UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
MESTRADO ACADÊMICO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ESTRATÉGIAS UTILIZADAS POR LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE PARTILHA

ESTEVÃO LUIS PAIVA DA SILVA

Campina Grande – PB

2016

ESTEVÃO LUIS PAIVA DA SILVA

ESTRATÉGIAS UTILIZADAS POR LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE PARTILHA

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, em cumprimento à exigência para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual da Paraíba – UEPB.

Área de Concentração: Educação Matemática

Linha de Pesquisa: Metodologia, Didática e Formação do Professor no Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcus Bessa de Menezes

Campina Grande – PB

2016

S586e Silva, Estevão Luis Paiva da.

Estratégias utilizadas por licenciandos em matemática na resolução de problemas de partilha [manuscrito] / Estevão Luis Paiva da Silva. - 2016.

102 p.

Digitado.

Dissertação (Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2016.

"Orientação: Prof. Dr. Marcus Bessa de Menezes, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática".

1. Problemas de partilha. 2. Resolução de problemas. 3. Estratégias de base. 4. Álgebra. I. Título.

21. ed. CDD 512

ESTEVÃO LUIS PAIVA DA SILVA

ESTRATÉGIAS UTILIZADAS POR LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE PARTILHA

Dissertação apresentada ao programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, em cumprimento à exigência para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela Universidade Estadual da Paraíba – UEPB.

Aprovado em 09 de setembro de 2016

Prof. Dr. Marcus Bessa de Menezes – UFCG/PPGECEM (Orientador)

Prof. Dr. Marcelo Câmara dos Santos – UFPE (Examinador Externo)

Prof. Dr. José Joelson Pimentel de Almeida – UEPB/PPGECEM (Examinador Interno)

Dedico

A Deus em primeiro lugar, porque Dele e por Ele, e para Ele, são todas as coisas; glória pois a Ele, eternamente. Amém. Rm 11:36. Aos meus amados pais, seu Antônio e Rosilene, sem o amor, cuidado e incentivo deles não teria chegado até aqui. Aos meus familiares que me ajudaram em muitos aspectos. A minha amada noiva e futura esposa Aline Calisto, por não medir esforços para estar ao meu lado nesta caminhada.

AGRADECIMENTOS

Com alegria que escrevo essa página,

Creio que a vontade de Deus é a razão maior de poder chegar a essa etapa da minha vida, sendo assim, palavras me faltariam para expressar minha gratidão a Ele por cada momento que passei nesses dois anos de caminhada. Agradeço a **Deus** pelos dias que acordei com saúde, mesmo diante de todas as dificuldades, idas e vindas, dúvidas, inquietações e momentos pelos quais todos os homens estão sujeitos a passar. Porém, lembro-me das palavras do apóstolo Paulo escritas no livro de Romanos, capitulo 8 versículos 38 ao 39, “porque estou certo de que nem a morte, nem a vida, nem anjos nem principados, nem coisas presentes, nem futuras, nem potestades, nem a altura, nem a profundidade, nem qualquer outra criatura poderá nos separar do amor de Deus, que está em Jesus Cristo nosso Senhor”. É com essa certeza que busquei superar todas as dificuldades e que somos mais do que vencedores por aquele que nos amou.

Agradeço muito aos meus pais seu Antônio e Rosilene, por todos os esforços direcionados ao meu favor para poder estudar e alcançar meus objetivos.

Aos meus tios, Rose e Dedé, por terem me acolhido e me ajudado sempre que precisei. A minha prima Karla e seu esposo André (primão), são pessoas muito especiais para mim, exemplo de casal e família. A toda minha parentela, pessoas que Deus colocou na minha vida para que pudesse ter exemplos de garra, trabalho, superação e amor.

Sou grato também pelas vidas de seu Calixto e Socorro, agradeço por torcerem por mim, por acreditarem que posso ir mais longe.

Aline Calisto, ela que tem sido um dos grandes motivos para que pudesse continuar lutando e buscando crescer profissionalmente. Espero em Deus que estejamos juntos por muitos e muitos anos, compartilhando todos os momentos.

Quero agradecer a todos os colegas da minha turma do mestrado, vocês contribuíram significativamente para o engrandecimento dos meus conhecimentos através das trocas de saberes.

Quero expressar minha gratidão a todos os professores do mestrado que contribuíram, direta e indiretamente, na minha vida acadêmica, por todos os ensinamentos e incentivos.

Obrigado aos professores Dr. Marcelo Câmara dos Santos e Dr. José Joelson Pimentel de Almeida, por contribuírem nesse trabalho como professores da banca examinadora e como pesquisadores. Através dos seus conhecimentos gravados em artigos e textos em educação matemática, pude ampliar minha visão nessa vertente de pesquisa e também crescer como estudante e pesquisador.

Por fim, não poderia deixar de agradecer ao meu orientador, professor Dr. Marcus Bessa de Menezes, pessoa extraordinária que aceitou me orientar e enfrentar os desafios na construção desse trabalho, discutindo soluções e estratégias para produção científica, com olhar crítico, sempre buscando aprimoramento do mesmo. Mais um grande professor/pesquisador que tenho como referência em meus estudos e vida acadêmica.

Meus sinceros agradecimentos também, ao professor Dr. Jadílson Ramos de Almeida, ele que me incentivou a entrar no mestrado, me apontou caminhos, professores, textos, ideias e que esteve comigo desde a graduação. Sou muito grato a Deus pela vida de todos vocês!

"Sem a curiosidade que me move, que me inquieta, que me insere na busca, não aprendo nem ensino."

Paulo Freire

LISTA DE QUADROS

LISTA DE FIGURAS

RESUMO

SILVA, E. L. P. Estratégias Utilizadas por Licenciados em Matemática na Resolução de Problemas de Partilha. 2016. 105f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Universidade Estadual da Paraíba – UEPB, Campina Grande, 2016.

A presente pesquisa teve por objetivo investigar quais as estratégias utilizadas por alunos licenciandos em matemática na resolução de problemas de partilha. Nossa referência foi a pesquisa de Câmara e Oliveira (2010), que também investigaram as estratégias utilizadas por alunos do 6º ano do ensino fundamental. Utilizamos como instrumento de coleta de dados um teste, classificado em dois tipos A e B. Neste teste, dispomos sete questões com problemas de partilha, segundo o encadeamento definido por Marchand e Bednarz (1999). Utilizamos como categorias de análises as construídas por Câmara e Oliveira (2010) e a classificação das estratégias de resolução de problemas de estrutura algébrica tipo partilha. Por fim, realizamos a análise dos dados coletados, constatando o desempenho e estratégias de base utilizadas pelos sujeitos do ensino superior e comparando os resultados com a pesquisa de Câmara e Oliveira (2010). Os resultados obtidos mostraram que os alunos apresentam mais dificuldade na resolução de um determinado problema de partilha da mesma forma que no estudo de Câmara e Oliveira (2010). Notamos também relações semelhantes em nossa análise em comparação à natureza dos problemas. Os resultados apontam também que os alunos utilizam as mesmas estratégias de resolução, independente do grau de escolarização.

Palavras–Chave: Problemas de Partilha, Resolução de Problemas, Estratégias.

ABSTRACT

SILVA, E. L. P. Strategies used for Graduates in Mathematics in the Share Troubleshooting. 2016. 101f. Thesis (MA) - Postgraduate Program in Science and Mathematics Education Teaching. State University of Paraíba - UEPB , Campina Grande , 2016.

This research aimed to investigate the strategies used by undergraduate students in mathematics in solving shared problems. Our reference was of the research Câmara and Oliveira (2010), which also investigated the strategies used by students in the 6th grade of elementary school. Used as data collection instrument a test, classified into two types A and B. In this test, we have seven questions with sharing problems, according to the thread defined by Marchand and Bednarz (1999). We used as analytical categories constructed by the House and Oliveira (2010) and the classification of problems of algebraic structure type sharing solving strategies. Finally, we perform the analysis of the collected data, verifying the performance and basic strategies used by the subjects of higher education and comparing the results with of the research Câmara and Oliveira (2010). The results showed that students have more difficulty in solving a particular problem sharing the same way that of study Câmara and Oliveira (2010). We also noticed similar relationships in our analysis compared the nature of the problems. The results also indicate that students use the same resolution strategies, regardless of level of education.

Keywords: Sharing problems, Troubleshooting, Strategies.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A matemática é fruto de um contínuo processo de mudanças que ao longo dos anos se amplia, buscando cada vez mais, através de pesquisadores e estudiosos, a compreensão dessa disciplina no contexto de sala de aula, sobretudo em conceitos particulares, como por exemplo, o estudo da álgebra escolar. Para Ponte, Branco e Matos (2009, p.6) a "álgebra constitui um dos grandes ramos da Matemática, ao lado da Geometria e da Análise Infinitesimal.". Souza (2007) nos afirma que apesar dos estudos desenvolvidos, citando os exemplos de Davdov (1978, 1987, e 1988), Souza e Diniz (1996), Lins e Gimenez (1997) e Fiorentinni (2006), terem contribuições significativas para o ensino da álgebra na educação básica, nos dias atuais, esse tema continua despertando muito interesse para estudiosos na educação matemática.

Percebemos, de acordo com Santos (2013), outros pesquisadores que estudaram erros e dificuldades no ensino da álgebra dentre a literatura brasileira e internacional. A autora cita alguns estudiosos estrangeiros que se dedicaram em pesquisar os erros dos alunos em álgebra, como Booth (1995), Kieran (1995), Usiskin (1995). Hall (2002), Ruano, Socas e Palarea (2008), Ponte (2006) e a pesquisa da autora brasileira Borba (2011). Tendo conhecimento desse panorama de estudiosos, nos motivamos a levantar questões pertinentes ao ensino de álgebra no campo da educação matemática. O ensino da álgebra, segundo Souza (2007), continua sendo um desafio nas escolas de muitos países, entre eles, o Brasil.

Fazendo uma breve reflexão do panorama do ensino de matemática, percebemos que, ao longo dos anos, a matemática vem sendo tratada por alunos dos vários níveis de ensino como a disciplina mais difícil de estudar e compreender. Almeida (2006) expressa essas dificuldades como algo que pode ocorrer não pelo nível de complexidade ou pelo fato de não ter afinidade com a disciplina, mas por fatores cognitivos, psicológicos e pedagógicos envolvendo um conjunto de conceitos e trabalhos.

Observamos pesquisas que dizem respeito ao medo que os educandos interiorizam a respeito da matemática. Todavia, é inegável que ela é uma disciplina importante para o desenvolvimento educacional do aluno, como também para inclusão dele em uma sociedade que exige cada dia mais pessoas qualificadas no mercado de trabalho. Diante desse panorama em que a matemática se encontra, precisamos interiorizar a ideia de que a formação do professor desde a sua graduação em licenciatura em matemática precisa ser solidificada em experiências reais em sala de aula. Segundo Almeida (2006, p. 10),

> O professor precisa vivenciar a licenciatura desde o início da graduação com projetos que envolvam trabalhos com alunos de escolas públicas e particulares. Por meio da experiência e de projetos nessa área, torna-se mais harmoniosa a passagem do professor pela sala de aula, uma vez que este já conviveu com alunos de diversas realidades e o auxilia a pensar em maneiras de lidar com a criatividade e o raciocínio dos alunos.

Existem outros aspectos para os quais estudiosos da educação matemática apontam em relação à possível causa desse problema. Por exemplo, Lochhead e Mestre (1995, p. 145) comentam que "a fonte dos erros está em concepções erradas concernentes à estrutura e interpretação de afirmações algébricas e nos processos pelos quais se faz a conversão da linguagem escrita para a linguagem algébrica", ou seja, os alunos conseguem compreender o problema e interpretar o texto escrito na linguagem natural, porém não conseguem converte-lo, por assim dizer, para a linguagem algébrica.

Ensinar matemática não é uma tarefa fácil quando o professor deseja alcançar sucesso e um significativo resultado no aprendizado do aluno. O ensino da álgebra, em particular, tem apontado, com base em dados de provas em larga escala como o SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica), um baixo rendimento dos alunos em matemática. Quando atentamos à álgebra,

> [...] essas mesmas avaliações mostram, desde a década de noventa, que as dificuldades dos estudantes, neste campo de conhecimento matemático, são ainda maiores, tendo em vista que o índice de acerto nos itens referentes à álgebra fica, muitas vezes, em torno de 40% em muitas das regiões brasileiras. (BRASIL, 1998, p. 12).

