UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ADRIANO ALVES DA SILVEIRA

ANÁLISE COMBINATÓRIA EM SALA DE AULA: UMA PROPOSTA DE ENSINO-APRENDIZAGEM VIA RESOLUÇÃO, EXPLORAÇÃO E PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS

CAMPINA GRANDE
2016

ADRIANO ALVES DA SILVEIRA

ANÁLISE COMBINATÓRIA EM SALA DE AULA: UMA PROPOSTA DE ENSINO-APRENDIZAGEM VIA RESOLUÇÃO, EXPLORAÇÃO E PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, da Universidade Estadual da Paraíba, área de concentração em Educação Matemática, na linha de pesquisa em Metodologia e Didática, em cumprimento à exigência para a obtenção do grau de mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Silvanio de Andrade

CAMPINA GRANDE
2016

S587a Silveira, Adriano Alves da.

Análise combinatória em sala de aula [manuscrito] : uma proposta de ensino-aprendizagem via resolução, exploração e proposição de problemas / Adriano Alves da Silveira. - 2016.

234 p. : il. color.

Digitado.

Dissertação (Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2016.

"Orientação: Prof. Dr. Silvanio de Andrade, Departamento de Matemática".

1. Análise combinatória. 2. Resolução de problemas. 3. Exploração de problemas. 4. Proposição de problemas. 5. Matemática - proposta didática. I. Título. 21. ed. CDD 371.3

ADRIANO ALVES DA SILVEIRA

ANÁLISE COMBINATÓRIA EM SALA DE AULA: UMA PROPOSTA DE ENSINO-APRENDIZAGEM VIA RESOLUÇÃO, EXPLORAÇÃO E PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, da Universidade Estadual da Paraíba, área de concentração em Educação Matemática, na linha de pesquisa em Metodologia e Didática, em cumprimento à exigência para a obtenção do grau de mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Aprovado em 06 / outubro / 2016

Silvanio de Andrade

Prof. Dr. Silvanio de Andrade
Orientador – UEPB

Lourdes de la Rosa Onuchic

Profa. Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic
Examinadora – UNESP

Cibelle Assis

Profa. Dra. Cibelle de Fátima Castro de Assis
Examinadora – UEPB

Dedico este trabalho aos meus pais, Ozildo Alves da Silveira (*in memorian*) e Maria da Penha da Silva Duarte, e ao meu primo Evaldo Barbosa de Lima (*in memorian*).

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter me guiado e de por estar sempre comigo diante da realização deste sonho.

Aos meus pais, Ozildo Alves da Silveira (*in memorian*) e Maria da Penha da Silva Duarte, por me incentivarem e por ser a razão de todas as coisas boas que acontecem em minha vida.

Ao meu orientador Dr. Silvanio de Andrade, que sempre teve uma palavra de apoio diante das dificuldades e dando direcionamento a esta pesquisa. Obrigado pela paciência para comigo, e por estar sempre à disposição a fim de tornar este trabalho realidade.

Aos membros da banca examinadora Profa. Drª. Lourdes de la Rosa Onuchic e Profa. Drª. Cibelle de Fátima Castro de Assis por aceitarem o meu convite e pelas devidas contribuições que foram propiciadas ao fim deste trabalho.

Aos professores do Mestrado em Ensino de Ciência e Educação Matemática da UEPB, em especial, Dr. Silvanio de Andrade, Drª. Cibelle de Fátima Castro de Assis, José Joelson Pimentel de Almeida, Prof. Dr. José Lamartine da Costa Barbosa, Dr. Rômulo Marinho do Rêgo, Prof. Dr. John Andrew Fossa e Drª. Filomena Moita.

Aos colegas do Grupo de Estudo e Pesquisa de Educação e Pós Modernidade (GEPEP), pelas discussões que contribuíram para nossa pesquisa.

Às minhas sobrinhas Gerlane Duarte, Dayana Duarte, Daniela Duarte e Ivam Junior e aos meus irmãos Erivam Duarte, Ivam Duarte, ao meu primo Evaldo Barbosa (*in memorian*).

Aos meus amigos que sempre me incentivaram como: Marcelo Cruz, Jorge de Assis, Sandro Onofre, Lydia Maria, Flávia Bezerra, Ayla Gabriela, Marcos Petucci, Jaciele Alves, Eduardo Andrade, Bruno Francisco, Simone Patrício, Alexandre Lins e Anaira Kaleo.

Aos meus amigos de turma que me ajudaram diante das dificuldades encontradas durante o curso, em especial: Paulo Henrique, Rônero Márcio, Luciana Maria, José Márcio, Gisane Fagundes e Estevão Luis.

A toda direção da escola, em especial ao Diretor Luiz Antônio e ao professor Josildo Garcia por nos confiar a sua turma para realização desta pesquisa.

Aos alunos do 2ª B da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Agenor Clemente dos Santos do ano letivo de 2016.

Como também aos professores que participaram dessa pesquisa.

Por fim a todos que contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho.

Para descobrir todos os fenômenos que deseja, basta ao sábio três coisas: pensar; pensar; pensar.

Isaac Newton

RESUMO

A presente pesquisa analisa como uma abordagem em sala de aula via Resolução, Exploração e Proposição de problemas pode contribuir/potencializar com o ensino-aprendizagem de Análise Combinatória. Foi realizada uma revisão de literatura com o intuito de compreender as contribuições de outros pesquisadores acerca do tema pesquisado, para que se pudesse perceber o que é possível aprofundar e acrescentar para a comunidade científica, no que diz respeito ao processo de ensino-aprendizagem da Análise Combinatória. Além disso, foi realizada uma entrevista com professores de Matemática, com o intuito de conhecer as suas ideias acerca do ensino-aprendizagem de Combinatória e, posteriormente, perscrutar até que ponto elas poderiam colaborar a planejar uma sequência de atividades. A pesquisa foi empreendida segundo uma abordagem qualitativa, visando buscar significados, interpretar e compreender as informações obtidas. A modalidade de pesquisa pode ser caracterizada como pedagógica, segundo a qual o professor é o pesquisador de sua própria sala de aula (LANKSHEAR E KNOBEL, 2008). A Metodologia de ensino-aprendizagem escolhida para trabalhar em sala de aula foi a de resolução, exploração e proposição de problemas, desenvolvida com uma sequência de atividades em uma turma do 2ª ano do Ensino Médio de uma escola pública na cidade de Alagoinha-PB. Durante a intervenção, o presente pesquisador agiu como professor-pesquisador, trabalhando em sala de aula como professor regente, dando autonomia aos alunos na construção das ideias essenciais de Combinatória, de modo que o autor agiu como mediador e incentivador. Os dados foram levantados durante as aulas através das observações e registros dos materiais utilizados pelos alunos, bem como de gravação sonora. Foram realizados 21 encontros, totalizando 25 aulas, cada aula com duração de, no máximo, 45 minutos. A sala foi organizada em grupos de três alunos e, em alguns casos, em duplas, com o intuito de se realizar um trabalho cooperativo e colaborativo, onde se considerou importante, nesse processo, o respeito mútuo entre eles, respeitando as ideias levantadas na busca da solução dos problemas. Os resultados da pesquisa evidenciaram que através da abordagem via Resolução, Exploração e Proposição de problemas foi possível acompanhar o crescimento dos alunos, que criaram suas próprias ideias para resolver os problemas, e, consequentemente, encontraram múltiplas estratégias de resolução deles; posteriormente, justificam suas soluções, participando efetivamente da construção do seu conhecimento. Além disso, os alunos engajaram-se em atividades de exploração matemática que lhes possibilitaram a apreensão de ideias essenciais de Análise Combinatória, como também assumiram o papel de investigadores em sala de aula, fazendo generalizações, formulando novos problemas e, em seguida, os resolvendo. De onde se conclui que tal metodologia permitiu um aprendizado com mais compreensão, potencializando o aluno para resolver problemas de Análise Combinatória com foco não apenas na busca da solução do problema, mas no processo da resolução e podendo ir muito além, como a realização de um trabalho de proposição e exploração de problemas.

Palavras-chave: Ensino-Aprendizagem de Matemática. Análise Combinatória. Sala de Aula. Resolução, Exploração e Proposição de Problemas.

ABSTRACT

This research analyses how an approach in the classroom via Problem Solving, Exploration and Posing can potentialize the teaching and learning of Combinatorial Analysis. A literature review was performed aiming to understand the contributions of other researchers on the researched theme, so that it could be possible to realize what is possible to deepen and add for the scientific community, regarding the teaching and learning process of the Combinatorial Analysis. Besides this, an interview with mathematics teachers was performed, aiming to know their ideas on teaching and learning of Combinatory Analysis and, afterwards, scrutinize until where they could help to plan a sequence of activities. The research was conducted according to a qualitative approach, aiming to search meanings, interpreting and comprehend the information obtained. The modality of research can be characterized as teacher research; according to which the professor is the researcher of his or her own classroom (LANKSHEAR AND KNOBEL, 2008). The teaching and learning Methodology chosen to work in the classroom was the one of the problem solving, exploration and posing, developed with a sequence of activities in a group of the 2nd year of Secondary School of a public school in the city of Alagoinha-PB, Brazil. During the intervention, this researcher acted as a researcher teacher, working in the classroom as a regent teacher, giving autonomy to the students on the construction of the essential ideas of the Combinatory Analysis, in such a way that the author acted as a mediator and instigator. Data were collected during the lessons through observation and records of the materials used by the students, as well as sound recording. Twenty-one meetings were performed, totaling 25 lessons, each lesson lasting, at most, 45 minutes. The classroom was organized in groups of three students and, in some cases, in pairs, in order to carry out a cooperative and collaborative work, where it was considered important, in this process, the mutual respect among them, respecting the ideas arisen on the search of the problem solution. The results of the research highlighted that through the Mathematics teaching and learning approach via Problem Solving, Exploration and Posing it was possible to monitor the growth of the students, who created their own ideas to solve the problems, and, consequently, found multiple strategies for solution of them; posteriorly, justify their solutions, participating effectively of the construction of their knowledge. Besides this, the students engaged in activities of mathematical exploration, which enabled the comprehension of the essential ideas of Combinatorial Analysis, as well as assuming the role of investigators in the classroom, generalizing, formulating new problems and, afterwards, solving them. From which it follows that such methodology allows learning with more comprehension, strengthening the student to solve problems of Combinatorial Analysis with focus not only on the search of the problem solution, but also on the process of the solution and being able to go far beyond, like the performance of a work of problem posing and exploration.

Keywords: Teaching and Learning of Mathematics. Combinatorial Analysis. Mathematics Classroom. Problem Solving, Exploration and Posing.

.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 PALAVRAS INICIAIS SOBRE O PRESENTE ESTUDO

O ensino e a aprendizagem da Matemática atualmente vêm sofrendo algumas mudanças no que diz respeito aos conteúdos que devem ser trabalhados em sala de aula. Deste modo, é preciso evidenciar a importância dos conceitos matemáticos e, sobretudo, questionar-se a respeito dos conhecimentos que serão necessários para que os alunos resolvam problemas do seu cotidiano. Assim, o professor deve ser cauteloso na escolha dos conteúdos a serem ministrados na sala de aula.

É comum nos depararmos com situações que necessitam do conhecimento dos conteúdos de Análise Combinatória. Isso se constata desde os tempos antigos, quando, por exemplo, as primeiras atividades matemáticas da humanidade estavam relacionadas com a contagem direta dos objetos de um conjunto.

A Análise Combinatória pertence ao bloco de conteúdos Análise de dados e Probabilidade que deve ser discutido durante todos os anos de escolaridade do Ensino Básico. No entanto, este conteúdo se desenvolve ainda muito timidamente, no ambiente escolar, apesar de sua potencialidade, de trabalhar, de forma eficaz, com algumas competências exigidas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+) (BRASIL, 2002) de Matemática, tais como: representação; leitura; investigação e compreensão; capacidade de enfrentamento e resolução de situações problemas, dentre outras.

Os PCN (1997) apontam que os conceitos iniciais de Análise Combinatória devem ser discutidos no Ensino Fundamental. No entanto, o ensino da Combinatória só começa a ser discutido na maioria das instituições escolares a partir do 2° ano do Ensino Médio.

Desse modo, o interesse por esse tema partiu de algumas lacunas deixadas quando o presente autor ainda era aluno da Educação Básica, época em que não houve qualquer contato com o estudo de Análise Combinatória. Por esse fato, em nosso Trabalho de Conclusão de Curso (TCC), realizamos uma pesquisa para sabermos como estava ocorrendo o estudo de Combinatória em algumas escolas públicas estaduais da Paraíba.

Os resultados da pesquisa mostraram que a Combinatória foi deixada de lado pelos docentes daquelas instituições durante o ano letivo de 2013. Os resultados nos motivaram a dar prosseguimento à pesquisa, visto que achamos necessário contribuir com o ensino-aprendizagem desse tópico matemático.

Deste modo, é preciso entender as dificuldades encontradas pelos professores acerca do estudo deste tópico. Com isso, inicialmente, nos propusemos a investigar, por meio de uma entrevista semiestruturada, as ideias dos professores acerca do ensino-aprendizagem da

Combinatória. As informações coletadas ensejaram modificações na elaboração da sequência de atividades proposta por nós, para trabalhar Análise Combinatória em sala de aula, além de trazer algumas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Combinatória.

Diante do que foi exposto até o momento, elegemos, como problemática de estudo de investigação, o seguinte problema de pesquisa: Como uma abordagem em sala de aula via Resolução, Exploração e Proposição de problemas pode contribuir/potencializar com o ensino-aprendizagem de Análise Combinatória?

Nosso objetivo é analisar como uma abordagem em sala de aula via Resolução, exploração e proposição de problemas pode contribuir/potencializar com o ensino-aprendizagem de Análise Combinatória.

A pesquisa se situa numa abordagem qualitativa, visando buscar significados, interpretar e compreender as informações obtidas. Para D'Ambrósio (2006) a pesquisa qualitativa é o caminho que leva a escapar da mesmice. Lida e dar atenção às pessoas e às suas ideias, procura fazer sentido de discurso e narrativas que estariam silenciosas".

A modalidade de pesquisa pode ser caracterizada como uma pesquisa pedagógica, na qual o professor é o pesquisador em sua própria sala de aula. Este é um dos pontos de consenso sobre a pesquisa pedagógica, como também os autores Lankshear e Knobel (2008, p. 13) enfatizam outro ponto de vista de outros pesquisadores: "[...] a pesquisa pedagógica está confinada à investigação direta ou imediata das salas de aula e o principal pesquisador em qualquer trabalho de pesquisa pedagógica é o professor cuja sala de aula está sob investigação".

Conforme esses autores, uma das finalidades que em geral é compartilhada sobre pesquisa pedagógica é a de que ela pode contribuir, de forma demonstrável, para melhorar o ensino ou a formação dos alunos. Além disso, é por meio de sua própria pesquisa que os professores podem ficar atentos ao seu método de ensino, e detectar o que pode mudar em sua prática, visando a um bom rendimento dos alunos.

Por outro lado, Lankshear e Knobel (2008) contestam algumas das opiniões estritamente aceitas por alguns pesquisadores sobre a pesquisa pedagógica, pois discordam da visão corrente de quem é caracterizado como pesquisadores pedagógicos. Para eles, a pesquisa de professores não se resume apenas à observação direta ou imediata das salas de aula. Os pesquisadores Lankshear e Knobel (2008, p. 16) argumentam que:

> Os professores podem aprender muito, informando e orientando sua prática atual por meio de estudos de investigação histórica, antropológica, sociológica ou psicológica e por trabalhos teóricos conduzidos em outros locais e/ou em outras épocas. Esses

> podem ser estudos sobre política, comunidades, classe social, ambiente de trabalho, linguagens não-padronizadas, etc.

Além disso, Lankshear e Knobel (2008) apresentam outro ponto de vista que difere de outros pesquisadores, no que diz respeito ao fato de a pesquisa pedagógica ser definida em termos de professores pesquisando em suas próprias salas de aula. Os autores acrescentam que:

> [...] a pesquisa pedagógica pode ser realizada em salas de aula, bibliotecas, nos lares, em comunidades e em qualquer outro lugar onde se possa obter, analisar e interpretar informações pertinentes às orientações por um pesquisador enquanto professor. Ela pode ser realizada dentro de programas acadêmicos oficiais, ou como empreendimento individual, inteiramente autodirigido, ou ainda sob quaisquer arranjos semiformais que existam entre esses dois extremos. A pesquisa pedagógica pode envolver a observação empírica de salas de aula (a própria ou a de colegas), a reflexão sistemática documentada e sobre as próprias experiências ou o engajamento com textos e questões teóricas ou conceituais; pode usar pessoas, textos de manuais, materiais da internet, conjuntos de dados secundários, e outros tantos, como fontes de informação; finalmente, pode ser fundamentada em dados do presente ou do passado e até mesmo em dados relacionados ao futuro. Seu escopo e variedade potenciais são enormes. (LANKSHEAR E KNOBEL, 2008, p. 18).

O fato é que a pesquisa pedagógica deve atender às preocupações dos professores sobre o que foi útil e relevante, buscando diferentes abordagens que questionam sobre temas que necessitam de estudos empíricos, e, posteriormente, selecionando informações que lhe promovam *insights* que permitam entender como e porque algo funciona, valorizando ainda o aspecto flexível, que possibilite a adaptação no funcionamento em outras circunstâncias e aplicação de outros casos, que gerem, ao fim, explicações, reflexões e conclusões sobre o que está pesquisando, independentemente de como ou do ambiente em que a pesquisa foi desenvolvida, promovendo, ao fim, contribuições para um ensino e uma aprendizagem de melhor qualidade nas salas de aula.

Realizamos, inicialmente, uma entrevista com os professores de Matemática, com o intuito de conhecer as ideias deles acerca do ensino-aprendizagem da Combinatória, e posteriormente ver até que ponto elas poderiam colaborar na elaboração da sequência de atividades. A entrevista foi gravada, com o intuito de coletar e selecionar as informações que achamos pertinente a nossa pesquisa. Participaram da pesquisa quatro professores de Matemática do Ensino Médio, que fazem parte do corpo docente da escola investigada.

A Metodologia de ensino-aprendizagem escolhida para trabalhar em sala de aula foi a de resolução, exploração e proposição de problemas, desenvolvida com uma sequência de atividades em uma turma do 2ª ano do Ensino Médio.

Em princípio, questionou-se onde seria desenvolvida a pesquisa. No entanto, já era claro que se deveria dar continuidade à pesquisa de conclusão de curso. Assim havia três opções que deveriam ser analisadas, de modo que a escolha seria feita com influência do público alvo que poderia contribuir, de forma significativa, com a presente pesquisa.

Foi escolhida uma turma do 2ª ano do Ensino Médio de uma Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio, localizada na cidade de Alagoinha-PB. A escolha se deu pelo fato de se terem obtido resultados interessantes no trabalho de conclusão de curso. Na verdade os resultados da pesquisa evidenciaram que as turmas dos três Municípios do Estado da Paraíba, no qual a pesquisa foi realizada, não haviam tido qualquer tipo de contato com Análise Combinatória, já que não apresentaram familiaridade com as ideias essenciais de arranjo, permutação e combinação simples. Em contrapartida o conhecimento existente dos alunos possibilitou a resolução bem sucedida de alguns dos problemas propostos pelo pesquisador. Os alunos da escola estadual do Município de Alagoinha-PB, tiveram o melhor desempenho, não só pela obtenção das respostas, mas pelo processo dos problemas, como: árvores de possibilidades, tabelas e o Princípio Fundamental da Contagem. Deste modo, achamos viável desenvolver a nossa pesquisa nesta escola, visto que observamos a presença de conhecimentos prévios dos alunos, onde este é um dos aspectos valorizados pela metodologia que utilizamos em sala de aula. É fato que os sujeitos que participaram dessa pesquisa não fizeram parte da anterior, no entanto, encontram-se no mesmo ambiente, com os mesmos professores.

Acredita-se que a escolha das atividades seja de fundamental importância para os fins da pesquisa, pois não só trará clareza diante do que se propôs a responder, como também tem como objetivo o ensino-aprendizagem de conceitos de Análise Combinatória**.**

No entanto, deve-se ter clara a ideia de que se deve propor problemas que não sejam necessariamente fáceis. Por outro lado, se os problemas forem muito difíceis de tal modo que os alunos – mesmo com os seus conhecimentos prévios e a mediação do professor – não consigam resolver, pode fazer com que a presente proposta passe despercebida no que diz respeito ao ensino-aprendizagem de Análise Combinatória.

A pesquisa teve início em 15 de fevereiro de 2016 e chegou ao término em 8 de abril do respectivo ano. Iniciamos a intervenção com 34 alunos, chegando ao fim, com 30 alunos. Foram realizados 21 encontros, totalizando 25 aulas, cada aula com duração de no máximo 45 minutos. A sala foi organizada em grupos de três alunos e, em alguns casos, em duplas, com o intuito de um trabalho cooperativo e colaborativo, onde se considerou importante, nesse processo, o respeito mútuo entre eles, respeitando as ideias levantadas na busca da solução dos problemas. A escolha dos grupos foi feita pelos alunos, podendo mudar de grupo se julgassem necessário. Inicialmente, cada aluno recebeu uma cópia do problema, sendo entregue ao fim da abordagem dele.

Na intervenção, o presente pesquisador agiu como professor-pesquisador, trabalhando em sala de aula como professor regente, dando autonomia aos alunos na construção das ideias essenciais de Combinatória, no qual o papel do pesquisador foi de mediador e incentivador.

Os dados foram levantados em sala de aula, através das observações e registros dos materiais utilizados pelos alunos. Fizemos uso de gravação, com o intuito de coletar o máximo de evidências possíveis, para que se pudesse ter mais clareza diante do que se propôs a investigar.

Defende-se, nessa proposta, a importância de se trabalhar em sala de aula via resolução, exploração e proposição de problemas de tal modo que se possa possibilitar ao aluno o desenvolvimento do pensar matemático, obtendo assim um aprendizado significativo na discussão de Análise Combinatória em sala de aula.

O presente trabalho está estruturado em seis capítulos:

No segundo capítulo, é apresentada a revisão de literatura de algumas pesquisas que discutiram o tema “Ensino-Aprendizagem de Análise Combinatória”, dando atenção ao enfoque que foi dado, levando em consideração seus objetivos, metodologias utilizadas, resultados obtidos, recomendações metodológicas ou caminhos para a nova pesquisa. A partir daí, buscou-se entender as contribuições dos pesquisadores para o estudo da Combinatória, de modo que foi destacado o que se pretende aprofundar em relação ao ensino-aprendizagem deste tópico matemático.

No terceiro capítulo, foram destacadas ideias relacionadas ao ensino-aprendizagem de Análise Combinatória, sugestões dos documentos oficiais acerca do estudo deste tópico, como também são apresentados aspectos relacionados à resolução, exploração e proposição de problemas.

No quarto capítulo, foi apresentada uma entrevista com quatro professores do Ensino Médio da escola investigada. Em seguida transcreveu-se a entrevista buscando compreender as ideias dos professores acerca do ensino-aprendizagem de Análise Combinatória, e, a partir daí, observou-se até onde se poderia selecionar e modificar a sequência de atividades para trabalhar em sala de aula o tópico “Combinatória”.

No quinto capítulo, trazemos as descrições da intervenção em sala de aula, seguida de comentários e a respectiva análise acerca dos resultados obtidos.

No sexto capítulo, temos as considerações finais sobre o presente estudo. Deste modo, retomamos a questão investigada, buscando elementos presentes em nossa intervenção, que possa está dando conta do que nos propusemos a responder, além de apontarmos caminhos futuros para novas pesquisas em Análise Combinatória.

2 REVISÃO DE LITERATURA

Este capítulo tem, como objetivo, compreender as contribuições de outros pesquisadores acerca do tema desta pesquisa, para que se possa perceber o que se pode aprofundar e acrescentar para a comunidade científica, no que diz respeito ao processo de ensino-aprendizagem de Análise Combinatória.

Nesse sentido, buscaram-se algumas pesquisas que dão diversos focos ao estudo de Análise combinatória (Atividades Investigativas, Comunicação Matemática, Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas e Resolução/exploração de Problemas). Com isso, foram trazidos os principais resultados dessas pesquisas com o intuito de ter um maior conhecimento sobre o tema desta pesquisa. Entre os pesquisadores que investigaram o estudo de Análise Combinatória, destacamos: Vargas (2009); Almeida (2010); Souza (2010) e Silva (2013).

Inicialmente, destacou-se a pesquisa de Antônio Fernando Vargas, que tem como título: “O Ensino-aprendizagem de Análise Combinatória através da Resolução de Problemas com Atividades Investigativas”. Trata-se da versão final de uma dissertação de mestrado defendia, no ano de 2009, na Pontifícia Universidade Católica (PUC) de Minas Gerais.

O trabalho está organizado em três momentos: primeiro, o Referencial Teórico, iniciando com a Resolução de Problemas, tomando como base as ideias de George Polya. O segundo, a Elaboração das Atividades Investigativas, tendo, como principal suporte teórico, João Pedro da Ponte, que apresenta a técnica de montagem destas. No terceiro, a aplicação destas atividades, também se baseando nos dois autores citados, além da metodologia utilizada durante sua investigação em sala de aula e, por fim, é apresentada a conclusão.

O autor elaborou, dentro de uma sequência didática de assuntos desse conteúdo programático, por meio da abordagem metodológica baseada nas construções de conceitos, definições, deduções de fórmulas e, principalmente, resolução de problemas.

O autor destaca, como objetivo central de sua pesquisa, propor e avaliar o ensino-aprendizagem, com uma sequência didática, de Análise Combinatória através da resolução de problemas usando atividades investigativas.

Para atingir o que pretendia com a pesquisa, o autor criou uma proposta com um conjunto de atividades para o processo de ensino e aprendizagem de Análise Combinatória, estruturadas com uma sequência didática de conteúdos, que busca a aprendizagem por etapas, privilegiando a compreensão dos conceitos e a operacionalização através dos cálculos numéricos antes de algebrizar.

As atividades selecionadas para trabalhar em sala de aula foram estruturadas com foco em dois pilares: a identificação e constituição de agrupamentos dos elementos de um conjunto e a contagem desses agrupamentos, a partir do estabelecimento das fórmulas matemáticas.

Para o autor, o processo Ensino-Aprendizagem de Análise Combinatória deve ser estruturado buscando focalizar os seguintes tópicos: 01 – A identificação e constituição de “agrupamentos” dos elementos de um determinado conjunto; 02 – A “contagem” desses agrupamentos a partir do estabelecimento de uma fórmula matemática, deduzida pelas propriedades dos agrupamentos usando instrumental de síntese: “fatorial”.

A Metodologia utilizada em sala de aula foi a de resolução de problemas dando ênfase em atividades investigativas e aplicação de uma sequência didática, pela qual o autor enfatizou as estratégias determinadas por Polya (1995[1]), nas suas quatro fases: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução dele e o retrospecto.

A presente pesquisa é de cunho qualitativo, pela qual a coleta dos dados foi realizada através de descrições de situações vivenciadas durante a aplicação das atividades, levando em consideração, como foram desenroladas situações-problema e a importância dos participantes para esse tipo de pesquisa.

Foram selecionadas e trabalhadas dez atividades investigativas com a duração média de quarenta e cinco minutos para cada aula. Participaram, da pesquisa, noventa e nove alunos da segunda série do Ensino Médio, dez professores de Matemática, que as realizaram isolada e individualmente e um professor de Química, pelo fato de não ter aprendido este conteúdo. Os alunos foram organizados em duplas ou, em outro caso, em tríade, pelo fato da impossibilidade de divisibilidade.

O autor conclui o trabalho trazendo alguns depoimentos dos alunos que foram selecionados e transcritos, levando em consideração duas categorias: Caderno de Atividades e Atividades investigativas, com o intuito de ter um pequeno relatório a respeito da nova metodologia de ensino-aprendizagem adotada.

Em relação ao Caderno de atividades, foram transcritos alguns depoimentos segundo os quais o novo método de ensino e aulas dinâmicas promoveu um maior interesse dos alunos, diante da dificuldade encontrada quanto ao ensino de Análise Combinatória, de modo que este foi minimizado pelo uso do caderno trabalhado de forma autônoma. Além disso, a utilização dele valorizou a aula expositiva convencional, levando a aprendizagem da matéria, proporcionando um trabalho em dupla que possibilitou uma disponibilidade maior do

---

[1] Originalmente publicado, em inglês, em 1944.

professor. Por fim, é apresentado que a utilização do caderno de atividades foi um meio de abordagem do conteúdo extremamente inovador que levou à aprendizagem do conteúdo de maneira satisfatória.

Para o autor, ficou evidente que é eficaz a metodologia da resolução de problemas, com esses modelos de atividades. Nesse sentido, foram transcritos alguns depoimentos dos alunos acerca das Atividades investigativas, que destacaram algumas ideias centrais, como: com estas atividades, os alunos afirmaram que puderam experimentar uma nova maneira de aprender Matemática; permitiu um trabalho em sala de aula que valoriza o aprofundamento do conhecimento instigando de modo a descobrir, com prazer, a solução das atividades propostas; além disso, as atividades investigativas apresentam o conteúdo de Análise Combinatória de uma maneira muito didática, proporcionando um trabalho que consistiu em investigar e deduzir as fórmulas, promovendo um aprendizado sem precisar decorar as fórmulas.

Os professores que participaram da pesquisa apresentaram opiniões e também sugestões de melhoramento das atividades propostas. Eles perceberam que existiu uma sequência lógica do assunto abordado, partindo de conceitos mais elementares para outros mais complexos. No entanto, notaram também que o autor da dissertação, insistiu muito no verbo imaginar. Assim, destacaram que em vez de imaginar, poderiam mostrar, ou seja, utilizar materiais concretos que facilitariam mais a compreensão por parte dos alunos.

O autor recomenda a utilização de materiais concretos em sala de aula, o que facilitaria a compreensão por parte dos alunos; e, além disto, os materiais são de fácil aquisição. Ele destaca que símbolos abstratos, como, por exemplos: algarismos, letras, números, entre outros, podem ser produzidos de papelão ou de tecido emborrachado e manuseados durante a socialização das atividades. Além de outros objetos, tais como: placas de veículos; escudos de times de futebol; volantes de loterias; bolas de isopor; jogos de dominó; baralhos; dados; entre outros, são disponíveis em lojas comerciais.

O autor destaca que os resultados obtidos através da investigação do ensino-aprendizagem de Análise Combinatória, levando em consideração as dificuldades encontradas tanto pelos alunos em relação à aprendizagem como pelos professores em ministrar esse conteúdo, devido à complexidade de seus conceitos, apontam que a mudança metodológica das aulas expositivas e do processo de ensino tradicional, tais como: definições formais, deduções de fórmulas e aplicações em exercícios e problemas, para investigações com atividades, se mostrou com maior desempenho didático, verificado após a aplicação das atividades, segundo os relatórios descritos pelos alunos.

A segunda pesquisa analisada, de mestrado, foi concluída em 2010, na Universidade Federal de Ouro Preto de Minas Gerais, da autora Adriana Luziê de Almeida, que tem como título: "Ensinando e aprendendo Análise Combinatória com ênfase na Comunicação Matemática: um estudo com o 2º ano do Ensino Médio".

O objetivo central da pesquisa foi investigar o potencial da Comunicação Matemática em uma proposta de Análise Combinatória, construída com base na resolução de situações-problema, para alunos do 2º ano do Ensino Médio.

Na revisão de literatura, a autora traz resultados dos estudos de alguns pesquisadores acerca de Análise Combinatória, como: Navarro-Pelayo (1991) e Batanero e Navarro (1991), Roa (2000), Roa e Navarro-Pelayo (2001).

Para a fundamentação teórica, em relação à Comunicação e Comunicação Matemática a autora destaca algumas ideias de Menezes (1999), Martinho (2007) e D'Antonio (2006). Além disso, são apresentadas ideias de Yackel e Cobb (1996) e Boavida (2005b), sobre argumentação nas aulas de Matemática, visto que ela se relaciona, de forma reflexiva, com o processo de comunicação.

Em relação à Metodologia em sala de aula, a autora desenvolveu e aplicou uma proposta de ensino de Análise Combinatória, fundamentada nos estudos sobre desenvolvimento do pensamento combinatório e um ambiente de estímulo à argumentação e discussão de situações-problema em pequenos e grandes grupos.

Esta proposta de ensino foi elaborada a partir da revisão de literatura acerca do ensino e aprendizagem de Análise Combinatória, no qual a autora tinha como finalidade identificar os principais obstáculos e formas de enfrentá-los, referentemente ao estudo desse tópico.

Almeida (2010) aponta que a Comunicação Matemática entre alunos e professores deveria ir além da mera troca de informações e, com isso, preconiza uma compreensão mais profunda dos conceitos relacionados à Análise Combinatória e que se deve estimular a argumentação e a expressão.

Para a autora, nem toda comunicação gera aprendizagem, entretanto, toda aprendizagem é produto de algum tipo de comunicação, que ocorre a partir da interação do indivíduo com um objeto ou sujeito. Assim foi criado um ambiente de aprendizagem nos qual os alunos foram estimulados a expor suas ideias, apresentar sugestões, argumentar, questionar e refletir. Desta forma, para que o ambiente seja favorável, é necessário valorizar a argumentação, no qual o aluno constrói o próprio conhecimento, a partir do que emite e do que recebe.

No entanto, para Almeida (2010), mais do que ensinar a um aluno como resolver problemas, oferecendo-lhe habilidades e técnicas, é necessário garantir o espaço de discussões para que possa aprender, consigo mesmo e com os outros. Deste modo, para que se promova a Comunicação Matemática, é necessário que os sujeitos proponham questionamentos entre si, oferecendo informações de modo que eles possam se apropriar do conhecimento.

Para autora, os resultados da pesquisa evidenciam que a maioria dos alunos participou com interesse da proposta e que, gradativamente, passou a se expressar mais e com maior segurança e propriedade sobre os conceitos estudados e alcançou uma compreensão mais profunda dos mesmos, desenvolvendo tanto o pensamento combinatório quanto a argumentação.

No entanto, a autora salienta que uma das maiores dificuldades enfrentadas pelos alunos, diz respeito à identificação do tipo de agrupamento, ou seja, se a ordem é importante ou não.

Ao fim da pesquisa, a autora notou que houve um significativo crescimento na compreensão dos conceitos e na resolução de problemas combinatórios, no qual a comunicação matemática foi fundamental para os bons resultados da proposta. Além disso, os dados da pesquisa sugerem que as discussões em pequenos e grandes grupos, quando realizadas de modo organizado e mediadas pelo professor, em um clima de respeito mútuo e estímulo à argumentação, trazem contribuições para o desenvolvimento do pensamento combinatório.

É importante destacar que uma das preocupações que norteou o seu trabalho em sala de aula, foi a possibilidade de contribuir de modo efetivo para a melhoria do ensino e da aprendizagem de Análise Combinatória. Assim a proposta de ensino construída gerou um produto educacional direcionado aos professores de Matemática – um livreto com a descrição completa e comentada das atividades realizadas.

A terceira pesquisa que analisamos é de mestrado, concluída em 2010, na Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, da autora Analucia Castro Pimenta de Souza, que tem como título: "Análise combinatória no ensino médio apoiada na metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas".

A autora destaca inicialmente que o seu interesse pela Matemática ocorreu desde a Educação Básica. Diante disso ela cursou Bacharelado e Licenciatura em Matemática, com o objetivo de aprofundar o conhecimento. No entanto, a autora ressalva que o seu interesse pela Educação Matemática surgiu com as dificuldades encontradas ao ministrar suas primeiras aulas. Assim, ela notou que era necessário um respaldo teórico e metodológico que pudessem contribuir para sua formação docente, proporcionando uma aprendizagem com significado e uma metodologia de ensino diferente da tradicional.

A autora salienta sua dificuldade na compressão dos conceitos relacionado à Análise Combinatória, visto que os professores que fizeram parte de sua formação básica, insistiam em um trabalho em sala de acordo com o modelo fórmula-aplicação, no qual as fórmulas não eram entendidas por ela. Com isso, a pesquisadora propõe uma abordagem alternativa que conduza os alunos a investigar e construir os conceitos relativos à combinatória.

Deste modo, a autora fez um curso de Especialização em Educação Matemática e participou do GTERP (Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas) Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, da UNESP de Rio Claro/SP, onde conheceu uma metodologia de ensino alternativa.

A autora desenvolveu uma monografia com o tema: “Análise Combinatória”, destacando que este sempre foi um conteúdo em que encontrava dificuldade, não conseguindo associar as fórmulas que se lhe apresentavam com os conceitos pertinentes a esse tópico matemático.

No mestrado, ela resolveu dar continuidade ao trabalho, realizando uma pesquisa como o mesmo tema, adotando como metodologia de trabalho para a sala de aula, a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

O objetivo central da pesquisa foi trabalhar a Análise Combinatória na sala de aula com os alunos, adotando a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da resolução de problemas.

Para fundamentação teórica em relação à Combinatória, a autora destaca algumas ideias de: Dossey (1991); Framework (1992); Gardiner; (1991); Morgado et al (1991); Domingues (1993); PCN-EM (Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio – Matemática). Em relação à Resolução de problemas; temos: Polya (1962); Van de Walle (2001); Dante (1989); Onuchic (1999); Gazire (1988); Schroeder & Lester (1989); Onuchic (2004); Jinfa Cai (2003) e o uso de documentos do NCTM – National Council of Teachers of Mathematics – USA (Conselho Nacional de Professores de Matemática dos Estados Unidos).

A autora aponta que os problemas iniciais podem ser elaborados com poucos elementos, através da solução intuitiva e da contagem direta, para destacar quantas e quais são as possibilidades nesse tipo de abordagem. Deste modo, os alunos vão observar que em alguns casos a contagem direta é impraticável, assim vão perceber certas regularidades para desenvolverem técnicas de contagem apropriadas, que generalizem as soluções. Para ela, eles perceberão que, ao contar ou fazer os agrupamentos através das técnicas de contagem, estes se diferenciam pela ordem e/ou pela natureza dos elementos dados no problema e entenderão a necessidade do uso de fórmulas, chegando à solução de modo mais rápido quando o número de elementos envolvidos nos agrupamentos for grande.

Durante a pesquisa, a autora enfatiza que considera importante trabalhar os seguintes conceitos: padrão; contagem; Princípio Fundamental de Contagem (ou Princípio Multiplicativo); permutação; combinação e arranjo.

A autora destaca, em sua investigação, a Matemática Discreta como um ramo da matemática do qual a Análise Combinatória faz parte, no qual ela percebeu o desconhecimento desse ramo matemático no nosso meio acadêmico. Ela destaca o que é Matemática Discreta, fala sobre sua importância, sua forma de ensino e de quando se deu sua inserção no currículo da matemática escolar.

A pesquisadora criou três projetos, adotando, para os três, esta Metodologia, no qual ela assumiu três posturas diferentes: como uma professora-pesquisadora, trabalhando em sua própria sala de aula, com seus próprios alunos; como uma pesquisadora, ministrando minicursos e oficinas de trabalho, em encontros de Educação Matemática, com professores, educadores matemáticos e alunos da Licenciatura em Matemática; e como uma pesquisadora que se apresentasse, em Congressos e Encontros de Educação Matemática, oferecendo suas próprias pesquisas, para conhecimento e divulgação delas, a outros pesquisadores, para discussão e análise.

Para o desenvolvimento da pesquisa, Souza (2010) adotou o modelo metodológico, apresentada por Thomas A. Romberg em seu artigo, de 1992, intitulado: “Perspectivas sobre o Conhecimento e Métodos de Pesquisa”. Romberg descreve dez atividades, organizadas em um fluxograma, que são distribuídas em três blocos: o primeiro bloco trata da identificação do problema, formado por quatro atividades: Identificar um Fenômeno de Interesse; Construir um Modelo Preliminar; Relacionar o Fenômeno de Interesse e o Modelo Preliminar com ideias de outros pesquisadores; e Levantar uma Pergunta ou conjectura. O segundo bloco propõe-se a resolver o problema levantado na pesquisa nele se tem duas atividades: Selecionar uma Estratégia Geral e Selecionar um Procedimento Geral de pesquisa. O terceiro e último bloco, trata da análise das informações obtidas, buscando tudo o que ficou evidente frente à questão ou conjectura levantada, terminando com as seguintes atividades: Coletar informações; Interpretar as informações coletadas; Transmitir os resultados para outros; e Antecipar a ação de outros.

A autora evidenciou, nos três projetos, que o trabalho em sala de aula, adotando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, proporcionou aos alunos uma aprendizagem com significado e compreensão. Ela destaca que essa metodologia é um meio de se aprender Matemática ao longo da resolução de problemas.

Souza (2010) também fez uma análise de doze livros didáticos, dispostos em ordem cronológica: livros das décadas de 40, 50, 60, 70, 90 e anos 2000. A autora adotou alguns critérios para análise dos livros, tais como: 1) Se ao trabalhar Análise Combinatória os autores partem ou não de problemas; 2) Se o livro didático motiva e sugere um trabalho colaborativo com os alunos; 3) Se a formalização dos conceitos de Análise Combinatória é feita antes do problema dado, durante a resolução do problema ou depois do problema resolvido; 4) Se o livro é um dos recursos didáticos que pode contribuir para o trabalho do professor em sala de aula.

A pesquisadora evidenciou que a maioria dos livros apresenta Análise Combinatória no modo tradicional de ensino. Ela enfatiza que, de início, os conceitos são definidos pelo professor, seguidos de alguns exemplos e com uma possível aplicação num problema a ser resolvido pelo professor, não permitindo a participação dos alunos na construção desses conceitos, uma vez que os problemas para os alunos resolverem são oferecidos somente no final do capítulo. Além disso, antes de um problema ser colocado para os alunos, a matemática necessária para resolvê-lo já é trabalhada pelo professor, com a apresentação das fórmulas para posterior aplicação, tendo o ensino totalmente centrado no professor.

A autora elaborou um questionário exploratório, para entrevistar um professor de matemática, atuante no Ensino Médio, efetivo na rede pública de ensino do Estado de São Paulo, com o intuito de coletar outras informações que, posteriormente, poderiam contribuir com a análise feita nos projetos, possibilitando a articulação entre os pressupostos teóricos do estudo. Ela destaca que os objetivos dessa entrevista eram o de evidenciar a importância do ensino de Análise Combinatória; descrever como esse conteúdo é trabalhado pelo professor e poder identificar as principais dificuldades que professor e alunos enfrentam ao trabalhar esse tópico matemático.

A autora afirma ter percebido que o professor trabalha o conteúdo Análise Combinatória para depois resolver problemas, e não através da resolução de problemas, enfatizando a aplicabilidade dos conceitos.

Para a autora, o trabalho em sala de aula nessa metodologia, possibilitou que os alunos utilizassem diversas estratégias como representações, através de tabelas, diagramas e listas organizadas. Essas ideias contribuíram para a construção dos conceitos envolvidos em Análise Combinatória. Ela afirma que mostrar o raciocínio combinatório, explorar o processo de contagem e o conceito de padrão foram passos importantes para a construção dos conceitos envolvidos em Análise Combinatória.

Ao fim da pesquisa, a autora destaca que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, trabalhando com Análise Combinatória, contribuiu para um trabalho significativo tanto para os alunos como para o professor.

Para ela, a metodologia de ensino adotada propiciou, aos alunos, a participação na construção dos conceitos de Análise Combinatória ao resolver um problema, como também proporcionou, aos participantes, o crescimento da aprendizagem.

Além disso, ela ressalta que a sua pesquisa pode colaborar para a formação do professor que, ao ler o seu trabalho, pode refletir sobre o que ocorreu além da sala de aula ao se trabalhar Análise Combinatória e, com sua prática, buscar um trabalho diferenciado.

O último trabalho analisado é do autor: Adeilson Pereira da Silva, com título: “Ensino-aprendizagem de análise combinatória através da resolução de problemas com um olhar para a sala de aula”, apresentado em 2013 como requisito para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática na Universidade Estadual da Paraíba – UEPB.

A pesquisa de Silva (2013) buscou traçar um mapeamento do ensino-aprendizagem de Análise Combinatória através da prática em sala de aula, cuja metodologia empregada de ensino-aprendizagem remeteu à resolução e exploração de problemas.

O autor afirma que suas pretensões com a pesquisa foi uma mudança em sua própria prática docente, como também avançar o campo da educação matemática no que diz respeito ao ensino-aprendizagem de Análise Combinatória em sala de aula.

A Metodologia de pesquisa é de cunho qualitativo, fazendo uso de observações, registros das aulas e materiais utilizados pelos alunos, na modalidade pesquisa pedagógica, que valoriza um olhar reflexivo para sua própria prática como professor-pesquisador.

O autor traz uma revisão de literatura fazendo o mapeamento das pesquisas de Sturm (1999), Esteves (2001), Sabo (2007), Souza (2010). A revisão de literatura apresenta uma breve descrição de algumas pesquisas que foram direcionadas para o Ensino Médio ou com profunda análise nas estruturas e organização do currículo de Análise Combinatória.

Ao fim da revisão de literatura, o autor destaca o delineamento da aula de Análise Combinatória traçado a partir das pesquisas. Ele percebeu que é dada uma ênfase em exercícios repetitivos sem compreensão dos métodos empregados.

Por outro lado, as pesquisas também indicam uma tentativa de mudança do atual panorama, colocando, como foco principal, o desenvolvimento do pensamento combinatório. Para fazer isso, deve valorizar a utilização de estratégias como o esquema da árvore das possibilidades, o Princípio Fundamental da Contagem, entre outros, desenvolvendo no aluno a formalização dos conceitos a partir de um caminho intuitivo.

Nesse sentido Silva (2013) aponta como necessidade para os estudos em Análise Combinatória, o desenvolvimento de resolução/exploração de problemas como meio de propiciar melhor compreensão dos processos.

Para o autor, uma proposta de ensino pautada na exploração/resolução de problemas, é comum partir-se da exploração da criatividade do estudante fazerem uso de atividades concretas, jogos, TICs, entre outros meios. O fato é que não há uma negação das fórmulas, mas estas são resultados do processo de compreensão dos estudantes e da generalização no processo de resolução de problemas.

Nesse sentido, o autor destaca que o ensino-aprendizagem de Análise Combinatória, por meio da exploração/resolução de problemas, busca partir de situações-problema, que, num processo de ação-reflexão, medeia o desenvolvimento das ideias e dos conceitos de Arranjo, Permutação e Combinação, enfatizando assim o pensar combinatório como uma ferramenta essencial na abstração e formalização de conceitos científicos.

Em relação ao referencial teórico a respeito do Conteúdo de Análise Combinatória, o autor traz algumas recomendações dos documentos oficiais, Morgado et al (1991) e Dossey (1991) que apresentam Análise Combinatória no campo da Matemática Discreta.

A pesquisa foi realizada em uma escola pública localizada na região de Casa Amarela, Recife-PE, em uma turma da 2ª série do Ensino Médio. A escolha da instituição deve-se ao fato de o professor-pesquisador trabalhar nela e ser o professor da turma. Foram 11 encontros, totalizando vinte duas aulas com duração de 50 minutos cada. Os problemas selecionados traziam diversos conceitos e ideias de Análise Combinatória, abordando noções e ideias do Princípio Fundamental de Contagem, Arranjo, Permutação e Combinação, assim como Fatorial de um número Natural.

O autor destaca dificuldades encontradas durante sua intervenção, tais como; a distinção entre problemas de Arranjo e de Combinação, o que acarreta o fato de não se perceber, na compreensão do problema, por parte dos alunos, se a ordem dos elementos no agrupamento é pertinente ou não na contagem.

De acordo com o autor, a pesquisa traz contribuições para o conteúdo de Análise Combinatória e para uma melhor compreensão do uso da resolução de problemas em sala de aula, como metodologia de ensino-aprendizagem.

O autor salienta que a Resolução de problemas tem sido utilizada com diferentes interpretações, no entanto, durante sua abordagem em sala de aula, ocorreu na concepção ensino-aprendizagem através da resolução de problemas, propondo um ambiente em que o aluno aprende Matemática resolvendo problemas, no qual é valorizado o diálogo entre a tríade professor-problema-aluno. Além disso, com a finalidade de uma formação conceitual sólida foi trabalhada com a exploração de situações que vão além da simples busca por respostas.

Ao fim do trabalho, o autor aponta alguns caminhos que podem ser trilhados no ensino-aprendizagem da Combinatória, apontando que podem ser trabalhados problemas voltados para questões do mundo social, com problemas envolvendo jogo do bicho, bingo, loteria esportiva, problemas modelados do social etc, sem perder o foco da aprendizagem dos conceitos.

O autor aponta a importância de pesquisas com o cotidiano da sala de aula, que implicam um olhar crítico sobre ela, na qual se busca pensar na formação do professor. Para ele, é imprescindível o diálogo entre a experiência e a própria pesquisa ou a pesquisa de colegas, na medida em que possibilita serem vivenciadas experiências bem sucedidas adaptadas para própria realidade.

Desse modo, o autor salienta que são necessárias investigações e pesquisas em sala de aula, na tentativa de unir a experiência do professor e o saber formado na academia que, por diversas vezes, se apresenta desconectado ou não recebe a devida atenção no cotidiano da sala de aula.

Conforme o autor, sua pesquisa contribui para a discussão do ensino-aprendizagem de Análise Combinatória, tendo implicações na formação, inicial e continuada de professores, apontando considerações e reflexões, resultado de um olhar voltado para a sala de aula, a partir de uma intervenção focada na metodologia de resolução de problemas.

O autor conclui o trabalho afirmando que a resolução de problemas como metodologia de ensino-aprendizagem possibilita, no mínimo, uma formação crítica e questionadora, provocando a autonomia do aluno nesse processo. Para ele, a pesquisa levou a compreender como os alunos aprendem a ser bons solucionadores de problemas e como se dá o processo de ensino-aprendizagem por meio da sua resolução. O quadro1, a seguir apresenta um resumo das pesquisas analisadas.

Quadro 01 – Resumo das pesquisas analisadas

AUTOR-ANO	OBJETIVO CENTRAL	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	METODOLOGIA EM SALA DE AULA
VARGAS, Antônio Fernando (2009).	Propor e avaliar o ensino-aprendizagem, com uma sequência didática, de Análise Combinatória, através da resolução de problemas usando atividades investigativas.	Resolução de Problemas: Polya (1995), Gazire (1989), Andrade (1998), Bicudo (1999). Atividades Investigativa: Ponte (2003).	Resolução de problemas; Sequência didática.
ALMEIDA, Adriana Luziê de (2010).	Investigar o potencial da Comunicação Matemática em uma proposta de Análise Combinatória, construída com base na resolução de situações-problema, para alunos do 2º ano do Ensino Médio.	Ideias sobre a Combinatória: documentos oficiais. Comunicação e Comunicação Matemática: Menezes (1999), Martinho (2007) e D'Antonio (2006). Argumentação nas aulas de Matemática: Yackel e Cobb (1996) e Boavida (2005b).	Elaboração e aplicação de uma proposta de ensino-aprendizagem da Combinatória por meio da Comunicação Matemática com base na resolução de situações-problema.
SOUZA, Analucia Castro Pimenta de (2010).	Trabalhar a Análise Combinatória na sala de aula com os alunos, adotando a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da resolução de problemas.	Ideias sobre a Combinatória: Morgado et al (1991), Domingues (1993), PCN-EM (Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio – Matemática), as Propostas Curriculares do Estado de São Paulo, de 1989 (2ª edição) e de 2008. Matemática Discreta: Dossey (1991), Framework (1992), Gardiner (1991).Resolução de problemas: Polya (1962), Van de Walle (2001), Dante (1989), Onuchic (1999), Gazire (1988), Schroeder & Lester (1989), Onuchic (2004), Jinfa Cai (2003) e o uso de documentos do NCTM – National Council of Teachers of Mathematics – USA (Conselho Nacional de Professores de Matemática dos Estados Unidos).	Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.
SILVA, Adeilson Pereira da (2013).	Traçar um mapeamento do ensino-aprendizagem de Análise Combinatória, através da prática em sala de aula**,** utilizando como metodologia de ensino-aprendizagem a resolução e exploração de problemas.	Análise Combinatória: documentos oficiais. Matemática Discreta: Dossey (1991) e Morgado et al (1991). Pesquisa no cotidiano: Esteban (2003).	Resolução e exploração de problemas; Pesquisa pedagógica.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Fazendo uma análise geral das pesquisas que foram apresentadas, notamos que todas elas estão voltadas para uma abordagem em sala de aula, contemplando a preocupação com ensino-aprendizagem da Combinatória. No entanto, a pesquisa de Souza (2010) também traz algumas reflexões sobre livro didático, além de uma entrevista com um professor do Ensino Médio.

As pesquisas que foram desenvolvidas em sala de aula tiveram como público alvo turmas do 2º do Ensino Médio. No entanto, é relevante destacar que a Análise Combinatória deve ser trabalhada durante o Ensino Fundamental, para que os estudantes possam apreender conceitos matemáticos que vão contribuir para construção do raciocínio combinatório e consequentemente preparar para sua abordagem no Ensino Médio.

As pesquisas de Vargas (2009), Almeida (2010), Souza (2010) e Silva (2013), destacam que o ensino de Análise Combinatória pode ocorrer através de atividades investigativas, Comunicação Matemática, Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da resolução de problemas e Resolução/exploração de problemas. Os pesquisadores evidenciaram que estas propostas foram eficazes no que diz respeito ao processo ensino-aprendizagem. Assim nosso interesse é compreender o avanço que foi dado em cada uma das pesquisas, para ver o que se pode acrescentar para a comunidade científica em relação ao estudo da Combinatória.

A finalidade da pesquisa de Vargas (2009) era apresentar uma nova metodologia para o ensino-aprendizagem do conteúdo de Análise Combinatória através da Resolução de Problemas com Atividades Investigativas.

Em sua intervenção em sala de aula com a utilização de atividades investigativas, o autor utilizou, como Metodologia, a Resolução de Problemas, enfatizando as ideias de Polya (1995) sobre as quatro fases para resolver um problema.

Concordamos com Vargas (2009) ao afirmar que a Resolução de problemas, para o ensino-aprendizado de Análise Combinatória, se destaca como uma metodologia eficaz para a distinção dos agrupamentos combinatórios (Arranjos e Combinações), que é o princípio fundamental para o domínio deste conteúdo. Nossa abordagem em sala de aula se diferencia da de Vargas (2009), no primeiro momento pelo fato de trabalharmos com a metodologia ensino-aprendizagem de matemática via resolução de problemas, que consiste em inverter o design normal de uma aula tradicional que segue o modelo definição-exemplos-exercícios de aplicação. A nossa proposta parte de um problema com o intuito de construir um novo conceito, valorizando o conhecimento prévio dos alunos, e tendo o professor como o mediador e incentivador de todo o processo. A pesquisa de Souza (2010) também tem o problema como o ponto de partida para chegar à formalização de um novo conceito e conteúdo. A autora trabalhou com a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de

Matemática através da Resolução de problemas.

O trabalho em sala de aula nesta perspectiva, permite uma discussão de elementos essenciais no ambiente escolar. Na verdade a palavra composta ensino-aprendizagem-avalição, quer dizer que estes três elementos ocorrem simultaneamente. Assim o professor ensina e o aluno – agindo como sujeito em ação – aprende. A avaliação ocorre por ambas as partes, pois o aluno reflete sobre o seu fazer, levando-o à construção do conhecimento matemático. Enquanto o professor avalia todo o processo, fazendo uma análise dos resultados obtidos, como também reorientando caso for necessário.

Ao trabalharmos com a Resolução de problemas sentimos a necessidade de ir além do problema, ou seja, levantar diversos problemas a partir do primeiro, com o intuito de que as ideias essenciais de Combinatória sejam melhor compreendidos pelos alunos.

Deste modo, a nossa pesquisa é mais parecida com a de Silva (2013), na qual foi utilizada, como metodologia de ensino-aprendizagem, a resolução e exploração de problemas. No entanto, a nossa abordagem se diferencia pelo fato de os alunos deixarem de ser expectadores para serem autores em sala de aula. Na verdade, durante nossa intervenção em sala de aula, vamos trabalhar com a Proposição de problemas que aproxima o aluno da língua materna, ao serem propositores de problemas, favorecendo a produção de textos e as concepções sobre ideias matemáticas que estão inseridas em seu cotidiano.

Além disso, a nossa pesquisa se diferencia em relação à de Vargas (2009), Almeida (2010) e Silva (2013), pelo fato de não ter apenas o foco no aluno, uma vez que achamos necessário conhecer as ideias de professores acerca do ensino-aprendizagem de Análise Combinatória.

A pesquisa de Souza (2010) aponta a necessidade de fazer uma entrevista com o professor do Ensino Médio, com o intuito de conhecer outro ponto de vista sobre o tema proposto em sua pesquisa, de tal forma que posteriormente a ajudasse na análise feita nos projetos. Era necessário que o professor entrevistado não conhecesse a metodologia utilizada pela pesquisadora durante sua intervenção em sala de aula.

A entrevista que realizamos teve como objetivo conhecer as ideias dos professores acerca do estudo de Combinatória e ver até onde essas ideias podem trazer reflexões sobre o ensino-aprendizagem da Combinatória.

A pesquisa de Almeida (2010) consistiu em um estudo sobre pensamento combinatório e comunicação matemática para construir uma proposta de ensino de Análise Combinatória. A autora concorda que a utilização de situações-problema pode contribuir para a aprendizagem de Análise Combinatória, no entanto, para que se tivesse um ensino eficaz não bastaria apenas construir suas próprias estratégias, mas também seria necessária a comunicação e discussão em pequenos grupos e da troca de experiências entre o professor e seus alunos ou entre os próprios alunos. É claro para nós que essas ideias são importantes, desse modo durante a nossa ação pedagógica ficaremos atentos em como essas ideias poderão favorecer o ensino-aprendizagem da Combinatória.

Na verdade, a própria autora destaca que existem diversas abordagens que privilegiam determinados tipos de comunicação que buscam contribuir com o processo de ensino e aprendizagem, no qual ela cita como exemplo a Metodologia Resolução de Problemas.

Além disso, Almeida (2010) afirma que para se promover a Comunicação Matemática é necessário valorizar a argumentação. Acreditamos que uma abordagem em sala de aula com a resolução, exploração e proposição de problemas conduz ao um ambiente que valoriza este aspecto, pelo fato de ver o aluno como coconstrutor do seu próprio aprendizado. Deste modo, ele aprende quando troca informações e questiona ideias que ainda não estão claras, mas que podem vir a ser, a partir do momento que ele consegue fazer conexões com experiências vivenciadas.

As pesquisas de Vargas (2009), Almeida (2010) e Silva (2013) atingiram o objetivo esperado, porém os autores destacaram que mesmo as propostas obtendo resultados significativos, os alunos ainda mostraram dificuldade na distinção dos problemas de arranjo e combinação. Os autores apontam que é necessário dar ênfase a um trabalho que valorize a construção do raciocínio combinatório.

Desta forma, em todos os trabalhos os pesquisadores apontaram a necessidade de valorizar estratégias que contribuíssem para essa forma de pensamento matemático. Eles destacaram a árvore de possibilidade, a enumeração dos agrupamentos, a utilização de tabelas, o Princípio Fundamental da Contagem, desenhos, dentre outras.

Souza (2010) recomenda que os primeiros problemas devem conter uma quantidade relativamente pequena de agrupamentos, para que os alunos possam listar e contar todas eles, utilizando as estratégias mencionadas acima que desenvolvem o raciocínio combinatório, e posteriormente os alunos vão perceber que nem sempre vão poder recorrer a estas estratégias, com isso vem a necessidade da compreensão das fórmulas.

Percebemos que essas ideias são defendidas nessas pesquisas, como também em documentos oficiais que sugerem que os problemas trabalhados em sala de aula devem valorizar a utilização dessas estratégias para a construção do raciocínio combinatório. Com isso, a escolha dos problemas que iremos trabalhar em sala de aula permitem que os alunos recorram a estas estratégias, valorizando outro aspecto de um problema matemático, que é o de possuir diversas formas de resolução.

A pesquisa de Souza (2010) trabalhou com alunos em sala de aula, professores e graduandos em uma oficina, além de estar divulgando suas pesquisas para pesquisadores em congressos.

Nesse sentido, a autora ressalta que a sua pesquisa pode colaborar para a formação do professor que, ao ler este trabalho, pode refletir sobre o que ocorreu além da sala de aula ao se trabalhar Análise Combinatória e, com sua prática, buscar um trabalho diferenciado. Ela reflete que uma nova pesquisa poderia trabalhar com mais profundidade para promover a formação do professor.

Nota-se que o foco central das pesquisas já desenvolvidas tem sido para a sala de aula e para a resolução de problemas. Mesmo assim percebe-se pouca compreensão sobre o Ensino de Análise Combinatória na sala de aula, diante das dificuldades encontradas pelos alunos neste tópico.

O nosso enfoque está em colocar o foco da pesquisa voltada não só para uma abordagem em sala de aula, mas realizamos uma entrevista com alguns professores do Ensino Médio. Deste modo, conhecemos algumas ideias de professores sobre a Combinatória, advindas de suas experiências cotidianas em sala de aula. Além disso, a nossa proposta proporciona uma nova abordagem de Análise Combinatória em sala de aula, no contexto da resolução, exploração e proposição de problemas, visando a ir além da resolução do problema, dando uma atenção maior à proposição de problemas.

Ao analisar as ideias dos professores que ensinam Matemática, além de refletir sobre as potencialidades da metodologia Resolução de Problemas acreditamos que se fomentaram reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Análise Combinatória.

Deste modo, os resultados da pesquisa foram importantes para refletirmos sobre alguns aspectos da formação de professores de matemática, possibilitando analisar tanto o desenvolvimento de práticas pedagógicas efetivas, quanto o processo de construção dos saberes docentes nessa formação.

3 ANÁLISE COMBINATÓRIA, RESOLUÇÃO, EXPLORAÇÃO E PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS

3.1 Pensando sobre o ensino-aprendizagem de Análise Combinatória

A Análise Combinatória se desenvolveu ao longo do tempo com diversos problemas que necessitavam de métodos de contagem adequados. Assim, a necessidade de contagem é muita antiga. A partir da ideia de organização numérica surgiu um novo ramo da Matemática.

Nesse sentido Filho e Silva (2008) definem a Análise Combinatória como o ramo da Matemática que tem por objetivo resolver problemas que consistem, basicamente, em escolher e agrupar elementos de um conjunto.

Percebe-se na história da matemática inúmeras situações envolvendo o conteúdo de Análise Combinatória, ao se determinar as possíveis soluções de resolver tantos problemas envolvendo situações planas como em situações tridimensionais, como é o caso do problema das Sete pontes.

O matemático suíço Leonhard Euler (1707 – 1783) utilizou os conhecimentos de Combinatória para resolver este famoso problema da época, que havia surgido na cidade de Konigsberg, na Prússia (atual Kaliningrado, Rússia), conhecida por suas sete pontes, das quais cinco ligavam o continente a uma ilha, denominado: *As sete pontes de Konigbsberg*, o problema consistia em descobrir se era possível caminhar ao redor de toda cidade passando sobre cada ponte uma única vez: *Partindo-se de uma das ilhas, é possível ir pelas demais ilhas e voltar ao ponto de partida, nisso cruzando-se cada uma das pontes uma única vez.* Mais tarde, este matemático resolveu esse problema, dando origem ao estudo da teoria dos grafos, que tem grande aplicação na ciência da computação atualmente.

A Análise Combinatória começa a ganhar um aspecto formal, quando se percebe a sua importância no estudo da Probabilidade e Estatística e recentemente na teoria dos grafos. No entanto, seu grande desenvolvimento se deu a partir dos jogos de azar (jogos de cartas, dados ou moedas), por se tratar de atividades instigantes e que desafiam o indivíduo a querer vencer. Desta forma, se buscava compreender qual a chance de vitória no desenrolar dos jogos e a Análise Combinatória aparece como ferramenta importante para entender todo esse processo. Nesse sentido, Morgado et al (1991, p. 05) apresenta a relevância da Combinatória para os tempos de hoje ao afirmar que,

> A Análise Combinatória teve um crescimento explosivo nas últimas décadas. A importância de problemas de enumeração tem crescido enormemente, devido às necessidades de teoria dos grafos, em análise combinatória de algoritmos, dentre outros estudos. Muitos problemas importantes podem ser modelados matematicamente como problemas de pesquisa operacional, de armazenamento de informações em bancos de dados utilizando computadores, e também problemas de matemática "pura", como o famoso problema das quatro cores.

Esse teorema foi inspirado pelo jovem Francis Guthrie graduado em Matemática no ano de 1852, pela University College em Londres. Registra a história que o matemático estava colorindo um mapa, tomando cuidado para não colorir, com a mesma cor, países vizinhos que tivessem alguma linha de fronteira em comum. Guthrie se questionou se seria possível pintar qualquer mapa utilizando apenas quatro cores; surgindo, então, a partir daí, o problema das quatro cores. Ao longo de algumas experimentações, e mais tarde com uma demonstração, como também com o uso de computadores, provou-se que todo mapa pode ser colorido com no mínimo quatro cores, levando em consideração que países vizinhos, com alguma linha de fronteira em comum, tenham cores diferentes.

A Análise Combinatória nos possibilita calcular o número de possibilidades de determinados acontecimentos, levando em consideração certas condições. Confirmando essa ideia, Pessoa (2009) diz que a combinatória nos permite quantificar conjuntos ou subconjuntos de objetos ou de situações, selecionados a partir de um conjunto dado, ou seja, a partir de determinadas estratégias ou de determinadas fórmulas, pode-se saber quantos elementos ou quantos eventos são possíveis numa dada situação, sem necessariamente ter que contá-los um a um.

A mesma autora define Análise Combinatória como uma área do conhecimento – uma subárea da Matemática – que trata de agrupamentos que podem ser de naturezas distintas, tais como produtos cartesianos, permutações, arranjos e combinações.

A Combinatória que deve ser discutida tanto no Ensino Fundamental como no Ensino Médio, dando ênfase a problemas de contagem, se apresenta como um campo de estudo da Matemática Discreta. Nesse sentido, Morgado et al (1991, p. 01) afirmam que: "De maneira mais geral, podemos dizer que a Análise Combinatória é a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas". Os mesmos autores salientam que há dois tipos de problemas que ocorrem frequentemente na Análise Combinatória, que são:

> - Demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito dado e que satisfazem certas condições;
> - Contar ou classificar os subconjuntos de um conjunto finito e que satisfazem certas condições dadas. (MORGADO et al, 1991, p. 2)

Com isso, o problema de contagem é um dos tipos de problemas da Matemática Discreta. No Ensino Médio, temos os problemas de arranjo, permutações e combinação simples e com repetição. No entanto, ainda existem outros tipos de problemas de contagem que normalmente não são discutidos neste nível de ensino, como: o princípio da reflexão; as permutações caóticas; as relações de recorrências; as funções geradoras e os lemas de Kaplansky. Vale destacar os problemas de existência, como: o princípio das gavetas de Dirichlet e o da inclusão-exclusão.

É preciso ressaltar que a Matemática Discreta tem, como objetivo, determinar uma contagem. O que diferencia da noção clássica da Matemática Contínua, no qual a mesma é apropriada para situações em que a finalidade principal é a medida de uma quantidade.

Em relação aos tipos de problemas discutidos pela Matemática Discreta, Dossey (1991) os classifica em três amplas categorias:

> 1ª) Problemas de existência: trata de reconhecer se um dado problema tem uma solução ou não;
> 2ª) Problemas de contagem: investiga quantas soluções podem existir para problemas com soluções conhecidas;
> 3ª) Problemas de otimização: focaliza sobre a descoberta de uma melhor solução para um problema particular. (DOSSEY, 1991, p.02)

O *NCTM Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics* (1989) (Padrões de Currículo e Avaliação para a Matemática Escolar – NCTM) que é uma estrutura para criar e implementar mudança no ensino e na aprendizagem de Matemática em todos os níveis, K-12 (pré – Ensino Médio), com o intuito de preparar os jovens para uma sociedade cada vez mais tecnológica concebe a Matemática Discreta como algo necessário nesse processo.

No livro *Discrete Mathematics across the Curriculum, K-12,* 1991 Yearbook do NCTM Margaret J. Kenney e Christian R. Hirsch (NCTM), são destacadas algumas percepções sobre a Matemática discreta no currículo, apontando sua importância, o que ela compreende nos vários níveis de ensino, onde ela pertence no currículo, além de algumas ideias sobre como ensiná-la.

Dossey (1991, p. 3) salienta a importância da Matemática Discreta no currículo de Matemática ao dizer que:

> A Matemática Discreta cresceu muito na resposta das ciências matemáticas para a necessidade de uma melhor compreensão das bases combinatórias da matemática usada no desenvolvimento de algoritmos computacionais eficientes, a criação de novas abordagens para problemas de pesquisa operacionais, e os

> estudos das heurísticas subjacentes às abordagens de tais problemas. A existência da Matemática Discreta como uma área separada de estudo teve seu início nos anos 60. E, no início da década de 70, muitos textos influentes apareceram no nível superior da graduação.

Com as mudanças ocorridas no mundo contemporâneo, devido à forte influência das tecnologias na sociedade, Dossey (1991) apresenta a Matemática Discreta como a Matemática para o nosso tempo, ao afirmar que ela é o ramo da Matemática que cresceu rapidamente em importância na década passada.

O fato é que é necessária uma Matemática que promova o interesse e a curiosidade dos jovens, e isso pode ocorrer quando conseguimos conectar os afazeres cotidianos à Matemática escolar. Assim a Matemática Discreta é imprescindível no currículo escolar, visto que temos uma sociedade cada vez mais apegada a recursos tecnológicos, que têm grande apelo em nossas salas de aula. Desse modo, os conceitos de Combinatória se apresentam como requisitos relevantes na formação do aluno.

O conceito mais importante que acompanha a discussão de Análise Combinatória apresentado por Lima et al (2006), é o Princípio Fundamental da Contagem, segundo o qual, se há x modos de tomar uma decisão D_1 e, tomada a decisão D_1, há y modos de tomar a decisão D_2, então o número de modos de tomar sucessivamente as decisões D_1e D_2 é $x \cdot y$.

Uma abordagem de Análise Combinatória em sala de aula deve partir de situações contextualizadas, tendo em vista a facilidade de aplicação no cotidiano dos alunos. Com o estudo de Combinatória podemos resolver muitos problemas que estão relacionados ao nosso dia-a-dia, como por exemplo: Quantas placas diferentes de automóveis, formadas por três letras e quatro algarismos, podem existir? Quantas maneiras diferentes você pode escolher seis entre sessenta números para jogar a mega-sena? Quantas senhas de 3 algarismos você pode obter com os algarismos de 1 a 4? Em uma classe de trinta alunos, quantas são as possíveis escolhas para três representantes de sala?

