UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA– PPGECEM
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

JOSEANE MIRTIS DE QUEIROZ PINHEIRO

A PERGUNTA E SEUS CONTRIBUTOS PARA AS ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMA ALGÉBRICO NO 3º ANO DO ENSINO MÉDIO

Campina Grande – PB
2016

JOSEANE MIRTIS DE QUEIROZ PINHEIRO

A PERGUNTA E SEUS CONTRIBUTOS PARA AS ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMA ALGÉBRICO NO 3º ANO DO ENSINO MÉDIO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática - PPGECEM, do Centro de Ciências e Tecnologia, da Universidade Estadual da Paraíba (UEPB) como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Área de Concentração: Educação Matemática

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Kátia Maria de Medeiros

Campina Grande
2016

P654p Pinheiro, Joseane Mirtis de Queiroz.
A pergunta e seus contributos para as estratégias de resolução de problema algébrico no 3º ano do ensino médio [manuscrito] / Joseane Mirtis de Queiroz Pinheiro. - 2016.
147 p. : il. color.

Digitado.
Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2016.
"Orientação: Profa. Dra. Kátia Maria de Medeiros, Departamento de Matemática".

1. Ensino de matemática. 2. Ensino-aprendizagem. 3. Problemas algébricos. 4. Matemática - Resolução de problemas. I. Título.
21. ed. CDD 372.7

JOSEANE MIRTIS DE QUEIROZ PINHEIRO

A PERGUNTA E SEUS CONTRIBUTOS PARA AS ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMA ALGÉBRICO NO 3º ANO DO ENSINO MÉDIO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática- PPGECEM, do Centro de Ciências e Tecnologia, da Universidade Estadual da Paraíba (UEPB) como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Aprovada em 14/12/2016

BANCA EXAMINADORA

Kátia Maria de Medeiros

Profª. Dra. Kátia Maria de Medeiros - Presidente (UEPB)

Rosinalda A. de Melo Teles

Profª. Dra.Rosinalda Aurora de Melo Teles – Membro Externo (UFPE)

Rogéria Gaudencio do Rêgo

Profª. Dra. Rogéria Gaudencio do Rêgo – Membro Interno (UFPB)

Aos meus Pais, Milton e Geraldina, que me ajudam em todos os momentos.

Dedico

E as minhas filhas Laura Karen e Laís Eduarda, motivos de alegria e orgulho em minha vida.

Dedico

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, e acima de tudo e de todos, a Deus, Mestre e Senhor de todos nós, por ter me dado força e coragem para enfrentar todas as dificuldades sem nunca desistir, nem ser pessimista diante dos desafios vencidos durante todo esse percurso de experiência e aprendizado.

À Professora Dra. Kátia Maria de Medeiros, pela orientação, apoio e confiança em todos os momentos. Por acreditar em mim e no meu trabalho. Foi realmente um aprendizado. Agradeço pela paciência, compreensão e por me ajudar a vencer essa etapa tão importante da minha vida.

A todos os professores do Mestrado, em especial àqueles com os quais paguei disciplinas: Dra. Kátia Medeiros, Dr. Rômulo Marinho, Dra. Filomena Moita, Dr. Silvanio de Andrade, Dr. José Joelson Pimentel, Dra. Ana Paula Bispo da Silva, Dra. Abgail Lins. A todos o meu "obrigado" pelas aprendizagens proporcionadas.

À professora Edjane Gomes, Gestora do Colégio Normal Estadual de Afogados da Ingazeira - PE, pela disponibilidade com que me recebeu naquela escola e também por apoiar minha atividade de estudo e pesquisa.

À professora Paloma Leite e as alunas do 3º Ano do Ensino Médio do Colégio Normal Estadual, que colaboraram com esta pesquisa.
Aos demais colegas Professores do Colégio Normal Estadual pela força e pelo apoio ao meu trabalho, especialmente a Coordenadora Pedagógica Dra. Nádja Patrícia Almeida, que me ajudou diretamente com sugestões e material.

A todos da Secretaria Municipal de Educação de Afogados da Ingazeira – PE.

Aos colegas de curso, pelas trocas de experiências, momentos de estudo, discursões e descontração na sala entre uma aula e outra. Muito obrigado a todos.

Um agradecimento especial ao colega André Lima que me recebeu muitas vezes em sua cidade, Monteiro – PB, durante a realização do Projeto *Investigando a Formulação e a Resolução de Problemas Matemáticos na Sala de Aula: Explorando Conexões entre Escola e Universidade*, da CAPES, coordenado por minha orientadora e do qual participei como bolsista/pesquisadora da Escola Básica. desenvolvido no âmbito do Programa Observatório de Educação, o que me proporcionou um crescimento profissional e pessoal.

À minha mãe, Geraldina Queiroz, e ao meu pai Milton Pinheiro pela preocupação e o cuidado que sempre tiveram comigo, principalmente durante as viagens a Campina Grande – PB.

A minha irmã e meus sobrinhos, que mesmo longe me apoiam nos estudos.

Aos meus tios Bartolomeu Alves, Margarida Queiroz, Luiz Gonzaga Queiroz, Luiza Queiroz, Manoel Queiroz e José Queiroz (IN MEMORIAN) que participaram diretamente da minha criação e Educação, aos quais agradeço muito tudo que eu sou hoje como pessoa.

Aos meus Avós (Antonina Alves, Elói Agostinho, Maria José Brasil) IN MEMORIA.

As minhas filhas Laura Karen e Laís Eduarda, que amo incondicionalmente.

A toda equipe do PPGECEM, em especial à Secretária Karla Barboza, aos Professores Dr. Silvanio Andrade, Dr. Eduardo Onofre e Dr. José Joelson Pimentel, por quem tenho um carinho todo especial. Muito obrigado.

Aos colegas do Projeto *Investigando a Formulação e a Resolução de Problemas Matemáticos na Sala de Aula: Explorando Conexões entre Escola e Universidade*, coordenado pela Professora Dra. Kátia Maria de Medeiros e desenvolvido no âmbito do Programa Observatório de Educação, da CAPES, pelas experiências e todo aprendizado.

A CAPES, pelo apoio financeiro para viagens a eventos científicos, através do Projeto *Investigando a Formulação e a Resolução de Problemas Matemáticos na Sala de Aula:*

Explorando Conexões entre Escola e Universidade, coordenado por minha orientadora e do qual participei como bolsista/pesquisadora da Escola Básica, desenvolvido no âmbito do Programa Observatório de Educação, o qual me proporcionou um crescimento profissional e pessoal.

Ao Poeta Diomedes Mariano, de Afogados da Ingazeira – PE, que prontamente se dispôs a compor versos para muitas de minhas apresentações de trabalhos. Sua poesia encantou colegas e professores durante o curso.

À professora Dra. Abgail Lins pelas contribuições na banca do Exame de Qualificação.

Às professoras Dra. Rosinalda Teles e Dra. Rogéria Rêgo pelas contribuições na banca do Exame de Qualificação.

Às professoras Dra. Cibelle de Assis e Regina Maria Pavanello pelas contribuições na banca de Qualificação.

Enfim, a todos aqueles (as) que contribuíram, direta ou indiretamente, para realização dessa pesquisa e a concretização desta conquista.

“Matemática, onde os números são reais,

Totalizam e indicam conclusões,

Inteirar-se por fim das expressões,

É fazer o aluno avançar mais.

Quando a fórmula é correta e eficaz,

Quando o método correto é aplicado,

O aluno se sente interligado,

Pensa igual ao que pensam os professores,

Como os números, as letras têm valores,

Fazem parte do mesmo aprendizado”.

(MARIANO, Diomedes. Poeta do Pajeú – Afogados da Ingazeira – PE, 05/12/2016).

RESUMO

PINHEIRO, J. M. Q. **A Pergunta e seus Contributos para as Estratégias de Resolução de Problema Algébrico no 3º Ano do Ensino Médio**. 2016. 147 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual da Paraíba – UEPB, Campina Grande, 2016.

A presente pesquisa teve como objetivo investigar como as perguntas podem promover o desenvolvimento de estratégias de resolução de problema algébrico no 3º Ano do Ensino Médio. Foi realizada com alunos do 3º Ano do Ensino Médio de uma Escola pública da Rede Estadual de ensino da cidade de Afogados da Ingazeira – PE, no período de junho/2015 a dezembro/2016. A Metodologia utiliza uma pesquisa qualitativa. Trata-se de estudos de caso, foram realizados dois estudos de caso, cujas alunas participantes foram indicadas pela professora. Utilizamos como instrumentos de coleta de dados entrevistas (semiestruturadas) com as alunas constituintes dos estudos de caso e a realização de uma tarefa de resolução de problema com as alunas. Os resultados sugerem que Beatriz entende que a ação de resolver problemas é diferente de fazer exercícios. Para Beatriz o ato de perguntar serve, basicamente, para tirar dúvidas e relembrar assuntos passados. Perguntas do tipo real e de exame nos permitiram obter da aluna uma informação ou um levantamento de conhecimentos prévios. Já as perguntas didáticas, exploraram seu modo de pensar sobre a Matemática, interpretação, a busca por soluções, reflexões e conjecturas, além de favorecer os cálculos escritos. Beatriz desenvolveu basicamente duas estratégias de resolução para o problema algébrico. Na primeira se utilizou da Aritmética, especificamente das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão. Na segunda, utilizou-se do Sistema de Equações Lineares do 1º Grau. As perguntas lhe ajudaram a tomar decisões e proceder com o desenvolvimento do Sistema de modo satisfatório. Para Júlia o problema é uma questão que traz um desafio que precisa ser entendido para depois poder resolver. Sua concepção sobre a pergunta é que esta é importante para relembrar assuntos passados, tirar dúvidas ou esclarecer e completar algo que já sabe ou mesmo sobre o conteúdo, quando não entende algo. As perguntas real, de exame e as didáticas fizeram-na expor seus conhecimentos prévios e fornecer informações destes à professora pesquisadora a ajudando em outras ações, diante do problema. Com as perguntas didáticas Júlia refletiu mais sobre o que está posto no problema, como as informações e a representação gráfica, que lhe ajudaram nas reflexões em busca de soluções. Ela desenvolveu basicamente duas estratégias de resolução do problema algébrico. Na primeira utilizou as operações fundamentais da Aritmética especificamente à adição, subtração, divisão sem nenhuma dificuldade. Na segunda, ela utilizou a Álgebra, elaborando três equações com os pesos, utilizando o algoritmo de Sistemas de Equações Lineares do 1º grau, sem dificuldade. A linguagem algébrica e sua representação não parecem ter sido problema para ela. As perguntas fizeram-na ampliar seu raciocínio algébrico, considerando o modo como demonstra a organização do problema.

Palavras-chave: Pergunta. Ensino-Aprendizagem da Álgebra. Estratégias. Resolução de Problema Algébrico. Ensino Médio.

ABSTRACT

PINHEIRO, J. M. Q. **The Question and its Contributions to the Algebraic Problem Solving Strategies in the 3rd year of High School.** 2016. 147 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual da Paraíba – UEPB, Campina Grande, 2016.

The aim of the present research was to investigate how questions can promote the development of strategies to solve an algebraic problem in the 3rd Grade of High School. It was carried out with students of the 3rd Grade of High School of a Public School from the State Educational System of the city Afogados da Ingazeira - PE, from June/2015 to December/2016. The Methodology uses qualitative research. These are case studies, two case studies were carried out, whose participating students were indicated by the teacher. It was used as data collection instruments the application of semi-structured interviews to the teacher in charge of the class and to the students who were part of the case studies, and the execution of a problem solving task with the students. The results suggest that the teacher in charge values the Problem Solving Methodology and uses exercises, although she thinks that she is using problems. Therefore, the question in her classes seems to be reduced to the IRE standard. Beatriz understands that solving problems is different from doing exercises. For Beatriz, the act of asking functions basically to clear up doubts and remind about previously studied subjects. Actual questions and examination questions allowed us to obtain information and a survey of previous knowledge from the student. The didactic questions, on the other hand, explored her way of thinking about Mathematics, interpretation, search for solutions, reflections and conjectures, besides favoring the written calculations. Beatriz developed basically two solving strategies for the algebraic problem. In the first one she used arithmetic, specifically the operations of addition, subtraction, multiplication and division. In the second she used the System of Linear First Degree Equations. The questions helped her to make decisions and to proceed with the development of the System satisfactorily. For Julia, a problem is a question that brings a challenge that needs to be understood and then solved. Her conception about a question is that it is important to remember subjects previously studied, to clarify and to complete something that you already know or even about content when you do not understand something. The actual questions, the exam questions and the didactic questions made her expose her previous knowledge and provide information about them to the researcher teacher, what helped her in other actions regarding the problem. With the didactic questions, Julia reflected more about what is in the problem, like the information and the graphical representation, which helped her in the reflections to search for solutions. She developed basically two strategies to solve the algebraic problem. In the first one, she used the arithmetic fundamental operations, specifically addition, subtraction and division, without presenting any difficulty. In the second one, she used the Algebra and she elaborated three equations with the weights using the algorithm of Systems of Linear First Degree Equations, without presenting any difficulty. The algebraic language and its representation do not seem to have been a problem for her. The questions made her broaden her algebraic thinking, considering the way how she demonstrates the organization of the problem.

Keywords: Question. Teaching and Learning of Algebra. Strategies. Algebraic Problem Solving. High school.

LISTA DE SIGLAS

EUA – Estados Unidos da América

PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais

SAEB – Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica

SAEPE – Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco

SESM - Strategies and Errors in Secondary Mathematics

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Como professora do Ensino Fundamental e Médio, na área de Matemática há mais de 10 anos, podemos conviver na prática, com as dificuldades em promover a aprendizagem nesta disciplina, principalmente no que tange ao Ensino da Álgebra e ao processo de Comunicação a ser estabelecido entre professor/aluno e aluno/aluno nas aulas de Matemática. Em todo esse período de experiências adquiridas em sala de aula, nas formações de professores e mesmo no trabalho com colegas, e por ter consciência dessas dificuldades, temos percebido alguns avanços em relação à prática do Ensino da Matemática, ainda modestos, mas que vem despertando interesse por parte dos profissionais e também por parte do sistema educacional. Este, apesar de não se mostrar muito eficiente, tem se incomodado com os baixos índices de aprendizagem apresentados pelos alunos, nos últimos tempos, principalmente em Matemática. As avaliações internas e externas mostram que algo precisa ser feito para reverter essa situação.

Nessa direção, é preciso pensar num modo de corrigir os principais gargalos do Sistema Educacional que perpassam por questões ligadas a infraestrutura das escolas, redução do número de alunos por turma, valorização dos profissionais e formação de professores, este sendo um dos grandes desafios do Ensino Médio. Uma perspectiva de ensino de Qualidade Social, voltado para o Direito à Educação e a Formação Humana Integral, requer uma repactuação desse ensino, onde propostas curriculares possam ser discutidas democraticamente com todos os interessados da área educacional para depois serem incrementadas com conteúdos que favoreçam a formação pessoal e intelectual do aluno. Pois, sendo a última etapa do ensino básico, o Ensino Médio visa não apenas prepararará-lo para ingresso nas Universidades, portanto seus conteúdos não devem ser pautados pela cobrança do vestibular, mas também poder contribuir, de modo eficiente, em sua vida social e profissional. Temos consciência de que essa não é apenas uma realidade brasileira, porém, a abordagem mecânica e superficial dada pela escola ao conhecimento matemático, associada ao problema da má formação de professores - que apresentam dificuldades de lidar com aspectos relevantes, como os saberes dos alunos e situações didáticas que lhes proporcionem construção de saberes próprio - vem desfavorecendo um ensino-aprendizagem da Matemática mais reflexivo-construtivo.

Nesse sentido, precisamos considerar o aluno um ser ativo fora do contexto escolar, imerso nas transformações e avanços tecnológicos, cujas experiências pessoais devem servir de elemento propulsor de novas aprendizagens. Assim, um ensino baseado em regras e técnicas, que insistem em acontecer na maioria das escolas, não parece favorecer habilidades voltadas à construção de saberes pelo aluno, onde este possa ter consciência de que aprender é interessante, principalmente para ele. A Educação Matemática vem contribuindo muito com essa mudança de prática do professor, quando defende uma “Educação pela Matemática e não uma Matemática com um fim em si mesma” (FIORENTINI & LORENZATO, 2007). Seus aspectos reflexivos e sua preocupação com o domínio de ideias e processos pedagógicos, associados à Metodologia de Resolução de Problemas, permitem ao aluno pensar sobre a Matemática, dar significado a seus conceitos e desenvolver, de forma mais eficiente, suas estratégias de resolução.

Os métodos interpretativos e analíticos das ciências sociais e humanas utilizados pela Educação Matemática têm como finalidade desenvolver conhecimentos e práticas pedagógicas que contribuam para uma formação integral, humana e crítica do aluno e do professor (FIORENTINI & LORENZATO, 2007). Nossa principal hipótese é verificar se a pergunta feita, por professor e alunos, durante a resolução de um problema algébrico, contribuem para que estes desenvolvam estratégias mais eficientes de Resolução. Os participantes no desenvolvimento desta pesquisa foram duas alunas do 3º Ano do Ensino Médio de uma escola pública estadual localizada na cidade de Afogados da Ingazeira, Sertão do Alto Pajeú, no Estado de Pernambuco.

Ao exercer a atividade de professora, percebemos junto aos alunos, a necessidade de conduzir o processo de comunicação e interação entre professor e alunos na aula de Matemática, para que ambos fortaleçam suas relações interpessoais e também favoreça a troca de conhecimentos, na intensão de uma aprendizagem matemática construtiva. As informações resultantes dessas interações nos permitem refletir sobre a prática, buscar mudanças, e ampliar o conhecimento do aluno através das intervenções sobre o que foi posto por este.

O que temos em vista é oportunizar ao aluno desenvolver sua capacidade de comunicação matemática, seja ela oral ou escrita, pois um ensino que não valoriza o diálogo perde sua essência de significados, dada à falta de participação dos sujeitos, professor e alunos, no processo, evitando que apenas um deles, no caso, o professor, faça pergunta, obtendo resposta de apenas um aluno, que ele avalia e dá prosseguimento ao trabalho, dando pouca margem criativa à participação deste. Esse padrão de comunicação foi chamado por Franke, Kazemi & Battey (2007), de ***IRA*** (Iniciação-Resposta-Avaliação).

Também nas Formações de Professores, em momentos de discursões e reflexões sobre nossa ação didático/pedagógica, percebemos que essa é uma vontade compartilhada pelos demais colegas, visto a complexidade entre tratar a diversidade de saberes existentes na sala de aula, que segundo Tardif, Lessard e Lahaye (1991) são confrontados com os saberes acadêmicos e que não são rejeitados totalmente pelos professores, que os incorporam à sua prática, retraduzindo-se em categorias do seu próprio discurso. Em relação ao Ensino Fundamental (Anos Iniciais, 1º ao 5º Ano), muitos conceitos algébricos que poderiam ser desenvolvidos através do raciocínio no trabalho lúdico com os alunos, têm deixado marcas de deficiências, as quais são carregadas às demais etapas da escola básica, especificamente refletidas posteriormente, na não consolidação desses conceitos no Ensino Médio.

Outro aspecto a observar é que o livro didático nem sempre contempla, de forma satisfatória, problemas dentro do campo conceitual da Álgebra nos anos iniciais do Ensino Fundamental, o que possibilitaria ao professor melhor tratamento desse bloco matemático, entendendo que este é um recurso bastante utilizado por ele em sala de aula e representa "um instrumento de circulação e de apropriação do conhecimento, sobretudo daqueles cuja difusão é de responsabilidade da escola" (PINHEIRO, 2004). Estas reflexões e experiências deram origem a nossa pesquisa inicial, ainda durante o curso de Especialização e, nessa direção, demos continuidade a estudos desta natureza dentro do campo algébrico.

Consideramos ser dever da escola, lidar com questões matemáticas vividas pelo aluno em seu dia-a-dia, mostrando-lhe a importância e utilidade desses conceitos no meio social. Segundo (GOMÉZ-GRANELL, 2008) atualmente, é difícil encontrar um setor no qual a Matemática não esteja presente. Isso tanto ocorre nas áreas das Ciências, de modo geral, como também seus modelos servem para explicar comportamentos, tomada de decisões políticas, sociais, econômicas e até mesmo pessoais. A Autora afirma ainda que não é raro encontrar na literatura comentários de diversos autores relembrando a sua insatisfatória experiência com a aprendizagem da Matemática e ela aparece como algo denso e enigmático até mesmo para pessoas cultas e instruídas, sendo um paradoxo ser um dos conhecimentos mais valorizados e necessários na sociedade atual, ao mesmo tempo, inacessível para a maioria da população, funcionando como filtro seletor do sistema educacional.

Nessa perspectiva buscamos com esse trabalho identificar modos de raciocínio dos alunos na construção de estratégias de resolução de problema, especialmente o algébrico, pois reconhecemos dificuldades mais acentuadas em relação à aplicação desses conceitos, cujo objeto principal são os símbolos. Sendo a Álgebra uma importante ferramenta matemática, se faz necessário compreender as razões pelas quais esse conhecimento ainda se encontra tão inacessível aos alunos. Estamos tratando como conhecimento algébrico, as formas de raciocínio aplicados na determinação de incógnitas e variáveis, presentes nas questões algébricas propostas no Ensino Médio.

> Como toda linguagem, a Álgebra possui sua forma de representação, que se diferencia da linguagem natural e também de outras linguagens. A própria natureza do conhecimento matemático é diferente, em muitos aspectos, dos outros tipos de conhecimento. Seu caráter de abstração é muito maior que qualquer outro conteúdo, embora existam numerosos conceitos abstratos em qualquer ciência (GOMÉZ-GRANELL, 2008, p. 259).

A questão está nas especificidades desse conhecimento e de como a escola o difunde. Esse aspecto faz parte de um contexto social e intelectual que influi na formação de cidadãos atuantes na sociedade, buscando contribuir com sua mudança. Para isso, espera-se que, através do ensino, o aluno mude sua forma de lidar com esse conhecimento matemático, entendendo sua importância prática e não o tendo como um obstáculo. Assim, deve estar focado na necessidade desse aluno, buscando ajudá-lo a refletir sobre o que ele já sabe e avançar nessas reflexões até conseguir formalizar seu conhecimento.

Considerando o exposto, formulamos a seguinte questão norteadora: *A pergunta feita, por professor e alunos, nas aulas de Matemática, podem ajudar o aluno a desenvolver estratégias eficientes de resolução de problema algébrico?*

Temos por Objetivos:

Geral:

- Investigar como a pergunta pode contribuir para o desenvolvimento de estratégia eficiente de Resolução de Problema Algébrico no 3º Ano do Ensino Médio.

Específicos:

- Identificar a concepção do aluno sobre a resolução de problemas e sobre a pergunta que surge durante a resolução de um problema algébrico;

- Propor um problema algébrico ao aluno para identificar as estratégias de resolução por ele utilizadas;
- Investigar se o tipo de pergunta feita pelo professor, no processo de resolução do problema algébrico pelo aluno, favorece o desenvolvimento de suas estratégias de resolução;
- Investigar se, mediado pela pergunta, o aluno desenvolve estratégias eficientes de resolução de um problema algébrico.

No Capítulo 1 tratamos da comunicação como um fenômeno social, que proporciona interações e viabiliza o conhecimento na sala de aula de Matemática. Dada sua importância, representa uma ferramenta para o ensino-aprendizagem desta disciplina, especificamente tendo a Pergunta como implicadora de Aprendizagem.

No Capítulo 2, apresentamos um aporte teórico sobre a Metodologia de Resolução de Problemas e suas contribuições para o Ensino-Aprendizagem da Matemática. No Capítulo 3, discutimos fundamentos teórico-metodológicos voltados para o Ensino-Aprendizagem de Álgebra como parte essencial da Matemática. O Capítulo 4 traz a Metodologia utilizada nessa pesquisa. O Capítulo 5 traz o Primeiro Estudo de Caso com a aluna Beatriz. O Capítulo 6 traz o Segundo Estudo de Caso com a aluna Júlia.

Por fim, nossas conclusões e considerações finais sobre o estudo, bem como recomendações para futuras pesquisas.

1. COMUNICAÇÃO NA AULA DE MATEMÁTICA

A comunicação na sala de aula de Matemática pode ser efetivada pelo professor que deseja obter resultados significativos, visto que proporciona interações que podem viabilizar o conhecimento. Assim sendo, essa prática pode ser valorizada e estimulada, mobilizando conhecimentos que favoreçam o processo de ensino-aprendizagem. Consideramos aqui a comunicação como fenômeno social, presente em qualquer prática escolar, com seus diversos tipos, e, de forma mais específica, consideramos a pergunta e sua relação com o ensino-aprendizagem da Matemática.

1.1. Tipos de Comunicação

A comunicação matemática abrange um amplo conjunto de processos de interação entre os alunos e entre estes e o professor, os quais configuram óticas distintas em relação à valoração das ideias matemáticas dos alunos (GUERREIRO, 2014). Assim, temos a comunicação como elemento estruturante do processo de ensino-aprendizagem da Matemática, pois facilita a troca de saberes entre professor-aluno e aluno-aluno numa relação dialógica, onde as partes se ouvem e interagem buscando o conhecimento.

Essa prática é possível na relação ensino-aprendizagem, pois o aluno pode expor suas ideias, sejam elas consideradas corretas ou não pelo professor, para o mesmo poder fazer intervenções significativas que o façam refletir e construir novos conhecimentos, a partir daqueles que já possui como referência. Para isso, é necessário que "o professor assuma diferentes pontos de vista em relação ao que os alunos pensam, para que possa encorajá-los a falar de modo exploratório, o que apoia o desenvolvimento da compreensão", como afirmam Ruthven, Hofmann e Mercer (2011). Um conhecimento referenciado pelo aluno pode ser uma forma, como afirmam estes autores, "de promoção de mais reflexões e argumentações".

Vários tipos de comunicação podem surgir durante o processo de ensino-aprendizagem da Matemática, fruto das interações entre professor e alunos. Destacaremos alguns que nos parecem relevantes:

1) *Argumentação* - uma técnica ou método de discurso para estabelecer uma afirmação (BANEGAS, 1998), ou seja, um processo que produz um discurso lógico (não necessariamente dedutivo) sobre um dado assunto (DOUEK, 1999). Para esses

autores, numa discussão, a argumentação pode ser caracterizada como o esforço de transformar algo discutível em algo aceitável por todos os participantes, não necessariamente ocorrendo de forma harmoniosa, pois a mesma permite tomada de posições (decisões, escolhas) que podem gerar desacordos, o que permite a mudança e a correção das diferentes afirmações que vão sendo estabelecidas. O conjunto dessas afirmações passo a passo irá tomando forma, sendo os desacordos superados, podendo a argumentação ser vista como um processo interativo.

Sua problemática surge associada ao reconhecimento do papel da comunicação e da interação social na aquisição de conhecimento (DUVAL, 1999). Promover a argumentação suscita a participação dos alunos na sua própria aprendizagem (BOAVIDA, 2005), sendo papel do professor, criar condições para que os alunos aprendam a raciocinar matematicamente, sabendo expressar suas ideias e compreender a dos outros.

2) *Interpretação* – potencialidade em compreender ideias e expor pensamentos a respeito de algo, buscando explicar, à sua maneira, aquilo que lhe foi posto. Requer uma ação criativa e não repetitiva de outras ações. Permite que os alunos expressem, de forma oral ou escrita, suas ideias matemáticas.

3) *Padrões de interação* - Tipo de comunicação que assume diversas denominações de acordo com suas particularidades e seus autores. Professor e alunos compartilham rotinas e práticas em sala de aula. Suas naturezas se diferem, sendo caracterizados por uma prática repetitiva de fatos e procedimentos matemáticos nas quais o professor assume papel de transmissor de conhecimentos perante os alunos, meros ouvintes (GUERREIRO, 2014).

4) *Negociação de significados* – A construção do conhecimento na sala de aula se alicerça na negociação de significados, num processo em que os intervenientes se encontram, se influenciam e sofrem mudanças a partir de experiências individuais ou coletivas de interação com os objetos matemáticos ou com outros indivíduos (GUERREIRO, 2014).

5) *Explicação* - Bishop e Goffree (1986), afirmam que explicar é expor conexões, num processo sem fim de representar conexões entre a ideia que está sendo explicada e outras ideias. Para Leinhardt (2001), explicações são dadas como resposta à pergunta “por que”, num dado conteúdo de ensino. As questões para as quais uma explicação é desenvolvida, de acordo com a autora, podem ser implícitas ou explícitas. Considera as explicações de modo amplo e apresenta quatro tipos fundamentais de

explicações: (I) *explicações comuns*; (II) *auto explicações*; (III) *explicações disciplinares;* e (IV) *explicações instrucionais.*

6) *Pergunta* – Pereira (1991) a define como uma interpelação feita formalmente numa forma interrogativa, tendo como objetivo obter uma resposta por parte do aluno, sendo, para isso, necessário um tempo de espera para que a resposta seja produzida.

De modo geral, essas ações comunicativas contribuem para o ensino-aprendizagem da Matemática e, de certa forma, fazem parte da prática letiva do professor, pois seu discurso deve ser construído com base a favorecer o discurso do aluno. Além de serem indissociáveis no processo, podem ser vistas como um caminho para se chegar a um ensino-aprendizagem da Matemática, prazeroso e significativo. Menezes et al (2014) afirmam que, “quando o discurso é produzido pelo professor e gera discursões coletivas, pode culminar em processos de negociação de significados matemáticos que se fundamentam em padrões de interação entre professor e alunos”. Toda esta atividade Matemática depende de tarefas desafiadoras para os alunos e de materiais com capacidade para representar ideias matemáticas e potenciar o raciocínio.

Os momentos de discursão produzidos na ação de resolver problemas podem ser bem explorados pelo professor para que o aluno se sinta desafiado a questionar e não apenas aplicar alguma forma de resolução. Essa busca pode ser construída a partir do que ele já sabe, e instigada por meio da pergunta, que pode surgir nesse processo de interação, fazendo-o pensar em outras formas de solução. Daí seu caráter mobilizador de conhecimento, pois traz o aluno para o centro das discursões, promovem sua interação com os demais colegas e até pode ajudá-lo a fazer conexões entre o que sabe e o que está sendo construído naquele momento, tendo o professor como mediador. Essas ações poderão contribuir com novas estratégias de resolução de problemas.

Mata (1990) considera que, ao fazer pergunta, o professor alcança objetivos relevantes, pois pode obter informação que não possui, provocando, de maneira indireta, a realização de ações que os orientem na sistematização da informação relativa a um dado saber e com isso avalie a quantidade e a qualidade de seus conhecimentos.

Pereira (1991) desenvolveu um estudo que mostra outras finalidades para a pergunta, como a capacidade de centrar a atenção dos alunos em aspectos que o professor considera relevantes; ou provocar efeitos positivos na sua participação (fazê-los falar); ou na promoção de atitude intelectual menos passiva (fazê-los pensar) minimizando os efeitos da indisciplina.

1.2. A Pergunta

A comunicação existente entre professor e alunos na aula de Matemática pode servir como meio para melhorar a aprendizagem e deve ocorrer durante todo o processo de Ensino. Menezes et al (2014, p. 139) afirmam que “a valorização desta perspectiva pressupõe uma Educação Matemática caracterizada pelas relações dos sujeitos com o mundo, com os outros e consigo próprio, em processo de interação social”.

Comunicar-se matematicamente significa ter domínio de uma linguagem própria, na qual códigos são partilhados através das relações de interação entre professor e alunos. Para reconhecer a Matemática como uma linguagem, tendo ambas, Matemática e comunicação, naturezas sociais, é importante considerar que as interações comunicativas estabelecidas nas aulas de Matemática são essenciais para o processo de aprendizagem. Assim, a resolução de problemas tem se mostrado uma metodologia eficiente, por ajudar o aluno a compreender melhor os conceitos matemáticos, e, associada à comunicação pode ser o diferencial.

À proporção que o professor propõe pergunta para que o aluno exponha suas ideias, descreva e explique estratégias, permite construir um ambiente cooperativo inverso àquele que predominou por muito tempo, e que insiste em acontecer em muitas escolas, no qual a ênfase é dada aos cálculos e procedimentos mecânicos.

> Os estudos em Educação Matemática têm focado as interações entre o professor e os alunos na sala de aula, o conhecimento matemático socialmente construído e a capacidade de alunos e professores entenderem, refletirem e negociarem significados e estabelecerem conexões matemáticas (MENEZES et al 2014, p. 139).

Menezes et al (2014) afirmam que nessas interações registram-se posições divergentes entre os que assumem a comunicação como: (I) um instrumento para a circulação do conhecimento matemático, inscrito num código, ou (II) um processo social de construção e partilha do conhecimento matemático entre os alunos e professor.

A realidade presente em muitas escolas hoje ainda é aquela de que o aluno chega para ouvir o que o professor/escola tem a ensinar. Assim, ele começa a interagir com as verdades imutáveis, prontas, trazidas pelo conhecimento científico e, consequentemente, irá memorizá-las e reproduzi-las em suas experiências futuras. Porém, a constante mudança vivida por ele, na sociedade atual, exige pensar, agir na prática, coisa que ele não desenvolveu nesta perspectiva de aprendizagem voltada para a transmissão e recepção de conhecimento.

Esse meio de certezas que o envolve na escola não reflete nas expectativas que espera a sociedade na qual vive ou no mundo do trabalho. Ramos, Moraes e Galiazzi (2004) e Kuhn (1978) afirmam que a visão que se tem hoje na universidade é de que não existem verdades irrefutáveis, mas conhecimentos bem argumentados e fundamentados, aceitos pela comunidade científica como verdade provisória. O professor já não é mais o detentor do conhecimento, o qual repassa aos alunos que nada sabem. Essa visão ultrapassada de ensino deve dar espaço a alunos protagonistas, os quais refutam informações e criam argumentos, sendo capazes de construir o seu próprio saber, tendo por base experiências anteriores à escola, enriquecidas pelo conhecimento científico que compartilham no ambiente escolar. As ferramentas por eles criadas possibilitam uma aprendizagem útil ao seu dia a dia.

Por outro lado, temos a pergunta presente na sala de aula, que nos possibilitam uma prática interativa de comunicação que enriquece o processo de aprendizagem a partir da problematização. Esta pressupõe uma articulação maior de significados no trabalho coletivo com os alunos. Nessa perspectiva, o professor, como mediador do conhecimento, poderia se utilizar mais da pergunta no processo de ensino, para que os alunos pudessem também aprender a perguntar. Entendendo que até a própria ciência, ao construir um novo conhecimento, pode partir da pergunta, o ensino da Matemática pode ser favorecido por esse elemento construtor de conhecimentos. Com isso, buscamos investigar se esse processo de comunicação estabelecido na sala de aula, entre professor e alunos, mobilizado pela pergunta, pode ajudar os alunos a desenvolverem estratégias de resolução de problemas. Essa investigação parte do pressuposto de que ambos, professor e alunos, nos momentos de interação, possam, através desta, chegar a um pensar matemático, no qual, o aluno possa fazer uso de conhecimentos já construídos para compreensão de outros mais elaborados e o professor possa criar situações que permitam a concretização desse fato.

As curiosidades trazidas pelos alunos devem ser valorizadas e discutidas em sala de aula com o intuito tanto de buscar respostas, e avançar na aprendizagem, quanto o de questionar verdades postas, pois as dúvidas representam inquietações que precisam ser saciadas. Nessas práticas, segundo Camargo et al (2014) “a pergunta e o diálogo na sala de aula são modos que podem colocar em confronto saberes e promover a dúvida, passo importante para gerar a busca de novos conhecimentos”. Também pode motivar a aprendizagem, pois ações comunicativas de qualidade podem gerar aprendizagens de qualidade, aspecto a considerar na formação do aluno, portanto a importância dada pelo professor à pergunta nesse processo.

O fato do professor perguntar, o aluno responder e ele analisar se a resposta do aluno está correta ou não, pressupõe autoridade prevalecente por parte do professor, que parece continuar sendo o dono do saber em sala de aula. O que pretendemos é que essa prática aconteça de outra forma, na qual, ao perguntar, o aluno não tenha que ouvir uma resposta pronta, correta, do ponto de vista do professor, mas que ambos busquem investigar prós e contras que levem a um consenso. Nesse processo, a pergunta poderá mobilizar conhecimentos que ajudem os alunos desenvolverem suas estratégias de resolução de problemas, tendo-as como um norte para aprendizagem.

Percebemos que esse processo não está funcionando como deveria. Há objetivos a serem alcançados, junto as propostas de ensino-aprendizagem que, muito mais que ensinar conceitos, devem valorizar a formação do cidadão, enquanto agente de transformação social, que constrói argumentos, refuta ideias e apresenta propostas, tendo por base sua formação escolar.

Quando o foco é a sala de aula, a comunicação acontece de maneira formal, onde cada parte tem seu objetivo: o professor em mediar conhecimentos e o aluno em aprender. Nesse contexto, representa um ambiente de interações, onde o professor possa promover discursões que favoreçam a construção de argumentos pelo aluno, cuja finalidade seja analisar o que sabe, investigar o que não sabe e refletir sobre o que ainda precisa aprender em Matemática, bem como nas demais disciplinas. Também oportuniza o professor, refletir sobre sua prática, verificando o que precisa ou não melhorar para poder oferecer um ensino voltado para a qualidade. Os processos de ensinar e aprender não podem ser dissociados, por isso, devem estar em constante mudança e aperfeiçoamento. É função da escola, pensar e oferecer caminhos que favoreçam o desenvolvimento investigativo do aluno e este deve se sentir parte nesse processo, sentindo-se estimulado a fazê-lo. Freire e Faundez (1985, p. 24) afirmam que O que o professor deveria ensinar – porque ele próprio deveria sabê-lo – seria, antes de tudo, ensinar a perguntar. Porque o início do conhecimento, repito, é perguntar.