Logo, percebemos que as dificuldades no ensino de álgebra não são pertinentes tão somente ao ensino atual, mas que esse problema enfrentado por alunos se estende há alguns anos. Fato corriqueiro nas aulas de matemática é o ensinar por meio da reprodução e memorização de procedimentos algébricos. Segundo Costa (2010, p. 13), "[...] pensa-se que quanto mais o sujeito conhecer os procedimentos algébricos melhor compreenderá como se resolve equações. O que não é verdade, como garantem os resultados de pesquisa em larga escala". Em particular, a álgebra como ramo da matemática tem se mostrado um campo de estudo bastante complicado para a assimilação dos alunos, tomando proporções maiores quando aplicado em problemas.

Resolver problemas algébricos é sempre um desafio para alunos em todas as etapas de ensino e por vezes é visto como uma tarefa desestimulante que pouco lhe acrescenta conhecimento. Segundo Lochhead e Mestre (1995, p. 144), “pesquisas recentes indicam que muitos alunos parecem ter dificuldades enormes para resolver certos tipos de problemas algébricos bastante simples [...]” e esse fato se estende a todos os níveis de escolaridade, do ensino fundamental ao superior.

Partimos para esta investigação a partir dos conhecimentos iniciais que obtivemos sobre as pesquisas de Câmara e Oliveira (2010), Almeida (2011) e Santos Junior (2013). Esses pesquisadores trabalham seus estudos abordando conceitos e resultados em torno de problemas de estrutura algébrica e estratégias de resolução desses problemas, dentro da educação básica, mais precisamente o ensino fundamental II. De acordo com Almeida (2011), os problemas de estrutura algébrica, do tipo partilha, são encontrados nos livros didáticos de matemática do ensino fundamental II e para resolver problemas algébricos do tipo partilha os alunos de 6º ano mobilizam cinco diferentes estratégias de resolução, conforme apontam Câmara e Oliveira (2010). Podemos perceber também uma necessidade de atentarmos para as práticas de ensino-aprendizado empregadas nesse tipo de problema, conforme a pesquisa de Santos Júnior (2013).

Nossa motivação deriva dos estudos previamente estabelecidos dessas pesquisas afim de buscarmos novos resultados envolvendo problemas de estrutura algébrica e suas estratégias de resolução, porém inseridos agora no ensino superior. Logo, almejamos alcançar como objetivo de estudo e apresentar tais resultados através da seguinte pergunta norteadora: Que estratégias de resolução de problemas de estrutura algébrica, do tipo partilha, são utilizadas por alunos licenciandos em matemática? Diante dessas considerações, nossa pesquisa visa o aprofundamento dos estudos no campo das estratégias de resoluções dos problemas de partilha tendo a importância de cada vez mais buscarmos compreender como os alunos estão resolvendo este tipo de problema. Santos Junior (2013, p.102) comenta que “[...] com o avanço de escolarização, os sujeitos melhoram o desempenho na resolução de problemas de partilha [...]”. Neste sentido, nos propomos a investigar quais estratégias de resolução estão sendo usadas por alunos licenciandos em matemática e relacionar nossos resultados com estudos anteriores em esferas de ensino diferentes.

1.1 PROBLEMA DE PESQUISA

A pergunta que nos motiva a iniciarmos uma investigação com esta pesquisa é: **Quais as estratégias utilizadas por alunos licenciandos em matemática na resolução de problemas tipo partilha?**

Apresentaremos o objetivo geral e os específicos, que trazemos como suporte para responder à pergunta norteadora.

1.2 OBJETIVO GERAL

Nosso objetivo geral está voltado para uma análise das estratégias de resolução que os alunos licenciandos em matemática poderão utilizar para resolver problemas algébricos do tipo partilha.

Para isso elencamos os seguintes objetivos específicos que almejamos alcançar em nossa pesquisa.

1.3 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Analisar o rendimento por encadeamento de relações na resolução dos problemas de partilha.
- Analisar estratégias de base em função do encadeamento de relações na resolução dos problemas de partilha.
- Verificar a influência das variáveis dos problemas de partilha (do número das relações, natureza das relações e tipo de encadeamento) no tipo de estratégia adotada pelos licenciandos em matemática.

1.4 JUSTIFICATIVA

Resolver um problema com uma dada estrutura algébrica não se torna tão imediato como efetuar uma operação aritmética, e talvez esse fato proporcione uma dificuldade para os alunos na resolução de problemas algébricos. Entretanto, em nossa pesquisa, não buscamos uma resposta exata para os problemas que os alunos encontram no ensino de matemática, em especial para o ensino de problemas algébricos, mas sim almejamos analisar quais estratégias de resolução, nos problemas de estrutura algébrica tipo partilha, são realizadas por alunos do ensino superior.

É comum pensarmos que alunos em séries mais avançadas tendem a ter mais facilidade de resolver problemas matemáticos, todavia, segundo Lochhead e Mestre (1995), as dificuldades para resolução de problemas de estruturas algébricas não são particulares a alunos que estão iniciando seus estudos em álgebra, são também para discentes de níveis de escolaridade mais avançados ou de nacionalidades diferentes.

> Parece, portanto, que o ensino nos Estados Unidos, em Israel e em Fiji – e, acreditamos, em quase toda parte – não oferece aos alunos oportunidades de aprender a interpretar sequências de símbolos matemáticos. Os alunos não aprendem a ler e a escrever em matemática! Essa omissão não só limita seu desempenho na resolução de problemas, como também os coloca em séria desvantagem quando se trata de aprender a manipulação simbólica das regras da álgebra. Sem a capacidade de interpretar expressões, os alunos não dispõem de mecanismos para verificar se um dado procedimento é correto. Assim, muitas vezes eles têm de recorrer a lembranças dos procedimentos automatizados para resolver problemas. (LOCHHEAD e MESTRE, 1995, p. 148).

Deste modo, nosso estudo torna-se relevante para observamos se os alunos em etapa de graduação em matemática utilizam ou não estratégias de resolução que teoricamente seriam mais propícia para os educandos que ainda não têm certa maturidade em matemática, como os que estão iniciando o ensino de álgebra. Por outro lado, nossa pesquisa propicia também um confronto com outros trabalhos que discutem a temática dos problemas algébricos, porém inseridos em esferas de ensino diferentes, ampliando-se na referida pesquisa, na qual buscamos conhecer as estratégias dos alunos licenciandos em matemática.

O estudo sobre problemas de estrutura algébrica e suas estratégias de resoluções tem tomado visibilidade e importância no meio científico e isso nos incentiva a aprofundarmos nossos conhecimentos nesta área, como também, contribuirmos para a disseminação desse estudo. É importante que venhamos a ter conhecimento de outras pesquisas que norteiam este tema e, para tanto, comentaremos a respeito de estudos realizados nessa área para enfatizarmos o desejo de darmos continuidade nessa questão específica dos problemas de estrutura algébrica e suas estratégias de resoluções.

Estudiosos que seguiram essa linha de pesquisa se propuseram a investigar os problemas algébricos desde a sua abordagem nos livros didáticos ao método/estratégia de resolução utilizada pelos alunos do ensino fundamental.

Almeida (2011) analisou dez livros didáticos utilizados no 7º ano do ensino fundamental. Em sua análise, deteve-se, preferencialmente, aos capítulos dos livros que propunham o ensino das equações polinomiais do 1º grau com uma incógnita. Neste sentido, o pesquisador aprofunda suas análises nos problemas envolvendo equações algébricas. Como resultado deste trabalho, o pesquisador classificou os problemas encontrados nos livros didáticos, entre os quais se encontravam os chamados *problemas de partilha*.

Em suas discussões, Almeida (2011) aponta que os livros didáticos têm uma forte tendência em abordar "falsos problemas" que segundo ele, não favorecem a passagem da aritmética à álgebra. Relata também que foram encontrados, em 90% dos livros analisados, problemas de estrutura aritmética que não justificam o uso de equações na sua solução. Em relação aos problemas de estrutura algébrica, todos os livros abordam os problemas de partilha, tendo preferência para aqueles com encadeamento tipo fonte e com apenas uma relação, que são os considerados mais fáceis de serem resolvidos pelos estudantes.

Os pesquisadores Câmara e Oliveira (2010) trabalharam em uma proposta de pesquisa diferente da de Almeida (2011). Os autores se dispuseram a investigar estratégias utilizadas por alunos do 6º ano do ensino fundamental diante de alguns problemas de partilha, classificando os erros e acertos e quantificando os dados obtidos, tanto no que diz respeito às estratégias de resolução, como também a questões em branco.

Em linhas gerais, os pesquisadores perceberam certa dificuldade na resolução por parte dos alunos em alguns problemas como relatam afirmando que "os resultados mostram que certas estruturas de problemas são mais difíceis para os alunos que outras, e que o tipo de operação associada às relações entre as incógnitas também influencia o sucesso dos alunos" (CÂMARA e OLIVEIRA 2010, p. 1). Essa pesquisa se torna relevante para nós, pois os objetivos almejados nela, verificar as estratégias utilizadas por alunos do 6º ano na resolução dos problemas de partilha, se relacionam com a nossa proposta de estudo nesse trabalho, uma vez que nos propomos também a investigar tais estratégias de resolução desses problemas, porém dirigindo-nos aos estudantes de licenciatura em matemática.

Outro autor, Santos Junior (2013), de maneira geral, propôs uma análise a respeito das estratégias utilizadas na resolução de problemas de estruturas algébricas bem como a quantificação dos dados coletados referentes ao percentual de erros e acertos em cada problema de partilha. Como resultado de sua pesquisa, verificou certa dificuldade dos alunos do 7º, 8º e 9º ano do ensino fundamental em determinados tipos de problemas do tipo partilha, variando de acordo com o encadeamento do problema e ano de escolaridade. Porém, segundo Santos Junior (2013, p. 102), "em relação à performance, ficou constatado que, com o avanço de escolarização, os sujeitos melhoram o desempenho na resolução de problemas de partilha [...]". Podemos entender esse dado obtido como algo um tanto quanto natural, pois o aluno com o passar dos anos começa a acumular experiência e conhecimento que em determinadas situações podem ser utilizados como um recurso para resolver problemas matemáticos.

Os resultados obtidos por Santos Junior (2013) evidenciam, assim, a necessidade de atentarmos para as práticas de ensino-aprendizado empregadas nesse tipo de problema ou se tais atividades com problemas matemáticos estão sendo desenvolvidas em sala de aula com objetivos necessários para cada ano de escolaridade, uma vez que os resultados obtidos não são totalmente satisfatórios.

Assim, investigar as estratégias de resolução dos alunos diante de problemas de estruturas algébricas, do tipo partilha, com equações polinomiais do 1º grau também é um objeto de nosso estudo. Entretanto, diferentemente de Almeida (2011) se dedicou à análise dos problemas empregados nos livros didáticos, Câmara e Oliveira (2010) que se detiveram ao estudo das resoluções de alunos do 6º ano do ensino fundamental e Santos Junior (2013) se propôs ao estudo das estratégias utilizadas para resolução de problemas de partilha dos alunos do 7º, 8º e 9º ano do ensino fundamental.

Especificamente, iremos adentrar em outra etapa da vida escolar dos alunos que o prepara para ser um profissional da educação e, mais especificamente, um professor de matemática. Com isso, nos interessa investigar que estratégias para resolver problemas de estrutura algébrica, tipo partilha, são utilizadas por eles e ainda se tais estratégias carregam características de estudantes de ensino fundamental apontadas em outras pesquisas. Isso pode levantar indagações sobre uma falta de mudança na postura em relação ao processo de pensar matematicamente desses alunos.

1.5 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

A organização do trabalho está estruturada em seis capítulos, a saber:

Introdução

Descrição breve e objetiva sobre a pesquisa, apresentando de forma genérica nossa proposta de estudo, apontando pesquisas que nos incentivaram a estudar sobre o tema em questão, o problema de pesquisa, os objetivos do trabalho e justificando a importância e contribuições desse estudo para a área da Educação Matemática e para o estudo dos problemas de estruturas algébricas tipo partilha.

Capítulo 1: A Álgebra

O capítulo é reservado para discussões teóricas sobre o tema com uma breve explanação da história da álgebra. Nas demais subseções, iniciamos um ensaio sobre o ensino de álgebra e as dificuldades dos alunos, trazendo alguns apontamentos sobre o tema através de pesquisas realizadas na área. Tecemos alguns comentários nesse capítulo sobre a resolução de problemas no ensino de álgebra, como também as implicações do ensinar pela resolução de problemas.