No entanto, o que percebemos no ambiente escolar é que, dada ênfase conferida ao modelo fórmula-aplicação, assim é ensinado um conjunto de fórmulas e depois cabe ao aluno escolher a fórmula correta para resolver um problema proposto. Nesse sentido, os jovens não desenvolvem a compreensão dos problemas discutidos, visto que são valorizados certos mecanismos que pouco contribuem para a compreensão dos significados dos problemas de contagem, e tampouco permitem que eles desenvolvam o raciocínio combinatório.

Para Pessoa (2009, p. 72) "[...] entende-se o *raciocínio combinatório* como um tipo de pensamento que envolve contagem, mas que vai além da enumeração de elementos de um conjunto.

Em contrapartida, os PCN+ (BRASIL, 2002), dizem que o raciocínio combinatório é uma forma de pensamento matemático que consiste em decidir sobre a forma mais adequada de organizar números ou informações para poder contar os casos possíveis. Para este documento, esta nova forma de pensar em Matemática não deve ser aprendida como uma lista de fórmulas, mas como um processo que exige a construção de um modelo simplificado e explicativo da situação.

É fato que a Combinatória apresenta dificuldade de natureza conceitual. Nesse sentido, é necessário realizar um trabalho em sala de aula que valorize a compreensão dos conceitos referente a este tópico, já que o conhecimento das fórmulas garante muito pouco sobre como proceder em determinados problemas. Além disso, percebe-se que os problemas de Combinatória não mantêm o mesmo padrão em suas resoluções. Assim, quando estamos diante de um problema referente a este tópico, é necessário pensar, em seguida fazer anotações, com o intuito de conhecer sua natureza, e como se procede, por exemplo, diante de uma enumeração sistemática.

Para Lima et al (2006), a postura diante de um problema de Combinatória é sempre nos colocar no papel da pessoa que deve fazer a ação solicitada pelo problema e ver que decisões devemos tomar.

Com isso, cabe ao professor fazer um planejamento adequando, elaborando estratégias de ensino que possam envolver os alunos nas construções dos conceitos e isso pode acontecer quando ele consegue adequar o conteúdo ao cotidiano do aluno.

O fato é que os problemas de Combinatória exigem dos alunos uma tomada de decisão, na elaboração dos possíveis caminhos que levam à solução. De acordo com Morgado et al (1991, p. 2):

> Embora a Análise Combinatória disponha de técnicas gerais que permitem atacar certos tipos de problemas, é verdade que a solução de um problema combinatório exige quase sempre engenhosidade e a compreensão plena da situação descrita pelo problema. Esse é um dos encantos desta parte da matemática, em que problemas fáceis de enunciar revelam-se por vezes difíceis, exigindo uma alta dose de criatividade para sua solução.

Nos problemas de contagem, podemos utilizar algumas ideias, como a árvores de possibilidade, além do processo enumeração sistemática, que são meios valorosos na formalização do raciocínio combinatório.

As novas pesquisas devem valorizar a compreensão e a formalização das ideias essenciais de Combinatória e isso pode acontecer quando colocamos o aluno em um ambiente que leve à reflexão e permita que ele tome decisões adequadas, e organize as informações, diante do problema proposto, desenvolvendo uma forma de pensar matemático, o raciocínio combinatório.

Podemos destacar algumas ideias, como: é importante trabalharmos com os alunos problemas de contagem, sem a utilização direta de fórmulas. É preciso que elas sejam entendidas pelos alunos para que a utilização delas não ocorra de uma forma mecânica. Dessa forma, elas devem deixar de ser o ponto de partida nas aulas de Combinatória e devem ganhar significado na construção dos conceitos matemáticos que estão sendo discutidos.

Um dos grandes problemas do estudo de Análise Combinatória no ambiente escolar é perceber que tipo de agrupamento a questão está trabalhando; desta forma, podemos destacar alguns questionamentos que estão bem presentes na sala de aula, tais como: é arranjo, combinação ou permutação? Que fórmulas utilizar?

Assim, precisamos ter cuidado nas escolhas dos primeiros problemas de Combinatória, é preciso que eles possuam uma quantidade relativamente pequena de agrupamentos, para que o aluno possa listar todos os agrupamentos possíveis. No caso de o problema possuir um grande número de agrupamentos, tornado uma atividade exaustiva para o estudante, daí vem a importância do Princípio Fundamental da Contagem e utilização das fórmulas de modo adequado.

Na verdade, a exploração de um problema que podemos fazer todos os agrupamentos possíveis, tomando casos particulares, pode nos ajudar a entender e ampliar para uma situação geral, chegando a uma generalização do problema.

É preciso ressaltar que as estratégias que foram mencionadas – a construção da árvore de possibilidades, utilização de tabelas, listar todas as possibilidades e o Princípio Fundamental da Contagem têm um papel crucial no desenvolvimento do raciocínio combinatório. Os PCN+ (BRASIL, 2002) salientam que a Contagem possibilita uma abordagem mais completa da probabilidade. Assim quando temos um espaço amostral com um grande número de possibilidades, são utilizados alguns conceitos da Combinatória, já que não é recomendável enumerar todas as possibilidades. Desta forma, o aluno que não tem o conhecimento de Análise Combinatória, provavelmente vai ter dificuldades no estudo da probabilidade. No entanto, este tópico não deve ser visto como apenas uma técnica para probabilidade, já que o raciocínio combinatório contribui para a construção do pensamento formal, além de desenvolver o raciocínio lógico dedutivo.

De forma geral, todo problema de contagem pode ser resolvido por um processo de contagem, pelo menos na teoria. No entanto, na prática, a resolução de alguns desses problemas pode se tornar muito complicado. Assim, existem técnicas de contagem que facilitam a resolução de muitos problemas. Pessoa (2009) aponta os seguintes significados para os problemas de Combinatória: produtos cartesianos, combinações, arranjos e permutações, os quais podem ser solucionados, dentre outras formas, através do princípio fundamental da contagem.

Concordamos com Morgado et al (1991) ao afirmar que, entre os vários tipos de "números para contagem" da Análise Combinatória, estes são certamente os mais usados. É preciso destacar também que essas técnicas permite calcular uma grande quantidade de problemas de Análise Combinatória. Além disso, seu estudo tem grande aplicabilidade nos problemas de probabilidades finitas, um campo de aplicação importante de Análise Combinatória.

É fato que temos um currículo que deve ser seguido durante nosso planejamento escolar. No entanto, é necessário dar autonomia para os professores, nas escolhas dos conteúdos que devem ser ministrados. Ele deve ter senso crítico diante da qualidade dos cidadãos queremos formar. Quais os conteúdos que permitirão que os estudantes possam fazer intervenções em seu cotidiano? Assim a escolha dos conteúdos que fazem sentido para o aluno, mostra a necessidade de sua compreensão e ele se envolve e constrói o conhecimento. Além disso, é necessária uma abordagem que possa fazer com que os estudantes compreendam o conhecimento matemático como um poderoso recurso para entender fenômenos do mundo real.

Nesta perspectiva, o estudo de Análise Combinatória não deve ser deixado de lado, já que essa temática trabalha com diversas situações do nosso cotidiano. O professor deve ser cauteloso, neste processo e durante o seu planejamento não pode deixar a Combinatória de lado. Desculpas como: "o assunto está no final do livro didático" ou "é um assunto difícil para o entendimento dos alunos", são inadmissíveis e não devem ser levadas em consideração, pois ao conhecer as potencialidades deste tópico fica claro o quanto se faz necessária na vida dos alunos.

Além disso, os problemas de Combinatória desenvolvem o raciocínio lógico, que permite chegarmos ao nível de abstração. Pais (2013, p. 14), argumenta sobre a relevância da Matemática no currículo afirmando que: "Essa presença tem sido justificada inicialmente pela possibilidade por contribuir no desenvolvimento do raciocínio lógico e na capacidade de abstração do aluno".

As pesquisas atuais sobre Análise Combinatória vêm trazendo propostas metodológicas que valorizam a aquisição e a compreensão das ideias essenciais de combinatória, deixando de lado o uso excessivo de fórmulas, como também o ensino voltado para exercícios repetitivos, que não fazem o aluno pensar.

Desse modo, via resolução de problemas, o estudante consegue fazer conexão com os conceitos abordados e formaliza novas ideias. No entanto, na sala de aula, muitos estudantes, ao se deparem com situações-problema envolvendo Combinatória, recorrem imediatamente às fórmulas, tornando assim um aprendizado mecânico e sem significado. Neste momento, é importante a mediação do professor e o incentivo na elaboração de estratégias que possam resolver as questões sem precisar utilizar as fórmulas de imediato. Com isso, há uma necessidade de sair do modelo tradicional, ao possibilitarmos a construção de novos modelos que vislumbrem um ensino mais construtivo.

Segundo o PCN+ (BRASIL, 2002, p. 126-127), “As fórmulas devem ser consequência do raciocínio combinatório desenvolvido frente Matemática à resolução de problemas diversos e devem ter a função de simplificar cálculos quando a quantidade de dados é muito grande”. Morgado et al (1991) enfatizam que:

> [...] se a aprendizagem destes conceitos se faz de maneira mecânica, limitando-se a empregá-los em situações padronizadas, sem procurar habituar o aluno com a análise cuidadosa de cada problema, cria-se a impressão de que a Análise Combinatória é somente um jogo de fórmulas complicadas. (MORGADO et al, 1991, p. 2).

Nós sabemos que o ensino desse tópico está além disso, já que podemos propor problemas que levam o aluno a refletir, a tomar decisões e formalizar novas ideias matemáticas, fazendo com que as fórmulas tenham sentido. É preciso a cada dia incentivar sua criatividade, envolve-lo em situações que levem ao aprendizado e discutir problemas que desenvolvem habilidades necessárias para formação do indivíduo.

Acreditamos que uma abordagem em sala de aula via resolução, exploração e proposição de problema, seja um caminho que possibilita um trabalho dinâmico e investigativo, que proporciona, aos estudantes, pensar sobre as estratégias utilizadas nos problemas de Combinatória.

3.2 Recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) sobre o ensino-aprendizagem de Análise Combinatória

Esta seção tem, como finalidade, fazer algumas considerações acerca das orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais referente ao estudo da Combinatória, visto que esses documentos são uma proposta que tem, como objetivo, nortear o trabalho do professor em sala de aula.

De acordo com os PCN (BRASIL, 2006, p. 94), no Ensino Médio, o termo "combinatória" está usualmente restrito ao estudo de problemas de contagem, mas esse é apenas um de seus aspectos.

Os PCN+ sugerem que um trabalho em sala de aula de Análise Combinatória, pode ocorrer pela resolução de problemas ao afirmar: "Esse conteúdo devem ter maior espaço e empenho de trabalho no Ensino Médio, mantendo de perto a perspectiva da resolução de problemas aplicados para se evitar a teorização excessiva e estéril". (BRASIL, 2002, p. 127). Isso é fácil perceber pela espontaneidade em elaborar problemas de Combinatória, uma vez que é comum notar como eles estão presentes nos afazeres cotidiano dos alunos.

Os PCN (BRASIL, 1997) apontam que no decorrer dos primeiros ciclos do Ensino Fundamental os alunos devem ser levados a desenvolver a familiarização com a contagem de agrupamentos, de maneira informal e direta, fazendo, por exemplo, uma lista de todos os agrupamentos possíveis para depois contá-los.

No Ensino Fundamental, este tópico é discutido no bloco de conteúdo Tratamento da Informação. Nesta etapa de ensino é preciso dar a devida importância à Análise Combinatória, dando ênfase aos conceitos iniciais, tendo como base o Princípio Fundamental da Contagem que auxilia a resolução dos diversos problemas de contagem, além de representações através de tabelas, desenhos e a árvore de possibilidades que permitem uma melhor compreensão dos fenômenos combinatórios.

Os PCN (BRASIL, 1998) destacam que esse bloco de conteúdos poderia fazer parte dos outros blocos. No entanto, a ideia central é mostrar a sua necessidade e relevância na compreensão de diversos fenômenos da sociedade. A discussão em sala de aula relativamente ao Tratamento da Informação, não tem como meta o rigor matemático.

> Integrarão este bloco de estudos relativos a noções de Estatística e de probabilidade, além dos problemas de contagem que envolvem o princípio multiplicativo. Evidentemente, o que se pretende não é o desenvolvimento de um trabalho baseado na definição de termos ou de fórmulas envolvendo tais assuntos, (BRASIL,1998, p. 52).

De acordo com os PCN (BRASIL, 1998, p. 137): “A exploração dos problemas de contagem levará o aluno a compreender o princípio multiplicativo. Este servirá como base para que o aluno possa resolver problemas com diferentes tipos de agrupamentos que serão estudados no Ensino Médio”.

Os PCN (BRASIL, 1998) dizem que tal princípio está quase sempre associado a situações do tipo: Se cada objeto de uma coleção A for combinado com todos os elementos de uma coleção B, quantos agrupamentos desse tipo pode-se formar?

Ao incentivar os alunos para que eles possam pensar e buscar alternativas com o intuito de solucionar problemas, permite que eles desenvolvam habilidades que contribuirão para a construção do raciocínio combinatório. Nesse sentido, para o 3ª e para o 4ª ciclos, os PCN (BRASIL,1997, p. 57) salientam a relevância dos problemas de contagem,

> Relativamente aos problemas de contagem, o objetivo é levar o aluno a lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo para sua aplicação no cálculo de probabilidades.

Para que o aluno consiga apreender as ideias iniciais da Combinatória, é necessário que os problemas propostos possam ser resolvidos pela contagem direta, ou seja, fazendo lista dos possíveis agrupamentos. De acordo com os PCN (BRASIL, 1998, p. 137),

> A resolução de problemas de contagem, no ensino fundamental, coloca o aluno diante de situações em que é necessário agrupar objetos, em diferentes quantidades, caracterizando os agrupamentos feitos. Ao tentar solucionar essas situações, ele poderá aperfeiçoar a maneira de contar os agrupamentos e desenvolver, assim, o raciocínio combinatório. Consequentemente, poderá desenvolver maior segurança e criatividade para enfrentar situações-problema de caráter aleatório, que dependem de uma contagem sistematizada, e dispor de uma ferramenta útil e motivadora para a aprendizagem da probabilidade e da estatística.

A partir daí, o aluno estará apto para a discussão do tópico Probabilidade, que busca explicar os fenômenos aleatórios. Na verdade, o Princípio Fundamental da Contagem auxilia na construção do espaço amostral, que consiste no conjunto de todas as possibilidades de um evento ocorrer.

> Além disso, o emprego de problemas envolvendo combinatória leva o aluno, desde cedo, a desenvolver procedimentos básicos como a organização dos dados em tabelas, gráficos e diagramas, bem como a classificação de eventos segundo um ou mais critérios, úteis não só em Matemática como também em outros campos, o que reforça a argumentação dos defensores de seu uso desde as séries iniciais do ensino fundamental. (BRASIL 1998, p.137).

É comum a necessidade de interpretar informações que são essenciais para a sociedade de hoje. Como, por exemplo, os dados numéricos fornecidos por meios de comunicação, como em jornais, livros, anúncios, revistas, onde estes estão bem presentes no cotidiano dos alunos. Podemos destacar também a importância de entender o número de possiblidades que um evento pode ocorrer, como também a medida de chance de cada um deles. Desta forma, ao jogar na Mega Sena, como também na escolha de uma determinada jogada em alguns jogos de azar, possibilita ao aluno entender que os conceitos matemáticos estão correlacionados ao seu dia a dia e se fazem necessário.

Nesse sentido, fica claro que a Análise Combinatória tem um papel importante na teoria da Probabilidade. Porém como afirmam os PCN (BRASIL, 2006, p.79): “A Combinatória não tem apenas a função de auxiliar o cálculo das probabilidades, mas tem inter-relação estreita entre as ideias de experimento composto a partir de um espaço amostral discreto e as operações combinatórias”.

Ao fazermos o mapeamento de algumas pesquisas e após realizarmos leituras acerca do estudo de Combinatória e ouvirmos os discursos dos professores, podemos destacar algumas ideias relacionadas ao ensino-aprendizagem de Análise Combinatória, tais como:

- A Análise Combinatória deve ser trabalhada no Ensino Fundamental;
- O ponto de partida deste tópico deve ocorrer a partir do Princípio Fundamental da Contagem, e mais adiante ele tem um papel importante na compreensão das fórmulas;
- A proposta de trabalho em sala de aula da Combinatória pode ocorrer perto da perspectiva da resolução de problemas, com o intuito de se evitar a teorização excessiva e estéril;
- Devem ser trabalhados problemas que levam o aluno à elaboração de estratégias que vão em direção à construção do raciocínio combinatório;
- As fórmulas devem ser consequência do raciocino combinatório, deste modo, é preciso dar ênfase a mecanismos que leva a compreensão das mesmas;
- É preciso encorajar os alunos na busca de estratégias tais como: a construção da árvore de possibilidades, tabelas, enumeração de todas as possibilidades, desenhos e o Princípio Fundamental da Contagem;
- Algumas das dificuldades encontradas no ensino-aprendizagem da Combinatória dizem respeito à distinção dos tipos de agrupamentos, ou seja, se é arranjo, permutação ou combinação;

- A Combinatória não deve ser encarada apenas como uma ferramenta para Probabilidade e Estatística, mas como um importante tópico da Matemática que desenvolve uma forma de pensamento matemático (raciocínio combinatório).

Neste sentido, na busca de um currículo flexível que possa atender às necessidades dos alunos, a Análise Combinatória aparece como um tópico matemático importante, diante dos problemas enfrentados pela educação brasileira, em especial o Ensino Médio, que tem levado diversas discussões sobre sua identidade. Deste modo, o estudo da Combinatória é imprescindível para a formação dos alunos, visto que prepara o indivíduo para o enfretamento de diversas situações de sua vida cotidiana.

3.3 Resolução, exploração e proposição de problemas

É consensual a relevância da Matemática para compreendermos a sociedade em que vivemos. No entanto, a nossa responsabilidade é ainda maior, enquanto professor e pesquisador ficamos preocupados com o processo ensino-aprendizagem da Matemática, diante das diversas crenças dos alunos sobre essa ciência. Com o intuito de combater a resistência na divulgação da Matemática é que devemos proporcionar um ensino que esteja cada vez mais perto da realidade dos jovens.

Contudo, é preciso mostrarmos a necessidade de sua aprendizagem dada a importância disso em nosso cotidiano. Ao sair da sala de aula os alunos vão se deparar com situações que exigem suas intervenções, onde o que foi lecionado pelo professor vai ser de suma importância nas tomadas de decisões, diante de situações da vida real, pois só assim à Matemática ganhará sentido.

De acordo com Onuchic e Allevato, (2004, p. 213), sempre houve muita dificuldade em ensinar Matemática. Apesar disso, todos reconhecem a importância e a necessidade da Matemática para entender o mundo e nele viver.

Existe uma enorme preocupação em relação à divulgação e à aquisição dos conhecimentos matemáticos. Com isso, nos deparamos com diversas metodologias, onde cada uma apresenta diversas contribuições durante esse processo. Nesse sentido é comum encontrar professores que se interessam pela busca de metodologias de ensino que aproximam o aluno do ambiente escolar. Isso ocorre quando o aluno passa a compreender melhor o conteúdo estudado e faz uso do seu conhecimento para fazer intervenções em seu cotidiano. Nesta perspectiva, o professor descentraliza seu “poder” deixando o aluno mais seguro e crítico quanto ao que está aprendendo e sua utilidade no mundo real. Conforme Onuchic

(1999, p. 206),

> Embora a aquisição de conhecimento matemático seja importante, a proposta essencial para aprender matemática é ser capaz de usá-la. Em consequência disso, dão-se aos alunos muitos exemplos de conceitos e de outras matemáticas sobre aquilo que estão estudando e muitas oportunidades de aplicar essa matemática ao resolver problemas.

Em um contexto histórico os problemas contribuíram para evolução da Matemática, pelo fato de trazerem à tona a evolução dos conceitos matemáticos. Além disso, ao resolver problemas que fizeram parte da História da Matemática, estamos evidenciando a necessidade de um povo em diferentes contextos. Segundo os PCN (BRASIL, 1998, p. 40),

> A própria História da Matemática mostra que ela foi construída como resposta a perguntas provenientes de diferentes origens e contextos, motivados por problemas de ordem prática (divisão de terras, cálculos de créditos), por problemas vinculados a outras ciências (Física, Astronomia), bem como problemas relacionados a investigações internas à própria Matemática.

Se investigarmos o desenvolvimento das ciências, constataremos que as diversas descobertas partiram de algum problema que desafiava e que necessitava de uma solução para facilitar o funcionamento da sociedade; assim, tal prática não ocorre apenas no campo da Matemática. Nesse sentido, Pais (2013, p. 131) afirma,

> A resolução de problemas é uma das estratégias mais específica da Educação Matemática, cuja presença entende-se para todos os níveis de ensino e serve de interface com outras disciplinas. Como no plano histórico, os conceitos e as teorias estão quase sempre associados à solução de um problema, esta articulação sinaliza para professor um pressuposto a ser cultivado na prática educativa da Matemática.

Nos anos 40, Polya surge como uma referência enfatizando a importância da descoberta e de levar o aluno a pensar por meio da resolução de problemas. Polya (1995) diz que uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. Para o autor resolver problema era o tema mais importante para se fazer matemática, pois, ao resolver um problema, o aluno é levado a pensar.

Recentemente os educadores matemáticos vêm aceitando a ideia de que a habilidade em resolver problemas merece especial atenção. No entanto, para chegar a esta conclusão ocorreram algumas reformas no ensino de Matemática. A pesquisadora Onuchic (1999) faz uma análise dos movimentos de reforma, referente ao ensino de Matemática durante o século

XX, destacando: o ensino de matemática por repetição, o ensino da matemática por compreensão e a Matemática Moderna.

Diante dessas formas de ensino, percebeu-se que não se logrou sucesso no que diz respeito à aprendizagem dos alunos, já que uma minoria conseguia aprender, pois tais propostas pouco contribuíam para o desenvolvimento cognitivo do aluno, onde ele era preparado para memorizar e repetir procedimentos ensinados durante as aulas. Além disso, o ensino estava voltado para o professor, cabendo ao aluno, escutar, repetir e entender o que faz, não agindo como sujeito em ação na construção do conhecimento. Depois foi discutida uma matemática complexa, que não fazia sentido para o estudante, já que ela não apresentava aplicações que estivessem presente em seu cotidiano.

Com o fracasso dessas propostas, era preciso apresentar um ensino que pudesse fazer o aluno pensar e consequentemente desenvolver habilidades cognitivas, com isso, utilizar a Matemática para entender diversos aspectos da sociedade.

De acordo com Onuchic (1999, p. 203), “A importância dada à resolução de problemas é recente e somente nas últimas décadas é que os educadores matemáticos passaram a aceitar a ideia de que o desenvolvimento da capacidade de se resolver problemas merecia mais atenção”.

Andrade (1998) destaca que, em nível mundial, as investigações sistemáticas sobre resolução de problemas e suas implicações curriculares tiveram início aproximadamente na década de 70. De acordo com ele, grande parte da literatura que hoje se conhece sobre a resolução de problemas foi desenvolvida a partir dos anos 70. Além disso, o autor enfatiza a necessidade de reconhecer a relevância dos trabalhos de George Polya, que datam de 1944, onde mais tarde foi publicado o livro “How to solve it”, cuja primeira edição data de 1945, no qual a resolução de problemas é tratada pela primeira vez como tema de interesse para professores e estudantes, nos níveis superiores.

Na década de 80, após o movimento da Matemática Moderna, aconteceram muitas mudanças curriculares. Nos Estados Unidos, o National Council of Teachers of Mathematics (Conselho Nacional de Professores de Matemática) em "Uma Agenda para a Ação” apresentou uma série de recomendações para a matemática escolar, onde “Resolução de Problemas deveria ser o foco da matemática escolar para aquela década."

Nessa década, trabalhou-se muito com estratégias de resolução de problemas e muitos livros didáticos foram escritos usando-se as ideias de Polya que, desde 1944, falava em resolução de problemas para se ensinar e aprender matemática. Entretanto, os trabalhos realizados se apoiavam em estratégias que apresentavam caminhos de resolução e não, como realmente queria Polya, no pensar dos alunos.

Polya (1995) propôs um método heurístico em quatro etapas: 1ª compreender o problema, 2ª estabelecer um plano, 3ª executar o plano e 4ª fazer o retrospecto ou verificação da solução. Este autor destaca que o objetivo da heurística é o estudo dos métodos e das regras das descobertas e da invenção.

Indícios desse estudo foram identificados por alguns estudiosos, como menciona Schoenfeld em seu artigo, *Problem solving in the United States, 1970–2008: research and theory, practice and politics* (Solução de problemas nos Estados Unidos, 1970-2008: pesquisa e teoria, prática e política).

> No final de 1960, um pequeno número de investigadores (por exemplo, Kilpatrick, 1967; Lucas, 1972; Kantowski, 1977), motivados por escritos de Polya (1945, 1954, 1981) sobre resolução de problemas, começou a identificar as práticas heurísticas utilizadas pelos alunos em o ato de resolver problemas. (SCHOENFELD, 2008, p.538).

Na verdade, quando os alunos mostram os caminhos, as estratégias utilizadas na resolução de um problema, desenvolve o pensar através de experiências que favorecem a aprendizagem. Acreditava-se que se poderia ensinar heurística, no entanto, ela não pode ser ensinada, na verdade, os alunos a adquirem paulatinamente com o tempo.

Refletindo sobre as potencialidades da Resolução de Problemas, começou-se a fazer um planejamento para o desenvolvimento de um trabalho em sala de aula. Conforme Onuchic e Allevatto (2005) analisavam a questão na década de 1980, os recursos foram sendo desenvolvidos quanto à temática da Resolução de problemas. Sempre era visado o trabalho de sala de aula, na forma de coleções de problemas, listas de estratégias e sugestões de atividades que pudessem orientar e avaliar o desempenho em Resolução de Problemas.

De acordo com Andrade (1998), esta década é considerada a idade de ouro da Resolução de Problemas. Ele destaca que o Brasil começou a trabalhar, de modo mais efetivo, sobre Resolução de Problemas.

Finalizando a década de 80, pesquisadores passaram a questionar o ensino e a discutir as perspectivas didático-pedagógicas da resolução de problemas. Então, a resolução de problemas começa a ser pensada como uma metodologia de ensino, ou seja, como um meio de se ensinar matemática. O problema passa a ser concebido como um agente que pode desencadear um processo de construção do conhecimento.

Nesse sentido, Andrade (1998) destaca que a resolução de problemas como uma metodologia de ensino passa a ser o lema das pesquisas e estudos de Resolução de Problemas dos anos 90.

De acordo com Van de Walle (2001, apud Onuchic e Allevato 2004, p. 221), “Muitas vezes se fala em trabalhar com problemas para ensinar matemática sem ter uma ideia clara do que é um problema. Para compreendermos o que é um problema é preciso diferenciarmos de um exercício”.

“Exercício, como o próprio nome diz, serve para exercitar, para praticar um determinado algoritmo ou processo. O aluno lê o exercício e extrai as informações necessárias para praticar um ou mais habilidades algorítmicas” (DANTE, 1989, p. 43).

Um problema para Onuchic (1999) é tudo aquilo que não se sabe resolver mas que, de alguma forma, há o interesse em solucioná-lo.

Para Andrade (2011) um problema é entendido como um projeto, uma questão, uma tarefa, uma situação em que o aluno deseja resolver, explorar ou realizar algum trabalho efetivo.

De acordo com Hiebert (1997, apud Van de Walle, 2009, p.57), “Um problema é definido como qualquer tarefa ou atividade no qual os estudantes não têm nenhum método ou regra já receitados ou memorizados e nem haja uma percepção por parte dos estudantes de que haja um método “correto” específico de solução”.

Para os PCN (BRASIL, 1998, p. 41), “Um problema matemático é uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, mas é possível construí-la”.

Conforme as definições de problemas citadas acima fica claro que se está em busca de uma solução, no entanto, ainda não se sabe como obtê-la. O fato é que existe uma lacuna entre o conhecimento existente e o conhecimento necessário para responder o problema.

Os problemas são discutidos com o intuito de trabalhar novas ideias e conceitos, dessa forma, é comum não ter certeza de como e por onde começar. Nesse sentido, durante a exploração dos problemas, os estudantes aprendem através de suas tentativas e erros. Assim, são escolhidas estratégias partindo do que sabe, com a finalidade de chegar onde não sabe.

Desta forma, devemos iniciar nossas aulas com problemas motivadores que incentivem o aluno a querer resolver, como também desenvolver a criatividade dos estudantes e sensação de prazer pela descoberta. Para Polya (1995, p. 3),

> A resolução de problemas é uma habilitação prática como o é a natação. Adquirimos qualquer habilitação por imitação e prática. Ao tentarmos nadar, imitamos o que os outros fazem com suas mãos e os pés para manterem suas cabeças fora d’água e, afinal, aprendemos a nadar pela prática da natação. Ao

> tentarmos resolver problemas, temos de observar e imitar o que fazem outras pessoas quando resolvem os seus e, por fim, aprendemos a resolver problemas, resolvendo-os.

Van de Walle (2009) salienta que um problema voltado para a aprendizagem da matemática possui as seguintes características: o problema deve começar onde os alunos estão, o aspecto problemático ou envolvente do problema deve estar relacionado à matemática que os alunos vão aprender e a aprendizagem matemática deve requerer justificativas e explicações para respostas e métodos.

O problema deve começar onde os alunos estão, diz respeito às ideias iniciais que os alunos têm para resolver o problema, não perdendo os aspectos desafiantes e interessantes.

O aspecto problemático ou envolvente do problema deve estar relacionando à matemática que os alunos vão aprender, tem como foco dar significado à matemática ao resolver o problema.

A última trata das responsabilidades dos estudantes em validar suas respostas, compreendendo que esse momento é de grande relevância na formalização do problema.

É relevante a compreensão de que, durante sua formação, o indivíduo possa coletar informações e fazer um bom uso delas, ampliando seus conhecimentos e sua alta confiança, diante da própria Matemática e do mundo à sua volta. Assim é preciso que o aluno desenvolva as formas de pensar matematicamente, de acordo com o PCN + (BRASIL, 2002, p. 112),

> A resolução de problemas é peça central para o ensino da Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios. Essa competência não se desenvolve quando propomos apenas exercícios de aplicação dos conceitos e técnicas matemáticos, pois, neste caso, o que está em ação são passos análogos aos daquela situação, o que não garante que seja capaz de utilizar seus conhecimentos em situações diferentes ou mais complexas.

Os PCN indicam a resolução de problemas como ponto de partida da atividade matemática e mostram alguns caminhos que podem ser trilhados pelos professores para fazer matemática na sala de aula.

Atualmente, ainda é muito comum o ensino tradicional nas salas de aulas, ao notarmos o ensino de Matemática, na medida em que é enfatizada a memorização, que não desenvolve o pensar do aluno, tampouco desenvolve sua autonomia. Os PCN destacam que a resolução de problemas como uma possível estratégia pode ser utilizada para mudar esse cenário.

> Em contrapartida à simples reprodução de procedimentos e ao acúmulo de informações, educadores matemáticos apontam a resolução de problemas como

> ponto de partida da atividade matemática. Essa opção traz implícita a convicção de que o conhecimento matemático ganha significado quando os alunos têm situações desafiadoras para resolver e trabalham para desenvolver estratégias de resolução. (BRASIL, 1998, p. 39-40).

No entanto, a prática docente mais efetiva em sala de aula, visa a enfatizar a utilização de técnicas e como deve ocorrer a aplicação de um conteúdo. Conforme os PCN (BRASIL, 1998, p. 40),

> A prática mais frequente consiste em ensinar um conceito, procedimento ou técnica e depois apresentar um problema para avaliar se os alunos são capazes de empregar o que lhes foi ensinado. Para a grande maioria dos alunos, resolver um problema significa fazer cálculos com os números do enunciado ou aplicar algo que aprenderam nas aulas. Desse modo, o que o professor explora na atividade matemática não é mais a atividade, ela mesma, mas seus resultados, definições, técnicas e demonstrações.

Os pesquisadores Cai e Lester (2003) enfatizam que há pouca ou nenhuma evidência de que as habilidades de resolução de problemas dos alunos melhoram isolando a resolução de problemas da aprendizagem de conceitos e procedimentos matemáticos. Para os autores, se quisermos que os estudantes se tornem bons solucionadores de problemas é necessário primeiramente mudar nossa visão de resolução de problemas como um tema que é adicionado à instrução após os conceitos e habilidades terem sido ensinados. E a alternativa para isso é fazer com que a resolução de problemas seja parte integrante da aprendizagem da Matemática.

Uma das perspectivas principais da metodologia de resolução de problemas é iniciar o trabalho com um problema, a fim de construir um novo conceito e conteúdo. Nesse sentido, Onuchic e Allevato (2005) salientam que o problema é o ponto de partida e orientação para a aprendizagem e os professores através e durante a resolução dos problemas, devem fazer conexões entre diferentes ramos da Matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos.

Ao adotar essa metodologia em sala de aula, o professor permite que os alunos ajam como investigadores diante de um problema que o desafia na busca da solução, diversos conceitos são explorados, favorecendo a construção do conhecimento matemático.

É fato que ensinar matemática com problemas não é uma tarefa fácil. Na verdade é necessário planejar e selecionar as atividades, levando em consideração a necessidade do currículo, a compreensão e a realidade em que os alunos estão inseridos. Devemos explorar as potencialidades desta metodologia de ensino, já que os conceitos e procedimentos matemáticos podem ser melhor ensinados através da resolução de problemas. Quando propomos situações que desafiam e fazem o aluno pensar, depreende-se que tal postura faz exigir, dele, uma mudança de atitude.

A tarefa do professor exige atenção e cautela, já que a escolha dos problemas tem um papel importante diante dos conceitos e conteúdos que serão formalizados. Assim é necessário fazer algumas modificações, principalmente quando tivermos que seguir um livro didático que é adotado pela escola. Contudo, existem boas razões para se fazer esse esforço. Onuchic e Allevato (2005), destacam algumas:

> Resolução de problemas coloca o foco da atenção dos alunos sobre ideias e sobre o "dar sentido". Ao resolver problemas, os alunos necessitam refletir sobre ideias que são inerentes e/ou estão ligadas ao problema;
> Resolução de problemas desenvolve nos alunos um "poder matemático". Os estudantes, ao resolverem problemas em sala de aula, se engajam em todos os cinco padrões de procedimentos descritos nos *Standards* 2000: Resolução de Problemas, raciocínio e prova; comunicação; conexões e representação, que são os processos de fazer Matemática, além de permitir ir bem além da compreensão do conteúdo que está sendo construído na sala de aula;
> Resolução de problemas desenvolve a crença de que os alunos são capazes de fazer matemática e de que a matemática faz sentido. Cada vez que o professor propõe uma tarefa com problemas que espera pela solução, ele diz aos estudantes: Eu acredito que vocês podem fazer isso!" Cada vez que a classe resolve um problema, a compreensão, a confiança e autovalorização dos estudantes são desenvolvidas;
> Resolução de problemas prevê dados de avaliação contínua que podem ser usados para tomar decisões instrucionais, ajudar os alunos a terem sucesso e informar os pais;
> É gostoso! Professores que experimentam ensinar dessa maneira nunca voltaram a ensinar do modo "ensinar dizendo". A excitação de desenvolver a compreensão dos alunos, através de seu próprio raciocínio, vale todo o esforço e, de fato, é divertido, também para os alunos;
> A formalização de toda teoria matemática pertinente a cada tópico construído, dentro do programa assumido, feita pelo professor no final da atividade, passa a fazer mais sentido para os alunos. (ONUCHIC E ALLEVATO, 2004, p. 223-224)

A resolução de problemas é utilizada como metodologia de ensino que busca a compreensão de conceitos matemáticos por meio de situações-problema que incentivem o aluno a querer resolver e consequentemente coloca em prática toda a sua autonomia diante de diversas estratégias utilizadas. Com isso, devem-se valorizar os caminhos utilizados pelos alunos, durante a exploração do problema, às vezes, chegar à resposta correta não é o mais relevante e sim reconhecer os procedimentos que foram adotados durante a resolução do problema, possibilitando, ao aluno, a compreensão das ideias matemáticas que são inerentes ao problema proposto.

Para Pais (2013, p. 131), "Um dos objetivos de trabalhar com a resolução de problemas é, de maneira geral, contribuir no desenvolvimento intelectual do aluno, no que diz respeito aos aspectos específicos do saber Matemático". Nesse sentido, os PCN (1998, BRASIL p. 37) dizem que,

> As necessidades cotidianas fazem com que os alunos desenvolvam capacidades de natureza prática para lidar com a atividade matemática, o que lhes permite reconhecer problemas, buscar e selecionar informações, tomar decisões. Quando essa capacidade é potencializada pela escola, a aprendizagem se apresenta melhor resultado.

É preciso salientar que no ambiente escolar os problemas matemáticos têm ganhado destaque, devido à preocupação dos professores sobre como trabalhar com essa metodologia de ensino. A ideia principal dessa metodologia é iniciar explorando um problema, com o objetivo de introduzir um conteúdo, visando à construção de um novo conceito.

Ao final da década de 80, a resolução de problemas passa a ser pensada como uma metodologia de ensino. No entanto, apareceram diversos trabalhos sobre a Metodologia Resolução de Problemas na sala de aula e suas contribuições no processo ensino-aprendizagem da Matemática.

Diversas pesquisas foram desenvolvidas e trazem diferentes concepções sobre a Metodologia de Resolução de Problemas, onde cada uma traz suas contribuições e vão sendo aprimoradas ao longo do tempo.

Os pesquisadores Schroeder e Lester (1989, p. 31) destacam as seguintes concepções: ensinar sobre resolução de problemas, ensinar para resolver problemas e ensinar matemática através da resolução de problemas.

A primeira concepção está relacionada com o trabalho de Polya (1945), que discute sobre as quatro fases da Resolução de Problemas. Esta remete a se trabalhar o conteúdo matemático, destacando as heurísticas utilizadas.

Na segunda, temos os problemas rotineiros e as devidas contribuições para aprendizagem. Assim, estamos preocupados com as habilidades dos alunos em transferir o que está sendo ensinado, na aplicação desses tipos de problemas.

A última concepção será adotada por nós durante a intervenção em sala de aula; ela remete à compreensão da Matemática, no qual o aluno é ator principal, o problema matemático é ponto de partida e o professor age como mediador na construção da aprendizagem da Matemática.

Nesta concepção, os problemas são importantes não somente como um meio de se aprender matemática mas, também, como um primeiro passo para se fazer isso. Uma situação-problema é apresentada com o propósito de se construir novos conceitos e novos conteúdos e a compreendê-los. Essa compreensão da matemática, por parte dos alunos, envolve a ideia de que entender é essencialmente relacionar. Como afirma Onuchic (1999, p. 208),

> [...] esta posição baseia-se na observação de que a compreensão aumenta quando: o aluno é capaz de relacionar uma determinada ideia matemática a uma grande variedade de contextos; o aluno consegue relacionar um dado problema a um grande número de ideias matemáticas implícitas nele; o aluno consegue construir relações entre as várias ideias matemáticas contidas num problema.

Nesse sentido, o aluno aparece como ator principal do processo de aprendizagem, no qual ele faz intervenções por si só, cabendo ao professor mediar e proporcionar situações que levam o indivíduo a pensar matematicamente.

O ensino da Matemática através da Resolução de Problemas é utilizado com menos frequência na sala de aula, acreditamos que tal fato decorre de sua proposta de iniciar a aula propondo um problema, para depois formalizar um novo conceito. Essa ideia está totalmente fora de realidade da formação de diversos professores que estão habituados com o ensino da matemática seguindo o modelo: definição-exemplos-exercícios de aplicação, ou seja, ensinar a resolver problemas. Desta forma, o conceito é apresentado de forma direta, os exemplos servem como padrão na resolução de exercícios de aplicação que promovem a fixação do conteúdo que foi formalizado**.** No entanto, Onuchic e Allevato (2005, p. 223) destacam que,

> A maioria (senão todos) dos importantes conceitos e procedimentos matemáticos pode ser melhor ensinada através da Resolução de Problemas. Tarefas e problemas podem e devem ser dados de modo a engajar os alunos no "pensar sobre" e no desenvolvimento de Matemática importante que eles precisam aprender.

Ao trabalhar em sala de aula, na concepção ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas, o professor valoriza a autonomia dos alunos na compreensão de novos conceitos. Sobre isso, Onuchic (1999, p. 208) diz que,

> O ponto central de nosso interesse em trabalhar o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas baseia-se na crença de que a razão mais importante para esse tipo de ensino é a de ajudar os alunos a compreender os conceitos, os processos e as técnicas operatórias necessárias dentro do trabalho feito em cada unidade temática.

Deste modo, uma abordagem de um conteúdo de Matemática em sala de aula deve estar preocupada com a compreensão do aluno, onde esta deve ser o principal objetivo de ensino. O aluno deve ser encorajado a demonstrar sua criatividade frente ao um problema que o desafie, assim novos conceitos poderão vir a ser compreendidos por ele. Conforme os PCN

(BRASIL, 2006, p. 81),

> As ideias socioconstrutivistas da aprendizagem partem do princípio de que a aprendizagem se realiza pela construção dos conceitos pelo próprio aluno, quando ele é colocado em situação de resolução de problemas. Essa ideia tem como premissa que a aprendizagem se realiza quando o aluno, ao confrontar suas concepções, constrói os conceitos pretendidos pelo professor.

Estas permitem que os alunos ajam como sujeitos em ação, no qual eles vão construir o conhecimento matemático através de problemas que o desafiem e exijam o pensar para obter a solução. Onuchic (1999, p. 208) enfatiza a importância do ensino da matemática através da resolução de problemas ao dizer que,

> Quando os professores ensinam matemática através da resolução de problemas, eles estão dando ao seu aluno um meio poderoso e muito importante de desenvolver sua própria compreensão. À medida que a compreensão dos alunos se torna mais profunda e mais rica, sua habilidade em usar matemática para resolver problema aumenta consideravelmente.

O Ensino da Matemática através da Resolução de problemas é significativo pelo fato de dar autonomia aos alunos na aquisição e compreensão de novos conceitos que estão sendo explorados. Cai e Lester (2003) destacam que o ambiente de aprendizagem do ensino através da resolução de problemas oferece um cenário natural para os alunos apresentarem várias soluções do problema para o seu grupo ou classe e aprenderem matemática por meio de interações sociais (aluno-aluno e professor-aluno), ou seja, negociação, e obter a compreensão compartilhada.

Ao fim da aula, o professor faz uma síntese de todo trabalho realizado pelos alunos, a fim de apresentar uma nova ideia matemática ou conteúdo. Confirmando essa ideia, Cai (2010) diz que, no final, os professores fazem resumos concisos e levam os alunos a compreender os principais aspectos do conceito baseado no problema e em suas múltiplas soluções.

Em meio à resolução de problemas, temos o processo da metacognição que favorece o progresso e a exploração do problema. De acordo com Schoenfeld (2008, p. 538-539), “A influência e importância da metacognição, especialmente de monitoramento e auto regulação, havia sido estabelecida, e não apenas na resolução de problemas matemáticos, mas também em todo desempenho intelectual não rotineiro”.

“A metacognição se refere à monitoração consciente (estar atento a como e por que você está fazendo algo) e a regulação (escolher fazer algo ou decidir fazer mudanças) do seu próprio processo de pensamento” (VAN DE WALLE, 2009, p.78).

Desta forma, a metacognição diz respeito à capacidade de um indivíduo refletir sobre seu próprio fazer ou sobre o seu pensar. Com isso, quando o aluno resolve um problema e depois, repensa na resposta, usando estratégias, argumentos e habilidades cognitivas, consegue ter uma melhor compreensão do problema.

As discussões e pesquisas sobre resolução de problemas sofreram influências de teorias construtivistas, no qual Lev Vygotsky é o principal teórico.

A teoria construtivista é contrária às ideias de Educação bancária que estão presentes no ensino tradicional, onde essa é criticada por Paulo Freire, que vê o aluno como um depósito vazio, que os professores vão preenchendo com informações. No entanto, esta visão é completamente errônea, devemos compreender o aluno como ser autônomo, capaz de pensar e refletir sobre experiências vivenciadas. Conforme Onuchic (1999, p. 210),

> [...] são características de um ensino de matemática construtivista: construir sobre seu conhecimento prévio; enfatizar sobre o pensar; dar tempo para pensar; esperar por explicações ou justificativas para as respostas ou pelo modo de pensar; fazer perguntas e saber ouvir; reconhecer que a matemática é "parte convenção"; trabalhar os conceitos e os procedimentos matemáticos em termo de resolução de problemas.

O trabalho em sala de aula na perspectiva construtivista reconhece no aluno um elemento ativo, consiste em que ele aja como sujeito em ação, ou seja, os problemas discutidos levam à descoberta e à construção do seu próprio conhecimento, partindo do que já se sabe, enquanto o papel do professor é de mediador.

"Ao ensinar pela Resolução de Problemas, um dos dilemas mais desconcertantes é o quanto dizer aos alunos. Por um lado, dizer reduz a reflexão deles" (VAN DE WALLE 2009, p. 75). A questão segundo a qual o professor age como mediador instigando os conhecimentos que os alunos têm visa a construir um novo conhecimento, de modo que lhe deve ser dada a devida importância, pois, quando ele expõe a sua forma de resolver o problema, impede que os estudantes elaborem suas próprias estratégias e, consequentemente, limita a sua criatividade. Van de Walle (2009) destaca três tipos de informação que os professores devem fornecer aos alunos:

> - Convenções matemáticas. As convenções sociais de simbolismo e de terminologia (nomenclatura) importante em matemática nunca serão desenvolvidas por pensamento reflexivo.
> - Métodos alternativos. Você pode, com cuidado, sugerir aos alunos um método ou uma abordagem alternativa para reflexão.
> - Esclarecimento dos métodos dos alunos. Você pode ajuda-los a esclarecer ou interpretar as suas ideias e, talvez, relacioná-las com outras. (VAN DE WALLE,

2009, p.75).

No entanto, Van de Walle (2009, p. 75), também destaca que: “Por outro lado, dizer muito pouco algumas vezes pode resultar em tropeços e desperdiçar um tempo precioso das aulas”.

Assim, o professor deve ser capaz de entender até onde ele pode mediar, não ajudando nem demais nem de menos, mas o suficiente para que os alunos possam pensar e elaborar diversas estratégias para resolver o problema.

É necessário conhecer a realidade em que os alunos estão inseridos, fixar objetivos que se espera alcançar e está preparado para devidas questões que podem aparecer durante a resolução do problema. Além disso, as atividades propostas devem ser acessíveis e que ampliem os conhecimentos que eles têm sobre a Matemática.

De modo geral, o trabalho em sala de aula via Metodologia de Resolução de problemas, deve dar autonomia aos alunos na compreensão de novos conceitos e conteúdos; dar sentido à matemática que está sendo aprendida; tirar a ideia da Matemática como ciência pronta e acabada, e proporciona aos alunos a convicção de que eles são capazes de fazer matemática; fazer o aluno pensar, desenvolvendo sua criatividade e capacidade de investigar e refletir sobre o que está fazendo; proporcionará ao aluno o enfrentamento de situações novas e torna as aulas de Matemática bem mais interessantes e motivadoras.

A Matemática passa a ser vista com outros olhos pelos alunos, no momento em que eles conseguem perceber sua relevância no mundo real. E isso pode acontecer quando ele reconhece problemas matemáticos a sua volta e também quando se faz um estudo detalhado, que possa acarretar o surgimento de novos problemas.

Ao trabalhar com a resolução de problemas, podemos dar ênfase à exploração de problemas que nos permitem ter uma melhor compreensão dos conteúdos que estão sendo discutido. Segundo Andrade (2011, p. 1-2),

> No trabalho de exploração de problemas, há um prazer e uma alegria de ir cada vez mais longe, um ir cada vez mais profundo, um ir cada vez mais curioso, há um ir que chega e nunca chega, um ir que pode sempre ir, um ir que sempre se limita ao contexto do aluno, do professor, da Matemática, da escola ... e por isso pode ir outra vez e mais outra vez ...

Para esse autor a exploração de um problema pode ser caracterizada pelo modelo: **Problema-Trabalho-Reflexões e Síntese (P-T-RS)**. Assim é dado um problema aos alunos e eles realizam um trabalho sobre ele. Além disso, professor e alunos juntos, discutem o trabalho feito num processo de reflexões e síntese. Com isso chegando, assim, à solução do problema, a novos conteúdos, a novos problemas, à realização de novos trabalhos, a novas reflexões e novas sínteses.

Nesse sentido, o trabalho na perspectiva da exploração de problemas permite que o aluno possa fazer diversas descobertas, como também levantamento de ideias no intuito de entender os conceitos matemáticos que vão aparecendo durante a resolução do problema.

Além disso, a exploração de um problema não pode ser vista como fim, mas que, em um determinado momento, podemos retornar ao problema anterior em busca de apresentar um novo conteúdo em um nível mais avançado ou não.

Sobre isso Andrade (1998, p. 23) diz que: “Um problema pode ser trabalhado com os alunos em diversos níveis de complexidade e, também, com alunos de diferentes níveis”.

A resolução de problemas não deve ser vista apenas como uma busca de resposta, mas sim deve estar interessada na compreensão do aluno. Na exploração de um problema o ponto de partida é o aluno, que está diante de um problema aberto, no qual eles desenvolvem sua autonomia, levantando hipóteses, tomando decisões, refletindo sobre o seu fazer e investigando novas questões que vão aparecendo durante o problema. Nesse sentido (CAI, 2010, p.255), diz que: “Os estudantes desempenham um papel muito ativo em sua aprendizagem explorando situações problema com a orientação do professor e ‘inventando’ suas próprias estratégias de resolução”.

Com isso, o trabalho em sala de aula no contexto da exploração de problemas não está interessado apenas na resolução do problema, mas que o problema possa ser explorado sob diversos enfoques matemáticos.

Deste modo, quando o aluno compreende o problema e suas soluções, cabe ao professor incentivar a exploração de novos problemas a partir do problema inicial, visando a uma melhor compreensão dos conceitos envolvidos. Além disso, quando o professor está explorando variações do problema que foi apresentado inicialmente, está propondo meios valorosos que levam os alunos a refletir sobre os significados das diversas ideias matemáticas que estão implícitas no problema apresentado.

No entanto, para que o professor conduza um ambiente de exploração de problemas é necessário valorizar a criatividade dos alunos e sua autonomia, os incentivando na elaboração de suas próprias estratégias, não negando as ideias dos alunos, mesmo que não ajude na resolução do problema. Na exploração do problema, os alunos apontam suas questões e professor conduz um ambiente de reflexão acerca das questões propostas, levando os alunos a compreender as suas próprias perguntas e consequentemente o problema.

Podemos apontar, também, a proposição de problemas como um tema que tem um papel importante na sala de aula. Uma ideia que confirma sua relevância está relacionada ao fato de os alunos deixarem de ser meros expectadores para serem autores em sala de aula. De acordo com Chica (2001, p. 151),

> Nesse processo, aproxima-se a língua materna e matemática, as quais se completam na produção de textos e permitem o desenvolvimento da linguagem específica o aluno deixa de ser um resolvedor para ser um propositor de problemas vivenciando o controle sobre o texto e as ideias matemáticas.

Nesse sentido, o aluno está diante de uma atividade que estimula sua capacidade de pensar, que tem um caráter motivador e desafiador em busca da interpretação da realidade que está sendo descrita.

De acordo com Silver (1994), a formulação de problemas refere-se à criação de novos problemas ou como a reformulação do problema apresentado. Para o autor uma proposta de formulação de problemas em sala de aula, pode ocorrer antes, durante ou depois da solução do problema.

Boavida et al (2008) enfatiza a relevância do trabalho em sala de aula com a formulação de problemas ao afirmar que,

> [...] a formulação de problemas é uma actividade de importância inquestionável, pois contribui não só para o aprofundamento dos conceitos matemáticos envolvidos, mas também para a compreensão dos processos suscitados pela sua resolução. (BOAVIDA et al, 2008, p. 27).

De acordo com tais autoras, quando o aluno é encorajado a escrever, partilhar e resolver seus próprios problemas, eles são conduzidos a um ambiente de aprendizagem muito rico para o desenvolvimento da sua capacidade de resolução de problemas. Além disso, ao propor problemas os alunos desenvolvem o pensamento crítico e capacidades de raciocínio ao mesmo tempo em que aprendem a exprimir suas ideias de modo mais preciso.

Assim, o aluno propõe um problema matemático, com o objetivo de sanar sua inquietação, sua curiosidade, diante de um problema que está sempre presente em seu cotidiano. Com isso, ao formular problemas, os alunos mostram-se capazes de identificar os conceitos matemáticos que estão à sua volta. Sendo assim, eles agirão como sujeitos em ação, no qual vão trabalhar com conteúdos matemáticos, como também o contexto social em que a situação-problema está inserida.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental indicam objetivos dos quais se espera que os alunos sejam capazes de atingir em relação à sua formação nesse nível de ensino. Confirmando a relevância da proposição de problema em sala de aula, os PCN (1998) afirmam que o aluno deve questionar a realidade formulando-se problemas e tratando de resolvê-los, utilizando para isso o pensamento lógico, a criatividade, a intuição, a capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação.

O professor tem papel relevante no trabalho com a proposição de problemas. Para Chica (2001), as primeiras propostas de formulação de problemas devem ser planejadas com muito cuidado, uma vez que os alunos demonstram dificuldades em realizar tal tarefa por estarem acostumadas a somente resolver problemas.

O papel do professor na resolução e proposição de problemas é diferente, já que, na resolução de problemas, o professor propõe problemas aos alunos, cabendo a eles resolverem, enquanto na proposição de problemas o professor deixa de ser o ponto de partida e o aluno é encorajado a problematizar situações vivenciadas, descrevendo o seu próprio roteiro, advindo dos seus conhecimentos cotidianos.

O professor vai orientar, durante todo o processo, partindo das ideias que os alunos têm, de tal forma que ele possa contribuir, com a sua criatividade, levantando hipótese, questionando, fazendo relações entre conceitos matemáticos e problemas que foram já discutidos.

A organização em sala de aula deve ser levada em consideração. Por exemplo, podemos separar os alunos em duplas ou em trios, instigando a cooperação e o respeito mútuo, que vão ajudar na tomada de decisões, diante das experiências trocadas entre si.

“Por ser tão desafiante para os alunos, a formulação de problemas deve ser um espaço para eles comunicaram ideias, fazerem colocações, investigaram relações e adquirirem confiança em suas capacidades de aprendizagem” (CHICA, 2001, p. 158).

É claro que deve ser feito um trabalho que possa ajudar o aluno na formulação de um problema, assim, deve-se apresentar alguns problemas que irão auxiliar na familiarização e construção de modelos que promovam experiências significativas. Nesse sentido, Chica (2001, p. 153) diz: “Os alunos devem ter contato com diferentes tipos de problemas para resolver antes de propormos que criem seus próprios problemas”.

Para Chica (2001), quando o professor faz a intervenção, os alunos conseguem se apropriar de características de um problema matemático, desde que haja espaço para questionamentos que levem à reflexão.

Portanto, quando o aluno formula um problema matemático e depois o resolve, a matemática ganha sentido e se torna uma grande aliada no entendimento de diversos fenômenos da vida real.

A exploração e a proposição de problemas trazem um olhar para além da resolução do problema, visto que permitem um olhar investigador e reflexivo dos conceitos que estão sendo trabalhados, tanto matematicamente, como também para interpretação e compreensão de mundo.

4 PRIMEIRO CONTATO COM O CAMPO DE PESQUISA

Inicialmente, fizemos uma entrevista com os professores de Matemática do Ensino Médio da escola investigada. É importante ressaltar que o objetivo das entrevistas foi ver até que ponto os dados coletados poderiam ou não modificar a sequência de atividades que estava sendo elaborada por nós.

Nesse sentido, buscamos entender alguns aspectos como dificuldades encontradas pelos alunos e professores, estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de problemas de Combinatória, estratégias didáticas utilizadas pelos professores para o ensino de Análise Combinatória, o papel da Combinatória na formação dos alunos, propostas de problemas trabalhados em sala de aula e dentre outros.

As entrevistas foram gravadas com a autorização dos participantes. A entrevista foi do tipo semiestruturada no qual tivemos algumas perguntas que conduziram a entrevista, no entanto, quando achávamos necessário, fazíamos algumas intervenções com o intuito de ajudar e entender o discurso dos participantes.

Participaram da entrevista quatro professores, cujos nomes serão substituídos por Professor A, onde este possui graduação em Geografia e em Matemática, e é professor há 29 anos de escolas pública; Professor B, possui graduação em Geografia e em Matemática, e é professor há 15 anos de escolas pública; Professor C possui graduação em Matemática, e é professor há 6 anos de escolas pública; e por fim o Professor D possui graduação em Matemática, e é professor há 30 anos de escolas pública.

As entrevistas ocorreram no mês de novembro e dezembro de 2015, com a duração de aproximadamente 5 minutos para o professor A e aproximadamente 26 minutos para o professor B, aproximadamente 5 minutos para o professor C e aproximadamente 7 minutos para o Professor D.

É importante ressaltar que os entrevistados se mostraram entusiasmados com a entrevista e colaboram com a realização dela. Durante a transcrição, tentamos reproduzir, fielmente, o discurso produzido pelos participantes.

4.1 Transcrições das entrevistas

a) Professor A

Pesquisador: Na sua opinião, qual a importância de trabalhar com os conceitos iniciais de Análise Combinatória no Ensino Fundamental? Professor A: "É importante porque os alunos deste nível...de ensino, principalmente no Fundamental II, já se deparam com situações que envolvem a Análise Combinatória".

Pesquisador: Qual a relevância de aprender Análise Combinatória?

Professor A: "É de grande relevância o conhecimento deste conteúdo, primeiro porque contar nem sempre é uma tarefa simples, segundo porque a utilização dos métodos de contagem irá facilitar as contagens mais complexas".

Pesquisador: Você utiliza algum material de consulta para auxiliar no Ensino de Análise Combinatória? Quais? Professor A: "Não temos muito material disponível, mas eu utilizo a internet e o livro didático".

Pesquisador: Você conhece algumas ideias dos PCN sobre o ensino de Análise Combinatória? Professor A: "Não, apesar de ter... os PCN eu confesso que nunca consultei".

Pesquisador: Qual o ponto de partida do seu trabalho em sala de aula de Análise Combinatória? Professor A: "Oh! começo falar de exemplos simples como o número de maneiras diferentes de se vestir utilizando duas camisas e três bermudas, depois parte para alguns mais complexos".

Pesquisador: Ou seja, o senhor parte do Princípio Fundamental da Contagem? Professor A: "Isso".

Pesquisador: Qual a utilidade de ensinar Análise Combinatória no Ensino Médio? Professor A: "Ah! é muito útil, além de... surgir com frequência nos exames como do ENEM, Análise Combinatória aparece também em várias situações do cotidiano".

Pesquisador: Quais são as principais estratégias utilizadas pelos alunos para resolverem problemas envolvendo Análise Combinatória no ambiente escolar? Professor A: "Olha, eu vejo que eles utilizam a árvore das possiblidades, também o raciocínio lógico, além das fórmulas existentes".

Pesquisador: Quais as dificuldades encontradas pelos alunos no estudo de Análise Combinatória? Professor A: "Primeiro a baixa estima, e a falta de interesse para ler e entender cada questão, isso dificulta o aprendizado".

Pesquisador: Aponte suas principais dificuldades em trabalhar com a Análise Combinatória em sala de aula.

Professor A: Olha... as dificuldades são a falta de material de apoio que venha nos auxiliar durante o preparo e a execução das aulas.

Pesquisador Para você é fácil responder questões de Análise Combinatória?

“Bem, depende do nível delas...eu encontro dificuldades em algumas delas como por exemplo quando envolve o princípio aditivo?” **Pesquisador: perceber se utiliza o Princípio Multiplicativo ou Aditivo?** Professor A: “Isso”.

Pesquisador: Que estratégias didáticas você utiliza para os alunos compreenderem Análise Combinatória? Professor A: “Olha, primeiro eu peço para que eles pratiquem algumas coisas que lhes venham estimular o cérebro, a pensar, jogar, por exemplo, depois eu aplico exercício, para que eles venham a praticar... vejo que desta maneira a gente consegue trabalhar o conteúdo com eles”.

Pesquisador: Q**ue tipos de problemas do cotidiano são trabalhados em sala de aula?** Professor A: “A gente envolve possibilidades do cotidiano, como questão de placas, quantas placas de veículos poderiam ser organizadas a partir de três letras e quatro algarismos?”.

b) Professor B

Pesquisador: Na sua opinião, qual a importância de trabalhar com os conceitos iniciais de Análise Combinatória no Ensino Fundamental? Professor B:

> Eu acho que a ideia principal é preparar... o aluno para... o Ensino Médio, porque a ideia de se trabalhar estes conceitos iniciais, eu entendo que eles partem de um conceito maior, de um conceito fundamental, que é o Princípio Fundamental da Contagem. Então com base nisso aí, o objetivo principal é preparar o aluno, é alargar o pensamento do aluno para ... a :: ...vamos dizer que, para uma linguagem mais formal, que ele vai se deparar no Ensino Médio.

Pesquisador: Q**ual a relevância de aprender Análise Combinatória?**

> Professor B: Bem é... eu acho que o principal objetivo aqui, é preparar o raciocínio combinatório do aluno, porque ... por exemplo quando ele for trabalhar eh, no Ensino Médio com Probabilidades e Estatística uma das ferramentas principais que ele vai utilizar é a Combinatória, para a compreensão dos conceitos :: ... claro não só se limita a isso, a Análise Combinatória não é apenas uma ferramenta para se trabalhar Probabilidade e Estatística, o próprio cotidiano, o desenvolvimento da civilização, a complexidade das relações sociais ... o mercado de trabalho vai exigir do aluno eh:: ...essa noção de se trabalhar com possibilidades e saber organizar as informações de um problema. Com base nisso aí, resolver as questões dentro do cotidiano escolar eh:: ...e aplicar no dia a dia, tanto é que a Análise Combinatória é um dos assuntos eh:: ..., mais fáceis de você perceber aplicações no dia a dia. É por meio da Análise Combinatória que o aluno vai alargar o pensamento matemático, através do desenvolvimento do pensamento combinatório, mas também vai facilitar eh:: ...uma visão mais global, que vai munir o aluno de ferramentas necessárias para que ele consiga tomar decisões eh:: ... prever resultados no dia a dia, facilitando a vida social dele, coisas desse tipo aí.

Pesquisador: Você utiliza algum material de consulta para auxiliar no Ensino de Análise Combinatória? Quais?

> Professor B: Porque a gente sabe que o nosso sistema eh:: ...educacional ele gira em entorno da metodologia tradicional? Chegar aqui de repente dizer que estamos inovando, fazendo algo diferente é no mínimo uma camuflagem eu entendo assim, então a principal ideia que eu gosto de trabalhar é partir de situações do dia a dia, ou seja, problemas contextualizados do cotidiano dos alunos e, com isso, a gente consegue passar as informações formais da Análise Combinatória, por meio de situações práticas e que estão presente no seu cotidiano.

Pesquisador: Certo, mas esse material de consulta seria o quê? Professor B: "O principal recurso que eu utilizo é o livro didático, trabalho com outros materiais, como materiais concretos do dia a dia, tais como: baralhos e moedas. O professor pode trazer esses materiais para sala de aula, além de recorrer à própria informática e utilizar jogos".

Pesquisador: Você utiliza algum material que oriente sua prática em sala de aula? Professor B: "Tem os PCN, eles... recomendam que no estudo da Análise Combinatória devemos partir do Princípio Fundamental da contagem, pois se observarmos todas as definições e fórmulas da Combinatória partem desse princípio".

Pesquisador: Qual o ponto de partida do seu trabalho em sala de aula de Análise Combinatória?

> Professor B: Há! sem dúvida aqui eu gosto de utilizar situações do dia a dia, problemas contextualizados, eu não diria exatamente eh:: ... que seria a Metodologia Resolução de problemas, que é uma metodologia fortemente estudada e pesquisada pela Educação Matemática, mas seria vamos dizer uma:: ... é um esboço, não sei se posso falar assim, seria mais ou menos um esboço da Resolução de problemas, partir de situações contextualizadas do cotiando que traz uma linguagem informal, e partir daí induzir melhor dizendo formalizar os seus conceitos, claro eh:: ... exigindo certo rigor matemático e uma certa formalidade, mas partindo daquilo que é simples, daquilo que está no dia a dia, daquilo que é informal pra passar para linguagem formal para que aluno construa :: ...os seus próprios conceitos, partindo de uma linguagem mais simples. Eu acho que esse seria um dos grandes desafios de ensinar Análise Combinatória.

Pesquisador: Qual a utilidade de ensinar Análise Combinatória no Ensino Médio?

> Professor B: Ah! sem dúvida aqui eh:: ..., além da Análise Combinatória ela ser uma ferramenta muito útil para compreensão de outros conteúdos, como a Probabilidade e a Estatística, a Análise Combinatória vai facilitar não somente a compreensão desses conteúdos, mas também ela vai preparar o aluno para o seu cotidiano, para trabalhar com situações do dia a dia que requerem eh:: ...previsões

de resultados. Supondo que você tem um conjunto de informações, a Análise Combinatória, através do Princípio Fundamental da Contagem e de outros conceitos vai ajudar você organizar essas informações através de certos conceitos e aplicar no dia a dia e vai levar ao desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos que abarca o raciocínio combinatório, o raciocínio algébrico e geométrico... e o raciocínio combinatório eu diria que é o mais importante entre esses outros conceitos porque remete ao surgimento da matemática, as questões da contagem como a criação dos números, a necessidade de fazer contagem, com isso, a Análise Combinatória é o embrião da própria Matemática.

Pesquisador: Quais são as principais estratégias utilizadas pelos alunos para resolverem problemas envolvendo Análise Combinatória no ambiente escolar?

Professor B: Isso aí, eh... as questões dos desenhos de utilizar tabelas, você busca induzir aluno a desenvolver esboços utilizando números e situações que busquem materializar eh:: ... colocar num papel tudo aquilo que o problema de Análise Combinatória propõe, eh ... eu diria que a importância de fazer esses esboços é como por exemplo estudar geometria espacial, você tem que recorrer a visualização dos desenhos, no caso da Análise Combinatória eu diria que é indispensável utilizar recursos informais, mas que serão fundamental para que você organize as informações e consiga compreender e interpretar o que o problema propõe e passar para uma linguagem formal. Além de utilizar as fórmulas de modo correto para conseguir êxito na resolução e compreensão do conteúdo de Combinatória.

Pesquisador: Quais as dificuldades encontradas pelos alunos no estudo de Análise Combinatória?

Professor B: Eu particularmente acho que a linguagem da Análise Combinatória por si só, exige um pensamento mais apurado não só do professor como também do aluno, então eu acho que... as principais dificuldades encontradas por esses alunos é justamente compreender essa linguagem por ela exigir um raciocínio mais apurado, como por exemplo quando a gente trabalha é combinações e arranjos... gera muita confusão para você conseguir diferenciar, o que é arranjo e o que é combinação, então essa é sem dúvida uma das grandes dificuldades que o aluno tem quando está estudando Análise Combinatória. Os arranjos e as combinações são agrupamentos parecidos, então para você formar esses agrupamentos você vai utilizar permutações de elementos, buscando organiza-los através de permutações que é um dos conceitos que remete é o Princípio Fundamental da Contagem, e partir disso o aluno nem sempre consegue perceber o simples fato de você alterar a ordem dos elementos surge um novo agrupamento. Por exemplo se você tiver os algarismos 1, 2 e 3, aí se você chega para o aluno e mostra que por exemplo com esses algarismos você pode formar o número 123, ao permutar você também tem o número 213, isso acontece com os mesmos elementos, obtendo agrupamentos diferentes, mas se você trabalhar com comissões que não exija uma hierarquia, por exemplo se você tiver três pessoas João, Pedro e Maria partindo do pressuposto que não existe uma hierarquia para formar uma comissão de 3 pessoas, então você pode ter uma comissão com João, Pedro e Maria, se permutar pode ter Pedro, Maria e João... aí você vai perceber que não vai obter um novo agrupamento, ou seja. João, Pedro e Maria ou Maria Pedro e João, são os mesmos agrupamentos. A medida que você expõe situações similar a esta, você facilita a compreensão...das combinações ou arranjos. Você mostra essas duas situações o que existe em comum entre elas e o que existe de diferente e naturalmente os alunos vão perceber que se trata de agrupamentos diferentes. No meu ponto de vista muitas questões exige um pensamento mais elevado, combinações e arranjos eu diria é a maior dificuldade que os alunos encontram, por

> serem conceitos muito próximos, no entanto, as fronteiras que separam um do outro as vezes não são perceptíveis”.

Pesquisador: Aponte suas principais dificuldades em trabalhar com a Análise Combinatória em sala de aula.

> Professor B: Ah! sem dúvidas eh conseguir passar eh:: ...transformar a linguagem complexa que eu entendo como uma linguagem que requer um pensamento não diria abstrato, mas um pensamento mais desenvolvido, para uma linguagem simples. Você tem que ter um pensamento mais apurado, no meu caso a principal dificuldade eh:: ... passar o problema daquela linguagem complexa para uma linguagem mais simples eh:: ... que apresenta um nível mais elevado de raciocínio e tornar aquilo ali mas acessível para o aluno, isso aí nem sempre eu consigo. É eu creio que a maioria dos professores também não...eles têm essas dificuldades pela própria natureza da Análise Combinatória. Então tirar dessa linguagem complexa para uma linguagem mais acessível e simples ao aluno para que ele compreenda, essa é o meu grande desafio é a minha grande dificuldade.

Pesquisador: Para você é fácil responder questões de Análise Combinatória? Professor B: “Não! eh existem questões que ... requer eh:: ...que nem errado nós professores conseguimos desenvolve-las...eu considero um dos conteúdos mais difíceis do Ensino Médio é não somente o conteúdo em si mas também quando você utiliza como uma ferramenta para o entendimento de outros conteúdos eh... exige um pensamento combinatório e nem sempre isso aí a gente consegue, porque eu entendo que esse pensamento deve ser desenvolvido com experiências e com a vivencia do dia a dia. Assim eu considero um conteúdo complicado de você ensinar e de o aluno aprender.

Pesquisador: Que estratégias didáticas você utiliza para os alunos compreenderem Análise Combinatória?