Assim, o professor deve dar atenção especial às ideias postas pelos alunos, o que pensam ser interessante e o que querem realmente aprender, para que os objetivos de ambos sejam atingidos. As experiências trazidas pelos alunos para a escola e suas concepções prévias sobre algo que está sendo estudado, é fator relevante, pois as mesmas poderão desencadear o desejo de conhecer mais, facilitando a associação com os saberes escolares, sendo referenciais.

Vygotsky (1984) afirma que “qualquer situação de aprendizado com a qual a criança se defronta na escola, tem sempre uma história prévia”. Portanto, a qualidade da comunicação influi na forma como os alunos identificam o que sabem sobre algo, bem como as lacunas conceituais existentes e que ainda precisam de respostas. Nessa perspectiva, se estabelece um período de comparações e relações que, segundo Camargo et al (2014, p. 4) fomentam a organização da pergunta. Esse conjunto de ações já se configura como momento de aprendizagem, pois, ao apresentar sua pergunta, o sujeito está reestruturando seu pensamento. E o ambiente escolar deve desenvolver no aluno, ou pelo menos deveria, um sentimento de pertencimento

Mas, como a pergunta pode ajudar o aluno a aprender?

Como o professor aprende a perguntar? E o aluno?

Freire e Faundez (1985) afirmam que, no ensino, tanto professor como aluno esqueceram-se do ato de perguntar, pois o conhecimento começa pela pergunta. Afirmam ainda que o ensino hoje, o saber, é resposta e não pergunta, o que eles chamam de “castração da curiosidade”, pois acontece num movimento unilinear, de cá para lá e acabou, não há volta, e nem sequer há uma demanda; o educador, de modo geral, afirmam eles, já traz a resposta sem se lhe terem perguntado nada. Consideram ainda que ao ensinar, o professor também aprende, sendo essa uma afirmação válida para ambos.

Assim, essa inversão no processo de ensino e aprendizagem, tem tornado o ensino sem sentido para o aluno que não se sente estimulado a investigar para descobrir respostas às suas curiosidades. Como a pergunta provoca reflexões, é possível utilizá-la como meio para se chegar a esse fim. Para isso, é preciso repensar um ambiente escolar aberto à discursão, ao diálogo, com preparo prévio, e, consequentemente, bem pensado. Freire e Faundez (1985, p. 26) afirmam ainda que, dentro da escola, o aluno deve ser estimulado a fazer perguntas em torno da sua própria prática e as respostas, então, envolveriam a ação que provocou a pergunta.

Stein et al (2008) sugerem que o professor, antes do momento da discursão, deve estar preparado no sentido de poder antecipar o modo como os alunos pensam, monitorando o seu trabalho, recolhendo a informação necessária, selecionando aspectos a salientar durante a discursão e sequenciar as suas intervenções e, já durante a discursão, estabelecer conexões entre as diversas resoluções.

Freire e Faundez (1985) afirmam também que suas preocupações não podem ficar apenas em nível da pergunta pela pergunta. O importante seria ligar, conectar, sempre que possível a pergunta e a resposta às ações que foram praticadas ou que podem vir a ser praticadas ou refeitas. Que o educando, ao perguntar sobre um fato, tenha na resposta uma explicação deste e não sua descrição pura. É preciso que ele vá descobrindo a relação dinâmica, forte, viva, entre palavra e ação, entre palavra-ação-reflexão, fazendo proveito de exemplos concretos da própria experiência dos alunos.

As afirmações desses autores nos ajudam a responder às questões acima, entendendo que a pergunta ajuda o aluno a aprender quando esta surge da própria curiosidade dele, de sua vontade de descobrir algo, tendo como referência suas experiências sociais e escolares. Que o professor deve favorecer momentos de discursão em sala de aula para que ele possa interagir com este e com os demais colegas sentindo-se à vontade ao questionar e ser questionado. Comumente, ao perguntar, o aluno espera uma resposta direta e o professor já possui respostas prontas. Mudar de postura é um processo, onde ambos terão que partilhar dos mesmos objetivos. A comunicação, através da pergunta, pode favorecer esse processo, podendo ser o elemento propulsor dessa mudança, caso o professor a utilize como instrumento de aprendizagem.

Camargo et al (2014) afirmam que quando os professores criam em sala de aula situações que estimulem os alunos, esses passam a sentir-se motivados para expressar seus pensamentos e buscar respostas para suas perguntas e para as do professor. Afirmam também que, “este ao permitir e incentivar seus alunos a questionarem, exporem suas dúvidas e demonstrarem que elas são importantes, os alunos passam a sentir-se parte efetiva da aula”. Assim, esse estímulo à pergunta na aula de Matemática, faz com que os alunos participem de modo interativo das discursões com o professor e demais colegas, enriquecendo sua aprendizagem, pois se a pergunta parte dele, parte dele também a vontade de satisfazer essa curiosidade. Nesse sentido, podemos pressupor uma aprendizagem matemática com significado para o aluno, na qual se dispõe o ensino da Matemática. A pergunta pode proporcionar o momento da descoberta, onde o aluno percebe que com o outro ele é mais completo e que, através do diálogo, ambos podem aprender mais, podendo saber quais necessidades, quais dúvidas, quais curiosidades têm em comum.

Importante também nessa relação, é entender que as diferenças só enriquecem o processo. Que apesar de terem pensamentos diferentes e desenvolverem estratégias diferentes, como respostas para suas dúvidas, com o outro há uma abertura maior para a reflexão, a tomada de decisões e a construção de novas ideias e concepções que podem surgir a partir dessas interações. Ao se ver no outro, o aluno tanto pode criar novas ideias quanto elaborar novas perguntas em sala de aula, o que viabilizará o conhecimento. A pergunta também gera ponto de convergência, visto que ao colocarem suas dúvidas para o grupo, terão oportunidade de ouvir a opinião dos demais sobre determinado assunto, comparar com as suas e tirar novas conclusões. A comunicação se faz presente em todo esse processo, desde a fala, a escrita até a representação, não sendo esta suficiente para expressar tudo que se pensa sobre algo.

Freire (1975) afirma que o diálogo é uma exigência existencial. E, se ele é o encontro em que se solidarizam o refletir e o agir de seus sujeitos endereçados ao mundo a ser transformado e humanizado, não pode reduzir-se a um ato de depositar ideias de um sujeito no outro, nem tampouco tornar-se simples troca de ideias a serem consumidas pelos participantes. É um ato de criação. A conquista implícita no diálogo é a do mundo pelo sujeitos dialógicos, não a de um pelo outro.

Assim, o diálogo é um meio comunicativo ao qual todos nós nos fazemos entender e a pergunta está presente nesse ato de construção da linguagem, também é fácil compreender que os sujeitos têm papel fundamental nesse processo de interação, que pode e deve ser meio de aprendizagem. A pergunta permite que o aluno acesse seu conhecimento prévio e ao comunicá-lo, inicie a busca da resposta, podendo ser esta um processo de discursão de ideias que venham satisfazer sua curiosidade, na qual ele constrói argumentos e estratégias de investigação que favoreçam o seu campo de saber, dando lugar à pesquisa. Esse aprendizado, pode gerar uma reconstrução da pergunta, num processo de idas e vindas que culmine na reconstrução de seus argumentos e ideias. Ao dar significado às informações recentes, ele pode ou não validar seus argumentos, desencadeando um aprendizado em espiral, no qual de uma pergunta vão surgindo outras.

Se o aluno aprende efetivamente através de suas próprias inquietações, significa que seus interesses estão ali em jogo. Por isso, se mobiliza em busca de respostas. Ao oportunizar esse tipo de comunicação, utilizando a pergunta como objeto de ensino, valoriza-se o conhecimento do aluno, podendo descartar processos mecânicos e de memorização.

Para Camargo et al (2014) a pergunta também modifica o ambiente da sala de aula, pois influi nas relações interpessoais entre professor e alunos. Isso se torna evidente quando o professor estreita laços com seus alunos e estes com os demais colegas, estabelecendo um ambiente de confiança mútua. Relacionamentos positivos podem influenciar na aprendizagem, pois segundo Guerreiro (2014) é um processo que alicerça o conhecimento em sala de aula. Nele, os intervenientes se encontram, se influenciam e sofrem mudanças.

A valorização do ambiente saudável à aprendizagem, através do diálogo, de atividades desafiadoras que envolvam os alunos e os façam aprender em grupo, também reconhecendo erros e acertos, superando seus próprios obstáculos, representam atitudes construtivas do ponto de vista do ensino-aprendizagem. Ressaltando que a forma como cada um processa as informações e aprendem de forma diferente, essas experiências vem se construindo ao longo da vida e se modificam a cada nova aprendizagem. É um ciclo, no qual cada um tem seu objetivo, seu conhecimento prévio e vai processá-lo de acordo como tal. O mais importante é a relação que se estabelece entre o grupo e o conhecimento novo, a forma como está sendo desenvolvido o processo e os resultados aos quais querem chegar professor e alunos. A comunicação deve permear esse desenvolvimento para favorecer o que está sendo ensinado e aprendido na sala de aula.

Nesse sentido, as perguntas que surgem em sala de aula, se fazem necessárias e podem contribuir tanto com o processo de ensino-aprendizagem, quanto com as relações entre os sujeitos, que envolvem sentimentos, atitudes, tomadas de decisões, confiança e reconstrução constante de conhecimentos que irão influenciar na formação holística da pessoa.

1.2.1. Tipos de Pergunta

Pergunta é um tipo de comunicação geradora de discursões na aula de Matemática, promovendo o desenvolvimento do raciocínio matemático e a elaboração de estratégias de resolução de problemas. Assim, pode ser utilizada pelo professor como um caminho para se chegar a diferentes fins no ensino-aprendizagem da Matemática.

Pereira (1991) classifica as perguntas realizadas pelo professor em:

1) **Pergunta Real** (informativa), como sendo as que constituem um pedido genuíno de informação pelo professor;

2) **Pergunta Exame**, correspondendo às de controle de conhecimentos (pelo professor) relativa a conteúdos já ensinados, quer em aulas anteriores quer durante a própria aula;

3) **Pergunta Didática**, específicas do discurso de ensino-aprendizagem da aula. Estas podem, ainda, desdobrar-se em: (I) *Pergunta de interpretação* - quando, para dar resposta, o aluno tem de interpretar gráficos, textos, etc; (II) *Pergunta convergente* - pergunta que implica uma resposta curta, geralmente "sim" ou "não"; (III) *Pergunta divergente* - correspondendo ao caso em que o professor pretende que o aluno se pronuncie sobre uma situação, levando-o a pensar sobre um dado novo. É um tipo de pergunta que pode conduzir à discussão na turma; *(IV) Pergunta meta* - pedido para que o aluno explicite melhor uma informação dada anteriormente; (V) *Pergunta cálculo* - que exige que o aluno faça algum cálculo, mesmo que mentalmente;

4) **Pseudo-pergunta**, não correspondem a pedidos claros de intervenção da parte do aluno ou após as quais não é concedido tempo de pausa. Podem desdobrar-se em: (I) *tematizantes* - as que surgem no interior de um segmento discursivo, algumas vezes longo, com a função de introduzir um assunto, por meio de uma questão, ou para focar a atenção do aluno num pormenor que o professor considera relevante; (II) *asserção* - que correspondem a afirmações do professor, acompanhadas de expressões modalizadoras do gênero "está bem?", "não é?", "correto?", com o objetivo de ganhar adesão dos alunos para a afirmação proferida e manter o contato com a audiência; (III) *retóricas* - nelas cabem os enunciados proferidos interrogativamente, mas que não fazem supor respostas ou, caso aconteçam, serão óbvias; (IV) *reformuladas* - correspondem a enunciações em que o professor faz uma paráfrase, na forma interrogativa, de comentários proferidos pelos alunos; (V) *reguladoras* - enunciados na forma interrogativa que, normalmente, sucedem a respostas dos alunos a outras perguntas do professor, com o objetivo de as realçar; (VI) *perguntas eco* - correspondem a perguntas que retomam, sob a forma interrogativa, uma resposta, por vezes problemática, dada por um aluno; (VII) *falsas perguntas* - enunciados que formalmente, correspondem a perguntas, mas a que o professor responde imediatamente, sem dar tempo de pausa para os alunos tentarem responder. Este tipo de pergunta insere-se, habitualmente, em enunciados nos quais o professor faz recapitulações de conteúdos anteriormente apresentados.

5) **Interpelações reguladoras** - enunciados proferidos pelo professor com o fim de organizar e regular o discurso dos alunos, evitando comportamentos desviantes

do ponto de vista disciplinar. Desdobram-se em: (I) *convite à intervenção* - enunciados utilizados pelo professor para desencadear a participação dos alunos; (II) *ordem direta* - enunciados que correspondem a pedidos explícitos do professor, para os alunos desenvolverem um determinado comportamento; (III) *ordem indireta* - enunciados apresentados interrogativamente e que correspondem a ordens indiretas, proferidas de uma forma delicada. São geralmente utilizadas para eliminar comportamentos dos alunos menos desejáveis; (IV) *chamada de atenção* - atos de discurso em que o professor mostra desagrado por uma determinada situação, podendo inferir-se ameaças veladas.

Searle (1984) considera que, na sala de aula, podem ocorrer dois tipos de perguntas realizadas pelo professor:

1) **Real -** refere-se a pedidos de informação pelo professor, seguidas, a maior parte das vezes, de uma pausa a anteceder a resposta.

2) **Exame** - refere-se a enunciados que visam verificar a aprendizagem dos alunos. Ambas, ainda segundo o autor, ocorrem preferencialmente, no início das aulas ou antecedem a introdução de novos temas.

Barnes (1969), citado por Stubbs (1987) propõe também uma classificação das perguntas formuladas pelo professor, distinguindo quatro grandes tipos:

1) ***Perguntas concretas*** ("o quê?", "o que é?"), exigem que o aluno dê alguma informação sobre um determinado aspecto;

2) ***Perguntas racionais*** ("como?" ou "porquê?"), que implicam que o aluno "pense alto". Nesta categoria, inclui: (I) *perguntas de observação*, as *perguntas de raciocínio fechado* (perguntas com uma só resposta, que implicam a recordação de temas já tratados) e as (II) *perguntas de raciocínio aberto* (perguntas com um leque vasto de respostas);

3) ***Perguntas abertas*** que, segundo o autor, não exigem raciocínio e fornecem informação para introduzir novos conceitos;

4) ***Perguntas sociais***, que servem, sobretudo, para controlar a turma ou para solicitar a participação dos alunos.

Cada uma dessas classificações buscam, segundo Menezes (1995), exaustivamente atender o máximo possível de perguntas surgidas na sala de aula pelos professores. Porém, como nosso estudo visa investigar as contribuições da pergunta para o desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas algébricos, optamos pela classificação de Pereira (1991), priorizando apenas três tipos de pergunta: Real, de Exame e Didáticas (considerando suas subcategorias), por acreditar que estas possam atender às nossas expectativas com base nos objetivos da pequisa, pois possibilitam ao expressar capacidades interpretativas, e também se posicionar diante dos problemas com compreensão e raciocínio, para desenvolver estratégias de solução.

2. RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NAS AULAS DE MATEMÁTICA

A Resolução de Problema é uma das estratégias de ensino e aprendizagem da Matemática que mais tem favorecido o desenvolvimento de capacidades no aluno em pensar produtivamente, quando aplicada de maneira significativa. Enquanto Metodologia de Ensino-aprendizagem busca oferecer ao professor uma forma de ensinar Matemática através da construção de conhecimentos. Essa afirmativa pode ser mais bem compreendida no decorrer desse capítulo que, fundamentado em teorias, busca justificar a real necessidade de consolidar conceitos desta disciplina em sala de aula, visando estimular e promover no aluno sua formação matemática.

2.1. Resolução de Problemas: Uma Metodologia de Ensino-Aprendizagem

A Resolução de Problemas é uma metodologia de ensino-aprendizagem que permite explorar nos alunos, as capacidades de aprender a aprender, visto que um dos seus aspectos é proporcionar uma mudança de atitude em relação ao que se ensina e ao que se aprende. O conhecimento matemático é decorrente de experiências e situações reais da vida das pessoas, e, considerando seu caráter formativo, a Matemática tem importante papel no desenvolvimento de processos de pensamento que geram no aluno aquisição de atitudes e hábitos de investigar necessários à aprendizagem.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL,1997) afirmam que a Resolução de Problemas é um caminho para o ensino da Matemática que vem sendo discutido ao longo das últimas décadas, cuja História mostra que ela foi construída como resposta a perguntas provenientes de diferentes origens e contextos, motivadas por problemas de ordem prática, ou vinculados a outras ciências, bem como por problemas relacionados a investigações internas à própria Matemática.

Todavia, precisamos refletir sobre como essa metodologia está sendo aplicada em sala de aula para gerar resultados esperados em relação à aprendizagem. Se para muitos alunos e professores, resolver um problema for, necessariamente, fazer cálculos ou aplicar regras e fórmulas, entendemos que essa prática não está cumprindo a função que deveria junto a aprendizagem, mas servindo como procedimento de verificação da aplicação dessas regras e fórmulas, não contribuindo com a formação Matemática do aluno.

Segundo Onuchic, (1999) na abordagem de resolução de problemas como uma metodologia de ensino, o aluno tanto aprende Matemática resolvendo problemas como aprende Matemática para resolver problemas. Não sendo um processo isolado, mas por meio dele.

Para Pólya (1995) resolver problema é uma questão de prática, que todos podem aprender a observar e imitar o que fazem outras pessoas quando resolvem os seus e, por fim, aprendemos a resolver problemas, resolvendo-os. A resolução de problemas parte do pressuposto de que o aluno tenha autonomia na tomada de decisões sobre uma situação que lhe tenha significado, mobilizando conhecimentos para encontrar uma solução/resposta para sua pergunta ou dúvida, sendo um caminho encontrado por ele, mas não o único. Só existirá problema se o aluno for capaz de compreender o enunciado e elaborar formas de soluções possíveis.

Ponte e Santos (2002) afirmam que um problema é uma dificuldade a ser superada que, para alguns autores, pode ser encarada de duas formas:

1) Tendo o indivíduo como foco, onde *uma dada situação pode ser um problema para uma pessoa e não o ser para outra;*
2) Uma situação será um problema se p*ossuir um conjunto de características que se presumem problemáticas para todos* os membros de um grupo relativamente alargado de indivíduos. Neste caso, a situação é um problema independentemente do indivíduo ou da sua experiência pessoal passada.

Em ambos os casos, o importante é que os alunos pensem matematicamente, levantem ideias matemáticas, estabeleçam relações entre elas, saibam se comunicar ao falar sobre elas e desenvolvam formas de raciocínio (ONUCHIC, 1999). Com isso poderão construir conexões com outras áreas do conhecimento, ampliar seu saber e desenvolver novos pontos de vista, longe de ser absolutos, mas que podem contribuir com uma formação cidadã convivendo com uma diversidade de perspectivas discutíveis, pois, segundo Morin (2001) vivemos na era da incerteza. A resolução de problemas favorece esse leque de possibilidades e abre caminho para uma produção do aluno, tanto individual quanto coletiva, contribuindo para sua aprendizagem, pois agrega habilidades ao pensar matemático.

Os conceitos matemáticos são postos numa teia de muitos outros conceitos que se relacionam entre si, e a todo momento se retificam, se generalizam. Temos que considerar esse método como um direcionamento para um aprendizado significativo necessário à formação de conceitos, procedimentos e atitudes em relação à Matemática.

A solução de um problema não está explícita na situação proposta e deve ser construída através do raciocínio de quem está sendo desafiado a respondê-lo. Em função do nível intelectual de cada um, uma situação pode ser ou não um problema. Brasil (1997) afirma que resolver um problema pressupõe que o aluno: (i) elabore um ou vários procedimentos de resolução (como, por exemplo, realizar simulações, fazer tentativas, formular hipóteses); (ii) compare seus resultados com os de outros alunos; (iii) valide seus procedimentos.

As habilidades desenvolvidas nesse processo devem ter maior valor que o produto. Se conseguirmos fazer o aluno refletir sobre o que faz e como faz, estaremos saindo da concepção da aprendizagem por repetição e entrando em outra perspectiva, que seria a da ação refletida que constrói conhecimentos (BRASIL, 2002).

> O aluno não constrói um conceito em resposta a um problema, mas constrói um campo de conceitos que tomam sentido num campo de problemas. Um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações. (BRASIL, 1997).

Nesse sentido, a Resolução de Problemas pode contribuir com o desenvolvimento do aluno, buscando garantir mais segurança na tomada de decisões, na elaboração de estratégias, auxiliando no desenvolvimento de sua autonomia e capacidade de pesquisa.

Lembramos ainda a importância da tecnologia nesse processo, como o uso de calculadoras, computadores, software, entre outros, que já fazem parte da vida dos alunos, mesmo antes do período escolar, é uma realidade com que a escola precisa conviver. E, mesmo sabendo que existam resistências por parte de educadores, não cabe mais, em nossa sociedade, a exclusão desses equipamentos do cotidiano da escola.

> Com a calculadora, os alunos podem ficar atentos no processo de resolução de problemas, ao invés de se preocupar com cálculos longos e repetitivos. A calculadora enfatiza mais “o que fazer” do que “como fazê-lo”. (MEDEIROS, 2003).

Isso exige um (re) direcionamento do ensino, dos currículos de Matemática e da formação de professores. O mundo está conectado, as pessoas estão interagindo o tempo todo e as informações estão veiculadas de forma cada vez mais rápida num raciocínio coletivo de ideias, competências e imaginação que se completam para a produção de conhecimento. Esse impacto sobre o ensino da Matemática exige o desenvolvimento de habilidades e procedimentos com os quais o indivíduo possa se reconhecer e se orientar nesse mundo em constante movimento (BRASIL, 2002).

Com isso, percebemos que, nos dias atuais, o conhecimento matemático está associado ao saber pensar e saber fazer Matemática e não ao decorar e repetir regras pré-estabelecidas. Isso não atende às necessidades da sociedade e o aluno deve desenvolver essas habilidades para fazer uso delas em situações sociais e do mundo do trabalho, sendo a escola uma das responsáveis por esse processo de transformação.

Sabemos, entretanto, que é um processo lento e trabalhoso, principalmente na educação brasileira, mas temos o começo, que é a resolução de problemas cujo objetivo de elaborar conjecturas, de estimular a busca de regularidades, a generalização de padrões, a capacidade de argumentação, fornece elementos fundamentais para o processo de formalização do conhecimento matemático e ajuda a desenvolver habilidades essenciais à leitura, interpretação e compreensão da realidade e de outras áreas do conhecimento (BRASIL, 2002).

A prática educacional baseada em modelos, repetições e utilização de regras apenas treina o aluno a uma aprendizagem mecânica e descontextualizada, que tende a provocar insegurança quando ele se depara com situações que não sejam semelhantes àquelas de sala de aula, nas quais tenha que pensar e investigar para se chegar à uma solução. Sabemos que toda prática tem uma base teórica que a norteia, porém, tem que haver clareza de ideias entre o que se pensa e o que de fato acontece em sala de aula. Isso é uma prática consciente, visto que as ações desencadeadas pelo professor devem também desencadear o pensamento reflexivo-crítico do aluno. Essa função política da escola o oportuniza operar de forma democrática na sociedade.

Ao propor a resolução de problemas deve-se esperar que o aluno utilize-se de conhecimento já construídos e trilhe em direção à descoberta de novos através de perguntas que lhe desafiem. Sabe-se que o processo de construção do conhecimento é dinâmico, então, não deve haver estranheza quando os resultados são obtidos de forma experimental, pois as ideias matemáticas dos alunos surgem também da compreensão de seus conceitos e das relações que fazem, nos diversos contextos. Portanto, o professor deve ficar atento ao saber do aluno e ao modo como ele utiliza esse saber durante a resolução de problemas, para que possa fazer intervenções que produzam efeito à melhoria da aprendizagem. O saber do aluno deve servir como ponto de partida para melhor compreensão do conhecimento científico.

Para Pólya (1995) auxiliar o aluno não é tarefa fácil, requer tempo, prática, dedicação e princípios firmes. *Se o professor ajudar demais, nada restará para o aluno fazer*. As atividades a serem propostas também devem conter certo teor de complexidade para que proporcionem reflexão e construção de novas ideias. (FONSECA, 1997) afirma que o educador, com uma postura crítica e reflexiva, dará oportunidade ao seu aluno para transformar-se de um mero executor em um agente ativo no processo de ensino-aprendizagem.

Para Ryve (2007) a "Resolução de Problemas deve ser vista também como uma forma produtiva de desenvolver novas competências". Essa abordagem pode garantir ao aluno uma apropriação significativa de conhecimentos matemáticos, favorecendo a aprendizagem e também o ensino da Matemática, visto que fortalece a confiança no aluno em relação às suas respostas e também oportunizam os professores a fazerem intervenções qualitativas. Ainda segundo o Autor, exige um envolvimento por parte do aluno, gerando uma ação cognitiva que resulta na aprendizagem. Os saberes não se acumulam, eles são ampliados e, por isso, essa estratégia favorece crescimento intelectual. A partir do problema, o aluno deve desenvolver seu pensamento crítico, bem como o próprio raciocínio matemático.

Por isso, é evidente seu caráter real, de contexto. Tendo significado para o aluno, o problema se torna presente na sua vida, evitando-se que as questões da escola sejam separadas das situações vividas por ele no dia a dia. A resolução de problemas deve, necessariamente, quebrar a ideia de que há diferença entre as situações vividas na escola e as da vida real e favorecer a junção desses ambientes em um só, de modo perceptível ao aluno. (GÓMEZ-GRANELL, 2008) afirma que o problema tem sido utilizado para avaliar se os alunos aprenderam um determinado procedimento e se são capazes de aplicá-lo genericamente.

Nessa perspectiva, os conceitos matemáticos são trabalhados na escola anterior aos problemas, que aparecem depois como forma de comprovar se esses conceitos foram adquiridos ou não pelo aluno. Nessa direção, percebe-se que o problema não exerce sua função de instrumento exploratório de investigação e pesquisa que desperta no aluno uma vontade de buscar respostas, descontextualizado do processo real.

Aliás, essa ideia de contexto não está necessariamente ligada apenas ao cotidiano, mas numa perspectiva mais ampla onde o aluno possa utilizar o seu saber para resolver qualquer situação problema que venha a surgir. Almouloud (2014) ao discutir *contexto e contextualização nos processos de ensino e aprendizagem da Matemática* num artigo de mesmo nome, publicado na revista *Nova Escola*, *Edição 270* de março de 2014, diz que muitas vezes, alguns autores de livros didáticos e professores propõem situações de ensino que envolvem somente o cotidiano e aspectos utilitários. Isso torna pobre a ideia de contexto e de contextualização e pode até conduzir ao enfraquecimento dos processos de ensino e de aprendizagem de conceitos matemáticos.

Sua concepção apoia-se em Brousseau (1997) afirma que o aluno aprende se adaptando a um meio que é fator de dificuldades, contradições e desequilíbrios. O saber, fruto do processo de construção pelo aluno, manifesta-se pela capacidade dele resolver problemas que surgem.

Muitas vezes percebemos, como professores, que ao propor um problema, o aluno não sabe resolvê-lo usando algoritmos formais, como desejamos. No entanto, se o deixarmos à vontade para resolvê-lo "do seu jeito," ele sentirá mais facilidade em oferecer uma resposta satisfatória. Isso mostra que "o desenvolvimento de habilidades do aluno, ao recorrer às suas experiências e construir suas estratégias, pode ser mais válido do que a pura aplicação de regras ou algoritmos que lhes foram ensinados na escola, ou transmitidos pelo professor" (GÓMEZ-GRANELL, 2008).

Gontijo (2006) afirma que as competências dos alunos para solucionar problemas trazem implícita a convicção de que o conhecimento matemático ganha significado quando os alunos têm as situações desafiadoras para resolver e trabalham para desenvolver estratégias de resolução. Considerando que nem sempre eles nos oferecem estratégias que, do nosso ponto de vista, não seriam corretas, vale lembrar que isso depende muito do desenvolvimento de seu raciocínio em processos anteriores.

A forma de pensar matematicamente contribui para a elaboração de estratégias qualitativas. Uma das formas de alcançar esse fim, pode estar relacionada ao modo como os conceitos são tratados pelo professor durante as aulas de Matemática e como o aluno está compreendendo esses conceitos. Assim, esse pensamento deve acompanhar o aluno durante toda sua trajetória, desde a alfabetização Matemática até os anos finais do Ensino Médio, para que ele, ao chegar nos processos mais avançados, possa mostrar o desenvolvimento de sua evolução, sabendo fazer uso dessas habilidades em situações reais do dia a dia, que com certeza, serão usuais no mundo do trabalho.

Se no decorrer do processo de aprendizagem, o aluno adquire maturidade para atuar no campo do trabalho, seu pensar matemático também deve se encontrar em um nível de maturidade mais avançado, sendo capaz de fazer conjecturas mais complexas entre a Matemática e outras áreas do conhecimento (GÓMEZ-GRANELL, 2008). Para

Ponte (2005) não basta que o aluno resolva o problema, é preciso que ele também possa e tenha a condição de explicar as relações e transformações pertinentes a ele. Quando essa relação se estabelece é que podemos dizer que houve aprendizagem qualitativa, com significados que proporcionaram ao aluno ampliar seus sentidos iniciais sobre conceitos e ideias matemáticas, avançando em seu processo de aprender.

Apesar da Resolução de Problemas ser a metodologia de ensino mais discutida em Matemática nos dias atuais, suas noções, seus conceitos não são de hoje. Foram os trabalhos de George Polya (1995) que ajudaram a classificar qual seu possível papel educativo. De acordo com Polya, ao propor problemas ao aluno, o professor deve desafiá-lo nas suas capacidades matemáticas, para que ele desperte para o prazer da descoberta. O Autor considera isso uma condição fundamental para que os alunos percebam a verdadeira natureza da Matemática, desenvolvendo assim, seu gosto pela disciplina. Essas ideias são tão importantes que vêm norteando até hoje os currículos e orientações metodológicas em todos os níveis de ensino. A Resolução de Problemas vem marcando o processo de ensino da Matemática e produzindo avanços na aprendizagem de conteúdos matemáticos, quando devidamente utilizada.

Contudo, nem sempre as situações propostas em sala de aula são realmente um problema para os alunos. Para serem consideradas problema, essas situações devem trazer um grau de dificuldade que obrigue o aluno a pensar numa estratégia de solução, pois se o mesmo já souber que estratégia usar para resolvê-la, a mesma se tornará um exercício. Por outro lado, se o aluno não for capaz de apresentar uma solução satisfatória para a situação proposta, isso lhe causará frustração, inibindo-o, fazendo-o muitas vezes, desistir de resolvê-lo.

> É de notar que um problema comporta sempre um grau de dificuldade apreciável. No entanto, se o problema for demasiado difícil, ele pode levar o aluno a desistir rapidamente (ou a nem lhe pegar). Se o problema for demasiado acessível, não será então um problema, mas sim um exercício (PONTE, 2005).

Esse tratamento dado ao trabalho com problemas deve ser bem pensado pelo professor, que deve ter em mente o objetivo dessa metodologia, que é favorecer a aprendizagem sem causar danos, nem ao ensino, nem ao aluno. A proposta de resolver problemas deve estar atrelada aos objetivos de ambas as partes, pois, para que os problemas tenham um lugar bem estabelecido no ensino da Matemática, devem contribuir para o sucesso da aprendizagem.

Ponte (2005) reforça essa ideia ao afirmar que se tratando de questões contextualizadas num certo campo da realidade, supõe-se que se entenda um pouco desse campo. Por isso, nem sempre uma situação proposta remete a um problema. Ao conhecer as formas de resolução, o aluno estará apenas aplicando procedimentos anteriormente adquiridos. Nos problemas as estratégias devem ser criadas dentro de cada situação. Não significa, porém, que uma estratégia utilizada não sirva mais para outra situação, mas pode servir de direcionamento para uma situação nova, fazendo com que novas formas de resolução apareçam, ampliando o campo conceitual do aluno.

Os exercícios fazem parte do ensino da Matemática, e tem seu grau de relevância, porém, o desenvolvimento do pensamento matemático proposto na metodologia de Resolução de Problemas, faz com que o aluno seja protagonista de sua aprendizagem, facilitando aos professores fazer intervenções que favoreçam esse processo. Nessa perspectiva, é preciso considerar que o aluno não deve ser treinado a realizar nenhuma tarefa, pois, no ambiente real de vida, eles aprendem muitas coisas que poderão ser usadas na escola durante os processos de aprendizagem formal.

A utilização desses conhecimentos é de uma riqueza peculiar, não só ao ensino da Matemática, mas de sua formação social e humana. Perceber que o conhecimento de determinada área escolar não está solto do seu contexto de vida é essencial para a aprendizagem e formação do sujeito. Na verdade toda ciência está exposta a todos no convívio social e na escola ela pode ser formalizada. As estratégias criadas pelos alunos são bem mais ricas no sentido da aprendizagem do que aquelas que eles aprendem com o professor, visto que apenas aplicar regras prontas inibe a criatividade e o pensar matemático.

Desenvolver o raciocínio matemático oportuniza o aluno externar sua intimidade com a Matemática, expondo conhecimentos novos e anteriormente adquiridos. Repetir modos de resolução em diversas tarefas empobrece o pensar do aluno que deve se sentir cada vez mais capaz e deixar fluir ideias que venham viabilizar sua habilidade criativa em resolver problemas. As diversas formas criadas por ele o estimulam a produzir cada vez mais e, nesse processo, o papel do professor como mediador é importante, pois tanto pode provocar estímulos positivos quanto negativos, levando o aluno a desenvolver ou a inibir seu potencial criativo.

Entra, nesse caso, a questão da diversidade nas tarefas, pois, segundo Ponte (2005), diversificar somente não constitui uma orientação clara sobre as tarefas selecionadas. O professor assume essa responsabilidade e deve ter a competência de elaborar essa combinação de tarefas que venham a favorecer o crescimento intelectual do aluno. Escolher tarefas adequadas a cada aluno, respeitando suas maturidades e seu conhecimento prévio, torna-se desafiador para o professor. Pretende-se que as estratégias de ensino por ele criadas, estejam em perfeita consonância com as necessidades dos alunos, e que as possíveis intervenções didáticas e pedagógicas feitas pelo professor venham causar impacto no que tange à ampliação do saber do aluno. Essa forma de crescimento intelectual por parte de professor e aluno é que favorece a aprendizagem. É o que desejamos para o ensino da Matemática. O aluno, ao chegar à escola, já elaborou sentidos sobre a Matemática, seus conceitos e ideias, considerando suas experiências anteriores à escola, ele precisa que a escola lhe ajude a dar significado a eles.

2.2. Resolução de Problemas: a importância de formular bons problemas

A compreensão de que a Resolução de Problemas é uma metodologia que auxilia a desenvolver no aluno a compreensão de conceitos matemáticos e contribuir com sua aprendizagem nesta disciplina não é algo novo, mas tem se intensificado a partir dos anos de 1980, com a publicação nos EUA da *Agenda for Action*, do NCTM (National Council of Teachers of Mathematics). Nos anos 90, com sua inserção mais intensa nas aulas de Matemática, demonstrou o esforço feito pelos professores em juntar situações do dia-a-dia do aluno com aquelas vividas por eles no ambiente escolar, viabilizando competências para atuar no mundo do trabalho, além de trazer a Modelagem Matemática e o trabalho com Investigações.

Passado todo esse tempo, percebeu-se que não somente a Resolução de Problemas seria interessante, como também a sua formulação traria contribuições para a formação do aluno. Entende-se que muitas habilidade são desenvolvidas na prática de Resolução de Problemas, mas também que durante essa resolução, outras ideias surjam e, com isso “questões novas que podem fornecer ao professor informações importantes de como o aluno percebe os processo matemáticos, suas atitudes em relação à Matemática e sua capacidade criativa”, como nos explica English (1997). Toda essa capacidade está associada, também, à formulação de problemas que, segundo o Autor, pode surgir antes, durante e até mesmo depois da resolução do problema ou por meio dela.

Apesar de muito discutida por professores e pesquisadores matemáticos no Brasil, a Resolução de Problemas nas escolas públicas brasileiras ainda é pouco explorada e na maioria das vezes o problema é utilizado como pretexto para aplicação de procedimentos e fórmulas de cálculos em Matemática. A lógica dessa metodologia é tornar o aluno ator no processo de aprendizagem sendo capaz de construí-la partindo de suas experiências, tendo o problema como objeto de ensino, onde, ao fazer a análise, ele sistematiza, generaliza e define conceitos novos, que vão sendo retomados em níveis mais complexos fazendo com que ele relacione conceitos construídos a outros em um novo contexto, caracterizando um processo de aprendizagem. Esse processo requer uma mudança de prática do professor, pois, o que prevalece em nossas escolas é a postura do professor como transmissor de conhecimento, a aprendizagem como um acúmulo de conteúdos e o ensino que se baseia na "verbalização" do conhecimento por parte do professor, segundo Pernambuco,(2012).