Capítulo 2: Problemas de Estrutura Algébrica

São apresentadas características desses problemas e como os identificar dos demais problemas matemáticos, como por exemplo, um problema aritmético. Em seguida discutimos nosso estudo com ênfase nos problemas de partilha, peça fundamental em nosso estudo, classificando-os e exemplificando-os de acordo com pesquisadores que já estudaram a respeito de tais problemas.

Capítulo 3: Estratégias de Base na Resolução de Problemas de Partilha

Neste capítulo apresentamos as estratégias de resolução de acordo com Câmara e Oliveira (2010), como também os resultados por eles obtidos em pesquisa realizada com alunos do 6º ano do ensino fundamental, resultados estes que servirão como dados comparativos junto aos que esperamos encontrar em nosso estudo com estudantes de licenciatura em matemática.

Capítulo 4: Metodologia

Descrevemos a metodologia da pesquisa, relatando os participantes, assim como o contexto e os procedimentos metodológicos para coleta e análise dos dados.

Capítulo 5: Análise e Discussão dos Resultados

Apresentamos neste capítulo os resultados do estudo realizado com os alunos do ensino superior. Neste, analisamos suas estratégias de resolução dos problemas de partilha propostos, discutimos as análises sobre o percentual de utilização das estratégias, bem como as dificuldades em resolver os problemas de acordo com os encadeamentos estudados e comparamos as análises feitas com os dados apresentados da pesquisa de Câmara e Oliveira (2010), discutindo se os resultados de nossa pesquisa caminham no mesmo sentido ou não da dos autores citados.

Considerações finais

Apresentamos de forma geral os resultados obtidos nessa pesquisa, comparamos e comentamos a respeito dos dados da pesquisa de Câmara e Oliveira (2010). Finalmente, apresentamos as referências utilizadas nesta pesquisa.

2. A ÁLGEBRA

2.1 Álgebra: Uma breve observação histórica

A origem da álgebra é remota, segundo Eves (2004, p. 61-62),

> Perto do ano 2000 a.C. a aritmética babilônica já havia evoluído para uma álgebra retórica bem desenvolvida. Não só se resolviam equações quadráticas, seja pelo método equivalente ao de substituição numa forma geral, seja pelo método de completar quadrados, como também se discutiam algumas cúbicas (grau três) e algumas biquadradas (grau quatro).

É evidente que neste período a álgebra não dispunha dos símbolos nem da linguagem atual, entretanto, podemos perceber que os babilônicos tinham certas habilidades de resolver as equações, desenvolveram um sistema aritmético avançado com o qual puderam fazer cálculos algébricos. Segundo Eves (2004),

> A matemática egípcia nunca alcançou o nível obtido pela matemática babilônica. Com esse sistema eles foram capazes de aplicar fórmulas e calcular soluções para incógnitas numa classe de problemas que, hoje, seriam resolvidos como equações lineares, equações quadráticas e equações indeterminadas. (EVES, 2004. p. 67)

Os babilônicos detinham um grau muito avançado de conhecimento, segundo Boyer (1996, p.23),

> A redução babilônica de uma equação quadrática da forma $ax^2 + bx = c$ à forma $y^2 + by = ac$ pela substituição $y = ax$ mostra o grau extraordinário de flexibilidade da álgebra mesopotâmica. Essa facilidade, junto com a ideia de valor posicional, explica em grande parte a superioridade dos babilônicos em matemática.

De acordo com Baumgart (1992), a palavra álgebra significa “uma variante latina da palavra árabe al-jabr”, diferentemente de algumas palavras, como, por exemplo, “aritmética” que deriva do grego *arithmos* (número). Almeida (2011) comenta que, esta palavra, al-jabr, é encontrada no título do livro, *Al-jabr wa-al-Muqabilah*, escrito em Bagdá por volta do ano 825 pelo matemático árabe Al Khowarizmi.

O estudo da álgebra, assim como os conceitos da matemática em geral, se desenvolveu por meio de vários matemáticos e civilizações como os babilônicos, egípcios, árabes, gregos e outras civilizações, como também por matemáticos, Al-Khwarizmi, Fraçois Viète, Diofante de Alexandria, Rene Descartes, entre outros, os quais contribuíram em suas respectivas épocas de vida enfrentando as facilidades e dificuldades contemporâneas.

A álgebra evoluiu e se expandiu por várias áreas do conhecimento. Hoje, ela estuda desde situações mais simples e cotidianas até situações mais abstratas e complexas inerentes à matemática, como o estudo de grupos, anéis e corpos.

As fases históricas mais significativas com respeito à álgebra demarcaram as três fases do seu desenvolvimento que ficaram conhecidas como a álgebra retórica ou verbal, álgebra sincopada e álgebra simbólica. Essas fases, segundo Fiorentini, Miorim e Miguel (1993, p. 79-80), são caracterizadas como segue:

- *Álgebra retórica ou verbal:* corresponderia à fase em que não se fazia uso de símbolos nem abreviações para expressar o pensamento algébrico. Todos os passos relativos aos esquemas operatórios sobre números e equações eram descritos em linguagem corrente.

- *Álgebra sincopada:* teria surgido com Diofanto de Alexandria (século III), pois foi ele quem, pela primeira vez, introduziu um símbolo para a incógnita – a letra 'sigma' do alfabeto grego – e utilizou uma forma mais abreviada e concisa para expressar suas equações. Nesta fase ainda se utilizavam palavras e símbolos nas equações.

- *Álgebra simbólica:* corresponderia ao momento em que as ideias algébricas passam a ser expressas somente através de símbolos, sem recorrer ao uso de palavras.

Deste modo, podemos ter uma noção de como se deu o processo que levou a álgebra a chegar na estrutura vista nos dias atuais. Este fato não ocorreu por meio de um só matemático, mas sim por um processo envolvendo muitos deles, assim, destacamos aqui alguns nomes que deram contribuições importantes para que a linguagem algébrica tomasse a forma atual.

François Viète (1540 -1603), matemático francês, "foi o principal responsável pela introdução de novos símbolos na álgebra. Além de utilizar os sinais germânicos '+' e '-', introduziu as vogais para representar quantidades constantes e as consoantes para quantidades incógnitas" (FIORENTINI, MIORIM e MIGUEL, 1993, p.80).

Outro matemático que contribuiu significativamente para simbolização da álgebra foi René Descartes (1596-1650). Segundo estudos em história da matemática, foi ele o responsável pela passagem para uma álgebra completamente simbólica. De acordo com Fiorentini, Miorim e Miguel (1993, p. 80), "Descartes consolidaria o uso da linguagem simbólica com a publicação, em 1637, de sua obra *La Géométrie*. Neste, Descartes utiliza as últimas letras do alfabeto (*x,y,z,...*) como incógnitas (e implicitamente como variáveis) e as primeiras (*a, b, c, d,...*) como quantidades fixas”.

Sabemos que não foram apenas esses matemáticos que contribuíram para a simbolização da álgebra, mas outros grandes contribuíram, à medida que surgia a necessidade de uma nova notação para esclarecer melhor o problema trabalhado ou mesmo para resolver questões de seus estudos.

Vimos que o avanço da representação algébrica se deu por períodos, sendo dividida em momentos que não se utilizavam símbolos, no caso do período da álgebra retórica ou verbal, fase em que foram inseridos alguns símbolos, fase sincopada, e a fase totalmente simbólica, como vista e utilizada nos dias atuais.

2.2 A sala de aula, ensino de álgebra e a dificuldade dos alunos: questões em discussão

Bessa de Menezes e Câmara (2015), pensando nas questões do cotidiano na prática do professor na sala de aula, desenvolvem uma discussão em seu artigo sobre a Teoria Antropológica do Didático (TAD). De acordo com os autores, essa teoria foi apresentada por Yves Chevallard (1998) com o propósito de analisar um dos problemas do professor, que é preparar suas aulas e depois colocá-las em prática, em outras palavras, como organizar um objeto de estudo (matemático) e fazê-lo funcionar em sala de aula?

De acordo com Bessa de Menezes e Câmara (2015, p. 2) na proposta da TAD, conforme o pensamento de Chevallard, “podemos perceber elementos da gestão do tempo, do contrato didático, da transposição didática, enfim, de diversos fenômenos didáticos que se mostram em sala de aula, a partir do olhar da TAD”. Ou seja, essa teoria abre os horizontes para entendermos as múltiplas relações em sala de aula. Entretanto, nossa pesquisa não objetiva estudar esses fenômenos de modo específico, mas através dessa teoria nos apoiamos para compreender a relação entre um objeto de estudo, a pessoa e a instituição.

Bessa de Menezes e Câmara (2015) afirmam que para Yves Chevallard (1998) começar sua teorização são necessários três conceitos primitivos: os objetos, que eles denotam por “O”, as pessoas, denotadas por “X”, e as instituições “I”.

De acordo com Bessa de Menezes e Câmara (2015, p. 2) “o objeto O toma uma posição privilegiada em relação aos outros temas em virtude de ser o ‘material de base’ da construção teórica.”. Os autores explicam que para Chevallard tudo é objeto, e ele usa uma analogia com o universo matemático contemporâneo, fundado na teoria dos conjuntos, em que tudo é um conjunto. Deste modo, os autores explicam que na teoria de Chevallard "todas as coisas serão objetos"; as pessoas X e as instituições I também são objetos.

Os autores afirmam que o objeto existirá a partir do momento que ele for reconhecido como existente por uma pessoa X ou instituição I. Disto, Bessa de Menezes e Câmara (2015) percebem a relação denotada por eles de R(X,O) e outra relação R(I,O). Este pensamento com base em Chevallard (1998).

Os autores aplicam esse pensamento em um exemplo que nos ajuda a perceber melhor o que Chevallard quer dizer, ou seja,

> Assim sendo, um objeto O que identificamos como cadeira só existe porque a população (pessoa) e a sociedade (instituição) a reconhecem como tal e, assim, satisfaz a sua condição de existência. Apesar de a afirmação anterior parecer óbvia, devemos perceber que alguns objetos não existem (ou ainda não existem) para algumas instituições. Por exemplo, o Tardígrafo, animal microscópico que vive em finas películas de água, é objeto de estudo para os biólogos, mas não é conhecido pela maioria de nós. (BESSA DE MENEZES e CÂMARA, 2015. p. 3).

Diante disso os autores comparam essa situação com a sala de aula, pois existem objetos de saber que ainda não são conhecidos pelos alunos (pessoa). Por outro lado, já são conhecidos pelo professor (instituição), e dessas relações que serão geradas em sala de aula (sujeito-objeto, sujeito-instituição, instituição-objeto) é que se dará a aprendizagem.

Mas de que forma se relacionam os objetos O e instituição I? De acordo com Bessa de Menezes e Câmara (2008, p. 3) "a cada instituição I está associado um conjunto de objetos O que são conhecidos por I, ou seja, existe uma relação institucional R(I, O)". Deste modo, os autores entendem que o objeto O se relaciona com a instituição I através de suas características próprias, por exemplo, a noção de porcentagem para uma instituição financeira (um banco) pode representar taxas e lucros, enquanto para a engenharia civil pode representar proporcionalidade entre partes de uma mistura (um traço de concreto). Logo, para Bessa de Menezes e Câmara (2008), o objeto O pode estabelecer diferentes formas de relações de acordo com a instituição R1(O), R2(O), R3(O) etc. Assim como seu desenvolvimento dentro destas instituições pode vir a ser modificado com o passar do tempo, ou seja, evoluir, envelhecer ou até mesmo desaparecer.

De acordo com Bessa de Menezes e Câmara (2015), podemos pensar que a instituição sala de aula denotada por eles de I1, tem em seus sujeitos X1 (os alunos), objetos O1 (saberes) e seus agentes que irão regular a conformidade ou a não conformidade com a instituição I1, de acordo com a intencionalidade estabelecida são: os professores, o contrato didático e o institucional estabelecidos, as avaliações, dentre outros que aparecerão de acordo com o momento necessário.