> Professor B: Eu gosto de partir de situações que ocorrem no cotidiano dos alunos, situações corriqueiras e, portanto, informais que utilizamos como estratégia ou mecanismo de se chegar ao rigor e a formalidade dos conceitos eh:: ... propostos que são utilizados pela Análise Combinatória. No qual eu busco induzir sempre o aluno a desenvolver e compreender a Análise Combinatória, com base em situações práticas que eh:: ...fazendo o caminho inverso você apresenta um problemas para depois formalizar os conceitos e as definições. Quando você trabalhar combinações e arranjo, trabalhe com situações que envolvam os dois conceitos, a princípio começo com situações que envolvam puramente o Princípio Fundamental da Contagem, gradativamente você vai aprofundando e vai buscar situações que abarca os conceitos de arranjo e combinação para que o aluno consiga diferenciar esses conceitos. O aluno naturalmente vai formalizar e aprender utilizar o rigor com o passar do tempo de acordo com as experiências que ele vai vivenciar em sala de aula. No entanto, eu também gosto de levantar problemas sobre o Sportingbet que é um jogo de aposta é que possibilita você trabalhar conceitos de Análise Combinatória, ligado a situações práticas do dia a dia, como o jogo de futebol que é uma coisa que os brasileiros gostam. Você pode prever antecipadamente os resultados simulando diversas situações, diversos resultados que pode acontecer, isso vai fazer com que você perceba se é mais vantajoso ou não fazer todas as

> possíveis apostas, tipo se você está diante de três jogos ou somente dois jogos, de acordo com o panorama das possíveis combinações dos resultados você vai prever os resultados e com base nessa previsão ver se é vantajoso ou não apostar em todos os possíveis jogos.

c) Professor C

Pesquisador: Na sua opinião, qual a importância de trabalhar com os conceitos iniciais de Análise Combinatória no Ensino Fundamental?

> Professor C: No Ensino Fundamental os estudos iniciais sobre Análise Combinatória é relevante devido a sua importância em várias aplicações práticas que envolvem contagem, relação, agrupamentos, desenvolvendo no aluno a familiaridade com situações problemas relacionados a contagem de agrupamentos levando-o a compreender o princípio multiplicativo e a explorar a construção de diagramas, tabelas, desenhos e esquemas.

Pesquisador: Qual a relevância de aprender Análise Combinatória?

> Professor C: Com a compreensão do Princípio Fundamental da Contagem, desenvolvem-se métodos para fazer contagem de uma maneira eficiente do número de elementos de um conjunto, aplicando esses conhecimentos nas mais variadas situações-problemas do mundo moderno... A Análise Combinatória é uma importante ferramenta que o cidadão moderno dispõe para solucionar problemas reais seja no mundo das informações, das novas tecnologias, do mercado financeiro e etc.

Pesquisador: Você utiliza algum material de consulta para auxiliar no Ensino de Análise Combinatória? Quais? Professor C: “Sim. O livro didático pela escola, livros, revistas e...sites da internet”.

Pesquisador: Qual o ponto de partida do seu trabalho em sala de aula de Análise Combinatória? Professor C: “Começo apresentando uma situação-problema do cotidiano sobre contagem envolvendo o aluno na busca de estratégia para encontrar a sua solução, em seguida formaliza-se os conceitos sobre o Princípio Multiplicativo”.

Pesquisador: Você falou de problemas do cotidiano, que tipos de problemas do cotidiano de Combinatória são discutidos em suas aulas? Professor C: “Geralmente questões relacionadas...tais como placas de carro, moedas, questões envolvendo tipos de roupas diferentes, questões dessa natureza

Pesquisador: Qual a utilidade de ensinar Análise Combinatória no Ensino Médio? Professor C: “A necessidade de resolver determinados problemas do dia-a-dia que requer a utilização do conhecimento em Análise Combinatória torna-se crucial o ensino deste ramo da Matemática no Ensino Médio”.

Pesquisador: Quais são as principais estratégias utilizadas pelos alunos para resolverem problemas envolvendo Análise Combinatória no ambiente escolar?

> Professor C: As estratégias adotadas pelos alunos na solução de situações problemas sobre Análise Combinatória são: leitura e compreensão do texto, construção de árvores de possibilidades, desenhos, construção de tabelas, manipulação algébrica de fórmulas matemáticas...são essas que eu tenho prestado mais atenção.

Pesquisador: Quais as dificuldades encontradas pelos alunos no estudo de Análise Combinatória? Professor C: “A compreensão dos textos estruturais dos problemas; dificuldades de diferenciar os problemas de arranjos dos problemas de combinação; diferenciar os problemas que envolvem o produto das combinações dos problemas que envolvem a soma das combinações, essas são as mais cruciais.

Pesquisador: Aponte suas principais dificuldades em trabalhar com a Análise Combinatória em sala de aula. Professor C: “A dificuldade da compreensão dos textos estruturais dos problemas, e sua complexidade torna o estudo pouco atrativo, levando-se em conta a grande deficiência do aluno nos conceitos mais fundamentais.

Pesquisador Para você é fácil responder questões de Análise Combinatória? Professor C: “É relativo...algumas questões possuem um grau de dificuldade maior do que outras”.

Pesquisador: Que estratégias didáticas você utiliza para os alunos compreender Análise Combinatória? Professor C: “Modelando situações reais para a aplicação dos conteúdos.

d) Professor D

Pesquisador: Na sua opinião, qual a importância de trabalhar com os conceitos iniciais de Análise Combinatória no Ensino Fundamental? Professor D: “Em minha opinião é que ensinando logo nas séries do Ensino Fundamental teremos maiores chances de compreensão por parte dos alunos no que se refere ao conceito de Análise Combinatória”.

Pesquisador: Qual a relevância de aprender Análise Combinatória? Professor D: “A maior relevância para mim é desenvolver o raciocínio lógico e combinatório dos alunos”.

Pesquisador: Você utiliza algum material de consulta para auxiliar no Ensino de Análise Combinatória? Quais? Professor D: “Sim. Livros, internet e vídeos”.

Pesquisador: Qual o ponto de partida do seu trabalho em sala de aula de Análise Combinatória? Professor D: “Sempre começo expondo uma situação-problema cotidiana onde os alunos vivenciam esse tipo de problemas envolvendo Análise Combinatória”.

Pesquisador: **Como você falou que trabalha com problemas do cotidiano, que tipos de problemas?** Professor D: “Normalmente permutação simples, se eles têm camisas de cores diferentes shorts de cores diferentes, quantas possibilidades eles teriam de escolha para sair para uma festa? Que seja mais próximo deles para que eles possam ter a ideia...da Análise Combinatória”.

Pesquisador: Qual a utilidade de ensinar Análise Combinatória no Ensino Médio? Professor D: “Para que os alunos evoluam em suas técnicas de contagem e possibilite desenvolver estratégias para solucionar problemas de contagem”.

Pesquisador: Quais são as principais estratégias utilizadas pelos alunos para resolverem problemas envolvendo Análise Combinatória?

> Professor D: Na maioria das vezes...até porque eles têm esse contato infelizmente no 2º ano do Ensino Médio eles tentam resolver essas questões apenas com conhecimento básicos que... como agrupamento e a multiplicação, são os meios que mais eles utilizam para tentarem resolver essas questões de Análise Combinatória.

Pesquisador: Quais as dificuldades encontradas pelos alunos no estudo de Análise Combinatória? Professor D: “É eu percebo que eles têm muitas dificuldades de entender e escolher a técnica adequada para solucionar o problema. Esse é o grande problema: ler, entender e reconhecer a técnica a ser utilizada”.

Pesquisador: Se é um arranjo, combinação ou permutação?

> Professor D: Isso, até porque muitas vezes eles estão muito apegados mesmo no Ensino Médio a fórmulas...a fórmulas, então eles perguntam muitas das vezes, é arranjo? É combinação? É permutação? Porque se eu disser qual é, então eles utilizam as fórmulas e, então, o maior problema fica justamente em eles compreenderem essas ideias.

Pesquisador: Então é necessária a utilização de uma metodologia que ajude na compreensão desses tipos de agrupamentos? Professor D: “É verdade, por isso que acredito que iniciando o trabalho com a Combinatória no Ensino Fundamental, quando eles chegassem no Ensino Médio já teriam essa ideia”.

Pesquisador: Eles já chegariam com um pouco do raciocínio combinatório? Professor D: “justamente, então eles poderiam resolver as questões sem precisar conhecer as fórmulas, de algumas questões mais simples é claro?

Pesquisador: Aponte suas principais dificuldades em trabalhar com a Análise Combinatória em sala de aula? Professor D:

> Como eu disse anteriormente, a falta do contato anterior com o conteúdo, eu acredito que se eles chegassem no 2ª ano, e tivesse visto em série anteriores, ficaria tudo mais fácil e a má interpretação e compreensão do problema, muitas vezes eles não respondem por não interpretar bem o problema.

Pesquisador: Você conhece algumas recomendações dos PCN referente ao ensino-aprendizagem de Combinatória?

> Professor D: Eu fiz algumas leituras dos PCN...e uma que eu lembro no momento é que...seria adequado que Análise Combinatória fosse iniciado nas séries iniciais do Ensino Fundamental, porque acredita que crianças mesmo com uma faixa etária baixa, já conseguem fazer esses tipos de combinações. Assim o nível de compreensão seria bem melhor quando a Combinatória fosse apresentada no Ensino Médio...sem contar eh, vamos dizer assim a criança é mais intuitiva...ela tem mais curiosidade, enquanto o aluno do Ensino Médio está atrás de uma fórmula para resolver mais rápido, se preocupando em acertar a questão da prova e não compreendendo os conceitos.

Pesquisador: Para você é fácil responder questões de Análise Combinatória? Professor D:

> Não totalmente... eu acho as questões de Análise Combinatória difíceis e isso ocorre pelo fato da ainda eu ter sequelas do ensino mecanizado, aquele ensino em que você tinha que decorar aquela fórmula e sem aprender realmente os conceitos do conteúdo, por esse motivo eu não acho fácil.

Pesquisador: Que estratégias didáticas você utiliza para os alunos compreender Análise Combinatória? Professor D: "É... eu apresento inicialmente um desafio, ou seja, para que eles façam a resolução de um problema cotidiano e também mando formar equipes para fazer a Construção coletiva da árvore das possibilidades.

4.2 Análise das entrevistas

Com a análise das entrevistas realizadas com os quatro professores do Ensino Médio, evidenciamos algumas ideias relevantes em relação ao ensino-aprendizagem de Análise Combinatória. Na verdade, as histórias pessoais e experiências dos professores remetem a reflexões acerca do ambiente de sala de aula.

Notamos que os professores apontam a necessidade de trabalhar Análise Combinatória no Ensino Fundamental pelo fato de que os alunos se depararam com situações no seu cotidiano que exigem o conhecimento de Combinatória. O professor B destaca que este tópico deve ser trabalhado no Ensino Fundamental pelo fato de preparar o aluno para uma abordagem no Ensino Médio que trabalha com uma linguagem mais complexa.

O Professor D acrescenta que uma abordagem da Combinatória no Ensino Fundamental permite que o aluno tenha uma maior compreensão dos conceitos. Ele ainda destaca que os Parâmetros Curriculares Nacionais recomendam que um estudo da Análise Combinatória devam se iniciar nesta modalidade de ensino.

Para o Professor B a intervenção do professor em sala de aula no Ensino Fundamental deve partir do Princípio Fundamental da Contagem como base para o entendimento de outros conceitos que serão apresentados no Ensino Médio.

O Professor C afirma que uma abordagem da Combinatória no Ensino Fundamental desenvolve uma familiaridade com problemas de contagem, além de serem discutidas diversas estratégias que levam a compreensão do Princípio Multiplicativo.

O professor A salienta que a necessidade de aprender Combinatória parte da ideia de contagem, que tal processo nem sempre é uma tarefa fácil. O professor B aponta que a Análise Combinatória serve como ferramenta para o estudo da Probabilidade e Estatística. No entanto, ele adverte que a Combinatória não serve apenas como ferramenta para o estudo desses tópicos, já que os conhecimentos relativos à Análise Combinatória instrumentalizam o aluno para fazer diversas intervenções em seu cotidiano. Além disso, os Professores B e D destacam que este tópico desenvolve o pensamento matemático do aluno, mais especificamente o raciocínio combinatório, que permite ao aluno organizar números e informações de forma adequada, levando em consideração certas condições. Nesse sentido, o Professor B salienta que esse tipo pensamento matemático vai possibilitar, ao aluno, tomar decisões e prever resultados.

Para o Professor C, os métodos de contagem servem para fazer diversas intervenções no mundo em que vivemos; assim, a Combinatória se apresenta como importante ferramenta para solucionar problemas da vida real. No entanto, não destaca quais eram os problemas a que estava se referindo.

O principal material de consulta utilizado pelos Professores A, B, C e D durante as aulas de Combinatória é o livro o didático. No entanto, o Professor B salienta que o uso de materiais concretos que estão presente no dia-a-dia do aluno, como moedas e baralho podem auxiliar no ensino da Combinatória.

O professor B destaca que sua prática em sala de aula segue a sugestão dos Parâmetros

Curriculares Nacionais que salientam a necessidade de iniciar o estudo deste tópico a partir do Princípio Fundamental da Contagem.

Notamos que o professor B está sempre assinalando que o trabalho em sala de aula da Combinatória deve partir de situações contextualizadas do cotidiano do aluno. Ele diz que as suas aulas são ministradas perto da perspectiva da Metodologia de Resolução de problemas, no qual consiste em partir de uma situação problema para construir novos conceitos. Além disso, ele diz que o trabalho em sala de aula da Combinatória com a Resolução de problemas se apresenta como um grande desafio para o professor.

Os Professores C e D também apontam que partem de situações-problema do cotidiano dos alunos. No entanto, o Professor C destaca que, a partir desses problemas, formaliza o conceito do Princípio Multiplicativo, e o faz ao fim da aula.

O professor A destaca que inicia suas aulas de Combinatória partindo de alguns problemas clássicos, que estão associados a situações em que você tem uma coleção de objetos e quer combinar com todos os elementos de outra coleção de objetos, ou seja, ele valoriza problemas que utilizam o Princípio Fundamental da Contagem como ponto de partida. Em seguida, são trabalhados problemas que apresentam conceitos mais complexos. No entanto, ele não foi claro ao discorrer sobre como esses problemas são trabalhados em sala de aula.

Os Professores C e D destacam problemas que envolvem o Princípio Fundamental da Contagem, como problemas relacionados às placas de veículos, maneiras possíveis de se vestir com diferentes peças de roupas.

Os Professores A, B e C concordam que a Combinatória aparece como um tópico importante na formação do aluno, pois permite que ele resolva problemas do cotidiano. No entanto, o Professor A aponta como necessidade de aprendizagem deste tópico, por estar presente em exames que dão acesso ao aluno para a universidade.

Com relação às estratégias utilizadas pelos alunos para resolver problemas de Combinatórias os professores destacam algumas como: a árvore de possibilidades; tabelas e o Princípio Fundamental da Contagem; desenhos; além de recorrer às fórmulas.

Por outo lado eles salientam dificuldades encontradas pelos alunos nos problemas de Combinatória. O Professor B argumenta que este tópico apresenta conceitos, cuja linguagem é complexa. Ele afirma que os problemas de arranjo e combinação geram confusão entre os alunos em relação à sua diferenciação. Ele propõe duas situações que, para ele, levariam o aluno a diferenciar estes conceitos.

Os Professores C e D concordam que alunos têm dificuldades para ler e compreender os problemas, apresentando dificuldades na distinção dos problemas de arranjo e combinação. Além disso, o Professor D destaca que a maioria dos alunos tenta identificar os tipos de agrupamento para recorrer às respectivas fórmulas.

O professor C apresenta uma dificuldade relacionada ao conceito de combinação, já que problemas que envolvem o produto e soma das combinações se apresentam como dificuldade em sua diferenciação.

Para o Professor A, as dificuldades encontradas dizem respeito às atitudes dos alunos em sala de aula, como a falta de interesse que leva ao mau desempenho das atividades propostas.

O Professor B aponta que a sua ação pedagógica em sala de aula comtemplando a Combinatória, apresenta como principal dificuldade, tornar conceitos relativamente complexos, acessível ao aluno, tais como as ideias de: arranjo; permutação e combinação simples. Para o Professor A, a falta de material de apoio promove um obstáculo para o trabalho da Combinatória em sala de aula.

O Professor D diz que o seu trabalho em sala de aula com a Combinatória é dificultado pelo fato de os alunos não terem contato com este tópico no Ensino Fundamental.

Quando questionamos os professores se é fácil responder questões de Combinatória, surgiram algumas respostas interessantes. Para o Professor A, sua dificuldade está nos problemas que envolvem Princípio aditivo e multiplicativo. Já o Professor B diz que para ele as questões de Combinatória não são fáceis. Ele vai mais além afirma que as dificuldades existem, tanto para quem aprende como para quem ensina.

O Professor D destaca que acha as questões de Combinatória difíceis, pelo fato de sua formação básica ter ocorrido dentro do modelo tradicional de ensino, que valoriza o uso das fórmulas sem se preocupar com a sua compreensão e isso promoveu o seu mau aprendizado.

Para atingir os objetivos em sala de aula em relação ao ensino-aprendizagem da Análise Combinatória, os professores destacaram algumas estratégias adotadas. O professor A diz que trabalha com alguns jogos que levam o aluno a pensar e depois são trabalhados exercícios.

O professor B procura partir de situações do cotidiano do aluno, no qual ele parte de um problema para formalizar um novo conceito. Ele aponta a necessidade de se trabalhar com o Princípio Fundamental da Contagem para depois apresentar os conceitos de arranjo e combinação. Além disso, é necessário estar sempre atento na compreensão dos alunos em relação à diferenciação destes conceitos. Contudo, o Professor B destaca uma proposta de atividade que pode ser trabalhada em sala de aula, o Sportingbet, que é um jogo de aposta, que permite trabalhar com alguns conceitos da Combinatória. Enquanto os Professores C e D destacam que também partem de situações cotidianas.

4.3 Algumas considerações sobre os resultados das entrevistas

De modo geral, notamos que os professores reconhecem a importância da Análise Combinatória na formação do aluno. Algumas experiências vivenciadas por eles em sala de aula possibilitaram diversas reflexões, diante das perguntas feitas na entrevista.

Deste modo, eles evidenciaram estratégias que os alunos utilizam para resolver problemas de Combinatória. Isso fez com que olhássemos para a nossa proposta de atividades e ver se ela valoriza a utilização dessas estratégias. No entanto, durante a elaboração das atividades, ficamos atentos para problemas que levam o aluno a recorrer a diversas estratégias, como as citadas pelos professores, visto que elas desenvolvem o raciocínio combinatório, no qual os professores se mostram preocupados com um trabalho que possa favorecer a construção desse tipo de pensar matemático.

Além disso, os professores também evidenciaram dificuldades encontradas pelos alunos no estudo de Combinatória. A principal diz respeito à distinção entre os problemas de arranjo e combinação, no qual já percebemos que essa é uma dificuldade comum relativa à natureza dos problemas de Combinatória. Desse modo, trazendo um olhar para nossa proposta de atividades, acreditamos que ela procura evidenciar, para os alunos, a diferença entre esses tipos de problemas.

Os professores deixam claro que ainda têm o livro didático como principal recurso nas aulas de Combinatória, no entanto, destacam o uso de jogos e materiais concretos como moedas e baralho, como uma alternativa relevante nas aulas de Análise Combinatória. Em nossa proposta de atividades, procuramos valorizar o trabalho com materiais concretos, visto que acreditamos que a resolução dos problemas pode acontecer quando o aluno consegue fazer simulações de cada etapa.

Um dado importante mencionado por um professor, diz respeito à metodologia utilizada em sala de aula. Ele destaca que os conceitos de Combinatória podem ser compreendidos em uma abordagem através da Resolução de problemas, e que o desenvolvimento de tal proposta em sala de aula se apresenta como desafio para o professor.

Apontam também suas dificuldades em resolver problemas deste tópico, como reconhecer se durante a resolução do problema recorre-se ao Princípio Aditivo ou Multiplicativo. Destacam que a Análise Combinatória apresenta uma linguagem complexa que remete à dificuldade no processo ensino-aprendizagem. Com isso, é preciso trabalhar com problemas do cotiando do aluno, que possam fazer com que este se envolva na busca de solução.

Tivemos um professor que mencionou uma proposta de atividade que trabalha com alguns conceitos de Combinatória e que poderia ser trabalhada em sala de aula. Assim, fomos investigar, e elaboramos uma atividade a respeito do Sportingbet que trabalha com aposta de jogos de futebol nacional e internacional, dentre outras modalidades de esportes. Promovendo, ao fim, modificações em nossa proposta de atividades, visto que implementamos uma nova atividade para trabalhar em sala de aula.

É fato que o papel das entrevistas nesta pesquisa foi de ver até que ponto os discursos dos professores, poderiam promover modificações na sequência de atividades que estavam sendo elaboradas por nós.

Contudo, os dados coletados foram tão ricos que podem vir a ser, inclusive, usados em pesquisas futuras. Este trabalho não teve como propósito fazer uma análise mais detalhada quanto às entrevistas, porém, nota-se que elas refletem o cotidiano da vivência de cada aluno.

Desta forma, é recomendável que os professores trabalhem com metodologias que levem o aluno à compreensão dos conceitos. Além disso, ele tem que ser criterioso e cauteloso na escolha de atividades que levam o aluno a elaborar diversas estratégias, contribuindo para o desenvolvimento do pensamento combinatório. Os problemas podem partir do cotidiano do aluno, mostrando que o conhecimento matemático se faz necessário.

5 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DAS AULAS

A pesquisa foi realizada em uma turma do 2ª ano do Ensino Médio no turno matutino da Escola Estadual do Ensino Fundamental e Médio Agenor Clemente dos Santos na cidade de Alagoinha-PB.

A nossa intervenção em sala de aula foi dividida em dois momentos. No primeiro momento, nos propusemos a trabalhar com uma sequência de atividades de Combinatória via Resolução e Exploração de problemas. Para se fazer isso, foram realizados 10 encontros, totalizando 12 aulas, em que vamos trazer a descrição e reflexões sobre o que foi observado durante a intervenção, e que julgamos ser importante para o ensino-aprendizagem da Análise Combinatória via metodologia Resolução e Exploração de problemas.

5.1 1º Encontro (uma aula) – dia 15/02/2016

Inicialmente, o professor-pesquisador se apresentou à turma, enfatizando que sua intervenção em sala de aula decorria de uma pesquisa de mestrado e que a metodologia a ser adotada seria diferente daquele que eles estavam habituados, visto que, num primeiro momento, iríamos inverter o modelo de uma aula tradicional, que consiste em apresentar um conceito, em seguida são discutidos exemplos e por fim exercícios de aplicação. Assim destacamos que iniciaríamos a aula com uma atividade. No entanto, seria necessário que eles ficassem atentos às seguintes informações:

- Ao fim da aula, os problemas seriam recolhidos;
- Depois de ter resolvido o problema e perceber que no caminhar da discussão a sua resolução estava incorreta, não poderia apagar o registro dela;
- É importante a frequência na sala de aula;
- A avaliação ocorrerá de forma contínua e será feita a partir do que eles fazem (certo ou errado).
- Será observada e avaliada a interação dos membros do grupo durante a realização das atividades;
- É importante o potencial de participação e o envolvimento nas discussões;
- Eles teriam que ler o problema e identificar que é dado e o que se pede;
- Remanescendo qualquer dúvida sobre o problema, poderia solicitar a ajuda do professor-pesquisador.

Em seguida foi entregue um problema para cada aluno e eles iriam realizar um trabalho sobre ele. Os alunos se reuniram em grupos de três e em duplas. Como havia na sala

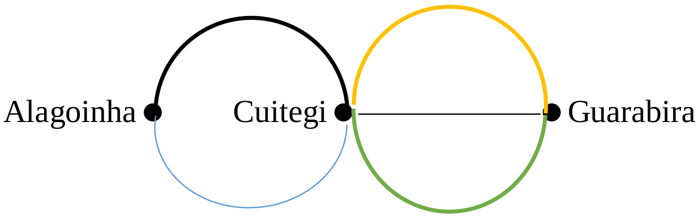
34 alunos foram formados dez grupos de três alunos e duas duplas.

É importante ressaltar que o Professor C que participou da entrevista é o professor titular da turma em que a pesquisa foi realizada.

Durante a descrição vamos denotar os grupos por: G1, G2, G3, G4, G5, G6, G7, G8, G9, G10, G11 e G12. Ao longo dos encontros foram feitos comentários sobre o que captamos em sala de aula e indicamos por C.O.

Atividade 1 – Problema das cidades:[2]

Daniela mora na cidade de Alagoinha-PB. Existem duas linhas de ônibus que liga a cidade de Alagoinha- PB à Cuitegi-PB e três linhas de ônibus que liga cidade de Cuitegi-PB e Guarabira-PB.



a) *De quantos modos diferentes Daniela pode ir de Alagoinha-PB à Guarabira-PB, passando por Cuitegi-PB?*
b) *De quantos modos ela pode fazer o trajeto de ida e volta de Alagoinha-PB a Guarabira-PB, passando por Cuitegi-PB, sem passar na linha usada na ida?*

O objetivo da atividade 1 era trabalhar com o diagrama de árvores como uma ferramenta que ajuda na visualização de todas as possibilidades, possibilitando a contagem delas.

C.O: Acreditamos que o uso da árvore de possibilidades é essencial nas primeiras aulas de Combinatória, o qual serve para resolver alguns problemas, além de validar as suas resoluções. No entanto, nem sempre vai ser viável recorrer a este recurso, por causa da quantidade de possibilidades. Por outro lado, a construção de alguns casos pode ajudar na visualização de todas as possibilidades. Almeida (2010) e Silva (2013) apontam, em suas pesquisas, que árvore de possibilidade é um meio valoroso para observação de padrões que leva a generalização e abstrações de eventos.

[2] ATIVIDADE 1 – Adaptado do livro **Matemática Paiva**, Paiva (2009).

O grupo 4 de imediato nos solicitou, afirmando que não estava compreendendo o problema:

> G4 (Aluno 1): Professor, não estou entendendo o problema.
> PP: Vocês já leram o problema?
> G4 (Aluno 1): Três vezes. Acho que é só questão de lógica.
> PP: Então, leia novamente
> .

C.O: Notamos que alguns alunos estavam confusos quanto à metodologia adotada, visto que começar inicialmente com um problema, sem ao menos trabalhar o conteúdo, se apresentava como um desafio para eles. Percebemos que os alunos tiveram dificuldades para ler e interpretar o problema.

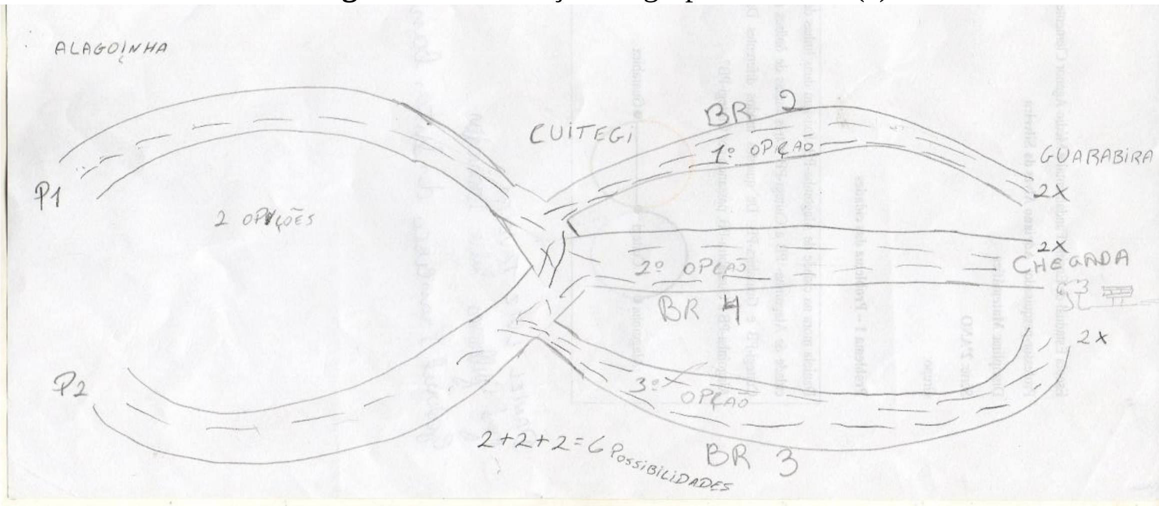
O grupo 7 nos solicitou:

> G7 (Aluno 1): Professor, sabemos que existem duas linhas de ônibus que ligam Alagoinha à Cuitegi uma por cima outra por baixo e três linhas de ônibus que ligam Cuitegi a Guarabira.
> PP: Isso. Passando pela primeira linha que ligam Alagoinha a Cuitegi quantos caminhos podem ser combinados de Cuitegi a Guarabira?
> G7 (Aluno 1): 3.
> PP: E passando pela segunda linha?
> G7 (Aluno 2): Também 3.
> PP: Então quantas as possibilidades?
> G7 (Aluno 1): No caso 3 + 3 = 6 possibilidades.

C.O: No diálogo, o grupo G7 utilizou o Princípio Aditivo para resolver o item (a). Para o primeiro contato dos alunos com o conteúdo, resolvemos começar com um problema que pudesse evidenciar a multiplicação direta, com o intuito de explorar um problema de contagem fazendo uso do Princípio Fundamental da Contagem, e que este princípio pode estar associado a uma situação em que temos objetos de um conjunto X e combinamos com todos os objetos de um conjunto Y, podendo assim ter uma clareza de todos os agrupamentos que podem ser formados.

No item (a), tivemos uma solução bem criativa no qual o grupo G2 recorreu a um desenho para representar todas as possibilidades, fazendo a contagem dos possíveis caminhos. Veja abaixo:

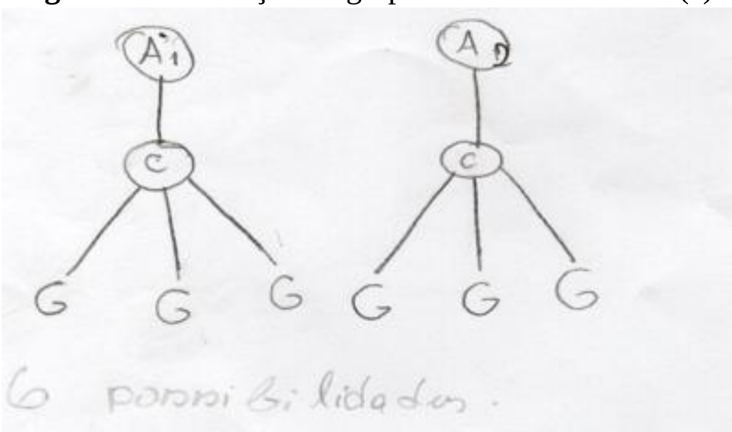
Figura 1 – Resolução do grupo 2 no item (a).



Fonte: Dados da pesquisa.

No entanto, a estratégia mais utilizada entre os grupos foi a árvore de possibilidades. Os G4, G6, G9, G8 e G12 resolveram o problema corretamente utilizando este recurso.

Figura 2 – Resolução do grupo 8 referente ao item (a).



Fonte: Dados da pesquisa.

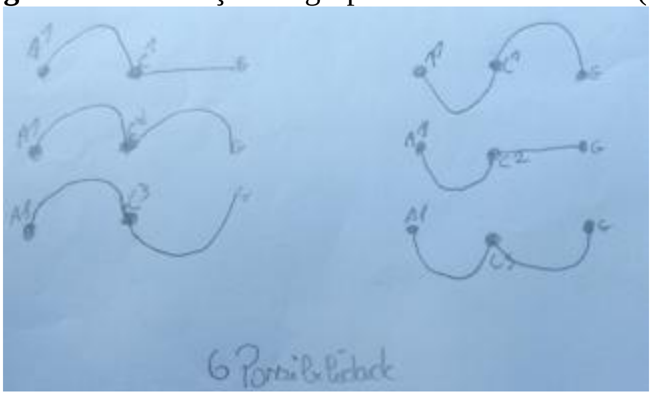
O uso desta estratégia foi fruto da descoberta dos grupos que, ao serem desafiados, conseguiram sobressair, evidenciando a compreensão do problema.

O problema consistia em trabalhar com o Princípio Fundamental da Contagem de forma direta, bastando realizar o produto entre as etapas: ir de Alagoinha à Cuitegi e Cuitegi à Guarabira, o diálogo abaixo mostra como o grupo G9, chegou a esta conclusão:

> G9 (Aluno 1): Professor, estou fazendo por etapas.
> PP: E quais são as etapas?
> G9 (Aluno 1): Primeira etapa de Alagoinha a Cuitegi duas possibilidades e segunda etapa de Cuitegi a Guarabira três possibilidades.
> PP: E qual a sua conclusão?
> G9 (Aluno 2): Eu fiz $2 \cdot 3 = 6$ possibilidades.

Com essa mesma compreensão o grupo G6 descreve todas as etapas, fazendo as possíveis representações de ir de Alagoinha a Guarabira, passando por Cuitegi..

Figura 3 – Resolução do grupo 6 referente ao item (a).



Fonte: Dados da pesquisa.

Apenas os grupos G3 e G5 apresentaram a resolução incorreta para o problema, enquanto os outros grupos expuseram a resolução correta. Ao notar que a maioria dos grupos tinha chegado à solução do item (a) recorrendo ao diagrama de árvore, desenhos, representações dos possíveis caminhos e ao Princípio Fundamental da Contagem, encorajamos os alunos na busca da solução do item (b).

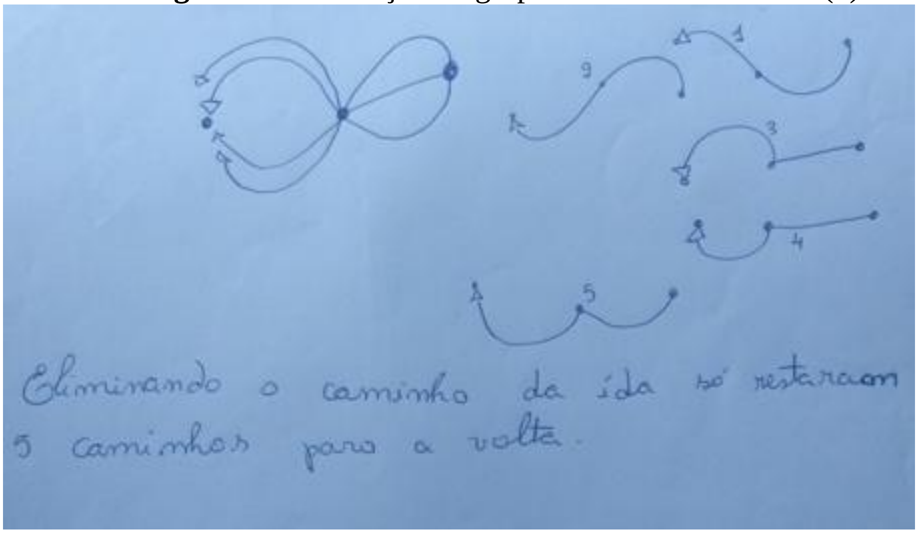
C.O: No item (b) era impraticável a utilização direta do Princípio Fundamental da Contagem. Assim eles tinham que perceber, no trajeto de volta, o número de possibilidades para cada etapa. No entanto, não tivemos nenhum registro da utilização do Princípio Fundamental da Contagem neste problema. A dificuldade foi bem maior neste item, no entanto, alguns grupos estavam se apoiando na resolução do item (a), visto que já era do seu conhecimento o número de possibilidades para ida, porém, estavam com dificuldades em relação ao número de escolhas para cada etapa da volta.

O diálogo com o grupo G1, evidencia isso:

> G1 (Aluno 3): Agora tenho que considerar a ida e a volta?
> PP: Isso!
> PP: Na ida são quantas possibilidades?
> G1 (Aluno 3): 6 possiblidades, agora o da volta tá difícil.
> PP: Tente observar o número de possibilidades para cada etapa.

É importante destacar a resolução do G12:

Figura 4 – Resolução do grupo 12 referente ao item (b).

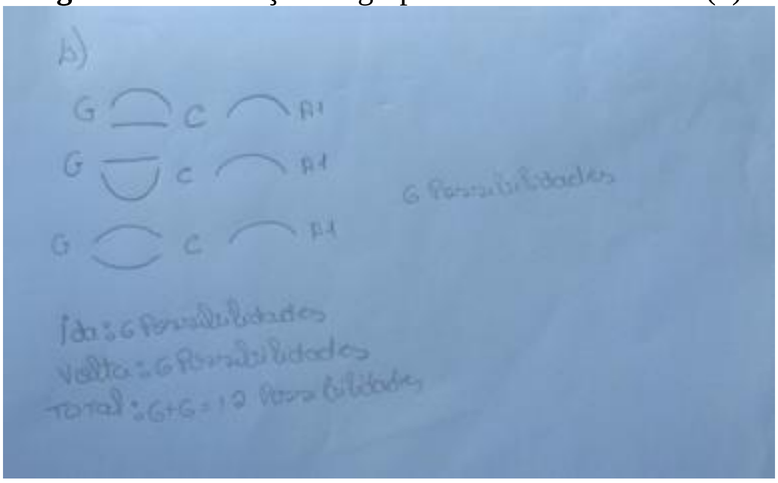


Fonte: Dados da pesquisa.

C.O: Nota-se que os alunos não observaram que se fosse eliminado o caminho de ida, ainda teríamos duas linhas que ligam Guarabira a Cuitegi e uma que liga Cuitegi a Alagoinha. Assim, recorrendo ao Princípio Fundamental da Contagem, temos: $\frac{3 \cdot 2}{Ida} \cdot \frac{2 \cdot 1}{Volta} = 6 \cdot 2 = 12$ possibilidades.

O G6, G9 e G10 resolveram o problema corretamente. Eles utilizaram, como estratégia de resolução, a representação dos possíveis caminhos, e ao fim, adiciona ao total de possibilidades encontrada no item (a), obtendo o total de 12 possibilidades.

Figura 5 – Resolução do grupo 10 referente ao item (b).



Fonte: Dados da pesquisa.

Os G1, G2, G8 e G12 apresentaram a resolução parcialmente correta percebendo no item (a) que havia 6 possibilidades para ir de Alagoinha a Guarabira passando por Cuitegi, enquanto os demais grupos apresentaram a resolução incorreta.

Ao fim, da aula, fizemos a explicação na lousa evidenciando as resoluções encontradas pelos grupos no item (a), abrimos uma discussão para a resolução encontrada pelos G6, G9, G10 e G12 no item (b) com a finalidade de chegar ao consenso sobre a resolução correta. No entanto, tivemos o cuidado de não expor o grupo que apresentou a resolução incorreta.

C.O: No item (a), tivemos alguns grupos que conseguiram resolver utilizando o Princípio Fundamental da Contagem de forma direta, já no item (b) a utilização do Princípio Fundamental da Contagem de forma direta era impraticável, assim era necessário observar quantas possibilidades existem para cada evento. Na maioria dos problemas de Combinatória, a utilização do Princípio Fundamental da Contagem de forma direta é impraticável. Para fazer um bom uso desta estratégia na resolução dos problemas, é necessário observar e selecionar o número de possibilidades para determinada escolha, levando em consideração algumas condições.

5.2 2º Encontro (uma aula) – dia 18/02/2016

Dando continuidade à pesquisa, solicitamos que os alunos se reunissem em grupos de três ou duplas em alguns casos, em seguida foi entregue uma cópia do problema a cada aluno. Notamos que os grupos foram praticamente os mesmos da aula anterior, apenas dois grupos foram modificados pelo fato de estarmos no início do ano letivo, e sempre há trocas de alunos para outra turma. Foram formados nove grupos e duas duplas.

Atividade 2 – Problema dos códigos:[3]

Gerlane dispõe dos algarismos 1, 2, 3 e 4 e de uma moeda. Pretende fazer códigos compostos inicialmente por um número de dois algarismos, seguido por uma das faces da moeda. Quantos códigos diferentes ela pode criar?

a) *Se os códigos fossem criados com algarismos distintos seguido de uma das faces da moeda, quantas são as possibilidades?*
b) *Se os códigos fossem criados com números pares de dois algarismos seguidos de*

[3] ATIVIDADE 2 - Atividade formulada pelo pesquisador.

uma das faces da moeda, quantas são as possibilidades?

c) *Se os códigos fossem criados com números de quatro algarismos seguido de uma das faces da moeda, quantas são as possibilidades?*

O problema tinha como objetivo trabalhar com estratégias que levam ao desenvolvimento do raciocínio combinatório, como a construção da árvore de possibilidades, enumeração sistemática de todas as possibilidades, construção de tabelas, além da pretensão de formalizar a ideia essencial do Princípio Fundamental da Contagem.

Com o intuito de facilitar a visualização de todas as possibilidades, foi entregue aos alunos fichas enumeradas de 1 a 4 e uma moeda.

O Grupo 8 solicitou a ajuda do professor e questionou:

> G8 (Aluno 1): Uma face da moeda, como assim professor?
> PP: Quais são as faces de uma moeda?
> G8 (Aluno 1): Cara ou coroa.
> PP: Correto".

Com a pergunta do grupo 2 o professor-pesquisador foi a lousa, explanou aos alunos que eles podem denotar as faces da moeda da seguinte forma, C = cara e K = coroa.

O grupo 10 questionou o professor-pesquisador:

> G10: Como assim um número de dois algarismos?

Deste modo, o professor-pesquisador sentiu a necessidade de ir novamente à lousa, pelo fato de perceber que alguns alunos não estavam entendendo o problema inicialmente.

> PP: Se um desses códigos fosse a senha da Wifi de internet, como vocês fariam para descobrir?
> Turma: Professor a gente teria que saber quais são todas as senhas para ir testando até achar a correta.
> Turma: Professor poderia ser 11 C, 12 C, 13 C e 14 C, 21 C...
> Turma: No caso professor basta trocar as posições dos números?
> PP: Isso!

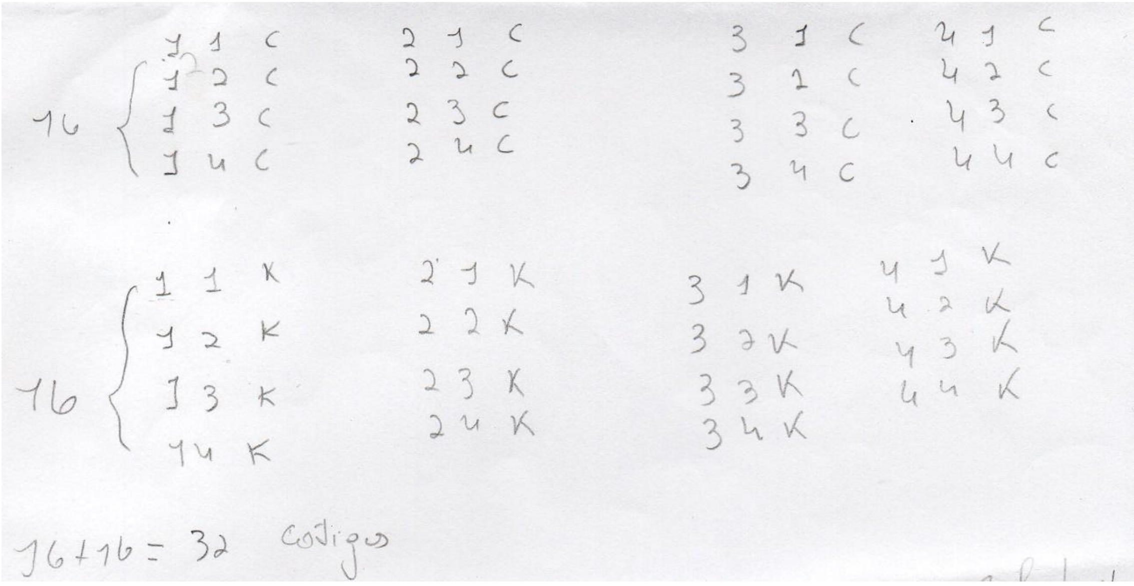
C.O: Quando na mediação conseguimos expor situações cotidianas, como no diálogo acima em que enfatizamos a necessidade de descobrir uma senha de internet, percebemos que os alunos têm facilidade em fazer conexão da Matemática que está aprendendo com seus afazeres cotidianos. Esta atividade possibilita aos alunos perceber que quando os elementos são trocados se obtém um novo agrupamento. Essa ideia permite-lhes organizar os dados levando em consideração a ordem dos elementos, preparando para o estudo de outro conceito matemático que será apresentado no decorrer da pesquisa.

O G8 solicitou o professor e disse:

G8 (Aluno 2): Professor, encontramos a resposta.
PP: E qual é?
G8 (Aluno 1): 32 possibilidades.
PP: E como vocês fizeram?
G8: Fizemos todas as possibilidades".

O G8 apresentou como estratégia uma lista organizada de todas as possibilidades.

Figura 6 – Resolução do grupo 8 referente à atividade 2.



Fonte: Dados da pesquisa.

Através do diálogo com professor-pesquisador, o grupo 4 também chegou à resolução do problema.

G4: Professor a resposta é 16.
PP: Como vocês fizeram?
G4 (Aluno 1): Fizemos todos os códigos que contém a face cara.
PP: E a face coroa?
G4 (Aluno 2): Coroa é um número?
PP: Não. Coroa é uma das faces da moeda.
G4 (Aluno 2): Então é duas vezes dezesseis.
PP: Porque?
G4 (Aluno 2): Porque vai ter mais dezesseis coroas.
PP: Isso!

Apenas o grupo G3 não conseguiu resolver o problema inicial, apresentando a resolução parcialmente correta, já que o grupo listou algumas possibilidades.

As estratégias utilizadas foram: a uma enumeração sistemática de todas as possibilidades, utilização de tabelas e árvore de possibilidades.

Estávamos interessados em evidenciar a utilidade do Princípio Fundamental da Contagem na resolução desses problemas, e consequentemente formalizar esse conceito matemático e quando possível retornar ao problema anterior. No item (a) o grupo 8 questionou o professor-pesquisador:

> G8 (Aluno 1): Professor na letra (a) também é 32 possiblidades.
> PP: Você fez a leitura do problema?
> G8 (Aluno 1): Sim.
> PP: Conseguiu observar que agora temos um novo problema? Agora é com números distintos. O 12 entraria?
> G8 (Aluno 1): Sim. Não entraria o 11.
> PP: Isso!

No entanto, percebemos que alguns alunos estavam com dificuldades no item (a) pelo fato de não terem compreendido o termo "distinto", daí fomos à lousa e questionamos:

> PP: O que é algo distinto?
> Turma: Diferente. Nesse caso algarismos diferentes.
> PP: Isso!

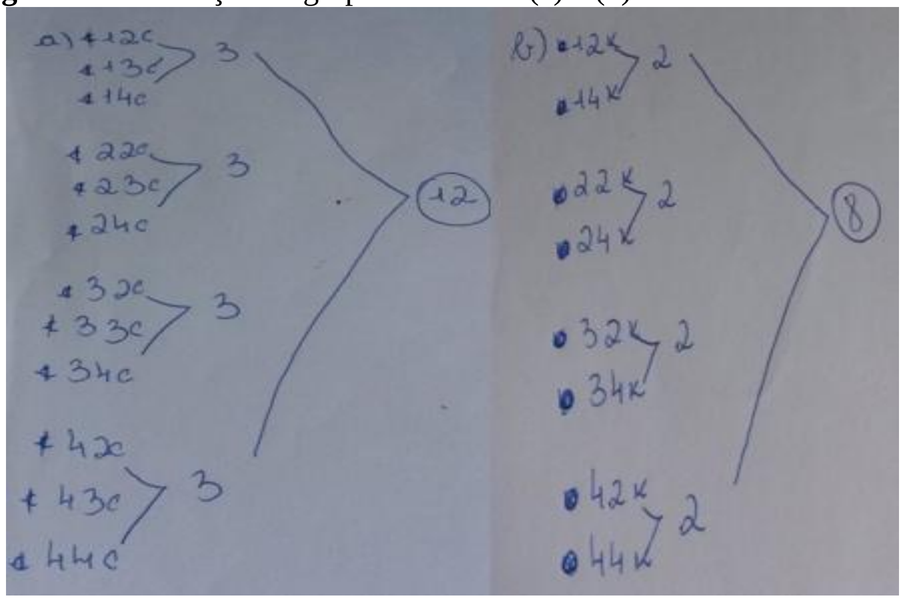
O G8 explanou a seguinte estratégia para resolução do item (a), veja o diálogo a seguir:

> G8 (Aluno 2): Professor a resposta é 24.
> PP: Como vocês resolveram?
> G8 (Aluno 2): No problema inicial a resposta foi 32, mas tem 8 códigos que não são distintos, aí eu fiz: 32 – 8 = 24 possibilidades.
> PP: Correto.

Apenas os grupos G3 e G9 não conseguiram resolver o item (a), apresentando a resolução parcialmente correta. Na verdade, utilizaram como estratégia a enumeração sistemática de todas as possibilidades, mas listaram apenas 12 possibilidades.

O item (b) apenas o grupo G3 não foi bem sucedido na resolução do problema, propondo uma resolução parcialmente correta, utilizaram como estratégia a enumeração sistemática, obtendo 8 possibilidades. Na verdade eles apresentaram apenas os códigos que contém a face coroa (K).

Figura 7 – Resolução do grupo 3 aos itens (a) e (b) referente à atividade 2.

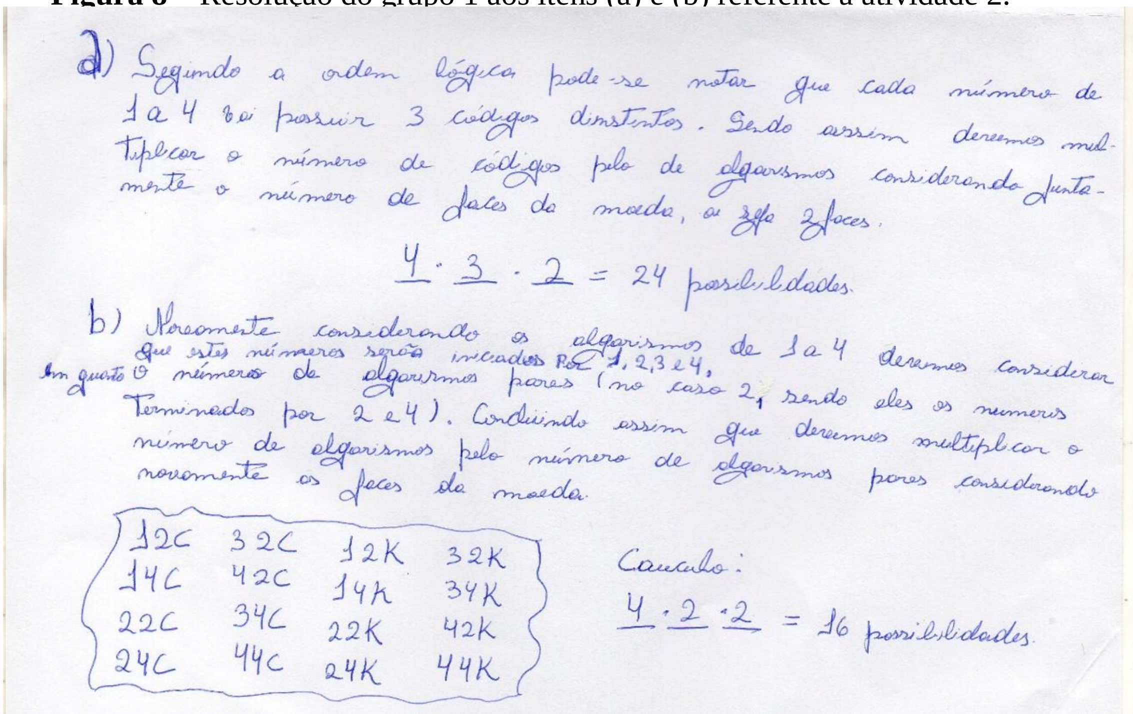


Fonte: Dados da pesquisa.

C.O: Acreditamos que o erro decorreu da resolução do item (a), no qual o grupo colocou apenas os códigos terminados pela face cara (C), nesse sentido no item (b) eles apresentaram apenas os códigos terminados com a face coroa (K). Almeida (2010) observou em sua pesquisa o desenvolvimento do raciocínio combinatório no que se refere à enumeração sistemática de todos os agrupamentos. Esta estratégia está sendo recorrente entre os alunos, principalmente quando temos uma quantidade pequena de agrupamentos. No entanto, propusemos alguns problemas, no qual esta estratégia se tornaria uma atividade cansativa. Nosso interesse era implementar um novo conceito, fazendo com que os alunos conseguissem avançar no estudo da Combinatória. Além disso, acreditamos que problemas que possuem uma grande quantidade de agrupamentos, podem ser importantes para que os alunos possam fazer generalizações e fazendo uma lista de alguns agrupamentos e observando padrões em sua formação. No entanto, G1 conseguiu observar padrões na formação dos códigos nos itens (a) e (b) e generalizou para uma quantidade maior de possibilidades, fazendo uso do Princípio Fundamental da contagem, resolveram o item (c), sem precisar recorrer a uma lista organizada de todas as possibilidades.

Observe-se a resolução do G1 no item (a), (b) e (c):

Figura 8 – Resolução do grupo 1 aos itens (a) e (b) referente à atividade 2.



a) Seguindo a ordem lógica pode-se notar que cada número de 1 a 4 vai possuir 3 códigos distintos. Sendo assim deveremos multiplicar o número de códigos pelo de algarismos considerando juntamente o número de faces da moeda, a 3 e a 2 faces.

$\underline{4} \cdot \underline{3} \cdot \underline{2} = 24$ possibilidades.

b) Novamente considerando os algarismos de 1 a 4 que estes números serão iniciados por 1, 2, 3 e 4, deveremos considerar em quanto o número de algarismos pares (no caso 2, sendo eles os números terminados por 2 e 4). Concluindo assim que deveremos multiplicar o número de algarismos pelo número de algarismos pares considerando novamente as faces da moeda.

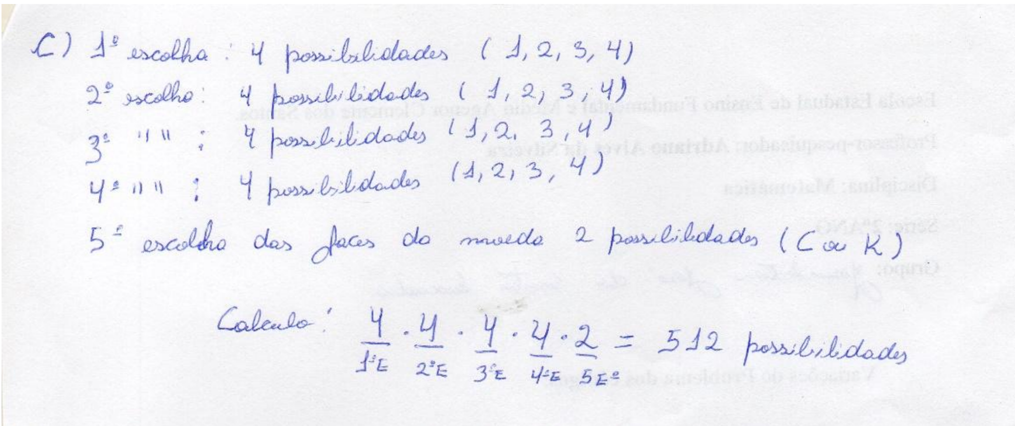
12C	32C	12K	32K
14C	42C	14K	34K
22C	34C	22K	42K
24C	44C	24K	44K

Cauculo:

$\underline{4} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} = 16$ possibilidades.

Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 9 – Resolução do grupo 1 ao item (c) referente à atividade 2.



c) 1º escolha: 4 possibilidades (1, 2, 3, 4)

2º escolha: 4 possibilidades (1, 2, 3, 4)

3º " " : 4 possibilidades (1, 2, 3, 4)

4º " " : 4 possibilidades (1, 2, 3, 4)

5º escolha das faces da moeda 2 possibilidades (C ou K)

Calculo: $\underset{1^{\circ}E}{\underline{4}} \cdot \underset{2^{\circ}E}{\underline{4}} \cdot \underset{3^{\circ}E}{\underline{4}} \cdot \underset{4^{\circ}E}{\underline{4}} \cdot \underset{5E^{\circ}}{\underline{2}} = 512$ possibilidades

Fonte: Dados da pesquisa.

De modo geral, as estratégias utilizadas levam à enumeração de todas as possibilidades, fizeram relação com o problema inicial, a árvore de possibilidade e utilização de tabelas e o uso do Princípio Fundamental da Contagem.

Os grupos sentiram dificuldades na resolução do item (c), a maioria estava buscando enumerar todas as possibilidades. Aproveitando o raciocínio dos alunos e interviemos:

> PP: Pessoal, como está sendo o processo de resolução do item (c).
> Turma: Professor, estamos fazendo, mas são muitas possibilidades.
> PP: Então tente buscar algum padrão na formação de cada código.

O G6 também conseguiu resolver o item (c), utilizando o Princípio Fundamental da

Contagem, observe o diálogo.

> G6 (Aluno 2): Professor a resposta da letra (b) é 16 possibilidades.
> PP: Certo. E do item (c)?
> G6 (Aluno 1): Aí seriam muitas possibilidades.
> PP: Você vai ter que identificar o número de possibilidades para cada escolha.
> G6 (Aluno 1): E tem como?
> PP: Tem. O código é composto por cinco escolhas. Para a escolha do primeiro algarismo, existem quantas possibilidades?
> G6 (Aluno 2): 4 possibilidades.
> PP: E para escolha do segundo?
> G6 (Aluno 1): 4 possibilidades, e para escolha do terceiro e quarto também temos 4 possibilidades.
> PP: E para as faces da moeda?
> G6 (Aluno 1): 2 possibilidades
> PP: Muito bem! E no que isso pode ajudar vocês?

Fomos atender os outros grupos, depois o grupo G6 nos solicitou:

> G6 (Aluno 1): Professor, conseguimos resolver a letra (c).
> PP: Como vocês resolveram?
> G6 (Aluno 1): De acordo com aquele raciocínio que fizemos na letra (c), entendemos porque a resposta da letra (a) é 24 possibilidades. No caso são 4 possibilidades para escolha do primeiro número, 3 possibilidades para escolha do segundo, já que o código é formado por número distinto e são duas faces da moeda, daí basta fazer $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ possibilidades. Assim para letra (c), temos: $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 = 512$ possibilidades.
> PP: Correto.

Os grupos G1 e G6 apresentaram a resolução correta do problema, os grupos G2, G3, G4, G7, G8 e G9 evidenciaram a resolução parcialmente correta, ao listar algumas possibilidades. Enquanto G5 e G10 não apresentou nenhuma resolução para o problema.

Acreditamos que algumas ideias poderiam ser discutidas em nossa mediação com os grupos, no entanto, a aula estava acabando, então fomos a lousa fazer uma discussão das diversas estratégias utilizadas pelos grupos. Evidenciamos os caminhos utilizados para resolução dos problemas, questionamos os alunos sobre a validade deles, a fim de que os alunos entrassem em um consenso sobre sua resolução e as dos outros colegas. No entanto, como os grupos G1 e G6 já estavam explorando a ideia essencial do Princípio Fundamental da Contagem em suas resoluções, evidenciamos, para a turma, o trabalho realizado por esses grupos, principalmente no item (c). Daí, retornamos para uma discussão sobre o problema inicial e os itens (a) e (b).

> PP: Vamos verificar a validade das estratégias utilizada pelos G1 e G5. Voltando ao problema inicial. Existem quantas possibilidades para escolha do primeiro número?
> Turma: 4 possibilidades.
> PP: E para escolha do segundo?

Turma: 4 possibilidades.
PP: E para escolha da moeda?
Turma: 2 possibilidades cara ou coroa.
PP: Então são quantas possibilidades?
Turma: No caso, vai ser $4 \cdot 4 \cdot 2$ = 32 possibilidades, que foi a resposta encontrada nas outras soluções.
PP: E para o item (a)? Para a escolha do primeiro algarismo temos quantas possibilidades?
Turma: 4 possibilidades.
PP: E para escolha do segundo?
Turma: 4 possibilidades. Não é 3 possibilidades.
PP: Por que é 4? Por que 3?
Turma: é 3, porque não podemos repetir o número utilizado na primeira escolha.
PP: E em relação à face da moeda?
Turma: são 2 possibilidades. Assim temos $4 \cdot 3 \cdot 2$ = 24 possibilidades.
PP: E para o item (b)? Quantas possibilidades para escolha do primeiro algarismo?
Turma: 4 possibilidades.
PP: E para escolha do segundo?
Turma: 2 possibilidades.
PP: Por quê?
Turma: Porque os números pares serão terminados em 2 ou 4.
PP: E para faces da moeda?
Turma: 2 possibilidades.
PP: Então são quantas possibilidades?
Turma: No caso vai ser $4 \cdot 2 \cdot 2$ = 16 possibilidades.

Ainda sentimos a necessidade de voltar ao item (b) do Problema das cidades, visto que durante sua exploração a maioria dos alunos se mostraram um pouco confusos sobre as possibilidades para cada etapa.

PP: Vamos relembrar o item (b) do problema das cidades. Vamos considerar o trajeto de ida. Para ir de alagoinha a Cuitegi, quantas são as possibilidades?
Turma: temos 2 possibilidades.
PP: Para ir de Cuitegi a Guarabira, quantas são as possibilidades?
Turma: 3 possibilidades.
PP: Considerando o trajeto de volta. Quantas possibilidades de retornar de Guarabira a Cuitegi não passando pela linha da ida?
Turma: 2 possibilidades.
PP: E de Cuitegi a Guarabira?
Turma: 1 possibilidade.
PP: Daí quantas são as possibilidades?
Turma: $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1$ = 12 possibilidades.

Ao fim da aula, registramos, na lousa, o trabalho realizado pelos grupos, enfatizando as descobertas de G1, que, ao observar padrões na formação dos códigos, fez uso do Princípio Fundamental da Contagem, o que possibilitou, ao professor-pesquisador, formalizar este conceito para a turma.

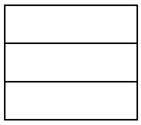
5.3 3º Encontro (uma aula) – dia 19/02/2016

Como estava no início do ano letivo, o horário das aulas ainda era o provisório, e tivemos apenas três aulas durante a semana de 15/02/2016 a 19/02/2016.

Iniciamos a aula solicitando aos alunos que se reunissem em grupos de três ou duplas em alguns casos entregamos um roteiro de atividades, pedindo que eles tentassem resolvê-las. Foram formados oito grupos com três pessoas e três duplas.

Atividade 3 – Problema da bandeira:[4]

Maria da Penha pretende pintar a bandeira a seguir de modo que as faixas adjacentes não a possuam a mesma cor. Sabendo que ela dispõe das cores: azul, preto e laranja, de quantas maneiras possíveis ela pode pintar a bandeira?



a) *No caso de as faixas adjacentes poderem possuir a mesma cor, de quantas maneiras possíveis a bandeira poderá ser pintada?*
b) *Se Maria da Penha dispõe, agora, das cores azul, preto, laranja e vermelho e pode pintar as faixas adjacentes. De quantas maneiras possíveis ela pode pintar a bandeira?*

O problema tinha como objetivo fortalecer a aplicação do Princípio Fundamental da Contagem. Além disso, o problema pode ser resolvido através da árvore de possibilidade, desenhos e enumeração sistemática. E, por fim, no item (b), aparecem, como desafio para os alunos, tentam evidenciar que nem sempre é recomendável fazer uma lista organizada de todos os agrupamentos.

Os grupos estavam solicitando a ajuda do professor-pesquisador, no qual percebemos que o termo "adjacente" estava acarretando dificuldades na interpretação do problema. Com isso, foi necessária a nossa intervenção, fomos a lousa e destacamos:

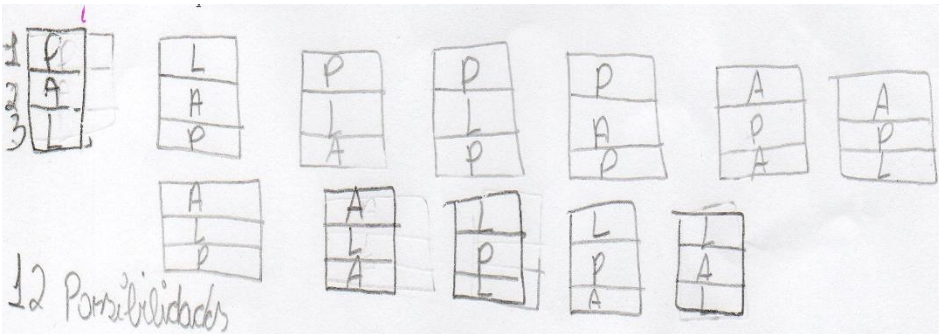
> PP: Pessoal, para pintar as faixas da bandeira, temos que levar em consideração que as faixas adjacentes não podem possuir a mesma cor.

[4] ATIVIDADE 3 - Adaptado do livro **Temas e problemas elementares**, Lima et al (2006).

> Turma: E o que são faixas adjacentes?
> PP: Adjacente quer dizer: junto ou próximo, ou seja, as faixas que estão juntas não podem ser pintadas com a mesma cor.

A partir daí os alunos tiveram um entendimento maior do problema. A lista organizada de todas as possibilidades apareceu como principal estratégia de resolução para o problema inicial, no qual apenas três grupos não conseguiram resolver o problema, apresentando a resolução parcialmente correta. Alguns grupos fizeram as representações de todas as bandeiras:

Figura 10 – Resolução do grupo 12 referente à atividade 3.



Fonte: Dados da pesquisa.

C.O: Podemos observar alguns grupos sobressaindo em relação aos outros grupos, pelo fato de estar recorrendo ao Princípio Fundamental da Contagem. O G6 apresentou uma variedade de resoluções, confirmando suas repostas através desse princípio.

Observe o diálogo com o grupo G6 na resolução do problema inicial:

> G6 (Aluno 2): Professor a resposta é 12.
> PP: Como vocês fizeram?
> G6 (Aluno 2): Para escolha da primeira cor tem 3 possibilidades, para escolha da segunda 2 possibilidades, porque as faixas que estão juntas não podem ser pintada com a mesma cor e para terceira 2 possibilidades. Assim fizemos: $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$.

Ao fim, do diálogo, sugerimos que buscassem outras estratégias para validar suas soluções. Depois constamos nos registros, que resolveram o problema recorrendo à árvore de possibilidades.

Apenas os grupos G9 e G11 não conseguiram resolver o problema inicial, apresentando a resolução parcialmente correta, já que listou algumas possibilidades. No item (a) era necessário perceber que as faixas adjacentes poderiam ser pintadas, o grupo G6 percebeu isso:"G6 (Aluno 2): Na letra (a), as três faixas podem ser pintadas com a mesma cor? PP: Isso!”

C.O: No item (a), notamos que os alunos tiveram mais dificuldades em relação ao problema original. Primeiro, por passar despercebido que agora as faixas da bandeira podem ser pintadas com a mesma cor, e segundo por possuir uma quantidade maior de possibilidades. Constatamos que quatro grupos não apresentaram a solução correta, os demais apresentaram como estratégia mais efetiva o Princípio Fundamental da Contagem. Nota-se que alguns grupos apresentam uma maturidade maior na hora de resolver o problema, percebendo que nem sempre é recomendável descrever todas as possibilidades para depois contar. Além disso, alguns grupos validam suas soluções apresentando uma variedade de estratégias como: árvore de possibilidades, tabelas, descrição de todas as possibilidades e o Princípio Fundamental da Contagem.

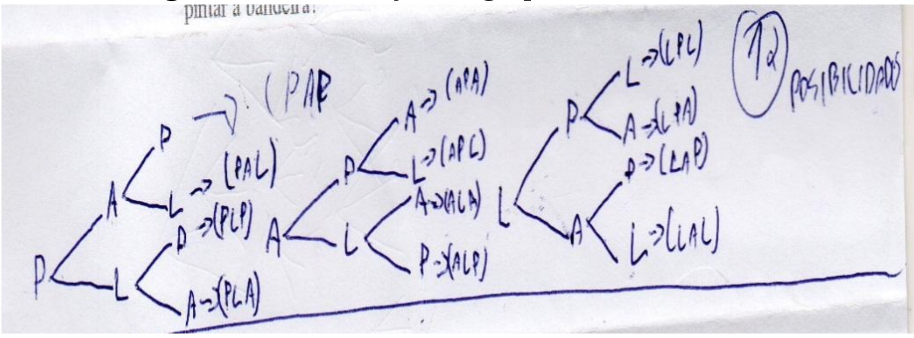
De forma intuitiva, alguns termos relacionados à Combinatória vão aparecendo nas discussões dos problemas. Os dois diálogos logo a seguir foram observados por nós durante a mediação professor-aluno com relação ao problema inicial e professor-turma em relação ao item (a):

> PP: Como vocês resolveram o problema inicial?
> G2 (Aluno 2): Trocando as cores.
> PP: Analisando os diagramas de árvores, temos quantas possibilidade?
> Turma: três árvores de possibilidades com quatro combinações diferentes. No caso 12 possiblidades.

C.O: No primeiro discurso, a ideia de trocar como sinônimo de permutar já estava sendo compreendida pelos alunos. No problema original alguns grupos perceberam, durante a resolução do problema, que estavam trocando a posição das cores e obtendo um novo agrupamento, levando em consideração que as faixas adjacentes não podiam ser pintadas com a mesma cor. Deste modo, durante a mediação professor-turma, enfatizamos essa ideia, destacando que era necessário organizar as cores levando em consideração certas condições. O discurso 2 é referente à resolução do G6, além da utilização de outras estratégias, eles descreveram todas as possibilidades no diagrama de árvore. Através deste recurso a turma visualizou que bastava realizar o produto: $4 \cdot 3 = 12$ possibilidades.

Observe a resolução do G6, para que possamos compreender como os alunos chegaram a esse raciocínio:

Figura 11 – Resolução do grupo 6 referente à atividade 3.



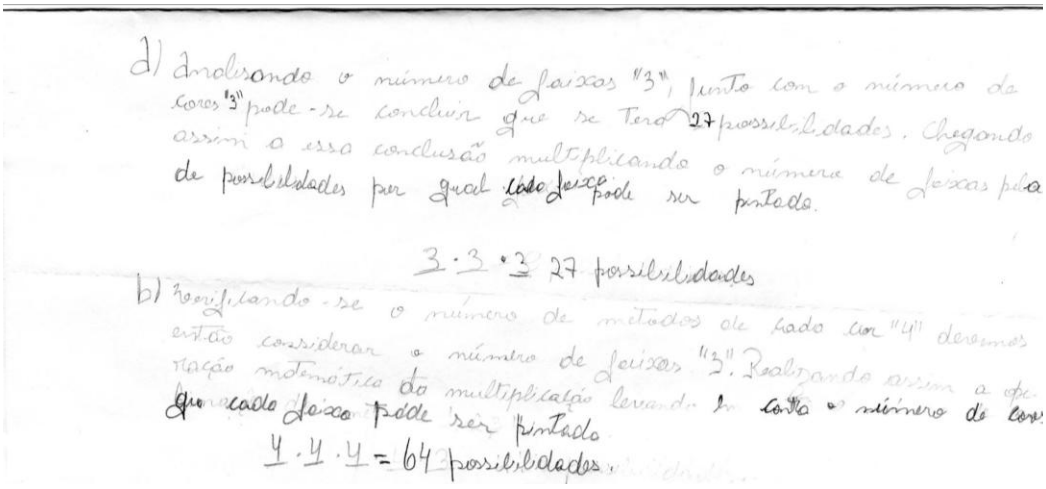
Fonte: Dados da pesquisa.