Para Medeiros e Santos (2007) "o processo de compreensão do aluno sobre a formulação de problemas estabelece uma relação entre a Matemática e o pensamento contextualizado e crítico que pode contribuir para o desenvolvimento da criatividade e da cidadania". Esse processo se faz presente no ensino da Matemática e deve ser viabilizado pelo professor à medida que oportuniza seu aluno à produção textual. Essa é uma postura também não muito comum do professor de Matemática, que requer uma mudança de prática e, consequentemente, de pensamento sobre o ensino-aprendizagem. Como isso, poderá refletir sobre o nível de aprendizagem do seu aluno e não apenas, mas também fazê-lo pertencer ao processo de modo ativo. Esse pertencimento o tornará sujeito dessa ação, podendo essa motivação render bons frutos, tanto para sua formação humana integral quanto para desmistificar ideias, estreitar laços com a disciplina, tornando-a real, e até estabelecer um maior nível de comunicação em sala com todo o grupo.

No Ensino Médio, os alunos deveriam apresentar um nível de escrita e compreensão textual mais elaborado, porém, não é necessariamente o que acontece. Temos um ensino fragilizado que se estende a todas as etapas da escola básica. Essas questões podem dificultar o uso preciso da linguagem necessária à elaboração dos problemas matemáticos, visto que requer uma clareza e concisão de ideias dando margem a compreensão do conceito.

Medeiros e Santos (2007) afirmam ainda que "na formulação de problemas o aluno vai empenhar-se em pensar no problema como um todo, sem focar-se apenas em números, em algumas palavras-chave ou na própria pergunta". Podemos entender que o ponto principal nesse processo seja a reflexão feita pelo aluno sobre os conceitos matemáticos mobilizados em torno do problema, pois se a resolução lhe proporciona argumentar e pensar por si mesmo, a formulação poderia ultrapassar essas habilidades, estendendo-as a situações mais significativas e enriquecedoras no campo da Matemática, considerando que resolução e formulação são metodologias não dissociáveis.

Mas como propor esses problemas? Quais seriam as situações mais adequadas para que o aluno possa realizar esse processo com significado? Para Bishop e Goffree (1986), Christiansen e Walther (1986) e Ponte (2005) o que os alunos aprendem resulta de dois fatores principais: a atividade que realizam e a reflexão que fazem sobre ela. Portanto, ao propor uma atividade Matemática espera-se que o aluno apresente uma solução que tenha sentido matemático. Dependendo do que foi proposto, esse sentido pode ser fundamentado numa regra já apresentada pelo professor. Medeiros (2001) classifica esse tipo de problema como fechado. O aluno teria por tarefa encontrar a solução esperada pelo professor se utilizando de regras ou de um processo de memorização, tendo desenvolvido uma forma padrão de resolução. Porém, se o que foi proposto requer um pensamento mais elaborado que necessite que o aluno pense, retome conhecimentos anteriormente adquiridos e elabore uma estratégia de resolução, então estaremos diante de um problema aberto.

Segundo Medeiros (2001) os problemas abertos evitam o uso de regras já preestabelecidas, podendo ser trabalhados em grupo; possuem mais de uma solução; são perfeitamente possíveis de serem resolvidos e aumentam a possibilidade de produção de conjecturas num intervalo de tempo razoável. Pernambuco (2012) afirma que os problemas abertos auxiliam o aluno na aquisição de um processo de resolução em que ele desenvolve a capacidade de realizar quatro ações: realizar *tentativas*, estabelecer *hipóteses*, *testar* essas hipóteses e *validar* resultados.

Agindo dessa forma, o ensino da Matemática torna-se mais significativo e produtivo, oportuniza o aluno a descoberta, valoriza seu conhecimento, permite espaço para comunicação (algo extremamente necessário nas aulas de Matemática), interações e viabiliza o novo contrato didático, que para Brousseau (1988) representa o conjunto de comportamentos do professor que são esperados pelo aluno e ao conjunto dos comportamentos do aluno que são esperados pelo professor. Para Medeiros (2001) trata-se, portanto, de um sistema recíproco de expectativas.

2.3. Resolução de Problemas em Álgebra

Várias têm sido as discussões para tornar o ensino da Matemática eficaz. Uma das metas mais importantes atualmente é relacionar a Matemática escolar com o contexto diário do aluno através de sua aplicação e de problemas. Com o foco na Resolução de Problemas, o ensino pretende transferir para o estudante a responsabilidade pela sua própria aprendizagem, na medida em que o coloca como ator principal nesse processo (PERNAMBUCO, 2012).

Essa ação diminui das rotinas de sala de aula, as práticas algorítmicas repetitivas e de memorização, ainda utilizadas, e avança na perspectiva de que é possível ensinar Matemática através de produções textuais que desafiem o aluno a pensar e a buscar soluções que dependem mais de uma atitude dele, em relação à Matemática, do que necessariamente do conhecimento escolar elaborado.

O aluno precisa abandonar, quando vai resolver problemas, o modo condicionado apenas a um tipo de contexto "a conta" que lhe é familiar, para se adentrar numa nova situação que, provavelmente, poderá gerar dúvidas e incertezas, demandar a busca de mais informações e até um incômodo, mas que promoverão um avanço indiscutível em seu nível de aprendizagem. Em Álgebra, que constitui uma ruptura epistemológica com a Aritmética, segundo Brousseau (1983) essa mudança de comportamento pode ser ainda mais necessária, devido a suas particularidades, como a linguagem e a simbologia.

Para Schoen (1995), é certo que é possível focalizar aplicações interessantes e problemas no ensino da Álgebra sem eliminar tópicos importantes. Logo, a transição Aritmética-Álgebra pode representar para o aluno um momento de dificuldade, de natureza didática ou metodológica, porém, se considerarmos suas experiências, aliadas às relações de interação professor/aluno e clareza nas explicações, as mudanças de atitudes são iminentes. Lembramos que essas regularidades, que não serão aqui discutidas, são necessárias em qualquer sala de aula e contribuem com a motivação e o interesse da pessoa para com os estudos e sua formação integral.

Schoen (1995, p. 137 a 141) recomenda que o ensino da Álgebra com foco na Resolução de Problemas deve ter por base os seguintes princípios:

- Basear a aprendizagem de coisas novas no conhecimento e na compreensão que os alunos já têm;
- Levar gradualmente da verbalização para o simbolismo algébrico;
- Introduzir os tópicos de Álgebra com aplicações;

- Ensinar os tópicos de Álgebra a partir da perspectiva de como eles podem ser aplicados;
- Ensinar e modelar processos heurísticos específicos como auxiliares para a compreensão e resolução de problemas;
- Comprometer os alunos com a resolução de problemas.

Sobre essas recomendações, ele explica que a primeira e segunda são gerais e especialmente importantes para um curso de Álgebra. As demais são específicas. Também afirma que elas foram utilizadas num curso de quatro anos, cujo objetivo seria corrigir deficiências nessa matéria, portanto, não serão aqui abordadas, mas nos servirão como sugestões para realização de futuros trabalhos com Álgebra. Percebe-se que trabalhar com conceitos algébricos requer uma quebra de paradigmas devido às crenças que os alunos já trazem sobre a Álgebra, como o uso de letras para representar números. Que muitos ao iniciarem seus estudos em Álgebra, como afirma House (1995) possuem apenas noções superficiais sobre seu significado e seu alcance.

À proporção que eles vão avançando cada etapa escolar, essas crenças, ao invés de serem diminuídas, logicamente pela escola, elas vão aumentando, gerando mais dificuldades, pois os problemas algébricos por ela apresentados tornam-se cada vez mais sem sentido para o aluno, com fórmulas, letras e regras que, muitas vezes, não se encaixam em seu contexto de vida. Se ele consegue entender a língua falada no dia a dia, é dever nosso, como professores, fazer uso desse argumento e discutir ideias matemáticas no campo conceitual da Álgebra, para depois introduzir o simbolismo algébrico.

Segundo Schoen (1995) o desenvolvimento histórico do simbolismo algébrico começou com a Álgebra verbal ou retórica que durou pelo menos três milênios. Depois desse período, seguiu-se outro de mais de um milênio, no qual o discurso algébrico caminhou gradualmente da fase retórica para a simbólica. Ao exigir do aluno a compreensão imediata dessa linguagem simbólica, ignoramos o processo verbal que se faz necessário a esse aprendizado.

Ainda segundo o autor, outro fator a considerar seria utilizar aplicações antes de conceitos e procedimentos, dando-lhe mais significado. Ao lidar com essas questões o aluno estaria em contato com o mundo real e teria como desenvolver ações, reflexões e discussões com demais colegas antes de tomar uma atitude. Diante do fato é possível analisar melhor os conceitos envolvidos, que irão ser vários, dando margem à mobilização de conhecimentos anteriores. Em um problema a abordagem nunca será de apenas um assunto. Várias serão as oportunidades de também o professor fazer suas intervenções e refletir sobre sua prática.

Percebendo que os alunos precisam aprender a desenvolver estratégias para resolver problemas, o professor poderá mostrar que uma equação, por exemplo, pode ser um excelente modelo, porém, não será o único. Deve oportunizar ao aluno primeiro a linguagem verbal do problema para depois traduzi-la para uma equação. Lembrando que o aluno somente desenvolve estratégias se tiver construído e compreendido conceitos matemáticos diversos. Essa compreensão é o diferencial no ensino da Álgebra e inverte a ordem dos fatos. O desenvolvimento do pensar algébrico, parte da linguagem materna, costumeira, que reflete na modelagem do problema.

> Nesse cenário, cabe ao professor o papel de mediador, ou seja, de elemento gerador de situações que propiciem o confronto de concepções, cabendo ao estudante o papel de construtor de seu próprio conhecimento (PERNAMBUCO, 2012, p. 23).

Para concluir, percebe-se que, ao resolver problemas algébricos, o que se deseja é que o aluno pense em um nível mais alto quanto à compreensão do texto e a elaboração do mesmo e se desprenda de técnicas e modelos repetitivos de estratégias de cálculo, que não mais garantem a aprendizagem. Isso, necessariamente, não requer aplicação de muitos problemas, não é treino, é compreensão. Portanto, o que deve ser valorizado nesse processo é o desenvolvimento de habilidades que gerem no aluno competência para analisar o problema e tomar decisões sobre a melhor forma de resolvê-lo.

Essa dinâmica de sala de aula é o objetivo do trabalho com resolução de problemas e envolve professor, alunos e conhecimento matemático, este, encarado não mais como algo externo ao estudante, mas como um elemento natural de seu ambiente social (PERNAMBUCO, 2012).

Os problemas algébricos devem garantir que os alunos investiguem padrões para depois expressarem generalizações, entendendo que estes favoreçam também as abstrações. Brasil (1988) afirma que pela exploração de problemas, o aluno reconhecerá diferentes funções da Álgebra, como generalizar padrões aritméticos, estabelecer relação entre duas grandezas, modelizar e resolver problemas aritmeticamente difíceis. Schoen (1995) afirma que é importante envolver conteúdos algébricos variados, promovendo a interação, para que os alunos possam assumir responsabilidade por serem capazes de resolvê-los.

3. O ENSINO-APRENDIZAGEM DE ÁLGEBRA

Nesse capítulo ressaltamos o ensino-aprendizagem de Álgebra como parte essencial da Matemática, cuja linguagem sofisticada, de caráter formal, provoca no aluno sensações de dificuldades, porém, possui ao mesmo tempo uma capacidade de abstração que generaliza as relações matemáticas.

3.1. Contextualizando o Ensino-Aprendizagem de Álgebra

A Matemática, um dos conhecimentos mais valorizados e necessários nas sociedades modernas altamente ‘tecnologizadas’ é, ao mesmo tempo, um dos campos mais inacessíveis para a maioria da população, confirmando-se como um importante filtro seletivo do sistema educacional (GÓMEZ-GRANELL, 2008, p. 258). Assim, seu ensino e seu currículo, devem contemplar as partes com ela envolvidas e que a tornam completa em relação ao vasto conjunto de conhecimentos que a compõem, como a Aritmética, Geometria, Álgebra, Estatística, Probabilidade dentre outros. Dominar, ainda que parcialmente, uma parte desses conceitos é necessário, pois, é difícil haver uma área de atuação na qual a Matemática não esteja inserida. Para se ter um ensino efetivo, e, consequentemente, mais significativo, é importante observar modos culturais que influenciam a forma como as pessoas veem a Matemática e a compreendem.

A Álgebra há algum tempo vem ganhando espaço nos currículos de Matemática, representando para alunos e professores o ápice de anos de estudos de Aritmética que os levaram a generalização de padrões ou, ainda, mais anos em relação a outros campos da Matemática que também são explorados e relacionados a estes. O mais importante é que esse conhecimento já pode ser aplicável à resolução de problemas do dia a dia, fazendo-se necessário em vários campos de trabalho. Cabe a escola básica, reexaminar esse currículo matemático em toda sua extensão, de modo a refletir sobre como esses conteúdos estão sendo ensinado, pois, se desenvolvido desde os Anos Iniciais, favorece experiências futuras com números e padrões, que levarão ao avanço do pensamento algébrico até as generalizações e abstrações mais complexas no Ensino Médio, que, segundo Ribeiro e Cury (2015), estão na base dos processos de modelagem Matemática da vida real.

Educadores Matemáticos como Kaput (1995) consideram que não há uma só Álgebra, mas um conjunto de conteúdos e métodos culturalmente compartilhados e que pensar algebricamente é uma atividade humana. Kirshner (2001) também compartilha dessa ideia, considerando duas abordagens para a Álgebra elementar: uma estrutural - a qual constrói significados internamente a partir de conexões geradas no interior de um sistema sintaticamente construído; e outra referencial - que traz os significados para o sistema simbólico a partir de domínios externos de referência. Kieran (2004) classifica as atividades algébricas em três tipos: geracional – na qual insere as atividades que envolvem a formação de expressões e equações; a transformacional – atividades baseadas em regras; e a global – insere as atividades nas quais a Álgebra é usada como ferramenta não exclusiva para esse ramo do conhecimento matemático. Ponte, Branco e Matos (2008) consideram que a visão da Álgebra que prevalece ainda é aquela onde se estudam as expressões, equações e regras de transformação, apesar de seu aspecto redutor.

Todas essas abordagens buscam desenvolver o pensamento algébrico de forma a criar capacidades nos alunos em lidar com seus conceitos e saber aplicá-los em situações de resolução de problemas.

Porém, pesquisas realizadas por Ribeiro (2001) e Dorigo (2010) sobre o ensino e aprendizagem de Álgebra referente aos conceitos de equações e funções, mostraram que ao final do ensino básico, os alunos ainda desconhecem essas estruturas algébricas, não sendo capazes de caracterizá-las e somente evocam os procedimentos e técnicas de resolução, mesmo tendo vivenciado processos de ensino diversificados.

Nós, professores de Matemática, percebemos que esse é um fato recorrente em nossas escolas e, com base nessas informações, é preciso refletir sobre esse ensino e a concepção que temos sobre esse campo matemático. Será que há uma forma de trabalho que possa ajudar a melhorar, ou mesmo mudar esses fatos? Ou que, pelo menos, contribua com o desenvolvimento do pensamento algébrico do aluno para que, ao chegar nas etapas finais do Ensino Médio, ele possa apresentar um conhecimento algébrico mais elaborado?

Acreditamos que a Resolução de Problemas seja um caminho eficaz para conseguir atingir esse objetivo, aliada à formação do professor, pode gerar reflexões que favoreçam a mudança de concepção, podendo ser refletida na prática de sala de aula. Um ensino de Matemática sem a parte algébrica se torna fragmentado, pois percebemos sua importância como ferramenta para resolução de problemas, apesar dos alunos utilizarem com mais frequência os conceitos aritméticos em suas estratégias de resolução.

> [...] O aluno apresenta várias dificuldades para entender e aplicar Álgebra de modo significativo. E é bastante comum ouvirmos de nossos alunos que eles não sabem qual a utilidade da Álgebra, sendo que a partir de certo momento eles param de questionar a utilidade de toda aquela linguagem sofisticada e aceitam docilmente que precisam passar pelos testes sobre este conteúdo. (SOUZA & DINIZ, 1996, p. 01)

Se pretendermos fazer com que nosso aluno utilize com mais frequência conceitos algébricos em suas estratégias de resolução de problemas, devemos oferecer metodologicamente meios de tornar esse conhecimento menos complexo, com menos exageros nas manipulações com símbolos, que pode causar, no aluno, uma impressão de inutilidade. Partindo desse entendimento, revisões de currículos e práticas de ensino não serão algo novo, mas necessários para o avanço desse conhecimento de modo significativo. O avanço da tecnologia vem proporcionando novas formas de comportamento no aluno, exigindo do professor, um novo olhar para o ensino frente a essas mudanças. Porém, essa nova demanda, requer formação adequada deste para poder atender a essa necessidade. O tempo dedicado ao aprender se prolonga cada vez mais, bem como se amplia a educação obrigatória, porém, o que parece é que tanta informação não está garantindo conhecimento. Pozo (2008) afirma que no ritmo das mudança tecnológica e científica em que vivemos, ninguém pode prever quais os conhecimentos específicos que os cidadãos precisarão dominar dentro de 10 ou 15 anos para poder enfrentar as demandas sociais que lhes sejam colocadas.

As habilidades adquiridas pelos alunos devem ter significado e não serem limitadas ou condicionadas ao aprendizado de técnicas ou algoritmos, mas que sejam suficientemente flexíveis, criando estratégias, sabendo aplicar o que aprendeu em situações diversas, pois o sistema educacional não poderá formá-lo dentro de necessidades específicas

> Talvez a questão principal que envolve o Ensino de Álgebra na escola média hoje seja sobre até que ponto se deve exigir dos alunos a capacidade de manejar, por si próprio, diversas técnicas manipulatórias (USISKIN, 1995, p. 12).

Álgebra e Aritmética são campos da Matemática importantes, juntamente com os demais campos, embora historicamente a Álgebra esteja mais relacionada à Geometria, a partir da Aritmética, e de sua representação, chegamos à Álgebra. Não sendo esta uma concepção linear, ao se definir qual seria o elo inicial da cadeia, mas servindo apenas de pressuposto para a introdução desse conhecimento.

Agregar situações da vida ao ensino de conceitos algébricos através da resolução de problemas pode ajudar a tornar a álgebra menos fragmentada, pois, segundo Souza e Diniz (1996) enfatiza ora um aspecto (regras), ora outro (aplicação), sem se preocupar com a ligação entre eles e ignorando a formação da ideia básica da Álgebra que é o conceito de variável em suas múltiplas formas: incógnita, parâmetro e variável propriamente dita. Brasil (1997) afirma que na maioria das vezes, subestimam-se os conceitos desenvolvidos no decorrer da atividade prática da criança, de suas interações sociais imediatas, e parte-se para o tratamento escolar, de forma esquemática, privando-os da riqueza de conteúdo proveniente da experiência pessoal.

Sabemos que esse conhecimento, em determinado momento, deve ser formalizado, mas precisamos compreender antes se o aluno é capaz de interagir o seu saber com a linguagem e representação de símbolos inerentes a Álgebra. Essa passagem pode gerar dificuldades de aprendizagem se não for compreendida pelo aluno.

> Mas, quais são as primeiras experiências que o aluno tem com a Álgebra ao chegar à escola? Geralmente ele trabalhará com situações de cálculo do valor desconhecido de uma equação, que na maioria das vezes apresenta uma única solução. Ou então ele resolverá um problema sem precisar dessa ferramenta: os recursos aritméticos de que dispõe costumam ser suficientes. Assim, tanto a proposta em forma de equação como a resolução por meio desta tornam-se uma imposição, além dessa nova ferramenta parecer uma complicação desnecessária (SESSA, 2009, p. 55-56).

Se o aluno vive essa primeira experiência ao chegar à escola e esta não se preocupa com o desenvolvimento de seu pensamento algébrico, ratificando procedimentos de resolução de problemas com base nesses princípios, sem deixar o aluno pensar, criar suas próprias estratégias com base em seus conhecimentos prévios, evidentemente dificuldades de aprendizagem nesse campo matemático serão bem maiores à proporção que o nível de escolaridade avança.

3.2. Ensino de Álgebra: Valorizar saberes para avançar

O trabalho com Álgebra desde os Anos Iniciais até o Ensino Médio deve ser um processo de construção, que se inicia com a valorização do conhecimento prévio do aluno e vai sendo ampliado, gradativamente, à proporção que ele entra em contato com novas experiências, proporcionadas pela escola, até chegar à formalização. Esse processo é longo e requer habilidade do professor em fazer esse elo de saberes, sendo a resolução de problemas um caminho para ajudar o aluno pensar e criar estratégias.

Sabemos que registros passados nos servem de base para projetarmos o futuro e isso requer um (re) arranjo dos elementos que temos no passado, tanto em relação ao ensino quanto à aprendizagem. Devemos reconstruir nossa forma de trabalho com a Matemática, entendendo que seus objetos de estudo são construções mentais abstratas, que não permitem um acesso direto. Contudo, dados históricos mostram que todo avanço frente ao ensino da Matemática ainda não garantem a aprendizagem a qual aspiramos, com compreensão. A tecnologia que impacta o estilo de vida da sociedade também não conseguiu modificar o tratamento dado à aprendizagem escolar que, em muitos casos, exige do aluno armazenagem de informações e práticas algorítmicas na realização de tarefas.

> Incorporamos a trigonometria à Álgebra intermediária, integramos a Geometria Espacial à Plana, mudamos a ordem de apresentação e o peso de vários tópicos, e introduzimos alguns novos conceitos com graus variáveis de permanência. Apesar de tudo, porém, o conteúdo da Matemática da escola de primeiro e segundo graus de 1988 mantém uma semelhança impressionante com a Matemática da escola de primeiro e segundo graus de 1928, 1948 e 1968 (HOUSE, 1995, p. 2).

Práticas comunicativas e de Resolução de Problemas não se efetivaram ainda na sala de aula de Matemática, mesmo diante de alguns avanços tecnológicos e sociais. As informações trazidas pelo auno para a escola parecem ser desconsideradas nos processos de ensino-aprendizagem. À medida que ele se adentra ao conhecimento escolar e não consegue converter essas informações em conhecimento, a aprendizagem compreensiva se desfaz e a memorização prevalece. Sfard (2008) defende o pensamento como uma forma de comunicação, portanto, nossas atividades são ou puramente comunicacionais ou imbuídas e moldadas pelo discurso - é a marca de nossa humanidade.

Com base nesse entendimento, a Matemática se torna um discurso, uma forma única bem definida de comunicação, incluindo a parte algébrica. Portanto, deve ser estudada num contexto de vida, no qual a tecnologia e a comunicação possam ser facilitadoras de aprendizagens, reconhecendo uma sociedade fundamentada no conhecimento e sua aplicação no campo social e no mundo do trabalho. Não faz sentido um ensino *imposto*, cujas práticas determinam o que os alunos devem ou não aprender num certo período letivo. Há uma *proposta* na qual o aluno conhece as regras do jogo e se sente parte dele. Buscar formas de despertar esse interesse é o grande desafio da escola e dos professores atualmente, visto que os mesmos se encontram conectados a um universo de informações, se não se precisa mais que o professor seja agente dessa informação, seu papel seria outro, o da formalização dessa informação ou, ainda definir que tipo de informação contribui ou não para a formação humana e profissional do aluno, sendo capaz de refletir sobre a sociedade e como se tornar mais efetivo nela. Isso é o diferencial da escola, ou pelo menos, é o que deveria ser.

O currículo, hoje, especificamente o elaborado e desenvolvido no Estado de Pernambuco, determina que a Álgebra seja trabalhada como uma forma de raciocínio útil ao desenvolvimento de outros setores da Matemática e para resolução de situações diversas do cotidiano. Orienta que se inicie com a compreensão de regularidades e se estenda às sequências, equações, funções e cálculos algébricos no Ensino Médio, todos tendo como base a resolução de problemas. orienta que os conteúdos tratados e trazidos para a sala de aula, sejam discutidos entre as partes interessadas no campo educacional, pensando numa política voltada para o desenvolvimento da pessoa de forma holística. A Resolução de Problemas favorece o processo de ensino e aprendizagem, permitindo ensinar o aluno a resolver problemas, bem como conhecer sua natureza algébrica:

> A Álgebra continua sendo um veículo para resolução de certos problemas, mas também é mais do que isso. Ela fornece meios para se desenvolverem e se analisarem relações. E é a chave para a caracterização e a compreensão das estruturas Matemáticas (USISKIN, 1995, p.21).

Essa referência ao currículo de Matemática e a forma como os conceitos algébricos estão sendo ensinados na escola é necessária para entender o desenvolvimento de práticas letivas que geram dificuldades no aprendizado da Álgebra, como, por exemplo, dar pouca importância a estudos das regularidades e sequências sem o devido pensar algébrico. Ou mesmo, se utilizar das letras apenas para representar grandezas e o uso de “quadrados” nas expressões algébricas de valor desconhecido, sem dar ênfase à equivalência. Essas regras, válidas durante toda a etapa do Ensino Fundamental I, são modificadas ao chegar no Ensino Fundamental II, a partir do 6º ano, onde as letras passam a ser operacionalizadas e o conceito de equivalência aparece associado às equações, ainda com pouca ênfase, pois nem sempre às equações são trabalhadas a partir da ideia de equivalência. Essas rupturas cometidas no ensino de

Álgebra podem torná-la ainda mais complexa para o aluno, que, desde cedo, deveria ter lidado com essas ideias algébricas.

Perceber que há avanços alcançados pela Educação Matemática também é importante, visto que hoje as propostas de mudança presentes tanto nos currículos como na própria forma de ensinar buscam uma aprendizagem reflexiva, menos repetitiva e com mais significado. Souza e Diniz (1996) afirmam ser importante que o aluno, ao entrar em contato com a Álgebra, não apresente tantos obstáculos a transpor e não falhe tanto na realização dessa tarefa.

Sfard (2008) afirma que, na escola básica, a Álgebra é um meta-discurso da Aritmética e que dois tipos de tarefas meta-aritméticas dão origem a esse tipo especial de discurso. O primeiro deles seria a questão dos padrões numéricos que com ajuda dos símbolos podem ser apresentados na forma de igualdade. Por exemplo, $a(b + c) = ab + ac$. Observe que, embora nada nesta última proposição diz isso explicitamente, este é, de fato, um pedaço de meta-aritmética. A declaração simbólica $a(b + c) = ab + ac$ é uma abreviatura da sentença. Para multiplicar um número por uma soma de outros dois números, você pode primeiro multiplicar cada um dos outros dois números pelo primeiro e, em seguida, adicionar os resultados. Este tipo de narrativa meta-aritmética pode ser chamado de generalização. Outro exemplo seriam as tarefas que envolvem quantidades desconhecidas, descritas na linguagem algébrica como resolução de equações. Na verdade, equações, como $2x + 1 = 13$, são meta-perguntas sobre processos numéricos; no presente caso, a questão é se o dobro do número aumentado de 1, renderia 13?.

Essas questões, além de nos fazerem refletir sobre o simbolismo algébrico, também nos mostram que a Álgebra tem como base a Aritmética e que o pensamento algébrico, nesse contexto, pode ser construído com base na generalização ou busca do valor desconhecido. No entanto, o desenvolvimento do raciocínio algébrico deve ir além de sua parte simbólica ou representação formal. Deve dar margem ao aluno construir sua forma de resolver problemas por métodos genéricos, que, segundo Souza e Diniz (1996) independem dos dados da questão, mas sim, da estrutura do problema.

Relatos feitos por alunos do 7º Ano em um artigo publicado por House (1995) apontam que a "Álgebra é muito difícil e frustrante. São horas de aula que nem chegamos de perto a entender"; (...) "não sei grande coisa de Álgebra, mas quem se importa?". Apesar de apresentarem um conhecimento superficial do seu significado e de seu alcance, por ainda se encontrarem no Ensino Fundamental, percebe-se que, para eles, não é fácil aprender Álgebra.

Gómez-Granell (2008) afirma que nos sentimos inseguros em relação à capacidade de resolver problemas mesmo fáceis ou de simples cálculos. Que a linguagem algébrica é considerada a autêntica linguagem Matemática, pois os números podem ser substituídos por letras, que têm um caráter muito mais genérico e que a converte em um importante instrumento de inferência e criação de novos conhecimentos. Isso pode ser fruto de um ensino fragmentado, sem qualquer ligação com o contexto ao qual está inserido, pois sabemos que a Matemática tem caráter abstrato e linguagem própria e que não é possível defini-los sem um raciocínio lógico-dedutivo.

Para Gómez-Granell (2008) e Souza & Diniz, (1996) o trabalho apressado com incógnitas, esconde a principal função da Álgebra, qual seja, a de comunicar ideias gerais envolvendo vários possíveis valores numéricos.

Nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, as crianças usam letras em Matemática para representar grandezas, como metro, quilo, grama. Ao vencer essa etapa da escolaridade, as letras aparecem para representar números. Essa mudança pode gerar dificuldades de aprendizagem na representação algébrica, pois o uso que a criança habitualmente faz das letras diferenciam daqueles usuais da Álgebra, na qual estas ocuparão lugar de variáveis ou incógnitas. Também pode causar uma ruptura entre aquilo que ela já sabe com uma nova forma de escrita e representação, ao ter que transpor de uma linguagem para outra.

Por isso, esse processo deve acontecer de forma gradual, podendo ser iniciado a partir do estudo das relações entre grandezas, ou seja, a partir da ideia de função, na qual, segundo Souza e Diniz (1996) o conceito de variável é absolutamente natural, desde que não nos preocupemos com formalismos excessivos e sim com as ideias fundamentais, pois ele consta desde o 5º Ano no trabalho com razões, proporções e porcentagens. Segundo as autoras, nós não damos o real valor, relegando-os a um plano secundário frente às equações e aos sistemas.

É importante no processo de ensino e aprendizagem da Álgebra, assim como de qualquer outro conhecimento, que o aluno tenha o seu saber valorizado, entendendo que o que ele sabia antes continua valendo agora, porém com maior compreensão e mais significado. Isso precisa ficar claro no trabalho com a Álgebra, bem como no tratamento dado, pelo professor, ao conteúdo a ser ensinado.

O processo de transição da Aritmética para Álgebra deve ser natural e ficar claro para o aluno. Seu sucesso vai depender dos conceitos aritméticos por ele aprendidos, pois agora terão que fazer uso deles em uma nova linguagem, que, segundo Garcia (1997) apud TELES (2004, p. 8) permite o manejo e a manipulação do desconhecido. É preciso que o professor mantenha válidos os referenciais algébricos dos alunos, a forma como já utilizam símbolos, para que não haja ruptura de conceitos, tornando essa aprendizagem mais difícil. Há situações que, muitas vezes, acontecem na escola durante o ensino de Matemática, que podem ser geradoras de dificuldades na aprendizagem, como, por exemplo, o aluno aprender apenas as ideias relacionadas ao conjunto dos naturais nos Anos Iniciais, isso valendo tanto para as operações como para os demais assuntos dos diversos blocos matemáticos. Os demais conjuntos somente irão surgir nos Anos Finais do Ensino Fundamental, principalmente o conjunto dos inteiros. Essas situações merecem nossa atenção, pois a ideia de função, apesar de estar presente em quase todo trabalho matemático dos Anos Iniciais e ser significativo para a parte algébrica, não fica tão evidente para o aluno.

Entre as investigações atuais sobre o ensino de Matemática, algumas se propõem a discutir o conhecimento do professor, suas dificuldades e necessidades (RIBEIRO & CURY, 2015). Com isso, podemos compreender que o professor, principalmente dos Anos Iniciais, pode apresentar dificuldades em lidar com esses conceitos matemáticos, visto sua formação não ser necessariamente matemática. Por outro lado, podem contar com diversos documentos oficiais que direcionam sua prática e trazem sugestões de conteúdos e metodologias, além das expectativas em relação ao que se espera que os alunos aprendam em determinada etapa escolar. Os livros didáticos são instrumentos bastante utilizados por eles para essa função. O que devemos pensar é se ambos referenciais tem ajudado no trabalho pedagógico do professor, propondo um ensino com base na resolução de problemas, na qual o aluno retoma saberes que funcionavam bem nas operações aritméticas e que agora lhe servirão de aporte para representação algébrica, pois a contribuição do professor nesse ponto de transição é fundamental.

Há muitas décadas, estudos e pesquisas, já vinham identificando erros que os alunos geralmente cometem no estudo da Álgebra e que poderiam ser geradores de dificuldades de aprendizagem, em razão disso, buscavam analisar suas causas. Booth (1995) relata um trabalho realizado entre os anos de 1980 a 1983, no Reino Unido, que fez parte de um projeto intitulado “Strategies and Errors in Secondary Mathematics” (SESM) envolvendo alunos da oitava à décima série (com idades entre treze e dezesseis anos) que vinham estudando Álgebra no contexto de Matemática integrado desde a sétima série. Portanto, já haviam trabalhado com conceitos como simplificação de expressões algébricas, fatoração simples, equações lineares simples, fórmulas, frações algébricas, equações e sistemas de equações, gráficos de igualdades e desigualdades.

Os resultados desses trabalhos mostram que a despeito das diferenças de idade em Álgebra, os erros eram semelhantes em todas as séries. Ainda segundo o autor, entrevistas foram feitas com os alunos que cometiam esses erros e mostraram que muitos destes podiam ter origem nas ideias dos alunos sobre aspectos como: o foco da atividade algébrica e a natureza das “respostas”; o uso da notação e da convenção em Álgebra; o significado das letras e das variáveis; os tipos de relações e métodos usados em Aritmética.

Cury (2015) traz exemplos de uma série de pesquisas realizadas com essa mesma abordagem, com foco na Álgebra, tanto no Brasil quanto no exterior, todas ligadas à análise de erros. No exterior, cita Guillermo (1992) no México, que classifica erros de alunos ente 14 a 20 anos em exercícios que envolvem as propriedades das operações algébricas; Esteley e Villarreal (1996) na Argentina, em problemas com funções limites e continuidades; Del Puerto; Minnaard e Seminara (2006) na Argentina, em Álgebra e funções.

No Brasil, temos Utsumi (2000) em São Paulo com resolução de problemas algébricos; Ribeiro (2001) em São Paulo, com Álgebra; Freitas (2002) em São Paulo, com equações de 1º grau; Valentino e Grando (2004) em São Paulo, com Álgebra Elementar; Allevato (2005) em São Paulo, com funções.

Reconhecendo que a Álgebra é uma parte da Matemática que exige uma linguagem própria, é compreensível que dificuldades possam surgir nessa transição, porém, poderão ser minimizadas se utilizarmos conceitos aritméticos como base para a resolução de problemas algébricos, principalmente atrelados aos conceitos de equações e funções.

Os conceitos de equações e funções são de extrema importância no campo da Matemática, especificamente da Álgebra. (BRASIL, 2014) refere-se as funções como modelos desenvolvidos para ajudar na compreensão de diversos fenômenos presentes nas atividades humanas, que podem ser de comportamento ou periódicos ou mesmo que envolvam demonstrações de cálculos exatos ou aproximados. O importante é que esses conceitos não sejam vistos apenas em seus processos algébricos, como meros treinos de propriedades e aplicação de regras de solução, mas na possibilidade que eles oferecem de fazer conexões com as situações que os originam. Eisenberg e Dreyfus (1995, p. 128) Afirmam que os tipos de modelos de raciocínio desenvolvido com o estudo das equações, por exemplo, podem ser generalizados para outras situações.

Ribeiro e Cury (2015) afirmam que os conceitos de equações e funções fazem parte das avaliações de larga escala e também de provas de seleção, tanto no Brasil como em outros países; que esses mesmos conteúdos têm sido objeto de pesquisa, tanto de investigadores nacionais como internacionais, mostrando as dificuldades no seu ensino e aprendizagem; que mesmo com enfoques bastante variados, esses estudos demonstram preocupações específicas com esse ensino-aprendizagem.

Os mesmo autores citam algumas dificuldades encontradas na resolução de equações que aparecem em uma pesquisa realizada por eles (2011), com 141 alunos de um curso de Licenciatura em Matemática de dez instituições de ensino superior do Brasil, na qual foi aplicado um teste com questões abertas aqui exemplificadas, com a apresentação da análise das respostas às questões cujo enunciado é: quantos pares (x,y) de números reais existem, tais que $x + y = xy = x/y$? Mesmo estudantes de Licenciatura em Matemática encontraram dificuldades para chegar a uma resposta que satisfizesse o problema. Vemos que muito se tem a fazer para sanar essas dificuldades, como, por exemplo, entender as principais fontes de erros e saber utilizá-las para avançar na aprendizagem e utilizar-se da metodologia de elaborar e resolver problemas favorecendo as estratégias criadas pelo aluno.

3.3. Álgebra e sua relação com a Aritmética

Teles (2004) afirma que definir Álgebra e Aritmética, e de que modo elas se relacionam, é uma tarefa difícil. E, para isso, devemos considerar três contextos distintos: o que se refere à Matemática acadêmica; o "saber social" (senso-comum); e o da Educação Matemática. Em cada um desses contextos a Matemática é tratada de uma forma, mas, apesar das especificidades existentes, entende-se que a diferença é de tratamento, de foco, e que é importante para o aluno identificar as particularidades da Aritmética ao lidar com os números. Porém, ao tratar equações, precisamos observar que esses procedimentos utilizados com números devem ser modificados. Assim, poderá avançar em seus processos algébricos reconhecendo habilidades advindas da Aritmética.

