UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UEPB

Algumas Equações Funcionais de uma Variável e Aplicações

Cleyson Cassimiro de Souza

Orientador: Prof. Dr. Francisco Sibério Bezerra Albuquerque

Campina Grande-PB
Junho/2017

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UEPB

Algumas Equações Funcionais de uma Variável e Aplicações

por

Cleyson Cassimiro de Souza

Dissertação apresentada ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT -UEPB, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre.

S729a Souza, Cleyson Cassimiro de.
Algumas equações funcionais de uma variável e aplicações [manuscrito] / Cleyson Cassimiro de Souza. - 2017.
62 p.

Digitado.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2017.
"Orientação: Prof. Dr. Francisco Sibério Bezerra Albuquerque, Departamento de Matemática".

1. Funções. 2. Limites. 3. Equações funcionais. I. Título.
21. ed. CDD 515.25

Algumas Equações Funcionais de uma Variável e Aplicações

por

Cleyson Cassimiro de Souza

Trabalho de Conclusão de curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT -UEPB, modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Aprovado por:

Marcelo Carvalho Ferreira

Prof. Dr. Marcelo Carvalho Ferreira - UFCG
Examinador

Aldo trajano Lourêdo

Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo - UEPB
Examinador

Francisco Sibério B. Albuquerque

Prof. Dr. Francisco Sibério Bezerra Albuquerque - UEPB
Orientador

Universidade Estadual da Paraíba
Centro de Ciências e Tecnologia
Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Junho/2017

Dedicatória

Aos meus pais Severino Cassimiro e Maria Josileide,
por todo apoio e incentivo, DEDICO.

Agradecimentos

A Deus pelo dom da vida, pela saúde e força para ter chegado até aqui.

Aos meus pais Severino Cassimiro e Maria Josileide, pelo amor, pelos ensinamentos e incentivo ao longo de toda minha caminhada acadêmica e a meus irmãos Joabson Casimiro e Cleyton Cassimiro, pelo incentivo.

A minha família, em especial aos meus avós Firmino Souza (*in memorian*) e Creuza por sempre acreditarem no meu sucesso.

A minha noiva Gerlane Macedo dos Santos por todo carinho, compreensão e incentivo no desenvolvimento deste trabalho e no dia a dia.

Aos professores do PROFMAT, pelo conhecimento adquirido ao longo deste curso.

Aos meus colegas de graduação Mauri, Newton e Dayvson pela companhia na jornada dos primeiros anos de formação.

Aos meus colegas de mestrado, em especial aos amigos Alexandre, Erivan, Mailson e Wesklemir pela amizade e companheirismo ao longo dessa caminhada.

Ao meu orientador Professor Francisco Sibério, pela paciência, ensinamentos e pela escolha deste belo tema que tive o privilégio de estudar.

Enfim, a todos que contribuíram de forma direta ou indiretamente para que eu chegasse até aqui.

Resumo

Neste trabalho, apresentaremos alguns casos especiais de equações funcionais de uma variável juntamente com algoritmos específicos que nos ajudarão a encontrar soluções para estes tipos de equações. Com o objetivo de suprir um pouco da carência de materiais escritos em português sobre o tema, exploramos primeiramente conceitos básicos de funções e limites para em seguida ingressar de fato nas equações funcionais de uma variável. Por fim, apresentaremos alguns exercícios nos quais a teoria vista durante o trabalho pode ser aplicada.

Palavras-Chaves: Funções, Limites, Equações Funcionais

Abstract

In this work, we will present some special cases of functional equations of one variable together with specific algorithms that will help us to find solutions for these types of equations. In order to fill some of the lack of Portuguese written materials on the subject, we first explore basic concepts of functions and limits and then actually enter into the functional equations of one variable. Finally, we will present some exercises in which the theory seen during the work can be applied.

Keywords: Functions, Limits, Functional Equations

Lista de símbolos e terminologia

1. cos .... Função Cosseno
2. sen .... Função Seno
3. ln .... Logaritmo Natural
4. e .... Exponencial
5. Gr .... Grau do polinômio
6. f_e^{-1} .... Inversa à esquerda da função f
7. f_d^{-1} .... Inversa à direita da função f

Sumário

Introdução

Durante o curso de Licenciatura Plena em Matemática tive a oportunidade de me aproximar cada vez mais dos números. A afinidade com a matemática já despertada durante o ensino médio pôde ser aguçada durante a graduação, a partir da oportunidade de me aprofundar em conteúdos já vistos anteriormente e de conhecer novos conceitos matemáticos. Com o ingresso no PROFMAT tive o prazer de me deparar com problemas desafiadores que me fizeram apaixonar ainda mais pela Matemática.

Quando escolhido o tema sobre equações funcionais para o desenvolvimento deste trabalho, a primeira reação foi de medo por se tratar de um tema que não havia estudado na graduação nem no mestrado. Além disso, esse é um tema sobre o qual não existem muitos artigos ou livros a respeito e destes poucos existentes a maioria não está escrito em português. Quando se trata das equações funcionais de uma variável, a bibliografia é ainda mais escassa.

Dentre os poucos trabalhos escritos em português não poderíamos deixar de destacar [9] que nos traz uma enorme contribuição no que tange às equações funcionais. Apesar de tratar do mesmo tema do trabalho que apresentaremos a seguir, o foco é totalmente diferente pois é direcionado para equações funcionais de duas variáveis, como por exemplo, as equações de Cauchy, Jesen e d'Alembert, equações estas que tem por característica a linearidade, o que as diferencia das apresentadas neste trabalho. Como podemos observar nenhuma das equações de conjugação tratadas aqui é um caso particular das equações funcionais de duas variáveis.

Os estudos e descobertas durante a graduação e o mestrado, em especial essa identificação com temas desafiadores conquistada durante o PROFMAT, foram as principais fontes inspiradoras para que eu decidisse desenvolver esta dissertação. O objetivo principal da mesma é fornecer aos alunos do ensino básico um material em língua portuguesa sobre os fundamentos das equações funcionais de uma única variável e, também, oferecer alguns algoritmos para encontrar soluções para essas equações .

No Capítulo 1, iniciamos fazendo uma breve abordagem histórica sobre as equações algébricas e funcionais, mostrando como se desenvolveram nas civilizações ao longo do tempo. Como veremos no decorrer do trabalho, as equações funcionais diferem das equações algébricas pelo fato da incógnita ser uma função ao invés de ser um número.

No Capítulo 2, faremos uma explanação sobre os principais conceitos, definições, proposições e teoremas de funções e limites que servem de base para se chegar ao objetivo principal do trabalho.

No Capítulo 3, apresentamos uma família de equações funcionais de uma variável chamada de equações de conjugação e na sequência algoritmos que nos levam a encontrar soluções para equações pertencentes a esta família. Mostramos ainda resultados sobre equações funcionais com radicais múltiplos e equações polinomiais. Exemplos foram trabalhados em detalhes para mostrar os passos na utilização do método das séries de potências para a resolução de equações funcionais.

Finalmente, no Capítulo 4, concluímos este trabalho aplicando os resultados e algoritmos mostrados por meio da resolução de exercícios.

Capítulo 1

Um breve histórico

1.1 Breve histórico das equações

As equações tiveram grande importância em diversos momentos da história do desenvolvimento da matemática. As primeiras evidências do uso de equações estão associadas ao mais antigo documento matemático do antigo Egito, o Papiro de Ahmes. Além desse podemos destacar também o Papiro de Moscou que contém 25 problemas matemáticos escritos por volta de 1890 a.C. [4].

Alguns problemas egípcios não se referem a objetos concretos e nem exigem operações entre números conhecidos. Ao invés disso, pedem o equivalente a soluções de equações lineares como, por exemplo, da forma $x + ax = d$. No Papiro de Ahmes, podemos citar o problema 24 que pede o valor de aha (a incógnita é chamada de "aha") sabendo-se que aha mais um sétimo de aha vale 19. A solução de Ahmes é característica de um processo conhecido como "método da falsa posição", ou ainda "regra do falso" no qual admitimos um valor específico, provavelmente falso, para aha e as operações indicadas à esquerda do sinal de igualdade são efetuadas sobre esse suposto número. Comparamos o resultado obtido com o resultado que desejamos e usando proporções chega-se à resposta correta [1].

O nível de desenvolvimento da álgebra babilônica era maior do que a egípcia. Enquanto no Egito se tratava muito de equações lineares, os babilônios as achavam muito elementares para merecer atenção. Para eles a solução da equação quadrática completa não apresentava uma dificuldade séria já que tinham desenvolvido operações algébricas flexíveis. Podiam, por exemplo, multiplicar ambos os membros de uma equação por quantidades iguais para remover frações ou eliminar fatores. Até a modernidade não se imaginava como resolver uma equação quadrática da forma $x^2 + px + q = 0$, em que p e q

são positivos pois a equação não tem raiz positiva. Na antiguidade, na Idade Média e no começo do período moderno, as equações quadráticas foram classificadas em três tipos, quais sejam:

(i) $x^2 + px = q$;

(ii) $x^2 = px + q$;

(iii) $x^2 + q = px$.

Para confirmar esta superioridade no nível de desenvolvimento da álgebra babilônica em relação a egípcia podemos ainda destacar os registros de que tratam sobre resoluções de equações cúbicas. Enquanto no Egito não há registro desse tipo de equação, na babilônia os exemplos são muitos.

Na Grécia teve início a chamada álgebra sincopada com destaque para os estudos desenvolvidos sobre equações algébricas por Diofanto de Alexandria[1], considerado o "pai da álgebra". A primeira obra de Diofanto, "Aritmética" foi um tratado de treze livros, dos quais apenas os seis primeiros se preservaram. Esses livros que se preservaram, dedicavam-se à resolução de 150 problemas envolvendo uma grande variedade de equações. Diofanto não possuía um método geral para resolução dessas equações. Porém, para resolver cada problema específico ele lançava mão de artifícios engenhosos. Suas contribuições representam um passo importante para a matemática abstrata.

Uma nova concepção sobre teoria das equações tornou-se visível a partir dos estudos árabes. Como forma de tentar desfazer a supremacia do conhecimento grego, os árabes já de posse das obras gregas e indianas expandiram sua sabedoria e fortaleceram a Álgebra levando-a para além da divisão entre número e grandeza, que era formada pela matemática Euclidiana. Além disso, reconheceram os irracionais como número, elaboraram um cálculo algébrico sobre expressões polinomiais e expandiram as operações aritméticas a essas expressões.

No século XVI, François Viète[2] deu início a fase simbólica da Álgebra com a introdução do simbolismo para os coeficientes. Tendo apresentado uma padronização das

[1]Diofanto tem o seu nome ligado à cidade que foi o maior centro de atividade matemática na Grécia antiga. Pouco se sabe acerca da sua vida, o desconhecimento impede-nos mesmo de fixar com segurança em que século viveu. Têm sido sugeridas datas distanciadas de um século, antes ou depois do ano 250 d. C. Por uns versos encontrados no seu túmulo, escritos em forma de um enigmático problema, deduz-se que viveu 84 anos.

[2]François Viète nasceu no ano de 1540 em Fontenay-le-Comte, na França, e morreu no dia 13 de dezembro de 1603 em Paris. Apaixonado por álgebra, esse matemático francês foi responsável pela introdução da primeira notação algébrica sistematizada, além de contribuir para a teoria das equações. Na álgebra, foi Viète que adotou vogais para as incógnitas, consoantes para os números conhecidos, gráficos para resolver equações cúbicas e biquadradas (ou de 4º grau) e trigonometria, para as equações

representações, utilizando vogais para representar as incógnitas e consoantes para os coeficientes, todas em letras maiúsculas do alfabeto.

1.2 História das equações funcionais

As equações funcionais são bastante parecidas com as equações algébricas, diferenciando-se pelo fato das incógnitas serem funções definidas em um certo intervalo da reta real. Bem antes de sua formalização, as equações funcionais já vinham sendo objeto de estudo e trabalho de vários matemáticos. Através de uma equação funcional, o matemático Nicole d'Oresme[3] forneceu uma definição indireta de funções lineares. Porém esta definição de linearidade representa apenas um exemplo de equações funcionais. Em 1352, Oresme escreveu um importante tratado de uniformidade e deformidade de intensidades, intitulado *Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum.* Neste trabalho, ele estabeleceu a definição de uma relação funcional entre duas variáveis e a ideia que se pode expressar essa relação geometricamente.