No item (b) não encontramos registro de uma lista organizada de todas as possibilidades, visto que os alunos já estavam percebendo que esta estratégia se torna uma atividade exaustiva na resolução de alguns problemas. A estratégia que foi predominante na resolução desse problema foi o Princípio Fundamental da Contagem. Os grupos G3 e G5 apresentaram a resposta correta, mas não utilizaram nenhum procedimento matemático, ao passo que os grupos G4 e G11 não evidenciaram qualquer tipo de resolução. Os demais grupos resolveram o problema corretamente.

C.O: É fato, para nós, que pouco mais da metade dos grupos já estão fazendo uso do Princípio Fundamental da Contagem. Além disso, as discussões com alguns grupos mostram que eles reconhecem a necessidade de se recorrer a este princípio quando se está diante de um problema.

O grupo G1 apresentou uma resolução bem interessante para os itens (a) e (b), recorrendo ao Princípio Fundamental da Contagem, de modo que foi usada a multiplicação entre os números de cores a serem escolhidas para cada faixa da bandeira.

Figura 12 – Resolução do grupo 1 aos itens (a) e (b) referente à atividade 3.



Fonte: Dados da pesquisa.

Ao fim, da aula, registramos na lousa e discutimos as resoluções encontradas pelos grupos, destacando o Princípio Fundamental da Contagem como uma das principais estratégias para a resolução dos problemas de Combinatória. Notamos que os grupos que recorriam a este princípio faziam uma análise do número de possibilidades para cada escolha, como também observavam padrões na formação dos agrupamentos, identificando uma estrutura multiplicativa que deu conta do problema.

5.4 4º Encontro (uma aula) – dia 22/02/2016

Iniciamos a aula entregando o roteiro de atividades e, em seguida, pedimos para que os alunos se reunissem em grupos de três ou em duplas, em alguns casos, e, posteriormente, tentassem resolver os problemas. Além disso, foram entregues aos alunos: uma sacola de papel e cinco bolas feitas com cartolina com as cores: branca; verde; azul; preta e cinza. Foram formados oito grupos de três alunos e três duplas.

Atividade 4 – Problema das quatro bolas[5]

Uma urna contém quatro bolas de cores diferentes: branca, verde, azul e preta. Quantas são as maneiras diferentes de retirar, sucessivamente, 2 bolas dessa urna, sem reposição das bolas retiradas?

a) Quantas são as maneiras diferentes de retirar, sucessivamente, 2 bolas dessa urna, repondo cada bola antes da retirada da próxima?

b) Se acrescentarmos uma bola de cor cinza, quantas são as possibilidades de retirar 2 bolas sem reposição? E 3 bolas sem reposição?

Esta atividade teve como objetivo fortalecer a construção do raciocínio combinatório, e trabalhar com algumas ideias relacionadas a fenômenos aleatórios. Além disso, a atividade proposta tem natureza teórica e prática, pois podemos validar as resoluções através das ideias essenciais de Combinatória, apoiadas na utilização de materiais concretos.

[5] Adaptado do livro **Matemática completa**, Giovanni e Bonjorno (2005).

C.O: Ao propor situações aos alunos nas quais eles possam evidenciar os possíveis resultados através da manipulação de materiais concretos, são-lhes possibilitadas abstrações empíricas e reflexivas, as quais levam a uma melhor compreensão do fenômeno estudado.

Os alunos estavam se mobilizando com o intuito de resolver o problema inicial, contudo, ao observamos o trabalho inicial de alguns alunos sobre o problema, sentimos a necessidade de fazer uma mediação quanto à representação das cores das bolas. Nesse momento, fomos à lousa e destacamos: "PP: Podemos denotar as cores das bolas como B = branca. Turma: A = azul, V = verde, P = preta e C = Cinza".

Sugerimos à turma que verificasse a eficácia de algumas estratégias utilizadas durante a resolução dos problemas anteriores. A turma antecipou o novo problema proposto no item (a), questionando o problema inicial.

> Turma: As duas bolas podem ser da mesma cor?
> PP: Utilizando o material que entreguei a vocês, é possível que ao tirar a primeira bola de cor azul, na segunda você tirar a mesma bola?
> Turma: Não.

A nossa mediação acima ajudou na resolução do problema, principalmente quem recorreu à lista de todas as possibilidades. Porém, o grupo G10 apresentou algumas dificuldades, justificando sua resolução utilizando material concreto:

> G10 (Aluno 1): Professor são duas maneiras diferentes.
> PP: Como vocês fizeram?
> G10 (Aluno 1): Utilizando o material, tiramos as bolas (V, A) e (B, P).
> PP: Mas será que você não poderia retirar a bola da cor vermelha com a bola preta e ou branca?
> G10 (Aluno 1): Não. Porque eu já retirei a cor vermelha.
> G10 (Aluno 2): Poderia sim, ao invés de tirar a cor azul, poderia ser (V, B) e (V, P).
> PP: Isso.

C.O: A mediação professor-grupo foi proporcionando, aos alunos, validar os seus métodos, partindo de suas ideias iniciais em relação ao problema, confirmando a veracidade delas ou levantando alguma sugestão, com muita cautela, tomando cuidado para não limitar a criatividade dos alunos o que lhes tiraria todo o prazer pela descoberta.

A utilização de problemas com uma quantidade relativamente pequena de possibilidades vem possibilitando, aos alunos, buscar padrões na formação dos agrupamentos.

Observe a descoberta feita pelo G8: “G8: No caso, percebemos que há três maneiras de cada bola sair por primeiro. PP: Correto”.

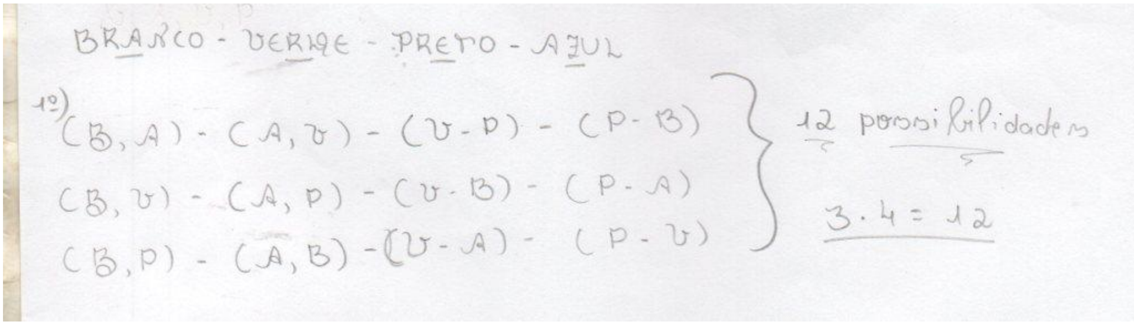
C.O: Nota-se que o nosso roteiro de atividades para trabalhar Análise Combinatória via resolução e exploração de problemas, está levando os alunos a pensar no que estão fazendo; eles aumentam sua compreensão durante a exploração do problema.

A lista organizada de todas as possibilidades possibilitou ao G8 apresentar um novo raciocínio para o Princípio Fundamental da Contagem, chegando à generalização do problema, visto que esse problema poderia ser resolvido da seguinte forma:

$$\frac{4}{1^{a}\ retirada} \cdot \frac{3}{2^{a}\ retirada} = 12 \text{ possibilidades}$$

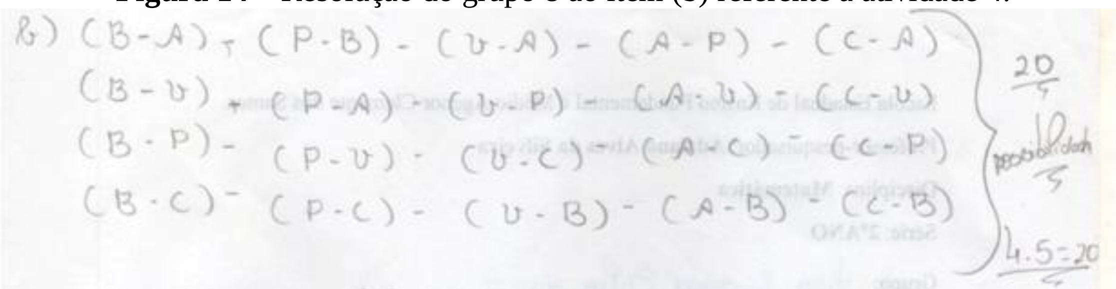
Observe a resolução apresentada pelo G8 para o problema inicial e, em relação ao primeiro questionamento do item (b):

Figura 13 – Resolução do grupo 8 referente à atividade 4.



Fonte: Dados da pesquisa.

Figura 14 – Resolução do grupo 8 ao item (b) referente à atividade 4.



Fonte: Dados da pesquisa.

C.O: Percebemos que o grupo validou sua resolução, compreendendo que cada cor poderia sair na primeira retirada três vezes, como havia quatro cores diferentes, eles notaram que bastava realizar o produto entre $3 \cdot 4 = 12$ possibilidades, seguindo o mesmo raciocínio para o item (a). Nota-se que, durante a listagem de todas as possibilidades, o grupo G8 tomou, como ponto de partida, elementos de referência, que possibilitam maiores chances de descrever todas as possibilidades, fato esse que também foi observado na pesquisa de Almeida (2010). Acreditamos que essa tomada de decisão é fruto do avanço dos alunos no raciocínio combinatório.

A maioria dos grupos apresentaram a resolução correta para o problema inicial, sem precisar da ajuda do professor-pesquisador, apenas G7, G10 e G11 precisaram de nossa mediação.

No item (a) a utilização dos materiais concretos que levamos para ajudar os alunos na resolução dos problemas foi de suma importância, visto que alguns grupos que apresentaram dificuldades neste item fizeram simulações e notaram que nessa hora poderiam repor a bola retirada. Então, existe a possibilidade de, nas duas retiradas sucessivas, obterem duas bolas da mesma cor.

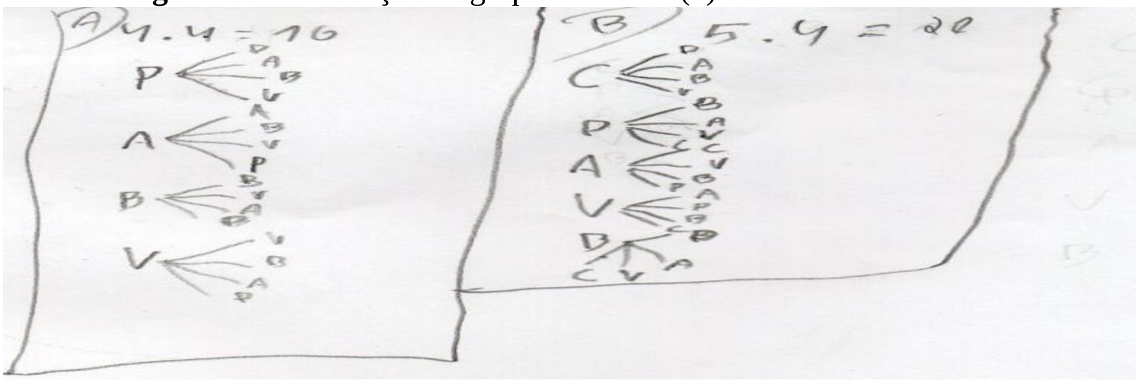
Apoiado nesse raciocínio os grupos G2 e G8 retornaram ao problema anterior e justificaram sua resolução. G2 explica sua descoberta ao professor-pesquisador:

> G2 (Aluno 1): Basta acrescentar os seguintes casos: (V, V), (B, B), (P, P) e (A, A) e adicionar essas quatro possibilidades as outras doze possibilidades da letra (a), obtendo dezesseis possiblidades.
> PP: Correto.

C.O: Percebemos que, em meio à exploração dos problemas, os alunos retornavam ao problema anterior para chegar à solução do novo problema.

A árvore de possibilidades é recurso presente nas resoluções dos alunos. Observe a resolução apresentada pelo G6 no item (a) e no item (b):

Figura 15 – Resolução do grupo 6 ao item (b) referente à atividade 4.



Fonte: Dados da pesquisa.

C.O: Percebemos que os alunos desse grupo utilizavam esse recurso em suas resoluções, permitindo uma visualização de todas as possibilidades e proporcionando o uso correto do Princípio Fundamental da Contagem, sendo esta uma das estratégias que possibilita o desenvolvimento do raciocínio Combinatório.

Todos os grupos apresentaram a resolução correta para o item (a). Quanto ao item (b), apenas o grupo G11 não realizou qualquer tipo de trabalho sobre o problema. Enquanto os demais grupos foram bem sucedidos em suas resoluções. Notamos que o grupo teve dificuldades para resolver os problemas anteriores, não restando tempo para realizar qualquer tipo de análise sobre este item. Deste modo, nos encontros seguintes, damos uma atenção maior a este grupo com o intuito de minimizar as dificuldades.

As estratégias evidenciadas na resolução destes itens foram a listagem de todas as possibilidades, árvore de possibilidades e o Princípio Multiplicativo, que foi aplicado predominantemente no segundo questionamento do item (b), visto que a enumeração sistemática de todas as possibilidades se apresentava como uma estratégia cansativa.

Percebendo o bom desempenho dos grupos na resolução dos problemas, fomos à lousa e registramos o trabalho realizado pelos grupos, enfatizando as estratégias e dificuldades encontradas.

5.5 5º Encontro (duas aulas) – dia 24/02/2016

Solicitamos aos alunos que se reunissem em grupos e, em seguida, lhes foi entregue o roteiro de atividades para que eles tentassem resolvê-las, e, em caso de dúvidas, solicitar a ajuda do professor-pesquisador. Foram formados sete grupos com três pessoas e quatro duplas.

Atividade 5 – Problema do Sportingbet[6]

João pretende fazer uma aposta no Sportingbet que é uma grande casa de jogos online, que permite realizar apostas em eventos esportivos. João vai fazer uma aposta em dois jogos de futebol da série A do campeonato brasileiro, que são: Flamengo X Fluminense e Palmeiras X Corinthians. Para ganhar ele precisa acertar os possíveis resultados dos dois jogos, ou seja, quem vai ser o vencedor ou se vai ocorrer empate. No entanto, ele quer saber todas as possíveis combinações de resultados de dois jogos, para ver se é vantajoso fazer todas as apostas possíveis.

a) *Quais e quantas as possíveis duplas de resultados que poderiam ser feitas com esses dois jogos?*
b) *Se acrescentássemos o jogo Vasco X Botafogo, quantas seriam as possíveis apostas que podem ser feitas com a combinação desses três jogos?*

A elaboração desta atividade ocorreu a partir das entrevistas com os professores, no qual um professor mencionou essa proposta como uma atividade que permite trabalhar com conceitos matemáticos relacionados à Combinatória. Conversando com amigos, notamos que o Sportingbet faz parte do cotidiano de muitos brasileiros, principalmente para quem gosta de futebol.

Contudo, é importante ressaltar que a formulação deste problema se mostrou como um desafio para nós. Deste modo, propusemos inicialmente um problema mais simples para que os alunos pudessem buscar padrões e chegassem à construção de algum modelo matemático que representasse o problema proposto com propriedade.

Nesse sentido, tivemos como objetivo, nesta atividade, a análise e a organização dos dados, de tal forma que se chegasse à generalização de um modelo matemático. No entanto, estávamos um pouco receosos sobre o nível de complexidade do problema que exigia um pensar mais abstrato dos alunos.

Entregues as atividades aos alunos, alguns grupos solicitaram que o professor-pesquisador se aproximasse e lhe afirmaram que já haviam feito apostas no Sportingbet. Estes não tiveram dificuldade na interpretação do problema.

O G7 solicitou a ajuda do professo-pesquisador: “G7: Como assim, resultados de dois jogos?”. A dificuldade de G7 era compartilhada pela maioria dos grupos, daí sentimos a

[6] ATIVIDADE 5 - Atividade formulada pelo pesquisador.

necessidade de intervir. Fomos ao quadro e questionamos:

> PP: Quais são os possíveis resultados de um jogo de futebol?
> Turma: Um time ganhar, perder ou empatar.

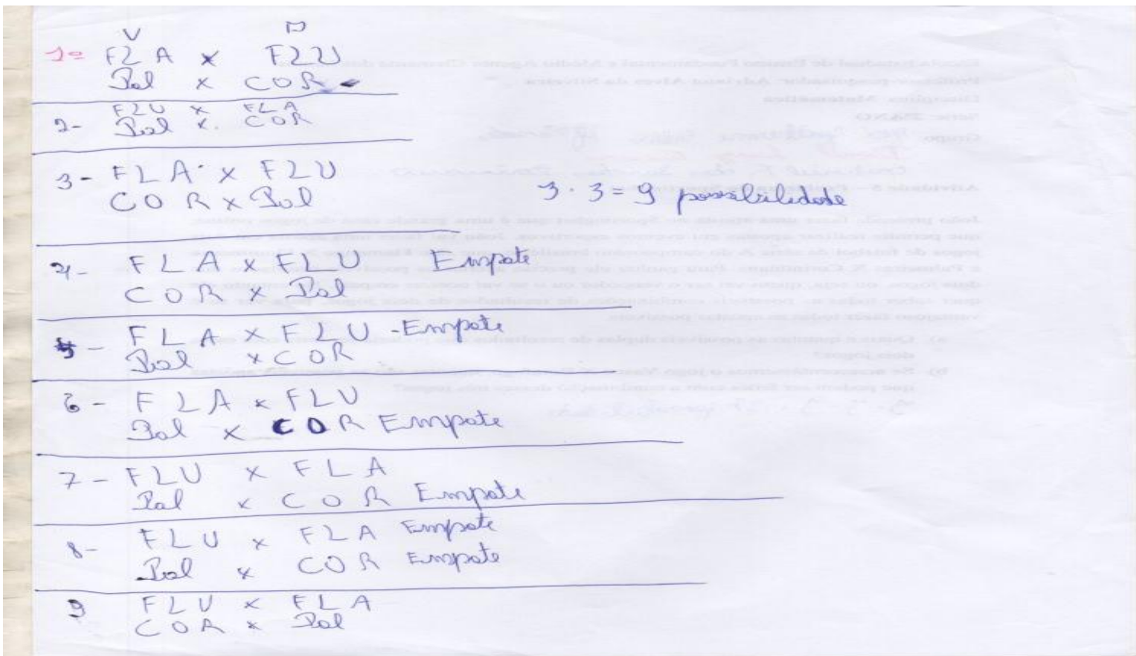
A mediação acima deu direcionamento para maioria dos grupos na resolução do item (a), tendo como estratégia principal para a resolução desse item à lista organizada dos possíveis resultados de dois jogos. No entanto, alguns grupos ainda apresentaram dificuldades na interpretação do problema, veja o diálogo:

> G10 (Aluno 1): Não estou entendendo. Como assim combinação de dois jogos?
> PP: Se você tivesse que fazer uma combinação de resultados desses dois jogos em quem você apostaria?
> G10 (Aluno 1): Apostaria na vitória do Flamengo e do Corinthians. Então isso seria uma Combinação?
> PP correto.

Notamos que os alunos sentiram dificuldades nessa atividade. Desse modo, os grupos G2, G5, G6 G8, G9, G10 e G11 resolveram o item (a) corretamente. Esses grupos descreveram uma lista de todos os jogos. Além dessa, o grupo G2 utilizou, como estratégia para a resolução, o princípio multiplicativo. A utilização dela se deu durante nossa mediação com o grupo:

> PP: Existem quantas possibilidades de resultados para o primeiro jogo?
> G2 (Aluno 1): Duas possibilidades, derrota ou vitória.
> G2 (Aluno 2): São três possibilidades derrota, vitória ou empate.
> PP: Correto. E para o segundo jogo?
> G2 (Aluno 2): Também. No caso 3 · 3 = 9 possibilidades.
> PP: Isso.

Figura 16 – Resolução do grupo 2 ao item (a) referente à atividade 5.



Fonte: Dados da pesquisa.

Os demais grupos apresentaram uma resolução parcialmente correta, listando algumas das possibilidades de combinação de dois jogos, ou seja, não descreveram todas as possiblidades, para que em seguida fizessem a sua contagem.

C.O: Percebemos que no item (b) a maioria dos alunos não chegaram a uma resolução bem sucedida do problema. A descrição de todas as possibilidades da combinação de três jogos seria uma estratégia viável, de tal forma que pudesse observar padrões para chegar a uma generalização para **n** jogos. Notamos que as dificuldades encontradas durante a resolução do item (b) levaram alguns grupos a se acomodarem na busca da solução do problema, eles alegavam que não sabiam resolver, e, durante a mediação professor-pesquisador-grupo, percebemos que os alunos esperavam uma resposta pronta do professor. Durante nossa mediação, buscamos instigar os alunos na resolução do problema sem negar suas ideias iniciais. Contudo, era claro para nós que o trabalho realizado sobre o problema deve ser fruto da criatividade dos alunos, e não deve ser evidenciado pelo professor, já que iria tirar toda a alegria pelo processo de descoberta e consequentemente evitar a compreensão por parte dos alunos.

Apenas o grupo G2 conseguiu resolver esse item, visto que recorreu ao Princípio Multiplicativo. Os outros grupos listaram algumas das possibilidades, apresentando uma resolução parcialmente correta. Como a aula estava terminando e os grupos não estavam conseguindo criar estratégias para resolver principalmente o item (b), fomos à lousa registrar o trabalho realizado pelos grupos.

Para o item (a) descrevemos as possibilidades apresentadas pelos grupos, obtendo um total de 9 possibilidades. Explicitamos que G2 além dessa estratégia, utilizou o Princípio Fundamental da Contagem, notando que, para o primeiro jogo, existem 3 possibilidades de resultados de um jogo de futebol (derrota, vitória ou empate) como, também, há 3 possibilidades para o segundo jogo. Assim, para obter o total de possibilidades, bastava fazer: $3 \cdot 3 = 9$ possibilidades.

O item (b) tinha como finalidade fazer os alunos perceberem que ao fazer uma lista de todos os jogos, poderíamos fazer relações com o item (a) e generalizar para um modelo matemático que valesse para **n** jogos. Durante a mediação professor-turma, tentamos evidenciar o Princípio Multiplicativo como uma combinação de elementos de um conjunto X com elementos dos conjuntos Y.

> PP: Considerando que no item (a) obtivemos 9 possibilidades para combinação de dois jogos, essas 9 combinações podem ser combinadas com quantos possíveis resultados do jogo Vasco X Botafogo?
> Turma: No caso, essas 9 possibilidades podem ser combinadas com um empate, vitória ou derrota.
> PP: Isso. Então são quantas possibilidades?
> Turma: 9+ 9 +9 = 27 possibilidades.

Enfatizamos que G2 utilizou o Princípio Fundamental da Contagem, fazendo $3 \cdot 3 \cdot 3$ = 27 possibilidades. Em seguida fizemos uma tabela para que alunos pudessem notar alguma regularidade e generalizar para um modelo que possa valer para n jogos, observe o diálogo:

> PP: Para a combinação de dois jogos foram quantas possibilidades?
> Turma: 9 possibilidades.
> PP: E para combinação de três jogos?
> Turma: 27 possibilidades.
> PP: E se fosse 4 jogos?

A turma observou que, para uma combinação de dois jogos, bastava utilizar o Princípio Fundamental da Contagem, ou seja, $3 \cdot 3 = 9$, como também para três jogos $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$. Deste modo, quando questionamos sobre o número de combinações para quatro jogos, eles apontaram: "Turma: Então para quatro jogos seria: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$. PP: Correto. PP: E se fosse para n jogos?".

O debate em sala de aula levou à construção da seguinte tabela 1:

Tabela 1: número de jogos e respectivos resultados

Número de jogos	Número de resultados
2	$3 \cdot 3 = 9 = 3^2$
3	$3 \cdot 3 \cdot 3 = 27 = 3^3$
4	$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81 = 3^4$
⋮	⋮
n	$\mathbf{3^n}$

Fonte: Dados da pesquisa.

Os alunos apresentaram dificuldades no último questionamento do diálogo acima. No entanto, ao observar e analisar a tabela, perceberam que sempre tínhamos uma potência de base 3.

Assim, explanamos para turma que, para saber o número de resultados com **n** jogos, basta utilizar o modelo matemático $\mathbf{3^n}$. Tal raciocínio foi generalizado a partir dos possíveis resultados de um jogo de futebol, com base no Princípio Fundamental da Contagem.

Ao fim, da aula, recolhemos as atividades. Quando fomos fazer análise do material, notamos, no item b, que a maioria dos grupos apresentou a resolução deste problema. No entanto, acreditamos que os grupos copiaram a resposta, enquanto estávamos evidenciando e discutindo as estratégias utilizadas pelo G2 para a turma.

Neste dia, foram ministradas duas aulas, a primeira, no terceiro horário e, a última, no sexto horário, tivemos pouco mais de 15 minutos para esta aula.

Era claro para nós que, para dar continuidade à pesquisa, teríamos que trabalhar com a ideia do Fatorial de um número, visto que uma grande parte dos problemas de Combinatória são resolvidos por um produto de números naturais consecutivos.

O fato é que esse conceito seria imprescindível na compreensão das fórmulas de arranjo, permutação e combinação simples. No entanto, a nossa proposta de atividades não traz problemas com o objetivo de introduzir o conceito do Fatorial de um número.

Para construir essa ideia, retomamos a discussão de alguns problemas que foram discutidos anteriormente, a fim de chegar ao conceito de Fatorial de um número. Observe o diálogo professor-turma:

> PP: No Problema dos códigos, tínhamos quantas possibilidades para escolha do primeiro algarismo, considerando que os códigos são formados por algarismos distintos e uma das faces da moeda?
> Turma: 4 possibilidades
> PP: E para escolha do segundo?
> Turma: 3 possibilidades.
> PP: E para escolha das faces da moeda?
> Turma: 2 possibilidades.
> PP: Se utilizarmos o Princípio Fundamental da Contagem, como resolveremos?
> Turma: Teríamos $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ possibilidades.
> PP: E no problema das quatro bolas, quantas maneiras diferentes para retirar sucessivamente 2 bolas de uma urna sem reposição, sabendo que ela contém quatro cores distintas?
> Turma: 4 possibilidades.
> PP: E para escolha da segunda bola?
> Turma: 3 possibilidades.
> PP: Como vocês resolveriam se utilizasse o Princípio Fundamental da Contagem?
> Turma: $4 \cdot 3 = 12$
> PP: E se acrescentássemos uma bola de cor diferente das demais, quantas são as maneiras de retirar sem reposição 3 bolas da urna?
> Turma: 5 possibilidades
> PP: E para escolha da segunda?
> Turma: 4 possibilidades.
> PP: E para escolha da terceira?
> Turma: 3 possibilidades. Assim teremos $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ possibilidades.
> PP: Vocês conseguiram observar algum padrão nestas resoluções?
> Turma: Os números estão sendo multiplicados em ordem decrescente.
> PP: Isso.

Deste modo, apresentamos o conceito do Fatorial de um número, evidenciando que tal conceito está relacionado ao produto de um número **n** pelos seus antecessores ou ordem decrescente até chegar a 1, representado por **n!** (lê-se: n fatorial).

C.O: Percebemos que, fazer essa conexão com o que os alunos estavam aprendendo com a apresentação de um novo conceito, facilitou a compreensão dele, por parte dos alunos.

5.6 6º Encontro (duas aulas) – dia 25/02/2016

Para o sexto encontro, seria necessário que os alunos pudessem explorar o jogo *Mastermind.* Então, era claro para nós que precisaríamos de mais de uma aula para tentar trabalhar o que foi planejado para esta atividade. Deste modo, conversamos com a professora de português evidenciando nossas necessidades e ela cedeu o seu horário para que pudéssemos trabalhar sem preocupações com o horário.

Iniciamos a aula chamando a atenção dos grupos diante de algumas informações que foram apresentadas no primeiro dia da intervenção, onde uma consistia em manter os registros de suas soluções, mesmo que se percebesse, durante a discussão entre professor-turma, que a solução estava incorreta.

Em seguida, solicitamos aos alunos que se reunissem em grupos de três alunos ou em alguns casos em duplas. Foram formados oito grupos com três pessoas e três duplas. Notamos que, de modo geral, os grupos estavam se mantendo os mesmos.

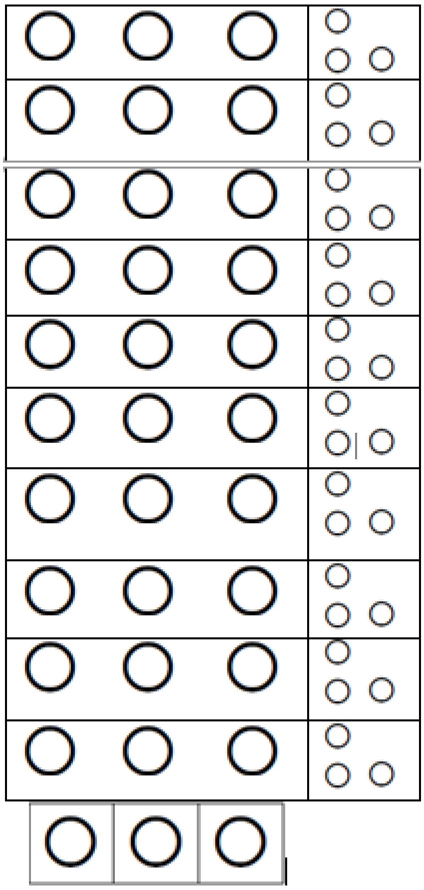
Posteriormente, entregamos a atividade e duas bolas feitas com cartolina com as cores branca e preta, e fomos apresentar as regras do jogo *Mastermind* para a turma. Deste modo, simulamos algumas jogadas para que os alunos pudessem se familiarizar com as regras do jogo. Depois, solicitamos que os alunos dos grupos escolhessem, entre eles, quem seria o desafiado para descobrir a senha.

Atividade 6 – Problema jogo Mastermind[7]

O Mastermind também chamado de "senha" foi um jogo criado em 1970 pelo israelita Mordecai Meirowitz. No jogo, existem dois marcadores: um preto e outro branco,

[7] ATIVIDADE 6 – Adaptado do livro **Matemática - Paiva**, Paiva (2009).

onde o branco significa que há uma cor certa mas no lugar errado, o preto significa que há uma cor certa no lugar certo. O desafiado vai tentando adivinhar a senha no tabuleiro como o da figura abaixo, se guiando pelos marcadores preto e branco. Ozildo vai jogar e terá 10 chances de descobrir a senha desejada. Quantas senhas distintas ele pode escolher, sabendo que a senha é representada por três cores distintas, levando em consideração que ele dispõe das seguintes cores: vermelho, azul, preto e laranja?



a) *A primeira jogada é aleatória?*
b) *Se no resultado final da primeira jogada, tiver uma cor no lugar certo e duas fora da posição, que estratégia pode ser adotada para segunda jogada?*
c) *Se tivéssemos três cores distintas (vermelho, azul e preto) para dispor no tabuleiro, quantas formas diferentes de se fazer isso?*
d) *Se fossem cinco cores distintas (vermelho, azul, laranja branco e preto), na qual tínhamos que escolher três cores distintas para dispor no tabuleiro, quantas formas diferentes de se fazer isso?*
e) *Nesse caso se tivéssemos duas cores na posição correta e uma das cores que não faz parte da senha, qual estratégia deve ser adotada na próxima jogada?*

A atividade tinha, como objetivo, a exploração da Análise Combinatória por trás do jogo, em especial a ideia essencial de arranjo simples, que, posteriormente, seria formalizado ao fim, da aula.

C.O: Na aplicação de jogos, é importante que o jogo não seja mecânico, ou seja, que não possua significado. Isso quer dizer que não se pode jogar por jogar, existem metas e objetivos que devem ser atingidos. O aluno tem que perceber que o jogo está relacionado com alguns conteúdos matemáticos e que o processo educativo acontece de uma forma lúdica. Isto é importante, pois, ao jogar, os alunos refletem, analisam regras e resolvem problemas. Nesse sentido, Lara (2011, p.21) afirma que devemos refletir sobre o que queremos alcançar com o jogo, pois, quando bem elaborados, eles podem ser vistos como estratégias de ensino que poderá atingir diferentes objetivos que variam desde um simples treinamento, até uma construção de um determinado conhecimento. O fato é que os jogos ajudam no valor formativo da Matemática, auxiliando na estruturação do pensamento e do raciocínio lógico, como também na aquisição de atitudes que são necessárias durante o jogo. Para que isso ocorra, é necessário colocar o aluno em um ambiente que o faça pensar. Assim, é preciso propor problemas que façam os alunos terem uma melhor compreensão do jogo, e, quando isso lhes acontece, identificam conceitos matemáticos que são inerentes aos jogos. Assim, o professor deve proporcionar um ambiente que valorize a criatividade dos alunos ao resolver problemas advindos dos jogos, além disso, quando ele consegue propor problemas através das experiências vivenciadas durante a exploração destes, leva a uma melhor compreensão dos conceitos que estão sendo trabalhados. Nesse sentido, os PCN (BRASIL, 1998, p.46) dizem que: “Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e na busca de soluções”.

Deste modo, depois de os alunos terem jogado, propusemos alguns problemas para ver se realmente o jogo atingiu o objetivo esperado, ou seja, se os alunos entenderam o sentido da dimensão lúdica proposta pelo jogo, não como uma atividade de descanso ou apenas como um passa-tempo, mas como uma maneira de estimular o processo ensino-aprendizagem, que permite apresentar, ao fim, da aula, um novo conceito ou conteúdo.

As experiências vivenciadas durante a aplicação do jogo serviram como apoio para a resolução da atividade. Durante o jogo, os desafiados buscavam descobrir a senha correta, escolhendo três cores entre as quatro disponíveis, enquanto os outros alunos orientavam cada jogada do desafiado. Nesse sentido, no problema original, os grupos observaram e analisaram suas jogadas, de tal forma que colaboraram para o planejamento de suas ações.

O G2 solicitou a presença do professor-pesquisador:

> G2 (Aluno 2): Professor, no caso algumas senhas são essas que coloquei quando estava jogando?
> PP: Isso. Mas será que essas são todas as senhas possíveis?
> G2: Acho que não.

A lista organizada de todas as possibilidades apareceu na resolução desse grupo. Os grupos G1, G3, G4, G5, G6 e G9 resolveram o problema corretamente sem precisar da ajuda do professor-pesquisador, tendo, como estratégia, o Princípio Fundamental da Contagem.

C.O: Ao investigar a melhor jogada, os alunos puderam refletir sobre algumas ideias relacionadas à Combinatória. Isso mostra a potencialidade de se trabalhar com jogos, pois o professor atinge seus objetivos de uma forma lúdica e faz o aluno interagir de modo significativo.

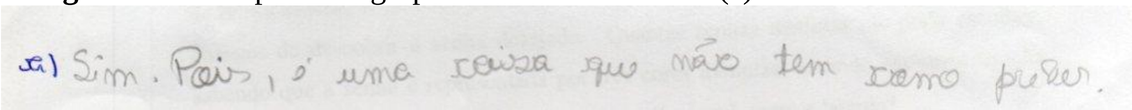
Observe o diálogo com o grupo G1 durante a exploração do jogo:

> G1 (Aluno 1): Professor temos no total de vinte e quatro senhas, e no caso devemos verificar qual a senha é a correta?
> PP: Isso. Como vocês fizeram para descobrir isso?
> G1 (Aluno 1): Pelo Princípio Fundamental da Contagem, são 4 possibilidades da escolha da primeira cor, 3 possibilidades da escolha da segunda cor, e 2 possibilidades para última cor, aí faz: $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ possibilidades.
> PP: Correto.

Todos os grupos apresentaram a resolução correta para o problema inicial. O item (a) tinha como objetivo levar os alunos a refletir sobre a primeira jogada, enfatizando a necessidade de entender o termo aleatório durante o jogo. O fato é que a primeira jogada era aleatória, deste modo, no primeiro momento, não se exige a criação de estratégias, contudo, quando estamos diante de um experimento aleatório, os resultados são imprevisíveis, dentre os que são possíveis, pois não há como saber a senha desejada, podendo até, na primeira jogada, obter-se a senha correta, principalmente pelo fato de termos uma quantidade pequena de possibilidades. E isso aconteceu de fato, já que um aluno do G2 conseguiu vencer o jogo na primeira jogada.

Os grupos G1, G2, G3, G6, G7, G8, G10 e G11 destacaram que a primeira jogada é aleatória. Observe a justificativa do G10:

Figura 17 – Resposta do grupo 10 referente ao item (a) referente à atividade 6.


a) Sim. Pois, é uma coisa que não tem como prever.

Fonte: Dados da pesquisa.

Os demais grupos afirmaram que a primeira jogada é aleatória, porém não apresentaram nenhuma justificativa.

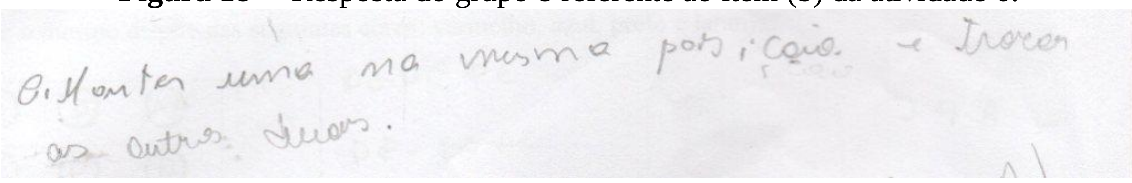
No item (b), escolhemos uma jogada para que os alunos pudessem fazer uma análise dela, permitindo pensar em alguns aspectos do jogo.

C.O: Notamos que, para este item, os alunos justificaram sua tomada de decisão, evidenciando estratégias utilizadas durante o jogo. Nesse sentido, o sucesso no item (b) é fruto da organização do pensamento, levando o aluno a pensar na jogada anterior tomando novas decisões que levaram à aprendizagem durante uma jogada mal sucedida ou não.

Os grupos perceberam que algumas estratégias deveriam ser adotadas a partir da primeira jogada. Observe o diálogo com o grupo G8: “G8 (Aluno 1): Professor não entendi bem a letra (b). PP: Lembre-se de que, quando você estava jogando, qual seria sua próxima jogada diante dessa situação”?

Fomos atender outros grupos, depois G8, nos solicitou ajuda: “G8: Professor no caso bastava manter uma na mesma posição e trocar a posição das outras duas. PP: Isso.

Figura 18 – Resposta do grupo 8 referente ao item (b) da atividade 6.


b) Manter uma na mesma posição e trocar as outras duas.

Fonte: Dados da pesquisa.

C.O: Para obter o sucesso no jogo, os alunos têm de perceber que uma jogada dificulte outra, deste modo, cada jogada deve ser observada e analisada para fazer a jogada seguinte.

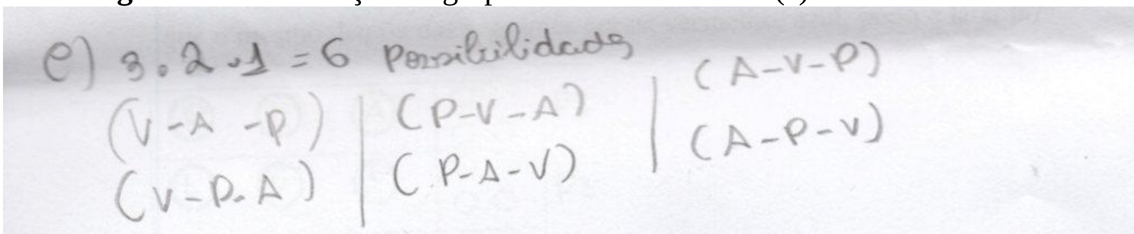
Durante a nossa observação em sala de aula, notamos que apenas uma aluna do grupo G10 não obteve sucesso no jogo, realizando todas as dez jogadas.

No item (b) todos os grupos analisaram adequadamente a próxima jogada, apresentando, ao fim, a resposta correta.

C.O: Esta problematização levou o aluno a pensar em alguns aspectos do jogo, fato esse observado não só na resposta dos grupos, mas também durante o jogo.

No item (c), os alunos não tiveram dificuldades. Todos os grupos resolveram o problema proposto sem a ajuda do professor pesquisador.

Figura 19 – Resolução do grupo 1 referente ao item (c) da atividade 6.



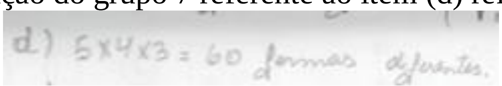
Fonte: Dados da pesquisa.

C.O: Notamos que, até o presente momento, os alunos estavam organizando informações de forma adequada, principalmente quando tínhamos uma quantidade pequena de possibilidades, e que a troca de um elemento gerava um novo agrupamento.

Para a resolução do item (d) a lista organizada de todas as possibilidades não era uma estratégia recomendável, então os alunos recorreram ao Princípio Fundamental da Contagem, já que outra forma de resolver seria o uso da fórmula, embora a ideia essencial de arranjo simples ainda não tivesse sido formalizado.

Os grupos G1, G2, G3, G4, G6, G7, G8, G9 e G11 apresentaram a resolução correta, enquanto G5 não realizou qualquer tipo de trabalho sobre o problema. Observe, a seguir, a solução do G7:

Figura 20 – Resolução do grupo 7 referente ao item (d) referente à atividade 6.

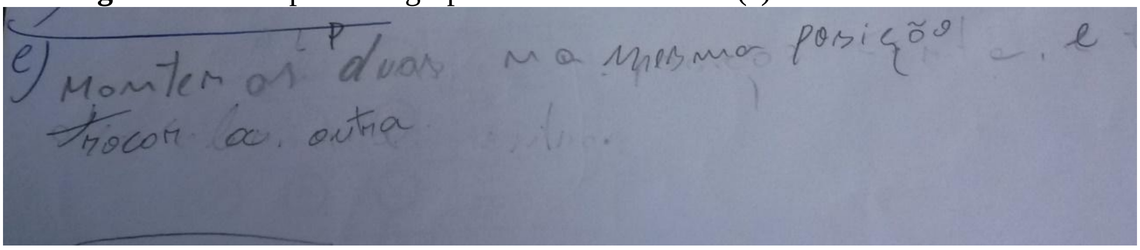


Fonte: Dados da pesquisa.

Os grupos G4 e G10 apresentaram uma resolução parcialmente correta, listando algumas das possibilidades. No item (e), tínhamos cinco cores que deveriam ser distribuídas em três posições diferentes. Diversas situações poderiam ocorrer após a primeira jogada, como, por exemplo, ter apenas uma cor na posição correta. Nesse caso, a estratégia seria a de manter uma das cores na posição e retirar as outras duas e colocar as duas que ficaram fora na primeira jogada.

Os grupos G1, G2, G3, G6, G5, G7, G8, G9, G10 e G11 organizaram as ideias de forma adequada apontando a próxima jogada, enquanto o grupo G4 não apresentou nenhuma resposta. Observe a tomada de decisão do G5 para a próxima jogada:

Figura 21 – Resposta do grupo 1 referente ao item (e) referente à atividade 6.



Fonte: Dados da pesquisa.

C.O: Percebemos que os alunos puderam refletir sobre as problematizações pós-jogo, analisando o número de possibilidades para obter a vitória em cada situação, antecipando uma nova jogada a partir da análise da última jogada. Os conceitos matemáticos que foram utilizados pelos alunos durante a aplicação do jogo foram o Princípio Fundamental da Contagem, permutação e arranjo simples. Acreditamos que se podem propor diversas situações que levem o aluno a pensar sobre esse jogo, aprofundando o assunto em diversos aspectos. No entanto, nosso objetivo não foi fazer um estudo minucioso do jogo, mas explorar situações que levassem-nos a pensar sobre um novo conteúdo.

Ao fim, da aula, fomos à lousa destacar o trabalho realizado pelos grupos nos problemas que foram propostos. Enfatizamos descobertas feitas pelos grupos durante o jogo; dificuldades encontradas, retomamos ao problema original, a fim de formalizar um novo conceito:

PP: No problema original, temos quantas possibilidades para escolher a primeira cor para dispor no tabuleiro?
Turma: Podemos escolher uma das 4 cores (vermelho, azul, preto e laranja).
PP: E para escolha da segunda cor?
Turma: 3 possibilidades.
PP: E para escolha da última cor?
Turma: 2 possibilidades.
PP: Então como fica pelo Princípio Fundamental da Contagem?
Turma: $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ possibilidades.
PP: Isso. No caso tínhamos o total de quantas cores?
Turma: Quatro cores, (vermelho, azul, preto e laranja).
PP: E deveríamos escolher quantas para dispor no tabuleiro?
Turma: Três cores.

A partir dessa mediação, explanamos para turma que estávamos arranjando 4 elementos 3 a 3 e que poderíamos escrever da seguinte forma $A_{4,3} = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$, ou seja, temos 4 elementos do qual estávamos escolhendo 3, posteriormente, enfatizamos que poderíamos também resolver do seguinte modo:

$$A_{4,3} = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1} = 24$$

Em seguida, explicitamos que 4! representa o total de elementos que estava sendo arranjado, e que (4 – 3)! corresponde à escolha de 3 elementos dentre os 4 disponíveis, sobrando 1 elemento na formação de cada agrupamento. Essas ideias foram bem aceitas pelos alunos, já que durante a resolução deste problema, como também de outros que foram discutidos anteriormente, eles haviam notado que, ao mudar a ordem de um elemento, haveria um novo agrupamento, e, em alguns casos, sobravam elementos diferenciando-se, também, pela natureza dos elementos.

Destacamos que, se tivéssemos **n** elementos que seriam arranjados **p** a **p**, com **n**$\geq$ ***p*** poderiam calcular $A_{n,p}$ (lê-se: arranjo de **n** elementos tomados **p** a **p**):

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Enfatizamos que este tipo de agrupamento difere pela ordem e pela natureza dos elementos. E, para perceber isso, bastava listar alguns agrupamentos e, se a mudança na ordem gerar agrupamentos diferentes dos originais, tem-se um problema de arranjo simples. Como, por exemplo, as senhas, que eram compostas por três cores diferentes, quando se mudava a posição de uma das cores surgia uma nova senha.

Além disso, evidenciamos, para a turma, que problemas dessa natureza podem ser resolvidos pelo Princípio Fundamental da Contagem, fato esse observado por eles durante a resolução da atividade.

É fato que os alunos não tiveram tanta facilidade em perceber a utilidade do Princípio Fundamental da Contagem, para chegar na fórmula de arranjo simples. No entanto, o trabalho realizado sobre o problema e a formalização deste conceito, deu uma nova compreensão das ideias que eles implementaram na resolução do problema.

Ainda questionamos a turma sobre os problemas discutidos anteriormente:

> PP: Dos problemas que já foram discutidos nas outras aulas, quais são problemas de arranjo simples?
> Turma: O problema dos códigos.
> PP: Porque?
> Turma: Porque por exemplo 12≠21 a ordem aí é importante.

Destacamos que, nesse tipo de problema, os agrupamentos se diferenciavam pela natureza dos elementos, ou seja, no problema dos códigos, temos que $12 \neq 13$. Enfatizamos também o Problema das quatro bolas, explanando para turma que este também se trata de um problema de arranjo simples, visto que a ordem da retirada sem reposição das bolas gera um novo agrupamento. Fizemos uso da fórmula para validar a resolução apresentada anteriormente pelos alunos.

5.7 7º Encontro (uma aula) – dia 29/02/2016

Iniciamos a aula e solicitamos que os alunos se reunissem em grupos de três ou duplas em alguns casos, e, logo em seguida, entregamos um roteiro de atividades, encorajando-os a resolvê-la. Foram formados sete grupos de três alunos e três duplas.

Atividade 7– Problema do carro e da moto[8]

Adriano, Ivam, Bruno e Erivam foram os funcionários que mais se destacaram em uma empresa durante o ano de 2015. Com isso, o dono da empresa resolveu sortear entre os quatro, um carro no valor de R$ 50 000,00 para o primeiro sorteado e uma moto no valor de R$ 10 000,00 para o segundo sorteado. Quantas são as possíveis duplas de ganhadores?

a) *A ordem dos sorteados é importante? Explique sua resposta.*
b) *Se fossem sorteados dois carros que têm o mesmo valor, quantas possíveis duplas de ganhadores poderíamos formar?*
c) *Nesse caso, a ordem dos sorteados é importante? Explique sua resposta.*

A atividade tinha como objetivo possibilitar aos alunos uma maior compreensão da natureza dos problemas de arranjo simples. Deste modo, através da descrição de algumas ou de todas as possibilidades, seria possível perceber a relevância ou não na ordem dos elementos.

Além das estratégias que vêm sendo utilizadas nas resoluções dos problemas anteriores, os alunos agora dispõem da fórmula para resolver problemas de arranjo simples.

[8] ATIVIDADE 7 - Atividade formulada pelo pesquisador.

De modo geral os grupos conseguiram resolver o problema inicial sem precisar da ajuda do professor-pesquisador, que sempre era solicitado para que os alunos lhe explicassem as suas resoluções.

C.O: Nota-se um crescimento dos alunos, na resolução dos problemas de Combinatória. Além disso, foi possível observar a autonomia dos alunos na escolha da estratégia para resolver o problema, como também para justificar sua resolução.

Observe diálogo com G2 justificando sua resolução:

> G2 (Aluno 2): Professor são 12 possibilidades.
> PP: E Como vocês fizeram?
> G2 (Aluno 1): Pelo Princípio Fundamental da Contagem, 4 possibilidades para escolha do primeiro ganhador e 3 possibilidades para escolha do segundo ganhador, $4 \cdot 3 = 12$.
> PP: Correto.

O G9 além do Princípio Fundamental da Contagem, descreveu todas as possibilidades em uma tabela, observe o grupo justificando o trabalho realizado no problema: “G9 (Aluno 1): Professor, a gente fez de duas maneiras pelo Princípio Fundamental da Contagem, e fizemos uma tabela, obtendo 12 possibilidades”.

Figura 22 – Resolução do grupo 9 referente à atividade 7.

G. Moto	G. Carro
A	I
A	B
A	E
I	A
I	B
I	E
B	A
B	I
B	E
E	A
E	I
I	B

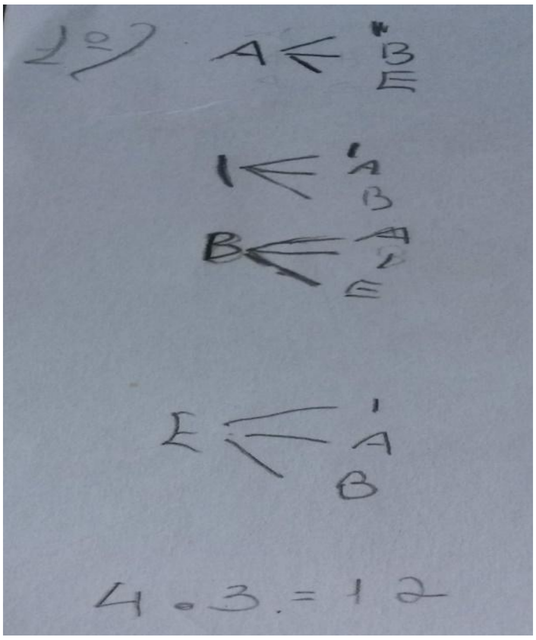
Fonte: Dados da pesquisa.

C.O: Observa-se que o grupo tomou alguns elementos como referência e descreveu todas as possibilidades.

G6 e G7 solicitaram que o professor se aproximasse e justificou sua resolução, através da árvore de possibilidades. O G6 validou sua resolução fazendo uso do Princípio Fundamental da Contagem:

G6: Professor temos 12 possibilidades.
PP: E como vocês resolveram?
G6 (Aluno 1): Pela árvore de possibilidades observamos que há 12 possibilidades ou $4 \cdot 3 = 12$.

Figura 23 – Resolução do grupo 6 referente à atividade 7.

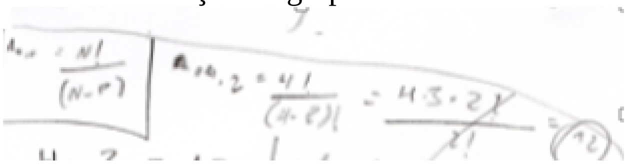


Fonte: Dados da pesquisa.

C.O: Foi possível observar que algumas estratégias estão sendo recorrentes por alguns grupos. Como, por exemplo, a utilização da árvore de possibilidades – que está presente na maioria das resoluções dos grupos G5 e G6. É fato que o uso da fórmula seria um método eficaz para a resolução do problema, no entanto, a escolha desse caminho poderia evitar o processo de compreensão dos alunos. A lista organizada de todas as possibilidades, a utilização de tabelas, como também a construção da árvore de possibilidades poderia levar a uma maior apreensão da ideia de arranjo simples. De fato, os alunos estavam tomando posse dessa ideia, de tal modo que, ao alterar a ordem dos ganhadores, eles notavam que obtinham uma nova dupla de ganhadores. Notamos que os grupos, em meio à exploração do problema, investigavam e evidenciavam, ao professor-pesquisador, suas descobertas, justificando o trabalho que foi realizado.

Durante a nossa mediação, percebemos que apenas o grupo G7 fez uso da fórmula para resolver o problema inicial.

Figura 24 – Resolução do grupo 7 referente à atividade 7.

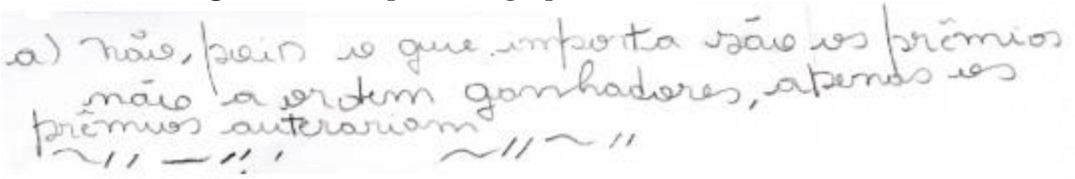


Fonte: Dados da pesquisa.

O item (a) era resultado do processo de compreensão do problema inicial, já que os alunos em suas resoluções, estavam modificando a ordem dos ganhadores e obtendo uma nova dupla de ganhadores. Apenas os grupos G1 e G11 apresentaram uma resposta um pouco confusa em relação à sua justificativa.

G1 afirma que a ordem não é importante, mais evidencia, em sua justificativa, que é necessário alterar o nome dos sorteados, ou seja, ao se fazer isto, tem-se uma nova dupla de ganhadores; sendo assim, a ordem dos ganhadores é relevante. Observe a justificativa dada pelo grupo G1:

Figura 25 - Resposta do grupo 1 referente à atividade 7.

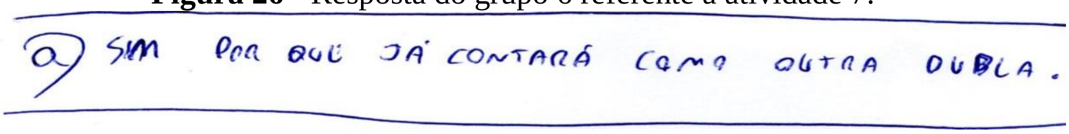


Fonte: Dados da pesquisa.

G11 afirma que seria a ordem dos prêmios o que importava e não a ordem dos ganhadores, visto que apenas os prêmios seriam alterados.

Nota-se que G1 e G11 não perceberam que as suas justificativas evidenciam que a ordem em que os prêmios são sorteados é importante. No entanto, de modo geral, tivemos algumas respostas interessantes, que evidenciam a percepção dos alunos sobre a alteração da ordem dos elementos:

Figura 26 - Resposta do grupo 6 referente à atividade 7.



Fonte: Dados da pesquisa.

O item (b) tinha, como finalidade, trabalhar com uma nova ideia que ainda não havia sido formalizada, mas que poderia apresentar alguns obstáculos para os alunos, visto que, agora, a mudança de elementos não geraria um novo agrupamento.

De modo geral, os alunos apresentaram dificuldades em perceber que a mudança na ordem dos ganhadores não implicava uma nova dupla de ganhadores. Deste modo, foi necessária nossa mediação, com alguns grupos.

O G2 solicitou a presença do professor-pesquisador e justificou a resposta dada ao item (a). Em seguida questionamos:

> PP: E o item (b)?
> G2 (Aluno 1): Também são 12 possibilidades.
> PP: Será? Porque vocês acham isso?
> G2 (Aluno 1): Achamos que era também.
> PP: Tentem criar alguma estratégia que possibilite visualizar as possíveis duplas.
> G2 (Aluno 1): Vamos tentar aqui.

O G2 tinha resolvido o problema inicial, utilizando o Princípio Multiplicativo, não tendo, em sua resolução, a descrição das possíveis duplas de ganhadores.

C.O: A enumeração sistemática nem sempre é uma estratégia viável para a obtenção de todas as possibilidades, porém, a descrição de algumas não só leva à generalização ou à abstração do problema, como também contribui para a distinção dos problemas de Combinatória, visto que os alunos podem observar se a mudança da ordem dos elementos pode gerar um novo agrupamento ou não. Notamos que os grupos que recorreram a tabelas e ao diagrama de árvore, tiveram mais facilidade em perceber que, agora, a ordem não era importante.

Observe o diálogo com G9:

> G9 (Aluno 2): Professor na letra (c) também são 12 possibilidades
> PP: Tem certeza? Observando a tabela que vocês fizeram no problema original, será que teríamos as mesmas duplas de ganhadores?
> G9 (Aluno 2): Não sabemos. Vamos analisar aqui.

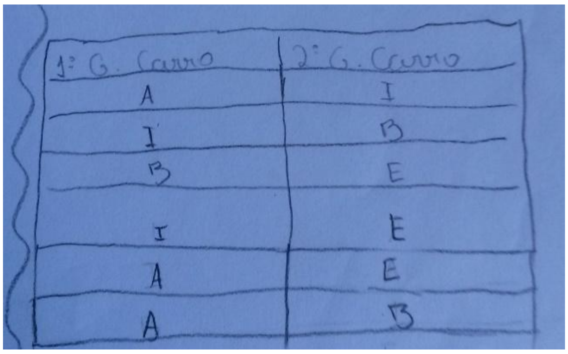
C.O: Durante a mediação, o professor-pesquisador sugere que os alunos repensem o que foi feito, com o intuito de que reflitam e interpretem suas ideias.

Fomos atender os outros grupos, depois o grupo G9 nos solicitou a atenção:

> G9 (Aluno 1): Professor são 6 possibilidades.
> PP: Como vocês observaram isso?
> G9 (Aluno 1): Observamos na tabela que, por exemplo Adriano ser o primeiro ganhador e Erivan o segundo ganhador, é a mesma coisa de Erivam ser o primeiro ganhador e Adriano o segundo ganhador. Aí fizemos uma tabela obtendo 6

> possibilidades.
> PP: isso.

Figura 27 – Resolução do grupo 9 ao item (b) referente à atividade 7.



Fonte: Dados da pesquisa.

O G6 também notou que a mudança da ordem dos elementos não gerava uma nova dupla de ganhadores. Assim, fizeram uma lista das possíveis duplas de ganhadores, obtendo 6 possibilidades.

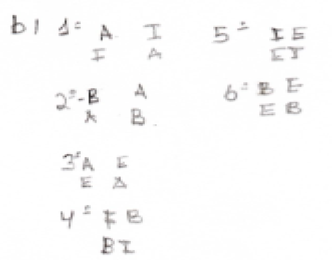
O grupo G2 solicitou a presença do professor-pesquisador novamente:

> G2 (Aluno 1): Professor não conseguimos resolver.
> PP: Vocês acham que Ivam ganhar o carro e Adriano ganhar é o mesmo carro é diferente de Adriano ganhar o carro e Ivam ganhar o carro?
> G2 (Aluno 3): Não. Então são 6 possibilidades.
> PP: Porque?
> G2: (Aluno 3) Cada dupla vai ganhar apenas uma vez.
> PP: Isso.

C.O: Notamos que o grupo G2 estava atento ao que estava fazendo, respondendo de imediato, quando colocado em um ambiente que levasse a refletir sobre o problema.

O grupo G1 também apresentou a mesma compreensão do G2, fazendo uma lista das duplas de ganhadores, e contando, por exemplo, o par (Adriano, Ivam) e (Ivam, Adriano) como uma única dupla de ganhadores.

Figura 28 – Resolução do grupo 1 ao item (b) referente à atividade 7.



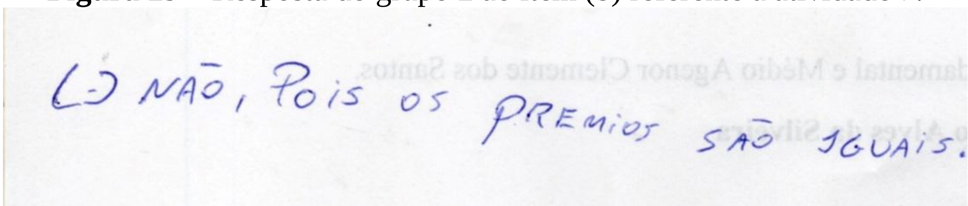
Fonte: Dados da pesquisa.

Percebendo as dificuldades de alguns grupos, sentimos a necessidade de ir à lousa: “PP: Pessoal, será que em uma situação em que Adriano ganhou o carro no primeiro sorteio e Bruno no segundo sorteio é diferente de Bruno ganhar o carro no primeiro sorteio e Adriano no segundo sorteio? Turma: Não. É a mesma dupla de ganhadores”.

A partir dessa mediação, alguns grupos puderam solucionar o problema. Os grupos G1, G2, G4, G5, G6, G8, G9 apresentaram a resolução correta para o item (b), enquanto os grupos G3, G7, G10 e G11 evidenciaram a resolução parcialmente correta, descrevendo algumas das possibilidades.

Para o item (c), os grupos G1, G2, G6, G8 e G9, destacaram que a ordem não é importante pelo fato de os prêmios serem iguais. Deste modo, não tínhamos uma nova dupla de ganhadores. Os grupos G3, G4, G7 e G11 apresentaram resoluções incorretas, enquanto G5 e G10 não evidenciaram qualquer tipo de resposta.

Figura 29 – Resposta do grupo 2 ao item (b) referente à atividade 7.



Fonte: Dados da pesquisa.

Estava chegando ao fim, da aula, então fomos à lousa evidenciar as resoluções dos grupos para o problema inicial, enfatizamos estratégias como a árvore de possibilidades e tabelas, visto que elas facilitaram a compreensão dos alunos em relação à relevância da ordem dos elementos.

Deste modo, apresentamos a resolução do G9, que descreveu todas as possibilidades em uma tabela, evidenciando aos alunos que a mudança na ordem dos ganhadores gerava uma nova dupla de ganhadores, ou seja, nesse caso, a ordem se faz importante, destacamos também que os agrupamentos se diferenciavam pela a natureza dos elementos.

Ressaltamos as descobertas feitas por G1, utilizando a mesma tabela para mostrar que, quando tínhamos os mesmos prêmios, a dupla de ganhadores se reduzia pela metade, já que o par de ganhadores “Adriano, Bruno” e “Bruno, Adriano” é contado apenas uma vez, pois com a mudança na ordem, tem-se um agrupamento igual ao original, ou seja, a alteração dos elementos não gera uma nova dupla de ganhadores.

Evidenciamos, também, a resolução do G7, que utilizou a fórmula de arranjo simples e explicitamos para os alunos como usar uma técnica que é aplicável aos problemas e que possui uma pequena ou uma grande quantidade de possibilidades. Além disso, enfatizamos que os problemas dessa natureza podem ser resolvidos pelo Princípio Fundamental da Contagem ou Princípio Multiplicativo, fato constatado por um pouco mais da metade dos grupos, visto que recorreram a este princípio para a resolução do problema inicial.

C.O: Percebemos que apenas um grupo recorreu à fórmula de arranjo simples, visto que agora eles dispõem de mais um meio para resolver o problema. Acreditamos que a escolha da estratégia mais viável na resolução do problema ocorre quando o aluno está construindo o raciocínio combinatório. Nesse sentido, Silva (2010) destaca, em sua pesquisa, que o pensamento combinatório, quando explorado, possibilita ao aluno escolher entre a enumeração, PFC ou a fórmula.

5.8 8º Encontro (uma aula) – dia 02/03/2016

Iniciamos a aula solicitando que a turma se reunisse em grupos ou duplas em alguns casos. Foram formados oito grupos com três alunos e duas duplas. Posteriormente, entregamos o roteiro de atividades e pedimos que os alunos tentassem resolvê-la, solicitando a presença do professor-pesquisador em caso de dúvidas.

Atividade 8 – Problema dos anagramas[9]

Qual o número de anagramas da palavra GARI?

a) *Quantos anagramas começam com a letra A?*
b) *Quantos anagramas terminam por consoante?*
c) *Quantos anagramas começam por I e terminam por R?*

A atividade 8 tinha como objetivo introduzir o conceito de Permutação simples. Para isso, propusemos um problema inicial e suas variações trazendo a ideia de anagrama de uma palavra.

[9] Adaptado do Livro **Matemática – Paiva**, Paiva (2009).

Os grupos estavam solicitando o professor-pesquisador e questionando sobre o que é um “anagrama”, com isso, sentimos a necessidade de intervir.

> PP: Quais são as dúvidas de vocês?
> Turma: O que é anagrama?
> PP: São palavras com ou sem sentido que podem ser obtidos pela troca entre as letras.

Essa mediação foi suficiente para alguns grupos, no entanto, foi necessário fazer outras mediações. Os grupos G3, G6 e G10 solicitaram a presença do professor-pesquisador e questionaram se a própria palavra poderia ser um anagrama. Para sanar esta dificuldade, levantamos o seguinte questionamento: “PP: Vocês formaram o anagrama GIRA, ao transpor as letras desse anagrama vocês podem obter anagrama as além dos que já foram formados?”

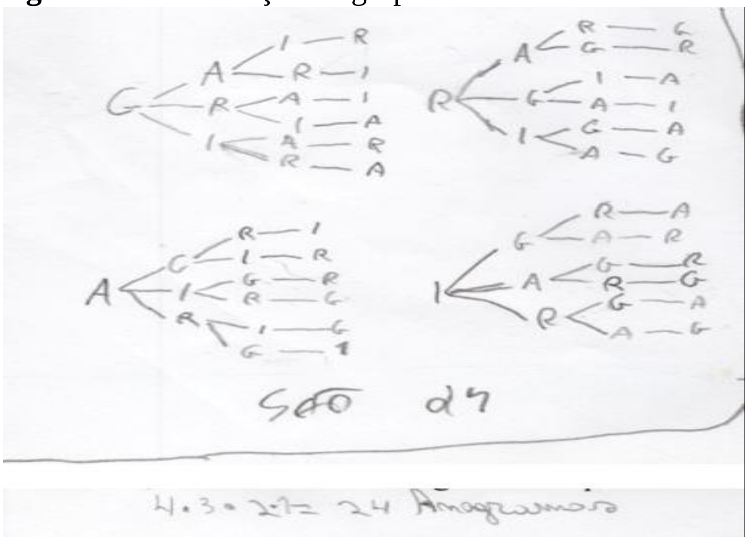
A partir dessa mediação, os grupos puderam refletir sobre o trabalho realizado no problema, de tal forma que observaram que, ao transpor as letras do anagrama GIRA, pôde-se obter o anagrama GARI.

O grupo G10 não deu muita atenção à mediação do professor-pesquisador a turma, e justificou sua resolução:

> G10 (Aluno 1): Professor encontramos três.
> PP: Quais são?
> G10 (Aluno 1): GARI, GIRA e AGIR.
> PP: No caso você formou as palavras que tem sentido.
> G10 (Aluno 1): Foi.
> PP: Mas o que vocês fizeram para obter esses anagramas?
> G10 (Aluno 1): Trocamos as posições das letras. Então não é necessário ter sentido.
> PP: Isso.

Todos os grupos apresentaram a resolução correta para o problema inicial. As estratégias mais utilizadas pelos grupos foram listagem de todos os anagramas possíveis, árvore de possibilidades, como também o Princípio Fundamental da Contagem esteve presente nas resoluções dos G1, G3, G2, G8, G9, G10 e G11, em alguns casos validando sua resolução apresentando mais de uma maneira de resolver o problema. Observe a resolução de G6:

Figura 30 – Resolução do grupo 8 referente à atividade 8.



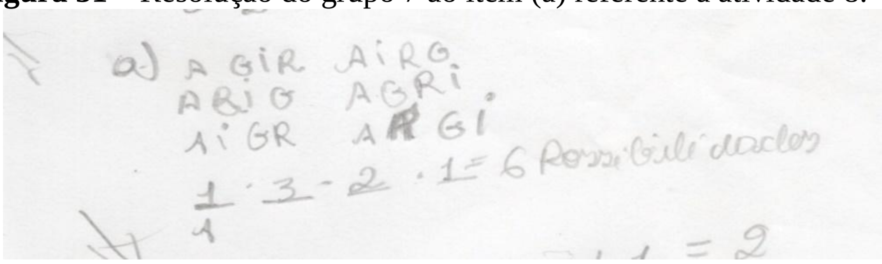
Fonte: Dados da pesquisa.

C.O: A permutação é um tipo especial de arranjo, assim, devemos considerar a relevância na ordem dos elementos. Ao longo da intervenção, notamos que alguns alunos vêm percebendo, em alguns problemas, que basta fazer a troca dos elementos que temos um novo agrupamento. A ideia de permutar como sinônimo de trocar vem sendo compreendida pelos alunos durante a resolução dos problemas anteriores, visto que em suas tomadas de decisão, alguns recorrem à troca dos elementos para obter um novo agrupamento.

Para a resolução do item (a), os grupos que fizeram a lista de todos os anagramas, solicitaram a presença do professor-pesquisador e argumentaram que são 6 anagramas que começam com a letra A, fato observado na lista de anagramas descritos por eles.

Os grupos G2, G7 e G8 fizeram uso do Princípio Fundamental da Contagem fixando a letra A na primeira posição e, em seguida, fez uma análise do número de escolhas para cada decisão. Além disso, para validar sua resolução, recorre a uma lista de todos os anagramas possíveis.

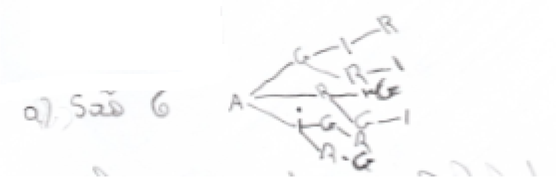
Figura 31 – Resolução do grupo 7 ao item (a) referente à atividade 8.



Fonte: Dados da pesquisa.

O grupo G6 recorreu à construção da árvore de possibilidades, obtendo 6 anagramas:

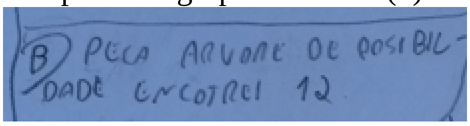
Figura 32 – Resolução do grupo 6 ao item (a) referente à atividade 8.