A autora ressalta ainda que estudos em Educação Matemática apresentam a Aritmética tratando de números, operações e propriedades, enquanto a Álgebra possui aspecto generalizador da Aritmética; tem a função de ferramenta e destaca-se por causa da utilização da linguagem simbólica. Ainda segundo a autora, seria impossível colocar uma divisória ou estabelecer limites entre Aritmética e Álgebra, muito menos impor uma ordem estrita, primeiro Aritmética, depois Álgebra na Matemática Escolar. Certamente, são questões que nos fazem refletir, pois, em problemas aritméticos o aluno lida com problemas cujas informações estão um tanto explícitas e exigem dele um resultado numérico "verdadeiro", obtido, geralmente, por meio de uma sequência de operações. Nos problemas algébricos as informações presentes nos problemas devem ser traduzidas de uma única vez para a linguagem algébrica, gerando equações com valores desconhecidos que serão suas possíveis soluções.

Esse processo de interpretação e escrita Matemática pode gerar dificuldades, como gera muitas vezes, por necessitar de uma organização, de uma atenção maior, de um processo mais elaborado por parte do aluno. Situações como esta, configuram uma das dificuldades do aluno na aprendizagem da Álgebra, destacando sua relação com a Aritmética. Garcia (1997) apud Teles (2004) afirma que a passagem da Aritmética à Álgebra é fonte de conflitos e fracassos na Matemática escolar.

As causas dessas dificuldades, ainda segundo o autor, têm diversas origens. Uma delas, se não a mais importante, é a comunicação através de uma linguagem estranha para o iniciado, diferente, puramente simbólica. Uma linguagem nova que permite o manejo e a manipulação do desconhecido. Booth (1995, p. 23) afirma que *uma das maneiras de tentar descobrir o que torna a Álgebra difícil é identificar os tipos de erros que os alunos comumente cometem nessa matéria e investigar as razões desses erros*. O tratamento dado pelo professor a esses erros pode favorecer a aprendizagem.

Concluímos que é relevante considerar a importância do desenvolvimento do pensamento algébrico desde os Anos Iniciais e trabalhar simultaneamente a Aritmética com a Álgebra, pois um implica o outro, e que essa discussão já se apresenta em documentos oficiais, como os Referenciais para o Ensino Fundamental e Médio disponíveis no Brasil. Faz-se necessário um repensar sobre a prática do professor no tratamento metodológico desses âmbitos,, associando-os a um referencial de forma a proporcionar mais significado para o aluno. Portanto, a Matemática não pode continuar servindo como filtro seletivo do sistema, seu ensino deve ser repensado e suas ações pedagógicas (re) planejadas para que se torne mais eficaz, tanto para o aluno em estado acadêmico/profissional, quanto para favorecer as mudanças necessárias à formação humana integral. A Resolução de Problemas é uma importante ferramenta que poderá colaborar com essa eventual mudança, por proporcionar ao aprendiz um pensar sobre suas ações.

Em relação à Álgebra, que requer uma ruptura epistemológica com a Aritmética (BROUSSEAU, 1983), necessita-se também do aluno uma nova atitude, na qual ele abandone uma forma mais familiar de interpretação da Matemática para adentrar num campo no qual essas relações se tornarão genéricas, com linguagem e sinais próprios, que geram desequilíbrio em concepções já existentes, porém, enriquecem e favorecem a aquisição de novas concepções.

3.4. A Linguagem Algébrica

Conhecendo a Matemática e seus campos de conhecimento, percebemos que cada um deles possui sua forma de destaque e de representação, ainda mais especificamente no campo algébrico. É indiscutível seu diferencial de representação. A palavra linguagem, segundo o Dicionário Aurélio, significa uso da palavra articulada ou escrita como meio de expressão e de comunicação entre as pessoas. A palavra expressão tem sua origem na ação de se expressar, manifestar seu pensamento através de gestos ou palavras. A comunicação em Matemática também é feita com uma linguagem própria, representativa, que se destaca da linguagem falada. Comunicamo-nos através de símbolos e sinais universais, que permitem ser interpretados por todos os povos em qualquer lugar do mundo.

A linguagem algébrica é um tipo de linguagem específica, utilizada para generalizar padrões matemáticos e se difere pela sua natureza. Gómez-Granell (2008) afirma que *há uma abstração muito maior em Matemática do que qualquer outro campo das ciências. Muitos de seus conceitos foram demonstrados e definidos mesmo antes de sua aplicação prática*. Esse poder conferido por sua linguagem é que lhe permite generalizar sendo capaz de inferir e criar novo conhecimento. Percebe-se na Álgebra uma estrutura formal de um tipo de linguagem com poder de abstração das relações matemáticas, que necessita de uma “tradução” de uma linguagem natural para uma formalizada compreendida universalmente. O rigor de seus termos a torna precisa e possibilita novos cálculos e inferências, que de outra forma não seriam possíveis.

Souza e Diniz (1996) fazem referência à Álgebra como uma forma de linguagem utilizada para expressar fatos genéricos. Estes símbolos são as letras (variáveis ou incógnitas) e os sinais da Aritmética, enquanto que as regras são as mesmas da

Aritmética que nos permite manipular os símbolos assegurando o que é ou não permitido.

No entanto, será que a Álgebra e a Aritmética teriam a mesma linguagem? Ambos são campos matemáticos que se relacionam, porém, possuem objetivos distintos. *É objeto da Aritmética o estudo dos números e suas operações enquanto que a Álgebra procura expressar o que é genérico, àquilo que se pode afirmar para vários valores numéricos independentes de quais sejam eles exatamente* (SOUZA & DINIZ, 1996).

Sendo assim, a Álgebra utiliza-se de letras: variáveis ou incógnitas, fórmulas e equações, para fazer-se compreender dentro da Matemática. Ponte Branco e Matos (2008) afirmam que os símbolos permitem expressar ideias Matemáticas de forma rigorosa e condensada e são muito úteis para a resolução de problemas. Dependendo do contexto, estes símbolos podem apresentar significados diversos que podem gerar dificuldades no aprendizado da Álgebra pelo aluno, tanto no que se refere à compreensão quanto à interpretação. Esses aspectos da linguagem, sua natureza e origem, devem ser explicitados para que haja avanço em relação à compreensão desse conhecimento matemático e também do raciocínio algébrico.

Ainda segundo Ponte, Branco e Matos (2008), a construção dessa Álgebra simbólica teve início no século XVI com François Viète. Antes dele, outros matemáticos como Diofanto, já usavam abreviações. Não podendo minimizar a importância dos símbolos, reconhecida por matemáticos como Keith Devlin que defendia a ideia de que sem os símbolos algébricos, uma grande parte da Matemática simplesmente não existiria. Para se aprender Álgebra é necessário se pensar algebricamente. O desenvolvimento dessa forma de pensar deve ser construído desde os Anos Iniciais na escola e, aos poucos, sendo formalizado até as etapas finais do Ensino Médio.

A Álgebra também não deve se restringir à manipulação de símbolos, pois esse é apenas um de seus aspectos. Ela possui outras funções que a tornam singular na Matemática. Ao iniciarmos um trabalho didático nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, buscamos desenvolver uma Pré-Álgebra (formas de raciocínio que conduzem à generalização) através de problemas que se baseiam na compreensão de regularidades, e se articulam fortemente com outros campos da Matemática escolar (PERNAMBUCO, 2013, p. 104).

Essa abordagem permite que o aluno se utilize de diferentes representações, para solucionar esses problemas. O que deve ser enfatizado, nessa fase de aprendizagem, são as possibilidades trazidas pela Álgebra que vão fornecer diferentes modelos de resolução. Essa forma simples de linguagem algébrica, quando desenvolvida de forma correta na escola, facilita sua compreensão futura em outras etapas escolares, quando o aluno tiver que utilizá-la de modo convencional. É importante fazer com que ele construa essa formalidade de maneira gradativa, a partir do raciocínio algébrico, para que perceba a importância e utilidade dessa linguagem na resolução de problemas.

O conhecimento prévio do aluno sobre a Álgebra deve ganhar cada vez mais significado, isso ocorre naturalmente, à proporção que é exposto a problemas nos quais tenha que usar estratégias pessoais para criar outras. Se a linguagem natural é tão familiar para o aluno, e também para os professores, por que o mesmo não pode acontecer com a linguagem algébrica? As relações de convivência diária com esse conteúdo devem estreitar esses laços e não servir como instrumento de exclusão.

Outro aspecto a ser observado é que se na resolução de problemas que exige um raciocínio algébrico, é necessário que o aluno faça uma transformação de linguagens, pois, apesar destes problemas encontrarem-se expressos de forma numérica, não significa que o ajudará a solucioná-lo. Para que ele venha, posteriormente, realizar operações mais complexas que exigem essa compreensão, é preciso que tenha domínio da linguagem algébrica e esse domínio começa nos Anos Iniciais de escolaridade, onde lida com essa linguagem de modo informal, que vai gradualmente sendo formalizada, consolidando-se no Ensino Médio. Garantir esse desenvolvimento é objetivo do ensino de Matemática de forma holística, visando todo o processo de aquisição da linguagem até, naturalmente, se tornar parte da pessoa que aprende.

Se considerarmos que a Álgebra constitui um espaço bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de generalização, sugerem os Parâmetros Curriculares Nacionais que sejam situações que coloquem o aluno para investigar padrões, tanto em sucessões numéricas como em representações geométricas, e identificar suas estruturas, construindo a linguagem algébrica necessária para descrevê-lo simbolicamente. Os símbolos devem sempre estar associados a significados, pois se forem utilizados de maneira abstrata apenas leva a uma prática de manipulações e repetições, sendo explorados exercícios que privilegiem estruturas algébricas e propriedades, prática frequente da Matemática Moderna.

Gómez-Granell (2008) afirma que um dos problemas mais importantes que o ensino de Matemática tem de enfrentar reside na enorme dificuldade que, para alunos, representa o domínio da linguagem matemática, especificamente da algébrica: a explicação mais generalizada é que isso se deve ao fato de que tradicionalmente o ensino da Matemática teve um caráter mais sintático que semântico; mais baseado na aplicação de regras do que na compreensão de significados.

Discussões recentes têm trazido à tona o que deve ou não ser incluído no currículo de Álgebra na escola básica. Esses diferentes concepções evidenciam o pensamento algébrico como caminho para aprendizagem desse conteúdo. É certo que esse processo de generalização deve ocorrer a partir da Aritmética, porém, não se limita à linguagem formal, mas pensar em Álgebra dentro de uma diversidade de situações sem reduzi-la às manipulações simbólicas. Kaput (1999, p. 05) identifica cinco facetas do pensamento algébrico, estreitamente relacionadas entre si:

1. A generalização e formalização de padrões e restrições;
2. A manipulação de formalismos guiada sintaticamente;
3. O estudo de estruturas abstratas;
4. O estudo de funções, relações e de variação conjunta;
5. A utilização de múltiplas linguagens na modelação Matemática e no controle de fenômenos.

Toda essa lógica algébrica vem reforçar o pensamento de que ela não se resume a símbolos, é uma linguagem completa e consistente. As letras usadas nas representações algébricas possuem significados diferentes que devem ser compreendidos em seu contexto. Se o aluno não compreende esses diversos significados terá dificuldades no aprendizado.

Ponte, Branco e Matos (2008), afirmam que boa parte destas dificuldades tem a ver com o fato dos alunos continuarem a usar em Álgebra, os conceitos e convenções aprendidos anteriormente na Aritmética. A razão da linguagem é a produção de sentido e para decifrar essa linguagem o aluno precisa de referencial matemático.

Para isso, é necessário o próprio aluno ter consciência desse fato e ponha em exercício uma prática argumentativa como forma de pensar, entre outras, que o aproxime do campo discursivo da Matemática, dando-lhe direcionamento para produção (BELLO & MAZZEI, 2008).

Nesse sentido, o domínio da língua é de fundamental importância na prática docente, pois auxilia na obtenção desse objetivo. A realidade deve estar vinculada a linguagem Matemática para que haja uma interação no processo de influência entre a sua língua natural e a linguagem algébrica. Segundo Lerat (1997) uma língua é um sistema de signos orais e/ou escritos vinculados a uma história e a uma cultura, por tanto, a linguagem formal da Álgebra é funcional, específica, que está a serviço do conhecimento matemático.

Bello e Mazzei, (2008) afirmam ainda que a linguagem utilizada na escola é diferente da usada no dia a dia, pois, aquela apresenta regras que usualmente não utilizamos, por essa razão é que o saber acadêmico tem sua própria linguagem. Podemos em alguns casos até decodificar os símbolos impressos, mas não somos capazes de realizar a leitura do texto. Essa regra também é válida na Matemática, quando "traduzimos" enunciados de problemas algébricos. Percebemos que o uso dessa termologia própria pode gerar dificuldades na aprendizagem, mas somente se, ao longo do período escolar, não tiver tido tratamento adequado.

4. METODOLOGIA

Neste Capítulo, apresentamos os caminhos metodológicos que adotamos para nossa pesquisa, que segue uma metodologia qualitativa de natureza interpretativa. Os roteiros das entrevistas semiestruturadas e o planejamento das tarefas que aqui nos referimos, encontram-se nos Apêndices.

4.1. A Pesquisa

Realizada no período de Junho de 2015 a dezembro de 2016, numa escola pública da rede estadual de ensino da cidade de Afogados da Ingazeira – PE, nossa pesquisa possui natureza qualitativa, pois, o foco não é propriamente os resultados, mas o modo como os alunos podem avançar em suas estratégias, mediados pela pergunta que surge da comunicação existente, entre professor e alunos, na aula de Matemática durante a resolução de um problema algébrico.

Flick (2011 p. 16) diz que "esse tipo de pesquisa parte da noção da construção social das realidades em estudo e está interessada nas perspectivas dos participantes, em suas práticas do dia a dia e em seu conhecimento cotidiano relativo à questão". (STAKE, 2011, p. 21) afirma que "neste tipo de pesquisa, o raciocínio baseia-se principalmente na percepção e na compreensão humana". Bogdan e Biklen (1994) afirmam ser esta uma forma eficiente de captar elementos da realidade empírica, podendo ser conduzido em múltiplos contextos que podem permitir a compreensão de comportamentos a partir da perspectiva dos participantes da investigação.

Nesse sentido, buscamos investigar os contributos da pergunta no desenvolvimento de estratégias de resolução de um problema algébrico pelo aluno. Stake (2011, p. 33-34) afirma que "o pesquisador qualitativo normalmente tenta assegurar o leitor de que o objetivo não é alcançar uma generalização, mas fornecer exemplos situacionais à experiência do leitor".

Cada uma dessas proposições referentes à abordagem qualitativa, do ponto de vista da investigação e da natureza interpretativa, nos dá suporte a adotar o estudo de caso como metodologia, pois é uma abordagem bastante comum em pesquisas dessa natureza.

Yin (2010, p. 20), afirma que "esta metodologia permite uma investigação para se preservar as características holísticas e significativas dos acontecimentos da vida real". Ponte (2006) afirma que "além dele acrescentar conhecimento a outro conhecimento já existente, traz ainda uma definição clara do objeto em estudo, evidenciando aspectos característicos fundamentais do caso".

Stake (1994) traz uma classificação para o estudo de caso, dizendo que ele pode ser *intrínseco* (quando o seu foco é a situação particular que se pretende estudar); *instrumental* (quando o caso é usado como meio de compreensão de uma problemática mais vasta); ou *agregado* (quando procede por agregação de vários casos instrumentais). Nosso estudo enquadra-se no primeiro item da classificação do autor, pois, consideramos que este defina nosso objetivo de pesquisa.

Comum a todos é o seu carácter empírico, a prevalência da perspectiva interpretativa (o "como" e os "por quês" referidos em Yin (2010) como as questões de interesse), o elevado nível de aprofundamento e detalhe, o contato direto e geralmente prolongado no tempo com as situações e pessoas em causa e a perspectiva dinâmica que não se fecha sequer às evoluções imprevisíveis das situações.

A escolha dessa metodologia justifica-se pelo tipo de questão de pesquisa proposta, pois permite retratar situações do contexto real de vida do aluno. Por outro lado, isso pode demandar muito tempo, exigindo da pesquisadora e dos participantes certa aceitação. Para Ponte (2006) seu objetivo fundamental é proporcionar uma melhor compreensão de um caso específico e ajudar a formular hipóteses de trabalho sobre o grupo ou a situação em causa.

> [...] um estudo de caso é uma investigação de natureza empírica. Baseia-se fortemente em trabalho de campo ou em análise documental. Estuda uma dada entidade no seu contexto real, tirando todo o partido possível de fontes múltiplas de evidência como entrevistas, observações, documentos e artefatos (YIN, 2010)

Ponte (2006, p. 12-14) afirma ainda que um estudo de caso pode seguir uma de duas perspectivas essenciais: (a) uma *perspectiva interpretativa*, que procura compreender como é o mundo do ponto de vista dos participantes e (b) uma *perspectiva pragmática*, cuja intenção fundamental é proporcionar uma perspectiva global do objeto de estudo, do ponto de vista do investigador, tanto quanto possível completa e coerente. No entanto, segundo o autor, em ambas as circunstâncias, um estudo de caso produz sempre um conhecimento de tipo particularístico.

Com base em Merriam (1988) podemos distinguir vários tipos de estudos de caso em Educação Matemática, no que respeita à sua orientação teórica (etnográfico, histórico, psicológico, sociológico) sendo a perspectiva interpretativa uma das que inspiram a investigação qualitativa, pois num estudo de caso interpretativo pretende-se conhecer a realidade tal com ela é vista pelos atores que nela intervêm diretamente". Não tendo sido escolhida ao acaso, mas por ter relação com a forma como a pesquisadora lida com suas experiências, práticas e a maneira de ver o mundo, no sentido de perceber a realidade.

Nessa perspectiva, desenvolvemos nossa pesquisa por compreender que tendo essa natureza interpretativa e inspirar a investigação qualitativa de análise de situação real de sala de aula, possa, oferecer suporte ao trabalho do professor.

Outro aporte referente a este tipo de pesquisa é o caráter comunicativo, que nesse trabalho especificamente, refere-se à pergunta que surge, do professor e dos alunos, no contexto da aula de Matemática e sua relação com a aprendizagem em Álgebra, pois se pela comunicação os indivíduos interagem, entendemos essa interação como sendo a dinâmica desse processo e buscamos verificar como essas interações podem refletir positivamente na elaboração de estratégias de resolução de problemas. Outro aspecto aqui evidenciado "é que o paradigma interpretativo busca valorizar a explicação e compreensão holística das situações" (MARTINHO, 2007), e nesse sentido, pode nos ajudar a compreender o que acontece nas relações de comunicação existentes na aula de Matemática, especificamente, durante o processo de resolução de um problema algébrico, quando esta torna-se necessária entre os participantes (professora e alunas).

Tem a ver ainda com a temática a ser investigada e com o tipo de problema que pretendemos abordar Flick (2011, p. 16) afirma que "a pesquisa qualitativa parte de uma "abordagem naturalística em relação ao mundo" e outra assume uma postura "interpretativa em relação ao mundo" de modo que em vários contextos, ambas são consideradas como diferentes em níveis de epistemologia e de metodologia, o que torna difícil simplesmente combinar "naturalístico interpretativo" em uma só abordagem". (BOGDAN & BIKLEN, 1994, p. 47-51) definem cinco características para a investigação qualitativa:

> [...] *(I)* Sua fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal; *(II)* seu caráter descritivo; *(III)* seus investigadores interessam-se mais pelo processo do que pelos resultados ou produtos; *(IV)* seus investigadores tendem a analisar os seus dados de forma indutiva; *(V)* a importância do significado.

O que percebemos de mais importante, com base nesses autores, está relacionado ao enfoque dado aos envolvidos na pesquisa, a forma como entendem suas experiências e práticas, e como se percebem no contexto de mundo ao qual estão inseridos.

4.2. As participantes

Nosso campo de pesquisa foi uma escola pública estadual, localizada na cidade de Afogados da Ingazeira, pertencente à região do Sertão do Alto Pajeú no Estado de Pernambuco. As participantes são duas alunas selecionadas, mediante critérios, explicitados adiante, de duas turmas do 3º Ano do Ensino Médio do turno vespertino, que se disponibilizaram a participar desse estudo.

Como a pesquisa foi realizada entre junho de 2015 e dezembro de 2016, realizamos o primeiro caso com uma aluna desta primeira turma ainda no ano de 2015, já que os mesmos eram concluintes do Ensino Médio e, naturalmente, iriam ausentar-se da escola ao final deste ano. Esta possuía 40 alunos, de público mais feminino, sendo 26 meninas e 14 meninos, numa faixa etária de 15 a 17 anos de idade, cuja maioria residia na área rural do Município.

O segundo caso foi realizado com uma aluna da segunda turma já este ano, 2016. A segunda turma possuía 34 alunos, também de público mais feminino, sendo 20 meninas e 14 meninos, numa faixa etária de 15 a 17 anos, de maioria também residente na área rural do Município.

A escolha dessa escola como campo de pesquisa justifica-se devido à professora pesquisadora tê-la como local de trabalho, sendo mais conveniente, pois há uma aproximação maior com o Diretor da escola e os professores atuantes, seus colegas de trabalho. Porém, esse fato não vem a influenciar nos resultados desta pesquisa, visto que a professora pesquisadora encontra-se afastada de suas atividades desde março de 2014, quando iniciou seu curso de Mestrado.

As alunas participantes da pesquisa não a reconhecem enquanto professora nesta instituição escolar, pois a mesma, apesar de lecionar no Ensino Médio, possui uma maior carga horária no turno noturno e, mesmo no turno vespertino, não chegou a atuar junto a elas, e apesar de já serem alunas da escola desde o Ensino Fundamental, a mesma não atua nesta modalidade. A professora participante veio a exercer suas atividades docentes nessa escola, de forma temporária, após o afastamento desta pesquisadora, não fazendo parte do seu grupo de trabalho.

Para uma melhor percepção do leitor quanto ao cenário da pesquisa, fazemos abaixo uma breve caracterização[1] da escola campo da pesquisa.

Essa escola conta com uma estrutura física bastante ampla, são 18 (dezoito) salas de aula; uma sala de coordenação pedagógica; uma sala de reunião; uma sala de Apoio Especializado; um refeitório; 02 (duas) cozinhas; um depósito para armazenamento da merenda escolar; banheiros adaptados; um auditório com capacidade para 150 pessoas; uma Biblioteca; laboratórios de Física; Química; Biologia e Matemática; uma quadra descoberta; uma secretaria; uma diretoria; uma sala de professores; uma sala de troféus; pátio interno coberto e descoberto; uma Central de Tecnologia Educacional; um Laboratório de Informática Educacional; um Laboratório Móvel com 31 netbooks para utilização em sala de aula e rede wi-fi em diversos pontos.

Há 59 (cinquenta e nove) professores regentes; uma diretora; uma secretária; uma professora readaptada[3] que coordena a Central de Tecnologias Educacionais (CTE); 04 (quatro) coordenadoras pedagógicas; 06 (seis) funcionários terceirizados (que prestam serviço de limpeza do ambiente escolar); 04 (quatro) merendeiras; 06 (seis) profissionais de apoio administrativo; 02 (duas) Analistas Educacionais; 04 (quatro) professores readaptados[2] em atividades pedagógicas na biblioteca; 02 (dois) auxiliares de serviços gerais; um coordenador da Banda Marcial; 04 (quatro) monitores do programa "Mais Educação"; perfazendo um total de 94 funcionários em efetivo exercício.

Todas essas características físicas e estruturais da escola, aliadas aos recursos humanos, tornam o ambiente escolar favorável a aprendizagem, porém, precisamos pensar que o mais importante seja o modo pelo qual os conhecimentos são tratados neste ambiente e as reflexões que os alunos fazem sobre ele. Juntos, esses fatores podem promover um aprendizado matemático satisfatório.

O Colégio Normal Estadual atende 1.021 alunos neste ano de 2016, distribuídos em três turnos, oferecendo Ensino Fundamental de 09 anos, Educação Especial/DI, salas itinerantes aos educandos com deficiência visual- DV e Deficiência auditiva DA, Educação de Jovens e Adultos em Nível Médio, Ensino Médio e Ensino Normal Médio, PROEJA (EJA Médio com qualificação profissional– Parceria com o Instituto Federal de Pernambuco).

---

[1] Esta caracterização é um recorte feito do Projeto Pedagógico da Escola
[2] Entenda-se por "professor readaptada" aquela que , por motivos de saúde, deixa de exercer suas na docência e passa a exercer outras funções pedagógicas no âmbito da escola.

A escolha das alunas participantes teve como critério serem participativas oralmente nas aulas de Matemática. Ambas foram indicadas pela professora com base nestes critérios. Escolhemos alunas dessas turmas por acreditar que, estando nos anos finais do Ensino Médio, seriam capazes de resolver problemas algébricos com mais propriedade, visto que, nessa fase, alguns conceitos podem estar consolidados. Isso considerando todo o processo de aprendizagem já decorrente do Ensino Fundamental que avança por todas as etapas do Ensino Médio (ou pelo menos deveria) vindo a se consolidar ao final dessa modalidade. Sabemos que essa exigência básica é necessária para que o jovem venha a atuar de forma autônoma e contínua ao longo da vida, tanto na sociedade quanto no mundo do trabalho.

Nosso estudo busca investigar se, no desenvolvimento das estratégias de resolução de um problema algébrico pelas alunas, a pergunta que surge das interações comunicativas entre professora pesquisadora e alunas pode contribuir com o avanço do pensamento algébrico das mesmas, de modo a favorecer o desenvolvimento de estratégias mais eficientes de resolução. Assim, as estratégias metodológicas que utilizamos nos auxiliaram na metodologia de ensino e no planejamento da tarefa.

A tarefa de resolução de um problema foi realizada de modo individual, com cada uma das alunas participantes dos estudos de caso, no caso Beatriz e Júlia, respectivamente. Durante a realização da entrevista e na realização da tarefa, utilizamos pseudônimos para identificar os participantes, cuja justificativa encontram-se descrita no item 4.3 desta dissertação.

4.3. Etapas da Pesquisa Empírica

Antes de planejar a ação formal da tarefa,,realizamo entrevistas semiestruturadas com as alunas Beatriz e Júlia, ambas participantes dos estudos de caso de modo individual, cujo objetivo é identificar concepções à cerca da Resolução de Problemas e sobre as perguntas que realizam nas aulas de Matemática, para analisar se estas favorecem o desenvolvimento de suas estratégias de solução do problema algébrico proposto.

No decorrer destas entrevistas semiestruturadas, identificamos as participantes atribuindo pseudônimos, sendo J a professora pesquisadora, Beatriz o caso 1 e Júlia o caso 2. Os pseudônimos utilizados foram escolhidos de modo aleatório. Bogdan e

Biklen (1994) afirmam “que a utilização de pseudônimo ajuda a proteger a identidade do sujeito”, sendo justamente essa a nossa intensão.

Tendo nossa pesquisa natureza investigativa, reconhecemos que apenas a ação de fazer perguntas diretas não daria conta da análise mais aprofundada dos fatos aos quais buscamos com a coleta de dados. Faz-se necessário conhecer um pouco mais sobre as alunas e para isso nos utilizamos da tarefa de resolução de um problema algébrico.

> É formulando tarefas adequadas que o professor pode suscitar a atividade do aluno. Não basta, no entanto, selecionar boas tarefas – é preciso ter atenção ao modo de às propor e de conduzir a sua realização na sala de aula (PONTE, 2005, p.2)

Antes de realizarmos a tarefa de resolução do problema, fizemos uma Análise Prévia da mesma para mapear conhecimentos possivelmente a serem mobilizados pelas alunas e possíveis caminhos na construção de novos conhecimentos. Esse estudo tem seu fundamento na didática francesa e permite ainda corrigir rumos na elaboração de situações de ensino.

4.4. Análise prévia do problema

O problema utilizado na tarefa realizada pelas alunas, foi retirado do livro didático de Matemática para o Ensino Médio, utilizado na rede pública do Estado de Pernambuco entre os anos de 2009 a 2011, tendo como autoras as Profª. Dras. Kátia Cristina Stocco Smole e a Maria Ignez de Souza Vieira Diniz em sua 3ª edição pela Editora Saraiva, ano 2003. Sendo nosso objetivo trabalhar com resolução de problemas algébricos, este está relacionado ao conteúdo de Sistemas de Equações Lineares do tipo 3x3, contendo três equações e três incógnitas, que faz parte do currículo atribuído ao 2º Ano do Ensino Médio da referida rede e, como o currículo é adotado em espiral, vem sendo trabalhado desde o Ensino Fundamental, a partir do 8º Ano, se estendendo até o 3º Ano do Ensino Médio. Consideramos ser um problema algébrico por, além de conter conteúdo relacionado a Álgebra, também podemos a utilizar como ferramenta de resolução, mas não somente, pois o aluno também pode se utilizar de procedimentos Aritméticos, visto que esta serve de base para Álgebra.

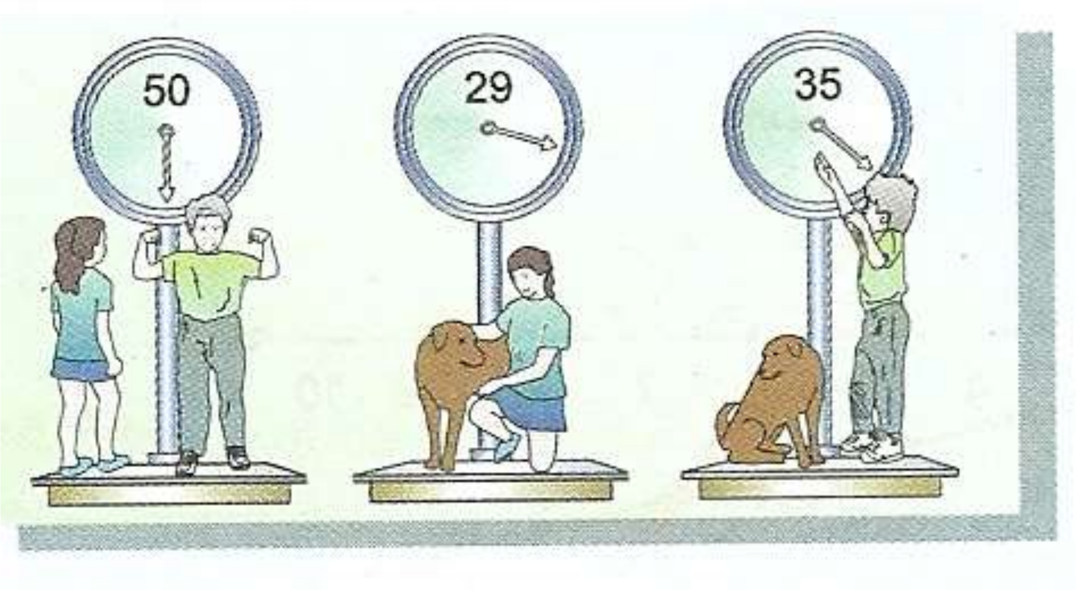
O problema utilizado na tarefa proposta as alunas participantes dos estudos de caso, encontra-se proposto no livro didático de Matemática, especificamente no capítulo que se refere a sistemas de equações lineares do 1º grau. Sua abordagem propõe o uso de estratégia algébrica, porém pode ser resolvido facilmente usando as operações

Aritméticas. Apesar desta servir de base para a Álgebra, ao propor esse problema como algébrico, a autora tem a intensão de facilitar o raciocínio do aluno em relação ao uso da linguagem dos sistemas, visto que ao iniciar pela Aritmética, facilitaria a compreensão. Nesse caso, há riscos do aluno não utilizar a Álgbra como estratégia de resolução, optando pela Aritmética. Como temos a intensão que o aluno desenvolva mais de uma estratégia na resolução do problema, buscaremos, mediados pela pergunta, explorar essas diversas possibilidades.

O problema aborda o conteúdo algébrico de Sistemas de Equações Lineares do 1º Grau tipo 3x3 (três equações e três incógnitas). Esse conteúdo foi escolhido por já ter sido trabalhado em anos anteriores, inclusive no Ensino Fundamental e vir ser aprofundado no Ensino Médio. Também por fazer parte do Currículo estabelecido para essa modalidade de ensino no Estado de Pernambuco, sendo avaliado em exames internos e externos, como SAEB[4] e SAEPE[2], o que requer certo domínio pelo aluno. Não sendo este o foco do nosso trabalho, nos detemos nas estratégias de resolução apresentadas pelo aluno no processo de comunicação entre aluno e professora pesquisadora, mediados pela pergunta.

Figura 1: o problema algébrico

Você consegue descobrir o "peso", em kg, de cada indivíduo abaixo?



[4] O Sistema de Avaliação da Educação Básica – SAEB tem como principal objetivo avaliar a Educação Básica brasileira, sendo aplicado bianualmente, abrangendo, de maneira amostral, alunos das redes públicas e privadas do país, em áreas urbanas e rurais, matriculados no 5º Ano e 9º ano do Ensino Fundamental e no 3º ano do Ensino Médio, nas disciplinas de Língua Portuguesa e Matemática.

5 O Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco – SAEPE tem por objetivo fomentar mudanças na educação oferecida pelo Estado, sendo aplicados anualmente testes de desempenho nas disciplinas de Língua Portuguesa e Matemática, para alunos do 3º, 5º e 9º anos do Ensino Fundamental e 3º ano do Ensino Médio e 4º ano do Normal Médio, das redes estadual e municipal de ensino.

Este problema traz uma situação cotidiana do aluno, na qual três indivíduos estão medindo sua massa corporal. O objetivo é descobrir quanto “pesa” cada um deles. Tanto o enunciado quanto a representação gráfica, pelo desenho, podem ajudar o aluno a compreender o que lhe foi perguntado. Durante a resolução do problema, o processo de comunicação, mediado pela pergunta, entre professora pesquisadora e pesquisado, facilitou a interação, o resgate de conhecimentos prévios e o desenvolvimento de estratégias de resolução pelo aluno.

No que tange à resolução do problema, o mesmo poderá ser resolvido usando as operações aritméticas de adição, subtração e divisão. Também pelo uso de equações lineares, construídas atribuindo-se letras aos indivíduos, como: x para menina, y para menino e c para cachorro. Assim, poderia construir três equações: $x + y = 50$; $x + c = 29$; $y + c = 35$ que, organizadas em um Sistema de Equações Lineares do 1º grau, do tipo 3x3, teria facilitado a resolução. O enunciado do problema aparece de forma clara, com vocabulário adequado ao Ano de escolaridade e o desenho pode contribuir para o estabelecimento de relações entre os valores expressos nas balanças e os indivíduos que estão sendo “pesados”.

O grande *insight* para solucionar o problema seria o aluno perceber que cada indivíduo está sendo “pesado” duas vezes. As possibilidades de estratégias a serem desenvolvidas pelo aluno na resolução podem variam entre as operações, uso de estimativas e utilizando a Álgebra, no caso o sistema de equações lineares do 1º grau do tipo 3x3. Nesse caso, o aluno precisaria ter domínio das operações fundamentais; raciocínio algébrico para uso de representações (como letras para cada indivíduo); equações lineares e sistemas de equações lineares. Uma possibilidade de erro seria na interpretação, na qual, por falta de atenção, ele não perceberia que os indivíduos foram pesados duas vezes cada, não realizando a divisão por dois do total de “pesos” expressos nas balanças. Outro seria observar as três balanças sem estabelecer relação com os indivíduos que estão sendo “pesados” em cada uma delas. Começar observando que o “peso” da menina com o menino, na primeira balança, pode ser usado para encontrar o “peso” do cachorro, ficando fácil deduzir quanto pesaria cada um deles. Os dados fornecidos pelo problema são suficientes para se chegar à resposta, não havendo dados desnecessários que dificultem à resolução.

4.5. Instrumentos e Procedimentos de Coleta de Dados

Nesta pesquisa, utilizamos como instrumentos de coleta de dados as *entrevistas (semiestruturadas)* com as alunas que compõem os estudos de caso, visto que "Em geral, as entrevistas são uma fonte essencial de evidência do estudo de caso (...)" (YIN, 2010, p. 135); e *o problema algébrico* para as alunas, que nos permitiu investigar o desempenho, a interação e a comunicação oral e escrita, inevitavelmente presentes durante o processo de resolução, no qual as alunas desenvolvem suas estratégias, mediadas pela pergunta.

Nossa pesquisa teve início com uma visita à escola, na qual conversamos com a Diretora e a professora de Matemática para apresentar nossos objetivos e metodologia de trabalho, junto às turmas de 3º Ano do Ensino Médio. A professora dessas turmas se dispôs a colaborar e se fazer presente em todas as etapas de desenvolvimento de nosso estudo.

Não tivemos contato com toda a turma. Optamos por trabalhar com algumas alunas indicadas pela professora da turma, seguindo os critérios estabelecidos, e já citados, no item 4.2 (participantes) desta dissertação. Portanto, ao retornamos à escola, solicitamos da professora a indicação dessas alunas, no caso duas, com as quais realizaríamos nossos estudos de caso. O caso 1, realizado com a aluna Beatriz e o caso 2 com a aluna Júlia. Ao serem selecionadas, as alunas foram consultadas se gostariam de participar, pois demonstraram certo receio ao saber que as etapas do trabalho seriam gravadas.

Em momentos distintos, realizamos a tarefa, contendo um problema algébrico, que nos proporcionou interagir com as alunas por meio da pergunta cuja finalidade foi de investigar se esta favorece suas estratégias de resolução.

As sessões de resolução da tarefa foram realizadas de modo independentes, sem haver articulação ou sequência entre elas. A duração de cada uma foi de aproximadamente 96 minutos, sendo gravadas em áudio para facilitar o processo se análise e discursão dos resultados (a transcrição desses áudios é mais uma fonte de evidência da pesquisa).