Durante mais algumas centenas de anos essas equações foram sendo utilizadas por vários matemáticos sem que a teoria tivesse sido formalizada, entre eles destaca-se Gregório de Saint-Vincent[4] cujo trabalho sobre a hipérbole fez uso implícito da equação funcional

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

e foi pioneiro na teoria do logaritmo. O trabalho de Saint-Vincent apareceu em seu grande tratado de 1647 intitulado *Opus Geometricum quadraturae circuli et sectionum coni* que trata de métodos para calcular áreas e propriedades de seções cônicas. Em particular mostra como é possível calcular a área sob uma hipérbole como $y = x^{-1}$. Nos tempos modernos, a área sob uma curva, como uma hipérbole, é um tópico geralmente deixado para a teoria da integração. No entanto, Saint-Vincent fez grandes progressos no problema usando argumentos puramente geométricos.

---

de graus mais elevados. Viète, que também simplifica as relações trigonométricas, pode ser considerado um precursor da geometria analítica.

[3]Um dos pensadores mais originais do século 14, o francês Nicole d'Oresme (1323-1382) foi economista, matemático, físico, astrônomo, filósofo, psicólogo e musicólogo. Também estudou teologia em Paris, posteriormente tornando-se diretor financeiro da Universidade de Paris, em seguida cânone e finalmente supervisor religioso de Rouen. Em 1370, foi apontado como ministro ao Rei Charles V e o aconselhou em assuntos financeiros.

[4]Gregório de Saint-Vincent foi um jesuíta nascido em 08 de Setembro de 1584 em Bruges, Bélgica e falecido em 27 de Janeiro de 1667 em Gante, Bélgica. O trabalho principal de Saint-Vincent é um livro de mais de 1.250 páginas que inclui um estudo de círculos, triângulos, série geométrica, elipses, parábolas e hipérboles.

Embora a definição de linearidade de Oresme possa ser interpretada como um exemplo inicial de uma equação funcional, ela não representa um ponto de partida para a teoria das equações funcionais. O surgimento do conceito de equações funcionais é datada do trabalho de Augustin Louis Cauchy[5]. Nascido em 1789 em Paris na França, Augustin Louis Cauchy trabalhou em diversas áreas da matemática tendo maior destaque por seus trabalhos no cálculo e é reconhecido como um dos fundadores da moderna teoria da Análise Matemática. A Cauchy associamos a equação funcional

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

para todos x e y reais. A equação acima é denominada **Equação de Cauchy**.

No campo das equações funcionais de uma variável podemos destacar matemáticos importantes, como por exemplo, Niels Henrik Abel (1802-1829), de uma família humilde e numerosa, considerado um dos mais brilhantes matemáticos de todos os tempos por seus profundos resultados em Álgebra e Teoria das Funções; Outro, Srinivasa Ramanujan (1887-1920), que é considerado o gênio hindu do século vinte por ter mostrado contribuições importantes para o estudo de equações funcionais através do estudo sobre radicais múltiplos. Em 1911, Ramanujan propôs o problema de calcular

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{\ldots}}}}$$

Esse radical múltiplo apareceu em 1966 na 27ª competição de Putnam, onde os alunos foram convidados a provar que o radical múltiplo valia 3. O problema não é uma equação funcional em si, e a solução oficial não envolve equações funcionais. No entanto, há uma equação funcional escondida aqui. Ramanujan havia feito contatos na comunidade matemática e começou a publicar e resolver problemas no *Journal of the Indian Mathematical Society*, que é onde ele colocou o problema apresentado acima. Era típico de tais problemas que eles seriam publicados no Jornal e que as soluções seriam publicadas posteriormente. No entanto, o problema de Ramanujan permaneceu sem resolução até ele mesmo o resolver. Segundo [1] podemos observar na obra de Ramanujan o caráter desorganizado, a força do raciocínio intuitivo e o pouco caso pela geometria.

[5] Augustin Louis Cauchy nasceu em 21 de agosto de 1789 e faleceu no ano de 1857. Foi um matemático francês, considerado um dos impulsores da análise no século XIX. Nasceu em Paris e estudou na Escola Politécnica desta cidade. Cauchy verificou a existência de funções elípticas recorrentes, deu o primeiro impulso para a teoria geral de funções e fixou a base para o tratamento moderno da convergência de séries infinitas. Também aperfeiçoou o método de integração das equações diferenciais de primeiro grau. No campo da física, interessou-se pela propagação da luz e da teoria da elasticidade.

As equações funcionais, em especial as de duas variáveis, também encontraram seu espaço em olimpíadas de matemática e na matemática recreativa. A ideia de lançar desafios matemáticos e quebra cabeças para outras pessoas é muito antiga. Durante o Renascimento italiano, era comum que os matemáticos desafiassem publicamente outras pessoas a respeito de soluções para certos problemas. Atualmente várias revistas e até livros são dedicados exclusivamente para a resolução de problemas matemáticos que geralmente são de assuntos do nível médio ou no máximo da graduação, porém exigem um pensamento crítico matemático para que possam ser respondidos. Nos Estados Unidos e no Canadá, revistas como Agazine de Matemática, publicadas pela Associação Matemática da América, dedicam espaço a problemas de matemática. O jornal, Crux Mathematicorum, publicado pela A Canadian Mathematical Society, é dedicada inteiramente a publicar problemas. Seu título completo, Crux Mathematicorum com Causas Matemáticas, reflete o fato de que é uma união de dois periódicos anteriores, Crux Mathematicorum e Causas Matemáticas. Como um jornal independente, Mathematical Mayhem foi escrito por e para estudantes.

Muitos países oferecem um sistema matemático de olimpíadas para estudantes do ensino médio com um sistema de competições que culmina em uma olimpíada nacional. Além disso, a Olimpíada Internacional de Matemática (IMO) envolve mais de 80 países, sendo cada país representado por um grupo de elite de seis estudantes. As equações funcionais aparecem frequentemente entre as questões colocadas na IMO e são regularmente selecionadas para consideração a cada ano. No nível universitário, as escolhas para estudantes são menores. No entanto, na América do Norte, a competição William Lowell Putnam é realizada regularmente no primeiro sábado de dezembro em mais de 300 universidades e faculdades nos Estados Unidos e no Canadá. Os problemas envolvendo equações funcionais fizeram uma aparição precoce na história desta competição. As equações funcionais aparecem com frequência entre esses problemas pois muitas vezes suas soluções requerem apenas manipulações algébricas e raciocínio. Geralmente em problemas iniciais de olimpíadas as equações funcionais são classificadas mais como matemática universitária devido ao fato de precisarmos ter afinidades com conteúdos que na maioria das vezes só é visto na universidade.

As competições em matemática e livros dedicados a problemas matemáticos também reservam espaço para inequações onde as incógnitas são funções, essas inequações são denominadas inequações funcionais. Livros como [13] apresentam problemas que envolvem esse tipo de desigualdade.

Existem equações funcionais em que as funções desconhecidas aparecem sob o sinal de integral, estas são denominadas equações funcionais integrais. A teoria das equações funcionais integrais pode ser considerada como desorganizada pelo menos até a descoberta por Fourier[6] do teorema sobre integrais que tem seu nome; Pois, embora esse não fosse o ponto de vista de Fourier, esse teorema pode ser considerado como uma declaração da solução de uma certa equação integral do primeiro tipo. Depois disso outros matemáticos começaram o tratamento das equações funcionais integrais de uma forma perfeitamente consciente, e muitos deles perceberam claramente qual era o lugar importante que a teoria estava destinada a preencher.

[6]Jean Baptiste Joseph Fourier, nascem em 21 de março de 1768, e morreu em 16 de maio de 1830. Foi um matemático francês conhecido principalmente pela sua contribuição à análise matemática do fluxo de calor. Ao longo de sua vida Fourier demonstrou o seu interesse em matemática e físicas matemáticas. Ele estabeleceu a equação diferencial parcial administrando a difusão de calor e resolveu isto usando série infinita de funções trigonométricas. Embora estas série terem sido usadas antes, Fourier as investigou em detalhe muito maior. A pesquisa dele, inicialmente criticada por sua falta de rigor, foi mostrada depois para ser válida. Proveu o ímpeto para o mais recente trabalho em séries trigonométricas e a teoria de funções de uma variável real.

Capítulo 2

Preliminares

Neste capítulo, iremos apresentar algumas noções básicas de funções e limites que serão importantes para o desenvolvimento deste trabalho.

2.1 Funções

Uma correspondência que associa a cada elemento de um conjunto um único elemento de outro conjunto é chamado de função. Esses conjuntos podem ser de qualquer tipo e não precisam ser iguais. Vejamos a seguir uma definição formal de função.

Definição 2.1. *Dados os conjuntos X e Y, uma função $f : X \rightarrow Y$ (lê-se "uma função de X em Y") é uma regra que diz como associar a cada elemento $x \in X$ um único elemento $y = f(x) \in Y$ (Lê-se "y igual a f de x").*

A notação $y = f(x)$ para designar uma função que depende da incógnita x, foi introduzida em 1734, por Leonard Euler[7].

Na definição apresentada, X é o conjunto no qual a função f está definida, ou seja, o *domínio* de f. O conjunto Y é o *contradomínio* da função f. Para cada $x \in X$, o elemento $f(x) \in Y$ chama-se a *imagem* de x pela função f, ou o valor assumido pela função f no ponto $x \in X$. O conjunto *imagem* é um subconjunto do *contradomínio* da função f.

[7]Leonard Euler (1707-1783) foi um importante matemático e cientista Suíço, sendo considerado um dos maiores estudiosos da matemática em sua época. Nasceu na Basiléia, Suiça, no dia 15 de Abril de 1707 e faleceu em São Petersburgo, Rússia, no dia 18 de setembro de 1783. Durante sua trajetória escreveu diversos trabalhos utilizando uma matemática inovadora.

2.1.1 Operações com funções

Nesta seção mostraremos como obter novas funções aplicando operações algébricas como a soma e a multiplicação de outras funções. Essas operações são definidas a seguir.

Definição 2.2. *Dadas as funções f e g, sua soma $f+g$, diferença $f-g$, produto $f \cdot g$ e quociente f/g, são definidas por:*

1. $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$;
2. $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$;
3. $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$;
4. $(f/g)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

O domínio das funções $(f+g)$, $(f-g)$ e $(f \cdot g)$ é a interseção dos domínios de f e g. O domínio de f/g é a interseção dos domínios de f e g, excluindo-se os pontos x onde $g(x) = 0$.

Definição 2.3. *Dadas duas funções f e g, a função composta de g com f, denotada por $g \circ f$, é definida por*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

O domínio de $g(f(x))$ é o conjunto de todos os pontos x no domínio de f tais que $f(x)$ está no domínio de g. Em símbolos,

$$D(g \circ f) = \{x \in D(f) : f(x) \in D(g)\}.$$

Exemplo 2.4. *Sejam $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x - 1$. A função composta $g \circ f$ é definida por*

$$g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x} - 1.$$

2.1.2 Função injetiva, sobrejetiva e bijetiva

Definição 2.5. *Uma função $f\colon X \to Y$ chama-se injetiva quando elementos diferentes em X são transformados por f em elementos diferentes em Y. Ou seja, f é injetiva quando $x \neq x'$ em X implica $f(x) \neq f(x')$. Equivalentemente, se $f(x) = f(x')$, para x, $x' \in X$, então $x = x'$.*

Definição 2.6. *Uma função $f\colon X \to Y$ chama-se sobrejetiva quando, para qualquer $y \in Y$, pode-se encontrar (pelo menos) um elemento $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Neste caso, o conjunto imagem é igual ao contradomínio.*

Definição 2.7. *Uma função $f\colon X \to Y$ chama-se bijetiva ou uma correspondência biunívoca quando, ela for sobrejetiva e injetiva.*

Exemplo 2.8. *A função $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, definida por $y = x^2$, é bijetiva.*
De fato,

i. $\forall x_1 \in \mathbb{R}_+$ *e* $\forall x_2 \in \mathbb{R}_+$, *se* $x_1 \neq x_2$, *então* $x_1^2 \neq x_2^2$. *Ou seja,* $f(x_1) \neq f(x_2)$. *Logo,* f *é injetiva.*

ii. $\forall y \in \mathbb{R}_+$ *existe um* $x = \sqrt{y} \in \mathbb{R}_+$ *tal que* $f(x) = (\sqrt{y})^2 = y$. *Logo,* f *é sobrejetiva.*

Portanto, de i e ii, segue que f é bijetiva.

2.1.3 Função inversa

Definição 2.9. *Diz-se que a função $f^{-1}\colon Y \to X$ é a inversa da função $f\colon X \to Y$ quando se tem $f^{-1}(f(x)) = x$ e $f(f^{-1}(y)) = y$ para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$.*

Evidentemente, f^{-1} é a inversa de f se, e somente se, f é a inversa de f^{-1}. Se $f^{-1}(f(x)) = x$ para todo $x \in X$, então a função f é injetiva, pois

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Por outro lado, a igualdade $f(f^{-1}(y)) = y$, valendo para todo $y \in Y$, acarreta f sobrejetiva. Com efeito, dado $y \in Y$ arbitrário, tomamos $x = f^{-1}(y) \in X$ e com isso $f(x) = y$. Portanto, se a função f : X$\to$ Y possui inversa, então f é injetiva e sobrejetiva, ou seja, é bijetiva. Reciprocamente, se a função f: X$\to$ Y é uma correspondência biunívoca entre X e Y, então f possui uma inversa f^{-1}: Y$\to$X.

