



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UEPB



O número π : seus encantamentos e aplicações ao longo do tempo

José Alexandre Ramos Vieira

Trabalho de Conclusão de Curso

Orientador: Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo

Campina Grande - PB
Março/2017



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UEPB



O número π : seus encantamentos e aplicações ao longo do tempo

por

José Alexandre Ramos Vieira

Trabalho Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UEPB, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano da dissertação.

V658n Vieira, José Alexandre Ramos.

O número PI [manuscrito] : seus encantamentos e aplicações ao longo do tempo / José Alexandre Ramos Vieira. - 2017.
53 p. : il. color.

Digitado.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2017.

"Orientação: Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo, Departamento de Matemática".

1. Número PI. 2. Quadratura do círculo. 3. Métodos matemáticos. I. Título.

21. ed. CDD 512

O número π : seus encantamentos e aplicações ao longo do tempo

por

José Alexandre Ramos Vieira

Trabalho de Conclusão de curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UEPB, modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

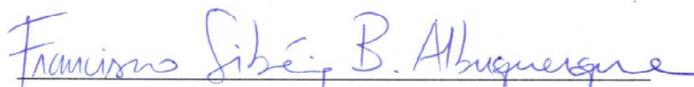
Aprovado por:



Prof. Dr. Daniel Cordeiro de Moraes Filho

Dpto. Matemática - CCT/UFCG

EXAMINADOR



Prof. Dr. Francisco Sibério Bezerra Albuquerque

Dpto. Matemática - CCT/UEPB

EXAMINADOR



Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo

Dpto. Matemática - CCT/UEPB

ORIENTADOR

Universidade Estadual da Paraíba
Centro de Ciências e Tecnologia
Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Março/2017

Dedicatória

Ao meu filho João Pedro.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, a Deus pela força nos momentos difíceis durante os anos de curso.

Ao Professor Aldo Trajano Lourêdo pela orientação.

A minha Família, em especial a minha esposa Catiana, por todo apoio durante esse período de estudos.

Aos professores do PROFMAT pela dedicação durante as aulas e pela atenção dispensada no decorrer do curso.

Aos colegas do PROFMAT da turma 2015, em especial aos amigos Cleyson, Erivan, Mailson e Wesklemir por terem caminhado junto comigo nessa luta.

Por fim, agradeço à Universidade Estadual da Paraíba e à Sociedade Brasileira de Matemática - SBM pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional.

Resumo

O presente trabalho mostra um breve histórico a respeito do número π . Vamos ver algumas ideias desenvolvidas a partir da busca de compreender e calcular este importante número que tem fascinado os matemáticos desde a antiguidade. Começaremos abordando a irracionalidade de π e, em seguida, recordaremos o clássico problema grego da *Quadratura do Círculo* e como este problema contribuiu para o cálculo dessa constante da maneira mais exata possível. Comentaremos, também, sobre as tentativas históricas de calculá-lo, dando ênfase aos métodos desenvolvidos por Arquímedes, Nicholas de Cusa, Leibniz, Machin e Wallis, através dos quais podemos calcular o número π com muita rapidez e exatidão. Finalmente, faremos uma análise comparativa dos métodos vistos, exibindo alguns gráficos e tabelas de aproximações calculadas com o apoio do Software Educacional Geogebra.

Palavras Chaves: Número π , Irracionalidade, Aproximação, Círculo.

Abstract

The present work shows a brief history regarding the number π . Let's look at some ideas developed from the quest to understand and calculate this important number that has fascinated mathematicians since antiquity. We begin by approaching the irrationality of π , and then recall the classic Greek problem of *Circle Quadrature* and how this problem was needed to calculate this constant as accurately as possible. We will also comment on the historical attempts to calculate it, with emphasis on the methods developed by Archimedes, Nicholas of Cusa, Leibniz, Machin and Wallis, through which we can calculate the number π very quickly and accurately. Finally, we will do a comparative analysis of the methods seen, displaying some charts and approximation tables calculated with the support of the Geogebra Educational Software.

Keywords: Number π , Irrationality, Approach, Circle.

De que me irei ocupar no céu, durante toda a Eternidade, se não me derem uma infinidade de problemas de Matemática para resolver?
(Augustin Louis Cauchy)

Sumário

1	História do número π	4
1.1	Quadratura do círculo	5
1.2	Tentativas para se Calcular π	8
1.3	O Número π nos dias atuais	9
2	Métodos Matemáticos Aplicados no Cálculo de π	12
2.1	A Irrracionalidade do Número π	12
2.2	Método da Exaustão de Arquimedes	18
2.3	O Método de Cusanus	20
2.4	A Fórmula de Leibniz	24
2.5	Fórmula de Machin	26
2.6	O Produto de Wallis	27
2.7	Curiosidades	30
3	Análise dos Métodos	32
3.1	Análise do Método de Arquimedes	32
3.2	Análise do Método de Cusanus	35
3.3	Análise do Método de Leibniz	37
3.4	Análise do Método de Machin	39
3.5	Análise do Método de Wallis	41
4	Considerações finais	43

Introdução

O número π é a constante numérica mais estudada ao longo da história, tendo transcendido as fronteiras matemáticas e suscitado interesse em diversas áreas do conhecimento. Mas, o que é o número π ? Ele é racional? Pode ser construído geometricamente?

Possivelmente nunca saberemos ao certo a origem do número π . Segundo [1], existem relatos históricos de que os Babilônios e Egípcios, por volta do ano 2000 a.C., usavam $3\frac{1}{8} \approx 3,125$ e $(\frac{16}{9})^2 \approx 3,1605$, respectivamente como valores de π . Como é que esses povos antigos chegaram a esses valores? Ninguém sabe ao certo, mas é notável tal aproximação, visto que eles só utilizavam estacas, cordas e areia. Outros povos também se aventuraram no cálculo de π , a exemplo dos chineses e hindus, porém é na Grécia (300 a.C.) que surge uma das mais belas formas de se aproximar o valor dessa constante, o chamado método da exaustão (veremos com mais detalhes no Capítulo 2). Na tentativa incessante de resolver o famoso problema da *Quadratura do Círculo*, proposto pelos gregos, muitas gerações de matemáticos contribuíram nos avanços do cálculo de π . Porém é só com a advento do Cálculo Diferencial, por volta de meados do século XVI, que surgem os avanços mais notáveis nos estudos dessa constante.

Outro fato bastante relevante nos estudos acerca do número π , diz respeito a sua importância histórica para o desenvolvimento da matemática e da ciência em geral, tendo em vista que vários fenômenos e objetos, do mundo real e da matemática, estão associados às ideias de simetria circular e esférica, como por exemplo no cálculo de áreas e volumes de objetos circulares, trajetórias de corpos celestes no espaço, estudo de campos eletromagnéticos, dentre outros.

O número π também tem um apelo educacional muito forte, principalmente na geometria plana e espacial, pois este está diretamente relacionado ao cálculo de áreas de figuras planas circulares, bem como ao volume de sólidos circulares ou esféricos, podendo ser calculado de forma empírica através de experimentos matemáticos realizados em sala de aula, como por exemplo, medir o comprimento da circunferência e o diâmetro de objetos circulares tais como copos, bacias, moedas, dentre outros, mostrando aos alunos a relação que existe entre o comprimento do círculo, seu diâmetro e

a constante π .

Após esta Introdução, a estrutura do trabalho foi organizada como segue: no Capítulo 1, definiremos o número π e faremos um apanhado histórico a seu respeito, começando pelo famoso problema grego da *Quadratura do círculo* até os dias atuais. Já no Capítulo 2, mostraremos que π é um número irracional e detalharemos algumas técnicas desenvolvidas ao longo do tempo para o cálculo deste número, concluindo, no Capítulo 3, com a análise dos métodos vistos para o cálculo de π , utilizando para isso o software educacional *GeoGebra*, que é um software de matemática dinâmica que junta geometria, álgebra e cálculo, cujas construções consistem em objetos matemáticos de vários tipos que podem ser criados usando ferramentas ou comandos.

Capítulo 1

História do número π

Nesta seção, apresentaremos os fatos históricos relacionados ao número π e a busca dos matemáticos em calculá-lo, fazendo um passeio desde a Grécia Antiga até os tempos atuais, seguindo as referências [1], [3], [4], [5], [8], [11] e [12].

Sabemos hoje que π é um número irracional, definido como sendo a razão entre o comprimento C de um círculo de raio R pelo seu diâmetro, isto é,

$$\pi = \frac{C}{2R} \approx 3,14159265358979323846264338327950288419716939937510\dots$$

De acordo com [5], a primeira tentativa conhecida de se expressar a área de um círculo em termos da área de um quadrado foi por volta de 40 séculos atrás e encontra-se documentado no Papiro de Rhind, um documento egípcio descoberto em 1855; neste documento, o valor de π é calculado aproximando-se a área do círculo por um octógono inscrito em um quadrado de lado medindo 9 unidades de comprimento. Para isto, cada lado do quadrado é dividido em três partes iguais e os triângulos das extremidades são retirados, formando um octógono regular de lado medindo 3 unidades de comprimento, como pode ser vista na Figura 1.1. Portanto, a área do

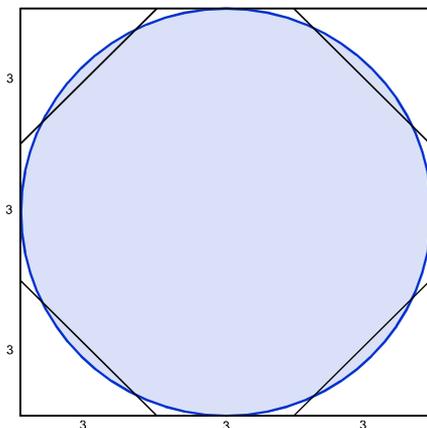


Figura 1.1: Aproximação da área do círculo

octógono é $A = 9^2 - 4 \times (1/2) \times 3^2 = 63$. Essa área é, em seguida, arredondada para 64. A partir desse cálculo, podemos determinar uma aproximação do valor de π :

$$\pi \left(\frac{9}{2}\right)^2 \approx 64 = 8^2 \Rightarrow \pi \approx \frac{256}{81} = \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3,1605.$$

Porém, foram os gregos quem mais se destacaram na busca do valor de π . Dessa forma, daremos uma maior ênfase, nesse capítulo, ao famoso problema grego da *Quadratura do Círculo*, um dos problemas mais fascinantes da história, responsável, de certa forma, pelo desenvolvimento de vasta teoria matemática ao longo de séculos e por grande parte dos avanços nas aproximações do valor de π .

1.1 Quadratura do círculo

“Não se pode fazer um círculo quadrado.”

Essa expressão, segundo [11], data dos tempos da Grécia Antiga, quando “fazer um círculo quadrado” referia-se a um problema de simples enunciado, mas que talvez fosse impossível de se resolver utilizando a matemática disponível naquela época. O problema consistia no seguinte:

Dado um círculo, seria possível construir um quadrado com área igual à desse círculo?

O problema é apresentado de modo clássico como um “problema de geometria plana”, que deveria ser resolvido apenas com régua e compasso. De acordo com [15], os gregos sabiam como construir um quadrado cuja área fosse igual a de um paralelogramo qualquer dado. Por exemplo, se quisermos construir um quadrado com área igual a de um paralelogramo cuja base e a altura tem medidas conhecidas b e h , respectivamente, necessitamos construir um quadrado com lado de medida x que verifique a equação $x^2 = bh$.

Nosso objetivo, então, é construir a medida x do lado do quadrado. Para isso, primeiramente, devemos traçar um semicírculo com diâmetro $\overline{AC} = b + h$ e tomar um ponto $B \in \overline{AC}$ tal que $\overline{AB} = b$. Agora, pelo ponto B traçamos uma reta perpendicular ao diâmetro \overline{AC} até tocar o semicírculo no ponto D . Teremos então encontrado a medida x do lado do quadrado, veja Figura 1.2.

Com efeito, note que o $\triangle ADC$ é retângulo em D , pois este está inscrito em um semicírculo. Daí, tomando $\overline{AD} = a$ e $\overline{CD} = c$ e aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$(b + h)^2 = a^2 + c^2. \tag{1.1}$$

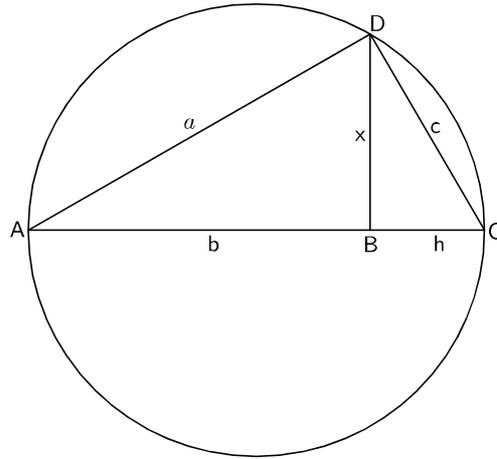


Figura 1.2: $x^2 = bh$

Observe também que os triângulos ABD e CBD são retângulos em B (por construção). Aplicando o teorema de Pitágoras, nesses triângulos, segue que:

$$a^2 = b^2 + x^2 \text{ e } c^2 = h^2 + x^2. \quad (1.2)$$

Resolvendo o sistema formado pelas equações (1.1) e (1.2) obtemos $x^2 = bh$, ou seja, a medida x encontrada corresponde, de fato, ao comprimento do lado do quadrado procurado.