Bessa de Menezes e Câmara (2008, p.5) afirmam que, “em alguns momentos, que os sujeitos X1 realizam certas escolhas, ou seja, quais são os objetos O1 que desejam construir ou alterar a relação existente R(X1, O1)”. De acordo com eles, essas escolhas se dão através dos seus interesses sobre aquele determinado objeto em I1, o maior interesse passa a ser “ficar adequado” nessa relação sob o constrangimento de I1. Em outras palavras, os autores afirmam que um dos agentes reguladores dessa conformidade será a avaliação, o que poderá fazer com que X1 abra mão de todos os outros “pertences”, interessando a ele (X1), quase que somente, as estruturas, mecanismos, sequências que necessitará para realizar, em um determinado momento, seu papel de aluno. Para Bessa de Menezes e Câmara (2008),

> Essas alterações nas relações entre o sujeito X1 e o objeto O1, vão muito além de uma questão epistemológica do objeto O1 (saber) ou uma questão metodológica; elas partem, também, de uma intencionalidade vinculada ao contrato que é estabelecido. Não queremos deixar de fora esses outros fatores, de forma alguma, porém, é extremamente necessário quando olhamos para o saber escolar, entender que a relação dos contratos (pedagógico e didático) estabelecidos tem se assim podemos dizer um peso maior nas escolhas realizadas pelos sujeitos X1 (alunos). (BESSA DE MENEZES e CÂMARA, 2008, p.5),

Os autores apresentam ainda a avaliação como um dos elementos controladores da conformidade ou não conformidade. Na Instituição I1, pode nesse sentido vir (ao contrário do que se espera) a diminuir todo esse interesse pelo objeto O1, fazendo com que o sujeito X1 se preocupe somente com a conformidade, ou seja, quais os são os conjuntos de sequência que devem saber com intuito de terem a “adequação” esperada. Segundo Bessa de Menezes e Câmara (2008, p.5) “essa avaliação é estabelecida por meio de um contrato pedagógico e didático que, de certa forma, irá atribuir-lhe uma importância dentro de I1”. Deste modo, isso poderá comprometer a formação dos conceitos desse objeto O1 em jogo no cenário didático. Então é nesse sentido que esse saber será construído ou memorizado (dependendo da perspectiva do processo de ensino-aprendizagem).

Para Bessa de Menezes e Câmara (2015, p. 7) “essas alterações nas relações entre o sujeito X1 e o objeto O1 vão muito além da questão epistemológica do objeto O1 (saber) ou de uma questão metodológica”, partindo também de uma intencionalidade ligada ao contrato que é estabelecido.

De acordo com os autores, outro fator que interfere nas escolhas dos alunos está diretamente ligado à maturidade deles. Quando estão no início de sua escolarização, os interesses se voltam para o sucesso na instituição escola, mesmo sem que haja uma verdadeira aquisição de conhecimento.

Dentro desta perspectiva da construção do conhecimento em sala de aula as pesquisas indicam a dificuldade dos alunos em compreenderem os conceitos de álgebra e isso fica cada vez mais evidente quando aplicados em problemas. A grande questão está na raiz dessa possível dificuldade, evidenciando o importante debate sobre esse assunto no campo da educação matemática. Alguns sinais são apontados por autores e pesquisadores, a exemplo de Miguel, Fiorentini e Miorim (1992), apontam sobre o problema da álgebra ser ensinada com um caráter reprodutivo, sem significado, apenas como ferramenta para resolver problemas.

Araújo (2008) em seu artigo enfatiza nas falas de Miguel, Fiorentini e Miorim (1992), o caráter mecânico do ensino de álgebra, além disso, exemplifica esse ensino através do livro de Thiré (1944), de modo que,

> [...] isso mostra, mais uma vez, que a aprendizagem da álgebra era baseada em procedimentos; aos alunos cabia seguir o modelo apresentado. Na parte teórica do livro eram descritas as propriedades, sem nenhuma justificativa (ARAUJO, 2008, p. 3).

Esse contexto de ensino ocorre em anos anteriores a 1960 em que a matemática se dividia em aritmética, álgebra e geometria como se esses conceitos fossem dissociados um do outro. Não podemos afirmar que esse modo de ensinar álgebra foi mudado totalmente no decorrer dos anos, todavia, de acordo com Araújo (2008),

> Na década de 1960, com o surgimento do Movimento da Matemática Moderna, que possuía como um dos seus objetivos a unificação dos três campos fundamentais da matemática escolar através da introdução de elementos unificadores, como a teoria dos conjuntos, funções e as estruturas algébricas, a álgebra passou a ocupar um lugar de destaque. O ensino da álgebra recebeu um maior rigor e assumiu uma acentuada preocupação com os aspectos lógico estruturais dos conteúdos e a precisão da linguagem. (ARAUJO, 2008. p. 3)

Deste modo, a álgebra começa a perder seu caráter pragmático e útil em sua essência para resolver problemas, começamos então, a apreciar nas aulas o caráter preocupado com os aspectos operacionais e de propriedades. Por outro lado, Pires (1995, p. 44-45) aborda características desse ensino, sobretudo em álgebra, inerentes ao Movimento da Matemática Moderna em que atividades que envolviam aspectos do cotidiano foram deixadas de lado, o conhecimento prévio do aluno aprendido fora da escola foi sendo desconsiderado, além de uma evidente despreocupação em contextualizar a matemática com outras disciplinas, considerada uma tarefa não da matemática, mas das demais ciências em se contextualizar com ela.

De acordo com Araújo (2008), em meados da segunda metade de 1970 o Movimento da Matemática Moderna começa a entrar em declínio e isso abre margem para que outros pensamentos comecem a tratar os excessos que esse movimento trouxe ao ensino de matemática. Para tanto, D'Ambrósio (1997), em sua linha de pensamento, afirma que a partir daí se inicia uma preocupação em um caráter de aprendizagem mais atento à participação do aluno, investindo em atividades que os envolvam.

A grande questão no debate sobre o ensino de álgebra é como ela está sendo abordada em sala de aula e se é entendida pelos alunos de forma significativa. Para compreendermos a amplitude desse debate, Falcão (1996) relata em seu estudo com 481 sujeitos de idades entre 13 a 17 anos, que a dificuldade dos alunos em trabalhar com álgebra não se restringe somente a resolver problemas, mas isso é também um problema da capacidade do aluno processar algebricamente um problema, sendo isso concernente ao trabalho de transformações algébricas das equações.

Araújo (1999), em sua tese de doutorado, apresenta um estudo envolvendo 378 sujeitos, cujo objetivo de sua pesquisa foi investigar o desempenho dos alunos de diferentes níveis de escolarização, ou seja, alunos concluintes do ensino médio e alunos do ensino superior e, sobre seus desempenhos e dificuldades em álgebra. Diante do estudo, os resultados nos mostram um baixo rendimento dos estudantes no teste de álgebra, dentro de um contexto que abrange desde o desconhecimento total da álgebra quanto ao uso incorreto de operações, propriedades, definição de incógnitas, até mesmo de dificuldades advindas da aritmética, tais como, erros em operações, propriedades e na prioridade de operações. Olhando para esse estudo no que diz respeito às dificuldades algébricas apresentadas por esses alunos, observamos, segundo Araújo (1999), a dependência deles em seguir um mecanismo modelo para resolver equações algébricas simples; equações sem significado; o uso equivocado de incógnitas. Quanto aos erros no processamento das equações, o autor descreve o uso incorreto do princípio de equivalência e das regras de sinais. Logo, temos a dimensão desse problema tendo em vista as pesquisas realizadas.

Além das pesquisas já citadas, Biazi (2003) nos apresenta ainda, em seu estudo de dissertação, sua proposta de investigação com 126 alunos de diferentes níveis de escolaridade a fim de verificar seus desempenhos algébricos. Constata-se no estudo, segundo a pesquisadora, que as dificuldades e erros são correlatos entre os níveis de ensino levando em consideração às médias das notas obtidas, permanecendo os erros de ensino fundamental nos níveis médio e superior. Resultados preocupantes quando a autora expressa erros relacionados a essências das operações algébricas, na medida em que ela registra erros de expressões, tais como: “$a . a = 2a$” ou “$8a^2 + 216x^6 = 224a^2x^6$”. Em nossa pesquisa esperamos nos deparar com situações semelhantes, entretanto sabendo que nosso foco está nas estratégias de resolução de problemas algébricos tipo partilha.

Uma pesquisa realizada por Almeida e Câmara (2014) nos mostra indícios das dificuldades dos alunos em problemas algébricos, uma vez que, no referido estudo, os autores têm como questão de pesquisa se os alunos de licenciatura em matemática de uma instituição de ensino superior conseguem identificar indícios de pensamento algébrico em questões de problemas de estrutura algébrica tipo partilha, resolvidas por alunos da educação básica.

De acordo com Almeida e Câmara (2014), quando o problema algébrico não é resolvido com um registro simbólico (estrutura algébrica), esses alunos em graduação não conseguem identificar a resposta como certa, dando a questão resolvida como errada, isso, segundo os autores, “parece indicar que, mesmo estando no ensino superior, alguns licenciandos ainda têm dificuldades em responder problemas simples envolvendo equações polinomiais do 1º grau” (ALMEIDA e CÂMARA, 2014. p. 10).

Precisamos nos questionar a respeito de como os alunos em graduação interpretam a resolução de problemas de estrutura algébrica simples, de modo que, se já percebemos dificuldades desses alunos em analisar resoluções de problemas de estrutura algébrica, quanto mais no que se refere ao aluno resolver o problema. Almeida e Câmara (2014), comentam sobre dois problemas de partilha resolvidos por alunos do ensino básico, chamados de problema 2 e problema 3, neles, são apontados dois níveis de pensamento algébricos diferentes. Ao ser proposto para os licenciandos analisarem as respostas dos alunos, os pesquisadores percebem que, para os graduandos, é mais fácil analisarem a resposta de um problema de partilha quando o aluno utiliza uma estratégia e uma linguagem simbólica formal, como ocorrido no problema 3. Diferentemente do que é encontrado no problema 2, os alunos de educação básica resolvem o problema por uma estratégica algébrica, porém com uma linguagem sincopada. Kieran (1992) afirma que o aluno não precisa, necessariamente, utilizar uma linguagem algébrica formal para mobilizar o pensamento algébrico. Logo, os pesquisadores relatam que,

> Os resultados parecem indicar que fica mais fácil para os licenciandos analisarem a resposta a um problema de partilha quando o aluno utiliza uma estratégia e uma linguagem simbólica, uma vez que apenas um licenciando relatou que a resposta do aluno ao problema 3 estava errada, enquanto que seis tinham relatado que a resposta ao problema 1 estava errada e quatro relataram que a resposta ao problema 2 estava errada. (ALMEIDA E CÂMARA, 2014. p. 14)

Em outras palavras, o estudante de graduação ao se deparar com uma resolução de problema em que a linguagem algébrica formal não é apresentada, o licenciando é levado a considerar a resposta do problema como errada. Deste modo, os sujeitos em nível de licenciatura em matemática, percebem mais claramente o pensamento algébrico do aluno de educação básica quando ele se vale de uma linguagem algébrica totalmente simbólica, comumente utilizada na álgebra escolar, como as letras “x” e “y”, para representar incógnitas.

Por outro lado, Almeida (2016) apresenta em seu artigo um recorte de sua tese de doutorado, ainda em desenvolvimento, cujo objetivo é propor um modelo que possibilite a identificação de níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico revelado por alunos ao resolverem problemas de partilha de quantidades. Para chegar à construção do modelo apresentado, Almeida (2016) analisou as estratégias mobilizadas de 342 alunos do 6º ano do ensino fundamental para resolver esse tipo de problema, sendo 195 alunos brasileiros de três escolas do Recife e 147 estudantes canadenses de quatro escolas da província do Québec[1]. Para Almeida (2016, p. 4) “as estratégias adotadas podem revelar indícios de pensamento algébrico que indiquem em que nível de desenvolvimento o aluno se encontra”.

A partir dessas análises o pesquisador apresenta a caracterização dos níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico. Almeida (2016, p. 5) ressalta no artigo que “o modelo está sendo construído a partir de um tipo específico de problema de estrutura algébrica, os problemas de partilha com duas relações”. O pesquisador conclui seu pensamento afirmando que, “dizer que o aluno se encontra no nível consolidado de pensamento algébrico, não significa que ele tenha condição de resolver todas as situações que necessitem da mobilização dessa forma de pensar” (ALMEIDA 2016, p. 5).

