UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UEPB

Sistemas Lineares: Uma Sequência Didática para o Ensino Médio e Aplicações

Wesklemyr Lacerda Pereira

Orientadora: Profª. Drª. Luciana Roze de Freitas

CAMPINA GRANDE
Junho de 2017

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UEPB

Sistemas Lineares: Uma Sequência Didática para o Ensino Médio e Aplicações

por

Wesklemyr Lacerda Pereira †

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional- PROFMAT do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba em cumprimento às exigências legais para obtenção do título de Mestre em Matemática.

† Bolsista CAPES

P436s Pereira, Wesklemyr Lacerda.
Sistemas Lineares [manuscrito] : uma sequência didática para o ensino médio e aplicações / Wesklemyr Lacerda Pereira. - 2017.
85 p. : il. color.

Digitado.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2017.
"Orientação: Profa. Dra. Luciana Roze de Freitas, Departamento de Matemática".

1. Sistemas Lineares. 2. Teorema do Posto. 3. GeoGebra. I. Título.

21. ed. CDD 512.15

Sistemas Lineares: Uma Sequência Didática para o Ensino Médio e Aplicações

por

Wesklemyr Lacerda Pereira

Dissertação Apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT -UEPB, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado em: 09/06/2017

Luciana R. Freitas

Prof^{a}. Dra. Luciana Roze de Freitas
Departamento de Matemática - UEPB
ORIENTADORA

Maria Isabelle Silva

Prof^{a}. Dra. Maria Isabelle Silva
Departamento de Matemática - UEPB
EXAMINADORA

Alânnio B. Nóbrega

Prof. Dr. Alânnio Barbosa Nobrega
Unidade Acadêmica de Matemática - UFCG
EXAMINADOR

Dedicatória

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, por todos os desafios e obstáculos que ele me permitiu vencer, aos Meus Pais Valmir Pereira da Silva e Marcia Maria Lacerda, As Minhas irmãs Thamyres Lacerda e Wartuzzy Lacerda e a Minha noiva Denise Lima por todo incentivo e compreensão.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me permitido vencer todas a dificuldades e desafios, me dando sempre sabedoria e discernimento.

Agradeço a minha família, de modo especial aos meus pais, Valmir Pereira e Marcia Lacerda, por todo incentivo e apoio que me deram em todos os momentos.

As Minhas irmãs Wictoria Thamyres e Wartuzzy Kelly, por todos os momentos que compartilharam ao meu lado nessa jornada.

A minha noiva Denise Lima, que sempre torceu, apoiou e esteve ao meu lado em todos os momentos, sendo por muitas vezes meu porto seguro.

Agradeço a minha orientadora Prof.ª Dr.ª Luciana Roze de Freitas por toda atenção, paciência, compreensão, dedicação e por todas as orientações para que eu pudesse ter concluído este trabalho.

Agradeço a todos os professores que não mediram esforços para ensinar e transmitir a mim o máximo de conhecimento possível, de modo especial ao professor Francisco Sibério, com o qual aprendi muito durante todo este período.

Por fim, agradeço aos amigos e colegas de estudos: Janaina Nunes, Alane Albuquerque, Ana Lúcia, Erivan Valentin, Cleysson Cassemiro, Mailsom Matos, José Alexandre, estes que de forma direta ou indireta contribuíram para que eu chegasse a concluir este curso.

A todos que de algum modo contribuíram direto ou indiretamente para realização deste trabalho.

Resumo

No presente trabalho, apresentamos um estudo sobre sistemas de equações lineares, considerando uma sequência didática que pode ser trabalhada em turmas do Ensino Médio, especialmente em turmas do 2º ano. Inicialmente, o texto traz uma breve reflexão sobre o ensino de sistema lineares, destacando a grande importância deste conteúdo perante as várias áreas do conhecimento humano. Serão apresentados as definições e os principais resultados acerca de sistemas lineares de ordem 2×2, 3×2, 2×3 e 3×3, onde daremos ênfase a interpretação geométrica de cada equação que constitui o sistema, bem como a utilização da técnica de escalonamento e a aplicação do Teorema do Posto na busca pela solução de cada sistema explorado. Iremos considerar, uma metodologia que aborde os aspectos algébricos e geométricos, explorando as relações existentes entre o sistema e as posições relativas das retas ou planos que representam as equações, bem como as relações entre os coeficientes. Por fim, propomos atividades, que mostrem a presença dos sistemas lineares em diversas situações, de modo que o leitor com o auxílio do GeoGebra, possa interpretar graficamente a solução do sistema e após isso aplicar as técnicas e procedimentos estudados ao longo deste trabalho para resolver o sistema.

Palavras-chave: Sistema Lineares. Teorema do Posto. GeoGebra.

Abstract

In this research, we present a study about systems of linear equations, considering a didactic sequence that can be used in high school classes, especially in second-year classes. Originally, the text brings a brief reflection about the teaching process of the linear system, emphasizing the great importance of this content to the various areas of human knowledge. The definitions and main results about linear order systems of 2×2, 3×2, 2×3 and 3×3 will be presented. On this occasion we will emphasize the geometric interpretation of each equation that constitutes the system, as well as the utilization of the scaling technique and application of the post theorem, searching for the solution of each explored system. For this study, we will consider a method that involves algebraic and geometric aspects, exploring the existing relationships between the system and relative positions of straight lines or planes that represent the equations, as well as the relationships among the coefficients. Finally, we propose activities, showing the presence of linear systems in different situations, so that the reader, with the help of GeoGebra, can interpret graphically the solution of the system and after that apply the techniques and procedures studied throughout this study to solve the system.

Key-words: Linear Systems. Post Theorem. GeoGebra.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

Capítulo 1

Introdução

1.1 O ensino de sistemas lineares

A importância da Matemática é algo indiscutível na vida do ser humano, tendo em vista a grande presença desta ciência nas mais variadas áreas do conhecimento. Com o passar dos anos, estando em sala de aula como professor de Matemática, tenho observado que esta disciplina é tido como um pesadelo para a maioria dos alunos. Muitos deles constroem a ideia de que a Matemática é de difícil compreensão e que não vão conseguir entender ou aprender os conteúdos propostos e que devem ser estudados. Porém, em outras situações, esses alunos apresentam um grande desinteresse pela Matemática por não conseguirem estabelecer uma relação entre esse componente e o seu dia-a-dia, ou seja, não conseguem observar a valiosa presença da Matemática em seu cotidiano.

Sabemos também que, por muitas vezes, o ensino tradicional é algo que contribui e vem a ser um dos responsáveis pela rejeição do aluno para com a Matemática, pois em um determinado momento o educando se torna simplesmente um mero decorador de fórmulas e repetidor de técnicas e processos de resolução, sem saber o que está fazendo, para que serve e qual o verdadeiro sentido do conteúdo que se está estudando. Como vemos em [4] que:

> É consensual a idéia de que não existe um caminho que possa ser identificado como único e melhor para o ensino de qualquer disciplina, em particular, da matemática. No entanto, conhecer diversas possibilidades de trabalho em sala de aula é fundamental, para que o professor construa sua prática (PCNs, 1997, pág. 42).

Assim, com base nos direcionamentos que temos na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Brasileira, conforme [3], se faz necessário buscar meios que permitam que crianças, jovens e adolescentes, despertem o interesse por esse componente e comecem a compreender de uma forma estruturada e lógica as definições e conceitos matemáticos, visto que a Matemática básica é o alicerce para o ser humano saber lidar com problemas futuros de seu cotidiano.

Dentre os meios que devemos buscar para auxiliar no processo ensino-aprendizagem, podemos destacar a utilização de novas tecnologias, que podem se tornar uma grande aliada face ao desafio de fazer com que o aluno venha a aprender Matemática. O dinamismo e todo o poder de manipulação que o uso de computadores e softwares matemáticos possibilitam, podem vir a fazer com que no processo de ensino-aprendizagem, o aluno chegue rapidamente as soluções de seus problemas de uma maneira interativa e acompanhada de um raciocínio algébrico orientado pelo professor.

Sabedores de que não temos uma fórmula de ensinar, ou um caminho que possa ser identificado como o melhor, como afirma os parâmetros curriculares citados anteriormente, ainda assim, é grande a responsabilidade do professor, que além de enfrentar os inúmeros desafios e obstáculos de sua profissão, deve também buscar meios e métodos para conseguir motivar o aluno, com o propósito de despertar neste, a vontade e a satisfação de estudar Matemática.

Assim de modo particular, o estudo de sistemas lineares tem a sua grande importância na trajetória acadêmica do aluno. O ensino deste conteúdo, inicia-se no ensino fundamental, onde ele é trabalhado de forma simples, com apenas duas equações e duas incógnitas, e são explorados os método de adição, comparação e substituição. Observemos que de acordo com [12]:

> "Os sistemas de equações lineares constituem um tópico de grande interesse prático, e o seu estudo é acessível aos estudantes, pois não requer o emprego de conceitos sutis ou complicados. Além disso, pode servir como ponto de partida para diversas teorias matemáticas e atuais."

No ensino médio, o estudo de sistemas é explorado com mais detalhes e com outras técnicas de resolução. Também podemos destacar a presença deste conteúdo em questões de vestibulares e no Exame Nacional do Ensino Médio, prova esta que está sendo adotada como forma de ingresso pela maioria das universidades brasileiras. Assim, faz-se necessário considerar algumas recomendações no processo de ensino e aprendizagem dos sistemas lineares, conforme vemos em [5]:

> "No estudo de sistemas de equações, além de trabalhar a técnica de resolução de sistemas, é necessário colocar a álgebra sobre o olhar da geometria. A resolução de um sistema linear 2×2 de duas equações e duas variáveis pode ser associada ao estudo da posição relativa de duas retas no plano. Com operações elementares simples, pode-se determinar a existência ou não de soluções desse sistema, o que significa geometricamente os casos de intersecção/coincidência de retas ou paralelismo de retas. A resolução de sistemas 2×3 ou 3×3 também deve ser feita via operações elementares (o processo de escalonamento), com discussão das diferentes situações (sistemas com uma única solução, com infinitas soluções e sem solução)."

Destacamos ainda, o estudo dos sistemas lineares no ensino superior, onde surgem fortemente em conteúdos de Álgebra Linear e no Cálculo Numérico, e onde vemos também sua aplicação em diversas áreas como Engenharia, Economia, Física e Biologia.

O conteúdo de sistemas lineares, além da riqueza nas aplicações em diversas áreas, nos possibilita reforçar o estudo sobre retas e planos, com a análise das posições relativas, que por sua vez, está associada à algumas relações entre os coeficientes das equações do sistema.

Com o ensino de sistemas lineares é possível abordar um problema do cotidiano, sendo uma oportunidade de reforçar a importância da Matemática, e se trabalhado de forma adequada, motivar o aluno. Dessa forma, se faz necessário ressaltar a importância do processo de modelagem de um problema matemático que recaia em sistemas lineares. O aluno até certo momento vem a ter o enunciado da situação, e com a leitura, o mesmo passa a construir sua interpretação acerca de cada equação e variável, e após isso prossegue na busca da elaboração de estratégias e consequentemente na busca da solução do problema.

Durante o processo de construção deste nosso trabalho, pesquisamos e observamos que este conteúdo foi objeto de interesse de vários autores, cada um deles, explorando aspectos diferentes deste tema, como por exemplo a utilização de modelagem Matemática conforme vemos em [18] ou a utilização de algum software como ferramenta de apoio de acordo com [8]. Analisamos ainda, alguns livros didáticos, dos quais podemos citar [16] e [7], onde encontramos o conteúdo de sistemas lineares sendo apresentados de forma resumida e sem muitos detalhes, detalhes estes, que se explorados e apresentados de forma adequada, podem vir a chamar a atenção e despertar o interesse dos alunos acerca do conteúdo.

Deste modo, vamos buscar com respeito e todo devido rigor matemático, trabalhar o conteúdo de forma adequada que o torne entendível ao aluno, buscando com a utilização da interpretação geométrica através do GeoGebra e com o auxílio do Teorema do Posto, levar os alunos e os demais leitores deste trabalho a solucionarem problemas que recaiam em sistemas lineares.

1.2 Um breve relato histórico

A grande e valiosa organização que a Matemática sofreu ao longo do tempo, é algo que sempre deverá ser lembrado e explorado, assim, de acordo com os escritos encontrados em [2], [8] e [17], vamos buscar fazer um breve relato sobre alguns acontecimentos importantes no processo de desenvolvimento da teoria dos sistemas lineares.

Os primeiros aparecimentos de sistemas lineares datam do século II A.C. Houve de um modo geral, reconhecimento tanto no ocidente quanto no oriente, porém sendo mais aprofundados os seus estudos no oriente. Os chineses, começaram a representar os sistemas lineares por meio de bambus em tabuleiros, onde a partir daí eles começaram a perceber um método que eliminava incógnitas através de operações elementares.

Por volta do século XVII, o Japonês Seki Kowa (1642-1708), aperfeiçoou a ideia dos chineses utilizando determinantes. Ele foi considerado o maior matemático do século XVII. Em 1693, Gottfried Wilhelm Von Leibniz (1646-1716), trabalhou com o determinante. Ele usava linhas e colunas como equações e trabalhou com situações de três equações e duas incógnitas em termo do determinante de ordem três, formado pelos coeficientes e pelos termos independentes.

No século XVIII, o escocês Colin Maclaurin (1698-1746), foi o responsável por trabalhar e desenvolver um método de resolução para sistemas com n equações e n incógnitas, através de determinantes, e em 1750 Gabriel Cramer (1704-1752), chegou também a este método, onde a partir daí esta técnica de resolução recebeu o nome de Regra de Cramer.

Em 1764, o francês Etienne Bezout (1730-1783), foi além, e sistematizou os procedimentos para se determinar os sinais dos termos de um determinante. Já em 1771, Alexandre Vandermonde (1735-1796), estabeleceu uma abordagem da teoria dos determinantes independente dos sistemas lineares. Logo em seguida, ainda no século XVIII, o francês Pierre Simon de Laplace (1789-1827) demonstrou o importante teorema que leva seu nome, teorema este que permite trabalhar o determinante por meio dos elementos de uma linha ou coluna de uma matriz.

Outro grande contribuinte na organização dos sistemas lineares, foi Karl Friedrich Gauss (1777-1855). Gauss, criou um método sistemático de resolver sistemas, se utilizando da matriz dos coeficientes das equações, chamado de método do escalonamento. Gauss, juntamente com o matemático Wilhelm Jordan (1842-1899), foram os responsáveis pela organização deste método, que contribuiu e muito na resolução de sistemas lineares. Este método, veio a receber o nome de Método de Gauss-Jordan, onde ele é utilizado principalmente quando os sistemas possuem um número grande de equações. Tal método, exige que a matriz dos coeficientes seja transformada em uma matriz na forma escalonada.

O termo Determinante, veio a surgir na forma e sentido atual em 1812, com o francês Augustin Louis Cauchy (1789-1857). Também é de grande importância ressaltar os estudos e descobertas feitas pelo alemão Carl Gustav Jakolo Jacobi (1804-1851) que concretizou os estudos dos determinantes.

Após as contribuições de Cauchy, Gauss e Jacobi, vários matemáticos aprofundaram os estudos dos sistema lineares, nos possibilitando chegar ao grande conhecimento que temos hoje sobre este conteúdo. Atualmente, os sistemas lineares tem uma forte presença nas mais variadas áreas do conhecimento, o que vem a ressaltar a importância deste conteúdo de um modo geral e especialmente na Matemática.

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo geral

O objetivo central deste trabalho é abordar a teoria de sistema lineares de maneira ampla, explorando aspectos algébricos e geométricos. Em seguida, vamos propor uma sequência de atividades envolvendo sistemas lineares, abordando conteúdos variados do ensino médio, e considerando o aparecimento do mesmo nas mais diversas situações, onde utilizaremos o software GeoGebra para auxiliar na interpretação geométrica e na busca da solução do sistema.