Caso a função seja apenas injetiva ou sobrejetiva podemos definir uma inversa à esquerda ou uma inversa à direita, respectivamente, conforme definimos a seguir.

Definição 2.10. *Diz-se que a função $f_e^{-1}\colon Y \to X$ é a inversa à esquerda da função injetiva $f\colon X \to Y$ quando se tem $f_e^{-1}(f(x)) = x$ para qualquer $x \in X$.*

Definição 2.11. *Diz-se que a função $f_d^{-1}\colon Y \to X$ é a inversa à direita da função sobrejetiva $f\colon X \to Y$ quando se tem $f(f_d^{-1}(y)) = y$ para qualquer $y \in Y$.*

Exemplo 2.12. *A função $f : \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R} - \{-1\}$ definida por*

$$y = \frac{x-1}{3-x}.$$

Tem como inversa a função $f^{-1} : \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R} - \{3\}$ definida por

$$x = \frac{1+3y}{y+1}.$$

2.2 Limite de uma função

Nesta seção veremos a definição de limite e as principais propriedades relacionadas.

Definição 2.13. *Seja $f(x)$ definida num intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$, contendo a, exceto possivelmente no próprio a. Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x se aproxima de a é L e escrevemos*

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$.

Exemplo 2.14. *Usando a definição* (2.13) *mostre que*

$$\lim_{x\to 1}(5x - 3) = 2.$$

Devemos mostrar que, para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que

$$|(5x - 3) - 2| < \varepsilon$$

sempre que

$$0 < |x - 1| < \delta.$$

O exame da desigualdade envolvendo ε proporciona uma chave para a escolha de δ. Note que

$$|5x-3-2| < \varepsilon \Leftrightarrow |5x-5| < \varepsilon \Leftrightarrow |5(x-1)| < \varepsilon \Leftrightarrow |5|\cdot|x-1| < \varepsilon \Leftrightarrow 5|x-1| < \varepsilon \Leftrightarrow |x-1| < \frac{\varepsilon}{5}.$$

Então, podemos tomar $\delta = \dfrac{\varepsilon}{5}$. Assim, $|(5x - 3) - 2| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - 1| < \delta = \dfrac{\varepsilon}{5}$. Portanto,

$$\lim_{x\to 1}(5x - 3) = 2.$$

No exemplo acima foi relativamente simples usar a definição de limite para provar que um dado número era limite de uma função. Porém, quando passamos a estudar o limite de funções mais elaboradas esse processo se torna complicado. Na próxima seção apresentaremos propriedades que podem ser usadas para encontrar muitos limites sem precisar usar a definição formal.

2.2.1 Propriedades dos limites

Proposição 2.15. *Se* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *e* $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ *existem, e c é um número real qualquer, então:*

1. $\lim\limits_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$;

2. $\lim\limits_{x\to a} cf(x) = c \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$;

3. $\lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$;

4. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, *desde que* $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$;

5. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim\limits_{x\to a} f(x)]^n$ *para qualquer inteiro positivo n;*

6. $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$, *se* $\lim\limits_{x\to a} f(x) > 0$ *e n inteiro ou se* $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leq 0$ *e n é um inteiro positivo ímpar;*

7. $\lim\limits_{x\to a} \ln[f(x)] = \ln[\lim\limits_{x\to a} f(x)]$, *se* $\lim\limits_{x\to a} f(x) > 0$;

8. $\lim\limits_{x\to a} \cos[f(x)] = \cos[\lim\limits_{x\to a} f(x)]$;

9. $\lim\limits_{x\to a} sen[f(x)] = sen[\lim\limits_{x\to a} f(x)]$;

10. $\lim\limits_{x\to a} e^{f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$.

Como base para demonstrar a validade das propriedades apresentadas acima sugerimos consultar a referência [7].

Exemplo 2.16. *Calcule o limite*

$$\lim_{x\to 3}(3x^2 - 7x + 2).$$

Usando as propriedades de limites, temos

$$\lim_{x\to 3}(3x^2-7x+2) = \lim_{x\to 3} 3x^2 - \lim_{x\to 3} 7x + \lim_{x\to 3} 2 = 3\cdot 3^2 - 7\cdot 3 + 2 = 3\cdot 9 - 21 + 2 = 27 - 21 + 2 = 8.$$

Proposição 2.17. *Se $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ para todo x em um intervalo aberto contendo a, exceto possivelmente em $x = a$, e se*

$$\lim_{x\to a} f(x) = L = \lim_{x\to a} g(x)$$

então,

$$\lim_{x\to a} h(x) = L.$$

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Por hipótese,

$$\lim_{x\to a} f(x) = L.$$

Assim, existe $\delta_1 > 0$ tal que $|f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta_1$. Ainda da hipótese, temos

$$\lim_{x\to a} g(x) = L.$$

Dessa forma, existe $\delta_2 > 0$ tal que $|g(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta_2$. Tome $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Então, se $0 < |x - a| < \delta$ temos que $|f(x) - L| < \varepsilon$ e $|g(x) - L| < \varepsilon$, ou de forma equivalente, $L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon$ e $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$. Desse modo, usando a hipótese, concluímos que se $0 < |x - a| < \delta$, então,

$$L - \varepsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < L + \varepsilon,$$

isto é, $L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon$. Logo, se $0 < |x - a| < \delta$, temos que $|h(x) - L| < \varepsilon$ e, portanto,

$$\lim_{x\to a} h(x) = L.$$

$\square$

Exemplo 2.18. *Sendo*

$$1 - \frac{x^2}{4} \leq h(x) \leq 1 + \frac{x^2}{2}$$

para qualquer $x \neq 0$, calcule

$$\lim_{x\to 0} h(x).$$

Solução:
Utilizando as propriedades de limite, temos

$$\lim_{x\to 0}\left(1 - \frac{x^2}{4}\right) = 1$$

e

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x^2}{2}\right)=1.$$

Portanto, segue da proposição (2.17) que

$$\lim_{x\to 0} h(x)=1.$$

2.2.2 Limites no infinito

No que segue veremos o conceito de limites no infinito e algumas propriedades relacionadas.

Definição 2.19. *Seja f uma função definida em um intervalo aberto $(a,+\infty)$. Escrevemos*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$$

quando o número L satisfaz a seguinte condição: Para qualquer $\varepsilon>0$, existe $A>0$ tal que $|f(x)-L|<\varepsilon$ sempre que $x>A$.

Definição 2.20. *Seja f definida em $(-\infty,b)$. Escrevemos,*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$$

quando L satisfaz a seguinte condição: Para qualquer $\varepsilon>0$, existe $B<0$ tal que $|f(x)-L|<\varepsilon$ sempre que $x<B$.

Para os casos apresentados nas definições acima, as propriedades dos limites vistas na Proposição (2.15) permanecem inalteradas.

O próximo teorema nos ajudará bastante no cálculo dos limites no infinito.

Teorema 2.21. *Se n é um número inteiro positivo, então:*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0 \text{ e } \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0.$$

Demonstração. Inicialmente devemos provar que, para qualquer $\varepsilon>0$, existe $A>0$, tal que

$$\left|\frac{1}{x^n}-0\right|<\varepsilon,$$

sempre que $x > A$. O exame da desigualdade que envolve ε nos sugere a escolha de A. Notemos que

$$\left|\frac{1}{x^n} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{|x|^n} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{|x|^n}} < \sqrt[n]{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{|x|} < \sqrt[n]{\varepsilon} \Leftrightarrow |x| > \frac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon}}.$$

Dessa forma, tomando $A = \dfrac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon}}$, temos que

$$x > A \Rightarrow \left|\frac{1}{x^n} - 0\right| < \varepsilon,$$

donde,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0.$$

Analogamente, devemos provar que, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $B < 0$, tal que

$$\frac{1}{x^n} < \varepsilon,$$

sempre que $x < B$. O exame da desigualdade que envolve ε nos sugere a escolha de B. Notemos que

$$\left|\frac{1}{x^n} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{|x|^n} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[n]{|x|^n}} < \sqrt[n]{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{|x|} < \sqrt[n]{\varepsilon} \Leftrightarrow |x| > \frac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon}}.$$

Dessa forma, tomando $B = -\dfrac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon}}$, concluímos que

$$x < B \Rightarrow \left|\frac{1}{x^n} - 0\right| < \varepsilon.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0.$$

$\square$

Exemplo 2.22. *Determine*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x-5}{x+8}.$$

Note que neste caso, temos uma indeterminação do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$. Dividindo o numerador e o denominador por x, obtemos

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-5}{x+8}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\dfrac{5}{x}}{1+\dfrac{8}{x}}.$$

Utilizando as propriedades dos limites, temos

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\dfrac{5}{x}}{1+\dfrac{8}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}2-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5}{x}}{\lim\limits_{x\to+\infty}1+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{8}{x}}.$$

Do teorema (2.21),

$$\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}2-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5}{x}}{\lim\limits_{x\to+\infty}1+\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{8}{x}}=\frac{2-5\cdot 0}{1+8\cdot 0}=2.$$

Capítulo 3

Equações funcionais de uma variável

Equações funcionais são todas aquelas equações em que as incógnitas são funções. Neste capítulo, iremos abordar algumas das principais equações funcionais de uma variável. Apresentaremos essas equações juntamente com alguns métodos para encontrar suas soluções.

Para um aprofundamento maior a respeito do tema sugerimos [5], o qual serviu de principal referência para elaboração deste trabalho.

3.1 Equações de conjugação

Todas as equações que consideraremos nesta seção são casos especiais de uma família de equações, ditas *equações de conjugação*, que assume a forma

$$f[\alpha(x)] = \beta[f(x)], \tag{3.1}$$

onde α e β são funções apropriadamente escolhidas. Por exemplo, quando $\alpha = \beta$, temos $f[\alpha(x)] = \alpha[f(x)]$ que é denominada *equação de comutatividade*. Quando $\beta(x) = x + a$, com a $\in \mathbb{R}$ e a $\neq 0$, temos a equação $f[\alpha(x)] = f(x) + a$ que é denominada equação de Abel.

Por simplicidade, faremos uso da seguinte notação: $\alpha^1(x) = \alpha(x)$, $\alpha^2(x) = \alpha(\alpha(x))$, $\ldots$, $\alpha^{n+1}(x) = \alpha[\alpha^n(x)]$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$. Por conveniência, definimos $\alpha^0(x) = x$.

Definição 3.1. *À sequência* $\alpha(x), \alpha^2(x), \alpha^3(x), \ldots$ *damos o nome de iterada de* x.

Quando a equação (3.1) tem como solução uma função injetiva, dizemos que as funções α e β são *conjugadas*.

3.1.1 A Equação de Schröder

A equação

$$f[\alpha(x)] = sf(x) \tag{3.2}$$

é denominada equação de Schröder[8]. Para uma dada função α, a nossa tarefa é verificar a existência de uma ou mais funções f e um número real $s \neq 1$ tal que a igualdade (3.2) seja satisfeita. Porém, é necessário ser cuidadoso quanto ao domínio de uma função f que seja solução de (3.2). Vejamos o exemplo a seguir.

Exemplo 3.2. *Seja $f[\alpha(x)] = sf(x)$, onde $s \neq 1$ e $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*

Se x_0 é um ponto fixo da função α, então temos $\alpha(x_0) = x_0$. Substituindo na equação de Schröder, temos

$$f[\alpha(x_0)] = sf(x_0) \therefore f(x_0) = sf(x_0).$$

Como $s \neq 1$, segue que:

1. $f(x_0) = 0$ ou
2. x_0 não pertence ao domínio de f.

O caso 2 ocorre com frequência na solução da Equação de Schröder. Com o intuito de evitar este caso, podemos supor que a função α não tem ponto fixo em qualquer intervalo onde uma função $f(x)$ esteja definida. Se pudermos encontrar uma solução positiva para a equação (3.2) com qualquer escolha de $0 < s < 1$, então podemos encontrar soluções para outros valores de s, conforme veremos a seguir.