Em linhas gerais, o autor identifica quatro níveis de pensamentos algébricos construídos a partir da análise das estratégias dos estudantes. Esses níveis percorrem desde a

---

[1]De acordo com Almeida (2016), os protocolos foram cedidos por Oliveira e Câmara (2011) de uma pesquisa realizada em 2009 com o objetivo de identificar as estratégias mobilizadas por alunos do 6º ano do ensino fundamental na resolução de problemas de partilha. Participaram da pesquisa 342 alunos e cada um respondeu a sete problemas de partilha.

ausência do pensamento algébrico até um nível de pensamento algébrico consolidado. Almeida (2016) denomina de nível 0 (ausência de pensamento algébrico) um nível em que não se encontra, nas respostas dos alunos, indícios de pensamento algébrico; Nível 1 (pensamento algébrico incipiente), em que nas respostas dos alunos começam a aparecer alguns elementos caracterizadores do pensamento algébrico; nível 2 (pensamento algébrico intermediário), em que as respostas dos alunos se aproximam das respostas tradicionalmente esperadas, e, por fim, o nível 3, em que o pensamento algébrico dos alunos se encontra em um nível consolidado.

Em nível de avaliação nacional, observamos as mesmas dificuldades no rendimento dos alunos em matemática, em especial, no ensino de álgebra. O Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais (INEP), órgão pertencente ao Governo Federal, que realiza, através do Sistema Nacional de Avaliação Básica (SAEB), avaliações de desempenho visando melhorar o rendimento escolar do ensino fundamental e médio no Brasil, destacam inúmeras dificuldades dos alunos em conteúdos de matemática. Enfatizamos o que diz respeito à álgebra, uma vez que nos é apontado na avaliação do SAEB de 2005, por exemplo, que os alunos de 8º série apresentam baixo desempenho em álgebra, o que nos deixa inquietos enquanto pesquisadores da educação matemática. Na mesma perspectiva, Imenes e Lelis (1994), destacam,

> Professores e alunos sofrem com a álgebra da 7ª série. Uns tentando explicar outros tentando engolir técnica de cálculo com letras que, quase sempre, são desprovidas de significados para uns e outros. Mesmo nas tais escolas de excelência, onde aparentemente os alunos da 7ª série dominam todas as técnicas, esse esforço tem pouco resultado. (IMENES e LELIS, 1994. p. 2)

É nesse sentido que buscamos compreender, através desta pesquisa, como está a visão dos alunos em nível de licenciatura, em particular na resolução de problemas algébricos do tipo partilha, tendo eles adentrado no ensino superior objetivando ao final da conclusão do curso em licenciatura em matemática ministrar aulas. Porém, tomando conhecimento desse panorama educacional sobre o ensino de álgebra, nos indagamos e nos motivamos a inserirmos nesse campo de estudo voltado para essa temática de pesquisa. Nesse momento em especial, nos detendo na resolução de problemas algébricos tipo partilha. Podemos inferir sobre alguns possíveis questionamentos dos nossos leitores a respeito de como trabalhar o ensino de matemática, em particular os conceitos de algébrica, de modo a alcançar melhores resultados no aprendizado dos alunos. Na busca de situa-los sobre esse desafio, iremos introduzir algumas considerações sobre a resolução de problemas. Nesse sentido, a resolução de problemas é apresentada em nossa pesquisa apenas com um caráter fomentador da discussão sobre as potencialidades do ensino via resolução de problemas, como também, para nos levar a uma reflexão sobre essa tendência metodológica e linha de pesquisa na educação matemática.

2.3 Ensino de álgebra e a resolução de problemas

Os paradigmas da educação matemática se desenvolvem na medida em que buscamos respostas para as dificuldades que essa disciplina gera em nossos alunos. Questões pedagógicas, didáticas, conceituais e outras sempre tomam grandes proporções nos debates acadêmicos e na esfera da pesquisa científica, uma vez que há uma busca incessante para encontrarmos o mais rápido possível as respostas para nossos problemas educacionais de ensino na matemática. De acordo com Castro (2003):

> A partir da segunda metade do século XX, a preocupação com o ensino e a aprendizagem da Matemática cresce e surgem várias iniciativas para organizar as mudanças que se tornam necessárias na prática do professor. Muitas pesquisas são feitas e seus resultados, até hoje, vêm auxiliando novas práticas em sala de aula. (CASTRO, 2003. p. 3)

É de conhecimento que a matemática emerge na sociedade devido a busca para resolver problemas do cotidiano e este fato é inegável. Segundo Castro (2003, p. 3), “existem diferentes tendências quanto ao ensino desta disciplina, a maior parte delas bem recente, e muitas investigações vem sendo desenvolvidas, sobretudo a partir da década de 70”.

Sobre este ponto de vista que os estudiosos matemáticos de didática de ensino em geral apontam a *resolução de problemas* como uma importante saída para as dificuldades dos alunos. A resolução de problemas tem se tornado o principal viés para ensinar matemática, caminho este que nos leva a contextos históricos que mostram a importância da matemática em situações para resolver problemas do cotidiano como parte de sua relevância para as primeiras civilizações.

O principal pensamento do estudo na educação matemática hoje é dar significado aos conceitos matemáticos que estão em questão, na álgebra não é diferente, o que se deve buscar na sala de aula é que o aluno aprenda o significado dos conceitos, passando a pensar sobre o problema, não apenas resolver mecanicamente.

Castro (2003, p.3) se refere a dois caminhos pedagógicos, “uma primeira opção lida com as noções fundamentais da Álgebra, como se esta fosse uma espécie de Aritmética generalizada", isso quer dizer que o sentido de ensinar álgebra está sobre a estrutura de conjuntos numéricos, no que diz respeito às operações sobre esse conjunto e suas propriedades. Nesse sentido o aluno precisa dominar primeiramente a aritmética para só então estudar os conceitos algébricos, deste modo generalizando os processos aritméticos através da álgebra.

Castro (2003) ainda expõe um segundo caminho pedagógico para o ensino de álgebra:

> [...] uma segunda opção pedagógica caracteriza a Álgebra por um tipo específico de "fazer matemático" ou por um certo modo de pensar os problemas da Matemática, pensar este que veio a ser chamado "pensamento algébrico", distinto, por exemplo, de um "pensamento geométrico", de um "pensamento aritmético". (CASTRO, 2003. p. 3)

Dentro desse segundo caminho apontado pela autora notamos a presença do problema matemático como um caminho para se ensinar álgebra de maneira significativa, entendendo que um problema matemático pode estar ligado a outros ramos da matemática como, por exemplo, à geometria. Segundo ela, nessa perspectiva podemos considerar esse segundo caminho como um conjunto de posturas e pressupostos que dirigem uma nova prática em sala de aula, englobando distintas formas de agir no ensino da álgebra, podemos dizer que uma delas é a resolução de problemas. Percebe-se que dentre as grandes dificuldades dos alunos em álgebra está em saber o significado da equação que o problema algébrico gera. Castro (2003, p.4) diz que "uma das discussões mais importantes para a segunda opção pedagógica diz respeito ao conceito de equação. Equações equacionam problemas e esta dimensão do ensino da Álgebra foi perdida pela escola. Problemas dão sentido a uma equação".

2.4 Perspectivas sobre a resolução de problemas

Para entendermos melhor a respeito da resolução de problemas, iremos tecer alguns comentários de acordo com pesquisadores sobre o tema que é tão discutido na educação matemática. Sabemos da complexidade deste assunto, tendo em vista o grande debate que esse tema traz, dentro de perspectivas diferentes entre pesquisadores do mundo todo.

A resolução de problemas é vista como uma ferramenta metodológica muito discutida atualmente no campo da educação matemática, entretanto, em nossa pesquisa, esse debate é introduzido para fomentar uma discussão sobre um importante recurso para o ensino de conceitos matemáticos, como por exemplo, a álgebra. Neste momento do estudo, não utilizaremos essa discussão como ferramenta para análise de dados. Tendo em vista que nosso foco é investigar os tipos de estratégias de resolução de problemas do tipo partilha. Com isso, desenvolveremos essa discussão com um caráter informativo ao leitor para que ele perceba a existência de um importante recurso discutido por pesquisadores nos dias atuais na educação matemática.

Dito isto, não podemos começar sem nos questionarmos a respeito do que realmente seja a resolução de problemas. D'Ambrósio (2008) afirma que a resolução de problemas sempre foi considerada uma parte importante do ensino de matemática, Lupinacci e Botin (2004, p. 4) argumentam que "a Resolução de Problemas é um método eficaz para desenvolver o raciocínio e para motivar os alunos para o estudo da Matemática. O processo de ensino e aprendizagem pode ser desenvolvido através de desafios, problemas interessantes que possam ser explorados e não apenas resolvidos". Entretanto esse tema tem tomado grandes proporções ao longo dos anos e isso também acarreta em modificações nas concepções a respeito dele. De acordo com Onuchic (2008), podemos aprofundar nossas considerações de maneira mais clara e concisa sobre o tema resolução de problemas de modo que a autora afirma:

> durante a década de 1980, muitos recursos em resolução de problemas foram desenvolvidos, visando ao trabalho de sala de aula, na forma de coleções de problemas, listas de estratégias, sugestões de atividades e orientações para avaliar o desempenho em resolução de problemas. Muito desse material ajudou os professores a fazer da resolução de problemas o ponto central do seu trabalho. (ONUCHIC, 2008, p. 5)

Notamos que essa discussão toma impulso há décadas e isso ao longo do tempo passa a ser usado como material de trabalho em sala da aula para o professor. Percebemos que essa trajetória vem sendo a cada dia refinada pelos estudiosos sendo objeto de estudo cada vez mais constante em esferas de pesquisa cientifica em educação matemática. Podemos entender que a sala de aula apresenta diversas situações que levam o professor a refletir sobre sua prática de ensino e isso levanta as discussões sobre como o professor pode melhorar suas metodologias objetivando um melhor entendimento por parte do aluno. Onuchic (2008) ainda afirma que:

> Nessa importante década de 1980, também as dificuldades encontradas por professores para "ensinar" e as dos alunos para "aprender" passaram a ser consideradas como objetos de estudo e de reconceitualização por educadores e pesquisadores na Educação Matemática. Entretanto, havia linhas de pesquisa diferentes defendida por eles. (ONUCHIC, 2008, p.5)

Logo, as pesquisas caminham para uma busca em encontrar quais os efeitos que a resolução de problemas pode causar no aprendizado do aluno e como seria a melhor forma de usar esse recurso em sala de aula. Nesse momento percebemos a grande ascendência dos pesquisadores em descobrir e teorizar essa metodologia de ensino. Nesse sentido, Onuchic (2008) destaca três caminhos que Schroeder e Lester (1989) disponham para abordar a resolução de problemas.

> Percebendo a falta de concordância entre diferentes concepções sobre a resolução de problemas no contexto da matemática escolar, Schroeder e Lester (1989) apresentaram três caminhos para abordar resolução de problemas: teorizar sobre resolução de problemas; ensinar Matemática para resolver problemas; resolver problemas; e ensinar Matemática através da resolução de problemas. (ONUCHIC, 2008, p. 5)

Percebemos que as discussões aumentam na medida em que linhas de pesquisa aparecem para o confronto de ideias. O que acontece na ciência é que pesquisas trazem consigo perguntas que, para serem respondidas, levam outros pesquisadores a entrar no campo estudado. Neste sentido, Schroeder e Lester (1989) abrem três vertentes de estudo sobre a resolução de problemas e nelas encontramos pesquisadores que vão defender suas ideias de acordo com seus pontos de vista. Vimos, nas palavras de Onuchic (2008), que Schroeder e Lester (1989) apontam três caminhos para abordar a resolução de problemas. Onuchic (2008) comenta:

> O professor que ensina sobre resolução de problemas procura ressaltar o modelo de Polya ou alguma variação dele. Ao ensinar para resolver problemas, o professor se encontra na maneira como a Matemática é ensinada e o que dela pode ser aplicado na resolução de problemas rotineiros e não rotineiros. Nessa visão, a proposta essencial para aprender Matemática é a de ser capaz de usá-la. (ONUCHIC, 2008, p. 5)

Nesse sentido entendemos que Polya, apesar de ser um dos primeiros pesquisadores nesse tema, traz em sua linha de pensamento que resolução de problemas é um método a ser aprendido, transformando a ideia de que o aluno aprende a resolver problemas e não aprende por meio da resolução dos problemas. Então, Onuchic (2008) discute que os pesquisadores começam a se questionar sobre os efeitos desse método, indo mais além, em qual perspectiva didático-pedagógica a resolução de problemas se insere.

Nos dias atuais, as pesquisas sobre resolução de problemas tomam força como uma proposta metodológica aberta que permite uma diversidade de situações e reflexões por parte dos alunos. Sendo assim, cabe ao professor mediar essas reflexões fazendo com que eles busquem explorar a investigação e a comunicação de suas ideias. Esse pensamento se desenvolve por volta de 1980, como nos mostra Onuchic (2008).

