos numeradores.

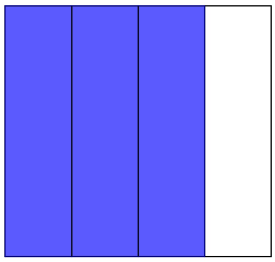
Assim, a ilustração de frações através de um retângulo, conforme a Figura 5, também foi fundamental para os alunos compreenderem a forma correta de fazer subtração de frações com denominadores iguais, pois permitiu o esclarecimento de que o denominador atua como um indicador da quantidade de partes em que um inteiro está dividido e, por isso, é incorreto adicionar ou subtrair os denominadores.

Para trabalhar a ideia de multiplicação de frações, o professor aplicou um problema e também influenciou os alunos a utilizar desenhos.

Utilizando figuras, a multiplicação $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$, por exemplo, pode ser idealizada como tomar uma parte de outra parte.

Podemos representar a fração $\frac{3}{4}$ pela Figura 6, a qual está dividida em 4 partes e consideradas apenas 3 delas (destacadas pela cor azul).

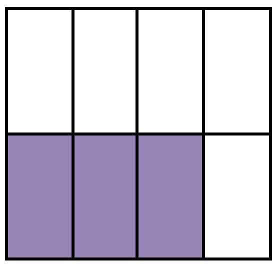
Figura 6: A ideia parte todo na multiplicação de frações



Fonte: Elaborada pelo autor.

Dessa forma, realizar a multiplicação citada anteriormente consiste em tomar um meio dessas partes, o que resulta em $\frac{3}{8}$ do todo considerado, conforme ilustra a Figura 7.

Figura 7: Solução geométrica de uma multiplicação de frações

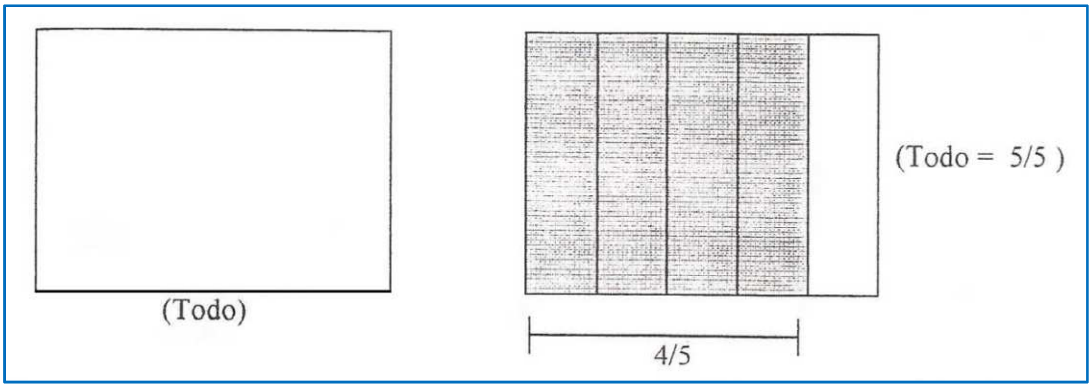


Fonte: Elaborada pelo autor.

Dessa forma, segundo Menotti, fazendo uso de figuras geométricas, o professor pôde trabalhar multiplicação de frações de uma forma mais compreensível para os alunos.

Semelhantemente à Menotti (2014), Botta (1997) também expressou a multiplicação de frações com figuras geométricas. Para expressar a multiplicação $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$, ela utilizou um retângulo dividido em 5 partes iguais, conforme a Figura 8.

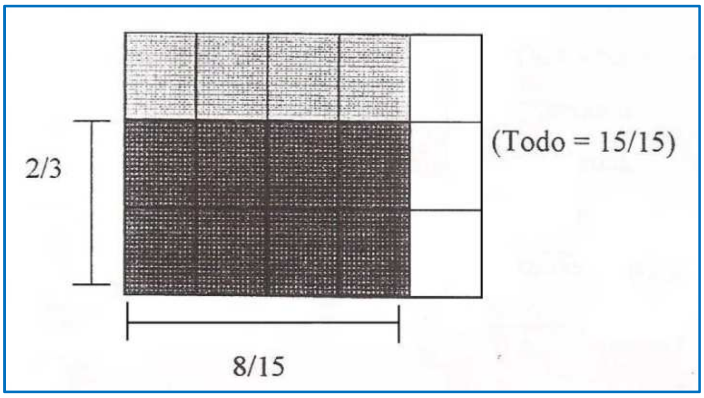
Figura 8: A ideia parte todo na multiplicação de frações 2



Fonte: Botta (1997, p. 35)

Posteriormente, ela tornou a dividir o retângulo, mas dessa vez horizontalmente, em 3 partes iguais. Feito isso, ela tomou duas das três partes dos quatro quintos, e o resultado da multiplicação foi representado pela Figura 9, $\frac{8}{15}$ do retângulo.

Figura 9: Solução geométrica de uma multiplicação de frações 2



Fonte: Botta (1997, p. 35)

Por meio das atividades elaboradas por Menotti (2013), sempre abordadas por meio de problemas, o professor trabalhou as ideias parte-todo, quociente, operador, e as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de frações.

Concluindo, Menotti afirma que a resolução de problemas, como metodologia de ensino-aprendizagem de frações, favorece a compreensão das soluções encontradas, pois são características dessa metodologia permitir que o aluno se expresse, reflita e tome decisões, o que também contribui para o desenvolvimento de autonomia.

Menotti também diz que é importante conhecer os alunos, para que as atividades e problemas selecionados favoreçam o envolvimento, a concentração e, consequentemente, a aprendizagem.

A Trajetória Hipotética de Aprendizagem, como o próprio nome sugere, é um conjunto de hipóteses que o professor elabora e procura realizar durante a aula. Dessa forma, ela atua como um planejamento, mas pode ser alterada, dependendo das necessidades durante a aplicação das atividades. Segundo Menotti, a THA, considerando o planejamento que ela proporciona, também foi importante para a concretização dos resultados alcançados através das atividades desenvolvidas durante a pesquisa dela.

O trabalho de Menotti deixa evidente, nos diálogos entre alunos e entre professor e alunos, o quanto as figuras geométricas também podem proporcionar compreensão dos procedimentos de adição e de subtração de frações com denominadores iguais.

O professor da turma na qual foi desenvolvida a pesquisa, aplicou as atividades e deixou os alunos à vontade para questionar, dialogar, propor, refletir e desenvolver soluções para os problemas trabalhados, e a intermediação do docente, por meio de perguntas, foi importante para estimular a atenção e reflexões dos discentes, sobre os conteúdos abordados. Dessa forma, a turma pôde desenvolver compreensão sobre os procedimentos que realizou durante a resolução dos problemas.

Onuchic e Allevato (2008) dizem que o trabalho com os números racionais precisa ser feito de uma forma diferente, na qual não seja privilegiado o repasse de regras. Elas defendem a utilização da resolução de problemas como metodologia para o ensino-aprendizagem de frações, pois explorando problemas é possível que os discentes desenvolvam uma aprendizagem com compreensão dos conteúdos abordados, mas que as ações do professor têm grande influência para o êxito do ensino.

Onuchic e Allevato (2008) também afirmam que é importante que os problemas propostos para cada aula sejam cuidadosamente preparados pelo docente, e ao aluno seja dada a oportunidade de refletir, de se expressar, de criar durante o processo de resolução.

Assim como no trabalho de Lima (2013) e no de Polese (2011), também fica evidente no trabalho de Menotti a importância de representar os números fracionários através de materiais manipuláveis ou de figuras, para despertar nos discentes a compreensão da ideia parte-todo.

O próximo trabalho comentado também tem o foco na utilização de materiais manipuláveis para a elaboração de atividades para o ensino-aprendizagem de frações.

Concluída em 2014, a dissertação de Denise Valio, com o título **Frações: estratégias lúdicas no ensino da matemática,** foi desenvolvida na Universidade Federal de São Carlos, pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT.

O Quadro a seguir contém uma síntese do trabalho de Valio.

Quadro 6 – Síntese do trabalho de Valio (2014)

Objetivo(s) da pesquisa	Público alvo	Ideias abordadas sobre frações	Metodologia e\ou recursos didáticos no ensino de frações
Verificar os resultados de um ensino de frações, com base em materiais manipuláveis, para alunos de 6º ano	Alunos do Ensino Fundamental	Comparação, equivalência, adição, e subtração	Materiais manipuláveis

Fonte: Elaborado pelo autor.

O objetivo principal do trabalho de Valio foi propor um conjunto de atividades que despertasse o interesse e proporcionasse aprendizagem de frações aos alunos de duas turmas de 6º ano de uma escola estadual do município de Tatuí - SP.

Valio afirma que alguns fatos que podem explicar as dificuldades que muitos alunos apresentam, em relação à aprendizagem de matemática, é o mito de que ela é um conteúdo difícil de aprender; a abordagem tradicional, ainda muito utilizada pelos professores, priorizando a exposição e a memorização de fórmulas, por meio de exercícios repetitivos e sem considerar a compreensão dos procedimentos realizados; a falta de capacitação de muitos professores, além do fato de muitos deles também não se identificarem com o exercício da docência; e a falta de contextualização dos conteúdos ensinados.

Assim, com o objetivo de propor um ensino diferenciado do conteúdo de frações, Valio utilizou papel quadriculado, elaborou uma cortina fracionária e desenvolveu atividades com garrafas pet. A autora afirma que com a cortina fracionária foi possível fazer uma abordagem sobre simetria, proporcionalidade e parte-todo.

Para o desenvolvimento de atividades envolvendo adição, subtração e comparação de frações, foram utilizadas garrafas pet, canetas, copos, funis e água. Algumas garrafas foram demarcadas em 12 partes iguais, pelo motivo desse número ter muitos divisores (1, 2, 3, 4, 6 e 12), e as demais garrafas foram demarcadas em 2, 3, 4 e 6 partes, também iguais. Valio diz que isso facilitou o desenvolvimento de atividades envolvendo equivalência de frações, pois assim foi possível representar uma mesma fração através de garrafas com outras quantidades de partições.

O autor também utilizou papel quadriculado para trabalhar a ideia parte-todo e fazer comparações com frações.

Fotografia 5: Representação de frações por meio de garrafas pet

Fonte: Valio (2014, p. 71).

Segundo Valio, antes da utilização dos materiais citados anteriormente, muitos alunos apresentaram dificuldades de adicionar, subtrair e de fazer comparação de frações. Erros como $\frac{1}{12} + \frac{5}{12} = \frac{6}{24}$ e $\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{0}$, por exemplo, eram comuns.

Os discentes não enxergavam a notação barra-fracionária como a representação de um número, mas como a de dois números naturais. Isso também favoreceu a aparição de erros como os ilustrados pela Figura 10.

Figura 10: Comparações equivocadas de frações

Fonte: Valio (2014, p. 54).

A utilização das garrafas pet proporcionou aos alunos outra forma de representar frações, e isso facilitou a compreensão da ideia de comparação, equivalência e de operações de adição e subtração com esses números. Quando os alunos cometiam algum erro de comparação, por exemplo, eles eram incentivados a comparar o nível da água das garrafas que representavam as frações comparadas. Para realizar as operações de adição e de subtração de frações com denominadores iguais, os alunos adicionavam e retiravam, respectivamente, líquido e davam o resultado de acordo com o nível da água nas garrafas demarcadas em partes iguais. Dessa forma, a adição $\frac{2}{3} + \frac{1}{3}$, por exemplo, pôde ser representada adicionando-se líquido numa garrafa representando $\frac{2}{3}$, na qual foi adicionado mais líquido até que o nível alcançasse a terceira demarcação, o que representa $\frac{3}{3} = 1$. Ver Fotografia 6.

Fotografia 6: Representação de frações por meio de garrafas com líquido

Fonte: Valio (2014, p. 59), adaptada.

Valio também diz que no início das aulas, antes da utilização dos materiais manipuláveis, os alunos se mostravam desatentos, e isso influenciou um índice baixo de aprendizagem. Essa situação mudou no decorrer da aplicação das atividades. A autora percebeu que os materiais manipuláveis fizeram despertar nos alunos o interesse pelo conteúdo abordado. Quanto mais os materiais eram utilizados, mais os discentes se sentiam motivados a participar das atividades propostas.

Com exceção das atividades nas quais foram utilizadas as garrafas pet e a cortina fracionária, as demais eram exercícios, os quais os alunos respondiam e, quando erravam ou sentiam dificuldades de resolver, eram orientados sobre a forma correta de proceder.

Concluindo, Valio afirma que a utilização de materiais manipuláveis favoreceu a compreensão dos alunos, pois eles cometeram muitos erros quando fizeram comparações, ou adição ou subtração de frações, mas ao utilizarem as garrafas pet, compreenderam o motivo pelo qual não se deve adicionar ou subtrair, também, os denominadores, quando são realizadas operações de adição e de subtração de frações com denominadores iguais. Eles perceberam que o denominador atua como um indicador da quantidade em que o todo é dividido.

A pesquisa de Valio, assim como as de Polese (2011), Lima (2013), Menotti (2014) e Biffi (2001), reforça a ideia de que a utilização de materiais manipuláveis ou ilustrações de objetos divididos em partes iguais são importantes para despertar a atenção do aluno às atividades, além de proporcionar aprendizagem com compreensão da ideia parte-todo, entre outros conhecimentos sobre frações.

O próximo trabalho a ser comentado é um artigo de Costa e Poloni (2012), intitulado **Percepções de concluintes de pedagogia sobre a formação inicial do professor para a docência de matemática**. Trata-se de uma pesquisa realizada com alunos de pedagogia de 5 universidades da cidade de São Paulo – SP, prestes a se formarem. Essa pesquisa teve como objetivo investigar as percepções dos alunos, quanto ao conhecimento matemático, currículo, planejamento e didática, e também a formação da identidade profissional docente. Os autores empenharam-se em verificar se os discentes de pedagogia, em fase de conclusão de curso, receberam o preparo necessário para exercer a docência de matemática nos anos iniciais da Educação Básica.

Uma amostra de 33 indivíduos de uma população de 5680 alunos de pedagogia, de 5 universidades particulares da cidade de São Paulo – SP, participou da pesquisa.

Foram utilizados questionários e entrevistas para a coleta de dados. Os autores dizem que, de acordo com as análises realizadas, os professores não se sentiam preparados para ensinar conteúdos como operações com frações, geometria e tratamento da informação.

Houve a conclusão de que, para que haja um melhor desenvolvimento do conhecimento profissional, é necessário um equilíbrio entre teoria e prática durante todo o curso de pedagogia e, para isso, é importante a parceria entre universidade e escola.

De modo geral, as pesquisas apresentam sugestões para promover aprendizagem e compreensão do conteúdo de frações, mas também trazem em si a afirmação de que os alunos continuam com dificuldades de compreender, entre outras coisas, equivalência, comparação e os algoritmos de operações envolvendo esse conteúdo.

Polese (2011) e Menotti (2014), por exemplo, mostram que dificuldades como essas podem ser superadas através da utilização de recursos de fácil acesso, como cartolina e E.V.A. Com esses materiais, formas geométricas podem ser confeccionadas e divididas em partes iguais para representar frações, e dessa forma, como mostram os resultados das pesquisas, é possível tornar a equivalência, comparação, adição e subtração dos números fracionários, mais compreensíveis para os alunos.

As metodologias de ensino-aprendizagem e de pesquisa variam, mas ao fazerem propostas para o ensino-aprendizagem de frações os pesquisadores costumam utilizar formas diferentes para representá-las, além da notação barra-fracionária. Percebemos que as pesquisas, apesar de nem sempre ser o foco delas, evidenciam - direta ou indiretamente - que materiais manipuláveis ou ilustrações de objetos, através de figuras, são importantes para desenvolver nos alunos a compreensão da ideia parte-todo, e compreenderem os motivos pelos quais são realizadas algumas operações, da forma como são realizadas com frações.

Apesar de ser um conteúdo elementar e abordado principalmente no Ensino Fundamental, não só os alunos, mas também muitos professores sentem dificuldades de compreender os conhecimentos sobre frações e, consequentemente, de ensinar esse conteúdo. Costa e Poloni (2012), Marques (2013) e Curi (2004), por exemplo - mostram que muitos docentes não se sentem devidamente preparados para ensinar o conteúdo de frações. Biffi (2001), além de mostrar a importância das representações semióticas de Duval (1993), para o ensino de frações a alunas de pedagogia, mostrou, por meio de testes e questionários, que 15 das 18 alunas participantes de sua pesquisa, que já lecionavam no Ensino Fundamental, não tinham o domínio pleno dos conhecimentos sobre o referido conteúdo.

Esses resultados mostram que é necessário dar ênfase à formação de professores, e também trazem evidências sobre as deficiências dos cursos por meio dos quais os docentes são formados. Curi (2004) afirma que existe uma carência de educadores da área de matemática nos cursos de pedagogia, e que a maioria dos docentes encarregados de ministrar aulas de matemática a alunos de pedagogia, é especialista, mestre ou doutor em educação. Costa e Poloni (2012) afirmam que essa falta de professores com especialidade em matemática nos cursos de pedagogia, pode contribuir para a falta de segurança que os formandos sentem ou sentirão ao ministrar aulas de matemática. Além disso, segundo Rogéria do Rêgo (informação verbal) [1], as licenciaturas em matemática não preparam os alunos para a docência na Educação Básica, nível de ensino no qual geralmente eles atuam ou irão atuar.

As pesquisas também trazem evidências sobre as práticas de ensino em salas de aula. Oliveira (1996) diz que não há uma atenção voltada para o processo de ensino-aprendizagem do conteúdo de frações, mas uma preocupação demasiada com a ‘resposta correta’. Também

[1] Informação coletada na palestra proferida pela professora Rogéria Gaudêncio do Rêgo, no Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba - Campus I, em setembro de 2016.

afirma que as dificuldades que os alunos sentem se estendem por toda a Educação Básica, e que não há uma etapa exclusiva da educação, na qual os discentes sentem dificuldades de compreender esse conteúdo.

Biffi (2001) afirma que a maioria dos professores e alunos consideram de difícil compreensão o conteúdo de frações, e que o ensino de matemática passa por um momento crítico resultante de um ensino fundamentado em aulas expositivas que priorizam a memorização.

Segundo Jesus (2013), o conteúdo de frações é trabalhado de uma forma contextualizada até o 4º ano do Ensino Fundamental, mas a partir do 6º ano esse assunto é retomado com ênfase em regras para simplificar, adicionar, subtrair, multiplicar e dividir frações.

Menotti (2014) diz que, atualmente, uma das grandes dificuldades apresentadas por alunos da Educação Básica brasileira, é resolver e compreender diferentes situações do cotidiano que exigem o uso de frações e operações envolvendo esse conteúdo.

Valio (2014) afirma que ainda há o uso de práticas de ensino de matemática que não proporcionam a concretização da aprendizagem, pois priorizam a memorização da forma como são realizadas as operações com frações, por exemplo.

Segundo Azevedo (2013), a falta de sucesso no ensino-aprendizagem de frações possivelmente está relacionada com a forma como esse conteúdo é ensinado - o repasse de regras, sem levar em consideração a compreensão do aluno.

Marques (2013) afirma que é comum os professores participarem de cursos de formação continuada, nos quais há a abordagem de alternativas de ensino-aprendizagem, mas continuarem priorizando o método de ensino tradicional. O professor se preocupa em fazer com que o aluno consiga obter a ‘resposta correta’, mas não procura verificar se houve compreensão do que foi realizado. Assim, ele prossegue repassando fórmulas e algoritmos e propondo exercícios rotineiros para que os alunos resolvam, e isso pode proporcionar memorização, mas não necessariamente reflexão e compreensão dos procedimentos realizados.

Botta (1997), já em 1997, afirmou que é preciso mudar de uma forma de ensino baseada na repetição de procedimentos mecânicos, para um ensino no qual haja uma preocupação voltada para uma aprendizagem com compreensão.

Dessa forma, as pesquisas dão mais que sugestões para o ensino-aprendizagem de frações. Elas também trazem evidências de como esse conteúdo tem sido abordado na sala de aula, e geralmente elas afirmam que é uma abordagem focada na transmissão de fórmulas e de algoritmos, na qual há uma preocupação em fazer com que o aluno consiga obter a resposta correta dos exercícios propostos. Isso vai de encontro às propostas das pesquisas, cuja principal preocupação é com a promoção de uma aprendizagem com compreensão.

Além das dissertações, também encontramos em Onuchic e Allevato (2008) e Lopes (2008), por exemplo, discussões sobre dificuldades ou sugestões sobre o ensino-aprendizagem de frações, conforme discutido no capítulo seguinte.

3 NÚMEROS RACIONAIS: DIFICULDADES, INTERPRETAÇÕES E ALTERNATIVAS DE ENSINO-APRENDIZAGEM

Apesar de ser um conteúdo elementar e necessário em outros conteúdos matemáticos - funções, trigonometria e geometria, por exemplo – os números racionais, como já comentado, têm sido um conteúdo de difícil compreensão para muitas pessoas, incluindo alguns professores. Segundo Onuchic e Allevato (2008, p. 81), "educadores matemáticos concordam que o ensino e a aprendizagem dos conceitos relacionados aos números racionais permanecem um sério obstáculo no desenvolvimento matemático dos alunos". Ou seja, segundo essas autoras, a falta de compreensão do conteúdo dos números racionais é um dos motivos que causam dificuldades dos alunos aprenderem matemática.

A seguir, algumas discussões sobre dificuldades de compreensão do conteúdo de frações.

3.1 Dificuldades sobre o Conteúdo de Frações

Não só as crianças apresentam dificuldades de compreensão do conteúdo de frações. Proença (2015) mostrou que grande parte de uma turma com 25 alunas de pedagogia, participantes de uma pesquisa realizada por ele, não conseguiu resolver alguns problemas envolvendo adição e subtração de frações. Dessas 25 licenciandas, 28% resolveram alguns problemas por meio de desenhos, e 24% delas utilizaram o mínimo múltiplo comum. Assim, quase 50% da turma não conseguiu resolver os problemas corretamente.

Santos e Resende (2006, p. 11) afirmam que "pesquisadores nacionais e estrangeiros identificam inúmeros problemas que as crianças enfrentam ao trabalhar com números naturais e as quatro operações, frações e decimais, e que as dificuldades que os alunos sentem, sobre o conteúdo de frações, são decorrentes do fato de que eles têm que alterar as concepções deles, sobre o que é uma quantidade numérica e sobre as operações numéricas.

Como já comentado no capítulo anterior, as ideias que a notação barra fracionária representa também podem causar dificuldades de compreensão do conteúdo de frações.

Segundo Botta (1997), na sequência curricular do ensino de matemática, do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental, trabalha-se os números inteiros e em seguida os números racionais e as operações fundamentais, e, depois de algum tempo abordando outros conteúdos, trabalha-se com razões, mas geralmente não se deixa claro que razão é uma ideia bem diferente de fração. Dessa forma, ela afirma que o aluno quase sempre enxerga as razões como frações.

Número racional é um termo que remete à notação $\frac{a}{b}$, sendo a e b pertencentes aos números inteiros, com b diferente de 0. Essa notação pode referir-se, entre outras ideias, tanto a frações (ideia parte-todo), quanto à razão. Essas são ideias bem distintas uma da outra, pois a razão trata de uma comparação entre duas grandezas, e fração, uma representação de uma parte de algo, o que também remete à porcentagem quando se iguala o denominador a 100.

Onuchic e Allevato (2008) afirmam que o ensino-aprendizagem de frações, por meio de resolução de problemas, tem mostrado que as diferentes ideias da notação barra fracionária são desconhecidas ou mal compreendidas, ignoradas ou abordadas sem o aprofundamento necessário pelos professores.

> Nossas experiências, em oficinas de formação de professores em que esta forma de trabalho foi implementada, têm mostrado que as diferentes "personalidades" dos números racionais muitas vezes são desconhecidas, ou mal compreendidas, ou ignoradas ou trabalhadas apenas superficialmente em sala de aula. Não raro, razões são consideradas como frações, uma vez que, a partir de seu símbolo, a notação barra fracionária, induzem a um tratamento semelhante. É necessário que se tenha um real conhecimento e que se reflita cuidadosamente sobre suas diferenças. (ONUCHIC; ALLEVATO, 2008, p. 99).

Botta (1997) percebeu que os alunos de 5ª a 8ª séries do Ensino Fundamental, e também do Ensino Médio, com os quais trabalhava, apresentavam dificuldades de compreender as operações com os números inteiros, ideias dos números racionais e do raciocínio proporcional.

> Muitos desses alunos que apresentavam dificuldades conceituais e operatórias no conjunto dos números racionais, quando trabalhados sobre o conjunto de número racional $\frac{a}{b}$, muito comumente falavam no numerador "a" como um determinado número inteiro e no denominador "b" como outro número inteiro, não chegando a identificar o número racional $\frac{a}{b}$ como um número, isto é, um ponto da reta. (BOTTA, 1997, p. vii).

A dificuldade que os alunos têm de visualizar o numerador e o denominador como partes integrantes da representação de um único número pode levá-los a cometerem alguns equívocos. Botta (1997) afirma que já vivenciou casos em que nenhum dos alunos de uma turma de 8º ano soube expressar o número $\frac{3}{8}$ na forma decimal. Todos se equivocaram ao associá-lo ao número 3,8.

Os alunos progridem nas etapas de ensino, mas as dificuldades com os números fracionários persistem. Botta afirma que em um teste aplicado por ela, em uma turma de 7º ano,

> para saber que conhecimentos sobre frações esses alunos haviam adquirido nas séries anteriores, somente 12% acertaram a questão que dizia: *há 8 bolinhas de gude numa caixa. Um quarto dessas bolinhas são brancas e as restantes são pretas. Quantas são as bolinhas brancas e quantas são as bolinhas pretas?* E vale ressaltar que estes estudantes vinham trabalhando com frações e quantidades discretas desde a terceira série do ensino fundamental. (BOTTA, 1997, p. 28).

Os PCN (BRASIL, 1998) afirmam que as representações fracionárias e decimais dos números racionais são abordadas desde os primeiros ciclos do Ensino Fundamental, mas é constatado que os alunos chegam ao terceiro ciclo desse nível de ensino sem compreender os diferentes significados associados a esse tipo de número e os procedimentos de cálculo, em especial os que envolvem os números racionais na forma decimal.

Continuando, dizem que possivelmente as dificuldades encontradas justificam-se pelo fato de a aprendizagem dos números racionais suporem rupturas com ideias sobre os números naturais, pois algumas propriedades aprendidas, válidas para o conjunto dos números naturais, por exemplo, parecem contradizer as ideias sobre o conjunto dos números racionais.

Os PCN (BRASIL, 1998) especificam alguns dos motivos que provocam dificuldades de compreensão dos números racionais:

- A característica de cada um dos números racionais poder ser representado por diferentes e infinitas escritas fracionárias - metade de algo pode ser representado por $\frac{1}{2}$, por exemplo, mas também por $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$, ...;
- Acostumados a fazer comparações com os números naturais, os discentes imaginam contraditória a ideia de, por exemplo, $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$, pois $3 > 2$;
- Enquanto a multiplicação de um número natural por outro natural (diferentes de 1 e de 0) tem como resultado um número maior que ambos os fatores, os alunos veem como contradição o produto de $10 \times \frac{1}{2}$, por exemplo, ser menor que 10;
- A sequência dos números naturais permite estabelecer sucessor e antecessor,

mas no conjunto dos números racionais isso não faz sentido, pois sempre é possível encontrar outro racional entre dois números racionais quaisquer. Dessa forma, é preciso que o aluno perceba que entre 0,8 e 0,9, por exemplo, estão números como 0,81, 0,815 e 0,87, além de outros;

- A quantidade de algarismos, no caso dos números naturais, pode ser um bom indicador da ordem de grandeza (tal qual o exemplo 8345 > 83), mas a comparação entre 2,3 e 2,125, por exemplo, não obedece o mesmo critério.

Com relação às operações aritméticas, os alunos, acostumados com ideias aprendidas e válidas para o conjunto dos números naturais, encontram dificuldades de compreender porque, por exemplo, não se deve adicionar os denominadores de frações, assim como se faz com as parcelas de uma adição de números naturais.

Segundo Botta (1997), o que causa as dificuldades dos alunos, referentes às operações no conjunto dos números racionais, são as técnicas operatórias. Ela afirma que, como

> o número racional é dado pelo quociente de dois inteiros, os fatos básicos que precisamos conhecer "de memória" para operar com os racionais, são aqueles que aprendemos nos inteiros. O que vem a mais, e que causa certa complicação, são as diferentes técnicas operatórias realizadas sobre os racionais. (BOTTA, 1997, p. 11).

Quando fala em técnicas, Botta se refere aos algoritmos que são utilizados para realizar as operações de adição, subtração, multiplicação e de divisão de números racionais.

Os algoritmos para adicionar ou subtrair, são:

- Quando os denominadores dos números são iguais, adiciona-se ou subtrai-se (no caso da operação de adição ou subtração, respectivamente) os numeradores, e repetem-se os denominadores, conforme ilustrado a seguir.

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$$

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$$

A falta de compreensão desses algoritmos pode levar a equívocos como $\frac{3}{7}+\frac{4}{7}=\frac{7}{14}$ e $\frac{7}{5}-\frac{6}{5}=\frac{1}{0}$, por exemplo, mas o aluno que compreende uma fração como uma representação da parte de um todo, mas não de dois números inteiros, não comete erros como esses.

Atividades com materiais manipuláveis podem atuar como auxiliares para a promoção de compreensão das frações como parte de um todo.

- Quando os denominadores são diferentes, os algoritmos utilizados para a adição e subtração são, respectivamente, os seguintes:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a.d+c.b}{b.d}$$

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a.d-c.b}{b.d}$$

Nesses casos está implícita a necessidade de haver um denominador comum para que seja possível a realização de adição ou de subtração de frações. Esses algoritmos partem do princípio de que podemos obter uma fração equivalente a outra, quando multiplicamos o seu numerador e denominador por um mesmo número.