Proposição 3.3. *Se $f(x)$ é solução da equação de Schröder, então $f^p(x)$ também o é.*

Demonstração. De fato, se $f(x)$ é solução da equação de Schröder, então

$$f[\alpha(x)] = sf(x).$$

Daí,

$$f^p(\alpha(x)) = [f(\alpha(x))]^p = [sf(x)]^p = s^p[f(x)]^p = s^p f^p(x).$$

Logo, $f^p(x)$ também é solução com s substituído por s^p. □

[8]Friedrich Wilhelm Karl Ernst Schröder nasceu em 25 de novembro de 1841 em Mannheim, Alemanha. Fez trabalhos importantes na área de Álgebra, Teoria de Conjuntos e Lógica. Schröder faleceu em 16 de Junho de 1902 em Karlsruhe, também na Alemanha.

Vejamos a seguir como obter uma equação funcional que envolve a função inversa da equação de Schröder. Seja f uma solução de (3.2) que admite inversa. Se $g = f^{-1}$ obtemos $f(x) = y$ se, e somente se, $g(y) = x$. Daí,

$$g(sy) = g[sf(x)].$$

Como f é solução de (3.2), temos

$$g[sf(x)] = g[f[\alpha(x)]] = f^{-1}[f[\alpha(x)]] = \alpha(x) = \alpha[g(y)].$$

Logo, g satisfaz a equação

$$g(sy) = \alpha[g(y)]. \tag{3.3}$$

A equação (3.3) é denominada e*quação de Poincaré*[9].

3.1.2 A Equação de Abel

A equação

$$f[\alpha(x)] = f(x) + a, \tag{3.4}$$

onde a é um número real diferente de zero, é denominada *Equação de Abel*[10]. Igualmente ao que acontece com a Equação de Schröder, devemos ser bastantes cautelosos acerca do domínio da função f. Se escolhemos um valor x_0 tal que $\alpha(x_0) = x_0$, caso exista, temos que x_0 não pode pertencer ao domínio de f. De fato, se x_0 pertencer ao domínio de f, então

$$f[\alpha(x_0)] = f(x_0) + a.$$

Como $\alpha(x_0) = x_0$, segue que

$$f[\alpha(x_0)] = f(x_0) = f(x_0) + a,$$

o que é um absurdo, pois $a \neq 0$. Desse modo, os números de x tais que $\alpha(x) = x$ não podem pertencer ao domínio de f.

[9]Henri Poincaré foi um famoso matemático, cientista teórico e filósofo da ciência. Nasceu em 29 de Abril de 1854 e faleceu em 17 de Julho de 1912. Poincaré contribuiu para a maioria das disciplinas da Matemática e criou novas disciplinas como Teoria das Funções Autoformas, Topologia Algébrica e Sistemas Dinâmicos. Poincaré é considerado o último matemático completo.

[10]Niels Henrik Abel foi um matemático norueguês nascido em 05 de Agosto de 1802. Abel morreu com pouco mais de 26 anos vítima de tuberculose. O que ele realizou em seus pouco mais de dez anos de produtividade foi algo quase nunca visto na história da humanidade. Deve-se a ele, entre outras coisas, o primeiro estudo sistemático das funções algébricas.

3.1.3 A Equação de Böttcher

A Equação

$$f[\alpha(x)] = [f(x)]^p, \tag{3.5}$$

onde $p \neq 1$ é denominada *equação de Böttcher*[11]. Note que para esta equação estamos interessados em funções não negativas f que a satisfaça. De fato, se tivéssemos, por exemplo, $f(x) < 0$ para algum x pertencente ao domínio de f e p um número par a equação de Böttcher não seria satisfeita já que teríamos $f[\alpha(x)] < 0$ e $[f(x)]^p > 0$ ou ainda se $p = \dfrac{1}{2}$ teríamos $\sqrt{f(x)}$ com $f(x) < 0$. Logo, $f(x) \geq 0$.

3.1.4 A Equação de comutatividade

Uma equação adicional que merece destaque é a equação de comutatividade a qual é definida por

$$f[\alpha(x)] = \alpha[f(x)].$$

No decorrer deste trabalho não trataremos das equações de conjugação na forma geral acima, ou seja, iremos nos deter a procura de soluções para os casos especiais que apresentamos aqui. A seguir veremos alguns algoritmos que são muito úteis no processo de busca de certas classes de soluções para este tipo de equação.

3.2 Busca de soluções para equações de conjugação

3.2.1 O Algoritmo de Koenigs

O algoritmo de Koenigs[12] é usado para encontrar uma solução para a equação de Schröder.

Proposição 3.4. *Se $f(x)$ é uma solução para a equação de Schröder* (3.2)*, então qualquer função múltipla de $f(x)$ também o é.*

Demonstração. Seja $g(x) = cf(x)$, onde c é uma constante qualquer. Temos:

$$g[\alpha(x)] = cf[\alpha(x)].$$

[11] Lucjan Emil Böttcher é um matemático polonês nascido em Varsóvia no ano de 1872. Escreveu e publicou artigos em Matemática, Educação Matemática, Lógica e Mecânica tendo destaque seu estudo sobre equações funcionais. Böttcher faleceu no ano de 1937.

[12] Gabriel Xavier Paul Koenigs foi um matemático francês. Trabalhou com Análise e Geometria. Koenigs nasceu na cidade de Toulouse em 1851 e faleceu em Paris, capital francesa, no ano de 1931.

Como $f(x)$ é solução da equação de Schröder, segue que

$$cf[\alpha(x)] = csf(x) = s[cf(x)] = sg(x).$$

Portanto, $g[\alpha(x)] = sg(x)$, ou seja, $g(x)$ também é solução. □

Definição 3.5. *A iterada $\alpha^n(x)$ é dita ser aproximadamente geométrica se existe um número $s \in (0,1)$ tal que o limite*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^n(x)}{s^n},$$

existe é finito e não nulo, para um x pertencente ao domínio de $\alpha^n(x)$. Neste caso, dizemos que a iterada tem taxa s.

Proposição 3.6. *Em um domínio de valores de x onde a iterada de x é aproximadamente geométrica, com taxa s independente de x, uma solução para a equação de Schröder é dada por*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^n(x)}{s^n},$$

para uma escolha particular de s.

Demonstração. Seja x pertencente ao domínio onde $\alpha^n(x)$ é aproximadamente geométrica, se

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^n(x)}{s^n},$$

então

$$f(\alpha(x)) = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^n(\alpha(x))}{s^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{n+1}(x)}{s^n}.$$

Multiplicando $\dfrac{\alpha^{n+1}(x)}{s^n}$ por $\dfrac{s}{s}$, ficamos com

$$f(\alpha(x)) = \lim_{n\to\infty} s\frac{\alpha^{n+1}(x)}{s^{n+1}}.$$

Fazendo $k = n+1$, temos que se $n \to +\infty$, $k = n+1$ também tende a $+\infty$. Assim, por hipótese $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{\alpha^k(x)}{s^k}$ existe e

$$f(\alpha(x)) = s \lim_{k\to\infty} \frac{\alpha^k(x)}{s^k} = sf(x).$$

Portanto,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^n(x)}{s^n}$$

é solução da equação de Schröder. □

Esse método é chamado de algoritmo de Koenigs.

Proposição 3.7. *Se o limite*

$$s = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{n+1}(x)}{\alpha^n(x)}$$

existe para todo $x \in \mathbb{R}$ em algum domínio e é independente de x, então podemos obter uma solução generalizada da equação de Schröder (3.2)*. Mais precisamente, para cada x_0 nesse domínio,*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^n(x)}{\alpha^n(x_0)}$$

é uma solução (3.2)*, desde que esse limite exista e seja finito.*

Demonstração. De fato, tomando

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^n(x)}{\alpha^n(x_0)}$$

temos

$$f(\alpha(x)) = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^n(\alpha(x))}{\alpha^n(x_0)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{n+1}(x)}{\alpha^n(x_0)}.$$

Observando que

$$\frac{\alpha^{n+1}(x)}{\alpha^n(x_0)} = \frac{\alpha^{n+1}(x)}{\alpha^n(x_0)}\frac{\alpha^n(x)}{\alpha^n(x)} = \frac{\alpha^{n+1}(x)}{\alpha^n(x)}\frac{\alpha^n(x)}{\alpha^n(x_0)},$$

temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{n+1}(x)}{\alpha^n(x_0)} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{\alpha^{n+1}(x)}{\alpha^n(x)}\frac{\alpha^n(x)}{\alpha^n(x_0)}\right].$$

Agora, note que

$$s = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{n+1}(x)}{\alpha^n(x)}$$

existe no domínio escolhido e

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^n(x)}{\alpha^n(x_0)}$$

existe por hipótese. Assim, usando as propriedades de limite, temos:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \left[\frac{\alpha^{n+1}(x)}{\alpha^n(x)}.\frac{\alpha^n(x)}{\alpha^n(x_0)}\right] &= \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{n+1}(x)}{\alpha^n(x)}. \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{n+1}(x)}{\alpha^n(x_0)} \\ &= sf(x).\end{aligned}$$

Portanto,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^n(x)}{\alpha^n(x_0)}$$

é solução de (3.2) e é chamada *solução principal para a equação de Schröder.* □

3.2.2 O Algoritmo de Lévy

Este algoritmo é usado para encontrar uma solução para a equação de Abel (3.4).

Proposição 3.8. *Se f(x) é uma solução qualquer da equação de Abel*

$$f(\alpha(x)) = f(x) + a,$$

$a \in \mathbb{R}$ *e* $a \neq 0$, *então a função* g, *definida por* $g(x) = f(x) + c$, *onde* c *é uma constante qualquer, também é uma solução.*

Demonstração. Se $g(x) = f(x) + c$, temos

$$g(\alpha(x)) = f(\alpha(x)) + c.$$

Mas, por hipótese, $f(x)$ é solução da equação de Abel. Assim,

$$f(\alpha(x)) + c = f(x) + a + c = (f(x) + c) + a = g(x) + a.$$

Portanto, $g(x) = f(x) + c$ também é solução para a equação de Abel. □

Consideramos o caso especial da equação de Abel em que $a = 1$, ou seja,

$$f(\alpha(x)) = f(x) + 1.$$

Se a função $\alpha(x)$ é aproximadamente geométrica, pode ser mais apropriado transformar a equação de Abel na equação de Schröder e encontrar a solução principal tal qual foi visto na seção anterior. Por outro lado, pode ser que a função $\alpha(x)$ comporte-se quase como a função $x \mapsto x + a$. Nesse caso a equação funcional deve ser formulada na forma da equação de Abel.

Proposição 3.9. *Suponha que exista um* $x_0 \in \mathbb{R}$ *tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{n+1}(x_0) - \alpha^n(x_0)}{\alpha^{n+1}(x) - \alpha^n(x)} = 1 \tag{3.6}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. *Daí, se o limite*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^n(x) - \alpha^n(x_0)}{\alpha^{n+1}(x) - \alpha^n(x)} \tag{3.7}$$

existe, então $f(x)$ *é uma solução para a equação de Abel.*

Demonstração. Suponhamos que existe um $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{n+1}(x_0) - \alpha^n(x_0)}{\alpha^{n+1}(x) - \alpha^n(x)} = 1$$

e que o limite

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^n(x) - \alpha^n(x_0)}{\alpha^{n+1}(x) - \alpha^n(x)}$$

exista. Desse modo,

$$f(\alpha(x)) = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^n(\alpha(x)) - \alpha^n(x_0)}{\alpha^{n+1}(\alpha(x)) - \alpha^n(\alpha(x))} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{n+1}(x) - \alpha^n(x_0)}{\alpha^{n+2}(x) - \alpha^{n+1}(x)}. \tag{3.8}$$

Agora, notemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha^{n+1}(x) - \alpha^n(x_0)}{\alpha^{n+2}(x) - \alpha^{n+1}(x)} &= \frac{\alpha^{n+1}(x) - \alpha^n(x_0) + \alpha^{n+1}(x_0) - \alpha^{n+1}(x_0)}{\alpha^{n+2}(x) - \alpha^{n+1}(x)} \\
&= \frac{\alpha^{n+1}(x) - \alpha^{n+1}(x_0)}{\alpha^{n+2}(x) - \alpha^{n+1}(x)} + \frac{\alpha^{n+1}(x_0) - \alpha^n(x_0)}{\alpha^{n+2}(x) - \alpha^{n+1}(x)}.
\end{aligned}$$

Fazendo $x = \alpha(x)$ em (3.6), temos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{n+1}(x_0) - \alpha^n(x_0)}{\alpha^{n+1}(\alpha(x)) - \alpha^n(\alpha(x))} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{n+1}(x_0) - \alpha^n(x_0)}{\alpha^{n+2}(x) - \alpha^{n+1}(x)} = 1.$$

Analogamente, substituindo $x = \alpha(x)$ em (3.7) concluímos que o limite

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{n+1}(x) - \alpha^{n+1}(x_0)}{\alpha^{n+2}(x) - \alpha^{n+1}(x)}$$

existe. Desta forma, utilizando as propriedades de limites na equação (3.8), temos

$$\begin{aligned}
f(\alpha(x)) &= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{\alpha^{n+1}(x) - \alpha^{n+1}(x_0)}{\alpha^{n+2}(x) - \alpha^{n+1}(x)} + \frac{\alpha^{n+1}(x_0) - \alpha^n(x_0)}{\alpha^{n+2}(x) - \alpha^{n+1}(x)} \right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{n+1}(x) - \alpha^{n+1}(x_0)}{\alpha^{n+2}(x) - \alpha^{n+1}(x)} + \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{n+1}(x_0) - \alpha^n(x_0)}{\alpha^{n+2}(x) - \alpha^{n+1}(x)} \\
&= f(x) + 1.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^n(x) - \alpha^n(x_0)}{\alpha^{n+1}(x) - \alpha^n(x)}$$

é solução para a equação $f(\alpha(x)) = f(x) + 1$.