Os gregos sabiam, inclusive, resolver um problema mais complicado, que era construir um quadrado cuja área fosse igual a área de um quadrilátero qualquer. Com efeito, seja $ABCD$ um quadrilátero qualquer, conforme Figura 1.3. Começamos desenhando a diagonal \overline{DB} e prolongando o segmento \overline{AB} , no sentido de A para B . Em seguida, pelo ponto C traçamos um segmento paralelo a diagonal \overline{DB} , que cortará o prolongamento de \overline{AB} no ponto F . Finalmente, traçamos o segmento \overline{DF} . Desta maneira obteremos o triângulo AFD , cuja área é igual a do quadrilátero $ABCD$. Para provarmos isto, basta mostrar que a área do triângulo $\triangle BDC$ é igual a área do triângulo $\triangle BDF$ e como esses triângulos tem um lado em comum, é necessário mostrar apenas que a altura, em relação ao lado \overline{BD} é a mesma para ambos. De fato, prolongando o segmento \overline{FC} até um ponto G tal que $C \in \overline{FG}$, de tal sorte que $\overline{FG} = \overline{DB}$ e, além disso, sejam paralelos, obteremos um paralelogramo $DBFG$ (pois, $\overline{DG} \parallel \overline{BF}$ e $\overline{BD} \parallel \overline{FG}$, por construção). Daí, os triângulos $\triangle BDC$ e $\triangle BDF$ possuem a mesma altura, visto que $\overline{CF} \parallel \overline{BD}$. Portanto, a área do triângulo AFD é igual a do quadrilátero $ABCD$.

Agora, o problema se reduz a construir um quadrado cuja área será igual a de um triângulo com dimensões conhecidas. Assim, basta utilizar a equação $x^2 = \frac{1}{2}bh$ e a construção que havíamos feito no caso do paralelogramo.

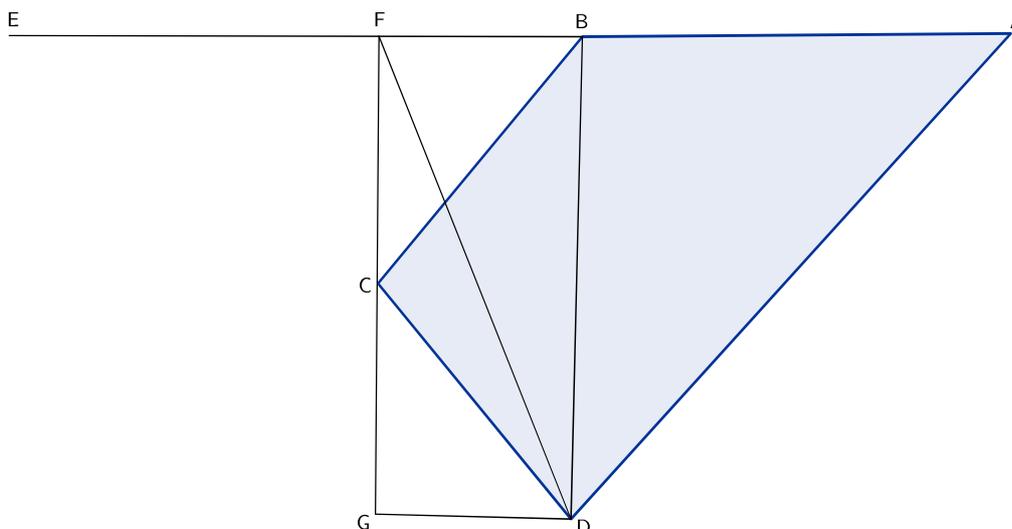


Figura 1.3: Área de $ABCD$ igual a área de AFD

Para os gregos, o passo seguinte era evidente. Dado que era possível construir um quadrado cuja área é igual a de um polígono, deveria ser possível resolver o mesmo problema para um círculo. Se pensarmos em um círculo de raio 1, sua área é exatamente π unidades de área. A equação que deve ser tomada agora é $x^2 = \pi$. Utilizamos então a construção da Figura 1.4

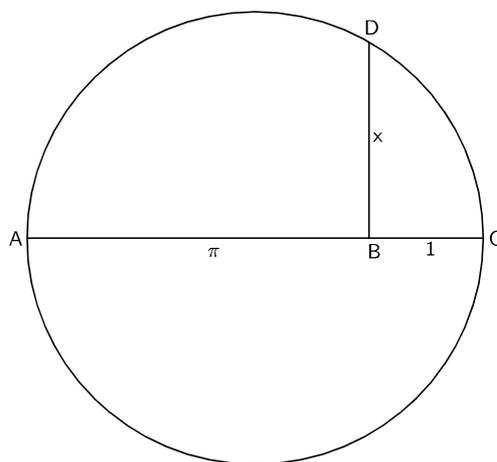


Figura 1.4: $x^2 = \pi$

Tudo é feito de modo análogo aos casos anteriores, salvo por um detalhe: como calcular o comprimento π ? A resposta para essa pergunta será tratada no próximo capítulo.

1.2 Tentativas para se Calcular π

De acordo com [12], a história do número π pode ser dividida em três períodos claramente estabelecidos, os quais se diferenciam entre si por aspectos relacionados com o método, propósitos imediatos e as ferramentas científicas e intelectuais disponíveis. O primeiro período corresponde ao tempo transcorrido entre os primeiros registros de determinações empíricas da relação existente entre o perímetro de uma circunferência e seu diâmetro até a invenção do Cálculo Diferencial e Integral em meados do século XVII. Neste período podemos ver algumas aproximações de π feitas pelos Babilônios e Egípcios, mas principalmente pelos Gregos.

Nos séculos finais, desse primeiro período, viu-se uma grande quantidade de tentativas de solucionar o célebre problema da quadratura do círculo (tratado anteriormente), que é equivalente ao famoso problema conhecido como *a retificação do círculo*, o qual consiste em construir um segmento de reta de comprimento igual ao perímetro de uma circunferência. Em ambos os casos podemos ver implícito o valor numérico de π . As aproximações de π , nesse período, foram essencialmente geométricas, e consistiam em calcular a área e o perímetro de um círculo e, de maneira implícita, π , pelo cálculo das áreas dos polígonos regulares inscritos e circunscritos neste círculo, o chamado *método grego da exaustão*.

Entretanto, para um progresso adicional nesses estudos, era necessária a existência de ferramentas mais poderosas. A partir de meados do século XVII, com a invenção do Cálculo Diferencial e Integral, os matemáticos tinham em mãos uma poderosa ferramenta para se calcular π com mais precisão. Esse segundo período, que tem início por volta da metade do século XVII e se estende até meados do século XVIII, caracteriza-se pela aplicação de métodos analíticos para determinação de expressões para o cálculo de π , que geralmente incluíam funções trigonométricas na forma de séries convergentes.

Já no terceiro período, que vai desde meados do século XVIII até o final do século XIX, os matemáticos conseguem provar que π é um número irracional¹ e, além disso, transcendente², o que levou a conclusões definitivas sobre o problema da quadratura do círculo. Mais precisamente, em 1882, o matemático alemão Ferdinand von Lindemann (1852-1939) provou que π é transcendente, provando que o problema da *Quadratura do*

¹Em 1761, o matemático suíço Johann Heinrich Lambert (1728-1777) provou que π é irracional, o que significa que ele nunca pode ser representado por uma fração do tipo $\frac{p}{q}$ com $p, q \in \mathbb{Z}$ e $q \neq 0$

²Um *número algébrico* é qualquer número x , real ou complexo, que satisfaz alguma equação algébrica da forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (n \geq 1, a_n \neq 0)$$

onde os coeficientes a_k são inteiros. Caso contrário, diz-se que x é *transcendente*.

Círculo não era possível de ser solucionado.

1.3 O Número π nos dias atuais

Nesta seção apresentaremos a cronologia sobre o desenvolvimento de π , partindo de 2000 a.C. até os dias atuais, tomando por base a teoria contida em [1], [4] e [14].

Quem calculou	Quando calculou	Valor encontrado para π
Babilônios	2000 a.C.	$3\frac{1}{8} \approx 3,125$
Egípcios	2000 a.C.	$(\frac{16}{9})^2 \approx 3,1605$
Chineses	1200 a.C.	3
Bíblia (I Reis, 7: 23)	550 a.C.	3
Arquimedes (287-212a.C.)	250 a.C.	$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7} \approx 3,1418$
Ptolomeu (90-168)	150	$\frac{377}{120} \approx 3,14166$
Tsu Ching Chi (429-500)	480	$\frac{355}{113} \approx 3,1415926$
Aryabhata (476-550)	490	$\frac{62832}{20000} = 3,1416$
Bramahgupta (598-668)	640	$\sqrt{10} \approx 3,162277$
Al-Kowarizmi (780-850)	800	3,1416
Fibonacci (1175-1250)	1220	3,141818
Al-Kashi (1380-1430)	1430	Calculou π com 14 casas decimais corretas
Nicholas de Cusa (1401-1464)	1450	Desenvolveu um método de aproximação para π semelhante ao método de Arquimedes
François Viète (1540-1603)	1593	Primeiro matemático a calcular π como um produto infinito
Adriaen Van Roomen (1561-1615)	1593	Calculou π com 15 casas decimais corretas
Ludolph Van Ceulen (1540-1610)	1596/1610	Calculou π com 32 e depois com 35 casas decimais corretas
Jonh Wallis (1616-1703)	1655	Calculou π como um produto infinito números racionais

Isaac Newton (1642-1727)	1665	Encontrou 16 casas decimais corretas de π
Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)	1674	Calculou π através da série do $\arctg(x)$ quando $x = 1$
Jonh Machin (1680-1751)	1706	Aprimorou a Fórmula de Leibniz e calculou π com 100 casas decimais
William Jones (1675-1749)	1706	Jones foi o primeiro a usar o símbolo π para a razão entre a circunferência e o diâmetro
Leonard Euler (1707-1783)	1748	Usou a letra grega π em seu livro <i>Introductio in Analysin Infinitorum</i> assegurando sua popularidade, desenvolvendo também algumas fórmulas para o cálculo de π e π^2
Johann Heinrich Lambert (1728-1777)	1766	Provou a irracionalidade de π
Adrien-Marie Legendre (1752-1833)	1794	Provou a irracionalidade de π e π^2
Strassnitzky (1803-1852) e Dase (1824-1861)	1844	Calculam π com 200 casas decimais
Ferdinand von Lindemann (1852-1939)	1882	Provou a transcendência do número π
Ferguson	1945/46/47	Calculou π , respectivamente, com 527/620 e 808 casas decimais
Reitwiesner e outros (ENIAC)	1949	Encontraram 2.037 casas decimais
Nicholson e Jeanel (IBM NORC)	1954/55	Conseguiram calcular 3.092 dígitos corretos de π
George Felton (Pegasus)	1957	Calculou π com 7480 casas decimais
François Genuys (IBM 704)	1959	Encontraram 16.167 casas decimais corretas de π
Shanks e Wrench (IBM 7090)	1961	100.265 casas decimais

Guilloud e Filiatre (IBM 7030)	1966	250.000 casas decimais
Guilloud e Dichampt (CDC 660)	1967	500.000 casas decimais
Guilloud e Bouyer (CDC 7600)	1973	1.000.000 de casas decimais
Ushiro e Kanada (Hi- tachi S-810/20)	1983	10.000.000 de casas decimais
Gregory e David Chudnovsky (IBM 3090)	1989	1 bilhão de casas decimais
Yasumasa Kanada e outros (Hitachi SR 8000)	2002	1 trilhão de casas decimais
Daisuke Takahashi	2009	2,5 trilhões de casas decimais
Shigeru Kondo	2010	5 trilhões de casas decimais
Peter Trueb	2016	22 trilhões de casas decimais

Tabela 1.1: Cronologia do número π

Capítulo 2

Métodos Matemáticos Aplicados no Cálculo de π

Neste capítulo, veremos uma prova da irracionalidade do número π e, em seguida, apresentaremos algumas formas de calculá-lo com a precisão desejada. Começaremos pelo método desenvolvido na Grécia, conhecido por Método da Exaustão de Arquimedes, veremos também um método similar ao grego, desenvolvido por Nicholas de Cusa, o método de Cusanus. Em seguida obteremos π usando conceitos do cálculo diferencial e integral, mais especificamente usando as séries de Leibniz e Machin e finalizando com o produto de Wallis. Para maiores detalhes consultar [1], [5] e [8] e [10].

