



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UEPB



## **A Divisibilidade no Ensino Fundamental**

**Erivan Sousa Valentim**

**Orientadora: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Maria Isabelle Silva**

**CAMPINA GRANDE**

**Junho de 2017**



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA  
Programa de Pós-Graduação em Matemática  
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UEPB



## A Divisibilidade no Ensino Fundamental

por

**Erivan Sousa Valentim** †

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional- PROFMAT do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de Mestre em Matemática.

---

†Bolsista CAPES

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano da dissertação.

V155d Valentim, Erivan Sousa.  
A Divisibilidade no Ensino fundamental [manuscrito] / Erivan Sousa Valentim. - 2017.  
62 p. : il. color.

Digitado.  
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional) - Universidade Estadual da Paraíba, Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa, 2017.  
"Orientação: Profa. Dra. Maria Isabelle Silva, Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa".

1. Teoria dos números. 2. Múltiplos. 3. Divisores. 4. Mínimo Múltiplo Comum. 5. Máximo Divisor Comum. I.  
Título. 21. ed. CDD 512

# A Divisibilidade no Ensino Fundamental

por

**Erivan Sousa Valentim**

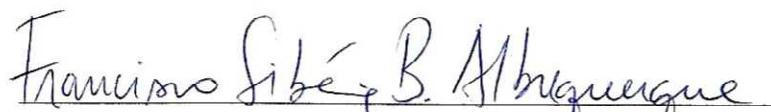
Trabalho de Conclusão de curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UEPB, modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Aprovado por:



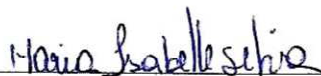
---

Prof. Dr. Uberlândio Batista Severo  
Dpto. Matemática - CCEN/UFPB  
EXAMINADOR



---

Prof. Dr. Francisco Sibério Bezerra Albuquerque  
Dpto. Matemática - CCT/UEPB  
EXAMINADOR



---

Prof. Dra. Maria Isabelle Silva  
Dpto. Matemática - CCT/UEPB  
ORIENTADOR

**Universidade Estadual da Paraíba**  
**Centro de Ciências e Tecnologia**  
Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

**Junho/2017**

# Dedicatória

*Dedico este trabalho a minha mãe (in  
memoriam).*

# Agradecimentos

A Deus ser soberano que nos dá a vida e força a cada dia que surge para prosseguirmos com nossa caminhada.

À professora Dra. Maria Isabelle Silva pelas leituras sugeridas ao longo dessa orientação e pela dedicação.

Aos meus pais João e Maria José (*in memoriam*) por toda dedicação que tiveram comigo ao longo dessa caminhada.

À minha esposa Rayane por toda compreensão e apoio, onde nos momentos mais difíceis sempre esteve ao meu lado.

Aos professores do PROFMAT, que contribuíram ao longo desses dois anos para meu avanço intelectual através das disciplinas ministradas.

À coordenação do PROFMAT, Professor Davis e Aíla, por todas as dúvidas retiradas e pela disposição sempre que foi preciso.

Aos colegas de classe, pelos momentos de discussões, pela ajuda na resolução de exercícios e pelas amizades as quais tive prazer de conhecer em especial aos amigos: Alane, Alexandre, Ana Lúcia, Cleysson, Janaína, Mailson e Wesklemyr os quais permanecerão no meu coração como um vínculo eterno de amizade.

*“Não perca seu tempo se defendendo nem tentando provar nada a ninguém. Sua consciência é seu mestre e seu guia. Só Deus sabe de suas intenções, de sua bondade e de seus defeitos. O que importa de verdade é o que você pensa e sabe de si mesmo.”*

(Chico Xavier)

# Resumo

A proposta deste trabalho é de realizar uma abordagem sobre os múltiplos e divisores, incluindo mínimo múltiplo comum e o máximo divisor comum, tendo em vista a dificuldade que os estudantes sentem ao se deparar com tal conteúdo na educação básica, objetivando um melhor entendimento a cerca do conteúdo e uma melhoria no que diz respeito a aprendizagem dos educandos. A proposta foi aplicada em uma turma de 8º ano na Escola Técnica Agrícola Joaquim Limeira de Queiroz, na cidade de Puxinanã - PB, no mês de março de 2017. Foram abordados as definições de múltiplos, divisores, números primos e mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum, e aplicadas atividades tais como: bingo dos divisores, a soma do quadrado mágico e a construção do Crivo de Eratóstenes. Por fim, realizamos um exercício avaliativo com o objetivo de analisar se os resultados a respeito do conteúdo e das atividades propostas anteriormente foram satisfatórias.

**Palavras-chave:** Múltiplos. Divisores. Mínimo múltiplo comum. Máximo divisor Comum.



# Abstract

The purpose of this work is to realize an approach about multiples and divisors, including the least common multiple and the greatest common divisor, owing to the difficulty that students feel when they faced with such content in basic education, aiming at a better understanding about it and an improvement in the learning of learners. The suggestion was applied in an 8th grade class at the Joaquim Limeira de Queiroz Agricultural Technical School, in the city of Puxinanã - PB, in March 2017. They were addressed the definitions of multiples, divisors, prime numbers and the least common multiple and the greatest common divisor, and it was applied activities such as: bingo of the divisors, the sum of the magic square and the construction of the Sieve of Eratosthenes. Finally, we carried out an evaluation exercise with the objective of analyzing if the results regarding the content and the activities previously proposed were satisfactory.

**Key-words:** Multiple. Dividers. The Least common multiple. The Greatest common divisor.

# Lista de Figuras

3.1	Solução do Cubo mágico . . . . .	42
3.2	Soma mágica dos múltiplos . . . . .	43
3.3	Atividade procurando números primos . . . . .	44
3.4	Solução do Problema 1 . . . . .	50
3.5	Solução do Problema 2 . . . . .	51
3.6	Solução do Problema 3 . . . . .	52
3.7	Gráfico de desempenho dos discentes . . . . .	59

# Lista de Tabelas

3.1	Múltiplos de 4 . . . . .	39
3.2	Divisores de 18 . . . . .	40
3.3	Números primos de 1 a 100 . . . . .	45
3.4	Números primos de 1 a 50 . . . . .	53
3.5	Nota obtida por cada aluno . . . . .	58

# Sumário

<b>1</b>	<b>Um Pouco da História</b>	<b>16</b>
1.1	Euclides de Alexandria . . . . .	17
1.2	Diofanto . . . . .	17
1.3	Fermat . . . . .	18
1.4	Euler . . . . .	19
1.5	Lagrange . . . . .	20
1.6	Gauss . . . . .	21
<b>2</b>	<b>Conceitos Elementares da Teoria dos Números</b>	<b>22</b>
2.1	Divisibilidade . . . . .	22
2.2	Divisão Euclidiana . . . . .	23
2.3	Sistemas de Numeração . . . . .	25
2.4	Máximo Divisor Comum . . . . .	30
2.5	Algoritmo de Euclides . . . . .	31
2.6	Mínimo Múltiplo Comum . . . . .	34
2.7	Números primos e compostos . . . . .	35
<b>3</b>	<b>Aplicações</b>	<b>38</b>
3.1	Múltiplos e Divisores de um Número Natural . . . . .	38
3.2	Números Primos . . . . .	43
3.3	APLICAÇÕES: MDC e MMC . . . . .	46
3.4	Verificação da aprendizagem através de problemas propostos . . . . .	52
	<b>Considerações Finais</b>	<b>59</b>
	<b>Referências</b>	<b>60</b>



# Introdução

A Teoria dos Números é a parte da Matemática que se dedica ao estudo dos números inteiros. Em relação às outras áreas da Matemática, a área da Teoria dos Números se destaca mais pelos seus problemas do que por seus métodos. Devido ao seu aspecto multidisciplinar e à simplicidade dos seus conceitos, a Teoria dos Números é um dos ramos mais populares em toda Matemática.

A escolha do tema divisibilidade, explorado na educação básica, mais precisamente no Ensino Fundamental, através de uma abordagem sobre múltiplos e divisores, números primos, decomposição em fatores primos, mínimo múltiplo comum (MMC) e máximo divisor comum (MDC), se deu pelo fato da dificuldade dos alunos com relação a divisibilidade, tendo em vista que, para os alunos, é um conteúdo onde seus conceitos e definições são ministrados superficialmente, isto é, não são trabalhados de maneira mais aprofundada, tornando este processo de ensino e aprendizagem um pouco deficitário. Muitas vezes, isso ocorre devido ao tempo e carga de conteúdos que é extensa, e também a maturidade dos alunos em Matemática que em vários momentos não é a ideal. Assim, o presente trabalho tem por objetivo realizar uma intervenção pedagógica para o ensino e aprendizagem de múltiplos e divisores, realizando atividades lúdicas em alguns momentos e em outros momentos, atividades curriculares.

O presente trabalho teve sua intervenção na Escola Técnica Agrícola Joaquim Limeira de Queiroz, na cidade de Puxinanã - PB, desenvolvido em uma turma de 8º ano da referida escola, onde suas aplicações e resultados estão descritos mais adiante.

Assim, o trabalho está organizado da seguinte maneira: No capítulo 1, faremos um breve histórico sobre alguns matemáticos, influentes na Teoria dos Números, mostrando um pouco de sua vida e suas obras. No capítulo 2, apresentaremos um pouco de definições e conceitos referentes à Teoria dos Números, tais como: Divisibilidade, Divisão

Euclidiana, Máximo Divisor Comum, Algoritmo de Euclides, Mínimo Múltiplo Comum, Números Primos e Compostos, entre outros. No capítulo 3 descreveremos as atividades realizadas no ambiente escolar, bem como os aspectos metodológicos e o desenvolvimento da pesquisa. E por fim, no capítulo 5 apresentaremos resultados e análises do trabalho.

# Capítulo 1

## Um Pouco da História

Na história da matemática, a Teoria dos Números tem um lugar especial, ela é a "rainha da matemática", como disse Gauss no século XIX, apelido dado não apenas por ela ser a parte mais bela da matemática, mas também por ser ao mesmo tempo a parte mais antiga e mais jovem da matemática, não apenas no nosso tempo, mas também desde o início dos tempos modernos.

Segundo [6], "O surgimento dos números naturais, devido à necessidade de contar, está nas raízes da história da teoria dos números se presente na civilizações mais antigas". "Teoria dos números, essa área tão antiga, tem um passado profundo, espetacular, e tem um presente ativo e um futuro que deve ser julgado pelas gerações vindoura" como afirma [7]. Atualmente a Teoria dos números é uma área de conhecimento muito mais ampla do que antigamente e do período moderno desde Fermat, Euler, Lagrange, Legendre, Gauss e Hilbert.

No século XX teoria dos números entrou no domínio de aplicações mais do que antes, ela abraçou outros campos da matemática e suas aplicações estão cada vez mais vastas de aparentes, como por exemplo na tecnologia moderna, a tecnologia digital. O domínio de teoria dos números está crescendo mais do que nos séculos passados, pois a matemática está evoluindo e suas aplicações estão se multiplicando nas diferentes áreas do conhecimento. Hoje em dia existem muitos mais campos da matemática do que na era de Euclides, ou na idade Média, e até na era de Legendre [7].

A seguir comentaremos um pouco sobre alguns matemáticos influentes na teoria dos números.



## 1.1 Euclides de Alexandria

Euclides de Alexandria nasceu na Síria provavelmente no século III a.C. e realizou seus estudos em Atenas. Pouco se sabe de sua vida pessoal. Sabe-se que viveu em Alexandria. Muito antes dele, a geometria já era assunto no Egito. Por volta de 300 a.C, em Alexandria, um tratado que se tornaria um dos marcos mais importantes da matemática, Os Elementos de Euclides, tendo chegado até nós através de sucessivas edições, tratado esse composto de 13 livros contendo a maior parte do conhecimento matemático da época. Euclides não criou muitos resultados, mas ele estabeleceu um padrão e um rigor matemático jamais visto anteriormente.