Dessa forma, a soma $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$, por exemplo, pode ser escrita como $\frac{d.a}{d.b}+\frac{b.c}{b.d}$, o que permite a adição cuja soma será uma fração cujo denominador é *b.d*. Notemos que *d* e *b* são escolhidos como multiplicadores das frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, respectivamente, pelo motivo de resultar em um mesmo denominador - o menor possível, quando *b* não é divisível por *d* ou *d* não é divisível por *b*.

Para a realização da multiplicação de frações, multiplica-se o numerador pelo numerador e o denominador pelo denominador, da forma a seguir.

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$$

Nesse caso, está implícita a ideia de que a multiplicação de frações trata-se de tomar uma parte de outra parte de algo. Isso pode ser compreendido melhor por meio de figuras geométricas, por exemplo, como mostra a sugestão de Botta (1997), citada na página 38 deste trabalho.

A divisão é a operação inversa da multiplicação. Desse modo, ela pode ser realizada da maneira seguinte.

$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a\div c}{b\div d}$, como em $\frac{4}{8}\div\frac{1}{2}=\frac{4\div 1}{8\div 2}=\frac{4}{4}=1$, por exemplo.

Silva e Almouloud (2008, p. 71) dizem que

> é necessário dar condições ao aluno para que ele perceba que a regra operatória da divisão é semelhante à da multiplicação, substituindo multiplicação por divisão, obtendo-se quociente dos numeradores sobre o quociente dos denominadores: $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \div c}{b \div d}$. Essa notação poderá permitir uma maior agilidade no cálculo, posto que a transformação em frações equivalentes poderia ser utilizada privando o aluno da memorização de uma nova regra, multiplicação da primeira fração pelo inverso da segunda, que geralmente não tem significado para ele.

Assim, segundo Silva e Almouloud (2008), quando o dividendo não for uma fração divisível pela fração divisora, o aluno poderá utilizar a ideia de equivalência de frações para encontrar um dividendo que permita a divisão, eximindo-se de utilizar um procedimento que muitas vezes é incompreensível para o discente - multiplicação da primeira fração pelo inverso da segunda, conforme escrito a seguir.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

Esse algoritmo justifica-se pelo fato de $\frac{a}{b}$ ser equivalente a $\frac{a.d.c}{b.d.c}$, e por essa última ser a fração mais simples/reduzida que pode ser dividida por qualquer fração $\frac{c}{d}$, quando *a* não for divisível por *c* e/ou *b* não for divisível por *d*. Fazendo a divisão de forma direta, temos $\frac{a.d.c}{b.d.c} \div \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times c}$, o que implica dizer que, de forma geral, podemos representar a divisão de quaisquer frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ como sendo a multiplicação da primeira fração pelo inverso da segunda.

Utilizando algoritmos os alunos podem encontrar respostas corretas para exercícios envolvendo frações, mas isso não implica que há a ocorrência de compreensão dos procedimentos realizados, o que pode ocasionar erros de cálculo como $\frac{a}{b} + \frac{d}{c} = \frac{a + d}{b + c}$, por exemplo, quando se sabe que $\frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$.

Segundo D'Ambrosio (2006),

> isto é aprendizagem por excelência, isto é, a capacidade de explicar, de apreender e compreender, de enfrentar, criticamente, situações novas. Aprender não é o mero domínio de técnicas, de habilidades, nem a memorização de algumas explicações e teorias. (D'AMBROSIO, 2006, p. 119).

Lopes (2008) afirma que é comum os professores solicitarem que os alunos definam ou identifiquem frações aparentes, impróprias, e que não deveria ser gasto tempo, cobrando aos alunos a memorização de termos matemáticos. Ele considera um problema grave a prescrição de regras para a realização de operações com frações e que, em vez disso, poderia ser proporcionada aos alunos a oportunidade de compreender esse conteúdo.

Também é importante saber que nem sempre o empenho e participação em atividades, por parte dos alunos, significa o desenvolvimento de aprendizagem com compreensão do conteúdo abordado.

Dessa forma, é importante compreender o que os alunos têm em mente (por meio de perguntas o professor pode fazer com que eles expressem o que pensam) durante a realização de uma atividade, pois muitas crianças podem contar partes de um todo dividido igualmente e fazer os registros de acordo com a orientação do professor, utilizando a notação barra fracionária, mas as ações deles podem estar desconexas com a ideia de parte todo, por exemplo. Ou seja, é possível que uma atividade, em vez de reduzir as dificuldades de aprendizagem, tome o tempo das aulas e não proporcione aprendizado, compreensão alguma sobre o conteúdo abordado.

Além disso, Lopes (2008) diz que a notação barra-fracionária também constitui um obstáculo para a aprendizagem, pois não é comum, para os alunos, a associação de uma parte através de dois números inteiros separados por um traço. Os alunos sentem dificuldades de compreender a notação barra-fracionária como representação de partes de um todo.

Botta (1997, p. 28) afirma que não somente os alunos brasileiros sentem dificuldades de compreender o conteúdo de frações.

> Esse fracasso com frações é notado não apenas no Brasil, mas no mundo todo. Em 1990, a National Assenssment of Education Progress (NAEP) nos mostrou que apenas 50% dos estudantes de oitavas séries expressaram, na forma decimal, uma fração com denominador 10, e 49% disseram qual é o peso, na lua, de um objeto que pesa trinta libras na terra, sendo dado que o peso na Lua é $\frac{1}{6}$ do seu peso na Terra.

Forgues, Tian e Siegler (2015) dizem que muitos estudos[2] mostram que alunos têm demonstrado um baixo índice de compreensão dos números fracionários, e que as dificuldades não são específicas de alunos dos Estados Unidos da América (EUA), mas também de alunos cujos países aos quais pertencem são internacionalmente reconhecidos quanto ao desempenho em matemática, como a China, por exemplo.

Forgues, Tian e Siegler (2015) também afirmam que hoje, nos EUA, depois de 3 décadas de reformas educacionais e de bilhões de dólares gastos em prol da educação, pouca

[2] Perle, Moran e Lutkus (2005) e Stigler, Givvin e Thompson (2010), por exemplo.

ou nenhuma melhora foi percebida na compreensão dos números fracionários, pelos alunos. Uma amostra de 1000 professores de álgebra, dos EUA, classificou como deficiente a aprendizagem dos alunos deles, sobre o conteúdo de frações e operações com esses números e com números decimais, e consideram essa deficiência um dos maiores obstáculos que impedem que os alunos aprendam álgebra. Segundo Lopes (2008, p. 7),

> A aprendizagem de frações não se dá com definições prontas, nomenclatura obsoleta e pseudo-problemas sobre pizzas e barras de chocolates. Os professores deveriam ter atenção para as complexidades que envolvem conceito tão delicado. Os obstáculos à aprendizagem são muitos e de várias naturezas. A começar pelo fato de a palavra fração estar relacionada a muitos constructos.

Como visto, existem muitos fatores que implicam em dificuldades de aprendizagem com compreensão do conteúdo de frações, e um deles são as ideias (comentadas a seguir) que a notação barra-fracionária pode representar.

3.2 Ideias da Notação Barra-Fracionária

Os números racionais ($\frac{a}{b}$, com a e b pertencentes ao conjunto dos números inteiros, e b diferente de zero) podem representar várias ideias matemáticas, como fração, que representa a parte de um todo; razão, comparação entre duas grandezas iguais ou distintas; e quociente, resultado de uma divisão; entre outras. Cada uma dessas ideias, a depender do autor, recebe nomes diferentes. Onuchic e Allevato (2008), por exemplo, as nomeiam de personalidades; Botta (1997), de subconstrutos; Lopes (2008), de subconceitos.

Neste trabalho, em vez de utilizarmos alguma das expressões citadas acima (personalidade, subconstruto ou subconceito - para nos referirmos a alguma interpretação, ideia que os números racionais podem representar), faremos uso da palavra 'ideia'. Nós também utilizamos o termo notação 'barra-fracionária' para nos referirmos aos números racionais.

Botta (1997) descreveu um pequeno relato histórico sobre as ideias da notação barra-fracionária. Ela afirma que Kieren, em 1975, foi o primeiro pesquisador a lançar a ideia de que os números racionais estão sujeitos a várias interpretações distintas. Ele apresentou os números racionais como frações; frações decimais; classes de equivalência de frações; números da forma $\frac{p}{q}$, sendo p e q pertencentes aos inteiros, e q diferente de zero; operadores multiplicativos; elementos de um campo quociente ordenado infinito; e medidas ou pontos na reta. Em 1980 Kieren reduziu a lista de interpretações, passando a considerar apenas as ideias básicas. Foram elas: relação parte-todo, quociente, medida, razão e operador.

Em 1983, Behr, Lesh, Post e Silver propuseram, como diferentes interpretações para a notação barra fracionária, a medida fracionária (na qual $\frac{2}{3}$, por exemplo, significa dois pedaços de tamanho $\frac{1}{3}$), razão, taxa, quociente, coordenada linear (um ponto na reta), decimal (representação de números decimais através de frações) e operador (fração como fator de uma multiplicação).

Em 1985, Nesher também fez algumas considerações a respeito das diferentes ideias que a notação barra fracionária pode representar. Considerou que fração é uma descrição de uma relação parte-todo; razão, comparação multiplicativa entre duas quantidades; operador, algo que opera sobre uma quantidade, alterando-a; e probabilidade. Botta (1996) afirma que todos os pesquisadores comentados acima concordam que quociente, razão, operador e a relação parte-todo são ideias centrais, fundamentais, que estão presentes na matemática, independentemente do nome dado a elas.

Segundo Onuchic e Allevato (2008),

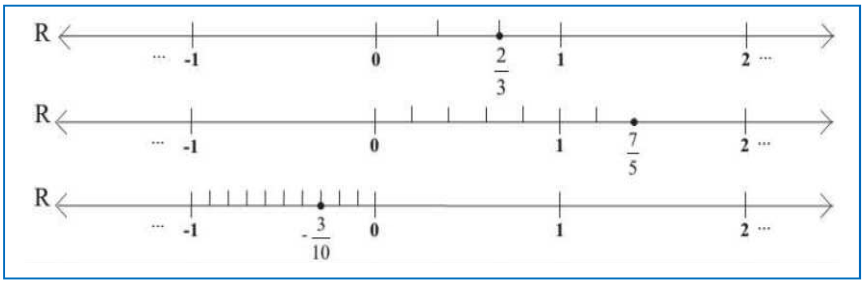
> As diferentes "personalidades" que os números racionais podem assumir constituem campos semânticos distintos. Para compreender o significado dos "números racionais" é preciso considerar a teoria matemática à qual eles estão submetidos, a classe de situações do mundo real a que eles se aplicam, e as relações entre a teoria e estas situações. (ONUCHIC; ALLEVATO, 2008, p. 85).

Assim, segundo essas autoras, também é necessário levar em consideração o contexto no qual se aplica a notação barra-fracionária, para que se perceba a ideia que está sendo relacionada a ela.

As 'personalidades' (ideias da notação barra fracionária) das quais as autoras falam são ponto racional, quociente, fração, operador e razão. Quando falam sobre Ponto Racional, afirmam que "todo número racional $\frac{a}{b}$ ocupa um ponto bem definido na reta e, reciprocamente, a todo ponto racional da reta corresponde um número racional". (ONUCHIC; ALLEVATO, 2008, p. 87).

Para trabalhar a ideia de **ponto racional** as autoras sugerem trabalhar o seguinte problema em sala de aula: "localizar os números $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{5}$ e $-\frac{3}{10}$ na reta". (ONUCHIC; ALLEVATO, 2008, p. 87).

Figura 11: Retas numéricas



Fonte: Onuchic e Allevato (2008, p. 87).

Elas (ONUCHIC; ALLEVATO, 2008, p. 87) afirmam que "estudantes e professores em cursos de formação, ao resolverem esse problema, geralmente fazem a divisão dos termos constituintes dos números dados, a fim de obter uma aproximação decimal, antes de localizar o ponto na reta". Também dizem que se costuma utilizar a aproximação 0,6 ou 0,66, entre outras, para representar $\frac{2}{3}$, e que é preciso que os alunos compreendam que 0,66666... é uma dízima periódica simples, cuja fração geratriz é $\frac{2}{3}$. Ou seja, segundo essas autoras, é importante que os alunos compreendam a correspondência existente entre números fracionários e números decimais, pois tratam-se de duas notações através das quais é possível representar quantidades iguais.

Quando falam sobre **quociente**, Onuchic e Allevato (2008) afirmam que essa ideia tem seu significado percebido quando um número de objetos precisa ser repartido igualmente por um número de grupos; que se refere ao uso dos números racionais como solução para uma situação de divisão; e que ela aparece mais frequentemente que as outras ideias. Elas também afirmam que

> Essa "personalidade" está submetida à teoria da função quociente e, aqui, a barra fracionária é um símbolo para esta função, $\frac{x}{y} \equiv$ quociente (x, y), comumente escrito como x ÷ y, em que o dividendo x e o divisor y simbolizam seus argumentos. Assim, ao indicar o quociente $\frac{3}{5}$ com a notação "barra fracionária", reforça-se o fato de que em Q todas as divisões têm resto zero. (ONUCHIC; ALLEVATO, 2008, p. 88).

Nas palavras de Botta (1997), a notação barra fracionária também é utilizada para representar a função quociente, ou seja, a divisão entre dois números inteiros comumente escritos por x ÷ y. Assim, segundo ela, $\frac{x}{y}$ é vista como uma forma de simbolizar uma função na qual o numerador e o denominador são os argumentos. Onuchic (informação verbal)[3] afirmou que quando a notação barra-fracionária está sendo utilizada para representar a ideia de quociente, dá-se o nome de dividendo e de divisor, ao que seria chamado, respectivamente, de numerador e de denominador, quando a referida notação está sendo utilizada para representar uma fração.

Botta (1997) cita quatro aplicações para a ideia função quociente: divisão (partição), extração, contração (retração, encolhimento) e dedução (edução).

Ela dá dois exemplos referentes à aplicação divisão. Um deles é: "Há três pizzas para serem repartidas igualmente entre quatro pessoas. Quanto de pizza cada pessoa receberá"?

O resultado é dado da seguinte maneira: 3 pizzas ÷ 4 pessoas = $\frac{3}{4}$ pizza/pessoa, na qual 3 é a quantidade a ser dividida; 4 é o parâmetro (número de partes iguais nas quais a quantidade será dividida); e $\frac{3}{4}$ é o valor da função quociente que representa a quantidade de uma das partes resultantes.

Com relação à extração, Botta (1997) diz que se refere a tirar repetidamente uma quantidade de outra quantidade. Ela afirma que um problema do mundo real que exemplifica essa aplicação, é: "Tenho dez metros de tecido. Quantos pedaços de dois metros posso ter"?

Ela expôs o resultado 10m ÷ 2m = $\frac{10m}{2m}$ = 5, onde 10 é a quantidade na qual ocorre a extração; 2 é a quantidade que está sendo extraída; e 5 é o valor da função quociente que é o número de vezes que se realizou a operação de extração.

Botta (19978, p. 77) diz que a contração (retração, encolhimento) "envolve uma única quantidade que é diminuída após algum período de tempo", mas que não há uma separação física da quantidade em partes. Ela dá o seguinte exemplo: "O volume inicial de um balão era de 6 m^3. Sofreu uma retração com um fator três, resultando um volume de $2m^3$" . (BOTTA, 1997, p. 77). Ela diz que como não existe um termo formal para se referir a esse fator de retração ou de encolhimento, podemos dizer que o balão se reduziu a um terço do tamanho inicial.

$6m^3 \div 3 = 2m^3$, onde 6 é a quantidade a ser retraída (tamanho inicial do balão); 3 é o parâmetro que denota o quanto a quantidade inicial se reduzirá; e 2 é a quantidade final depois que a retração é realizada.

[3] Informação coletada na palestra proferida pela professora Lurdes Onuchic, no Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba – Campus I, no dia 06 de outubro de 2016.

Sobre a dedução (edução), Botta (1997) afirma que essa é uma aplicação chamada de quociente cartesiano e é vista em problemas nos quais, por exemplo, se conhece a área A e o comprimento C de um retângulo, e se pretende descobrir a largura L.

Botta (1997) diz que como A = C × L, então $\frac{A}{C} = \frac{C \times L}{C}$ = L, onde C × L é a quantidade multidimensional; e L é a quantidade (um dos fatores da quantidade multidimensional).

Segundo essa autora, o que foi feito, nesse caso, foi deduzir a largura a partir do quociente entre a área do retângulo e seu comprimento.

> Sendo a dedução uma aplicação da função quociente que envolve quantidades multidimensionais, pode-se perceber, no exemplo dado, que a área não foi dividida em partes iguais, nem o comprimento foi extraído repetidamente dela, nem a área encolheu para gerar a largura. (BOTTA, 1997, p. 78).

Enquanto a função quociente refere-se à divisão entre dois inteiros, Botta (1997) diz que o **número racional** pode ser introduzido como a solução r não inteira da equação $y \times r = x$, quando $y > x$. “Neste caso, a barra-fracionária funciona como um delimitador, um separador para o par ordenado (x, y). Com este uso, a notação barra-fracionária simboliza um objeto e não mais uma função como no caso anterior”. (BOTTA, 1997, p. 78).

Onuchic e Allevato (2008) dizem que a ideia **fração** é uma relação da parte com o todo, e que é nessa que se fala em numerador e denominador. Explicam que em $\frac{2}{3}$, por exemplo, o número 2 é o numerador e o número 3 é o denominador, os quais representam 2 partes de um todo dividido em 3 partes iguais.

Elas dizem, ainda, que os números decimais “não constituem, apesar de terem uma notação diferente, uma nova categoria de números, mas pertencem à mesma categoria das frações”. (ONUCHIC; ALLEVATO, 2008, p. 92).

Segundo Botta (1997), frações é uma aplicação dos números racionais e refere-se a uma parte, a um fragmento de uma quantidade, e que é nessa ideia que a barra fracionária é vista como uma relação parte-todo. Assim, a fração imprópria é vista como mais que um inteiro. Afirmar que sobrou $\frac{5}{3}$ de pizza de um lanche que um grupo de pessoas fez, por exemplo, equivale a dizer que sobrou 1 + $\frac{2}{3}$ de pizza.

Botta (1997) também afirma que Freudenthal (1983) considera que as frações é a origem dos conceitos de número racional, e que ele sugere, para o ensino-aprendizagem do referido conteúdo, que

> 1. Inicialmente dever-se-ia envolver a criança em atividades de comparar quantidades e fazer medidas que utilizam os sentidos (a visão, o tato,...) como, por exemplo, a dobradura e as atividades de pesar partes de coisas com as mãos ou com uma balança. Isso é ver a fração como um fraturador; 2. Seria útil realizar atividades de cortar, fatiar, colorir inteiros em partes iguais. Esta é a forma mais concreta de se apresentar as frações. É a fração como parte-todo; 3. Comparar frações é uma forma de se ampliar o conceito de parte-todo. É a fração como um comparador; 4. A fração, vista como um operador, surge através desses três aspectos mencionados antes. (Botta, 1997, p. 51).

Costa (2007) afirma que um dos grandes desafios para os professores, tem sido ensinar matemática para quem não gosta de matemática; que alguns conteúdos matemáticos, como frações, por exemplo, costumam ter um índice alto de rejeição por parte dos alunos; e que esses fatos a incentivou ensinar frações através de origamis.

Por mais de 16 anos Costa apresenta palestras, seminários, cursos e oficinas com a proposta de ensinar frações e outros conteúdos matemáticos através de dobraduras. Ela diz que acompanhar os movimentos feitos no papel até o momento final em que ele se transforma em alguma coisa nova, é mais que dar sentido ao processo, pois é possível falar e pensar sobre alguns conceitos matemáticos com simplicidade, segurança e sem as dificuldades que os alunos sentem quando o professor decide apresentar, logo no início do estudo, as formalidades da matemática. Concluindo, ela afirma que se fundamenta em dois pressupostos para trabalhar o ensino de matemática através de origamis: através deles é possível ensinar de forma lúdica e prazerosa; e a construção da linguagem matemática deve ser feita cuidadosamente, a partir da compreensão dos conceitos relacionados às atividades desenvolvidas com o uso das dobraduras.

Outra aplicação dos números racionais, segundo Botta (1997), ocorre quando eles são utilizados para expressar uma medida. Essa é uma aplicação que emprega as unidades-padrão de medida.

Ela diz que

> Nesta aplicação, fixa-se uma unidade-padrão de medida e um parâmetro de divisão. Por exemplo, quando se toma um metro e o parâmetro dez, outras unidades de medida menores que o metro são geradas. Fazendo-se as divisões sucessivas por dez, produzem-se as unidades menores que o metro – o decímetro, o centímetro, o milímetro e assim por diante. Nas medidas são fixados a quantidade de referência e o parâmetro de divisão. (BOTTA, 1997, p. 83).

Continuando, Botta (1997) afirma que para chegar-se à medida de um segmento qualquer, tem que ser levada em consideração uma quantidade de referência padrão.

Quando falam em **operador**, Onuchic e Allevato (2008) dizem que se trata da ideia que define uma estrutura multiplicativa de números racionais.

Elas afirmam que a notação barra-fracionária, nesse caso,

> é usada para simbolizar uma classe particular de funções compostas definida por $\frac{a}{b} \times X = a \times (X \div b) = (a \times X) \div b$, onde a e b são constantes e X é uma expressão numérica para alguma quantidade. A barra fracionária não é nem um símbolo funcional nem um delimitador, mas um símbolo para a operação de composição de funções. Então, $\frac{3}{5} \times 15$ deveria ser interpretado como uma função composta e, assim, $\frac{3}{5} \times 15 = 3 \times (15 \div 5) = (3 \times 15) \div 5 = 9$. (ONUCHIC; ALLEVATO, 2008, p. 93-94).

Ou seja, as autoras enxergaram a ideia de operador como uma função na qual (considerando o número racional $\frac{a}{b}$, por exemplo) a atua como um multiplicador, e b como um divisor de um X, que pode ser um número ou uma expressão algébrica qualquer.

A notação barra-fracionária também é utilizada para representar **vetores binários**. Segundo Botta (1997), nesse caso, a barra atua como um delimitador para um par ordenado $\frac{x}{y} \equiv (x, y)$, com x e y pertencentes ao conjunto dos números inteiros.

Botta (1997) também afirma que, segundo Ohlsson (1991), pares ordenados que são interpretados como números racionais, estão incluídos em uma teoria diferente da teoria dos pares ordenados que são interpretados como vetores binários. Ela diz que isso é fato, pois os vetores incluem um conjunto de características no qual estão inclusas algumas definições como, por exemplo, comprimento (ou módulo), descrito por $\sqrt{x^2 + y^2}$, declividade, definida como $x \div y$, e também a lei da adição, da multiplicação e da equivalência, não aplicáveis à notação barra-fracionária quando é interpretada como a ideia parte-todo.

Segundo Winterle (2000):

- Dois vetores (x, y) e (x_1, y_2) são equivalentes se, e somente se, $x = x_1$ e $y = y_2$;
- Lei da adição: $(x, y) + (x_1, y_2) = (x + x_1, y + y_2)$;
- Lei da multiplicação: $(x, y) \times (x_1, y_2) = (x \times x_1, y \times y_2)$;
- Multiplicação por um número real: seja t um número real, t.(x, y) = (t.x, t.y).

Essas são apenas algumas das regras, propriedades aplicadas aos vetores. Não nos cabe, aqui, fazer uma abordagem completa sobre esse assunto.

A **Razão** - uma das aplicações de vetores, segundo Botta (1997) - "é uma comparação multiplicativa entre duas grandezas, denotada por $\frac{a}{b} = a : b$ (lê-se a está para b), em que a é denominado antecedente e b é denominado consequente. As propriedades da razão são fundamentalmente diferentes daquelas da fração". (ONUCHIC; ALLEVATO, 2008, p. 96-97). Continuando, as autoras dizem que o conceito de razão é uma ideia unificadora da matemática, pois une diversos ramos da matemática escolar, tais como medida, estatística, funções, álgebra, aritmética e geometria.

Segundo Botta (1997, p. 85), "razão é uma expressão numérica que diz o quanto há de uma certa quantidade em relação a outra quantidade. Exemplo: se no estado de Minas Gerais há oito mulheres para cada cinco homens, então a razão entre mulheres e homens em Minas Gerais será dada por $\frac{8\ mulheres}{5\ homens}$ ".

Botta (1997) também afirma que o principal fenômeno conceitual relativo às razões, é o fato de que elas não podem ser adicionadas tal como se adicionam as frações.

Imaginemos a situação seguinte: Natália foi a duas pescarias. Em uma delas ela conseguiu 10 peixes, e na outra, 15. Nesse caso, temos que a razão que descreve a quantidade de peixes, em relação à primeira pesca, é $\frac{10}{1}$ (10 peixes por pescaria), e que a razão que representa a quantidade de peixes que ela conseguiu pescar na segunda pescaria, é $\frac{15}{1}$ (15 peixes por pescaria). Se fôssemos adicionar essas razões, do modo como é realizada a adição de frações, teríamos $\frac{25}{1}$. Essa razão nos indicaria 25 peixes por pescaria, o que não corresponde à situação descrita acima. Isso nos sugere que podemos adicionar razões, fazendo $\frac{10}{1} + \frac{15}{1} = \frac{25}{2}$.

Botta (1997) diz que, segundo Ohlsson (1991), pode-se adicionar razões de acordo com a teoria de vetores.

Essa autora dá alguns exemplos. Um deles é: "Uma classe está na razão de 2 meninas para 3 meninos e uma outra classe está na razão de 4 meninas para 3 meninos. Qual seria a nova razão se juntássemos as duas classes"? (BOTTA, 1997, p. 87).

Ela afirma que não se pode pensar nas razões $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{3}$ como números racionais e adicioná-los, pois assim o resultado seria $\frac{6}{3}$, o que não corresponde ao resultado satisfatório ((2, 3) + (4, 3) = (6, 6) ou $\frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{6}{6}$) para essa situação.

Botta (1997) faz uma crítica ao modo como é ensinada a razão. Ela afirma que, geralmente, diz-se que ela deve ser escrita na forma $\frac{a}{b}$ ou *a* : *b* (*a* está para *b*); que é possível simplificar seus termos do mesmo modo como se procede com as frações; que o número encontrado na forma irredutível é chamado razão; e que essa é uma ideia definida como a relação entre dois números inteiros. Em vez disso, ela afirma que deveria ser dito que razão é uma forma de comparar duas grandezas multiplicativamente. Ou seja, ela defende que é necessário dar ênfase ao significado, à ideia relacionada à razão, em vez de somente repassar as características dessa ideia.

A taxa também é uma aplicação de vetores, segundo Botta (1997). Essa autora (p. 90) afirma que essa aplicação se refere a "uma razão entre uma quantidade e um período de tempo", e que "o numerador é uma quantidade, o denominador refere-se a tempo e o valor da taxa descreve o quanto há daquela quantidade para cada unidade de tempo".

Botta (1997, p. 90) também afirma que "nas quantidades comparativas tais como razões, quantidades intensivas, proporções e taxas, a ideia envolvida não é a da separação física e sim a ideia da comparação: o quanto há desta quantidade para cada unidade de outra quantidade".

Com relação à **proporcionalidade** - outra aplicação de vetores, segundo Botta (1997) - Onuchic e Allevato (2008) afirmam que se trata de uma comparação multiplicativa entre duas grandezas, e que as pessoas apresentam muitas dificuldades de compreensão de tal conceito. Elas também dizem (p. 97) que em um problema como "Teresa e Júlia correm numa pista à mesma velocidade. Teresa começa primeiro. Quando ela tinha acabado a nona volta, Júlia acabara a terceira. Quando Júlia completou 15 voltas, quantas voltas havia dado Tereza"? É comum os resolvedores assumirem a comparação multiplicativa e utilizarem a ideia de proporcionalidade, fazendo $\frac{9}{3} = \frac{x}{15}$. Concluindo (p. 99), dizem que "fazer operações mecânicas com proporções, não significa necessariamente compreender as ideias subjacentes ao pensamento proporcional. A compreensão de proporcionalidade é um ponto crítico no desenvolvimento mental", e

> da proporcionalidade derivam outros importantes conceitos e conteúdos: regras de três, divisão em partes proporcionais, quantidades intensivas, misturas, porcentagem, taxas, juros, descontos, escalas, estimativas populacionais, variação direta, variação inversa, razões trigonométricas, semelhança de triângulos, probabilidades etc. O conceito de proporcionalidade está presente não apenas na Matemática, mas, também, em outras áreas do conhecimento. Em Física, no estudo

> da densidade, da ótica, da velocidade; em Química, no estudo de equivalências químicas; em Artes, na ampliação e redução de figuras; em Geografia, na interpretação das escalas de mapas. (ONUCHIC; ALLEVATO, 2008, p. 97).

Para, Behr, Lesh e Post (1994), muitos aspectos de nosso mundo funcionam de acordo com o pensamento proporcional, e isso faz com que a capacidade de compreender esse raciocínio torne-se extremamente útil na interpretação dos fenômenos do mundo real.

Botta (1997) afirma que para que haja assimilação da ideia de proporcionalidade, é necessário que se compreenda que ela está ligada à noção de razão, que é uma das ideias da notação barra-fracionária, mas que é comum o aluno relacionar a razão à ideia de fração.

Assim, a notação barra-fracionária representa ideias diferentes, cada uma tão importante quanto a outra, pois elas são ideias que se relacionam a outros conteúdos matemáticos e também a outras áreas do conhecimento científico, como a física, a química etc. Essas ideias, como já comentado anteriormente, pode ser mais um dos motivos que provocam dificuldades dos alunos compreenderem o conteúdo de frações. As discussões a seguir contém algumas alternativas que, segundo os seus propositores, podem contribuir para a aprendizagem do conteúdo de frações.

3.3 Algumas Alternativas e Discussões sobre o Ensino-Aprendizagem de Frações

Para superar dificuldades de aprendizagem e compreensão dos números fracionários, há quem foque um ensino-aprendizagem através de ilustrações de objetos divididos em partes iguais, assim como é sugerido por algumas pesquisas citadas neste trabalho - Polese (2011) e Menotti (2015), por exemplo.