2.1 A Irracionalidade do Número π

Nesta seção demonstraremos que π é um número irracional. Utilizaremos para isto a teoria contida em [3]. Inicialmente, enunciaremos e provaremos três Lemas que darão suporte à prova da irracionalidade de π .

Lema 2.1 *Seja $I_n = \int_{-1}^1 (1 - x^2)^n \cos(\frac{\pi x}{2}) dx$, com $n = 1, 2, 3, \dots$. Então:*

(a) $I_n > 0$,

(b) $I_n \leq 2$.

Prova:

(a) Observe que, se $x \in [-1, 1]$, a função $(1 - x^2)^n \cos(\frac{\pi x}{2})$ é não negativa qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Do Cálculo Diferencial e Integral sabemos que, se $f(x)$ é uma função integrável e se $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$ então $\int_a^b f(x) \geq 0$. Como I_n satisfaz essa propriedade, segue que $I_n \geq 0$ para todo n .

Sabemos também que, se $a < c < b$ e a função $f(x)$ é integrável em $[a, c]$ e $[c, b]$ então $f(x)$ é integrável em $[a, b]$ e $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$. Usando esta propriedade, temos

$$I_n = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} (1-x^2)^n \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (1-x^2)^n \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x^2)^n \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx.$$

Daí,

$$I_n \geq \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (1-x^2)^n \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx.$$

Agora, se $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, então podemos mostrar que

$$(1-x^2)^n \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \geq \left(\frac{3}{4}\right)^n \cos\left(\frac{1}{4}\pi\right).$$

De fato, como $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, temos que

$$x^2 \leq \frac{1}{4} \Rightarrow -x^2 \geq -\frac{1}{4} \Rightarrow 1-x^2 \geq 1-\frac{1}{4} \Rightarrow 1-x^2 \geq \frac{3}{4} \Rightarrow (1-x^2)^n \geq \left(\frac{3}{4}\right)^n. \quad (2.1)$$

Observe, também, que se $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, a função $\cos x$ é decrescente, daí, temos que $\frac{\sqrt{2}}{2} \geq \cos x \leq 1$. Considerando, agora, $x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$ e levando em conta o fato da função $\cos x$ ser uma função par, segue que $\frac{\sqrt{2}}{2} \geq \cos x \leq 1$. Logo, se $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ então

$$\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \geq \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (2.2)$$

Multiplicando as desigualdades 2.1 e 2.2 segue o resultado.

Assim,

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{-1}^1 (1-x^2)^n \cos\left(\frac{1}{2}\pi x\right) dx \geq \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\frac{3}{4}\right)^n \cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) dx \\ &= \left[\left(\frac{3}{4}\right)^n \cos\left(\frac{1}{4}\pi\right) x \right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} - \left(\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) \right) \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^n \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0. \end{aligned}$$

(b) Para $x \in [-1, 1]$ então

$$(1-x^2)^n \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \leq 1 \times 1 = 1.$$

Daí

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^n \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx \leq \int_{-1}^1 1 dx = x \Big|_{-1}^1 = 1 - (-1) = 2.$$

Portanto, $I_n \leq 2$.

O próximo passo é obter uma fórmula de recorrência para I_n , usando a técnica de integração por partes.

Lema 2.2 A integral I_n satisfaz a seguinte fórmula de recorrência:

$$\pi^2 I_n = 8n(2n - 1)I_{n-1} - 16n(n - 1)I_{n-2}.$$

Prova:

Seja

$$I_n = \int_{-1}^1 (1 - x^2)^n \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx$$

Vamos integrar por partes a expressão acima. Para isso considere

$$\begin{aligned} dv &= \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx \Rightarrow v = \frac{2}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) \\ u &= (1 - x^2)^n \Rightarrow du = n(1 - x^2)^{n-1}(-2x)dx, \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} I_n &= [uv]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 v du = \left[(1 - x^2)^n \frac{2}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) \right]_{-1}^1 \\ &\quad - \int_{-1}^1 \frac{2}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) (-2x)n(1 - x^2)^{n-1} dx. \end{aligned}$$

Como

$$\left[(1 - x^2)^n \frac{2}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) \right]_{-1}^1 = 0$$

Temos

$$\begin{aligned} I_n &= - \int_{-1}^1 \frac{2}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) (-2x)n(1 - x^2)^{n-1} dx = - \int_{-1}^1 \frac{-4n}{\pi} x(1 - x^2)^{n-1} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx \\ &= \frac{4n}{\pi} \int_{-1}^1 x(1 - x^2)^{n-1} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx. \end{aligned}$$

Vamos utilizar, novamente, a integração por partes na última expressão. Seja

$$\begin{aligned} dv &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx \Rightarrow v = -\frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \\ u &= x(1 - x^2)^{n-1} \Rightarrow du = (1 - x^2)^{n-1} - 2x^2(n - 1)(1 - x^2)^{n-2} dx. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{4n}{\pi} \left[[uv] - \int_{-1}^1 v du \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{4n}{\pi} \left\{ \left[-x(1 - x^2)^{n-1} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \frac{2}{\pi} \right]_{-1}^1 \right. \\ &\quad \left. - \int_{-1}^1 -\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \frac{2}{\pi} \left((1 - x^2)^{n-1} - 2x^2(n - 1)(1 - x^2)^{n-2} \right) dx \right\} \end{aligned}$$

Como

$$\frac{4n}{\pi} \left[-x(1-x^2)^{n-1} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \frac{2}{\pi} \right] \Big|_{-1}^1 = 0,$$

segue que

$$\begin{aligned} I_n &= -\frac{4n}{\pi} \int_{-1}^1 -\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \frac{2}{\pi} \left((1-x^2)^{n-1} - 2x^2(n-1)(1-x^2)^{n-2} \right) dx \\ &= \frac{8n}{\pi^2} \left\{ \int_{-1}^1 \left[(1-x^2)^{n-1} - 2x^2(n-1)(1-x^2)^{n-2} \right] \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx \right\} \\ &= \frac{8n}{\pi^2} \int_{-1}^1 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx - \frac{16n(n-1)}{\pi^2} \int_{-1}^1 x^2(1-x^2)^{n-2} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx \\ &= \frac{8n}{\pi^2} I_{n-1} - \frac{16n(n-1)}{\pi^2} \int_{-1}^1 [1 - (1-x^2)](1-x^2)^{n-2} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx \\ &= \frac{8n}{\pi^2} I_{n-1} - \frac{16n(n-1)}{\pi^2} \int_{-1}^1 (1-x^2)^{n-2} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx \\ &\quad - \int_{-1}^1 (1-x^2)^{n-1} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx \\ &= \frac{8n}{\pi^2} I_{n-1} - \frac{16n(n-1)}{\pi^2} (I_{n-2} - I_{n-1}) \end{aligned}$$

Multiplicando a última igualdade acima por π^2 , obtemos:

$$\begin{aligned} \pi^2 I_n &= 8n I_{n-1} - 16n(n-1) I_{n-2} + 16n(n-1) I_{n-1} \\ &= 8n(1 + 2(n-1)) - 16n(n-1) I_{n-2} \\ &= 8n(2n-1) I_{n-1} - 16n(n-1) I_{n-2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\pi^2 I_n = 8n(2n-1) I_{n-1} - 16n(n-1) I_{n-2}.$$

Lema 2.3 Para $n = 0, 1, 2, \dots$, existem números inteiros $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ tais que

$$\frac{\pi^{2n+1}}{n!} I_n = a_0 + a_1 \pi + a_2 \pi^2 + \dots + a_n \pi^n = \sum_{i=0}^n a_i \pi^i.$$

Prova:

Para simplificar, tome $J_n = \frac{\pi^{2n+1}}{n!} I_n$. Calculando as integrais I_0 e I_1 , temos:

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_{-1}^1 (1-x^2)^0 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx = \int_{-1}^1 \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) \Big|_{-1}^1 = \frac{4}{\pi} \end{aligned}$$

e

$$I_1 = \int_{-1}^1 (1-x^2) \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx.$$

Para calcular I_1 , usaremos a integração por partes. Para isto, sejam

$$\begin{aligned} u &= 1 - x^2 \Rightarrow du = -2x dx \\ dv &= \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx \Rightarrow v = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) \frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

Daí,

$$I_1 = \left[(1 - x^2) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) \frac{2}{\pi} \right] \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) \frac{2}{\pi} (-2x) dx.$$

Como a primeira parcela da expressão acima é igual a zero, segue que

$$I_1 = \frac{4}{\pi} \int_{-1}^1 x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx.$$

Integrando por partes a integral acima, temos

$$I_1 = \frac{4}{\pi} \left[\frac{4}{\pi^2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) \frac{-2x}{\pi} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \right] \Big|_{-1}^1 = \frac{32}{\pi^3}.$$

Portanto,

$$J_0 = \pi I_0 = \pi \frac{4}{\pi} = 4 \quad \text{e} \quad J_1 = \pi^3 I_1 = \pi^3 \frac{32}{\pi^3} = 32.$$

Já calculamos J_0 e J_1 . Agora, o próximo passo é reescrever a fórmula de recorrência apresentada no **Lema 2.2** em termos de J_n , então, seja

$$J_n = \frac{\pi^{2n+1}}{n!} I_n.$$

Substituindo I_n da igualdade acima pela fórmula de redução do **Lema 2.2**, temos:

$$\begin{aligned} J_n &= \frac{\pi^{2n+1}}{n!} \left(\frac{8n(2n-1)}{\pi^2} I_{n-1} - \frac{16n(n-1)\pi^{2n-1}}{\pi^2} I_{n-2} \right) \\ &= \frac{8n(2n-1)\pi^{2n-1}}{n!} I_{n-1} - \frac{16n(n-1)\pi^{2n-1}}{n!} I_{n-2} \\ &= \frac{8n(2n-1)\pi^{2n-1}}{n(n-1)!} I_{n-1} - \frac{16n(n-1)\pi^{2n-1}}{n(n-1)(n-2)!} I_{n-2} \\ &= 8n(2n-1) \frac{\pi^{2n-1}}{(n-1)!} I_{n-1} - 16 \frac{\pi^{2n-1}}{(n-2)!} I_{n-2}. \end{aligned}$$

Multiplicando a última igualdade por $\pi^2 \pi^{-2}$ chegamos a:

$$\begin{aligned} J_n &= 8n(2n-1)\pi^2 \pi^{-2} \frac{\pi^{2n-1}}{(n-1)!} I_{n-1} - 16\pi^2 \pi^{-2} \frac{\pi^{2n-1}}{(n-2)!} I_{n-2} \\ &= 8n(2n-1) \frac{\pi^{2n-1}}{(n-1)!} I_{n-1} - 16\pi^2 \frac{\pi^{2n-3}}{(n-2)!} I_{n-2} \\ &= 8n(2n-1) J_{n-1} - 16\pi^2 J_{n-2}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

A partir da expressão acima e dos valores de J_0 e J_1 já calculados, podemos mostrar por indução a afirmação do **Lema 2.3**, para todo $n \geq 2$.

De fato, para $n = 0$ e $n = 1$ o **Lema 2.3** é verdadeiro, pois

- Para $n = 0$, $J_0 = 4 = 4 + 0\pi + 0\pi^2 + 0\pi^3 + \dots + 0\pi^n$;
- Para $n = 1$, $J_1 = 32 = 32 + 0\pi + 0\pi^2 + 0\pi^3 + \dots + 0\pi^n$.

Suponha, por hipótese de indução, que existam $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ inteiros tais que

$$J_n = \frac{\pi^{2n+1}}{n!} I_n = a_0 + a_1\pi + a_2\pi^2 + \dots + a_n\pi^n.$$

Queremos mostrar que

$$J_{n+1} = \frac{\pi^{2n+3}}{(n+1)!} I_{n+1} = c_0 + c_1\pi + c_2\pi^2 + \dots + c_n\pi^n + c_{n+1}\pi^{n+1}.$$

Com efeito, usando a fórmula (2.1), temos:

$$J_{n+1} = 8(n+1)(2n+1)J_n - 16\pi^2 J_{n-1} \quad (2.4)$$

Façamos $\alpha = 8(n+1)(2n+1) \in \mathbb{Z}$ e usando a hipótese de indução

$$J_n = a_0 + a_1\pi + a_2\pi^2 + \dots + a_n\pi^n \text{ e } J_{n-1} = b_0 + b_1\pi + \dots + b_{n-1}\pi^{n-1},$$

onde $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$, segue que

$$\begin{aligned} J_{n+1} &= \alpha(a_0 + a_1\pi + a_2\pi^2 + \dots + a_n\pi^n) - 16\pi^2(b_0 + b_1\pi + \dots + b_{n-1}\pi^{n-1}) \\ &= (\alpha a_0 + \alpha a_1\pi + \alpha a_2\pi^2 + \dots + \alpha a_n\pi^n) - 16(b_0\pi^2 + b_1\pi^3 + \dots + b_{n-1}\pi^{n+1}) \\ &= \alpha a_0 + \alpha a_1\pi + (\alpha a_2 - 16b_0)\pi^2 + \dots + (\alpha a_n - 16b_{n-2})\pi^n - 16b_{n-1}\pi^{n+1}. \end{aligned}$$

Como $\alpha a_0, \alpha a_1, (\alpha a_2 - 16b_0), \dots, (\alpha a_n - 16b_{n-2}), (-16b_{n-1}) \in \mathbb{Z}$, temos que existem inteiros c_0, c_1, \dots, c_{n+1} tais que

$$J_{n+1} = \frac{\pi^{2n+3}}{(n+1)!} I_{n+1} = c_0 + c_1\pi + c_2\pi^2 + \dots + c_n\pi^n + c_{n+1}\pi^{n+1}.$$

Portanto, pelo Princípio de Indução Finita, segue a validade do **Lema 2.3**.