As alunas foram informadas da ocorrência de cada uma. Procuramos trabalhar nesse sentido para poder fazer comparações tomando um parâmetro entre as formas de resolução criadas por elas. Em todos os momentos a professora da turma se fez presente, porém, não emitiu nenhum comentário nem fez inferências de qualquer tipo durante o trabalho. O problema proposto abordava apenas um conteúdo algébrico (sistemas de equações lineares do 1º grau), porém, como já foi discutido, o aluno poderia resolvê-lo usando seus conhecimentos algébricos e também fazendo uso da Aritmética.

Para coleta de dados da entrevista usamos um gravador. Marconi e Lakatos (2003) afirmam que "entrevistar não é uma tarefa fácil, mas quando o entrevistador consegue estabelecer uma relação de confiança com o entrevistado, pode obter informações que, de outra maneira, talvez não fosse possível". Sendo esse nosso objetivo, e reconhecendo nossas possibilidades e limitações, buscamos interagir da melhor maneira possível com as alunas, na busca dos fatos aos quais nos propomos investigar e, de acordo com nossos objetivos, encontrar respostas, entendendo que elas nem sempre serão simples, porém seus detalhes poderão nos fornecer dados que, quando bem fundamentados e interpretados, podem garantir um resultado satisfatório. Ao mesmo tempo, que ocorre em todos os processos da pesquisa, utilizaremos descrição para relato e discursão dos fatos.

4.6. Análise dos dados

O processo de análise dos dados busca organizar sistematicamente as informações e resultados obtidos na ação da pesquisa e tem por finalidade aumentar a compreensão da professora pesquisadora sobre esses dados que, segundo Bogdan e Biklen (1994, p. 205) "permitem apresentar aos outros aquilo que encontrou. Dada sua importância, envolve organização, síntese, procura de padrões, descoberta de aspectos importantes e do que deve ser aprendido e a decisão sobre o que vai ser transmitido aos outros."

A análise dos dados coletados na entrevista semiestruturada realizada com as alunas, objetos dos estudos de caso, no primeiro momento de nossa pesquisa, teve como base as seguintes categorias: (I) *concepções sobre a resolução de problemas;* (II) *concepções sobre a pergunta na aula de Matemática; (III) A proposição do problema ao aluno e as perguntas; (IV) As estratégias de resolução do problema algébrico.*

Na realização da tarefa de resolver um problema algébrico com as alunas, segunda etapa da pesquisa, nos utilizamos dos tipos de pergunta segundo a classificação de Pereira (1991): (I) *Pergunta exame; (II) pergunta real; (III) pergunta didática e suas subcategorias: Pergunta de interpretação, pergunta convergente, pergunta divergente, pergunta meta, pergunta cálculo.* Nesta etapa, professora pesquisadora e alunas desenvolveram a comunicação, mediadas pela pergunta, que contribuiu para o desenvolvimento das estratégias de resolução criadas pelas alunas.

Assim, nossas análises se apresentam distribuídas em dois momentos: O Capítulo 5, contendo o primeiro Estudo de Caso com a aluna Beatriz e o Capítulo 6, contendo o segundo Estudo de Caso com a aluna Júlia.

5. O CASO BEATRIZ

Neste Capítulo apresentamos o primeiro Estudo de Caso analisado, trazendo nossas considerações com base nas categorias de análise: (I) *concepções sobre a resolução de problemas;* (II) *concepções sobre a pergunta na aula de Matemática; (III) A proposição do problema ao aluno e as perguntas; (IV) As estratégias de resolução do problema algébrico;*

5.1. Apresentação

Beatriz é aluna do 3º Ano do Ensino Médio da escola campo de nossa pesquisa. Ela tem 17 anos, reside na área rural do Município de Afogados da Ingazeira – PE, afirma gostar de Matemática e ter frequentado todo Ensino Fundamental na Rede Pública Municipal, sendo do 1º ao 4º Ano na área rural, onde mora, e do 5º ao 9º ano numa escola urbana localizada em um Bairro da referida cidade. Ingressou na Rede Pública Estadual, especificamente nesta escola objeto da pesquisa, somente a partir do 1º Ano do Ensino Médio. Não possui histórico de reprovação em nenhuma das etapas de sua escolaridade até o momento e seu objetivo é concluir o Ensino Médio e dar continuidade aos estudos ingressando na Universidade.

5.2. Concepções sobre a Resolução de Problemas

A abordagem de resolução de problemas e a investigação Matemática em sala de aula, pode garantir ao aluno uma apropriação significativa de conhecimentos matemáticos, favorecendo a aprendizagem e também o ensino de Matemática. Diante desse fato, Beatriz fala sobre as atividades que realiza na aula de Matemática, entre elas exercícios e problemas, que ela afirma fazer

> Os dois. [Entrevista Beatriz, 11/12/2015]

Ela explica diferenciando cada uma dessas ações:

> Problema é quando eu acho uma solução pra resolver. É... (pausa) quando eu estou pensando pra poder eu resolver aquela situação. E exercício é quando a professora passa um exemplo no quadro e eu faço pelo dela. [Entrevista Beatriz, 11/12/2015]

Infere-se na fala de Beatriz que a ação de resolver problema é diferente da ação de fazer exercícios. Ela demonstra compreender que resolver problemas exige um pensar sobre algo, para depois poder buscar uma solução, enquanto que os exercícios expressam uma ação de repetição de um processo visto para depois poder demonstrar, em outros exemplos, se este foi ou não aprendido.

Esse fato nos mostra que repetição de procedimentos não favorece a compreensão quanto o pensar sobre o problema, pois condiciona a reflexão do aluno, inibindo sua criatividade na construção de suas estratégias de solução. Evidente que ambas as tarefas tem sua finalidade e devem ser usadas no contexto escolar, porém, a aprendizagem em Matemática ocorre mais significativamente, quando há compreensão de conceitos e desenvolvimento de habilidades e o aluno torna-se agente da construção de seu próprio saber.

5.3. Concepções sobre a Pergunta na Aula de Matemática

A comunicação existente entre professor e aluno na aula de Matemática pode servir para melhorar a aprendizagem e ocorrer durante todo o processo de Ensino. Assim, a pergunta que surge nos momentos de resolução de problemas, entre professor e alunos, pode favorecer as estratégias de solução. Beatriz diz que costuma fazer pergunta nas aulas de Matemática e explica em que momento da aula isso acontece

> É quando eu não sei aquele assunto ai ela pode me explicar melhor.... e tirar minhas dúvidas. Também explicar um assunto passado ela vem rever.... isso. [Entrevista Beatriz, 11/12/2015].

Podemos inferir que a ação de fazer pergunta, descrita por Beatriz, ocorre por dois motivos: o primeiro é para tirar dúvidas sobre um assunto que está sendo visto. O segundo é para relembrar assuntos estudados. Essas situações mostram que a pergunta tem função limitada na aula de Matematica, não funcionando como ferramenta de aprendizagem, pois seria muito mais abrangente se fosse utilizada para explorar conceitos, melhorar as interações, expor ideias. Perguntamos se ela se sente à vontade para fazer perguntas ao professor. Ela afirma:

> Às vezes. [Entrevista Beatriz, 11/12/2015]

Por quê?

> Bom, por que na maioria das vezes é... a pessoa sabe o assunto e em outro momento é... o que a pessoa não sabe. Eu gosto de

> perguntar pra tirar as minhas dúvidas. [Entrevista Beatriz, 11/12/2015]

Beatriz deixa claro que quando sabe o assunto não faz pergunta, reforçando a ideia de que perguntar serve mesmo para tirar dúvidas sobre o que está sendo estudado. A ação de perguntar limita-se ao necessário, não é processo de interação. Logo, a comunicação, nesta sala de aula, não está favorecendo a aprendizagem. Percebe-se que esse elemento tão presente não está sendo explorado no ambiente escolar. Ela afirma ainda que:

> Por que... (pausa). Por que se eu não perguntar é... ai eu não vou saber aquele assunto pra poder resolver né? Ai... eu gosto de perguntar. [Entrevista Beatriz, 11/12/2015]

De acordo com Beatriz, a ideia da pergunta para tirar dúvidas prevalece na aula de Matemática. Porém, ela também afirma que pergunta para poder saber resolver e que gosta de perguntar. Apesar de ser esta uma ação modesta, é importante observar que a pergunta contribui na sua forma de pensar e fazer e que ela vê nela uma possibilidade que instiga sua ação.

Esse momento, sendo valorizado pelo professor, pode mudar a visão do aluno para a criação de modos de resoluções diferentes e estes serem discutidos, ampliando o pensamento e o raciocínio do mesmo, lhe dando confiança e autonomia. Sobre perguntar aos colegas, Beatriz afirma:

> Também. É ... mais os colegas eles não sabe tudo que o professor sabe ai algumas coisas que eu não sei eles podem saber e me explicar melhor. [Entrevista Beatriz, 11/12/2015]

Beatriz parece ouvir seus colegas, sabendo respeitar suas falas e o que eles podem lhe ensinar. Infere-se que ela considera o conhecimento deles e os utiliza, pois afirma aprender também com eles. Demonstra interesse em perguntar e, talvez, se isso fosse uma prática na sala, ela pudesse produzir mais ou melhorar suas reflexões sobre o que está sendo ensinado, tirar conclusões sobre e construir novos conceitos.

A pergunta tem um potencial mobilizador de conhecimento, pois pode fazer com que o aluno participe das discursões, interaja com os outros e melhore seu raciocínio matemático fazendo conexões entre aquilo que ele sabe com o que está sendo discutido na aula, sendo o professor o incentivador nesse processo. Assim, a aprendizagem poderia ter mais sentido, sendo interessante para o aluno, através da compreensão, chegando a construção de saberes. As práticas de comunicação existentes na aula de

Matemática podem ser vistas como um caminho para se chegar a um ensino-aprendizagem da Matemática, prazeroso e significativo.

Pergunto sobre a importância de fazer pergunta na aula de Matemática e Beatriz afirma

> Sim. [Entrevista Beatriz, 11/12/2015]

Por quê?

> Por que tira nossas dúvidas... é... você aprende mais as questões que ela passa o assunto ela pode é ... ensinar coisas boas pro nosso futuro relembrar coisas do passado. Essas coisas. [Entrevista Beatriz, 11/12/2015]

Beatriz volta novamente à ideia inicial de que perguntar servem para tirar dúvidas e relembrar assuntos passados. Porém passa uma ideia também de que a pergunta a faz aprender mais e de certa forma o ensino fica mais interessante. Evidencia que através da pergunta, pode-se aprender coisas que sirvam para o futuro, dando margem a um pensamento criativo que deve ser visto em sala de aula pelo professor. Ela demonstra ter consciência sobre a importância do ato de perguntar, pois acredita que pode aprender ao perguntar, ação que poderia ser explorada pelo professor.

Esse pensamento expressa um desejo de algo mais que simplesmente aprender aquilo que é posto pelo professor dentro do conteúdo programático. Ela parece querer ir além, avançar em outras perspectivas quando fala em futuro, como se estivesse dizendo que quer um conhecimento para além das paredes da escola, para a vida. Ao falar sobre a quem prefere fazer perguntas na sala, se aos colegas ou ao professor, Beatriz afirma:

> Os dois. Por que o professor ele pode explicar melhor, tirar nossas dúvidas. E os alunos podem saber alguma coisa que eu não sei e eles podem me explicar algum assunto que eu não sei e eles podem saber. [Entrevista Beatriz, 11/12/2015]

Confirma em sua fala, que realmente considera o conhecimento de seus colegas tanto quanto do professor, pois cada um poderia saber de coisas que ela não sabe, podendo aprender com os dois. Beatriz parece aberta ao aprendizado, não pensando apenas no professor como detentor do conhecimento, mas que todos ali possuem também algo a ensinar.

Beatriz explica sobre o que pergunta na aula de Matemática:

> Sobre o assunto que ela passa... é ... Quando ela passa alguma atividade, revendo o que nós já estudou pra nós lembrar.... é também os problemas que ela passa e nós não sabe resolver. [Entrevista Beatriz, 11/12/2015]

Percebe-se que Beatriz faz pergunta por dois motivos: sobre o assunto que está sendo tratado e sobre outros já estudados. É importante saber dela se as perguntas que faz, ao professor ou aos colegas, ajudam a resolver o problema. Ela responde:

> Ajuda. [Entrevista Beatriz, 11/12/2015]

Por quê?

> Por que através do que perguntamos, alguma coisa no futuro agente pode lembrar daquela questão, agente pode é... e quando for fazer alguma prova pode cair o que ela passou, o assunto... ai... eu costumo perguntar. [Entrevista Beatriz, 11/12/2015]

Beatriz expressa uma preocupação em perguntar, para não ficar com dúvidas e também relembrar conteúdos estudados. Percebe-se que ela dá muita importância ao ato de perguntar e que essa pergunta a ajuda a compreender. Ela valoriza esse momento, pois entende que ao fazer pergunta seu conhecimento pode avançar, ao falar que "através do que perguntamos pode refletir em algo no futuro" ela demonstra esse fato. Porém, parece que esse espaço não está sendo dado a ela na aula, ao demonstrar querer perguntar mais do que o que está lhe sendo ofertado. Talvez se tivesse mais oportunidade, interagisse mais com o professor ou colegas, pudesse mudar essa concepção.

A sala de aula é um ambiente de interações e de comunicação, sendo justamente isso que Beatriz está desejando, implicitamente, ao valorizar a pergunta.

Ao perguntarmos a Beatriz se ela está estudando ou já estudou um assunto chamado Sistemas de Equações Lineares, ela responde:

Beatriz: (pausa) sim, já estudei já.

J.: Sabe explicar que assunto é esse?

Beatriz: É alguma coisa referente a retas? Não tô lembrada.

J.: Não lembra desse assunto?

Beatriz: Não.

Beatriz diz já ter estudado Sistemas de Equações Lineares, não sabendo explicar do que trataria esse assunto. Depois ela afirma que não lembra. Um comportamento natural, pois lembrar um assunto pelo nome é algo complicado para um aluno de Ensino Médio, que só demonstra ter esse conhecimento quando precisa utilizá-lo. Esperamos que diante do problema ela apresentasse algum conhecimento sobre o assunto tratado.

5.4. A Proposição do Problema algébrico ao aluno e as Perguntas

Ao propor a tarefa de resolução de um problema algébrico a Beatriz, a professora pesquisadora busca interagir com a aluna se utilizando da pergunta como meio de comunicação que facilitará o desenvolvimento das reflexões sobre o problema, bem como a construção de suas estratégias de solução, Neste caso as perguntas mais utilizadas serão do tipo real e de exame, segundo a classificação de Pereira (1991), não deixando de versar pelos demais tipos, porém com menos ênfase. Assim, apresenta a tarefa a Beatriz, que logo pergunta:

Beatriz: é um problema? (depois de olhar por alguns instantes)
J.: O que você acha?
Beatriz: Que é um problema.

Beatriz afirma com segurança ser um problema e o observa de diversas formas: tanto a escrita, como a representação gráfica. Perguntamos se ela compreendeu o problema.

Beatriz: Não, quero pensar mais um pouco.

Beatriz parece se preocupar em analisar com mais detalhes os elementos do problema, bem como sobre o que lhe foi perguntado, não indo direto aos cálculos. Estabeleceu relações entre a parte gráfica e a escrita, mas parece não saber que relação seria essa. A pergunta lhe ajudou a interpretar e a definir uma estratégia de resolução, mas sentiu dificuldade em iniciar a resolução do problema.

Beatriz: Sim.
J.: Qual seria a dificuldade?
Beatriz: Por causa de que eu não tô entendendo a pergunta.
J.: Qual pergunta?
Beatriz: Se é pra dizer o peso dos dois nas balanças ou de cada indivíduo.

Nesse momento Beatriz demonstra não conseguir interpretar e conjecturar os elementos do problema com seus conhecimentos prévios, ou ainda se sente insegura em agir de acordo com seu raciocínio. Ela busca investigar se o que pensa está certo ou não aos olhos da professora pesquisadora. A representação gráfica do problema poderia ajuda-la na compreensão

Talvez essa nem tenha sido a dificuldade. Talvez ela possa ter receio de expressar seu pensamento diante da professora pesquisadora. Parecia ansiosa por não saber desenvolver um cálculo, no primeiro momento. Pedimos que nos explicasse o que estava sendo perguntado no problema, tentando clarificar suas ideias e situá-la no contexto.

Beatriz: se você consegue descobrir o peso de cada indivíduo abaixo (respondeu depois de ler novamente o enunciado) É de cada um deles não é?

Ela pergunta para confirmar a informação. Mesmo estando tão claras no enunciado do problema, sente-se insegura em tirar suas próprias conclusões e prefere não arriscar. A forma como lida com as informações é lógica, mas ela não consegue tomar uma decisão sozinha sobre o que fazer com elas. Precisa da confirmação da professora pesquisadora para prosseguir. Essa falta de autonomia de Beatriz pode ser consequência da prática do professor, que pode não dar espaço em sala de aula para discutir possibilidades de resolução a partir das ideias dos alunos. Ela continua:

Beatriz: Se esse é o peso (apontando para primeira balança) deles junto. Pesam 50. E a segunda balança, o cachorro e a menina pesam 29. E na terceira o cachorro e o menino pesam 35. Ai é pra dizer a diferença entre eles. O peso de cada um.

Após ter feito toda essa verificação junto a professora pesquisadora, Beatriz consegue finalizar no objetivo do problema. Sua insegurança em tirar conclusão sozinha fica evidente, porém, mostrou que compreendeu a relação existente entre o peso expresso em cada balança e os indivíduos que estavam sendo pesados. Ao referir-se a “diferença entre eles”, ela estabelece uma situação de cálculo aritmético, no caso, uma operação de subtração. A partir dessa reflexão, Beatriz avança no processo de resolução, confirmando que a pergunta é um elemento mobilizador de conhecimentos e favorece a aprendizagem, visto que a faz refletir sobre aquilo que já sabe e buscar ampliar seu saber dentro do que ainda precisa aprender.

5.5. As Estratégias de Resolução do Problema Algébrico

Beatriz, apesar de não demonstrar segurança em expressar sua forma de pensar e realizar ações de resolução, cria suas estratégias com base no raciocínio desenvolvido pela interação comunicativa com a professora pesquisadora, por meio da pergunta, que, nesse caso, serão do tipo didáticas, segundo Pereira (1991), associadas a seus conhecimentos prévios. Polya (1995) afirma que resolver problema é uma questão de prática, que todos podem aprender, observar e imitar o que fazem outras pessoas quando resolvem os seus e, por fim, aprendemos a resolver problemas, resolvendo-os.

Diante de tudo que foi posto por Beatriz em sua fala, perguntamos se ela saberia um modo de resolver o problema.

Beatriz: É somando?

Beatriz pergunta sempre querendo confirmar algo, como se estivesse investigando a forma de pensar da professora pesquisadora e quisesse se moldar nela. Ela responde uma pergunta sempre com outra pergunta na tentativa de chegar ao modo “correto” de fazer dito pela professora pesquisadora. Ela não cria, vai investigando que modo seria esse e se utiliza da pergunta. É interessante a forma como Beatriz vai tentando lidar com o problema. Perguntamos:

J.: Somando o que?

Beatriz: 50 + 29 + 35?

J.: Por quê?

Beatriz: (Não responde)

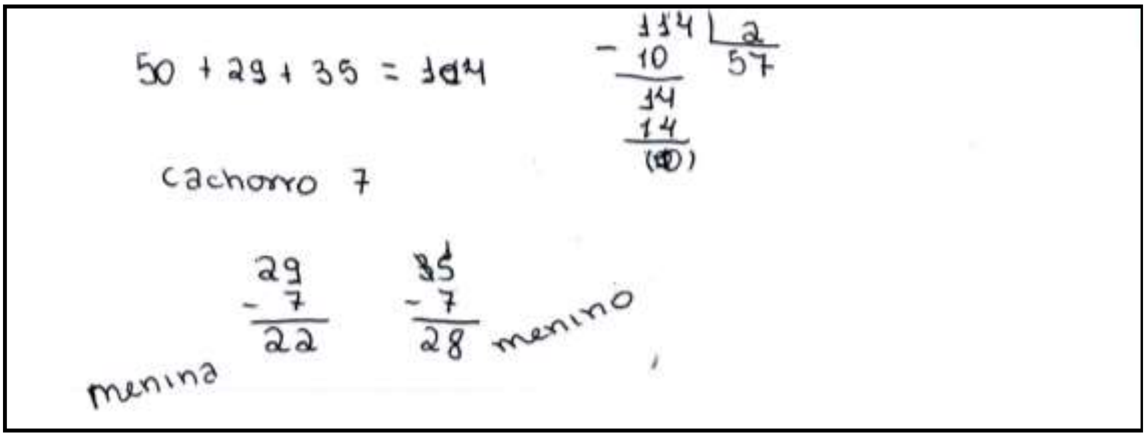
J.: Poderia fazer?

Beatriz: Sim. (após alguns instantes) dá 103? Não. 50 + 29 dá 79 mais 35 dá 114, né?

Beatriz não consegue explicar porque pensou em somar todos os valores expressos nas três balanças do problema, mas consegue representar de forma escrita, a “conta”. Ela faz a soma e o resultado fica incorreto. Ela percebe rapidamente e refaz, mas dirige-se a professora pesquisadora para novamente confirmar sua ação. Ela faz isso constantemente. Perguntamos a Beatriz o que ela fará com o resultado encontrado.

Beatriz: Dividir por dois.

Figura 2: resolução apresentada por Beatriz ao problema



Fonte: Registro da aluna

Com esta resposta, demonstra ter compreendido perfeitamente a lógica do problema, ter internalizado os elementos e ter percebido que cada indivíduo foi pesado duas vezes, sendo este o ponto principal do problema. Ficamos surpresas com suas conclusões, pois apesar de não ter explicado na fala essa compreensão, demonstra aparentemente já a ter construído no raciocínio de forma rápida e prática. As perguntas ajudaram Beatriz a externar seu pensamento, sendo essa uma de suas finalidades, fazendo com que o professor perceba o avanço intelectual do aluno. Segundo Pereira (1991) as perguntas didáticas divergentes tem esse potencial mobilizador, pois permitem que a aluna se pronuncie sobre a situação, fazendo-a pensar. Ela explica o porquê de sua ação:

Beatriz: Cada indivíduo foi pesado duas vezes. Ai eu divido por dois, não é?

Mesmo desenvolvendo um raciocínio lógico, coerente e expressar de forma clara uma estratégia construída por ela, ainda precisa de confirmação da professora pesquisadora, sempre devolvendo a pergunta.

Beatriz: (começou a fazer a conta de divisão de 114 por 2) ai aqui vai dar 5, não é? Ai 5 vezes dois dá dez. Ai quatorze né? Abaixa o quatro e dá 7. 7 vezes dois dá quatorze e não sobra nada. Deu 57.

Ela se utiliza da Aritmética para resolver o problema, especificamente, das operações de divisão e multiplicação. Com um raciocínio considerável e um desenvolvimento esperado, ela chega a uma resolução:

Beatriz: (pensa um pouco, demora)

J.: O que fará com esse resultado?

Beatriz: (apenas ri)

Insistimos em saber o que o resultado encontrado tem a ver com os valores expressos nas balanças.

Beatriz: Na primeira balança o menino e a menina pesam 57. Não, pesam 50. Então o cachorro pesa 7.

Sua fala conclui seu raciocínio e ela apresenta uma resposta para o peso do cachorro, 7 quilos. Essa conclusão se dá quando ela compara o valor da primeira balança com a segunda. Sua forma de pensar se ajusta na resposta para o peso dos outros indivíduos, fazendo a relação entre as balanças. Ela explica:

Beatriz: É... (pausa) pego o 29 menos o 7 que é o peso do cachorro, não é?

J.: O que você acha?

Beatriz constantemente requer confirmação de suas ações, tipo "certo ou errado", ao afirmar, no final de sua explicação a expressão: não é? Esse fato remete ao que Franke, Kazemi & Battey (2007) chamou de *IRA* (Iniciação-Resposta-Avaliação), um padrão de comunicação onde o professor faz as perguntas, obtém respostas de apenas um aluno, que ele avalia e dá prosseguimento ao trabalho, dando pouca margem criativa à participação do aluno.

Ela continua comparando o peso do cachorro nas demais balanças para descobrir o correspondente aos outros indivíduos. Assim, subtrai 7 na segunda balança e descobre mais um valor.

Beatriz: A menina. Por que ela tá com o cachorro na segunda balança. Pega o 35 menos 7 e dá o valor da terceira pessoa que é o menino.

Suas observações em relação aos elementos do problema também são muito importantes, mostra que não se detém apenas em cálculos, mas consegue estabelecer relações e tirar conclusões diante do exposto. Essas possibilidades devem ser exploradas pelo professor na prática, pois facilitam a compreensão do texto do problema e ajudam o aluno a criar hipóteses. Concluída a resolução usando as operações, perguntamos se ela saberia outro modo de fazer.

Beatriz: Sim.

J.: Qual?

Beatriz: Não sei, deixa eu pensar. (depois de alguns instantes) será que dá por equação?

J.: O que você acha?

Beatriz: Sim.

J.: Como?

Beatriz: Eu vou pegar o peso da menina mais o menino e do cachorro. Então vai ser x + y + z?

J.: Por quê?

Beatriz: Por que x é da menina, y é do menino e z é do cachorro.

Teles (2004) afirma que definir Álgebra e Aritmética, e de que modo elas se relacionam é uma tarefa difícil, mas o que podemos verificar é que os conceitos aritméticos são necessários para que o aluno consiga avançar para a generalização algébrica. Beatriz demonstrou compreendê-los muito bem em sua estratégia anterior e agora, se utilizando a linguagem e representação algébrica, desenvolve sua estratégia com base nas equações. Ela utilizou incógnitas x, y e z para representar cada um dos indivíduos e monta a expressão algébrica: x + y + z = 114, expressa pela igualdade. Não fica claro que ela compreenda o princípio da equivalência entre os membros da equação ou se está repetindo algum procedimento já visto, mas mostra que compreende o conceito de equações e sabe utilizá-lo na resolução do problema. De início, desenvolveu um procedimento incorreto, porém, conseguiu realizá-lo posteriormente. (EISENBERG & DREYFUS, 1995) afirmam que os tipos de modelos de raciocínio desenvolvido com o estudo das equações, por exemplo, podem ser generalizados para outras situações. Ao ser questionada sobre o modo pelo qual representou a expressão, ela afirma:

Beatriz: Por que 50 + 29 + 35 dá 114.

J.: E agora?

Beatriz: Eu vou fazer três equação. [Entrevista Beatriz, 15/12/2015]

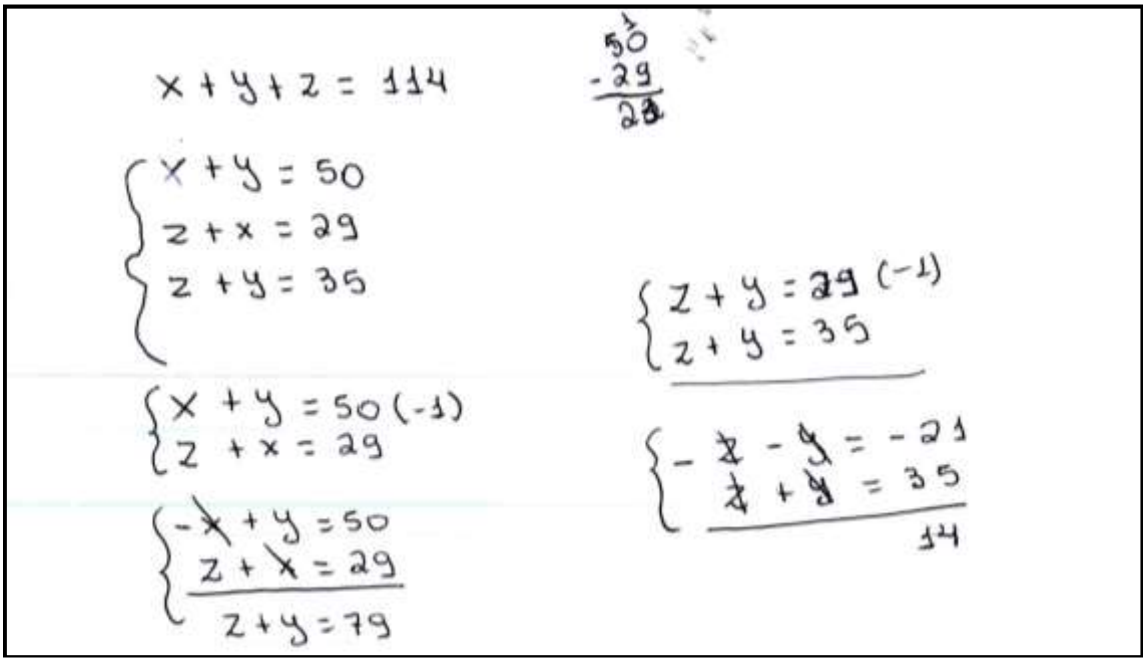
Beatriz não só compreende que pode resolver com equações como também sabe que uma equação só não será suficiente, por isso afirma que irá fazer três. Nesse sentido, podemos inferir que seu raciocínio parece estar de acordo com a ideia de sistemas de equações lineares, conteúdo algébrico presente no problema.

Beatriz: x + y que é igual a 50.

E explica:

Beatriz: Por que é o da menina que é 50 mais o do menino. E z + x que é igual a 29. Que é o do cachorro com a menina que dá 29. E z + y que é igual a 35. Que é o do cachorro com o do menino que dá 35.

Figura 3: Resolução apresentada por Beatriz ao problema



Fonte: Registro da aluna

Seu discurso mostra que compreende a representação e a linguagem algébrica e a utiliza muito bem na construção das equações do problema. Sua abordagem também demonstra um raciocínio algébrico mais elaborado no campo das equações e não somente voltado para procedimentos e técnicas, mas capaz de ser vivenciado em outras situações do cotidiano. Percebe-se que a resolução de problemas associada à comunicação, especificamente à pergunta, pode ajudar na evolução do pensamento algébrico do aluno, podendo ser um caminho para uma mudança eficaz no ensino da Matemática. Ela vai além, sabendo explicar que tipo de equação formou:

Beatriz: Linear.

J.: Por quê?

Beatriz: Por que tem mais de uma letra para calcular.

Beatriz possui um raciocínio rápido para as equações e demonstra ter conhecimento desse conteúdo, explicando o tipo de equação que formou. Continuamos a questioná-la sobre como resolveria essas equações.

Beatriz: Juntas.

J.: Como?

Beatriz: Formando um sistema.

J.: Você já estudou Sistema?

Beatriz: Já.

J.: Sabe resolver Sistema?

Beatriz: Vou tentar. Aprendi o ano passado.

Ela prossegue explicando sua estratégia:

Beatriz: Por que x + y que é o da menina com o menino deu 50 e z que é do cachorro mais x que é da menina deu 29. Então vou juntar. Depois pego z do cachorro mais y do menino.

Seu pensamento parece ser elaborado em relação a estrutura do sistema, ela consegue montar as três equações lineares referente a cada uma das balanças do problema. Ao afirmar que iria juntá-las para poder resolver, perguntamos se essa ação ajudaria na resolução,

Beatriz: Sim. Eu peguei a primeira e a segunda equação. Multipliquei a primeira por menos um para eliminar x e agora sobrou z + y que é igual a 79.

Num sistema linear 3X3, como é o caso, podemos ter uma única solução (sistema possível e determinado), mais de uma solução (sistema possível e indeterminado) ou nenhuma solução (sistema impossível). Beatriz inicia a resolução do sistema tentando eliminar uma das incógnitas utilizando o método da adição. Detalhe: Ao resolver um sistema deve-se observar primeiro o que é mais fácil fazer: se cancelar ou isolar uma das incógnitas; Ela tenta desenvolver seu procedimento,

Beatriz: Agora vou juntar essa equação que eu achei com a terceira equação do sistema para ver se dá certo.

J.: Qual?

Beatriz: z + y igual a 35.

Ao efetuar o cálculo, Beatriz percebe algo errado no resultado e logo afirma:

Beatriz: Eita, eu acho que aqui não daria 79, por que eu esqueci de colocar o menos no 50. Vou calcular de novo. Deu 21. Vou substituir 79 por 21. [Entrevista Beatriz, 15/12/2015]

Ela sente dificuldade em aplicar o algoritmo para resolver o sistema, parece estar esquecida de como aplicá-lo, visto que afirmou já ter estudado esse assunto. Perguntamos se esse modo de fazer é fácil ou difícil. Ela responde:

Beatriz: Não, é muito fácil também, mas eu me esqueci um pouco. Mas dá certo também.

Ela reconhece ter esquecido o modo de fazer usando o algoritmo de Sistemas, mas seu desenvolvimento é louvável, mesmo com cautela, consegue finalizar. Beatriz mostra ter um conhecimento algébrico significativo diante do problema, pois se mostra familiarizada com a linguagem algébrica, e diz achar fácil também. Ela reflete sobre o que faz e busca a melhor forma. Mesmo inibida no momento de tomar iniciativa e desenvolver um raciocínio sozinha, demonstra saber criar estratégias lógicas de solução. Essa falta de autonomia de Beatriz pode ser reflexo da prática do professor em sala de aula, que se desenvolvida, poderia lhe render muito mais aprendizagem. Perguntamos se ela gosta de usar as "letras" para resolver problemas:
Beatriz: Eu gosto. Acho fácil. Eu encontrei a mesma resposta da primeira. Mesma coisa.

Beatriz sente-se à vontade com a Álgebra, gosta de utilizar essa representação, apesar de ser mais familiarizada com a Aritmética e utilizá-la com mais frequência, mostra que o modo de fazer pode mudar, mas a resposta será a mesma. Essa reflexão é muito importante para a aprendizagem da Matemática do ponto de vista da resolução de problemas, pois podemos perceber que esta possibilita vários caminhos para se chegar a uma solução, favorecendo o raciocínio e a criatividade do aluno.

5.6. Síntese

Apresentação. Beatriz é aluna do 3º Ano do Ensino Médio da escola campo de nossa pesquisa. Ela tem 17 anos e reside na área rural do Município de Afogados da Ingazeira – PE. Estudou todo Ensino Fundamental na rede pública Municipal e cursa o

Ensino Médio na rede pública Estadual do referido Município. Não possui histórico de reprovação e pretende ingressar na Universidade.

Concepções sobre a Resolução de Problemas. Entende que a ação de resolver problemas é diferente da ação de fazer exercícios. No problema precisa pensar sobre algo, para depois poder buscar uma solução. Enquanto que os exercícios expressam uma ação de repetição de um procedimento visto em um exemplo dado pelo professor, depois podendo ser aplicado em outros exemplos.

Concepções sobre a Pergunta na Aula de Matemática. Para Beatriz o ato de perguntar serve, basicamente, para tirar dúvidas e relembrar assuntos passados. Porém, percebe-se que ela dar muita importância ao ato de perguntar e que essa pergunta a ajuda a compreender e a resolver melhor os problemas. Ela se mostra bastante aberta ao grupo, e passa a ideia de que perguntar a faz aprender mais e de certa forma o ensino fica mais interessante. Que através da pergunta pode-se aprender coisas que sirvam para o seu futuro, expressando em sua fala, um desejo maior que simplesmente aprender aquilo que é posto pelo professor. Diz sentir-se à vontade para fazer perguntas tanto ao professor quanto aos alunos e que considera ambas as respostas importantes, podendo aprender com os dois. Perguntas do tipo real e de exame, nos permitiram obter da aluna uma informação ou um levantamento de conhecimentos prévios, respectivamente. Já as perguntas didáticas, exploraram seu modo de pensar sobre a Matemática, interpretação, a busca por soluções, reflexões e conjecturas, além de favorecer os cálculos escritos.

Proposição do Problema algébrico ao aluno e as Perguntas. Diante da tarefa de resolver um problema algébrico, Beatriz demonstra insegurança ao aplicar um raciocínio matemático sozinha, principalmente o algébrico, e, constantemente, se reporta a professora pesquisadora com perguntas para confirmar se sua forma de pensar condiz com a esperada por ela. Possui um raciocínio algébrico considerável, porém, para desenvolvê-lo teve que ser instigado pela professora pesquisadora por meio da pergunta. Percebe-se que ela recua no momento de tomar iniciativa de fazer, optando pelo uso da Aritmética. Essa falta de autonomia limita sua ação de fazer, mas não a impede de compreender e saber utilizar tanto a escrita como a representação algébrica no problema. Foi capaz de analisar os elementos do problema e fazer relações entre eles, não indo direto aos cálculos.

As Estratégias de Resolução do Problema Algébrico. Beatriz desenvolveu, basicamente, duas estratégias de resolução para o problema algébrico. Na primeira se utilizou da Aritmética, especificamente das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão. Estratégia essa desenvolvida rapidamente sem nenhuma dificuldade. Na segunda, utilizou-se do Sistema de Equações Lineares do 1º grau, que considerou também uma estratégia fácil, mas desenvolveu de forma mais lenta, apresentando dificuldade iniciamente, que foram superadas com o auxílio da professora pesquisadora por meio da pergunta, que clarificou seu raciocínio, visto já ter estudado esse assunto no ano passado. As perguntas lhe ajudaram a tomar decisões e proceder com o desenvolvimento do sistema de modo satisfatório. Ela finalizou muito bem ambas as estratégias, demonstrando ter um raciocínio algébrico significativo e estar familiarizada com sua linguagem e representação, porém, vale considerar que ao usar a Aritmética, a aluna procedeu de modo mais simples e direto.