Dos 13 livros de Os Elementos (Stoichia), dez destacam a geometria e três destacam a aritmética. Nos três livros de aritmética, livros VII, VIII e IX, Euclides desenvolve a teoria dos números naturais. No livro VII são definidos os conceitos de divisibilidade, de números primos, de números perfeitos, de máximo divisor comum e de mínimo múltiplo comum, entre outros. No mesmo livro, além das definições citadas, todas bem postas e até hoje utilizadas, encontra-se enunciada (sem demonstração) a divisão euclidiana. Com o uso iterado dessa divisão, Euclides estabelece o algoritmo mais eficiente, e até hoje conhecido para o cálculo do máximo divisor comum de dois inteiros (Proposições 1 e 2 nos Elementos), chamado de Algoritmo de Euclides. No livro VIII, são estudadas propriedades de sequências de números em progressão geométrica. No Livro IX, Euclides mostra, de modo magistral, que a quantidade de números primos supera qualquer número dado; em outras palavras, existem infinitos números primos (Proposição 20 nos Elementos). Euclides também prova que todo número natural se escreve de modo essencialmente único como produto de números primos, resultado hoje chamado de Teorema Fundamental da Aritmética (Proposição 14 nos Elementos). É também provado um resultado que dá uma condição necessária para que um número natural seja perfeito (Proposição 35 em Os Elementos).

## 1.2 Diofanto

Diofanto tem o seu nome ligado à cidade que foi o maior centro de atividade matemática na Grécia antiga. Pouco se sabe acerca da sua vida, o desconhecimento impede-nos mesmo de fixar com segurança em que século viveu. Têm sido sugeridas datas dis-

tanciadas de um século, antes ou depois do ano 250 d. C. Por uns versos encontrados no seu túmulo, escritos em forma de um enigmático problema, deduz-se que viveu 84 anos.

Grego que também possui um grande destaque na área de Teoria dos Números, conhecido como Diofante de Alexandria, que vivia no século III, em um período onde a matemática grega estava em declínio. Seu nome está associado a equações cujas soluções são procuradas no conjunto dos números inteiros. O mesmo escreveu 13 capítulos sobre matemática, dos quais apenas seis foram encontrados. Um dos principais capítulos de Diofante é o capítulo de Equações Diofantinas que são equações de várias variáveis na qual o objetivo é achar soluções inteiras. Como por exemplo a equação

$$3x + 4y = 2$$

que é uma equação diofantina com duas variáveis,  $x$  e  $y$ . Essa equação tem solução, por exemplo,  $x = -2$ ,  $y = 2$ . É fácil mostrar que ela tem infinitas soluções. De fato, todos os números como  $x = -4k - 2$  e  $y = 3k + 2$  onde deixamos que  $k$  percorra sobre todos os números inteiros são soluções da equação referida.

Durante séculos grandes estudiosos voltaram sua atenção para o estudo de equações diofantinas. O problema de achar as soluções ou verificar a sua existência ajudou na criação de modos diferentes de pensamentos para decidir se uma equação diofantina possui solução.

### 1.3 Fermat

Pierre de Fermat (1601 - 1665) estudou direito em Toulouse na França, onde serviu no parlamento local, primeiro como advogado, mais tarde como conselheiro. Em 1629 ele começou a fazer descobertas importantes na área de matemática, restaurando obras perdidas da antiguidade com base em informação encontrada nos tratados clássicos preservados.

Na época, era comum os matemáticos não divulgarem as demonstrações dos resultados que descobriam, lançando-os como desafio para outros. Os resultados de Fermat foram divulgados por meio de sua correspondência, principalmente com o padre Marin Mersenne (1588 - 1648), que desempenhava o papel de divulgador da Matemática. Numa de suas cartas de 1640, Fermat enunciou o seu Pequeno Teorema, dizendo que não escreveria a demonstração por ser longa demais.

Fermat descobriu vários teoremas em Teoria dos Números, mas a sua contribuição mais marcante foi a anotação que deixou na margem do Problema 8, Livro 2, de sua cópia de Bachet da Aritmética de Diofanto, onde se encontravam descritas as infinitas soluções da equação pitagórica  $X^2 + Y^2 = Z^2$ . Fermat escreveu: *“Por outro lado, é impossível separar um cubo em dois cubos, ou uma biquadrada em duas biquadradas, ou, em geral, uma potência qualquer, exceto um quadrado em duas potências semelhantes. Eu descobri uma demonstração verdadeiramente maravilhosa disto, que todavia esta margem não é suficientemente grande para cabê-la.”*

Esta afirmação de Fermat, apesar de não demonstrada por ele, acabou sendo chamada de *Último Teorema de Fermat*. Passaram-se mais de 350 anos e muita matemática foi desenvolvida para que, em 1995, o matemático inglês Andrew Wiles desse uma prova, encerrando este glorioso capítulo da história da Matemática.

Um outro problema cuja solução desde há muito era procurada pelos matemáticos é a determinação de fórmulas geradoras de números primos. Fermat morreu com a convicção de que a expressão  $2^{2^n} + 1$  representava sempre um número primo, admitindo, no entanto, não ser capaz de prová-lo rigorosamente. Esta fórmula produz números primos para  $n = 0, 1, 2, 3$  e 4, mas a crença de Fermat revelou-se posteriormente falsa com a apresentação de uma fatoração de  $2^{2^5} + 1$  por Leonhard Euler. Este foi o mais importante matemático do século 18 e que provou todos os resultados de Fermat, exceto, obviamente, o Último Teorema, do qual mostrou que  $X^3 + Y^3 = Z^3$  e  $X^4 + Y^4 = Z^4$  (este também provado por Fermat) não admitem soluções em inteiros positivos.

## 1.4 Euler

Leonhard Euler (1707-1783) foi, sem dúvida, um dos maiores e mais férteis matemáticos de todos os tempos, Euler nasceu na Suíça, perto da cidade de Basileia, filho de um modesto pastor protestante que nutria a esperança de que seu filho seguisse a mesma carreira.

Euler possuía uma grande facilidade para o aprendizado de línguas e uma prodigiosa memória, aliada a uma extraordinária habilidade para efetuar mentalmente contas complexas, habilidade esta que lhe seria muito útil no final de sua vida. Aos 14 anos, ingressou na Universidade da Basileia, onde foi aluno de Johann Bernoulli, com quem teve

a sua verdadeira iniciação à matemática. Aos 20 anos de idade, Euler recebeu menção honrosa da Academia de Ciências de Paris por um trabalho sobre a trajetória do mastro de um barco em movimento, ganhando reconhecimento internacional.

Em 1727, começa a sua carreira profissional, assumindo uma posição como físico na nova Academia de São Petersburgo, na Rússia. Foi nessa época que conheceu Christian Goldbach, que chamou a sua atenção para os problemas tratados por Fermat, fato esse responsável pela grande obra de Euler em Aritmética. Em 1733, Euler assumiu a cátedra de matemática na Academia de São Petersburgo.

o valor exato da soma infinita

Em 1738, Euler perde a visão de seu olho direito, ficando totalmente cego em 1771, não diminuindo por isto a sua produtividade científica. Durante muito tempo, cerca de metade de cada volume dos anais da Academia de São Petersburgo era dedicada a seus trabalhos e, durante 48 anos após a sua morte, ainda neles eram publicados artigos seus.

Euler escreveu sobre os mais variados assuntos, tais como, teoria das funções, cálculo diferencial e integral, números complexos, acústica, música, teoria dos números, teoria das partições e mecânica, entre muitos outros, ocupando, indiscutivelmente, um lugar entre os maiores matemáticos de todos os tempos.

## 1.5 Lagrange

Joseph L. Lagrange (1736-1813), nascido em Turim, na Itália, grande matemático, deu suas contribuições importantes também à Teoria dos Números, mas, como é conhecido, a maioria de seus trabalhos sobre essa área era estudar problemas oferecidos por Fermat e reformulados por Euler. Provou que a equação de Pell-Fermat,  $x^2 - Ay^2 = 1$ , tem infinitas soluções. Ainda provou que todo número inteiro positivo é a soma de, no máximo, quatro quadrados perfeitos, chamado o teorema de Lagrange dos quatro quadrados, o mesmo escreveu um livro sobre Teoria dos Números em 1798.

O seu trabalho sobre formas quadráticas, pode ser considerado como o primeiro sinal de entrada da álgebra em Teoria dos Números. Ele mostrou que formas quadráticas sobre inteiros podem ser divididas em classes de equivalência. Resultado este que foi longo no século XX, estudado por grandes matemáticos em Teoria dos números e outras áreas relevantes.

## 1.6 Gauss

O nome de Gauss está associado a uma grande parte de teoria dos números clássicos. Ele resolveu perguntas em abertas como a reciprocidade quadrática, ele conjecturou o *Teorema de Número Primo* e ele escreveu o seu livro monumental quando tinha 21 anos. Gauss é considerado um gênio e também é um grande matemático. Ele também deu grandes contribuições na física, onde previu a existência da geometria não Euclidiana.

Chamado de o "Príncipe dos Matemáticos", publicou uma obra fundamental para a moderna Teoria dos Números, *Disquisitiones arithmeticae*, em que desenvolveu a álgebra da relação de congruência. Com essa obra a Teoria dos Números se transformou em uma nova disciplina dotada de métodos próprios, mais profundos, fonte e modelo para as teorias aritméticas do século XIX. Em 1825, ele introduziu os números inteiros gaussianos (números complexos da forma  $a + bi$ , onde  $a$  e  $b$  são números inteiros e  $i^2 = -1$ ), uma extensão da ideia de número inteiro, pois descobriu que muito da antiga teoria de Euclides sobre fatoração de inteiros poderia ser transportada para esse conjunto com consequências importantes para a Teoria dos Números.

# Capítulo 2

## Conceitos Elementares da Teoria dos Números

Neste capítulo iremos abordar as definições e propriedades elementares concernentes à relação de divisibilidade no conjunto dos números inteiros. Abordaremos também resultados básicos versando sobre máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum e números primos. As demonstrações a seguir podem ser consultadas em [4] e [9].

### 2.1 Divisibilidade

Dados dois números inteiros  $a$  e  $b$ , com  $b \neq 0$ , diremos que  $b$  **divide**  $a$ , isto é,  $b \mid a$ , se existir um inteiro  $c$  tal que

$$a = bc$$

Neste caso, diremos também que  $a$  **divisível**  $b$ , que  $b$  é **divisor** de  $a$  ou ainda que  $a$  é um **múltiplo** de  $b$ .

Assim,

$$b \mid a \Leftrightarrow a = bc \text{ para algum } c \in \mathbb{Z}.$$

Caso  $b$  não divida  $a$ , indicaremos por  $b \nmid a$ .

Por exemplo:  $4 \mid 12$ ,  $-7 \mid 21$  e  $5 \nmid 22$ .

Para um número inteiro  $a$ , indicaremos seu conjunto de divisores positivos por  $D_a$ , e para  $a \neq 0$ , denotaremos seu conjunto de múltiplos positivos por  $M_a$ , ou seja,

$$D_a = \{n \in \mathbb{N} : n \mid a\} \text{ e } M_a = \{n \in \mathbb{N} : a \mid n\}$$

É claro que  $D_a = D_{-a}$  e  $M_a = M_{-a}$

**Teorema 2.1.** *Quaisquer que sejam os números  $a, b, c$  e  $d \in \mathbb{Z}$ , temos:*

i)  $a \mid a$ .

ii) Se  $a \mid b$  e  $b \mid c$ , então  $a \mid c$ .

iii) Se  $a \mid b$  e  $c \mid d$ , então  $ac \mid bd$ .

iv) Se  $a \mid b$  e  $a \mid c$ , então  $a \mid (b + c)$  e  $a \mid (b - c)$ .

v) Se  $a \mid b$  e  $a \mid c$ , então  $a \mid (mb + nc)$ ,  $\forall m, n \in \mathbb{Z}$ .

*Demonstração.* i) Note que podemos escrever  $a \cdot 1 = a$ , logo,  $a \mid a$ .

ii) Se  $a \mid b$  e  $b \mid c$  então existem  $q_1$  e  $q_2 \in \mathbb{Z}$  tais que,  $b = aq_1$  e  $c = bq_2$ . Substituindo o valor de  $b$  em  $c$  obtemos  $c = a(q_1q_2)$ , ou seja,  $a \mid c$ .

iii) Temos que  $b = aq_1$  e  $d = cq_2$ , multiplicando membro a membro, obtemos  $bd = ac(q_1q_2)$ , isto é,  $ac \mid bd$ .

iv) Temos que  $b = aq_1$  e  $c = aq_2$ . Operando ambos os lados das igualdades temos:

$$b + c = a(q_1 + q_2) \text{ e } b - c = a(q_1 - q_2),$$

e portanto,  $a \mid (b + c)$  e  $a \mid (b - c)$ .

v) Por hipótese, temos que  $b = aq_1$  e  $c = aq_2$ . Assim dados inteiros  $m$  e  $n$  temos  $mb = amq_1$  e  $nc = anq_2$ , somando membro a membro obtemos  $mb + nc = a(mq_1 + nq_2)$ , e portanto  $a \mid (mb + nc)$ .