Finalmente, usaremos o fato de que para qualquer $p \in \mathbb{Z}$ a sequência $\left(\frac{p^{2n+1}}{n!}\right)$ converge para zero, para provar que π é irracional.

Teorema 2.1 π é irracional.

Prova:

Suponha o contrário, isto é, que π é racional. Então $\pi = \frac{p}{q}$, com $p, q \in \mathbb{N}$. Do **Lema 2.3** obtemos:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^{2n+1} \frac{I_n}{n!} = \sum_{k=0}^n a_k \left(\frac{p}{q}\right)^k, \quad (2.5)$$

onde $a_k \in \mathbb{Z}$. Multiplicando (2.3) por q^{2n+1} , temos

$$q^{2n+1} \frac{p^{2n+1}}{q^{2n+1} n!} I_n = \sum_{k=0}^n a_k \frac{p^k q^{2n+1}}{q^{2n+1}}.$$

Daí,

$$\frac{p^{2n+1}}{n!} I_n = \sum_{k=0}^n a_k p^k q^{2n+1-k}.$$

Ou seja,

$$\frac{p^{2n+1}}{n!} I_n \text{ é um inteiro positivo.} \quad (2.6)$$

Sabendo que a sequência $\left(\frac{p^{2n+1}}{n!}\right)$ converge para zero e, pelo **Lema 2.1**, que $|I_n| \leq 2$, segue que

$$\frac{p^{2n+1}}{n!} I_n \longrightarrow 0, \text{ quando } n \longrightarrow \infty.^1 \quad (2.7)$$

Decorre de (2.5), que eventualmente $\left(\frac{p^{2n+1}}{n!} I_n\right) < 1$. E, como $\frac{p^{2n+1}}{n!} I_n$ é um número inteiro positivo menor que 1, segue que

$$\frac{p^{2n+1}}{n!} I_n = 0.$$

Porém, $\frac{p^{2n+1}}{n!} > 0$, logo $I_n = 0$, o que contradiz o **Lema 2.1** parte (a). Esta contradição prova que, de fato, π não é racional, ou seja, π é um número irracional.

2.2 Método da Exaustão de Arquimedes

Segundo [7], foi Arquimedes (287-212a.C.) quem primeiro propôs um método capaz de fornecer o valor de π com qualquer precisão desejada, através de um procedimento matemático, um algoritmo, ao invés de uma medição.

Considere Γ um círculo de comprimento C e raio R , conforme figura 2.1, e sejam $\mathcal{P}_1 = V_1 V_2 \dots V_n$ e $\mathcal{P}_2 = Q_1 Q_2 \dots Q_n$ dois polígonos regulares de n lados inscrito e circunscrito a Γ , respectivamente.

¹Sejam as sequências (a_n) e (b_n) . Se (a_n) converge para zero e (b_n) é limitada, então $(a_n)(b_n)$ também converge para zero.

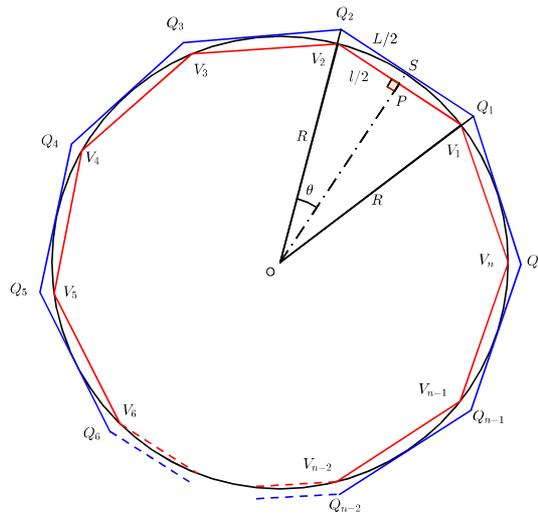


Figura 2.1: Polígonos inscrito e circunscrito no círculo Γ

Se $\theta = \frac{\pi}{n}$ é metade do ângulo $V_1\hat{O}V_2$, então pelo fato do triângulo V_1OP ser retângulo em P (pois \overline{OP} é a altura do triângulo isósceles V_1OV_2), temos que a medida l do lado do polígono \mathcal{P}_1 inscrito no círculo Γ é dado por:

$$l = 2R\text{sen}\theta.$$

De modo análogo, considerando agora o polígono \mathcal{P}_2 circunscrito à Γ , segue que a medida L do seu lado pode ser expressa como:

$$L = 2R\text{tg}\theta.$$

Logo, o comprimento C do círculo está compreendido entre o perímetro de \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 , isto é,

$$nl = 2Rn\text{sen}\theta < C = 2\pi R < nL = 2Rn\text{tg}\theta$$

ou dividindo por $2R$,

$$n\text{sen}\theta < \pi < n\text{tg}\theta.$$

Agora, dobrando k vezes o número de lados desses polígonos, vem que

$$2^k n \text{sen} \left(\frac{\theta}{2^k} \right) < \pi < 2^k n \text{tg} \left(\frac{\theta}{2^k} \right).$$

E fazendo k suficientemente grande, vemos que os perímetros de \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 se aproximam cada vez mais do comprimento C do círculo, dessa forma, aumentando-se o número de lados dos polígonos inscrito e circunscrito calcula-se com maior precisão o valor de π .

No caso de Arquimedes, ele utilizou inicialmente dois hexágonos, depois dois dodecágonos e assim por diante até chegar em polígono de 96 lados. A partir desse

polígono, embora não se tenha maiores detalhes, ele concluiu que o valor de π era superior a $3\frac{10}{71}$ e inferior a $3\frac{1}{7}$, ou seja,

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

ou, em notação decimal

$$3,140845\dots < \pi < 3,145857\dots$$

2.3 O Método de Cusanus

Um método análogo ao de Arquimedes foi proposto por Nicholas de Cusa (1401 - 1464) em 1450. De acordo com [8], o **Método de Cusanus** foi desenvolvido a partir da busca, por parte de Nicholas, em solucionar o **Problema da Quadratura do Círculo**. O método de Cusanus foi originalmente obtido tomando como base um polígono regular de perímetro 2, com um círculo inscrito e outro circunscrito a este polígono. Para obter uma aproximação para π ele utilizou uma sequência de polígonos de n lados ($n = 4, 8, 16, 32, 64, \dots$).

Este método tem início com um quadrado de perímetro 2 (ver Figura 2.2). Chame-mos de p_4 o perímetro e a_4 o comprimento do lado desse polígono, respectivamente. Temos então que $p_4 = 4 \cdot a_4 = 2$, resultando que $a_4 = \frac{1}{2}$.

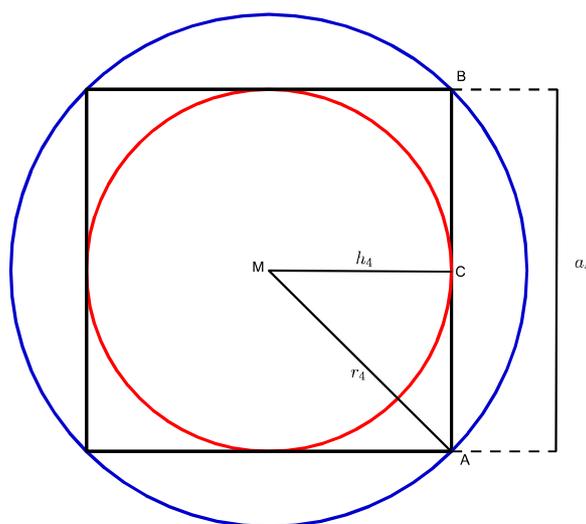


Figura 2.2: Método de Cusanus para um polígono regular de 4 lados

Considerando os círculos inscrito e circunscrito ao quadrado de perímetro 2, temos que seus raios são, respectivamente:

$$h_4 = \frac{a_4}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4} = 0,25$$

e

$$r_4 = \sqrt{h_4^2 + \left(\frac{a_4}{2}\right)^2} = \sqrt{2 \cdot \left(\frac{a_4}{2}\right)^2} = \sqrt{2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0,3535533905.$$

Sendo C_{insc} e $C_{circums}$ os comprimentos dos círculos inscrito e circunscrito, respectivamente, temos:

$$C_{insc} < p_4 < C_{circums}$$

ou

$$2\pi h_4 < p_4 < 2\pi r_4.$$

Dividindo ambos os lados da desigualdade acima por 2π , segue que:

$$h_4 < \frac{1}{\pi} < r_4$$

ou equivalentemente

$$\frac{1}{r_4} < \pi < \frac{1}{h_4}.$$

Tomando os valores de partida $h_4 = \frac{1}{4}$ e $r_4 = \frac{\sqrt{2}}{4}$, chegamos que

$$2,82842713 < \pi < 4.$$

Para melhorar essa aproximação considere um polígono regular de 8 lados. Seja h_8 o raio do círculo inscrito e r_8 o do círculo circunscrito, cujas circunferências medem C_{insc} e $C_{circums}$, respectivamente. Para maiores detalhes veja Figura 2.3.

Como esse octógono tem perímetro $p_8 = 2$, segue que a medida de cada um de seus lados é $a_8 = \frac{p_8}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

Seja $2\theta = \angle AMB = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$, então $\theta = 22,5^\circ$. Podemos calcular a $tg\theta$ usando o Teorema da Bissetriz Interna, obtendo:

$$tg\theta = tg22,5^\circ = \sqrt{2} - 1 = \frac{\frac{a_8}{2}}{h_8} = \frac{a_8}{2 \cdot h_8}.$$

Daí, como $a_8 = \frac{1}{4}$, segue que

$$h_8 = \frac{a_8}{2 \cdot tg\theta} = \frac{\frac{1}{4}}{2 \cdot (\sqrt{2} - 1)} = \frac{1}{8 \cdot (\sqrt{2} - 1)} = \frac{\sqrt{2} + 1}{8} \approx 0,3017766952.$$

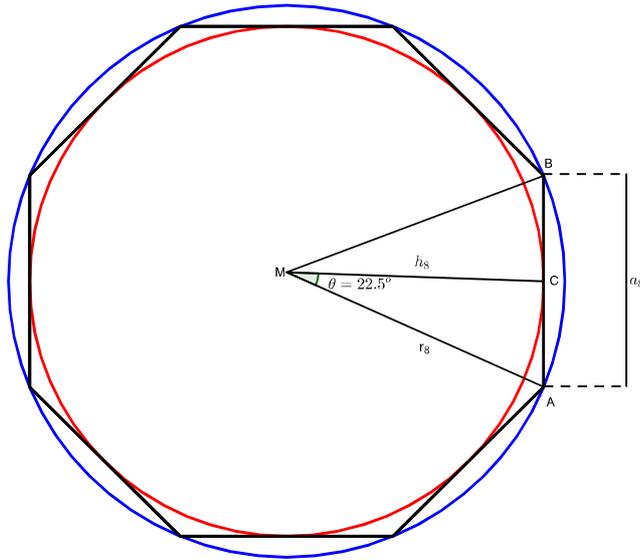


Figura 2.3: Método de Cusanus para um polígono regular de 8 lados

Pelo Teorema de Pitágoras,

$$r_8^2 = h_8^2 + \left(\frac{a_8}{2}\right)^2.$$

Logo,

$$r_8 = \sqrt{h_8^2 + \left(\frac{a_8}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}+1}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{8}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{\sqrt{2}}{32}} \approx 0,3266407412.$$

Comparando o perímetro p_8 com os comprimentos dos círculos inscritos e circunscritos, C_{insc} e $C_{circuns}$, respectivamente, temos:

$$C_{insc} < p_8 < C_{circuns}$$

ou

$$2\pi h_8 < p_8 < 2\pi r_8.$$

Dividindo a desigualdade acima por 2π , obtemos:

$$h_8 < \frac{1}{\pi} < r_8$$

ou reciprocamente,

$$\frac{1}{r_8} < \pi < \frac{1}{h_8}.$$

Tomando os valores de r_8 e h_8 calculados anteriormente, chegamos a

$$\frac{1}{r_8} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{16} + \frac{\sqrt{2}}{32}}} = \sqrt{32 - 16\sqrt{2}} = 4\sqrt{2 - \sqrt{2}} \approx 3,0614674589$$

e

$$\frac{1}{h_8} = 8(\sqrt{2} - 1) \approx 3,3137084989.$$

Ou seja, o valor de π encontra-se compreendido no intervalo

$$3,0614674589 < \pi < 3,3137084989.$$

Para o caso geral, podemos determinar uma fórmula de recorrência para o cálculo de π usando, para isso, os raios h_n e r_n dos círculos inscrito e circunscrito a um polígono regular de n lados ($n = 4, 8, 16, 32, \dots$) e perímetro 2, tendo como valores iniciais $h_4 = \frac{1}{4}$ e $r_4 = \frac{\sqrt{2}}{4}$, em seguida, calculamos h_8 e r_8 em função dos valores de partida, depois calculamos h_{16} e r_{16} tomando por base os valores de h_8 e r_8 e assim sucessivamente, sempre encontrando um intervalo, cada vez mais preciso, que contenha o valor de π .