Silva e Almouloud (2008, p. 58) dizem que a ideia parte-todo

> se caracteriza por um inteiro (grandeza discreta ou contínua), do qual uma parte pode ser associada a um número fracionário e, com este intuito, as figuras se prestam como representação desse inteiro. Convenciona-se então que ele deva estar dividido em partes “iguais” (mesma área) para que a parte em questão possa ser quantificada.

Continuando, eles afirmam que é comum a apresentação de uma figura plana dividida em partes congruentes com algumas selecionadas, prosseguindo com a contagem dessas partes de modo que uma fração seja associada às partes selecionadas da figura.

A compreensão das operações com números fracionários exige mais dos alunos, que operações envolvendo números inteiros, pois para compreenderem as operações com esses números eles também precisam compreender a ideia parte-todo que a barra-fracionária representa; precisam compreender que, no caso das frações, o numerador e o denominador passam a representar um único número, mas não dois números inteiros.

Assim como ocorre com o conteúdo de funções, trigonometria, entre outros, os alunos também sentem mais dificuldades de compreender alguns conhecimentos específicos sobre frações.

> A adição de números fracionários de mesmo denominador, normalmente, não apresenta complicadores para a compreensão dos alunos. A questão está em fazê-los entender que quando os denominadores são diferentes, as partes consideradas têm nomes diferentes, tais como meios, terços, quartos, dentre outras e, nesse caso, é necessário transformar as frações em questão, em outras equivalentes, que tenham o mesmo nome, ou seja, que apresentem mesmo denominador. (SILVA; ALMOULOUD, 2008, p. 59).

É comum os professores instruírem seus alunos a utilizar o mínimo múltiplo comum para igualar os denominadores das frações com as quais se pretende realizar operações de adição e de subtração. Mas é necessário mais que isso para desenvolver no aluno a compreensão dessas operações. Quando os alunos utilizam procedimentos determinados pelo professor, para a realização de operações com frações, não significa que houve compreensão do que foi realizado.

Adams, Garofalo e Sharp (2002) afirmam que é importante, antes que o professor apresente algoritmos, que os alunos compreendam o que é estudado, pois eles se mostram desinteressados quando têm que memorizar algo, sem que tenham compreensão do que está sendo estudado. Assim, a compreensão é importante, mas tão importante quanto isso, é o fato de que compreender a matemática também pode despertar no aluno o interesse por essa matéria.

Segundo Silva e Almouloud (2008, p. 61),

> No caso em que as frações têm denominadores diferentes é comum utilizar o mínimo múltiplo comum (mmc) para transformar as frações em outras equivalentes e de mesmo denominador. No entanto, acreditamos que tal procedimento prejudica a compreensão da definição da operação de adição.

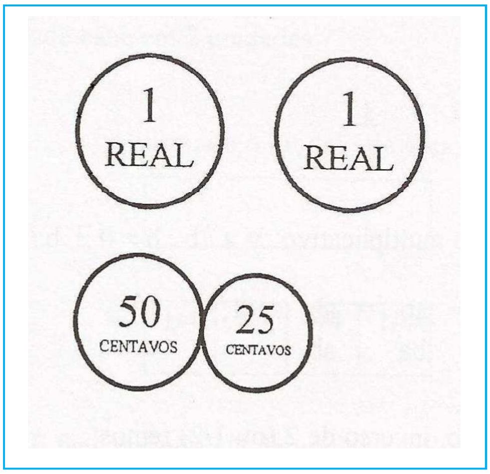
Botta (1997) diz que quando os procedimentos para realizar as operações com frações são somente memorizados, os alunos se confundem e há a ocorrência de muitos erros. Por isso ela sugere que, além de saberem dos algoritmos, é importante que os discentes realizem atividades que proporcionem o desenvolvimento de compreensão do conteúdo estudado.

Em vez de os professores utilizarem somente o mínimo múltiplo comum, Silva e Almouloud (2008) sugerem, também, a utilização do procedimento de multiplicar o numerador e o denominador da fração, para que os alunos compreendam o sentido, o motivo que há na transformação de frações, que as mantêm equivalentes à fração originária. Ou seja, segundo esses autores, a multiplicação do numerador e do denominador de uma fração por um mesmo número natural pode favorecer a compreensão do motivo pelo qual, por exemplo, $\frac{1}{2}$ equivale a $\frac{2}{4}$. "O importante é o aluno compreender que para adicionar números fracionários, com denominadores diferentes, o produto desses é uma boa escolha para a transformação em frações equivalentes". (SILVA; ALMOULOUD, 2008, p. 65).

Quando fala sobre divisão com frações, Botta (1997) também recomenda um trabalho envolvendo conjuntos discretos e conjuntos contínuos. Ela afirma que trabalhando com alguns materiais manipulativos, como moedas ou folhas de papel sulfite, por exemplo, o trabalho pode levar a uma melhor compreensão.

Utilizando moedas, um exemplo de conjunto discreto, e o exemplo $\frac{3}{4} \div 2$, Botta (1997) explorou a ideia de divisão de frações por um número inteiro.

Figura 12: Moedas 1



Fonte: Botta (1997, p. 40).

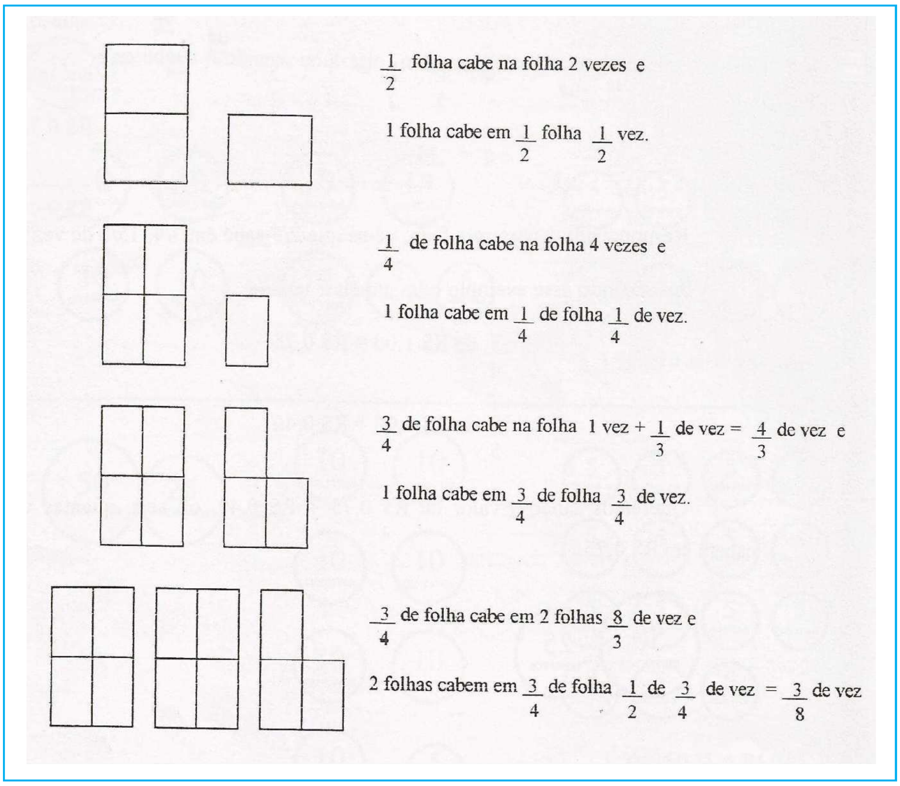
Ela afirma que como $\frac{3}{4}$ de R\$ 1,00 equivale a R\$ 0,75, querendo-se saber quantas vezes R\$ 2,00 cabe em R\$ 0,75, utilizando as moedas, como mostra a Figura 12, podemos tirar as seguintes relações (BOTTA, 1997, p. 40):

- R\$ 0,50 cabe duas vezes em R\$ 1,00 e R\$ 1,00 cabe $\frac{1}{2}$ vez em R\$ 0,50.
- R\$ 0,25 cabe 4 vezes em R\$ 1,00 e R\$ 1,00 cabe $\frac{1}{4}$ de vez em R\$ 0,25.
- R\$ 0,75 cabe $\frac{4}{3}$ de vez em R\$ 1,00 e R\$ 1,00 cabe $\frac{3}{4}$ de vez em R\$ 0,75.
- R\$ 0,75 cabe $2 \times \frac{4}{3}$ de vez $= \frac{8}{3}$ de vez em R\$ 2,00 e R\$ 2,00 cabe $\frac{3}{8}$ de vez em R\$ 0,75.

Assim, essa autora explora a ideia de ‘quantos cabem’ para fazer uma abordagem de divisão com frações.

Para o mesmo caso da divisão citada acima, Botta (1997) afirma que também se pode trabalhar no conjunto contínuo, utilizando folhas de papel sulfite - como ilustrado pela Figura 13.

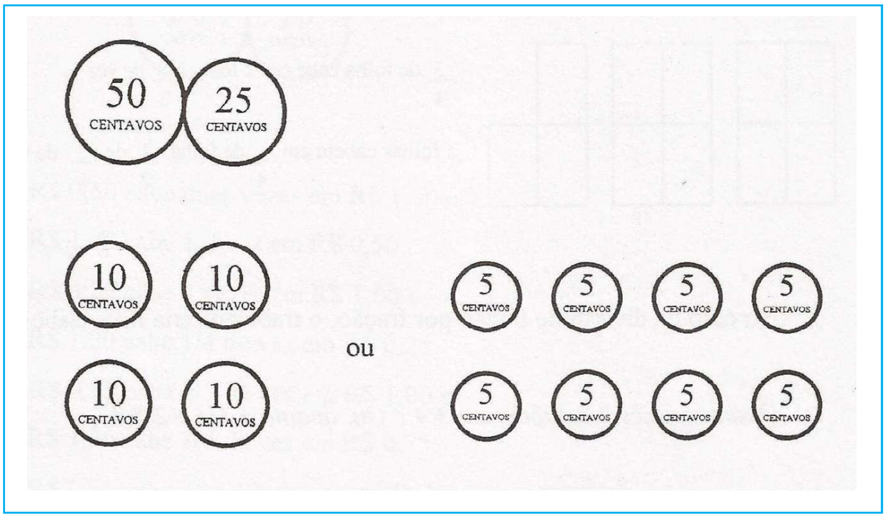
Figura 13: Folhas de papel sulfite e suas representações fracionárias



Fonte: Botta (1997, p. 40).

Botta (1997) afirma que no caso de divisão de fração por fração, o trabalho é mais elaborado. Ela dá o seguinte exemplo: qual é o valor de R$ 0,75 ÷ 0,40, ou seja, R$ 0,40 cabe quantas vezes em R$ 0,75?

Figura 14: Moedas 2



Fonte: Botta (1997, p. 42).

Ela afirma que, nesse caso, considerando a Figura 14, percebe-se que R$ 0,40 cabe uma vez em R$ 0,75 e sobram R$ 0,35. Se o todo é R$ 0,40 = 8 × R$ 0,05, então $\frac{1}{8}$ de R$ 0,40 equivale a R$ 0,05. Dessa forma, R$ 0,35 = 7 × R$ 0,05 = 7 × $\frac{1}{8}$ de R$ 0,40 = $\frac{7}{8}$ de R$ 0,40.

Como R$ 0,75 = R$ 0,40 + R$ 0,35 = 8 × R$ 0,05 + 7 × R$ 0,05 = 8 × $\frac{1}{8}$ de R$ 0,40 + 7 × $\frac{1}{8}$ de R$ 0,40 = 15 × $\frac{1}{8}$ de R$ 0,40 = $\frac{15}{8}$ de R$ 0,40, isso implica que R$ 0,40 cabe $\frac{15}{8}$ de vez em R$ 0,75.

Para um trabalho envolvendo soma ou subtração de frações maiores que uma unidade, "uma possibilidade é associar a ideia parte-todo à concepção de medida, utilizando figuras de retas ou segmentos numerados". (SILVA; ALMOULOUD, 2008, p. 63). Biffi (2001) mostrou que a utilização da reta numérica para a representação de frações facilitou a compreensão, por parte de alunos de uma turma de pedagogia, do significado de frações próprias, impróprias e aparentes, pois em uma mesma reta é possível representar frações menores ou maiores que um, e também equivalentes aos números naturais.

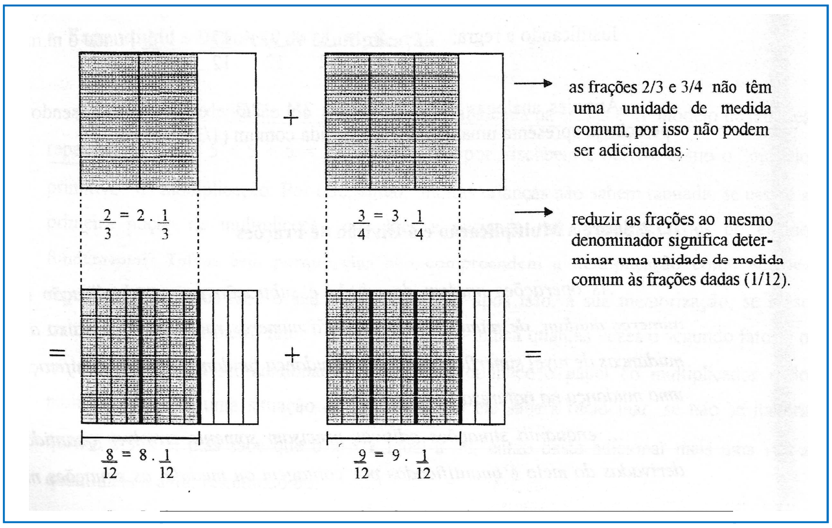
Segundo Bezuk & Bieck (1993), é importante capacitar os discentes a determinarem a razoabilidade dos resultados das operações com os números fracionários, pois é comum surgirem erros como $\frac{1}{2} + \frac{1}{7} = \frac{2}{9}$. Assim, segundo esses autores, se os alunos tivessem a compreensão do significado que há a notação barra-fracionária, quando ela representa um número fracionário, perceberiam que $\frac{2}{9}$ não é uma resposta razoável para a adição citada anteriormente, pois um número positivo foi acrescentado a $\frac{1}{2}$ e, dessa forma, a resposta, consequentemente, deve ser maior que $\frac{1}{2}$.

Para trabalhar com adição de frações, Botta (1997) também sugere a utilização do modelo de área, mas afirma que, nesse caso, é importante considerar que toda fração pode ser interpretada da forma seguinte:

$$\frac{2}{3} = 2 \times \frac{1}{3}$$

Quantidade medida

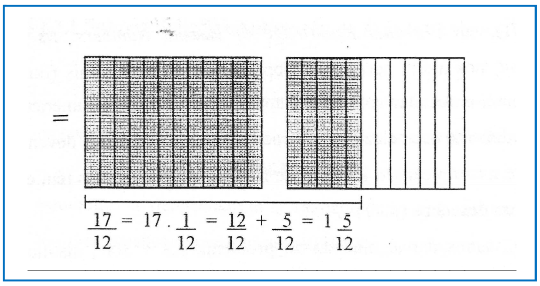
Figura 15: Representação geométrica de uma adição de frações



Fonte: Botta (1997, p. 31).

Assim, utilizando frações unitárias, o resultado para a adição ilustrada acima pode ser representada conforme a Figura 16.

Figura 16: Representação geométrica de uma soma de frações



Fonte: Botta (1997, p. 32).

Trabalhando com frações unitárias e utilizando ilustrações de áreas, conforme exposto nas figuras 13 e 14, Botta (1997) afirma que fica mais fácil para o professor explicar, e também mais fácil dos alunos verificarem a importância, a necessidade que há em obter um denominador comum para que seja realizada adição ou subtração de frações.

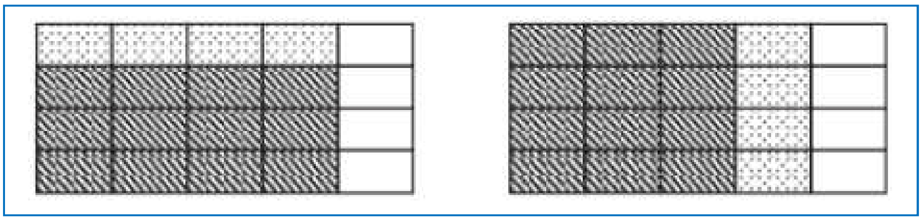
Botta também diz que as aulas que ela recebeu sobre o conteúdo de frações, durante sua formação na Educação Básica, focavam a memorização de regras aritméticas. Desse modo, ela e seus colegas não compreendiam o que faziam. Utilizavam nas provas os procedimentos que memorizavam. Isso foi um problema quando ela teve que lecionar, pois os conhecimentos que possuía eram fruto apenas de memorização, ela não compreendia o que devia ensinar. Assim, ela afirma que é importante que o professor compreenda os conteúdos, para que possa, de fato, ensinar, abstendo-se de simplesmente repassar o conteúdo que encontra nos livros didáticos.

Quanto à multiplicação de números fracionários, Botta (1997) afirma que os alunos não apresentam muitas dificuldades, pois é uma operação cujo algoritmo é semelhante ao procedimento de multiplicação de números naturais, mas isso não quer dizer que a facilidade em realizar o algoritmo seja decorrente de compreensão. Ela diz que a crença de que a multiplicação é uma operação que sempre faz aumentar, e a divisão sempre faz diminuir - ideias adquiridas durante o estudo da multiplicação e da divisão de números inteiros positivos - faz com que os discentes sintam dificuldades de compreender os resultados de multiplicações e de divisões com frações.

Silva e Almouloud (2008) dão exemplos de atividades que, segundo eles, permitem que os alunos compreendam a ideia de multiplicação de números fracionários. Uma delas é a seguinte: "Pinte três quartos de quatro quintos do retângulo desenhado abaixo. Que parte do retângulo você pintou? Dê a sentença matemática que representa a operação que você efetuou". (SILVA; ALMOULOUD, 2008, p. 68).

Eles afirmam que a resolução dessa atividade pode ser feita, por exemplo, através da medição e divisão de dois lados consecutivos do retângulo, em quatro e cinco partes, como mostra a figura abaixo, e em seguida pintar as partes que correspondem a três quartos de quatro quintos, levando em consideração a ideia de parte-todo.

Figura 17: Representações geométricas de frações 2



Fonte: Silva e Almouloud (2008, p. 69).

Silva e Almouloud (2008) afirmam que a atividade com o uso dos retângulos divididos em partes iguais mostra-se propícia tanto para o estudo de simplificação de frações - quando os alunos são levados a perceber (através de representações com essas figuras) que, apesar de serem frações distintas, $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$, por exemplo, são equivalentes - quanto para a compreensão da regra operatória para a multiplicação de frações.

Muitos fazem a abordagem do conceito de multiplicação como sendo uma soma repetida do multiplicando. Em $4 \times y = y + y + y + y$, por exemplo, repetimos a soma do multiplicando y - seja ele um número natural, inteiro, fracionário etc. - tantas vezes quanto indicar o multiplicador, como ilustrado anteriormente.

Segundo Botta (1997), essa definição de multiplicação, através de adições repetidas, apesar de haver uma relação entre multiplicação e adição, é uma noção limitada se for a única utilizada, pois em situações como as do exemplo anterior é fácil de compreender, pois o multiplicando é um número inteiro. No entanto, quando partimos para casos semelhantes a $0{,}4 \times 7$, $\frac{1}{4} \times 8$ e $0{,}5 \times 0{,}4$, por exemplo, torna-se difícil de enxergar o mesmo raciocínio. Sendo assim, Botta sugere que, primeiramente, o professor desperte no aluno a compreensão da relação que há entre a ideia de área e a operação de multiplicação para números inteiros. Ela afirma que se essa ideia for compreensível para os discentes, torna-se mais fácil - utilizando o modelo de área, através de formas geométricas - fazer com que eles compreendam a ideia de multiplicação de frações.

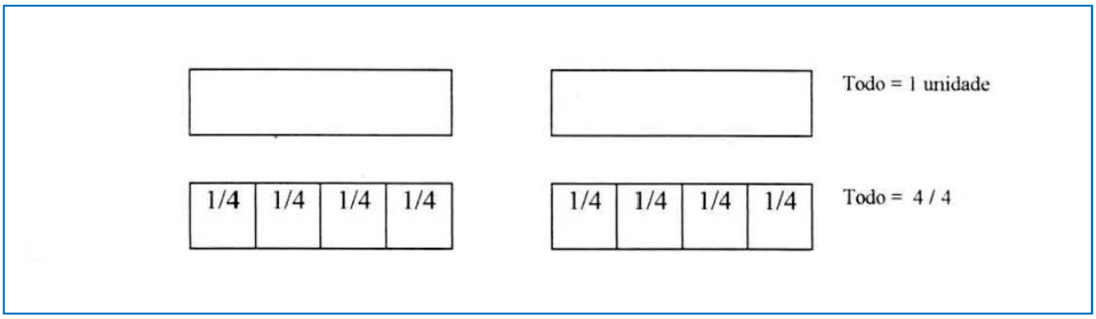
“Uma observação que vale ser lembrada é que, em matemática, o sinal × da multiplicação é associado à palavra *de*: ‘o dobro de’ significa 2×; o ‘triplo de’ significa 3×; e, no nosso caso, $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$ significa $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ de uma figura”. (BOTTA, 1997, p. 34). Continuando, ela afirma que, dessa forma, as crianças conseguem perceber com mais nitidez, que a multiplicação nem sempre faz aumentar, pois uma quantidade qualquer multiplicada por um número menor que um, resulta em uma quantidade menor que o número multiplicado.

Quando falam sobre divisão de números fracionários, Silva e Almouloud (2008) dizem que se trata, com certeza, desde o estudo com os números naturais, da operação que mais implica em dificuldades de compreensão, mas acreditam "ser possível dar algum significado para a operação de divisão com números fracionários, a partir da mobilização de conhecimentos anteriores, com uma ideia de 'quantos cabem', e de algumas propriedades já conhecidas para os números naturais". (SILVA; ALMOULOUD, 2008, p. 70-71).

Botta (1997) afirma que uma ideia construída nos primeiros anos do Ensino Fundamental, é a de que não se pode dividir por um número maior que o dividendo. Ela diz que isso não é verdade quando se trabalha no conjunto dos números racionais, e que um grande passo para que os estudantes compreendam a ideia de divisão com o dividendo menor que o divisor, é compreender o número expresso por $\frac{a}{b}$, com b diferente de zero, como solução para $a \div b$, com $a < b$, e $b \neq 0$, tornando a divisão sempre possível.

Para facilitar a aprendizagem de divisão de frações, Botta (1997) sugere a utilização de desenhos. Afirma que na situação de $2 \div 0{,}25$, por exemplo, pode ser utilizado o problema: *quantas vezes vinte e cinco centésimos de um todo cabem em duas unidades?* Ou *quantas vezes* $\frac{1}{4}$ *da unidade cabe em 2 unidades?*

Figura 18: Ilustração geométrica de divisão por fração

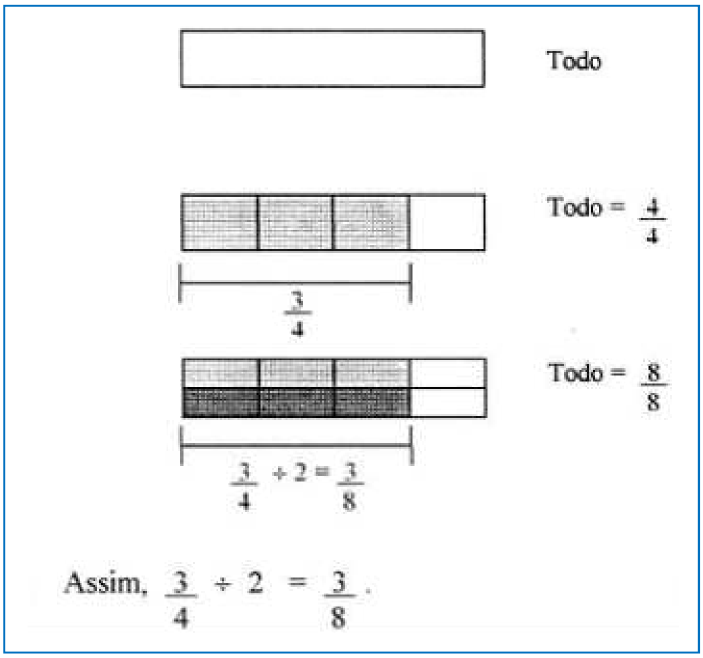


Fonte: Botta (1997, p. 38).

Ela afirma que com ilustrações como a da Figura 18, fica claro que $\frac{1}{4}$ de uma unidade cabe 8 vezes em 2 unidades e, relacionando essa ideia à divisão, é mais fácil de perceber o motivo pelo qual $2 \div \frac{1}{4} = 8$.

Botta (1997) também indica a utilização de ilustrações para a representação de divisões cujos dividendos são números fracionários. Para deixar mais compreensível a divisão $\frac{3}{4} \div 2$, por exemplo, ela sugere que seja utilizada a pergunta *quantas vezes 2 cabe em* $\frac{3}{4}$, e uma ilustração tal qual a Figura 19, para representar a situação.

Figura 19: Ilustração geométrica de divisão de fração



Fonte: Botta (1997, p. 38).

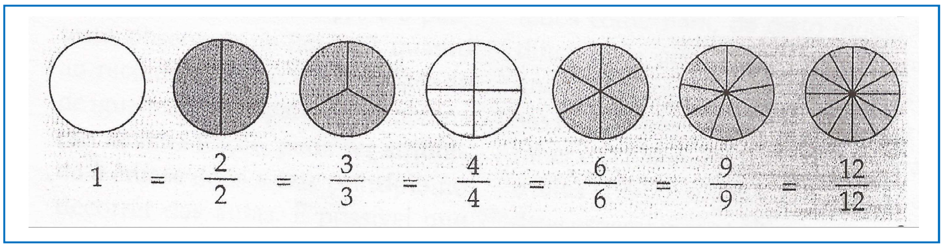
Silva et al (2008) elaboraram um artigo com uma proposta que teve como objetivo verificar se o ensino pelo qual 108 alunos de 6º ano - de três escolas públicas estaduais - haviam passado anteriormente, lhes permitiram perceber que o número decimal, a fração ordinária e a porcentagem são formas distintas de representar os mesmos números, e propor uma metodologia de ensino diferente, na qual essas ideias fossem trabalhadas de forma articulada.

Através de círculos, como os representados pela Figura 18, e de caroços de feijão, Silva et al (2008) trabalharam a ideia parte-todo e equivalência de frações, de forma a desenvolver a compreensão de que a representação fracionária também pode representar números inteiros.

Os caroços de feijão foram distribuídos em porções equivalentes sobre as partes dos círculos, o que permitiu trabalhar com quantidades discretas.

Para trabalhar equivalência de frações com uso de discos, tais quais os ilustrados pela Figura 20, realizou-se sobreposições de frações sobre o inteiro e de frações sobre frações, e posteriormente representou-se a equivalência no quadro de giz.

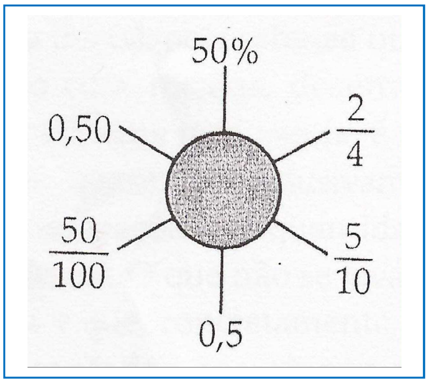
Figura 20: Representações de um todo



Fonte: Silva et al (2008, p. 18).

Silva et al (2008) afirmam que uma ilustração, tal qual a da Figura 21, foi desenhada no quadro e discutiu-se que a fração ordinária, a notação decimal e a percentual são formas distintas de escrever o mesmo número. Essa autora também afirma que "à medida que as equivalências foram trabalhadas, os alunos identificavam facilmente as representações simbólicas que poderiam utilizar, tais como: $\frac{4}{5} = \frac{8}{10} = 0{,}8 = \frac{80}{100} = 0{,}80 = 80\%; 1 = \frac{4}{4} = \frac{5}{5} = \frac{10}{10} = \frac{100}{100} = 100\%$". (SILVA et al, 2008, p. 19).

Figura 21: Múltiplas representações para um mesmo número



Fonte: Silva et al (2008, p. 19), adaptada.

Segundo Silva et al (2008, p. 23), as ideias de fração ordinária, porcentagem e número decimal, trabalhadas de forma simultânea, tornam-se mais dinâmicas, "à medida que se pode propor a ida e volta destas representações em problemas, escolhendo-se de acordo com a situação, a representação que torne mais simples sua resolução". Além disso, eles dizem que à medida que se aprofunda com o estudo das operações, um trabalho como esse permite ao aluno superar dificuldades ou desenvolver uma maior compreensão, e que

> "é possível que haja uma melhor compreensão, por parte de alunos de 5ª série, do número decimal, desde que sejam adequados os materiais e as atividades

> desenvolvidas em sala de aula. Deve-se permitir o resgate de compreensões extra-escolares, como a da porcentagem, e a conscientização de conhecimentos anteriores". (SILVA et al, 2008, p. 23).

Silva et al (2008) também ressaltam que, para haver um resultado melhor na integração das três representações, é necessário, além de atividades com jogos, desenvolver um maior número de atividades integradoras com problemas.

Botta (1996) afirma que os alunos poderão valorizar a matemática, se puderem ver esse conteúdo como um todo integrado, e que a habilidade dos estudantes em resolver problemas, raciocinar e usar a matemática para comunicar suas ideias poderá ser desenvolvida somente se, efetivamente, eles forem engajados ativamente nesses processos.

Assim, percebemos que a preocupação dos educadores matemáticos está em promover aprendizagem com compreensão e, dessa forma, é importante que a sala de aula não tenha um foco voltado somente para atividades que proporcionem memorização, sem permitir que haja reflexão e desenvolvimento de compreensão sobre o conteúdo estudado.