Fonte**:** Dados da pesquisa.

Todos os grupos apresentaram a resolução correta para o item (a). No item (b), os grupos tiveram mais dificuldades em relação aos problemas anteriores. Os grupos que fizeram uma lista de todos os anagramas ou construíram uma árvore de possibilidade, conseguiram observar e contar 12 anagramas que terminam por consoante. G6 justifica sua descoberta:

Figura 33 – Resposta do grupo 6 ao item (b) referente à atividade 8.



Fonte: Dados da pesquisa.

O grupo G2 faz uma lista de todos os anagramas que terminam por consoante:

Figura 34 – Resolução do grupo 2 ao item (b) referente à atividade 8.

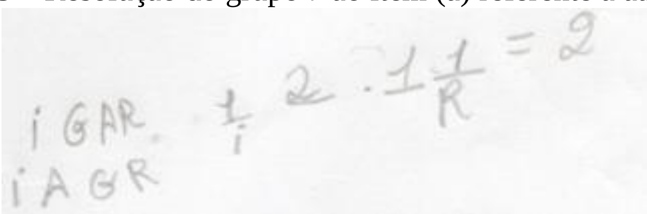
Fonte: Dados da pesquisa.

Os grupos G1, G2, G4, G6, G7, G9 e G10 apresentaram a resolução corretamente para o problema. Enquanto G3, G5, G8 e G11 apresentaram uma resolução parcialmente correta, listando alguns dos possíveis anagramas.

Em relação ao item (c) todos os grupos apresentaram a resolução correta, sem precisar da ajuda do professor-pesquisador, fixaram as letras I e R e obtiveram dois anagramas que começam por I e terminam por vogal. O problema poderia ser resolvido pelo Princípio Fundamental da Contagem, fato observado apenas pelo G7, observe o diálogo:

> G7 (Aluno 1): Professor todos os anagramas têm que começar por I e terminar por R?
> PP: Isso.
> G7 (Aluno 2): Então o I e o A, não trocam de posição.
> PP: Correto.
> G7: A gente fez pelo Princípio Fundamental da Contagem, obtendo duas possibilidades, que são IGAR e IAGR.
> PP: Correto.

Figura 35 – Resolução do grupo 7 ao item (a) referente à atividade 8.



Fonte: Dados da pesquisa.

Tínhamos que formalizar um novo conceito matemático para os alunos, a partir do trabalho realizado por eles na exploração da atividade. Ao fim, da aula, fomos a lousa evidenciar as estratégias utilizadas pelos grupos. Fizemos todos os anagramas possíveis e depois destacamos que alguns grupos fizeram uso do Princípio Fundamental da Contagem.

Em seguida, questionamos os alunos:

> PP: Se tivéssemos **n** letras distintas para ocupar **n** posições, teríamos quantas possibilidades para escolher a primeira letra?
> Turma: **n** possibilidades.
> PP: Para escolher a segunda letra, sabendo que uma das letras já foi escolhida, temos quantas possibilidades?
> Turma: **n-1** possibilidades.
> PP: E para escolher a terceira letra?
> Turma: **n-2** possibilidades.
> PP: E para escolher a última letra para ficar na última posição?

Os alunos tiveram dificuldade em perceber que restava 1 letra para a última posição. Então retomamos o problema inicial:

> PP: Para a escolha da primeira letra, temos quantas possibilidades?
> Turma: 4 possibilidades PP: E para segunda?
> Turma: 3 possibilidades.
> PP: E para terceira?
> Turma: 2 possibilidades.
> PP: E para a escolha da quarta ou seja da última letra? Turma: 1 possibilidade.

A partir daí, os alunos conseguiram perceber que, se tivéssemos **n** letras para ocupar **n** posições, teríamos uma única letra para a última posição, visto que as outras já foram escolhidas anteriormente.

Deste modo, pelo Princípio Fundamental da Contagem, evidenciamos:

$P_n = n\,(n-1)\,(n-2)\,...\,1 = n!$

$\therefore P_n = n!$

Destacamos que permutação simples é um tipo especial de arranjo, assim devemos considerar a ordem dos elementos e o que os diferencia é que, na permutação, estamos formando agrupamentos com todos os elementos, ao passo que, no arranjo, os agrupamentos se diferem pela natureza dos seus elementos. Além disso, ressaltamos que podemos fazer uso do Princípio Fundamental da Contagem para resolver problemas desse tipo, como foi observado por alguns grupos.

C.O: Percebemos que, ao explicitar as descobertas feitas pelos grupos durante a resolução da atividade, facilitou a formalização de um novo conceito, levando a uma compreensão mais concisa da Matemática que estava sendo ensinada.

5.9 9º Encontro (uma aula) – dia 03/03/2016

Entregamos o roteiro de atividades aos alunos e solicitamos que eles se reunissem em grupos ou em duplas. Foram formados sete grupos com três alunos e quatro duplas. Em seguida, pedimos que tentassem resolver a atividade que foi proposta

Atividade 9 – Problema da foto[10]

Dayana, Manoel, Luciana e Paulo pretendem tirar uma foto juntos. No entanto, Dayana e Manoel são um casal de namorados e têm que sair juntos na foto.

a) *De quantas maneiras diferentes eles podem tirar uma foto juntos?*
b) *Se Dayana, Manoel, Luciana e Paulo pretendem tirar uma foto em um banco com quatro lugares, no entanto, Paulo quer ficar sentado no segundo lugar. De quantas*

[10] Atividade formulada pelo pesquisador.

maneiras eles podem se arrumar para a fotografia, levando em consideração essa condição?

	Paulo		

A atividade teve como objetivo fortalecer a aplicação do conceito de permutação simples.

O G7 solicitou a ajuda do professor-pesquisador:

> G7 (Aluno 1): Professor me ajuda aqui, não sei fazer não.
> PP: Você já fez a leitura do problema?
> G7: Não.
> PP: Então faça a leitura e, qualquer dúvida, pode chamar.

Alguns grupos apresentaram dificuldades na interpretação do problema, onde tentamos minimizá-las durante a mediação. Observe o diálogo com alguns grupos:

> G5 (Aluno 1): Tenho que considerar algumas condições?
> PP: Tem. E qual é?
> G5 (Aluno 2): Dayana e Manoel têm que ficar juntos.
> PP: Isso.
> G7 (Aluno 1): Professor, eles podem ficar na foto de todo jeito?
> PP: Existe alguma condição que deve ser seguida para tirar a foto?
> G7 (Aluno 2): Dayana e Manoel saírem juntos nas fotos?
> PP: E como vocês estão pensando para resolver o problema?
> G7: Na primeira foto pode ser Dayana, Manoel e Luciana e Paulo.
> PP: Isso.

Passamos para ver o trabalho realizado pelo G6, observe o diálogo:

> PP: Estão conseguindo resolver o problema? Como as pessoas podem se organizar para tirar uma foto?
> G6 (Aluno 2): Dayana e Manoel têm que sair juntos nas fotos?
> PP: Isso. E como vocês estão pensando?
> G6 (Aluno 2): São quatro pessoas, sendo que Dayana e Manoel têm que ficar juntos. Então, na primeira, podemos colocar Dayana e Manoel...e Luciana e Paulo. Na outra, pode ser Manoel e Dayana, e Luciana e Paulo.
> G6 (Aluno 1): Então basta trocar as posições?
> PP: Isso, continue seu raciocínio.
> G6 (Aluno 1): Pode ser pela árvore de possibilidades?
> PP: Pode sim.

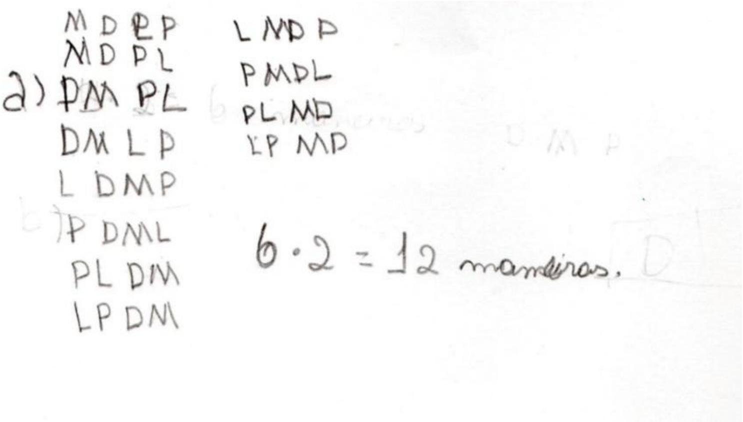
C.O: Percebemos que os grupos vêm ganhando confiança para resolver os problemas, já que evidenciam a compreensão que têm do problema para o professor-pesquisador, propondo discussões e construindo argumentos que possam validar seu raciocínio.

G1 solicitou a ajuda do professor pesquisador:

> G1 (Aluno 3): São seis possibilidades.
> PP: E como vocês fizeram?
> G1 (Aluno 3): Fomos fazendo todas as possibilidades.

O G1 conseguiu resolver o item (a) descrevendo todas as possibilidades, como também apresentou uma compreensão mais significativa do problema, observe a resolução:

Figura 36 – Resolução do grupo 8 ao item (a) referente à atividade 9.



Fonte: Dados da pesquisa.

O grupo G1 justificou, em parte, sua resolução ao questionarmos:

> PP: Porque multiplicou por 2?
> G1 (Aluno 1): Porque é um casal e eles podem trocar de posição.
> PP: E o 6?".

O grupo não soube responder o segundo questionamento levantado pelo professor-pesquisador. No problema, temos quatro pessoas que devem se organizar para tirar uma foto, de modo que o casal não pode ficar separado; deste modo, devemos considerar a permutação de 3 pessoas, ou seja, $3!$. No entanto, como o casal troca de posição entre si ($2!$), obtemos uma nova possibilidade para o casal sair junto na foto. Assim, o problema poderia ser resolvido da seguinte forma; $3! \cdot 2! = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \cdot 2 = 12$.

O G8 nos solicitou e questionou sobre o item (a): "G8 (Aluno 1): Professor, Dayana e Manoel podem ficar no início, no meio e no fim? PP: Isso".

Aproveitamos a descoberta de G8 e questionamos a turma: "G8: Vocês já observaram as posições que Dayana e Manoel podem ocupar? Turma: No início, no meio e no fim. PP: Isso".

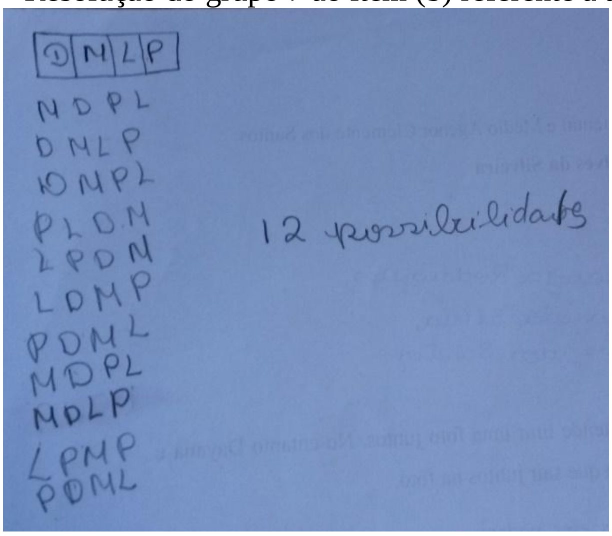
A principal dificuldade encontrada na resolução deste problema foi perceber que ao considerar que o casal deve ficar junto, é necessário entender que eles podem trocar de posição entre eles. Observe o diálogo entre os alunos do G2:

G2 (Aluno 1): O que importa é estarem Manoel e Dayana juntos? E Paulo pode ir para frente e para trás.
PP: No caso, quem vai ficar trocando de posição?
G2 (Aluno 1): Paulo e Manoel.
G2 (Aluno 2): Os dois vão continuar sempre juntos?
G2 (Aluno 1): Os dois vão ficar, o que vale é mudar a ordem.
G2 (Aluno 2): E não é a mesma foto?
G2 (Aluno 1): Não. Manoel e Dayana e Dayana e Manoel são duas formas de tirar a foto. Não é professor?
PP: Isso.

C.O: Notamos que a troca de ideias entre o grupo levou a um trabalho colaborativo que possibilitou pensar em como o problema poderia ser resolvido. Deste modo, ao fim, das discussões, puderam tirar conclusões que deram conta do problema proposto.

Todos os grupos apresentaram a resolução correta para o item (a).

Figura 37 – Resolução do grupo 7 ao item (b) referente à atividade 9.



Fonte: Dados da pesquisa.

No item (b), o grupo G1 evidenciou sua solução:

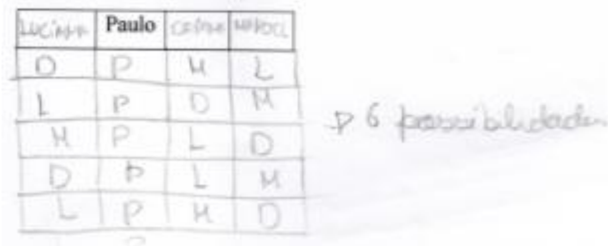
G1(Aluno 1): Professor são 4 possibilidades para item (b).
PP: Para a escolha da primeira pessoa, temos quantas possibilidades?
G1 (Aluno 1): 4 possibilidades.
G1 (Aluno 2): Não, é três possibilidades.
PP: Porque 3? Porque 4?
G1 (Aluno 2): Porque Paulo tem que estar no segundo banco, então restam três pessoas.
PP: E para escolha da outra pessoa?
G1: 2 possibilidades.
PP: E da última pessoa.

G1: 1 possibilidade.
PP: E o que você conclui com isso?
G1: Então vai ser $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.
PP: Isso.

C.O: Percebemos que, durante a mediação, o grupo defende suas ideias e esclarece suas dúvidas com o professor-pesquisador, que guia a discussão e levanta questionamentos que possam esclarecer seus pontos de vista.

A principal dificuldade encontrada no item (b) foi a necessidade de levar em consideração que Paulo deveria ocupar a segunda posição no banco. No entanto, neste item, de todos os grupos que resolveram o problema corretamente, apenas G1, G3 e G10 precisaram da mediação professor-pesquisador.

Figura 38 – Resolução do grupo 5 ao item (b) referente à atividade 9.



Fonte: Dados da pesquisa.

Atividade 10 – Problemas com letras repetidas[11]

Qual o número de anagramas da palavra PAPA?

Esta atividade teve como objetivo trabalhar com um problema de permutação com elementos repetidos.

O G1 resolveu a atividade 9 e deu início à resolução da atividade 10. O grupo solicitou a presença do professor-pesquisador e justificou sua resolução. Observe-se o diálogo:

G1 (Aluno 1): Professor são 24 anagramas.
PP: Como vocês fizeram?
G1 (Aluno 1): $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ anagramas.
PP: Vocês acham que podemos contar, por exemplo, os anagramas APAP e APAP?
G1 (Aluno 3): Não, porque são iguais. No caso temos letras iguais.
PP: Isso".

---

[11] Adaptado do livro **Matemática participação e contexto,** Silva e Filho (2008).

C.O: Notamos que, neste problema, os alunos apresentaram dificuldades em relação à contagem dos elementos repetidos. Alguns alunos recorreram, de imediato, ao Princípio Fundamental da Contagem. Acreditamos que o uso desta estratégia ocorreu devido à resolução do problema que consistia em determinar o número de anagramas da palavra GARI, neste caso, este princípio seria aplicável já que temos elementos distintos.

A lista organizada de todas as possibilidades seria uma estratégia que possibilitava aos alunos perceberem os anagramas que deveriam fazer parte da contagem. Observe o diálogo com G2:

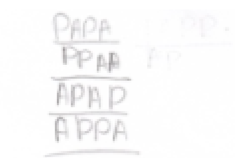
G2 (Aluno 1): Eu achei 4 anagramas.
PP: Você acha que esses são todos os anagramas?
G2 (Aluno 2): Está faltando APPA.
PP: Isso.
G2 (Aluno 1): E também PAAP.
PP: Isso. Então são quantas possibilidades.
G2 (Aluno 2): 6 possibilidades.

G6 também solicitou a ajuda do professor-pesquisador:

G6 (Aluno 1): Professor são 5 anagramas.
PP: Você acha que não está faltando?
G6 (Aluno 2): No caso tá faltando o próprio nome, PAPA.
PP: Correto.

Nesta atividade, apenas o grupo G10 apresentou a solução parcialmente correta, descrevendo 4 anagramas, enquanto os outros grupos conseguiram resolver o problema corretamente.

Figura 39 – Resolução do grupo 10 referente à atividade 10.



Fonte: Dados da pesquisa.

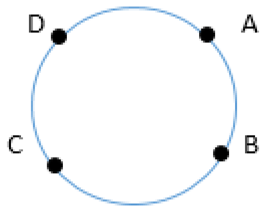
Ao fim, da aula, registramos na lousa o trabalho realizado pelos grupos, fazendo questionamentos sobre o que haviam feito, além de enfatizar as dificuldades encontradas durante a resolução das atividades. Destacamos a descoberta de G1 na atividade 9, e acrescentamos, ao seu raciocínio, explicitando uma forma diferente de solucionar o problema, como descrevemos acima. Na atividade 10, enfatizamos que se as letras fossem distintas entre si, teríamos 4! anagramas. No entanto, percebe-se que a palavra não se altera quando permutamos apenas as letras iguais. Como na palavra PAPA a letra A se repete duas vezes, logo cada anagrama repete 2! vezes, como também a letra P repete 2! vezes. Assim, explicamos para a turma que, para obter o número de anagramas, bastava dividir o total de permutação simples (4!), pelo fatorial do número de letras iguais, ou seja, $(2! \cdot 2!)$, visto que os anagramas iguais não entravam na contagem.

5.10 10º Encontro (uma aula) – dia 04/03/2016

Iniciamos a aula solicitando que os alunos se reunissem em grupo. Foram formados oito grupos com três alunos e três duplas. Em seguida, entregamos o roteiro de atividades e pedimos que eles tentassem resolvê-lo. Nos colocamos a disposição diante de qualquer dúvida.

Atividade 11 – Problema da circunferência[12].

Em uma circunferência foram destacados os seguintes pontos, A, B, C e D. Assim quantos segmentos podemos traçar com uma extremidade em dois desses quatro pontos?



a) *Quantos triângulos convexos podem ser construídos com vértices nesses pontos?*
b) *Quantos quadriláteros convexos podem ser construídos com vértices nesses pontos?*

Tivemos como objetivo, para esta atividade, trabalhar a ideia essencial de Combinação simples, formalizando-a ao fim, da aula, fazendo com que os alunos percebessem que, nesse tipo de agrupamento, a ordem dos elementos não é relevante, ou seja, a mudança dos elementos não gera um novo agrupamento. O grupo 6 solicitou a ajuda do professor pesquisador: “G6 (Aluno 2): Professor, os segmentos podem ser assim?”.

O G6 inicialmente não estava compreendendo o que deveria ser feito no problema, já que, em meio a sua justificativa, em relação ao trabalho realizado no problema, os alunos destacaram segmentos que não passavam pelas extremidades dos pontos destacados na

[12] Adaptado do livro **Matemática completa**, Giovanni e Bonjorno (2005).

circunferência. Durante nossa mediação, levamos o grupo a compreender o problema. Observe o diálogo:

> PP: Isso.
> PP: São quantos pontos que foram destacados na circunferência?
> G6 (Aluno 1): 4.
> G6 (Aluno 2): Estão os segmentos tem que passar pelos pontos?
> PP: Isso.
> G6: Poderia ser AB, AC, CD?
> PP: Correto. Continue seu raciocínio.

O G8 solicitou a presença do professor-pesquisador e justificou sua resolução: "G8 (Aluno 1): Professor são seis possibilidades: AB, AC, AD, BC, BD e CD. PP: Isso".

Em seguida, G8 afirmou que não estava entendendo o item (a), e fez a leitura do problema para o professor-pesquisador, posteriormente questionamos:

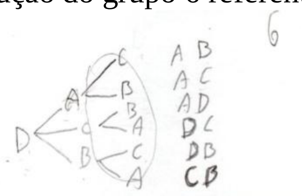
> PP: Um triângulo tem quantos lados?
> G8 (Aluno 1): 3 lados. Temos que formar triângulos com três pontos?
> PP: Isso.

O G6 apresentou dificuldades para resolver o problema inicial, visto que este grupo recorria, na maioria de suas resoluções, à árvore de possibilidades. Como tínhamos um problema de combinação simples, a árvore não foi um caminho tão evidente para este grupo.

> G6 (Aluno 1): Estou fazendo pela árvore, mas está dando errado.
> PP: Porque você acha que está errado?
> G6 (Aluno 1): Porque eu ia de B a A, e de A a B, aí eu ia voltar como se ainda tem o D?
> PP: Vocês acham que o segmento AB e BA são diferentes ou os mesmos?
> G6 (Aluno 1): Não. São os mesmos.
> G6 (Aluno 2): Os mesmos caminhos.

A partir da mediação, o grupo pôde entender a árvore de possibilidades construída por eles, de tal modo que visualizaram e selecionaram todos os possíveis segmentos. É fato que, levando em consideração um certo rigor matemático, a árvore construída pelo grupo não representa claramente a situação-problema.

Figura 40 – Resolução do grupo 6 referente à atividade 11.



Fonte: Dados da pesquisa.

C.O: Notamos que o grupo, ao longo da mediação, foi compreendendo o problema, no qual a árvore de possibilidades fez parte deste processo. Deste modo, não negamos suas ideias, mas tentamos levar o grupo a refletir sobre elas.

O G1 solicitou uma interferência do professor-pesquisador, evidenciando que achou 12 possibilidades. Para chegar a essa conclusão, o grupo recorreu à fórmula de arranjo simples. Neste sentido, conduzimos um diálogo com o grupo:

> PP: Será que são 12? Quem seria um segmento aí?
> G1 (Aluno 1): BA, BD
> G1 (Aluno 2): AB.
> PP: Vocês acham que AB e BA são segmentos diferentes ou iguais?
> G1 (Aluno 1): É igual.
> G1 (Aluno 3): É não.
> PP: Porque sim? Ou porque não?
> G1 (Aluno 3): Porque vão ser segmentos repetidos.
> PP: Isso. Neste caso se não vamos contar os segmentos repetidos, então vão ser quantas possibilidades.
> G1 (Aluno 2): Se for diminuindo os repetidos, vai diminuindo cada um, então vai ser menos, vai ser 6.
> PP: Isso.

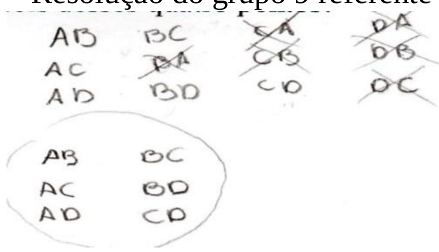
G2 também teve dificuldades no problema inicial, observe o diálogo:

> PP: Quais são os segmentos que podem partir de uma extremidade para outra?
> G2 (Aluno 1): AB, AC, AD. Então são 12.
> PP: Porque são 12?
> G2 (Aluno 1): $4 \cdot 3 = 12$, são quatro pontos, estamos escolhendo 2.
> PP: Você acha que os segmentos AB e BA são diferentes?
> G2 (Aluno 2): Não, são iguais. Então é a metade.
> PP: Isso.

G5, G9 e G10 em suas justificativas para resolver o problema inicial, destacaram que o segmento AB e BA são diferentes porque de A a B o caminho é descendo e, de B a A, é subindo. Conduzimos os grupos a um ambiente de reflexão sobre o trabalho realizado no problema para que os alunos pudessem validar suas ideias.

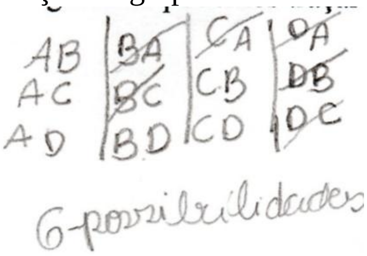
De modo geral, os grupos precisaram da ajuda do professor-pesquisador na resolução do problema inicial. A principal dificuldade foi perceber, por exemplo, que AB e BA são o mesmo segmento, já que a ordem das extremidades não os diferencia. A lista organizada de todas as possibilidades permitiu, a alguns grupos, perceber que a escolha da ordem das extremidades não gerava um novo segmento. Deste modo, G7 e G9 listaram doze possibilidades e eliminaram os segmentos repetidos.

Figura 41 – Resolução do grupo 9 referente à atividade 11.



Fonte: Dados da pesquisa.

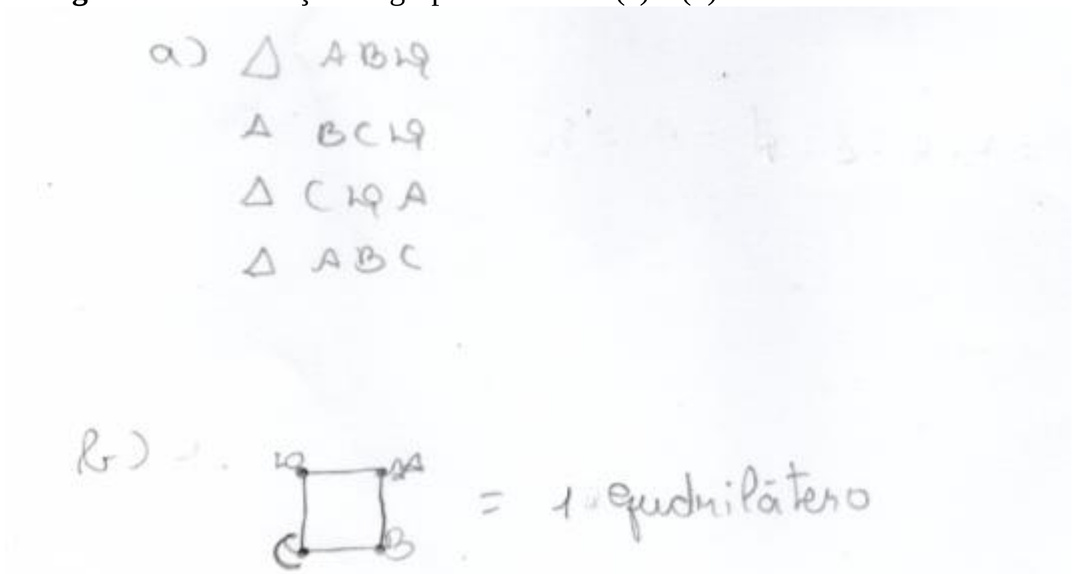
Figura 42 – Resolução do grupo 7 referente à atividade 11.



Fonte: Dados da pesquisa.

Constatamos, com nossa observação e análise do material, que todos os grupos conseguiram resolver, corretamente, o problema inicial. G8 nos solicitou evidenciando que, para o item (a), são quatro possibilidades para construir triângulos convexos com vértices nesses pontos, ao passo que, para o item (b), há uma possibilidade para construir um quadrilátero convexo com vértices nesses pontos.

Figura 43 – Resolução do grupo 8 aos itens (a) e (b) referente à atividade 11.



Fonte: Dados da pesquisa.

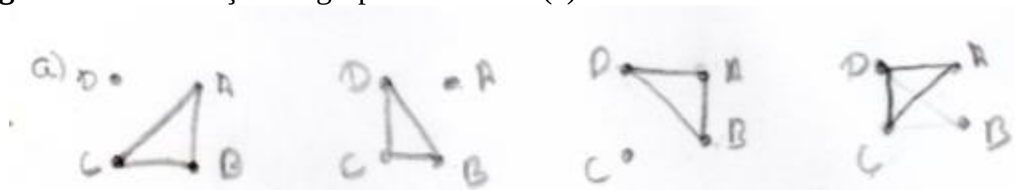
C.O: Percebemos que o grupo G8 não apresentou dificuldades para resolver a atividade proposta. Um problema é uma tarefa que inicialmente não sabemos como resolver, mas que para tal somos desafiados. No entanto, é fato que o problema pode acarretar dificuldades para a maioria dos alunos, como também alguns alunos podem não apresentar dificuldades durante a resolução do problema.

Em relação ao item (a), os alunos tiveram menos dificuldades para resolver o problema, pois a irrelevância da escolha dos pontos ainda se apresentou como um obstáculo para alguns grupos, mas que foi superado quando fizemos os alunos refletirem sobre o problema inicial.

C.O: Notamos que a resolução do problema inicial foi essencial para que os grupos pudessem ter um bom desempenho no item (a). Na verdade, os alunos ficaram mais atentos quando a ordem das escolhas das extremidades gerava um novo agrupamento. Acreditamos que a ideia de Combinação simples estava sendo construída pelos alunos em meio à exploração desta atividade.

Apenas G7 apresentou uma resolução parcialmente correta, evidenciando 2 possibilidades, ao passo que os demais grupos apresentaram uma resolução correta. Observe a resolução de G11:

Figura 44 – Resolução do grupo 11 ao item (a) referente à atividade 11.



Fonte: Dados da pesquisa.

No item (c), todos os grupos resolveram o problema corretamente. Percebendo o bom desempenho dos grupos, fomos à lousa registrar todo o trabalho realizado pelos grupos e, ao final, formalizamos o conceito de Combinação simples. Para fazer isso, aproveitamos as descobertas feitas pelos grupos durante a exploração da atividade. Observe o diálogo:

PP: Ao escolher o ponto A como uma das extremidades, quem poderia ser a outra

extremidade?
Turma: A outra extremidade será B, C ou D.
PP: Se escolhermos o ponto B como uma das extremidades?
Turma: A outra será A, C ou D.
PP: Logo para cada um dos 4 pontos escolhidos dispomos de 3 possibilidades para formar um segmento. Daí, temos $4 \cdot 3 = 12$.

Evidenciamos os 12 pares de pontos extremidades de segmentos:

AB	BC	AC	BD	AD	CD
BA	CB	CA	DB	DA	DC

Ressaltamos que AB e BA, representam o mesmo segmento, visto que a ordem das extremidades não o diferencia, e o mesmo acontece para os demais segmentos, logo foi contado 2 vezes. No entanto, como vimos na resolução deste problema, podemos traçar apenas 6 segmentos, ou seja,

$$6 = \frac{4 \cdot 3}{2!} = \frac{A_{4,2}}{p_2}$$

Assim, enfatizamos que, se tivéssemos **n** elementos distintos para organizar em agrupamento de **p** elementos, tomados **p** a **p** **(p$\leq n$),** bastaria dividir o número total de agrupamentos formados (arranjo) pela permutação do número de elementos destes agrupamentos. Assim, teríamos:

$$\frac{A_{n,p}}{\mathrm{p}!} = \frac{\frac{n!}{n-p!}}{p!} = \frac{n!}{n-p!} \cdot \frac{1}{p!} = \frac{\mathrm{n}!}{p!(n-p)!} = C_{n,p}$$

$$\therefore C_{n,p} = \frac{\mathrm{n}!}{p!(n-p)!}$$

Resolvemos o problema inicial utilizando a fórmula, em seguida, destacamos que, para saber se estamos diante de um problema de combinação simples, basta fazer alguns agrupamentos, e se mudança na ordem acarretar em agrupamentos iguais aos originais, temos um problema de combinação, como no problema da circunferência. Assim ressaltamos que em problemas dessa natureza, a ordem dos elementos não é relevante, e que neste tipo problema, importa apenas a natureza dos elementos. Desafiamos a turma ao questionarmos qual foi o problema de combinação simples que foi trabalhado em uma das aulas anteriores, observe o diálogo:

PP: Já resolvemos algum problema em que ordem dos elementos não gerava um novo agrupamento. Qual foi o problema?
Turma: No sorteio dos dois carros, a dupla de ganhadores (Adriano, Erivam) e (Erivam e Adriano) é a mesma. No caso a ordem não importa.

De imediato, a turma lembrou do Problema do carro e da moto, no qual, durante sua exploração, propusemos um problema de combinação simples, que provocou excelentes discussões.

5.11 Reflexões sobre a intervenção em sala de aula via resolução e exploração de problemas

Em princípio, notamos que os alunos apresentaram dificuldades com a metodologia adotada, visto que estavam habituados em um modelo de aula que tem unicamente o professor como ponto de partida. Deste modo, o professor-pesquisador selecionou atividades que levassem o aluno a enveredar por uma investigação matemática, partindo dos seus conhecimentos existentes, de modo a lhes possibilitar uma efetiva participação na construção do seu conhecimento.

Aos poucos, os alunos foram se engajando nas discussões das atividades, já que lhes agradava a metodologia de Resolução e de Exploração de problemas; eles puderam refletir no que estavam fazendo, retomando um problema anterior para chegar à resolução de um novo problema. Durante a intervenção, tivemos algumas evidências que comprovam isso, como a justificativas do G8 no item (b) nos Problemas de códigos, como também do grupo G2 no item (a) na questão dos Problemas das quatro bolas. Observe, abaixo, a descoberta desses grupos:

> G8 (Aluno 2): Professor a resposta é 24.
> PP: Como vocês resolveram?
> G8 (Aluno 2): No problema inicial a resposta foi 32, mas tem 8 códigos que não são distintos, aí eu fiz: 32 – 8 = 24 possibilidades.
> PP: Correto.
> G2 (Aluno 1): Basta acrescentar os seguintes casos: (V, V), (B, B), (P, P) e (A, A) e adicionar essas quatro possibilidades às outras dozes possibilidades da letra (a), obtendo dezesseis possiblidades.
> PP: Correto.

Silva (2013) realizou uma pesquisa de Análise Combinatória em que utilizou, como metodologia de ensino-aprendizagem, a resolução e a exploração de problemas. Para o pesquisador, a apreensão dos conceitos ocorre, inicialmente, partindo de conceitos de um grau menos abrangente de generalidade para níveis mais abrangentes. Nesse sentido, ele observou em uma das atividades trabalhadas em sua intervenção, em que alguns alunos arriscavam hipóteses baseadas na experiência com situações anteriores de resolução dos problemas.

No Problema dos anagramas o grupo G6 resolveu todos os itens a partir do problema inicial, justificando, ao professor-pesquisador, que bastava observar, na árvore de possibilidades, que se tinha um panorama de todas as possiblidades para cada item. Nesse sentido, Andrade (1998, p. 179) diz que,

> O trabalho de exploração de um problema, em sala de aula, pode sempre ser continuado. O que acontece é que alunos e professor, num determinado momento, param, mas não acabam, definitivamente, de explorar o problema colocado, partindo para outros problemas, podendo, depois, se necessário e oportuno, retornar, se o desejarem, ao problema original.

Deste modo, quando percebemos que os alunos não chegaram a um aprofundamento esperado na atividade proposta, naquele momento, a retomamos ao percebermos que eles dispõem, agora, dos conhecimentos necessários para apreender as ideias inerentes aos problemas discutidos anteriormente. Na primeira atividade, sentimos a necessidade de retornar ao item (b), visto que os grupos não conseguiram determinar o número de possiblidades para cada escolha. Como na atividade seguinte, o Princípio Fundamental da Contagem foi formalizado, retomamos a este problema, observe o diálogo:

> PP: Vamos relembrar o item (b) do problema das cidades. Vamos considerar o trajeto de ida. Para ir de Alagoinha a Cuitegi, quantas são as possibilidades?
> Turma: temos 2 possibilidades.
> PP: Para ir de Cuitegi a Guarabira, quantas são as possibilidades?
> Turma: 3 possibilidades.
> PP: Considerando o trajeto de volta. Quantas possibilidades de retornar de Guarabira a Cuitegi não passando pela linha da ida?
> Turma: 2 possibilidades.
> PP: E de Cuitegi a Guarabira?
> Turma: 1 possibilidade.
> PP: Daí, quantas são as possibilidades?
> Turma: $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 12$ possibilidades.

Ao formalizarmos as ideias essenciais de arranjo e combinação simples, questionamos a turma se eles conseguiam identificar quais os problemas que abordam estes conceitos – discutidos em aulas anteriores. Observamos que os alunos não tiveram dificuldades de reconhecer os problemas, fazendo a distinção clara dos agrupamentos. Os diálogos abaixo evidenciam, um novo olhar da turma em relação a esses problemas:

> PP: Dos problemas que já foram discutidos nas outras aulas, quais são problemas de arranjo simples?
> Turma: O problema dos códigos.
> PP: Porque?
> Turma: Porque por exemplo $12 \neq 21$. A ordem aí é importante
>
> PP: Já resolvemos algum problema em que ordem dos elementos não gerava um novo agrupamento? Qual foi o problema?
> Turma: No sorteio dos dois carros, a dupla de ganhadores (Adriano, Erivam) e (Erivam e Adriano) é a mesma. No caso a ordem não importa.

Notamos que a metodologia de Resolução e Exploração de problemas colocou os alunos em um ambiente em que foi necessário refletir sobre o seu fazer ou sobre o seu pensar. Deste modo, as atividades trabalhadas possibilitaram a evolução do processo metacognitivo. Isso ficou evidenciado durante os questionamentos do professor-pesquisador que exigia do aluno uma tomada de decisão, levando-o a refletir sobre o que fez ou estava fazendo. Percebemos que, ao explorar a capacidade do aluno de refletir sobre o processo de resolução do problema, se lhe permitiu obter resultados satisfatórios, como também uma aprendizagem com compreensão. Observe o diálogo com G4:

> G4: Professor a resposta é 16.
> PP: Como vocês fizeram?
> G4 (Aluno 1): Fizemos todos os códigos que contêm a face cara.
> PP: E a face coroa?
> G4 (Aluno 2): Coroa é um número?
> PP: Não. Coroa é uma das faces da moeda.
> G4 (Aluno 2): Então é duas vezes dezesseis.
> PP: Porque?
> G4 (Aluno 2): Porque vai ter mais dezesseis coroas.
> PP: Isso!

Nota-se o comportamento metacognitivo, no qual os alunos monitoram e regulam suas ações repensando o que foi feito e elaboram estratégias que dão conta do novo problema. Vimos acima nos diálogos de G2 e G8 que os alunos retomam o seu processo de pensamento, tomando consciência do que foi feito para decidir sobre as estratégias que podem ser eficazes na resolução do problema.

O pesquisador Brandão (2014) evidenciou, em seu trabalho, que a resolução de problemas permitiu que os alunos desenvolvessem mais seu processo metacognitivo. O autor destaca que, inicialmente, os alunos sentiram dificuldades para pensar sobre o que estavam fazendo, mas que, no decorrer dos encontros, os alunos foram evoluindo no processo de metacognição, já que a resolução de problemas exige leitura, interpretação e extração de dados do enunciado.

Nessa perspectiva, foi comum perceber a insegurança dos alunos sobre o que deveriam fazer para iniciar o processo de resolução do problema, visto que estavam com dificuldades para interpretar o problema. Para Pais (2013) a resolução de um problema começa com a leitura de seu enunciado, ou seja, a dificuldade que o aluno pode ter de interpretar o sentido intencionado da redação. Para o autor, a falta de hábito de leitura, por partes dos alunos, ocasiona obstáculos na resolução do problema.

Deste modo, solicitamos, em princípio, que eles fizessem uma leitura da atividade, para que pudessem entender o que é dado e pedido no problema, e em que condições, para que, posteriormente, estivesse pensando em algumas estratégias que poderiam ser implementadas na resolução do problema. Em alguns casos, o professor-pesquisador fez a leitura junto com o grupo, esclarecendo a necessidade de estar atentos ao problema. Na verdade, percebemos que os alunos não estavam habituados a ler e interpretar nas aulas de Matemática e desse modo, queriam partir logo para resolução sem ao menos compreender o enunciado do problema. Brandão (2014) também observou que os alunos têm dificuldades para interpretar o enunciado dos problemas. Assim, percebe-se que eles fazem uma leitura rápida e de imediato recorrem ao professor.

É importante que o professor possa esclarecer o significado de algumas palavras que tendem a dificultar a resolução do problema. Durante a exploração das atividades, sentimos a necessidade de esclarecer, à turma, o significado das palavras: distintos, adjacente e anagramas, para que, posteriormente, os alunos pudessem interpretar o problema com clareza.

A mediação professor-aluno, professor-grupo e professor-turma colocou o aluno como o foco central do trabalho em sala de aula, e que ele é capaz de fazer intervenções por si só. Deste modo, em meio a questionamentos dos alunos sobre como resolver o problema, sobre o seu trabalho realizado, ou sobre a má interpretação do problema, buscamos fazer mediações que não intimidassem sua criatividade. Assim, tentamos evidenciar, para os alunos, que eles são capazes e que acreditamos em seus potenciais.

Percebemos o desenvolvimento de alguns alunos em meio à resolução dos problemas, visto que era comum, nas primeiras atividades, eles solicitarem, do professor-pesquisador, uma intervenção com o objetivo de sanar dúvidas para, a partir daí, iniciar a resolução do problema. Com o prosseguimento da pesquisa, constatamos uma nova postura, visto que o professor-pesquisador era solicitado, na maioria das vezes, apenas para ouvir as explicações dadas pelos alunos acerca do trabalho realizado durante a resolução do problema proposto.

Nesse sentido, Brandão (2014) observou que o uso da metodologia de resolução de problemas, ao longo das atividades, tornou os alunos mais autônomos e críticos, propiciando-lhes motivação para estudar Matemática. Os grupos G6 e G1 justificam sua resolução no Problema da bandeira, no Problema do carro e no da moto, respectivamente:

> G6 (Aluno 2): Professor a resposta é 12.
> PP: Como vocês fizeram?
> G6 (Aluno 2): Para escolha da primeira cor tem 3 possibilidades, para escolha da segunda 2 possibilidades, porque as faixas que estão juntas não podem ser pintadas com a mesma cor e para terceira 2 possibilidades. Assim fizemos: $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$.

G1 (Aluno 1): Professor temos no total de vinte e quatro senhas, e no caso devemos verificar qual a senha é a correta?
PP: Isso. Como vocês fizeram para descobrir isso?
G1 (Aluno 1): Pelo Princípio Fundamental da Contagem, são 4 possibilidades da escolha da primeira cor, 3 possibilidades da escolha da segunda cor, e 2 possibilidades para a última cor, aí faz: $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ possibilidades.
PP: Correto.

As interações entre os alunos dos grupos aos poucos foram sendo observadas, contudo, foi possível perceber que alguns alunos ficavam esperando os colegas fazerem as atividades sozinhos. No entanto, durante a mediação, os alunos justificavam suas ideias e o professor-pesquisador propunha alguns questionamentos que pudessem leva-los a refletir sobre o que eles estavam fazendo, promovendo, assim, um ambiente de diálogo e de cooperação entre os alunos do grupo. Abaixo, trazemos alguns diálogos entre os alunos:

PP: Estão conseguindo resolver o problema? Como as pessoas podem se organizar para tirar uma foto?
G6: Dayana e Manoel têm que sair juntos nas fotos?
PP: Isso. E como vocês estão pensando?
G6 (Aluno 1): São quatro pessoas, sendo que Dayana e Manoel têm que ficar juntos. Então na primeira podemos colocar Dayana e Manoel...e Luciana e Paulo. Na outra pode ser Manoel e Dayana, e Luciana e Paulo.
G6 (Aluno 2): Então basta trocar as posições?
PP: Isso, continue seu raciocínio.
G6 (Aluno 2): Pode ser pela árvore de possibilidades?
PP: Pode sim.

G2 (Aluno 1): O que importa é estarem Manoel e Dayana juntos? E Paulo pode ir para frente e para trás.
PP: No caso, quem vai ficar trocando de posição?
G2 (Aluno 1): Paulo e Manoel.
G2 (Aluno 2): E vai continuar sempre os dois juntos?
G2 (Aluno 1): Os dois vão ficar, o que vale é mudar a ordem.
G2 (Aluno 2): E não é a mesma foto?
G2 (Aluno 1): Não. Manoel e Dayana e Dayana e Manoel são duas formas de tirar a foto. Não é professor?
PP: Isso.
PP: Será que são 12? Quem seria um segmento aí?

G1 (Aluno 1): BA, BD
G1 (Aluno 2): AB.
PP: Vocês acham que AB e BA são segmentos diferentes ou iguais?
G1 (Aluno 1): É igual.
G1 (Aluno 3): É não.
PP: Porque sim? Ou porque não?
G1 (Aluno 3): Porque vão ser segmento repetidos.
PP: Isso. Neste caso se não vamos contar os segmentos repetidos, então vão ser quantas possibilidades.
G1 (Aluno 2): Se for diminuindo os repetidos, vai diminuindo cada um, então vai ser menos, vai ser 6.
PP: Isso.

Os alunos estavam expondo seu entendimento sobre os problemas, enquanto o professor-pesquisador coordenava as discussões levantando questões que pudessem esclarecer as ideias dos alunos.

Antes de irmos para o campo de pesquisa, tínhamos uma preocupação com relação aos problemas que foram selecionados por nós, visto que eles têm um papel importante diante das novas ideias matemáticas que queremos introduzir durante a aula. Além disso, outro aspecto que deve ser levado em consideração é que o problema deve ser visto pelo aluno como um desafio que lhe instiga a resolver. De modo geral, percebermos, durante a intervenção, tanto o interesse dos alunos na busca pela resolução dos problemas, como também o debate ao fim, de cada aula, na qual evidenciamos o trabalho realizado pelos grupos sobre os problemas – pelos quais foi possível a introdução de novos conceitos de Combinatória.

Ao longo da resolução dos problemas, os alunos utilizaram estratégias como: lista organizada de todas as possibilidades; árvore de possibilidades; construção de tabelas; desenhos; fizeram relação com o problema anterior, além do uso do Princípio Fundamental da Contagem e das fórmulas. Para uma boa implementação dessas estratégias nos problemas de Combinatória, seria necessário que eles possuíssem uma quantidade relativamente pequena de agrupamentos, pelo menos inicialmente.

As estratégias citadas acima poderiam ser utilizadas para que os alunos pudessem buscar algum padrão na formação dos agrupamentos e, em seguida, fazer generalizações. Em nossas observações em sala de aula, constamos que isso aconteceu, já que G1 conseguiu chegar à ideia essencial do Princípio Fundamental da Contagem no Problema dos códigos, fazendo uma lista organizada e buscando padrões na formação dos códigos. No Problema das quatro bolas, os alunos do grupo G8 apresentaram sua compreensão do Princípio Fundamental da Contagem a partir da observação de padrões na formação de cada agrupamento. “G8 (Aluno 1): No caso percebemos que há três maneiras de cada bola sair por primeiro. PP: Correto”.

Nesse sentido, Silva (2013) diz que, em sala de aula, o processo de generalização e a enumeração fazem parte da construção do conhecimento matemático do aluno e caminham juntas com a mediação do professor.

Além disso, a exploração de atividades com poucos agrupamentos possibilitou, aos alunos em alguns problemas, a distinção dos problemas de Combinatória. Observamos que os alunos que recorriam à árvore de possibilidades, à tabela ou a uma lista organizada, puderam observar, com mais clareza, que a mudança na ordem dos elementos gerava um novo agrupamento ou não. O diálogo com G9 evidencia sua descoberta:

> G9 (Aluno 1): Professor são 6 possibilidades.
> PP: Como vocês observaram isso?
> G9 (Aluno 1): Observamos na tabela que, por exemplo Adriano ser o primeiro ganhador e Erivam o segundo ganhador, é a mesma coisa de Erivam ser o primeiro ganhador e Adriano o segundo ganhador. Aí fizemos uma tabela obtendo 6 possibilidades.
> PP: isso.

No problema da circunferência, os grupos G7 e G9, fizeram uma distinção correta do tipo de agrupamento, ao listar doze possiblidades e notaram que havia segmentos repetidos, ou seja, que não faria parte da contagem.

No entanto, tivemos a preocupação de evidenciar, em alguns problemas, que nem sempre é recomendável descrever todas as possibilidades. A formalização do Princípio Fundamental da Contagem possibilitou, aos alunos, uma nova tomada de decisão quando se deparavam com um problema caracterizado por uma quantidade relativamente grande de agrupamentos.

Notamos que a compreensão deste princípio foi essencial para a formalização das ideias seguintes. Os conceitos matemáticos de arranjo e permutação simples estavam sendo utilizados pelos alunos sem causar tantas dificuldades. Ao implementarmos um problema de combinação simples, percebemos as dificuldades dos alunos em perceber que a ordem dos elementos não gerava um novo agrupamento. Deste modo, foi comum observamos, em algumas resoluções, o uso do Princípio Fundamental da Contagem. Na verdade, os alunos, até então, observaram que a estratégia estava sendo aplicada em todas as atividades trabalhadas anteriormente. Com a formalização da ideia essencial de combinação, foi necessária uma nova postura por parte dos alunos em relação à relevância na ordem dos elementos, como também à eficácia do Princípio Fundamental da Contagem.

Silva (2013) observou, em sua pesquisa, que os alunos apresentam dificuldades referentes à ordem dos elementos no agrupamento. O pesquisador propõe um problema e faz uma análise dos possíveis equívocos cometidos pelos alunos, ressaltando que eles poderiam não perceber que a mudança na ordem dos elementos não gera um novo agrupamento, e posteriormente, fazer a contagem de todos.

Notamos que, de modo geral, ao longo dos encontros, os alunos conseguiram organizar informações ou números de forma adequada, e, logo depois, faziam a contagem das possíveis possibilidades, ou seja, notou-se o desenvolvimento do raciocínio combinatório. Algumas estratégias eram mais recorrentes entre alguns grupos, como, por exemplo, a árvore de possibilidades; ela estava, sempre que possível, presente nas resoluções dos grupos G5 e G6. Percebemos, também, que os grupos G1, G2, G6, G8 e G9, ao recorrer à lista de todas as possibilidades, tomavam alguns elementos de referência para facilitar a constituição de todos os agrupamentos.

Os alunos, no decorrer dos encontros, foram melhorando seu rendimento, resolvendo problemas de Combinatória com muito mais autonomia, sem precisar tanto da confirmação do professor-pesquisador sobre o trabalho realizado. Além disso, os alunos passaram a ser agentes ativos do seu processo de aprendizagem, ao justificar e refletir sobre o que estavam fazendo e evidenciando múltiplas soluções, podendo validar o seu trabalho nos problemas propostos.

Silva (2013) destaca que a resolução de problemas como metodologia de ensino-aprendizagem possibilita, no mínimo, uma formação crítica e questionadora, provocando a autonomia do aluno nesse processo.

Acreditamos que, para a exploração de alguns problemas, os alunos poderiam mergulhar num aprofundamento muito maior. Às vezes, o tempo de uma aula não é suficiente para que isso aconteça, principalmente pelo fato de os alunos ainda estarem se familiarizando com a metodologia adotada.

As discussões geradas ao fim, de cada aula, contudo, possibilitaram, aos alunos, refletir sobre o que fizeram, validando suas soluções ao mesmo tempo em que evidenciaram as dificuldades encontradas, as quais nós tentamos suprimir mediante debates entre o professor-turma, além de conseguirmos formalizar ideias essenciais de Combinatória.

5.12 Intervenção em sala de aula via resolução e proposição de problemas

No segundo momento da nossa intervenção, nos propusemos a trabalhar via resolução e proposição de problemas. Para que isso fosse possível, elaboramos duas propostas de proposição de problemas, em que os alunos formularam problemas; em seguida, selecionamos os mesmos problemas para que a turma os resolvesse nos encontros seguintes.

As estratégias utilizadas para a escolha dos problemas que compõem o roteiro de atividades foram: discutir problemas que trabalhavam com o mesmo contexto, no entanto, abordavam diferentes ideias matemáticas; trabalhar com um roteiro de problemas que pudesse dar conta dos diferentes problemas de combinatória; e selecionar problemas com uma quantidade pequena e grande de possibilidades, com o intuito de que os alunos pudessem perceber que tipos de estratégias seriam viáveis para a resolução de cada problema.

Para esse momento, foram realizados 11 encontros, totalizando 13 aulas. Vamos trazer, aqui, a descrição e as reflexões sobre nossas observações em sala de aula, durante a implementação dessas propostas.

5.13 11º Encontro (duas aulas) – dia 09/03/2016

Para este encontro, foram necessárias duas aulas. Para isso, o professor do horário seguinte cedeu a sua aula para que realizássemos a intervenção. Depois de os alunos terem tido contato com diferentes problemas de Combinatória, nos quais perceberam a natureza dos conceitos deste tópico matemático, eles foram encorajados a propor problemas referentes aos diferentes tipos de agrupamentos.

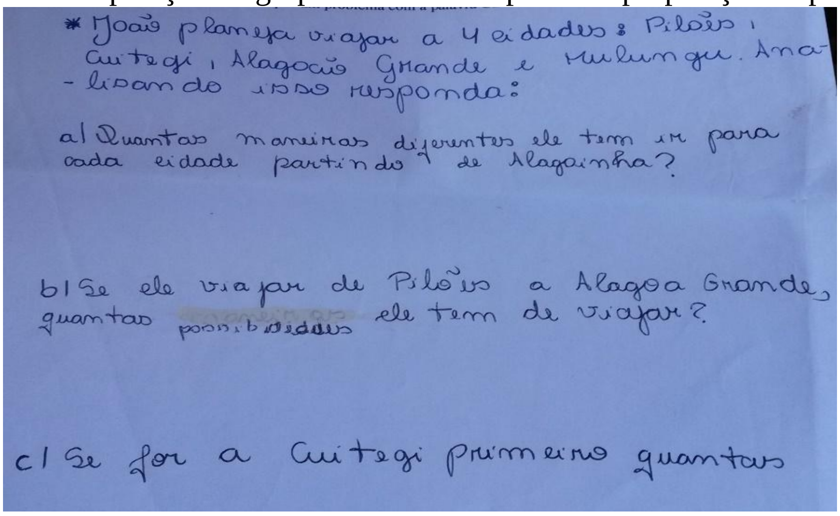
Para facilitar o processo de proposição de problemas, iniciamos a aula sorteando uma palavra entre os grupos, e eles tiveram que propor um problema de Combinatória a partir dela. Abaixo temos as palavras que foram sorteadas: **baralho; meninas ou meninos; cidade; senhas; letras; livro; números; fila; cadeiras; futsal; sorteio.**

Em seguida, os alunos começaram o processo de proposição de problemas. Vamos fazer uma descrição evidenciando o trabalho realizado por cada grupo. Ressaltamos que foram formados oito grupos com três alunos e três duplas.

A palavra sorteada para o grupo G1 foi CIDADE. O grupo propôs dois problemas, onde o primeiro precisava ser reformulado, visto que necessitava de algumas informações para ter sentido. O grupo solicitou a presença do professor-pesquisador, e fez a leitura do problema por eles formulado.

> G1 (Aluno 2): Professor já terminamos.
> PP: Vocês acham que esse problema tá com sentido, ou seja, os dados presentes no problema vão ser suficiente para resolvê-lo?
> G1 (Aluno 1): Não sabemos, pois não resolvemos.

Figura 45 – Proposição do grupo 1 referente à primeira proposição de problemas.


* João planeja viajar a 4 cidades: Pilões, Cuitegi, Alagoa Grande e Mulungu. Analisando isso responda:

a) Quantas maneiras diferentes ele tem ir para cada cidade partindo de Alagoinha?

b) Se ele viajar de Pilões a Alagoa Grande, quantas possibilidades ele tem de viajar?

c) Se for a Cuitegi primeiro quantas

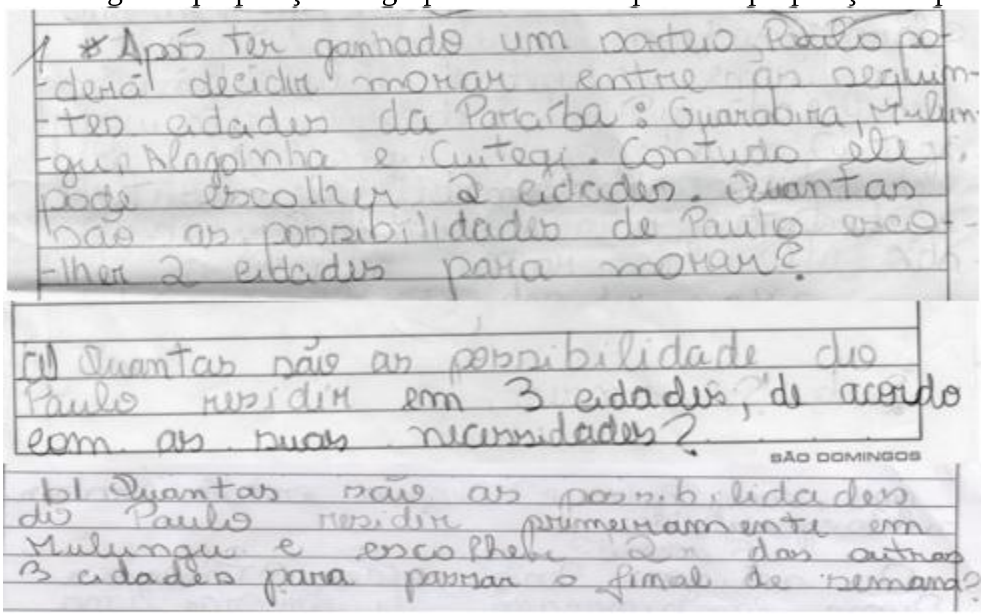
Fonte: Dados da pesquisa.

Em seguida o grupo G1 enfatizou, ao professor-pesquisador, a relevância de se trabalhar com a proposição de problemas. “G1 (Aluno 1): Professor essa atividade trabalha com a nossa criatividade. PP: Isso”.

Para ajudar no processo de proposição do problema, insistimos e questionamos: “PP: Existem quantas maneiras de ir de Alagoinha a Cuitegi? G1 (Aluno 2): É, não colocamos quantos caminhos temos para ir para cada cidade”.

Fomos assistir os outros grupos, depois, G1 nos solicitou a presença para mostrar um novo problema, que era passível de se calcular uma resposta.

Figura 46 – Segunda proposição do grupo 1 referente à primeira proposição de problemas.


1 * Após ter ganhado um sorteio Paulo poderá decidir morar entre as seguintes cidades da Paraíba: Guarabira, Mulungu, Alagoinha e Cuitegi. Contudo ele pode escolher 2 cidades. Quantas são as possibilidades de Paulo escolher 2 cidades para morar?

a) Quantas são as possibilidade do Paulo residir em 3 cidades, de acordo com as suas necessidades?

SÃO DOMINGOS

b) Quantas são as possibilidades do Paulo residir primeiramente em Mulungu e escolher 2 das outras 3 cidades para passar o final de semana?

Fonte: Dados da pesquisa.

C.O: Nota-se que o grupo propôs o problema de acordo com a dinâmica das aulas anteriores, ou seja, no contexto da resolução e exploração de problema. O problema inicial do item (a) aborda a ideia de combinação simples, visto que a ordem nas escolhas das cidades não é importante. O item (b) também trabalha com o esse tipo de agrupamento, no entanto, o grupo destaca a necessidade de optar inicialmente por Mulungu e em seguida escolher duas entre as três cidades disponível.

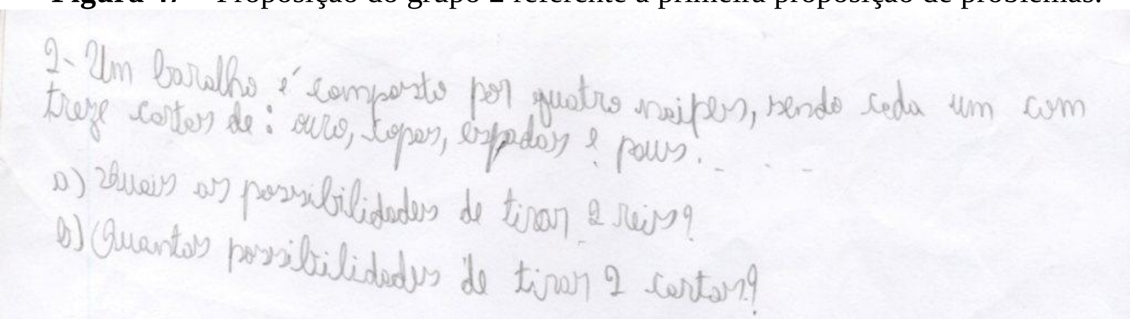
A palavra sorteada para o grupo G2 foi BARALHO. Os alunos solicitaram a presença do professor-pesquisador, explanando que estava com dificuldades em propor o problema, fato esse sanado com a nossa mediação, observe o diálogo:

> G2: Como vamos elaborar um problema com a palavra baralho?
> PP: Seria importante vocês saberem quantas cartas tem um baralho?
> G2 (Aluno 1): É são de 1 a 10.
> G2 (Aluno 2): Não é de 1 a 9 mais o rei, a dama, o ás e o valete, no caso 13 cartas.
> PP: E quantos naipes?
> G2 (Aluno 3): 4 naipes. No caso quatro vezes treze, cinquenta e duas cartas.

C.O: É claro, para nós, que o sucesso na proposição dos problemas depende também do conhecimento dos alunos em relação as palavras sorteadas, ou seja, características peculiares a elas inerentes cujos conhecimentos tornam-se imprescindíveis durante a construção das ideias que vão conduzir a formulação do problema. Deste modo, em nossa mediação, tentamos questionar os alunos de tal forma que eles pudessem construir e organizar informações que possam ajudar nesse processo.

O grupo G2 formulou o seguinte problema:

Figura 47 – Proposição do grupo 2 referente à primeira proposição de problemas.


1- Um baralho é composto por quatro naipes, sendo cada um com treze cartas de: ouro, copas, espadas e paus.
a) Quais as possibilidades de tirar 2 reis?
b) Quantas possibilidades de tirar 2 cartas?

Fonte: Dados da pesquisa.

C.O: Nota-se que o grupo G2 também incorporou o nosso trabalho em sala de aula, propondo um problema e uma variação dele. O item (a) trabalha com a ideia de Combinação simples. No entanto, o questionamento final para o problema foi "Quais as possibilidades" e não "Quantas possibilidades" ou até mesmo "Quais e quantas possibilidades". Nesse sentido, para resolver o problema será necessário listar todas as possibilidades. É possível fazer isso, já que temos uma quantidade relativamente pequena de agrupamentos. Para o item (b), também temos um problema de combinação simples, já que a ordem em que as cartas são retiradas não gera um novo agrupamento. No entanto, neste item, o uso da fórmula se faz importante, já que a lista de todas as possibilidades não é um caminho muito trabalhoso.

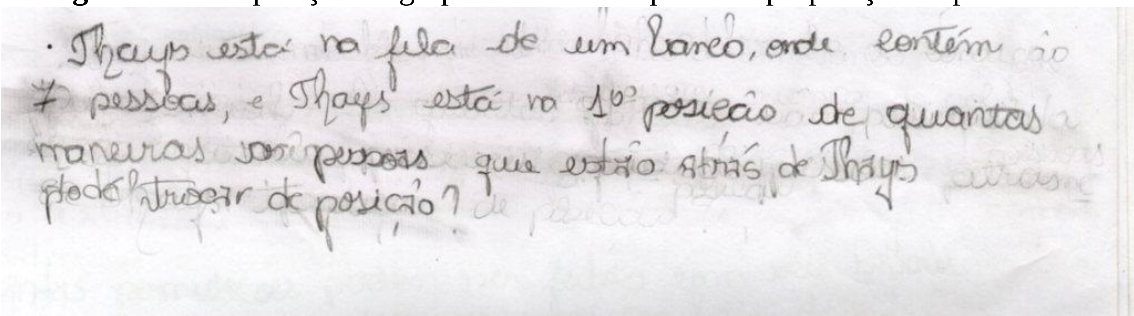
O grupo G3 ficou encarregado de propor um problema com a palavra FILA. Inicialmente, o grupo nos solicitou e apresentou um problema que ainda necessitava de algumas informações para ser caracterizada como uma atividade que precisava de solução. No entanto, a redação proposta pelo grupo não caracterizava uma construção semântica típica de um problema de Combinatória. Na verdade, estava mais perto de um problema de Progressão Aritmética, que expressava a posição de uma pessoa em um banco. Com isso, foi necessário intervimos:

> PP: A ideia está interessante, mas como vocês querem propor o questionamento final para o problema.
> G3 (Aluno 1): É isso que não estamos conseguindo.
> PP: Por exemplo, você pode estar em uma determinada posição na fila?
> G3 (Aluno 1): Pode ser o primeiro, o segundo... No caso seria como o problema da foto?
> PP: Pode ser, tente fazer.

C.O: É evidente, para nós, que, para propor um problema de um determinado tópico matemático, é necessário conhecer alguns problemas e como as ideias matemáticas vão tomando forma com a exploração desses problemas.

O grupo G3 solicitou a presença do professor-pesquisador algumas vezes evidenciando o que estava fazendo, e, ao término da sua formulação, fez a leitura do problema.

Figura 48 – Proposição do grupo 3 referente à primeira proposição de problemas.


· Thays está na fila de um banco, onde contém 7 pessoas, e Thays está na 1º posição de quantas maneiras as pessoas que estão atrás de Thays pode trocar de posição?

Fonte: Dados da pesquisa.

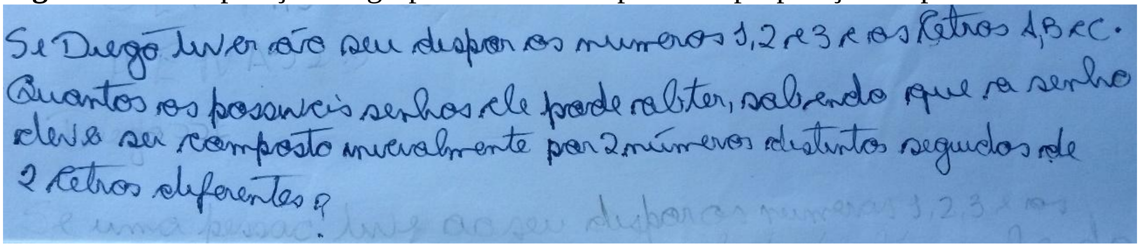
C.O: Quando pensamos na utilização dessa palavra para propor um problema, já imaginávamos que os alunos poderiam propor uma situação como esta. Deste modo, quando vimos a sua primeira proposição do problema, tentamos não negá-la, utilizando as ideias já construídas, de tal forma que conduzissem à formulação do problema. A proposta apresentada pelo grupo não é muito diferente de alguns problemas de permutação simples que encontramos em livros didáticos, no entanto, a originalidade está na imaginação e na criatividade dos alunos na proposição da atividade.

A palavra sorteada para o grupo G4 foi SENHAS. O grupo nos solicitou e conduzimos um diálogo que pudesse auxiliar na proposição do problema:

> G4: Professor pode ser quantos anagramas tem a palavra SENHAS?
> PP: Pode. Mas a palavra senha dá que ideia? Onde você utiliza senhas?
> G4 (Aluno 2): No banco.
> PP: Certo. E como essas senhas são compostas?
> G4 (Aluno 1): De número
> G4 (Aluno 3): E também de letras.
> PP: Isso. Veja no que isso pode ajudar vocês na proposição do problema
> G4: Certo, professor.

No decorrer da aula, fomos atender os outros grupos; depois, passamos para ver o trabalho realizado por G4 e constatamos que a interação professor-grupo foi de suma importância para a formulação do problema.

Figura 49 – Proposição do grupo 4 referente à primeira proposição de problemas.


Se Diego tiver ao seu dispor os numeros 1, 2 e 3 e as letras A, B e C. Quantos os possíveis senhas ele pode obter, sabendo que a senha deve ser composto unicamente por 2 números distintos seguidos de 2 letras diferentes?

Fonte: Dados da pesquisa.

C.O: O G4 formulou um excelente problema que trabalha com o Princípio Fundamental da Contagem, como também pode ser resolvido aplicando a fórmula de arranjo simples, visto que a mudança na ordem dos números e das letras gera uma nova senha. No entanto, para resolver utilizando o conceito de arranjo, é necessário perceber que todas as possíveis senhas podem ser obtidas pelo produto dos arranjos, ou seja, escolher dois dos três números e duas das três letras para compor a senha: $A_{3,2} \cdot A_{3,2}$. Além disso, fazer uma lista de toda as possibilidades seria uma possível estratégia para a resolução desse problema.

A palavra sorteada para o grupo G5 foi CADEIRAS. O grupo estava mobilizado a elaborar um problema. Eles solicitaram que o professor-pesquisador examinasse um problema formulado por eles.

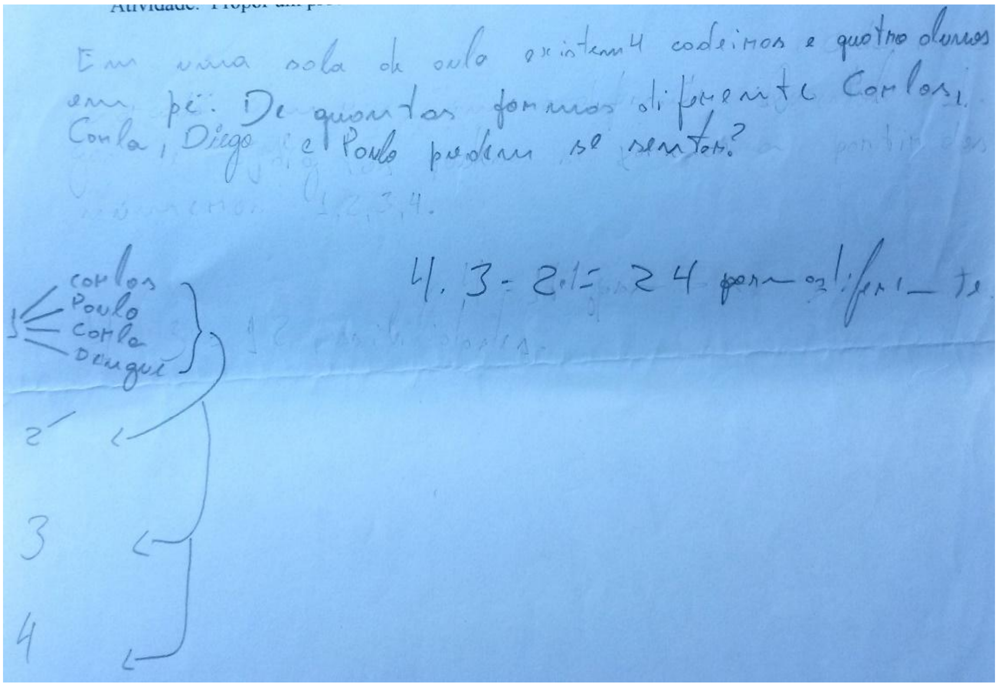
Ao observamos o problema, notamos que eles criaram um contexto em que a palavra CADEIRAS se encaixasse, em seguida, levantaram um questionamento que não trazia qualquer relação com a redação construída. Na verdade, a primeira proposta mencionava pessoas sentadas em cadeiras, e o questionamento por si só era confuso, pois apontava ao fim, do problema a necessidade de saber quantos dígitos podem ser formados a partir dos números 1, 2, 3 e 4.