De fato, supondo que $AB = a_n$, $MA = MB = r_n$ e $MH = h_n$ e dobrando o número de lados do polígono obteremos um novo polígono regular de $2n$ lados (ver Figura 2.4).

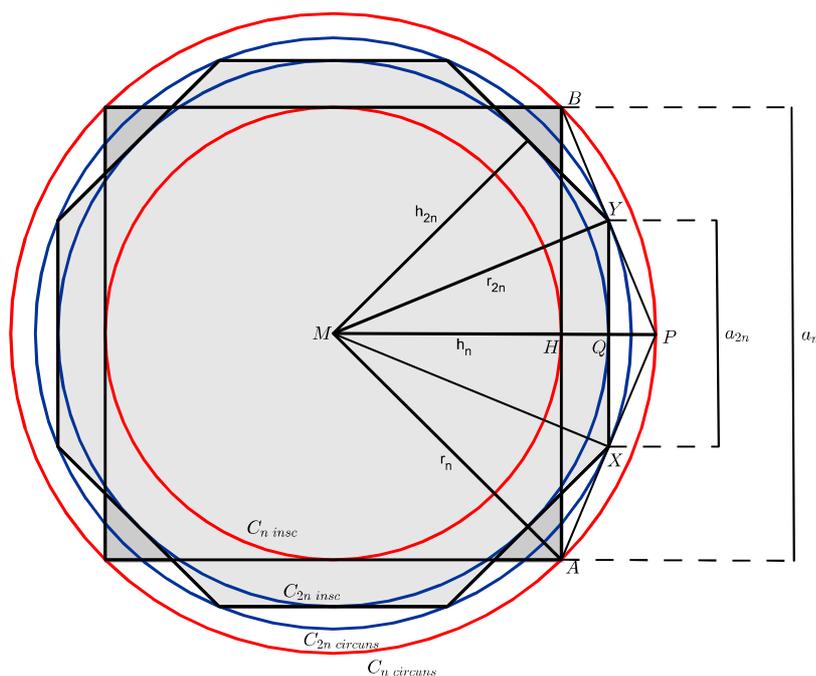


Figura 2.4: Método de Cusanus para um polígono regular de n lados

Tome o ponto P tal que P seja ponto médio do arco \widehat{AP} e X, Y como sendo os pontos médios dos lados \overline{AP} e \overline{BP} do triângulo ΔABP , respectivamente. Observe, ainda que $XY = \frac{\overline{AB}}{2}$, pois XY é o lado do polígono regular de $2n$ lados, de centro M e perímetro 2. Agora note que:

$$MA = MP = r_n, \quad MX = MY = r_{2n} \quad \text{e} \quad MQ = h_{2n}.$$

Como os triângulos ΔPBA e ΔPYX são semelhantes, vemos que o ponto Q é o ponto médio do segmento \overline{PH} , daí obtemos:

$$MQ = MH + HQ \Rightarrow h_{2n} = h_n + HQ \quad (2.8)$$

e

$$MP = MH + 2HQ \Rightarrow r_n = h_n + 2HQ \Rightarrow HQ = \frac{r_n - h_n}{2} \quad (2.9)$$

Substituindo 2.9 em 2.8, temos:

$$h_{2n} = \frac{h_n + r_n}{2}.$$

Note também que os triângulo ΔMXP e ΔMQX são semelhantes, então

$$\frac{MX}{MQ} = \frac{MP}{MX} \Rightarrow MX^2 = MP \cdot MQ.$$

Podemos escrever

$$h_{2n} = \sqrt{r_n \cdot h_{2n}}.$$

Portanto, para calcularmos aproximações do número π através do método de Cusanus, podemos usar a seguinte fórmula de recorrência:

$$\begin{cases} h_{2n} = \frac{r_n + h_n}{2} \\ r_{2n} = \sqrt{r_n \cdot h_{2n}} \end{cases}, \text{ onde } n = 4, 8, 16, 32, \dots$$

e adotar como valores iniciais

$$h_4 = \frac{1}{4} \text{ e } r_4 = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

2.4 A Fórmula de Leibniz

Veremos, agora, umas das mais belas fórmulas matemáticas usadas para aproximar o valor de π . Desenvolvida por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), a chamada *Fórmula de Leibniz*, é dada por:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots = \frac{\pi}{4}. \quad (2.10)$$

Apresentaremos abaixo uma prova elementar dessa fórmula, como pode ser visto em [10].

Inicialmente, observe que

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + t^8 - \dots + t^{4n} - \frac{t^{4n+2}}{1+t^2}, \quad (2.11)$$

que é válida para todo $t \in \mathbb{R}$. De fato, para verificar a veracidade de (2.11) basta multiplicar ambos os membros desta expressão por $(1 + t^2)$, assim, ao multiplicar o lado esquerdo da expressão acima por $(1 + t^2)$ obtemos

$$(1 + t^2) \left(\frac{1}{1 + t^2} \right) = 1$$

e ao multiplicar o lado direito da mesma expressão por $(1 + t^2)$, temos

$$(1+t^2) \left(1 - t^2 + t^4 - t^6 + t^8 + \dots + t^{4n} - \frac{t^{4n+2}}{1+t^2} \right) = 1+t^2 - t^2 - t^4 + t^4 + t^6 + \dots + t^{4n} + t^{4n+2} - t^{4n+2} = 1.$$

Segue, portanto, a igualdade (2.11).

Agora, considere $x \in \mathbb{R}$, com $0 \leq x \leq 1$. Integrando (2.11) no intervalo $0 \leq t \leq 1$, temos:

$$\arctg x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{x^{4n+1}}{4n+1} - R_n(x), \quad (2.12)$$

onde

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{t^{4n+2}}{1+t^2} dt.$$

Como $1 \leq 1 + t^2$, segue que $1 \geq \frac{1}{1+t^2}$ e então $t^{4n+2} \geq \frac{t^{4n+2}}{1+t^2}$. Daí,

$$0 \leq R_n(x) \leq \int_0^x t^{4n+2} dt$$

ou

$$0 \leq R_n(x) \leq \frac{x^{4n+3}}{4n+3}.$$

Mas como $0 \leq x \leq 1$, vem que

$$0 \leq R_n(x) \leq \frac{1}{4n+3}.$$

Logo, $R_n(x) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Dessa forma, podemos usar (2.12) para deduzir que a fórmula

$$\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} + \dots \quad (2.13)$$

é válida para $0 \leq x \leq 1$. O segundo membro de (2.13) é, por definição, o limite do segundo membro de (2.12) quando $n \rightarrow \infty$ caso $R_n(x) \rightarrow 0$, mas acabamos de mostrar que essa condição é verdadeira.

Portanto, para obter a fórmula de Leibniz, dada por (2.10), devemos tomar $x = 1$ em (2.13). Donde,

$$\arctg 1 = 1 - \frac{1^3}{3} + \frac{1^5}{5} - \frac{1^7}{7} + \dots$$

ou seja,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}.$$

Ou ainda,

$$\pi = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n-1}}{2n-1}.$$

2.5 Fórmula de Machin

De acordo com [5] e [13], em 1706, John Machin (1680-1752), professor de Astronomia em Londres, usou a estratégia, que descreveremos abaixo, para fazer com que a série de Leibniz, dada por (2.10), convergisse mais rapidamente. Para isso, Machin usou a fórmula da soma e da diferença de arcos para a tangente, dadas respectivamente por:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Tomando $\beta = \frac{\pi}{4}$ obtemos

$$\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = \frac{\operatorname{tg}\alpha - 1}{1 + \operatorname{tg}\alpha}$$

e fazendo $\alpha = 4\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{5}\right)$, temos

$$\operatorname{tg}\left(4\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{5}\right) - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg}\left(4\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{5}\right)\right) - 1}{1 + \operatorname{tg}\left(4\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{5}\right)\right)}$$

Agora, devemos calcular o valor de $\operatorname{tg}\left(4\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{5}\right)\right)$. Para isto utilizaremos a fórmula da soma de arcos para tangente, obtendo

$$\operatorname{tg}\left(2\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{5}\right)\right) = \frac{2\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{5}\right)\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{5}\right)\right)} = \frac{2 \cdot \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{5}{12}.$$

e

$$\operatorname{tg}\left(4\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{5}\right)\right) = \frac{2\operatorname{tg}\left(2\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{5}\right)\right)}{1 - \operatorname{tg}^2\left(2\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{5}\right)\right)}.$$

Substituindo $\operatorname{tg}\left(2\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{5}\right)\right) = \frac{5}{12}$ na expressão acima, chegamos a:

$$\operatorname{tg}\left(4\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{5}\right)\right) = \frac{2 \cdot \frac{5}{12}}{1 - \left(\frac{5}{12}\right)^2} = \frac{120}{119}.$$

Daí,

$$\operatorname{tg}\left(4\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{5}\right) - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}} = \frac{1}{239}.$$

Aplicando arco tangente em ambos os lados da igualdade acima obtemos:

$$4\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{5}\right) - \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{239}\right)$$

ou seja,

$$\frac{\pi}{4} = 4\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{5}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{239}\right).$$

A fórmula acima foi utilizada por Machin, em 1706, para calcular o valor de π com 100 casas decimais.

Outras fórmulas do tipo Machin foram desenvolvidas por vários matemáticos ao longo do tempo. Citaremos algumas delas (para maiores detalhes ver [5]):

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8}, \quad \text{proposta por Strassnitzky em 1844}$$

$$\frac{\pi}{4} = 5\operatorname{arctg}\frac{1}{7} + 2\operatorname{arctg}\frac{3}{79}, \quad \text{proposta por Euler em 1755}$$

$$\frac{\pi}{4} = 3\operatorname{arctg}\frac{1}{4} + \operatorname{arctg}\frac{1}{20} + \operatorname{arctg}\frac{1}{1985}, \quad \text{proposta por Loney em 1893}$$

$$\frac{\pi}{4} = 6\operatorname{arctg}\frac{1}{8} + 2\operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{239}, \quad \text{proposta por Stormer em 1896}$$

$$\frac{\pi}{4} = 12\operatorname{arctg}\frac{1}{18} + 8\operatorname{arctg}\frac{1}{57} - 5\operatorname{arctg}\frac{1}{239}, \quad \text{proposta por Guilloud e Bouyer em 1974}$$

2.6 O Produto de Wallis

Nesta seção lançaremos mão de um método capaz de aproximar o valor de π através do produtório infinito de números racionais, diferentemente dos métodos de Leibniz e Machin que utilizavam somas infinitas para tal aproximação. Para isto, faremos uso da teoria contida em [9] e [10].