6. O CASO JÚLIA

Neste capítulo trazemos o segundo Estudo de caso analisado, tendo nossas considerações com base nas categorias de análise: (I) *concepções sobre a resolução de problemas* (II) *concepções sobre a pergunta na aula de Matemática (III) A proposição do problema ao aluno e as perguntas (IV) As estratégias de resolução do problema algébrico.*

6.1 Apresentação

Júlia é uma aluna alegre e comunicativa, se expressa de forma clara e demonstra segurança naquilo que diz. É aluna do 3º Ano do Ensino Médio da escola campo de nossa pesquisa. Tem 16 anos e reside na área rural do Município. Sendo aluna da rede pública, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, afirma gostar muito de Matemática, pois para ela, sempre tem coisas novas para aprender. Não apresenta histórico de reprovação (nem em Matemática nem em outras disciplinas do currículo) e já estudou tanto em escolas públicas rurais quanto urbanas, ingressando nesta a partir do 1º Ano do Ensino Médio. Ela é bastante dedicada aos estudos e pretende fazer o ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) esse ano para ingressar logo numa faculdade onde pretende cursar Medicina.

6.2. Concepções sobre a Resolução de Problemas

O conhecimento matemático não é construído mediante regras, ele é decorrente de experiências e situações reais da vida das pessoas, possuindo um caráter formativo e a resolução de problemas permite explorar as capacidades dos alunos de aprender a aprender, fazendo o aluno pensar e desenvolver suas próprias estratégias de resolução. Júlia se refe às suas aulas de Matemática:

> Bem... são ... é, a pessoa consegue aprender muito. É, cada dia que se passa coisa nova, por que sempre aparece uma coisa a mais na Matemática, você nunca vai saber tudo que aparece. É cheia de dúvidas. [Entrevista Júlia, 07/06/2016]

Ela afirma que na Matemática sempre há algo novo a aprender e que consegue aprender muito em suas aulas. Reconhece que o conhecimento matemático é extenso como um universo onde há sempre o que descobrir. Ao afirmar que a Matemática “é cheia de dúvidas", infere-se que essas dúvidas sejam em relação ao que se aprende de novo a cada ideia e que se associa ao conhecimento já construído. Questionada se gosta de Matemática, afirma:

> Gosto. [Entrevista Júlia, 07/06/2016]

Mas pretendemos saber mais e perguntamos se ela costuma resolver problemas ou fazer exercícios na aula de Matemática. Responde:

> Os dois. [Entrevista Júlia, 07/06/2016]

Sobre a ação de resolver problemas, ela afirma que:

> Acho que o problema é tipo uma questão...resolução de uma questão que tem um desafio. Já o exercício é o conjunto de todas as questões que tem pra fazer, todos os problemas... [Entrevista Júlia, 07/06/2016]

Explicando melhor, complementa:

> Quando você chega a uma questão que tem como um desafio, que você tem que entender a questão pra poder conseguir desenvolver toda aquela conta pra chegar a uma resposta exata. [Entrevista Júlia, 07/06/2016]

Júlia compreende que um problema traz algo a descobrir "um desafio" que precisa ser entendido para depois desenvolver uma forma de fazer. Porém, refere-se à conta como sendo a resposta exata para o problema. Infere-se que ela percebe intuitivamente que é necessário pensar para desenvolver uma estratégia de cálculo mas que sempre precisa de conta para a solução.

Em relação ao exercício:

> Pra mim é como se fosse o conjunto de todos os problemas quando chega ao ponto de você responder as questões em geral. O exercício é toda atividade. [Entrevista Júlia, 07/06/2016]

Em sua fala, Júlia demonstra entender por exercício a ação de fazer os problemas e não como uma tarefa, "na qual o aluno conhece o processo de resolução e é capaz de usá-lo para resolver" (PONTE, 2005). Ainda segundo esse autor, os exercícios têm o objetivo de consolidar conhecimentos, servindo para o aluno pôr em prática conhecimentos anteriormente adquiridos. Júlia parece não compreender essa ação, como se exercício fosse qualquer atividade que ela desenvolve em sala, ou seja, apenas o ato de fazer.

6.3. Concepções sobre a pergunta na aula de Matemática

Estimular a pergunta em sala de aula faz com que o aluno participe de forma mais interativa das discussões com os outros colegas e com o professor, enriquecendo sua aprendizagem. Assim, se a pergunta parte do aluno, parte dele também a vontade de satisfazer sua curiosidade, estimulando a busca de respostas e, consequentemente, a construção de estratégias que lhe facilite chegar a essa resposta. Júlia fala se costuma fazer perguntas na aula de Matemática:

> Quando eu não entendo, sim. [Entrevista Júlia, 07/06/2016]

Entende-se que ela pergunta apenas quando não entende algo que foi explicado ou dito pelo professor. Perguntamos em que momento da aula ela costuma fazer perguntas:

> Na hora da explicação se me vier alguma na cabeça ou na hora da resolução de alguma conta que às vezes aparece na hora que você tá resolvendo, você não sabe como...[Entrevista Júlia, 07/06/2016]

Infere-se que as perguntas são usadas somente quando necessário, durante uma explicação ou quando precisa tirar uma dúvida, não sendo estimuladas em outros momentos da aula, como por exemplo, para esclarecer uma curiosidade, expressar um pensamento ou mesmo para participar de uma discursão que pode surgir durante a explicação, no caso. Entende-se que o professor pode não estar dando espaço à pergunta e isso poderia melhorar a compreensão e a aprendizagem. Júlia afirma sentir-se à vontade para fazer perguntas:

> Sim. [Entrevista Júlia, 07/06/2016]

Porém, explica que gosta mais de fazer perguntas ao professor do que a seus colegas:

> Geralmente é assim, quando já tá resolvendo algum problema ao professor. Ai se não tiver como ou se for uma coisa mais simples que eu não esteja lembrada ai pode ser a um colega. [Entrevista Júlia, 07/06/2016]

Ela afirma sua preferência em fazer perguntas ao professor e reforça dizendo que, quando é algo mais simples, pode perguntar a um colega. E que isso acontece quando ela está resolvendo algum problema, pois o professor é importante naquele momento. Já o colega ela pergunta mais para lembrar algo que possa ter esquecido. Algo mais casual. A interação nos momentos de resolução parece ser fragmentada, o aluno aparenta trabalhar mais sozinho do que coletivamente, sem haver discursão durante o processo, ou seja, o professor explica, ele tira alguma dúvida e faz da forma como foi ensinada.

A pergunta poderia ganhar um espaço maior nesse contexto, para que o aluno pudesse perceber no outro, um ser mais completo e que, através do diálogo, ambos poderiam aprender mais e ainda poder saber quais necessidades,quais dúvidas, quais curiosidades têm em comum, entendendo que as diferenças só enriquecem o processo.

Júlia explica por que gosta mais de perguntar ao professor:

> Por que primeiro o professor vai explicar que ele já sabe bem, já sabe mais o que tá ensinando e se você perguntar a ele e ele vai saber explicar desde o início e caso for a um aluno, é... pode ser que a explicação dele pode até me ajudar mais, possa ser que eu entenda mais ele. Mas o professor com certeza vai saber mais sobre o assunto. [Entrevista Júlia, 07/06/2016]

Expressa um pensamento de que o professor detém mais conhecimento do que seus colegas. Todos têm algo a ensinar e devemos estar abertos a aprender. Reconhece também que, às vezes, a explicação de outro colega pode ser mais fácil de ser entendida, visto que ambos falam a mesma linguagem, de uma forma mais simples, mais compreensível, mas não deixa de reforçar que o professor sabe mais. Apesar disso, Júlia reconhece a importância das explicações dos colegas:

> Às vezes sim, por que às vezes agente não entende o método do professor e entende o do aluno. [Entrevista Júlia, 07/06/2016]

Uma compreensão generosa em relação à troca de experiências com os colegas. Sua fala revela que considera importante perguntar aos colegas, pois pode também aprender com eles. Se fossem valorizados esses momentos em sala de aula, talvez Júlia pudesse reportar-se mais a seus colegas, ter mais confiança no que eles tem a ensinar e exercer com eles as atividades que desenvolve nas aulas. Ela demonstra ser aberta a discursão, tem opiniões lógicas, poderia partilhar isso nos momentos de interação na aula de matemática.

Sobre a importância da ação de fazer perguntas, Júlia afirma:

> É, você tira dúvidas e se você não perguntar numa prova como é que você vai se virar [Entrevista Júlia, 07/06/2016]

Ela afirma ser importante porque tira dúvidas, não só nos momentos da aula, mas para evitar tê-las durante a prova, pois parece não poder perguntar nesse momento. Entende-se que na prova, precisa agir sozinha tendo que "se virar", como afirma ela. A avaliação é um momento de verificação de habilidades construídas pelos alunos em relação ao conhecimento tratado. Também é um momento no qual o professor deve avaliar suas ações didáticas e metodológicas, buscando compreender se aquela prática adotada por ele favoreceu a autonomia e a forma de pensar do aluno, permitindo que ele possa desenvolver seus modos de fazer, independentemente daquele ensinado por ele. Se isso não acontecer, a avaliação será apenas uma verificação de repetição de procedimentos ensinados.

Júlia continua:

> É você tira a dúvida, você completa o que você já sabe e quando chegar mais na frente que você precisar você já vai tá sabendo, não vai tá com a dúvida ainda. [Entrevista Júlia, 07/06/2016]

Ela continua afirmando que pergunta para tirar dúvidas, pois deve ser essa a prática que tem na sala de aula. Perguntar pode lhe ajudar também a completar aquilo que já sabe. Essa é uma perspectiva importante que Júlia levanta em sua fala. Percebe, de forma tênue, que perguntar pode ter outras finalidades, mas persiste na questão da dúvida. Um trabalho em sala de aula, valorizando este e outros aspectos da pergunta, poderia resultar em aprendizagens por compreensão, percebe-se.

> O professor. Na hora da atividade eu gosto mais de perguntar como é ao professor. Só se eu não entender ai eu tento outra opção. [Entrevista Júlia, 07/06/2016]

Júlia sempre pensa que perguntar ao professor é melhor, afirmando que, se não entender, é que procura outra opção, no caso, os colegas. Essa confiança somente no que o professor diz reforça a prática de que ele continua sendo o dono do saber para o aluno.

Perguntamos a Júlia que perguntas ela faz mais nas aulas de Matemática, ou seja, sobre o que ela pergunta. Ela responde:

> Algumas dúvidas sobre o assunto, por exemplo, se eu não explicar... se eu não souber de onde um número veio ou então que fórmula usar, qualquer coisa assim, ai eu pergunto. [Entrevista Júlia, 07/06/2016]

Infere-se que Júlia pergunta sobre o modo de fazer sua atividade e que faz cálculos com fórmulas, mas apresenta curiosidade, embora modesta, em saber de onde vem "um número" pelo menos. Esse momento deve ser enriquecido por discursões geradas pelo seu modo de pensar e de fazer, permitindo que a aluna mostre alternativas, mesmo diferentes daquelas esperadas pelo professor. Júlia também pergunta que fórmula usar para fazer cálculos, confirmando o fato de que repetir procedimentos é algo constante nas aulas de Matemática. Para reforçar a fala de Júlia, perguntamos se ela faz perguntas sobre assuntos já estudados. Ela responde:

> Algum assunto não, mas se o assunto tiver haver com o que eu estou fazendo e eu não lembrar mais de como foi ai eu sim eu tento procurar o professor pra eu saber como. [Entrevista Júlia, 07/06/2016]

Júlia afirma só perguntar por assuntos já estudados se o conteúdo atual necessitar de outro anteriormente estudado, assim, fica bem limitado seu campo de perguntas, pois não as usa para satisfazer curiosidades ou descobrir algo novo. É mais se necessitar de explicação ou confirmar ações. Ao ser questionada se as perguntas ajudam ela a resolver os problemas, afirma:

> Sim [Entrevista Júlia, 07/06/2016]

Por quê?

> Por que se eu tiver uma dúvida de como agir e de como resolver naquela hora eu vou ter que perguntar ou se não como é que eu vou chegar ao resultado. [Entrevista Júlia, 07/06/2016]

Sua resposta é clara. Ela pergunta para tirar dúvidas e o modo como resolver para chegar ao resultado esperado. Infere-se que o diálogo não se faz tão presente na sala de aula. Afirma ainda que perguntar aos colegas também ajuda.

> Ajuda. [Entrevista Júlia, 07/06/2016]

Por quê?

> Por que assim, como eu pergunto ao professor também às vezes o professor não está na turma ou está em outro horário e eu não tenha contato com o professor ai eu posso ir lá e perguntar se ela já fez, se algum aluno já fez, como ela resolveu, se ela entendeu ai ajuda. [Entrevista Júlia, 07/06/2016]

Outra resposta clara. Ela afirma perguntar aos colegas na ausência do professor. Demonstra sempre preferência nas explicações do professor, mas considera as explicações dos colegas. Pode ser o hábito desenvolvido por este em exigir que seja assim, não dando margem aos alunos agirem de maneira autônoma, sem necessariamente, reportar-se a ele sempre. Fica evidente que essa forma de agir de Júlia é reflexo da prática de sala de aula. Para obter mais informações sobre seu tratamento em relação as respostas dadas pelos seus colegas, perguntamos se ela as considera importante. Ela responde:

> Sim por causa que acho que na sala você tem que se "introsar" com todo mundo, tem que compartilhar também conhecimento. [Entrevista Júlia, 07/06/2016]

Júlia expressa nesse momento a importância de se desenvolver em sala de aula, momentos de diálogo e de troca de experiências, mostrando que a comunicação pode ser um caminho para se chegar a um ensino-aprendizagem da Matemática prazeroso e significativo. Além de serem indissociáveis no processo, ajudam nas interações, troca de saberes, proporcionando ao professor conhecer o modo como pensam seus alunos e ao aluno partilhar esse saber com os outros. Os momentos de discursão produzidos na ação de resolver problemas podem ser bem explorados pelo professor para que o aluno se sinta desafiado a questionar e não apenas aplicar alguma forma de resolução.

Essa busca do aluno por uma solução a ser construída a partir do que ele já sabe, pode ser instigada por meio da pergunta que surge das interações professor/aluno, que podem ampliar seu campo de saber, fazendo com ele pense em estratégias diversas e perceba que há vários caminhos a serem utilizados para se chegar ao resultado. Júlia expressa esse desejo muito bem quando citas as expressões "se introsar" e "compartilhar conhecimento".

Perguntamos se Júlia estudou ou está estudando Sistema de Equações Lineares. Ela afirma:

> Já. [Entrevista Júlia, 07/06/2016]

Se poderia explicar um pouco sobre esse assunto. Do que ele trata?

> Bem assim eu só sei que o Sistema de Equações a pessoa vai trabalhar com equações do primeiro grau eu acho e você tem que desenvolver a partir de uma as outras duas ou três ... a partir de uma você tem que desenvolver as outras a partir dela. [Entrevista Júlia, 07/06/2016]

Sabemos que para Júlia, ou qualquer outro aluno, explicar sobre um determinado assunto apenas pelo nome é algo difícil, visto que os conhecimentos devem estar entrelaçados e o que mais importa para eles é que saibam aplicá-lo nas diversas situações de contexto (mesmo sem saber o nome). O objetivo de perguntar sobre isso a Júlia foi para instigar um pouco seu raciocínio algébrico, verificando se ela associaria a algo conhecido. Pela sua explicação, podemos perceber que ela sabe um pouco sobre do que se trata o conteúdo. Afirma que já trabalhou com ele com várias equações. Perguntamos quantas? Ela explica:

> Duas... três. [Entrevista Júlia, 07/06/2016]

O raciocínio de Júlia é rápido e claro. Demonstra muita firmeza ao falar do conteúdo, se expressa bem e não se intimida em responder qualquer questão.

6.4. A proposição do problema algébrico ao aluno e a pergunta

Propomos a Júlia a tarefa de resolução de um problema algébrico com o qual interagir num processo de comunicação, especificamente com a pergunta, para verificar como esta pode ajudar no desenvolvimento de suas estratégias de resolução e, se isso pode promover sua aprendizagem. Júlia, ao ser apresentada a tarefa, se empolga bastante e procura logo um modo de explica sua impressão inicial e rápida sobre o problema:

Júlia: Tá. Deixa eu ver. Eu acho que tem que juntar esses dois números ... Deixa eu ver se é assim. 29 mais 35 igual a 64 menos 50, ai dá 14. [Entrevista Júlia, 20/06/2016]

Ela lê rapidamente o problema e vai logo apresentando uma conta como solução, sem muita análise da situação. O que chamou atenção de Júlia, no primeiro momento foram os números que ela viu nas balanças. Percebe-se que os conhecimentos aritméticos são bem familiares a aluna e esse fato parece ser recorrente, visto que, ocorreu também no caso anterior.

Dirigiu-se imediatamente aos cálculos. Esse comportamento parece ser reflexo de sua prática de sala de aula. E continua:

Júlia: Isso é um cachorro? [Entrevista Júlia, 20/06/2016]

J.: sim.

Júlia: Acho que ele pesa 14, o cachorro. Deixa eu ver: 29 , 35... é, acho que não é isso não. Vou fazer a conta (ela ri).

Continua, sem dirigir-se a professora pesquisadora:

Júlia: É não vai ser isso.

Nesse momento, Júlia para um pouco e fica pensativa.

J.: Por que quando você olhou para o problema foi logo fazendo a conta?

Júlia: Por que eu já fui prestando atenção qual o número que estavam no lugar

J.: você compreendeu o problema?

Júlia: Mais ou menos.

A ação da professora pesquisadora de perguntar sobre Júlia ter compreendido o problema a fez parar e pensar um pouco sobre o que estava fazendo. Isso a ajudou a refletir e organizar seu pensamento para depois colocar em ação sua estratégia de cálculo.

J.: O que foi que faltou para que você entendesse melhor o problema?

Júlia: Por causa que eu fui tentar resolver primeiro, por que queria saber quanto esses dois davam (apontando para as duas primeiras balanças) o menino e o cachorro e saber quanto tirar do número da menina e o menino sozinhos (apontou para última balança).

O pensamento desenvolvido por Júlia é bastante lógico, porém, ela precisaria ter atenção as informações trazidas no problema para organizar sua estratégia, como, por exemplo, perceber como os indivíduos estão sendo pesados, o que seus pesos tem a ver com os valores numéricos trazidos nas balanças. Perceber as relações e fazer conjecturas seria fundamental antes de pensar em fazer contas utilizando apenas os valores numéricos trazidos no problema. Essa ação de Júlia revela uma prática recorrente nas escolas de que Matemática tem que ter conta, fazendo com que os alunos busquem no problema, apenas os valores numéricos que irão precisar para identificar que conta realizar, sendo isso suficiente.

Perguntamos a Júlia sobre as figuras trazidas no problema, se elas poderiam ajudá-la a compreendê-lo.

Júlia: Sim.

J.: Em que ajuda?

Júlia: É pra descobrir o peso de cada um dos indivíduos abaixo.

J.: Quantos são?

Júlia: Quatro. Não mas aqui ... esses é o mesmo desse?

J.: O que você acha?

Júlia: Então no caso é três.

Infere-se que as perguntas que fazemos a Júlia, vão permitindo que ela observe mais o problema, perceba as relações, consiga identificar melhor os detalhes que irão fazer a diferença na elaboração de estratégias mais eficientes de cálculo. Júlia também pergunta tentando compreender melhor a parte gráfica que ela não observou muito no início. Ela começa a falar sobre o que está explicito no problema, sobre o que há em comum entre os indivíduos e as balanças:

Júlia: O ponteiro? parece um relógio, não é? Deixa eu ver. Elas ficam de forma diferentes.

J.: Diferente como?

Júlia: Primeiro elas estão em pé os dois meninos, ai depois quando ela está com o cachorro ela já fica abaixada.

J.: Isso tem alguma coisa a ver com o peso?

Júlia: Não sei. Acho que sim. Não sei. Acho que não...

Observando as pessoas ela afirma:

Júlia: Elas estão pesadas juntas e depois cada uma com o cachorro. Primeiro o menino com a menina, depois a menina com o cachorro e depois o menino com o cachorro.

J.: E em relação aos valores expressos nas balanças?

Júlia: São diferentes.

J.: E agora? Como vai fazer para descobrir o peso de cada um deles? Sente alguma dificuldade em iniciar o problema? Qual seria?

Júlia: Queria saber o peso de um deles. Ai ficaria melhor.

O discurso de Júlia mostra que ela observou alguns detalhes que lhe ajudaram a criar suas estratégias, mas isso somente aconteceu devido a intervenção da professora pesquisadora por meio da pergunta que lhe ajudaram a pensar melhor. No início, ela mostrou o desenvolvimento de uma das estratégias que pode criar, mas com base somente em cálculos. Isso somente não basta. O mais importante é fazer com que os "alunos pensem matematicamente, levantem ideias e estabeleçam relações entre elas, sabendo comunicá-las" (ONUCHIC, 1999, p. 209-210), e que essas ações reflitam no desenvolvimento de estratégias, ou seja, no processo até chegar a solução.

Ao afirmar que queria saber o peso de um deles pois assim ficaria melhor para encontrar uma solução, Júlia mostra-se incomodada, demonstrando não ter muito hábito em buscar respostas, sendo esta uma atitude que pode ter sido gerada nas próprias aulas de Matemática, onde, talvez, os problemas que resolve não a desafiam a descoberta.

6.5. As Estratégias de Resolução do Problema Algébrico

Percebe-se que o problema instiga Júlia a pensar e estabelecer relações entre as informações contidas no enunciado e os valores numéricos expressos nas balanças, e que as perguntas estão sendo de extrema importância para a compreensão dessas informações por ela, podendo ajudá-la a desenvolver estratégias de solução. As perguntas que surgem em sala de aula, entre professor e alunos, são necessárias e vem contribuir tanto como o processo de ensino, quanto com as atitudes e tomadas de decisões, influenciando na formação holística da pessoa. Percebemos isso nas ações de Júlia, que começou a analisar melhor o problema e fazer conjecturas a partir destas com auxílio da professora pesquisadora. Mas Júlia, intuitivamente, parece não ter percebido a importância das informações do problema, e afirma:

Júlia: Logo de princípio não. Quando lê logo não.

J.: Por quê?

Júlia: É por causa que ...assim, eles dão o peso em conjunto deles. Não dão de nenhum separado. Ai deixa mais difícil.

Ela parece estar preocupada com o modo como vai desenvolver as contas e não como vai usar as informações do problema para encontrar um modo de resolver. Mesmo assim ela pensa sobre o problema, analisa as relações. Sabendo que não tem o peso de nenhum dos indivíduos sozinho, Júlia procura uma forma de conseguir descobrir esse fato na tentativa de facilitar a solução. Ela afirma:

Júlia: Não sei. Eles estão separados. Ah, cada um foi pesado duas vezes.

As reflexões fizeram Júlia perberber melhor as informações do problema e, como um "insight", ela percebe uma informação implícita fundamental para sua compreensão, o fato de que cada indivíduo foi pesado duas vezes. Infere-se que ela não está desconectada das informações do problema na prática, como demonstrou na fala anterior. É algo que ela não deixa explícito, mas que está acontecendo em seu processo mental. Ela está fazendo conjecturas e estabelecendo relações e isso a está ajudando a ver o problema de outra forma, não apenas relacionado à conta. Perguntamos a Júlia como ela percebeu esse fato. Ela responde:

Júlia: Como eles foram pesados das vezes?
J.: Sim.

Júlia: No desenho. O menino, a menina e o cachorro. Cada um foi pesado duas vezes. A menina com o cachorro e o menino com o cachorro novamente..

J.: E agora? Em que isso ajuda?

Júlia: Que é o dobro? Soma-los .... 29 mais 35 dá 64, mais 50...

J.: O que significa esse resultado?

Júlia: Que é o valor duas vezes dos pesos. No caso é o valor da soma deles.

J.; E agora?

Júlia: Dividir por dois? No caso dá.... 57.

Júlia desenvolveu uma estratégia lógica usando as operações. Não somente isso, mas também demonstra sua compreensão sobre as relações dos indivíduos com os pesos expressos nas balanças e o significado do resultado. Apenas se mostra insegura em relação ao procedimento desenvolvido, visto que precisa de confirmação da professora pesquisadora, pois ao explicá-lo, sempre utiliza perguntas, no intuito de receber uma resposta do tipo “certo ou errado”. Perguntamos como esse resultado a ajuda:

Júlia: Sim, por causa de que se os dois meninos pesa 50. Ai 57... no caso 57 é o valor e os dois meninos pesa 50, o cachorro vai pesar 7?

J.: O que você acha?

Júlia: Pesa 7. O peso do cachorro.

J.: E agora?

Júlia: Só é dos 29 tirar os 7 do cachorro e fica 22. No caso a menina pesa 22. E o menino com o cachorro pesa 35, menos os 7 quilos do cachorro. Deixa eu ver. 28. Que é o menino Só pra garantir vamos somar os valores. (depois de somar os pesos encontrados) deu 57. Então, o cachorro pesa 7, a menina 22 e o menino 28.

Figura 4: Resolução apresentada por Júlia ao problema

$29+35=64-50=14$

$50+29+35=114$

$29+35=64-50=\frac{14}{2}=\underline{\underline{7}}$

$50+29+35=\frac{114}{2}=57$

Fonte: Registro da aluna

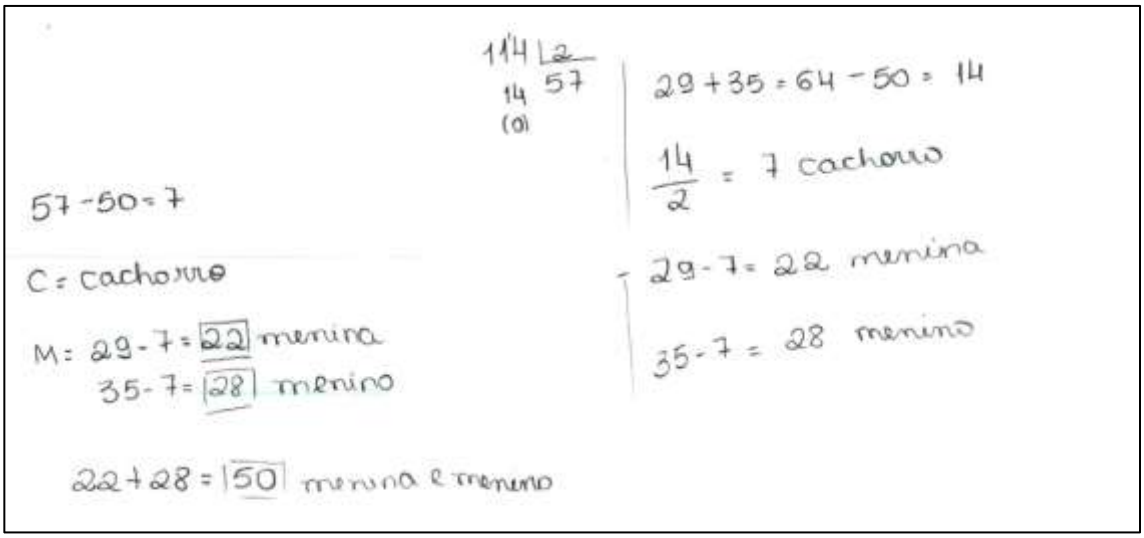
Júlia completou sua estratégia usando as operações aritméticas com sucesso. Ela conseguiu explicar seu procedimento e demonstrou ter compreendido todas as etapas. A Aritmética é base para a Álgebra, que, segundo Teles (2004), possui um aspecto mais generalizador, porém, ao apresentar um raciocínio aritmético construído, Júlia pode avançar para essa generalização de modo seguro e confiante. Ao final, ela ainda quis refazer os cálculos para conferir se resultados. Como pretendemos verificar o desenvolvimento de um raciocínio também algébrico, perguntamos se saberia resolver o problema de outro modo. Ela responde:

Júlia: Humm, não. Deixa eu ver... só se eu usasse como eu usei da primeira vez o resultado e depois analisar que ele repetia, dividia os 14 pelos 2 que no caso seria o peso do cachorro.

Ela apresentou a mesma estratégia, apenas modificando a ordem dos números e, consequentemente, dos cálculos. Mesmo assim realizou as operações necessárias.

Júlia: Sim. 29 mais 35 que daria 64. Menos 50. Que seria igual a 14. Como o cachorro foi pesado duas vezes, eu divido por dois ai dá 7.

Figura 5: Resolução apresentada por Júlia ao problema



Fonte: Registro da aluna

Júlia mostra um pensamento muito voltado para as contas, acreditando que esse seria o modo mais adequado para se resolver um problema matemático, pois sem conta não há matemática. Sabemos que a Aritmética é muito importante e que quase tudo em Matemática pode ser representada por esta, porém queremos despertar em Júlia uma motivação para o uso também da Álgebra para resolver problemas, assim, instigamos, por meio da pergunta, Júlia a demonstrar se também poderia resolvê-lo por meio dessa ferramenta. Talvez a pressa em apresentar um resultado atrapalhe o uso d Álgebra, visto que esta não é tão simples de ser utilizada. Percebe-se que Júlia também não se concentra muito no problema. Perguntamos:

J.: você é rápida; Gosta de fazer tudo rápido; Por quê?

Júlia: É por que seu eu fizer devagar eu "perdo" o foco.

Ela continua explicando seu procedimento:

Júlia: Ai agora é só tirar igual a outra conta: 29 – 7 que é igual a 22 que é o peso da menina. E 35 meno 7 que é igual a 28 que é o peso do menino. Poderia usar a mesma fórmula também somar os valores da menina com o cachorro e o menino com o cachorro, que daria 64, menos os 50 que é do menino com a menina juntos. Daria 14, ai os 14, como o cachorro foi pesado duas vezes, é, seria dividido por dois, que daria 7, que é o peso em quilos do cachorro. Aí pegava o peso da menina com o cachorro menos o 7. E o do menino como o cachorro menos os 7 do cachorro.

A pressa dela em fazer rápido não permite pensar mais sobre o problema. Pedimos que analise mais os dados, veja as balanças e a relação com os indivíduos, a forma como estão distribuídos e como estão sendo pesados. Ela fica pensativa e responde:

Júlia: Essa semelhança da balança com o relógio me deixa meio assim... fico pensando. Como uma equação? três x? No caso ficaria como as três pessoas seria o menina, a menina. A menina seria x, o menino y e o cachorro z?

Ao conseguir pensar mais sobre o problema, Júlia logo relaciona os indivíduos à representação algébrica, sugerindo elaborar três equações com os pesos. Atribui, de início, a mesma letra a cada um deles, mas em seguida muda, determinando letras diferentes, devido a intervenção da professora pesquisadora.

Júlia: Eu acho que se a menina aparece duas vezes, ai pode ser dois x pra cada, ai o menino também?

É importante dar autonomia ao aluno para que ele erre e acerte por sua própria conta, por isso as perguntas de Júlia devem ser uma descoberta para ela. Pedimos para pensar se daria certo assim, observando em cada balança a possibilidade de colocar os dois x em cada uma. Ela responde já organizando as equações para cada balança:

Júlia: x + y = 50? Ai a outra no caso seria x + z = 29 e a outra y + z = 35.

Deduz:

Júlia: Não. Só tem um de cada na balança.

Percebemos que instigar a aluna a tirar suas próprias conclusões com base no problema é muito mais rico do que dar respostas prontas e que as perguntas do tipo didáticas, segundo Pereira (1991), ajudam nessa descoberta, pois permitem que o aluno interprete e se posicione diante dos elementos do problema buscando uma solução. A comunicação estabelecida entre a professora pesquisadora e a aluna proporcionou a troca de conhecimentos, sendo estruturante para o ensino-aprendizagem, favorecida pela pergunta, do tipo exame e didática divergente, visto que a aluna tomou uma decisão a partir de conhecimentos prévios. Júlia desenvolveu sua estratégia, e afirmou como iria fazer para descobrir o peso de cada um deles:

Júlia: Um sistema de equações?

J.: Como? Quantas equações?

Júlia: Três.

J.: Quais?

Júlia: No caso eu formo o sistema?

J.: O que você acha?

Júlia: Três equações.

Essa troca de ideias entre a professora pesquisadora e Júlia, por meio da pergunta, do tipo real e de exame, no caso, faz com que ela demonstre seu conhecimento prévio, fornecendo informações e motivando-a a buscar respostas por meio de estratégia, visto que decidiu pelo sistema de equações, um assunto já conhecido por ela..

Júlia: Sim. Eu tô tentando lembrar.

Ao revisitar seus conhecimentos, Júlia tem a oportunidade de ampliá-los por meio das reflexões que desenvolve no processo de criação de estratégias. Esse momento é muito rico, e, mobilizado pela pergunta permite a aluna avançar na construção de saberes.Ele pode ser ampliado pelo professor, ao proporcionar essas interações.

Júlia demonstra não ter o hábito de analisar com detalhes as informações do problema para verificar possibilidades, questão essa que pode dificultar seu raciocínio no momento de construir estratégias de solução, .

Ela, ao observar o problema, deseja ter logo a frente números que mostre a conta que precisa fazer para chegar ao resultado, como ocorre com os exercícios (PONTE, 2005), mas, ao estabelecer esse diálogo com a professora pesquisadora, ela pôde observar com mais detalhes o problema e criar estratégias diferentes de solução estimulada pelas perguntas didáticas, reias e de exame que permearam suas reflexões. Talvez sem elas Júlia não refletisse tanto sobre o problema e acabasse por desistir de desenvolver uma nova estratégia. Ela afirma saber resolver o sistema, mas fica pensando no como. Sabemos que qualquer estratégia desenvolvida pela aluna que resolva o problema é válida, seja ela aritmética ou algébrica e que, necessariamente, ela não precisa utilizar as duas.

Júlia: Tem que pegar uma... no caso se fosse um exemplo, x igual a 50 menos y...

J.: E agora?

Júlia: Eu acho que no caso seria ou a primeira com a segunda ou a terceira.

Para esclarecer, perguntamos a Júlia se ela está querendo dizer que vai comparar a primeira equação com a segunda ou a terceira. Ela confirma e explica:

Júlia: Sim. Por que seria x igual a 29 menos z. Eu acho que só pode substituir na primeira por que só tem x na primeira. A terceira não tem x. Ai no caso...

Júlia consegue estabelecer relações entre as equações buscando letras comuns para comparar, mas, como sempre, explica perguntando:

Júlia: Eu coloco as duas assim?

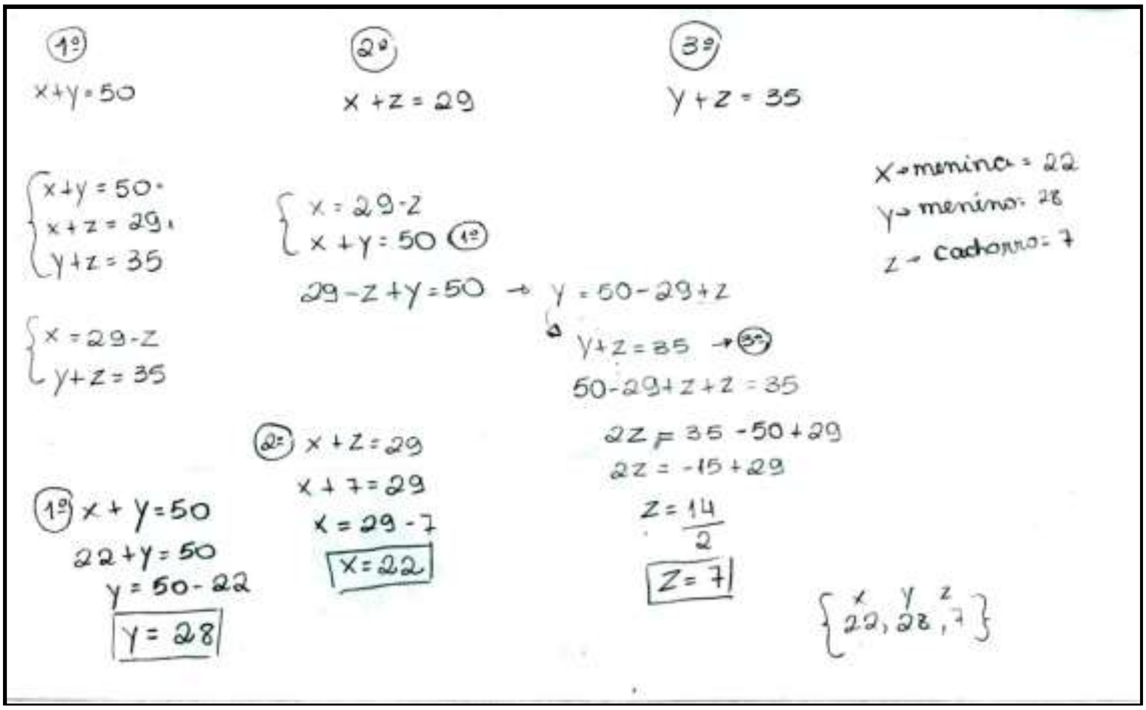
J.: O que você acha?

Júlia: Só é fazer a substituição do x do todo de x, do valor de x, assim muda a equação pelo valor da primeira.

J.: Poderia fazer?

Júlia: No caso x seria a do 29 menos z mais y igual a 50. Tem um problema. Tem duas letras. Nesse caso, pode usar a terceira?