$\square$

A equação (3.7) é conhecida como o algoritmo de Lévy para a equação de Abel.

3.2.3 Um algoritmo para a equação de Böttcher

A proposição a seguir nos mostra como encontrar infinitas soluções para equação de Böttcher (3.5) a partir de uma solução já conhecida.

Proposição 3.10. *Seja f(x) uma solução qualquer para a equação de Böttcher* (3.5), *então uma função $g(x) = f^q(x)$, onde q é uma potência qualquer, também é solução.*

Demonstração. De fato,

$$g(\alpha(x)) = f^q(\alpha(x)).$$

Como $f(x)$ é solução da equação de Böttcher, então

$$f^q(\alpha(x)) = [f(\alpha(x))]^q = [[f(x)]^p]^q = [[f(x)]^q]^p = [g(x)]^p.$$

Portanto, $g(x) = f^q(x)$ satisfaz a equação (3.5). $\square$

Vejamos agora um método geral para encontrar uma solução para a equação de Böttcher.

Proposição 3.11. *Uma solução para a equação de Böttcher*

$$f(\alpha(x)) = [f(x)]^p$$

pode ser obtida se o limite

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} [\alpha^n(x)]^{p^{-n}}$$

existe.

Demonstração. De fato, se o limite

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} [\alpha^n(x)]^{p^{-n}}$$

existe, então temos

$$\begin{aligned}
f(\alpha(x)) &= \lim_{n\to\infty} [\alpha^n(\alpha(x))]^{p^{-n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} [\alpha^{n+1}(x)]^{p^{-n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} [\alpha^{n+1}(x)]^{p^{-(n+1-1)}} \\
&= \lim_{n\to\infty} [\alpha^{n+1}(x)]^{p^{-(n+1)+1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} [\alpha^{n+1}(x)]^{p^{-(n+1)}.p} \\
&= \lim_{n\to\infty} [[\alpha^{n+1}(x)]^{p^{-(n+1)}}]^p.
\end{aligned}$$

Mas, se $n \to \infty$, então $(n+1) \to \infty$. Desse modo

$$\lim_{n\to\infty} [\alpha^{n+1}(x)]^{p^{-(n+1)}} = f(x).$$

Portanto,

$$f(\alpha(x)) = [\lim_{n\to\infty} [\alpha^{n+1}(x)]^{p^{-(n+1)}}]^p = [f(x)]^p.$$

□

3.2.4 Soluções para a equação de comutatividade

As funções $f_n(x) = \alpha^n(x)$ satisfazem a equação de comutatividade

$$f(\alpha(x)) = \alpha(f(x))$$

para $n = 0, 1, 2, \ldots$.
Para provar a afirmação acima basta ver que se $f_n(x) = \alpha^n(x)$, então

$$f_n(\alpha(x)) = \alpha^n(\alpha(x)) = \alpha^{n+1}(x) = \alpha^{1+n}(x) = \alpha(\alpha^n(x)) = \alpha(f_n(x)).$$

Porém, podem existir várias outras soluções. Um modo de gerar uma solução é através de uma solução correspondente para Schröder, Abel ou Böttcher.

Proposição 3.12. *Seja $g(x)$ uma função injetiva com inversa à esquerda g_e^{-1}. Se g satisfaz a equação de Schröder $g(\alpha(x)) = sg(x)$, então para qualquer constante c a função $f(x) = g_e^{-1}(cg(x))$ satisfaz a equação de comutatividade.*

Demonstração. Como g é uma função injetiva que satisfaz a equação de Schröder, sua inversa à esquerda satisfaz a equação de Poincaré

$$g_e^{-1}(sx) = \alpha(g_e^{-1}(x)).$$

Se $f(x) = g_e^{-1}(cg(x))$, onde c é uma constante qualquer, temos

$$f(\alpha(x)) = g_e^{-1}(cg(\alpha(x))). \tag{3.9}$$

Como g é solução da equação de Schröder

$$g_e^{-1}(cg(\alpha(x))) = g_e^{-1}(csg(x)) = g_e^{-1}(scg(x)).$$

Assim, g_e^{-1} satisfaz a equação de Poincaré. Desse modo,

$$g_e^{-1}(scg(x)) = \alpha(g_e^{-1}(cg(x))) = \alpha(f(x)). \tag{3.10}$$

Portanto, de (3.9) e (3.10) resulta que $f(x)$ verifica a equação de comutatividade. □

Proposição 3.13. *Seja $g(x)$ uma função injetiva com inversa à esquerda g_e^{-1}. Se g satisfaz a equação de Abel $g(\alpha(x)) = g(x)+a$, onde a é um numero real diferente de zero, então para cada constante c, a função*

$$f(x) = g_e^{-1}(g(x) + c)$$

satisfaz a equação de comutatividade.

Demonstração. Com efeito, se

$$f(x) = g_e^{-1}(g(x) + c),$$

então temos

$$f(\alpha(x)) = g_e^{-1}(g(\alpha(x)) + c). \tag{3.11}$$

Como g é solução da equação de Abel, vale

$$g(\alpha(x)) = g(x) + a.$$

Assim, substituindo em (3.11), obtemos

$$f(\alpha(x)) = g_e^{-1}(g(x) + a + c). \tag{3.12}$$

Por outro lado, da equação de Abel, tem-se que

$$\begin{aligned} g(\alpha(f(x))) &= g(f(x)) + a \\ &= g(g_e^{-1}(g(x) + c)) + a \\ &= g(x) + c + a. \end{aligned}$$

Aplicando a inversa à esquerda g_e^{-1} em ambos os membros da igualdade,

$$g_e^{-1}(g(\alpha(f(x)))) = g_e^{-1}(g(x) + c + a),$$

donde,

$$\alpha(f(x)) = g_e^{-1}(g(x) + c + a). \tag{3.13}$$

De (3.12) e (3.13), segue que

$$f(\alpha(x)) = \alpha(f(x)).$$

Portanto, $f(x)$ satisfaz a equação de comutatividade. □

Proposição 3.14. *Seja $g(x) \geq 0$ uma função injetiva com inversa à esquerda g_e^{-1}. Se g satisfaz a equação de Böttcher $g(\alpha(x)) = [g(x)]^p$ então $f(x) = g_e^{-1}([g(x)]^c)$ satisfaz a equação de comutatividade para todo c real.*

Demonstração. Seja $f(x) = g_e^{-1}([g(x)]^c)$. Daí,

$$f(\alpha(x)) = g_e^{-1}([g(\alpha(x))]^c).$$

Por hipótese, $g(\alpha(x)) = [g(x)]^p$. Assim,

$$\begin{aligned} f(\alpha(x)) &= g_e^{-1}([[g(x)]^p]^c) \\ &= g_e^{-1}([g(x)]^{pc}). \end{aligned} \tag{3.14}$$

Por outro lado, da equação de Böttcher obtemos

$$g(\alpha(f(x))) = [g(f(x))]^p.$$

Aplicando a inversa à esquerda em ambos os membros

$$g_e^{-1}(g(\alpha(f(x)))) = g_e^{-1}([g(f(x))]^p),$$

donde

$$\alpha(f(x)) = g_e^{-1}([g(f(x))]^p). \tag{3.15}$$

Queremos mostrar que

$$f(\alpha(x)) = \alpha(f(x)).$$

Usando fortemente a injetividade de g, temos

$$f(\alpha(x)) = \alpha(f(x)) \Leftrightarrow g_e^{-1}([g(x)]^{pc}) = g_e^{-1}([g(f(x))]^p) \Leftrightarrow [g(x)]^{pc} = [g(f(x))]^p.$$

Extraindo a raiz p-ésima de ambos os lados, obtemos

$$[g(x)]^c = g(f(x)).$$

Aplicando mais uma vez a inversa à esquerda em ambos os lados,

$$g_e^{-1}([g(x)]^c) = g_e^{-1}(g(f(x))) \Leftrightarrow g_e^{-1}([g(x)]^c) = f(x).$$

Portanto, f satisfaz a equação de comutatividade. $\square$

3.3 Equações funcionais com radicais múltiplos

Como o próprio nome já sugere, um radical múltiplo é uma expressão na qual um radical está contido dentro de um ou mais radicais. Nesta seção, vamos estudar o problema proposto pelo matemático indiano Ramanujan[13] em 1911.

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{\cdots}}}}$$

A princípio pode não parecer, mas existe uma equação funcional escondida nesse radical, conforme veremos a seguir. Para estudar a expressão acima, devemos inicialmente generalizar o problema. Assim ficamos com

$$f(x) = \sqrt{1+x\sqrt{1+(x+1)\sqrt{1+(x+2)\sqrt{\cdots}}}}.$$

Sem se apegar um rigor matemático que nos faria fugir da ideia central desse trabalho podemos elevar ambos os membros ao quadrado,

$$[f(x)]^2 = 1+x\sqrt{1+(x+1)\sqrt{1+(x+2)\sqrt{\cdots}}}.$$

Note que

$$f(x+1) = \sqrt{1+(x+1)\sqrt{1+(x+2)\sqrt{\cdots}}}.$$

Desse modo,

$$[f(x)]^2 = 1 + xf(x+1),$$

onde $f(x) \geq 0$. Como podemos observar essa equação não faz parte da família de equações funcionais estudadas até aqui. Assim, não conhecemos ainda um modo eficiente para encontrar uma solução para esta equação funcional. O resultado a seguir resolve este problema.

[13] Srinivasa Ramanujan foi um dos maiores gênios matemáticos indianos. Nasceu em 1887 na casa de sua avó em Erode, uma pequena vila a cerca de 400 km de Madras. Fez contribuições importantes para a teoria analítica dos números e trabalhou nas funções elípticas, frações contínuas e séries infinitas. Morreu aos 33 anos deixando vários trabalhos por completar, que continuam, ainda hoje, a ser estudados por outros matemáticos.

Proposição 3.15. *Se $f(x)$ é uma solução para a equação funcional*

$$[f(x)]^2 = 1 + xf(x+1), \tag{3.16}$$

a qual satisfaz as desigualdades

$$\frac{x+1}{2} \leq f(x) \leq 2(x+1), \tag{3.17}$$

para todo $x \geq 1$, então $f(x) = x + 1$.

Demonstração. De fato, substituindo x por $x+1$ na equação (3.17), obtemos

$$\frac{x+2}{2} \leq f(x+1) \leq 2(x+2). \tag{3.18}$$

De (3.16), temos

$$[f(x)]^2 = 1 + xf(x+1),$$

o que implica

$$[f(x)]^2 > \frac{1}{2} + xf(x+1). \tag{3.19}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} [f(x)]^2 &= 1 + xf(x+1) \\ &< 2 + xf(x+1). \end{aligned} \tag{3.20}$$

De (3.19) e (3.20), temos:

$$\frac{1}{2} + xf(x+1) < [f(x)]^2 < 2 + xf(x+1) \tag{3.21}$$

Aplicando (3.18) em (3.21),

$$\begin{aligned} 1 + xf(x+1) &< [f(x)]^2 < 2 + xf(x+1) \\ \Rightarrow 1 + x\frac{x+2}{2} &< [f(x)]^2 < 2 + 2x(x+2) \\ \Rightarrow \frac{1 + x(x+2)}{2} &< [f(x)]^2 < 2(1 + x(x+2)) \\ \Rightarrow \frac{1 + x^2 + 2x}{2} &< [f(x)]^2 < 2(1 + x^2 + 2x) \\ \Rightarrow \frac{(x+1)^2}{2} &< [f(x)]^2 < 2(x+1)^2. \end{aligned}$$

Extraindo a raiz quadrada em todos os membros desta última dupla desigualdade

$$\frac{x+1}{\sqrt{2}} < f(x) < \sqrt{2}(x+1). \tag{3.22}$$

Comparando (3.18) com (3.22), notamos que o intervalo ao qual $f(x)$ pertence "encolheu". Assim, aplicando esse mesmo procedimento k vezes chegamos a

$$\frac{(x+1)}{2^{\frac{1}{2^k}}} < f(x) < 2^{\frac{1}{2^k}}(x+1).$$

Quando $k \to \infty$, chegamos a

$$\frac{(x+1)}{2^0} \leq f(x) \leq 2^0 \cdot (+1) \Rightarrow x+1 \leq f(x) \leq x+1.$$

Portanto,

$$f(x) = x+1.$$

$\square$

O nosso problema inicial representa o caso particular $x = 2$.

$$f(2) = \sqrt{1+2\sqrt{1+(2+1)\sqrt{\ldots}}} \Rightarrow f(2) = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{\ldots}}}$$

Portanto,

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{\ldots}}} = f(2) = 2+1 = 3.$$

3.4 Outros métodos para encontrar soluções de uma equação funcional

3.4.1 Equações polinomiais

Nesta seção iremos estudar maneiras para encontrar soluções para equações funcionais quando supomos que tal solução é um polinômio. Podemos aqui aplicar os métodos vistos nas seções anteriores. Porém, vale a pena considerar quais métodos adicionais podemos utilizar quando a solução de uma equação funcional é um polinômio. Neste caso, consideramos polinômios de uma variável real ou complexa com coeficientes reais ou complexos.