1.3.2 Objetivos específicos

- Apresentar a teoria geral sobre sistemas;
- Apresentar uma sequência de problemas que podem ser realizados em turmas do ensino médio e que estes possam ser modelados de modo a obter um sistema linear;
- Considerar problemas em diversas áreas, reforçando o estudo e a importância do conteúdo;
- Propor a utilização do GeoGebra como ferramenta que possibilite a interpretação geométrica dos sistemas, levando o aluno a conjecturar sobre a solução do problema;
- Resolver os problemas utilizando o método do escalonamento;

1.4 Organização do trabalho

Este trabalho é composto por três capítulos, considerações finais, referências e apêndice. No primeiro capítulo, que é esta introdução, abordamos o ensino de sistemas lineares e sua importância desde o ensino fundamental até o seu aparecimento no ensino superior; trazemos um breve relato histórico, percorrendo alguns acontecimentos acerca da evolução e organização dos sistemas lineares ao longo do tempo e descrevemos quais os objetivos que almejamos com este trabalho. No segundo capítulo, considerando uma sequência didática para o ensino de sistemas, abordamos a parte teórica acerca dos sistemas lineares de ordem 2×2, 3×2, 2×3 e 3×3, onde exploramos a classificação dos sistemas lineares aliada a aplicação do Teorema do Posto; trazemos também exemplos que trabalhem a parte algébrica, onde observamos as relações existentes entre os coeficientes das equações que compõem o sistema e determinamos a sua solução algébrica, e exploramos a interpretação geométrica da solução de cada sistema, considerando as posições relativas de retas e planos que representam cada equação. No terceiro capítulo, propomos atividades que mostrem a utilização dos sistemas lineares em diversas áreas, onde trabalhamos desde a solução geométrica de cada sistema, com o auxílio do software GeoGebra, e confrontamos esta solução com a solução algébrica, encontrada através da aplicação do método do escalonamento e do Teorema do Posto. Após isso, fazemos nossas considerações finais acerca deste trabalho de um modo geral. Em seguida, apresentamos as referências que serviram de suporte para este nosso trabalho e por fim, no apêndice A, trazemos a demonstração do Teorema do Posto. O estudo do conteúdo de sistemas lineares, exigem dos estudantes e demais leitores um conhecimento prévio, sobre a geometria analítica relacionada a retas e planos. As técnicas aqui estudadas, podem ser estendidas para sistemas de ordem $m \times n$, porém aqui neste trabalho, vamos considerar apenas as ordens que já mencionamos.

Capítulo 2

Sistemas lineares

Os sistemas de equações são úteis e nos possibilitam resolver diversas situações ou problemas. Assim, vamos a partir de agora de uma forma clara e objetiva, explorar este conteúdo, apresentando as definições e os principais resultados e aplicando-os de uma forma adequada, com todo o rigor matemático que os sistemas lineares exigem. Deste modo, baseados em [7], [10], [11], [13], [16] e [19], apresentamos a teoria a seguir.

Definição 2.1. ***(Sistemas lineares)*** *Um sistema de equações lineares com m equações e n incógnitas, é um conjunto de equações da forma:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad . \\ \qquad\qquad . \\ \qquad\qquad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2.1}$$

Onde temos que:

- $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n$ são as incógnitas;
- a_{ij} são os coeficientes das incógnitas, com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$;
- b_i são os termos independentes das equações, com $1 \leq i \leq m$.

Definição 2.2. ***(Solução)*** *Dizemos que* $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)$ *é uma solução do sistema linear* (2.1) *quando* $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)$ *é solução de cada uma das equações do sistema, ou seja, satisfaz simultaneamente todas as equações do sistema. Assim,*

$$a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + ... + a_{in}\alpha_n = b_i, \text{ onde } 1 \leq i \leq m.$$

Denotamos por S, o conjunto de todas as soluções do sistema.

Para escrevermos este conjunto S o mais explicitamente possível, devemos buscar associar ao sistema (2.1), por meio de transformações elementares, um sistema equivalente em uma forma mais simples de resolver. Antes de apresentarmos quais são essas transformações elementares, devemos considerar algumas notações e definir algumas situações que serão adotadas ao longo deste trabalho.

O sistema (2.1) pode ser associado a seguinte notação matricial $AX = B$, onde A, X e B são as seguintes matrizes:

- A é a matriz dos coeficientes do sistema:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ & . & & \\ & . & & \\ & . & & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- X é a matriz das incógnitas do sistema:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$$

- B é a matriz dos termos independentes do sistema:

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix}$$

Definição 2.3. ***(Matriz ampliada)*** *Considerando os coeficientes das equações do sistema* (2.1)*, juntamente com os termos independentes e os organizando como linhas de uma tabela, obtemos a chamada matriz ampliada $A|B$ do sistema* (2.1)*, assim temos:*

$$A|B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & | & b_2 \\ . & . & ... & . & | & . \\ . & . & & . & | & . \\ . & . & & . & | & . \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & | & b_m \end{bmatrix}. \tag{2.2}$$

2.1 Transformações elementares e sistemas equivalentes

Resolver um sistema linear, significa determinar o conjunto solução S, onde seus elementos são todas as soluções do sistema. Dentre os métodos existentes para a resolução de um sistema linear, vamos explorar o método de escalonamento. Este método consiste em considerar a matriz ampliada de um sistema linear e aplicar uma sequência de transformações elementares a esta matriz, de modo a obtermos uma matriz equivalente a matriz ampliada e que seja de fácil resolução.

Por meio das seguintes transformações elementares aplicadas a matriz ampliada, podemos simplificar um sistema:

1. Permutação das linhas L_i e L_j, indicada por $L_i \leftrightarrow L_j$;

2. Substituição de uma linha L_i pela adição desta mesma linha com k vezes uma outra linha L_j, indicada por $L_i \to L_i + kL_j$;

3. Multiplicação de uma linha L_i por um número real k não nulo, indicada por $L_i \to kL_i$.

Definição 2.4. ***(Matriz escalonada)*** *De acordo com [9], uma matriz $m \times n$ se diz na forma escalonada se for nula, ou se:*

1. *O primeiro elemento não nulo de cada linha não nula é 1;*

2. *Cada coluna que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha tem todos os seus outros elementos iguais a zero;*

3. *Toda linha nula ocorre abaixo de todas as linhas não nulas;*

4. *Se $L_1, ..., L_p$ são as linhas não nulas, e se o primeiro elemento não nulo da linha L_i ocorre na coluna k_i, então $k_1 < k_2 < ... < k_p$.*

Deste modo, se A é uma matriz de ordem $m \times n$, equivalente a uma matriz $\tilde{A}$, de ordem $m \times n$ na forma escalonada, diz-se que $\tilde{A}$ é a forma escalonada de A.

Definição 2.5. ***(Sistemas equivalentes)*** *Dois sistemas lineares são equivalentes, se um é obtido do outro a partir de uma sequência finita de transformações elementares.*

Observação 2.1. *Sistemas de equações lineares equivalentes possuem o mesmo conjunto solução.*

Observação 2.2. *Para obter um sistema equivalente, pode-se aplicar as transformações elementares diretamente no sistema ou na matriz ampliada.*

Definição 2.6. ***(Sistema linear escalonado)*** *Um sistema linear é dito escalonado se:*

1. *Todas as equações apresentam as incógnitas em uma mesma ordem;*

2. *Em cada equação existe pelo menos um coeficiente, ou termo independente, não-nulo;*

3. *A partir da primeira equação do sistema, de cima para baixo, o número de coeficientes nulos, que antecedem o primeiro número não nulo de cada equação aumenta de uma equação para a seguinte.*

Um sistema linear escalonado, pode ser obtido por meio do escalonamento da matriz ampliada do sistema. Para se escalonar a matriz ampliada, aplicamos uma sequência de transformações elementares sobre linhas desta matriz.

2.2 Classificação de sistemas lineares e o Teorema do Posto

Em relação as suas soluções, um sistema linear se classifica em: sistema possível e determinado (SPD), sistema possível e indeterminado (SPI) ou sistema impossível (SI). Mais precisamente, temos:

- Sistema possível e determinado é todo sistema linear que admite uma única solução;
- Sistema possível e indeterminado é todo sistema linear que admite mais de uma solução;
- Sistema impossível é todo sistema linear que não admite solução. Neste caso, dizemos que a solução do sistema é $S = \emptyset$.

Vejamos o esquema a seguir:

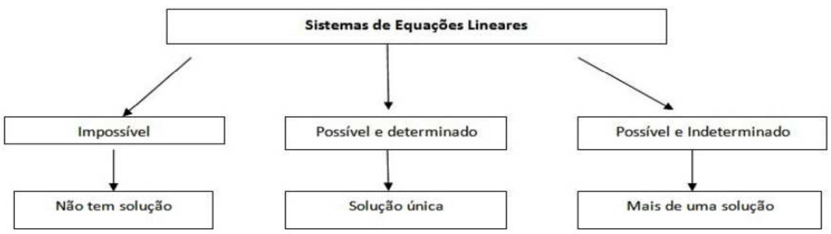

Figura 2.1: Classificação de um sistema linear

Definição 2.7. ***(Posto)*** *O posto da matriz A é o número de linhas não nulas de sua forma escalonada $\tilde{A}$.*

Teorema 2.1. ***(Teorema do Posto)*** *Consideremos um sistema linear com m equações e n incógnitas $AX = B$, onde A é a matriz dos coeficientes, X é a matriz das incógnitas e*

B é a matriz dos termos independentes. Seja p_{AB} o posto da matriz ampliada do sistema e p_A o posto da matriz dos coeficientes do sistema, então:

i) *O sistema é impossível se, e somente se, $p_{AB} \neq p_A$;*

ii) *O sistema é possível e determinado se, e somente se, $p_{AB} = p_A = n$;*

iii) *O sistema é possível e indeterminado se, e somente se, $p_{AB} = p_A < n$. Neste caso, $n - p_A$ é o número de incógnitas livres do sistema. Assim, estas incógnitas podem assumir qualquer valor, respeitando sempre as condições de conjuntos numéricos que cada problema explorado exige.*

Demonstração: *Ver Apêndice A.* ■

2.3 Sistemas lineares de ordem 2×2

No ensino fundamental, são abordados diversos problemas que recaem em sistemas de equações de ordem 2×2, onde para determinar a solução dos sistemas, utilizam-se alguns métodos. Um método comum é o da adição, que consiste em somar as equações do sistema, de modo a obter outra equação com uma única incógnita. Se utiliza também o método da substituição, onde através deste deve-se isolar uma incógnita numa equação e substituí-la na outra equação do sistema dado, buscando chegar em uma equação que contenha apenas uma única incógnita. Por fim, mesmo sendo pouco utilizado, ainda é colocado a disposição do aluno o método da comparação, onde a ideia é isolar uma incógnita numa equação e depois isolar a mesma incógnita na outra equação, em seguida, deve-se igualar as duas equações de modo a obter uma equação com uma única incógnita. Mesmo sendo um sistema simples de resolver, este muitas vezes leva o aluno a se questionar acerca do método mais adequado para se determinar a solução. Iremos considerar uma abordagem cujo objetivo é explorar alguns aspectos algébricos e geométricos do sistema. Para isso, consideremos o seguinte sistema linear com duas equações e duas incógnitas abaixo:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \tag{2.3}$$

Podemos associar ao sistema (2.3), as seguintes matrizes:

- Matriz dos coeficientes do sistema:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}. \tag{2.4}$$

- Matriz ampliada do sistema:

$$A|B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & | & b_2 \end{bmatrix}. \tag{2.5}$$

Cada equação de (2.3) representa uma reta do plano, e as posições destas retas podem ser classificadas como: concorrentes, paralelas ou coincidentes. Estas posições estão associadas à solução do sistema da seguinte forma:

- Quando as retas são concorrentes o sistema possui uma única solução, determinada pelo ponto de interseção destas retas;
- Quando as retas são paralelas o sistema não possui solução;
- Quando as retas são coincidentes o sistema admite infinitas soluções.

A fim de associar as posições entre as retas com os coeficientes do sistema, vamos estabelecer que para algum $k \in \mathbb{R}^*$,

$$(a_{11}, a_{12}) = k(a_{21}, a_{22}) \text{ se } a_{11} = ka_{21} \text{ e } a_{12} = ka_{22}.$$

Sabemos também que a posição relativa entre duas retas pode ser identificada por meio dos coeficientes da seguinte forma:

- As retas são paralelas se, e somente se, existe $k \in \mathbb{R}^*$ tal que $(a_{11}, a_{12}) = k(a_{21}, a_{22})$ e $b_1 \neq kb_2$;
- As retas são coincidentes se, e somente se, existe $k \in \mathbb{R}^*$ tal que $(a_{11}, a_{12}) = k(a_{21}, a_{22})$ e $b_1 = kb_2$;
- As retas são concorrentes se, e somente se, $(a_{11}, a_{12}) \neq k(a_{21}, a_{22})$ para todo $k \in \mathbb{R}^*$.

Deste modo, com base no Teorema do Posto, vejamos em quais condições ocorrem cada uma destas situações:

1º caso: De acordo com o Teorema do Posto, se p_A é diferente de p_{AB}, o sistema é classificado como impossível. Neste caso, as retas que representam as equações do sistema são paralelas (ver Figura 2.2). Isto ocorrerá quando, existe $k \in \mathbb{R}^*$, tal que:

$$(a_{11}, a_{12}) = k(a_{21}, a_{22}) \text{ e } b_1 \neq kb_2.$$

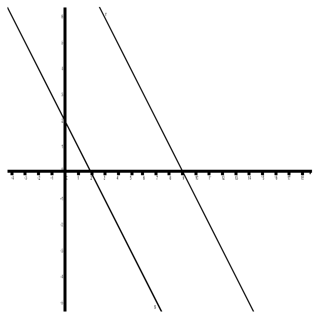

Figura 2.2: Retas paralelas

Exemplo 2.1. *Consideremos o seguinte sistema linear:*

$$\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases} \tag{2.6}$$

De acordo com cada equação, observamos que elas diferem apenas pelo termo independente, $b_1 = 6$ e $b_2 = 12$. Assim, de acordo com o caso estudado, concluímos de imediato que trata-se de um sistema impossível, ou seja, sua solução é $S = \emptyset$.

2º caso: Se $p_A = p_{AB} = 1 < 2$, então o sistema é classificado como possível e indeterminado. Nesta situação as retas que representam o sistema coincidem (ver Figura 2.3). Os coeficientes de cada equação do sistema, podem ser relacionados da seguinte forma:

$$(a_{11}, a_{12}) = k(a_{21}, a_{22}) \text{ e } b_1 = kb_2\text{; para algum } k \in \mathbb{R}^*.$$

Neste caso, para buscarmos a solução do sistema, basta tomarmos apenas uma de suas equações.

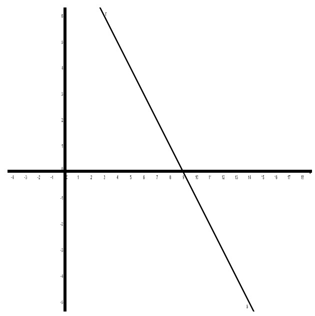

Figura 2.3: Retas coincidentes

Exemplo 2.2. *Consideremos o seguinte sistema linear:*

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 2x + 2y = 20 \end{cases} \tag{2.7}$$

Observando cada equação que constitui o sistema, vemos que uma é múltipla da outra, ou seja, seus coeficientes estão relacionados por meio da seguinte relação $a_{21} = 2.a_{11}, a_{22} = 2.a_{12}$ e $b_2 = 2.b_1$. Assim, de acordo com o 2º caso, as retas que representam o sistema (2.7) coincidem. Logo o sistema é possível e indeterminado, e para buscarmos a solução do problema, basta apenas tomar como referência uma das equações, dessa forma, tomemos:

$$x + y = 10 \Rightarrow y = 10 - x.$$

Portanto, as soluções são pares da forma $(x, -x+10)$, onde x pode assumir qualquer valor real, ou ainda,

$$S = \{(x, -x + 10); x \in \mathbb{R}\}.$$

3º caso: Quando $p_A = p_{AB} = 2$, o sistema é classificado como possível e determinado. Neste caso, as retas que representam cada equação do sistema (2.3) se cruzam em um único ponto (ver Figura 2.4). Neste caso, os coeficientes de cada equação do sistema, podem ser relacionados da seguinte forma:

$$(a_{11}, a_{12}) \neq k(a_{21}, a_{22})$$

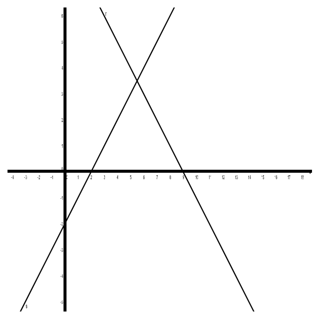

Figura 2.4: Retas concorrentes

Exemplo 2.3. *Consideremos o seguinte sistema linear:*

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 8 \end{cases} \tag{2.8}$$

Considerando cada equação que constitui o sistema, observamos que $(1, 1) \neq k(1, -1)$, para todo $k \in \mathbb{R}^*$, e assim as retas que representam o sistema são concorrentes, e nesta caso o sistema possui uma única solução. Assim, de acordo com a Definição 2.3, a matriz ampliada $A|B$ do sistema será:

$$A|B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 6 \\ 1 & -1 & | & 8 \end{bmatrix}.$$

Aplicando a esta matriz a segunda transformação elementar ($L_2 \to L_2 - L_1$), temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 6 \\ 0 & -2 & | & 2 \end{bmatrix}.$$

Aplicando agora a terceira transformação elementar ($L_2 \to \frac{-1}{2} L_2$), obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 6 \\ 0 & 1 & | & -1 \end{bmatrix}.$$

Por fim, aplicando agora a segunda transformação elementar ($L_1 \to L_1 - L_2$), obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 7 \\ 0 & 1 & | & -1 \end{bmatrix}.$$

Onde, esta é a forma escalonada da matriz $A|B$. Podemos observar após o escalonamento que o $p_A = 2$ e o $p_{AB} = 2$. Considerando a matriz escalonada de $A|B$, podemos associá-la ao seguintes valores para x e y:

$$\begin{cases} x = 7 \\ y = -1 \end{cases} \tag{2.9}$$

Portanto, vemos facilmente que a solução é dada por $S = \{(7, -1)\}$.