Inicialmente vamos utilizar o método de integração por partes para determinar uma fórmula de recorrência para $I_n = \int \operatorname{sen}^n x dx$, isto é, mostraremos que I_n pode ser escrita como:

$$I_n = \int \operatorname{sen}^n x dx = -\frac{1}{n} \operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} x dx \quad (2.14)$$

De fato, fazendo $u = \text{sen}^{n-1}x$ e $dv = \text{sen}x dx$, temos que $du = (n-1)\text{sen}^{n-2}x \cos x dx$ e $v = -\cos x$. Assim,

$$\begin{aligned} I_n &= \int u dv = uv - \int v du = -\text{sen}^{n-1}x \cos x - \int -\cos x (n-1)\text{sen}^{n-2}x \cos x dx \\ &= -\text{sen}^{n-1}x \cos x + (n-1) \int \text{sen}^{n-2}x \cos^2 x dx \\ &= -\text{sen}^{n-1}x \cos x + (n-1) \int \text{sen}^{n-2}x (1 - \text{sen}^2 x) dx \\ &= -\text{sen}^{n-1}x \cos x + (n-1) \int \text{sen}^{n-2}x dx - (n-1) \int \text{sen}^n x dx \\ &= -\text{sen}^{n-1}x \cos x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \end{aligned}$$

Logo,

$$I_n + (n-1)I_n = -\text{sen}^{n-1}x \cos x + (n-1)I_{n-2},$$

ou seja,

$$I_n = \int \text{sen}^n x dx = -\frac{1}{n}\text{sen}^{n-1}x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \text{sen}^{n-2}x dx.$$

A fórmula (2.14) nos leva, de um modo bastante engenhoso, a uma expressão em que o número $\frac{\pi}{2}$ é obtido como um produtório infinito definido abaixo:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \cdots \quad (2.15)$$

Essa fórmula foi desenvolvida por John Wallis, matemático inglês do século XVII, e se chama *Produto de Wallis* em sua homenagem. Para demonstrar (2.15), definiremos I_n por

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^n x dx.$$

Daí, por (2.14), segue que

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}. \quad (2.16)$$

Podemos ver, também, que:

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen} x dx = 1.$$

Vamos agora analisar os casos de índices pares e ímpares separadamente. Calculemos I_{2n} e I_{2n+1} como se segue:

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} I_{2n-4} = \cdots = \\ &= \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{2n-5}{2n-4} \cdots \frac{1}{2} \cdot I_0 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (2.17)$$

e

$$\begin{aligned} I_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} I_{2n-3} = \dots = \\ &= \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n-4}{2n-3} \dots \frac{2}{3} \cdot I_1 \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \dots \frac{2n}{2n+1} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Para prosseguir nossa demonstração, precisamos do fato de que a razão entre essas duas quantidades tenda a 1 quando n tenda para infinito, isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1. \quad (2.19)$$

Para estabelecermos esse limite, comecemos observando que no intervalo $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, temos $0 \leq \text{sen} x \leq 1$ e, portanto,

$$0 \leq \text{sen}^{2n+2} x \leq \text{sen}^{2n+1} x \leq \text{sen}^{2n} x.$$

Mas, isto implica que

$$0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{2n+2} x dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{2n+1} x dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{2n} x dx,$$

o que equivale a

$$0 \leq I_{2n+2} \leq I_{2n+1} \leq I_{2n}. \quad (2.20)$$

Dividindo-se a desigualdade acima por I_{2n} e usando o fato de que

$$\frac{I_{2n+2}}{I_{2n}} = \frac{2n+1}{2n+2}$$

que é obtida da expressão (2.16), vemos que:

$$0 \leq \frac{I_{2n+2}}{I_{2n}} \leq \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \leq \frac{I_{2n}}{I_{2n}}$$

ou seja,

$$0 \leq \frac{2n+1}{2n+2} \leq \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \leq 1.$$

Agora, tomando o limite, na desigualdade acima, quando n tender a infinito, vem que:

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n+2} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} \leq 1.$$

Assim, vemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1,$$

ou equivalentemente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1.$$

Dividindo-se (2.18) por (2.17), obtemos:

$$\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2}{\pi}.$$

Logo,

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \cdot \left(\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \right).$$

Tomando o limite quando n tender a infinito e usando (2.19) obtemos:

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1},$$

que é o produto obtido em (2.15).

O Produto de Wallis dado por (2.15) é equivalente a fórmula

$$\frac{2}{\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \left(1 - \frac{1}{6^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{(2n)^2}\right), \quad (2.21)$$

que pode ser verificada escrevendo cada número entre parênteses à direita na forma fatorada

$$\frac{2}{\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{6}\right) \left(1 + \frac{1}{6}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{2n}\right) \left(1 + \frac{1}{2n}\right),$$

ou

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n+1}{2n} \cdots$$

que é equivalente a expressão dada por (2.15).

2.7 Curiosidades

Apenas como ilustração, apresentaremos outras expressões, desenvolvidas ao longo do tempo, para o cálculo de π . Essas e outras fórmulas podem ser consultadas em [5].

- Em 1593, o francês François Viète desenvolveu a igualdade abaixo,

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \cdots$$

tornando-se o primeiro matemático a expressar π como um produto infinito.

- Em 1914, o matemático indiano Srinivassa Ramanujan apresentou a fórmula abaixo, sem no entanto demonstrá-la,

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!(1103 + 26390n)}{(n!)^4 396^{4n}}.$$

De acordo com [5], esta fórmula apresenta uma convergência muito rápida. Para se ter uma idéia, a cada termo adicionado a esta série, encontramos 8 casas decimais corretas de π .

- A fórmula abaixo, que também converge rapidamente, foi desenvolvida em 1987 pelos irmãos Gregory e David Chudnovsky

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (6n)! (13591409 + 545140134n)}{(n!)^3 (3n)! (640320^3)^{n+\frac{1}{2}}},$$

cuja adição de apenas um termo a série fornece 14 casas decimais corretas de π .

- Em 1988, os irmãos Jonathan e Peter Borwein demonstraram a fórmula de Ramanujan. E em 1993 melhoraram o método obtendo:

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (6n)! (A + Bn)}{(n!)^3 (3n)! (C^3)^{n+\frac{1}{2}}}$$

onde,

$$A = 212175710912 \sqrt{61} + 1657145277365$$

$$B = 13773980892672 \sqrt{61} + 1075782299802750$$

$$C = 5280(236674 + 30303 \sqrt{61})$$

a qual consegue 25 dígitos de π a cada termo adicionado.

Capítulo 3

Análise dos Métodos

Neste capítulo faremos uma análise dos métodos vistos anteriormente, utilizando como apoio para os cálculos o Software Educacional Geogebra, que possibilitou a implementação computacional de cada uma das fórmulas estudadas e a elaboração das tabelas e gráficos, tornando possível a análise mais detalhada de cada método. Ressaltamos que a intenção ao analisar tais resultados não foi evidenciar qual deles é melhor ou pior, mas apenas mostrar como se dá a convergência de cada um através das tabelas e gráficos. Enfatizamos, também, que para os cálculos realizados utilizamos 15 algarismos significativos, número máximo de casas decimais aceito pelo Geogebra.

3.1 Análise do Método de Arquimedes

Inicialmente, veremos a tabela referente ao método de Arquimedes, apresentando logo em seguida o gráfico de tal aproximação. Observe que este método utiliza apenas as relações trigonométricas no triângulo retângulo para obter aproximações do valor de π com a precisão desejada..

Analisando a Tabela 3.1 vemos que, com um polígono regular de 96 lados, o mesmo usado por Arquimedes ao desenvolver este método, obtemos uma aproximação de π com 2 casas decimais corretas, o que para época em que foi desenvolvido era uma excelente aproximação do valor de π .

Para melhorar cada vez mais as aproximações devemos aumentar a quantidade de lados dos polígonos envolvidos, por exemplo, para calcularmos π com 8 casas decimais corretas devemos tomar um polígono com 49152 lados, de acordo com as aproximações contidas na tabela 3.1.

Podemos também analisar os resultados obtidos através de gráficos. A Figura 3.1 representa graficamente o método de Arquimedes. Enfatizamos que, no caso deste método, plotamos apenas os 5 primeiros pontos, visto que os demais vão ficando muito

distantes uns dos outros impossibilitando a sua visualização com clareza no gráfico em questão.

Número de lados (n)	Ângulo θ (em grau)	$n \text{sen} \theta$	$n \text{tg} \theta$
6	30,000000000000000	3,000000000000000	3,464101615137754
12	15,000000000000000	3,105828541230249	3,215390309173472
24	7,500000000000000	3,132628613281238	3,159659942097500
48	3,750000000000000	3,139350203046867	3,146086215131435
96	1,875000000000000	3,141031950890509	3,142714599645368
192	0,937500000000000	3,141452472285462	3,141873049979823
384	0,468750000000000	3,141557607911858	3,141662747056848
768	0,234375000000000	3,141583892148318	3,141610176604689
1536	0,117187500000000	3,141590463228050	3,141597034321526
3072	0,058593750000000	3,141592105999271	3,141593748771352
6144	0,029296875000000	3,141592516692157	3,141592927385097
12288	0,014648437500000	3,141592619365384	3,141592722038614
24576	0,007324218750000	3,141592645033691	3,141592670701998
49152	0,003662109375000	3,141592651450767	3,141592657867844
98304	0,001831054687500	3,141592653055037	3,141592654659306
196608	0,000915527343750	3,141592653456104	3,141592653857171
393216	0,000457763671875	3,141592653556370	3,141592653656637
786432	0,000228881835937	3,141592653581438	3,141592653606504
1572864	0,000114440917968	3,141592653587704	3,141592653593971
3145728	0,000057220458984	3,141592653589271	3,141592653590838

Tabela 3.1: Cálculo de π usando o Método de Arquimedes

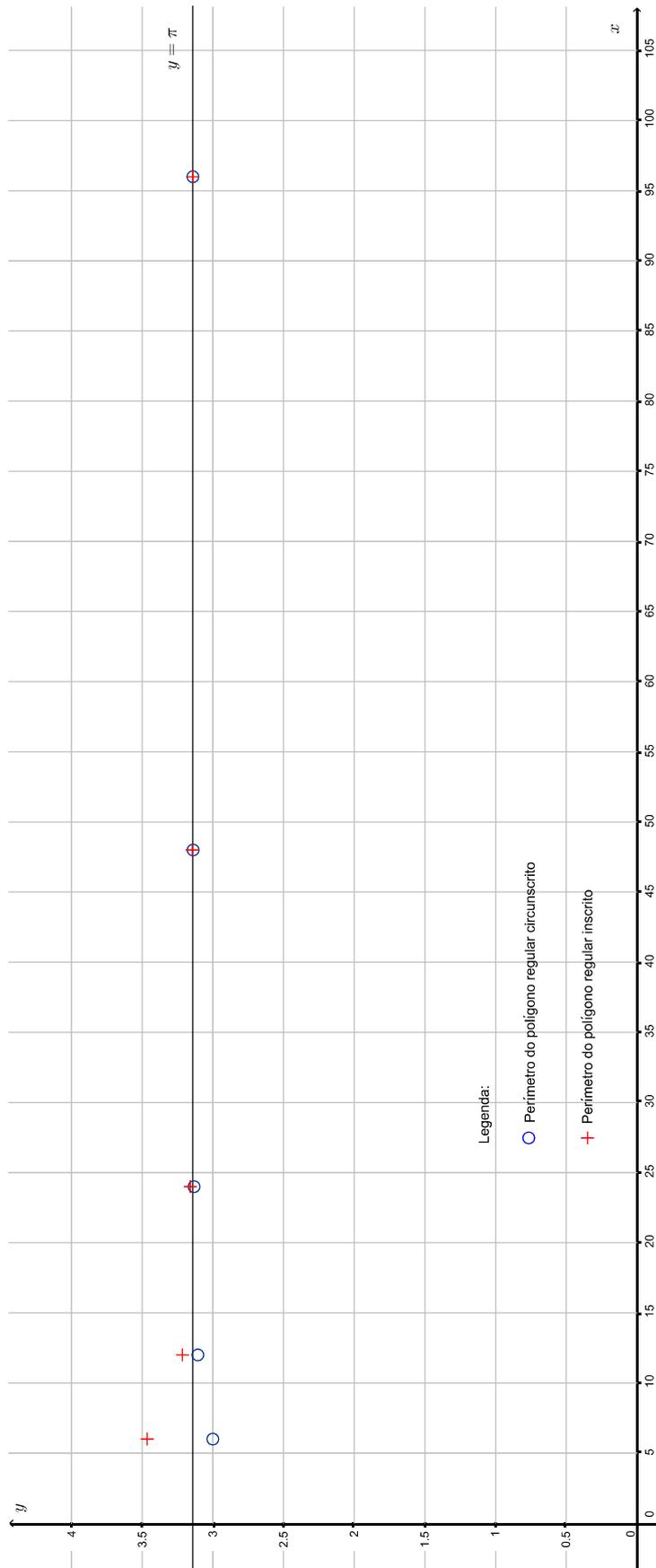


Figura 3.1: Aproximação gráfica do valor de π calculadas pelo método de Arquimedes

3.2 Análise do Método de Cusanus

Análogo aos resultados obtidos por Arquimedes, o método de Cusanus depende apenas de teoremas e resultados básicos de Geometria Plana como, por exemplo, o Teorema de Pitágoras, semelhança e congruência de triângulos. Além disso, a média aritmética e geométrica são utilizadas para calcular os valores de h_{2n} e r_{2n} , respectivamente.

Note que, para obter uma aproximação de 2 casas decimais para o valor de π devemos considerar um polígono com 64 lados e, de forma análoga ao método de Arquimedes, para melhorar esta aproximação deve-se aumentar a quantidade de lados desse polígono, assim, para obter 8 casas decimais corretas de π devemos tomar um polígono com 65536 lados, de acordo com os resultados apresentados na Tabela 3.2.