> Mas, ao final da década de 1980, os pesquisadores passaram a questionar o ensino e o efeito de estratégias e modelos, e a discutir as perspectivas didático-pedagógicas da resolução de problemas. Ela passa a ser pensada como metodologia de ensino, como um ponto de partida e um meio de se ensinar Matemática. (ONUCHIC, 2008, p. 5)

A partir da influência de todas essas concepções e das pesquisas desenvolvidas nas últimas décadas junto aos professores e alunos, podemos tentar compreender o que entendemos hoje por resolução de problemas na perspectiva de uma ferramenta para aprendizagem. O termo perspectiva, cujo significado - certa forma de ver - corresponde a ampliar a conceituação de resolução de problemas como simples metodologia ou conjunto de orientações didáticas. Isto significa que organizar o ensino envolve mais que aspectos puramente metodológicos, incluindo uma postura frente ao que é ensinar e, consequentemente, do que significa aprender. Deste modo, Onuchic (2008) afirma que:

> A Resolução de Problemas como uma metodologia de ensino, se torna o lema das pesquisas e estudos em resolução de problemas para os anos 1990. Essa nova visão de ensino-aprendizagem de Matemática se apoia especialmente nos estudos desenvolvidos pelo NCTM, que culminaram com a publicação dos *Standards 2000,* oficialmente chamados de *Principlesand Standards in SchoolMathematics*(NCTM, 2000). (ONUCHIC, 2008, p. 5)

Nas palavras de Onuchic, podemos então ter um panorama do desenvolvimento da resolução de problemas e de suas percepções conceituais que ao longo dos anos foi se modificando e ganhando espaço de debate entre pesquisadores da educação matemática.

Depois desse momento, numa abordagem em sala de aula na perspectiva de resolução de problemas, o professor passa a confrontar as ideias dos alunos de modo a buscar, juntos, a resposta correta sobre o problema em questão. Passando então para última etapa, em que o professor, a partir das discussões com alunos, formaliza os resultados, culminando na organização dos conceitos do novo conhecimento aprendido, construído por meio da resolução de problemas. Deste modo, concordamos com Onuchic (2008) enfatizando em sua fala essa perspectiva sobre a resolução de problemas.

> Esse movimento de reforma na Educação Matemática, vigente até hoje, aponta para a Resolução de Problemas como primeiro padrão de procedimento para o trabalho como os padrões de conteúdo, sendo que o ensino de Matemática através da resolução de problemas é nele fortemente recomendado (ONUCHIC, 2008. p. 5-6)

A proposta de trabalhar a resolução de problemas em sala de aula ganha força quando se utiliza essa abordagem como um ponto de partida para aprendizagem e a construção do novo conhecimento, em outras palavras, o professor, neste processo, deixa de assumir o papel de puramente transmissor do conhecimento e passa a ser um mediador, levando os alunos a pensar, valorizando e incentivando a troca de ideias entre eles.

O que foi enunciado por nós linhas acima corrobora com as etapas metodológicas para trabalhar por meio da resolução de problemas, de acordo com Onuchic (2008, p. 5-8). Segundo a autora, se configuram em nove passos que professor deve se dedicar para conseguir, de fato, um resultado positivo no ensinar pela resolução de problemas. Vejamos:

1. Preparação do problema - Selecionar um problema visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento. Esse problema será chamado problema gerador. É bom ressaltar que o conteúdo matemático necessário para a resolução do problema proposto não tenha ainda sido trabalhado em sala de aula.
2. Leitura individual - Entregar uma cópia do problema para cada aluno e solicitar que seja feita sua leitura.
3. Leitura em conjunto - Formar grupos e solicitar nova leitura do problema, agora nos grupos. Se houver dificuldade na leitura do texto, o próprio professor pode auxiliar os alunos, lendo-lhes o problema. Se houver, no texto do problema, palavras desconhecidas para os alunos, surge um problema secundário. Busca-se uma forma de esclarecer as dúvidas e, se necessário, pode-se, com os alunos, consultar um dicionário.
4. Resolução do problema - De posse do problema, sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos, em seus grupos, num trabalho cooperativo e colaborativo, buscam resolvê-lo. Considerando os alunos como co-construtores da “matemática nova” que se quer trabalhar, o problema gerador é aquele que, ao longo de sua resolução, conduzirá os alunos na construção do conteúdo planejado pelo professor para aquela aula.
5. Observar e incentivar – Nesta etapa o professor não tem mais o papel de transmissor do conhecimento. Enquanto os alunos, em grupo, buscam resolver o problema, o professor observa, analisa o comportamento dos alunos e estimula o trabalho colaborativo. Ainda, o professor como mediador leva os alunos a pensar, dando-lhes tempo e incentivando a troca de ideias entre eles. O professor incentiva os alunos a utilizarem seus conhecimentos prévios e técnicas operatórias já conhecidas necessárias

à resolução do problema proposto. Estimula-os a escolher diferentes caminhos (métodos) a partir dos próprios recursos de que dispõem. Entretanto, é necessário que o professor atenda aos alunos em suas dificuldades colocando-se como interventor e questionador. Acompanha suas explorações e ajuda-os, quando necessário, a resolver problemas secundários que podem surgir no decurso da resolução: notação; passagem da linguagem vernácula para a linguagem matemática; conceitos relacionados e técnicas operatórias a fim de possibilitar a continuação do trabalho.

6. Registro das resoluções na lousa – Representantes dos grupos são convidados a registrar, na lousa, suas resoluções. Resoluções certas, erradas ou feitas por diferentes processos devem ser apresentadas para que todos os alunos as analisem e discutam.
7. Plenária – Para esta etapa são convidados todos os alunos para participarem da discussão dessas diferentes resoluções, para defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas. O professor se coloca como guia e mediador das discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos os alunos. Este é um momento bastante rico para a aprendizagem.
8. Busca de consenso – Após serem sanadas as dúvidas e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor tenta, com toda a classe, chegar a um consenso sobre o resultado correto.
9. Formalização do conteúdo – Neste momento, denominado "formalização", o professor registra na lousa uma apresentação "formal" – organizada e estruturada em linguagem matemática padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução do problema, destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades qualificadas sobre o assunto.

Não podemos deixar de destacar que o ponto chave para nossa pesquisa não se trata do ensino pela resolução de problemas propriamente dita, mas nos preocupamos nesta investigação em analisar que estratégias os alunos de graduação em matemática utilizam quando desafiados a resolverem problemas do tipo partilha. Porém, julgamos importante que tenhamos conhecimento das perspectivas e dos efeitos que a resolução de problemas pode trazer para a aprendizagem do aluno em matemática, sendo capaz de melhorar o desenvolvimento dos alunos nos estudos dos conceitos algébricos em sala de aula.

2.5 Problema Matemático

Nessa pesquisa, investigamos as estratégias utilizadas por alunos de graduação em matemática na resolução de problemas de partilha. Com isso, ao dissertarmos sobre esse tema, nos questionamos sobre *o que caracteriza um problema para a matemática.* Logo, realizamos uma discussão para compreender melhor a noção de problema, segundo as concepções de alguns autores.

De acordo com Onuchic (1999, p. 215), “Problema é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver”. Assim, percebemos que a autora defende o conceito de problema matemático como algo que possibilitará para o professor construir pontes, através da resolução do problema, objetivando construir novos conhecimentos e conceitos matemáticos.

Para Santos e Ponte (2001, p. 3), “um problema é uma dificuldade, não trivial, que se pretende ultrapassar”. Entretanto, esses mesmos pesquisadores afirmam que a ideia de problema pode ser vista de diversas maneiras. Em suas discussões, os autores destacam diferentes pensamentos de outros pesquisadores sobre o que caracteriza um problema matemático. Eles destacam, por exemplo, as vertentes que caracterizam um problema tomando como base a relação existente entre o indivíduo e a situação.

Por outro lado, os autores fazem menção aos pesquisadores que seguem a linha de pensamento caracterizando um problema tendo como base apenas as características da própria tarefa. Deste modo, percebemos que no primeiro caso, tomando o sujeito como o foco, uma dada situação pode ser um problema para uma determinada pessoa e não o ser para outra. No segundo caso, “uma dada situação será um problema se possuir um conjunto de características que se presumem problemáticas para todos os membros de certo grupo relativamente alargado de indivíduos” (SANTOS; PONTE, 2001, p. 3).

Semelhantemente, Dante (2009) considera problema uma a ser superada, algo a ser resolvido e que exige o pensar do indivíduo para solucioná-lo.

Outra definição é que “um problema é uma situação que difere de um exercício pelo fato de o aluno não dispor de um procedimento ou algoritmo que conduzirá com certeza a uma solução” (KANTOWSKI, 1981).

Para Araújo, (2009), um problema se caracteriza pelo fato de desenvolver a curiosidade, a busca, a pesquisa para se chegar à resposta. Nesse sentido, encontramos nos

Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) a definição de um problema matemático como uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, mas é possível construí-la.

Câmara (2002) coloca classificações interessantes acerca dos problemas matemáticos trabalhados em sala de aula. Ele classifica essas atividades em *problemas fechados, problemas abertos e situações-problema.*

Um problema fechado se caracteriza "como um problema cujo enunciado, ou localização, já identifica, para o aluno, qual o 'conteúdo' que deverá ser utilizado para resolvê-lo" (CÂMARA, 2002, p. 39).

Já para os problemas abertos como para as situações-problema o aluno deve "ser capaz de realizar tentativas, estabelecer hipóteses, testá-las e validar seus resultados, provando que são verdadeiros ou, em caso contrário, mostrando algum contraexemplo" (CÂMARA, 2002, p. 39). Deste modo, Câmara (2002) levanta uma diferenciação entre os problemas abertos e situações – problemas. O autor afirma que enquanto os problemas abertos levam o aluno à aquisição de um processo de resolução de problemas, ou seja, leva a uma atitude diante de um problema, a situação-problema leva o aluno à construção de um novo conceito matemático.

Diante dessas várias concepções, podemos pensar em um problema matemático como uma atividade que exigirá do aluno uma série de ações capazes de leva-lo à solução do problema. Percebemos que para alcançar a resposta o aluno constrói o conhecimento, ou seja, inicialmente ele não dispõe de algoritmos ou fórmulas capazes de levar as resposta de forma imediata.

3. PROBLEMAS DE ESTRUTURA ALGÉBRICA

3.1 Caracterizando problema de estrutura algébrica

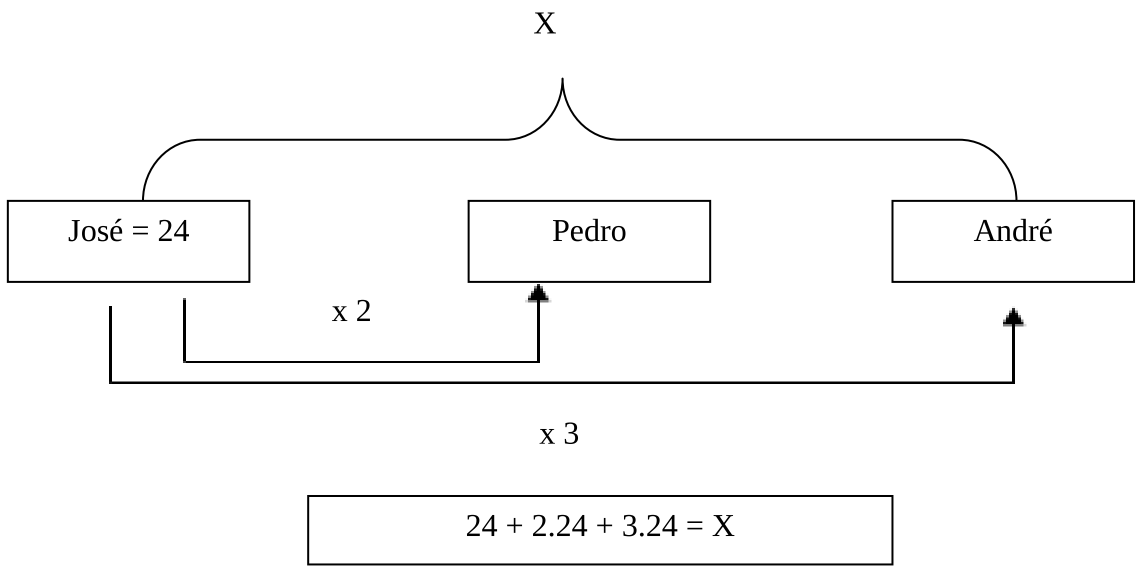
Nossa proposta de pesquisa está pautada nas estratégias utilizadas por licenciandos em matemática na resolução de problemas de estrutura algébrica, mais precisamente, os problemas de partilha. Desse modo, se faz necessário caracterizarmos tais problemas de acordo com pesquisadores da área.