De acordo com a Figura 2.5, as retas que representam as equações do sistema (2.8) tem um ponto em comum, onde este é a representação da solução do sistema.

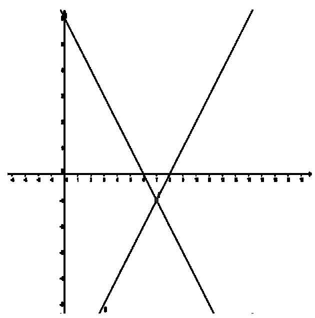

Figura 2.5: Retas concorrentes

2.4 Sistemas lineares de ordem 3×2

Nesta seção, faremos um breve estudo sobre sistema de ordem 3×2, ou seja, um sistema composto por três equações e duas incógnitas, conforme vemos em:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y = b_3 \end{cases} \tag{2.10}$$

Porém para resolver sistemas lineares deste tipo, basta considerar apenas duas equações do sistema, onde a partir daí vamos recair em um caso particular de um sistema de ordem 2×2. Assim, caso o sistema 2×2, formado pelas equações escolhidas, admita solução, podemos seguir adiante e testar os valores das variáveis x, y obtidas na terceira equação. Logo, desta forma estaremos verificando algebricamente se nosso sistema admite solução. Geometricamente, as posições das retas que representam as equações de um sistema linear de ordem 3×2, podem ser dispostas de sete maneiras distintas. Vamos observar cada caso geometricamente e classificar o sistema quanto a disposição das retas. Deste modo, sejam r, s, t as retas que representam cada equação do sistema (2.10), assim vejamos:

1º caso: O sistema pode ser impossível, e temos quatro situações possíveis para retas que representam as equações deste sistema, vejamos:

- Temos que as retas r e s são coincidentes e r é paralela a reta t.

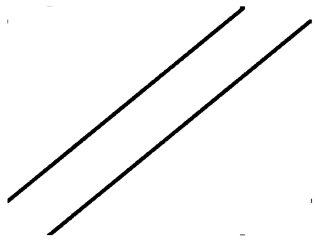

Figura 2.6: Retas paralelas

- Temos que r e s são paralelas entre si e t corta as duas retas.

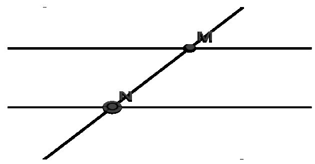

Figura 2.7: Posição de retas

- As retas são duas a duas paralelas.

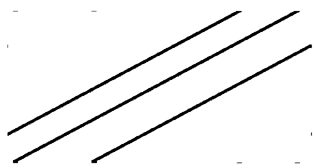

Figura 2.8: Retas paralelas

- As retas são duas a duas concorrentes.

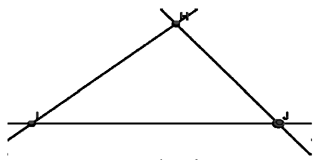

Figura 2.9: Retas duas a duas concorrentes

2º caso: Quando as retas que representam as equações do sistema são coincidentes o sistema é classificado como possível e indeterminado. Geometricamente observamos:

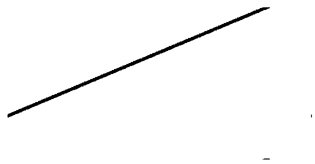

Figura 2.10: Retas coincidentes

3º caso: Quando as retas que representam as equações do sistema são concorrentes, ou seja, possuem um único ponto em comum, o sistema é classificado como possível e determinado, e geometricamente temos, duas situações possíveis para as retas que representam as equações do sistema.

- Temos r e s coincidentes e r e t, são concorrentes.

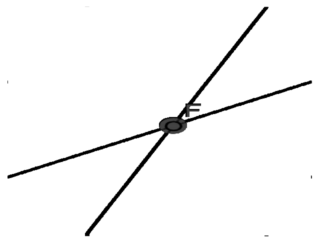

Figura 2.11: Retas concorrentes

- As três retas se cruzam em um único ponto.

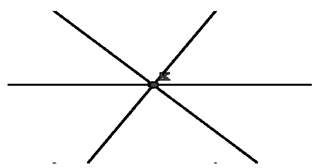

Figura 2.12: Retas concorrentes

2.5 Sistemas lineares de ordem 2×3

Nesta seção trataremos de sistemas lineares com 2 equações e 3 incógnitas. Assim, o terno $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, chama-se uma solução do sistema:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases} \tag{2.11}$$

se as coordenadas (x, y, z) satisfazem ambas as equações. Cada equação do sistema anterior representa um plano. Fixado um sistema de coordenadas OXYZ no espaço, as equações de (2.11) representam os planos α de equação: $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ e β de equação: $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$, onde estes são perpendiculares aos segmentos OA e OB, com $A = (a_1, b_1, c_1)$ e $B = (a_2, b_2, c_2)$.

Podemos também, representar matricialmente o sistema 2×3, da seguinte forma:

- Matriz dos coeficientes do sistema:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix}. \tag{2.12}$$

- Matriz ampliada do sistema:

$$A|B = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & | & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & | & d_2 \end{bmatrix}. \tag{2.13}$$

Geometricamente, nos sistemas de ordem 2×3, as posições dos planos que representam cada equação do sistema podem ser verificadas como: secantes, coincidentes, ou paralelos. Observemos que como $p_{AB} \leq 2 < 3$, então pelo Teorema do Posto, o sistema não pode ser possível e determinado. Estas posições dos planos, estão relacionadas com a solução do sistema da seguinte forma:

- Se os planos são paralelos, o sistema não possui solução;
- Se os planos são secantes, o sistema é possível e indeterminado com uma variável livre;
- Se os planos são coincidentes, o sistema é possível e indeterminado com duas variáveis livres.

Seja $k \in \mathbb{R}^*$, dizemos que:

$$(a_1, b_1, c_1) = k(a_2, b_2, c_2) \text{ se } a_1 = ka_2, \quad b_1 = kb_2, \quad \text{e} \quad c_1 = kc_2.$$

A posição relativa entre dois planos pode ser identificada por meio dos coeficientes, da seguinte forma:

- Os planos são paralelos se, e somente se, existe um $k \in \mathbb{R}^*$ tal que $(a_1, b_1, c_1) = k(a_2, b_2, c_2)$ e $d_1 \neq kd_2$;
- Os planos são coincidentes se, e somente se, existe um $k \in \mathbb{R}^*$ tal que $(a_1, b_1, c_1) = k(a_2, b_2, c_2)$ e $d_1 = kd_2$;
- Os planos são secantes se, e somente se, $(a_1, b_1, c_1) \neq k(a_2, b_2, c_2)$ para todo $k \in \mathbb{R}^*$.

Deste modo, vamos estudar os três casos possíveis para os sistemas lineares de ordem 2×3, ou seja,

- $p_A = 1$ e $p_{AB} = 2$;
- $p_A = p_{AB} = 1$;
- $p_A = p_{AB} = 2$.

1º caso: Considere o caso em que $p_A \neq p_{AB}$, ou seja, devemos ter necessariamente $p_A = 1$ e $p_{AB} = 2$. Pelo Teorema do Posto, o sistema é impossível. Esta situação ocorre quando os planos que representam cada equação do sistema são paralelos (ver Figura 2.13), isto é, existe um número $k \neq 0$ tal que:

$$(a_1, b_1, c_1) = k(a_2, b_2, c_2) \text{ e } d_2 \neq kd_1.$$

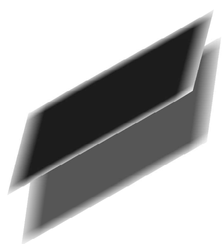

Figura 2.13: Planos α, β paralelos

Exemplo 2.4. *Consideremos o seguinte sistema linear:*

$$\begin{cases} 12x - 8y + 4z = 8 \\ 9x - 6y + 3z = 15 \end{cases} \tag{2.14}$$

Observemos que podemos expressar este sistema de uma forma mais simplificada, ou seja:

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 2 \\ 3x - 2y + z = 5 \end{cases}$$

De acordo com o que estudamos até este momento, e analisando como estão relacionados os coeficientes de cada termo das equações do sistema, concluímos que os planos que representam estas equações são paralelos. Assim, p_A e p_{AB} são diferentes. Portanto, o sistema é classificado como impossível, ou seja $S = \emptyset$.

2º caso: Vamos considerar agora o caso em que $p_A = p_{AB} = 1$. Neste caso, os dois planos que representam as equações do sistema 2×3 são coincidentes (ver Figura 2.14), o sistema é dito possível e indeterminado e as soluções deste sistema são expressas por meio de duas variáveis livres. Interpretando algebricamente os planos α, β, definidos pelas equações em (2.11), eles coincidem se, e somente se, existe um número real $k \neq 0$, tal que

$$(a_1, b_1, c_1) = k(a_2, b_2, c_2) \ \text{ e } \ d_2 = k.d_1.$$

A solução de sistemas deste tipo, é calculada tomando-se apenas uma das equações que constituem o sistema.

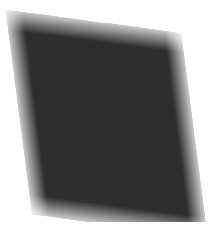

Figura 2.14: Planos α, β coincidentes

Exemplo 2.5. *Consideremos o seguinte sistema linear:*

$$\begin{cases} 12x - 8y + 4z = 8 \\ 9x - 6y + 3z = 6 \end{cases} \tag{2.15}$$

Analisando cada equação que constitui o sistema (2.15), observamos que os seus coeficientes se relacionam por meio da constante $k = \frac{3}{4}$, ou seja:

$$9 = \tfrac{3}{4}.12, \quad -6 = \tfrac{3}{4}.(-8), \quad 3 = \tfrac{3}{4}.(4) \quad \text{e} \quad 6 = \tfrac{3}{4}.(8).$$

Desta forma, o sistema é classificado como impossível e indeterminado, com duas variáveis livres, e tomando como referência a equação $9x - 6y + 3z = 6$, temos:

$$9x - 6y + 3z = 6 \Rightarrow 3z = -9x + 6y + 6 \Rightarrow z = -3x + 2y + 2.$$

Portanto, a solução do sistema são ternos da forma $(x, y, -3x + 2y + 2)$, onde x, y, podem assumir qualquer valor real, ou seja, $S = \{(x, y, -3x + 2y + 2); x, y \in \mathbb{R}\}$.

3º caso: Se $p_A = p_{AB} = 2$, o sistema é possível e indeterminado, e sua solução é expressa por meio de uma variável livre. Neste caso, os planos α, β são secantes. Dois planos distintos são secantes quando se intersectam, e neste caso, a interseção é uma reta, conforme observamos na Figura 2.15. Neste caso, os coeficientes de cada equação do sistema, podem ser relacionados da seguinte forma:

$$(a_1, b_1, c_1) \neq k(a_2, b_2, c_2)$$

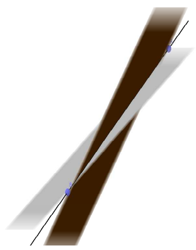

Figura 2.15: Planos α, β secantes

Exemplo 2.6. *Consideremos o seguinte sistema linear:*

$$\begin{cases} 12x - 8y + 4z = 8 \\ 9x - 6y + 2z = 6 \end{cases} \tag{2.16}$$

Os coeficientes das equações não são múltiplos, ou seja $(12, -8, 4) \neq k(9, -6, 2)$ para todo $k \in \mathbb{R}^*$. De acordo com a teoria estudada observamos que:

A matriz ampliada do sistema é:

$$A|B = \begin{bmatrix} 12 & -8 & 4 & | & 8 \\ 9 & -6 & 2 & | & 6 \end{bmatrix}.$$

Aplicando a terceira transformação elementar as linhas L_1, L_2 respectivamente ($L_1 \to L_1.\frac{1}{4}$ e $L_2 \to L_2.\frac{1}{3}$), temos:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & | & 2 \\ 3 & -2 & \frac{2}{3} & | & 2 \end{bmatrix}.$$

Aplicando a segunda transformação elementar ($L_2 \to L_2 - L_1$), temos:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{3} & | & 0 \end{bmatrix}.$$

Aplicando agora a terceira transformação elementar ($L_2 \to -3L_2$), obtemos:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

Aplicando agora a segunda transformação elementar ($L_1 \to L_1 - L_2$), temos:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

Agora fazendo ($L_1 \to \frac{1}{3}L_1$), obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{-2}{3} & 0 & | & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

Após escalonarmos a matriz ampliada $A|B$, podemos observar que o $p_A = 2$ e que o $p_{AB} = 2$, assim de acordo com o Teorema do Posto, e com o que foi descrito no 3º caso, o sistema é possível e indeterminado, os planos que representam as equações do sistema (2.16) são secantes (ver Figura 2.16), e sua solução será expressa por meio de uma única variável livre, pois $n - p_A = 3 - 2 = 1$. Logo, pelas linhas da matriz escalonada $A|B$, podemos escrever o seguinte sistema escalonado:

$$\begin{cases} x - \frac{2}{3}y = \frac{2}{3} \\ z = 0 \end{cases}$$

Agora, pela primeira equação do sistema anterior, temos:

$$x - \frac{2}{3}y = \frac{2}{3} \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - 1,$$

e assim o conjunto solução é da forma,

$$S = \{(x, \frac{3}{2}x - 1, 0); x \in \mathbb{R}\}.$$

Representando geometricamente os planos $\alpha : 12x - 8y + 4z = 8$ e $\beta : 9x - 6y + 2z = 6$ temos:

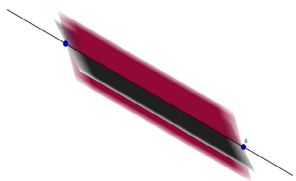

Figura 2.16: Planos α, β concorrentes

2.6 Sistemas lineares de ordem 3×3

Nesta seção trataremos de sistemas lineares com 3 equações e 3 incógnitas. Assim, o terno $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, chama-se uma solução do sistema (2.17) abaixo, se as coordenadas (x, y, z), satisfazem todas as equações deste sistema:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases} \tag{2.17}$$

Cada equação do sistema linear (2.17) nas variáveis x, y, z, representam um plano. Existem oito situações possíveis para as posições dos planos que representam as equações do sistema 3×3. Nesta seção, com base no Teorema do Posto, vamos apresentar três casos, onde em cada caso associaremos o sistema ao posicionamento dos planos e as possibilidades para solução do sistema, e após o estudo de cada caso, apresentaremos um exemplo de modo a explorar o que foi trabalhado. Nesta seção, iremos escrever da seguinte forma cada plano do sistema (2.17):

$$\alpha : a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \quad \beta : a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \quad \text{e} \quad \gamma : a_3x + b_3y + c_3z = d_3,$$

de modo a facilitar o reconhecimento de cada relação existente entre os coeficientes e os planos que representam as equações de (2.17). Vamos agora estudar cada caso:

1º caso: Neste caso, vamos estudar a situação em que o posto da matriz dos coeficientes p_A é diferente do posto da matriz aumentada p_{AB}. O sistema é classificado, de acordo com o Teorema do Posto, como impossível. Deste modo, observemos que temos três situações à considerar:

- $p_A = 1$ e $p_{AB} = 2$: Neste caso, temos dois planos coincidentes e o outro paralelo a eles, como vemos na Figura 2.17.

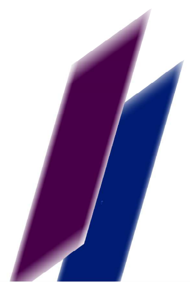

Figura 2.17: Planos α, β, γ

- $p_A = 1$ e $p_{AB} = 3$: Nesta situação, os planos α, β, γ são dois a dois paralelos. (ver Figura 2.18).

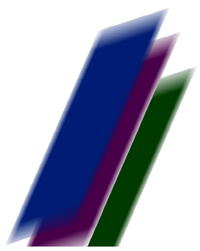

Figura 2.18: Planos α, β, γ

- $p_A = 2$ e $p_{AB} = 3$: Para este caso, podemos ter dois planos paralelos e o terceiro os intersectando segundo retas paralelas r e s, como na Figura 2.19.