Dante (1987) afirma que o argumento 'repetição leva à fixação' pode ser considerado válido, pois realmente o discente passa a conseguir realizar algo que não conseguia, quando executa repetidas vezes um procedimento determinado, mas que o problema é que isso leva a automatização e a mecanização incompreensíveis.

Walle (2009) afirma que o ensino tradicional, padrão educativo ainda predominante, começa com a explicação de qualquer ideia que esteja na página do livro didático, seguida por mostrar as crianças como fazer os exercícios indicados. Ele também diz que "até mesmo com atividades envolvendo materiais ou modelos concretos, o professor tradicional continua guiando os estudantes, dizendo exatamente como usar os materiais de uma maneira bem prescrita". (WALLE, 2009, p. 31).

Dessa forma,

> O enfoque da lição está principalmente em obter respostas. Os estudantes delegam apenas ao professor a responsabilidade de determinar se suas respostas estão corretas. As crianças emergem dessas experiências com uma visão de que a matemática é uma série de regras arbitrárias, transmitidas pelo professor que por sua vez as obteve de alguma forma inteligente. (WALLE, 2009, p. 31).

Onuchic e Allevato (2008) dizem que o trabalho com os números racionais, independentemente da ideia representada pela notação barra-fracionária, precisa ser feito de um modo diferente daquele em que regras de 'como fazer' são privilegiadas.

Autores como Botta (1997), Bezuk & Bieck (1993) e Adams, Garofalo e Sharp (2002), entre outros, afirmam que é importante que sejam desenvolvidas aulas que permitam que os alunos tenham uma aprendizagem com compreensão.

Dessa forma, percebemos que os pesquisadores estão preocupados em proporcionar uma aprendizagem com compreensão, e é importante perceber que nem sempre o ato de memorizar permite compreender o que se faz.

Por outro lado, os materiais concretos, figuras geométricas, entre outras alternativas para o ensino-aprendizagem de frações, só se tornam um diferencial para promover aprendizagem com compreensão, à medida em que o professor sabe como utilizá-los. Lorenzato (2006) diz que é importante que o professor saiba utilizar corretamente os materiais manipuláveis, pois eles não ultrapassam a categoria auxiliares para o ensino, não passam de alternativas metodológicas à disposição do professor e do aluno e, portanto, não substituem o professor.

Além disso, de acordo com Silva et al (2008), é importante que o ensino de frações seja desenvolvido de forma a integrar porcentagem e números decimais, pois permite superar dificuldades de compreensão.

4 A METODOLOGIA DE PESQUISA E O DISCURSO DO SUJEITO COLETIVO

Nesta pesquisa foi utilizada a metodologia qualitativa. Segundo Lankshear e Knobel (2008), a pesquisa qualitativa se diferencia da pesquisa documental e quantitativa, pela dependência de coleta de informações mais detalhadas sobre eventos, processos, programas, questões, atividades etc. Essas autoras também afirmam que "uma razão importante para o desenvolvimento dessa abordagem é que os pesquisadores, com frequência, querem tentar entender o mundo a partir da perspectiva de outras pessoas". (LANKSHEAR; KNOBEL, 2008, p. 66).

A pesquisa qualitativa também não pressupõe amostras grandes destinadas a ser representativas de populações maiores.

Segundo Lankshear e Knobel (2008, p.66),

> Enquanto a pesquisa quantitativa está fortemente interessada na identificação de associações causais, correlativas ou de outros tipos, entre os eventos, processo e conseqüências que ocorrem nas vidas mentais e sociais dos seres humanos; a pesquisa qualitativa está principalmente interessada em como as pessoas experimentam, entendem, interpretam e participam de seus mundos social e cultural.

Assim, a pesquisa qualitativa visa proporcionar uma descrição mais aprofundada dos fatos analisados.

Como afirma Lankshear e Knobel (2008, p. 67),

> A pesquisa qualitativa proporciona descrições ricas e detalhadas (em vez de 'contagens' ou relações estatísticas) de pessoas em ação (por exemplo, um professor, um aluno, um formulador de políticas escolares ou currículos), programas específicos ou práticas sociais. (LANKSHEAR; KNOBEL, 2008, p. 67).

Esta pesquisa, por exemplo, não trata de fazer uma análise com base unicamente na quantidade dos fatos verificados, mas, sim, em analisar o que cada fato (informações contidas em pesquisas e em depoimentos de professores) pode nos revelar sobre o ensino-aprendizagem do conteúdo de frações.

Os depoimentos foram coletados por meio de um questionário. Segundo Marconi e Lakatos (2003), há vantagens na utilização de questionários para a coleta de dados, pois eles atingem um grande número de pessoas simultaneamente; não é necessário treinamento de aplicadores; garantem o anonimato dos entrevistados, permitindo que eles tenham liberdade e segurança maior nas respostas; permitem que as pessoas respondam no momento mais conveniente para elas; e não expõem o entrevistado à influência do pesquisador.

Lefèvre e Lefèvre (2005) afirmam que a resposta de uma pergunta consiste em um discurso ou em um número variado de discursos individuais, e que os discursos individuais constituem uma matéria-prima difícil de ser processada, quando o objetivo é a produção de resultados coletivos.

Assim, eles afirmam que para obter descrições de pensamentos, crenças e valores em escala coletiva,

> [...] é preciso fazer perguntas abertas para um conjunto de indivíduos de alguma forma representativos dessa coletividade, e deixar que esses indivíduos se expressem mais ou menos livremente, ou seja, que produzam discursos. Ou seja, para se saber o que uma pessoa ou um conjunto de pessoas pensam, é preciso perguntar de modo a ensejar que as pessoas expressem um pensamento, ou seja, um discurso, o que só pode ser feito através de questões abertas. A questão fechada não enseja a expressão de um pensamento, mas a expressão de uma adesão (forçada) a um pensamento preexistente. (LEFÈVRE; LEFÈVRE, 2005, p. 15).

Existem questionários fechados, que são aqueles cuja característica é apresentar, para cada pergunta, algumas respostas predefinidas, ficando a cargo do informante escolher uma ou mais opções, dependendo do que a pergunta pede; e questionários abertos, que se caracterizam por conter perguntas que permitem que os informantes se expressem livremente. Nós utilizamos um questionário aberto composto por 10 perguntas sobre o ensino-aprendizagem dos números fracionários.

Desse modo, dependendo da forma como um questionário é elaborado, pode haver a limitação e, inclusive, uma indução das respostas dos indivíduos. Quando são fixadas algumas respostas como alternativas a serem escolhidas, por exemplo, há uma tendência subjetiva dos resultados da coleta de dados, por parte do elaborador das questões, pois o colaborador escolhe uma das alternativas pré-definidas, mas poderia haver respostas muito diferentes das respostas pré-elaboradas.

Para evitar respostas tendenciosas, Lefèvre e Lefèvre (2005) afirmam que uma opinião, para ser obtida validamente mediante uma pesquisa sobre opiniões de sujeitos que vivem em sociedade, requer sempre, em qualquer circunstância, que esses sujeitos, estimulados por uma pergunta aberta, se expressem livremente sobre o tema que se quer pesquisar. Dessa forma,

> toda opinião que implicar enquadramento do indivíduo em categorias de resposta pré-definidas, mesmo que as categorias tenham sido originalmente obtidas por métodos qualitativos ou indutivos, não é uma opinião genuína, uma vez que não é um depoimento discursivo e viola a natureza discursiva da opinião. (LEFÈVRE; LEFÈVRE, 2005, p. 15).

Nós utilizamos o Discurso do Sujeito Coletivo (DSC) como suporte para a análise dos dados coletados por meio do questionário. O DSC é um recurso metodológico que permite, através de procedimentos padronizados e sistemáticos, mesclar depoimentos de um conjunto de indivíduos, de forma que as expressões deles se agreguem e representem o discurso de uma coletividade.

Lefèvre e Lefèvre (2005, p. 24) afirmam que o DSC é uma

> forma não-matemática nem metalingüística de representar (e de produzir), de modo rigoroso, o pensamento de uma coletividade, o que se faz mediante uma série de operações sobre os depoimentos, que culmina em discursos-síntese que reúnem respostas de diferentes indivíduos, com conteúdos discursivos de sentido semelhante.

As respostas de questões analisadas de acordo com o DSC são categorizadas conforme os posicionamentos dos indivíduos. Quando há um questionário com 5 questões, por exemplo, analisa-se primeiramente todas as respostas da pergunta 1, em seguida as respostas da pergunta 2, e assim sucessivamente, fazendo agrupamentos de respostas que contenham ideias iguais ou semelhantes. Lefèvre e Lefèvre (2005) dizem que depois que a pergunta aberta é elaborada, é preciso juntar os discursos individuais gerados por ela, de modo que eles expressem o pensamento de uma coletividade. Dessa forma, o Discurso do Sujeito Coletivo inclui uma proposta de organização e tabulação de dados de natureza verbal obtidos de depoimentos, matérias de revistas, artigos de jornal, cartas, questionários etc.

Lefèvre e Lefèvre (2005) também afirmam que o pensamento coletivo, como soma qualitativa que é, pode ser quantificada, na medida em que a união dos elementos que o compõem, que são as Expressões Chave (ECHs) de respostas semelhantes de indivíduos distintos, é produto de uma quantidade determinada de semelhantes, reunida para compor um discurso.

Para a realização da organização e tabulação dos dados, de acordo com o DSC, utiliza-se as Ideias Centrais (ICs) e as Ancoragens (ACs), que equivalem a categorias e têm a função de identificar, nomear e distinguir posicionamentos.

A Ideia Central é uma expressão linguística que revela e descreve, da maneira mais sintética, precisa e fidedigna possível, o significado de cada um dos discursos analisados. Ela tem a função de individualizar um dado discurso, descrevendo os seus significados e permitindo fazer a distinção de discursos diferentes. Lefrèvre e Lefrèvre (2005) ressaltam que a IC não é uma interpretação, mas uma descrição do significado de um depoimento ou de um conjunto de depoimentos, e que ela pode ser destacada através de descrições diretas do sentido do depoimento, revelando o que foi dito, ou por meio de descrições indiretas, que revelam o tema do depoimento do sujeito enunciador. Dessa forma, a IC tem uma função identificadora, especificadora. Além disso, em um mesmo discurso pode haver mais de uma Ideia Central.

As Expressões Chave (ECHs) são pedaços, trechos ou transcrições literais do discurso que devem ser destacadas - sublinhadas, coloridas etc - pelo pesquisador, de maneira que revelem a essência do depoimento, seja ele proferido oralmente ou escrito. É com a matéria prima da Expressão Chave, que se constrói o Discurso do Sujeito Coletivo.

Para explicar a ideia de Ancoragem (AC), Lefèvre e Lefèvre (2005) afirmam que algumas ECHs não remetem a uma IC correspondente, mas a uma figura metodológica que, sob a inspiração da teoria da representação social, denomina-se Ancoragem, que é a manifestação explícita de uma teoria, ideologia ou crença que o autor do discurso professa e que, na qualidade de afirmação abrangente, é utilizada pelo enunciador para enquadrar uma situação específica.

A diferença entre a Ancoragem e a Ideia Central, de forma mais direta, é que a mesma Expressão-Chave remete tanto ao seu sentido mais direto, representado pela Ideia Central, quanto a uma ideia mais geral, representada pela Ancoragem.

Assim, resumidamente, de acordo com Lefèvre e Lefèvre (2005), o Discurso do Sujeito Coletivo é uma forma padronizada de organizar discursos, consistindo em selecionar de cada resposta uma Expressão-Chave (EC) - transcrições literais do discurso - na qual são desconsideradas as expressões insignificantes, como cacoetes, por exemplo. Das Expressões-Chave destaca-se – sublinhando, colorindo etc. - as Ideias Centrais (IC) que, como o próprio nome sugere, remetem à ideia principal contida nos discursos. Nas Expressões Chave também pode haver Ancoragem (AC), que é a manifestação linguística explícita de uma teoria, ideologia, crença ou uma ideia mais abrangente proferida pelo autor do discurso. Nem sempre haverá a ocorrência ancoragens, mas poderá surgir mais de uma ideia central em um mesmo discurso. Assim, o DSC é a reunião, em um só discurso, de discursos que contenham a mesma IC ou AC.

Lefèvre e Lefèvre (2005) afirmam que é necessário seguir alguns passos para realizar a tabulação dos dados:

1º - As questões devem ser analisadas separadamente. Assim, analisa-se a pergunta 1 de todos os sujeitos que responderam o questionário, por exemplo, e, em seguida, a pergunta 2, e assim sucessivamente;

2º - Identificar em cada resposta as ideias centrais e, quando houver, as ancoragens das expressões-chave;

3º - Transcrever as ideias centrais e as ancoragens das expressões-chave para as respectivas colunas, conforme o exemplo abaixo;

Expressões-Chave	**Ideias Centrais**	**Ancoragens**
Conteúdo da pergunta 01	**---**	**---**

4º - Identificar e agrupar as ideias centrais e as ancoragens com sentido igual, equivalente ou complementar, etiquetando com letras cada agrupamento;

5º - Denominar - 'etiquetar' - por A, B, C etc., cada um dos agrupamentos, criando uma ancoragem ou ideia central que expresse, da melhor forma possível, todas as ideias centrais e ancoragens de mesmo sentido ou semelhante;

6º - Construir o DSC, utilizando o Instrumento de Análise de Discurso 2 (IAD 2), conforme ilustrado a seguir. Devem ser utilizados tantos IADs 2 quantos forem os agrupamentos. Assim, cada grupamento resultará em um IAD 2.

Os IADs são quadros nos quais são dispostas as respostas dos professores. Eles facilitam a organização dos dados.

IAD 2

Grupamento A

Expressões-Chave	**DSC**
---	**---**

Em seguida, prossegue-se com a construção do DSC de cada grupamento, colocando as expressões-chave em sequência.

A apresentação dos resultados pode ser realizada da forma que o pesquisador considerar melhor. Para a apresentação dos resultados deste trabalho, seguimos a sugestão de Lefèvre e Lefèvre (2005), que consiste em apresentar um quadro síntese com as ideias centrais, expressões-chave e ancoragens, conforme ilustrado nos dois quadros anteriores.

5 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Nesta seção nós apresentamos os Instrumentos de Análise dos Discursos - IAD 1 e IAD 2 – das perguntas 1, 2, 4, 7 e 8 do questionário. Esses instrumentos permitem organizar os discursos de forma que eles se tornem um único discurso.

As perguntas 3, 6 e 10 geraram respostas muito distintas, e isso resultaria em uma grande quantidade de grupamentos e, inclusive, de respostas isoladas, o que inviabilizaria a função principal do DSC – o agrupamento, a organização dos discursos dos professores. Então, nesses casos, resolvemos não fazer grupamentos, mas somente comentários.

As respostas das perguntas 5 e 9 são mais diretas e quantificáveis, assim, também não fizemos grupamentos delas, mas, sim, uma análise com base na quantidade de respostas iguais ou semelhantes.

Nós planejamos fazer a coleta de dados através de questionários e entrevistas, para nos adaptar às disponibilidades dos professores.

Os questionários foram respondidos por professores de alguns municípios do Cariri Paraibano - Sumé, Serra Branca e Monteiro - e por alguns professores mestrandos do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática (PPGECEM), do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba, Câmpus I, dos quais nós não coletamos informações sobre a região nas quais eles atuam como docentes.

Um total de 25 professores de Ensino Fundamental colaborou. Desses, 24 responderam o questionário e 1 professora, identificada por P25, foi entrevistada. A professora entrevistada respondeu às mesmas perguntas contidas no questionário. Ela não se mostrou interessada em responder o questionário, mas aceitou ser entrevistada.

O questionário facilitou a coleta de dados, pois a maioria dos professores expressou que não tinha tempo para responder de imediato. Assim, em muitos casos, deixávamos os questionários com eles e marcávamos um tempo para pegarmos depois.

Para não revelarmos a identidade dos professores, nós os identificamos por P01, P02, P03, P04, P05, P06, P07, ..., P23, P24 e P25.

Pergunta 1: Na sua época de aluno, como era o ensino de frações na sala de aula?

INSTRUMENTO DE ANÁLISE DE DISCURSO – IAD 1

Expressões - Chave	Ideias Centrais
P01: Faz muito tempo, mas recordo que, referente às operações com frações, não havia justificativas sobre a necessidade de utilizar o Mínimo Múltiplo Comum de denominadores, ao se efetuar adição ou subtração de frações com denominadores diferentes. Além disso, não havia justificativas sobre o algoritmo da multiplicação e da divisão de frações.	Não havia justificativas sobre os procedimentos realizados. A
P02: Na minha época como aluno da Educação Básica o estudo sobre frações era bem simplificado, pois não havia disponibilidade de livro didático. Era um estudo sem muita criatividade, mas eficaz quanto ao aprendizado.	O ensino não permitia a exploração da criatividade, mas os alunos aprendiam. D
P03: Era muito mecânico e não oferecia incentivos à interpretação. Só víamos, na maioria das vezes, figuras planas divididas representando frações.	O ensino não incentivava a interpretação dos procedimentos matemáticos. A
P04: Era de forma rápida e não concreta, não permitindo que a ideia de fração fosse fixada.	O ensino era de forma rápida. Não permitia que os alunos aprendessem. A
P05: Nas aulas, eram apresentados objetos ou figuras para ilustrar frações como parte de um todo.	Utilizava-se figuras para explicar a ideia parte-todo. C
P06: Na época em que eu era aluno o ensino de frações era iniciado com uma abordagem	Utilizava-se objetos para explicar a ideia de fração.

sobre numeradores e denominadores, e também eram utilizados materiais concretos divididos para explicar a ideia de números fracionários.	C
P07: Não havia tantos materiais e pesquisas para apoiar o ensino. As aulas eram muito cansativas e não permitiam compreender o que é numerador, denominador e a ideia de comparar frações.	As aulas não favoreciam a compreensão do conteúdo de frações, pois não havia tantos materiais e pesquisas para auxiliar o ensino. A
P08: O professor desenvolvia aulas expositivas e sem contextualização. Ele costumava passar exercícios como, por exemplo, calcule $\frac{3}{4}+\frac{2}{3}$; $\frac{2}{5}+\frac{1}{5}$.	As aulas eram expositivas e sem contextualização. A
P09: O conteúdo era bem explicado. O professor passava muitos exercícios e os alunos gostavam de estudar.	O professor explicava bem o conteúdo e aplicava muitos exercícios. D
P10: Dava-se ênfase aos procedimentos aritméticos e algébricos para resolver os exercícios. No caso da adição $\frac{3}{4}+\frac{2}{3}$, por exemplo, tirávamos o mínimo múltiplo comum de 4 e 3 como parte do procedimento para encontrarmos a solução.	O ensino era caracterizado pela transmissão de procedimentos aritméticos e algébricos. A
P11: O professor repassava para o aluno o que estava no livro didático.	O conteúdo era ensinado de acordo como estava no livro. B
P12: O ensino era muito tradicional. As frações eram representadas através de figuras, e não havia contextualização para o ensino das operações com tais números.	Utilizava-se figuras e o método tradicional de ensino. Não havia contextualização para o ensino das operações com frações. A
P13: As frações eram pouco abordadas. Quando muito era feito, explorava-se ilustrações (figuras) de divisões de pizzas em fatias, e posteriormente eram mostradas as	Utilizava-se figuras para explicar a ideia de números fracionários, mas o ensino era expositivo.

frações que representavam cada parte.	A
P14: O professor não repensava a didática dele. Ele dava ênfase aos procedimentos que devem ser realizados nas operações de adição, subtração, multiplicação e divisão com denominadores iguais ou diferentes.	O professor dava ênfase aos procedimentos que devem ser realizados nas operações com frações. A
P15: O professor utilizava desenhos de pizzas para representar frações, e em seguida as escrevia de acordo com a quantidade de fatias. Essa era a abordagem utilizada pelos livros didáticos.	O professor ministrava aula de acordo com o que encontrava no livro didático. B
P16: Quase do mesmo jeito de hoje, pois era dada ênfase a como representá-las e lê-las, e aos tipos de frações e operações.	O professor dava ênfase em apresentar os tipos de frações, e a forma como representá-las, lê-las e realizar operações. A
P17: As aulas eram expositivas. O professor dava vários exemplos dos conteúdos abordados: frações equivalentes, adição, subtração, multiplicação e divisão, por exemplo.	O professor procurava expor a ideia de frações equivalentes e o modo como se realiza as operações com números fracionários. A
P18: Não era muito diferente de hoje. O professor utilizava o quadro negro e aulas expositivas.	As aulas eram expositivas. A
P19: O ensino era muito próximo ao que é hoje. A abordagem do professor era basicamente expositiva.	As aulas eram expositivas. A
P20: Na minha época de aluno o ensino era baseado somente em mostrar os tipos de frações e as operações de adição, subtração multiplicação e divisão. Não havia livros para os alunos. Os exercícios eram apenas os que o professor mostrava em sala de aula, em pequena quantidade.	As aulas eram expositivas. A

P21: O conteúdo de fração era repassado de forma direta. Era apresentada a ideia que frações eram 2 números, ou seja, um número sobre o outro, o qual tínhamos muita dificuldade em utilizá-la no dia a dia.	O conteúdo era repassado de forma direta. A
P22: Eram utilizados quadro e giz para fazer figuras para representar frações.	Utilizava-se figuras para explicar a ideia de fração. C
P23: Os professores utilizavam desenhos de pizzas para ensinar frações.	Utilizava-se figuras para explicar a ideia de fração. C
P24: O ensino era baseado na resolução de exercícios, sem ter um foco principal voltado para o cotidiano.	O ensino tinha como base a resolução de exercícios. Não havia contextualização do conteúdo. A
P25: Os professores utilizavam quadro e livro. Não havia uma contextualização com o dia a dia do aluno.	O professor ministrava aula de acordo com o que encontrava no livro didático. B

Grupamentos

A - O ensino era baseado apenas em exposições de conteúdos.

B - O professor ministrava aula baseado no livro didático.

C - Utilizava-se figuras ou objetos para explicar a ideia de fração.

D - O conteúdo era bem explicado.

INSTRUMENTO DE ANÁLISE DE DISCURSO – IAD 2

Grupamento A – O ensino era baseado apenas em exposições de conteúdos.

Expressões-Chave	DSC
P01: Não havia justificativas sobre a necessidade de utilizar o Mínimo Múltiplo Comum de denominadores; não havia justificativas sobre o algoritmo da multiplicação e da divisão de frações. P03: Era muito mecânico e não oferecia incentivos à interpretação. P04: Era de forma rápida e não concreta, não permitindo que a ideia de fração fosse fixada. P07: As aulas eram muito cansativas e não permitiam compreender o que é numerador, denominador e comparação de frações. P08: O professor desenvolvia aulas expositivas e sem contextualização. Ele costumava passar exercícios como, por exemplo, calcule $\frac{3}{4}+\frac{2}{3}$; $\frac{2}{5}+\frac{1}{5}$. P10: Dava-se ênfase aos procedimentos aritméticos e algébricos. P12: O ensino era muito tradicional. As frações eram representadas através de figuras e não havia contextualização para o ensino das operações com tais números. P13: explorava-se a ilustração (figuras) de divisões de pizzas em fatias, e posteriormente eram mostradas as frações que representavam cada parte. P14: O professor dava ênfase aos procedimentos que devem ser realizados nas operações de adição, subtração, multiplicação e divisão com denominadores iguais ou diferentes. P16: Era dada ênfase a como representá-las e	As aulas seguiam o roteiro tradicional. Eram expositivas, à base de quadro negro, sem contextualização e cansativas. Os professores utilizavam figuras para representar frações e não costumavam justificar os procedimentos utilizados para a realização das operações com frações, nem o motivo pelo qual era utilizado o mínimo múltiplo comum. Dava-se ênfase aos procedimentos aritméticos e algébricos. Eles costumavam apresentar exercícios para que, de forma mecânica, repetitiva, os alunos memorizassem os processos realizados, não favorecendo a compreensão do conteúdo estudado.

lê-las, e aos tipos de frações e operações. P17: As aulas eram expositivas. O professor dava vários exemplos dos conteúdos abordados. P18: O professor utilizava o quadro negro e aulas expositivas. P19: A abordagem do professor era basicamente expositiva. P20: O ensino era baseado somente em mostar os tipos de frações e as operações de adição, subtração multiplicação e divisão. P21: O conteúdo de fração era repassado de forma direta. Era apresentada a ideia que frações eram 2 números, ou seja, um número sobre o outro. P24: O ensino era baseado na resolução de atividades, sem ter um foco principal voltado para o cotidiano.	

Grupamento B – O professor ministrava aula baseado no livro didático.

Expressões-Chave	**DSC**
P11**:** O professor repassava para o aluno o que estava no livro didático. P15: utilizava desenhos de pizzas para representar frações, e em seguida as escrevia de acordo com a quantidade de fatias. Essa era a abordagem utilizada pelos livros didáticos. P25: Os professores utilizavam quadro e livro.	O professor costumava ministrar aulas com base no livro didático.

Grupamento C – Utilizava-se figuras ou objetos para explicar a ideia de fração.

Expressões-Chave	DSC
P05: Eram apresentados objetos ou figuras para ilustrar frações como parte de um todo. P06: eram utilizados materiais concretos divididos para explicar a ideia de números fracionários. P22: Eram utilizados quadro e giz para fazer figuras para representar frações. P23: Os professores utilizavam desenhos de pizzas para ensinar frações.	O professor fazia uso de materiais concretos ou ilustrações de figuras, para explicar a ideia de fração. Utilizava-se quadro e giz para fazer as figuras.

Grupamento D – O conteúdo era bem explicado.

Expressões-Chave	DSC
P09: O conteúdo era bem explicado. O professor passava muitos exercícios e os alunos gostavam de estudar.	O professor fazia uma boa explicação do conteúdo e os alunos gostavam de estudar.

Pergunta 2: E atualmente, como é o ensino de frações na escola? Cite exemplos.

INSTRUMENTO DE ANÁLISE DE DISCURSO – IAD 1

Expressões – Chave	Ideias Centrais
P01: Na introdução sobre o ensino de fração, aborda-se a ideia de parte de um todo, comparação e quociente; quanto à divisão, devemos observar que é uma operação que	Costuma-se fazer uma abordagem sobre a ideia parte-todo, comparação e quociente; com relação à divisão, observa-se o respectivo algoritmo.

consiste em multiplicar a primeira fração (dividendo) pelo inverso da segunda (divisor); também consideramos a necessidade de relacionar frações com porcentagem.	C
P02: Hoje há a disponibilidade de muitos recursos metodológicos para o ensino de fração. Existem materiais que auxiliam bastante o ensino desses números, mas a escola não nos oferece tais recursos.	Hoje existem diversos materiais didáticos para o ensino de frações, mas a escola não os disponibilizam. A
P03: Hoje em dia o uso de tecnologias educacionais favoreceram um ensino diferenciado para aprender fração.	A utilização de tecnologias permite um ensino diferenciado de frações. A
P04: O profissional comprometido procura explorar as frações de forma mais concreta, possibilitando que o aluno tenha uma melhor compreensão sobre esse conteúdo. Exemplo: usando dobraduras em folha de papel.	O professor que se compromete com seu trabalho, se preocupa em fazer com que seus alunos compreendam o conteúdo abordado. A
P05: Continua da mesma forma.	Utiliza-se figuras para explicar a ideia de números fracionários. C
P06: Eu tento ensinar de forma que os alunos compreendam o conteúdo, dando exemplos tanto na teoria quanto na prática.	O professor procura ensinar a teoria, mas também alia o conteúdo à prática. B
P07: Hoje em dia nós fazemos uso de	Hoje em dia há a utilização de materiais

materiais manipuláveis e de jogos.	manipuláveis e de jogos. A
P08: Eu sempre procuro contextualizar o conteúdo. Ao trabalhar com divisão de frações, elaboro situações que remeta ao dia a dia do aluno, como, por exemplo, a divisão de uma pizza entre amigos.	O professor procura ensinar de forma contextualizada. B
P09: Hoje se costuma fazer uma abordagem envolvendo o cotidiano dos alunos, e *utilizar jogos e laboratório de matemática para ensinar frações.*	Hoje em dia o conteúdo de fração é contextualizado. B *Utiliza-se laboratório e jogos matemáticos.* A
P10: Embora se utilize alguns materiais para representar frações, ainda é dada ênfase aos procedimentos aritméticos.	É dada ênfase aos procedimentos aritméticos. C
P11: ----	
P12: Apesar de haver alguns avanços proporcionados pela utilização de materiais manipuláveis e da contextualização, o ensino tradicional ainda persiste.	O ensino tradicional permanece. C
P13: O ensino tem melhorado. Hoje em dia costuma-se ensinar frações relacionando-as com os números decimais e com a reta numérica.	O ensino melhorou porque hoje se costuma associar o ensino de frações aos números decimais e a reta numérica. A
P14: "Uma semelhança no dia a dia é como registrar no cartório um terreno de herança dividido em três partes iguais, onde a parte do	

terreno tem 100m de comprimento".	
P15: Um pouco mais contextualizado, pois hoje o ensino de frações é apresentado através de resolução de problemas.	Hoje em dia procura-se contextualizar mais o conteúdo de fração. B
P16: O ensino aborda as mesmas coisas, mas hoje há a utilização de problemas, associando o conteúdo com o dia a dia.	Hoje em dia há a utilização de problemas, associando o conteúdo ao dia a dia. B
P17: As aulas são divididas entre aulas expositivas e práticas, sendo as mesmas trabalhadas através de jogos e raciocínio lógico.	Hoje em dia o professor também faz uso de jogos matemáticos. A
P18: Não é muito diferente de antes. A diferença é que, apesar de pouca, há a utilização de materiais concretos e de *contextualização.*	Hoje em dia, há a utilização de materiais concretos. A Há utilização de contextualização do conteúdo. B
P19: A diferença é que hoje o conteúdo de frações é contextualizado.	A diferença é que hoje o conteúdo de frações é ensinado de forma contextualizada. B
P20: Atualmente o professor repassa as atividades contidas no livro didático e utiliza material concreto.	O professor ministra aulas com base no livro didático e utiliza material concreto. A
P21: Hoje em dia os professores já passam a ideia de que as frações são utilizadas diariamente e existem alguns materiais bem simples que ajuda a melhorar a compreensão e facilita o aprendizado. Exemplo: utilização	Hoje em dia os professores contextualizam e fazem uso de figuras para ensinar frações. B

de pinturas e figuras geométricas.	
P22: <u>Atualmente ainda é bastante usada a forma tradicional (quadro e giz), pois ao meu ver, a maneira tradicional também tem uma relevância à aprendizagem.</u> Também existem outras maneiras. Exemplos: vídeos, material concreto, dobraduras etc.	Existem outras formas de ensinar o conteúdo de fração, mas o método tradicional ainda persiste. C
P23: É importante iniciar a noção de frações sem dar ênfase à simbologia e nomenclaturas como meio, terço, quarto etc. <u>É necessário começar o trabalho utilizando círculos e retângulos de cartolina, e tiras de papel e suas partes.</u>	É necessário utilizar materiais concretos para representar frações, e não dar ênfase, no início, às denominações. A
P24: <u>Agora melhorou muito, pois podemos explorar materiais concretos, explicações diversificadas com o uso de vídeo, pesquisa na internet, revistas e livros. Ex.:</u> <u>Levar frutas, bolas e explorar o conteúdo fração, praticando e tendo uma aprendizagem eficaz.</u>	O ensino melhorou porque podemos explorar materiais concretos, as TICs, livros e revistas. A
P25: <u>Nós utilizamos o livro didático para ensinar a forma como são escritas as frações, e depois utilizamos chocolates, frutas ou desenhos feitos no quadro, dividindo-os para explicar aos alunos a ideia de numerador e denominador.</u> Nós tiramos esses exemplos dos livros didáticos e da internet.	Nós nos baseamos pelo livro didático, mas também utilizamos desenhos, chocolates e frutas para explicar a ideia de numerador e de denominador. A

Grupamentos

A - Hoje em dia, há mais alternativas para o ensino-aprendizagem de frações.