□

## 2.2 Divisão Euclidiana

**Axioma 2.1.** (*Princípio da Boa Ordenação-PBO*) *Se  $S$  é um subconjunto não vazio de  $\mathbb{Z}$  e limitado inferiormente, então ele possui um menor elemento.*

Como todo subconjunto não vazio de  $\mathbb{N}$  é limitado inferiormente, então para o conjunto dos números naturais, o PBO se reduz à afirmação: *todo subconjunto não vazio  $S$  de  $\mathbb{N}$  possui um menor elemento.*

**Proposição 2.1. (Propriedade Arquimediana)** Se  $a$  e  $b$  são números naturais, então existe um número natural  $n$  tal que  $na \geq b$ .

*Demonstração.* Suponha por absurdo que a afirmação não seja verdadeira, assim para todo número natural  $n$ ,  $na < b$ . Logo, o conjunto

$$S = \{b - na : n \in \mathbb{N}\}$$

é formado apenas por números naturais. Assim pelo Princípio da Boa Ordenação,  $S$  possui elemento mínimo, digamos  $m = \min(S)$ . Como  $m \in S$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $m = b - n_0a$ . Por outro lado, o elemento  $m_1 = b - (n_0 + 1)a$  pertence a  $S$ , pois  $S$  contém todos os elementos dessa forma. Além disso,

$$m_1 = b - (n_0 + 1)a = b - n_0a - a = m - a < m,$$

pois  $a > 0$ . Assim,  $m_1 \in S$  e  $m_1 < m$ , o que contraria o fato de  $m$  ser o menor elemento de  $S$ . □

**Teorema 2.2.** Dados  $a$  e  $b$  dois números inteiros com  $b \neq 0$ . Existem dois únicos números  $q$  e  $r$  tais que

$$a = bq + r, \quad \text{com } 0 \leq r < |b|$$

*Demonstração.* Seja o conjunto

$$S = \{x = a - by; y \in \mathbb{Z}\} \cap (\mathbb{N} \cup 0)$$

Existência:

Pela propriedade Arquimediana, existe  $n \in \mathbb{Z}$  tal que  $n(-b) > -a$ , logo  $a - nb > 0$ , o que mostra que  $S$  é não vazio. O conjunto  $S$  é limitado inferiormente por 0, logo, pelo Princípio da Boa Ordenação, temos que  $S$  possui um menor elemento  $r$ . Suponhamos então que  $r = a - bq$ . Sabemos que  $r \geq 0$ . Vamos mostrar que  $r < |b|$ . Suponhamos por absurdo que  $r \geq |b|$ . Portanto, existe  $s \in \mathbb{N} \cup 0$  tal que  $r = |b| + s$ , logo  $0 \leq s < r$ . Mas isso contradiz o fato de  $r$  ser o menor elemento de  $S$ , pois  $s = a - (q \pm 1)b \in S$ , com  $s < r$ .

Unicidade:

Suponha que  $a = bq + r = bq' + r'$ , onde  $q, q', r, r' \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < |b|$  e  $0 \leq r' < |b|$ . Assim, temos que  $-|b| < -r \leq r' - r \leq r' < |b|$ . Logo,  $|r' - r| < |b|$ . Por outro lado,



$b(q - q') = r' - r$ , o que implica que

$$|b||q - q'| = |r' - r| < |b|,$$

o que só é possível se  $q = q'$  e conseqüentemente,  $r = r'$ . □

**Exemplo:** Determine o quociente e o resto da divisão de 41 por 7 e o resto da divisão de  $-1243$  e  $-4$ .

**Solução:** Como  $41 = 7 \cdot 5 + 6$  e  $6 < 7$ , então  $q = 5$  e  $r = 6$ .

E para  $-1243$  e  $-4$  efetuamos a divisão natural de 1243 por 4. Posteriormente manipulamos a expressão de forma conveniente. Assim como:  $1243 = 4 \cdot 310 + 3$ , então

$$\begin{aligned} -1243 &= 310 \cdot (-4) - 3 = 310 \cdot (-4) - 3 - 4 + 4 \\ &= (-4) \cdot (310 + 1) + 1 \\ &= (-4) \cdot 311 + 1 \end{aligned}$$

## 2.3 Sistemas de Numeração

Desde os tempos antigos, sabe-se que a forma de representar números surgiu como um modo de contagem de animais ou de quaisquer outros bens. Para isso, é muito comum o uso de símbolos para designar quantidades, os quais eram inscritos em paus, tábuas, pedras, etc.

Quando um número natural é formado pelos algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, dizemos que ele é escrito na *representação decimal*. Por exemplo o número  $a = 284301$  está na representação decimal, o qual pode ser escrito da seguinte forma:

$$a = 2 \cdot 10^5 + 8 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 1.$$

Teoricamente, entretanto, poderíamos escolher uma base de numeração arbitrária, como demonstraremos a seguir:

**Teorema 2.3.** *Seja  $b$  um inteiro, com  $b > 1$ . Então, todo inteiro positivo  $a$  pode ser escrito de modo único na forma*

$$a = r_n b^n + r_{n-1} b^{n-1} + \dots + r_1 b + r_0,$$

em que  $n \geq 0$ ,  $r_n \neq 0$ , e para cada  $i$ , como  $0 \leq i \leq n$ , temos que  $0 \leq r_i \leq b$ , onde os  $r_i$ 's são os dígitos ou algarismos de  $a$ .

*Demonstração.* A prova consiste em mostrar a existência e unicidade dos números  $r_i$ 's,  $i = 0, 1, \dots, n$ . Isso será feito usando divisões sucessivas.

Existência:

Dividindo  $a$  por  $b$ , obtemos pelo Algoritmo da Divisão que

$$a = bq_0 + r_0, \quad 0 \leq r_0 < b.$$

Dividindo  $q_0$  por  $b$ ,

$$q_0 = bq_1 + r_1, \quad 0 \leq r_1 < b.$$

Se  $q_1 \geq b$ , então dividindo  $q_1$  por  $b$ ,

$$q_1 = bq_2 + r_2, \quad 0 \leq r_2 < b.$$

Repetindo o processo e levando em consideração que cada quociente  $q_i$  é não negativo e  $q_{i+1} < q_i$  para  $i \geq 1$ , devemos obter necessariamente um quociente igual a zero, digamos  $q_n = 0$ . Desse modo,

$$q_{n-2} = bq_{n-1} + r_{n-1},$$

com  $0 \leq r_{n-1} < b$  e  $q_{n-1} = bq_n + r_n = r_n$ .

Agora, substituindo os valores dos quocientes  $q_i$ 's de forma sucessiva, começando com  $q_0$ , obtemos que

$$\begin{aligned} a &= bq_0 + r_0 = b(bq_1 + r_1) + r_0 \\ &= b^2q_1 + br_1 + r_0 \\ &= b^2(bq_2 + r_2) + br_1 + r_0 \\ &= b^3q_2 + b^2r_2 + br_1 + r_0 \\ &\quad \vdots \\ &= b^{n-1}(bq_{n-1} + r_{n-1}) + b^{n-2}r_{n-2} + \dots + b^2r_2 + br_1 + r_0 \\ &= b^n bq_{n-1} + b^{n-1}r_{n-1} + b^{n-2}r_{n-2} + \dots + b^2r_2 + br_1 + r_0. \end{aligned}$$

Mas, como  $q_{n-1} = r_n$ , temos

$$a = r_n b^n + r_{n-1} b^{n-1} + \cdots + r_1 b + r_0.$$

Isso prova a existência da expressão de  $a$  sob as hipóteses estabelecidas.

Unicidade:

Mostremos inicialmente que, nas condições anteriores,  $b_n \leq a < b^{n+1}$ . Com efeito, como  $1 \leq r_n$ , então  $b^n \leq r_n b^n \leq a$ . Por outro lado, como  $r_i < b$ , segue que  $r_i - 1 \leq b$ .

Logo,

$$\begin{aligned} a &= r_n b^n + r_{n-1} b^{n-1} + \cdots + r_1 b + r_0 \\ &\leq (b-1)b^n + (b-1)b^{n-1} + \cdots + (b-1)b + (b-1) \\ &= b^{n+1} - 1 \\ &< b^{n+1}. \end{aligned}$$

Logo,  $b^n \leq a < b^{n+1}$ . Agora, suponhamos que

$$a = s_m b^m + s_{m-1} b^{m-1} + \cdots + s_1 b + s_0,$$

em que  $0 \leq s_i < b$  para  $i = 0, 1, \dots, m$ . Nestas condições,  $n = m$ . De fato, se  $m < n$ , então  $m+1 \leq n$ , de modo que,  $b^{m+1} \leq b^n \leq a$ , o que não é possível, pois  $a < b^{m+1}$ . da mesma forma, não se pode ter  $n < m$ . Portanto,  $m = n$ . Desse modo,

$$r_n b^n + r_{n-1} b^{n-1} + \cdots + r_1 b + r_0 = s_n b^n + s_{n-1} b^{n-1} + \cdots + s_1 b + s_0,$$

Assim,

$$b(r_n b^{n-1} + \cdots + r_2 b + r_1) + r_0 = b(s_n b^{n-1} + \cdots + s_2 b + s_1) + s_0. \quad (2.1)$$

Como  $0 \leq r_i < b$  e  $0 \leq s_i < b$ , então da unicidade assegurada pelo Algoritmo da Divisão para o quociente e o resto, concluímos de (2.1) que  $r_0 = s_0$ . Logo,

$$r_n b^{n-1} + r_{n-1} b^{n-2} + \cdots + r_2 b + r_1 = s_n b^{n-1} + s_{n-1} b^{n-2} + \cdots + s_2 b + s_1.$$

Da mesma forma,

$b(r_n b^{n-2} + r_{n-1} b^{n-3} + \cdots + r_2) + r_1 = b(s_n b^{n-2} + s_{n-1} b^{n-3} + \cdots + s_2) + s_1$ , e pelo mesmo motivo,  $r_1 = s_1$  e

$$r_n b^{n-2} + r_{n-1} b^{n-3} + \dots + r_2 = s_n b^{n-2} + s_{n-1} b^{n-3} + \dots + s_2.$$

Continuando estes processo, obtemos que  $r_i = s_i$ , para  $i = 1, \dots, n$ .

□

## Alguns Critérios de Divisibilidade

Definiremos a seguir alguns critérios de divisibilidade, onde teremos por base a representação decimal de um número natural dado, isto é: Todo número natural  $a$  se escreve na base decimal da forma

$$a = r_n b^n + r_{n-1} b^{n-1} + \dots + r_1 b + r_0 \quad (2.2)$$

- Divisibilidade por 2

*Demonstração.* Como  $r_n b^n + r_{n-1} b^{n-1} + \dots + r_1 b$ , é uma soma na qual todas as parcelas são múltiplos de 2, segue de (2.2) que

$$2 \mid a \Leftrightarrow 2 \mid r_0 \Leftrightarrow r_0 \text{ é par,}$$

ou seja, 2 divide  $a$  se, e somente se,  $r_0 = 0, 2, 4, 6$  e  $8$ .

□

Assim um número inteiro é divisível por 2 se, e somente se, o último dígito for par.

**Exemplo:**  $a = 345896$  é divisível por 2, já  $b = 234567$  não é.

- Divisibilidade por 5 e 10

*Demonstração.* Como  $r_n b^n + r_{n-1} b^{n-1} + \dots + r_1 b$ , é uma soma na qual todas as parcelas são múltiplos de 5 e de 10, segue de (2.2) que

$$5 \mid a \Leftrightarrow 5 \mid r_0 \Leftrightarrow r_0 = 0 \text{ ou } r_0 = 5,$$

e

$$10 \mid a \Leftrightarrow 10 \mid r_0 \Leftrightarrow r_0 = 0.$$

□

Logo, um número é divisível por 5 se, e somente se, o seu último for 0 ou 5. Um número é divisível por 10 se, e somente se, o seu último dígito for 0.

**Exemplo:**  $a = 73690$  e  $b = 34695$  são divisíveis por 5. Mas  $c = 3456$  não é. E  $a = 1450$  é divisível por 10, porém  $b = 12345$  não é divisível por 10.