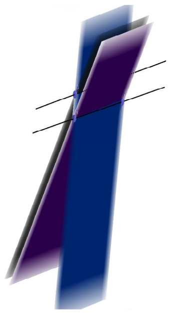

Figura 2.19: Planos α, β, γ

Vejamos que os planos α, β, γ, ainda podem ser observados se intersectando dois a dois, segundo retas paralelas r, s, t, de acordo com a Figura 2.20.

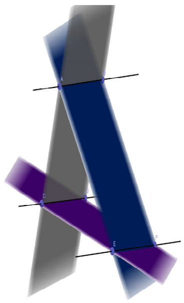

Figura 2.20: Planos e retas.

Exemplo 2.7. *Consideremos o seguinte sistema:*

$$\begin{cases} x - y - z = 8 \\ 2x - 2y - 2z = 5 \\ 4x - 4y - z = 28 \end{cases} \tag{2.18}$$

Observe que a matriz ampliada $A|B$ do sistema será:

$$A|B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & | & 8 \\ 2 & -2 & -2 & | & 5 \\ 4 & -4 & -1 & | & 28 \end{bmatrix}.$$

Aplicando a segunda transformação elementar as linhas ($L_3 \to L_3 - 2L_2$ e $L_2 \to L_2 - 2L_1$), temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & | & 8 \\ 0 & 0 & 0 & | & -11 \\ 0 & 0 & 3 & | & 18 \end{bmatrix},$$

Aplicando agora a primeira transformação elementar ($L_2 \leftrightarrow L_3$), temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & | & 8 \\ 0 & 0 & 3 & | & 18 \\ 0 & 0 & 0 & | & -11 \end{bmatrix}.$$

Aplicando a terceira transformação elementar as linhas $(L_2 \rightarrow \frac{1}{3}L_2)$ e $(L_3 \rightarrow \frac{-1}{11}L_3)$, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & | & 8 \\ 0 & 0 & 1 & | & 6 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix}.$$

Aplicando agora a segunda transformação elementar $(L_1 \rightarrow L_1 + L_2)$, encontramos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 14 \\ 0 & 0 & 1 & | & 6 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, observamos que o $p_A = 2$ e $p_{AB} = 3$, ou seja, p_A é diferente do p_{AB}. Assim, de acordo com o que estudamos no primeiro caso, o sistema é classificado como impossível, observemos também que a matriz escalonada de $A|B$ tem uma linha do tipo (0 0 0 1), o que é um absurdo. Logo, sua solução $S = \emptyset$.

Representando geometricamente os planos $\alpha : x - y - z = 8$, $\beta : 2x - 2y - 2z = 5$ e $\gamma : 4x - 4y - z = 28$, temos:

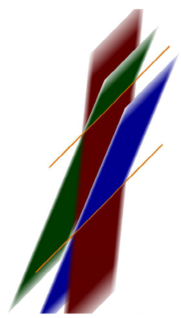

Figura 2.21: Posição de planos

2º caso: Vamos supor agora que $p_A = p_{AB} < 3$. Um sistema linear que obedeça a esta condição, é classificado, de acordo com o Teorema do Posto, como possível e indeterminado. Vejamos agora, o comportamento dos planos que representam as equações do sistema em cada situação a seguir:

- $p_A = p_{AB} = 1$. Aqui os planos que representam as equações do sistema coincidem. Assim, para expressar a solução geral, basta tomar apenas umas das equações e a solução geral será expressa por meio de duas variáveis livres.

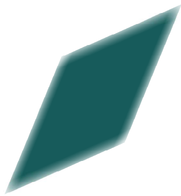

Figura 2.22: Planos α, β, γ, coincidem

- $p_A = p_{AB} = 2$. Neste caso, temos que dois planos coincidem e o terceiro plano é secante em relação ao dois planos coincidentes. A solução geral do sistema que tem essa característica, será expressa apenas por uma variável livre.

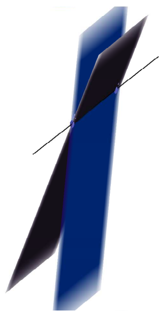

Figura 2.23: α, β, r

Outra situação que também pode ocorrer é termos três planos distintos e a interseção destes ser uma única reta, como vemos de acordo com a Figura 2.24.

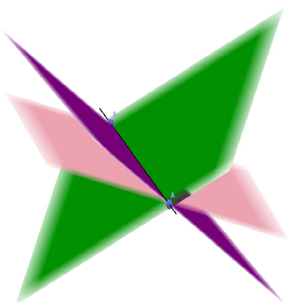

Figura 2.24: α, β, γ, três planos distintos e uma reta r em comum.

Exemplo 2.8. *Consideremos o seguinte sistema:*

$$\begin{cases} x - y - z = 7 \\ 2x - 2y - 2z = 14 \\ 4x - 4y - z = 28 \end{cases} \tag{2.19}$$

A matriz ampliada $A|B$ do sistema, será:

$$A|B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & | & 7 \\ 2 & -2 & -2 & | & 14 \\ 4 & -4 & -1 & | & 28 \end{bmatrix}.$$

Aplicando a segunda transformação elementar as linhas ($L_3 \to L_3 - 2L_2$ e $L_2 \to L_2 - 2L_1$), temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & | & 7 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 3 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

Aplicando a primeira transformação elementar ($L_2 \leftrightarrow L_3$), temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & | & 7 \\ 0 & 0 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

Aplicando a terceira transformação elementar ($L_2 \to \frac{1}{3}L_2$), obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & | & 7 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

Aplicando agora a transformação elementar ($L_1 \to L_1 + L_2$), temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 7 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, observamos que o $p_A = p_{AB} = 2$ e ambos são menores que 3. Assim, de acordo com o segundo caso, o sistema é possível e indeterminado, e o número de incógnitas livres é igual à $n - p_A = 3 - 2 = 1$. De acordo com as linhas da matriz escalonada de $A|B$, temos o seguinte sistema escalonado:

$$\begin{cases} x - y = 7 \\ z = 0 \end{cases}$$

De onde podemos escrever:

$$z = 0 \quad \text{e} \quad x = 7 + y.$$

Portanto, concluímos que a solução do sistema é:

$$S = \{(7 + y, y, 0); y \in \mathbb{R}\}.$$

Vejamos através da representação (ver Figura 2.25), o comportamento dos planos que representam as equações do sistema (2.19). Para isso, consideremos:

$$\alpha : x - y - z = 7, \quad \beta : 2x - 2y - 2z = 14 \quad \text{e} \quad \gamma : 4x - 4y - z = 28$$

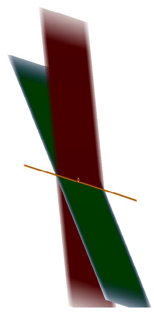

Figura 2.25: Interseção dos planos

3º caso: $p_A = p_{AB} = 3$. Os sistemas lineares nesta situação, são classificados de acordo com o Teorema do Posto como possível e determinado. Os planos que representam as equações de um sistema linear (SPD), tem um único ponto em comum, conforme podemos verificar pela Figura 2.26, onde este ponto de interseção, representa a solução do sistema linear.

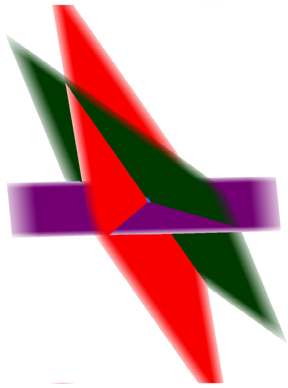

Figura 2.26: Ponto de interseção

Exemplo 2.9. *Consideremos o seguinte sistema:*

$$\begin{cases} x + 5y + 2z = 10 \\ 2x + y - 3z = -3 \\ 3x + 6y + 5z = 19 \end{cases} \tag{2.20}$$

A matriz ampliada $A|B$ do sistema, será:

$$A|B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & | & 10 \\ 2 & 1 & -3 & | & -3 \\ 3 & 6 & 5 & | & 19 \end{bmatrix}.$$

Aplicando a segunda transformação elementar as linhas ($L_3 \to L_3 - 3L_1$ e $L_2 \to L_2 - 2L_1$), temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & | & 10 \\ 0 & -9 & -7 & | & -23 \\ 0 & -9 & -1 & | & -11 \end{bmatrix}.$$

Aplicando novamente a segunda transformação elementar ($L_3 \to L_3 - L_2$), temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & | & 10 \\ 0 & -9 & -7 & | & -23 \\ 0 & 0 & 6 & | & 12 \end{bmatrix}.$$

Organizando as linhas da matriz, apliquemos a terceira transformação elementar as seguintes linhas ($L_2 \to \frac{-1}{9}L_2$) e ($L_3 \to \frac{1}{6}L_3$), daí obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & | & 10 \\ 0 & 1 & \frac{7}{9} & | & \frac{23}{9} \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{bmatrix}.$$

Aplicando agora a transformação $(L_2 \to L_2 - \frac{7}{9}L_3)$, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & | & 10 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{bmatrix}.$$

Agora apliquemos a transformação $(L_1 \to L_1 - 5L_2)$, assim obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 5 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{bmatrix}.$$

Por fim, aplicando a transformação elementar $(L_1 \to L_1 - 2L_3)$, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{bmatrix}.$$

Logo, observamos que p_A é igual a 3 e o $p_{AB} = 3$, deste modo de acordo com as condições descritas no 3º caso, o sistema é classificado como possível e determinado, e podemos obter sua solução considerando as linhas da matriz escalonada de $A|B$ esboçando o sistema associado ela. Assim, temos:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

Portanto, a solução do sistema é:

$$S = \{(1, 1, 2)\}.$$

Observando cada equação que constitui o sistema, onde:

$\alpha : x + 5y + 2z = 10$; $\beta : 2x + y - 3z = -3$ e $\gamma : 3x + 6y + 5z = 19$, temos:

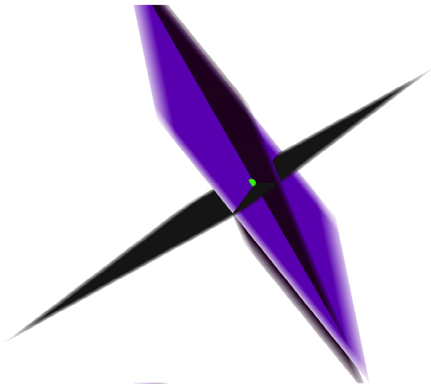

Figura 2.27: α, β e γ, tem um único ponto em comum.

Capítulo 3

Atividades

Neste capítulo, iremos trabalhar atividades que venham reforçar a importância do conteúdo de sistemas lineares, trazendo aplicações na Matemática e em outras áreas. A partir de algumas pesquisas realizadas, das quais podemos citar [1], [6], [14] e [15], iremos abordar problemas de modo a mostrar o conteúdo de sistemas lineares sendo aplicados em situações diversas. Propomos uma sequência didática a ser realizada da seguinte forma: iremos trabalhar com a interpretação do enunciado do problema e do contexto no qual este esteja inserido, de modo a obtermos um sistema linear associado ao problema; com o auxílio do GeoGebra iremos representar geometricamente as equações que compõem o sistema, e assim, interpretar também geometricamente as soluções em cada problema; e por fim, utilizaremos de meios e técnicas de escalonamento de sistemas e matrizes, de modo a solucionar algebricamente nossos problemas, onde esta última ação servirá também como um procedimento que vem a reforçar a construção geométrica feita anteriormente. Antes de partirmos para nossos problemas, vamos falar um pouco sobre o GeoGebra e deixar claro para os leitores como utilizamos o software em nosso trabalho.

3.1 O GeoGebra

O GeoGebra é um software de geometria dinâmica, este apresenta duas janelas simultâneas, uma para a parte algébrica e outra para as construções geométricas, onde temos as opções de visualização em duas e, dependendo do contexto do problema trabalhado, poderemos ter a visualização em três dimensões. Este software, realiza também ações com característica de construção com régua e compasso, que podem ser facilmente manipuladas pelos alunos e demais pessoas que venham a utilizar esta ferramenta. Neste nosso trabalho, foi utilizado a versão 5.0 para Windows. Deixaremos o link conforme [20] para que o leitor faça o download e instalação do mesmo.

Agora, vamos listar os passos necessários para operarmos com o GeoGebra, e assim começar a trabalhar nossa interpretação geométrica acerca da solução de cada sistema linear. Deste modo, devemos seguir:

1. Abra o GeoGebra, e na aba "exibir" escolha a opção "janela de visualização 3D", pois a janela de visualização 2D já aparece automaticamente quando você inicia o software, deste modo, você terá acesso a visualização 2D ou 3D de acordo com seu problema;

2. Na barra inferior do GeoGebra, digite sua equação no campo de "entrada"(uma por vez), em seguida, clique enter ao terminar de digitar cada equação;

3. Após isso, será gerada uma visualização 2D ou 3D, conforme as equações do seu sistema;

4. A partir daí, observe o comportamento do gráfico de cada equação, seja ele um plano ou uma reta, acerca de interseção, coincidência, paralelismo, etc. Após a interpretação geométrica, você estará apto a compreender a classificação que foi dada ao seu sistema, seja ela : SPD, SPI ou SI;

5. Após classificar seu sistema, e caso as equações representem retas (quando temos duas variáveis), na janela de visualização 2D, clique no menu "interseção de dois objetos", e escolha duas a duas as suas retas e observando as interseções interprete a solução de seu sistema. Caso as equações de seu sistema representem planos (quando temos três variáveis), na janela de visualização 3D, clique no menu "interseção de duas superfícies", e escolha dois a dois os planos, em seguida observe as interseções que serão geradas e em seguida interprete a solução de seu sistema. No caso de sistemas de ordem 3×3, se a interseção dos três planos for o cruzamento de três retas resultando em um único ponto em comum, podemos selecionar duas a duas cada reta e observar que este ponto é a solução do sistema;

6. Para salvar sua imagem, clique em "arquivo", em seguida clique em "gravar como" e selecione a pasta de destino que você deseja gravar sua imagem.

A partir de agora vamos explorar o que foi estudado ao longo dos dois primeiros capítulos deste trabalho, através de problemas que utilizam os sistemas lineares como forma de encontrar e determinar sua(s) solução(ões).

3.2 Problemas

Problema 1. Em uma casa de show, o dono do estabelecimento afim de aproveitar a visita de um grande número de turistas em sua cidade, realizou um evento, onde cobrou os seguintes preços aos turistas:

- Uma mesa para quatro pessoas custou R$150,00;
- Uma mesa para seis pessoas custou R$200,00.