Podemos usar a equação funcional para determinar o grau do polinômio. Suponha que $Gr(f)$ seja o grau de um polinômio $f(x)$. Se

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

e

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)],$$

$$Gr(f \cdot g) = Gr(f) + Gr(g) \tag{3.23}$$

$$Gr(f \circ g) = Gr(f) \cdot Gr(g). \tag{3.24}$$

Utilizando-se destas fórmulas, qualquer equação polinomial envolvendo as operações de multiplicação e composição nos leva a solução da equação a partir do seu grau.

Exemplo 3.16. *Encontre as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que são soluções para a equação*

$$f(x-1) \cdot f(x+1) = f(f(x)), \tag{3.25}$$

onde f é um polinômio com coeficientes reais.

Seja $d = Grf$. Por (3.23) o grau do lado esquerdo da equação é $d + d = 2d$. Já pela fórmula (3.24) o grau do lado direito da equação é $d \cdot d = d^2$. Daí, devemos ter:

$$2d = d^2 \Rightarrow d^2 - 2d = 0 \Rightarrow d(d-2) = 0,$$

donde

$$d = 0 \text{ ou } d = 2.$$

Se $d = 0$, temos que f é um polinômio de grau zero, ou seja, é o polinômio constante $f(x) = c$. Assim,

$$f(x-1) \cdot f(x+1) = f(f(x)) \Rightarrow c \cdot c = f(c) \Rightarrow c^2 = c \Rightarrow c^2 - c = 0 \Rightarrow c(c-1) = 0,$$

donde, $c = 0$ ou $c = 1$.
Portanto, as funções constantes que são soluções para $f(x-1) \cdot f(x+1) = f(f(x))$ são $f(x) = 0$ e $f(x) = 1$.

Se $d = 2$, f é um polinômio de grau 2, ou seja, $f(x) = ax^2 + bx + c$; $a, b, c \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$. Assim, desenvolvendo o lado esquerdo da equação funcional, obtemos:

$$\begin{aligned} f(x-1)\cdot f(x+1) &= [a(x-1)^2 + b(x-1) + c]\cdot[a(x+1)^2 + b(x+1) + c] \\ &= a^2(x-1)^2(x+1)^2 + ab(x-1)^2(x+1) + ac(x+1)^2 \\ &+ ab(x-1)(x+1)^2 + b^2(x-1)(x+1) + bc(x-1) + ac(x+1)^2 \\ &+ bc(x+1) + c^2 \\ &= a^2(x^2-1)(x^2-1) + ab(x^2-1)(x-1) + ac(x^2-2x+1) \\ &+ ab(x^2-1)(x+1) + b^2(x^2-1) + bc(x-1) + ac(x^2+2x+1) \\ &+ bc(x+1) + c^2 \\ &= a^2(x^4-2x^2+1) + ab(x^3-x^2-x+1) + ac(x^2-2x+1) \\ &+ ab(x^3+x^2-x-1) + b^2(x^2-1) + bc(x-1) + ac(x^2+2x+1) \\ &+ bc(x+1) + c^2 \\ &= a^2x^4 - 2a^2x^2 + a^2 + abx^3 - abx^2 - abx + ab + acx^2 - 2acx + ac \\ &+ abx^3 + abx^2 - abx - ab + b^2x^2 - b^2 + bcx - bc + acx^2 + 2acx + ac \\ &+ bcx + bc + c^2 \\ &= a^2x^4 + x^3(ab+ab) + x^2(-2a^2 + ac + b^2 + ac) \\ &+ x(-ab - ab + bc + bc) + (a^2 + ac - b^2 + ac + c^2). \end{aligned}$$

Logo,

$$f(x-1)\cdot f(x+1) = a^2x^4 + 2abx^3 + (b^2+2ac-2a^2)x^2 + (2bc-2ab)x + (c^2+2ac+a^2-b^2). \quad (3.26)$$

Agora, desenvolvendo o lado direito dela, obtemos:

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= f(ax^2 + bx + c) \\ &= a(ax^2+bx+c)^2 + b(ax^2+bx+c) + c \\ &= a(a^2x^4 + 2(bx+c)ax^2 + (bx+c)^2) + +bax^2 + +b^2x + bc + c \\ &= a^3x^4 + 2a^2x^2(bx+c) + a(b^2x^2 + 2bcx + c^2) + bax^2 + b^2x + bc + c \\ &= a^3x^4 + 2a^2bx^3 + 2a^2cx^2 + ab^2x^2 + 2abcx + ac^2 + bax^2 + b^2x + bc + c. \end{aligned}$$

Assim,

$$f(f(x)) = a^3x^4 + 2a^2bx^3 + x^2(2a^2c + ab^2 + ba) + x(2abc + b^2) + (ac^2 + bc + c). \quad (3.27)$$

Das equações (3.26) e (3.27), segue que

$$\begin{aligned} &a^2x^4 + 2abx^3 + (b^2 + 2ac - 2a^2)x^2 + (2bc - 2ab)x + (c^2 + 2ac + a^2 - b^2) = \\ &= a^3x^4 + 2a^2bx^3 + (2a^2c + ab^2 + ba)x^2 + (2abc + b^2)x + (ac^2 + bc + c). \end{aligned}$$

Da igualdade de polinômios, obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} (1): a^2 & = a^3 \\ (2): 2ab & = 2a^2b \\ (3): b^2 + 2ac - 2a^2 & = 2a^2c + ab^2 + ba \\ (4): 2bc - 2ab & = 2abc + b^2 \\ (5): c^2 + 2ac + a^2 - b^2 & = ac^2 + bc + c \end{cases}$$

De (1), temos

$$a^2 = a^3 \Rightarrow a^3 - a^2 = 0 \Rightarrow a^2(a-1) = 0.$$

Como $a \neq 0$, segue que

$$a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1.$$

Assim, fazendo $a = 1$ em (3) chegamos a

$$b^2 + 2c - 2 = 2c + b^2 + b \Rightarrow b = -2$$

Agora fazendo $a = 1$ e $b = -2$ em (5), obtemos

$$\begin{aligned} c^2 + 2c + 1 - (-2)^2 &= c^2 - 2c + c \\ \therefore 2c + 1 - 4 &= -2c + c \\ \therefore 2c - 3 &= -c \\ \therefore 3c &= 3 \\ \therefore c &= 1 \end{aligned}$$

Podemos facilmente verificar que os valores $a = 1$, $b = -2$ e $c = 1$ satisfazem (2) e (4). Logo, esses valores satisfazem o sistema de equações e com isso, obtemos

$$f(x) = x^2 - 2x + 1.$$

Portanto, as soluções da equação funcional são $f(x) = 0$, $f(x) = 1$ e $f(x) = x^2 - 2x + 1$.

O próximo método pra resolver equações polinomiais envolve o uso do seguinte princípio.

Proposição 3.17. *Suponha que $f(x)$ é um polinômio periódico, isto é, existe algum $a \neq 0$ para o qual $f(x+a) = f(x)$, para todo x real. Então, $f(x) = c$ para todo x, onde c é uma constante qualquer.*

Demonstração. De fato, se f é periódica, então é limitada. Mas isso é impossível no caso de polinômios não contantes, pois tomando um polinômio com coeficientes reais

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

com pelo menos um $a_i \neq 0$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, temos que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty.$$

Portanto, se $f(x)$ é um polinômio periódico, então $f(x)$ é constante. □

Vejamos agora como esse resultado pode ser aplicado às equações funcionais. Seja $f_0(x)$ uma solução de uma determinada equação funcional polinomial. Seria esta a única solução? Veremos a seguir que pode haver outras soluções. Podemos escrever uma solução geral na forma

$$f(x) = f_0(x) + g(x),$$

onde $g(x)$ é um polinômio cuja forma deve ser determinada. Pode ser possível mostrar que $g(x)$ satisfaz as condições da proposição (3.17). Assim, concluímos que todas as soluções da equação tem a forma $f_0(x) + c$.

Exemplo 3.18. *Considere a seguinte equação*

$$f(x+1) - f(x-1) = 6x^2 + 2, \tag{3.28}$$

onde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função. Prove que a função $f_0(x) = x^3$ não é a única solução desta equação.

Inicialmente notemos que f_0 verifica (3.28). De fato,

$$\begin{aligned}
f_0(x) = x^3 &\Rightarrow f_0(x+1) - f_0(x-1) = (x+1)^3 - (x-1)^3 \\
&\Rightarrow f_0(x+1) - f_0(x-1) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) \\
&\Rightarrow f_0(x+1) - f_0(x-1) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - x^3 + 3x^2 - 3x + 1 \\
&\Rightarrow f_0(x+1) - f_0(x-1) = 6x^2 + 2.
\end{aligned}$$

Logo, $f_0(x)$ é de fato uma solução para a equação dada. De acordo com o fato mencionado acima, podemos escrever uma solução geral na forma

$$f(x) = x^3 + g(x), \tag{3.29}$$

onde $g(x)$ é um polinômio cuja forma deve ser determinada.
Aplicando (3.29) em (3.28), temos

$$f(x+1) - f(x-1) = 6x^2 + 2 \Rightarrow (x+1)^3 + g(x+1) - [(x-1)^3 + g(x-1)] = 6x^2 + 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + g(x+1) - [x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + g(x-1)] = 6x^2 + 2 \Rightarrow g(x+1) - g(x-1) = 0,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Observe que $x + 1 = x - 1 + 2$. Daí,

$$g(x+1) = g(x-1) \Rightarrow g((x-1)+2) = g(x+1),$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo, $g(x)$ é um polinômio que satisfaz as condições da proposição (3.17), com $a = 2$. Portanto, $f(x) = x^3 + c$ é solução para (3.28), onde c é uma constante qualquer.