Aproveitando a ideia inicial enfatizada pelo grupo, questionamos:

PP: Você sentou nessa cadeira, mas poderia sentar em outra?
G5 (Aluno 1): Sim. Na que Diego está, na que Wesley está.
PP: Isso.
G5 (Aluno 2): A gente poderia estar trocando de cadeira?
PP: Isso.

O diálogo acima resultou na formulação do seguinte problema:

Figura 50 – Proposição do grupo 5 referente à primeira proposição de problemas.



Fonte: Dados da pesquisa.

C.O: Nota-se que o problema formulado pelo G5 é uma clássica aplicação de permutação simples, contudo, devemos ressaltar que, para nós, a proposta desse problema não é algo novo, no entanto, para o grupo. Trata-se de fruto de sua criatividade em conseguir observar e fazer conexões de um conceito matemático com uma situação cotidiana.

É importante destacar que o grupo não só formulou uma questão, mas também fez uso do Princípio Fundamental da Contagem e resolveu o problema, como podemos observar na figura acima.

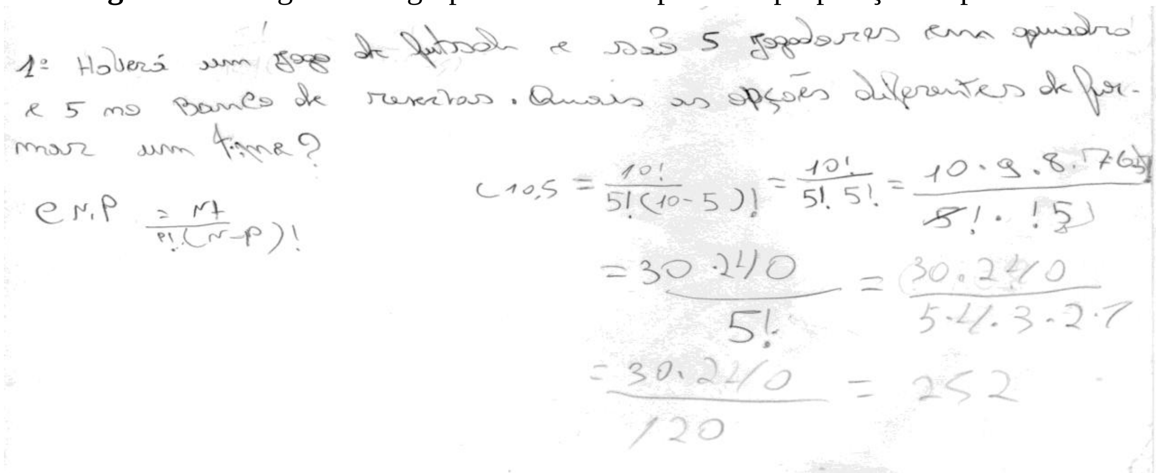
O desempenho do G6 na proposta de resolução e exploração de problemas foi excelente. No entanto, agora, o grupo vai passar de resolvedores de problemas para propositores de problemas. A palavra sorteada para o grupo foi FUTSAL. Para formular um problema com essa palavra, seria importante conhecer o contexto real em que ela está inserida. O G6 solicitou a presença do professor-pesquisador e explicou o que estava pensando:

> G6 (Aluno 1): No caso pode ser problema que a ordem importa.
>
> PP: Pode ser que a ordem importa, ou não importa. Que trabalhe com o conceito do Princípio Fundamental da Contagem.
>
> G6 (Aluno 2): Pode utilizar aquela ideia do problema dos times?
>
> PP: Pode sim, seria uma boa proposta de problema. Vocês sabem quantos jogadores entram em quadra para jogar?

G6 (Aluno 1): 5, mais os reservas.
PP: Isso.
G6 (Aluno 1): Então a gente poderia ver quantos times diferentes podemos formar com todos os jogadores?
PP: Esse poderia ser outro problema.

Depois de um certo tempo, G6 nos apresentou não só um problema formulado por eles, como também a solução.

Figura 51 – Sugestão do grupo 6 referente à primeira proposição de problemas.



Fonte: Dados da pesquisa.

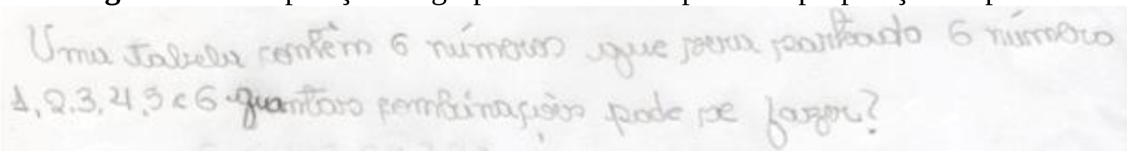
C.O: O G6 formulou um problema de combinação simples, visto que a ordem da escolha para formar um time não gera em novo time. Contudo, ao ler o problema e trazer para o contexto real, acreditamos que um fator que poderia ser levado em consideração na formação dos times, é o fato que um time de futsal é composto por quatro jogadores e um goleiro; assim, para que a validade do problema não possa ser revogada, deveria considerar que todos os jogadores poderiam atuar como goleiro. No entanto, em meio à resolução do problema, esse fato pode passar despercebido pelos resolvedores presentes.

Para o grupo G7, foi sorteada a palavra SORTEIO. Notamos que o grupo estava um pouco apático, e sem interesse para realizar alguma atividade em sala de aula. Percebendo que os alunos desse grupo não estavam nos solicitando ajuda, dirigimo-nos a eles, colocando-nos ao seu dispor, em caso de dúvidas e dificuldades encontradas.

PP: E vocês quais são as dúvidas?
G7: A gente não sabe como fazer.
PP: Tente lembrar de alguma situação do seu dia a dia que envolve um sorteio.
G7: É difícil.
PP: Vocês podem dar uma olhada nos problemas trabalhado anteriormente, para ter alguma uma ideia para formular o problema.

Voltamos outras vezes para incentivar e encorajar o grupo na proposição do problema, pelo fato de perceber que ele não estava realizando qualquer tipo de trabalho. Ao fim, da aula, o grupo G7 entregou a proposta de problema formulado por eles.

Figura 52 – Proposição do grupo 7 referente à primeira proposição de problemas.


Uma tabela contém 6 números que pera partindo 6 número 1,2,3,4,5 e 6 quantos combinações pode se fazer?

Fonte: Dados da pesquisa.

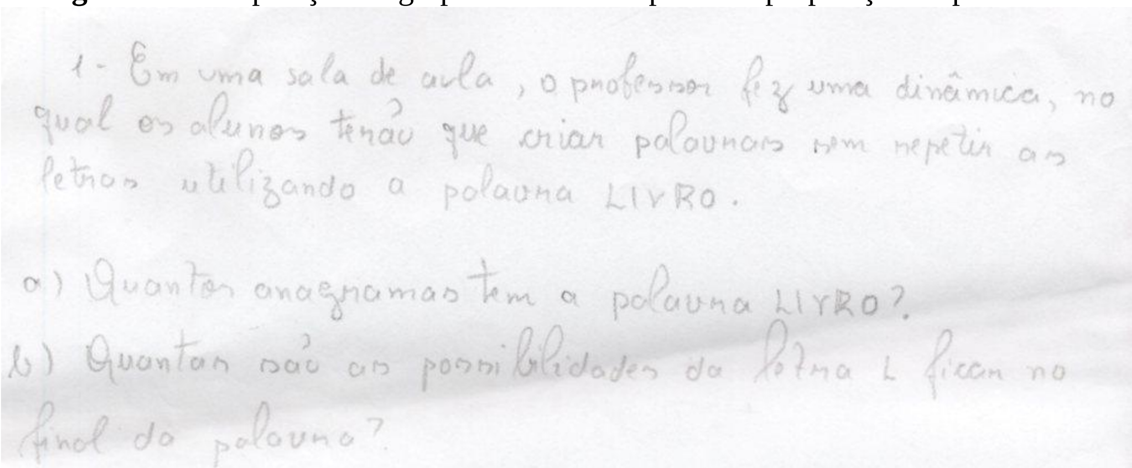
C.O: Nota-se que as informações precisam ser organizadas, já que a redação que foi construída não apresenta clareza, necessitando de uma reformulação para que se tenha um problema.

O grupo G8 ficou encarregado de propor um problema com a palavra LIVRO. O grupo imediatamente solicitou a ajuda do professor-pesquisador. “G8: Pode ser quantos anagramas tem a palavra LIVRO? PP: Pode. Mas pense e veja se consegue formular outro problema além desse”.

C.O: Em nossa proposta de atividades, trouxemos alguns problemas que estabeleciam que se contasse o número de anagramas possíveis de uma palavra qualquer. Deste modo, em meio a uma proposição de problemas que tem como ponto de partida uma palavra, poder-se-ia induzir os alunos na formulação de um problema que enfatizasse a necessidade de se contar a quantidade de anagramas de uma palavra. E isso de fato aconteceu, no entanto, percebeu-se que o grupo tenta criar um contexto, esbanjando sua imaginação quando colocado em uma situação que exige fazer intervenções.

Assim, o grupo G8 deu continuidade à ideia pensada inicialmente formulando o seguinte problema:

Figura 53 – Proposição do grupo 8 referente à primeira proposição de problemas.



1- Em uma sala de aula, o professor fez uma dinâmica, no qual os alunos terão que criar palavras sem repetir as letras utilizando a palavra LIVRO.

a) Quantos anagramas tem a palavra LIVRO?

b) Quantas são as possibilidades da letra L ficar no final da palavra?

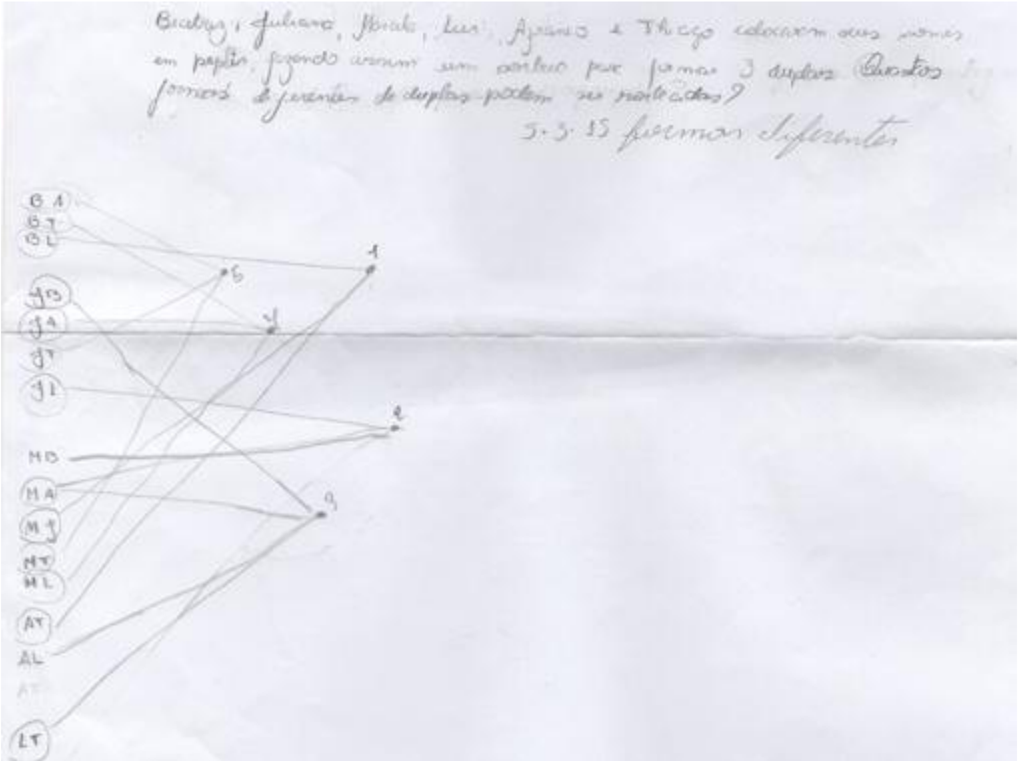
Fonte: Dados da pesquisa.

O problema proposto por G8 é composto pelos itens (a) e (b), no qual abordam o conceito de permutação simples.

O G9 foi desafiado a propor um problema com as palavras MENINAS e MENINOS. Foi, então, formulado um problema bem interessante de combinação simples, sem precisar da ajuda do Professor-pesquisador.

C.O: Nota-se que as palavras MENINAS e MENINOS foi caracterizado pelo grupo por nome de pessoas. Além disso, o contexto descrito pelo G9 evidencia a criatividade do grupo na formulação do problema. É preciso ressaltar que a autonomia do grupo ficou evidenciado não só pela proposição do problema, mas também pela resolução dele.

Figura 54 – Proposição do grupo 9 referente à primeira proposição de problemas.



Fonte: Dados da pesquisa.

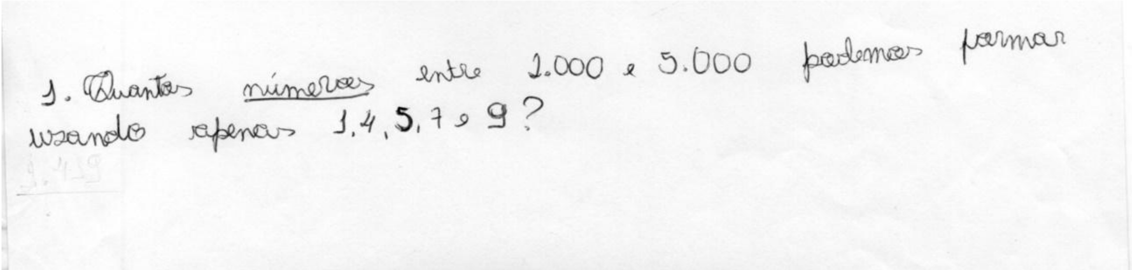
C.O: Observa-se que o grupo notou que a mudança na ordem das duplas não gera uma nova dupla, tendo assim um problema de Combinação simples. Como temos um número relativamente pequeno de possibilidades, foi facilitada a descrição de todas as possíveis duplas.

A palavra sorteada para o grupo G10 foi NÚMEROS. Este grupo não mostrou muito interesse para formular um problema. Percebendo isso, tentamos nos aproximar do grupo:

> PP: Precisam de ajuda?
> G10 (Aluno 1): Estamos pensando
> PP: Olhem os problemas que trabalhamos anteriormente. Talvez ajude vocês na formulação do problema.
> G10: Certo.

Fomos atender às solicitações dos outros grupos e, sempre que podia, passávamos para ver e incentivar o trabalho realizado por G10 na proposição do problema. O encontro chegou ao término e o grupo formulou o seguinte problema:

Figura 55 – Proposição do grupo 10 referente à primeira proposição de problemas.



1. Quantos números entre 1.000 e 5.000 podemos formar usando apenas 1, 4, 5, 7 e 9?

Fonte: Dados da pesquisa.

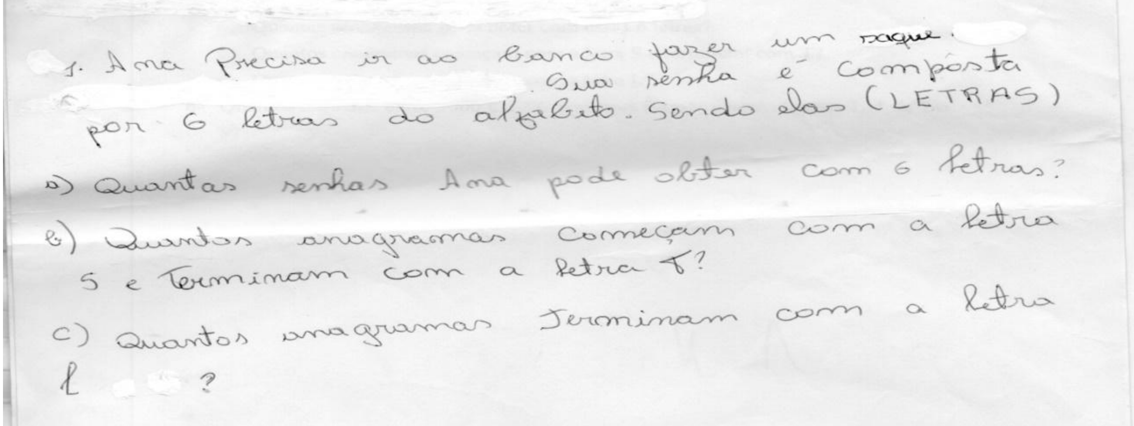
C.O: Não sabemos se a proposição desse problema foi fruto da criatividade do grupo, visto que é comum encontrarmos problemas desse tipo em livros didáticos. Além disso, essa dúvida ocorre pelo fato de não constatarmos, durante a mediação, qualquer indício que comprove que a formulação desse problema estava sendo elaborada pelo grupo. Por outro lado, nota-se que é um problema que exige que os alunos façam uma análise das possibilidades para cada escolha. A lista organizada de todas as possibilidades não é uma estratégia viável, devido à quantidade de possibilidades. Assim, temos como meio eficaz para resolução desse problema, o Princípio Fundamental da Contagem.

G11 ficou encarregado de propor um problema com a palavra LETRAS. O grupo imediatamente solicitou a presença do professor-pesquisador:

> G11 (Aluno 2): Professor pensamos nos anagramas da palavra LETRAS.
> PP: Pode ser, mas tente pensar na formulação de outros.
> G11: Ok.

O grupo manteve a ideia pensada inicialmente, porém, criou um contexto no qual foram propostos os seguintes problemas:

Figura 56 – Proposição do grupo 11 referente à primeira proposição de problemas.



1. Ana precisa ir ao banco fazer um saque. Sua senha é composta por 6 letras do alfabeto. Sendo elas (LETRAS)

a) Quantas senhas Ana pode obter com 6 letras?

b) Quantos anagramas começam com a letra S e terminam com a letra T?

c) Quantos anagramas terminam com a letra L ?

Fonte: Dados da pesquisa.

C.O: Nota-se que os problemas anteriores serviram como ponto de partida para a formulação do problema proposto pelo G11. Contudo, é preciso ressaltar a criatividade do grupo na proposição do problema, percebendo que, dentre os diversos usos de letras, podemos destacar sua utilização em senhas bancárias. Deste modo, percebe-se que o grupo conseguiu fazer relações de conceitos matemáticos com a sua vivência cotidiana. O grupo propôs problemas de permutação simples. No item (a), temos seis elementos trocando de posição, ao passo que, nos itens (b) e (c), temos elementos que ficam fixos e outros permutam entre si.

Ao fim, do encontro, todos os grupos entregaram ao professor-pesquisador os problemas que foram formulados.

Quadro 02 – Resumo dos problemas formulados

Grupos:	Conceitos matemáticos:
1	Combinação simples
2	Combinação simples
3	Permutação simples
4	Arranjo simples e o Princípio Fundamental da Contagem
5	Permutação simples
6	Combinação simples
7	Precisa ser reformulado
8	Permutação simples
9	Combinação simples
10	Princípio Fundamental da Contagem
11	Permutação simples

Fonte: Dados da pesquisa.

5.14 12º Encontro (uma aula) – dia 10/03/2016[13]

Entregamos o roteiro de atividades aos alunos e pedimos que eles se organizassem em grupos de três alunos ou em duplas em alguns casos. Foram formados oito grupos de três e três duplas.

1ª Proposta de proposição de problemas: Primeiro roteiro de problemas.

[13] **1º PROBLEMA – Problema formulado pelo grupo G4 na primeira proposição de problemas.**
2º PROBLEMA – Problema formulado pelo grupo G2 na primeira proposição de problemas.

1. Se Diego tiver ao seu dispor os números 1, 2 e 3 e as letras A, B e C. Quantas as possíveis senhas ele pode obter, sabendo que a senha deve ser composta inicialmente por 2 números distintos seguido de 2 letras diferentes?
2. Um baralho completo é composto por quatro naipes, sendo cada um com trezes cartas de: ouro, copas, espadas e paus.

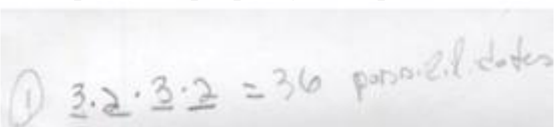
a) Quais as possibilidades de tirar dois reis?
b) Quantas possibilidades de tirar 2 cartas?

No último encontro, os alunos formularam problemas a partir de algumas palavras que foram sorteadas. Para este encontro, foram selecionados alguns desses problemas para que os grupos resolvessem.

O primeiro problema trabalhava com a ideia de arranjo simples, no entanto, não foi algo tão evidente para os grupos, visto que era necessário fazer o produto dos arranjos. Contudo, o uso do Princípio Fundamental da Contagem possibilitaria a resolução bem sucedida do problema. Observe o diálogo com G2:

G2: Professor pode ser pelo PFC.
PP: Vocês acham que pode?
G2: Sim.
PP: Então são quantas possibilidades para escolha do primeiro número?
G2: 3 possibilidades.
PP: E para escolha do segundo?
G2: 2 possibilidades, porque já escolhemos um dos números
PP: E para escolha de uma das letras?
G2 (Aluno 1): 2 letras.
G2 (Aluno 2): Não, é 3 letras, que são A, B e C.
PP: Correto.
G2: E para escolha da segunda letra são
2 possibilidades.
PP: E como vocês resolveria utilizando o PFC?
G2: Seria $3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 36$ possibilidades.
PP: Isso.

Figura 57 – Resolução do grupo 2 referente ao problema 1 do primeiro roteiro de atividades da primeira proposição de problemas.



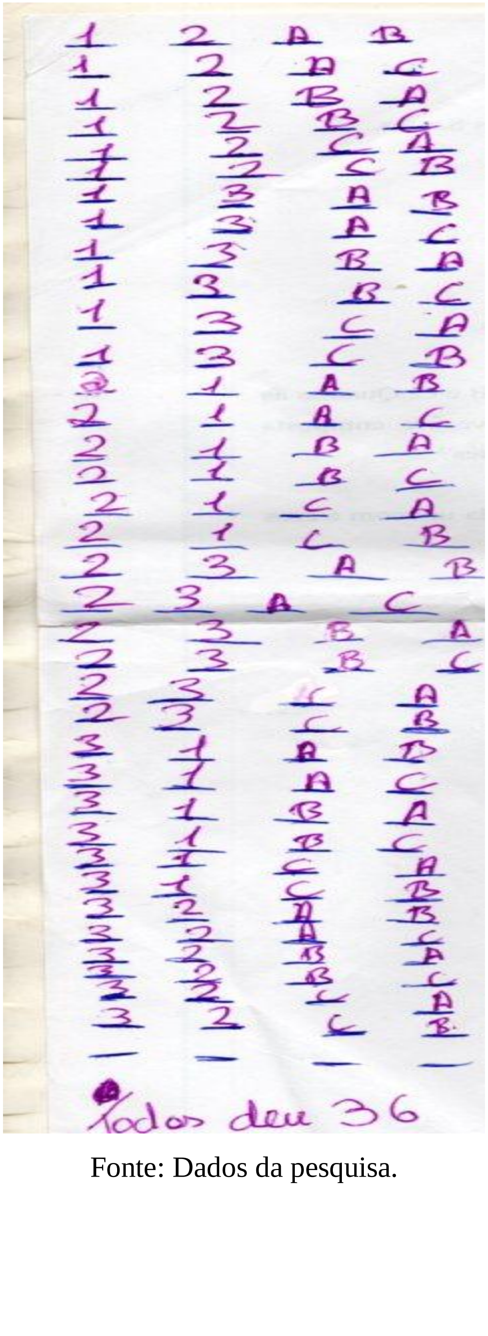
Fonte: Dados da pesquisa.

Alguns grupos sentiram dificuldades para resolver o problema. No entanto, para suprimi-las conduzimos um diálogo como o descrito com G2, levantando problemas mais simples que pudessem fazer com que os alunos pensassem sobre o problema.

Durante a mediação G4 nos solicitou, manifestando sua alegria em ver a turma resolvendo um problema que foi formulado pelo grupo. Além disso, o grupo não apresentou dificuldades para resolver o problema.

Como o número de possibilidades de senhas, que poderiam se obter considerando as condições do problema, não era uma quantidade relativamente grande, então teríamos como possíveis estratégias: a lista organizada de todas as possibilidades, tabelas e árvore de possibilidades. O G11 resolveu o problema listando todas as possibilidades, observe o grupo justificando o trabalho realizado ao professor-pesquisador: “G11 (Aluno 1): Professor estamos fazendo todas as senhas. PP: Ok”. G11 evidenciou a seguinte resolução:

Figura 58 – Resolução do grupo 11 referente ao problema 1 do primeiro roteiro de atividades da primeira proposição de problemas.



Fonte: Dados da pesquisa.

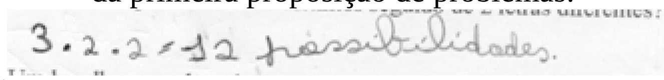
Os grupos G1, G2, G3, G4, G6, G8, G10, G9 e G11 conseguiram apresentar a resolução correta para o problema, G5 apresentou a resposta sem realizar qualquer tipo de trabalho sobre o problema, enquanto G7 apresentou a resolução parcialmente correta.

A resolução do problema consistiu na tomada de quatro decisões para compor a senha:

- Primeira decisão: escolher um dentre os três números disponíveis (1, 2 ou 3);
- Segunda decisão: feita a primeira escolha restaram duas possibilidades para a segunda escolha;
- Terceira decisão: escolher uma dentre as três letras disponíveis (A, B ou C);
- Quarta decisão: escolher uma dentre as duas letras que sobraram.

Desse modo, o equívoco cometido por G7 foi que, ao analisar o número de possibilidades para cada escolha, foram tomadas apenas três decisões.

Figura 59 – Resolução do grupo 7 referente ao problema 1 do primeiro roteiro de atividades da primeira proposição de problemas.



Fonte: Dados da pesquisa.

O segundo problema trabalhava com o conceito de combinação simples. O G2 solicitou a presença do professor-pesquisador: “G2: Professor este problema foi a gente que elaborou? Quero ver quem vai conseguir responder”.

O item (a) tinha como objetivo determinar quais as possibilidades para tirar 2 reis. Alguns grupos tiveram dificuldades diante de uma informação que só estava clara para quem já teve contato com um baralho, visto que, para resolver o problema, seria imprescindível saber que um baralho comum possui 4 reis. Assim, tivemos que fazer uma intervenção:

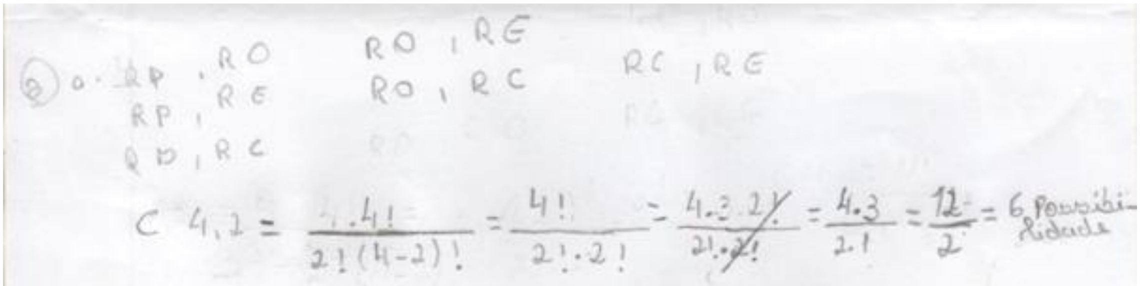
> PP: Pessoal, quantos reis possui um baralho?
> Turma: 4 reis.
> PP: E quais são?
> Turma: Rei de pau, copa, ouro e espada.
> PP: Isso.

Notamos que alguns grupos perceberam que se tratava de um problema de combinação simples e logo recorreram à fórmula identificando a quantidade de possibilidades ao invés das possíveis possibilidades. Com isso pedimos para que os grupos fizessem a leitura do problema, observe o diálogo com G6:

> G6 (Aluno 1): Professor achamos 6 possibilidades.
> PP: Ok, mas o que pede o problema?
> G6 (Aluno 2): Quais as possibilidades?
> PP: Isso. Vocês conseguiram achar as possibilidades?
> G6 (Aluno 1): Não. Achamos o total de possibilidades, mas falta saber quem são as possibilidades.
> PP: Isso.

Enquanto tivemos alguns grupos que listaram todas as possibilidades e em seguida fizeram uso da fórmula de combinação simples para validar sua resolução. G8 solicitou a presença do professor-pesquisador para justificar o trabalho realizado no problema: “G8: Professor são 6 possibilidades. PP: E como vocês fizeram? G8: Primeiro fizemos as possibilidades. Depois utilizamos a fórmula. PP: Ok”.

Figura 60 – Resolução do grupo 8 referente ao item (a) no problema 2 do primeiro roteiro de atividades da primeira proposição de problemas.



Fonte: Dados da pesquisa.

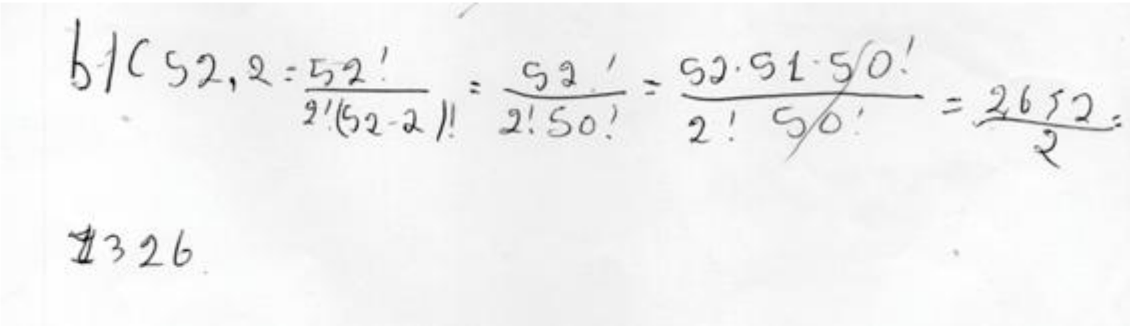
No item (a), todos os grupos conseguiram resolver o problema corretamente. Para o item (b), o esgotamento de todas as possibilidades não era uma estratégia viável, diante da grande quantidade de possibilidades. Para iniciar a resolução do problema, era necessário saber o total de cartas que compõem um baralho. No entanto, essa informação poderia ser observada no enunciado do problema. Além disso, alguns alunos, que já tiveram o contato com um baralho não tiveram dificuldades para iniciar a resolução do problema. Por outro lado alguns grupos apresentaram dificuldades para resolver o problema. Observe o diálogo com G3:

> G3: Professor nunca jogamos baralho, não sabemos quantas cartas tem um baralho.
> PP: Mas ao fazer a leitura do problema dá para identificar o total de cartas. São quantos naipes?
> G3: 4 naipes.
> PP: E cada naipe possui quantas cartas?
> G3: 13 cartas. No caso quatro vezes treze, cinquenta e duas cartas
> PP: Isso.

A falta de atenção na leitura do enunciado acarretou em dificuldades para resolver o problema. Deste modo, o professor-pesquisador levantou questionamentos que possibilitaram o seu entendimento sobre informações que não estavam tão evidentes diante de uma má leitura.

Através desta mediação a maioria dos grupos puderam dar prosseguimento à resolução do problema, percebendo que tínhamos que fazer $C_{52,2}$. Apenas os grupos G4 e G7 não evidenciaram a resolução do problema, visto que não realizaram qualquer tipo de trabalho sobre o problema. Os demais grupos resolveram o problema corretamente.

Figura 61 – Resolução do grupo 2 referente ao item (b) no problema 2 do primeiro roteiro de atividades da primeira proposição de problemas.



Fonte: Dados da pesquisa.

Ao fim da aula, registramos na lousa o trabalho realizado pelos grupos, onde eles justificaram o que fizeram, enquanto o professor-pesquisador questionava o porquê da tomada de decisão, e os alunos justificavam sua resolução. Apresentamos uma resolução diferente da que os alunos obtiveram no primeiro problema, enfatizando que todas as possíveis senhas podem ser obtidas pelo produto dos arranjos, ou seja, escolher dois dos três números e duas das três letras para compor a senha: $A_{3,2} \cdot A_{3,2}$.

5.15 13º Encontro (uma aula) – dia 11/03/2016[14]

Iniciamos a aula solicitando aos alunos que se organizasse em grupos de três alunos ou duplas em alguns casos, em seguida entregamos roteiro de atividades. Foram formados sete grupos e quatro duplas.

[14] **1º PROBLEMA – Problema formulado pelo grupo G3 na primeira proposição de problemas.**
2º PROBLEMA – Problema formulado pelo grupo G9 na primeira proposição de problemas.

1ª Proposta de proposição de problemas: segundo roteiro de problemas.

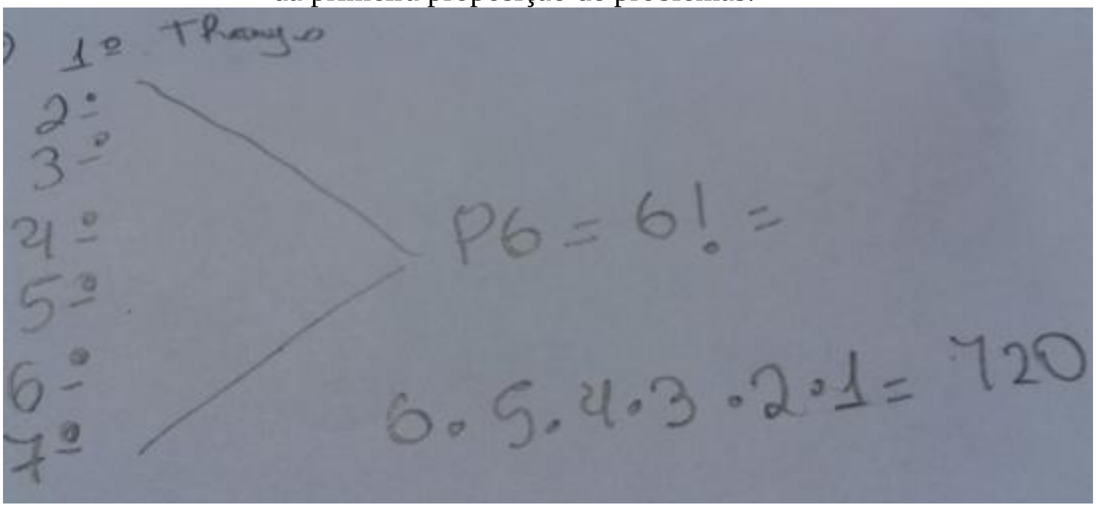
1. Thays está na fila de um banco, onde há 7 pessoas, e Thays está na 1ª posição da fila. De quantas maneiras as pessoas que estão atrás de Thays podem trocar de posição?
2. Beatriz, Juliana, Marcela, Luiz, Afrânio e Thiago colocaram seus nomes em papéis, fazendo assim um sorteio para formar 3 duplas. Quantas formas diferentes de duplas podem ser sorteadas?

O primeiro problema trabalhava com o conceito de permutação simples. Alguns grupos solicitaram a presença do professor-pesquisador e apontaram o grupo da aluna Thays como responsáveis pela formulação do problema.

Para resolver o problema era preciso perceber que Thays deveria estar na primeira posição da fila, enquanto as outras pessoas trocavam de posição entre si. Neste sentido durante a mediação com alguns grupos, levantamos questionamos que pudessem fazer os alunos pensarem sobre o problema.

> PP: Que condições é preciso levar em consideração para formação da fila?
> G5: Thays está na primeira fila do banco e outros trocaram de posição.
> PP: Isso.
> G10: Professor são 7 pessoas que devem trocar de posição.
> PP: São 7 pessoas. No entanto, durante a leitura do problema foi possível observar alguma condição para uma das pessoas da fila?
> G10: Thays ficar na primeira posição.

Figura 62 – Resolução do grupo 5 referente ao problema 1 do segundo roteiro de atividades da primeira proposição de problemas.



Fonte: Dados da pesquisa.

De modo geral os grupos não apresentaram dificuldades para resolver o problema, visto que a maioria não precisou da ajuda do professor-pesquisador. Apenas o grupo G7 não conseguiu resolver o problema, apresentando a resposta sem realizar qualquer tipo de trabalho sobre o problema.

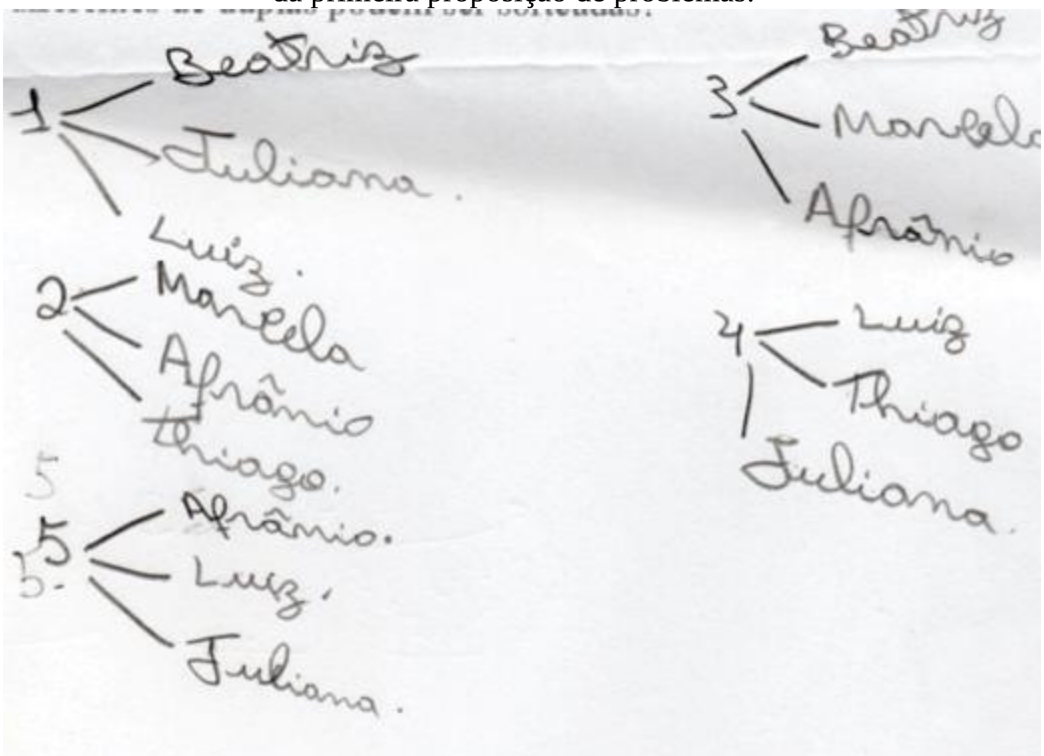
O segundo problema que foi formulado pelo G9, abordava o conceito de combinação simples. Este grupo durante a formulação do problema apresentou ao fim, a resolução dele.

> *C.O:* Percebemos que o grupo ao formular o problema teve uma maior compreensão das ideias que faziam parte de sua estrutura, levando ao sucesso na resolução do problema, como também ao aprofundamento na aprendizagem dos conceitos matemáticos.

Alguns grupos apresentaram dificuldades em relação ao enunciado do problema, já que ele apresentava a necessidade de formar três duplas. No entanto, ao fim do problema questionou-se: *Quantas formas diferentes de duplas podem ser sorteadas?* Assim é desnecessário apontar que irá formar três duplas se, ao fim, do problema quer-se saber o total de duplas que podem ser formadas.

O G7 não fez a leitura atenciosa de problema e listou algumas possibilidades que era composta por três pessoas.

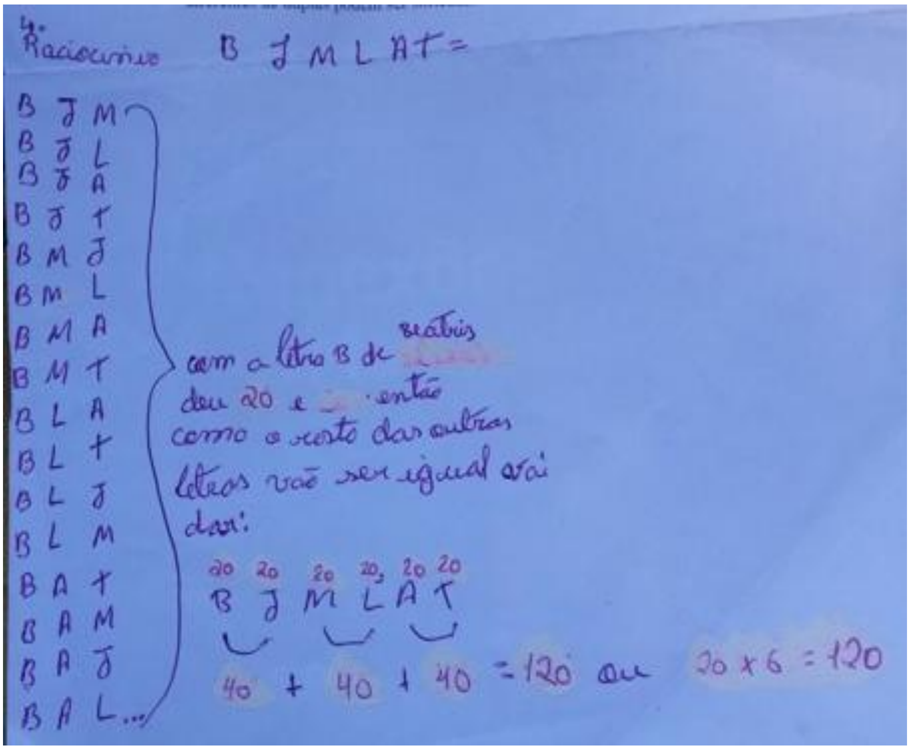
Figura 63 – Resolução do grupo 7 referente ao problema 2 do segundo roteiro de atividades da primeira proposição de problemas.



Fonte: Dados da pesquisa.

O G11 também cometeu este equívoco, como também apresentou dificuldades na distinção do problema, no entanto, é preciso ressaltar o raciocínio apresentado pelo grupo. Observe a resolução do G11:

Figura 64 – Resolução do grupo 11 referente ao problema 2 do segundo roteiro de atividades da primeira proposição de problemas.



Fonte: Dados da pesquisa.

C.O: Notamos que o grupo resolveu o problema formando agrupamentos com três elementos considerando a relevância na ordem, ou seja, como se tivéssemos um problema de arranjo simples. No entanto, é importante ressaltar o processo de resolução apresentado pelo grupo, em que ele descreveu algumas possibilidades e observou padrões na formação dos agrupamentos, que possibilitaram a visualização de todas as possibilidades, chegando à generalização do problema.

O uso da fórmula se fez presente na resolução de todos os grupos que conseguiram resolver o problema. Com análise do material e observação em sala de aula, percebemos que apenas os grupos G7 e G11 não conseguiram resolver o problema, já que não apresentaram resolução incorreta do problema.

Ao fim da aula, registramos na lousa o trabalho realizado pelos grupos. Para se fazer isso conduzimos um diálogo com a turma em que os grupos evidenciaram ao professor-pesquisador suas resoluções, em seguida buscamos levantar questões que pudessem levar os alunos entrarem em consenso sobre o que haviam feito.

Destacamos principalmente a resolução do G11, em relação ao segundo problema. Deste modo, tratamos de dois pontos: o primeiro diz respeito a necessidade de distinguir os problemas de arranjo e combinação simples para obter o sucesso na resolução dos problemas de Combinatória. O segundo diz respeito ao processo de pensamento do grupo, que ao considerar um problema de arranjo simples, conseguiu obter a resolução listando algumas possibilidades, chegando a uma simplificação do problema.

5.16 14º Encontro (uma aula) – dia 14/03/2016[15]

Iniciamos a aula solicitando aos alunos que se reunissem em grupos ou em duplas em alguns casos. Em seguida entregamos o roteiro de atividades e pedimos para que os alunos tentassem resolvê-las. Foram formados oito grupos com três alunos e três duplas.

1ª Proposta de proposição de problemas: Terceiro roteiro de problemas.

1. Ana precisa ir ao banco fazer um saque. Sua senha é composta por 6 letras do alfabeto, sendo elas: (LETRAS).

- *a) Quantas senhas Ana pode obter com essas 6 letras?*
- *b) Quantos anagramas começam com a letra S e terminam com T?*
- *c) Quantos anagramas terminam com a letra L?*

2. Quantos números entre 2000 e 5000 podemos formar usando apenas 1, 4, 5, 7 e 9?

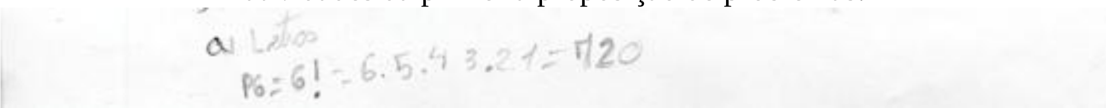
Inicialmente temos um problema de permutação simples de 6 elementos e, em seguida são apresentadas algumas variações do problema, em que alguns elementos são fixados.

O G3 solicitou a ajuda do professor-pesquisador:

> G3: Professor no caso para obter as senhas basta trocar as posições das letras.
> PP: Isso. No caso são quantos elementos trocando de posição?
> G3: 6 elementos. Então é 6 fatorial.
> PP: Isso.

[15] **1º PROBLEMA – Problema formulado pelo grupo G11 na primeira proposição de problemas.**
2º PROBLEMA – Problema formulado pelo grupo G10 na primeira proposição de problemas.

Figura 65 – Resolução do grupo 4 referente ao item (a) no problema 1 do terceiro roteiro de atividades da primeira proposição de problemas.



Fonte: Dados da pesquisa.

No item (a) a maioria dos grupos não tiveram dificuldades para resolver o problema, visto que notaram que se tratava de um problema de permutação simples. Deste modo, o professor-pesquisador foi solicitado para que os alunos pudessem evidenciar o trabalho realizado sobre o problema.

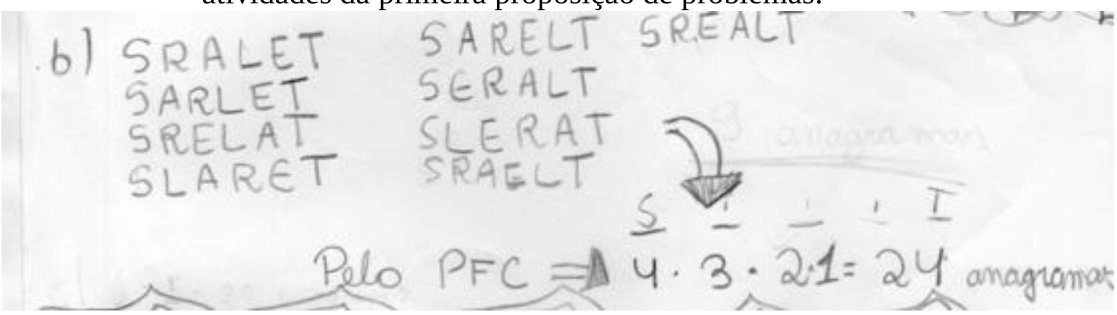
Para resolver este item os alunos fizeram uso da fórmula de permutação simples, como também o Princípio Fundamental da Contagem. Todos os grupos conseguiram resolver o problema corretamente.

Em relação ao item (b) alguns grupos estavam listando todos os anagramas que começam com a letra S e terminam com a letra T. No entanto, em meio ao trabalho que estava sendo realizado, alguns grupos notaram que não era necessário listar todas as possibilidades. Podemos perceber isso através do diálogo com G1:

> G1: Professor estamos fazendo todos os anagramas. Mas podemos utilizar o Princípio Fundamental da Contagem?
> PP: Isso.

Observe na figura abaixo que o grupo fixou as letras S e T e em seguida determinou o número de possibilidades para cada escolha:

Figura 66 – Resolução do grupo 1 referente ao item (b) no problema 1 do terceiro roteiro de atividades da primeira proposição de problemas.



Fonte: Dados da pesquisa.

C.O: Acreditamos que essa tomada de decisão de alguns grupos ocorreu devido ao problema dos anagramas que foi trabalhado anteriormente, já que a estratégia mais utilizada pelos alunos neste problema foi listar todos os anagramas

> possíveis. No entanto, percebemos o amadurecimento dos alunos em perceber que caminhos poderiam ser trilhados para obter a solução. Deste modo eles faziam julgamento da estratégia mais viável para resolver o problema e justificava o que estava pensando e fazendo ao professor-pesquisador.

É importante ressaltar que foi necessário conduzir um diálogo com alguns grupos que estavam tendo dificuldades para interpretar o problema.

> PP: Os anagramas devem começar com que letra?
> G1: A letra S e terminar com que letra T
> PP: Correto. Nesse caso vão sobrar quantas letras?
> G1: 4 letras.
> PP: Para escolha da primeira letra, temos quantas possibilidades?
> G1: 4 letras, para escolha da segunda 3 letras, para escolha da terceira 2 letras e para escolha da última 1 letra.
> PP: E agora, que vocês podem fazer?
> G1: Pelo PFC.

Alguns grupos precisaram da ajuda do professor-pesquisador. No entanto, foi possível perceber que, ao levantarmos problemas mais simples, abria-se espaço para que os alunos pudessem pensar sobre o problema e mobilizar ações que levassem ao bom desempenho. Deste modo, todos os grupos conseguiram resolver o item (b).

O item (c) foi resolvido por todos grupos sem precisar da ajuda do professor-pesquisador. O fato é que o trabalhado realizado no item (b) permitiu aos alunos ter uma melhor compreensão do item posterior.

Para resolver o segundo problema, pode-se recorrer as estratégias que possibilitam a visualização de todas as possibilidades, como diagrama de árvores e lista organizada de todas as possibilidades. No entanto, o caminho mais viável seria o uso do Princípio Fundamental da Contagem, porém não era tão evidente para os alunos identificar as decisões a serem tomadas e analisar todas as possibilidades para cada uma delas.

Os grupos apresentaram dificuldades para interpretar este problema. Deste modo, o professor-pesquisador sentiu a necessidade de fazer uma intervenção a turma:

> PP: Que números poderiam estar entre 2000 e 5000? Eu poderia escolher o 1 para a primeira posição?
> Turma: Não.
> PP: Porque?
> Turma: Porque não vai estar entre 2000 e 5000. Vai ser um número menor que 2000, por exemplo 1457.
> PP: Que números podem ser escolhidos para primeira posição?

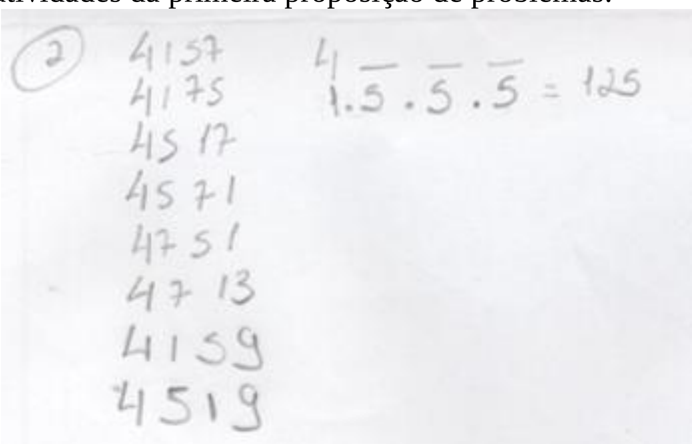
> Turma: O 4.
> PP: E porque não pode o 5 e o 7?
> Turma: Porque passa, vai ser maior que 5000. No caso 5174 passaria.
> Turma: Isso.

A mediação acima foi suficiente para os grupos G1, G2 e G8 conseguissem resolver o problema. Em relação aos demais grupos, foi necessário levantar problemas mais simples que possibilitassem aos alunos refletir sobre o problema. Observe o diálogo com G9:

> PP: Para escolha do primeiro número temos quantas possibilidades?
> G9: Uma possibilidade, que é o número 4.
> PP: E para escolha do segundo número?
> G9 (Aluno 1): 7 possibilidades?
> G9 (Aluno 2): Não é 5 possibilidades.
> PP: Porque 5 possibilidades? Porque 7 possibilidades?
> G9 (Aluno 1): Não é 5 possibilidades mesmo, porque podemos escolher os números 1, 4, 5, 7 e 9.
> PP: Isso. E para escolha do terceiro número?
> G9(Aluno 2): Também é 5 possibilidades e para escolha do quarto também.

Com a mediação acima a maioria dos alunos puderam perceber a eficácia do Princípio Fundamental da Contagem, visto que conseguiram determinar o número de possibilidades para cada escolha, em seguida, fizeram uso deste princípio. Alguns grupos iniciaram a listagem de algumas possibilidades, no entanto, perceberam que seria um trabalho exaustivo e recorreram a este princípio.

Figura 67 -Resolução do grupo 8 referente ao item (a) no problema 1 do terceiro roteiro de atividades da primeira proposição de problemas.



Fonte: Dados da pesquisa.

Os grupos G3 e G10 não apresentaram qualquer tipo trabalho sobre o problema, enquanto os outros grupos resolveram o problema corretamente. Ao fim da aula, registramos na lousa as resoluções dos grupos, onde eles em um diálogo com o professor-pesquisador justificaram o que fizeram, afim de entrar em consenso sobre o trabalho realizado.

5.17 15º Encontro (uma aula) – dia 18/03/2016[16]

Tivemos uma paralização das escolas estaduais durante os dias letivos 15, 16 e 17 de março. Desse modo, retomamos as atividades no dia 18 de março. Iniciamos a aula solicitando que os alunos se reunissem em grupos ou em duplas em alguns casos. Logo em seguida entregamos o roteiro de atividades e pedimos para que os alunos fizessem a leitura e posteriormente tentasse resolvê-las. Foram formados oito grupos com três alunos e duas duplas.

1ª Proposta de proposição de problemas: Quarto roteiro de problemas.

1. Após ter ganhado um sorteio Paulo, poderá decidir morar entre as seguintes cidades da Paraíba: Guarabira, Mulungu, Alagoinha e Cuitegi. Contudo, ele pode escolher 2 cidades. Quantas são as possibilidades de Paulo escolher 2 cidades para morar?

a) Quantas são as possibilidades de Paulo escolher 3 cidades para morar, de acordo com as suas necessidades?

b) Quantas são as possibilidades de Paulo residir primeiramente em Mulungu e escolher 2 das outras 3 cidades para passar o final de semana?

2. Em uma sala de aula, o professor fez uma dinâmica, no qual os alunos terão que criar palavras sem repetir as letras utilizando a palavra LIVRO.

a) Quantos anagramas tem a palavra LIVRO?

b) Quantas são as possibilidades da letra L ficar no final da palavra?

O primeiro problema trabalhava com a ideia de combinação simples. No problema inicial alguns grupos tiveram dificuldades em perceber que a ordem das escolhas das cidades não era relevante. Isso fica evidente no diálogo com G5:

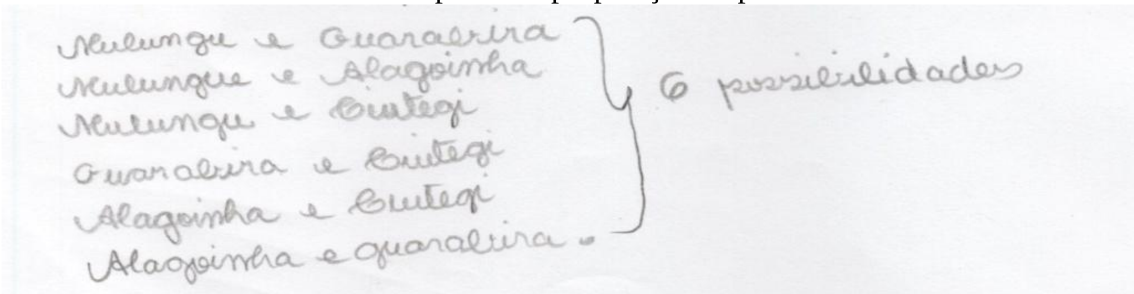
> G5(Aluno 1): Professor são 12 possibilidades.
> PP: Como vocês fizeram?
> G5 (Aluno 1): Para a escolha da primeira cidade 4 possibilidades e para a escolha da segunda cidade 3 possibilidades, então é $4 \cdot 3 = 12$ possibilidades,

[16] **1º PROBLEMA – Problema formulado pelo grupo G1 na primeira proposição de problemas.**
2º PROBLEMA – Problema formulado pelo grupo G8 na primeira proposição de problemas.

PP: Ao escolher Alagoinha e Cuitegi e Cutegi e Alagoinha são agrupamentos diferentes?
G5 (Aluno 2): Não. No caso a ordem não altera.
PP: Isso.

Alguns grupos listaram todas as possibilidades, e não tiveram dificuldades em perceber que a mudança na ordem das cidades não gerava um novo agrupamento.

Figura 68 – Resolução do grupo 9 referente ao item (a) no problema 2 do quarto roteiro de atividades da primeira proposição de problemas.

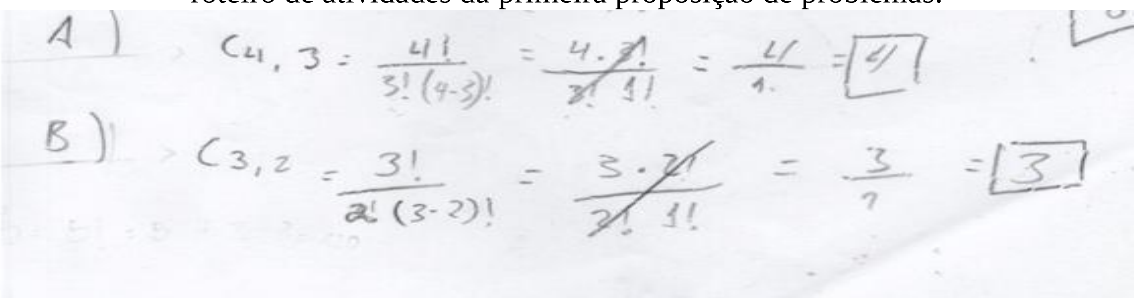


Fonte: Dados da pesquisa.

No entanto, a estratégia mais recorrente foi o uso da fórmula de Combinação simples. O fato é que de modo geral os grupos perceberam que se tratava de um problema de combinação, para isso foi necessário conduzir um diálogo como vimos acima com G5. Apenas alguns grupos precisaram da mediação do professor-pesquisador. Além disso, com a observação em sala de aula e o registro do material, constatamos que todos os grupos resolveram o problema inicial.

Os itens (a) e (b) também se tratavam de problemas de combinação simples. Desse modo, o trabalho realizado no problema inicial possibilitou aos grupos o bom desempenho nesses itens, já que algumas dificuldades haviam sido sanadas pelos alunos na resolução do problema anterior. A não relevância na ordem permitiu que os grupos fizessem uso da fórmula de Combinação simples.

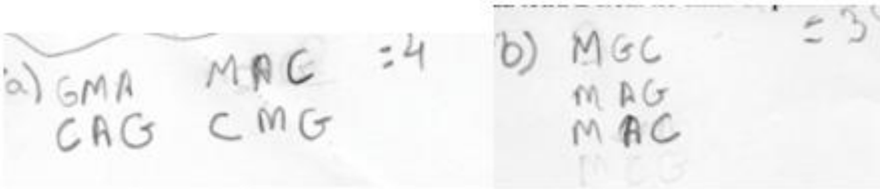
Figura 69 – Resolução do grupo 5 referente aos itens (a) e (b) no problema 1 do quarto roteiro de atividades da primeira proposição de problemas.



Fonte: Dados da pesquisa.

Além do uso da fórmula, também tivemos a listagem de todas as possibilidades, observe as soluções de G11 destes itens:

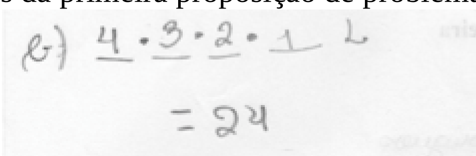
Figura 70 – Resolução do grupo 11 referente aos itens (a) e (b) no problema 1 do quarto roteiro de atividades da primeira proposição de problemas.



Fonte: Dados da pesquisa.

Nestes itens todos os grupos apresentaram a resolução correta. No terceiro problema os alunos não apresentam dificuldades, visto que puderam perceber que se tratava de um problema de permutação simples. Para o item (a) os grupos solicitavam o professor-pesquisador para evidenciar o trabalho realizado, no qual eles destacavam que se tratava de um problema de permutação de 5 elementos, utilizando a fórmula ou o Princípio Fundamental da Contagem para resolução desse item. Para o item (b) era necessário considerar que um dos elementos deveria ser fixado na última posição, enquanto os outros elementos permutavam entre si. Foi possível observar que alguns grupos não perceberam isso de imediato. Assim solicitamos a eles que fizessem a leitura do problema com atenção. Feito isso os alunos tiveram clareza do que deveria ser feito no problema. Notamos que todos os grupos apresentaram a resolução correta para o problema.

Figura 71 – Resolução do grupo 3 referente ao item (b) no problema 2 do quarto roteiro de atividades da primeira proposição de problemas.



Fonte: Dados da pesquisa.

Ao fim, da aula, registramos na lousa todo o trabalho realizado pelos grupos e provocamos um debate sobre o que foi feito e as dificuldades encontradas. Notamos que de modo geral os grupos entraram em consenso sobre o trabalho realizado nos problemas.

5.18 16º Encontro (uma aula) – dia 28/03/2016[17]

Na semana anterior, não foi realizado nenhum encontro, devido ao recesso da semana santa. Na verdade houve aula apenas no dia 21/03/2016, tendo os três primeiros horários, como a nossa aula era no quarto horário, não foi possível fazer a intervenção neste dia.

Iniciamos este encontro pedindo aos alunos que se organizassem em grupos com três pessoas ou em alguns casos em duplas. Em seguida entregamos o roteiro de atividades para que os alunos pudessem realizar o trabalho sobre ele. Foram formados oitos grupos com três alunos.

1ª Proposta proposição de problemas: Quinto roteiro de problemas.

1. Haverá um jogo de futsal e são 5 jogadores em quadra e 5 no banco de reservas. Quais as opções diferentes de formar um time?
2. Em uma sala de aula existem 4 cadeiras e quatro alunos em pé. De quantas formas diferente Carlos, Carla, Diego e Paulo podem se sentar?

O primeiro problema que foi formulado pelo G6 trabalhava com o conceito de combinação simples. Para resolver o problema foi necessária a mediação do professor-pesquisador com alguns grupos.

> G8 (Aluno 1): Professor a ordem é importante?
> PP: Ao escolher vocês três que fazem parte do grupo mais duas pessoas para completar o time, você acha que a ordem da escolha dos 5 seria importante.
> G8 (Aluno 1): Não.
> PP: Porque?
> G8 (Aluno 1): Seria o mesmo time.
> PP: Isso.

A lista organizada dos possíveis times não seria uma estratégia viável, devido à enorme quantidade de possibilidades. Nesse sentido os grupos que obtiveram êxito no problema fizeram uso da fórmula. No entanto, alguns alunos tiveram dificuldades em perceber que tínhamos 10 jogadores para formar times com 5 jogadores.

> PP: São quantos jogadores no total?

[17] **1º PROBLEMA – Problema formulado pelo grupo G6 na primeira proposição de problemas.**
2º PROBLEMA – Problema formulado pelo grupo G5 na primeira proposição de problemas.

> G7 (Aluno 1): 5 jogadores.
> G7 (Aluno 2): Não, são 10 jogadores.
> PP: Porque 5 jogadores? Porque 10 jogadores?
> G7 (Aluno 2): 5 jogadores em quadra e 5 no banco de reservas.
> PP: Isso.

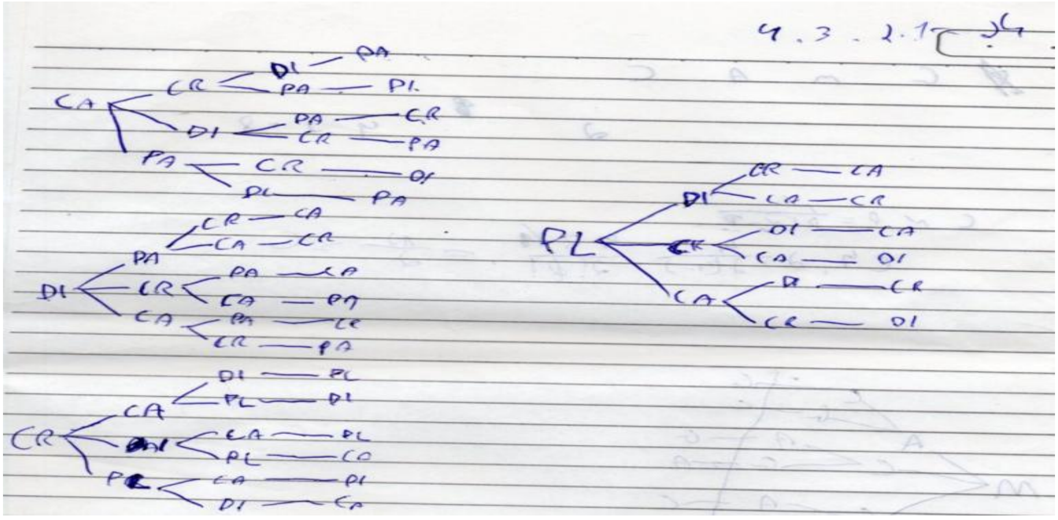
Na verdade alguns grupos solicitaram a presença do professor-pesquisador e justificaram ao mesmo que haviam feito uma $C_{5,5}$. Com isso conduzimos um diálogo como apresentado acima que possibilitou aos alunos ter uma melhor compreensão do enunciado do problema.

De modo geral os grupos conseguirem resolver o problema, apenas G3 e G4 apresentaram a resolução incorreta. No entanto, é importante ressaltar que em relação aos outros problemas que foram formulados e discutidos anteriormente, este sem dúvida nenhuma, os alunos apresentaram mais dificuldades.

Para o segundo problema tínhamos uma clássica aplicação de permutação simples. Alguns grupos solicitaram a presença do professor-pesquisador e justificaram a relevância na ordem. Observe o diálogo com G6:

> G6 (Aluno 1): Professor no caso aqui a ordem altera? Se eu colocar uma pessoa na frente ou atrás e depois trocar já é outra posição.
> PP: Correto.
> G6 (Aluno 2): Pela árvore dá?
> PP: Vocês obtiveram quantas possibilidades?
> G6: 24 possibilidades.
> PP: Isso.

Figura 72 – Resolução do grupo 6 referente ao problema 2 do quarto roteiro de atividades da primeira proposição de problemas.



Fonte: Dados da pesquisa.

Conduzimos diálogos com alguns grupos levantando problemas mais simples que fizeram os alunos pensar sobre o problema. Observe o diálogo abaixo:

PP: São quantas pessoas trocando de posição?
G7: 4 pessoas. Então é permutação de 4 pessoas.
PP: Isso. Para a escolha da primeira cadeira temos quantas possibilidades?
G7: Temos 4 possibilidades, para a terceira 3 possibilidades, para a segunda 2 possibilidades e para a escolha da última uma possibilidade. Então é $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =$ 24 possibilidades.

C.O: Percebemos que ao propor problemas mais simples aos alunos, possibilitou aos mesmos fazerem reflexões que resultaram em tomadas de decisões que deram conta do problema inicial.

Todos os grupos resolveram o problema, solicitando o professor-pesquisador na maioria dos casos para justificar o trabalho realizado sobre o problema. Ao fim da aula, fomos à lousa registrar o trabalho realizado pelos grupos, no qual os alunos conduziam as nossas ações, justificando suas descobertas e trabalhos realizados em cada problema.

5.19 17º Encontro (duas aulas) – dia 30/03/2016

Acreditamos que ao trabalhar com a resolução e exploração de diversos problemas de Combinatória e depois de ter trabalhado uma proposição de problemas, os alunos poderão ser capazes de reconhecer os tipos de problemas de Análise Combinatória, ou seja, eles serão desafiados a propor problemas que envolvam o Princípio Fundamental da Contagem, Arranjo simples, Permutação simples e Combinação simples.

Pedimos que os alunos se reunissem em grupos com três ou em duplas em alguns casos. Em seguida realizamos um sorteio com ideias essenciais de Combinatória, tais como:

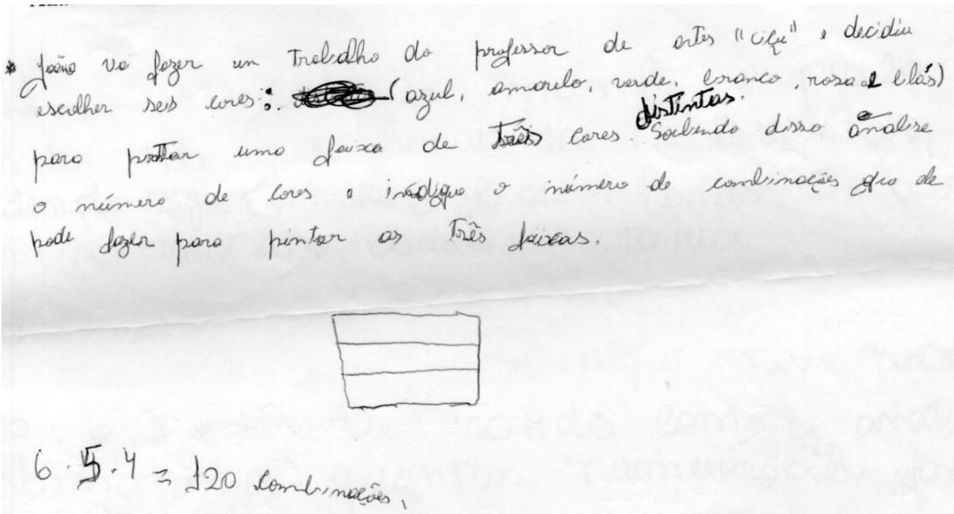
$3.4.4$	P_7	P_6	$C_{10,4}$
$A_{6,2}$	P_5	$A_{8,3}$	$A_{6,4}$
$C_{30,2}$	$5.4.3$	$C_{15,3}$	$6.5.4$

Para este encontro, pedimos ao professor da aula seguinte que cedesse a sua aula para que pudéssemos realizar nossa intervenção em sala de aula. Foram formados oito grupos com três alunos e duas duplas. Vamos fazer uma descrição do trabalho realizado por cada grupo.

O G1 foi sorteado para propor um problema que abordava o Princípio Fundamental da Contagem, em que o evento era composto de três escolhas, para primeira teríamos 6 possibilidades, para segunda 5 possibilidades e para última 4 possibilidades, ou seja, $6.5.4 =$ 120 possibilidades.

G1 formulou dois problemas. No primeiro, foi necessária nossa mediação para que o problema pudesse estar de acordo com a ideia que foi sorteada. Observe o problema formulado pelo grupo:

Figura 73 – Proposição do grupo 1 referente a segunda proposição de problemas.



* João vai fazer um Trabalho do professor de artes "Ciça", decidiu escolher seis cores: (azul, amarelo, verde, branco, rosa e lilás) para pintar uma faixa de três cores distintas. Sabendo disso analise o número de cores e indique o número de combinações que se pode fazer para pintar as três faixas.

6 · 5 · 4 = 120 combinações.