Sabendo que o estabelecimento contém 75 mesas, e que o proprietário faturou um total de R$13.250,00 com a venda das mesas, determine quantas pessoas pagaram para entrar na casa de show, sabendo que cada mesa vendida foi ocupada completamente. **Solução:** Sejam x e y variáveis, onde x representa a quantidade de mesas para quatro pessoas e y representa a quantidade de mesas para seis pessoas. Deste modo, com base nos dados do problema podemos expressar as seguintes relações:

- O número total de mesas pode ser expresso pela seguinte equação:

$$x + y = 75;$$

- Podemos relacionar o valor total arrecadado por meio da seguinte expressão:

$$150x + 200y = 13250.$$

Assim, como base nessas informações podemos expressar nosso problema por meio do seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + y = 75 \\ 150x + 200y = 13250 \end{cases} \tag{3.1}$$

Utilizando o Geogebra e todos os passos de manipulação do software, vamos buscar solucionar geometricamente o sistema (3.1). Para isso, vamos considerar as seguintes retas:

$$r : x + y = 75 \quad \text{e} \quad s : 150x + 200y = 13250,$$

observando o comportamento de cada reta que representa as equações do sistema (3.1), temos:

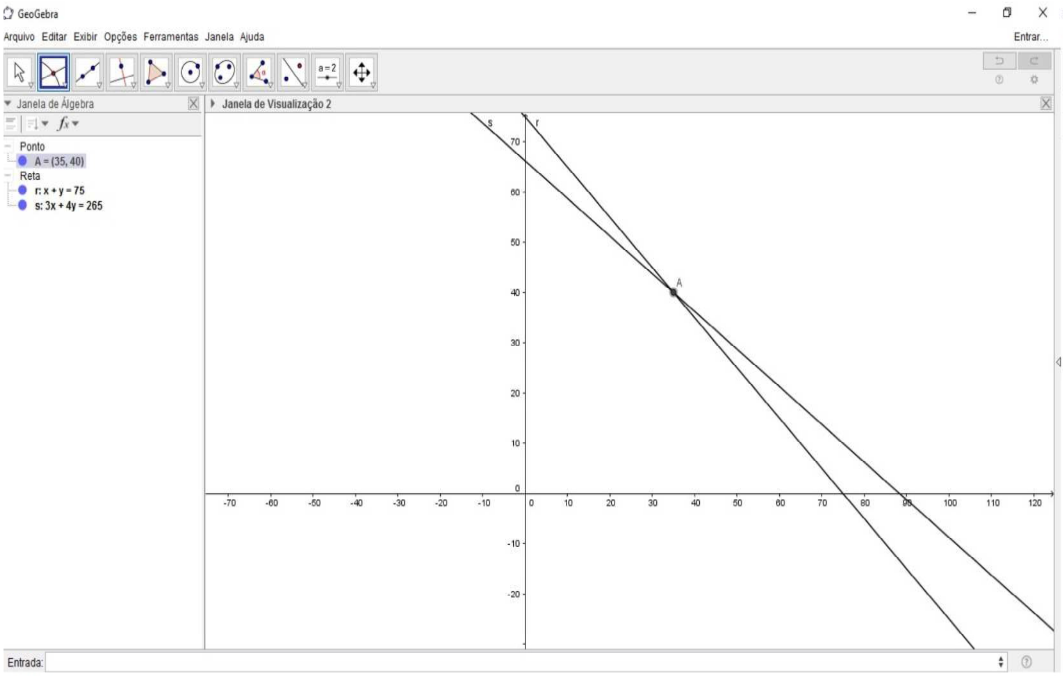

Figura 3.1: Interseção de retas

Observamos que as retas que representam as equações do sistema (3.1), se cruzam em um único ponto (ver ponto A na Figura 3.1), onde este ponto representa a solução do sistema. Agora, vamos por meio das técnicas que estudamos ao longo deste nosso trabalho, solucionar algebricamente nosso sistema. Deste modo, de acordo com cada equação do sistema (3.1), podemos associar a seguinte matriz ampliada $A|B$ a este sistema:

$$A|B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 75 \\ 150 & 200 & | & 13250 \end{bmatrix}.$$

Empregando as técnicas de transformações elementares estudadas neste trabalho na matriz $A|B$, obtemos:

- Aplicando a transformação $(L_2 \to L_2 - 150L_1)$, obtemos:

$$A|B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 75 \\ 0 & 50 & | & 2000 \end{bmatrix}.$$

- Fazendo agora $(L_2 \to \frac{1}{50}L_2)$, temos:

$$A|B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & | & 75 \\ 0 & 1 & | & 40 \end{bmatrix}.$$

- Aplicando agora a transformação $(L_1 \to L_1 - L_2)$, temos:

$$A|B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 35 \\ 0 & 1 & | & 40 \end{bmatrix}.$$

Observe que chegamos a matriz escalonada de $A|B$, de modo que nosso sistema de ordem 2×2 é típico do 3º caso, estudado na Seção 2.3 deste trabalho, e dessa forma classificado como possível e determinado. Assim, em busca de determinar a solução, podemos escrever o seguinte sistema relacionado a matriz escalonada de $A|B$:

$$\begin{cases} x = 35 \\ y = 40 \end{cases} \tag{3.2}$$

Logo, de acordo com as informações do sistema (3.2), a solução do sistema é dada por :

$$S = \{(35, 40)\}.$$

Deste modo, para determinarmos quantas pessoas pagaram para entrar na casa de show, e sabendo que cada mesa vendida teve todos os seus lugares ocupados, consideremos $4x+6y$ como sendo a expressão que represente o total de pessoas que pagaram por cada lugar na casa de show. Assim, como encontramos $x = 35$ e $y = 40$, temos que:

$$4.(35) + 6.(40) = 380.$$

Portanto, 380 pessoas pagaram para entrar na casa de show.

Problema 2. (Aplicação na Física) Um motorista de automóvel aplica os freios de modo suave e constante afim de imprimir força de frenagem constante até o repouso. Sabendo que após 1 segundo percorreu 30 metros, após 2 segundos ele percorreu 55 metros, e após 3 segundos ele percorreu 75 metros, e que a posição $S(t)$ é dada por $S(t) = \frac{x}{2}.t^2 + yt$, determine os valores dos coeficientes x e y, da equação, levando em consideração cada período de tempo descrito no problema.

Solução: De acordo com o enunciado do problema e a descrição dos dados, podemos, por meio da equação $S(t)$, escrever:

- Para $t = 1$:

$$S(1) = \frac{x}{2}.1^2 + y.1 = 30 \Rightarrow \frac{x}{2} + y = 30.$$

- Quando $t = 2$:

$$S(2) = \frac{x}{2}.2^2 + 2y = 55 \Rightarrow 2x + 2y = 55.$$

- Por fim, no instante $t = 3$, temos:

$$S(3) = \frac{x}{2}.3^2 + 3y = 75 \Rightarrow \frac{9x}{2} + 3y = 75.$$

Desta forma, podemos organizar os dados descritos, considerando os casos $S(1), S(2), S(3)$, por meio do seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + y = 30 \\ 2x + 2y = 55 \\ \frac{9x}{2} + 3y = 75 \end{cases} \tag{3.3}$$

Visualizando através do GeoGebra o gráfico que representa cada equação do sistema (3.3), e considerando :

$$r : \frac{x}{2} + y = 30, \quad s : 2x + 2y = 55, \quad \text{e} \quad t : \frac{9x}{2} + 3y = 75, \text{ temos:}$$

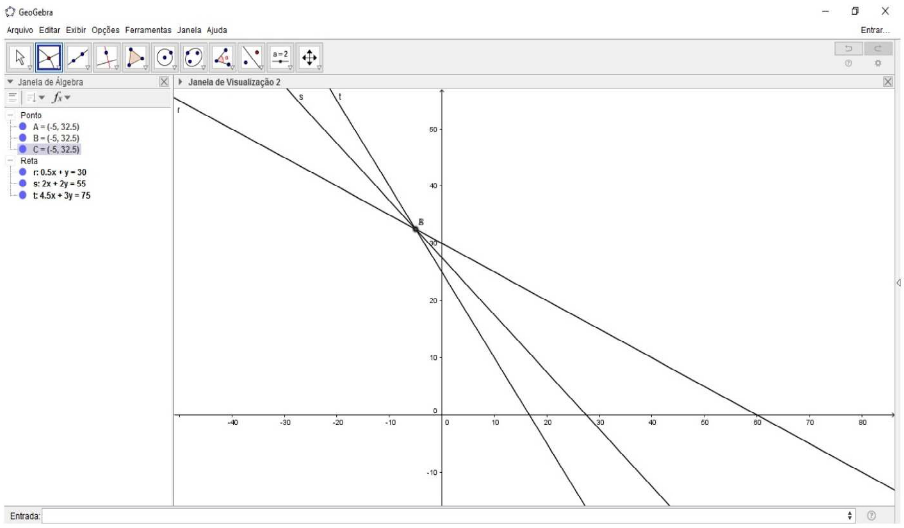

Figura 3.2: Interseção das retas

Deste modo, visualizamos que o nosso sistema possui uma única solução, que é exatamente o ponto em que as três retas se cruzam.

Assim tomando apenas duas de suas equações, já que vamos ter apenas 2 variáveis a determinar, consideremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 0,5x + y = 30 \\ 2x + 2y = 55 \end{cases} \tag{3.4}$$

Através do GeoGebra, e de acordo com cada equação do sistema (3.4), e considerando $r : 0,5x + y = 30$ e $s : 2x + 2y = 55$, temos que:

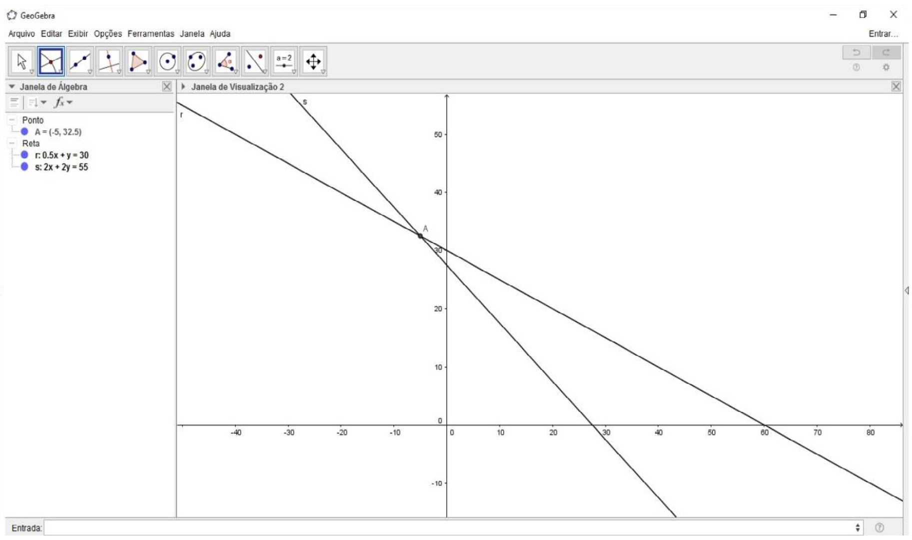

Figura 3.3: Interseção de retas

Assim, concluímos que as retas são concorrentes, ou seja possuem um único ponto em comum (ver na Figura 3.3 o ponto A), e assim o sistema é possível e determinado, onde este ponto em comum as duas retas é exatamente a solução do sistema (3.4). Agora, vamos em busca de resolver algebricamente nosso sistema.

Representando os coeficientes do sistema linear (3.4), através da matriz ampliada $A|B$ e escalonando-a, vamos buscar obter um sistema equivalente, e daí buscar determinar a solução de nosso problema. Assim, vejamos:

$$A|B = \begin{bmatrix} 0,5 & 1 & | & 30 \\ 2 & 2 & | & 55 \end{bmatrix}.$$

- Agora, aplicando a transformação elementar $(L_1 \rightarrow 4L_1)$, temos:

$$A|B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & | & 120 \\ 2 & 2 & | & 55 \end{bmatrix}.$$

- Aplicando a transformação $(L_2 \rightarrow L_2 - L_1)$, temos:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & | & 120 \\ 0 & -2 & | & -65 \end{bmatrix}.$$

- Agora apliquemos as seguintes transformações $(L_1 \rightarrow \frac{1}{2}L_1)$ e $(L_2 \rightarrow \frac{-1}{2}L_2)$, de modo a obter:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 60 \\ 0 & 1 & | & \frac{65}{2} \end{bmatrix}.$$

- Aplicando agora a transformação elementar $(L_1 \rightarrow L_1 - 2L_2)$, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & | & -5 \\ 0 & 1 & | & \frac{65}{2} \end{bmatrix}.$$

Logo, observamos que encontramos a matriz escalonada de $A|B$, e de acordo com o 3º caso, dos sistemas lineares de ordem 2×2, o sistema é classificado possível e determinado, e com o auxílio das linhas da matriz escalonada encontrada, podemos escrever o seguinte sistema associado a esta matriz:

$$\begin{cases} x = -5 \\ y = \frac{65}{2} \end{cases} \tag{3.5}$$

- De acordo com a segunda equação do sistema associado a matriz escalonada de $A|B$, temos:

$$y = \frac{65}{2} \Rightarrow y = 32,5.$$

- Sabendo que $y = 32,5$ e com o auxílio da primeira equação do sistema escalonado, temos que $x = -5$.

Devemos agora, testar os dois resultados obtidos para $x = -5$ e $y = 32,5$ na terceira equação, assim observemos que:

$$\frac{9x}{2} + 3y = 75 \Rightarrow \frac{9}{2}.(-5) + 3.(32,5) = 75.$$

Assim, observamos que os valores encontrados para x e y, satisfazem também a terceira equação. Portanto, os valores encontrados satisfazem o sistema (3.5), e deste modo a solução do problema será :

$$S = \{(-5, 32.5)\}.$$

Portanto, podemos escrever a equação $S(t)$ como:

$$S(t) = \frac{-5}{2}\, t^2 + 32,5t.$$

Problema 3. (Reação Química) Quando se escreve uma reação química, é importante verificar se o número de cada elemento é o mesmo em ambos os lados da equação. Para realizar este balanceamento, devemos colocar um número chamado coeficiente estequiométrico antes dos símbolos, e estes coeficientes devem ser sempre os menores inteiros possíveis. Assim, consideremos a seguinte equação:

$$C_4H_{10} + O_2 \rightarrow CO_2 + H_2O. \tag{3.6}$$

Sabendo que a equação (3.6), não está balanceada, determine os coeficientes que devem ser adicionados a esta equação de modo a balancear a mesma.

Solução: Sejam x, y, z e w os coeficientes que vão nos auxiliar de modo a balancear nossa equação, assim vamos escrever da seguinte forma:

$$xC_4H_{10} + yO_2 \rightarrow zCO_2 + wH_2O. \tag{3.7}$$

Analisando ambos os membros da equação, e sabendo que cada sigla representa os seguintes elementos: C representa o Carbono; H representa o Hidrogênio e O representa o Oxigênio, vamos agora em busca de determinar os valores de nossos coeficientes x, y, z e w. Para isso, vamos organizar primeiro as informações contidas em cada parcela da equação (3.7) através do seguinte sistema:

$$\begin{cases} 4x = z \\ 10x = 2w \\ 2y = 2z + w \end{cases} \tag{3.8}$$

Reorganizando membro a membro cada equação do sistema (3.8), e observando que:

$$10x = 2w \Rightarrow w = 5x,$$

obtemos obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 4x - z = 0 \\ 5x - 2y + 2z = 0 \end{cases} \tag{3.9}$$

De acordo com cada equação do sistema, vamos observar o comportamento dos gráficos que representam estas equações através do GeoGebra. Para isto, consideremos os seguintes planos:

$$\alpha : 4x - z = 0 \quad \text{e} \quad \beta : 5x - 2y + 2z = 0.$$

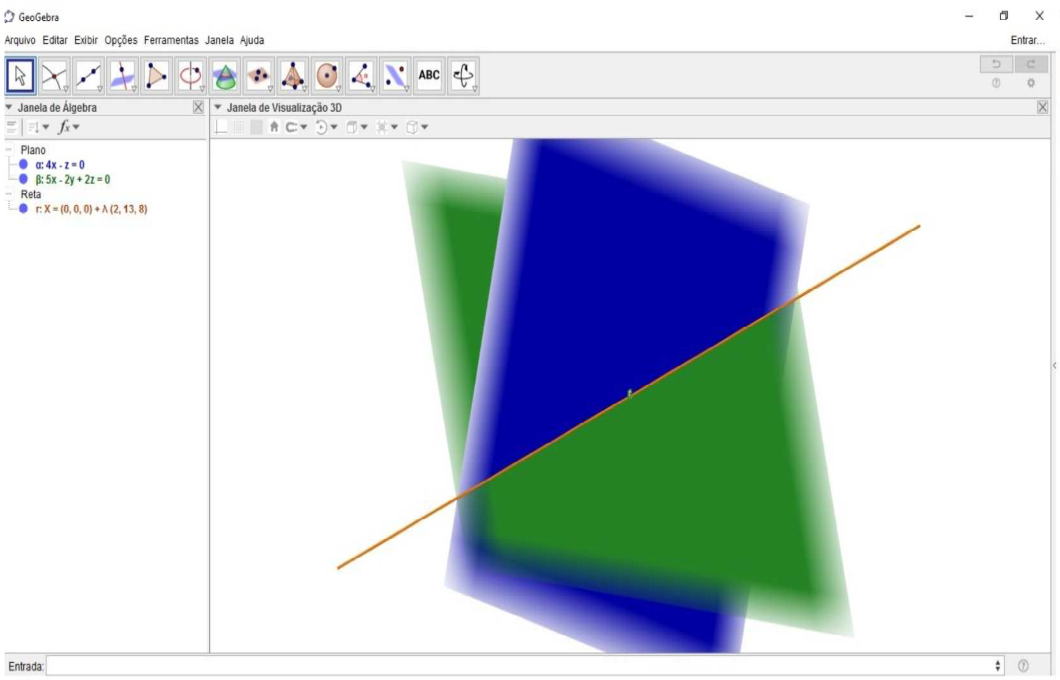

Figura 3.4: Interseção de planos

Logo, constatamos que os planos que representam as equações deste sistema, possuem uma reta como interseção, assim podemos classificar o sistema (3.9) como possível e indeterminado, ou seja, admite infinitas soluções.