- Divisibilidade por 3 e 9

*Demonstração.* Os critérios por 3 e por 9 são os mesmos. Inicialmente mostremos

$$9 \mid 10^n - 1, \quad \forall n \geq 0 \quad (2.3)$$

Como  $9 \mid 10^0 - 1 = 0$ , então o resultado é válido para  $n = 0$ . Supondo  $10^n - 1 = 9k$ , ou seja,  $10^n = 9k + 1$ , então

$$\begin{aligned} 10^{n+1} - 1 &= 10 \cdot 10^n - 1 = (9k + 1) \cdot 10 - 1 \\ &= 90k + 9 \\ &= 9(10k + 1), \end{aligned}$$

isto é,  $9 \mid 10^{n+1} - 1$ . Portanto,  $9 \mid 10^n - 1$ , para todo  $n \geq 0$ .

Agora, considerando  $a = r_n b^n + r_{n-1} b^{n-1} + \dots + r_1 b + r_0$ , temos

$$a - (r_n + r_{n-1} + \dots + r_1 + r_0) = r_n(10^n - 1) + \dots + r_1(10 - 1).$$

De acordo com (2.3), os termos à direita da última igualdade são sempre divisíveis por 9.

Logo,

$$a - (r_n + r_{n-1} + \dots + r_1 + r_0) = 9k, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

Assim, se 9 divide  $a$ , então 9 divide  $r_n + r_{n-1} + \dots + r_1 + r_0$  (soma dos dígitos de  $a$ ).

Reciprocamente, se 9 divide  $r_n + r_{n-1} + \dots + r_1 + r_0$ , então 9 divide  $a$ .

E de acordo com (2.3), também temos que

$$a - (r_n + r_{n-1} + \dots + r_1 + r_0) = 3k, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

Assim, se 3 divide  $a$ , então 3 divide  $r_n + r_{n-1} + \dots + r_1 + r_0$  (soma dos dígitos de  $a$ ).

Reciprocamente, se 3 divide  $r_n + r_{n-1} + \dots + r_1 + r_0$ , então 3 divide  $a$ .  $\square$

Portanto, um número é divisível por 3 ou por 9 se, e somente se, a soma dos seus dígitos é divisível por 3 ou por 9, respectivamente.

**Exemplo:**  $a = 342$  e  $34161$  são divisíveis por 3, pois

$$3 + 4 + 2 = 9 \quad e \quad 3 + 4 + 1 + 6 + 1 = 15$$

E o número  $c = 1234$  não é divisível por 3, pois  $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ . Do mesmo modo,  $a = 4302$  e  $8109$  são divisíveis por 9, e  $c = 2341$  não é.

## 2.4 Máximo Divisor Comum

**Definição 2.1.** *Sejam  $a$  e  $b$  inteiros diferentes de zero. O máximo divisor comum (MDC), entre  $a$  e  $b$  é o número  $d$  que satisfaz as seguintes condições:*

*i)  $d$  é um divisor comum de  $a$  e  $b$ , isto é,  $d|a$  e  $d|b$ ;*

*ii) Se  $c$  é um divisor comum de  $a$  e  $b$ , isto é,  $c|a$  e  $c|b$ , então  $c|d$ .*

*Assim, denotamos o mdc entre  $a$  e  $b$  por  $d = \text{mdc}(a, b)$  ou  $d = (a, b)$ . Se  $(a, b) = 1$ , então dizemos que  $a$  e  $b$  são primos entre si ou relativamente primos.*

**Exemplo:** Temos que os divisores de 18 são:  $D_{18} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$  e os divisores de 12 são:  $D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ , assim o  $\text{mdc}(12, 18) = \text{mdc}(18, 12) = 6$ .

Por outro lado, os divisores de 4 são:  $D_4 = \{1, 2, 4\}$  e os divisores de 15 são:  $D_{15} = \{1, 3, 5, 15\}$ , logo o  $\text{mdc}(4, 15) = 1$ , assim os números 4 e 15 são primos entre si.

### Observação:

Dado um número inteiro  $b$  não-nulo, temos:

- $\text{mdc}(0, b) = |b|$ ;
- $\text{mdc}(1, b) = 1$ ;
- $\text{mdc}(b, b) = |b|$ .

**Teorema 2.4** (Teorema de Bachet-Bézout). *Se  $d$  é o máximo divisor comum de  $a$  e  $b$ , então existem números inteiros  $x_0$  e  $y_0$  tais que  $d = (a, b) = ax_0 + by_0$ .*

*Demonstração.* Considere o conjunto

$$W = \{ax + by : x, y \in \mathbb{Z} \text{ e } ax + by > 0\}.$$

Notemos inicialmente que  $W$  é não-vazio, pois  $x = y = 1$ ,

$$a \cdot 1 + b \cdot 1 = a + b > 0 \Rightarrow a + b \in W.$$

Pelo princípio da boa ordenação,  $W$  possui menor elemento, seja  $\lambda = \min(W)$ . Vamos mostrar que  $\lambda = \text{mdc}(a, b)$ . Como  $\lambda \in W$ , logo existem  $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$  tais que

$$\lambda = ax_0 + by_0. \quad (2.4)$$

Através do algoritmo da divisão com os elementos  $a$  e  $\lambda$ , temos

$$a = \lambda q + r, \quad \text{com } 0 \leq r < \lambda. \quad (2.5)$$

Substituindo o valor de  $\lambda$  em (2.4) na igualdade de (2.5) temos que

$$r = a - \lambda q = a - (ax_0 + by_0)q = a - aqx_0 - bqy_0.$$

Logo,

$$r = a(1 - qx_0) + b(-qy_0).$$

Assim temos que  $r = au + bv$ , com  $u = (1 - qx_0)$  e  $v = (-qy_0)$ . Daí temos que  $r = 0$ , pois caso contrário,  $r > 0$  e daí  $r \in W$ , o que contraria o fato de  $\lambda$  ser o mínimo de  $W$ , tendo em vista que  $r < \lambda$ . Portanto  $a = \lambda q$ , ou seja,  $\lambda \mid a$ . Do mesmo modo prova-se que  $\lambda \mid b$ . Sendo  $d = \text{mdc}(a, b)$ , então  $a = d\lambda_1$  e  $b = d\lambda_2$ . Logo por (2.4), obtemos que:

$$\lambda(d\lambda_1)x_0 + (d\lambda_2)y_0 = d(\lambda_1x_0 + \lambda_2y_0),$$

isto é,  $d \mid \lambda$ , e como  $\lambda \mid d$ , pois  $d = \text{mdc}(a, b)$ , temos que  $d = \lambda$ . Portanto,  $d = ax_0 + by_0$ .  $\square$

**Exemplo:**

$$\text{mdc}(18, 4) = 2 = 1 \cdot 18 + (-4) \cdot 4 = (-1) \cdot 18 + 5 \cdot 4$$

## 2.5 Algoritmo de Euclides

Apesar de conhecermos propriedades teóricas do máximo divisor comum entre dois inteiros, para encontrar seu respectivo mdc não é uma tarefa das mais fáceis, para isso se utilizaremos de um método descoberto por Euclides, chamado de Algoritmo de Euclides.

**Lema 2.1** (Lema de Euclides). *Se  $a = bq + r$ , então  $\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(b, r)$ .*

*Demonstração.* Basta mostrar que  $D_a \cap D_b = D_b \cap D_r$ , pois sendo estes conjuntos iguais seus máximos também os serão. Se  $d \in D_a \cap D_b$ , então  $d \mid a$  e  $d \mid b$ , mas como  $r = a - qb$ , segue que  $d \mid r$  e, por isso,  $d \in D_b \cap D_r$ . Por outro lado, se  $d \in D_b \cap D_r$ , então  $d \mid b$  e  $d \mid r$ , de modo que  $d \mid bq + r = a$ , isto é,  $d \in D_a \cap D_b$ . Logo  $D_a \cap D_b = D_b \cap D_r$  e, portanto,  $\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(b, r)$ .  $\square$

**Exemplo:** Como  $56 = 4 \cdot 7 + 28$ , então  $\text{mdc}(56, 4) = \text{mdc}(4, 28) = 4$  e  $\text{mdc}(56, 7) = \text{mdc}(7, 28) = 7$ .

Como podemos observar, o resultado do Lema de Euclides é válido mesmo que  $r$  não seja o resto da divisão de  $a$  por  $b$ . No entanto, para o **Algoritmo de Euclides**, vamos assim considerar de modo a estabelecer uma sequência de restos estritamente decrescente de inteiros não negativos.

Consideremos os inteiros  $a$  e  $b$ , com  $a > b > 0$ . Logo pela Divisão Euclidiana obtemos o seguinte:

$$a = bq_1 + r_1, \quad \text{com } 0 \leq r_1 < b.$$

Pelo **lema 2.1**, temos que  $\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(b, r_1)$ . Assim vamos considerar dois casos:

a) Se  $r_1 = 0$ , teremos:

$$\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(b, r_1) = \text{mdc}(b, 0) = b.$$

b) Se  $r_1 \neq 0$ , em tal caso, iremos efetuar a divisão de  $b$  por  $r_1$ , daí segue que:

$$b = r_1q_2 + r_2, \quad \text{com } 0 \leq r_2 < r_1.$$

Mais uma vez teremos que analisar duas possibilidades:

c) Se  $r_2 = 0$ , teremos:

$$\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(b, r_1) = \text{mdc}(r_1, r_2) = \text{mdc}(r_1, 0) = r_1$$

d) Se  $r_2 \neq 0$ , em tal caso, iremos efetuar a divisão de  $r_1$  por  $r_2$ , daí segue que:

$$r_1 = r_2q_3 + r_3, \quad \text{com } 0 \leq r_3 < r_2.$$

Mais uma vez procedendo como antes,

$$\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(b, r_1) = \text{mdc}(r_1, r_2) = \text{mdc}(r_2, r_3),$$



e assim sucessivamente.

E continuamos com o procedimento até obtermos um resto nulo, pois caso isso não ocorra, teríamos uma sequência infinita de números naturais  $b > r_1 > r_2 > \dots > 0$ . Assim para algum índice  $n$  temos que  $r_n \neq 0$  e  $r_{n+1} = 0$ , o que implica que:

$$\text{mdc}(a, b) = \text{mdc}(b, r_1) = \dots = \text{mdc}(r_n, r_{n-1}) = \text{mdc}(r_n, 0) = r_n.$$

Portanto o último resto não nulo  $r_n$  é o mdc de  $a$  e  $b$ .

Podemos sintetizar o algoritmo de Euclides através do seguinte procedimento prático: Efetuamos a divisão de  $a$  e  $b$ , com  $a > b$ , em seguida efetuamos a divisão de  $b$  pelo primeiro resto obtido ( $r_1$ ), posteriormente dividimos  $r_1$  pelo próximo resto obtido ( $r_2$ ) e assim sucessivamente até encontrarmos um resto nulo. Daí o último resto não nulo será o  $\text{mdc}(a, b)$ .

	$q_1$	$q_2$	$q_3$	$\dots$	$q_{n-1}$	$q_n$	$q_{n+1}$
$a$	$b$	$r_1$	$r_2$	$\dots$	$r_{n-2}$	$r_{n-1}$	$r_n = (a, b)$
$r_1$	$r_2$	$r_3$	$r_4$	$\dots$	$r_n$		

**Exemplo:** Calcule o  $\text{mdc}$  de 372 e 162:

Pelo algoritmo de Euclides temos:

$$372 = 162 \cdot 2 + 48$$

$$162 = 48 \cdot 3 + 18$$

$$48 = 18 \cdot 2 + 12$$

$$18 = 12 \cdot 1 + \mathbf{6}$$

$$12 = 6 \cdot 2 + 0$$

Assim, o  $\text{mdc}(372, 162) = 6$

Pelo processo prático teremos:

	2	3	2	1	2
372	162	48	18	12	<b>6</b>
48	18	12	6	0	

Assim, o  $\text{mdc}(372, 162) = 6$

## 2.6 Mínimo Múltiplo Comum

**Definição 2.2.** Dados inteiros  $a$  e  $b$  diferentes de zero. Diremos que o número  $m \in \mathbb{N}$  é um mínimo múltiplo comum (MMC) entre  $a$  e  $b$ , se  $m$  satisfaz as seguintes condições:

- i)  $m$  é um múltiplo comum de  $a$  e  $b$ , isto é,  $a \mid m$  e  $b \mid m$ ;
- ii) Se  $c$  é um múltiplo comum de  $a$  e  $b$ , isto é,  $a \mid c$  e  $b \mid c$ , então  $m \mid c$ .