B - O conteúdo de frações é mais contextualizado.

C - É tradicional a forma como é ensinado o conteúdo de frações.

INSTRUMENTO DE ANÁLISE DE DISCURSO – IAD 2

Grupamento A – Hoje em dia há mais alternativas para o ensino-aprendizagem de frações.

Expressões - Chave	DSC
P03: O uso de tecnologias educacionais favoreceram um ensino diferenciado para aprender frações. P04: O profissional comprometido procura explorar o conceito de forma mais concreta, de modo que o aluno tenha uma melhor compreensão sobre a ideia de frações. Exemplo: usando dobraduras em folha de papel. P07: Fazemos uso de materiais manipuláveis e de jogos. *P09: Utiliza-se jogos e laboratório de matemática para ensinar frações.* P13: Costuma-se ensinar frações relacionando-as com os números decimais e com a reta numérica. P17: Aulas expositivas e práticas, sendo as mesmas trabalhadas através de jogos e raciocínio lógico. P18: Não é muito diferente de antes. A	Ainda se utiliza aulas expositivas, mas também se faz uso de jogos matemáticos, de laboratório de matemática e de materiais manipuláveis, como discos, retângulos e tiras de papel, e frutas, chocolates e desenhos, para fazer representações de frações, e relaciona-se os números fracionários com a reta numérica e com os números decimais. O uso de tecnologias educacionais favorece um ensino diferenciado do conteúdo de frações. O professor comprometido com o seu trabalho, procura ensinar de forma não abstrata (utilizando dobraduras, por exemplo), proporcionando mais compreensão aos alunos. Hoje também há a disponibilidade de revistas, livros e da internet, para fazer

diferença é que, apesar de pouca, há a utilização de materiais concretos P20: Repassa as atividades contidas no livro didático e utiliza material concreto. P23: É necessário começar o trabalho utilizando círculos e retângulos de cartolina, e tiras de papel e suas partes. P24: Agora melhorou muito, pois podemos explorar materiais concretos, explicações diversificadas com o uso de vídeo, pesquisa na internet, revistas e livros. Ex.: Levar frutas, bolas e explorar o conteúdo frações, praticando e tendo uma aprendizagem eficaz. P25: Nós utilizamos o livro didático para ensinar a forma como são escritas as frações, e depois utilizamos chocolates, frutas ou desenhos feitos no quadro, dividindo-os para explicar aos alunos a ideia de numerador e denominador.	pesquisas sobre atividades, e de equipamentos de vídeo, para utilizar durante as aulas.

Agrupamento B – O conteúdo de frações é abordado de forma contextualizada.

Expressões - Chave	**DSC**
P06: Eu tento ensinar de forma que os alunos compreendam o conteúdo, dando exemplos tanto na teoria quanto na prática. P08: Ao trabalhar com divisão de frações, elaboro situações que remeta ao dia a dia do aluno, como, por exemplo, a divisão de uma pizza entre amigos.	Hoje em dia, é costume ser feita uma abordagem contextualizada do conteúdo de frações, em sala de aula. Costuma-se utilizar problemas envolvendo situações do dia a dia, como a divisão de uma pizza entre amigos, por exemplo, passando a ideia de que frações é um conteúdo que está relacionado com o

P09: É costume fazer uma abordagem envolvendo o cotidiano dos alunos P15: Um pouco mais contextualizado, pois hoje o ensino de frações é apresentado através de resolução de problemas. P16: Hoje há a utilização de problemas, associando o conteúdo com o dia a dia. P18: A diferença é que, apesar de pouca, há a utilização de contextualização. P19: A diferença é que hoje o conteúdo de frações é contextualizado. P21: Hoje em dia os professores já passam a ideia de que as frações são utilizadas diariamente.	cotidiano das pessoas.

Agrupamento C – É tradicional a forma como é ensinado o conteúdo de frações.

Expressões - Chave	**DSC**
P01: Aborda-se a ideia de parte de um todo, comparação e quociente; quanto à divisão, devemos observar que fazer a divisão por um número, é o mesmo que multiplicar pelo seu inverso; também consideramos a necessidade de relacionar frações com porcentagem. P05: Continua da mesma forma. P10: Ainda é dada ênfase aos procedimentos aritméticos. P12: O ensino tradicional persiste. P22: Atualmente ainda é bastante usado a forma tradicional (quadro e giz), pois a meu ver, a maneira tradicional também tem uma relevância à aprendizagem.	Continua da mesma forma. O ensino tradicional persiste, pois, a meu ver, é uma metodologia que tem grande relevância para a aprendizagem. Ainda é dada ênfase aos procedimentos aritméticos e é feita a abordagem da ideia parte-todo, comparação e quociente e, quanto às operações, devemos observar que se realiza o procedimento da divisão de frações, fazendo a multiplicação do 1º fator pelo inverso do multiplicando. Também consideramos a necessidade de relacionar frações com porcentagem.

Pergunta 4: Qual a importância de se ensinar frações atualmente?

INSTRUMENTO DE ANÁLISE DE DISCURSO – IAD 1

Expressões - Chave	Ideias Centrais
P01: As frações podem permitir mais compreensão em muitas situações do cotidiano.	Permitem mais compreensão do cotidiano. A
P02: É importante porque *permitem destacar a diferença que existe entre os números inteiros e os não inteiros*, além de remeterem a diversas situações do cotidiano.	Permite destacar a diferença existente entre os números inteiros e não inteiros. B Remete a situações do cotidiano. A
P03: O ensino de frações é importante porque é comum o seu uso para expressar situações do cotidiano.	É importante, pois é utilizado para expressar situações do cotidiano. A
P04: Apesar de as representações fracionárias aparecerem pouco no dia a dia, é importante ensinar frações, pois é um conhecimento indispensável para o aprofundamento de outros conteúdos matemáticos, tais quais proporções, equações, dízimas periódicas, entre outras.	É um conteúdo necessário em outros conteúdos matemáticos. B
P05: É importante porque é um conteúdo utilizado no cotidiano.	Porque é utilizado para expressar situações do cotidiano. A
P06: É importante ensinar frações porque ela é um dos conteúdos fundamentais da matemática.	É um conteúdo fundamental da matemática. B
P07: As frações compõem um dos assuntos mais importantes da matemática. A partir do estudo delas, aprende-se a dividir em partes	É um conteúdo importante da matemática. B

iguais.	
P08: A ideia de frações está presente no cotidiano das pessoas. É importante ensinar esse conteúdo, pois ele é indispensável para a formação do cidadão.	É importante porque ela está presente no cotidiano das pessoas. A
P09: Ajuda no desenvolvimento do raciocínio. Está presente no cotidiano.	Ajuda no desenvolvimento do raciocínio e está presente no cotidiano. A
P10: "Em um mundo que só enxerga o inteiro e prega a não divisão, filosoficamente, ensinar frações é muito mais do que (ensinar) matemática".	
P11: "Estabelecer a relação parte todo e fazer".	
P12: "Construir a relação da parte com o todo".	É um conteúdo importante da matemática. B
P13: Ensinar frações é importante, pois está presente em diversas áreas do conhecimento.	É importante porque é um conteúdo que se aplica a várias áreas do conhecimento. B
P14: É importante ensinar frações porque é um raciocínio que está presente em diversas situações do cotidiano.	É importante porque está presente em diversas situações do cotidiano. A
P15: Ela é fundamental nos estudos dos problemas do cotidiano, como, por exemplo, as frações que estão presentes no dia a dia, no peso, quantidade, notas musicais, entre outros.	É fundamental em estudos de problemas do cotidiano. A
P16: Para mostrar que as frações estão presentes no dia a dia, como na cozinha, receita de bolo, no peso, nos preços.	Porque está presente no cotidiano. A
P17: As frações estão relacionadas a diversos conteúdos ligados ao nosso dia a dia, como, por exemplo, probabilidade, porcentagem,	Porque é um conteúdo que se relaciona com diversos conteúdos que se relacionam ao dia a dia.

estatísticas, entre outros que estão ligados de maneira direta aos contextos da atualidade.	A
P18: A importância é que as frações estão presentes no dia a dia, nas receitas, na divisão dos alimentos, nas compras, nas notas musicais, nas notas dos alunos etc.	Porque estão presentes no cotidiano. A
P19: A importância é que as frações, como alguns outros conteúdos, estão muito presentes no nosso dia a dia.	Porque estão muito presentes no cotidiano. A
P20: Atualmente, ensinar frações é importante no uso dos produtos químicos e medicamentos.	Porque é útil para o controle de uso de produtos químicos e medicamentos. A
P21: Há conteúdos que são mais atuantes do que outros, pelo simples fato de estarem mais presentes no dia a dia dos alunos, e frações é um desses, pois o simples fato de se olhar a hora, pode se introduzir os conceitos de frações.	Porque é um conteúdo que está muito presente no cotidiano. A
P22: A relação entre os números é de fundamental importância. Historicamente as frações surgiram devido às necessidades de medidas. Atualmente o ensino-aprendizagem de frações mostra aos nossos alunos as diversas formas de representar uma quantidade.	Porque é mais uma forma de representar quantidade, diante da necessidade de medir, por exemplo. A
P23: *Ampliar o conjunto numérico* e relacionar situações cotidianas.	É um conteúdo importante da matemática. B Está presente no cotidiano.

	A
P24: <u>Cada número tem a sua essência, e frações é muito importante</u>, não só nas séries iniciais, mas em toda a jornada estudantil.	É um conteúdo importante da matemática. B
P25: <u>É importante porque quando os alunos aprendem, eles aprendem a repartir, dividir.</u>	Quando se aprende frações, aprende a dividir. B

Grupamentos

A - É importante ensinar frações porque é um conteúdo que está presente no cotidiano das pessoas.

B - É importante ensinar frações porque é um conteúdo indispensável para outros conteúdos matemáticos e para outras áreas do conhecimento.

INSTRUMENTO DE ANÁLISE DE DISCURSO – IAD 2

Grupamento A – É importante ensinar frações porque é um conteúdo que está presente no cotidiano das pessoas.

Expressões - Chave	**DSC**
P01: <u>As frações podem permitir mais compreensão em muitas situações do cotidiano.</u> P02: <u>Remeterem a diversas situações do cotidiano.</u> P03: <u>Porque é comum o seu uso para expressar situações do cotidiano.</u> P05: <u>Porque é um conteúdo utilizado no cotidiano.</u> P08: <u>A ideia de frações está presente no</u>	É importante ensinar frações porque é um conteúdo que está presente nas notas musicais, na medida, nas receitas, nos preços, na divisão, nas compras, no uso de produtos químicos e remédios, em fim, porque está presente no cotidiano. Dessa forma, é um conteúdo indispensável para a formação do aluno.

cotidiano das pessoas. É importante ensinar esse conteúdo, pois ele é indispensável para a formação do cidadão. P09: Ajuda no desenvolvimento do raciocínio. Está presente no cotidiano. P14: Porque é um raciocínio que está presente em diversas situações do cotidiano. P15: Ela é fundamental nos estudos dos problemas do cotidiano, como, por exemplo, as frações que estão presentes no dia a dia, no peso, quantidade, notas musicais, entre outros. P16: Para mostrar que as frações estão presentes no dia a dia, como na cozinha, receita de bolo, no peso, nos preços. P17: As frações estão relacionadas a diversos conteúdos ligados ao nosso dia a dia, como, por exemplo, probabilidade, porcentagem, estatísticas, entre outros que estão ligados de maneira direta aos contextos da atualidade. P18: A importância é que as frações estão presentes no dia a dia, nas receitas, na divisão dos alimentos, nas compras, nas notas musicais, nas notas dos alunos etc. P19: Estão muito presentes no nosso dia a dia. P20: É importante no uso dos produtos químicos e medicamentos. P21: Há conteúdos que são mais atuantes do que outros, pelo simples fato de estarem mais presentes no dia a dia dos alunos, e frações é um desses. P22: Atualmente o ensino-aprendizagem de	

frações mostra aos nossos alunos as diversas formas de representar uma quantidade. P23: Relacionar situações cotidianas.	

Grupamento B – É importante ensinar frações porque é um conteúdo indispensável para outros conteúdos matemáticos e para outras áreas do conhecimento.

Expressões – Chave	**DSC**
P02: *Permitem destacar a diferença que existe entre os números inteiros e os não inteiros.* P04: É um conhecimento indispensável para o aprofundamento de outros conteúdos matemáticos, tais quais proporção, equações, dízimas periódicas, entre outras. P06: Porque ela é um dos conteúdos fundamentais da matemática. P07: As frações compõem um dos assuntos mais importantes da matemática. P12: Construir a relação da parte com o todo. P13: É importante, pois está presente em diversas áreas do conhecimento. P23: *Ampliar o conjunto numérico.* P24: Cada número tem a sua essência, e frações é muito importante. P25: É importante porque quando os alunos aprendem, eles aprendem a repartir, dividir.	É importante ensinar frações porque ela é um conteúdo fundamental para outros conteúdos matemáticos, tais quais proporções, equações, dízimas periódicas etc., e também para outras áreas do conhecimento. Além disso, é um conteúdo que permite destacar a diferença entre números inteiros e não inteiros, permitindo ampliar a ideia de número, e está presente em diversas áreas do conhecimento.

Pergunta 7: Como você avalia a abordagem do conteúdo de frações nos livros didáticos?

INSTRUMENTO DE ANÁLISE DE DISCURSO – IAD

Expressões - Chave	Ideias Centrais
P01: Nota-se uma abordagem significativa sobre o conteúdo de frações.	Significativa. A
P02: Estão em um nível elevado, quando é considerado o nível de aprendizagem dos alunos, mas, dependendo do ponto de vista, está bom.	Boa. A
P03: Percebo que está evoluindo, permitindo que o aluno questione, analise, critique e, principalmente, desenvolva conceitos.	Permite que o aluno analise, questione, critique, aprenda. A
P04: É relativo. Há alguns livros que exploram muito bem o conteúdo de frações, mas fica a critério do professor fazer ou não fazer diferente do que o livro propõe.	Há livros bons, outros ruins. B
P05: É boa.	Fazem uma boa abordagem. A
P06: Alguns livros deixam a desejar.	Há livros bons e ruins. B
P07: Na maioria dos livros o conteúdo de frações é muito resumido.	A maioria dos livros resume muito o conteúdo de frações. B
P08: Muitos livros dão ênfase à contextualização do conteúdo de frações. Isso mostra que houve avanço na forma como o referido conteúdo é abordado nos livros didáticos.	Muitos livros dão ênfase à contextualização. A
P09: Os livros apresentam mudanças. Abordam mais exercícios e problemas envolvendo o cotidiano.	Eles dão ênfase à contextualização. A

P10: Trazem uma abordagem péssima para os alunos, embora nos livros do professor haja propostas interessantes para o ensino de frações.	No livro do aluno a abordagem não é boa, mas no livro do professor há propostas interessantes para o ensino de frações. C
P11: Contextualizam pouco o conteúdo.	Há pouca contextualização. C
P12: De modo geral, os livros mostram um avanço em relação à abordagem do conteúdo de frações.	Houve uma melhora. A
P13: Alguns livros fazem uma abordagem interessante do conteúdo de frações, mas deixam a desejar, pois não exploram bem as aplicações e demonstrações dos procedimentos realizados.	Alguns livros, apesar de fazerem uma abordagem interessante, não trazem muitas aplicações e explicação dos procedimentos. B
P14: Hoje os livros costumam conciliar a teoria com situações que ocorrem no dia a dia.	Eles dão ênfase à contextualização. A
P15: Razoável, mas acho que deveria ter mais resolução de problemas.	Razoável, mas deveria ter mais resolução de problemas. B
P16: Precisa trazer mais para a realidade do aluno.	Há pouca contextualização. C
P17: As abordagens são feitas de maneira significativa. Basta apenas que o professor utilize a melhor metodologia em sala.	São significativas as abordagens que os livros fazem. A
P18: A abordagem é boa, pois parte sempre de uma situação real.	Eles dão ênfase à contextualização. A
P19: É uma abordagem boa, pois em sua maioria os livros partem de situações do dia a dia.	Eles dão ênfase à contextualização. A
P20: Os livros didáticos fazem uma boa abordagem sobre o conteúdo de frações.	Fazem uma boa abordagem. A
P21: Alguns bons, pois apresentam uma	Alguns são bons, pois exemplificam.

abordagem atualizada e exemplificada, mas há outros de forma direta, sem aquela definição prévia.	B
P22: Os livros didáticos abordam o conteúdo de frações de uma maneira lúdica. Também deveriam enfocar na realidade dos alunos.	Abordam de forma lúdica. B
P23: Existem alguns livros que trazem uma abordagem bastante simplificada. Depende muito do autor.	Depende de cada livro. Alguns contêm uma abordagem simplificada. B
P24: Os livros didáticos ajudam um pouco, mas ainda deixam a desejar. Os exercícios sobre frações e outros conteúdos vêm muito resumidos. O professor precisa pesquisar e fazer outras atividades. Não pode só se deter ao livro didático.	Os livros ajudam, mas deixam a desejar, pois há poucos exercícios. B
P25: Os livros de hoje em dia são melhores, pois eles têm clareza nos objetivos e nos conteúdos. Há livros que basta que o aluno leia, para que compreenda o conteúdo.	Os livros de hoje expõem o conteúdo de forma clara. A

Grupamentos
A - Os livros fazem uma abordagem boa.
B - É relativo. Depende do livro didático.
C - A abordagem dos livros não é boa.

INSTRUMENTO DE ANÁLISE DE DISCURSO – IAD 2

Grupamento A – Os livros fazem uma abordagem boa.

Expressões – Chave	**DSC**
P01: Nota-se uma abordagem significativa sobre o conteúdo de frações.	Os livros estão diferentes. Eles têm uma abordagem que permite compreensão por

P02: Estão em um nível elevado, quando é considerado o nível de aprendizagem dos alunos, mas, dependendo do ponto de vista, está bom. P03: Percebo que está evoluindo, permitindo que o aluno questione, analise, critique e, principalmente, desenvolva conceitos. P05: É boa. P08: Muitos livros dão ênfase à contextualização do conteúdo de frações. Isso mostra que houve avanço. P09: Os livros apresentam mudanças. Abordam mais exercícios e problemas envolvendo o cotidiano. P12: De modo geral, os livros mostram um avanço em relação à abordagem do conteúdo de frações. P14: Hoje os livros costumam conciliar a teoria com situações que ocorrem no dia a dia. P17: As abordagens são feitas de maneira significativa. P18: A abordagem é boa, pois parte sempre de uma situação real. P19: É uma abordagem boa, pois em sua maioria os livros partem de situações do dia a dia. P20: Fazem uma boa abordagem sobre o conteúdo de frações. P25: Os livros de hoje em dia são melhores, pois eles têm clareza nos objetivos e nos conteúdos. Há livros que basta que o aluno leia, para que compreenda o conteúdo.	parte de quem os leem, pois têm clareza nos objetivos e nos conteúdos. Há alguns que basta que o aluno leia, para que compreenda o conteúdo. Assim, de modo geral, eles tiveram uma melhora em relação à abordagem do conteúdo de frações, pois contextualizam, trazem mais exercícios e problemas que envolvem situações do cotidiano, e também permitem que o aluno questione, analise, critique e desenvolva conceitos.

Grupamento B – É relativo. Depende do livro didático.

Expressões – Chave	**DSC**
P04: <u>É relativo. Há alguns livros que exploram muito bem o conteúdo de frações.</u> P06: <u>Alguns livros deixam a desejar.</u> P07: <u>Na maioria dos livros o conteúdo de frações é muito resumido.</u> P13: <u>Alguns livros fazem uma abordagem interessante do conteúdo de frações, mas deixam a desejar, pois não exploram bem as aplicações e demonstrações dos procedimentos realizados.</u> P15: <u>Razoável, mas acho que deveria ter mais resolução de problemas.</u> P21: <u>Alguns bons, pois apresentam uma abordagem atualizada e exemplificada, mas há outros de forma direta, sem aquela definição prévia.</u> P22: <u>Os livros didáticos abordam o conteúdo de frações de uma maneira lúdica.</u> P23: <u>Existem alguns livros que trazem uma abordagem bastante simplificada.</u> P24: <u>Os livros didáticos ajudam um pouco, mas ainda deixa a desejar. Os exercícios sobre frações e outros conteúdos vêm muito resumidos.</u>	É relativo. Há livros que exploram bem o conteúdo de frações, trazendo uma abordagem lúdica, atualizada e exemplificada, mas outros deixam a desejar, pois não exploram as aplicações e demonstrações dos procedimentos realizados. Deveriam ter mais resolução de problemas, mas em muitos livros o conteúdo de frações é muito resumido e simplificado, e expõem uma abordagem direta, sem muitas explicações.

Grupamento C – A abordagem dos livros não é boa.

Expressões – Chave	DSC
P10: Trazem uma abordagem péssima para os alunos, embora nos livros do professor haja propostas interessantes para o ensino de frações. P11: Contextualizam pouco o conteúdo. P16: Precisa trazer mais para a realidade do aluno.	Embora no livro do professor haja propostas interessantes para o ensino de frações, o livro do aluno não é bom, pois não contextualiza. É preciso contextualizar, aliar o conteúdo à realidade do aluno.

Pergunta 8: Que sugestões você daria para a melhoria do ensino de frações nas escolas?

INSTRUMENTO DE ANÁLISE DE DISCURSO – IAD 1

Expressões - Chave	Ideias Centrais
P01: Focar mais nas diferentes ideias que as frações podem apresentar, e na utilização da resolução de problemas que chamem a atenção dos alunos, dando menos ênfase à aplicação de algoritmos e exercícios longos.	Utilizar mais a resolução de problemas e abordar as diferentes ideias que a notação barra-fracionária pode representar, dando menos ênfase a algoritmos e exercícios. C
P02: Fazer uso de materiais concretos e do laboratório de matemática.	Utilizar materiais concretos e laboratório de matemática. A
P03: Utilizar situações problema que possam refletir as experiências vividas pelos alunos e incentivá-los a pensar e criar.	Utilizar situações problema e contextualizar o conteúdo. B
P04: Proporcionar um ensino com a utilização de jogos, dobraduras e atividades em grupo.	Desenvolver atividades em grupo e utilizar jogos e dobraduras. A
P05: Dar ênfase à utilização de exemplos concretos.	Contextualizar o conteúdo. B

P06: *Utilizar materiais concretos* e situações que envolvam práticas do cotidiano do aluno.	Utilizar materiais concretos. A Contextualizar o conteúdo. B
P07: É importante que as escolas disponibilizem materiais diversos para o ensino-aprendizagem de frações, pois na maioria das vezes o professor é quem arca com os gastos dos materiais.	Disponibilização, por parte da escola, de materiais diversificados para o ensino-aprendizagem de frações. A
P08: Dar ênfase a recursos que permitam que os alunos compreendam o que é ensinado, em vez de mostrar passos pré-definidos de como devem ser feitas, por exemplo, as operações com frações. Poderia haver a implantação de laboratórios de matemática.	Dar prioridade à compreensão, em vez de memorização de algoritmos. Implementar laboratórios de matemática. A
P09: É importante planejar aulas de forma que haja a aplicação do conteúdo abordado, tornando-o mais interessante para os alunos.	É importante que haja aplicação do conteúdo estudado. B
P10: Poderia haver várias abordagens para o ensino frações, e que elas fossem inseridas nos livros didáticos.	Poderia haver várias abordagens e inseri-las nos livros didáticos. C
P11: Explorar contextualizações e utilizar materiais concretos no ensino de frações.	Utilizar materiais concretos e contextualizar o conteúdo. A
P12: Utilizar materiais manipuláveis e *resolução de problemas no ensino-aprendizagem.*	Utilizar materiais manipuláveis. A Utilizar resolução de problemas. B
P13: É importante que o professor	Utilizar várias representações e aplicações de

apresente várias formas de representação e várias aplicações dos números fracionários.	frações. B
P14: Conciliar ao cotidiano dos alunos e *destinar mais tempo também em outros anos, além do 6º, para o ensino de frações.*	Contextualizar e destinar mais tempo para estudo. B Também ensinar frações em outros anos, além do 6º ano. D
P15: Trazer situações vivenciadas por músicos, comerciantes, entre outras situações para o ensino em sala de aula.	Contextualizar o conteúdo. B
P16: Utilizar materiais diferentes para trabalhar frações.	Fazer uso de materiais diversos. A
P17: Que os professores utilizem os jogos e as representações geométricas como apoio em suas aulas.	Utilizar jogos e representações geométricas. A
P18: Que seja dada uma maior atenção ao ensino de frações nos anos iniciais, visto que os alunos chegam às séries/anos posteriores com muitas dificuldades de compreender e usar números fracionários.	Ensinar frações desde os anos iniciais. D
P19: *Trabalhar de forma contextualizada nos exercícios e problemas;* usar material concreto para tornar as aulas mais atrativas.	Contextualizar o conteúdo de frações. B Utilizar materiais concretos. A
P20: Mais tempo para ensinar o conteúdo; mais atividades com material concreto.	Utilizar material concreto e destinar mais tempo para estudo. A
P21: Trabalhar frações com situações do	Dar ênfase às definições e contextualizar o

dia a dia dos alunos e, principalmente, dar um foco nas definições.	conteúdo. B
P22: Seria muito importante se fossem disponibilizados materiais didáticos às escolas.	Disponibilização de materiais didáticos. A
P23: A falta de material é um grande problema, pois para trabalhar com vários alunos o custo fica alto para o professor.	Disponibilização de materiais didáticos. A
P24: É preciso que o aluno e o professor tenha coragem de buscar fontes de pesquisas que possam melhorar a aprendizagem, não só do conteúdo de frações, mas no caso de qualquer conteúdo de matemática.	Que professor e aluno busquem alternativas diferentes para aprender frações. C
P25: É importante que seja dada continuidade à realização de aulas práticas, fazendo uso de materiais concretos, pois isso resulta em mais aprendizagem para os alunos.	Continuar com aulas práticas, fazendo uso de materiais concretos, pois isso resulta em mais aprendizagem. A

Grupamentos

A - Utilizar materiais concretos.

B - Contextualizar o conteúdo de frações.

C - Abordar mais o conteúdo de frações.

D - Expandir o ensino de frações.

INSTRUMENTO DE ANÁLISE DE DISCURSO – IAD 2

Grupamento A – Utilizar materiais concretos.

Expressões - Chave	**DSC**
P02: Fazer uso de materiais concretos e do	É importante que as aulas práticas

laboratório de matemática. P04: Proporcionar um ensino com a utilização de jogos, dobraduras e atividades em grupo. P06: *Utilizar materiais concretos.* P07: É importante que as escolas disponibilizem materiais diversos para o ensino-aprendizagem de frações. P08: Dar ênfase a recursos que permitam que os alunos compreendam o que é ensinado, em vez de mostrar passos pré-definidos. P11: Explorar contextualizações e utilizar materiais concretos no ensino de frações. P12: Utilizar materiais manipuláveis. P16: Utilizar materiais diferentes para trabalhar frações. P17: Que os professores utilizem os jogos e as representações geométricas como apoio em suas aulas. P19: Usar material concreto para tornar as aulas mais atrativas. P20: Destinar mais tempo para ensinar o conteúdo; mais atividades com material concreto. P22: Seria muito importante se fossem disponibilizados materiais didáticos às escolas. P23: A falta de material é um grande problema, pois para trabalhar com vários alunos o custo fica alto para o professor. P25: É importante que seja dada continuidade à realização de aulas práticas, fazendo uso de materiais concretos, pois isso	continuem, mas que seja destinado mais tempo para um trabalho com materiais concretos, dando ênfase a recursos que permitam que os alunos compreendam o que é ensinado. Também é importante fazer uso de dobraduras, atividades em grupo, jogos matemáticos, laboratório de matemática, e desenhos geométricos, e que as escolas tenham a disponibilidade de diversos materiais para o ensino-aprendizagem de frações.

resulta em mais aprendizagem para os alunos.	

Grupamento B – Contextualizar o conteúdo de frações.