Agora, de posse destas informações vamos aplicar as técnicas estudadas ao longo de nosso trabalho, de modo a encontrarmos a solução algébrica e confrontarmos com o resultado da solução geométrica. Assim, vejamos que temos a seguinte matriz ampliada $A|B$ do sistema:

$$A|B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 & | & 0 \\ 5 & -2 & 2 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

- Aplicando a transformação elementar $(L_1 \to \frac{1}{4}L_1)$, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{4} & | & 0 \\ 5 & -2 & 2 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

- Apliquemos agora a transformação $(L_2 \to L_2 - 5L_1)$, que nos possibilita chegar a seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{4} & | & 0 \\ 0 & -2 & \frac{13}{4} & | & 0 \end{bmatrix}.$$

- Por fim apliquemos a transformação $(L_2 \to \frac{-1}{2}L_2)$, logo obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{4} & | & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-13}{8} & | & 0 \end{bmatrix}.$$

Observemos que chegamos a matriz escalonada de $A|B$, logo de acordo com o sistema (3.9), e baseado no que estudamos na Seção 2.5 deste trabalho, este é um sistema típico do 3º caso, assim, este sistema é classificado como possível e indeterminado, onde o número de variáveis livres será igual à $n - p_A = 3 - 2 = 1$, ou seja nossa solução terá uma variável livre. Assim, de acordo com as linhas da matriz escalonada de $A|B$, podemos escrever o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x - \frac{1}{4}z = 0 \\ y - \frac{13}{8}z = 0 \end{cases}$$

Agora, por meio de cada equação do sistema escalonado, podemos partir agora na busca da solução do nosso problema, deste modo, façamos:

- De acordo com a segunda equação do sistema escalonado, temos:

$$y - \tfrac{13}{8}z = 0 \Rightarrow y = \tfrac{13}{8}z.$$

- Por meio da primeira equação do sistema, temos:

$$x - \tfrac{1}{4}z = 0 \Rightarrow x = \tfrac{1}{4}z.$$

Assim podemos agora, fornecer uma solução geral para o balanceamento, levando em consideração os valores encontrados para cada variável, e em particular, o caso em que:

$$w = 5x \Rightarrow w = \tfrac{5}{4}z.$$

Assim, temos que o conjunto solução será:

$$S = \{(\tfrac{1}{4}z, \tfrac{13}{8}z, z, \tfrac{5}{4}z); z \in \mathbb{R}\}.$$

Em busca de termos os coeficientes inteiros, basta tomarmos em particular $z = 8$, o que nos leva a seguinte solução para a equação (3.10):

$$S_1 = \{(2, 13, 8, 10)\}.$$

Problema 4. (**Nutrição - Questão Adaptada**). Suponhamos que uma alimentação diária equilibrada em vitaminas, deve conter conter 170 unidades de vitamina A, 230 unidades de vitamina B, 250 unidades de vitamina C. Buscando descobrir como deverá ser composta uma refeição e tendo a disposição 3 alimentos, os mesmo foram estudados, e fixando-se a quantidade de uma grama de cada alimento, foi determinado que:

- Alimento 1: tem $1, 4, 2$ unidades de vitamina A, B, C, respectivamente;
- Alimento 2: tem $2, 2, 1$ unidades de vitamina A, B, C, respectivamente;
- Alimento 3: tem $2, 2, 7$ unidades de vitamina A, B, C, respectivamente.

Assim, determine quantas gramas de cada um dos três alimentos deve ser ingerido diariamente, afim de que a alimentação esteja equilibrada?

Solução: Interpretando as informações descritas sobre cada alimento, vamos organizar os dados, de acordo com a tabela a seguir:

Alimentos e Vitaminas			
Alimento	A	B	C
1	1 unidade	4 unidades	2 unidades
2	2 unidades	2 unidades	1 unidade
3	2 unidades	2 unidades	7 unidades

Tabela 3.1: Organização dos dados sobre a quantidade de vitaminas

Vamos determinar x, y e z como sendo a quantidade em gramas do alimento 1, do alimento 2 e do alimento 3, respectivamente, que deverão ser ingeridos. Logo, observando os dados descritos na Tabela 3.1, e respeitando as quantidades devidas das vitaminas A, B e C a ser consumida, que é de 170, 230 e 250, respectivamente, podemos relacionar os dados da tabela da seguinte forma:

- A quantidade total da vitamina A em cada um dos alimentos pode ser expressa pela seguinte equação;

$$x + 2y + 2z = 170.$$

- A combinação total da vitamina B presente em cada um dos alimentos é dada por:

$$4x + 2y + 2z = 230.$$

- A combinação da quantidade de vitamina C presente em cada alimento pode ser expressa por:

$$2x + y + 7z = 250.$$

Deste modo, podemos esboçar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 170 \\ 4x + 2y + 2z = 230 \\ 2x + y + 7z = 250 \end{cases} \tag{3.10}$$

Através do GeoGebra e seguindo os passos de utilização deste software descritos no início deste capítulo, vamos interpretar graficamente o comportamento dos planos que representam as equações do sistema (3.10). Assim, considerando os planos:

$$\alpha : x + 2y + 2z = 170, \quad \beta : 4x + 2y + 2z = 230 \quad \text{e} \quad \gamma : 2x + y + 7z = 250,$$

obtemos a seguinte figura:

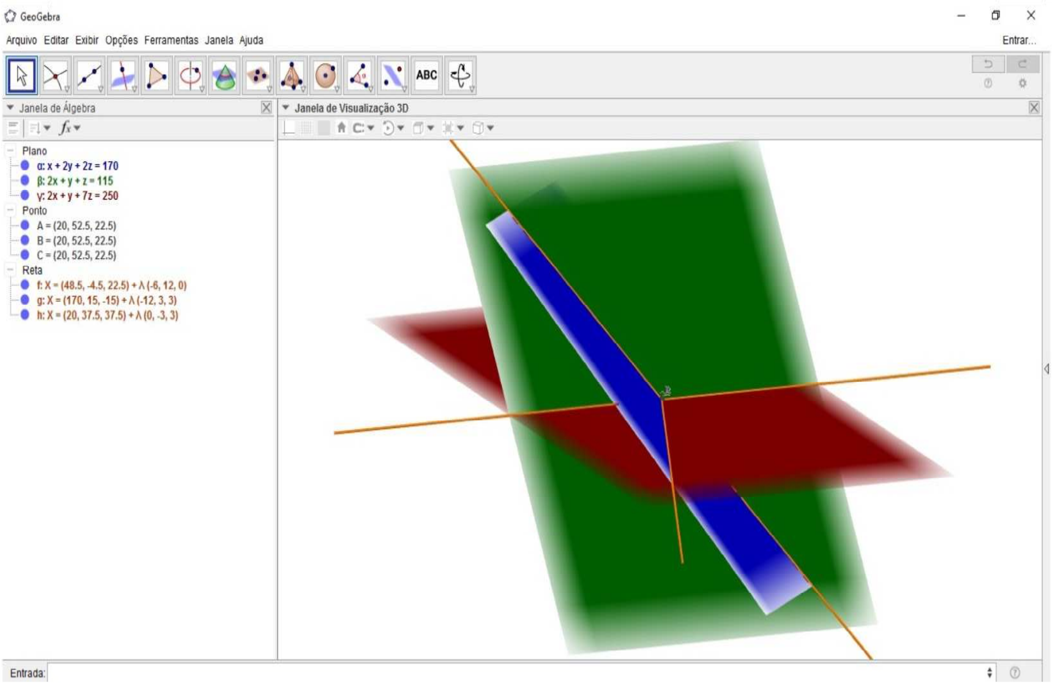

Figura 3.5: Representação geométrica da solução

Logo constatamos que ambos tem como interseção um único ponto (conforme ponto A na Figura 3.5), onde este ponto é exatamente a solução do problema.

Agora, vamos em busca da solução algébrica de nosso problema. Assim, com base nas informações descritas no sistema (3.10), montamos a seguinte matriz ampliada $A|B$ do sistema:

$$A|B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & | & 170 \\ 4 & 2 & 2 & | & 230 \\ 2 & 1 & 7 & | & 250 \end{bmatrix}.$$

Buscando transformar este sistema em um sistema equivalente mais simples de resolver, vamos utilizar as transformações elementares descritas na Seção 2.1 deste trabalho. Deste modo, façamos:

- Aplicando as transformações ($L_2 \rightarrow L_2 - 4L_1$ e $L_3 \rightarrow L_3 - 2L_1$), obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & | & 170 \\ 0 & -6 & -6 & | & -450 \\ 0 & -3 & 3 & | & -90 \end{bmatrix}.$$

- Aplicando agora as transformações ($L_2 \rightarrow L_2 - 2L_3$) e depois ($L_3 \leftrightarrow L_2$), obtemos a seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & | & 170 \\ 0 & -3 & 3 & | & -90 \\ 0 & 0 & -12 & | & -270 \end{bmatrix}.$$

- Aplicando a terceira transformação elementar as linhas ($L_2 \rightarrow \frac{-1}{3}L_2$) e ($L_3 \rightarrow \frac{-1}{12}L_3$), temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & | & 170 \\ 0 & 1 & -1 & | & 30 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{45}{2} \end{bmatrix}.$$

- Aplicando a transformação elementar ($L_1 \rightarrow L_1 - 2L_2$), obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & | & 110 \\ 0 & 1 & -1 & | & 30 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{45}{2} \end{bmatrix}.$$

- Aplicando agora a transformação elementar($L_2 \rightarrow L_2 + L_3$), temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & | & 110 \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{105}{2} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{45}{2} \end{bmatrix}.$$

- Por fim, aplicando a transformação elementar ($L_1 - 4L_3$), temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 20 \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{105}{2} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{45}{2} \end{bmatrix}.$$

Logo, chegamos a matriz escalonada de $A|B$, o que nos leva a um sistema equivalente ao sistema (3.10), porém de fácil resolução. Observando o que foi estudado, concluímos que de acordo com as possibilidades para sistemas lineares de ordem 3×3, concluímos que este sistema é típico do 3º caso, pois o $p_A = p_{AB} = 3$, deste modo, o mesmo é classificado como possível e determinado. Assim, levando em consideração as linhas da matriz escalonada de $A|B$, podemos partir em busca dos valores para as variáveis x, y e z, deste modo escrevamos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x = 20 \\ y = \frac{105}{2} \\ z = \frac{45}{2} \end{cases}$$

Logo podemos concluir que:

- De acordo com a terceira equação do sistema associado a matriz escalonada de $A|B$, temos:

$$z = 22,5.$$

- Pela segunda equação do sistema anterior, temos:

$$y = 52,5.$$

- Por fim, pela primeira equação do sistema escalonado, temos:

$$x = 20.$$

Portanto, temos que a solução será :

$$S = \{(20; 52,5; 22,5)\}.$$

Assim, para se ter uma alimentação balanceada deve ser consumido diariamente 20 gramas, $52,5$ gramas, e $22,5$ gramas dos alimentos 1, 2, 3 respectivamente.

Problema 5. (Indústria de alimentos). Uma indústria deve enlatar uma mistura de amendoim, castanha de caju e castanha do Pará. Sabe-se que o quilo de amendoim custa R$5,00, o quilo da castanha de caju R$20,00 e o quilo de castanha do Pará R$16,00.

Cada lata deve conter meio quilo de mistura e o custo total dos ingredientes de cada lata deve ser de R$5,75. Além disso, a quantidade de castanha de caju em cada lata, deve ser igual a um terço da soma das outras duas. Determine a quantidade em gramas de cada ingrediente por lata.

Solução: Vamos organizar os dados descritos no enunciado por meio da tabela a seguir:

Itens	Preço (Kg)	Quantidade por lata	Custo
Amendoim	$R\$5,00$	x	$5x$
Castanha de caju	$R\$20,00$	y	$20y$
Castanha do Pará	$R\$16,00$	z	$16z$

Tabela 3.2: Organização dos dados

De acordo com a Tabela 3.2, e adotando as variáveis x, y e z como sendo as quantidades em quilogramas respectivamente de amendoim, castanha de caju e castanha do Pará, que devem conter na mistura que será enlatada e com base nos dados descritos, consideremos as seguintes equações abaixo:

- Sendo o custo total de produção da mistura igual à R$5,75 temos a seguinte equação:

$$5x + 20y + 16z = 5,75.$$

- A expressão que representa a combinação da quantidade de amendoim, castanha de caju e castanha do Pará que deve conter em cada lata é da forma:

$$x + y + z = 0,5.$$

- Pelo enunciado do problema, a relação existente entre as quantidades de castanha de caju, em relação as quantidades de amendoim e castanha do Pará é a seguinte:

$$y = \frac{x+z}{3} \Rightarrow x - 3y + z = 0.$$

Assim, vamos expressar a situação problema por meio do seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 5x + 20y + 16z = 5,75 \\ x + y + z = 0,5 \\ x - 3y + z = 0 \end{cases} \tag{3.11}$$

Utilizando todo o procedimento de manipulação utilizando o software GeoGebra, e observando o comportamento dos planos que representam as equações do sistema (3.11), desde que:

$$\alpha : 5x + 20y + 16z = 5,75; \quad \beta : x + y + z = 0,5 \quad \text{e} \quad \gamma : x - 3y + z = 0,$$

vemos conforme a Figura 3.6 que estes se interceptam em um único ponto, ou seja o sistema admite uma única solução.

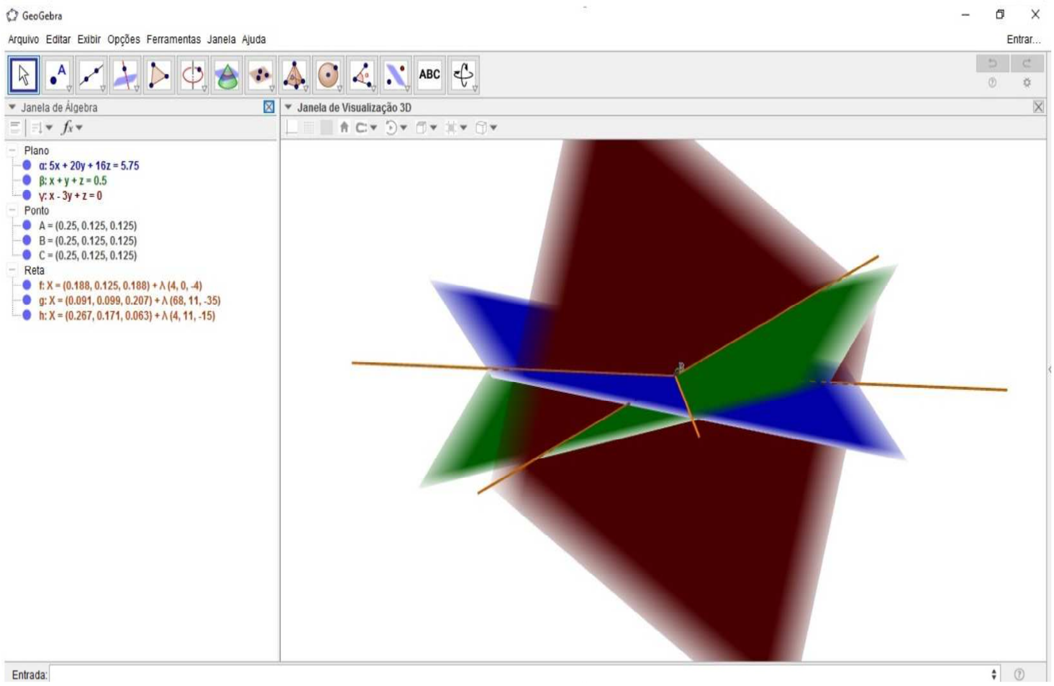

Figura 3.6: Interseção dos planos

Aplicando os conceitos estudados ao longo deste trabalho, vamos em busca da solução algébrica deste sistema. Assim, de acordo com o sistema (3.11), temos a seguinte matriz ampliada $A|B$ do sistema:

$$A|B = \begin{bmatrix} 5 & 20 & 16 & | & 5,75 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0,5 \\ 1 & -3 & 1 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

Agora, em busca de um sistema equivalente ao sistema (3.11), e que seja de fácil resolução, façamos:

- Aplicando as transformações ($L_3 \to L_3 - L_2 \quad \text{e} \quad L_2 \to -5L_2$), obtemos a seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} 5 & 20 & 16 & | & 5,75 \\ -5 & -5 & -5 & | & -2,5 \\ 0 & 4 & 0 & | & 0,5 \end{bmatrix}.$$

- Aplicando simultaneamente as transformações ($L_2 \rightarrow L_2 + L_1$ e $L_3 \rightarrow \frac{-15}{4} L_3$), encontramos à seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} 5 & 20 & 16 & | & 5,75 \\ 0 & 15 & 11 & | & 3,25 \\ 0 & -15 & 0 & | & \frac{-7,5}{4} \end{bmatrix}.$$

- Agora, aplicando a transformação ($L_3 \rightarrow L_3 + L_2$), chegamos a seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} 5 & 20 & 16 & | & 5,75 \\ 0 & 15 & 11 & | & 3,25 \\ 0 & 0 & 11 & | & \frac{5,5}{4} \end{bmatrix}.$$

- Agora, apliquemos as transformações ($L_2 \rightarrow \frac{1}{15} L_2$) e ($L_3 \rightarrow \frac{1}{11} L_3$), de modo a obter:

$$\begin{bmatrix} 5 & 20 & 16 & | & 5,75 \\ 0 & 1 & \frac{11}{15} & | & \frac{3,25}{15} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{5,5}{44} \end{bmatrix}.$$

- Aplicando a transformação ($L_1 \rightarrow \frac{1}{5} L_1$), temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & \frac{16}{5} & | & \frac{5,75}{5} \\ 0 & 1 & \frac{11}{15} & | & \frac{3,25}{15} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{5,5}{44} \end{bmatrix}.$$

- Aplicando a transformação ($L_1 \rightarrow L_1 - 4L_2$), obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{15} & | & \frac{4,25}{15} \\ 0 & 1 & \frac{11}{15} & | & \frac{3,25}{15} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{5,5}{44} \end{bmatrix}.$$

- Aplicando a transformação ($L_2 \rightarrow L_2 - \frac{11}{15} L_3$), obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{4}{15} & | & \frac{4,25}{15} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{82,5}{660} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{5,5}{44} \end{bmatrix}.$$

- Aplicando a transformação $(L_1 \to L_1 - \frac{4}{15}L_3)$, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{165}{660} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{82,5}{660} \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{5,5}{44} \end{bmatrix}.$$

Logo, observemos que chegamos a uma matriz escalonada que representa um sistema equivalente ao sistema inicial, mais simples de resolver, e conforme o que estudamos na Seção 2.6, o sistema (3.11) é classificado como possível e determinado, ou seja, possui solução única, como foi constatado geometricamente. Assim, indo em busca de sua solução, e tomando como referência as linhas da matriz escalonada de $A|B$, podemos escrever o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x = \frac{165}{660} \\ y = \frac{82,5}{660} \\ z = \frac{5,5}{44} \end{cases}$$

- De acordo com a terceira equação do sistema escalonado, podemos escrever:

$$z = \frac{5,5}{44} \Rightarrow z = 0,125.$$

- Pela segunda equação do sistema, encontramos que:

$$y = \frac{82,5}{660} \Rightarrow y = 0,125.$$

- Pela primeira equação do sistema escalonado concluímos que:

$$x = \frac{165}{660} \Rightarrow x = 0,25.$$

Portanto, a solução é um terno da forma:

$$S = \{(0,25; 0,125; 0,125)\},$$

ou seja, cada embalagem deve conter $0,25$kg de amendoim, também deve conter $0,125$kg de castanha de caju e $0,125$kg de castanha do Pará.