Assim denotamos o mmc entre  $a$  e  $b$  por  $m = \text{mmc}[a, b]$  ou  $m = [a, b]$ .

**Exemplos:**

$$\text{mmc}(2, 3) = 6, \quad \text{mmc}(7, 12) = 84, \quad \text{mmc}(8, -12) = 24$$

**Teorema 2.5.** Sejam  $a, b \in \mathbb{N}$ , com  $d = \text{mdc}(a, b)$  e  $m = \text{mmc}(a, b)$ , então:

$$m = \frac{ab}{d}$$

*Demonstração.* Consideremos  $m_1 = \frac{ab}{d}$  e provemos que  $m_1 = m$ . Como  $d \mid a$  e  $d \mid b$ , então  $a = d\lambda_1$  e  $b = d\lambda_2$ , com  $\lambda_1$  e  $\lambda_2 \in \mathbb{N}$ . Assim,

$$m_1 = \frac{ab}{d} = \frac{\lambda_1 d b}{d} = \lambda_1 b \Rightarrow b \mid m_1$$

Da mesma forma, prova-se que  $a \mid m_1$ . Tomemos agora  $m_2$  o outro múltiplo comum de  $a$  e  $b$ , isto é,  $m_2 = a\alpha_1$  e  $m_2 = b\alpha_2$ , com  $\alpha_1$  e  $\alpha_2 \in \mathbb{N}$ . Pela identidade de Bachet-Bézout, existem inteiros  $x$  e  $y$  tais que  $d = ax + by$ .

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{m_2}{m_1} &= \frac{m_2 d}{m_1 d} = \frac{axm_2 + bym_2}{ab} \\ &= \frac{ab\alpha_2 x + ab\alpha_1 y}{ab} \\ &= \alpha_2 x + \alpha_1 y \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

ou seja,  $m_1 \mid m_2$ . Isso mostra que  $m_1 = m = \frac{ab}{d}$ . □

**Exemplo:** Determine o  $\text{mmc}(1028, 304)$ .

Solução:

Pelo algoritmo de Euclides, temos que  $\text{mdc}(1028, 304) = 4$ , logo pelo teorema anterior temos:

$$\text{mmc}(1028, 304) = \frac{1028 \cdot 304}{4} = 78128$$

## 2.7 Números primos e compostos

**Definição 2.3.** Um número  $p \in \mathbb{Z} - \{0, \pm 1\}$  é chamado **primo** quando seus únicos divisores positivos são 1 e  $|p|$ . Caso contrário, dizemos que  $p$  é **composto**.

**Exemplo:** Os números 3,  $-5$  e 13, são primos.

**Exemplo:** O número 20 é composto pois  $D_{20} = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$ .

Note que o número 1 não é nem primo e nem composto (isto se deve à uma condição especial de ser o elemento neutro da multiplicação) e que 2 e  $-2$  são os únicos primos pares.

**Teorema 2.6.** Se  $a > 1$ , então existe um primo  $p$  tal que  $p \mid a$ .

*Demonstração.* Consideremos o conjunto

$$W = \{a \in \mathbb{N} : a > 1 \text{ e } p \nmid a, \forall p \text{ primo}\}$$

Desejamos mostrar que  $W = \emptyset$ . Se  $W \neq \emptyset$ , então Princípio da Boa Ordenação, existe  $d \in W$ , com  $d = \min(W)$ . Como  $d \mid d$ , então  $d$  não pode ser primo. Por isso,

$$d = bc, \text{ com } 1 < b, c < d.$$

Desse modo,  $b \notin W$ , pois  $d = \min(W)$ . Por conseguinte, sendo  $b > 1$ , deve existir um primo  $p$  tal que  $p \mid b$ . Com  $b \mid d$ , então  $p \mid d$ , isto é,  $d \notin W$ , o que é impossível. Esta contradição mostra que existe um primo  $p$ , com  $p \mid a$ .  $\square$

**Teorema 2.7** (Teorema Fundamental da Aritmética). *Todo número natural  $a > 1$  pode ser escrito de forma única, a menos da ordem dos fatores, como um produto de primos. Especificamente,*

$$a = p_1 p_2 p_3 \cdots p_n$$

em que  $p_1, p_2, \dots, p_n$  são primos.

*Demonstração.* Há duas coisas a serem demonstradas: a primeira é a existência dos primos, e a segunda é a unicidade da fatoração.

Existência:

Tomemos o conjunto

$$M = \{a \in \mathbb{N} : a > 1 \text{ e } a \neq p_1 p_2 \cdots p_n\}$$

para primos  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . Se mostrarmos que  $M = \emptyset$ , então a existência dos números primos está provada. Por absurdo, se  $M \neq \emptyset$ , então pelo PBO,  $M$  possui um menor elemento  $m$ . É claro que  $m$  não pode ser primo e, por isso, é composto. Assim, podemos escrevê-lo na forma

$$m = b \cdot c, \text{ com } 1 < b, c < m.$$

Como  $b < c$  e  $c < m$ , então  $b \notin M$  e  $c \notin M$ , pois  $m = \min(M)$ . Assim, sendo  $b > 1$  e  $c > 1$ , segue que estes números são primos ou são produtos de primos. Logo,  $m = b \cdot c$  é um produto de primos, o que é uma contradição. Desse modo,  $M = \emptyset$ .

Unicidade: Suponhamos que

$$a = p_1 p_2 \cdots p_n = q_1 q_2 \cdots q_m$$

sendo  $p_1, p_2, \dots, p_n, q_1, q_2, \dots, q_m$  todos primos. Logo,

$$p_1 | q_1 q_2 \cdots q_m$$

e, assim, temos que  $p_1 = q_j$  para algum  $j = 1, \dots, m$  pois, se  $p | ab$ , então  $p | a$  ou  $p | b$ , digamos que  $p_1 = q_1$ . Pela lei do cancelamento, temos que

$$p_2 \cdots p_n = q_2 \cdots q_m.$$

da mesma forma, temos  $p_2 = q_j$  para algum  $j = 2, \dots, m$ . Assumindo  $p_2 = q_2$ , obtemos

$$p_3 \cdots p_n = q_3 \cdots q_m.$$

Continuando este processo, e assumindo que  $n > m$ , temos

$$1 = p_{m+1} \cdots p_n,$$

o que é impossível. Similarmente, se  $n < m$ , então

$$1 = p_{n+1} \cdots p_m,$$

o que também é uma impossibilidade. Portanto,  $m = n$  e  $q_i = p_i$  para cada  $i = 1, \dots, n$ .

□

**Exemplo:** Decompondo em fatores primos o número 120, obtemos:

$$120 = 2 \cdot 60 = 2 \cdot 2 \cdot 30 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 15 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

**Observação:** Um processo prático utilizado para decompor um número em fatores primos é o seguinte:

120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

$$120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

**Teorema 2.8. (Euclides)** *O conjunto  $P$  dos números primos é infinito.*

*Demonstração.* Suponhamos por absurdo que  $P$  é um conjunto finito, e sejam  $p_1, p_2, \dots, p_n$  todos os primos. Consideremos  $a \in \mathbb{N}$  dado pelo produto dos  $p_i$ 's somado ao número 1, isto é,

$$a = p_1 p_2 \dots p_n + 1.$$

Como  $a > 1$ , então pelo Teorema 2.6, existe um primo  $p$  que divide  $a$ , ou seja,  $a = pk$ . Como por hipótese  $p_1, p_2, \dots, p_n$  são os únicos primos, então  $p = p_i$  para algum  $i = 1, \dots, n$ , digamos que  $p = p_1$ . Assim,

$$pk = p p_2 \dots p_n + 1,$$

isto é,  $p \mid 1$ , o que é uma contradição. Assim,  $P$  é infinito.

□

# Capítulo 3

## Aplicações

Neste capítulo serão expostos, os métodos, as atividades, sua descrição e seus resultados desenvolvidos na Escola Técnica Agrícola Joaquim Limeira de Queiroz, no município de Puxinanã.

A escola conta atualmente com cerca de 400 alunos no Ensino Fundamental II. Dispondo na sua parte física com 9 salas de aulas, uma biblioteca, entre outros ambientes, dispondo também de equipamentos eletrônicos, tais como TVs, Data Show, DVD e etc. A mesma ainda foi contemplada várias vezes com medalhas na OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas). O estudo foi realizado em uma das turmas do 8º Ano, que conta com 26 alunos na faixa etária dentre 12 e 14 anos.

### 3.1 Múltiplos e Divisores de um Número Natural

Inicialmente introduzimos a noção de múltiplos e divisores em que houve uma discussão de como se faria para descobrir os seus múltiplos e também os seus divisores, através das situações-problema abaixo, as quais podem ser encontradas em [5]:

**Considere a seguinte situação:**

Em uma padaria, um lanche é vendido por 4 reais. Se montarmos um quadro para determinar o valor arrecadado, em reais, de acordo com o número de lanches vendidos, teremos:

<i>Número de lanches</i>	<i>Cálculo</i>	<i>Valor (em reais)</i>
0	$0 \cdot 4$	0
1	$1 \cdot 4$	4
2	$2 \cdot 4$	8
3	$3 \cdot 4$	12
4	$4 \cdot 4$	16
5	$5 \cdot 4$	20
6	$6 \cdot 4$	24
7	$7 \cdot 4$	28
...	...	...

Tabela 3.1: Múltiplos de 4

Note que os valores arrecadados com a venda foram calculados por meio da multiplicação do número de lanches por 4. Assim, dizemos que a sequência desses números é a sequência dos múltiplos de 4:

$$0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, \dots$$

Portanto:

**Múltiplo** de um número natural  $a$  é o produto de  $a \cdot k$ , com  $k \in \mathbb{N}$ .

**Observação:** A sequência dos múltiplos de um número natural diferente de zero não tem fim, isto é, será infinita. E o primeiro elemento da sequência será sempre zero.

**Considere a situação:**

Maria Eduarda quer acomodar seus 18 livros novos em uma estante. Quantas prateleiras serão necessárias para acomodar esses livros de modo que fique sempre a mesma quantidade de livros em cada prateleira?

Para tal, vamos pensar em quantidades de prateleiras e ver quantos livros ficariam em cada uma.

- *1 prateleira*  $\longrightarrow$  *18 livros na prateleira*
- *2 prateleiras*  $\longrightarrow$  *9 livros em cada prateleira*
- *3 prateleiras*  $\longrightarrow$  *6 livros em cada prateleira*

- 4 prateleiras  $\rightarrow$  Não é possível colocar o mesmo número de livros em cada prateleira
- 5 prateleiras  $\rightarrow$  Não é possível colocar o mesmo número de livros em cada prateleira
- 6 prateleiras  $\rightarrow$  3 livros em cada prateleira
- ...

Assim, notamos que alguns casos, não conseguimos colocar o mesmo número de livros em cada prateleira. O quadro abaixo mostra como é possível distribuir os 18 livros em prateleiras com o mesmo número de livros.

<i>Quantidade de prateleiras</i>	<i>Número de livros em cada prateleira</i>
1	18
2	9
3	6
6	3
9	2
18	1

Tabela 3.2: Divisores de 18

Dizemos que os números 1, 2, 3, 6, 9 e 18 são os **divisores** de 18, pois, ao dividir 18 por qualquer um desses números, obtemos uma divisão exata. **Observações**

- O zero não é divisor de nenhum número natural;
- Todo número natural tem como divisor o número 1;
- Todo número natural diferente de zero tem como divisor ele mesmo.

## Jogo Bingo dos divisores

### Descrição do jogo

O jogo Funciona da seguinte maneira: A classe toda deve ser dividida em 6 grupos. Em seguida cada grupo deverá escolher uma cartela que estará disponível com o professor.

Posteriormente o professor começa o jogo sorteando um número da lista de números dada e pede a um grupo que diga os divisores do número sorteado, em seguida o professor



anota no quadro os divisores do número sorteado e cada equipe marca, quando for o caso na tabela.

Repetimos o procedimento até que alguma equipe preencha a cartela toda.