Figura 6: Resolução apresentada por Júlia ao problema



Fonte: Registro da aluna

Percebe-se que júlia faz várias tentativas para confirmar procedimentos com a professora pesquisadora, porém, desenvolve o procedimento relacionado aos sistemas de equações lineares, utilizando o método da adição entre a primeira e a terceira equação, tentando eliminar o x, mas algo sai errado e ela para, observando o que aconteceu. Ao invés de aplicar o método da adição, ela colocou o x em função do z, invertendo a equação. Perguntamos se dessa forma seria mais fácil desenvolver o sistema, encontrando algum valor para x ou z.

Percebemos ainda que as perguntas que fazemos a Júlia ajudam-na a tomar decisões, fazendo-a evoluir consideravelmente em sua estratégia, pois procede corretamente no desenvolvimento do algoritmo do Sistema de Equações sem dificuldade aparente. Seu raciocínio algébrico, reflete-se na representação algébrica do problema, que parece estar sendo construída, A intervenção feita pela professora pesquisadora por meio da pergunta foram pertinentes para que Júlia realizasse essa contrução. Essa ação mostra a importância do professor como mediador nesse processo.

J.: sim, você quer usar a terceira?

Júlia.: Não sei. Acho que não.

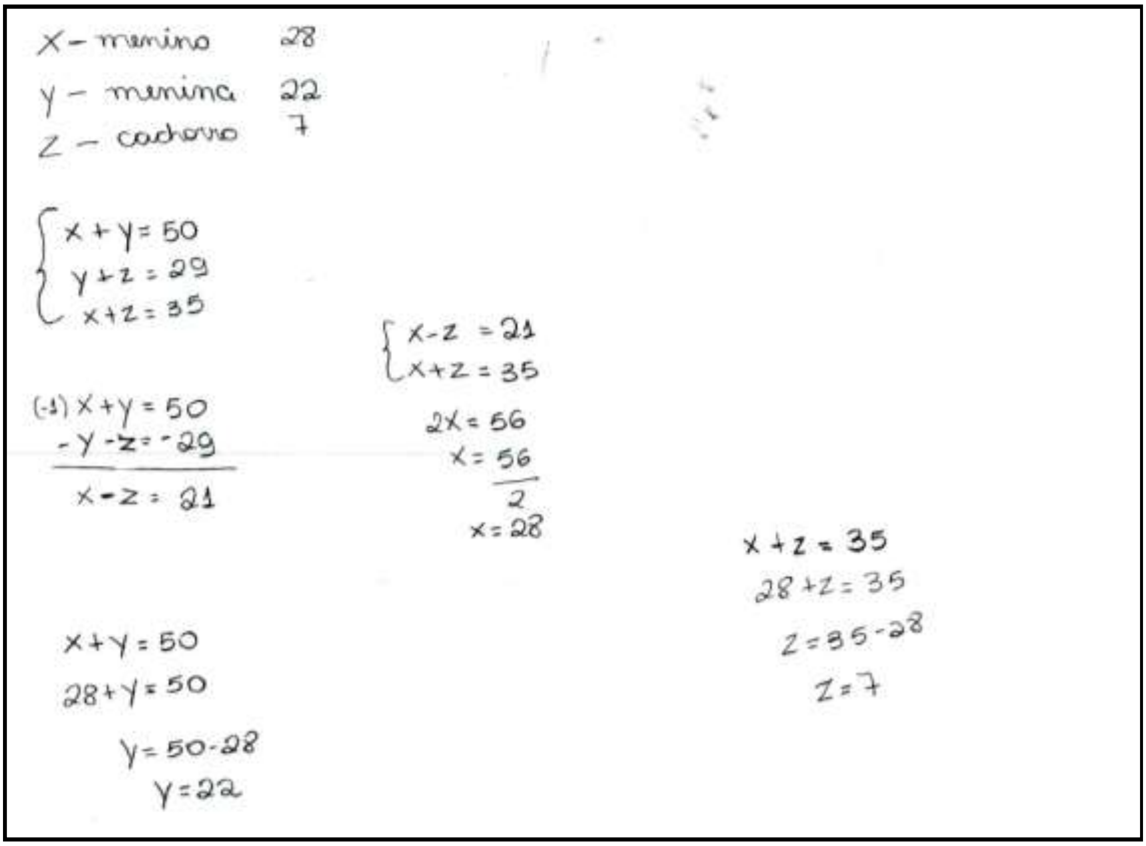
J.: E agora?

Júlia: Continuam as três letras. Então, vou começar de novo com a primeira equação que tem x. Vou multiplicar por (-1) pra colocar o sinal oposto.

Júlia pensa sempre numa saída para a situação, tendo por base seus conhecimentos prévios e as reflexões que constrói por meio das perguntas feitas pela professora pesquisadora. Ela continua desenvolvendo seu raciocínio enquanto observamos. Ao final, ela explica:

Júlia: No caso o y seria eliminado. 50 menos 29, ficando 21. Entendeu?

Figura 7: Resolução apresentada por Júlia ao problema



x – menino 28

y – menina 22

z – cachorro 7

$$\begin{cases} x+y=50 \\ y+z=29 \\ x+z=35 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} (-1)\ x+y=50 \\ -y-z=-29 \\ \hline x-z=21 \end{array}$$

$$\begin{cases} x-z=21 \\ x+z=35 \end{cases}$$

$2x=56$

$x=\frac{56}{2}$

$x=28$

$x+z=35$

$28+z=35$

$z=35-28$

$z=7$

$x+y=50$

$28+y=50$

$y=50-28$

$y=22$

Fonte: Registro da aluna

Percebe-se que atividades como essa pode proporcionar aos alunos desenvolver, com o tempo e a prática contínua, autonomia sentindo-se seguros no que faz. Para Júlia, essa ação pode ter lhe trazido uma aprendizagem prazeirosa, visto que toda estratégia parte do seu raciocínio, mediado pela pergunta no momento de intervenção da professora pesquisadora, diante das quais Júlia demonstra sentir-se à vontade. Também a fez sentir-se parte do processo de aprendizagem e não uma mera receptora, oportunizando. sua evolução no desenvolvimento do raciocínio algébrico.

Júlia: Sim. Agora pego a terceira equação x + z.

J.: E agora?

Júlia: fica x e x com z.

J.: E agora?

Júlia: Tira o z.

Infere-se, a princípio, que Júlia utiliza os dados do problema e sabe manipular as equações presentes no sistema. Ao finalizar o procedimento, ela continua com três equações, porém, agora diferentes das anteriores, pois são equivalentes a elas. Perguntamos:

J.: Qual delas vai utilizar primeiro?

Júlia: A terceira.

J.: Sabe como proceder?

Júlia: Eu peguei a última equação e achei z que é 7 o peso do cachorro. Substitui na segunda equação o z e encontrei y que é o peso do menino que é 28. E peguei o y e substitui na primeira equação, achei 22 que o peso da menina. E foi assim... é muita conta. Dá dor de cabeça.

Júlia apresenta sua estratégia usando a Álgebra, juntamente com sua linguagem algébrica e representação. De início, demonstra saber aplicar o procedimento correspondente aos sistemas de equações que podem ter melhorado com base nas reflexões que fez. As perguntas fizeram-na ampliar o raciocínio algébrico, considerando o modo como demonstra a organização do problema, o desenrolar das etapas de construção da representação escrita e a elaboração da solução. Souza e Diniz (1996, p. 04) afirmam que a Álgebra é a linguagem da Matemática utilizada para expressar fatos genéricos. Como toda linguagem possui seus símbolos, suas regras e várias funções. Entre elas: ser generalizadora da Aritmética e ferramenta para resolver problemas.

Após ter finalizado, perguntamos a Júlia:

J.: Qual das estratégias achou mais fácil?

Júlia: É mais fácil a primeira.

J.: Por quê?

Júlia: A primeira você interpreta mais rápido. A dá equação pode se tornar até mais fácil por que você já vai sabendo como fazer, mas tem muita troca de equação, ver qual é que cabe melhor e a conta fica grande.

Júlia revela que usar a Aritmética é o modo mais fácil e simples para resolver o problema, já que ele permite as duas abordagens. Porém, afirma ainda que para utilizar o método algébrico precisa organizar melhor o problema, pois é mais complexo. Percebe-se que as conta são modos habituais de se resolver problemas em sala de aula, já a Álgebra não é tão comum, fato esse que depende do trabalho realizado com esta pela escola. Precisamos estimular esse uso para que, futuramente, os alunos utilizem a Álgebra com a mesma simplicidade que, hoje, utilizam a Aritmética. A prática de levar o aluno a pensar e descobrir respostas também não está consolidada entre os professores no ensino da Matemática, visto que não desenvolvem como deveria a metodologia de resolução de problemas. Mas, ao referir-se a Álgebra como sendo também fácil, Júlia deixa transparecer que ao usar letras como instrumentos para os cálculos se cria um caminho para o modo de proceder. Evidente que sistemas requerem um procedimento extenso, mas não exaustivo para serem finalizados. As perguntas estimularam Júlia a desenvolver sua estratégia algébrica, mesmo ela já tendo solucionado por meio da Aritmética, demonstrando que, por esse método, também poderia fazê-lo de modo dinâmico e tranquilo.

6.6. Síntese

Apresentação. Júlia é aluna do 3º Ano do Ensino Médio. É alegre e comunicativa, tem 16 anos e reside na Área Rural do Município sede de nossa pesquisa. Sempre estudou em escolas públicas, tanto Municipais Rurais quanto urbanas e não possui histórico de reprovação (nem em Matemática nem em outras disciplinas do currículo) Ela é bastante dedicada aos estudos e pretende fazer o ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) esse ano para ingressar logo numa faculdade onde pretende cursar Medicina.

Concepções sobre a resolução de problemas. Para Júlia, o problema é uma questão que traz um desafio que precisa ser entendido para depois resolver. Compreende que um problema traz algo a descobrir e que é necessário desenvolver um modo de fazer, mas que sempre precisa de conta para a solução. Já o exercício ela não entende como uma tarefa, mas sim como uma ação prática de fazer os problemas.

Concepções sobre a pergunta na aula de Matemática. Sua concepção é de que pergunta é importante para relembrar assuntos passados, tirar dúvidas ou esclarecer e completar algo que já sabe ou mesmo sobre o conteúdo na hora da explicação quando não entende algo. Que se sente à vontade em fazer perguntas tanto ao professor quanto aos colegas e que considera importante as respostas de todos, mas esclarece sua preferência em perguntar ao professor e, na ausência deste ou quando não entende sua explicação, dirige-se aos colegas.

A proposição do problema algébrico ao aluno e as perguntas. De imediato, ao olhar o problema, e de forma apressada, Júlia procura desenvolver um cálculo escrito, uma “conta”, algo natural devido à prática que possui em sala de aula, onde o ensino de Matemática é referenciado por cálculos. As perguntas, real e de exame, fizeram-na expor seus conhecimentos prévios e fornecer informações para a professora pesquisadora, ajudando-a a obter de Júlia, outras ações, como seu posicionamento para tomar decisões diante do problema, permitindo que a aluna interpretasse melhor as informações nele contido para poder estabelecer relações e, por último, desenvolver as possíveis soluções. Isso foi possível por meio das perguntas didáticas e suas subcategorias que permearam o processo.

Com auxílio deste tipo de pergunta, Júlia pôde refletir melhor sobre o que estava sendo posto no problema, como as informações e a representação gráfica, que lhe ajudaram na elaboração de soluções, porém, muito preocupada com os cálculos escritos. Percebe-se que esse comportamento pode ser reflexo de uma prática desenvolvida em sala de aula e que se fosse estimulado o raciocínio e o diálogo, entre professor e aluno,teríamos um ensino de Matemática mais prazeiroso e, consequentemente, uma aprendizagem com compreensão.

As Estratégias de Resolução do Problema Algébrico. Júlia desenvolveu basicamente duas estratégias de resolução do problema algébrico. Na primeira utilizou as operações fundamentais da Aritmética, especificamente à adição, subtração e divisão, sem dificuldade, apresentando rapidamente uma solução. Na segunda ela utilizou a Álgebra, elaborando três equações com os pesos, demonstrando conhecer a representação e a linguagem algébrica na aplicação do algoritmo de Sistemas de Equações Lineares do 1º grau.

Sua preocupação maior é em confirmar com a professora pesquisadora se seu método está correto ou não, necessitando de seu aval. Mostra-se insegura em tomar decisões e não lhe foi desenvolvida autonomia para que consiga errar e acertar por si, dando sentido a sua aprendizagem, hábito esse que pode ser proveniente da prática do professor em sala de aula. Apesar disso, Júlia utiliza bem os dados do problema e sabe manipular as Equações presentes no Sistema com a ajuda das perguntas feitas durante as intervenções realizadas pela professora pesquisadora A linguagem algébrica e sua representação, não pareceu ter sido problema para ela, pelo menos não na aplicação do procedimento de resolução usando sistemas, que foi melhorado devido as reflexões que fez. A pressa em buscar uma solução numérica para o problema, a fez se utilizar da Aritmética, porém, foi estimulada a desenvolvê-lo também pelo método algébrico. Percebe-se que, havendo interação entre professor e aluno e a devida utilização da metodologia de resolver problemas, ele poderá, com o tempo, utilizar a Álgebra de modo simples, como faz com a Aritmética

CONCLUSÕES

Os resultados das entrevistas que realizamos com as alunas Beatriz e Júlia, apontam para concepções diferentes entre as ações de fazer exercícios e resolver problemas. Beatriz afirma que para resolver problemas precisa pensar sobre algo para depois encontrar uma solução possível. Júlia compartilha dessa mesma ideia ao afirmar que o problema traz “um desafio” a descobrir e, portanto, requer um entendimento para depois decidir sobre o modo de fazer. Já na ação de fazer exercícios, Beatriz o reconhece como uma tarefa onde ela aplica um procedimento conhecido, e que pode ser utilizado em vários exemplos. Para Júlia, fazer exercício é a ação de resolver os problemas e não uma tarefa diferente, na qual o aluno conhece o procedimento a ser utilizado para chegar à solução.

O modo de pensar destas alunas sobre as tarefas que realizam nas aulas de Matemática, mostram que ensinar o aluno a repetir procedimentos não o faz pensar matematicamente, pois condiciona sua reflexão, inibindo a construção de estratégias. Que ambas as tarefas tem seu grau de importância e devem ser utilizadas no contexto escolar, porém, cabe ao professor decidir em qual momento usá-las. Que o ensino da Matemática está atrelado a culturas tradicionais e que o problema surge como pretexto para os cálculos, não exercendo a função de instrumento exploratório de investigação.

Infere-se, a partir dos resultados, que Beatriz e Júlia consideram as perguntas importantes na aula de Matemática, mas a utilizam, na maioria das vezes, para relembrar assuntos passados, tirar dúvidas ou esclarecer algo sobre o conteúdo na hora da explicação do professor, caso não estejam entendendo. Afirmam que se sentem à vontade em fazer perguntas, tanto ao professor quanto aos colegas, e que consideram importante todas as respostas, mas esclarecem sua preferência em perguntar ao professor, pois acreditam que ele sabe mais que os colegas. E, na ausência deste, ou quando não entende sua explicação, dirigem-se aos colegas.

Percebe-se que o professor, para elas, é detentor do conhecimento, ele detém as verdades. Que se sentem inseguras em suas decisões, pois não são estimuladas a tomarem atitudes diante dos problemas, de modo a utilizarem métodos não formais para construir respostas. Elas são direcionadas a usar procedimentos formais, provavelmente aplicados pelo professor. Atitude que reflete o modo como aprendem, de como o professor não valoriza seus saberes e poder de raciocínio.

A proposta do problema algébrico para as alunas Beatriz e Júlia é estabelecer um processo comunicativo, entre pesquisadora e pesquisadas, mediado pela pergunta, buscamos investigar como estas iriam contribuir no desenvolvimento de estratégias algébricas de resolução de problema. Os resultados mostram que as alunas reconhecem a tarefa como sendo um problema, porém, não buscam analisar, ler ou interpretar as informações contidas nele de modo a conjecturar informações que possibilitem construir estratégias de resolução. A pergunta, que surge nesse momento de interação entre professora pesquisadora e alunas, ajudou a desenvolver essas estratégias.

Ao olhar o problema, as alunas, indistintamente, procuram verificar que contas irão fazer para solucioná-lo. As perguntas, real e de exame, promoveram o resgate dos conhecimentos prévios e as perguntas didáticas permitiram-nas analisar mais detalhadamente as informações, para depois decidir como chegar a solução.

A ação, que parece ser automática, é realizar os cálculos escritos, a “conta”. Elas se detêm apenas na pergunta do problema como se lá estivesse expressa que operação matemática utilizar. Beatriz, ao se deparar com o problema, não consegue formalizar em seu pensamento um cálculo imediato, assim, ficou ansiosa e angustiada com essa situação. Júlia, automaticamente, representa uma “conta”. Ao intervir com perguntas, a professora pesquisadora fez com que elas identificassem as informações e interpretasse o problema, não somente para representar a conta, mas estabelecer relações entre os dados e o que se deseja saber no problema.

Esse fato mostra um ensino de Matemática reverenciado pelos cálculos, sendo seu foco principal. Ou ainda que, para elas, Matemática é fazer “contas”, prática esta possivelmente habitual em suas aulas de Matemática. Desenvolver a prática da pergunta favorece tanto o conhecimento prévio do aluno como a reflexão do professor sobre sua metodologia, estimulando-o à mudança. Acreditamos que Beatriz despertou essa reflexão em sua fala, pois nos fez pensar sobre o que se ensina, como se ensina, para que se ensina na escola. Valorizar os momentos de comunicação em sala, é importante para o crescimento intelectual dos alunos e a pergunta, se motivada no ambiente escolar, pode ser construtora de conhecimentos matemáticos significativos.

Percebemos que os conceitos aritméticos são facilmente tratados pelas alunas, sendo sua primeira opção de solução. O que não há, pelo menos de início, é uma preocupação em observar os elementos do problema, fato este previsto em sua análise prévia. Em relação aos algébricos, ainda são pouco tratados pelos alunos em situações cotidianas, ou por serem mais complexos ou, consequentemente, por serem menos tratados pelo professor. Sabemos que são necessários e indispensáveis à sua vida prática, social e do mundo do trabalho. Habilidades estas que precisam ser trabalhadas para que os alunos sejam capazes de fazer essa ponte entre prática e conhecimento científico.

Os resultados mostram ainda que, a partir da interação entre professora pesquisadora e alunas, por meio da pergunta, as alunas perceberam não só a importância dos cálculos, mas da descoberta de possibilidades de solução, pois cada uma delas promove habilidades de interpretar, conjecturar ou resgatar conhecimentos prévios.

Percebe-se, a partir dos resultados que a comunicação, especificamente a pergunta, é elemento construtor de aprendizagens e uma ferramenta de ensino importante, pois está presente em todos os momentos da aula, podendo fazer o aluno pensar sobre o que faz, dando sentido ao saber. Ao professor, facilita a troca de saberes, favorece as discursões e possibilita uma prática interativa, que enriquece o processo de aprendizagem a partir da problematização, considerando seu caráter mediador.

Percebemos, com base nos resultados, que quando o aluno participa das discursões e interage com o outro (em nossa pesquisa, com a professora pesquisadora) por meio da pergunta, se sente parte do processo de aprendizagem, fazendo conexões entre aquilo que sabe com o que está sendo discutido, e essas ações refletem na construção de estratégias de resolução, especificamente, os algébricos, por serem mais complexos. E, para que isso venha a se concretizar na maioria das escolas, é preciso repensar a forma como tratamos os problemas, que depende de formação adequada ao professor, fazendo-o refletir sobre a prática, vindo a modificá-la posteriormente.

Também que o professor esteja aberto a mudanças, tanto de prática quanto de concepções, pois há reflexos nas ações dos alunos. Em relação à resolução de problemas, por exemplo, há muito que fazer para que esta se efetive nas práticas dos professores de Matemática.

As estratégias desenvolvidas por Beatriz e Júlia, durante a realização da tarefa, confirmam ações previstas na análise prévia, como, por exemplo, o fato delas usarem a Aritmética e a Álgebra para solucionar o problema, atribuir incógnitas para representação algébrica dos indivíduos e montar o sistema de três equações lineares.

Percebe-se que mesmo desenvolvendo raciocínios e construindo estratégias, as alunas utilizam a pergunta para confirmar a validade dessas ações junto a professora pesquisadora, pois sentem-se inseguras em realizar a a tarefa a seu modo.

As perguntas, de modo geral, estimulam as alunas a desenvolverem mais de uma estratégia, que geralmente não fazem em sala de aula, pois quando encontram uma solução já se dão por satisfeitas. Ao serem questionadas sobre novas formas de fazer, se motivam a pensar e construir outras estratégias, percebendo que um mesmo problema pode ter várias maneiras de ser resolvido.

Esse processo acontece pela ação da professora pesquisadora em perguntar a aluna e deixar que ela também pergunte a ela. Não havendo essa comunicação, fica difícil de somente a aluna ter a curiosidade de buscar novas soluções, costumeiramente aplicam o mesmo modo em qualquer situação. É uma mudança de perspectiva dentro da sala de aula, utilizar a pergunta como elemento construtor de conhecimento, inclusive (principalmente) nos momentos de intervenção junto ao aluno, que estando a resolver o problema, é instigado a pensar. O que deve ser entendido pelo professor é que a comunicação é algo inerente ao ensino, um elemento indispensável ao processo, que deveria ser mais utilizada para esse fim.

Os resultados mostram ainda, que ao desenvolver estratégias com uso das operações Aritméticas, as alunas sentem-se a vontade, enquanto que com os conceitos algébricos (no caso, Sistemas de Equações Lineares do 1º grau) há dificuldades, tanto na representação escrita quanto na compreensão do algoritmo. Fato demonstrado por Beatriz, cuja preocupação voltada para os cálculos, não a leva a levantar hipóteses, nem consegue observar detalhes presentes na representação gráfica do problema, que poderiam lhe ajudar a resolvê-lo.

Beatriz tenta, por meio da pergunta, investigar a forma de pensar da professora pesquisadora, como quisesse se moldar a ela. Utiliza pergunta que lhe permita obter confirmação do tipo “sim” ou “não” para o procedimento que irá utilizar. Ela responde uma pergunta sempre com outra, investigando o modo “correto” de fazer, segundo a professora pesquisadora. As perguntas ajudaram a perceber que as alunas haviam internalizado os elementos do problema e desenvolvido um raciocínio rápido e prático em relação à sua compreensão, pois num *insight***,** estratégias foram surgindo, representando avanço intelectual.

As estratégias algébricas surgiram a partir das reflexões proporcionadas pelas intervenções da professora pesquisadora através da interação comunicativa com as alunas, que perceberam a possibilidade de usar a Álgebra para solucionar o problema, sendo esta mais uma possibilidade, além da Aritmética. Beatriz associa cada indivíduo do problema a uma incógnita, elaborando três equações, cada uma correspondendo aos pesos expressos nas balanças, mas não consegue desenvolvê-lo. Demonstra não ter domínio do algoritmo de Sistemas de Equações Lineares, e consequentemente, não consegue encontrar como resultados os mesmos valores numéricos desenvolvido na primeira estratégia utilizando as operações aritméticas. Isso não significa que não possua um raciocínio algébrico, mas sente dificuldade no procedimento da linguagem e representação. A professora pesquisadora realiza intervenções por meio da pergunta para ajudar a aluna tirar conclusões, mesmo assim ela resolve parar, deixando o sistema sem solução.

Júlia parece ter um raciocínio mais organizado para a Álgebra, pois conseguie elaborar as equações, montar o Sistema e realizar o procedimento do algoritmo sem muita dificuldade e de forma simples e rápida. Demonstra estar familiarizada com a representação e linguagem algébrica, mesmo necessitando de confirmação do procedimento da professora pesquisadora.

Infere-se ao observar o desenvolvimento de Júlia durante a resolução do problema algébrico, que é importante dar autonomia ao aluno para que ele erre e acerte por sua própria conta, pois suas perguntas devem ser uma descoberta. Instigar a aluna a tirar conclusões próprias com base no problema, é mais rico do que dar respostas prontas, faz a aluna sentir-se parte, tendo seu conhecimento valorizado, cujas reflexões irão gerar outros mais elaborados.

Infere-se a partir dos resultados, que a comunicação deve ser incentivada pelo professor em todos os momentos da aula de Matemática, podendo ser usada como ferramenta de aprendizagem, especificamente no que tange à pergunta, que não somente garante a interação professor/aluno, aluno/aluno, mas ultrapassa esse fim, favorecendo reflexões sobre o que está sendo ensinado e/ou aprendido no ambiente escolar, fornecendo dados e troca de experiências que são importantes instrumentos de ensino e de aprendizagem de conteúdos matemáticos, especificamente os algébricos. Percebemos as alunas abertas a discursão durante a interação com a professora pesquisadora, sentindo-se a vontade com o diálogo, havendo uma maior concentração na tarefa, pois, sem mediação, poderia ficar dispersas. Mesmo realizando apenas um problema com cada aluna, é possível perceber como a comunicação e a resolução de problemas pode ampliar o modo de pensar do aluno e, consequentemente, sua forma de agir, tomar decisões, revisitar conhecimentos prévios e criar estratégias, observando com mais atenção os dados do problema.

Considerações Finais

Percebemos, com os resultados deste estudo, que há muito a ser feito para que o processo de comunicação e de resolução de problemas se efetive na prática dos professores, de modo a favorecer uma aprendizagem significativa em Matemática. Porém, o professor pode realizar atividades simples, como roda de conversa, debates, textos, vídeos, para promover interações comunicativas com os alunos, com o objetivo de verificar conhecimentos prévios, troca de experiências ou mesmo melhorar as relações interpessoais no grupo. A pergunta pode ser utilizada de modo coletivo nessas atividades e enriquecer as discursões, também despertar curiosidade nos alunos em descobrir algo que ainda não sabem. É importante que sejam feitas para todos, sem direcionar nem vinculá-las a um tema específico. Devem surgir da necessidade, de professor e alunos, trocarem ideias e despertar saberes, instigando a aprendizagem.

A Matemática possui conhecimento extenso e abstrato, mas que está presente nas ações do dia a dia que são vividas pelo aluno, cabendo à escola trazer essa vivência para sala de aula. A Resolução de Problemas é uma metodologia que permite aproximar essas realidades essa possibilidade, pois os problemas estão ligados ao contexto e promovem um desafio ao aluno. Ao realizar essa tarefa, o aluno deve pensar matematicamente considerando o que sabe, fazendo relações com o que está sendo discutido no ambiente escolar para que haja aprendizagem por compreensão, não sendo ele um expectador em sala de aula. Ela favorece uma mudança de perspectiva para o aluno, que pode aprender Matemática por compreensão, tendo por base seus conhecimentos prévios. E para o professor, permite refletir sobre a prática e tratar os problemas como objeto de ensino. Ao propor o problema, o professor interage com o grupo, promove discursões de ideias e estimula a resolução por meio da pergunta que instiga a descoberta, possibilidades estas possíveis de serem realizadas no dia a dia.

Trazer os alunos para as discursões, debates, instigar a curiosidade e tratar conhecimentos matemáticos no contexto de vida do aluno, fazendo-o perceber que esse conhecimento é útil em sua vida social ou do trabalho é essencial no Ensino Médio. Sabemos que essa modalidade representa o término de uma etapa e o início de muitas outras, cuja decisão depende de cada um, porém, cabe a escola favorecer esses caminhos, promovendo um uma aprendizagem aplicável a qualquer decisão que ele venha a tomar.

Há muitas dificuldades a serem enfrentadas pelo ensino-aprendizagem da Matemática em nosso País, e uma delas está relacionada à qualificação profissional do professor, que parece não atender às necessidades, nem dos alunos, nem dele mesmo, nem da sociedade na qual irá atuar e ajudar a transformar, tornando-se um desafio cada vez maior fazer com que os objetivos dessa disciplina sejam alcançados, principalmente em relação à Álgebra.

A concepção dos professores, arraigada à cultura tradicionais de ensino, a resistência a mudanças, formação inicial e continuada deficiente, aliada ao pouco investimento na qualidade do ensino, influi consideravelmente no avanço do ensino-aprendizagem da Matemática, bem como das demais áreas.

Nos dias atuais, o conhecimento matemático torna-se cada vez mais indispensável e, diante da necessidade, a memorização acaba sendo uma opção de aprendizagem a curto prazo, de baixa qualidade que, infelizmente, ainda é praticada em muitas escolas por profissionais que não se sentem seguros para desenvolver a Metodologia de Resolução de Problema de modo satisfatório, podendo ser esta uma falha na sua formação, tanto inicial quanto continuada.

Acredito que essa pesquisa possa despertar em outros professores reflexões sobre a importância de trabalhar a Resolução de problemas na aula de Matemática, tendo a pergunta como elemento comunicativo que promove interações e ajuda a desenvolver estratégias de solução, por instigar a descoberta, servindo de referência para pesquisas futuras, atualizando essa problemática no contexto da Educação Matemática.

Assim, sugerimos problemáticas para futuras pesquisas:

- Como a ação de perguntar do professor pode contribuir para desenvolver essa prática no alunos?
- Como a relação existente entre as perguntas consideradas elementares e as mais elaboradas podem favorecer uma aprendizagem matemática significativa associada à Resolução de Problemas?
- As perguntas podem favorecer estratégias de Resolução de Problemas no Ensino à Distância?

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. **Contexto e Contextualização nos Processos de Ensino e Aprendizagem da Matemática.** Publicado em Nova Escola, Edição 270, março de 2014. Disponível em: http://revistaescola.abril.com.br/fundamental-1/contexto-contextualizacao-processos-ensino-aprendizagem-matematica-784403.shtml. Data do acesso: 16/12/2015.

BANEGAS, J. **L'argumentació en Matemàtiques.** XIIè Congrés Valencià de Filosofia (Trad. De Miguel Gimenez & Andrew Aberdein). Valencià, 1998.

BELLO, S. E. L.; MAZZEI, L. D. **Leitura, Escrita e Argumentação na Educação Matemática do Ensino Médio: Possibilidade de Constituição de Significados Matemáticos.** In: PEREIRA, N. M.; SHÄFER, N. O.; LÓPEZ BELLO, S. E. (Org.). Ler e escrever: compromisso no Ensino Médio. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2008.

BISHOP, A.; GOFFREE, F. **Classroom Organization and Dynamics.** In B. Christiansen, A. Howson & M. Otte (Eds.), Perspectives on mathematics education (pp. 309-365). Dordrecht: D. Reidel, 1986.

BOAVIDA, A. **A Argumentação em Matemática: Investigando o Trabalho de duas Professoras em Contexto de Colaboração.** (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa, 2005).

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação: Uma Introdução à Teoria e aos Métodos.** Coleção Ciências da Educação. Portugal: Porto Editora, 1994. 337 p. Tradução de: Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista.

BOOTH, L. R. **Dificuldades das Crianças que se iniciam em Álgebra.** In: COXFORD, Arthur F. e SHULTE, Albert P. As ideias da Álgebra. São Paulo: Atual, 1995.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental - Matemática**. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC?SEF, 1997.

_________Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Brasília : MEC/SEMTEC, 2002.

________ Parâmetros Curriculares Nacionais: Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental – Matemática. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1988.

BROUSSEAU, G. **Les Obstacles Épistemologiques et les Problèmes em Mathématiques.** Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 4, nº 2, pp. 165-198, 1983.

________**Le Contrat Didactique: Le Mileu.** Recherches en Didactique des Mathematiques, Vol. *9*, *nº* 3, pp. 309-336, 1988.

________ **La Théorie des Situations Didactiques** (Cours donné lors de l'attribution à Guy Brousseau du titre de docteur honoris causa de l'Université de Montréal). 1997. (Acesso: 8/9/2014).

CAMARGO, A. N. B.; LINDEMEYER, C.; IRBER, C.; RAMOS, M. G. **A Pergunta na Sala de Aula: Concepções e Ações de Professores de Ciências e Matemática**. Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, 2014.

CHRISTIANSEN, B.; WALTHER, G. **Task and Activity**. In B. Christiansen, A. G. Howson, & M. Otte (Eds.), Perspectives on mathematics education (pp. 243-307). Dordrecht: Reidel, 1986.

CURY, H. N. **Análise de Erros – O que podemos aprender com as respostas dos alunos.** Coleção Tedências em Educação Matemática. 2ª Edição. Belo Horizonte. Autêntica, 2015.

DORIGO, M. **Investigando as Concepções de Equação de um grupo de alunos do Ensino Médio**, 2010. Dissertação de Mestrado. Universidade Bandeirante de são Paulo.

DOUEK, N. (1999). **Argumentative Aspects of Proving of Some Undergraduate Mathematics Students'Performances.** Disponível em: http://www.lettredelapreuve.it/OldPreuve/Resumes/Douek/Douek99/Douek99.html)

DUVAL, R. (1999). **Questioning Argumentation.** *Disponível em:* http://www.lettredelapreuve.it/OldPreuve/Newsletter/991112Theme/991112ThemeUK.html). (acesso em 28/10/2015).

EISENBERG, T.; DREYFUS, T. **Os Polinômios no Currículo da Escola Média.** In: As ideias da Álgebra. COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. São Paulo: Atual, 1995.

ENGLISH, L. D. **The Development of Fifth-Grade Children's Problemposing Abilities**. Education Studies in Mathematics, Netherlands, v. 34, p. 183-217, junho, 1997a.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática: Percursos Teóricos e Metodológicos**. Coleção Formação de Professores, 2ª Edição Revista, Autores Associados, 2007.

FLICK, U. **Desenho da Pesquisa Qualitativa**. Porto Alegre: Artmed, 2011. (coleção pesquisa qualitativa).

FONSECA, S. **Metodologia de Ensino da Matemática.** Fundação Helena Antipoff, Belo Horizonte (MG), Editora Lê, 1997. (Coleção Apoio).

FRANKE, M. L.; KAZEMI, E.; BATTEY, D. (2007). **Understanding Teaching and Classroom Practice in Mathematics.** In F. Lester (Ed.), Second handbook of mathematics teaching and learning (pp. 225-256). Greenwich, CT: Information Age.

FREIRE. P. **Pedagogia do Oprimido**. 2ª Edição. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1975.

FREIRE, P.; FAUNDEZ, A. **Por uma Pedagogia da Pergunta**. 4ª Edição, Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1998.

GÓMEZ-GRANELL, C. **A Aquisição da Linguagem Matemática: Símbolo e Significado.** In A. Além da alfabetização. Teberosky & L. Tolchinsky (Eds.), A aprendizagem fonológica, ortográfica, textual e Matemática (pp. 257-282). São Paulo: Ática, 2008.

GONTIJO, C. H. **Resolução e Formulação de Problemas: Caminhos para o Desenvolvimento da Criatividade em Matemática**. Anais do SIPEMAT (Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática). Universidade Federal de Pernambuco – 2006.

GUERREIRO, A. **Comunicação Matemáticana Sala de Aula: Conexões entre Questionamento, Padrões de Interação, Negociação de Significados e Normas Sociais e Sociomatemáticas.** IN: Práticas Profissionais dos Professores de Matemática. PONTE, João Pedro da. (Org.) Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. 1ª Edição, 2014.

HOUSE, P. G. **Reformular a Álgebra da Escola Média: Por que e Como?** In: As ideias da Álgebra. COXFORD, A. F. e SHULTE, A. P. São Paulo: Atual, 1995.

KAPUT, J. J. **A Research Base Supporting Long Term Algebra Reform?** In: Annual Meeting of North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 17, Columbus, 1995. Disponível em <http://eric.ed.gov/PDFS/ED389539.pdf.>. Acesso: 16/03/2016.

KIERAN, C. **The core of Algebra: Reflections on its Main Activities.** Disponível em: http://link.springer.com/chapter/10.1007%2F1-4020-8131-6_2#page-1. (acesso: 20/04/2016).

KIRSHNER, D. **The Structural Algebra Option Revisited.** In: Sutherland, R. et al. (Eds.). Perspective on School Algebra. Kluwer Academic Publishers, Printed in the

Netherlands, 2001, p. 83-98. Disponível em: http://link.springer.com/chapter/10.1007/0-306-47223-6_5#page-1. (acesso: 16/03/2016).

KUHN, T. S. **A Estrutura das Revoluções Científicas**. 2ª. edição. São Paulo: Perspectiva, 1978.

LEINHARDT, G. **Instructional Explanations: A Commonplace for Teaching and Location for Contrast.** In V. Richardson (Ed.), Handbook for research on teaching Washington, DC: American Educational Research Association (4 th Ed.), 2001

LERAT, P. **Approches Linguistiques des Langues Spécialisées**. Anglais et français de spécialité (ASP), 15-18, 1997.

MARCONI, M. A.; LAKATOS, E. M. **Fundamentos de Metodologia Científica**. 5ª Edição, editora Atlas, São Paulo, 2003.

MARTINHO, M. H. S. S. **A Comunicação na Sala de Aula de Matemática: Um Projeto Colaborativo com Três Professoras do Ensino Básico.** 2007. Tese (Doutorado em Educação, Especialidade: Didática da Matemática) – Universidade de Lisboa.

MATA, A. **Questões de Entoação e Interrogação em Português: "Isso é uma Pergunta?"** (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa), 1990..

MEDEIROS, K. M.; SANTOS, A. J. B. **Uma Experiência Didática com a Formulação de Problemas Matemáticos** - ZETETIKÉ– Cempem – FE – Unicamp – v. 15 – n. 28 – jul./dez. – 2007.

MEDEIROS, K.M. **A Influência da Calculadora na Resolução de Problemas Matemáticos Abertos.** Educação Matemática em Revista. SBEM – Ano 10 – nº 14, 2003, p. 19-28.