3.4.2 Método das séries de potências

Nesta seção iremos adotar uma restrição menor do que no caso das equações polinomiais visto na seção anterior. Agora, iremos supor que uma função que satisfaz uma equação funcional tem uma representação em série de potência.
Consideremos a equação

$$f\left(\frac{x+x^2}{2}\right) = \frac{1}{2}f(x). \tag{3.30}$$

Como podemos observar a equação (3.30) é um exemplo de equação de Schröder, com $\alpha(x) = \dfrac{x+x^2}{2}$. Se $x \in (0,1)$, então $\alpha^n(x)$ tende a zero em um ritmo que é aproximadamente geométrico com taxa $s = \dfrac{1}{2}$, ou seja, a sequência decresce de maneira parecida com uma progressão geométrica. Dessa forma, aplicando o algoritmo de Koenigs, concluímos que

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} 2^n \alpha^n(x)$$

é uma solução da equação. Utilizando funções, nem sempre será fácil expressar o limite acima. Porém, como $\alpha(n)$ é um polinômio de grau $2n$, isso nos sugere que devemos procurar uma solução para $f(x)$ como uma série de potências

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots \tag{3.31}$$

para $0 \leq x \leq 1$, desde que esta série infinita convirja. Substituindo $x = 0$, em (3.30), vemos que

$$f\left(\frac{0+0^2}{2}\right) = \frac{1}{2}f(0) \Rightarrow f(0) = \frac{1}{2}f(0) \Rightarrow f(0) = 0,$$

e em (3.31), temos

$$f(0) = a_0 + a_1 0 + a_2 0^2 + \ldots \Rightarrow f(0) = a_0.$$

Logo, $a_0 = 0$. Como vimos na seção 3.2.1, qualquer múltiplo de uma solução para (3.31), também é solução. Sem perda de generalidade, podemos considerar $a_1 = 1$. Agora ficamos com

$$f(x) = x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots.$$

Inserindo essa série de potência de volta em (3.30), temos

$$\left(\frac{x+x^2}{2}\right) + a_2\left(\frac{x+x^2}{2}\right)^2 + a_3\left(\frac{x+x^2}{2}\right)^3 + \ldots = \frac{1}{2}x + \frac{a_2}{2}x^2 + \frac{a_3}{2}x^3 + \ldots$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + a_2\left(\frac{x^2+2x^3+x^4}{4}\right) + a_3\left(\frac{x^3+3x^2\cdot x^2+3\cdot x\cdot x^4+x^6}{8}\right) + \ldots = \frac{1}{2}x + \frac{a_2}{2}x^2$$

$$+ \frac{a_3}{2}x^3 + \ldots$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2} + \frac{a_2}{4}\right)x^2 + \left(\frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{8}\right)x^3 + \ldots = \frac{1}{2}x + \frac{a_2}{2}x^2 + \frac{a_3}{2}x^3 + \ldots$$

Sabemos que duas séries de potências em x são iguais para todo x se, e somente se, seus coeficientes correspondentes são iguais. Definindo, $b_k = 2^{-k}a_k$, com $k = 2m$ se k é par e $k = 2m+1$ se k é ímpar, temos

$$b_0 = 2^0 a_0 \Rightarrow b_0 = 0$$

e

$$b_1 = 2^{-1}a_1 \Rightarrow b_1 = \frac{1}{2}.$$

Temos também

$$(2^{2m-1}-1)b_{2m} = \binom{2m-1}{1}b_{2m-1} + \binom{2m-2}{2}b_{2m-2} + \ldots + \binom{m}{m}b_m$$

e

$$(2^{2m}-1)b_{2m+1} = \binom{2m}{1}b_{2m} + \binom{2m-1}{2}b_{2m-1} + \ldots + \binom{m+1}{m}b_{m+1},$$

para $m \geq 1$. A partir dessas fórmulas de recursão, temos:
Para $k = 2$, temos $m = 1$. Daí,

$$b_2 = 2^{-2}a_2 \Rightarrow b_2 = \frac{1}{4}a_2.$$

Mas

$$(2^{2\cdot 1-1}-1)b_{2\cdot 1} = \binom{1}{1}b_1 \Rightarrow (2-1)b_2 = 1\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow b_2 = \frac{1}{2},$$

logo,

$$b_2 = \frac{1}{4}a_2 \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{a_2}{4} \Rightarrow 2a_2 = 4 \Rightarrow a_2 = 2.$$

Para $k = 3$, temos $m = 1$. Assim,

$$b_3 = 2^{-3}a^3 \Rightarrow b_3 = \frac{a_3}{8}.$$

Mas

$$(2^{2\cdot 1}-1)b_{2\cdot 1+1} = \binom{1+1}{1}b_{1+1} \Rightarrow (4-1)b_3 = \binom{2}{1}b_2 \Rightarrow 3b_3 = 2b_2 \Rightarrow b_3 = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow b_3 = \frac{1}{3}.$$

Logo,

$$b_3 = \frac{a_3}{8} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{a_3}{8} \Rightarrow a_3 = \frac{8}{3}.$$

Para $k = 4$, temos $m = 2$. Dessa forma,

$$b_4 = 2^{-4}a_4 \Rightarrow b_4 = \frac{a_4}{16}. \tag{3.32}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
(2^{2\cdot 2-1}-1)b_{2\cdot 2} &= \binom{2\cdot 2-1}{1}b_{2\cdot 2-1} + \binom{2}{2}b_2 \\
\Rightarrow (2^3-1)b_4 &= \binom{3}{1}b_3 + \binom{2}{2}b_2 \\
\Rightarrow 7b_4 &= \frac{3!}{1!(3-1)!}\cdot\frac{1}{3} + \frac{2!}{2!(2-2)!}\cdot\frac{1}{2} \\
&= \frac{3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1}\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\frac{1}{2} \\
&= 1 + \frac{1}{2} \\
&= \frac{3}{2},
\end{aligned}$$

$$b_4 = \frac{3}{14}.$$

Logo, de (3.32),

$$a_4 = \frac{24}{7}.$$

Continuando com o mesmo procedimento, determinamos a série de potências para $f(x)$:

$$f(x) = x + 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 + \frac{24}{7}x^4 + \dots$$

Capítulo 4

Aplicações

Apresentaremos neste capítulo algumas aplicações das equações funcionais abordadas com o auxilio das técnicas vistas no capítulo anterior.

4.1 Aplicação 1

Use o algoritmo de Koenigs para encontrar uma função f, não identicamente nula, que satisfaz a equação

$$f\left(\frac{sx}{1+x}\right) = sf(x),$$

onde $s \in (0,1)$. Especifique cuidadosamente o domínio sobre o qual f está definida.
Solução:
Temos uma equação de Schröder, com $\alpha(x) = \dfrac{sx}{1+x}$.
Notemos que

$$\alpha^2(x) = \alpha(\alpha(x)) = \alpha\left(\frac{sx}{1+x}\right) = \frac{s\left(\dfrac{sx}{1+x}\right)}{1+\left(\dfrac{sx}{1+x}\right)} = \frac{s^2x}{1+x}\cdot\frac{1+x}{1+x+sx} = \frac{s^2x}{1+x+sx},$$

$$\alpha^3(x) = \alpha(\alpha^2(x)) = \alpha\left(\frac{s^2x}{1+x+sx}\right) = \frac{s\left(\dfrac{s^2x}{1+x+sx}\right)}{1+\left(\dfrac{s^2x}{1+x+sx}\right)} = \frac{s^3x}{1+x+sx}\cdot\frac{1+x+sx}{1+x+sx+s^2x}$$

$$= \frac{s^3x}{1+x+sx+s^2x}.$$

Fazendo a composição n vezes podemos conjecturar que

$$\alpha^n(x) = \frac{s^nx}{1+x+sx+s^2x+\ldots+s^{n-1}x} \Rightarrow \alpha^n(x) = \frac{s^nx}{1+x(1+s+s^2+\ldots+s^{n-1})}.$$

Mas, $1+s+s^2+\ldots+s^{n-1}$ é a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica com primeiro termo $a_1 = 1$ e razão $s \in (0,1)$. Desse modo,

$$1+s+s^2+\ldots+s^{n-1} = 1\cdot\left(\frac{1-s^n}{1-s}\right) = \frac{1-s^n}{1-s}.$$

Assim,

$$\alpha^n(x) = \frac{s^nx}{1+x\left(\dfrac{1-s^n}{1-s}\right)}.$$

Utilizando indução matemática sobre n podemos provar a validade da igualdade acima. De fato,

i. Para $n = 1$,

$$\alpha^1(x) = \frac{s^1x}{1+x\left(\dfrac{1-s^1}{1-s}\right)} = \frac{sx}{1+x.1} \Rightarrow \alpha(x) = \frac{sx}{1+x}.$$

Logo, a igualdade é valida pra $n = 1$;

ii. Suponhamos que para algum número natural $n > 1$ vale

$$\alpha^n(x) = \frac{s^nx}{1+x\left(\dfrac{1-s^n}{1-s}\right)};$$

iii. Utilizando o item ii, temos

$$\alpha^{n+1}(x) = \alpha(\alpha^n(x)) = \alpha\left(\frac{s^n x}{1 + x\left(\dfrac{1-s^n}{1-s}\right)}\right) = \frac{s\left(\dfrac{s^n x}{1 + x\left(\dfrac{1-s^n}{1-s}\right)}\right)}{1 + \left(\dfrac{s^n x}{1 + x\left(\dfrac{1-s^n}{1-s}\right)}\right)}$$

$$= \frac{\dfrac{s^{n+1} x}{1 + x\left(\dfrac{1-s^n}{1-s}\right)}}{\dfrac{1 + x\left(\dfrac{1-s^n}{1-s}\right) + s^n x}{1 + x\left(\dfrac{1-s^n}{1-s}\right)}} = \frac{s^{n+1}x}{1 + \dfrac{x(1-s^n) + s^n x(1-s)}{1-s}}$$

$$= \frac{s^{n+1}x}{1 + \dfrac{x(1-s^n) + x(s^n - s^{n+1})}{1-s}} = \frac{s^{n+1}x}{1 + \dfrac{x(1-s^n + s^n - s^{n+1})}{1-s}}$$

$$= \frac{s^{n+1}x}{1 + \dfrac{x(1-s^{n+1})}{1-s}}.$$

Assim, dado que a igualdade é válida para n natural qualquer, maior do que 1, ela também será válida para $n+1$.

Portanto, de (i), (ii) e (iii) segue do Princípio de Indução Finita que

$$\alpha^n(x) = \frac{s^n x}{1 + x\left(\dfrac{1-s^n}{1-s}\right)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Agora, observe que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^n(x)}{s^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\dfrac{s^n x}{1+x\left(\dfrac{1-s^n}{1-s}\right)}}{s^n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{s^n x}{1+x\left(\dfrac{1-s^n}{1-s}\right)}\cdot\frac{1}{s^n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{1+x\left(\dfrac{1-s^n}{1-s}\right)}.$$

Como $s\in(0,1)$, segue-se que

$$\lim_{n\to\infty}s^n=0.$$

Assim, usando as propriedades dos limites, temos

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x}{1+x\left(\dfrac{1-s^n}{1-s}\right)}=\frac{x}{1+x\left(\dfrac{1-\lim\limits_{n\to\infty}s^n}{1-s}\right)}=\frac{x}{1+x\left(\dfrac{1-0}{1-s}\right)}=\frac{x}{1+x\left(\dfrac{1}{1-s}\right)}.$$

Desse modo

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^n(x)}{s^n}=\frac{x}{1+\dfrac{x}{1-s}}=\frac{x}{\dfrac{1-s+x}{1-s}}=x\cdot\frac{1-s}{1-s+x}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^n(x)}{s^n}=\frac{x}{1+x-s}(1-s).$$

Como o limite existe, é finito e não nulo para $s\in(0,1)$ e $x\neq 0$, segue do algoritmo de Koenigs que

$$f(x)=\frac{x}{1+x-s}(1-s)$$

é uma solução não trivial para $f\left(\dfrac{sx}{1+x}\right)=sf(x)$. Por fim, para especificar o domínio de f devemos observar que se x é um ponto fixo da função $\alpha(x)=\dfrac{sx}{1+x}$, temos

$$\alpha(x)=x\Rightarrow\frac{sx}{1+x}=x\Rightarrow sx=x(1+x).$$

Daí, $x = 0$ ou $sx = x(1 + x) \Rightarrow s = x + 1 \Rightarrow x = s - 1$.
Agora devemos analisar os seguintes casos:

Caso 1: Se $x = 0$, então $f(0) = \dfrac{0}{1 + 0 - s}(1 - s) \Rightarrow f(0) = 0$;

Caso 2: se $x = s - 1$, então x não pertence ao domínio de f, conforme visto na Seção 3.1.1.
Portanto, f está definida para todo $x \in \mathbb{R}$ diferente de $s - 1$.

4.2 Aplicação 2

Encontre tantas funções f quando possível que satisfaçam a equação de comutatividade

$$f\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{f(x)}{f(x)+1}.$$

Relacione sua solução com a solução da equação de Abel correspondente

$$g\left(\frac{x}{x+1}\right) = g(x) + 1.$$

Solução:
Inicialmente note que, como vimos na seção 3.1.2, os valores de x tais que x é um ponto fixo da função $\alpha(x)$ não podem fazer parte do domínio de g. Os pontos fixos de $\alpha(x)$ são os valores de x tais que $\alpha(x) = x$, ou seja,

$$\alpha(x) = x \Rightarrow \frac{x}{x+1} = x \Rightarrow x = x(x+1) \Rightarrow x = x^2 + x \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Logo, $x = 0$ não pertence ao domínio de g. Agora, vamos determinar uma solução para a equação de Abel correspondente

$$g\left(\frac{x}{x+1}\right) = g(x) + 1.$$

Seja x_0 um ponto do domínio de g tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{n+1}(x_0) - \alpha^n(x_0)}{\alpha^{n+1}(x) - \alpha^n(x)} = 1$$

para todo x. Notemos que:

1. $\alpha(x) = \dfrac{x}{x+1}$;

2. $\alpha^2(x) = \alpha(\alpha(x)) = \alpha\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = \dfrac{\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{x}{x+1}+1} = \dfrac{\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{x+x+1}{x+1}} = \dfrac{x}{2x+1}$;

3. $\alpha^3(x) = \alpha\left(\dfrac{x}{2x+1}\right) = \dfrac{\dfrac{x}{2x+1}}{\dfrac{x}{2x+1}+1} = \dfrac{\dfrac{x}{2x+1}}{\dfrac{x+2x+1}{2x+1}} = \dfrac{x}{3x+1}$.