Fonte: Dados da pesquisa.

A primeira proposta apresentada pelo grupo não levava em consideração a necessidade das cores que deveriam pintar a bandeira serem distintas. Para que eles pudessem perceber isso, questionamos:

> PP: Ao resolver o problema, será que vai estar de acordo com a ideia que foi sorteada. Para escolha da primeira cor para pintar a bandeira temos quantas possibilidades?
> G1: 6 cores.
> PP: E para escolha da segunda cor?
> G1 (Aluno 1): 5 cores
> PP: Será?
> G1 (Aluno 1): Não, também são 6 cores.
> PP: Porque?
> G1 (Aluno 1): Porque eu posso pintar com uma das 6 cores de novo.
> PP: Isso. Então o problema não está adequado com a proposta. É necessário considerar uma condição que possa levar-nos ao produto $6 \cdot 5 \cdot 4$.

Depois, o grupo solicitou a presença do professor-pesquisador e justificou que as faixas da bandeira deviam ser pintadas com cores distintas, observe o diálogo:

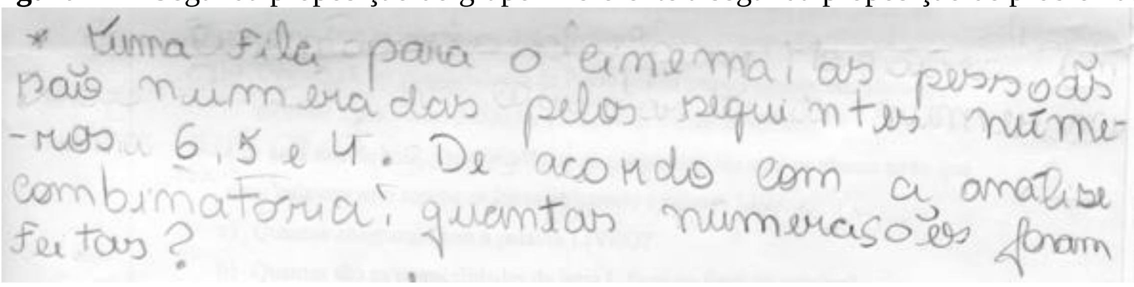
> G1 (Aluno 1): Tem que pintar as faixas da bandeira com cores distintas.
> PP: Porque você acha isso?
> G1 (Aluno 2): Porque são 6 possibilidades para escolha da primeira cor.
> PP: E para escolha da segunda cor?
> G1: 5 possibilidades.
> PP: Porque vocês acham isso?
> G1(Aluno 2): Porque como é com cores distintas não podemos pintar com a mesma cor.

PP: E para escolha da terceira cor?
G1: 4 possibilidades. Aí fica: $6 \cdot 5 \cdot 4$
PP: Correto.

C.O: Percebemos que a proposição do problema possibilitou aos alunos refletirem sobre suas ideias iniciais, para depois articular a redação com algum dado que seria adequado para a proposta do problema. Notamos também que o grupo tomou como ponto de partida para formular o problema, o problema da bandeira que foi discutido no 3ª encontro. No entanto, nota-se que G1 cria um cenário, trazendo no problema o professor "Ciço", que na verdade foi o professor de Arte da turma, cujo nome é Cícero. Percebe-se que o grupo toma uma posição inventiva tentando estabelecer relações entre Combinatória e a disciplina Arte. Ao fim, o grupo resolveu o problema corretamente.

Na segunda proposta, o grupo G1 solicitou a presença do professor-pesquisador para evidenciar o problema proposto. Observe a figura:

Figura 74 – Segunda proposição do grupo 1 referente a segunda proposição de problemas.


* Numa fila para o cinema, as pessoas são numeradas pelos seguintes núme-ros 6, 5 e 4. De acordo com a analise combinatoria, quantas numeraçoes foram feitas?

Fonte: Dados da pesquisa.

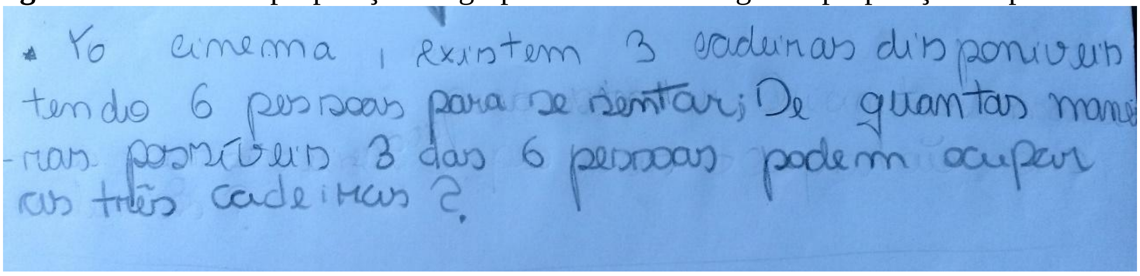
Notamos que o problema não estava de acordo com a proposta que foi direcionada ao grupo, então orientamos o grupo G1 a fim de que eles pudessem estar pensando no que fora feito.

PP: A ideia foi boa, mas está precisando de alguns ajustes
G1 (Aluno 3): Eu pensei em colocar cadeiras para se sentar.
PP: Pode ser. E como ficaria?
G1 Vamos fazer.
PP: Observe que vocês vão ter que tomar três decisões, sendo que para primeira temos 6 possibilidades.
PP: E para segunda?
G1 (Aluno 2): 5 possibilidades e para terceira 4 possibilidades.
PP: Vocês acham que deveria ser quantas cadeiras?
G1 (Aluno 3): 3 cadeiras.
PP: Isso. E quantas pessoas?
G1 (Aluno 3): No caso deve ter que escolher entre 6 pessoas.

PP: Isso.

Ao fim, da aula, o grupo entregou o problema que foi formulado. Notamos que G1 formulou o problema adequadamente. Acreditamos que eles perceberam o total de pessoas, a partir da primeira proposta, em que foram necessárias 6 cores para pintar a bandeira.

Figura 75 – Terceira proposição do grupo 1 referente a segunda proposição de problemas.


• No cinema, existem 3 cadeiras disponiveis
tendo 6 pessoas para se sentar; De quantas mane-
-ras possíveis 3 das 6 pessoas podem ocupar
as três cadeiras ?

Fonte: Dados da pesquisa.

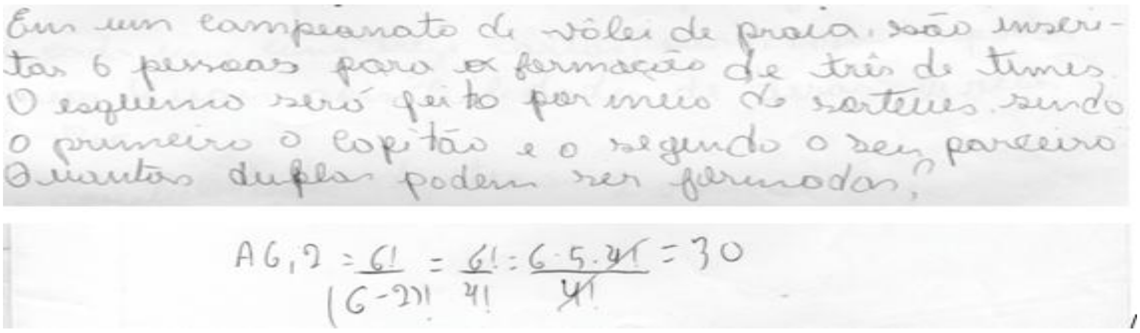
G2 ficou encarregado de propor um problema de arranjo, com 6 elementos tomados 2 a 2. Observe o diálogo com o grupo:

G2: Professor no caso teremos que formar duplas?
PP: Isso. O que vocês estão pensando?
G2 (Aluno 1): Pensamos em fazer um sorteio com 6 pessoas e formar duplas para disputar um campeonato de vôlei, pode ser?
PP: Pode sim. Mas é um problema de arranjo ou combinação?
G2 (Aluno 1): De arranjo, no caso tem que considerar a ordem.
PP: Isso. E o que vocês pretendem levar em consideração para que a ordem na formação das duplas seja importante?
G2 (Aluno 2): Então o primeiro sorteado pode ser o capitão.

Depois, o grupo nos solicitou para evidenciar o problema que fora formulado. O G2 estava discutindo entre eles o mérito pela formulação do problema. Além disso, constatamos que faltava colocar a pergunta para o problema.

G2 (Aluno 1): Quem te deu a ideia do problema foi eu?
G2 (Aluno 2): Mas quem elaborou foi eu.
PP: Não, está faltando alguma informação para que se tenha um problema de Combinatória?
G2 (Aluno 2): Está faltando a pergunta para o problema.
G2 (Aluno 1): Então seria: quantas duplas diferentes poderia formar?

Figura 76 – Proposição do grupo 2 referente a segunda proposição de problemas.


Em um campeonato de vôlei de praia, são inseritas 6 pessoas para a formação de três de times. O esquema será feito por meio de sorteios sendo o primeiro o capitão e o segundo o seu parceiro. Quantas duplas podem ser formadas?

$$A_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6!}{4!} = \frac{6.5.4!}{4!} = 30$$

Fonte: Dados da pesquisa.

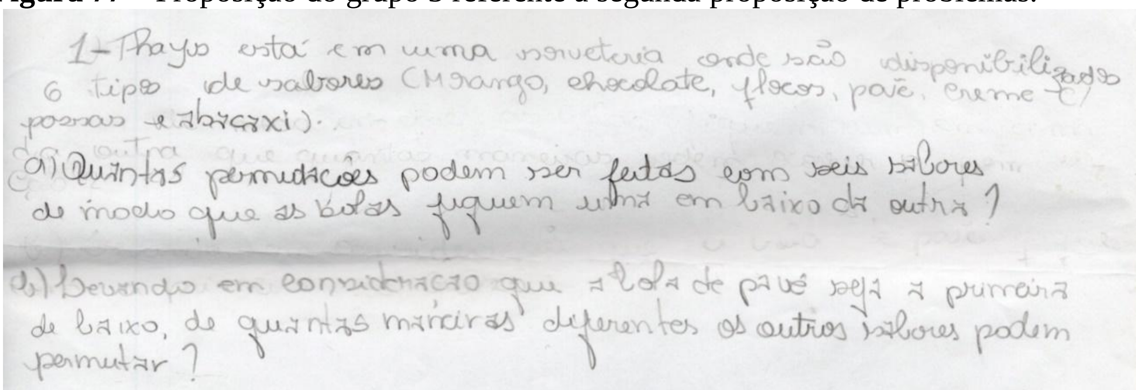
C.O: Notamos que o quando grupo foi estimulado a pensar, foi-lhe possibilitado levantar hipóteses e comunicar ideias. Além disso, G2 conseguiu criar condições para que pudéssemos ter um problema de arranjo simples, evidenciando sua compreensão em relação a esse conceito. Percebemos também o clima de cooperação entre o grupo evidenciando as ideias que conduziram a formulação do problema. Ao fim, o grupo utilizou a fórmula e resolveu o problema que foi formulado por eles.

O G3 ficou encarregado de propor um problema de permutação com 6 elementos. Observe o diálogo com o grupo:

PP: Entenderam como deve fazer?
G3: Não.
PP: Vocês vão ter que formular um problema, como fizeram da outra vez. Agora vai ter que ser um problema de permutação com 6 elementos.
G3 (Aluno 1): Pode ser pessoas?
PP: Pode.
G3 (Aluno 2): E comidas?
PP: Pode sim.

O grupo formulou um problema a partir da ideia do Aluno 2:

Figura 77 – Proposição do grupo 3 referente a segunda proposição de problemas.


1- Thayos está em uma sorveteria onde são disponibilizados 6 tipos de sabores (Morango, chocolate, flocos, pavê, creme c/ passas e abacaxi).

a) Quantas permutações podem ser feitas com seis sabores de modo que as bolas fiquem uma em baixo da outra?

b) Levando em consideração que a bola de pavê seja a primeira de baixo, de quantas maneiras diferentes os outros sabores podem permutar?

Fonte: Dados da pesquisa.

O G3 solicitou a presença do professor-pesquisador e evidenciou que também formulou outro problema, como podemos observar na figura acima.

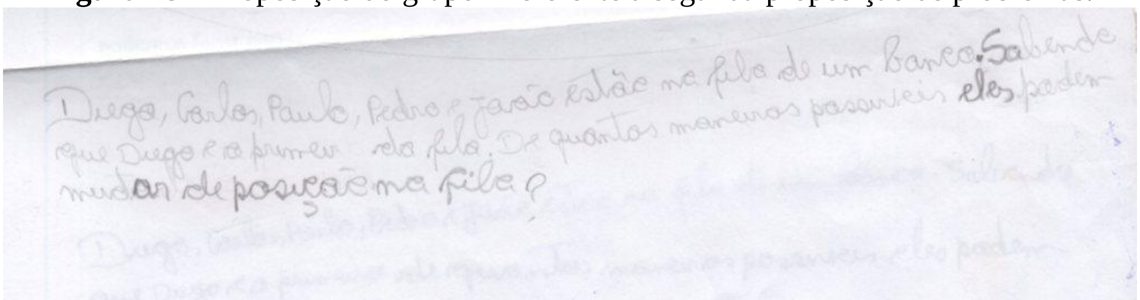
C.O: Notamos que o grupo se preocupou em propor um problema e uma variação dele, incorporando a nossa proposta que foi trabalhada inicialmente nos primeiros encontros. Além disso, percebe-se que o grupo evidencia, no enunciado do problema, a permutação de 6 elementos, com o intuito de garantir que ele esteja de acordo com o que foi pedido.

O G4 teria que formular um problema de permutação de 5 elementos. Observe o diálogo conduzido com o grupo:

> G4 (Aluno 1): Professor o que devo fazer?
> PP: Vocês vão ter que formular um problema a partir dessa ideia que foi sorteada. Que tipo de problema vocês vão ter que formular aí?
> G4 (Aluno 1): Permutação.
> PP: De quantos elementos?
> G4 (Aluno 1): Cinco.
> G4 (Aluno 2): Pode ser pessoas na fila de um banco trocando de posição?
> PP: Pode. Dê continuidade a sua ideia.

O grupo formulou o seguinte problema:

Figura 78 – Proposição do grupo 4 referente a segunda proposição de problemas.



1 Diego, Carlos, Paulo, Pedro e João estão na fila de um Banco. Sabendo que Diego é o primeiro da fila. De quantas maneiras possíveis eles podem mudar de posição na fila?

Fonte: Dados da pesquisa.

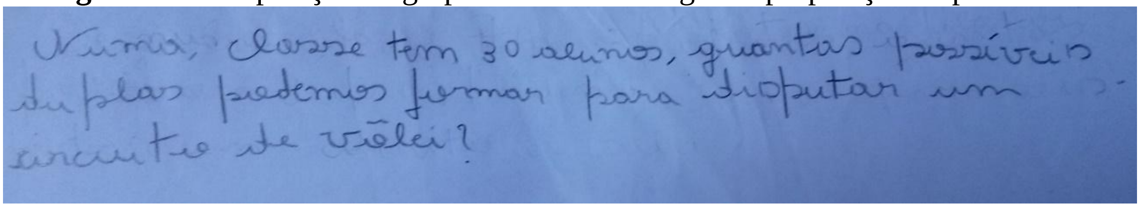
C.O: Notamos que o grupo não teve dificuldades em relacionar uma situação cotidiana com o conceito de Permutação simples. Além disso, em nossas mediações deixamos os alunos à vontade para que articulassem o que sabiam e articulassem o conhecimento com o que a proposta exige.

G5 ficou incumbido de propor um problema de combinação de 30 elementos tomado 2 a 2. O grupo estava com dificuldades, nesse sentido foi necessária a nossa mediação:

PP: Alguma dúvida pessoal?
G5 (Aluno 1): Não entendi nada não.
PP: Você quer fazer combinações de 30 elementos tomados 2 a 2. Pense em uma situação que você possa formar duplas.
G5 (Aluno 2): Jogar vôlei.
PP: Pode ser. E como ficaria?
G5: Vamos fazer aqui.

Depois, o grupo solicitou a presença do professor-pesquisador e fez a leitura do seguinte problema que foi formulado:

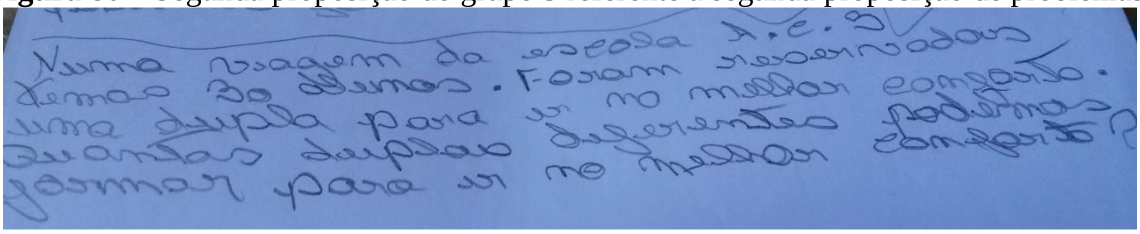
Figura 79 – Proposição do grupo 5 referente a segunda proposição de problemas.


Numa classe tem 30 alunos, quantas possíveis duplas podemos formar para disputar um circuito de vôlei?

Fonte: Dados da pesquisa.

Ao fim da aula, o Aluno 1 que apontou que estava com dificuldades, formulou outro problema, fazendo a leitura dele para o professor-pesquisador. Observe o problema formulado pelo Aluno 1:

Figura 80 – Segunda proposição do grupo 5 referente a segunda proposição de problemas.


Numa viagem da escola A.C.S realizadas temos 30 alunos. Foram no melhor conforto. uma dupla para ir cada diferentes podemos Quantas duplas no melhor conforto? formar para ir no melhor

Fonte: Dados da pesquisa.

A proposta formulada pelo aluno 1, evidencia sua imaginação e criatividade ao escrever o ambiente que está fazendo parte de seu cotidiano, já que mesmo enfatiza no problema a escola A.C.S que corresponde a Escola Agenor Clemente dos Santos, no qual o aluno estuda.

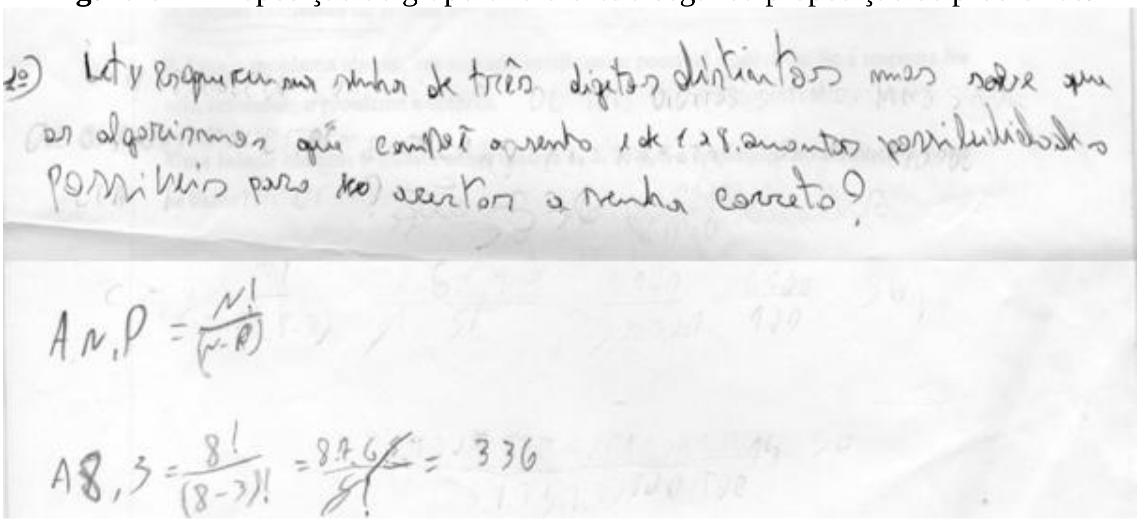
G6 teria que formular um problema de arranjo com 8 elementos tomados 3 a 3. O grupo nos solicitou:

G6 (Aluno 2): Professor como eu faço?
PP: Vocês vão ter formular um problema de arranjo com 8 elementos, onde estará formando grupos com três elementos.
G6 (Aluno 1): No caso é arranjo então a ordem é importante.
PP: Isso.

C.O: É fato que, em seus discursos, os alunos salientam a relevância da ordem na formação dos agrupamentos, não enfatizando que eles também os diferenciam pela natureza dos elementos. No entanto, durante as resoluções dos problemas, notou-se que os alunos levam em consideração essa ideia na elaboração dos agrupamentos.

A mediação foi suficiente para que o grupo formulasse um excelente problema, observe abaixo:

Figura 81 – Proposição do grupo 6 referente à segunda proposição de problemas.



Fonte: Dados da pesquisa.

C.O: Percebemos que o grupo estava atento a natureza dos problemas de Combinatória, visto que eles apontaram a relevância na ordem das escolhas dos elementos. Nota-se também que o grupo conseguiu conectar conceitos matemáticos ao seu cotidiano, notando que a Análise Combinatória possibilita descrever as possíveis possibilidades para descobrir uma determinada senha. Além disso, percebe-se a autonomia do grupo na formulação do problema, visto que não apresentou dificuldades para formular o problema. Ao fim, o grupo utilizou a fórmula de arranjo simples para resolver o problema.

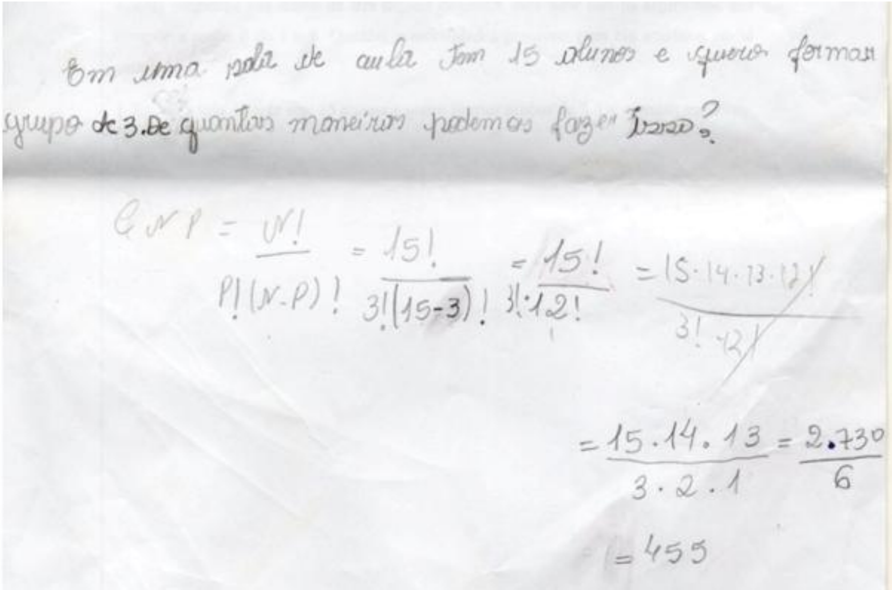
O G7 ficou encarregado de propor um problema de combinação com 15 elementos tomados 3 a 3. Observe o diálogo:

G7 (Aluno 1): Professor não estou entendendo.
PP: Você deve propor um problema que contenha 15 elementos e que está sendo formado trios.
G7 (Aluno 1): Pode ser três coisas qualquer?
PP: Pode, no entanto, tem que ser um problema de combinação.
G7 (Aluno 1): Ok.

Fomos atender outros grupos depois G7 nos solicitou: "G7 (Aluno 2): Professor pensamos da seguinte forma: formar grupos de três pessoas com quinze pessoas PP: Pode ser, escreva os que vocês pensaram".

Assim o grupo formulou o seguinte problema:

Figura 82 – Proposição do grupo 7 referente a segunda proposição de problemas.



Fonte: Dados da pesquisa.

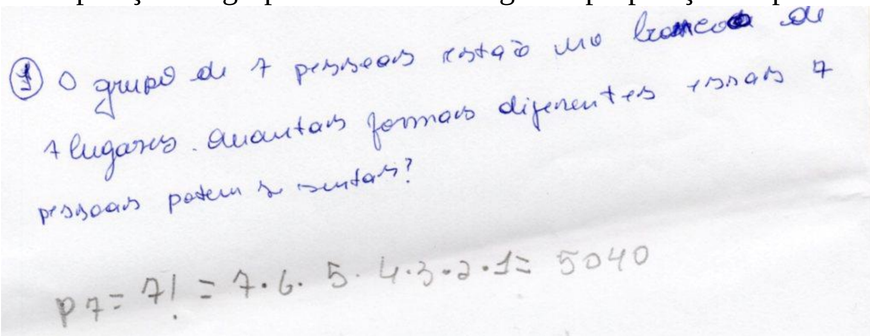
C.O: Notamos que a mediação professor-grupo possibilitou aos alunos organizarem suas ideias e formular em um problema que estivesse totalmente ligado ao seu cotidiano, ou seja, quando se fala em grupo de pessoas, o ambiente que pode vir à tona é a sala de aula. Além disso, o grupo conseguiu formular um problema de combinação simples, visto que a ordem da escolha para formar os grupos, não acarreta um novo grupo, ou seja, a ordem não é importante. Em seguida G7 resolveu o problema sem precisar da ajuda do professor-pesquisador.

G8 teve que formular um problema de permutação de 7 elementos. Observe o diálogo com o grupo:

> PP: Vocês já começaram?
> G8 (Aluno 2): Não sabemos como é.
> PP: Vocês vão ter que formular um problema que seja uma permutação de quantos elementos?
> G8 (Aluno 1): Sete. No caso mudando...trocando de posição.
> PP: Isso.

Fomos atender os outros grupos depois o grupo G8 nos solicitou evidenciando o seguinte problema:

Figura 83 – Proposição do grupo 8 referente a segunda proposição de problemas.


1 O grupo de 7 pessoas estão no banco de 7 lugares. Quantas formas diferentes essas 7 pessoas podem se sentar?

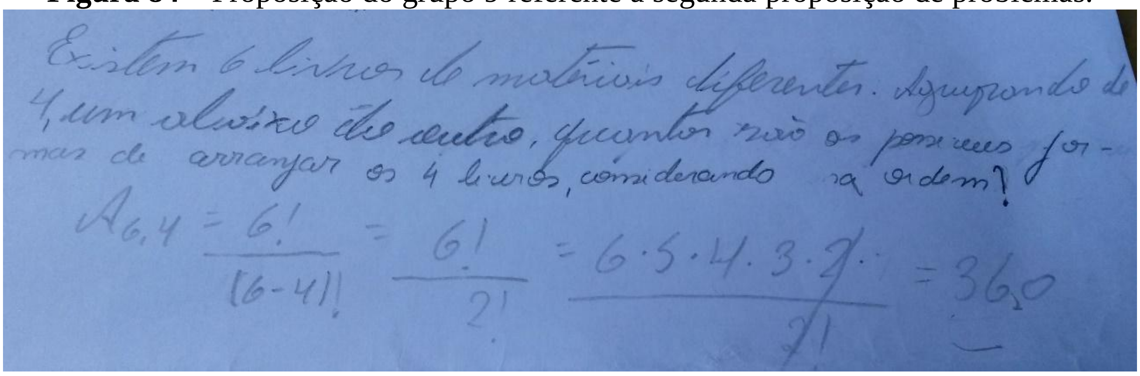
$P_7 = 7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$

Fonte: Dados da pesquisa.

C.O: Percebemos a autonomia do grupo em propor um problema clássico de Permutação simples, que partiu da criatividade do grupo, evidenciando seus potenciais de reflexão quando colocado em uma situação desafiadora.

G9 não teve dificuldades em propor o problema, já que não precisou de nossa mediação. O grupo formulou um problema de arranjo em que tínhamos 6 elementos e que estávamos arranjando 2 a 2. Observe a figura:

Figura 84 – Proposição do grupo 9 referente a segunda proposição de problemas.


Existem 6 livros de matérias diferentes. Agrupando de 4, um ao lado do outro, quantas são as possíveis formas de arranjar os 4 livros, considerando a ordem?

$A_{6,4} = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2!}}{\cancel{2!}} = 360$

Fonte: Dados da pesquisa.

C.O: Percebe-se a autonomia do grupo na formulação do problema, aliada à criatividade e à preocupação de estar articulando o texto com o conceito de arranjo simples, já que o grupo aponta no problema a necessidade de considerar a ordem em que os livros estão sendo arranjados.

Não foi possível formar o grupo G10, já que os alunos deste grupo faltaram a aula. G11 ficou encarregado de formular um problema com o Princípio Fundamental da Contagem, mas especificamente $5 \cdot 4 \cdot 3$. Observe o diálogo com o grupo:

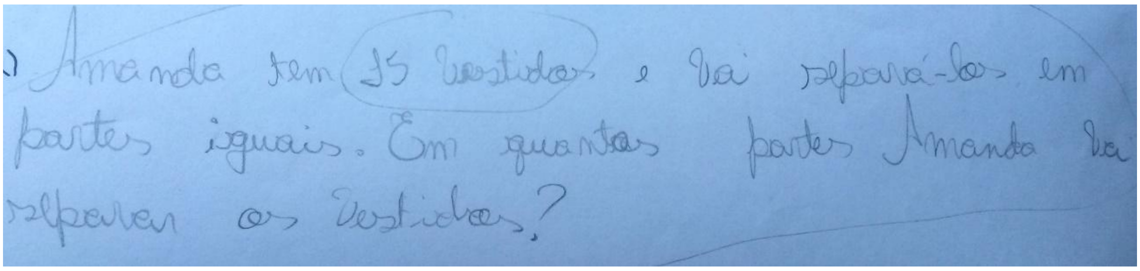
> PP: Alguma dúvida gente?
> G10 (Aluno 1): Como faz?
> PP: Vocês vão ter que formular um problema em que vai ser necessário tomar três decisões. Para primeira decisão existirá 5 possibilidades, para segunda 4 possibilidades e última 3 possibilidades.
> G10 (Aluno 1): Vamos tentar aqui.

Fomos atender as solicitações de outros grupos, depois passamos para ver como o grupo estava formulando o problema.

> G10 (Aluno 1): Olha professor tá certo?
> PP: Como vocês pensaram?
> G10 (Aluno 2): Amanda tem 15 vestidos e vai separá-los em partes iguais. No caso de 3 em 3, obtendo 5 partes.
> PP: Certo, mas acho que está faltando alguma informação

Observe a proposta inicial formulada por G11:

Figura 85 – Proposição do grupo 10 referente a segunda proposição de problemas.


1) Amanda tem 15 vestidos e vai separá-los em partes iguais. Em quantas partes Amanda va separar os vestidos?

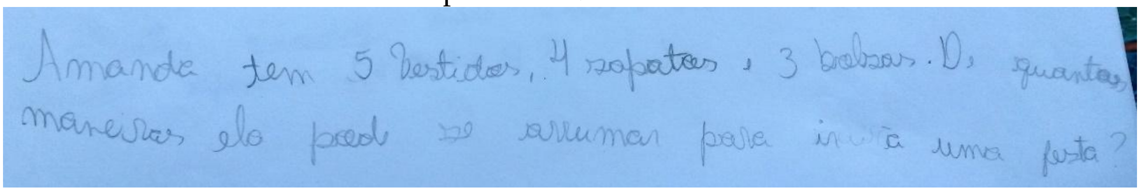
Fonte: Dados da pesquisa.

Aproveitamos o raciocínio do grupo e conduzimos um diálogo que pudesse fazê-los pensar em sua proposta de problema:

> PP: Vamos aproveitar a sua ideia. Para se arrumar para ir uma festa você poderia escolher entre alguns vestidos. E que outras peças de roupas?
> G10 (Aluno 2): Poderia ser sapatos e anéis?
> PP: Pode sim. Então como ficaria o problema?
> G10 (Aluno 2): A gente tem 5 vestidos, 4 sapatos e 3 anéis para escolher para ir a uma festa.
> PP: Certo, organize essas informações e escreva o problema.

Depois o grupo nos solicitou evidenciando o problema que foi formulado, notamos que foi feita uma pequena mudança em relação ao diálogo acima, visto que substituíram o item anéis por bolsas. Observe como ficou o problema:

Figura 86 – Segunda proposição do grupo 10 referente a segunda proposição de problemas.


Amanda tem 5 vestidos, 4 sapatos, 3 bolsas. De quantas maneiras ela pode se arrumar para ir à uma festa?

Fonte: Dados da pesquisa.

Ao fim, do encontro todos os grupos entregaram ao professor-pesquisador os problemas que foram formulados.

5.20 18º Encontro (uma aula) – dia 01/04/2016[18]

Iniciamos a aula solicitando que os alunos se reunissem em grupo de três alunos e em alguns casos em duplas. Posteriormente entregamos o roteiro de atividades e pedimos que eles tentassem resolvê-la. Foram formados sete grupos e três duplas.

2ª Proposta de proposição de problemas: Primero roteiro de problemas.

1. Em um campeonato de vôlei de praia, são inscritas 6 pessoas para a formação de três times. O esquema será feito por meio de sorteios sendo o primeiro sorteado o capitão e o segundo o seu parceiro. Quantas duplas podem ser formadas?
2. Numa classe há 30 alunos, quantas possíveis duplas podemos formar para disputar um circuito de vôlei?
3. João vai fazer um trabalho do professor de arte "Ciço" e decidiu escolher seis cores: azul; amarelo; verde; branco; rosa e lilás, para pintar uma faixa com três cores distintas. Sabendo disso, analise o número de cores e indique o número de combinações que se pode fazer para pintar as três faixas.

[18] **1º PROBLEMA – Problema formulado pelo grupo G2 na segunda proposição de problemas.**
2º PROBLEMA – Problema formulado pelo grupo G5 na segunda proposição de problemas.
3º PROBLEMA – Problema formulado pelo grupo G1 na segunda proposição de problemas.

Para este roteiro de atividades, selecionamos três problemas que foram formulados pelos alunos na segunda proposição de problemas. O primeiro problema aborda o conceito de arranjo simples, visto que a ordem na formação das duplas é importante, já que o primeiro sorteado será o capitão.

O G1 solicitou a presença do professor-pesquisador pois estava com dúvidas sobre a natureza do problema:

> G1 (Aluno 3): Professor estamos na dúvida se é arranjo ou combinação?
> PP: Vocês acham que a ordem é importante?
> G1 (Aluno 1): Isso não é uma combinação, é um arranjo.
> PP: Porque você acha isso?
> G1: Porque a ordem é importante.
> PP: E porque você acha que a ordem é importante?
> G1 (Aluno 1): Porque o primeiro sorteado vai ser o capitão.

C.O: Notamos, ao longo das atividades desenvolvidas em sala de aula a, preocupação dos alunos na distinção dos problemas de Combinatória. Deste modo, é comum observar os grupos se questionarem sobre a natureza dos problemas, para que em seguida, realizassem o trabalho sobre o problema.

G6 solicitou a presença do professor-pesquisador para justificar que o primeiro problema abordava as ideias de arranjo simples, visto que a ordem era importante. Além disso, o grupo enfatizou sua descoberta em relação ao segundo problema:

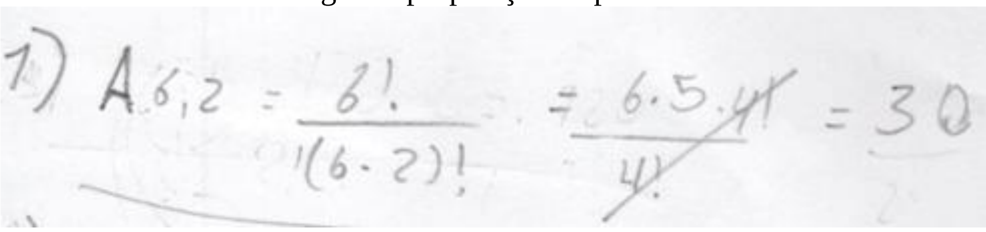
> G6 (Aluno 1): Professor a segunda questão é combinação.
> PP: Porque você acha isso?
> G6 (Aluno 1): Porque a ordem do primeiro escolhido para a dupla não é importante.
> PP: Mas como você explica isso?
> G6 (Aluno 1): Se eu for o primeiro escolhido e Carlos o segundo é a mesma coisa de Carlos ser o primeiro escolhido e eu o segundo.
> PP: Correto.

Selecionamos estes dois problemas para o primeiro roteiro de atividades, com o objetivo de colocar os alunos em duas situações idênticas, mas que abordavam conceitos diferentes. Deste modo, foi preciso uma análise das ideias que eram inerentes aos problemas, para que posteriormente realizasse um trabalho sobre o problema. Assim, conduzimos um diálogo com alguns grupos, levantando os seguintes questionamentos:

PP: Vocês acham que a ordem dos sorteados é importante?
G10 (Aluno 1): Acho que sim, se eu for escolhida a primeira, serei a capitã, e Aluna 2 a minha parceira, e se for ao contrário Aluna 2 será a capitã e eu a sua parceira.
PP: Qual a diferença primeiro sorteado para o segundo sorteado?
G10 (Aluno 1): Porque ele será o capitão.
PP: Isso. Então a ordem será importante??
G10: É, então é arranjo.
PP: Correto.

Diante de dificuldades apresentadas por alguns grupos sobre a distinção do problema, apontamos questões que fizessem o grupo pensar sobre o problema. Todos os grupos resolveram o problema corretamente, fazendo uso principalmente da fórmula de arranjo simples, como também tivemos alguns grupos que utilizaram o Princípio Fundamental da Contagem.

Figura 87 – Resolução do grupo 5 referente ao problema 1 do primeiro roteiro de atividades da segunda proposição de problemas.



Fonte: Dados da pesquisa.

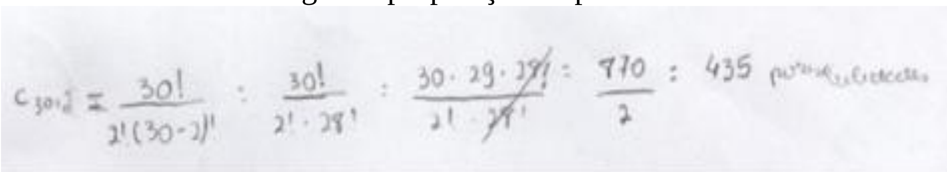
O segundo problema ainda gerou dificuldades para alguns grupos. Observe o diálogo com G3:

G3(Aluno 1): O segundo problema a resposta é 870 duplas.
PP: Como vocês fizeram?
G3: Resolvemos da mesma forma do primeiro problema.
PP (Aluno 1): No primeiro problema era necessário levar em consideração alguma condição para formação da dupla?
G3 (Aluno 3): O primeiro sorteado seria o capitão.
PP: Isso. Então façam a leitura de problema. Vocês acham agora que a ordem na escolha das duplas é importante?
G3(Aluno 1): Acho que é.
G3(Aluno 2): Não é, a ordem não vai alterar a dupla formada.
PP: Isso.

C.O: Percebemos que alguns grupos não fizeram a leitura do problema com atenção, para que em seguida pudessem perceber a relevância ou não na formação das duplas. Quando fizemos os grupos refletirem sobre o problema anterior, perceberam que a ordem de escolha para a formação das duplas não era importante, ou seja, tínhamos um problema de combinação simples.

De modo geral os grupos apresentaram menos dificuldades em relação ao primeiro problema, já que a distinção deste contribuiu posteriormente para a compressão do segundo problema. Deste modo, foi comum os grupos solicitarem a presença do professor-pesquisador para justificar que o segundo problema abordava o conceito de combinação simples, pois a ordem na formação das duplas não geraria uma nova dupla.

Figura 88 – Resolução do grupo 9 referente ao problema 2 do primeiro roteiro de atividades da segunda proposição de problemas.



Fonte: Dados da pesquisa.

O desempenho dos grupos foi excelente neste problema, principalmente pelo fato de a maioria dos grupos estar fazendo distinção corretamente dos problemas de arranjo e combinação simples. Deste modo, todos os grupos resolveram o problema corretamente.

O terceiro problema foi formulado por G1. Acreditamos que o grupo tomou como ponto de partida para a formulação deste problema, uma atividade discutida anteriormente pelo professor-pesquisador. No entanto, o grupo acrescenta na construção das ideias para proposição do problema: professor de arte "Ciço".

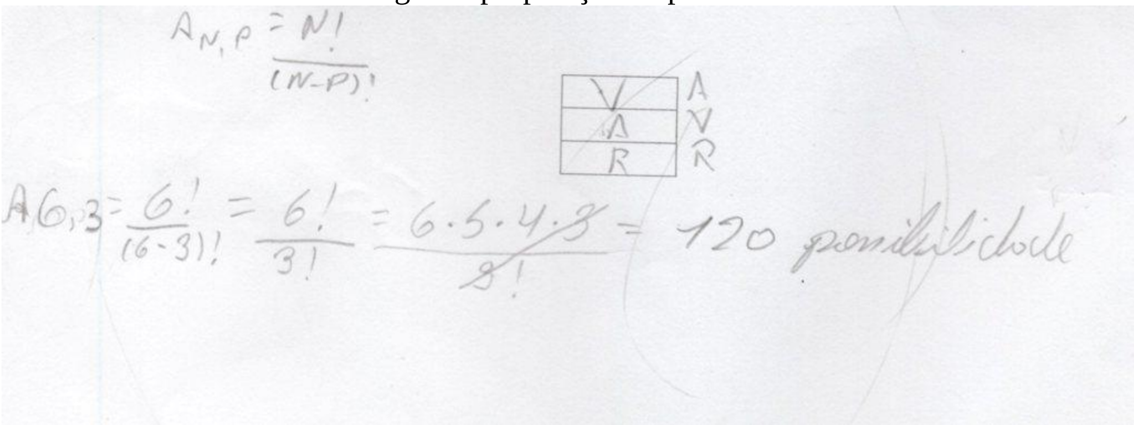
Com isso, alguns alunos se mostraram interessados em saber qual foi o grupo que formulou este problema, pelo fato de trazer em seu enunciado o professor de arte Cícero, ao qual os alunos se referem carinhosamente como "Ciço".

Notamos que o termo "combinações" gerou dificuldades para os grupos perceberem a natureza do problema. Deste modo, foi comum alguns grupos solicitarem a presença do professor-pesquisador e mostrar sua resolução, em que fez uso da fórmula de combinação simples. Na verdade, alguns alunos não se preocuparam em fazer uma análise do problema, para que posteriormente pudesse perceber a relevância na ordem da formação dos agrupamentos.

O responsável pela formulação do problema foi o grupo G1, este não apresentou dificuldades para resolver o problema. No entanto, foi necessária a nossa mediação com alguns grupos: " PP: Porque você acha que é um problema de combinação? G3 (Aluno 1): Porque fala em combinações".

Para compreender o problema, o grupo G2 descreveu uma possibilidade com as cores verde, azul e rosa em seguida permutou essas cores e observaram que teria uma nova combinação, ou seja, a mudança na ordem das cores gerou um novo agrupamento.

Figura 89 – Resolução do grupo 2 referente ao problema 3 do primeiro roteiro de atividades da segunda proposição de problemas.



Fonte: Dados da pesquisa.

Observamos que outros grupos também listaram algumas possibilidades, para distinguir o tipo de agrupamento. Deste modo, durante a mediação com alguns grupos, sugerimos que tentassem fazer a descrição de algumas possibilidades e em seguida analisar sobre a relevância ou não na formação dos agrupamentos.

Ao fim, todos os grupos conseguiram resolver o problema corretamente, fazendo uso do Princípio Fundamental da Contagem e da fórmula. Assim, fomos na lousa registrar o trabalho realizados pelos grupos, como também destacamos as dificuldades encontradas e questionamos a turma sobre o que fizeram para superá-las.

5.21 19º Encontro (uma aula) – dia 06/04/2016[19]

Iniciamos a aula pedindo aos alunos que se reunissem em grupos de três alunos ou, em alguns casos, em duplas. Em seguida, entregamos o roteiro com as atividades que foram formuladas pelos alunos e selecionadas pelo professor-pesquisador. Foram formados oito grupos e duas duplas.

2ª Proposta de proposição de problemas: Segundo roteiro de atividades.

1. Diego, Carlos, Paulo, Pedro e João estão na fila de um banco. Sabendo que Diego é o primeiro da fila. De quantas maneiras possíveis eles podem mudar de posição na fila?

---

[19] **1º PROBLEMA – Problema formulado pelo grupo G4 na segunda proposição de problemas.**
2º PROBLEMA – Problema formulado pelo grupo G6 na segunda proposição de problemas.
3º PROBLEMA – Problema formulado pelo grupo G7 na segunda proposição de problemas.

2. Lety esqueceu sua senha de três dígitos distintos, mas sabe que os algarismos que compõe a senha é de 1 a 8. Quantas possibilidades possíveis para ela acertar a senha correta?
3. Em uma sala de aula tem 15 alunos e quero formar grupos de 3. De quantas maneiras podemos fazer isso?

O primeiro problema foi formulado por G4. Os grupos conseguiram perceber que tratava de um problema de permutação simples. No entanto, não havia clareza sobre o número de elementos que estavam trocando de posição. Ao fazer a leitura do problema percebe-se que são 5 pessoas, porém enfatiza a necessidade de Diego ser o primeiro da fila. Ao fim, se questiona: De quantas maneiras possíveis eles podem mudar de posição na fila? Deste modo, durante a interpretação do problema, o uso do pronome reto: eles, ocasionou uma dupla interpretação, ou seja, eles correspondem a: Diego, Carlos, Paulo, Pedro e João ou a: Carlos, Paulo, Pedro e João?

Acreditamos que ao levantar a necessidade de Diego ser o primeiro da fila implica que as outras pessoas não vão poder ocupar esta posição, restando apenas 4 posições para serem ocupadas, deste modo, faltou clareza no enunciado do problema.

Contudo, o professor-pesquisador foi consultar o grupo G4 para perceber sua interpretação sobre as ideias que foram escritas por eles. Percebemos que o grupo já tinha resolvido o problema, fazendo uma permutação de 4 elementos. Assim fizemos uma intervenção e enfatizamos que Diego deveria ficar na primeira posição da fila do banco. A partir daí, todos os grupos apresentaram a resolução correta do problema.

Destacamos a resolução de G8, visto que o grupo evidencia sua compreensão sobre o problema, fixando Diego na primeira posição, logo temos apenas uma escolha a fazer na primeira decisão a ser tomada, em seguida faz-se uma análise do número de escolhas que dispõe cada pessoa, percebendo que, nas três últimas decisões, os números de escolhas vão se reduzindo em ordem decrescente.

O segundo problema abordava o conceito de arranjo simples. Os grupos não apresentaram dificuldades para resolver o problema. Deste modo, o professor-pesquisador, quando solicitado, tinha como finalidade justificar o trabalho realizado sobre o problema, para que posteriormente recebesse a resposta sobre o desempenho bem sucedido na resolução.

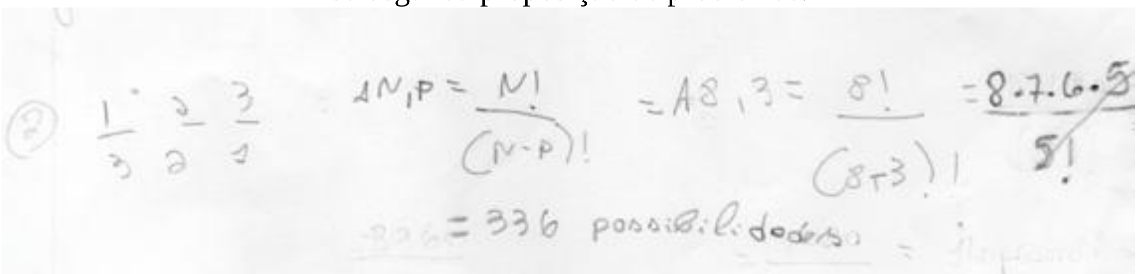
C.O: Notamos que os alunos estão cada vez mais independentes e seguros de suas ações para resolver os problemas. Além disso, é comum observar a sua alegria ao obter o sucesso na resolução do problema.

Os alunos do G6, ao solicitar a presença do professor-pesquisador, evidenciam sua alegria ao ver a turma resolvendo um problema que eles formularam.

C.O: Percebemos que os alunos, não raro, mostraram-se orgulhosos diante da proposta de serem autores em sala de aula. Ao formular o problema e posteriormente resolvê-lo, abriu-se um caminho para que os alunos se tornassem agentes ativos durante a construção de sua própria aprendizagem.

Para resolver o problema, a turma recorreu à fórmula de arranjo simples, notando que a ordem na formação das senhas se faz importante. Para perceber isso, notamos que alguns grupos descreveram uma senha e, em seguida, fizeram a permutação dos dígitos, obtendo uma nova senha.

Figura 90 – Resolução do grupo 8 referente ao problema 1 do segundo roteiro de atividades da segunda proposição de problemas.



Fonte: Dados da pesquisa.

Além disso, tivemos alguns grupos que também fizeram uso Princípio Fundamental da Contagem, validando sua resolução. Observe o diálogo com G8:

> G8 (Aluno 1): Professor são 336 possibilidades.
> PP: Como você resolveu?
> G8 (Aluno 1): Pela fórmula.
> G8 (Aluno 2): Professor eu fiz pelo PFC e também deu 336 possibilidades.

Deste modo, todos os grupos apresentaram a resolução correta para o problema. No último problema, os grupos não apresentaram dificuldades para resolvê-lo. Assim, os alunos notaram que se tratava de um problema de combinação simples, pois a ordem na formação dos grupos não importava. Assim fizeram uso da fórmula de combinação simples e obtiveram a resolução bem sucedida do problema.

Com isso ao fim da aula, registramos na lousa através do diálogo conduzido com a turma o trabalho realizado sobre os problemas.

5.22 20º Encontro (uma aula) – dia 07/04/2016[20]

Iniciamos a aula pedindo aos alunos que se reunissem em grupos de três ou em duplas em alguns casos. Em seguida entregamos um roteiro de atividades e encorajamos a resolvê-lo. Foram formados oito grupos com três alunos e três duplas.

2ª Proposta de proposição de problemas: Terceiro roteiro de problemas

1. Existem 6 livros de matérias diferentes. Agrupando 4 um abaixo do outro, quantas são as formas possíveis de arranjar os 4 livros, considerando a ordem?
2. Numa viagem da escola A.C.S temos 30 alunos. Foram reservadas uma dupla para ir no melhor conforto. Quantas duplas diferentes podemos formar para ir no melhor conforto?
3. O grupo de 7 pessoas estão no banco de 7 lugares. Quantas formas diferentes essas 7 pessoas podem se sentar?

Propusemos, inicialmente, o problema formulado por G9. Observa-se que este grupo se preocupou em expor informações no problema que viessem a facilitar a sua distinção. Ao apontar, no fim do problema, a necessidade de considerar a ordem, evidencia que temos um problema de arranjo simples.

Deste modo, durante a resolução do problema, alguns grupos solicitaram a presença do professor-pesquisador para evidenciar que se trata de um problema de arranjo:

> G10 (Aluno 1): Professor é um problema de arranjo.
> PP: Porque você acha isso?
> G10 (Aluno 1): Porque tem que considerar a ordem.
> PP: E como vocês me explicariam isso em situação real?
> G10 (Aluno 2): Se eu arranjar os livros geografia, história, matemática e português, depois português, matemática, história e geografia seriam duas formas diferentes já que a ordem importa.
> PP: Isso.

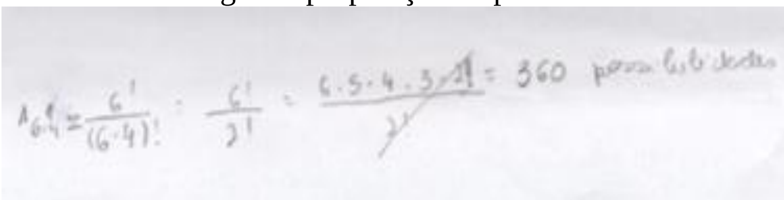
C.O: Notamos que os grupos tentam fazer a distinção do problema e, posteriormente, recorrem à fórmula ou ao Princípio Fundamental da Contagem. No entanto, é comum observar que alguns grupos fizeram um estudo detalhado do problema,

[20] **1º PROBLEMA – Problema formulado pelo grupo G9 na segunda proposição de problemas.**
2º PROBLEMA – Problema formulado pelo grupo G5 na segunda proposição de problemas.
3º PROBLEMA – Problema formulado pelo grupo G8 na segunda proposição de problemas.

descrevendo alguns agrupamentos e trazendo para o contexto real, conseguindo ter clareza sobre a natureza do problema. Percebemos que, quando é possível descrever todas as possibilidades, os alunos recorrem à lista organizada de todas as possibilidades ou ao diagrama de árvore.

Todos os grupos conseguiram resolver o problema, fazendo uso da fórmula, como também ao Princípio Fundamental da Contagem.

Figura 91 – Resolução do grupo 9 referente ao problema 1 do terceiro roteiro de atividades da segunda proposição de problemas.



Fonte: Dados da pesquisa.

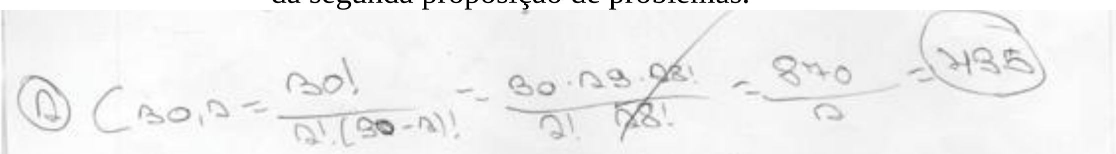
Figura 92 – Resolução do grupo 9 referente ao problema 1 do terceiro roteiro de atividades da segunda proposição de problemas.

Fonte: Dados da pesquisa.

No segundo problema, todos os grupos a resolveram sem precisar da ajuda do professor-pesquisador. Os grupos fizeram a distinção correta do problema, percebendo que se tratava de um problema de combinação simples, visto que a ordem na formação das duplas não gerava um novo agrupamento.

Assim, os grupos solicitaram a presença do professor-pesquisador para que ele certificasse se a sua resolução estava correta. Para resolver o problema, os alunos recorreram à fórmula de combinação simples.

Figura 93 – Resolução do grupo 5 referente ao problema 2 do terceiro roteiro de atividades da segunda proposição de problemas.

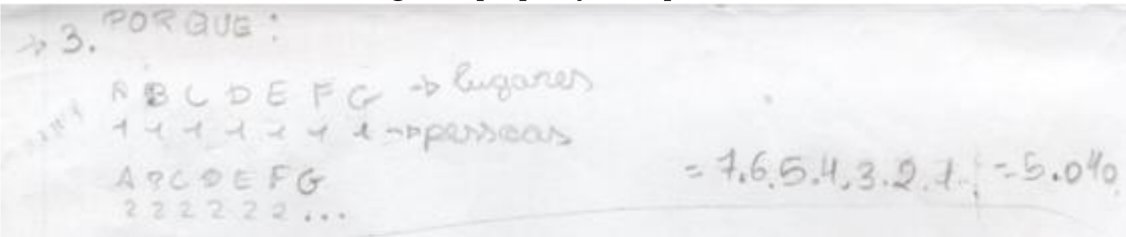


Fonte: Dados da pesquisa.

O último problema abordava o conceito de permutação simples. Os grupos também não tiveram dificuldades para resolver o problema, eles resolveram através da fórmula, como também fizeram uso do Princípio Fundamental da Contagem.

É importante ressaltar o raciocínio de G11 para resolver o problema, observe a figura abaixo:

Figura 94 – Resolução do grupo 11 referente ao problema 1 do terceiro roteiro de atividades da segunda proposição de problemas.



Fonte: Dados da pesquisa.

Nota-se que o grupo apresenta sua compreensão sobre o problema ao fazer representações dos lugares do banco por letras e das pessoas por números. Em seguida observou o número de pessoas que deveriam se acomodar em cada lugar do banco, notando que, para cada etapa, sempre diminuiria uma pessoa em relação à última escolha. Desta forma, G11 notou que ao continuar o raciocínio, sobraria apenas uma pessoa para se acomodar no último lugar do banco, ou seja, pelo Princípio Fundamental da Contagem, obteve a solução do problema.

C.O: Percebemos que, ao longo dos encontros, este grupo teve um crescimento na resolução dos problemas de Combinatória. O fato é que G11 se mostrou um pouco tímido em princípio e com dificuldades para resolver os problemas. No entanto, através de uma abordagem que tem o aluno como ponto de partida na construção do seu conhecimento, possibilitou-se o desenvolvimento da autonomia dos alunos e evidenciou-se que eles são capazes de resolver problemas sozinhos, trazendo novas compreensões e consequentemente tendo uma nova visão da Matemática que estavam aprendendo.

Todos os grupos conseguiram resolver o problema sem precisar da ajuda do professor-pesquisador. Ao fim da aula, fomos à lousa registrar o trabalho realizado pelos grupos. Para fazer isso, conduzimos um diálogo com a turma, para que ela pudesse estar evidenciando o que fizeram. Damos um destaque à resolução apresentada por G11, deixando o grupo à vontade, para explicar a turma a sua compreensão sobre o problema, e, posteriormente, provocamos um debate com a turma com o intuito de chegar a um consenso sobre o que havia sido feito.

5.23 21º Encontro (uma aula) – dia 08/04/2016[21]

Iniciamos a aula solicitando aos alunos que se reunissem em grupos de três alunos e em duplas em alguns casos. Posteriormente, entregamos o roteiro de atividades e os encorajamos para que eles tentassem resolvê-las. Foram formados oito grupos com três alunos e três duplas.

2ª Proposta de proposição de problemas: Quarto roteiro de problemas

1. Amanda tem 5 vestidos, 4 sapatos e 3 bolsas. De quantas maneiras ela pode se arrumar para ir a uma festa?

2. Thays está em uma sorveteria onde são disponibilizados 6 tipos de sabores (morango, chocolate, flocos, pavê, creme com passas e abacaxi).

a) Quantas permutações podem ser feitas com os seis sabores de modo que as bolas fiquem uma abaixo da outra?

b) Levando em consideração que a bola de pavê seja a primeira de baixo, de quantas maneiras diferentes os outros sabores podem permutar?

3. No cinema, existem três cadeiras disponíveis tendo 6 pessoas para se sentar. De quantas maneiras possíveis 3 das 6 pessoas podem ocupar as três cadeiras?

Para iniciar, selecionamos o problema formulado por G10, em que o uso do Princípio Fundamental da Contagem de forma direta possibilitaria a resolução do problema. Os grupos não tiveram dificuldades para resolver o problema, já que ao solicitar a presença do professor-pesquisador, eles evidenciavam o trabalho realizado no problema, esperando nossa resposta sobre o seu desempenho.

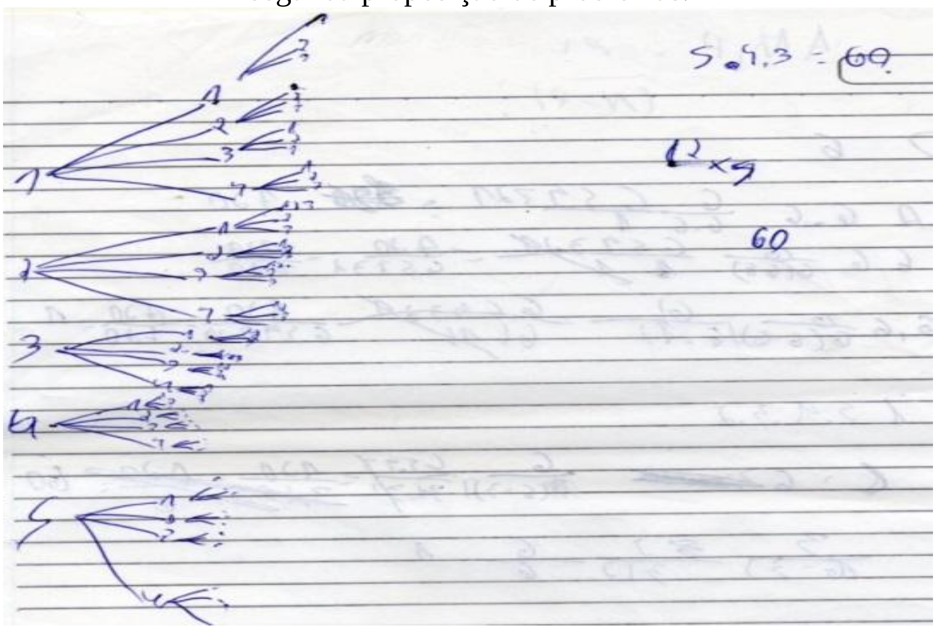
Todos os grupos recorreram ao Princípio Multiplicativo, fazendo uma análise dos números de possibilidades para cada escolha. Contudo, este princípio pode estar associado a uma situação em que possamos estar combinando objetos de uma coleção Z com todos os elementos de uma coleção W.

---

[21] **1º PROBLEMA – Problema formulado pelo grupo G10 na segunda proposição de problemas.**
2º PROBLEMA – Problema formulado pelo grupo G3 na segunda proposição de problemas.
3º PROBLEMA – Problema formulado pelo grupo G1 na segunda proposição de problemas.

Desse modo, G6 fez uso do diagrama de árvore que possibilitou visualizar todas as possibilidades, e consequentemente facilitando a contagem dessas possibilidades, como também trouxe uma nova compreensão para o problema, já que conseguiu observar uma estrutura multiplicativa que deu conta do problema proposto. O grupo descreveu 5 árvores de possibilidades, contendo, em cada uma 12 combinações possíveis, logo, fizeram: $12 \cdot 5 = 60$ possibilidades. Observe a figura a seguir:

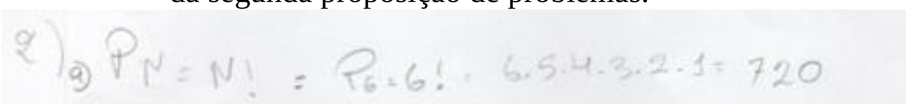
Figura 95 – Resolução do grupo 6 referente ao problema 1 do quarto roteiro de atividades da segunda proposição de problemas.



Fonte: Dados da pesquisa.

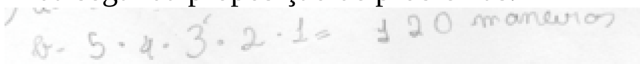
O segundo problema abordava o conceito de permutação simples em seus itens (a) e (b). Todos os grupos tiveram um bom desempenho, apresentando a resolução correta para o problema e solicitavam o professor-pesquisador apenas para justificar o trabalho realizado sobre o problema e questionavam, ao fim, sobre a veracidade de sua resolução. Para resolver o problema, os alunos recorreram à fórmula de permutação simples, como também ao Princípio Multiplicativo.

Figura 96 – Resolução do grupo 11 referente ao problema 2 do terceiro roteiro de atividades da segunda proposição de problemas.



Fonte: Dados da pesquisa.

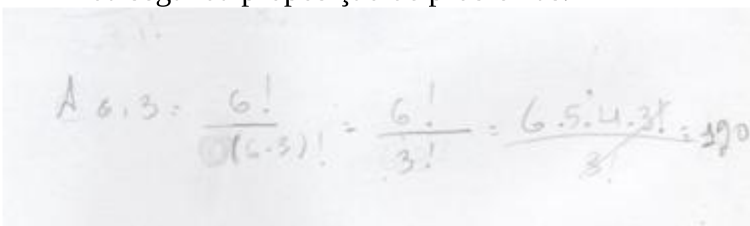
Figura 97 – Resolução do grupo 4 referente ao problema 1 do terceiro roteiro de atividades da segunda proposição de problemas.



Fonte: Dados da pesquisa.

Dos problemas que foram discutidos nesse roteiro de atividades, notamos que os grupos não apresentaram dificuldades para realizar o trabalho sobre o problema. Assim, no último problema, os alunos perceberam que a forma como eram escolhidas as três pessoas para se sentarem geravam um novo agrupamento, ou seja, temos um problema de arranjo simples. Deste modo, os alunos fizeram uso da fórmula, como também do Princípio Fundamental da Contagem para resolver o problema.

Figura 98 – Resolução do grupo 3 referente ao problema 3 do terceiro roteiro de atividades da segunda proposição de problemas.



Fonte: Dados da pesquisa.

Ao fim da aula, fizemos o registro na lousa do trabalho realizado pelos grupos, mas de um modo em que os próprios alunos conduziam o professor quanto ao que deveria escrever ao mesmo tempo em que eles explicavam a resolução da questão.

5.24 Reflexões sobre a intervenção em sala de aula via resolução e proposição de problemas

Ao passar de solucionador para ser um propositor de problemas, notamos a alegria de alguns alunos diante do desafio proposto pelo professor-pesquisador. Além disso o grupo G1 evidencia sua percepção sobre a proposição de problema: “G1(Aluno 1): Professor essa atividade trabalha com a nossa criatividade. PP: Isso”.

De acordo com os PCN (BRASIL, 1997, p.31),

> O ensino de Matemática prestará sua contribuição à medida que forem exploradas metodologias que priorizem a criação de estratégias, a comprovação, a justificativa, a argumentação, o espírito crítico, e favoreçam a **criatividade**, o trabalho coletivo, a iniciativa pessoal e a autonomia do desenvolvimento da confiança na própria capacidade de conhecer e enfrentar desafios (grifo nosso).

Para este documento, a criatividade é um dos objetivos do ensino de Matemática e deve ser implementada nas aulas desta disciplina. Ao trabalhar com a proposição de problemas, estamos propondo um ambiente que exige do aluno a capacidade de se adaptar ao enfrentamento de situações novas, selecionando ideias, fazendo reflexões sobre elas e, consequentemente, propiciando uma nova visão da realidade.

Brandão (2014) destaca, em sua pesquisa, que a atividade de proposição de problemas permitiu perceber como os alunos são criativos, visto que eles conseguiram elaborar problemas do conteúdo que estava sendo pesquisado, trazendo situações cotidianas.

Durante a intervenção, tivemos diversas evidências que comprovam que os alunos buscavam articular o texto escrito com as ideias essenciais dos diferentes tipos de problemas de Combinatória, participando efetivamente do fazer matemática. Para que as ideias fossem expressas com clareza, foi necessário conhecer o contexto real em que uma determinada situação estava inserida, para que, posteriormente, pudesse ser formulado um problema. Entretanto, isso não é uma tarefa fácil, como observou a pesquisadora Silva (2016) em uma pesquisa realizada com uma turma do 5ª ano. A autora notou que, em princípio, os alunos tiveram dificuldades para elaborar problemas que envolvessem algum contexto. No entanto, com o decorrer dos encontros, ela percebeu que os alunos começaram a sinalizar autonomia, segurança, criatividade e interesse na proposição de problemas. Durante a nossa intervenção, notamos que todos esses aspectos estiveram presentes nas formulações de problemas dos alunos.

Contudo, notamos, em nossa pesquisa, que o conhecimento cotidiano dos alunos, possibilitou que eles propusessem problemas de forma bem sucedida. Um exemplo claro disso, foi protagonizado pelo G2 ao ser desafiado a propor um problema com a palavra BARALHO. Observe o diálogo:

> G2: Como vamos elaborar um problema com a palavra baralho?
> PP: Seria importante vocês saberem quantas cartas tem um baralho?
> G2 (Aluno 1): É são de a 10.
> G2 (Aluno 2): Não é de 1 a 9 mais o rei, a dama, o ás e o valete, no caso 13 cartas.
> PP: E quantos naipes?
> G2 (Aluno 3): 4 naipes. No caso quatro vezes treze, cinquenta e duas cartas.

Percebeu-se que, ao estruturar as ideias de forma organizada, é imprescindível que a formulação do problema tenha ligação com a Matemática. A formulação bem sucedida de G2 é fruto de sua experiência cotidiana e da compreensão dos conceitos matemáticos que estavam sendo construídos pelos alunos.

Notamos que, durante a proposição dos problemas, os alunos se mostraram preocupados em acrescentar, ao texto, palavras específicas da Combinatória, como: combinações; arranjar; considerar a ordem; permutações e trocar de posições. Deste modo, nota-se que a compreensão dos problemas de Combinatória tornou-se um ponto chave para a proposição do problema, pois o aluno passou a fazer uso das ideias matemáticas para criar situações novas. Isso ficou evidenciado no problema formulado por G9, em que ele ficou encarregado de propor um problema de arranjo simples. Assim, durante a formulação do problema, o grupo fez questão de apontar a necessidade de arranjar 6 livros, tomados 4 a 4, levando em consideração a ordem.

Nesse sentido, Brandão (2014) notou, em sua pesquisa, que durante a proposição dos problemas os alunos foram organizando os conhecimentos aprendidos; em seus problemas encontrou os conceitos do tópico matemático que estava sendo pesquisado. Para o autor, a proposição de problemas permitiu perceber como os alunos estavam compreendendo o conceito em foco.

A segunda proposição de problemas trabalhada em sala de aula exigiu, da turma, a necessidade de fazer uma correta distinção dos problemas de arranjo e de combinação simples. O professor-pesquisador conduziu um diálogo com G2 segundo o qual o grupo organizou ideias de forma adequada, contribuindo para a produção do texto, de modo que as ideias essenciais de arranjo simples foram aplicadas corretamente, fazendo relações com uma situação cotidiana.

> G2: Professor, no caso teremos que formar duplas?
> PP: Isso. O que vocês estão pensando?
> G2 (Aluno 1): Pensamos em fazer um sorteio com 6 pessoas e formar duplas para disputar um campeonato de vôlei, pode ser?
> PP: Pode sim. Mas é um problema de arranjo ou combinação?
> G2 (Aluno 1): De arranjo, no caso tem que considerar a ordem.
> PP: Isso. E o que vocês pretendem levar em consideração para que a ordem na formação das duplas seja importante?
> G2 (Aluno 2): Então, o primeiro sorteado pode ser o capitão.

Outro elemento evidenciado foi o trabalho colaborativo, em que os alunos se mobilizavam na construção de suas ideias e defendiam, debatendo e refletindo sobre suas produções, chegando, ao fim, a um consenso sobre o que fizeram. O diálogo acima evidencia que a cooperação entre o grupo propiciou o planejamento de ações que fariam parte da formulação do problema. Posteriormente, flagramos um “conflito” entre o grupo G2, que tinha como pauta de discussão o mérito pela proposição do problema.

> G2 (Aluno 1): Quem te deu a ideia do problema foi eu!
> G2 (Aluno 2): Mas quem elaborou foi eu!
> PP: Não está faltando alguma informação para que se tenha um problema de Combinatória?
> G2 (Aluno 2): Está faltando a pergunta para o problema.
> G2 (Aluno 1): Então seria “quantas duplas diferentes poderia formar?”

Ao finalizar a formulação do problema, os alunos se mostraram felizes com o trabalho realizado, percebendo-se assim a relevância do potencial da participação e da aceitação das ideias dos outros. Por outro lado, pudemos extrair do diálogo acima, a mediação do professor-pesquisador, que, por sua vez, questiona as produções dos alunos, fazendo com que eles refletissem sobre elas.