MEDEIROS, K. M. **O Contrato Didático e a Resolução de Problemas Matemáticos em Sala de Aula**. SBEM (sociedade Brasileira de Educação Matemática) – 2001.

MENEZES, L. **Concepções e Práticas de Professores de Matemática: Contributos para o Estudo da Pergunta.** Universidade de Lisboa. Departamento de Educação da Faculdade de Ciências, 1995. (Dissertação de Mestrado)

MENEZES, L.; FERREIRA, R. T.; MARTINHO, M. H.; GUERREIRO, A. **Comunicação nas Práticas Letivas dos Professores de Matemática.** In: Práticas Profissionais dos Professores de Matemática PONTE, J. P. (org.).. Lisboa, 2014.

MERRIAM. S. B. (1988) **Case Study Research in Education**. Disponível em: http://www.appstate.edu/~jacksonay/rcoe/merriam.pdf (acesso: 20/04/2016).

MORAES, R.; GALIAZZI, M. C.; RAMOS, M. G. **Pesquisa em Sala de Aula: Fundamentos e Pressupostos.** In: A pesquisa em sala de aula. MORAES, Roque; LIMA, Valderez (Org.). 2ª. Edição. Porto Alegre: EDIPUCRS**,** 2004.

MORIN, E. **La Mente Bien Ordenada: Repensar la Reforma, Reformar el Pensamiento.** Barcelona: Seix Barral, 2001.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. An agenda for action: Recommendations for school mathematics for the 1980s. Reston: NCTM. 1980.

ONUCHIC, L. R. **Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas.** In: Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas. BICUDO, M.A.V. (org.). São Paulo: Editora UNESP, 1999.

PEREIRA, A. **Comunicação e Ensino das Ciências: Contributo para o Estudo da Pergunta no Discurso da aula de Ciências do Ensino Básico** (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa), 1991.

PERNAMBUCO. **Parâmetros para Educação Básica – Ensino Fundamental e Médio. Matemática**. Secretaria de Educação Básica. UMDIME, CAEd-Ufjf, 2012.

______Parâmetros na Sala de Aula. Matemática: Ensino Fundamental e Médio. Secretaria de Educação Básica. UNDIME, CAEd-Ufjf, 2013.

PINHEIRO, J. M. Q. **O Livro Didático e o Pensamento Algébrico no Primeiro e Segundo Ciclos do Ensino Fundamental**. 2004. Trabalho Acadêmico Orientado (Especialização em Avaliação Educacional em Matemática) Universidade Federal de Pernambuco – UFPE.

POLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PONTE, J. P.; BRANCO, N.; MATOS, A. **O Simbolismo e o Desenvolvimento do Pensamento Algébrico dos Alunos**. Educação e Matemática: APM, Lisboa: nov/dez de 2008.

PONTE, J. P.; SANTOS, L. **A Prática Letiva como Atividade de Resolução de Problemas: Um Estudo com três Professoras do Ensino Secundário** – Quadrante, vol. 11, nº 2, 2002.

PONTE, J. P. **Gestão Curricular em Matemática**. 2005. In GTI (Ed.) O professor e o desenvolvimento curricular (pp. 11-34). Lisboa: APM.

_______ Estudos de Caso em Educação Matemática. Bolema, 2006, Nº 25, pp. 105-132.

POZO, J. I. **A Sociedade da Aprendizagem e o Desafio de Converter Informação em Conhecimento.** In: Tecnologias na Educação: ensinando e aprendendo com as TIC.

SALGADO, M.U.C. (org.). **Programa Nacional de Formação Continuada em Tecnologia Educacional** – PROINFO INTEGRADO – MEC/SEED, Guia do Cursista, Brasília, 2008.

RIBEIRO, A. J.; CURY, H. N. **Álgebra para a Formação do Professor: Explorando os Conceitos de Equação e Função** – 1ª edição, Belo Horizonte , Autêntica Editora, 2015. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

RIBEIRO, A. J. **Analisando o Desempenho de Alunos do Ensino Fundamental em Álgebra, com base em dados do SARESP**. Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo., 2001.

RUTHVEN, K.; HOFMANN, R.; MERCER, N. **A Dialogic Approach to Plenary Problem Synthesis.** In B. Ubuz (Ed.), Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 4, pp. 81-88). Ankara, Turkey: PME, 2011.

RYVE, A. **What is Ctually Discussed in Problem-Solving Courses for Prospective Teachers?** - J Math Teacher Educ, 2007.

SCHOEN, H. I. **Ensinar a Álgebra Elementar Focalizando Problemas**. University of Iowa, Iowa City, EUA. IN: As ideias da Álgebra. COXFORD, A. F. e SHULTE, A. P. São Paulo: Atual, 1995.

SEARLE, J. **Os Actos de Fala**. Coimbra: Livraria Almedina, 1984.

SESSA, C. **Introducción al estudio didáctico del álgebra. Orígenes yperspectivas.** Buenos Aires: Libros del Zorzal, 2005.

SFARD, A. **Thinking as Communicating: Human Development, the Growth of Discourses, and Mathematizing**. Cambridge university press, 2008.

SOUZA, E. R.; DINIZ, M. I. S. V. **Álgebra: das Variáveis às Equações e Funções.** São Paulo: IME-USP, 2ª edição, 1996.

STAKE, R.E. **Pesquisa Qualitativa: como as coisas funcionam**. In: Pesquisa Qualitativa: estudando como as coisas funcionam. Coleção Métodos de Pesquisa. Editora: Penso, 2011.

STEIN, M. K.; ENGLE, R. A.; SMITH, M.; HUGHES, E. K. **Orchestrating Productive Mathematical Discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell**. Mathematical Thinking and Learning, 10, 2008, p. 313-340.

STUBBS, M. **Linguagem, Escolas e Aulas.** Lisboa: Livros Horizonte, 1987.

TARDIF , M.; LESSARD, C.; LAHAYE, L. **Os professores Face ao Saber: Esboço de uma Problemática do Saber Docente**. Teoria & Educação, nº 4, pp. 215-233, 1991.

TELES, R. A M. T. **A Aritmética e Álgebra na Matemática Escolar.** In: Anais do VII Encontro Nacional de Educação Matemática, Recife: UFPE, 2004.

USISKIN, Z. **Dificuldades das Crianças que se iniciam em Álgebra**. In: As ideias da Álgebra. COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. São Paulo: Atual, 1995.

VYGOTSKY, L. S**. A Formação Social da Mente.** São Paulo: Martins Fontes, 1984.

YIN, R. **Estudo de Caso: Planejamento e Métodos.** 3ª edição, Porto Alegre: Bokman, 2010.

APÊNDICES

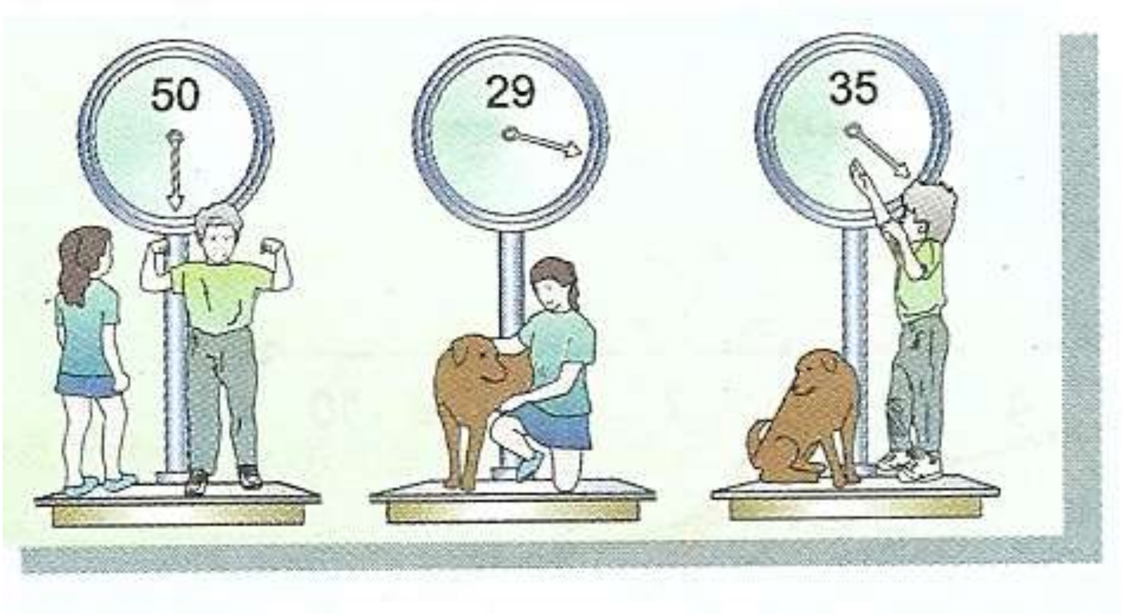
ROTEIRO DA ENTREVISTA SEMIESTRUTURADA REALIZADA COM AS ALUNAS PARTICIPANTES DOS ESTUDOS DE CASO

Momento 1

1. Nas aulas de Matemática, costuma resolver problemas? Ou fazer exercícios?
2. Poderia explicar quando você acha que está resolvendo problemas? E fazendo exercícios?
3. Em que momento da aula costuma fazer perguntas?
4. Você se sente à vontade para fazer perguntas ao professor? Por quê?
5. E a seus colegas? Por quê?
6. Você pensa que fazer perguntas nas aulas de Matemática é importante? Por quê?
7. Você gosta de fazer perguntas (ao professor ou aos colegas)?
8. Prefere perguntar algo para seus colegas ou para o professor?
9. Que perguntas você faz nas aulas de Matemática? Sobre o quê?
10. Quando você faz perguntas a seu professor ou a seus colegas, você pensa que ajuda a resolver os problemas? Por quê?
11. Você já estudou ou está estudando Sistemas de Equações Lineares? Sabe me explicar que assunto é esse?

O PROBLEMA ALGÉBRICO

Você consegue descobrir o “peso”, em kg, de cada indivíduo abaixo?



ROTEIRO DE PERGUNTAS UTILIZADAS DURANTE A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA ALGÉBRICO COM AS ALUNAS

1. Você compreendeu o problema?

2. Já estudou questões parecidas?

3. Saberia me dizer uma forma de resolvê-lo?

4. Você sente alguma dificuldade em iniciar a resolução desse problema? Qual seria?

5. Poderia haver outra forma, além dessa, de resolvê-lo? Você poderia resolvê-lo de outra forma?

6. Que conteúdo de matemática você utilizou para resolver o problema?

7. Nas aulas de matemática, costuma resolver problemas? Ou fazer exercícios?

8. Você se sente à vontade para fazer perguntas ao professor? e a seus colegas?

9. Você acha que fazer perguntas nas aulas é importante? Por quê?

10. Você gosta de fazer perguntas (ao professor ou aos colegas)? Acha melhor perguntar algo para seus colegas ou para o professor?

11. Que tipo de perguntas você faz nas aulas de matemática? Sobre o quê?

12. Quando você faz perguntas, ou a seu professor ou a seus colegas, você acha que ajuda a resolver os problemas?

13. Você faz trabalho em grupo na sala? Gosta? Poderia dizer como trabalham nos grupos? Se todos participam, se discutem os problemas.

TRANSCRIÇÃO DA ENTREVISTA SEMIESTRUTURADA COM A ALUNA BEATRIZ

Estudo de Caso 1

1º Momento

Essa Entrevista foi realizada em 11 de dezembro de 2015, às 14 horas e 10 minutos na cidade de Afogados da Ingazeira - PE com a aluna do 3º Ano do Ensino Médio, turma a qual escolhemos para desenvolver a pesquisa. A aluna é identificada pelo pseudônimo **Beatriz** enquanto que a letra **J** identifica a professora pesquisadora.

J.: Beatriz, nas aulas de Matemática, costuma resolver problemas? Ou fazer exercícios?
Beatriz: *os dois.*
J.: poderia explicar quando você acha que está resolvendo problema e quando você está fazendo exercícios?
Beatriz: *Problema é quando eu acho uma solução pra resolver. É... (pausa) quando eu estou pensando pra poder eu resolver aquela situação.*
J.: E exercícios?
Beatriz: *e exercício é quando a professora passa um exemplo no quadro e eu faço pelo dela.*
J.: você costuma fazer perguntas nas aulas de Matemática?
Beatriz: *sim*
J.: em que momento da aula você costuma fazer perguntas?
Beatriz: *É quando eu não sei aquele assunto ai ela pode me explicar melhor.... é.... tirar minhas dúvidas. Assunto passado ela vem rever.... isso.*
J.: E você se sente à vontade pra fazer perguntas ao professor?
Beatriz*: às vezes*
J.: Por quê?
Beatriz: *bom, por que na maioria das vezes é... a pessoa sabe o assunto e em outro momento é... o que a pessoa não sabe. Eu gosto de perguntar pra tirar as minhas dúvidas.*
J.: por que você se sente à vontade para fazer perguntas ao professor?

Beatriz: *por que... (pausa). Por que se eu não perguntar é... ai eu não vou saber aquele assunto pra poder resolver né? Ai... eu gosto de perguntar.*

J.: E a seus colegas?

Beatriz: *também. É ... mais os colegas eles não sabe tudo que o professor sabe ai algumas coisas que eu não sei eles podem saber e me explicar melhor.*

J.: E você pensa que fazer perguntas nas aulas de Matemática é importante?

Beatriz*:* *sim*

J.: por quê é importante?

Beatriz: *por que tira nossas dúvidas... é... você aprende mais as questões que ela passa o assunto ela pode é ... ensinar coisas boas pro nosso futuro relembrar coisas do passado. Essas coisas.*

J.: E você prefere perguntar algo para seus colegas ou para o professor?

Beatriz: *os dois. Por que o professor ele pode explicar melhor, tirar nossas dúvidas. E os alunos podem saber alguma coisa que eu não sei e eles podem me explicar algum assunto que eu não sei e eles podem saber.*

J.: E que perguntas você faz nas aulas de Matemática? Você pergunta sobre o que?

Beatriz: *sobre o assunto que ela passa... é ... quando ela passa alguma atividade revendo o que nós já estudou pra nós lembrar.... é também os problemas que ela passa e nós não sabe resolver.*

J.: E quando você faz pergunta, ao professor ou a seus colegas, você pensa que essas perguntas ajudam você a resolver os problemas?

Beatriz: *ajuda*

J.: Por quê?

Beatriz: por que através do que perguntamos, alguma coisa no futuro agente pode lembrar daquela questão, agente pode é... e quando for fazer alguma prova pode cair o que ela passou, o assunto... ai... eu costumo perguntar.

J.: Você estudou ou está estudando sistemas de equações lineares?

Beatriz: (pausa) sim, já estudei já.

J.: E você sabe me explicar que assunto é esse?

Beatriz: é alguma coisa referente a retas? Não tô lembrada.

J.: não está lembrada desse assunto?

Beatriz: Não.

TRANSCRIÇÃO DO DIÁLOGO ENTRE PROFESSORA PESQUISADORA E BEATRIZ DURANTE A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA ALGÉBRICO

RESOLUÇÃO DO PROBLEMA ALGÉBRICO COM BEATRIZ

Estudo de Caso 1

2º Momento

O segundo momento foi realizado no dia 15 de dezembro de 2015, às 13h e 18 minutos na cidade de Afogados da Ingazeira – PE com a aluna do 3º Ano do Ensino Médio identificada pelo pseudônimo de **Beatriz.** A letra **J** identifica a professora pesquisadora.

J.: Beatriz, eu trouxe uma tarefa, veja.

Beatriz: *(depois de olhar por alguns instantes) é um problema?*

J.: Sim. Você compreendeu o problema?

Beatriz: *não, quero pensar mais um pouco.*

J.: tudo bem. Você sente alguma dificuldade pra iniciar a resolução do problema?

Beatriz*: sim.*

J.: Qual seria a dificuldade?

Beatriz: *por causa de que eu não tô entendendo a pergunta...*

J.: Qual pergunta?

Beatriz: *se é pra dizer o peso dos dois nas balanças ou de cada indivíduo.*

J.: o que está perguntando aqui (apontando para o enunciado do problema) no problema?

Beatriz: *(ela leu o enunciado) se você consegue descobrir o peso de cada indivíduo abaixo. É de cada um deles não é?*

J.: isso

Beatriz: *se esse é o peso (apontando para primeira balança) deles junto. Pesa 50.*

J.: no caso, o menino e a menina.

Beatriz: *e a segunda balança é o cachorro e a menina pesa 29. E a terceira o cachorro e o menino pesam 35.*

J.: exato.

Beatriz: *ai é pra dizer a diferença entre eles. O peso de cada um.*

J.: isso. Você saberia explicar um modo de resolver esse problema?

Beatriz: *é somando?*

J: somando o que?

Beatriz: *50 + 29 + 35?*

J.: Poderia fazer?

Beatriz: *sim. (após alguns instantes) dá 103? Não. 50 + 29 dá 79 mais 35 dá 114, né?*

J.: sim e agora? O que vai fazer com esse resultado?

Beatriz: *dividir por dois.*

J.: por quê vai dividir por dois?

Beatriz: *cada indivídio foi pesado duas vezes. Ai eu divido por dois, não é?*

J.: poderia fazer?

Beatriz: *(começou a fazer a conta de divisão de 114 por 2) ai aqui vai dar 5, não é? Ai 5 vezes dois dá dez. Ai quatorze né? Abaixa o quatro e dá 7. 7 vezes dois dá quatorze e não sobra nada. Deu 57.*

J.: e agora?

Beatriz: *(pensa um pouco, demora)*

J.: qual a dificuldade?

Beatriz: *(apenas ri)*

J.: o que você pode observar entre o vaor que você encontrou e os outros que aparecem aqui nas balanças?

Beatriz: *Na primeira balança o menino e a menina pesam 57. Não, pesa 50. Então o cachorro pesa 7.*

J.: então você encontrou o peso do cachorro. E agora, Beatriz, pra achar o peso do menino e da menina, o que você pode fazer?

Beatriz: *É... (pausa) pego o 29 menos o 7 que é o peso do cachorro, não é?*

J.: certo. Esse valor corresponde a quem?

Beatriz: *a menina*

J.: por quê?

Beatriz: *Por que ela tá com o cachorro na segunda balança.*

J.: E pra achar o peso do menino?

Beatriz: pega o 35 menos 7 e dá o valor da terceira pessoa que é o menino.

J.: poderia fazer?

Beatriz: sim

J.: ok. Beatriz, poderia haver outro modo de resolver esse mesmo problema?

Beatriz: não sei, deixa eu pensar. (depois de alguns instantes) será que dá por equação?

J.: o que você acha? Pode fazer?

Beatriz: sim.

J.: você sabe fazer por equação?

Beatriz: mais ou menos.

J.: poderia fazer?

Beatriz: sim. Eu vou pegar o peso da menina mais o menino e do cachorro. Então vai ser x + y + z?

J.: por quê?

Beatriz: por que x é da menina, y é do menino e z é do cachorro.

J.: poderia fazer?

Beatriz: sim.

J.: Você colocou que x + y + z dá igual a 114. Por que?

Beatriz: por que 50 + 29 + 35 dá 114.

J.: E agora?

Beatriz: eu vou fazer três equação.

J.: Quais?

Beatriz: x + y que é igual a 50.

J: por quê?

Beatriz: *por que é o da menina que é 50 mais o do menino. E z + x que é igual a 29. Que é o do cachorro com a menina que dá 29. E z + y que é igual a 35. Que é o do cachorro com o do menino que dá 35.*

J.: muito bem. Poderia fazer? Saberia me dizer que tipo de equação é essa?

Beatriz: *linear.*

J.: por quê?

Beatriz: *por que tem mais de uma letra para calcular.*

J.: como você vai resolver essas três equações?

Beatriz: *juntas.*

J.: como?

Beatriz: *formando um sistema.*

J.: você já estudou sistema?

Beatriz*:* *já.*

J.: sabe resolver sistema?

Beatriz: *vou tentar. Aprendi o ano passado.*

J.: pode perguntar se você quiser.

Beatriz: *aqui eu vou pegar o da menina mais o menino que deu 50. Ai eu posso somar as três, é? (referindo-se às equações)*

J.: o que você acha?

Beatriz: *por que x + y que é o da menina com o menino deu 50 e z que é do cachorro mais x que é da menina deu 29. Então vou juntar. Depois pego z do cachorro mais y do menino.*

J.: certo. Poderia fazer?

Beatriz: *sim. Eu estudei sistema mas não estou sabendo usar aqui.*

J.: Por quê? Alguma dúvida?

Beatriz: *por que tem três letras para calcular.*

J.: você falou que iria juntar as três equações. Você acha que isso ajuda você a resolver?

Beatriz: *sim. Vou fazer.*

J.: Poderia me explicar o que você fez Beatriz?

Beatriz: *eu peguei a primeira e a segunda equação. Multipliquei a primeira por menos um para eliminar x e agora sobrou z + y que é igual a 79.*

J.: e agora?

Beatriz: *agora vou juntar essa equação que eu achei com a terceira equação do sistema para ver se dá certo.*

J.: qual é a terceira equação do sistema?

Beatriz*: z + y igual a 35.*

J.: O que houve?

Beatriz: *Eita, eu acho que aqui não daria 79, por que eu esqueci de colocar o menos no 50. Vou calcular de novo. Deu 21. Vou substituir 79 por 21.*

J.: Ok. Você acha que esse modo de fazer foi mais fácil do que o primeiro?

Beatriz: *Não é muito fácil também, mas eu me esqueci um pouco. Mas dá certo também.*

J.: Você gosta de usar as "letras" pra resolver problemas?

Beatriz: *eu gosto. Acho fácil. Eu encontrei a mesma resposta da primeira. Mesma coisa.*

J.: que conteúdos de Matemática você utilizou para resolver esse problema?

Beatriz: *soma, subtração e divisão e no outro eu usei sistema.*

TRANSCRIÇÃO DA ENTREVISTA SEMIESTRUTURADA COM A ALUNA JÚLIA

Estudo de Caso 2

1º MOMENTO

Essa Entrevista foi realizada em 07 de junho de 2016, às 14 horas e 30 minutos na cidade de Afogados da Ingazeira - PE com a aluna do 3º Ano do Ensino Médio, turma objeto de nossa pesquisa. A aluna é identificada pelo pseudônimo de **Júlia** enquanto que a letra **J** identifica a professora pesquisadora

J.: Júlia, como são suas aulas de Matemática?

Júlia: *Bem... são ... é, a pessoa consegue aprender muito. É, cada dia que se passa coisa nova, por que sempre aparece uma coisa a mais na Matemática, você nunca vai saber tudo que aparece. É cheia de dúvidas.*

J.: você gosta de Matemática?

Júlia: *Gosto.*

J.: Nas aulas de matemática você costuma resolver problemas ou fazer exercícios?

Júlia: *Os dois*

J.: Saberia me explicar quando você resolve problemas?

Júlia: *Acho que o problema é tipo uma questão...resolução de uma questão que tem um desafio. Já o exercício é o conjunto de todas as questões que tem pra fazer, todos os problemas...*

J.: Explique melhor sobre quando você acha que está resolvendo um problema?

Júlia: Quando você chega a uma questão que tem como um desafio, que você tem que entender a questão pra poder conseguir desenvolver toda aquela conta pra chegar a uma resposta exata.

J.: E o exercício?

Júlia: *Pra mim é como se fosse o conjunto de todos os problemas quando chega ao ponto de você responder as questões em geral. O exercício é toda atividade.*

J.: Você costuma fazer perguntas nas aulas de Matemática?

Júlia: *Quando eu não entendo sim.*

J.: Em que momento da aula você faz mais perguntas?

Júlia: *Na hora da explicação se me vier alguma na cabeça ou na hora da resolução de alguma conta que as vezes aparece na hora que você tá resolvendo, você não sabe como...*

J.: Você se sente à vontade para fazer perguntas nas aulas?

Júlia: *Sim.*

J.: Gosta mais de perguntar ao professor ou a seus colegas?

Júlia: *Geralmente é assim, quando já tá resolvendo algum problema ao professor. Ai se não tiver como ou se for uma coisa mais simples que eu não esteja lembrada ai pode ser a um colega.*

J.: Por que você gosta mais de perguntar, as vezes, ao professor?

Júlia: *Por que primeiro o professor vai explicar que ele já sabe bem, já sabe mais o que tá ensinando e se você perguntar a ele e ele vai saber explicar desde o início e caso for a um aluno, é... pode ser que a explicação dele pode até me ajudar mais, possa ser que eu entenda mais ele. Mas o professor com certeza vai saber mais sobre o assunto.*

J.: Mesmo assim, você gosta de perguntar a seus colegas?

Júlia: *As vezes sim, por que as vezes agente não entende o método do professor e entende o do aluno.*

J.: Você pensa que fazer perguntas nas aulas de Matemática é importante?

Júlia: *É, você tira dúvidas e se você não perguntar numa prova como é que você vai se virar*

J.: Por que você acha importante? Só para tirar dúvidas?

Júlia: *É você tira a dúvida, você completa o que você já sabe e quando chegar mais na frente que você precisar você já vai tá sabendo, não Vai tá com a dúvida ainda.*

J.: Você prefere perguntar a seu colega ou ao professor? no caso a atender suas perguntas?

Júlia: *O professor. Na hora da atividade eu gosto mais de perguntar como é ao professor. Só se eu não entender ai eu tento outra opção.*

J.: E que perguntas você faz mais nas aulas de Matemática? Você pergunta sobre o que?

Júlia: *Algumas dúvidas sobre o assunto, por exemplo se eu não explicar... se eu não souber de onde um número veio ou então que fórmula usar, qualquer coisa assim, ai eu pergunto.*

J.: Você pergunta sobre algum assunto que você já estudou?

Júlia: *Algum assunto não, mas se o assunto tiver haver com o que eu estou fazendo e eu não lembrar mais de como foi ai eu sim eu tento procurar o professor pra eu saber como.*

J.: Você acha que ajuda quando você faz perguntas

Júlia: *Sim*

J.: Por que?

Júlia: *Por que se eu tiver uma dúvida de como agir e de como resolver naquela hora eu vou ter que perguntar ou se não como é que eu vou chegar ao resultado.*

J.: E perguntar a seus colegas ajuda?

Júlia: *Ajuda*

J.: Por que?

Júlia: *Por que assim, como eu pergunto ao professor também as vezes o professor não está na turma ou está em outro horário e eu não tenha contato com o professor ai eu posso ir lá e perguntar se ela já fez, se algum aluno já fez, como ela resolveu, se ela entendeu ai ajuda.*

J.: E você considerar isso importante? Essas respostas que eles dão também são importantes?

Júlia: *Sim por causa que acho que na sala você tem que se "introsar" com todo mundo, tem que compartilhar também conhecimento.*

J.: Você está estudando ou já estudou um assunto de Matemática chamado sistema de equações lineares?

Júlia: *Já*

J.: Lembra desse assunto? Poderia me explicar do ele trata?

Júlia: *Bem assim eu só sei que o sistema de equações a pessoa vai trabalhar com equações do primeiro grau eu acho e você tem que desenvolver a partir de uma as outras duas ou três ... a partir de uma você tem que desenvolver as outras a partir dela*

J.: E com quantas equações você já trabalhou estudando esse assunto?

Júlia: *Duas... três.*

TRANSCRIÇÃO DO DIÁLOGO ENTRE PROFESSORA PESQUISADORA E JÚLIA DURANTE A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA ALGÉBRICO

RESOLUÇÃO DO PROBLEMA ALGÉBRICO

Caso 2

2º MOMENTO

O segundo momento foi realizado no dia 20 de junho de 2016, às 13h e 58 minutos na cidade de Afogados da Ingazeira – PE com a aluna do 3º Ano do Ensino Médio identificada pelo pseudônimo de **Júlia**. A letra **J** identifica a professora pesquisadora.

J.: Apresento a tarefa a Júlia

Júlia: *Tá. Deixa eu ver*

J.: Você compreendeu o problema?

Júlia: Eu acho que tem que juntar esses dois números ... Deixa eu ver se é assim. 29 mais 35 igual a 64 menos 50, ai dá 14.

Júlia: *Isso é um cachorro?*

J.: Sim

Júlia: *Acho que ele pesa 14, o cachorro. Deixa eu ver: 29 , 35... é, acho que não é isso não. Vou fazer a conta (ela ri)*

J.: Tudo bem. Pode fazer

Júlia: *É não vai ser isso.*

J.: Por que quando você olhou para o problema foi logo fazendo a conta?

Júlia: *Por que eu já fui prestando atenção qual o número que estavam no lugar...*

J.: E você compreendeu o problema?

Júlia: *Mais ou menos*

J.: O que foi que faltou pra você entender

Júlia: *Por causa que eu fui tentar resolver primeiro por que queria saber quanto esses dois davam (apontando para as duas primeiras balanças) o menino e o cachorro e* *saber quanto tirar do número da menina e o menino sozinhos (apontou para última balança).*

J: Perguntei a Júlia, se as figuras ajudaram ela a tomar essa decisão

Júlia: *Sim.*

J: Poderia me explicar o que entendeu do problema?

Júlia: *É pra descobrir o peso de cada um dos indivíduos abaixo.*

J: E quantos são?

Júlia: *Quatro. Não mas aqui ... esses é o mesmo desse?*

J: O que você acha?

Júlia: *Então no caso é três.*

J: Saberia explicar o que tem em comum entre as balanças e os indivíduos que estão sendo pesados?

Júlia: *O ponteiro? parece um relógio, não é? Deixa eu ver.*

J: As informações do problema ajudam você a entender sobre o que está sendo perguntado?

Júlia: *Logo de princípio não. Quando lê logo não.*

J: Por quê? Falta alguma coisa?

Júlia: *É por causa que ...assim, eles dão o peso em conjunto deles. Não dão de nenhum separado. Ai deixa mais difícil.*

J: Mas o que acontece com as pessoas nas balanças?

Júlia: *Elas ficam de forma diferentes.*

J: Diferente como?

Júlia*: Primeiro elas estão em pé os dois meninos, ai depois quando ela está com o cachorro ela já fica abaixada...*

J: E isso tem haver com o peso?

Júlia: *Não sei. Acho que sim. Não sei. Acho que não...*

J: Gostaria que você observasse mais as pessoas nas balanças

Júlia: *Elas estão pesadas juntas e depois cada uma com o cachorro.*

J: Certo. Então vamos ver como eles estão sendo pesados

Júlia: *Primeiro o menino com a menina, depois a menina com o cachorro e depois o menino com o cachorro.*

J: E em relação aos valores expressos nas balanças?

Júlia: São diferentes.

J: Como você vai fazer para descobrir o peso de cada um? Sente alguma dificuldade em iniciar o problema? Qual seria?

Júlia: Queria saber o peso de um deles. Ai ficaria melhor.

J: Mas já que você não tem, o que vai fazer agora?

Júlia: Não sei. Eles estão separados. Ah, cada um foi pesado duas vezes.

J: Como percebeu isso?

Júlia: Como eles foram pesados das vezes?

J: sim

Júlia: No desenho. O menino, a menina e o cachorro. Cada um foi pesado duas vezes. A menina com o cachorro e o menino com o cachorro novamente...

J: E agora? Isso tem algum significado em relação aos pesos?

Júlia: *Que é o dobro?*

J: E agora?

Júlia: *Soma-los .... 29 mais 35 dá 64, mais 50...*

J: Esse resultado significa o que?

Júlia: *Que é o valor duas vezes dos pesos. No caso é o valor da soma deles.*

J: E agora? Se esse valor é a soma deles duas vezes, como ´podemos achar a soma correspondente a apenas um valor?

Júlia: *Dividir por dois? No caso dá.... 57.*

J: Esse resultado pode ajudar você no problema a comparar e descobrir o peso de algum deles?

Júlia: *Sim, por causa de que se os dois meninos pesa 50. Ai 57... no caso 57 é o valor e os dois meninos pesa 50, o cachorro vai pesar 7?*

J: O que você acha?

Júlia: *Pesa 7. O peso do cachorro.*

J: E agora?

Júlia: *Só é dos 29 tirar os 7 do cachorro e fica 22. No caso a menina pesa 22. E o menino com o cachorro pesa 35, menos os 7 quilos do cachorro, deixa eu ver, 28. Que é o menino. Só pra garantir vamos somar os valores. (depois de somar os pesos encontrados) deu 57. Então, o cachorro pesa 7, a menina 22 e o menino 28.*

J.: Certo. Você saberia resolvê-lo de outro modo?

Júlia: *Humm, não. Deixa eu ver... só se eu usasse como eu usei da primeira vez o resultado e depois analisar que ele repetia, dividia os 14 pelos 2 que no caso seria o peso do cachorro.*

J.: Poderia fazer?

Júlia: *Sim. 29 mais 35 que daria 64. Menos 50. Que seria igual a 14. Como o cachorro foi pesado duas vezes, eu divido por dois ai dá 7.*

J.: Você é rápida? Gosta de fazer rápido?

Júlia: *É por que seu eu fizer devagar eu "perdo" o foco.*

J.: Certo

Júlia: *Ai agora é só tirar igual a outra conta: 29 – 7 que é igual a 22 que é o peso da menina. E 35 meno 7 que é igual a 28 que é o peso do menino. Poderia usar a mesma fórmula também somar os valores da menina com o cachorro e o menino com o cachorro, que daria 64, menos os 50 que é do menino com a menina juntos. Daria 14, ai os 14, como o cachorro foi pesado duas vezes, é, seria dividido por dois, que daria 7, que é o peso em quilos do cachorro. Aí pegava o peso da menina com o cachorro menos o 7. E o do menino como o cachorro menos os 7 do cachorro.*

J.: Você usou as operações, você saberia fazer de outro modo?

Júlia: *Não, acho que não. Em minha cabeça agora não veio nada. Deixa eu ver...*

> *Essa semelhança da balança com o relógio me deixa meio assim... fico pensando*
>
> *Como uma equação? três x? No caso ficaria, como as três pessoas seria o menina, a menina. A menina seria x, o menino y e o cachorro z?*

J.: E agora?

Júlia*: Eu acho que se a menina aparece duas vezes, ai pode ser dois x pra cada, ai o menino também?*

J.: Vamos pensar se daria certo assim. Observe cada balança e verifique se você poderia colar dois x em cada uma?

Júlia: *X + y = 50? Ai a outra no caso seria x + z = 29 e a outra y + z = 35.*

J.: Não é possível colocar 2x?

Júlia: *Não. Só tem um de cada na balança*

J.: E agora? Como vamos descobrir o peso de um deles?

Júlia: *Um sistema de equação?*

J.: Como? Quantas equações?

Júlia: *Três.*

J.: Quais?

Júlia: *No caso eu formo o sistema?*

J.: O que você acha?

Júlia: *Três equações.*

J.: Você saberia resolver esse sistema?

Júlia: *Sim. Eu tô tentando lembrar.*

J.: Você me disse que já estudou um assunto assim

Júlia: *É esse assunto que eu tô pensando. Tô tentando lembrar. Tem que pegar uma... no caso se fosse um exemplo, x igual a 50 menos y...*

J.: E agora?

Júlia: *Eu acho que no caso seria ou a primeira com a segunda ou a terceira.*

J.: Você está querendo dizer que vai comparar uma equação com a segunda ou a terceira?

Júlia: *Sim. Por que seria x igual a 29 menos z. Eu acho que só pode substituir na primeira por que só tem x na primeira. A terceira não tem x. Ai no caso...*

J.: E agora?

Júlia*: Eu coloco as duas assim?*

J.: O que você acha? E agora?

Júlia: *Só é fazer a substituição do x do todo de x, do valor de x, assim muda a equação pelo valor da primeira.*

J.: Poderia fazer?

Júlia: *No caso x seria a do 29 menos z mais y igual a 50. Tem um problema. Tem duas letras. Nesse caso, pode usar a terceira?*

J.: Sim. E agora? Dá pra fazer? Facilitou?

Júlia: *Sim. Vou pensar um pouco.*

J.: O que houve?

Júlia: *Não sei.*

J.: Você colocou o x em função do z. Será que assim você consegue encontrar algum valor para x ou z?

Júlia: *Acho que não.*

J.: E agora?

Júlia: *Continua as três letras. Então, vou começar de novo com a primeira equação que tem x.*

J.: Certo.

Júlia: *Vou multiplicar por (-1) pra colocar o sinal oposto.*

J.: Certo.

Júlia: *No caso o y seria eliminado. 50 menos 29 fica 21. Entendeu?*

J.: Pode continuar que eu estou entendendo. No caso essa é a segunda equação agora?

Júlia: *Sim. Agora pego a terceira equação x + z.*

J.: E agora?

Júlia: *fica x e x com z.*

J.: E agora?

Júlia: *Tira o z.*

J.: gora nós temos novamente três equações. Qual está mais fácil de resolver?

Júlia*: A terceira.*

J.: Poderia fazer?

Júlia: *Sim.*

J.: Poderia explicar o que você fez?

Júlia: *Eu peguei a última equação e achei z que é 7 o peso do cachorro. Substitui na segunda equação o z e encontrei y que é o peso do menino que é 28. E peguei o y e substitui na primeira equação, achei 22 que o peso da menina. E foi assim... é muita conta. Dá dor de cabeça.*

J.: Achou difícil?

Júlia: *É mais fácil da primeira.*

J.: Por quê?

Júlia*: A primeira você interpreta mais. A dá equação pode se tornar até mais fácil por que você já vai sabendo como fazer, mas tem muita troca de equação, ver qual é que cabe melhor e a conta fica grande.*