### Cartelas

1	2	4	6	9	14
15	16	17	25	28	29
44	45	51	53	80	100

1	3	4	5	6	9
12	14	16	17	18	20
25	32	51	80	100	120

1	2	3	6	8	11
13	16	17	18	19	23
25	31	32	45	47	51

1	2	3	8	9	11
14	15	17	18	28	29
32	44	45	53	80	100

1	3	5	7	11	13
17	19	23	29	31	37
41	43	47	53	57	59

1	2	3	4	5	6
8	10	12	15	16	24
30	40	48	60	80	100

1	2	3	4	6	8
15	16	17	25	28	30
44	45	47	51	59	80

1	2	4	5	9	11
14	15	16	17	18	30
32	43	44	45	51	100

### Lista dos números a serem sorteados

1	3	5	6	7	11	13
17	18	19	23	25	28	29
31	32	37	41	43	44	45
47	51	53	57	59	100	240

O jogo bingo dos divisores, bem como outras atividades relacionadas podem ser consultadas na **Guia e recursos didáticos** em [5].

## Atividade: Quadrado mágico com múltiplos

### Descrição da atividade

Propor aos alunos que preencham o quadrado mágico  $3 \times 3$  com os números de 1 a 9 de tal forma que a soma seja 15, posteriormente realizar a mesma tarefa porém com os múltiplos de 3, 4 e 5. A atividade proposta abaixo pode ser consultada em [3].

### Realização da atividade

Inicialmente foi exibido o quadrado mágico tradicional, onde pedi para que eles preenchessem com os números de 1 a 9 de tal modo que a soma das linhas, das colunas e das diagonais seja 15.

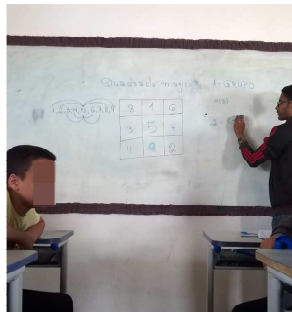


Figura 3.1: Solução do Cubo mágico

Realizada esta tarefa, a turma foi dividida em três grupos e proposta a segunda atividade.

*Preencher o quadrado mágico  $3 \times 3$  com os 9 primeiros múltiplos de 3, 4, 5 e informar qual seria sua soma mágica desses números, respectivamente.*

Cada grupo se juntou e tentou buscar maneiras para resolver o problema, o primeiro grupo que realizou a atividade com os múltiplos de 3, realizou a atividade após muitas tentativas, inicialmente não iriam conseguir, mas após informá-los a eles qual o número que ficaria no centro do quadrado, os mesmos desenvolveram a atividade e obtiveram êxito na mesma.

O segundo grupo, responsável pelos múltiplos de 4, também não resolveu inicialmente a atividade. Também ao serem informados qual o número que ficaria no centro do quadrado, logo um dos alunos percebeu que poderia realizar tal atividade, apenas substituindo os valores do quadrado mágico tradicional pelos valores do quadrado mágico dos múltiplos de 4, e assim preenchendo com êxito os valores do quadrado e informando sua

soma.

E por fim o terceiro grupo que ficou com os múltiplos de 5, conseguiu perceber de forma mais rápida, que para resolver o problema bastaria apenas substituir os valores do quadrado tradicional pelos valores dos múltiplos de 5.

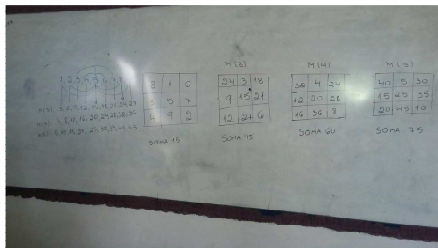


Figura 3.2: Soma mágica dos múltiplos

Após o término da atividade as seguintes perguntas foram realizadas.

- Foi fácil preencher o quadrado mágico com os múltiplos?
- Que características podemos obter com os quadrados mágicos expostos?
- É possível preencher o quadrado mágico com qualquer número?

Mediante as perguntas feitas, os alunos falaram que não foi fácil preencher o quadrado mágico, pois a grande maioria não conseguiu encontrar uma estratégia adequada para sua resolução, porém após ter explicado um método para a realização da mesma, acharam extremamente simples sua realização. Também observaram que a partir do primeiro quadrado o número que fica no centro do próximo quadrado é o 5 vezes o múltiplo utilizado para seu preenchimento, isto é, para os múltiplos de 3 temos  $5 \cdot 3 = 15$ , que o número central do quadrado dos múltiplos de 3, do mesmo modo segue para os múltiplos de 4 e 5, respectivamente,  $5 \cdot 4 = 20$  e  $5 \cdot 5 = 25$ . E após todos esses comentários todos afirmaram que seria possível preencher o quadrado mágico com os múltiplos de qualquer número.

## 3.2 Números Primos

**Exemplos:**

- 2 é um número primo, pois seus divisores são apenas 1 e 2.
- 5 é um número primo, pois seus divisores são apenas 1 e 5.

- 4 é um número composto, pois possui 3 divisores, 1, 2 e 4.
- 33 é um número composto, pois possui 4 divisores, 1, 3, 11 e 33.

## Crivo de Eratóstenes

Eratóstenes (276-194 a.C) nascido em Cirene, o grego Eratóstenes fez pesquisas em várias áreas do conhecimento com astronomia, geografia e matemática. Ele trabalhou na famosa biblioteca de Alexandria, no antigo Egito. A mais famosa contribuição de Eratóstenes à geografia e à ciência foi a medida da circunferência da Terra, efetuada com surpreendente exatidão para a época. Ele encontrou essa medida com base na diferença de latitude entre as cidade de Siene (Assuã) e de Alexandria, no Egito [8].

Entre os matemáticos, Eratóstenes é bastante conhecido por ter inventado um método sistemático para determinação dos números primos, o Crivo de Eratóstenes.

O Crivo de Eratóstenes é um algoritmo antigo que permite encontrar todos os números primos que são menores do que ou iguais que um número natural  $n$ .

Antes de explicar o procedimento do Crivo de Eratóstenes, foram distribuídos para os alunos tabelas contendo os números de 1 a 100, afim de que eles marcassem todos os números primos que conseguissem descobrir como mostra a Figura 3.3.

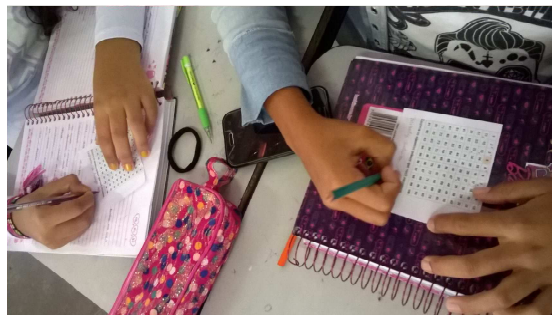


Figura 3.3: Atividade procurando números primos

Vamos encontrar os números primos compreendidos entre 1 e 100 pelo Crivo de Eratóstenes.

O método consiste nas seguintes etapas:

- Escrevemos os números em ordem de 1 até 100.
- Eliminamos o número 1, pois já sabemos que ele não é primo.

- Notamos que o primeiro número primo que aparece é o 2 e desta forma cancelamos todos os múltiplos de 2, maiores que o próprio.
- O próximo número não cancelado que aparece na lista é o número 3, que também é um número primo, e assim cancelamos todos os múltiplos de 3, maiores que ele.
- O próximo número não cancelado que aparece na lista é o número 5, que também é um número primo, e também cancelamos todos os múltiplos de 5, maiores que ele.
- O processo continua até que o primeiro número não cancelado na lista seja maior do que  $\sqrt{n}$ .

<del>1</del>	2	3	<del>4</del>	5	<del>6</del>	7	<del>8</del>	<del>9</del>	<del>10</del>
11	<del>12</del>	13	<del>14</del>	<del>15</del>	<del>16</del>	17	<del>18</del>	19	<del>20</del>
<del>21</del>	<del>22</del>	23	<del>24</del>	<del>25</del>	<del>26</del>	<del>27</del>	<del>28</del>	29	<del>30</del>
31	<del>32</del>	<del>33</del>	<del>34</del>	<del>35</del>	<del>36</del>	37	<del>38</del>	<del>39</del>	<del>40</del>
41	<del>42</del>	43	<del>44</del>	<del>45</del>	<del>46</del>	47	<del>48</del>	<del>49</del>	<del>50</del>
<del>51</del>	<del>52</del>	53	<del>54</del>	<del>55</del>	<del>56</del>	<del>57</del>	<del>58</del>	59	<del>60</del>
61	<del>62</del>	<del>63</del>	<del>64</del>	<del>65</del>	<del>66</del>	67	<del>68</del>	<del>69</del>	<del>70</del>
71	<del>72</del>	73	<del>74</del>	<del>75</del>	<del>76</del>	<del>77</del>	<del>78</del>	79	<del>80</del>
<del>81</del>	<del>82</del>	83	<del>84</del>	<del>85</del>	<del>86</del>	<del>87</del>	<del>88</del>	89	<del>90</del>
<del>91</del>	<del>92</del>	<del>93</del>	<del>94</del>	<del>95</del>	<del>96</del>	97	<del>98</del>	<del>99</del>	<del>100</del>

Tabela 3.3: Números primos de 1 a 100

## Decomposição de um número natural em fatores primos

Uma característica dos números compostos é que eles sempre podem ser escritos como um produto de números primos, como vimos no Teorema Fundamental da Aritmética (TFA).

### Exemplos:

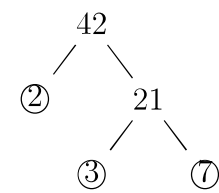
- $46 = 2 \cdot 23$
- $75 = 3 \cdot 3 \cdot 5$

Existem processos para decompor um número composto em fatores primos, como veremos a seguir:

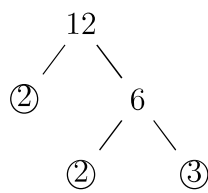
### Processo das fatorações sucessivas

Este processo consiste em decompor um número natural  $n$  em um produto de outros dois fatores. Caso os dois fatores sejam primos, o processo está concluído, caso não, decomponamos esses dois números em produtos de dois fatores, até que todos os fatores sejam primos.

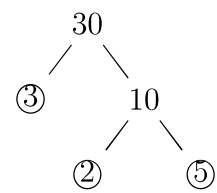
#### Exemplos:



$$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$$



$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$$



$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

### Processo das divisões sucessivas

O processo consiste em dividir um número natural  $n$  por um número primo que seja divisor de  $n$ , obtendo assim um quociente  $q$ . Depois dividiremos esse quociente  $q$  por um número primo que seja divisor de  $q$ , obtendo assim um quociente  $q_1$ . Continuamos o processo até que o quociente seja 1.

#### Exemplos:

$$\begin{array}{r|l}
 12 & 2 \\
 6 & 2 \\
 3 & 3 \\
 1 & \\
 \hline
 & 12 = 2^2 \cdot 3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 42 & 2 \\
 21 & 3 \\
 7 & 7 \\
 1 & \\
 \hline
 & 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
 60 & 2 \\
 30 & 2 \\
 15 & 3 \\
 5 & 5 \\
 1 & \\
 \hline
 & 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5
 \end{array}$$

## 3.3 APLICAÇÕES: MDC e MMC

Nesta seção, iremos explorar situações-problema, envolvendo o uso do mmc e mdc. As situações abaixo podem ser consultadas em [3].

## MDC

**Situação-problema 1:** Ivo tem 18 selos e 30 figurinhas repetidos. Ele quer reparti-los igualmente entre um grupo de amigos de modo que não sobrem selos e nem figurinhas. Qual é o número máximo de amigos que o grupo pode ter para que isso seja possível?

### Solução

Os 18 selos podem ser distribuídos entre:

$$\underbrace{1, 2, 3, 6, 9 \text{ ou } 18 \text{ amigos.}}_{\text{divisores de } 18}$$

Assim,  $D_{18} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$ .

As 30 figurinhas podem ser distribuídas entre:

$$\underbrace{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 \text{ ou } 30 \text{ amigos.}}_{\text{divisores de } 30}$$

Logo,  $D_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ .

Daí os selos e as figurinhas podem ser distribuídos, **ao mesmo tempo**, entre:

$$\underbrace{1, 2, 3, \text{ ou } 6 \text{ amigos.}}_{\text{divisores comuns de } 18 \text{ e } 30}$$

Logo, o número máximo de amigos que o grupo pode ter é 6 (**máximo divisor comum**).

Portanto:  $mdc(18, 30) = 6$ .