Fazendo a composição n vezes podemos conjecturar que

$$\alpha^n(x) = \frac{x}{nx+1}.$$

De forma análoga ao procedimento realizado na aplicação 1, podemos provar, pelo Princípio de Indução Finita, que a igualdade acima é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\alpha^{n+1}(x) = \frac{x}{(n+1)x+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Agora, observe que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^n(x)-\alpha^n(x_0)}{\alpha^{n+1}(x)-\alpha^n(x)} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\dfrac{x}{nx+1}-\dfrac{x_0}{nx_0+1}}{\dfrac{x}{(n+1)x+1}-\dfrac{x}{nx+1}}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\dfrac{x(nx_0+1)-x_0(nx+1)}{(nx+1)(nx_0+1)}}{\dfrac{x(nx+1)-x(nx+x+1)}{(nx+x+1)(nx+1)}}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\dfrac{nxx_0+x-nxx_0-x_0}{nx_0+1}}{\dfrac{x^2n+x-x^2n-x^2-x}{nx+x+1}}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\dfrac{x-x_0}{nx_0+1}}{\dfrac{-x^2}{nx+x+1}}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x-x_0}{nx_0+1}\cdot\frac{nx+x+1}{(-x^2)}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{nx^2+x^2+x-nxx_0-xx_0-x_0}{-nx_0x^2-x^2}.
\end{aligned}$$

Dividindo o numerador e o denominador neste último limite por n, ficamos com

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^2+\dfrac{x^2}{n}+\dfrac{x}{n}-xx_0-\dfrac{xx_0}{n}-\dfrac{x_0}{n}}{-x_0x^2-\dfrac{x^2}{n}}.$$

Usando as propriedades dos limite juntamente com o teorema 2.21 sobre limites no infinito, concluímos que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^n(x)-\alpha^n(x_0)}{\alpha^{n+1}(x)-\alpha^n(x)}=\frac{x^2-xx_0}{-x_0x^2}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}.$$

Como este limite existe, segue do algoritmo de Lévy que

$$g(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}$$

é uma solução para equação de Abel

$$g\left(\frac{x}{x+1}\right) = g(x) + 1.$$

Como $x_0 \neq 0$, tomando uma constante $c = \dfrac{1}{x_0}$, segue da proposição 3.8 que

$$h(x) = g(x) + c = \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_0} = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

também é uma solução. Notemos que $h(x) = x^{-1}$ é claramente injetiva com inversa $h^{-1}(x) = \dfrac{1}{x}$. Desta forma, segue da proposição (3.13) que, para cada constante c, a função

$$f(x) = h^{-1}[h(x) + c]$$

satisfaz a equação de comutatividade. Assim,

$$f(x) = h^{-1}\left(\frac{1}{x} + c\right) = h^{-1}\left(\frac{1+xc}{x}\right) = \frac{1}{\dfrac{1+xc}{x}} = \frac{x}{1+xc} \Rightarrow f(x) = \frac{x}{1+xc}$$

é uma solução para a equação de comutatividade

$$f\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{f(x)}{f(x)+1}.$$

4.3 Aplicação 3

Em cada um dos casos a seguir, encontre todos os polinômios com coeficientes reais que satisfazem as equações:

(a) $f(x^2 + x) = f(x) \cdot f(x+1)$;

(b) $f(g(x)) = f(x) \cdot g(x)$.

Solução:

(a) Seja $d = Gr(f)$. Observe que o grau do lado esquerdo da equação em $\mathbb{R}$ é d e o grau do lado direito da equação é $d + d = 2d$. Assim, devemos ter

$$d = 2d \Rightarrow d = 0.$$

Dessa forma, f é um polinômio de grau zero, ou seja, é o polinômio constante $f(x) = c$. Daí,

$$f(x^2 + x) = f(x) \cdot f(x + 1) \Rightarrow c = c \cdot c \Rightarrow c^2 = c \Rightarrow c^2 - c = 0 \Rightarrow c(c - 1) = 0.$$

Logo, $c = 0$ ou $c = 1$, isto é, os polinômios constantes que são soluções para a equação funcional são $f(x) = 0$ e $f(x) = 1$. Uma outra possibilidade é que 0 seja a única raiz do polinômio não constante $f(x)$, ou seja,

$$f(x) = x^k,$$

para algum $k \neq 1$.

(b) Examinando o grau de cada polinômio, seja d o grau de polinômio f e l o grau do polinômio g. Das fórmulas (3.23) e (3.24), temos

$$d \cdot l = d + l. \tag{4.1}$$

Como o grau de um polinômio é um número inteiro não negativo, temos que a equação (4.1) é satisfeita se $d = l = 0$ ou $d = l = 2$. No primeiro caso, temos que $f(x)$ e $g(x)$ são polinômios constantes, ou seja, $f(x) = \alpha$ e $g(x) = \beta$, onde α e β são constantes arbitrárias. Assim,

$$f(g(x)) = f(x) \cdot g(x) \Rightarrow f(\beta) = \alpha \cdot \beta \Rightarrow \alpha = \alpha\beta.$$

Se $\alpha \neq 0$, temos $\beta = 1$ e se $\alpha = 0$ temos que β é uma constante qualquer. Logo, $f(x) = \alpha$, com $\alpha \neq 0$, e $g(x) = 1$ ou $f(x) = 0$ e $g(x) = \beta$.

Quando $d = l = 2$, devemos ter algum ponto x no plano complexo tal que $g(x) = 0$. Então,

$$f(0) = f(g(x)) = f(x) \cdot g(x) = 0.$$

Logo, 0 é raiz de $f(x)$, ou seja, $f(x)$ pode ser escrito na forma $f(x) = cx(x + a)$, com $c \neq 0$, para alguma constante a. Fazendo $g(x) = rx^2 + sx + t$, com $r \neq 0$, temos

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= f(rx^2 + sx + t) \\ &= c(rx^2 + sx + t)(rx^2 + sx + t + a) \\ &= c[r^2x^4 + 2rsx^3 + (2rt + ra + s^2)x^2 + (2st + sa)x + t^2 + at] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f(x) \cdot g(x) &= cx(x+a)rx^2 + sx + t \\ &= c(x^2+ax)(rx^2+sx+t) \\ &= c[rx^4 + (s+ra)x^3 + (t+sa)x^2 + atx]. \end{aligned}$$

Como $f(g(x)) = f(x) \cdot g(x)$ e $c \neq 0$, segue que

$$r^2x^4+2rsx^3+(2rt+ra+s^2)x^2+(2st+sa)x+t^2+at = rx^4+(s+ra)x^3+(t+sa)x^2+atx.$$

Da igualdade de polinômios obtemos o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} (1) : r^2 & = r \\ (2) : 2rs & = s + ra \\ (3) : 2rt + ra + s^2 & = t + sa \\ (4) : 2st + sa & = at \\ (5) : t^2 + at & = 0 \end{cases}$$

Já que $r \neq 0$, de (1), temos $r^2 = r \Rightarrow r = 1$. A partir daí obtemos de (2) que $2s = s + a \Rightarrow s = a$ e de (3) $2t + a + a^2 = t + a^2 \Rightarrow 2t - t = -a \Rightarrow t = -a$. Podemos facilmente verificar que os valores $s = a$ e $t = -a$ satisfazem (4) e (5).

Portanto, os polinômios $f(x) = c(x^2 + ax)$ e $g(x) = x^2 + ax - a$ são soluções da equação funcional dada.

4.4 Aplicação 4

Encontre todas as funções $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ que satisfazem as equações abaixo:

(a) $f(x+1) = f(x) + 1$, para $x \in \mathbb{Q}^+$;

(b) $f(x^3) = [f(x)]^3$, para $x \in \mathbb{Q}^+$.

Solução:
Em (a), temos a equação de Abel, com $\alpha(x) = x + 1$. Note que

. $\alpha(x) = x + 1$;

. $\alpha^2(x) = \alpha(\alpha(x)) = \alpha(x+1) = x+1+1 = x+2$;

. $\alpha^3(x) = \alpha(\alpha^2(x)) = \alpha(x+2) = x+2+1 = x+3$.

O que nos leva a conjecturar

$$\alpha^n(x) = x + n$$

para $n \in \mathbb{N}$. Podemos provar esta fórmula usando o principio de indução matemática sobre n seguindo o mesmo procedimento usado na Aplicação 1. Daí, para um $x_0 \in \mathbb{Q}^+$, temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{n+1}(x_0) - \alpha^n(x_0)}{\alpha^{n+1}(x) - \alpha^n(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_0+n+1-x_0-n}{x+n+1-x-n} = 1$$

e o limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{n+1}(x) - \alpha^n(x_0)}{\alpha^{n+1}(x) - \alpha^n(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{x+n-x_0-n}{x+n+1-x-n} = x - x_0$$

existe para todo $x \in \mathbb{Q}^+$. Assim, pelo algoritmo de Lévy segue que $f(x) = x - x_0$ é uma solução para a equação funcional $f(x+1) = f(x) + 1$. Mas, f também deve satisfazer a equação de Böttcher $f(x^3) = [f(x)]^3$. Assim,

$$f((x-x_0)^3) = (x-x_0)^3 \Rightarrow x^3 - 3x^2x_0 + 3xx_0^2 - x_0^3 - x_0 = x^3 - 3x^2x_0 + 3xx_0^2 - x_0^3 \Rightarrow x_0 = 0.$$

Portanto, a função $f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+$ definida por $f(x) = x$ satisfaz as equações do enunciado.

4.5 Considerações Finais

Tendo em vista a escassez de artigos escritos para iniciantes sobre equações funcionais, apresentamos este trabalho como forma de suprir um pouco essa carência e dar uma base para aqueles que desejam se aventurar nesse desafiador universo. No decorrer deste estudo, pudemos conhecer alguns tipos de equações funcionais de uma variável e técnicas de busca por solução para cada uma delas. É evidente que esse campo é bastante amplo e para um conhecimento maior a respeito do tema se faz necessário um aprofundamento nos estudos conhecendo outras formas dessas equações. Porém, o conteúdo explanado aqui nos fornece uma boa base para quem está ingressando no estudo deste tema.

Os algoritmos para resolução e as aplicações apresentados neste trabalho também demonstram a grande utilidades do conteúdo limites, suas propriedades e principais teoremas no estudo das equações funcionais. Vale apena ressaltar que caso estes conteúdos sejam apresentados, poderemos discutir uma introdução às equações funcionais voltada para questões de olimpíadas já no Ensino Básico.

Referências

[1] BOYER, Carl Benjamin. *História da Matemática.* 1ª. Ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

[2] CREPALDI, Maria Aparecida da Silva. *A História da Matemática na Apropriação dos Conteúdos da 6ª Série do Ensino Fundamental.* 2005. 61f. Monografia (Especialização)-Universidade do Extremo Sul Catarinense, Curso de Pós-Graduação Especialização em Educação, Criciúma.

[3] MOL, Rogério Santos. *Introdução à História da Matemática.* Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013.

[4] RIBEIRO, Denise Benino Dourado. *O uso da história das equações nos processos de ensino e de aprendizagem da matemática na educação básica.* 2015. 135f. Dissertação (Mestrado)-Universidade Anhanguera de São Paulo, Mestrado em Educação Matemática, São Paulo.

[5] SMALL, Christopher G. *Functional Equations and How to Solve Them.* Problems Books in Mathematics. Springer 2007.

[6] LEITHOLD, Louis. *O Cálculo com Geometria Analítica*, Vol. 2. 3ª. Ed. São Paulo: Harbra Ltda, 1994.

[7] FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss. *Cálculo A: Funções, Limite, Derivação, Integração*, 5ª Ed. São Paulo: Makron, 1992.

[8] THOMAS, George B. *Cálculo*,Vol. 1. 11ª. Ed. São Paulo: Addison Wesley, 2009.

[9] BEZERRA, Alex Pereira. *Uma Introdução às Equações Funcionais.* 2014. 60f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal da Paraíba, PROFMAT, João Pessoa.

[10] LIMA, Elon Lages. *Números e Funções Reais.* 1ª. Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[11] GOMES, Ricardo César da Silva. *Revista Eureka - Equações Funcionais para os mais Jovens, nº 37.*

[12] TENGAN, Eduardo. *Revista Eureka - Equações Funcionais, nº 9.*

[13] ANDREESCU, Titu; BOREICO, Iurie. *Functional Equations*, Edição Eletrônica, 2007.

[14] COSTA, Fernão Couceiro da. *Equações integrais lineares. Sua aplicação à resolução do problema de Dirichlet.* 1929. 103 f. Dissertação para o exame de doutoramento Ciências Matemáticas - Universidade do Porto, Portugal.