Expressões – Chave	**DSC**
P03: Utilizar situações problema que possam refletir as experiências vividas pelos alunos e incentivá-los a pensar e criar. P05: Dar ênfase à utilização de exemplos concretos. P06: Utilizar situações que envolvam práticas do cotidiano do aluno. P09: Fazer aplicação do conteúdo abordado, tornando-o mais interessante para os alunos. P12: *Utilizar a resolução de problemas no ensino-aprendizagem.* P13: É importante que o professor apresente várias formas de representação e várias aplicações dos números fracionários. P14: Conciliar o conteúdo de frações ao cotidiano dos alunos. P15: Trazer situações vivenciadas por músicos, comerciantes, entre outras situações para o ensino em sala de aula. P21: Trabalhar frações com situações do dia a dia dos alunos [...] dar um foco nas definições.	É importante que o professor utilize resolução de problemas, faça aplicações e apresente várias formas de representação do conteúdo de frações, trazendo situações vivenciadas por músicos, comerciantes, e do cotidiano dos alunos, para o ensino em sala de aula, mas sem deixar de lado as definições, e procurando incentivar a turma a pensar e criar.

Grupamento C – Deveria abordar mais o conteúdo de frações.

Expressões – Chave	**DSC**
P01: Focar mais nas diferentes ideias que as frações podem apresentar e na utilização da resolução de problemas que chamem a atenção dos alunos, dando menos ênfase à aplicação de algoritmos e exercícios longos. P10: Poderia haver várias abordagens para o ensino frações, e que elas fossem inseridas nos livros didáticos.	Poderia haver várias abordagens para o ensino de frações, utilização de resolução de problemas e mais ênfase às diferentes ideias que esse conteúdo pode apresentar.

Grupamento D – Expandir o ensino de frações.

Expressões – Chave	**DSC**
P14: *Destinar mais tempo também em outros anos, além do 6º ano, para o ensino de frações.* P18: Que seja dada uma maior atenção ao ensino de frações nos anos iniciais, visto que eles chegam às séries/anos posteriores com muitas dificuldades de compreender e usar números fracionários.	É importante abordar o conteúdo de frações por mais tempo e ensiná-lo em outros anos do Ensino Fundamental, além do 6º ano, pois os alunos continuam apresentando dificuldades de compreensão desse conteúdo, em anos posteriores ao que o estudaram.

6 RESULTADOS

Conforme já mencionado, os DSCs estão apresentados segundo a sugestão de Lefèvre e Lefèvre (2005), e seguem a sequência das perguntas que compõem o questionário.

QUADROS SÍNTESE

Pergunta 1: Na sua época de aluno, como era o ensino de frações na sala de aula?

O ensino era baseado apenas em exposições de conteúdos.	O professor ministrava aula baseado no livro didático.	Utilizava-se figuras ou objetos para explicar a ideia de frações.	O conteúdo era bem explicado.

IC – O ensino era baseado apenas em exposições de conteúdos.

DSC As aulas seguiam o roteiro tradicional. Eram expositivas, cansativas, sem contextualização e à base de quadro negro. Os professores utilizavam figuras para representar frações, não costumavam justificar os procedimentos utilizados para a realização das operações com frações, nem o motivo pelo qual era utilizado o mínimo múltiplo comum. Dava-se ênfase aos procedimentos aritméticos e algébricos. Costumava-se apresentar exercícios para que, de forma mecânica, repetitiva, os alunos memorizassem os processos realizados, não favorecendo a compreensão do conteúdo estudado.

IC - O professor ministrava aula baseado no livro didático.

DSC O professor costumava ministrar aulas com base no livro didático e fazendo uso do quadro e giz.

IC - Utilizava-se figuras ou objetos para explicar a ideia de frações.

DSC O professor utilizava materiais concretos ou ilustrações de objetos através de figuras, para explicar a ideia de frações. Utilizava-se quadro e giz para fazer as figuras.

IC - O conteúdo era bem explicado.

DSC O professor fazia uma boa explicação do conteúdo.

Pergunta 2: E atualmente, como é o ensino de frações na escola? Cite exemplos.

Hoje em dia, há mais alternativas para o ensino-aprendizagem de frações.	O conteúdo de frações é abordado de forma mais contextualizada.	É tradicional a forma de se ensinar frações.

IC - Hoje em dia há mais alternativas para o ensino-aprendizagem de frações.

DSC O uso de tecnologias educacionais favorece um ensino diferenciado do conteúdo de frações. O professor comprometido com o seu trabalho, procura ensinar de forma não abstrata (utilizando dobraduras, por exemplo), proporcionando mais compreensão aos alunos. Ainda são realizadas aulas expositivas, mas também se faz uso de jogos matemáticos, de laboratório de matemática e de materiais manipuláveis, como discos, retângulos e tiras de papel, e frutas, chocolates e desenhos, para fazer representações de frações. Também se relaciona os números fracionários com a reta numérica e com os números decimais. Hoje também há a disponibilidade de revistas, de livros e da internet, para fazer pesquisas sobre atividades, e de equipamentos de vídeo para utilizar durante as aulas.

IC - O conteúdo de frações é abordado de forma mais contextualizada.

DSC

Hoje em dia, é costume contextualizar o conteúdo de frações. Costuma-se utilizar problemas envolvendo situações do dia a dia, como a divisão de uma pizza entre amigos, por exemplo, passando a ideia de que frações é um conteúdo que está relacionado ao cotidiano das pessoas.

IC - É tradicional a forma como é ensinado o conteúdo de frações.

DSC Continua da mesma forma. O ensino tradicional persiste, pois, a meu ver, é uma metodologia que tem grande relevância para a aprendizagem. Ainda é dada ênfase aos procedimentos aritméticos e é feita a abordagem da ideia parte-todo, comparação e quociente e, quanto às operações, devemos observar que se procede a divisão de frações, fazendo a multiplicação do 1º fator pelo inverso do multiplicando. Também consideramos a necessidade de relacionar frações com porcentagem.

Pergunta 4: Qual a importância de se ensinar frações atualmente?

É importante ensinar frações porque se trata de um conteúdo que está presente no cotidiano das pessoas.	É importante ensinar frações porque se trata de um conteúdo indispensável para outros conteúdos matemáticos e para outras áreas do conhecimento.

IC - É importante ensinar frações porque se trata de um conteúdo que está presente no cotidiano das pessoas.

DSC É importante ensinar frações porque se trata de um conteúdo que está presente nas notas musicais, nas medidas, nas receitas, nos preços, na divisão, nas compras, no uso de remédios e de produtos químicos, em fim, porque está presente no cotidiano das pessoas. Dessa forma, é um conteúdo indispensável para a formação do aluno.

IC - É importante ensinar frações porque se trata de um conteúdo indispensável para outros conteúdos matemáticos e para outras áreas do conhecimento.

DSC É importante ensinar frações porque se trata de um conteúdo fundamental e importante da matemática, além de ser indispensável em outros conteúdos matemáticos, tais quais proporção, equações, dízimas periódicas etc. Além disso, é um conteúdo que permite destacar a diferença entre números inteiros e não inteiros, permitindo ampliar a ideia de número.

Pergunta 7: Como você avalia a abordagem do conteúdo de frações nos livros didáticos?

Os livros fazem uma abordagem boa.	A abordagem dos livros é razoável.	A abordagem dos livros não é boa.

IC - Os livros fazem uma abordagem boa.

DSC Os livros estão diferentes. Eles fazem uma abordagem que permite compreensão por parte de quem os lê, pois têm clareza nos objetivos e nos conteúdos. Há alguns que basta que o aluno leia, para que compreenda o conteúdo. Assim, de modo geral, eles tiveram uma melhora em relação à abordagem do conteúdo de frações, pois contextualizam, trazem mais exercícios e problemas que envolvem situações do cotidiano, e também permitem que o aluno questione, analise, critique e desenvolva conceitos.

IC - A abordagem dos livros é razoável.

DSC É relativo. Há alguns livros que exploram bem o conteúdo de frações, trazendo uma abordagem atualizada e exemplificada, mas outros deixam a desejar, pois não exploram

aplicações e demonstrações dos procedimentos realizados. Deveriam ter mais resolução de problemas, mas em muitos livros o conteúdo de frações é muito resumido e simplificado, e expõem uma abordagem direta, sem muitas explicações.

IC - A abordagem dos livros não é boa.

DSC Embora no livro do professor haja propostas interessantes para o ensino de frações, o livro do aluno não é bom, pois não contextualiza. É preciso contextualizar, aliar o conteúdo à realidade do aluno.

Pergunta 8: Que sugestões você daria para a melhoria do ensino de frações nas escolas?

Utilizar materiais concretos.	Contextualizar o conteúdo de frações.	Deveria abordar mais o conteúdo de frações.	Expandir o ensino de frações.

IC - Utilizar materiais concretos.

DSC Que as aulas práticas continuem, mas que seja destinado mais tempo para um trabalho com materiais concretos. É importante que o professor dê ênfase a recursos que permitam que os alunos compreendam o que é ensinado, fazer uso de materiais concretos, dobraduras, atividades em grupo, jogos matemáticos, laboratório de matemática e desenhos geométricos representando frações. As escolas também precisam ter em disponibilidade diversos materiais para o ensino-aprendizagem de frações.

IC - Contextualizar o conteúdo de frações.

DSC É importante que o professor utilize resolução de problemas e apresente várias formas de representação e de aplicação dos números fracionários, trazendo situações vivenciadas por músicos, comerciantes, e do cotidiano dos alunos, para o ensino em sala de aula, mas sem

deixar de lado as definições, e procurando incentivar a turma a pensar e criar.

IC - Deveria abordar mais o conteúdo de frações.

DSC Poderia haver várias abordagens para o ensino de frações, utilização de resolução de problemas e ser dada mais ênfase às diferentes ideias que esse conteúdo pode apresentar.

IC - Expandir o ensino de frações.

DSC É importante abordar o conteúdo de frações por mais tempo e ensiná-lo em outros anos do Ensino Fundamental, além do 6º ano, pois os alunos continuam apresentando dificuldades de compreensão desse conteúdo, em anos posteriores ao que o estudaram.

As perguntas do questionário foram analisadas uma a uma, obedecendo a ordem do questionário.

Para facilitar a leitura e compreensão, numeramos cada grupamento das perguntas que tiveram suas respectivas respostas agrupadas.

Através da primeira, segunda e terceira perguntas os professores nos deram informações sobre as práticas do ensino de frações de antes e de atualmente. Dessa forma, nós pudemos identificar algumas características que marcaram e que marcam o ensino-aprendizagem desse conteúdo.

A primeira pergunta - na sua época de aluno, como era o ensino de frações? Você poderia dar um exemplo? - gerou 4 discursos.

1. O ensino era baseado apenas em exposição de conteúdos.

O discurso de dezesseis professores forma esse grupamento. Os docentes expressam, que antes o ensino-aprendizagem de frações era baseado, sobretudo, em resolução de exercícios; na denominação e exposição dos tipos de frações (próprias, impróprias e aparentes); os recursos didáticos eram, basicamente, o quadro e giz; e que essas práticas não permitiam a compreensão daquilo que se fazia.

Essa é uma forma de ensino criticada por educadores matemáticos - Onuchic e Allevato (2008) e Botta (1997), por exemplo, por ter como característica o foco na apresentação de algoritmos e de fórmulas, e posterior proposição de exercícios rotineiros para que haja memorização por parte dos alunos, e uma das principais críticas a ele, é a afirmação de que se trata de um método de ensino-aprendizagem que prioriza a memorização, o que não implica em compreensão do que se faz.

2. O professor ministrava aula baseado no livro didático.

Aqui os professores evidenciam que o livro didático era a fonte de informações para o desenvolvimento das aulas sobre frações, mas também dão evidências de que a forma de ensino era baseada em exposições, quando falam em repasse de conteúdos e utilização de quadro. O professor P15, por exemplo, afirmou que antes eram utilizados desenhos de pizzas para representar frações, e em seguida elas eram escritas conforme a notação convencional, a notação barra-fracionária. Já o docente P11 disse que "o professor repassava para o aluno o que estava no livro didático". Dessa forma, apesar desse grupamento ter como assunto principal a utilização de livros didáticos, ele também nos diz algo sobre a forma como o conteúdo de frações era ensinado. Ele evidencia que esse conteúdo era ministrado com base em exposições.

3. Utilizava-se figuras ou objetos para explicar a ideia de frações.

Nesse caso os professores (um total de quatro) expressaram que tinham aulas sobre frações através de representações com figuras, mas não se expressaram sobre os procedimentos que eram realizados, se eram aulas puramente expositivas ou se procediam de outra forma.

4. O conteúdo era bem explicado.

Nesse grupamento o professor (apenas um) afirma que gostava do modo como era explicado o conteúdo de frações. O fato de ter dito que o ensino era baseado apenas em explicações e proposição de muitos exercícios, também evidencia que as aulas eram expositivas e exploravam a memorização dos conteúdos.

Assim, de modo geral, os discursos gerados pelas respostas dos professores - à primeira pergunta - apesar de também nos mostrar outras características sobre as práticas de ensino de frações, como a utilização de figuras e de livros, por exemplo, nos dão evidências de que o ensino desse conteúdo era baseado na exposição de conteúdos, por meio da qual os alunos tinham contato com fórmulas e algoritmos e eram postos a resolver exercícios para que pudessem memorizar.

Com relação à segunda pergunta - e atualmente, como é o ensino de frações na escola? - foram 3 os grupamentos gerados pelas respostas dos professores.

1. Hoje em dia há mais alternativas para o ensino-aprendizagem de frações.

Nesse caso os professores citam algumas alternativas destinadas ao ensino-aprendizagem de frações, como jogos, laboratório de matemática, materiais manipuláveis, entre outros, mas nem todos deixam claro que fazem uso desses recursos em sala de aula. Além disso, eles não explicam como fazem uso desses recursos - se permitem que os alunos se expressem e reflitam sobre as relações existentes entre os materiais e o conteúdo estudado, ou se utilizam tais recursos somente como mais uma forma de expor informações.

É comum, inclusive em cursos de formação de professores, como nós pudemos presenciar, o uso de materiais manipuláveis para confirmar uma informação já exposta. O professor inicia uma aula sobre frações, por exemplo, expõe algumas denominações e posteriormente utiliza um objeto para concluir a explicação.

Assim, com exceção do professor P04, que também cita a compreensão como algo importante a ser considerado na aprendizagem de frações, esse grupamento - composto pelos discursos de 11 professores (incluindo o do professor P04), nos diz que o ensino de frações tem como característica a utilização de jogos, de tecnologia, de materiais concretos etc.

2. O conteúdo de frações é abordado de forma contextualizada.

Nesse grupamento os professores afirmam que atualmente há uma abordagem mais contextualizada do conteúdo de frações.

A contextualização tem sido considerada uma alternativa que pode contribuir com a aprendizagem do aluno. Segundo os PCN (BRASIL, 1997), é importante levar em conta os conhecimentos prévios dos alunos, os conceitos desenvolvidos no decorrer das vivências práticas, das interações imediatas vividas por eles.

Nesse caso os professores também não deram informações que nos permite tirar conclusões sobre como eles definem contextualização, e como procedem em sala de aula.

Os PCN (BRASIL, 1998) afirmam que é importante que seja considerado o potencial matemático do aluno e reconhecer que ele pode resolver problemas ao lançar mão de seus conhecimentos sobre o conteúdo abordado, buscando estabelecer relações entre os assuntos estudados e o que ele já conhece. Continuando, os PCN (BRASIL, 1998) afirmam que, assim, poderá haver a compreensão efetiva dos conteúdos matemáticos.

3. É tradicional a forma de ensinar frações.

Nem todos os discursos que formam esse grupamento falam, de forma direta, sobre o método de ensino tradicional. Nós os reunimos, também, considerando algumas afirmações que evidenciam a referida abordagem, tais quais: "quanto à divisão, devemos observar que fazer a divisão por um número, é o mesmo que multiplicar pelo seu inverso", do professor

P01; e “ainda é dada ênfase aos procedimentos aritméticos”, do professor P10.

Van de Walle (2009) afirma que o ensino tradicional, padrão educativo ainda predominante, começa com a explicação de qualquer ideia que esteja na página do livro didático e prossegue-se mostrando às crianças como fazer os exercícios indicados. Ele também diz que, nesse caso, a preocupação se volta para a obtenção de respostas, para as quais o aluno delega apenas ao professor a responsabilidade de determinar se elas estão corretas.

Segundo Marques (2013), o professor se preocupa em fazer com que o aluno consiga obter a ‘resposta correta’, mas não procura verificar se houve compreensão do que foi realizado. Dessa forma, ele prossegue repassando fórmulas e algoritmos e propondo exercícios rotineiros para que os alunos resolvam, e isso pode proporcionar memorização, mas não necessariamente reflexão e compreensão dos procedimentos realizados.

A terceira pergunta - você nota alguma mudança no ensino de frações, da sua época para hoje? - gerou muitas respostas distintas umas das outras, e isso inviabilizaria a utilização do DSC, então resolvemos não fazer grupamentos, mas um comentário a respeito delas.

Essa pergunta atua como uma complementação da primeira e da segunda pergunta. Através dela os professores deram mais informações sobre como as frações têm sido abordadas na sala de aula atualmente. O professor P6, por exemplo, em resposta à segunda pergunta, afirma que tenta ensinar de forma que os alunos compreendam o conteúdo, dando exemplos tanto na teoria quanto na prática. Em resposta à terceira pergunta, o mesmo docente acrescentou que varia de um professor para outro a realização de um ensino que proporcione compreensão, pois alguns só se preocupam em repassar procedimentos.

Alguns professores também afirmam que hoje em dia há a oportunidade de os alunos participarem, de serem mais ativos nas aulas. Sobre isso, Fanizzi (2012) diz que o diálogo e, inclusive, as discordâncias entre alunos ou entre alunos e professor são consideradas positivas, pois provoca reflexões, possibilitando a revisão e a ampliação de ideias, o que contribui com o processo de ensino-aprendizagem. Entretanto, conforme afirmam os professores P18 e P21, por exemplo, os discentes não se empenham em aprender, se mostram desinteressados.

O desinteresse é um grande problema, pois a atenção, a concentração nas aulas é fundamental no processo de aprendizagem e compreensão do conteúdo abordado. Segundo Botta (1997), a habilidade dos alunos em raciocinar e utilizar a matemática para comunicar suas ideias só poderá ser desenvolvida se eles forem engajados efetivamente no processo de ensino.

As pesquisas, conforme exposto no capítulo “Ensino-aprendizagem de frações: um olhar a partir das pesquisas”, trazem diversas sugestões para o ensino-aprendizagem de frações. São sugestões que podem estar sendo utilizadas ou adaptadas e aplicadas em sala de aula, eliminando ou amenizando as dificuldades dos alunos. Polese (2011) e Lima (2013), por exemplo, desenvolveram atividades que, segundo eles, despertou a atenção dos alunos, além de proporcionar aprendizagem do conteúdo de frações. Lima (2013) diz que a turma participante de sua pesquisa era muito inquieta, e que as atividades que ela desenvolveu e aplicou favoreceu o empenho dos alunos.

Assim, enquanto alguns docentes sentem dificuldades de ensinar o conteúdo de frações, por causa do desinteresse dos alunos, as pesquisas mostram alternativas para despertar – além de atenção e empenho durante as aulas – uma aprendizagem com compreensão do referido conteúdo.

Apenas um docente fez referência às pesquisas. O professor P12 diz que hoje em dia há investimentos em pesquisas com o intuito de desenvolver a compreensão dos alunos, sobre o conteúdo de frações, mas não há comentários sobre a utilização desse tipo de material como apoio para o desenvolvimento de atividades para aplicação em sala de aula. Os professores, inclusive alguns dos que citaram algumas alternativas para o ensino-aprendizagem do conteúdo discutido neste trabalho, expressaram que as aulas expositivas persistem.

Do grupo dos 25 professores participantes desta pesquisa, foram 10 os que citaram alternativas (como a utilização de jogos e de materiais concretos, por exemplo) para o ensino-aprendizagem de frações, mas nem todos eles deixam claro se utilizam ou não as alternativas citadas. Segundo Marques (2013), é comum os professores, mesmo quando participam de cursos voltados à formação continuada, abordando diversos métodos de ensino, continuarem priorizando o método de ensino tradicional.

Com a quarta pergunta nós pretendemos verificar qual a importância que os professores atribuem ao ensino de frações. Há algumas discussões em torno desse assunto e os docentes também expuseram suas opiniões.

As respostas a essa pergunta geraram dois discursos.

1. Mais de 52% dos 25 professores responderam que é importante ensinar frações porque é um conteúdo que está presente no cotidiano das pessoas e porque pode permitir uma maior compreensão de muitas situações do dia a dia e, por isso, contribui para a formação do cidadão.

2. O restante dos professores afirmou que é importante ensinar frações por se

tratar de um conteúdo relevante para a matemática, por ser indispensável em outros conteúdos matemáticos e em outras áreas do conhecimento.

Nascimento (2008) afirma que há mais uso dos números decimais, que de frações, e que essas são mais abordadas na escola, que aqueles.

Segundo Botta (1997, p. 170),

> O trabalho com frações tem sido muito questionado. As críticas, em sua maioria, são devidas à constatação do baixo rendimento apresentado pelos estudantes com relação à aquisição dos conceitos e à compreensão das técnicas operatórias. Outros se remetem ao seu uso social, cada vez menos frequente, argumentando que a necessidade de lidar com as frações na vida cotidiana se limita a metades, terços, quartos e que o crescente uso das representações decimais, especialmente em função das calculadoras, as tornam obsoletas.

Os números decimais estão presentes nas medidas de peso, de comprimento, de volume e, apesar de podermos expressar essas medidas por meio de frações, geralmente, no cotidiano das pessoas, elas (medidas) são relacionadas aos decimais.

As frações podem, sim, ser relacionadas a muitas situações cotidianas, pois trata-se de mais uma forma, assim como os números decimais, de representar números não inteiros, mas, como diz Botta (1997), é um conteúdo que não tem sido muito usado fora da escola.

Entretanto, o conteúdo de frações, como quase metade dos professores afirmam, também é importante pela sua utilidade em outras áreas do conhecimento e na própria matemática.

Por meio da sexta pergunta, os professores reforçaram pontos já comentados anteriormente. Eles reafirmaram a importância da utilização de contextualização, de resolução de problemas, de materiais manipuláveis e de jogos matemáticos, por exemplo, no ensino de frações, mas também há quem defenda a continuidade do método tradicional de ensino. Além disso, também há a afirmação de que é importante explorar mais os números decimais, por serem um conteúdo presente no cotidiano das pessoas.

Por meio da sétima pergunta, nós pudemos verificar como os professores avaliam a abordagem do conteúdo de frações no livro didático. Essa pergunta gerou 3 discursos.

1. O discurso que considera boa a abordagem dos livros didáticos foi gerado pelos diálogos de 52% dos professores. Os diálogos expressam que hoje em dia há mais clareza na apresentação dos conteúdos, que há um avanço em relação à abordagem do conteúdo de frações, e a maioria cita a contextualização como a mudança positiva na abordagem do referido conteúdo.

2. As respostas de um grupo de 9 professores geraram o discurso que profere que a abordagem do conteúdo de frações é relativa a cada livro didático. Assim, de acordo com esses docentes, há livros nos quais o conteúdo de frações é resumido, outros não trazem explicações dos procedimentos realizados, mas há uns que apresentam uma abordagem atualizada e muitos exemplos. Os critérios utilizados para expressar que alguns livros precisam melhorar, foram: poucos exercícios, conteúdo resumido, pouca exploração de aplicações e de resolução de problemas e ausência de explicação dos procedimentos aritméticos realizados.

3. O restante dos professores considera necessário que os livros didáticos melhorem, e os critérios utilizados para justificar essa opinião, são: os livros não levam em consideração o cotidiano do aluno, contextualizam pouco o conteúdo de frações.

Assim, um dos critérios mais citados pelos professores, para afirmarem se os livros didáticos contêm uma abordagem boa ou ruim, sobre o conteúdo de frações, é, respectivamente, a presença ou a ausência de contextualização, e geralmente a contextualização referida diz respeito ao dia a dia do aluno.

Segundo os PCN (BRASIL, 1997), muitas vezes os conteúdos matemáticos são tratados isoladamente, e para ampliar e consolidar um conceito, é fundamental que o aluno tenha contato com novas representações ou conexões do conteúdo com outras ideias. Também dizem que as situações do cotidiano são fundamentais para conferir significados a muitos conteúdos a serem estudados, mas que é importante considerar que esses significados podem ser explorados em outros contextos, como as questões da própria matemática e de problemas históricos. Assim, os PCN (BRASIL, 1997) consideram que é equivocada a ideia de contexto, quando se trabalha apenas com o que se supõe fazer parte do dia a dia do aluno.

Os PCN (BRASIL, 2002) também destacam a importância de não ser utilizado apenas o livro didático, mas, também, materiais cotidianos como, por exemplo, jornais, revistas, computadores, entre outros, e enfatizam que esses materiais se mostram interessantes para o aprendizado dos alunos, contribuindo para a formação deles, inserindo-os no meio em que vivem.

A oitava pergunta (Que sugestões você daria para a melhoria do ensino de frações nas escolas?) gerou respostas semelhantes às da sexta pergunta - que perguntou o que poderia permanecer ou mudar no ensino de frações.

Essa pergunta gerou 4 grupamentos: “Utilizar materiais concretos”, “contextualizar o conteúdo de frações”, “abordar mais o conteúdo de frações” e “expandir o ensino de frações”.

Tratam-se de grupamentos semelhantes aos diálogos feitos à 6ª pergunta. São pontos já comentados, como a importância que se atribui à contextualização, à utilização de materiais concretos e a uma maior abordagem das diferentes ideias que a notação barra-fracionária pode apresentar, por exemplo.

Além disso, os professores também expressaram a carência de materiais didáticos e a importância de haver dedicação de mais tempo para o ensino-aprendizagem de frações, além da indicação da necessidade dos professores participarem mais de cursos de aperfeiçoamento.

A nona pergunta (você se lembra de ter participado de alguma oficina ou mini-curso sobre o ensino-aprendizagem de frações? O que foi discutido?) foi respondida por 20 professores. Nesse caso, não sentimos a necessidade de fazer grupamentos, pois as respostas são mais diretas.

Apenas 7 professores afirmaram que participaram de alguma oficina ou mini-curso sobre o ensino-aprendizagem de frações. Isso é preocupante, pois o aperfeiçoamento é uma forma por meio da qual os professores podem ter contato com alternativas de ensino e, dessa forma, adquirir conhecimentos que lhes proporcionem mais preparo para atuar em sala de aula.

Entretanto, há casos em que a formação continuada não provoca mudanças no ensino-aprendizagem de matemática. Marques (2013) trabalhou com professoras polivalentes alunas de pedagogia e constatou que, apesar de haver a possibilidade de professores sofrerem influências em suas práticas, dentro das salas de aula ou em cursos de formação continuada, há uma tendência em lecionar de forma igual ou semelhante ao modo como elas tiveram aulas durante a formação no Ensino Fundamental e Médio. Isso evidencia que é importante que haja uma preocupação com a formação dos futuros docentes, desde a sua formação na Educação Básica.

As respostas dos docentes também mostraram que as pesquisas não são lembradas. Os professores fazem referências a alternativas para o ensino-aprendizagem de frações, mas não citam as pesquisas.

A décima pergunta (Sobre que outros pontos você gostaria de falar sobre o ensino-aprendizagem de frações?) deixou os professores à vontade para falarem sobre o que eles quiseram sobre o ensino-aprendizagem de frações. Nessa pergunta os docentes também citaram pontos já comentados anteriormente, como, por exemplo, a importância de não fazer uma abordagem somente expositiva, mas procurar utilizar recursos para o ensino-aprendizagem desse conteúdo, como a contextualização; a utilização de materiais concretos;

relacionar o conteúdo de frações com o conteúdo de probabilidade, respeitando o nível de maturidade dos alunos; e utilizar recursos tecnológicos e materiais manipuláveis, pois são recursos que contribuem para um aprendizado consistente e duradouro, segundo o professor P03. Além disso, o professor P18 afirma que há poucas pesquisas desenvolvidas sobre o ensino-aprendizagem de frações, o que contribui para que as aulas sejam apenas expositivas, nas quais o professor utiliza o livro didático como o único material de apoio para a elaboração de suas aulas; e o professor P19 diz que não temos nem tempo nem muitas fontes para pesquisar ideias, sugestões que possam melhorar a prática de ensino, o que leva, às vezes, à utilização do livro didático como fonte única para auxiliar na elaboração das aulas.

Assim, considerando que as perguntas do questionário foram abertas, conforme sugere Lefèvre e Lefèvre (2008) (que afirmam que para saber o que uma pessoa ou um conjunto de pessoas pensa, é necessário fazer perguntas abertas, de modo a ensejar que elas expressem um pensamento, e que as respostas não sejam influenciadas/induzidas pelas respectivas perguntas), os professores expuseram suas opiniões e sugestões sem interferência nossa. Desse modo, os discursos dos docentes mostram, também, uma ausência de afirmações sobre a utilização das pesquisas, o que evidencia um distanciamento delas e a sala de aula.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Aqui nós trazemos algumas discussões e reflexões sobre o ensino-aprendizagem de frações, considerando os dados dispostos ao longo desta dissertação.

Os professores participantes deste trabalho e as pesquisas analisadas dão evidências de como tem ocorrido o ensino-aprendizagem de frações atualmente.

Dos 25 professores participantes desta pesquisa, em resposta à 2ª pergunta, 5 afirmaram que o ensino tradicional persiste, e 8 deles fizeram comentários sobre materiais manipuláveis, jogos matemáticos e tecnologias no ensino-aprendizagem de frações, mas nem todos eles deixaram claro se utilizam ou não utilizam esses recursos didáticos para elaborar suas aulas. O professor P04, por exemplo, afirmou que o docente comprometido com a aprendizagem dos seus alunos procura explorar o conteúdo de frações de uma forma mais ligada ao cotidiano.