De acordo com Da Rocha Falcão (1997) os problemas de estrutura algébrica são aqueles pelos quais os procedimentos aritméticos tornam-se cansativos, enfadonhos ou insuficientes. Segundo Marchand e Bednarz (1999), um problema de estrutura algébrica quando se caracteriza quando temos a necessidade de estabelecer relações entre as informações do enunciado do problema para converter em uma equação. Seguindo a mesma linha de raciocínio Marchand e Bednarz (1999), Gama (2003), diz que os problemas algébricos são aqueles em que há relações entre os elementos do enunciado. Em nossa pesquisa adotamos como definição de problemas de estrutura algébrica a caracterização dada por Marchand e Bednarz (1999).

Para as autoras supracitadas a diferenciação entre um problema de estrutura algébrica e problema aritmético é que, em um problema aritmético o aluno parte de valores conhecidos com a finalidade de determinar valores desconhecidos, como podemos observar no exemplo abaixo.

EXEMPLO 1. *José tem 24 figurinhas, Pedro tem o dobro de figurinhas de José e André tem o triplo de figurinhas de José. Quantas figurinhas os três têm, ao todo?*

Podemos representar esse problema a partir do esquema a seguir.

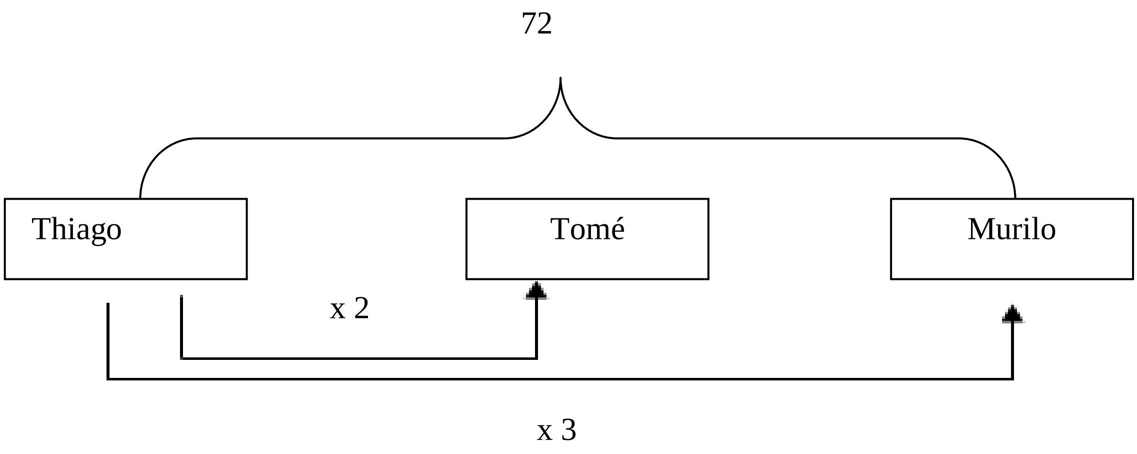


Neste problema o aluno chega ao resultado a partir de uma quantidade conhecida, expressa na questão pela quantidade de figurinhas de José, e em seguida ele faz a relação com os outros elementos do problema.

Quando nos referimos a um problema de estrutura algébrica, de acordo com Câmara (2010, p. 3), “em um problema de estrutura algébrica, o estudante é levado a partir de relações para se chegar ao valor desconhecido em um processo inverso ao problema do tipo aritmético”. Neste sentido, o aluno parte de um valor total conhecido afim de encontrar valores desconhecidos por meio de relações existentes no problema. Podemos compreender o que o autor descreve na citação acima acerca de um problema de estrutura algébrica no exemplo abaixo.

EXEMPLO 2. *Thiago, Tomé e Murilo, possuem, juntos, 72 bolinhas de gude e resolveram dividir de modo que, Tomé receba o dobro de Thiago e Murilo o triplo de Thiago. Quantas bolinhas de gude devem receber cada um?*

Vejamos a representação desse problema no esquema a seguir:



$$\boxed{X + 2X + 3X = 72}$$

Deste modo, em uma situação com essa característica, o estudante não pode partir de um valor conhecido, mas sim, deve ou deveria estabelecer relações entre os elementos do problema, tendo como objetivo encontrar uma equação que expresse o que está no enunciado.

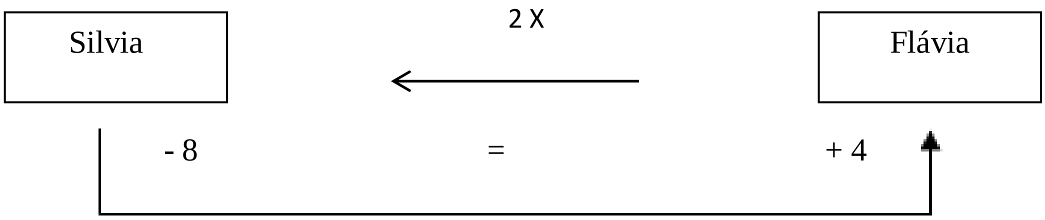
Marchand e Bednarz (1999), por meio de uma pesquisa realizada no Canadá, que teve por objetivo analisar os problemas de estrutura algébrica nos livros didáticos de matemática canadenses, identificaram e classificaram os problemas de estrutura algébrica em três tipos, a saber: *problemas de transformação*, *problemas de taxa* e *problemas de partilha*. Em nossa pesquisa daremos ênfase ao estudo dos problemas de partilha.

3.2 Problemas de Transformação

De acordo com Almeida (2011, p. 37) “os problemas de transformação se caracterizam por uma transformação que o valor inicial sofre que, por sua vez, não é dado explicitamente no enunciado do problema. Essa transformação no valor de partida gera uma nova situação, também desconhecida”. Nesse caso, tanto o valor inicial é desconhecido como os valores finais como mostrado no exemplo abaixo.

EXEMPLO 3*. Antônio, Silvia e Flávia estudam na mesma sala. A professora perguntou a Antônio a idade de Flávia ele respondeu o seguinte: Silvia tem o dobro da idade de Flavia. Se por acaso Silvia tivesse oito anos a menos e Flávia quatro anos a mais, teriam a mesma idade. Qual a idade de Flávia?*

De acordo com o problema, podemos representar a partir de uma operação de multiplicação, uma de subtração e outra de adição. Conforme o esquema abaixo.



Denotaremos de S = Silvia e F = Flávia.

$$\begin{cases} \mathbf{S = 2.F \ (I)} \\ \mathbf{S - 8 = F + 4 \ (II)} \end{cases}$$

No problema acima, a idade de Flávia é o valor inicial e desconhecido. Nesse valor inicial foram realizadas três transformações, sendo uma adição e subtração , que são representadas por "quatro anos a mais" e "oito anos a menos", e uma multiplicativa representada por "o dobro". Podemos encontrar um sistema equivalente ao enunciado.

Substituindo **I** em **II**, temos que,

$\mathbf{2.F - 8 = F + 4}$

$\mathbf{2.F - F = 4 + 8}$

$\mathbf{F = 12}$

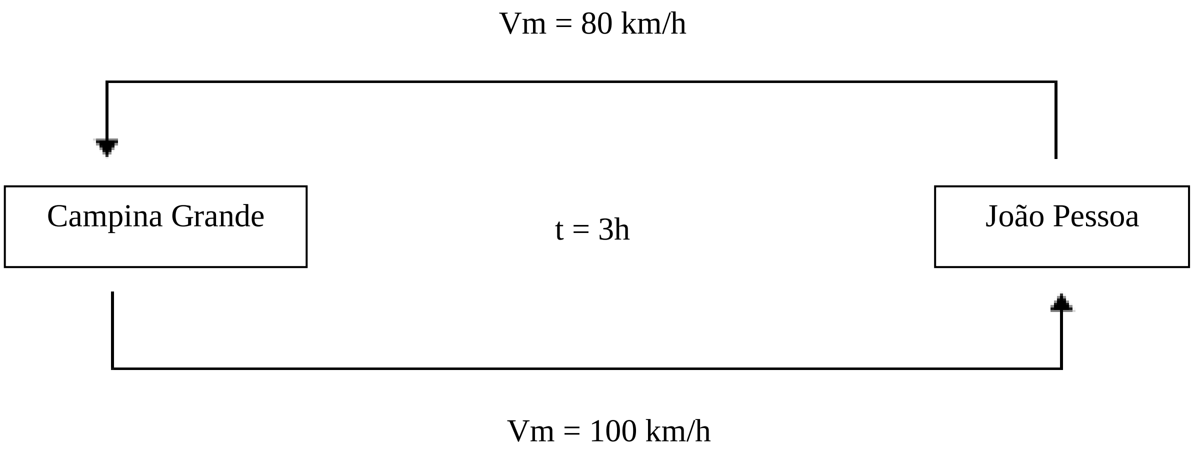
Logo Silvia tem 24 anos e Flávia 12 anos.

3.3 Problemas de Taxa

Almeida (2011, p. 38) define os problemas de taxa como sendo "aqueles que se caracterizam por existirem relações entre grandezas não homogêneas". Para se resolver esse tipo de problema, precisamos estabelecer relações entre as grandezas não homogêneas. Vejamos o exemplo a seguir.

EXEMPLO 4. *Leonardo viajou em seu carro de Campina Grande a João Pessoa. Ele observou que na ida seu carro desenvolveu uma velocidade média de 100 Km/h. Na volta,* *pela mesma estrada que foi seu carro desenvolveu uma velocidade média de 80 km/h. Se ele fez toda viagem de ida e volta entre as Cidades em 3 horas, qual a distância entre essas duas cidades?*

No caso do exemplo acima, é preciso estabelecer uma relação entre as grandezas (não homogêneas) velocidade média, tempo e distância, para obter a solução do problema. Esse tipo de problema pode ser representado conforme o esquema abaixo.



Para resolvermos esse tipo de problema, denotaremos de D a distância entre as duas cidades e de T_1 o tempo gasto para ida e T_2 o tempo gasto para volta. De acordo com as leis da física,

$$Vm = \frac{D}{t}.$$

IDA: $100 = \frac{D}{T_1}$, temos que $D = 100.T_1$ **(I)**

VOLTA: $80 = \frac{D}{T_2}$, temos que $D = 80.T_2$ **(II)**

Igualando **(I)** e **(II)** temos,

$100.T_1 = 80.T_2$

Colocando T_1 em função de T_2, obtemos:

$$T_1 = \frac{80\,.\,T_2}{100} \quad \textbf{(III)}$$

Sabendo que a soma dos tempos de ida e volta resulta em 3h, concluímos que:

$$T_1 + T_2 = 3 \quad \textbf{(IV)}$$

Substituindo **(III)** em **(IV)**, temos:

$$\frac{80 \,.\, T_2}{100} + T_2 = 3$$

Resolvendo a equação, segue que:

$$T_2 = \frac{5}{3} \text{ h}$$

Agora, substituímos T_2 na equação **(II)**. Logo,

$$\text{D} = 80 \bullet \frac{5}{3}$$

Portanto, a distância entre as cidades corresponde a aproximadamente 133, 3 km.

3.4 Problema de Estrutura Algébrica tipo Partilha

Um problema de partilha, de acordo com Almeida (2011, p. 39), "é caracterizado por ter um valor conhecido que será repartido em partes desiguais e desconhecidas, ou seja, nesse tipo de problema, tem-se uma quantidade total conhecida e essa quantidade é repartida em outras partes desiguais e desconhecidas".

Segundo Almeida (2016, p. 4), "estudos em história da matemática indicam que os problemas de partilha estão associados às origens da álgebra, tal como a conhecemos hoje, a partir da necessidade de repartir heranças e resolver situações do cotidiano". Além disso, pesquisas como as de Marchand e Bednarz (1999) e Câmara e Oliveira (2010) indicam que esse tipo de problema pode favorecer a passagem da aritmética à álgebra, uma vez que leva o estudante a estabelecer relações entre as informações do enunciado.

Problemas dessa natureza foram estudados por Marchand e Bednarz (1999), que identificam três tipos de problemas desse tipo, "problema de transformação", "problema de taxa" e "problema de partilha". Segundo Câmara e Oliveira (2010), nos problema de partilha,

> [...] aparecem relações entre os dados (incógnitas) e uma quantidade total (conhecida), que é expressa em função de suas diferentes partes (desconhecidas).