Problema 6. (Na Biologia - Questão Adaptada) Um biólogo colocou três espécies de bactérias (denotadas por I, II e III) em um tubo de ensaio, onde elas serão alimentadas por três fontes diferentes de alimentos (A, B e C). Em cada dia serão colocadas no tubo de ensaio 500 unidades de A, 1000 unidades de B e 1500 unidades de C. Cada bactéria consome um certo número de unidades de cada alimento por dia, como mostra a Tabela 3.3. Determine quantas bactérias podem coexistir no tubo de ensaio de modo a consumir todo o alimento em um único dia.

Tipo de Bactéria	I	II	III
Alimento A	1	1	1
Alimento B	1	2	3
Alimento C	1	3	5

Tabela 3.3: Alimentação de bactérias

Solução: De acordo com os dados descritos na Tabela 3.3, chamemos, os valores a determinar x, y e z como o número de bactérias do tipo I, II e III respectivamente que serão colocadas no tubo de ensaio, e que irão consumir os alimentos A, B e C. Assim, respeitando a quantidade de alimentos que são ingeridas diariamente por cada de tipo de bactéria, podemos expressar cada situação da seguinte forma:

- A relação entre a quantidade de cada bactéria como o consumo do alimento A, pode ser expressa pela equação:

$$x + y + z = 500.$$

- De acordo com o que cada bactéria consome em relação ao alimento B, podemos escrever a seguinte equação:

$$x + 2y + 3z = 1000.$$

- Também podemos expressar o consumo do alimento C, por parte de cada uma das bactérias da seguinte forma:

$$x + 3y + 5z = 1500.$$

Agora podemos começar a busca pela solução de nosso problema, esboçando o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x + y + z = 500 \\ x + 2y + 3z = 1000 \\ x + 3y + 5z = 1500 \end{cases} \tag{3.12}$$

Geometricamente, utilizando o GeoGebra, e considerando os seguintes planos:

$$\alpha : x + y + z = 500, \quad \beta : x + 2y + 3z = 1000 \quad \text{e} \quad \gamma : x + 3y + 5z = 1500,$$

podemos observar o comportamento dos planos que representam as equações do sistema (3.12). Assim, vejamos:

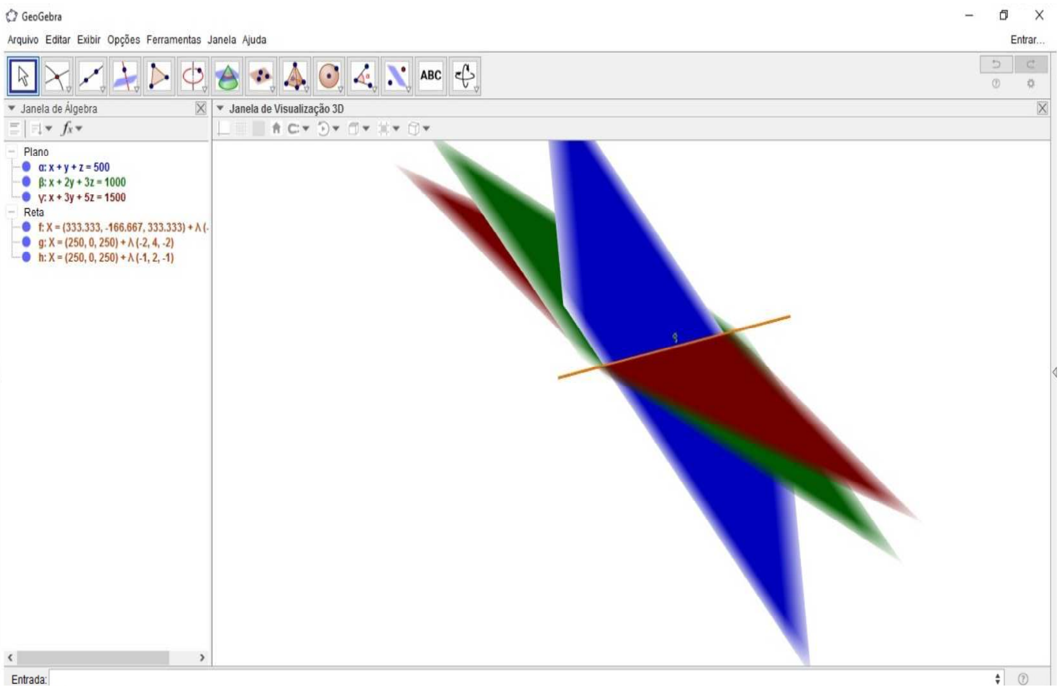

Figura 3.7: Interseções de planos

Do modo que os planos estão no espaço, observamos que eles tem uma reta em comum, e daí existem infinitos pontos que satisfazem as equações do sistema, ou seja, podemos concluir que o nosso sistema é possível e indeterminado. Agora, vamos em busca da solução algébrica de nosso sistema.

Assim, de acordo com o sistema (3.12), podemos expressar a seguinte matriz ampliada $A|B$ para este sistema:

$$A|B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 500 \\ 1 & 2 & 3 & | & 1000 \\ 1 & 3 & 5 & | & 1500 \end{bmatrix}.$$

Empregando as técnicas de transformações elementares estudadas ao longo deste trabalho na matriz $A|B$, obtemos:

- Fazendo ($L_2 \to L_2 - L_1$ e $L_3 \to L_3 - L_2$), encontramos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 500 \\ 0 & 1 & 2 & | & 500 \\ 0 & 1 & 2 & | & 500 \end{bmatrix}.$$

- Aplicando a transformação ($L_3 \to L_3 - L_2$), temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 500 \\ 0 & 1 & 2 & | & 500 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

- Aplicando a transformação ($L_1 \to L_1 - L_2$), temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 500 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, chegamos a matriz escalonada de $A|B$, de modo que sendo nosso sistema de ordem 3×3, observamos que nosso problema é um caso particular que se enquadra no 2º caso da Seção 2.6 deste trabalho. Assim, o sistema (3.12), é possível e indeterminado, e o número de variáveis livres do sistema é igual à $n - p_A = 3 - 2 = 1$. Dessa forma, tomando como base as linhas da matriz escalonada de $A|B$, escrevamos o seguinte sistema escalonado:

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y + 2z = 500 \end{cases}$$

Agora, Tomando por base cada equação do sistema relacionado a matriz escalonada de $A|B$, temos que:

- Por meio da segunda equação do sistema escalonado, temos:

$$y + 2z = 500 \Rightarrow y = 500 - 2z.$$

- Como $y = 500 - 2z$ e de acordo com a primeira equação do sistema escalonado, obtemos:

$$x - z = 0 \Rightarrow x = z.$$

Portanto, a solução geral do problema pode ser expressa como sendo:

$$S = \{(z, 500 - 2z, z); z \in \mathbb{R}\}.$$

A quantidade de bactérias no tudo de ensaio não poderá ser negativa, logo podemos respeitando a quantidade de bactérias a serem inseridas no tubo, expressar a seguinte relação:

$$z \geq 0 \quad \text{e} \quad 500 - 2z \geq 0 \Rightarrow z \leq 250 \Rightarrow 0 \leq z \leq 250$$

onde z é um número inteiro pertencente a este intervalo.

Problema 7. (Fluxo de veículos) No centro de uma cidade dois conjuntos de ruas de mão única se cruzam (conforme a Figura 3.8) a seguir:

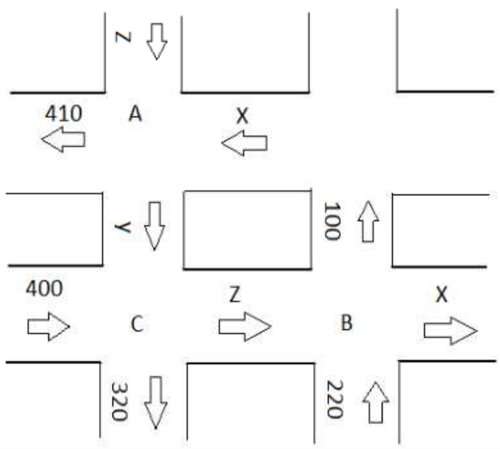

Figura 3.8: Fluxo de veículos

Considerando que estamos em horário de pico, onde o fluxo de veículos é intenso, determine a quantidade de veículos entre os cruzamentos A e C e entre os cruzamentos C e B. Determine também quantos veículos saem do cruzamento B.

Solução: Considere as variáveis x, y e z que representam os fluxos indicados pelas setas na Figura 3.6. Vamos Agora, relacionar as variáveis e o esquema esboçado na Figura 3.8 para cada cruzamento, por meio da tabela abaixo:

Cruzamento	A	B	C
Número de veículos que entram	$x+z$	$220+z$	$400+y$
Número de veículos que saem	$410+y$	$100+x$	$z+320$

Tabela 3.4: Fluxo de veículos

Agora de acordo com os dados organizados na Tabela 3.4, e levando em consideração que, em cada cruzamento o número de veículos que entra tem que ser igual ao número de veículos que saem, podemos relacionar as informações para cada cruzamento, de acordo com as seguintes equações:

- Para o cruzamento A, temos:

$$x+z = 410+y \Rightarrow x-y+z = 410.$$

- Em relação ao cruzamento B, escrevamos:

$$220+z = 100+x \Rightarrow x-z = 120.$$

- Por fim, em relação ao cruzamento C, temos:

$$400+y = z+320 \Rightarrow -y+z = 80.$$

Desta forma, podemos organizar com estas relações o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x-y+z = 410 \\ x-z = 120 \\ -y+z = 80 \end{cases} \tag{3.13}$$

Agora, vamos analisar geometricamente com o auxílio do GeoGebra nosso problema considerando:

$$\alpha : x - y + z = 410; \quad \beta : x - z = 120 \quad \text{e} \quad \gamma : -y + z = 80$$

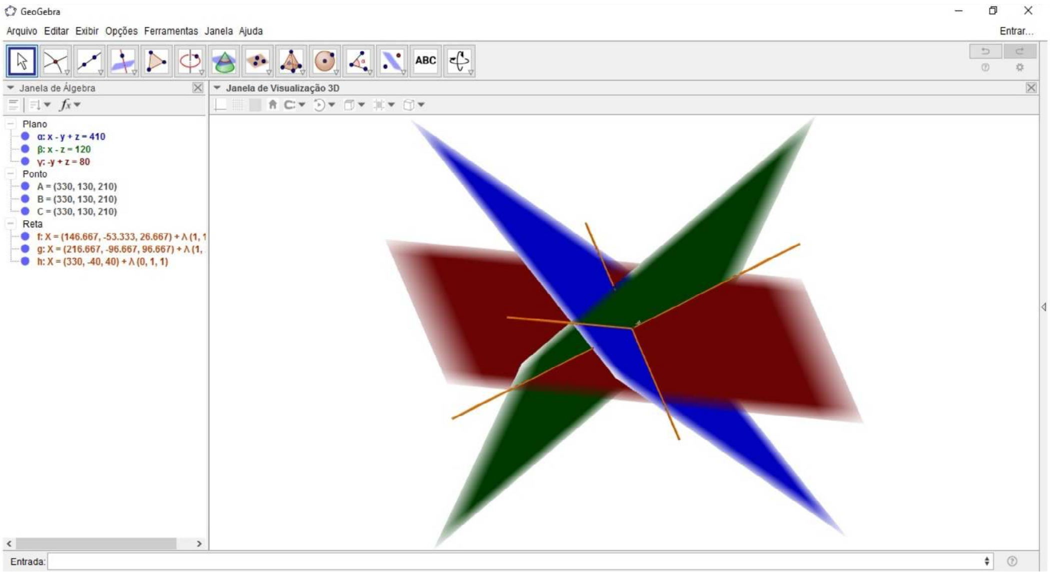

Figura 3.9: Interseção de planos

Observamos assim, que os planos se cruzam segundo um único ponto, conforme vemos de acordo com o ponto A na Figura 3.9, onde este ponto é a solução do sistema (3.13), e dessa forma podemos classificar o sistema como possível e determinado.

Agora na busca de determinar algebricamente a solução do sistema (3.13), vamos esboçar a matriz ampliada $A|B$, deste sistema e em seguida escaloná-la. Assim, seja a matriz ampliada abaixo:

$$A|B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 410 \\ 1 & 0 & -1 & | & 120 \\ 0 & -1 & 1 & | & 80 \end{bmatrix}.$$

- Aplicando a transformação elementar $(L_2 \to L_2 - L_1)$, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 410 \\ 0 & 1 & -2 & | & -290 \\ 0 & -1 & 1 & | & 80 \end{bmatrix}.$$

- Agora fazendo a seguinte transformação ($L_3 \to L_3 + L_2$), obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 410 \\ 0 & 1 & -2 & | & -290 \\ 0 & 0 & -1 & | & -210 \end{bmatrix}.$$

- Façamos agora a seguinte transformação ($L_3 \to -L_3$), deste modo encontramos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 410 \\ 0 & 1 & -2 & | & -290 \\ 0 & 0 & 1 & | & 210 \end{bmatrix}.$$

- Façamos agora a seguinte transformação ($L_1 \to L_1 + L_2$), deste modo encontramos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 120 \\ 0 & 1 & -2 & | & -290 \\ 0 & 0 & 1 & | & 210 \end{bmatrix}.$$

- Aplicando agora a seguinte transformação ($L_2 \to L_2 + 2L_3$), deste modo encontramos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 120 \\ 0 & 1 & 0 & | & 130 \\ 0 & 0 & 1 & | & 210 \end{bmatrix}.$$

- Aplicando agora a seguinte transformação ($L_1 \to L_1 + L_3$), deste modo encontramos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 330 \\ 0 & 1 & 0 & | & 130 \\ 0 & 0 & 1 & | & 210 \end{bmatrix}.$$

Podemos agora, a partir das linhas da matriz escalonada de $A|B$, encontrar a solução de nosso problema, por meio do seguinte sistema abaixo:

$$\begin{cases} x = 330 \\ y = 130 \\ z = 210 \end{cases}$$

De acordo com cada equação que constitui o sistema escalonado, temos:

- Pela terceira equação do sistema escalonado, temos:

$$z = 210.$$

- De acordo com a segunda equação do sistema, temos:

$$y = 130.$$

- Por fim, pela primeira equação do sistema escalonado, obtemos:

$$x = 330.$$

Portanto, a solução do sistema será:

$$S = \{(330, 130, 210\}).$$

Logo, de acordo com a Figura 3.8, entre os cruzamentos A e C, e C e B temos y e z veículos respectivamente. Como $y = 130$, $z = 210$ e $x = 330$, concluímos que:

- Temos 130 veículos entre os cruzamentos A e C;
- Temos 210 veículos entre os cruzamentos C e B;
- Por fim, em relação a quantidade de veículos que saem do cruzamento B, temos que esta é igual à $100 + x$, como $x = 330$, chegamos a conclusão que saem 430 veículos deste cruzamento.