Podemos, ainda, analisar o método de Cusanus através de um gráfico. A Figura 3.2 representa graficamente este método. Nela, é possível observar que foram plotados apenas os 5 primeiros pontos, pois os demais pontos, a medida que aumentamos a quantidade de lados, vão ficando muito distantes uns dos outros, impossibilitando visualizá-los com clareza.

Número de lados (n)	h_n	r_n	$\frac{1}{r_n}$	$\frac{1}{h_n}$
4	0,2500000000000000	0,353553390593274	2,828427124746190	4,0000000000000000
8	0,301776695296637	0,326640741219095	3,061467458920718	3,313708498984761
16	0,314208718257866	0,320364430967689	3,121445152258052	3,182597878074528
32	0,317286574612777	0,318821788668073	3,136548490545939	3,151724907429256
64	0,318054181640425	0,318437753860877	3,140331156954752	3,144118385245904
128	0,318245967750651	0,318341846362992	3,141277250932773	3,142223629942456
256	0,318293907056821	0,318317875807437	3,141513801144301	3,141750369168966
512	0,318305891432129	0,318311883563382	3,141572940367091	3,141632080703182
1024	0,318308887497756	0,318310385527044	3,141587725277160	3,141602510256809
2048	0,318309636512400	0,318310011019501	3,141591421511200	3,141595117749589
4096	0,318309823765950	0,318309917392712	3,141592345570118	3,141593269629307
8192	0,318309870579331	0,318309893986021	3,141592576584873	3,141592807599644
16384	0,318309882282676	0,318309888134348	3,141592634338563	3,141592692092255
32768	0,318309885208512	0,318309886671430	3,141592648776986	3,141592663215408
65536	0,318309885939971	0,318309886305701	3,141592652386592	3,141592655996197
131072	0,318309886122836	0,318309886214268	3,141592653288993	3,141592654191395
262144	0,318309886168552	0,318309886191410	3,141592653514593	3,141592653740194
524288	0,318309886179981	0,318309886185696	3,141592653570993	3,141592653627393
1048576	0,318309886182839	0,318309886184267	3,141592653585093	3,141592653599193
2097152	0,318309886183553	0,318309886183910	3,141592653588618	3,141592653592143

Tabela 3.2: Cálculo de π usando o Método de Cusanus

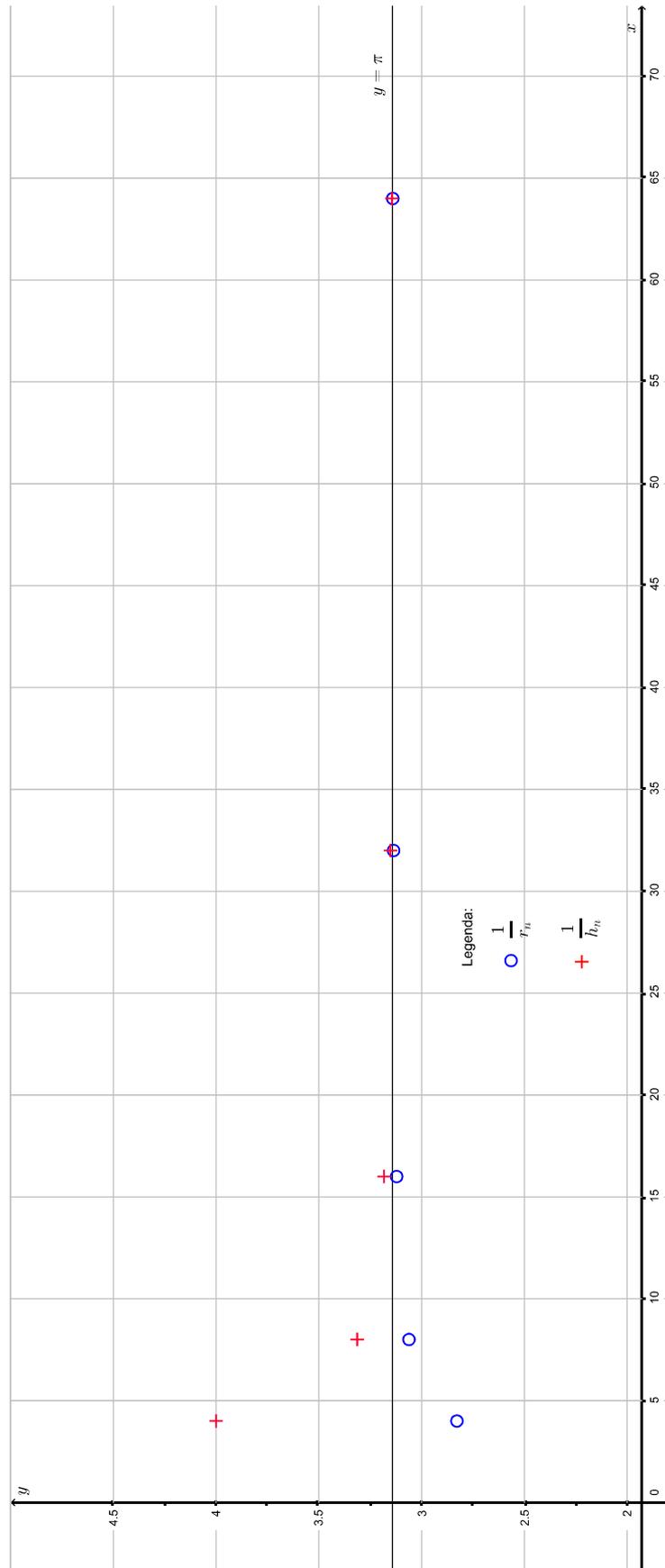


Figura 3.2: Aproximação gráfica do valor de π calculadas pelo método de Cusanus

3.3 Análise do Método de Leibniz

Considerando a Fórmula de Leibniz, percebe-se que a convergência dela se dá de forma muito lenta. Note, pela Tabela 3.3, que a primeira casa decimal de π , somente estabiliza-se quando já foram somados 25 termos. Segundo [5] e [13], serão necessários 300 termos da série para que a segunda casa decimal seja igual a 4 e 5000 termos para obtermos a terceira casa decimal. Apesar disto, esta fórmula está longe de ser considerada inútil, pois a partir dela desenvolveu-se outras fórmulas de convergência bem mais acentuada, como por exemplo, a Fórmula de Machin.

n	$\frac{4(-1)^{n-1}}{2n-1}$	$\pi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n-1}}{2n-1}$
1	4,000000000000000	4,000000000000000
2	-1,333333333333333	2,666666666666667
3	0,800000000000001	3,466666666666667
4	-0,571428571428572	2,89523809523810
5	0,444444444444445	3,33968253968254
6	-0,363636363636364	2,97604617604618
7	0,307692307692308	3,28373848373849
8	-0,266666666666667	3,01707181707182
9	0,235294117647059	3,25236593471888
10	-0,210526315789474	3,04183961892941
11	0,190476190476191	3,23231580940560
12	-0,173913043478261	3,05840276592734
13	0,160000000000000	3,21840276592734
14	-0,148148148148148	3,07025461777919
15	0,137931034482759	3,20818565226195
16	-0,129032258064516	3,07915339419743
17	0,121212121212121	3,20036551540955
18	-0,114285714285714	3,08607980112384
19	0,108108108108108	3,19418790923195
20	-0,102564102564103	3,09162380666784
21	0,0975609756097562	3,18918478227760
22	-0,0930232558139536	3,09616152646365
23	0,0888888888888890	3,18505041535254
24	-0,0851063829787235	3,09994403237381
25	0,0816326530612246	3,18157668543504
26	-0,0784313725490197	3,10314531288602
27	0,0754716981132076	3,17861701099922
28	-0,0727272727272728	3,10588973827195
29	0,0701754385964913	3,17606517686844
30	-0,0677966101694916	3,10826856669895

Tabela 3.3: Cálculo de π usando o Método de Leibniz

Já a Figura 3.3 corresponde a plotagem dos valores da Tabela referente a Fórmula de Leibniz. Nela é possível observar os pontos cada vez mais próximos da reta $y = \pi$, isto é, os valores calculados estão se aproximando cada vez mais do valor real de π , a medida que são acrescentados mais termos ao somatório, porém como mencionamos anteriormente, esta convergência se dá de forma muito lenta.

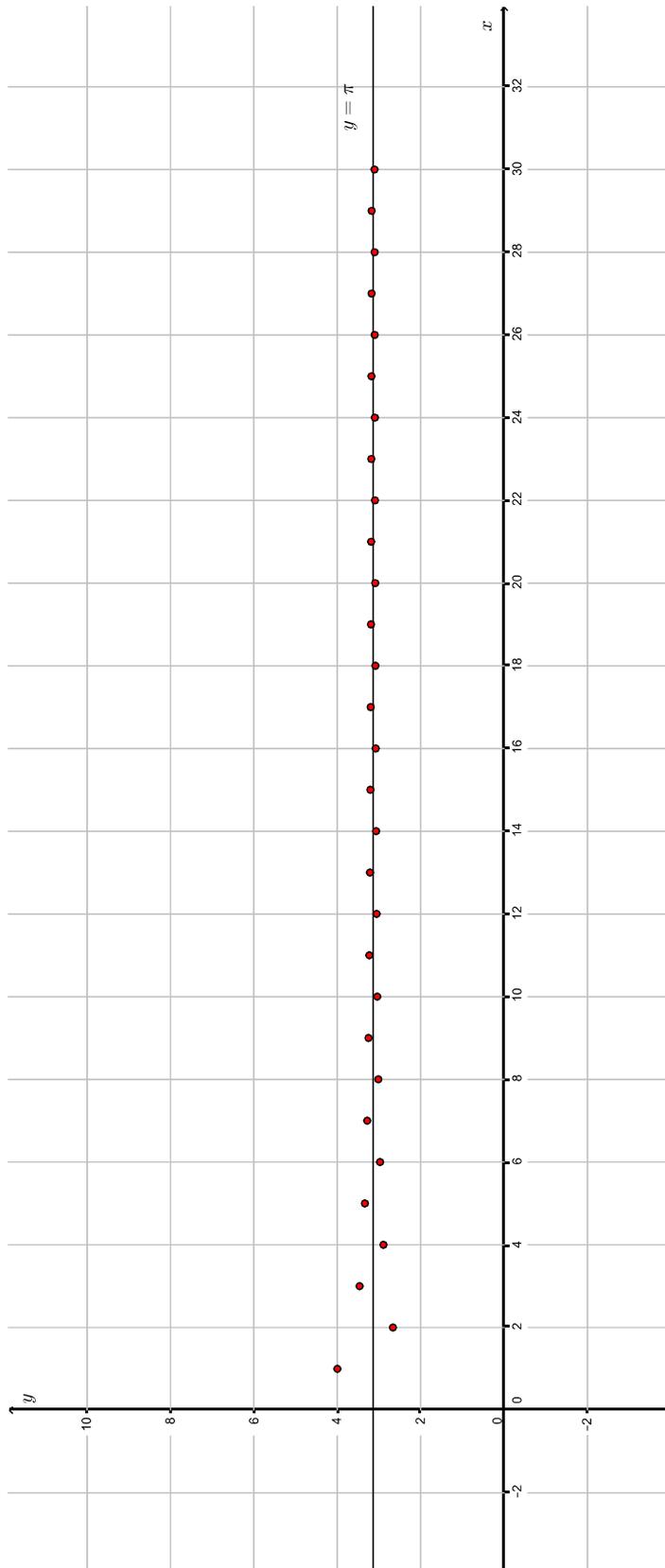


Figura 3.3: Aproximação gráfica do valor de π calculadas pelo método de Leibniz

3.4 Análise do Método de Machin

Para a série de Machin, analisando os valores da Tabela 3.4, percebe-se que ela converge bem mais rapidamente que a Fórmula de Leibniz. A partir do primeiro termo desta série já obtemos π com uma casa decimal correta e com apenas 10 termos adicionados encontramos 14 casas decimais corretas de π . Observando a Figura 3.4 vemos que os pontos plotados estão cada vez mais próximos do valor de π , a medida que somamos novos termos a série em questão.

n	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{16(-1)^{n-1}}{(2n-1)5^{2n-1}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n-1}}{(2n-1)239^{2n-1}}$	$\pi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16(-1)^{n-1}}{(2n-1)5^{2n-1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n-1}}{(2n-1)239^{2n-1}}$
1	3,200000000000000	0,0167364016736402	3,18326359832636
2	3,157333333333333	0,0167363040072730	3,14059702932606
3	3,158357333333333	0,0167363040082989	3,14162102932503
4	3,15832807619048	0,0167363040082989	3,14159177218218
5	3,15832898641270	0,0167363040082989	3,14159268240440
6	3,15832895662361	0,0167363040082989	3,14159265261531
7	3,15832895763185	0,0167363040082989	3,14159265362356
8	3,15832895759690	0,0167363040082989	3,14159265358860
9	3,15832895759814	0,0167363040082989	3,14159265358984
10	3,15832895759809	0,0167363040082989	3,14159265358979