### Processo prático para determinação do mdc

#### Exemplos:

Calcule o máximo divisor comum entre 120 e 252:

#### Solução

Inicialmente faremos a decomposição dos dois números em fatores primos:

$$\begin{array}{r|l}
 120 & \textcircled{2} \\
 60 & \textcircled{2} \\
 30 & 2 \\
 15 & \textcircled{3} \\
 5 & 5 \\
 1 & 
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r|l}
 252 & \textcircled{2} \\
 126 & \textcircled{2} \\
 63 & \textcircled{3} \\
 21 & 3 \\
 7 & 7 \\
 1 & 
 \end{array}$$

Em seguida pegamos os fatores comuns as duas decomposições:

**Fatores comuns:** 2, 2, 3

E por fim, o mdc será o produto de todos os fatores que são comuns as duas decomposições.

$$\text{mdc}(120, 252) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$$

Calcule o  $\text{mdc}(165, 90)$  :

$$\begin{array}{r|l}
 165 & \textcircled{3} \\
 55 & \textcircled{5} \\
 11 & 11 \\
 1 & 
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r|l}
 90 & 2 \\
 45 & \textcircled{3} \\
 15 & 3 \\
 5 & \textcircled{5} \\
 1 & 
 \end{array}$$

Assim, os fatores comuns são: 3 e 5: E portanto o  $\text{mdc}(165, 90) = 3 \cdot 5 = 15$ .

## MMC

**Situação-problema 2:** Maria está doente. O médico receitou-lhe um comprimido de 6 em 6 horas e uma colher de xarope de 4 e 4 horas. Sua mãe deu-lhe um comprimido e uma colher de xarope à zero hora (meia-noite). Qual é o primeiro horário em que Maria voltará a tomar comprimido e xarope ao mesmo tempo?

### Solução

Vamos escrever todos os horários de tomar o comprimido e de tomar o xarope:

- Horários para tomar comprimido:

0, 6, 12, 18, 24 (múltiplos de 6 até 24)

- Horários para tomar xarope:



0, 4, 8, 12, 16, 20, 24 (múltiplos de 4 até 24)

- Horários em que coincidem os dois remédios :

0, 12, 24 (Múltiplos comuns de 4 e 6 até 24)

Assim o  $mmc(6, 4) = 12$ .

Portanto o primeiro horário após zero hora em que Maria voltará a tomar o comprimido e o xarope ao mesmo tempo será as 12 horas(meio-dia).

### Processo prático para a determinação do mmc

#### Exemplos:

Calcule o  $mmc(52, 78)$  :

Utilizaremos o mesmo processo do mdc.

Inicialmente faremos a decomposição dos dois números em fatores primos:

$$\begin{array}{r|l} 52 & \textcircled{2} \\ 26 & 2 \\ 13 & \textcircled{13} \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 78 & \textcircled{2} \\ 39 & 3 \\ 13 & \textcircled{13} \\ 1 & \end{array}$$

Em seguida pegamos os fatores comuns e os fatores não comuns as duas decomposições:

**Fatores comuns:** 2, 13

**Fatores não comuns:** 2, 3

E por fim o mmc é dado pelo produto dos fatores primos comuns pelos fatores primos não comuns.

Portanto,  $mmc(52, 78) = 2 \cdot 13 \cdot 2 \cdot 3 = 156$

Calcule o  $mmc(8, 10, 14)$

Decompondo temos:

$$\begin{array}{r|l} 8 & \textcircled{2} \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 10 & \textcircled{2} \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 14 & \textcircled{2} \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

**Fatores comuns:** 2

**Fatores não comuns:** 2, 2, 5, 7

Portanto  $mmc(8, 10, 14) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 = 280$

Após as aplicações do mdc e do mmc foram propostas e desenvolvidas 3 atividades em sala de aula.

O problema 1 e 2 a seguir encontram-se em [5], já o problema 3 se encontra em [2], os três problemas versam sobre mdc e mmc, onde os alunos responderam e expuseram suas soluções para os demais colegas.

**Problema 1:** Paulo tem vários DVDs, sendo 15 filmes de suspense e 20 de comédia. Ele quer organizá-los em gavetas sem misturar os gêneros e ocupando a menor quantidade possível de gavetas. Cada gaveta deverá ter o mesmo número de DVDs. Quantos DVDs Paulo deverá colocar em cada gaveta?

**Solução:**

Como os DVDs tem que ocupar a menor quantidade de gavetas possíveis, então os 15 filmes de suspense podem ser alocados da seguinte maneira:

$$\underbrace{1, 3, 5, \text{ ou } 15 \text{ gavetas}}_{\text{divisores de } 15}$$

Assim,  $D_{15} = \{1, 3, 5, 15\}$

Já os 20 filmes de comédia podem ser alocados da seguinte maneira:

$$\underbrace{1, 2, 4, 5, 10, \text{ ou } 20 \text{ gavetas}}_{\text{divisores de } 20}$$

Assim,  $D_{20} = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$

Logo o  $mdc(15, 20) = 5$

Portanto o número máximo de DVDs que iremos colocar em cada gaveta será de 5 DVDs.



Figura 3.4: Solução do Problema 1

**Problema 2:** Um relógio eletrônico dispara o alarme a cada 40 minutos. Outro relógio soa o alarme a cada 30 minutos. Se os dois soaram juntos às 7 horas, qual é a próxima hora que isso voltará a ocorrer?

**Solução:**

Vamos escrever todos os horários em que o primeiro relógio e o segundo relógio irão alarmar:

- Horários em que o primeiro relógio irá alarmar:

0, 40, 80, 120, 160, ... (múltiplos de 40)

- Horários em que o segundo relógio irá alarmar:

0, 30, 60, 90, 120, 150, ... (múltiplos de 30)

- Horários em que coincidem os dois relógios:

0, 120 (múltiplos comuns de 40 e 30)

Assim o  $mmc(40, 30) = 120$ .

Portanto os dois relógios irão soar juntos novamente após 120 minutos, isto é 2 horas, então como eles soaram juntos as 7 horas, o próximo horário que isso ocorrerá novamente será às 9 horas.

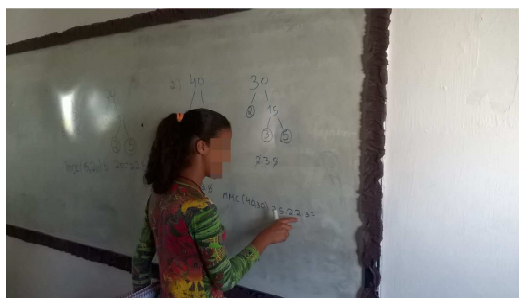


Figura 3.5: Solução do Problema 2

**Problema 3:** Na fila da bilheteria de um teatro há menos de 50 pessoas. Contando essas pessoas de 6 e 6, sobram 3. Contando de 7 e 7, também sobram 3. Quantas pessoas estão na fila nesse momento?

**Solução:**

Inicialmente, escreveremos os múltiplos de 6 menores do que 50:

$$M_6 = \{0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48\}$$

Como contando de 6 em 6 sobram três pessoas, então as possíveis quantidades de pessoas na fila são:

$$9, 15, 21, 27, 33, 39, 45$$

Posteriormente escreveremos os múltiplos de 7 menores do que 50:

$$M_7 = \{0, 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49\}$$

Como contando de 7 em 7 sobram três pessoas, então as possíveis quantidades de pessoas na fila são:

$$10, 17, 24, 31, 38, 45$$

Assim, como a quantidade de pessoas deve ser a mesma nas duas contagens, temos que na fila da bilheteria há, 45 pessoas.

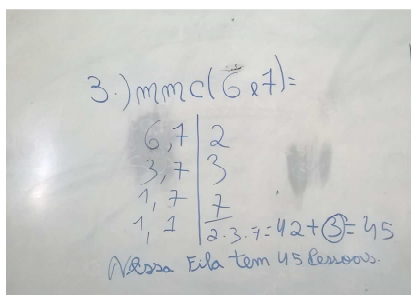


Figura 3.6: Solução do Problema 3

### 3.4 Verificação da aprendizagem através de problemas propostos

Com o objetivo de verificar a aprendizagem com relação as atividades ministradas, elaboramos 8 questões a fim de testar os conhecimentos adquiridos pelos alunos durante esse período. Participaram dessa avaliação um total de 24 alunos os quais tiveram à disposição um período de 3 aulas que corresponde a 150 minutos. Os problemas propostos referem-se aos conteúdos ministrados durante esse período, onde alguns desses problemas foram pesquisados e consultados em: [1], [5] e [8].

**Problema 1.** *Utilizando o Crivo de Eratóstenes, a quantidade de números primos de 1 a 50 é:*

- a) 13   b) 14   c) 15   d) 16   e) 17

**Solução:**

Através da construção do Crivo de Eratóstenes, e seguindo seu métodos propostos para encontrar números primos, temos:

<del>1</del>	2	3	<del>4</del>	5	<del>6</del>	7	<del>8</del>	<del>9</del>	<del>10</del>
11	<del>12</del>	13	<del>14</del>	<del>15</del>	<del>16</del>	17	<del>18</del>	19	<del>20</del>
<del>21</del>	<del>22</del>	23	<del>24</del>	<del>25</del>	<del>26</del>	<del>27</del>	<del>28</del>	29	<del>30</del>
31	<del>32</del>	<del>33</del>	<del>34</del>	<del>35</del>	<del>36</del>	37	<del>38</del>	<del>39</del>	<del>40</del>
41	<del>42</del>	43	<del>44</del>	<del>45</del>	<del>46</del>	47	<del>48</del>	<del>49</del>	<del>50</del>

Tabela 3.4: Números primos de 1 a 50

Assim, os números primos encontrados de 1 a 50 foram:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47

Resultando num total de 15 números primos compreendidos de 1 a 50.

Conclusão: Foi verificado que 19 alunos responderam de forma correta a questão.

**Problema 2.** *Dada o número 1323, sua decomposição é:*

- a)  $3^3 \cdot 7^2$    b)  $3^2 \cdot 7^2$    c)  $3^3 \cdot 7$    d)  $2^3 \cdot 7^2$    e)  $3^3 \cdot 2^7$

**Solução:**

Decompondo o número 1323 em fatores primos, obtemos:

$$\begin{array}{r|l}
 1323 & 3 \\
 441 & 3 \\
 147 & 3 \\
 49 & 7 \\
 7 & 7 \\
 1 & \\
 \hline
 1323 & = 3^3 \cdot 7^2
 \end{array}$$

Portanto, a decomposição do número 1323 é :  $3^3 \cdot 7^2$ .

Conclusão: Foi verificado que 17 alunos responderam de forma correta a questão.

**Problema 3.** *O número de três algarismos divisível ao mesmo por 2, 3, 5, 6, 9, 11 é:*

- a) 330    b) 66    c) 676    d) 990    e) 996

**Solução:**

Utilizando os critérios de divisibilidade e verificando número a número obtemos que o número procurado é 990, pois :

É divisível por 2, pois é um número par;

É divisível por 3, pois  $9 + 9 + 0 = 18$  que é divisível por 3;

É divisível por 5, pois termina em 0;

É divisível por 6, pois é divisível por 2 e por 3;

É divisível por 9, pois  $9 + 9 + 0 = 18$  que é divisível por 9;

É divisível por 11, pois  $660 \div 11 = 60$  e resto igual a 0.

Portanto o número procurado será 990.

Conclusão: Foi verificado que 23 alunos responderam de forma correta a questão.

**Problema 4.** *Um pai e um filho são pescadores. Cada um tem um barco e vão ao mar no mesmo dia. O pai volta para casa a cada 20 dias e o filho a cada 15 dias. Em quantos dias se encontrarão em casa pela primeira vez?*

**Solução:**

Vamos escrever a cada quantos dias o pai e o filho retornam pra casa:

- Horários de retorno do pai:

$$M_{20} = \{20, 40, 60, 100, 120, 140\}$$

- Horários de retorno do filho:

$$M_{15} = \{15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120\}$$

- Horários em que coincidem o retorno do pai e do filho:

60, 120 (múltiplos comuns de 20 e 15)

Assim, a menor quantidade de dias em que os dois se encontrarão em casa será após 60, isto é, o  $mmc(40, 15) = 60$ .

Conclusão: Foi verificado que 15 alunos responderam de forma correta a questão.

**Problema 5.** *Três corredores largaram juntos em uma prova cujo percurso é circular. Eles correm com velocidade constante. Bruno leva 3 minutos para completar cada volta, Henrique leva 4 minutos e Davi, 6 minutos. Dada a largada, depois de quanto tempo os três passarão juntos pela primeira vez por esse local?*

**Solução:**

Como Bruno leva 3 minutos para completar cada volta temos:

$$M_3 = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, \dots\}$$

Do mesmo modo, como Henrique leva 4 minutos para completar cada volta, temos:

$$M_4 = \{0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, \dots\}$$

E por fim, com Davi leva 6 minutos para completar cada volta, temos:

$$M_{15} = \{0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, \dots\}$$

Logo os tempos comuns aos três corredores são:

$$0, 12, 24 \text{ (múltiplos comuns de } 3, 4, 6)$$

E daí o menor múltiplo comum diferente de zero é 12, isto é,  $mmc(3, 4, 6) = 12$ . E portanto, eles passarão juntos após 12 minutos depois que a largada foi dada.