Para que os alunos avançassem na formulação dos problemas, foi preciso a exploração matemática de alguns problemas que abordavam os diferentes conceitos matemáticos referentes à Combinatória. Nesse sentido, Chica (2001, p.15) diz que [...] “é natural que muitos alunos usem o repertório de problemas conhecidos como apoio para realizar a tarefa proposta”. Tivemos diversos diálogos que comprovam que os grupos tomaram como ponto de partida outros problemas para desenvolver suas propostas.

> PP: Por exemplo, você pode estar em uma determinada posição na fila?
> G3 (Aluno 1): Pode ser o primeiro o segundo... No caso seria como o problema da foto?
> PP: Pode ser, tente fazer.
> G6 (Aluno 2): Pode utilizar aquela ideia do problema dos times?
> PP: Pode sim, seria uma boa proposta de problema.

Os diálogos acima evidenciam que os grupos G3 e G6 retomaram ideias de outras propostas que pudessem ajudar na sua formulação. No entanto, percebemos que os grupos apropriaram-se da estrutura matemática do problema, como por exemplo G3, propôs um problema em que fixava um elemento e outros trocavam de posição entre si, como no Problema das fotos.

Na segunda proposta de proposição de problemas, o grupo G1 formulou um problema semelhante ao Problema da bandeira. No entanto, o grupo criou um contexto no qual um personagem fez parte de sua vivência, como também aborda uma nova ideia matemática (arranjo simples), dando originalidade a sua proposta.

Durante o desenvolvimento da primeira proposição de problemas, tínhamos o receio dos alunos recorrerem a formulações que apontam a necessidade de fazer a contagem dos anagramas da palavra sorteada. Fato esse ocorrido durante algumas propostas formuladas pelos grupos. No entanto, nota-se a capacidade inventiva dos alunos em criar um contexto que consegue dar um sentido significativo para o problema, quando se pensa na interpretação dada ao resultado numérico, em termos de funcionamento da sociedade. Observe o item (a) formulado por G11:

1. Ana precisa ir ao banco fazer um saque. Sua senha é composta por 6 letras do alfabeto, sendo elas: LETRAS.

a) Quantas senhas Ana pode obter com essas 6 letras?

Ao fazer a troca das letras da palavra: LETRAS, obtêm-se todos os anagramas desta palavra, que consiste em todas as senhas possíveis que se pode formar. O esgotamento de todas as possibilidades garante que uma das senhas formadas possibilite o acesso à conta do banco. A proposição deste problema evidencia que o grupo utilizou a Combinatória para fazer intervenções em seu cotidiano, percebendo relações entre ideias matemáticas e ao contexto que foi escrito. Assim, a Matemática ganha sentido quando o aluno percebe que a resposta dada a um determinado problema não deve ser vista apenas como um valor numérico, mas que as interpretações explicam os interesses e o funcionamento da sociedade.

Além disso, tivemos algumas proposições que são semelhantes aos problemas que encontramos em alguns livros didáticos. Observe os problemas formulados por G5 e G11 na primeira e segunda proposição de problemas, respectivamente:

- Em uma sala de aula, existem 4 cadeiras e quatro alunos em pé. De quantas formas diferentes Carlos, Carla, Diego e Paulo podem se sentar?
- Amanda tem 5 vestidos, 4 sapatos e 3 bolsas. De quantas maneiras ela pode se arrumar para ir a uma festa?

É preciso ressaltar que as propostas dos problemas citados acima são frutos da criatividade dos alunos. Ao serem colocados em um ambiente que exige sua intervenção, percebe-se que suas descobertas vão fazendo sentido, em meio aos questionamentos e reflexões feitas durante a produção do texto.

Após a formulação dos problemas, partimos para a etapa seguinte, que consistiu na resolução deles. Deste modo, selecionamos, a cada encontro, dois ou três problemas para que os grupos os resolvessem.

Em princípio, foi possível observar o entusiasmo dos grupos ao notar que a turma estava resolvendo problemas que eles formularam. Tivemos diversas evidências que comprovam a manifestação de alegria por parte dos grupos, diante da nova proposta de atividade que seria direcionada aos seus colegas. Observe o discurso de G2: “G2: Professor este problema foi a gente que elaborou? Quero ver quem vai conseguir responder”.

Nesse sentido, Brandão (2014) diz que a proposição de problemas leva o aluno a se sentir como agente ativo do processo de aprendizagem, pois, quando o professor possibilita que o aluno proponha problemas, ele lhe está dando poder. O mesmo autor percebeu o entusiasmo dos alunos com a proposição de problemas, ao trabalhar em sala de aula alguns problemas que eles formularam.

Os grupos propuseram diversos problemas, alguns dos quais necessitavam ser reformulados pelo fato de não se caracterizar por problema que precisa de resposta, já que o enunciado não estava claro. Na primeira proposição de problema, o grupo G7 não conseguiu formular um problema que fosse possível resolver. Tivemos algumas propostas que necessitam de clareza, para uma boa interpretação do solucionador. Destacamos, inicialmente, o problema formulado por G6 na primeira proposição de problemas, em que o enunciado do problema destacava que há dez jogadores de futsal e se questiona quantos times podem ser formados. Ao trazermos essa situação para um contexto real, fica claro, para nós, que um dos cincos jogadores que compõem um time de futsal será o goleiro. Desse modo, para não causar imprecisão na interpretação do problema, seria relevante informar que quaisquer jogadores poderiam atuar como goleiro. É preciso ressaltar que, durante a resolução deste problema os alunos não apresentaram essa possível interpretação do problema.

Por outro lado, o problema formulado por G4 na segunda proposição de problemas, gerou dificuldades na interpretação, necessitando de mais clareza em seu enunciado. Acreditamos que o problema poderia ser reformulado com o intuito de evitar a má interpretação. No entanto, não negamos a proposta formulada pelo G4, e, sim, tentamos compreendê-la junto com o grupo e expusemos à turma a real interpretação do problema. Nota-se que, por mais que os alunos não tenham sido concisos na organização das informações, eles apresentaram um entendimento preciso das ideias que tentaram explicitar no problema.

Notamos um crescimento na resolução de problemas de Combinatória, já que foi comum os alunos solicitarem a presença do professor-pesquisador para justificar o que fizeram de forma consciente quanto à realização do trabalho bem sucedido. É preciso ressaltar que o desempenho dos grupos foi melhorando a cada encontro como, por exemplo, o grupo G11, que apresentou dificuldades, inicialmente, com a metodologia adotada, mas, no decorrer dos encontros, notou-se uma mudança de atitude do grupo, participando efetivamente das atividades, trazendo resoluções que possibilitaram, ao fim da aula, novas discussões e compreensões dos problemas. Um exemplo disso foi a resolução de dois problemas da segunda proposição de problemas, em que G11 observa o comportamento na formação de alguns agrupamentos e consegue ter um insight que leva a uma generalização do problema, chegando ao fim, ao número total de possiblidades. É fato que, em um dos problemas, o grupo fez a distinção incorreta do tipo de agrupamento, no entanto, o processo suscitado pela sua resolução evidencia um aprofundamento na capacidade de abstração do problema. Para os PCN (BRASIL, 1998, p.42),

> [...] é necessário desenvolver habilidades que permitam provar os resultados, testar seus efeitos, comparar diferentes caminhos para obter a solução. Nessa forma de trabalho, a importância da resposta correta cede lugar à importância do processo de resolução.

Deste modo, fica evidente que é necessário dar ênfase ao processo de resolução de um problema ao invés da simples resposta. As ideias inerentes a um problema são adquiridas com compreensão quando se tem um panorama geral dos caminhos adotados, e ao fim, gerando reflexões sobre todo trabalho realizado, seja uma resolução bem sucedida ou não.

Na primeira e segunda proposta de proposição de problemas, foram formulados problemas de arranjo, combinação e permutação simples, além do Princípio Fundamental da Contagem. Notou-se a autonomia dos alunos em resolver diversos problemas sem precisar da confirmação do professor-pesquisador, ao fazer a escolha do caminho que seria útil e ao fim, comparando a reposta com a do outro colega do grupo, chegando assim a múltiplas soluções.

Na resolução dos problemas da segunda proposição, o uso das fórmulas e do Princípio Fundamental da Contagem ocorreu com mais frequência. Notamos que alunos percebiam, em alguns problemas, o quanto seria trabalhoso recorrer a estratégias que permitissem a visualização de todas as possibilidades. No entanto, percebemos que os alunos faziam análise do problema, listando alguns agrupamentos que, ao fim, pudessem levar à compreensão da natureza do problema.

Portanto, ao dar a oportunidade de os alunos serem escritores em sala de aula, notamos que eles ficaram felizes por estarem participando do fazer matemática. Por sua vez percebemos que os alunos tiveram facilidade em interpretar suas proposições de problemas, sendo capazes de relacionar uma ideia matemática com a sua vivência cotidiana. Com isso, de modo geral, não apresentaram dificuldades em resolver problemas que eles mesmos formularam, possibilitando assim um avanço nos diferentes tipos de agrupamentos.

É claro, para nós, que numa abordagem em sala de aula via resolução de problemas, tem-se exploração e proposição de problemas como parte integrante deste processo, visto que é papel do professor manter um ambiente de questionamentos, propondo novos problemas, possibilitando uma exploração matemática, que fomente o potencial matemático dos alunos. Deste modo, durante a nossa intervenção em sala de aula, buscamos fazer mediações levantando problemas mais simples que possibilitassem a necessidade de fazer reflexões, evitando o fornecimento de respostas.

Portanto, o ensino de Matemática centrado na resolução, exploração e proposição de problemas possibilitou aos alunos a oportunidade de participar efetivamente das discussões em sala de aula. A resolução de um problema gerava novos problemas, de modo que se exigia, do aluno, a responsabilidade de contribuir com novos trabalhos, novas reflexões, novas sínteses, como também com a proposição de outros problemas matemáticos, promovendo um ambiente enriquecedor em que os alunos são autores da Matemática em sala de aula. Neste tipo de ambiente, são partilhadas as descobertas comuns, defendem-se tomadas de decisão, e se chega a um consenso sobre todo o trabalho realizado no debate, de modo que propiciou o aprofundamento de novas ideias matemáticas que estavam aprendendo.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

As pesquisas sobre resolução de problemas avançaram significativamente durante os últimos 40 anos ou pouco mais. No entanto, há muito a caminhar para que se tenha uma compreensão do que precisa ser feito em sala de aula, para que ajude a tornar os alunos bons solucionadores de problemas. Diante desse cenário, algumas questões vão tomando forma, e aparecem como direcionamento para futuras pesquisas de resolução de problemas. No livro *Problem solving for the* 21^{st}*century* (Resolução de problemas para o século 21) o pesquisador Jinfa Cai (2010), em um artigo intitulado*: Commentary on Problem Solving Heuristics, Affect, and Discrete Mathematics: A Representational Discussion* (Comentários sobre a Heurística de solução de Problemas, Heurística de Afeto e a Matemática Discreta: uma discussão representacional) aponta a necessidade de procurar respostas para estas questões.

Deste modo, ao chegarmos ao fim, de nossa pesquisa, acreditamos que ela subsidiou reflexões sobre as seguintes questões enfatizadas por Cai (2010):

- A sala de aula que usa uma abordagem de resolução de problemas tem impacto positivo na aprendizagem da matemática dos alunos? Se assim for, qual é a magnitude desse impacto?
- Como a sala de aula que usa essa abordagem impacta a aprendizagem matemática dos estudantes?
- O que realmente acontece dentro da sala de aula quando uma abordagem de resolução de problema é usada efetivamente ou inefetivamente?
- O que as descobertas das pesquisas sugerem sobre as possibilidades do ensino de matemática através da resolução de problema na sala de aula?
- Como os professores podem aprender a ensinar matemática através da resolução de problema?
- Quais são as crenças dos alunos sobre o ensino através da resolução de problema?
- Os estudantes sacrificam habilidades matemáticas básicas se a matemática é ensinada a eles através da resolução de problema? (CAI, 2010, p.256).

Durante a nossa abordagem em sala de aula, percebemos que o uso da metodologia de resolução de problemas possibilitou aos alunos o papel de sujeito principal da aprendizagem, posto que eles expõem suas ideias e reflexões acerca do problema, criando um cenário com sujeitos mais autônomos e entendedores do seu próprio fazer. Nesse sentido, a abordagem dessa metodologia em sala de aula tem um impacto positivo na aprendizagem da Matemática, visto que possibilitou a formação de indivíduos críticos e que fizeram intervenções autônomas, cabendo ao professor mediar o processo de aprendizagem do aluno.

Por sua vez, os alunos experimentaram o prazer pelas suas descobertas a partir dos seus próprios esforços, gerando, ao fim, da aula, novas aprendizagens e consequentemente ganhando motivação para o enfretamento de novos problemas. Este conhecimento que foi autogerado pelo aluno se incorporou aos seus conhecimentos anteriores, expandindo seu potencial matemático.

Além disso, o nosso trabalho possibilitou perceber melhor o cotidiano da sala de aula e a importância dele para a formação do professor, de modo que pudemos vivenciar a nossa proposta didática, permitindo perceber como os alunos apreendem o que está sendo ensinado.

O processo de mediação fez o professor-pesquisador perceber o momento da aprendizagem dos alunos, propondo questões a partir das ideias levantadas por eles, evitando o fornecimento de respostas, evidenciando, aos estudantes, que acreditamos em seus potenciais.

Para que isso fosse possível, foi necessário incorporar a nossa proposta didática, ter domínio teórico dela e pensar em problemas que abordassem os conceitos matemáticos que foram introduzidos durante as aulas. Tais ideias possibilitaram que o professor-pesquisador aprendesse com a experiência vivenciada.

É preciso ressaltar que uma abordagem em sala de aula – apoiada na metodologia da resolução de problemas – não sacrifica habilidades matemáticas básicas aos alunos, pois o que realmente acontece é que se exige um número maior de aulas, entretanto, nota-se um retorno mais duradouro em relação à aquisição e à compreensão de ideias matemáticas.

No início do trabalho nos propusemos a responder o seguinte problema de pesquisa: Como uma abordagem em sala de aula via Resolução, Exploração e Proposição de problemas pode contribuir com o ensino-aprendizagem de Análise Combinatória?

Para responder ao problema de pesquisa apresentado, vamos buscar elementos presentes na nossa intervenção, que estimamos essenciais em uma abordagem diferenciada em sala de aula. Via Resolução, Exploração e Proposição de problemas, foi possível acompanhar o crescimento dos alunos, onde eles criaram suas próprias ideias para resolver um problema, e, consequentemente, encontraram múltiplas estratégias de resolução do problema; posteriormente, justificaram suas resoluções, participando efetivamente da construção do seu conhecimento. Além disso, os alunos se engajaram em atividades de exploração matemática que possibilitaram a apreensão de ideias essenciais de Análise Combinatória, como também assumiram o papel de investigadores em sala de aula, fazendo generalizações, formulando novos problemas e, em seguida, os resolvendo.

Ao longo dos encontros, notamos que, aos poucos, os alunos foram adquirindo habilidades para serem bons solucionadores de problemas. Observamos que se trata de um processo gradual que vai se desenvolvendo timidamente em alguns alunos, enquanto outros já possuem uma capacidade maior de investigador e encaram uma situação-problema com muita perspicácia.

Percebemos que, durante a exploração do problema, as ideias essenciais foram tomando forma e fazendo sentido para o aluno, diante do processo de resolução dos problemas, chegando a uma resolução bem sucedida ou não. O fato é que o surgimento de novos problemas levou à discussão de diversas ideias, ampliando uma gama de estratégias que foram utilizadas no problema inicial, que deu suporte para a solução dos problemas seguintes.

Nesse sentido, percebemos que a resolução do problema inicial possibilitou, aos alunos, validar suas soluções via resolução e exploração de problemas. Notamos que os alunos fizeram relações, buscando dar significado às suas próprias ideias, desenvolvendo sua compreensão a partir do momento que refletiram sobre o que fizeram.

Na nossa intervenção em sala de aula, trabalhamos com a metodologia de Resolução de Problemas, no entanto, o aprofundamento dado a esta pesquisa visou a ir além da resolução do problema, ao trabalhar com a Exploração e a Proposição de problemas, dando uma atenção maior à temática.

Deste modo, foram desenvolvidas duas propostas de Proposição de problemas em sala de aula. Na primeira proposta, os alunos foram desafiados a formular um problema de Combinatória a partir de uma palavra. Notamos que os alunos conseguiram perceber a relação das palavras com as ideias essenciais de Análise Combinatória. Assim, percebe-se que os alunos foram capazes de fazer relações de uma ideia matemática com diferentes contextos. Por consequência, o desenvolvimento desta atividade fomentou a aquisição de várias ideias que estavam implícitas no problema formulado, propiciando, ao aluno, a percepção das relações entre a Matemática e sua realidade social.

A segunda proposição de problemas forneceu *insights* sobre como os alunos estavam compreendendo as ideias essenciais de permutação, arranjo e combinação simples. Notou-se que houve um aprofundamento das ideias matemáticas envolvidas, ao perceber a relevância de se articular a estrutura do texto escrito com a natureza dos problemas de Análise Combinatória.

Ao dar a oportunidade de os alunos resolverem problemas que eles mesmos formularam, possibilitamos que eles se engajassem em uma atividade que aumenta suas percepções e ideias sobre a Matemática que se estava aprendendo em sala de aula. Eles também foram capazes de dar significado a esta disciplina. Notamos que os alunos tiveram facilidade em resolver suas próprias formulações, já que compreenderam o enunciado do problema com lucidez, e, posteriormente, criaram estratégias que os levaram a uma resolução bem sucedida.

Notou-se uma dose de imaginação e de criatividade dos grupos em suas proposições de problemas, visto que foi comum citarem, no enunciado do problema, o nome de pessoas que fazem parte de sua convivência social, criando contextos que são inerentes à sua realidade e comunicaram ideias que permitiram fazer relações entre os afazeres cotidianos e a aplicação de conceitos matemáticos que são objetos de estudo da Análise Combinatória.

É preciso salientar que, nesta pesquisa, a proposição de problemas aconteceu **antes**, **durante** a exploração do problema e **depois** da solução dele.

Deste modo, acrescentamos, ainda, que a proposição de problemas tanto ajuda no trabalho com a resolução de problemas, como também com a exploração deles, visto que a última acontece em um ambiente conduzido tanto com a resolução de problemas, como também com a proposição de problemas.

Com isso, percebe-se que a proposição de problemas deve ocupar um lugar de destaque nas salas de aula. Assim, é preciso avançar nas pesquisas de proposições de problemas e, neste sentido, Jurado (2016), em um artigo intitulado: *Problem Posing: An Overview for Further Progress* (A proposição de problemas como uma visão geral para o progresso do futuro), destaca que a proposição e a resolução de problemas são dois aspectos essenciais da atividade matemática, contudo, os pesquisadores em Educação Matemática não têm enfatizado sua atenção sobre a proposição de problemas da mesma forma que sobre a resolução de problemas. Acrescentamos, também, que o mesmo acontece com a exploração de problemas.

Por outro lado, um número importante de pesquisadores em Educação Matemática, em nível mundial, tem dado importância as pesquisas de proposição de problemas em sala de aula. De acordo com Jurado (2016), esta visão geral, embora incompleta, nos permite ver uma parte do que a experiência de proposição de problemas envolve a importância desta na aprendizagem matemática dos estudantes. Uma tarefa importante é continuar a refletir sobre as questões levantadas por Kilpatrick (1987), bem como sobre as que surgem nas diferentes pesquisas acima mencionadas. Para continuar a progredir na pesquisa sobre proposição de problemas e contribuir para uma maior consolidação desta linha de pesquisa, será importante que todos os educadores matemáticos prestem mais atenção à proposição de problemas, busquem integrar abordagens e resultados e promovam trabalhos conjuntos e interdisciplinares.

Singer et al. (2013) apud Jurado (2016), voltando à proposta de Kilpatrick (1987), dizem: Proposição de problemas é um assunto antigo. O que é novo é a consciência de que a proposição de problemas precisa permear os sistemas educacionais em todo mundo, tanto como um meio de ensino (...) quanto como um objeto de ensino (...) com metas importantes em situações da vida real.

Assim, a notabilidade da proposição de problemas no desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos merece destaque, já que a proposição de problemas traz uma compreensão para o problema, que a resolução não traz, visto que esta possibilita uma reorganização do pensamento, ao passo que a resolução de problemas está introduzida na proposição de problemas.

Durante a resolução dos problemas, notamos que os grupos foram criando identidade com algumas estratégias, implementando-as sempre que percebiam que era conveniente. Deste modo, notou-se o desenvolvimento do raciocínio combinatório, em que os alunos decidiam sobre a melhor forma de iniciar a resolução de um problema, listando todas as possibilidades de forma organizada. Para se fazer isso, tomaram-se alguns elementos de referência que contribuíram para o levantamento de todas as possibilidades e, posteriormente, para efetuar a sua contagem. A árvore de possibilidades também esteve bem presente nas resoluções dos problemas, ambas as estratégias desempenharam um papel significativo na capacidade de abstração dos alunos, visto que, ao fazer a visualização de algumas possibilidades, efetivou-se o levantamento de estruturas multiplicativas ou aditivas que deram conta do problema.

Além disso, o trabalho em sala de aula perspectivado na Resolução e Exploração de problemas abriu possibilidades para que os alunos recorressem a uma estratégia diferente daquelas que citam as pesquisas, tal como retomar o problema anterior para chegar à resolução de um novo problema.

É fato que os alunos apresentaram dificuldades para diferenciar a natureza de alguns problemas de arranjo e de combinação simples. Contudo, notou-se uma postura investigativa, ao adotar procedimentos que pudessem corroborar a distinção da natureza do problema como, por exemplo, listar alguns agrupamentos e ver se a mudança de ordem dos elementos gera um novo agrupamento ou não. Assim, de modo geral, as fórmulas passaram a ser utilizadas com compreensão.

Notamos que, inicialmente, os alunos tiveram dificuldades com a metodologia utilizada em sala de aula. Assim, ao dar a oportunidade de eles serem agentes ativos na construção de sua aprendizagem, percebemos que houve uma certa confusão sobre o tipo de aula que os alunos estavam habituados. Nesta perspectiva, o ensino é centrado no aluno, pois é exigido dele que assuma uma nova postura em sala de aula.

Deste modo, o conhecimento existente dos alunos foi o ponto de partida para a construção de novas ideias matemáticas. Para que isso fosse possível, os alunos tiveram que participar efetivamente das atividades discutidas em sala de aula, começando com a leitura e a interpretação do problema e em seguida, fazer reflexões e decidir sobre que caminho deveria ser adotado para resolver o problema e, por fim, trazer justificativas sobre o que fizeram, demandou dos alunos responsabilidades que, habitualmente, não estavam acostumados nas aulas de Matemática.

Por outro lado, notou-se que a autoconfiança e a autoestima foram sendo fortalecidas à medida que os alunos foram melhorando o desempenho nas atividades propostas. Percebemos o crescimento de alguns alunos que apresentaram dificuldades nos primeiros encontros, e que, com o passar do tempo, lograram um excelente desempenho em atividades posteriores, apresentando muito entusiasmo, diante de um trabalho bem sucedido.

A mediação professor-grupo, professor-aluno e professor-turma subsidiaram diversas discussões e reflexões em sala de aula, o que fomentou novas compreensões acerca das ideias essenciais envolvidas no problema. É preciso ressaltar que o trabalho colaborativo entre os alunos dos grupos gerou diversas descobertas, pois, em alguns diálogos, viu-se que elas promoveram avanços no raciocínio dos colegas de grupo que, posteriormente, apresentavam uma nova reflexão, possibilitando, ao fim, condições de chegar à resolução bem sucedida do problema.

Ao pesquisar nossa própria prática docente, acreditamos ter contribuído para o aperfeiçoamento da nossa identidade profissional, visto que ficamos atentos sobre como nossas ações surtiram efeitos positivos na aprendizagem dos alunos. Deste modo, esta pesquisa propiciou experiências que serviram para a nossa formação continuada, ao possibilitar reflexões, sobre como o uso da metodologia de resolução de problemas surtiu efeitos positivos no processo de ensino-aprendizagem dos alunos em sala de aula.

Além disso, as pesquisas desenvolvidas no cotidiano de sala de aula conseguiram dar forma aos conteúdos que estão sendo trabalhados. Com isso, a participação do professor que acumula atribuições de profissional da educação e de pesquisador da educação matemática nas discussões que envolvem ensino-aprendizagem, consegue dar uma nova compreensão à matemática que é ensinada aos alunos.

Assim, o nosso trabalho trouxe contribuições para a formação dos professores que ensinam Matemática, visto que os resultados podem fazer com que os docentes reflitam sobre suas práticas, na medida em que é promovida uma substancial melhora das ações didáticas em sala de aula. As experiências que foram vivenciadas em sala de aula proporcionaram um diálogo entre a teoria e a prática, trazendo reflexões sobre como os alunos mobilizam seus conhecimentos no estudo da Combinatória, a partir de uma abordagem inovadora do tema apoiada na metodologia de resolução de problemas.

Durante a pesquisa, algumas ideias foram tomando forma e apontamos a possibilidade de direcionamentos para futuras pesquisas de Análise Combinatória. A primeira, surgiu a partir das entrevistas com os professores, que explicitaram a necessidade de se trabalhar – de forma mais efetiva – alguns dos conceitos deste tópico no Ensino Fundamental. Assim, acreditamos que pode-se dar um aprofundamento a esta entrevista, com professores do Ensino Fundamental, objetivando conhecer as suas dificuldades para ministrar aulas sobre os conceitos iniciais de Análise Combinatória, e, posteriormente, trazer propostas que possam ajudar a superar estas dificuldades.

A última, é fruto de nossa intervenção em sala de aula. Em um dos encontros, trabalhamos com um jogo que possibilitou a formação da ideia essencial de arranjo simples. Cremos que se pode dar um aprofundamento a este jogo mediante a elaboração de propostas de atividades que explorem outros conceitos de Combinatória; aliados a este, deve-se pesquisar outros jogos que consigam dar conta dos principais conceitos deste tópico, e que, ao fim, instigue os alunos ao lhe serem propostos problemas a partir dos jogos, como também na formulação de novos problemas.

Finalizamos este trabalho convictos de que a pesquisa possibilitou, aos alunos, participar efetivamente do "fazer matemática". Esta afirmação tem como base de sustentação a nossa intervenção em sala de aula, já que os alunos resolveram, exploraram e formularam novos problemas. Para se fazer isso, foram necessárias algumas ações como investigar e justificar suas descobertas para verificar a veracidade delas e chegar, ao fim, à construção de um novo conhecimento que promoveu a formação de indivíduos mais autônomos, criativos e agentes ativos de suas aprendizagens.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, A. L. de. **Ensinando e aprendendo análise combinatória com ênfase na comunicação matemática:** um estudo de caso com o 2º ano do ensino médio. 2010. 166p.Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2010.

ANDRADE, Silvanio. **Ensino-aprendizagem de matemática via exploração de problemas e o uso do laboratório de ensino de matemática**. Universidade Estadual da Paraíba. Anais: XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática – CIAEM. Recife,[S.n.]:2011.

__________. **Ensino-aprendizagem de matemática via resolução, exploração, codificação e descodicação de problemas e a multicontextualidade da sala de aula**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). UNESP, Rio Claro, 1998.

BOAVIDA, A., Paiva, A., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). **A experiência Matemática no Ensino Básico** – Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico. Lisboa: Ministério da Educação – Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.

BRANDÃO, Jefferson Dagmar Pessoa. **Ensino aprendizagem de função através da resolução de problemas e representações múltiplas.** Dissertação (mestrado profissional em ensino de ciências e educação matemática). Universidade Estadual da Paraíba – UEPB. 192p, 2014.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: matemática: 1º e 2º ciclos. Brasília, DF: MEC, 1997.

__________. Ministério da Educação e dos Desportos. Secretaria do Ensino Fundamental **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática, 3º e 4º ciclos (5º a 8º séries) – Brasília: MEC/SEF, 1998.

__________. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: ensino médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília, DF: MEC, 2002.

__________. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**. Brasília, DF: MEC, 2006.

CAI, Jinfa; LESTER, Frank . **Por que o ensino com resolução de problemas é importante para a aprendizagem do aluno?** Tradução de Antonio Sergio Abrahão Monteiro Bastos. ISSN Impresso (0104-9739) – ISSN Eletrônico (2176-2988). 2003. Disponível em: <http://www.nctm.org/news/content.aspx?id=25713>. Acesso em: 20 Jan. 2016.

CHICA, C. H. Por que formular problemas? In: SMOLE, K. C. S.; DINIZ, M. I. S. V. **Ler, escrever e resolver problemas:** habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001, p.151-173

DANTE, L.R. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática.** São Paulo: Ática,1989.

D'AMBRÓSIO, U.Prefácio In: BORBA, M.; ARAÚJO, J.L. (orgs.) **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática,** Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

DOSSEY, J.A. The Math for Our Time. In: Kenney, M.J.; Hirsch, C.R. **Discrete Mathematics across the Curriculum, K-12**: 1991, Yearbook. NCTM, 1-9, 1991.

ENGLISH, L., SRIRAMAN, B**. Problem solving heuristics, Affect and discrete mathematics: a representational discussion**. In: B. Sriraman; L. English (eds). Problem solving for the 21st century. Theories of Mathematics educacion: seeking new frontiers. Berlin/Heidelberg: Springer, 2010.

FILHO, B.B.; SILVA, J. **Matemática participação e contexto.** São Paulo: FTD, 2008.

GIOVANNI, J.R.; BONJORNO, J.R. **Matemática completa**. 2ª ed, São Paulo: FTD, 2005.

LANKSHEAR, C.; KNOBEL, M. **Pesquisa pedagógica: do projeto à implementação**. Porto Alegre: Artmed, 2008.

LILJEDAHL, Peter et al. **Problem solvin in Mathematics education.** DOI 10.1007/978-3-319-40730-2. ISBN 978-3-319-40729-6. Hamburg, Germany, University of Hamburg, 2016.

LIMA, Elon; CARVALHO, Paulo; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto. **Temas e problemas elementares**. Sociedade Brasileira de Matemática – SBM, 12 ed. Rio de Janeiro, 2006.

__________. **A matemática do ensino médio – volume 2**. Sociedade Brasileira de Matemática – SBM, 6 ed. Rio de Janeiro, 2006.

MORGADO, A. C. O.; CARVALHO, J.B.P.; CARVALHO, P.C.P.; FENANDEZ, P. **Análise Combinatória e Probabilidade**. Rio de Janeiro: IMPA, 1991.

ONUCHIC, L. R. **Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas**. In: BICUDO, M. A. V. (Org.) Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999. cap.12, p.199-218.

ONUCHIC, L. de la R.; ALLEVATO, N. S. G. **Novas reflexões sobre o ensino – aprendizagem de Matemática através da Resolução de problemas**. in: BORBA, M. de C.; BICUDO, M. A. V. (org.). Educação Matemática: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004.

__________. **Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas**. In: BICUDO, M._A. V.; BORBA, M. C. (Org.) Educação Matemática: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2005. p.212-231.

PAIS, Luiz Carlos. **Ensinar e aprender Matemática**. Belo Horizonte: autêntica editora, 2013.

PESSOA, C. **Quem dança com quem: o desenvolvimento do Raciocínio Combinatório do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio.** Tese. Pós-graduação em Educação da UFPE. Recife: UFPE, 2009.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas. Um novo aspecto do método matemático**. Rio de Janeiro: interciência, 1995, 196p.

SCHOENFELD, A. H. (2008). **Problem Solving in The United States, 1970-2008: Research and Theory, Practice and Politics**. In G. Toerner, A. H. Schoenfeld, & K. Reiss (Eds.). Problem Solving Around the World – Summing up the State of the Art. Special issue of the Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik: Issue 1, 2008.

SHROEDER, T. L.; LESTER JR., F. K. Developing understanding in mathematics via problem solving. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Ed.). **New directions for elementar school mathematics**. Reston: NCTM, 1989. p.31-32.

SILVA, A.P. **Ensino e Aprendizagem de Análise Combinatória Através da Resolução de Problemas: um olhar para a sala de aula.** (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). UEPB, Campina Grande, Paraíba, 2013.

SILVA, Sheila Valéria Pereira da. **Ideias/significados da multiplicação e divisão: o processo de aprendizagem via resolução, exploração e proposição de problemas por alunos do 5º ano do ensino fundamental.** (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). UEPB, Campina Grande, Paraíba, 2016.

SILVER, Edward A. **On mathematical problem posing**. For the Learning of Mathematics, Edmonton, v. 14, p.19-28, fev. 1994.

SOUZA, A.C.P. de **Análise Combinatória no Ensino Médio apoiada na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas**, 2010**.** 343 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) UNESP – Rio Claro.

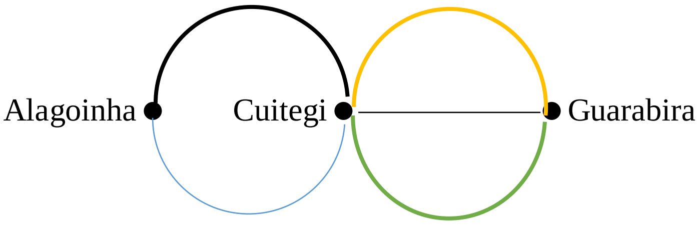
VAN DE WALLE, J.A. **Matemática no ensino fundamental:** formação de professores e aplicação na sala de aula. Tradução: Paulo H. Colenese. 6. Ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VARGAS, A.F. **O Ensino-aprendizagem de Análise Combinatória através da Resolução de Problemas com Atividades Investigativas.** Dissertação de Mestrado. PUC-MG – Belo Horizonte, 2009.

APÊNDICE A – PROPOSTA DE ATIVIDADES PARA TRABALHAR ANÁLISE COMBINATÓRIA EM SALA DE AULA VIA RESOLUÇÃO E EXPLORAÇÃO DE PROBLEMAS

Atividade 1 – Problema das cidades:

Daniela mora na cidade de Alagoinha-PB. Existem duas linhas de ônibus que liga a cidade de Alagoinha- PB à Cuitegi-PB e três linhas de ônibus que liga cidade de Cuitegi-PB e Guarabira-PB.



a) De quantos modos diferentes Daniela pode ir de Alagoinha-PB à Guarabira-PB, passando por Cuitegi-PB?
b) De quantos modos ela pode fazer o trajeto de ida e volta de Alagoinha-PB a Guarabira-PB, passando por Cuitegi-PB, sem passar na linha usada na ida?

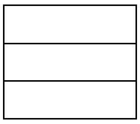
Atividade 2 – Problema dos códigos:

Gerlane dispõe dos algarismos 1, 2, 3 e 4 e de uma moeda. Pretende fazer códigos compostos inicialmente por um número de dois algarismos, seguido por uma das faces da moeda. Quantos códigos diferentes ela pode criar?

a) Se os códigos fossem criados com algarismos distintos seguido de uma das faces da moeda, quantas são as possibilidades?
b) Se os códigos fossem criados com números pares de dois algarismos seguido de uma das faces da moeda, quantas são as possibilidades?
c) Se os códigos fossem criados com números de quatro algarismos seguido de uma das faces da moeda, quantas são as possibilidades?

Atividade 3 – Problema da bandeira:

Maria da Penha pretende pintar a bandeira a seguir de modo que as faixas adjacentes não a possuam a mesma cor. Sabendo que ela dispõe das cores: azul, preto e laranja, de quantas maneiras possíveis ela pode pintar a bandeira?



a) No caso das faixas adjacentes poderem possuir a mesma. De quantas maneiras possíveis a bandeira poderá ser pintada?

b) Se Maria da Penha dispõe, agora, das cores azul, preto, laranja e vermelho e pode pintar as faixas adjacentes. De quantas maneiras possíveis ela pode pintar a bandeira?

Atividade 4 – Problema das quatro bolas

Uma urna contém quatro bolas de cores diferentes: branca, verde, azul e preta. Quantas são as maneiras diferentes de retirar, sucessivamente, 2 bolas dessa urna, sem reposição das bolas retiradas?

a) Quantas são as maneiras diferentes de retirar, sucessivamente, 2 bolas dessa urna, repondo cada bola antes da retirada da próxima?

b) Se acrescentarmos uma bola de cor cinza, quantas são possibilidades de retirar de 2 bolas sem reposição? E 3 bolas sem reposição?

Atividade 5 – Problema do Sportingbet

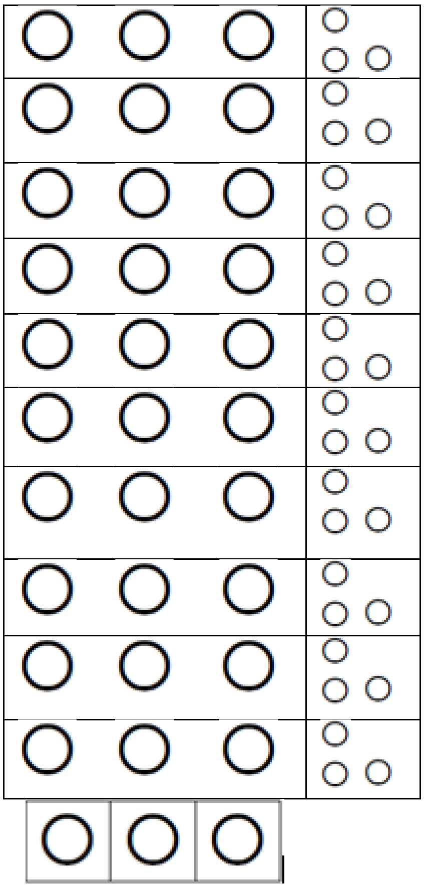
João pretende fazer uma aposta no Sportingbet que é uma grande casa de jogos online, que permite realizar apostas em eventos esportivos. João vai fazer uma aposta em dois jogos de futebol da série A do campeonato brasileiro, que são: Flamengo X Fluminense e Palmeiras X Corinthians. Para ganhar ele precisa acertar os possíveis resultados dos dois jogos, ou seja, quem vai ser o vencedor ou se vai ocorrer empate. No entanto, ele quer saber todas as possíveis combinações de resultados de dois jogos, para ver se é vantajoso fazer todas as apostas possíveis.

a) Quais e quantas as possíveis duplas de resultados que poderia ser feita com esses dois jogos?

b) Se acrescentássemos o jogo Vasco X Botafogo, quantas são as possíveis apostas que podem ser feitas com a combinação desses três jogos?

Atividade 6– Problema jogo Mastermind

O Mastermind também chamado de “senha” foi um jogo criado em 1970 pelo israelita Mordecai Meirowitz. No jogo, existem dois marcadores: um preto e outro branco, onde o branco significa que há uma cor certa mas no lugar errado, o preto significa que há uma cor certa no lugar certo. O desafiado vai tentando adivinhar a senha no tabuleiro como o da figura abaixo, se guiando pelos marcadores preto e branco. Ozildo vai jogar e terá 10 chances de descobrir a senha desejada. Quantas senhas distintas ele pode escolher, sabendo que a senha é representada por três cores distintas, levando em consideração que ele dispõe das seguintes cores: vermelho, azul, preto e laranja?



a) A primeira jogada é aleatória?

b) Se no resultado final da primeira jogada, tiver uma cor no lugar certo e duas fora da posição, que estratégia pode ser adotada para segunda jogada?

c) Se tivéssemos três cores distintas (vermelho, azul e preto) para dispor no tabuleiro, quantas formas diferentes de se fazer isso?

d) Se fosse cinco cores distintas (vermelho, azul, laranja branco e preto), na qual tínhamos que escolher três cores distintas para dispor no tabuleiro, quantas formas diferentes de se fazer isso?

e) Nesse caso se tivéssemos duas cores na posição correta e uma das cores que não faz parte da senha, qual estratégia deve ser adotada na próxima jogada?

Atividade 7– Problema do carro e moto

Adriano, Ivam, Bruno e Erivam foram os funcionários que mais se destacaram em uma empresa durante o ano de 2015. Com isso o dono da empresa resolveu sortear entre os quatro, um carro no valor de R$ 50 000,00 para o primeiro sorteado e uma moto no valor de R$ 10 000,00 para o segundo sorteado. Quantas são as possíveis duplas de ganhadores?

a) A ordem dos sorteados é importante? Explique.

b) Se fossem sorteados dois carros que têm o mesmo valor, quantas possíveis duplas de ganhadores poderíamos formar?

c) Nesse caso a ordem dos sorteados é importante? Explique.

Atividade 8 – Problema dos anagramas

Qual o número de anagramas da palavra GARI?

a) Quantos anagramas começam com a letra A?

b) Quantos anagramas terminam por consoante?

c) Quantos anagramas começam por I terminam por R?

Atividade 9 – Problema da foto

Dayana, Manoel, Luciana e Paulo pretende tirar uma foto juntos. No entanto, Dayana e Manoel é um casal de namorados e tem que sair juntos na foto.

a) De quantas maneiras diferentes eles podem tirar uma foto juntos?

b) Se Dayana, Manoel, Luciana e Paulo pretende tirar uma foto em um banco com quatro lugares, no entanto, Paulo quer ficar sentado no segundo lugar. De quantas maneiras eles podem se arrumar para tirar uma foto, levando em consideração essa condição?

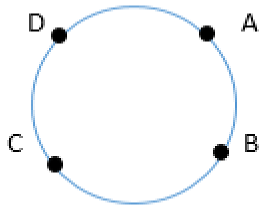
	Paulo		

Atividade 10 – Problemas com letras repetidas

Qual o número de anagramas da palavra PAPA?

Atividade 11 – Problema da circunferência.

Em uma circunferência foram destacados os seguintes pontos, A, B, C e D. Assim quantos segmentos podemos traçar com uma extremidade em dois desses quatro pontos?



a) Quantos triângulos convexos podem ser construídos com vértices nesses pontos?

b) Quantos quadriláteros convexos podem ser construídos com vértices nesses pontos?

ANEXO A – PROBLEMAS FORMULADOS PELOS GRUPOS NA PRIMEIRA PROPOSTA DE PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS E SELECIONADOS PARA OS ENCONTROS SEGUINTES

1ª Proposição de problemas: Primeiro roteiro de problemas.

1. Se Diego tiver ao seu dispor os números 1, 2 e 3 e as letras A, B e C. Quantas as possíveis senhas ele pode obter, sabendo que a senha deve ser composta inicialmente por 2 números distintos seguido de 2 letras diferentes?

2. Um baralho completo é composto por quatro naipes, sendo cada um com trezes cartas de: ouro, copas, espadas e paus.

a) Quais as possibilidades de tirar dois reis?

b) Quantas possibilidades de tirar 2 cartas?

1ª Proposta de proposição de problemas: Segundo roteiro de problemas.

1. Thays está na fila de um banco, onde contém 7 pessoas, e Thays está na 1ª posição da fila. De quantas maneiras as pessoas que estão atrás de Thays pode trocar de posição?

2. Beatriz, Juliana, Marcela, Luiz, Afrânio e Thiago colocaram seus nomes em papéis, fazendo assim um sorteio para formar 3 duplas. Quantas formas diferentes de duplas podem ser sorteadas?

1ª Proposta de proposição de problemas: Terceiro roteiro de problemas.

1. Ana precisa ir ao banco fazer um saque. Sua senha é composta por 6 letras do alfabeto, sendo elas: LETRAS.

a) Quantas senhas Ana pode obter com essas 6 letras?

b) Quantos anagramas começam com a letra S e terminam com T?

c) Quantos anagramas terminam com a letra L?

2. Quantos números entre 2000 e 5000 podemos formar usando apenas 1, 4, 5, 7 e 9?

1ª Proposta de proposição de problemas: Quarto roteiro de problemas.

1. Após ter ganhado um sorteio Paulo, poderá decidir morar entre as seguintes cidades da Paraíba: Guarabira, Mulungu, Alagoinha e Cuitegi. Contudo, ele pode escolher 2 cidades. Quantas são as possibilidades de Paulo escolher 2 cidades para morar?

a) Quantas são as possibilidades de Paulo escolher 3 cidades para morar, de acordo com as suas necessidades?

b) Quantas são as possibilidades de Paulo residir primeiramente em Mulungu e escolher 2 das outras 3 cidades para passar o final de semana?

2. Em uma sala de aula, o professor fez uma dinâmica, no qual os alunos terão que criar palavras sem repetir as letras utilizando a palavra LIVRO.

a) Quantos anagramas tem a palavra LIVRO?

b) Quantas são as possibilidades da letra L ficar no final da palavra?

1ª Proposta de proposição de problemas: Quinto roteiro de problemas.

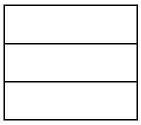
1. Haverá um jogo de futsal e são 5 jogadores em quadra e 5 no banco de reservas. Quais as opções diferentes de formar um time?

2. Em uma sala de aula existem 4 cadeiras e 4 alunos em pé. De quantas formas diferente Carlos, Carla, Diego e Paulo podem se sentar?

ANEXO B – PROBLEMAS FORMULADOS PELOS GRUPOS NA SEGUNDA PROPOSTA DE PROPOSIÇÃO DE PROBLEMAS E SELECIONADOS PARA OS ENCONTROS SEGUINTES

2ª Proposta de proposição de problemas: Primero roteiro de problemas.

1. Em um campeonato de vôlei de praia, são inscritas 6 pessoas para a formação de três times. O esquema será feito por meio de sorteios sendo o primeiro sorteado o capitão e o segundo o seu parceiro. Quantas duplas podem ser formadas?
2. Numa classe tem 30 alunos, quantas possíveis duplas podemos formar para disputar um circuito de vôlei?
3. João vai fazer um trabalho do professor de arte "Ciço" e decidiu escolher seis cores: azul, amarelo, verde, branco, rosa e lilás, para pintar uma faixa com três cores distintas. Sabendo disso analise o número de cores e indique o número de combinações que se pode fazer para pintar as três faixas.



2ª Proposta de proposição de problemas: Segundo roteiro de atividades.

1. Diego, Carlos, Paulo, Pedro e João estão na fila de um banco. Sabendo que Diego é o primeiro da fila. De quantas maneiras possíveis eles podem mudar de posição na fila?
2. Lety esqueceu sua senha de três dígitos distintos, mas sabe que os algarismos que compõe a senha é de 1 a 8. Quantas possibilidades possíveis para ela acertar a senha correta?
3. Em uma sala de aula tem 15 alunos e quero formar grupos de 3. De quantas maneiras podemos fazer isso?

2ª Proposta de proposição de problemas: Terceiro roteiro de problemas.

1. Existem 6 livros de matérias diferentes. Agrupando 4 um abaixo do outro, quantas são as formas possíveis de arranjar os 4 livros, considerando a ordem?
2. Numa viagem da escola A.C.S temos 30 alunos. Foram reservadas uma dupla para ir no melhor conforto. Quantas duplas diferentes podemos formar para ir no melhor conforto?
3. O grupo de 7 pessoas estão no banco de 7 lugares. Quantas formas diferentes essas 7 pessoas podem se sentar?

2ª Proposta de proposição de problemas: Quarto roteiro de problemas.

1. Amanda tem 5 vestidos, 4 sapatos e 3 bolsas. De quantas maneiras ela pode se arrumar para ir a uma festa?

2. Thays está em uma sorveteria onde são disponibilizados 6 tipos de sabores (morango, chocolate, flocos, pavê, creme com passas e abacaxi).

a) Quantas permutações podem ser feitas com os seis sabores de modo que as bolas fiquem uma abaixo da outra?

b) Levando em consideração que a bola de pavê seja a primeira de baixo, de quantas maneiras diferentes os outros sabores podem permutar?

3. No cinema, existem três cadeiras disponíveis tendo 6 pessoas para se sentar. De quantas maneiras possíveis 3 das 6 pessoas podem ocupar as três cadeiras?

ANEXO C – TRANSCRIÇÕES DAS ENTREVISTAS COM OS PROFESSORES

a) Professor A

Pesquisador: Na sua opinião, qual a importância de trabalhar com os conceitos iniciais de Análise Combinatória no Ensino Fundamental? Professor A: “É importante porque os alunos deste nível...de ensino, principalmente no Fundamental II, já se deparam com situações que envolvem a Análise Combinatória”.

Pesquisador: Qual a relevância de aprender Análise Combinatória?

Professor A: “É de grande relevância o conhecimento deste conteúdo, primeiro porque contar nem sempre é uma tarefa simples, segundo porque a utilização dos métodos de contagem irá facilitar as contagens mais complexas”.

Pesquisador: Você utiliza algum material de consulta para auxiliar no Ensino de Análise Combinatória? Quais? Professor A: “Não temos muito material disponível, mas eu utilizo a internet e o livro didático”.

Pesquisador: Você conhece algumas ideias dos PCN sobre o ensino da Análise Combinatória? Professor A: “Não, apesar de ter... os PCN eu confesso que nunca consultei”.

Pesquisador: Qual o ponto de partida do seu trabalho em sala de aula de Análise Combinatória? Professor A: “Oh ! começo falar de exemplos simples como o número de maneiras diferentes de se vestir utilizando duas camisas e três bermudas, depois parte para alguns mais complexos”.

Pesquisador: Ou seja, o senhor parte do Princípio Fundamental da Contagem? Professor A: “Isso”.

Pesquisador: Qual a utilidade de ensinar Análise Combinatória no Ensino Médio? Professor A: “Ah! é muito útil, além de... surgir com frequência nos exames como do ENEM, Análise Combinatória aparece também em várias situações do cotidiano”.

Pesquisador: Quais são as principais estratégias utilizadas pelos alunos para resolverem problemas envolvendo Análise Combinatória no ambiente escolar? Professor A: “Olha, eu vejo que eles utilizam a árvore das possiblidades, também o raciocínio lógico, além das fórmulas existentes”.

Pesquisador: Quais as dificuldades encontradas pelos alunos no estudo de Análise Combinatória? Professor A: “Primeiro a baixa estima, e a falta de interesse para ler e entender cada questão, isso dificulta o aprendizado”.

Pesquisador: Aponte suas principais dificuldades em trabalhar com a Análise

Combinatória em sala de aula.

Professor A: Olha... as dificuldades são a falta de material de apoio que venha nos auxiliar durante o preparo e a execução das aulas.

Pesquisador Para você é fácil responder questões de Análise Combinatória? "Bem, depende do nível delas...eu encontro dificuldades em algumas delas como por exemplo quando envolve o princípio aditivo?" **Pesquisador: perceber se utiliza o Princípio Multiplicativo ou Aditivo?** Professor A: "Isso".

Pesquisador: Que estratégias didáticas você utiliza para os alunos compreenderem Análise Combinatória? Professor A: "Olha, primeiro eu peço para que eles pratiquem algumas coisas que lhes venham estimular o cérebro, a pensar, jogar, por exemplo, depois eu aplico exercício, para que eles venham a praticar... vejo que desta maneira a gente consegue trabalhar o conteúdo com eles".

Pesquisador: Q**ue tipos de problemas do cotidiano são trabalhados em sala de aula?** Professor A: "A gente envolve possibilidades do cotidiano, como questão de placas, quantas placas de veículos poderiam ser organizadas a partir de três letras e quatro algarismos?".

b) Professor B

Pesquisador: Na sua opinião, qual a importância de trabalhar com os conceitos iniciais de Análise Combinatória no Ensino Fundamental? Professor B:

> Eu acho que a ideia principal é preparar... o aluno para... o Ensino Médio, porque a ideia de se trabalhar estes conceitos iniciais, eu entendo que eles partem de um conceito maior, de um conceito fundamental, que é o Princípio Fundamental da Contagem. Então com base nisso aí, o objetivo principal é preparar o aluno, é alargar o pensamento do aluno para ... a :: ...vamos dizer que, para uma linguagem mais formal, que ele vai se deparar no Ensino Médio.

Pesquisador: Q**ual a relevância de aprender Análise Combinatória?**

> Professor B: Bem é... eu acho que o principal objetivo aqui, é preparar o raciocínio combinatório do aluno, porque ... por exemplo quando ele for trabalhar eh, no Ensino Médio com Probabilidades e Estatística uma das ferramentas principais que ele vai utilizar é a Combinatória, para a compreensão dos conceitos :: ... claro não só se limita a isso, a Análise Combinatória não é apenas uma ferramenta para se trabalhar Probabilidade e Estatística, o próprio cotidiano, o desenvolvimento da civilização, a complexidade das relações sociais ... o mercado de trabalho vai exigir do aluno eh:: ...essa noção de se trabalhar com possibilidades e saber organizar as informações de um problema. Com base nisso aí, resolver as questões dentro do

> cotidiano escolar eh:: ...e aplicar no dia a dia, tanto é que a Análise Combinatória é um dos assuntos eh:: ..., mais fáceis de você perceber aplicações no dia a dia. É por meio da Análise Combinatória que o aluno vai alargar o pensamento matemático, através do desenvolvimento do pensamento combinatório, mas também vai facilitar eh:: ...uma visão mais global, que vai munir o aluno de ferramentas necessárias para que ele consiga tomar decisões eh:: ... prever resultados no dia a dia, facilitando a vida social dele, coisas desse tipo aí.

Pesquisador: Você utiliza algum material de consulta para auxiliar no Ensino da Análise Combinatória? Quais?

> Professor B: Porque a gente sabe que o nosso sistema eh:: ...educacional ele gira em entorno da metodologia tradicional? Chegar aqui de repente dizer que estamos inovando, fazendo algo diferente é no mínimo uma camuflagem eu entendo assim, então a principal ideia que eu gosto de trabalhar é partir de situações do dia a dia, ou seja, problemas contextualizados do cotidiano dos alunos e, com isso, a gente consegue passar as informações formais da Análise Combinatória, por meio de situações práticas e que estão presente no seu cotidiano.

Pesquisador: Certo, mas esse material de consulta seria o quê? Professor B: "O principal recurso que eu utilizo é o livro didático, trabalho com outros materiais, como materiais concretos do dia a dia, tais como: baralhos e moedas. O professor pode trazer esses materiais para sala de aula, além de recorrer à própria informática e utilizar jogos".

Pesquisador: Você utiliza algum material que oriente sua prática em sala de aula? Professor B: "Tem os PCN, eles... recomendam que no estudo da Análise Combinatória devemos partir do Princípio Fundamental da contagem, pois se observarmos todas as definições e fórmulas da Combinatória partem desse princípio".

Pesquisador: Qual o ponto de partida do seu trabalho em sala de aula de Análise Combinatória?

> Professor B: Há! sem dúvida aqui eu gosto de utilizar situações do dia a dia, problemas contextualizados, eu não diria exatamente eh:: ... que seria a Metodologia Resolução de problemas, que é uma metodologia fortemente estudada e pesquisada pela Educação Matemática, mas seria vamos dizer uma:: ... é um esboço, não sei se posso falar assim, seria mais ou menos um esboço da Resolução de problemas, partir de situações contextualizadas do cotiando que traz uma linguagem informal, e partir daí induzir melhor dizendo formalizar os seus conceitos, claro eh:: ... exigindo certo rigor matemático e uma certa formalidade, mas partindo daquilo que é simples, daquilo que está no dia a dia, daquilo que é informal pra passar para linguagem formal para que aluno construa :: ...os seus próprios conceitos, partindo de uma linguagem mais simples. Eu acho que esse seria um dos grandes desafios de ensinar Análise Combinatória.

Pesquisador: Qual a utilidade de ensinar Análise Combinatória no Ensino Médio?

> Professor B: Ah! sem dúvida aqui eh:: ..., além da Análise Combinatória ela ser uma ferramenta muito útil para compreensão de outros conteúdos, como a Probabilidade e a Estatística, a Análise Combinatória vai facilitar não somente a compreensão desses conteúdos, mas também ela vai preparar o aluno para o seu cotidiano, para trabalhar com situações do dia a dia que requerem eh:: ...previsões de resultados. Supondo que você tem um conjunto de informações, a Análise Combinatória, através do Princípio Fundamental da Contagem e de outros conceitos vai ajudar você organizar essas informações através de certos conceitos e aplicar no dia a dia e vai levar ao desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos que abarca o raciocínio combinatório, o raciocínio algébrico e geométrico... e o raciocínio combinatório eu diria que é o mais importante entre esses outros conceitos porque remete ao surgimento da matemática, as questões da contagem como a criação dos números, a necessidade de fazer contagem, com isso, a Análise Combinatória é o embrião da própria Matemática.

Pesquisador: Quais são as principais estratégias utilizadas pelos alunos para resolverem problemas envolvendo Análise Combinatória no ambiente escolar?**

> Professor B: Isso aí, eh... as questões dos desenhos de utilizar tabelas, você busca induzir aluno a desenvolver esboços utilizando números e situações que busquem materializar eh:: ... colocar num papel tudo aquilo que o problema de Análise Combinatória propõe, eh ... eu diria que a importância de fazer esses esboços é como por exemplo estudar geometria espacial, você tem que recorrer a visualização dos desenhos, no caso da Análise Combinatória eu diria que é indispensável utilizar recursos informais, mas que serão fundamental para que você organize as informações e consiga compreender e interpretar o que o problema propõe e passar para uma linguagem formal. Além de utilizar as fórmulas de modo correto para conseguir êxito na resolução e compreensão do conteúdo de Combinatória.

Pesquisador: Quais as dificuldades encontradas pelos alunos no estudo de Análise Combinatória?**

> Professor B: Eu particularmente acho que a linguagem da Análise Combinatória por si só, exige um pensamento mais apurado não só do professor como também do aluno, então eu acho que... as principais dificuldades encontradas por esses alunos é justamente compreender essa linguagem por ela exigir um raciocínio mais apurado, como por exemplo quando a gente trabalha é combinações e arranjos... gera muita confusão para você conseguir diferenciar, o que é arranjo e o que é combinação, então essa é sem dúvida uma das grandes dificuldades que o aluno tem quando está estudando Análise Combinatória. Os arranjos e as combinações são agrupamentos parecidos, então para você formar esses agrupamentos você vai utilizar permutações de elementos, buscando organiza-los através de permutações que é um dos conceitos que remete é o Princípio Fundamental da Contagem, e partir disso o aluno nem sempre consegue perceber o simples fato de você alterar a ordem dos elementos surge um novo agrupamento. Por exemplo se você tiver os algarismos 1, 2 e 3, aí se você chega para o aluno e mostra que por exemplo com esses algarismos você pode formar o número 123, ao permutar você também tem o número 213, isso acontece com os mesmos elementos, obtendo agrupamentos diferentes, mas se você trabalhar com comissões que não exija uma hierarquia, por exemplo se você tiver três pessoas João, Pedro e Maria partindo do pressuposto que não existe uma hierarquia para formar uma comissão de 3 pessoas, então você pode ter uma comissão com João, Pedro e Maria, se permutar pode ter Pedro, Maria e João... aí você vai perceber que

não vai obter um novo agrupamento, ou seja. João, Pedro e Maria ou Maria Pedro e João, são os mesmos agrupamentos. A medida que você expõe situações similar a esta, você facilita a compreensão...das combinações ou arranjos. Você mostra essas duas situações o que existe em comum entre elas e o que existe de diferente e naturalmente os alunos vão perceber que se trata de agrupamentos diferentes. No meu ponto de vista muitas questões exige um pensamento mais elevado, combinações e arranjos eu diria é a maior dificuldade que os alunos encontram, por serem conceitos muito próximos, no entanto, as fronteiras que separam um do outro as vezes não são perceptíveis".

Pesquisador: Aponte suas principais dificuldades em trabalhar com a Análise Combinatória em sala de aula.

Professor B: Ah! sem dúvidas eh conseguir passar eh:: ...transformar a linguagem complexa que eu entendo como uma linguagem que requer um pensamento não diria abstrato, mas um pensamento mais desenvolvido, para uma linguagem simples. Você tem que ter um pensamento mais apurado, no meu caso a principal dificuldade eh:: ... passar o problema daquela linguagem complexa para uma linguagem mais simples eh:: ... que apresenta um nível mais elevado de raciocínio e tornar aquilo ali mas acessível para o aluno, isso aí nem sempre eu consigo. É eu creio que a maioria dos professores também não...eles têm essas dificuldades pela própria natureza da Análise Combinatória. Então tirar dessa linguagem complexa para uma linguagem mais acessível e simples ao aluno para que ele compreenda, essa é o meu grande desafio é a minha grande dificuldade.

Pesquisador: Para você é fácil responder questões de Análise Combinatória? Professor B: "Não! eh existem questões que ... requer eh:: ...que nem errado nós professores conseguimos desenvolve-las...eu considero um dos conteúdos mais difíceis do Ensino Médio é não somente o conteúdo em si mas também quando você utiliza como uma ferramenta para o entendimento de outros conteúdos eh... exige um pensamento combinatório e nem sempre isso aí a gente consegue, porque eu entendo que esse pensamento deve ser desenvolvido com experiências e com a vivencia do dia a dia. Assim eu considero um conteúdo complicado de você ensinar e de o aluno aprender.

Pesquisador: Que estratégias didáticas você utiliza para os alunos compreenderem Análise Combinatória?

Professor B: Eu gosto de partir de situações que ocorrem no cotidiano dos alunos, situações corriqueiras e, portanto, informais que utilizamos como estratégia ou mecanismo de se chegar ao rigor e a formalidade dos conceitos eh:: ... propostos que são utilizados pela Análise Combinatória. No qual eu busco induzir sempre o aluno a desenvolver e compreender a Análise Combinatória, com base em situações práticas que eh:: ...fazendo o caminho inverso você apresenta um problemas para depois formalizar os conceitos e as definições. Quando você trabalhar combinações e arranjo, trabalhe com situações que envolvam os dois conceitos, a princípio começo com situações que envolvam puramente o Princípio Fundamental da Contagem, gradativamente você vai aprofundando e vai buscar situações que abarca os conceitos de arranjo e combinação para que o aluno consiga diferenciar esses conceitos. O aluno naturalmente vai formalizar e aprender utilizar o rigor com o

> passar do tempo de acordo com as experiências que ele vai vivenciar em sala de aula. No entanto, eu também gosto de levantar problemas sobre o Sportingbet que é um jogo de aposta é que possibilita você trabalhar conceitos de Análise Combinatória, ligado a situações práticas do dia a dia, como o jogo de futebol que é uma coisa que os brasileiros gostam. Você pode prever antecipadamente os resultados simulando diversas situações, diversos resultados que pode acontecer, isso vai fazer com que você perceba se é mais vantajoso ou não fazer todas as possíveis apostas, tipo se você está diante de três jogos ou somente dois jogos, de acordo com o panorama das possíveis combinações dos resultados você vai prever os resultados e com base nessa previsão ver se é vantajoso ou não apostar em todos os possíveis jogos.

c) Professor C

Pesquisador: Na sua opinião, qual a importância de trabalhar com os conceitos iniciais de Análise Combinatória no Ensino Fundamental?

> Professor C: No Ensino Fundamental os estudos iniciais sobre Análise Combinatória é relevante devido a sua importância em várias aplicações práticas que envolvem contagem, relação, agrupamentos, desenvolvendo no aluno a familiaridade com situações problemas relacionados a contagem de agrupamentos levando-o a compreender o princípio multiplicativo e a explorar a construção de diagramas, tabelas, desenhos e esquemas.

Pesquisador: Qual a relevância de aprender Análise Combinatória?

> Professor C: Com a compreensão do Princípio Fundamental da Contagem, desenvolvem-se métodos para fazer contagem de uma maneira eficiente do número de elementos de um conjunto, aplicando esses conhecimentos nas mais variadas situações-problemas do mundo moderno... A Análise Combinatória é uma importante ferramenta que o cidadão moderno dispõe para solucionar problemas reais seja no mundo das informações, das novas tecnologias, do mercado financeiro e etc.

Pesquisador: Você utiliza algum material de consulta para auxiliar no Ensino de Análise Combinatória? Quais? Professor C: "Sim. O livro didático pela escola, livros, revistas e...sites da internet".

Pesquisador: Qual o ponto de partida do seu trabalho em sala de aula de Análise Combinatória? Professor C: "Começo apresentando uma situação-problema do cotidiano sobre contagem envolvendo o aluno na busca de estratégia para encontrar a sua solução, em seguida formaliza-se os conceitos sobre o Princípio Multiplicativo".

Pesquisador: Você falou de problemas do cotidiano, que tipos de problemas do cotidiano de Combinatória são discutidos em suas aulas? Professor C: "Geralmente questões relacionadas...tais como placas de carro, moedas, questões envolvendo tipos de roupas diferentes, questões dessa natureza

Pesquisador: Qual a utilidade de ensinar Análise Combinatória no Ensino Médio? Professor C: “A necessidade de resolver determinados problemas do dia-a-dia que requer a utilização do conhecimento em Análise Combinatória torna-se crucial o ensino deste ramo da Matemática no Ensino Médio”.

Pesquisador: Q**uais são as principais estratégias utilizadas pelos alunos para resolverem problemas envolvendo Análise Combinatória no ambiente escolar?**

> Professor C: As estratégias adotadas pelos alunos na solução de situações problemas sobre Análise Combinatória são: leitura e compreensão do texto, construção de árvores de possibilidades, desenhos, construção de tabelas, manipulação algébrica de fórmulas matemáticas...são essas que eu tenho prestado mais atenção.

Pesquisador: Q**uais as dificuldades encontradas pelos alunos no estudo de Análise Combinatória?** Professor C: “A compreensão dos textos estruturais dos problemas; dificuldades de diferenciar os problemas de arranjos dos problemas de combinação; diferenciar os problemas que envolvem o produto das combinações dos problemas que envolvem a soma das combinações, essas são as mais cruciais.

Pesquisador: Aponte suas principais dificuldades em trabalhar com a Análise Combinatória em sala de aula. Professor C: “A dificuldade da compreensão dos textos estruturais dos problemas, e sua complexidade torna o estudo pouco atrativo, levando-se em conta a grande deficiência do aluno nos conceitos mais fundamentais.

Pesquisador Para você é fácil responder questões de Análise Combinatória? Professor C: “É relativo...algumas questões possuem um grau de dificuldade maior do que outras”.

Pesquisador: Q**ue estratégias didáticas você utiliza para os alunos compreender Análise Combinatória?** Professor C: “Modelando situações reais para a aplicação dos conteúdos.

d) Professor D

Pesquisador: Na sua opinião, qual a importância de trabalhar com os conceitos iniciais de Análise Combinatória no Ensino Fundamental? Professor D: “Em minha opinião é que ensinando logo nas séries do Ensino Fundamental teremos maiores chances de compreensão por parte dos alunos no que se refere ao conceito de Análise Combinatória”.

Pesquisador: Qual a relevância de aprender Análise Combinatória? Professor D: “A maior relevância para mim é desenvolver o raciocínio lógico e combinatório dos alunos”.

Pesquisador: Você utiliza algum material de consulta para auxiliar no Ensino de Análise Combinatória? Quais? Professor D: “Sim. Livros, internet e vídeos”.

Pesquisador: Qual o ponto de partida do seu trabalho em sala de aula de Análise Combinatória? Professor D: “Sempre começo expondo uma situação-problema cotidiana onde os alunos vivenciam esse tipo de problemas envolvendo Análise Combinatória”.

Pesquisador: **Como você falou que trabalha com problemas do cotidiano, que tipos de problemas?** Professor D: “Normalmente permutação simples, se eles têm camisas de cores diferentes shorts de cores diferentes, quantas possibilidades eles teriam de escolha para sair para uma festa? Que seja mais próximo deles para que eles possam ter a ideia...da Análise Combinatória”.

Pesquisador: Qual a utilidade de ensinar Análise Combinatória no Ensino Médio? Professor D: “Para que os alunos evoluam em suas técnicas de contagem e possibilite desenvolver estratégias para solucionar problemas de contagem”.

Pesquisador: Quais são as principais estratégias utilizadas pelos alunos para resolverem problemas envolvendo Análise Combinatória?

> Professor D: Na maioria das vezes...até porque eles têm esse contato infelizmente no 2º ano do Ensino Médio eles tentam resolver essas questões apenas com conhecimento básicos que... como agrupamento e a multiplicação, são os meios que mais eles utilizam para tentarem resolver essas questões de Análise Combinatória.

Pesquisador: Quais as dificuldades encontradas pelos alunos no estudo de Análise Combinatória? Professor D: “É eu percebo que eles têm muitas dificuldades de entender e escolher a técnica adequada para solucionar o problema. Esse é o grande problema: ler, entender e reconhecer a técnica a ser utilizada”.

Pesquisador: Se é um arranjo, combinação ou permutação?

> Professor D: Isso, até porque muitas vezes eles estão muito apegados mesmo no Ensino Médio a fórmulas...a fórmulas, então eles perguntam muitas das vezes, é arranjo? É combinação? É permutação? Porque se eu disser qual é, então eles utilizam as fórmulas e, então, o maior problema fica justamente em eles compreenderem essas ideias.

Pesquisador: Então é necessária a utilização de uma metodologia que ajude na compreensão desses tipos de agrupamentos? Professor D: “É verdade, por isso que acredito que iniciando o trabalho com a Combinatória no Ensino Fundamental, quando eles chegassem no Ensino Médio já teriam essa ideia".

Pesquisador: Eles já chegariam com um pouco do raciocínio combinatório? Professor D: "justamente, então eles poderiam resolver as questões sem precisar conhecer as fórmulas, de algumas questões mais simples é claro?

Pesquisador: Aponte suas principais dificuldades em trabalhar com a Análise Combinatória em sala de aula? Professor D:

> Como eu disse anteriormente, a falta do contato anterior com o conteúdo, eu acredito que se eles chegassem no 2ª ano, e tivesse visto em série anteriores, ficaria tudo mais fácil e a má interpretação e compreensão do problema, muitas vezes eles não respondem por não interpretar bem o problema.

Pesquisador: Você conhece algumas recomendações dos PCN referente ao ensino-aprendizagem de Combinatória?

> Professor D: Eu fiz algumas leituras dos PCN...e uma que eu lembro no momento é que...seria adequado que Análise Combinatória fosse iniciado nas séries iniciais do Ensino Fundamental, porque acredita que crianças mesmo com uma faixa etária baixa, já conseguem fazer esses tipos de combinações. Assim o nível de compreensão seria bem melhor quando a Combinatória fosse apresentada no Ensino Médio...sem contar eh, vamos dizer assim a criança é mais intuitiva...ela tem mais curiosidade, enquanto o aluno do Ensino Médio está atrás de uma fórmula para resolver mais rápido, se preocupando em acertar a questão da prova e não compreendendo os conceitos.

Pesquisador: Para você é fácil responder questões de Análise Combinatória? Professor D:

> Não totalmente... eu acho as questões de Análise Combinatória difíceis e isso ocorre pelo fato da ainda eu ter sequelas do ensino mecanizado, aquele ensino em que você tinha que decorar aquela fórmula e sem aprender realmente os conceitos do conteúdo, por esse motivo eu não acho fácil.

Pesquisador: Que estratégias didáticas você utiliza para os alunos compreender Análise Combinatória? Professor D: "É... eu apresento inicialmente um desafio, ou seja, para que eles façam a resolução de um problema cotidiano e também mando formar equipes para fazer a Construção coletiva da árvore das possibilidades.