Algumas das pesquisas analisadas também dão evidências sobre as práticas de ensino de frações. Oliveira (1996) comenta que não há preocupação em fazer com que os alunos compreendam, não há uma atenção voltada para o processo de aprendizagem de frações, mas, sim, uma preocupação demasiada com a resposta correta; Biffi (2001) diz que a maioria dos professores e alunos consideram de difícil compreensão o conteúdo de frações, e que o ensino de matemática passa por um momento crítico, resultante de um ensino fundamentado em aulas expositivas nas quais é priorizada a memorização; Segundo Jesus (2013), a partir do 6º ano do Ensino Fundamental o ensino de frações é trabalhado com ênfase em regras para simplificar, adicionar, subtrair, multiplicar e dividir; Valio (2014) diz que ainda há práticas de ensino de matemática que não proporcionam a concretização da aprendizagem, pois priorizam a memorização da forma como são realizadas as operações com frações, por exemplo; Azevedo (2013) afirma que é possível que a falta de êxito no ensino-aprendizagem de frações esteja relacionada com a forma como esse conteúdo é ensinado – o repasse de regras, sem levar em consideração a compreensão do aluno.

Van de Walle (2009, p. 31) afirma que

> O ensino tradicional, o padrão educativo ainda predominante, começa tipicamente com uma explicação de qualquer ideia que esteja na página atual do livro didático, seguida por mostrar às crianças como fazer os exercícios indicados. Até mesmo com atividades envolvendo materiais ou modelos concretos, o professor tradicional continua guiando os estudantes, dizendo exatamente como usar os materiais de uma maneira bem prescrita.

Dessa forma, muitos alunos ficam com a impressão de que o conteúdo de frações se resume a um conjunto de normas que devem ser seguidas para alcançar as respostas dos exercícios aplicados pelo professor.

> O enfoque da lição está principalmente em obter respostas. Os estudantes delegam apenas ao professor a responsabilidade de determinar se suas respostas estão corretas. As crianças emergem dessas experiências com uma visão de que a matemática é uma série de regras arbitrárias, transmitidas pelo professor que por sua vez as obteve de alguma forma inteligente. (WALLE, 2009, p. 31).

Geralmente os pesquisadores estão preocupados em proporcionar aprendizagem com compreensão do conteúdo abordado.

> O ensino deveria promover a compreensão e isto supõe ajudar os alunos a fazerem conexões. Eles precisam ver como novas informações se conectam aos seus conhecimentos já existentes; como as várias representações – concreta, via desenho (pictórico) e simbólicas – podem ilustrar o mesmo conceito ou o mesmo procedimento e como conceitos diferentes (por exemplo, fração, decimal, porcentagem, razão) estão relacionados uns com os outros. Assim, os estudantes precisam "ver" como os procedimentos se relacionam aos conceitos, o porquê desses procedimentos e como e onde eles são aplicados. (BOTTA, 1997, p. 29).

Dante (2010) afirma que as pesquisas, no âmbito da Educação Matemática, apontam que é importante levar mais em consideração o envolvimento e a compreensão do aluno.

Botta (1997) e Van de Walle (2009) afirmam que quando o aluno realiza procedimentos com frações, não significa que há compreensão desse conteúdo, e que a ausência de compreensão faz com que as crianças continuem vendo os conteúdos matemáticos como algo que só existe na escola.

Dessa forma, os pesquisadores têm sugerido que é importante que os professores se empenhem em proporcionar uma aprendizagem com compreensão do conteúdo de frações, mas não somente de memorização de fórmulas e algoritmos.

Alguns dos professores participantes desta pesquisa afirmaram que a diferença que há no ensino-aprendizagem de frações, de antes para o de hoje, é uma presença maior de contextualização, e essa tem sido uma das sugestões dos PCN.

Segundo os PCN (BRASIL, 1998, p. 37),

> As necessidades cotidianas fazem com que os alunos desenvolvam capacidades de natureza prática para lidar com a atividade matemática, o que lhes permite reconhecer problemas, buscar e selecionar informações, tomar decisões. Quando

> essa capacidade é potencializada pela escola, a aprendizagem apresenta melhor resultado.

Os PCN (BRASIL, 1997) afirmam que é importante considerar o conhecimento prévio dos alunos, mas que na maioria das vezes subestimam-se os conceitos desenvolvidos no decorrer das vivências práticas deles, das interações imediatas, e parte-se para um tratamento esquemático que geralmente só se vê na escola.

Os PCN (BRASIL, 1998) também dizem que é importante considerar o potencial matemático do aluno e reconhecer que ele pode resolver problemas ao lançar mão de seus conhecimentos sobre o conteúdo abordado, buscando estabelecer relações entre o que ele já conhece e os conhecimentos estudados, e que, dessa forma, ele poderá compreender efetivamente os conteúdos matemáticos, pois quando esses são abordados de forma isolada, não se tornam uma ferramenta eficaz para a aprendizagem de novas ideias.

Assim, a contextualização também tem sido considerada uma alternativa para a promoção de aprendizagem com compreensão dos conteúdos matemáticos, e alguns livros didáticos de hoje em dia, conforme explícito por alguns dos professores, em resposta à 7ª pergunta do questionário, trazem como uma característica a abordagem do conteúdo de frações relacionado a diversas situações do cotidiano.

Além disso, mais de 60% dos professores afirmaram - em resposta à 4ª pergunta – que é importante ensinar frações porque elas estão presentes no cotidiano das pessoas, e elas, de fato, podem, sim, ser relacionadas a diversas situações, mas atualmente os números decimais são muito mais utilizados, tanto na área financeira, quanto em situações envolvendo medidas - de massa, de comprimento etc. Segundo Nascimento (2008), há mais uso dos números decimais, que de frações, e essas são mais abordadas na escola, que aqueles. Botta (1997) diz que o trabalho com frações tem sido muito questionado e que algumas críticas voltadas para o ensino desse conteúdo referem-se ao uso cada vez menor, e há a argumentação de que "a necessidade de lidar com as frações na vida se limita a metades, terços, quartos e que o crescente uso das representações decimais, especialmente em função das calculadoras, as tornam obsoletas". (BOTTA, 1997, p. 170).

Isso também remete a 5ª pergunta (quanto tempo é necessário ensinar frações no 6º ano?), pois a sugestão, por parte de 60% dos professores, do tempo necessário para o ensino do referido conteúdo, está compreendida no intervalo de 1 mês a 1 ano. Hoje em dia existem calculadoras específicas para o trabalho com frações e elas podem facilitar o ensino do referido conteúdo, possibilitando a redução do tempo necessário para que os alunos aprendam, pela agilidade de realização de cálculos que esse aparelho permite. Além disso, se considerarmos a presença dos conteúdos matemáticos no cotidiano das pessoas, como um fator que determina a importância de ensiná-los ou não, os números decimais deveriam ter prioridade sobre as frações, e essas quase não mencionadas, por causa do desuso fora da escola. Entretanto, as frações, como afirmam alguns professores em resposta à 4ª pergunta do questionário, são importantes para outras áreas do conhecimento científico, além da matemática.

Os docentes que fizeram comentários sobre a utilização de jogos matemáticos e de materiais manipuláveis, com exceção da professora P25, não citaram as fontes que recorrem para elaborar as suas aulas. A docente P25 afirma que consulta o livro didático e a internet para elaborar atividades com materiais concretos, mas não esclareceu se as fontes consultadas da internet são pesquisas ou se são textos que ela encontra aleatoriamente sobre o ensino-aprendizagem de frações.

A maioria dos professores - P02, P06, P07, P08 P11 e P12, por exemplo - sugerem algum tipo de material concreto (dobraduras, E.V.A., entre outros) ou jogos para a melhoria do ensino de frações. Quando explicam o propósito de utilizar materiais concretos, dizem que esses são importantes porque tornam as aulas mais atrativas ou porque proporcionam mais aprendizagem para o aluno. Semelhantemente aos professores, os pesquisadores - Menotti (2014) e Lima (2013), por exemplo - também ressaltam a importância que os materiais manipuláveis têm para o ensino-aprendizagem de frações. Eles afirmam que esses recursos metodológicos podem tornar as aulas mais atrativas e promover uma aprendizagem com mais compreensão do referido conteúdo. É nesse ponto que o olhar dos professores se aproximam de algumas sugestões das pesquisas, apesar de não fazerem referências a elas.

Além disso, alguns desses docentes citam a indisponibilidade desses materiais, por parte das escolas. Por outro lado, algumas pesquisas como a de Lima (2013), Polese (2011) e Menotti (2014), por exemplo, mostram que é possível desenvolver, por meio de materiais de fácil acesso como cartolina e E.V.A., entre outros, atividades que podem proporcionar uma aprendizagem com compreensão do conteúdo de frações.

Dessa forma, as pesquisas fazem mais que sugerir atividades para o ensino-aprendizagem de frações. Elas também mostram, indiretamente, que não necessariamente é indispensável ter um laboratório de matemática ou materiais muitas vezes inacessíveis aos professores e alunos, para que seja possível elaborar aulas que proporcionem aprendizagem com compreensão, pois há atividades alternativas, inclusive, com figuras geométricas, e o professor pode estar beneficiando a si e aos seus alunos, consultando as sugestões e discussões das dissertações, entre outros trabalhos de pesquisa. Entretanto, apenas um professor (P12), em resposta à 3ª pergunta do questionário, lembrou da importância das pesquisas para a melhoria do ensino-aprendizagem de frações.

Ao olharmos de forma mais abrangente, percebe-se a importância atribuída às representações concretas ou pictóricas para o desenvolvimento de atividades sobre o conteúdo de frações, pois quando as pesquisas - Biffi (2001), Menotti (2014) e Oliveira (1996), por exemplo - propõem atividades, geralmente elas mostram resultados positivos para o ensino-aprendizagem desse conteúdo, e elas sempre envolvem pelo menos uma dessas representações, seja com desenhos geométricos ilustrando bolos, chocolates, entre outros, seccionados igualmente, seja com pedaços de materiais concretos como cartolina, E.V.A. etc, representando um todo dividido em partes iguais.

Apesar dos professores evidenciarem que o ensino-aprendizagem de frações não tem acompanhado as sugestões das pesquisas - pois mais de 50% deles ou afirmam que a mudança ocorreu pela presença de contextualização (apontada por alguns professores como uma característica que também ocorria no passado) ou que o ensino continua priorizando a memorização de fórmulas e de algoritmos – grande parte deles (84%), em resposta à 8ª pergunta, sugere a utilização de materiais concretos, desenhos geométricos ou de contextualização (incluindo resolução de problemas) para a melhoria das aulas sobre frações. Isso mostra que de alguma forma eles têm consciência sobre os efeitos positivos que essas alternativas podem causar no ensino-aprendizagem de frações, mas a simples utilização dessas alternativas não é o suficiente, pois, como diz Albuquerque (2015), "a aprendizagem de um saber matemático para o aluno é fortemente influenciada pela forma didática como ele lhe é apresentado".

Assim, também é importante considerar a forma como essas sugestões podem estar sendo utilizadas para promover aprendizagem com compreensão do conteúdo abordado. Segundo Van de Walle (2009), utilizar materiais manipuláveis, por exemplo, não significa proporcionar um ensino de frações diferente do tradicional, quando o professor se limita a ditar os procedimentos a serem realizados. Além disso, Lima (2013) afirma que é necessário que o professor faça um acompanhamento atento das atividades aplicadas em sala de aula, para que os alunos não desenvolvam edeias equivocadas sobre o conteúdo abordado. É importante ter consciência das relações que os discentes fazem com os materiais concretos e o conteúdo abordado durante as aulas.

Como exposto ao longo deste trabalho, as pesquisas mostram atividades e reflexões interessantes resultantes de experiências em sala de aula, e que podem ser reaplicadas ou adaptadas às realidades de outras salas de aula. São sugestões que podem amenizar as dificuldades que os alunos sentem.

É importante que as pesquisas estejam, cada vez mais, voltadas para a sala de aula. Segundo Botta (1997, p. 178),

> Apesar de haver muitas pesquisas em Educação Matemática, suas implicações para a sala de aula ainda não estão claramente definidas. É preciso que se trabalhe na linha de transposição da pesquisa para a sala de aula. A universidade deveria promover um trabalho que auxiliasse nessa transposição, onde teses, artigos de pesquisa, traduções de artigos em língua estrangeira, pudessem ser levados até os professores em sala de aula.

Entretanto, de acordo com Andrade (2008), o desafio e interesse em desenvolver pesquisas capazes de impactar, transformar e reinventar a sala de aula parece ser o que menos importa para o pesquisador. O interesse está, principalmente, em manter um ritmo de produção de trabalhos que possa atender às demandas impostas pelas instituições e agências de fomento, tais quais a CAPES, CNPq, entre outras, o que poderia ser inviabilizado, caso o pesquisador se empenhasse em pesquisas voltadas para a sala de aula, já que essas necessitam de um tempo maior para serem concluídas. Assim, Andrade (2008) sugere que o foco seja voltado para a produção de pesquisas colaborativas, pesquisas-ação e similares, pois essas, sim, podem provocar mudanças em sala de aula.

Dessa forma, por meio deste trabalho nós percebemos, (considerando as perguntas de pesquisa: **1.** Como tem sido o ensino-aprendizagem de frações, a partir de um olhar para as pesquisas? E **2.** Como tem sido o ensino-aprendizagem de frações, a partir do olhar dos professores?) que as pesquisas - Biffi (2001), Oliveira (1996), Jesus (2013) e Valio (2014), por exemplo – evidenciam que o ensino de frações está baseado em uma preocupação com o repasse de fórmulas e algoritmos, na qual prioriza-se a memorização e a resposta correta, o que não necessariamente proporciona compreensão; e constatamos, por meio das respostas dos professores, que eles sentem uma necessidade de mudança na sala de aula, expressada quando eles sugerem mais utilização de materiais manipuláveis, de contextualização, de jogos matemáticos, de alternativas que possam favorecer uma aprendizagem com compreensão do conteúdo de frações, o que ressalta a importância da utilização das pesquisas, já que elas propõem alternativas com esses recursos didáticos, acompanhadas com as respectivas discussões e resultados.

Essas discussões mostram, considerando o objetivo desta pesquisa (identificar como tem sido o ensino-aprendizagem de frações nas pesquisas e na sala de aula, e quais as possíveis aproximações da sala de aula com as pesquisas) que há uma necessidade de aproximação das pesquisas e a sala de aula. Assim, é importante que esta e outras pesquisas sejam abordadas nos cursos de formação de professores, de modo que eles possam acompanhar as discussões e experiências realizadas por pesquisadores, sobre o ensino-aprendizagem de frações, pois, como já comentado, as pesquisas têm mostrado várias alternativas que, inclusive, podem ser utilizadas para amenizar as dificuldades que os alunos têm de compreender ideias como comparação, equivalência e operações com frações, por exemplo.

Como sugestão de expansão desta pesquisa, consideramos relevante o desenvolvimento de um trabalho que reúna os principais resultados e discussões de pesquisas sobre o ensino-aprendizagem de frações. Um trabalho como esse pode tornar-se um material de apoio útil para professores da Educação Básica. Além disso, também consideramos importante o desenvolvimento de uma pesquisa na qual haja análises sobre como os professores estão utilizando os recursos metodológicos e didáticos que dispõem para o ensino-aprendizagem de frações, e a forma como esses recursos podem ser utilizados para proporcionar aprendizagem com compreensão desse conteúdo, de modo que seja realizada uma comparação com as sugestões das pesquisas e a forma como são utilizados em sala de aula.

Não apontamos, aqui, soluções, mas reflexões, um passo a mais a ser dado em busca de mais aprendizagem e compreensão do conteúdo de frações. Não acreditamos em uma solução universal, mas em um possível conjunto de atitudes baseadas em reflexões incessantes em prol de resultados cada vez melhores, porque o professor tem suas capacidades, suas possibilidades, mas também há obstáculos decorrentes, inclusive, da formação que ele teve. É importante que os cursos de formação de professores também façam um trabalho de conscientização do papel que as pesquisas têm e podem ter em sala de aula, e sobre a importância de haver constantes renovações, reflexões, criações e adaptações de alternativas, dos recursos que os docentes têm ao seu alcance para promover aprendizagem com compreensão dos conteúdos que lecionam, pois cada turma tem as suas características, cada turma é um conjunto complexo de aprendizes, complexo pela sua heterogeneidade, pela diversidade de capacidades desenvolvidas e a serem desenvolvidas, pela diversidade dos meios sociais nos quais cada indivíduo está inserido. Pensando assim, nos deparamos com a grande e complexa responsabilidade atribuída ao professor: a tarefa de provocar interesse pelos conteúdos abordados, de fazer aprender e compreender. Um trabalho difícil que, muitas vezes, é substituído por uma preocupação em proporcionar somente memorização de fórmulas e algoritmos.

REFERENCIAIS

ALBUQUERQUE, I. M. B. de. **Os números e suas operações fundamentais:** uma discussão sobre ensino e aprendizagem. Campina Grande: EDUFCG, 2016. No prelo.

ANDRADE, S. d. **A pesquisa em educação matemática, os pesquisadores e a sala de aula:** um fenômeno complexo, múltiplos olhares, um tecer de fios. 2008. 461 p. Tese (Doutorado em Educação. Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática) – Faculdade de educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008. Disponível em: <WWW.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-29112010-135412/pt-br.php>. Acesso em: 08 fev. 2017.

AZEVEDO, A. E. B. R. de. **Uma abordagem no ensino de frações baseada em atividades para o 6º ano do Ensino Fundamental**. 2013. 88 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2013. Disponível em: <http://repositorio.ufrn.br:8080/jspui/bitstream/123456789/18660/1/AbraaoEBRA_DISSERT.pdf>. Acesso em: 22 nov. 2016.

BEHR, M. J., HAREL, G., POST, T., LESH, R. **Rational number, ratio and proportion**. In: GROUWS, D. A. (Ed.) Handbook of research on mathematics teaching and learning. New York: Macmillan, 1992. P. 296-333 apud BOTTA, L. S. Números racionais e raciocínio proporcional: considerações sobre o ensino-aprendizagem. 1997. 191 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1997.

BERTONI, Nilza Eigenheer. **A Construção do Conhecimento sobre Número Fracionário**. Bolema, São Paulo, nº 31, p. 209-237, 2008.

BEZUK, N. S.; BIECK, M. Current research on rational numbers and common fractions: summary and implications for teachers. In: OWENS, D. T. (Ed). **Research ideas for the classroom**: middle grades mathematics. New York: Macmillan, 1993. p. 118-136.

BIFFI, D. de L. **Conceito de frações através do estudo dos registros de representação**. 2001. 179 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós Graduação, Universidade Federal de Santa Catarina, Lages, 2001. Disponível em: < https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/82076>. Acesso em: 26 maio 2016.

BOTTA, L. S. **Números racionais e raciocínio proporcional**: considerações sobre o ensino-aprendizagem. 1997. 191 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1997.

BRASIL, MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática – 1°, 2°, 3° e 4° ciclos, Ensino Médio: Matemática. Brasília, 1997.

________. Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática (5ª a 8ª séries). Brasília, 1998.

________. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+: ensino médio**. Orientações educacionais complementares aos parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino médio. Brasília, 2002.

BROUSSEAU, Guy. Les obstacles épistémologique ET lês problèmes em mathemátiques. In: **Recherches em Didactique des Mathemátiques**. Bordeaux, Université Bordeaux I, v. 4, n. 2, p. 165-198, 1983.

COSTA, N. L. da; POLONI, M. Y. **Percepções de concluintes de pedagogia sobre a formação inicial do professor para a docência de matemática**. Bolema, São Paulo, nº 44, 2012. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-636X2012000400009>. Acesso em: 21 set. 2016.

COSTA, E. M. da. **Matemática e origami**: trabalhando frações. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007.

CURI, E. **Formação de professores polivalentes**: uma análise dos conhecimentos para ensinar matemática e das crenças e atitudes que interferem na constituição desses conhecimentos, 2004. 278 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontífica Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004. Disponível em: <WWW.educado res.diaadia.pr.gov.br/modules/mydownloads_01/singlefile.php?cid=64&lid=1104>. Acesso em: 03 set. 2016.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação matemática**: da teoria à prática. 13ª ed. São Paulo: Papirus, 2006.

DANTE, Luiz Roberto. **Uma proposta para mudanças nas ênfases ora dominantes no ensino de matemática**. Brasília, Revista do professor de matemática, 1987.

DANTE, Luiz Roberto. **Formulação e resolução de problemas de matemática**: teoria e prática. São Paulo: Ática, 2010.

FANIZZI, S. **A importância da interação nas aulas de matemática**: da elaboração oral à construção de conhecimentos. Educação Matemática e Pesquisa, São Paulo, nº 2, p. 317-336,

2012. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/viewFile/9443/8156>. Acesso em: 27 jan. 2017.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. **Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino da matemática**. Boletim da SBEM. SBM: São Paulo, ano 4, n. 7, 1990.

FORGUES, L.; TIAM, J.; SIEGLER, R. S. **Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult?** Elsevier, nº 38, p. 201-221, 2015. Disponível em: <http://www.psy.cmu.edu/~siegler/2015-LF-etal.pdf>. Acesso em: 23 set. 2016.

JESUS, A. B. M. de. Uma **proposta de ensino de frações voltada para a construção do conhecimento**. 2013. 72 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação Profissional em Matemática, Universidade Federal de Lavras - MG, Lavras, 2013.

KIEREN, T. **Personal knowledge of rational numbers:** its intuitive and formal development. In HIEBERT, J. e BEHR, M. **Numbers concepts and operations in the middle grades.** Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, p. 162 – 181, 1989 apud BIFFI, D. de L. **Conceito de frações através do estudo dos registros de representação**. 2001. 179 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós Graduação, Universidade Federal de Santa Catarina, Lages, 2001. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/82076>. Acesso em: 26 maio 2016.

LANKSHEAR, C.; KNOBEL, M. **Pesquisa pedagógica:** do projeto à implementação. Tradução de Magda França Lopes. Porto Alegre: Artmed, 2008.

LEFÈVRE, F; LEFÈVRE, A. M. C. **O discurso do sujeito coletivo:** um enfoque em pesquisa qualitativa (desdobramentos). 2. ed. Rio Grande do Sul: Educs, 2005.

LIMA, F. S. **Números racionais na forma fracionária:** atividades para superar dificuldades de aprendizagem. 2013. 43 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2013. Disponível em: <https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/5940>. Acesso em: 21 maio 2016.

LOPES, Antonio José. **O que os Nossos Alunos Podem Estar Deixando de Aprender sobre Frações, quando Tentamos lhes Ensinar Frações.** Bolema, São Paulo, nº 31, p. 1-22, 2008.

LORENZATO, S. Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In: LORENZATO, Sérgio. **Laboratório de ensino de matemática na formação de professores.** Campinas: Autores Associados, 2006. p. 3-38.

MARCONI, M. de A.; LAKATOS, E. M. **Fundamentos de metodologia científica.** 5. ed. São Paulo: Atlas, 2003.

MARQUES, W. C. **Narrativas sobre a prática de ensino de matemática de professores dos anos iniciais do ensino fundamental.** 2013. 284 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós Graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2013.

MENOTTI, R. M. **Frações e suas operações:** resolução de problemas em uma trajetória hipotética de aprendizagem. 2014. 154 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014. Disponível em: < http://www.bibliotecadigital.uel.br/document /?code=vtls000198094>. Acesso em: 21 maio 2016.

NASCIMENTO, J. do. **Perspectivas para aprendizagem e ensino dos números racionais**. Revista de Iniciação Científica da FFC, São Paulo, nº 2, p. 196-208, 2008. Disponível em: <www2.marilia.unesp.br/revistas/índex.php/ric/article/view/212/188>. Acesso em: 23 jan. 2017.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997 *apud* BERTONI, Nilza Eigenheer. **A Construção do Conhecimento sobre Número Fracionário**. Bolema, São Paulo, nº 31, p. 209-237, 2008.

OLIVEIRA, A. M. N. **Laboratório de Ensino e Aprendizagem em Matemática:** As Razões de sua Necessidade. Dissertação (Mestrado em Educação) – Setor de Educação da Universidade Federal do Paraná. 1983, 138p apud ALBUQUERQUE, I. M. B. de. **Os números e suas operações fundamentais**: uma discussão sobre ensino e aprendizagem. Campina Grande: EDUFCG, 2016. No prelo.

OLIVEIRA, R. G. de. **Aprendizagem de frações:** uma análise comparativa de dois processos diferentes de ensino na 5ª série do 1º grau. 1996. 165 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1996. Disponível em: <http:// www.bibliotecadigital.unicamp.br/document/?code=vtls000110437>. Acesso em: 21 maio 2016.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. **As Diferentes ‘personalidades’ do número racional trabalhadas através da Resolução de Problemas.** Bolema, São Paulo, nº 31, p. 79-102, 2008. Disponível em: <WWW.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/viewFile/2106/1831>. Acesso em: 21 fev. 2016.

POLESE, F. O. **Análise de uma proposta construtivista de ensino de frações por meio da resolução de problemas.** 2011. 104 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós Graduação em Educação em Ciências e Matemática, Pontífica Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2011. Disponível em: <http://tede2.pucrs.br/tede2/handle/tede/3414>. Acesso em: 11 jun. 2016.

POST, T.R.; BEHR, M. J.; LESH, R. A proporcionalidade e o desenvolvimento de noções de pré-álgebra. In: COXFORD, A. F. & SHULTE, A. P. (Org). **As ideias da álgebra.** Trad. H. H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994. p. 89 – 103.

PROENÇA, M. C. **O Ensino de Frações via Resolução de Problemas na Formação de Futuras Professoras de Pedagogia.** Bolema, São Paulo, nº 31, p. 729-755, 2008.

RÊGO, R. M.; RÊGO, R. G. Desenvolvimento e uso de materiais didáticos no ensino de matemática. In: LORENZATO, Sérgio. **Laboratório de ensino de matemática na formação de professores.** Campinas: Autores associados, 2006. p. 39-56.

SCHASTAI, M. B. **Caderno pedagógico: as oficinas na formação continuada de professores – uma estratégia a partir do pró-letramento matemática para a construção do conceito de frações.** 2012. 138 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Tecnologia, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Ponta Grossa, 2012.

SHARP, M. S.; GAROFALO, J.; ADAMS, B. Children’s development of meaningful fraction algorithms: a kid’s cookies and a puppy’s pills. In: LITWILLER, B.; BRIGHT, G. (Ed.). **Making sense of fractions, ratios, and proportions:** 2002 yearbook. Reston, 2004. p. 18-28.

SILVA, M. J. F; ALMOULOUD, S. A. **As Operações com Números Racionais e seus Significados a partir da Concepção Parte-todo.** Bolema, São Paulo, nº 31, p. 55-78, 2008.

SILVA, V. et al. **Uma experiência de ensino de fração articulada ao decimal e à porcentagem**. Educação Matemática em Revista, Rio de Janeiro, nº 8, p. 16-23, 2008.

VALIO, D. T. de C. **Frações:** estratégias lúdicas no ensino de matemática. 2014. 89 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2014. Disponível em: <https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/5964>. Acesso em: 06 ag. 2016.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental:** formação de professores e aplicação na sala de aula. Tradução: Paulo H. Colenese. 6. Ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

WINTERLE, P. **Vetores e geometria analítica**. São Paulo: Makron Books, 2000.

APÊNDICE - QUESTIONÁRIO

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
MESTRADO ACADÊMICO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Este questionário faz parte de uma pesquisa de mestrado acadêmico que está sendo desenvolvida no programa de Pós-Graduação do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba, e tem como foco o ensino-aprendizagem de frações. Assim, gostaríamos de contar com a sua colaboração em responder as perguntas abaixo. De nenhum modo haverá divulgação dos nomes dos participantes. Desde já agradecemos a sua participação.

Orientador: Prof. Dr. Silvanio de Andrade
Mestrando: Paulo Henrique Freitas Silva

Questionário:

1 - Na sua época de aluno, como era o ensino de frações? Você poderia dar um exemplo?

2 – E atualmente, como é o ensino de frações na escola? Que exemplo você poderia dar?

3 – Você nota alguma mudança no ensino de frações da sua época para hoje? Exemplifique.

____
____
____
____
____
____

4 – Qual a importância de se ensinar frações atualmente?

____
____
____
____
____
____

5 – Para você, quanto tempo é necessário para ensinar frações no 6º ano?

____
____
____
____
____
____

6 – O que poderia permanecer ou mudar no ensino de frações?

____
____
____
____
____
____

7 – Como você avalia a abordagem do conteúdo de frações nos livros didáticos?

____
____
____
____
____
____

8 – Que sugestões você daria para a melhoria do ensino de frações nas escolas?

9 – Você se lembra de ter participado de alguma oficina ou mini-curso sobre o ensino-aprendizagem de frações? O que foi discutido?

10 – Sobre que outros pontos você gostaria de falar sobre o ensino-aprendizagem de frações?

ANEXO – RESPOSTAS DAS PERGUNTAS

Pergunta 1: Na sua época de aluno, como era o ensino de frações na sala de aula?

P01: Faz muito tempo, mas recordo que, referente às operações com frações, não havia justificativas sobre a necessidade de utilizar o Mínimo Múltiplo Comum de denominadores, ao se efetuar adição ou subtração de frações com denominadores diferentes. Além disso, não havia justificativas sobre o algoritmo da multiplicação e da divisão de frações.

P02: Na minha época como aluno da Educação Básica o estudo sobre frações era bem simplificado, pois não havia disponibilidade de livro didático. Era um estudo sem muita criatividade, mas eficaz quanto ao aprendizado.

P03: Era muito mecânico e não oferecia incentivos à interpretação. Só víamos, na maioria das vezes, figuras planas divididas representando frações.

P04: Era de forma rápida e não concreta, não permitindo que a ideia de frações fosse fixada.

P05: Nas aulas, eram apresentados objetos ou figuras para ilustrar frações como parte de um todo.

P06: Na época em que eu era aluno o ensino de frações era iniciado com uma abordagem sobre numeradores e denominadores, e também eram utilizados materiais concretos divididos para explicar a ideia de números fracionários.