Problema 8. (**Problema das idades - OBMEP - 2016**) João possui cinco filhos, dois são gêmeos e os outros dois são trigêmeos. Sabe-se que hoje a idade de joão é igual à soma das idades dos seus cinco filhos. Daqui a 15 anos, se somarmos as idades dos cinco filhos, teremos o dobro da idade que João possuirá na mesma época e a soma das idades dos gêmeos será igual a soma das idades dos trigêmeos. Determine as idades de João, dos gêmeos e dos trigêmeos.

Solução: Atribuindo algumas variáveis, denotamos por x a idade de João, y a idade de cada um dos gêmeos e z a idade de cada um dos trigêmeos. De acordo com o enunciado do problema, e respeitando as condições impostas para cada idade, vamos ilustrar cada situação por meio da seguinte tabela:

Pessoas	Idade atual	Soma das idades após 15 Anos
João	$x = 2y + 3z$	$(x + 15)$
Gêmeos	y	$2(y + 15)$
Trigêmeos	z	$3(z + 15)$

Tabela 3.5: Idades

De posse dos dados organizados na Tabela 3.5, podemos agora escrever um sistema de equações, representando cada uma das situações descritas em seu devido período de tempo. Assim, temos:

- A idade de João pode ser expressa por:

$$x = 2y + 3z.$$

- Passados 15 anos, a idade de joão pode ser relacionada por meio da seguinte expressão:

$$2.(x + 15) = 2.(y + 15) + 3.(z + 15).$$

- De acordo com o enunciado do problema, depois de 15 anos, as idades dos gêmeos e dos trigêmeos podem ser relacionada da seguinte forma:

$$2.(y + 15) = 3.(z + 15).$$

Logo, a partir de cada uma das situações descritas anteriormente, podemos escrever o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x = 2y + 3z \\ 2.(x + 15) = 2.(y + 15) + 3.(z + 15) \\ 2.(y + 15) = 3.(z + 15) \end{cases} \tag{3.14}$$

Organizando este sistema de uma forma mais simplificada, temos:

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = 0 \\ 2x - 2y - 3z = 45 \\ 0x + 2y - 3z = 15 \end{cases} \tag{3.15}$$

Com base nas equações do sistema (3.15), vamos com o auxílio do GeoGebra e seguindo seus passos de manipulação, interpretar geometricamente a solução de nosso sistema. Assim, considerando:

$$\alpha : x - 2y - 3z = 0; \quad \beta : 2x - 2y - 3z = 45 \quad \text{e} \quad \gamma : 0x + 2y - 3z = 15,$$

temos que:

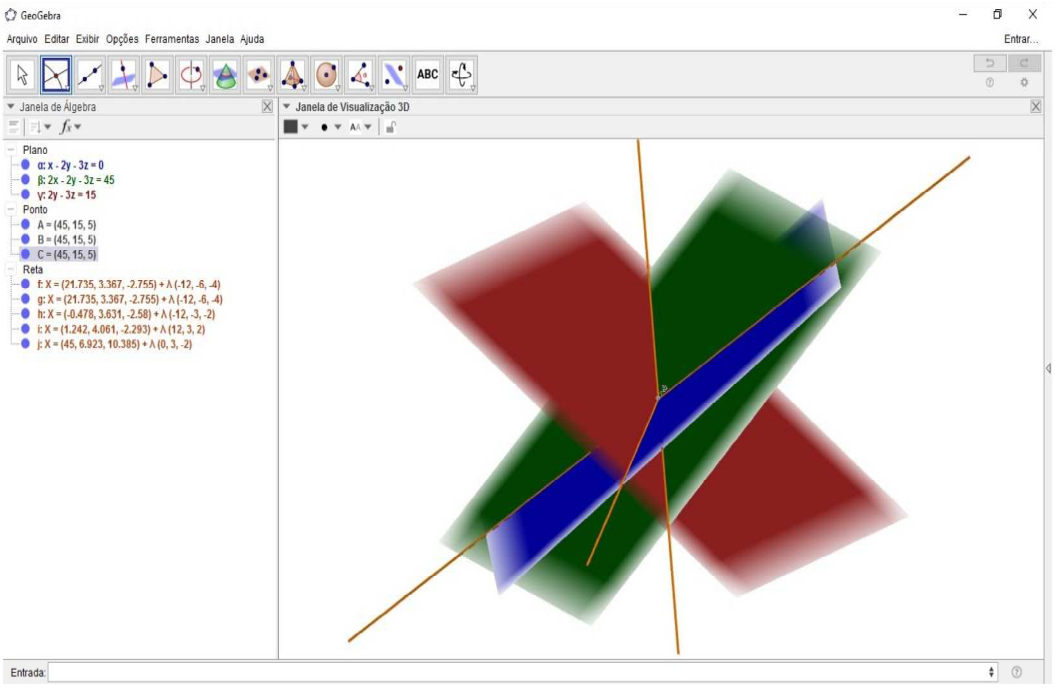

Figura 3.10: Solução gráfica

Observamos, através da representação, que os planos possuem um único ponto em comum (conforme o ponto A na Figura 3.10). Assim, podemos classificar este como possível e determinado.

Buscando agora resolver algebricamente e verificar a solução de nosso sistema, podemos de acordo com o sistema (3.15), esboçar a seguinte matriz ampliada do sistema:

$$A|B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & | & 0 \\ 2 & -2 & -3 & | & 45 \\ 0 & 2 & -3 & | & 15 \end{bmatrix}.$$

Na busca pela solução deste sistema, apliquemos agora algumas transformações elementares a matriz ampliada $A|B$, assim façamos:

- Aplicando a sucessivamente as seguintes transformações ($L_3 \to L_3 - L_2$ e $L_2 \to L_2 - 2L_1$), a matriz ampliada $A|B$, obtemos :

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 2 & 3 & | & 45 \\ 0 & 0 & -6 & | & -30 \end{bmatrix}.$$

- Aplicando ainda as seguintes transformações ($L_2 \to \frac{1}{2}L_2$) e ($L_3 \to \frac{-1}{6}L_3$), encontramos:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & | & \frac{45}{2} \\ 0 & 0 & 1 & | & 5 \end{bmatrix}.$$

- Por fim, aplicando as seguintes transformações ($L_1 \to L_1 + 2L_2$) e ($L_2 \to L_2 - \frac{3}{2}L_3$), encontramos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 45 \\ 0 & 1 & 0 & | & 15 \\ 0 & 0 & 1 & | & 5 \end{bmatrix}.$$

Deste modo, após aplicar as transformações, chegamos a matriz escalonada de $A|B$, e pelo que foi estudado sobre os sistemas lineares de ordem 3×3, e observando especificamente o 3º caso, constatamos que, de fato, o sistema (3.15) é possível e determinado. Logo, de acordo com as linhas da matriz escalonada de $A|B$, podemos seguir em busca da solução do sistema, assim escrevamos o seguinte sistema associado a matriz escalonada de $A|B$:

$$\begin{cases} x = 45 \\ y = 15 \\ z = 5 \end{cases}$$

- Pela terceira equação do sistema escalonado, temos:

$$z = 5.$$

- Pela segunda equação do sistema anterior, encontramos:

$$y = 15.$$

- Por fim, pela primeira equação do sistema escalonado, obtemos:

$$x = 45.$$

Portanto, temos que a solução do sistema será:

$$S = \{(45, 15, 5)\}.$$

Deste modo, as idades são: João tem 45 anos, a idade de cada gêmeo é 15 anos e a idade de cada trigêmeo é 5 anos.

Considerações Finais

Nos últimos anos a Matemática vem sendo trabalhada de forma mais contextualizada, de modo a possibilitar ao indivíduo ir construindo seu próprio raciocínio, traçando suas próprias ideias e caminhos. A presença da Matemática tem sido cada vez mais constante na vida do ser humano, devido ao fato da mesma estar presente em várias áreas do conhecimento humano.

O ensino dos sistemas lineares surge já no ensino fundamental como algo desafiador para os alunos. Quando o educando é abordado acerca de solucionar problemas que envolvam variáveis, isto por si só, já começa a estimular o mesmo a construir e seguir seu próprio raciocínio na busca da solução desejada.

Com os avanços e mudanças em diretrizes e nos conteúdos principalmente no ensino médio, devemos acompanhar as exigências dentro de nossas possibilidades, de forma a facilitarmos o processo de aprendizagem por parte de nossos alunos, contribuindo de maneira significativa para que o mesmo busque alcançar seus objetivos.

Assim, com este nosso trabalho, tendo em vista a presença deste conteúdo em diversas áreas, e respeitando todo o rigor matemático que é devido e aplicado aos sistemas lineares, buscamos de uma forma simples, através da interpretação geométrica com o auxílio do GeoGebra, do escalonamento e do teorema do posto, possibilitar ao aluno, caminhos para que o mesmo compreenda o que está fazendo e não torne o processo de resolução dos sistemas enfadonho ou até certo ponto mecânico.

Deste modo, esperamos poder contribuir com os estudos e pesquisas de professores, alunos e leitores de um modo em geral, que venham a desfrutar deste trabalho.

Referências

[1] BARBOSA, R. ; FEITOSA, S. *Banco de Questões - OBMEP*. Edição 2016. Rio de Janeiro: IMPA, 2016.

[2] BOYER, Carl B. *História da Matemática*. Revista por Uta. C. Merzbach; tradução Elza F. Gomide. 2ª Edição. São Paulo: Edgard Blucher: 1996.

[3] BRASIL. *Lei Nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Leis de Diretrizes e Bases da educação Brasileira (LDB)*. Brasília, 1996.

[4] BRASIL. *Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: Matemática*. Brasília, DF: MEC/SEF, 1997.

[5] BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias*. Brasília: Ministério da Educação (MEC), 2006.

[6] CARVALHO, R. A. *O cachorro-quente e três soluções*. Revista do Professor de Matemática (RPM), Rio de Janeiro: Gráfica e Editora Cruzado LTDA, nº 81, p. 10-11, 1º semestre,2013.

[7] DANTE, Luiz Roberto. *Matemática: contexto e aplicações*. Vol. 2. 1ª Edição. São Paulo: Ática, 2010.

[8] FERREIRA, A.E.G. *A Importância dos Sistemas Lineares no Ensino Médio e a Contribuição Para a Matemática e Suas Aplicações*. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Ponta Grossa, Paraná, 2013.

[9] HEFEZ, A.; FERNANDEZ, C.S. *Introdução a álgebra linear*. 1ª Edição. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[10] IEZZI, G. et al. *Matemática: ciência e aplicações*. Vol. 2. 7ª Edição. São Paulo: Saraiva, 2013.

[11] LIMA, Elon Lajes. *Geometria analítica e álgebra linear.* 2ª Edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2011.

[12] LIMA, Elon Lajes. *Matemática e ensino.* 3ª Edição. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

[13] LIMA, E.L. et al. *Matemática do Ensino Médio.* vol. 3. 6ª Edição. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[14] LIMA, E.L. et al. *Temas e Problemas Elementares.* 3ª Edição. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[15] OLIVEIRA, K. I. M.; CORCHO, A. J. F. *Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções.* 2ª Edição. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

[16] PAIVA, Manoel. *Matemática Paiva.* Vol. 2. 2ª Edição. São Paulo: Moderna, 2013.

[17] PEDRINI, L.C. *O ESTUDO DOS SISTEMAS LINEARES NO ENSINO FUNDAMENTAL E MÉDIO.* Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Mato grosso do sul, Mato Grosso do Sul, 2013.

[18] RANGEL, W.S.A. *Projeto de Modelagem Matemática e sistemas Lineares: Contribuições para a formação de Professores de Matemática.* Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Ouro Preto, Minas Gerais, 2011.

[19] SILVA, Antônio de Andrade e. *Introdução á álgebra linear.* 1ª Edição. João Pessoa: Ed. Universitária /$UFPB$, 2007.

[20] SOFTWARE GEOGEBRA: https://www.geogebra.org/download

Apêndice A

Demonstração do Teorema do Posto

Neste apêndice, apresentaremos a demonstração do Teorema do Posto, com base na referência [9].

Seja $AX = B$ um sistema linear com m equações e n incógnitas. Seja $C = [A|B]$ a matriz ampliada do sistema e seja $\tilde{C}$=$[\tilde{A}|\tilde{B}]$ a forma escalonada de C. Denotaremos $\tilde{A}$=$[\tilde{a}_{ij}]$ e $\tilde{B}$=$[\tilde{b}_i]$. Claramente, $\tilde{A}$ é a forma escalonada de A e como $\tilde{A}$ é um bloco de $\tilde{C}$, temos que:

$$p_A = p_{\tilde{A}} < p_{\tilde{C}} = p_{AB} \text{ ou } p_A = p_{\tilde{A}} = p_{\tilde{C}} = p_{AB}.$$

Considerando os dois casos separadamente, temos:

Caso 1: Se $p_A < p_{AB}$, então $\tilde{C}$ tem uma linha do tipo $(0, 0, ..., 1)$. Portanto, o sistema $\tilde{A}X$=$\tilde{B}$ é impossível, e assim, $AX = B$ é impossível.

Caso 2: Se $p_A = p_{AB}$, então $\tilde{C}$ e $\tilde{A}$ tem o mesmo número de linhas não nulas. Dividindo este caso em 2 subcasos, temos:

Subcaso 2.1: Sendo $\tilde{A}$ uma matriz com n colunas, com $p_{\tilde{A}} = p_A = n$, e estando $\tilde{A}$ na forma escalonada, ela é uma matriz em blocos da forma:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} \tag{A.1}$$

Como $p_A = p_{AB} = n$, segue que $\tilde{B}$ é tal que $b_{n+1} = ... = b_m = 0$. Portanto, $\tilde{A}X = \tilde{B}$ é possível e determinado, com a única solução $x_1 = \tilde{b_1}, ..., x_n = \tilde{b_n}$. Consequentemente, $AX = B$ também é determinado com a mesma solução.

Subcaso 2.2: Seja p_A= $p_{AB} < n$. Ponhamos $p = p_{AB} < n$. Neste caso, $\tilde{A}$ (assim como $\tilde{C}$) tem p linhas não nulas $L_1, ... , L_p$, tais que o primeiro elemento não nulo de L_i está na coluna k_i e $k_1 < ... < k_p$. Além disso, temos $\tilde{b}_{p+1} = ... = \tilde{b}_m = 0$. Temos então que a equação $\tilde{A}X$= $\tilde{B}$ se escreve como:

$$\begin{bmatrix} x_{k1} + & \tilde{a}_{1k_1+1}x_{k_1+1} + & ... & +\tilde{a}_{1n}x_n \\ x_{k2} + & \tilde{a}_{2k_2+1}x_{k_2+1} + & ... & +\tilde{a}_{2n}x_n \\ & . & & \\ & . & & \\ & . & & \\ x_{kp} + & \tilde{a}_{p_{k_p}+1}x_{k_p+1} + & ... & +\tilde{a}_{pn}x_n \\ & 0 & & \\ & . & & \\ & . & & \\ & . & & \\ & 0 & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \vdots \\ \tilde{b}_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{A.2}$$

A igualdade matricial anterior, juntamente com o fato da matriz $\tilde{A}$ estar na forma escalonada, nos fornece o sistema de equações:

x_{k1}= -$\Sigma_{j>k_1}$ $\tilde{a}_{1j}x_j + \tilde{b}_1$, onde $\tilde{a}_{1ki} = 0$, se $i > 1$,

x_{k2}= -$\Sigma_{j>k_2}$ $\tilde{a}_{2j}x_j + \tilde{b}_2$, onde $\tilde{a}_{2k_i} = 0$, se $i > 2$,

...

$x_{k_{p-1}}$= -$\Sigma_{j>k_{p-1}}$ $\tilde{a}_{p-1,j}x_j + \tilde{b}_{p-1}$, onde $\tilde{a}_{p-1,k_i} = 0$, se $i = k_p$,

x_{k_p}= -$\Sigma_{j>k_p}$ $\tilde{a}_{pj}x_j + \tilde{b}_p$.

Isto mostra que podemos escolher arbitrariamente valores para as incógnitas no conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$ com exceção dos elementos $\{x_{k1}, \ldots, x_{kp}\}$ e com esses determinar os valores para $x_{k_1}, \ldots, x_{k_p}$.

Como o conjunto anterior tem $n - p$ elementos livres, o sistema $\tilde{A}X = \tilde{B}$ tem $n - p$ incógnitas livres e, consequentemente, o mesmo ocorre para $AX = B$.