Conclusão: Foi verificado que 19 pessoas responderam de forma correta a questão.

**Problema 6.** *Um marceneiro precisa cortar três tábuas em pedaços de mesmo comprimento. Para melhor aproveitamento das tábuas, o comprimento dos pedaços deve ser o maior possível. Uma tábua mede 250 centímetros de comprimento, a outra mede 350 centímetros e a outra, 550 centímetros. Qual será o comprimento de cada pedaço de tábua?*

**Solução:**

Iremos decompor em fatores primos os números 250, 350 e 550, assim obtemos:

$$\begin{array}{r|l}
 250 & 2 \\
 125 & 5 \\
 25 & 5 \quad 250 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \\
 5 & 5 \\
 1 & \\
 \hline
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r|l}
 350 & 2 \\
 175 & 5 \\
 35 & 5 \quad 350 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \\
 7 & 7 \\
 1 & \\
 \hline
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r|l}
 550 & 2 \\
 275 & 5 \\
 55 & 5 \quad 550 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 11 \\
 11 & 11 \\
 1 & \\
 \hline
 \end{array}$$

Daí os fatores comuns aos três números são: 2, 5, 5

Logo o máximo divisor comum de 250, 350 e 550 será:

$$mdc(250, 350, 550) = 2 \cdot 5 \cdot 5 = 50$$

Portanto o comprimento de cada pedaço de tábua será de 50 centímetros.

Conclusão: Foi verificado que 8 alunos responderam de forma correta a questão.

**Problema 7.** *Em uma turma do 6º ano com mais de 30 alunos foi distribuído um total de 126 borrachas, 168 lápis 210 livros e 252 cadernos. Essa distribuição foi feita de modo que cada aluno recebesse o mesmo número de borrachas, de lápis, de livros e de cadernos. Nesse caso, qual a quantidade de alunos dessa turma?*

**Solução:**

Para a resolução desta questão iremos decompor em fatores primos os números 126, 168, 210, 252, assim obtemos:

$$\begin{array}{r|l}
 126 & 2 \\
 63 & 3 \\
 21 & 3 \quad 126 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \\
 7 & 7 \\
 1 & \\
 \hline
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r|l}
 168 & 2 \\
 84 & 2 \\
 42 & 2 \\
 21 & 3 \\
 7 & 7 \\
 1 & \\
 \hline
 \end{array}
 \quad 168 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$$
  

$$\begin{array}{r|l}
 210 & 2 \\
 105 & 3 \\
 35 & 5 \quad 210 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 11 \\
 7 & 7 \\
 1 & \\
 \hline
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r|l}
 252 & 2 \\
 126 & 2 \\
 63 & 3 \\
 21 & 3 \\
 7 & 7 \\
 1 & \\
 \hline
 \end{array}
 \quad 252 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$$



Logo os fatores comuns aos números decompostos acima são: 2, 3 e 7.

Assim o  $\text{mdc}(126, 168, 210, 252) = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$ . Portanto a quantidade de alunos dessa turma será de 42 alunos.

Conclusão: Foi verificado que 5 alunos responderam de forma correta a questão.

**Problema 8.** *Alice tem uma coleção de miniaturas de animais pré-históricos. Dispondo-as em grupos de 5 em 5, sobram duas. Dispondo-as em grupos de 9 em 9, sobra apenas uma. Determine a quantidade de miniaturas, sabendo que a coleção de Alice tem menos de 50 miniaturas.*

**Solução:**

Ao formar grupos de 5 em 5 miniaturas, temos os múltiplos de 5, logo:

$$M_5 = \{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45\}$$

Como ao formamos grupos de 5 em 5 sobram duas miniaturas, então acrescentaremos essas duas miniaturas aos múltiplos de 5, obtendo:

$$2, 7, 12, 17, 22, 27, 32, 37, 42, 47 \text{ (possíveis quantidades de miniaturas de Alice) I}$$

Ao formar grupos de 9 em 9 miniaturas, temos os múltiplos de 9, logo:

$$M_9 = \{0, 9, 18, 27, 36, 45\}$$

Como ao formamos grupos de 9 em 9 sobra apenas uma miniatura, então acrescentaremos essa unidade aos múltiplos de 9, obtendo:

$$1, 10, 19, 28, 37, 46 \text{ (possíveis quantidades de miniaturas de Alice) II}$$

Logo a quantidade de miniaturas que Alice possui, será a menor quantidade comum de I e II.

Portanto Alice possui 37 miniaturas.

Conclusão: Foi verificado que 10 alunos responderam de forma correta a questão.

## Considerações Finais

A tabela 3.5 mostra a nota de cada um dos 24 alunos que participaram da avaliação, onde representamos cada um desses alunos pela letra A seguida por um número, isto é, A1, A2, ..., A23 e A24.

<i>Aluno</i>	<i>Nota</i>	<i>Aluno</i>	<i>Nota</i>	<i>Aluno</i>	<i>Nota</i>
A1	4,0	A9	9,0	A17	8,5
A2	5,5	A10	6,5	A18	5,5
A3	4,0	A11	4,5	A19	7,5
A4	6,5	A12	7,5	A20	8,0
A5	5,5	A13	4,5	A21	8,0
A6	8,0	A14	9,0	A22	8,5
A7	7,5	A15	10,0	A23	7,5
A8	6,5	A16	10,0	A24	6,5

Tabela 3.5: Nota obtida por cada aluno

Através dos estudos realizados e dos dados obtidos na tabela 3.5, foi possível constatar que as atividades aplicadas na turma do 8º ano foram válidas, pois 17 discentes obtiveram nota maior do que 6. Os mesmos relataram que gostaram do conteúdo aplicado e da forma com que ele foi ministrado, e que as atividades lúdicas (bingo dos divisores, soma do quadrado mágico e a construção do crivo) chamaram mais a sua atenção, tendo em vista que a assimilação do conteúdo se tornou mais simples devido a essas atividades.

Os discentes também relataram que o estudo do máximo divisor comum, não foi de fácil entendimento para os mesmos, o qual pode ser verificado na figura 3.7, onde mostra o gráfico de desempenho dos discentes em cada questão, constatando que apenas 8 discentes responderam de forma correta o problema 6 e 5 discentes responderam de forma correta o problema 7. Constatamos também que o problema em que houve mais acertos foi o

problema 3 com 23 acertos, problema este que trata sobre divisibilidade.

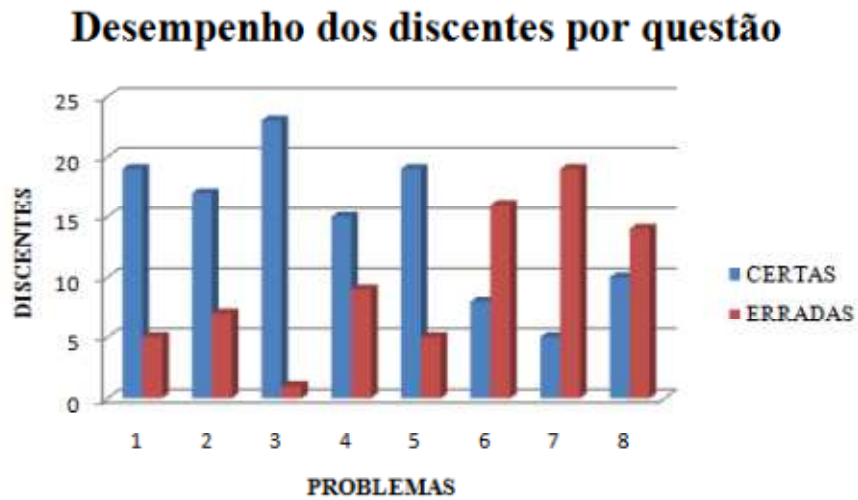


Figura 3.7: Gráfico de desempenho dos discentes

Com a relação ao objetivo geral do estudo que se constituiu em verificar o processo de ensino e aprendizagem dos múltiplos e divisores no ensino fundamental, acredita-se que foram plenamente atingidos.

Sugere-se para trabalhos futuros a aplicação de outros conteúdos utilizando os mesmos métodos aplicados no presente trabalho, para que se possa verificar e analisar os conceitos adquiridos pelos discentes. Por fim, o estudo realizado sobre múltiplos e divisores envolvendo atividades lúdicas e situações problemas ficou evidenciado.

# Referências

- [1] ANDRINI, A. ; VASCONCELOS, M. J. *Praticando Matemática 6*. 4ª Edição. São Paulo: EDITORA DO BRASIL, 2015.
- [2] BIANCHINI, E. *Matemática*. 7ª Edição. São Paulo: MODERNA, 2011.
- [3] DANTE, L. R. *Matemática: ensino fundamental 2*. 2ª Edição. São Paulo: ÁTICA, 2015.
- [4] HEFEZ, A. *Aritmética*.. 1ª Edição. Rio de Janeiro: SBM, 2014.
- [5] LEONARDO, F. M. d. *Projeto Araribá: Matemática*. Obra Coletiva. Vol. 1. 3ª Edição. São Paulo: MODERNA, 2010.
- [6] MACHADO, S. D. A. et al *Teoria Elementar dos Números-da Educação Básica à Formação dos Professores que Ensinam Matemática*. São Paulo: IGLU, 2015.
- [7] SHOKRANIAN, S. *Uma breve história da teoria dos números no século vinte*. Rio de Janeiro: CIÊNCIA MODERNA Ltda, 2010.
- [8] SILVEIRA, Ê. *Matemática compreensão e prática*.. 3ª Edição. São Paulo: MODERNA, 2015.
- [9] VIEIRA, V. L. *Um curso básico em teoria dos números*.. Campina Grande: EDU-EPB, São Paulo: LIVRARIA DA FÍSICA, 2015.

# Apêndice A

## Avaliação para verificação de desempenho dos alunos

**Problema 1.** *Utilizando o crivo de Eratóstenes, a quantidade de números primos de 1 a 50 é:*

- a) 13   b) 14   c) 15   d) 16   e) 17

**Problema 2.** *Dada o número 1323, sua decomposição é:*

- a)  $3^3 \cdot 7^2$    b)  $3^2 \cdot 7^2$    c)  $3^3 \cdot 7$    d)  $2^3 \cdot 7^2$    e)  $3^3 \cdot 2^7$

**Problema 3.** *O número de três algarismos divisível ao mesmo por 2, 3, 5, 6, 9, 11 é:*

- a) 330   b) 66   c) 676   d) 990   e) 996

**Problema 4.** *Um pai e um filho são pescadores. Cada um tem um barco e vão ao mar no mesmo dia. O pai volta para casa a cada 20 dias e o filho a cada 15 dias. Em quantos dias se encontrarão em casa pela primeira vez?*

**Problema 5.** *Três corredores largaram juntos em uma prova cujo percurso é circular. Eles correm com velocidade constante. Bruno leva 3 minutos para completar cada volta, Henrique leva 4 minutos e Davi, 6 minutos. Dada a largada, depois de quanto tempo os três passarão juntos pela primeira vez por esse local?*

**Problema 6.** *Um marceneiro precisa cortar três tábuas em pedaços de mesmo comprimento. Para melhor aproveitamento das tábuas, o comprimento dos pedaços deve ser o maior possível. Uma tábua mede 250 centímetros de comprimento, a outra mede 350 centímetros e a outra, 550 centímetros. Qual será o comprimento de cada pedaço de tábua?*

**Problema 7.** *Em uma turma do 6º ano com mais de 30 alunos foi distribuído um total de 126 borrachas, 168 lápis 210 livros e 252 cadernos. Essa distribuição foi feita de modo que cada aluno recebesse o mesmo número de borrachas, de lápis, de livros e de cadernos. Nesse caso, qual a quantidade de alunos dessa turma?*

**Problema 8.** *Alice tem uma coleção de miniaturas de animais pré-históricos. Dispondo-as em grupos de 5 em 5, sobram duas. Dispondo-as em grupos de 9 em 9, sobra apenas uma. Determine a quantidade de miniaturas, sabendo que a coleção de Alice tem menos de 50 miniaturas.*