Tabela 3.4: Cálculo de π usando o Método de Machin

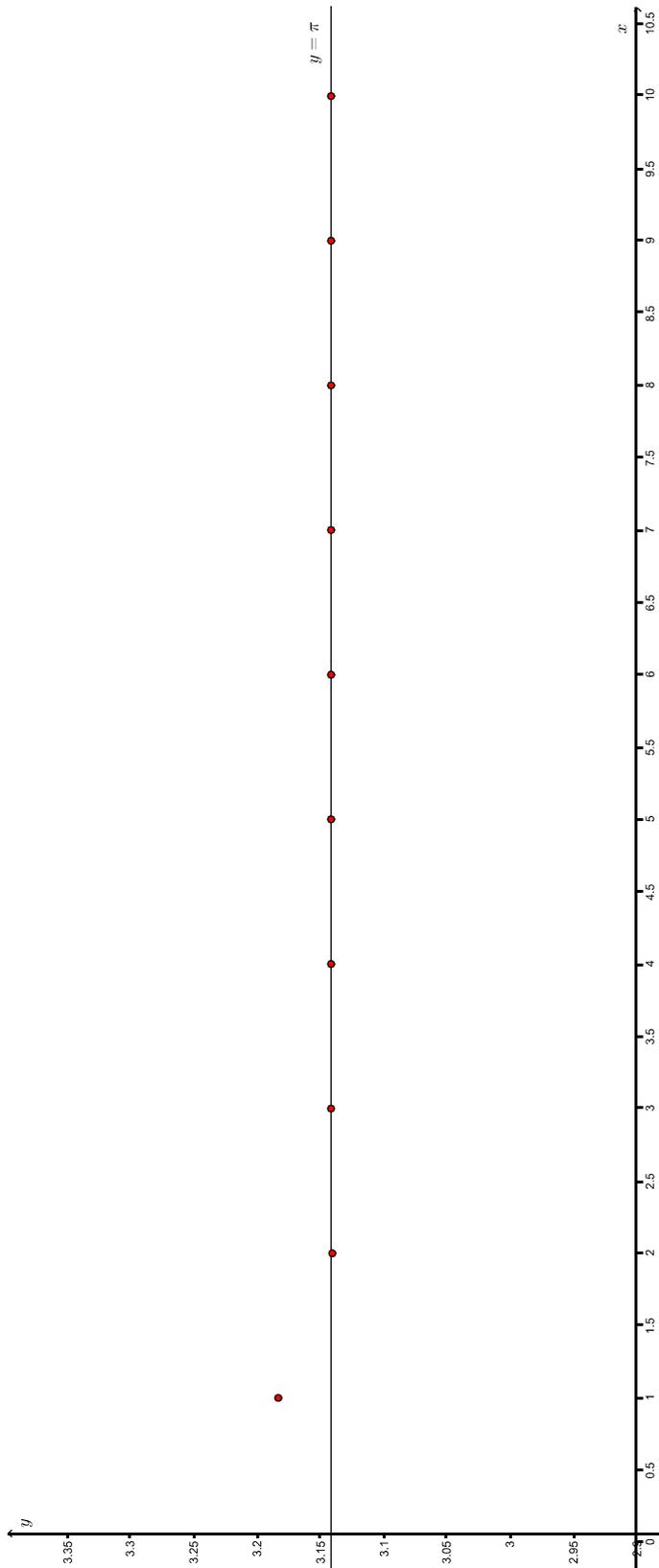


Figura 3.4: Aproximação gráfica do valor de π calculadas pelo método de Machin

3.5 Análise do Método de Wallis

A Fórmula (2.15) desenvolvida por John Wallis, em 1655, também foi de fundamental importância para o cálculo de π , pois foi a primeira vez que essa constante foi escrita explicitamente em termos de números racionais. O Produto de Wallis, também converge lentamente, como pode ser visto tomando por base os valores da Tabela 3.5. Note que a primeira casa decimal de π estabiliza-se apenas após o 19º fator desse produto e, a partir de cálculos realizados com o Geogebra, vimos que para se chegar a segunda casa decimal correta de π , deveríamos multiplicar 493 termos.

No Gráfico 3.5, plotamos os pontos contidos na Tabela 3.5. Nele, é possível notar os pontos se aproximando da reta $y = \pi$ a medida que introduzimos mais termos no produto, porém, essa aproximação acontece de forma muito lenta.

n	$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1}$	π
1	1,33333333333333	2.66666666666667
2	1,42222222222222	2.84444444444445
3	1,46285714285714	2.92571428571429
4	1,48607709750567	2.97215419501134
5	1,50108797727845	3,00217595455691
6	1,51158509600068	3,02317019200136
7	1,51933681444171	3,03867362888342
8	1,52529499802776	3,05058999605551
9	1,53001727356345	3,06003454712689
10	1,53385190332175	3,06770380664350
11	1,53702758014022	3,07405516028045
12	1,53970067158394	3,07940134316789
13	1,54198170961592	3,08396341923184
14	1,54395103491556	3,08790206983112
15	1,54566844429811	3,09133688859622
16	1,54717936164347	3,09435872328693
17	1,54851891087433	3,09703782174865
18	1,54971467837307	3,09942935674614
19	1,55078863171914	3,10157726343827
20	1,55175848076962	3,10351696153924
21	1,55263866141668	3,10527732283336
22	1,55344105865772	3,10688211731544
23	1,55417554615591	3,10835109231181
24	1,55485039441737	3,10970078883474
25	1,55547258345075	3,11094516690150
26	1,55604804500586	3,11209609001171
27	1,55658185222541	3,11316370445083
28	1,55707836956265	3,11415673912529
29	1,55754137234872	3,11508274469744
30	1,55797414294398	3,11594828588796

Tabela 3.5: Cálculo de π usando o Método de Wallis

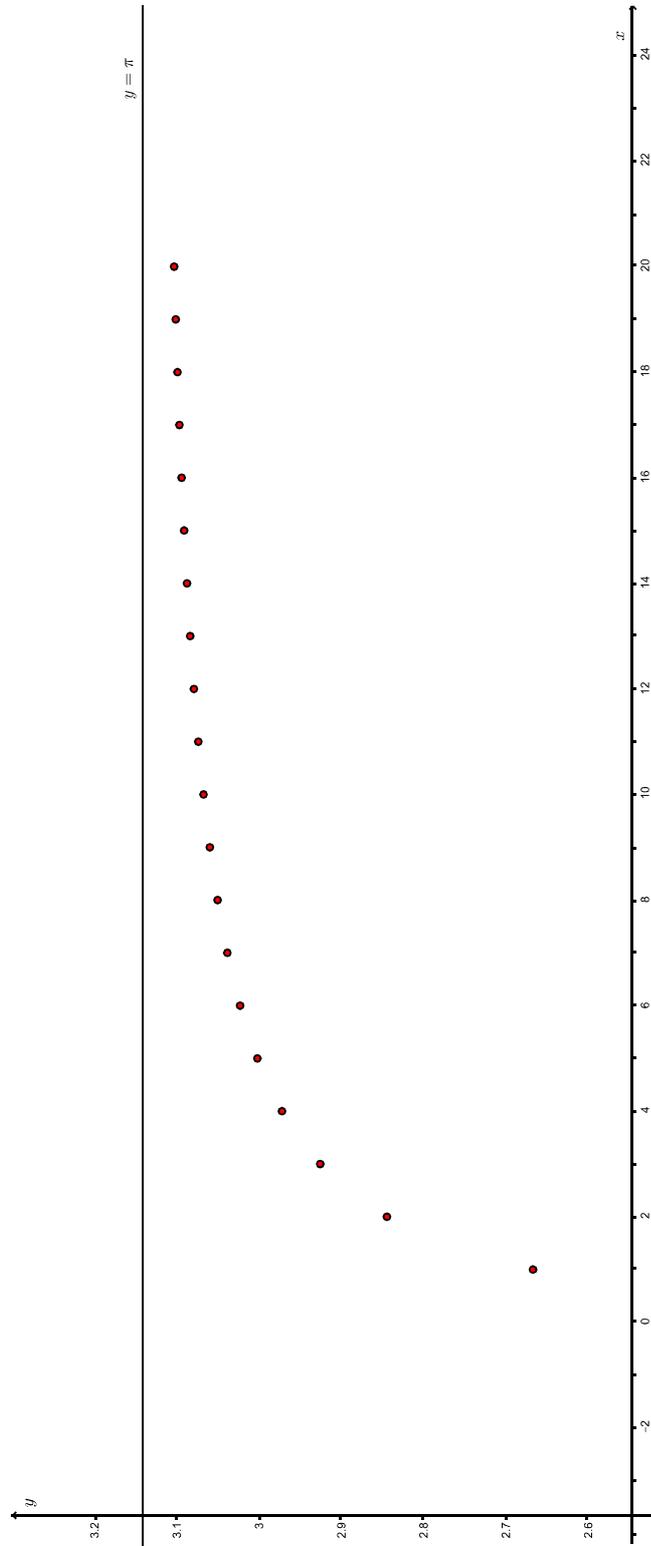


Figura 3.5: Aproximação gráfica do valor de π calculadas pelo método de Wallis

Capítulo 4

Considerações finais

Este trabalho teve como objetivo fazer uma revisão bibliográfica acerca do número π , fazendo um estudo sobre a história desse número, sua irracionalidade e também mostrar algumas formas de calculá-lo, por meio de métodos geométricos e através do Cálculo Diferencial e Integral. Por usarem conteúdos básicos de geometria, como por exemplo, semelhança e congruência de triângulos, Teorema de Pitágoras e trigonometria no triângulo retângulo, as técnicas geométricas utilizadas para aproximar o valor de π podem ser aplicadas no Ensino Fundamental e Médio com o intuito de facilitar a aprendizagem e o desenvolvimento de conteúdos envolvendo o ensino de Geometria e Trigonometria, já as técnicas que envolvem derivadas e integrais podem ser abordadas em um curso básico de Cálculo Diferencial e Integral.

Uma outra abordagem possível, diz respeito as aproximações numéricas envolvidas. Dessa forma, nosso trabalho também pode ser usado para trabalhar os conteúdos relacionados a aproximação de números irracionais por racionais, enfatizando a questão do erro cometido em tais aproximações. Podendo esses cálculos serem feitos usando uma calculadora ou, como fizemos, através de algum software educacional, que no nosso caso foi utilizado o Geogebra, que é um software de interface simples que pode ser usado por alunos do ensino fundamental, médio e superior.

Espera-se, portanto, que este trabalho contribua para a melhora do ensino da Matemática, tornando a aprendizagem mais significativa e contribuindo para que o leitor tenha uma outra visão a respeito de conteúdos matemáticos tradicionais. Assim, esse texto pode ser usado como motivação, mostrando que a matemática que conhecemos hoje não surgiu de repente, mas sim através do esforço de grandes matemáticos que viveram em épocas distintas, como é o caso do número π , cuja busca por seu valor data de cerca de 2000 a.C e vai até os dias atuais.

Referências Bibliográficas

- [1] **Beckmann, Petr.** *A HISTORY OF PI (π)*. New York: St Martin's Press, 1971.
- [2] **Brannan, David A.** *A First Course in Mathematical Analysis*. ed. Cambridge University Press, New York, 2006. 459 p.
- [3] **Courant, Richard.;** **ROBBINS, Herbert.** *O que é Matemática*. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2000. 615 p.
- [4] **Eves, Howard.** *Introdução à história da matemática*. Tradução Hygino H.Domingues. 5ª ed. – Campinas, sp: Editora da Unicamp, 2011. 848 p.
- [5] **Eymard, Pierre;** **LAFON, Jean-Pierre.** *Autour du nombre π* . Éditeurs des Sciences et des Arts, 1999.
- [6] **Guidorizzi, Hamilton L.** *Um curso de cálculo - vol 4*. 5ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.
- [7] **Maor, E.** *A história de um número*. Rio de Janeiro: Editora Record, 2003.
- [8] **Posamentier, Alfred S.;** **LEHMANN, Ingmar.** *Pi: a biography of the world's most mysterious number*. New York: Prometheus Books, 2004. 324 p.
- [9] **Simmons, George F.** *Cálculo com Geometria Analítica - volume 1*. Tradução: Seiji Hariki. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.
- [10] **Simmons, George F.** *Cálculo com Geometria Analítica - volume 2*. Tradução: Seiji Hariki. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.
- [11] <https://iq.intel.com.br/a-historia-do-pi-e-mais-do-que- apenas-314/>
- [12] https://www.researchgate.net/publication/277232597_El_numero_PI_y_su_historia
- [13] www.matematicajatai.com/rematFiles/2-2010/pi.pdf
- [14] https://pt.wikipedia.org/wiki/Cronologia_do_c%C3%A1lculo_de_%CF%80
- [15] http://eprints.ucm.es/8163/1/numpi_uimp_rrodriguez.pdf