P07: Não havia tantos materiais e pesquisas para apoiar o ensino. As aulas eram muito cansativas e não permitiam compreender o que é numerador, denominador e a ideia de comparar frações.

P08: O professor desenvolvia aulas expositivas e sem contextualização. Ele costumava passar exercícios como, por exemplo, calcule $\frac{3}{4}+\frac{2}{3}$; $\frac{2}{5}+\frac{1}{5}$.

P09: O conteúdo era bem explicado. O professor passava muitos exercícios e os alunos gostavam de estudar.

P10: Dava-se ênfase aos procedimentos aritméticos e algébricos para resolver os exercícios. No caso da adição $\frac{3}{4}+\frac{2}{3}$, por exemplo, tirávamos o mínimo múltiplo comum de 4 e 3 como parte do procedimento para encontrarmos a solução.

P11: O professor repassava para o aluno o que estava no livro didático.

P12: O ensino era muito tradicional. As frações eram representadas através de figuras, e não havia contextualização para o ensino das operações com tais números.

P13: As frações eram pouco abordadas. Quando muito era feito, explorava-se ilustrações (figuras) de divisões de pizzas em fatias, e posteriormente eram mostradas as frações que representavam cada parte.

P14: O professor não repensava a didática dele. Ele dava ênfase aos procedimentos que devem ser realizados nas operações de adição, subtração, multiplicação e divisão com denominadores iguais ou diferentes.

P15: O professor utilizava desenhos de pizzas para representar frações, e em seguida as escrevia de acordo com a quantidade de fatias. Essa era a abordagem utilizada pelos livros didáticos.

P16: Quase do mesmo jeito de hoje, pois era dada ênfase a como representá-las e lê-las, e aos tipos de frações e operações.

P17: As aulas eram expositivas. O professor dava vários exemplos dos conteúdos abordados: frações equivalentes, adição, subtração, multiplicação e divisão, por exemplo.

P18: Não era muito diferente de hoje. O professor utilizava o quadro negro e aulas expositivas.

P19: O ensino era muito próximo ao que é hoje. A abordagem do professor era basicamente expositiva.

P20: Na minha época de aluno o ensino era baseado somente em mostrar os tipos de frações e as operações de adição, subtração multiplicação e divisão. Não havia livros para os alunos. Os exercícios eram apenas os que o professor mostrava em sala de aula, em pequena quantidade.

P21: O conteúdo de frações era repassado de forma direta. Era apresentada a ideia que frações eram 2 números, ou seja, um número sobre o outro, o qual tínhamos muita dificuldade em utilizá-la no dia a dia.

P22: Eram utilizados quadro e giz para fazer figuras para representar frações.

P23: Os professores utilizavam desenhos de pizzas para ensinar frações.

P24: O ensino era baseado na resolução de exercícios, sem ter um foco principal voltado para o cotidiano.

P25: Os professores utilizavam quadro e livro. Não havia uma contextualização com o dia a dia do aluno.

Pergunta 2: E atualmente, como é o ensino de frações na escola? Cite exemplos.

P01: Na introdução sobre o ensino de frações, aborda-se a ideia de parte de um todo, comparação e quociente; quanto à divisão, devemos observar que é uma operação que consiste em multiplicar a primeira fração (dividendo) pelo inverso da segunda (divisor); também consideramos a necessidade de relacionar frações com porcentagem.

P02: Hoje há a disponibilidade de muitos recursos metodológicos para o ensino de frações. Existem materiais que auxiliam bastante o ensino desses números, mas a escola não nos oferece tais recursos.

P03: Hoje em dia o uso de tecnologias educacionais favoreceram um ensino diferenciado para aprender frações.

P04: O profissional comprometido procura explorar as frações de forma mais concreta, possibilitando que o aluno tenha uma melhor compreensão sobre esse conteúdo. Exemplo: usando dobraduras em folha de papel.

P05: Continua da mesma forma.

P06: Eu tento ensinar de forma que os alunos compreendam o conteúdo, dando exemplos tanto na teoria quanto na prática.

P07: Hoje em dia nós fazemos uso de materiais manipuláveis e de jogos.

P08: Eu sempre procuro contextualizar o conteúdo. Ao trabalhar com divisão de frações, elaboro situações que remeta ao dia a dia do aluno, como, por exemplo, a divisão de uma pizza entre amigos.

P09: Hoje se costuma fazer uma abordagem envolvendo o cotidiano dos alunos, e utilizar jogos e laboratório de matemática para ensinar frações.

P10: Embora se utilize alguns materiais para representar frações, ainda é dada ênfase aos procedimentos aritméticos.

P11: ----

P12: Apesar de haver alguns avanços proporcionados pela utilização de materiais manipuláveis e da contextualização, o ensino tradicional ainda persiste.

P13: O ensino tem melhorado. Hoje em dia costuma-se ensinar frações relacionando-as com os números decimais e com a reta numérica.

P14: (O professor não compreendeu a pergunta): "Uma semelhança no dia a dia é como registrar no cartório um terreno de herança dividido em três partes iguais, onde a parte do terreno tem 100m de comprimento".

P15: Um pouco mais contextualizado, pois hoje o ensino de frações é apresentado através de resolução de problemas.

P16: O ensino aborda as mesmas coisas, mas hoje há a utilização de problemas, associando o conteúdo com o dia a dia.

P17: As aulas são divididas entre aulas expositivas e práticas, sendo as mesmas trabalhadas através de jogos e raciocínio lógico.

P18: Não é muito diferente de antes. A diferença é que, apesar de pouca, há a utilização de materiais concretos e de contextualização.

P19: A diferença é que hoje o conteúdo de frações é contextualizado.

P20: Atualmente o professor repassa as atividades contidas no livro didático e utiliza material concreto.

P21: Hoje em dia os professores já passam a ideia de que as frações são utilizadas diariamente e existem alguns materiais bem simples que ajuda a melhorar a compreensão e facilita o aprendizado. Exemplo: utilização de pinturas e figuras geométricas.

P22: Atualmente ainda é bastante usada a forma tradicional (quadro e giz), pois ao meu ver, a maneira tradicional também tem uma relevância à aprendizagem. Também existem outras maneiras. Exemplos: vídeos, material concreto, dobraduras etc.

P23: É importante iniciar a noção de frações sem dar ênfase à simbologia e nomenclaturas como meio, terço, quarto etc. É necessário começar o trabalho utilizando círculos e retângulos de cartolina, e tiras de papel e suas partes.

P24: Agora melhorou muito, pois podemos explorar materiais concretos, explicações diversificadas com o uso de vídeo, pesquisa na internet, revistas e livros. Ex.: Levar frutas, bolas e explorar o conteúdo de frações, praticando e tendo uma aprendizagem eficaz.

P25: Nós utilizamos o livro didático para ensinar a forma como são escritas as frações, e depois utilizamos chocolates, frutas ou desenhos feitos no quadro, dividindo-os para explicar aos alunos a ideia de numerador e denominador. Nós tiramos esses exemplos dos livros didáticos e da internet.

Pergunta 3: Você nota alguma mudança no ensino de frações da sua época para hoje? Exemplifique.

P01: Sim, desde que o professor aborde o tema de maneira significativa para o aluno, como, por exemplo, utilizar a resolução de problemas. Exemplo: Se certificar das preferências esportivas dos alunos e representar, através de frações, a parte da turma que prefere futebol, vôlei, basquete, handebol, entre outros. Depois disso, por meio de gráficos e porcentagens, expressar as frações encontradas.

P02: Hoje a diferença é apenas a disponibilidade do livro didático.

P03: Sim, muitas. Exemplo: Quando eu estudava, as frações eram apresentadas como fatias de bolos, partes de figuras geométricas pintadas. Não era dada a oportunidade de questionar ou criar novas ideias.

P04: Sim, pois há alguns anos atrás o aluno era tratado como sujeito passivo, mas hoje há a oportunidade dele participar e se envolver na construção do seu conhecimento. Exemplo: A participação do aluno nas atividades, permitindo que ele desenvolva compreensão sobre o conteúdo.

P05: Continua da mesma forma.

P06: Isso depende do professor. Há professores que procuram fazer com que os alunos compreendam o conteúdo, mas há outros que apenas mostram procedimentos.

P07: Sim, as aulas são mais dinâmicas e chamam mais a atenção dos discentes.

P08: Diferentemente do estilo de ensino do passado, hoje se procura contextualizar os conteúdos.

P09: Hoje há a utilização das Novas Tecnologias, laboratórios de matemática, jogos e celulares no ensino, mas os alunos estudam menos.

P10: Não houve muitas mudanças.

P11: Sim. Hoje em dia se costuma fazer uso de materiais manipuláveis para o ensino de frações.

P12: Sim. Há investimentos em pesquisas que buscam desenvolver a compreensão dos alunos, em relação aos números fracionários.

P13: Os professores atuais dominam mais o referido conhecimento, e dispõem de materiais concretos como recursos metodológicos.

P14: A diferença está na forma de abordar o referido conteúdo às situações do cotidiano dos alunos.

P15: Não vejo muita mudança, porém podemos notar que o ensino de frações está saindo do abstrato.

P16: Muito pouco. Hoje há a contextualização do conteúdo.

P17: Sim. Hoje os alunos têm acesso a novas metodologias. Isso proporciona uma aprendizagem mais significativa a quem realmente quer aprender.

P18: Sim, porque na nossa época, mesmo com o método tradicional, nós aprendíamos. Mas hoje os alunos não contribuem muito com a própria aprendizagem.

P19: A diferença está nos exercícios, que hoje são contextualizados.

P20: A diferença é que hoje há a utilização de material concreto.

P21: Com certeza, pois hoje, apesar de os alunos estarem mais desinteressados em relação ao aprendizado, ainda acho que conseguem com mais facilidade assimilar os conceitos.

P22: Sim. A facilidade de encontrar materiais didáticos como, por exemplo, slides, vídeos, montagem de materiais concretos e jogos.

P23: Sim. Hoje o ensino de frações é mais contextualizado.

P24: Sim, pois hoje temos muitas fontes de pesquisas como, por exemplo, as tecnologias, que têm ajudado muito.

P25: Antigamente o ensino era mais tradicional, a gente não fazia muitas experiências em sala de aula, não havia dinâmicas. Hoje a gente trabalha mais na prática.

Pergunta 4: Qual a importância de se ensinar frações atualmente?

P01: As frações podem permitir mais compreensão em muitas situações do cotidiano.

P02: É importante porque permitem destacar a diferença que existe entre os números inteiros e os não inteiros, além de remeterem a diversas situações do cotidiano.

P03: O ensino de frações é importante porque é comum o seu uso para expressar situações do cotidiano.

P04: Apesar de as representações fracionárias aparecerem pouco no dia a dia, é importante ensinar frações, pois é um conhecimento indispensável para o aprofundamento de outros conteúdos matemáticos, tais quais proporções, equações, dízimas periódicas, entre outras.

P05: É importante porque é um conteúdo utilizado no cotidiano.

P06: É importante ensinar frações porque ela é um dos conteúdos fundamentais da matemática.

P07: As frações compõem um dos assuntos mais importantes da matemática. A partir do estudo delas, aprende-se a dividir em partes iguais.

P08: A ideia de fração está presente no cotidiano das pessoas. É importante ensinar esse conteúdo, pois ele é indispensável para a formação do cidadão.

P09: Ajuda no desenvolvimento do raciocínio. Está presente no cotidiano.

P10: "Em um mundo que só enxerga o inteiro e prega a não divisão, filosoficamente, ensinar frações é muito mais do que (ensinar) matemática".

P11: "Estabelecer a relação parte todo e fazer".

P12: "Construir a relação da parte com o todo".

P13: Ensinar frações é importante, pois está presente em diversas áreas do conhecimento.

P14: É importante ensinar frações porque é um raciocínio que está presente em diversas situações do cotidiano.

P15: Ela é fundamental nos estudos dos problemas do cotidiano, como, por exemplo, as frações que estão presentes no dia a dia, no peso, quantidade, notas musicais, entre outros.

P16: Para mostrar que as frações estão presentes no dia a dia, como na cozinha, receita de bolo, no peso, nos preços.

P17: As frações estão relacionadas a diversos conteúdos ligados ao nosso dia a dia, como, por exemplo, probabilidade, porcentagem, estatísticas, entre outros que estão ligados de maneira direta aos contextos da atualidade.

P18: A importância é que as frações estão presentes no dia a dia, nas receitas, na divisão dos alimentos, nas compras, nas notas musicais, nas notas dos alunos etc.

P19: A importância é que as frações, como alguns outros conteúdos, estão muito presentes no nosso dia a dia.

P20: Atualmente, ensinar frações é importante no uso dos produtos químicos e medicamentos.

P21: Há conteúdos que são mais atuantes do que outros, pelo simples fato de estarem mais presentes no dia a dia dos alunos, e frações é um desses, pois o simples fato de se olhar a hora, pode se introduzir os conceitos de frações.

P22: A relação entre os números é de fundamental importância. Historicamente as frações surgiram devido às necessidades de medidas. Atualmente o ensino-aprendizagem de frações mostra aos nossos alunos as diversas formas de representar uma quantidade.

P23: Ampliar o conjunto numérico e relacionar situações cotidianas.

P24: Cada número tem a sua essência, e frações é muito importante, não só nas séries iniciais, mas em toda a jornada estudantil.

P25: É importante porque quando os alunos aprendem, eles aprendem a repartir, dividir.

Pergunta 05: Para você, quanto tempo é necessário para ensinar frações no 6º ano?

P01: Depende do nível de compreensão da turma, mas acredito que mais ou menos 10 aulas é o suficiente.

P02: Precisamente umas 15 aulas para todo o conteúdo de frações e aplicação de exercícios, podendo variar de acordo com a realidade da turma.

P03: Para que o aluno aprenda, seria necessário que o ensino de frações se estendesse por todo o ano letivo, complementando os outros conteúdos matemáticos.

P04: De 8 a 10 aulas.

P05: O assunto é extenso, por isso, dependendo da turma, seria necessário 1 mês.

P06: Não existe um espaço de tempo determinado, pois cada aluno apresenta um desempenho diferente de aprendizado.

P07: Depende da compreensão dos alunos no decorrer das aulas. À medida que os alunos vão aprendendo eu vou abordando outras ideias de frações, mas costumo dedicar mais tempo explorando uma ideia, quando os alunos demoram mais a aprenderem.

P08: O conteúdo de frações é um pouco complexo para alunos do 6º ano, por isso acredito que são necessários 2 meses para ensinar todo o conteúdo.

P09: Dependendo do desenvolvimento da turma, são necessários 2 meses.

P10: No mínimo 3 meses, mas devido aos outros conteúdos que também devem ser ensinados durante o ano letivo, o tempo para o ensino de cada conteúdo é reduzido.

P11: 3 meses.

P12: Não sei, pois trabalho com alunos do Ensino Médio.

P13: 'Frações e todas as suas operações e aplicações devem ser trabalhadas durante todo um bimestre'.

P14: As frações deveriam ser ensinadas durante todo o ano letivo.

P15: No mínimo 1 bimestre.

P16: Quase 1 bimestre todo.

P17: É necessário, no mínimo, 1 mês, o que corresponde a 20 ou 24 aulas, dependendo da carga horária da escola.

P18: O tempo necessário para atingir os objetivos necessários.

P19: O tempo necessário para que os alunos aprendam.

P20: É 1 mês o tempo necessário para ensinar frações no 6º ano.

P21: Um bimestre seria o suficiente, desde que haja uma forma eficiente de se ensinar frações.

P22: Deveria ser reservado um bimestre, mas infelizmente não dispomos desse tempo.

P23: Entre 8 e 10 aulas. Depende muito do nível da turma.

P24: Não tem um tempo determinado. O correto é ensinar até que os alunos aprendam.

P25: Eu acho que o tempo todo, pois a gente ensina no 6º ano, mas também é necessário ensinar no 7º e no 8º ano, porque é um conteúdo que vai ser necessário mais adiante, para o estudo de outros conteúdos.

Pergunta 6: O que poderia permanecer ou mudar no ensino de frações?

P01: Poderia permanecer ideias associadas a frações equivalentes, frações irredutíveis e operações com frações, e poderia evitar propor um número exagerado de exercícios, principalmente os que não têm alguma relação com o cotidiano dos alunos.

P02: Disponibilização, pela escola, de um laboratório que ofereça recursos concretos e jogos para o ensino de frações.

P03: -----

P04: Poderia ser explorado mais a forma decimal dos números racionais, pois são números que se encontram presentes no nosso cotidiano.

P05: Poderia deixar do jeito que está.

P06: Deveria ser dada mais ênfase na multiplicação e divisão de frações. A falta de prática faz com que os alunos cheguem ao Ensino Médio sem compreender o referido conteúdo.

P07: Eu não mudaria nada.

P08: É necessário que haja mudança no modo em que se ensina. É importante que haja contextualização, de forma que o conteúdo não seja abordado de forma pronta e acabada.

P09: O conteúdo de frações poderia ser abordado de forma a envolver o conhecimento de mundo dos alunos. Ex.: bolo cortado, pizza, jogos.

P10: Poderia ser utilizada a resolução de problemas e atividades lúdicas no ensino-aprendizagem de frações.

P11: A teoria deveria ser relacionada com a prática.

P12: Poderia evitar o uso demasiado de algoritmos.

P13: ------

P14: Deveria se buscar mais esta atividade conceitual, pois ela é bem cobrada em diversas questões de avaliações, principalmente em avaliações externas.

P15: Acho que o ensino de frações deve apresentar cada vez mais alguns problemas do cotidiano, tornando-se, assim, um ensino mais contextualizado.

P16: Permanecer algumas definições e mudar alguns exemplos, trazendo para o cotidiano do aluno.

P17: As aulas expositivas devem permanecer, pois elas são importantes para a exposição de conteúdo, porém devem ser inseridos métodos mais dinâmicos e aulas mais práticas, com a utilização de jogos, motivando o alunado no seu processo de aprendizagem.

P18: O que poderia permanecer são as metodologias que contribuem com a compreensão dos conceitos, como a utilização de jogos, por exemplo.

P19: Poderia mudar algumas metodologias, para tornar o ensino de frações mais lúdico e atrativo para o aluno, e permanecer aquelas que favorecem a compreensão dos mesmos.

P20: Deveria permanecer a maneira que os livros didáticos trazem os conteúdos, mas eles poderiam ter mais atividades lúdicas.

P21: Mudar a abordagem, pois infelizmente ainda temos uma visão desnorteada, principalmente porque há uma introdução desse conteúdo nos 3º e 4º anos, mas os alunos chegam ao 6º ano com uma visão incorreta sobre frações.

P22: Deve permanecer o tradicional, mas é muito importante acrescentar a ludicidade ao conteúdo.

P23: Deveria permanecer a abordagem de transformação de fração em número decimal; utilização de contextualização e de materiais manipuláveis.

P24: O que deve permanecer é a prática de atividades dentro e fora da sala de aula e o uso das tecnologias. O que deve mudar são os livros, pois eles vêm com poucos exercícios para que os alunos pratiquem.

P25: As aulas práticas devem permanecer. Acho muito importante que o professor não fique somente com uma abordagem tradicional. É importante que sejam dadas aulas práticas (aulas com utilização de objetos concretos), pois assim os alunos aprendem.

Pergunta 7: Como você avalia a abordagem do conteúdo de frações nos livros didáticos?

P01: Nota-se uma abordagem significativa sobre o conteúdo de frações.

P02: Estão em um nível elevado, quando é considerado o nível de aprendizagem dos alunos, mas, dependendo do ponto de vista, está bom.

P03: Percebo que está evoluindo, permitindo que o aluno questione, analise, critique e, principalmente, desenvolva conceitos.

P04: É relativo. Há alguns livros que exploram muito bem o conteúdo de frações, mas fica a critério do professor fazer ou não fazer diferente do que o livro propõe.

P05: É boa.

P06: Alguns livros deixam a desejar.

P07: Na maioria dos livros o conteúdo de frações é muito resumido.

P08: Muitos livros dão ênfase à contextualização do conteúdo de frações. Isso mostra que houve avanço na forma como o referido conteúdo é abordado nos livros didáticos.

P09: Os livros apresentam mudanças. Abordam mais exercícios e problemas envolvendo o cotidiano.

P10: Trazem uma abordagem péssima para os alunos, embora nos livros do professor haja propostas interessantes para o ensino de frações.

P11: Contextualizam pouco o conteúdo.

P12: De modo geral, os livros mostram um avanço em relação à abordagem do conteúdo de frações.

P13: Alguns livros fazem uma abordagem interessante do conteúdo de frações, mas deixam a desejar, pois não exploram bem as aplicações e demonstrações dos procedimentos realizados.

P14: Hoje os livros costumam conciliar a teoria com situações que ocorrem no dia a dia.

P15: Razoável, mas acho que deveria ter mais resolução de problemas.

P16: Precisa trazer mais para a realidade do aluno.

P17: As abordagens são feitas de maneira significativa. Basta apenas que o professor utilize a melhor metodologia em sala.

P18: A abordagem é boa, pois parte sempre de uma situação real.

P19: É uma abordagem boa, pois em sua maioria os livros partem de situações do dia a dia.

P20: Os livros didáticos fazem uma boa abordagem sobre o conteúdo de frações.

P21: Alguns bons, pois apresentam uma abordagem atualizada e exemplificada, mas há outros de forma direta, sem aquela definição prévia.

P22: Os livros didáticos abordam o conteúdo de frações de uma maneira lúdica. Também deveriam enfocar na realidade dos alunos.

P23: Existem alguns livros que trazem uma abordagem bastante simplificada. Depende muito do autor.

P24: Os livros didáticos ajudam um pouco, mas ainda deixam a desejar. Os exercícios sobre frações e outros conteúdos vêm muito resumidos. O professor precisa pesquisar e fazer outras atividades. Não pode só se deter ao livro didático.

P25: Os livros de hoje em dia são melhores, pois eles têm clareza nos objetivos e nos conteúdos. Há livros que basta que o aluno leia, para que compreenda o conteúdo.

Pergunta 8: Que sugestões você daria para a melhoria do ensino de frações nas escolas?

P01: Focar mais nas diferentes ideias que as frações podem apresentar, e na utilização da resolução de problemas que chamem a atenção dos alunos, dando menos ênfase à aplicação de algoritmos e exercícios longos.

P02: Fazer uso de materiais concretos e do laboratório de matemática.

P03: Utilizar situações problema que possam refletir as experiências vividas pelos alunos e incentivá-los a pensar e criar.

P04: Proporcionar um ensino com a utilização de jogos, dobraduras e atividades em grupo.

P05: Dar ênfase à utilização de exemplos concretos.

P06: Utilizar materiais concretos e situações que envolvam práticas do cotidiano do aluno.

P07: É importante que as escolas disponibilizem materiais diversos para o ensino-aprendizagem de frações, pois na maioria das vezes o professor é quem arca com os gastos dos materiais.

P08: Dar ênfase a recursos que permitam que os alunos compreendam o que é ensinado, em vez de mostrar passos pré-definidos de como devem ser feitas, por exemplo, as operações com frações. Poderia haver a implantação de laboratórios de matemática.

P09: É importante planejar aulas de forma que haja a aplicação do conteúdo abordado, tornando-o mais interessante para os alunos.

P10: Poderia haver várias abordagens para o ensino frações, e que elas fossem inseridas nos livros didáticos.

P11: Explorar contextualizações e utilizar materiais concretos no ensino de frações.

P12: Utilizar materiais manipuláveis e resolução de problemas no ensino-aprendizagem.

P13: É importante que o professor apresente várias formas de representação e várias aplicações dos números fracionários.

P14: Conciliar ao cotidiano dos alunos e destinar mais tempo também em outros anos, além do 6º, para o ensino de frações.

P15: Trazer situações vivenciadas por músicos, comerciantes, entre outras situações para o ensino em sala de aula.

P16: Utilizar materiais diferentes para trabalhar frações.

P17: Que os professores utilizem os jogos e as representações geométricas como apoio em suas aulas.

P18: Que seja dada uma maior atenção ao ensino de frações nos anos iniciais, visto que os alunos chegam às séries/anos posteriores com muitas dificuldades de compreender e usar números fracionários.

P19: Trabalhar de forma contextualizada nos exercícios e problemas; usar material concreto para tornar as aulas mais atrativas.

P20: Mais tempo para ensinar o conteúdo; mais atividades com material concreto.

P21: Trabalhar frações com situações do dia a dia dos alunos e, principalmente, dar um foco nas definições.

P22: Seria muito importante se fossem disponibilizados materiais didáticos às escolas.

P23: A falta de material é um grande problema, pois para trabalhar com vários alunos o custo fica alto para o professor.

P24: É preciso que o aluno e o professor tenha coragem de buscar fontes de pesquisas que possam melhorar a aprendizagem, não só do conteúdo de frações, mas no caso de qualquer conteúdo de matemática.

P25: É importante que seja dada continuidade à realização de aulas práticas, fazendo uso de materiais concretos, pois isso resulta em mais aprendizagem para os alunos.

Pergunta 9: Você se lembra de ter participado de alguma oficina ou mini-curso sobre o ensino-aprendizagem de frações? O que foi discutido?

P06: Lembro. Participei de um mini curso no qual foi discutida a falta de domínio sobre o conteúdo de frações e outros conteúdos matemáticos que os estudantes apresentam.

P07: Não.

P08: Não participei de oficinas sobre o ensino-aprendizagem de frações.

P09: Não.

P10: Já participei, mas o curso dava ênfase à teoria sobre frações.

P11: Não.

P12: Não participei.

P13: Não.

P14: Não.

P15: Sim. Participei de uma oficina que apresentou diversas metodologias interessantes sobre o ensino aprendizagem de frações.

P16: Não participei de mini-cursos nem de oficinas sobre frações.

P17: Não participei.

P18: Sim. Houve discussões sobre as dificuldades dos professores em relacionar o conteúdo a atividades diferenciadas e lúdicas.

P19: Sim. Houve discussões sobre as dificuldades que os professores em relacionar o conteúdo de frações a atividades diferenciadas e lúdicas.

P20: Não me lembro de ter participado de oficina ou mini-curso sobre frações.

P21: Não participei.

P22: Sim. Em linhas gerais, falamos sobre jogos matemáticos.

P23: Vi algo sobre frações na graduação. Foi discutida a questão da parte-todo, tanto relacionando-a à realidade, quanto somente à teoria.

P24: Não.

P25: Não. De frações não.

Pergunta 10: Sobre outros pontos você gostaria de falar sobre o ensino-aprendizagem de frações?

P01: Gostaria de ressaltar a importância de, desde o Ensino Fundamental, relacionar frações e probabilidade, respeitando o grau de maturidade dos alunos.

P02: A utilização de recursos tecnológicos e de materiais manipuláveis auxilia o ensino de frações, pois possibilitam que alunos e professores façam associações e comparações, contribuindo para um aprendizado consistente e duradouro.

P03: ---

P04: ---

P05: É importante manter o ensino de frações, pois é um conhecimento que aparece em algumas situações do nosso dia a dia.

P06: É importante que os alunos tenham contato com as frações relacionando-as a situações do cotidiano e com a teoria, pois dessa forma eles compreendem melhor esse conteúdo.

P07: Aprender frações é importante, pois é uma forma de relacionar algumas situações do cotidiano com a matemática, e, assim, esse conhecimento resulta em mais um conhecimento que permite resolver situações problema.

P08: Os procedimentos metodológicos adotados pelos professores, como as aulas expositivas, por exemplo, não permitem que os alunos compreendam os conteúdos abordados. Há casos em que os professores desejam realizar uma aula diferente da tradicional, mas não é possível porque a escola não disponibiliza os recursos necessários.

P09: O conteúdo de frações é importante para o desenvolvimento da aprendizagem dos alunos.

P10: ---

P11: ---

P12: ---

P13: “O que temos observado é que os diversos conteúdos, quando são expressos por meio de frações, surgem questionamentos e dúvidas mais freqüentes. Podendo-se, então, repensar a prática de ensino e a forma de como está se dando a aprendizagem desse conteúdo”.

P14: Aprendizagem de frações, por ser um conceito que é abordado não só para matemática, mas também em diversos conteúdos em outras áreas, ou disciplina, acredito que outros professores de outras áreas também deveriam ter o conhecimento do algoritmo para resolver situações envolvendo operações com frações.

P15: Considero importante que o ensino de frações não fique apenas nos livros e que os professores busquem novas metodologias que promovam melhorias no ensino-aprendizagem de frações.

P16: Conceitos básicos e situações concretas que sejam do contexto do educando, para que ele saiba lidar e assim introduzir um conceito relacionado com o que ele já conhece.

P17: Na minha opinião, deveria haver cursos de formação continuada que permitissem o acesso de alguns professores a metodologias diferenciadas, propiciando, dessa forma, uma aprendizagem mais significativa, pois as frações estão ligadas diretamente a diversos conteúdos da nossa realidade.

P18: Percebemos que existem poucas pesquisas desenvolvidas sobre o ensino-aprendizagem de frações, o que contribui para que as aulas sejam apenas expositivas, onde o professor utiliza o livro didático como único material de apoio para a elaboração de suas aulas.

P19: Um ponto importante a se falar sobre esse tema, é o fato de que não temos nem muito tempo e nem muitas fontes para pesquisarmos ideias, sugestões que possam melhorar a nossa prática, o que nos leva a usar o livro didático como fonte principal, e às vezes até única.

P20: Deveria ter mais contextualização do conteúdo; e material concreto para facilitar a aprendizagem das operações.

P21: Fazer que o entendimento do aluno chegue ao ponto de conhecer que as frações não são dois números diferentes, mas que se trata da representação de um único número. Usar as frações equivalentes para conseguir aplicar as operações de adições e subtrações, deixando o MMC apenas como disposto para manipular cálculos de uma complexidade maior.

P22: ---

P23: ---

P24: O conteúdo de frações é muito bom de ser explorado. Os alunos gostam muito, principalmente se o professor for dinâmico e criativo para passar esse conteúdo de maneira diversificada.

P25: Da forma como os professores estão trabalhando hoje em dia (utilizando materiais concretos ou desenhos representando frações) o aluno só não aprende se não quiser.