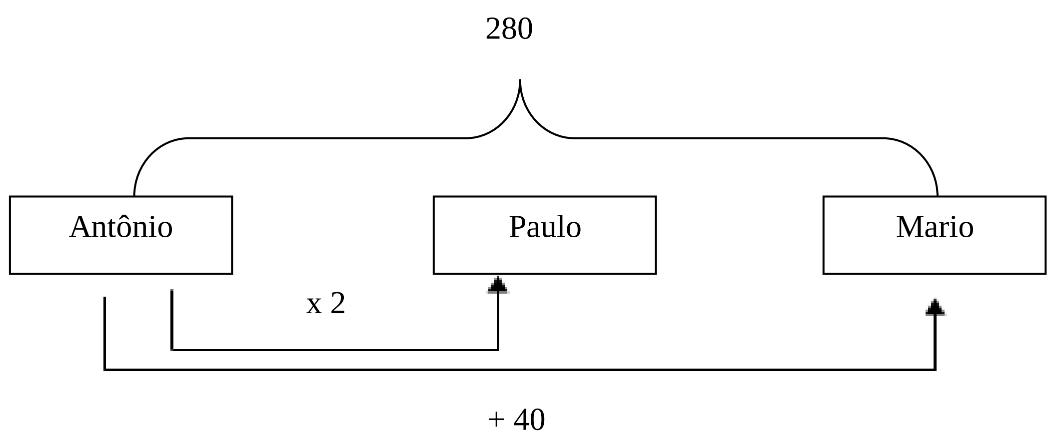
> Entre essas partes são estabelecidas relações de comparação, levando a uma composição dessas relações. (CÂMARA E OLIVEIRA, 2010. p. 3)

Câmara e Oliveira (2010, p.3) chamam a atenção para a resolução desse tipo de problema, levando em consideração o pensamento de Kieran (1992), “em situação de resolução de problemas, o esforço prévio de ‘armar’ a equação é cognitivamente mais trabalhoso que o trabalho posterior de escolha e execução de um algoritmo algébrico”. Tais afirmações os levam a acreditar que, talvez, a maior dificuldade dos alunos ao lidar com problemas de natureza algébrica resida na conversão dos dados de um determinado enunciado para outro tipo de registro de representação. Câmara e Oliveira (2010) mencionam o pensamento de Duval (2003), chamando esse procedimento de conversão. A conversão para os autores se torna fundamental para a resolução de problemas de estrutura algébrica.

Podemos observar o exemplo de um problema de partilha a seguir:

EXEMPLO 5*. Antônio, Paulo e Mario têm, juntos, R$ 280,00. Paulo tem o dobro de dinheiro de Antônio e Mário tem R$ 40,00 a mais que Antônio. Quantos reais têm cada um?*

Este problema pode ser representado pelo seguinte esquema.



$$\boxed{X + 2X + (X + 40) = 280}$$

Percebemos que no problema de partilha há uma quantidade total conhecida, que no exemplo supracitado é expressa por, “*juntos têm, R$ 280,00”.* A partir dessa quantidade o aluno terá que estabelecer relações entre as informações do enunciado para a construção de uma equação.

De acordo com Marchand e Bednarz (1999), os problemas de partilha podem ser classificados levando em consideração o "*número de relações*", a "*natureza das relações*" e o "*encadeamento*" das relações. Em nosso trabalho fixamos a variável número de relações em duas, fazendo variar as outras.

No exemplo 5 temos um problema de partilha com duas relações, no qual a sentença, "*Paulo tem o dobro do dinheiro de Antônio", expressa a primeira relação e "Mario tinha R$ 40,00 a mais que Antônio"* a segunda relação. Quando nos referimos à *natureza das relações* desse tipo de problema, fazemos menção às operações envolvidas nele, que pode ser de natureza aditiva – adição/subtração – ou de natureza multiplicativa – multiplicação/divisão –, no exemplo anterior, temos na expressão *"Paulo tinha o dobro"* uma relação de natureza multiplicativa. Por outro lado, na expressão *"Mario tinha R$ 40,00 a mais"* temos uma relação de natureza aditiva.

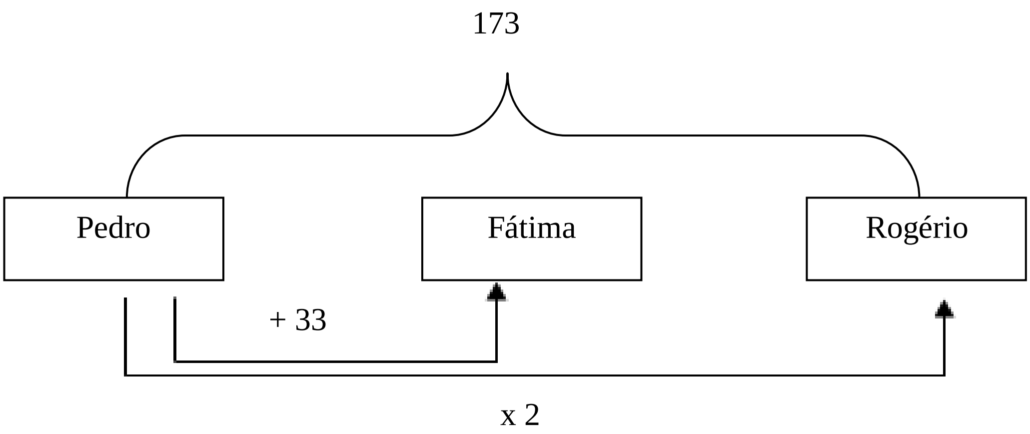
Quanto ao encadeamento das relações, os problemas de partilha, segundo as autoras, podem ser do tipo *fonte*, *composição* e *poço*.

3.4.1 Problema de partilha em que o encadeamento é tipo fonte

De acordo com Câmara e Oliveira (2010, p. 4), "no problema tipo fonte as relações envolvidas são geradas a partir de uma mesma grandeza". No problema a seguir, temos um exemplo de um problema de partilha de encadeamento do tipo fonte.

Exemplo 4*. Pedro, Fátima e Rogério colecionam álbuns de figurinhas a muitos anos. Conversando em um determinado dia viram que, juntos, possuíam 173 álbuns de figurinhas. Fátima tem 33 álbuns a mais que Pedro e Rogério têm o dobro de álbuns de Pedro. Quantos álbuns de figurinhas têm cada um?*

Deste problema, temos o seguinte esquema que pode nos ajudar a compreender melhor esse tipo de situação.



$$\boxed{X + (X + 33) + 2X = 173}$$

O esquema acima ilustra a situação de um problema de partilha tipo fonte, onde as relações são geradas pela mesma grandeza. A fonte fixa do problema é a quantidade de álbuns de Pedro, a qual pode ser representada por "*X"*. No problema acima, dizer que "*Fátima tem 33 álbuns a mais que Pedro"* é representar essa expressão por *"X + 33*" e dizer que "*Rogério têm o dobro de álbuns de Pedro"* é a representação expressa por "*2X"*. Convertendo as relações envolvidas no problema, chegamos a equação polinomial do 1º grau,

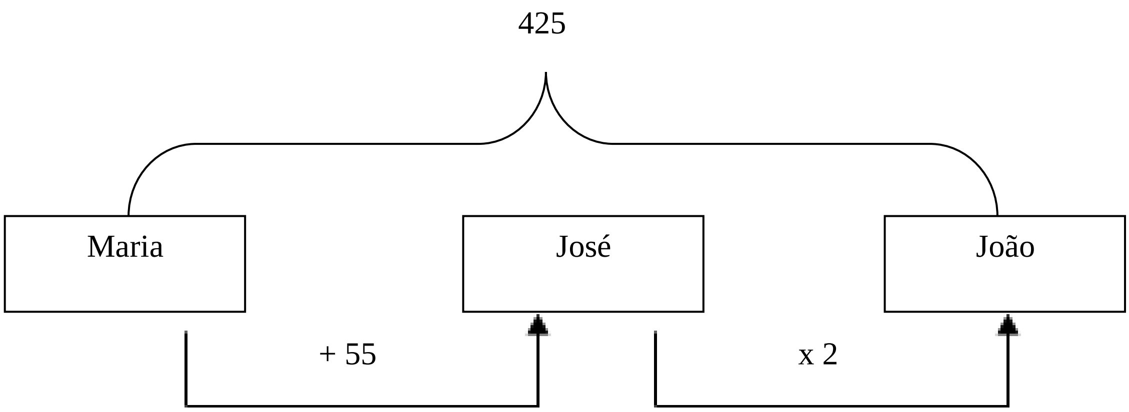
$$X + (X + 33) + 2X = 173$$

3.4.2 Problema de partilha em que o encadeamento é tipo composição

De acordo com Câmara e Oliveira (2010, p. 4) "um problema tipo composição se caracteriza quando, neste tipo de problema, as relações são estabelecidas em sequência". Vejamos agora um exemplo de um problema de partilha cujo encadeamento é do tipo composição.

Exemplo 5. *Maria, José e João colheram 425 unidades de laranjas e querem repartir entre si. José quer receber 55 laranjas a mais que Maria e João por sua vez, quer receber o dobro de José. Com quantas laranjas cada um irá ficar?*

Podemos observar o seguinte esquema do problema acima.



$$\boxed{X + (X + 55) + 2(X + 55) = 425}$$

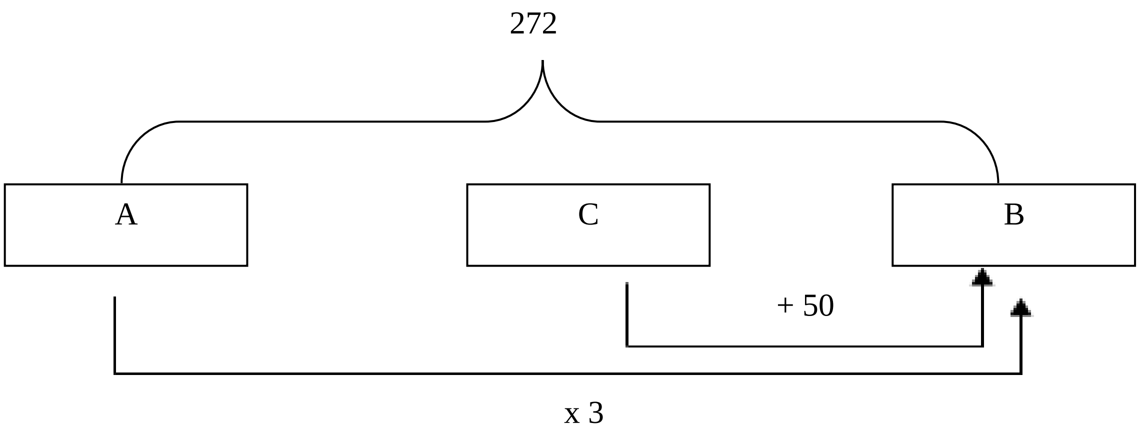
Notemos que, nesse problema, a relação acontece em sequência, sendo que, tomamos como fonte do encadeamento, Maria, representada no esquema acima por *"X"*. As demais relações do problema seguem em sequência, dizer que "*José quer receber 55 laranjas a mais que Maria"* é representar essa situação por *"X+55"* e dizer que "*João por sua vez, quer receber o dobro de José"*, e representar essa situação por "*2(X + 55)*". Câmara e Oliveira (2010) mencionam o pensamento de Bednarz, Kieran e Lee (1996), pois eles verificaram que muitas vezes, o aluno não consegue identificar a expressão algébrica associada a um problema em linguagem natural, seja ela uma equação ou um sistema de equações de 1º grau.

3.4.3 Problema de partilha em que o encadeamento é tipo poço

Percebemos, de acordo com a pesquisa de Câmara e Oliveira (2010), que um dos problemas de partilha que mais geram dificuldades para os alunos resolverem, é o problema tipo poço, o qual, segundo Câmara e Oliveira (2010. p. 4), "se caracteriza quando todas as relações convergem para um dos dados do problema". Finalmente, apresentaremos um exemplo de um problema de partilha cujo encadeamento é desse tipo.

Exemplo 6. *Fernando teve que adquirir 272 espécies de peixes para colocar em três aquários* ***A****,* ***B*** *e* ***C****. Ele colocou os peixes nos aquários da seguinte forma: O aquário* ***B*** *tem o triplo do* ***A*** *e 50 peixes a mais que o aquário* ***C****. Quantos peixes têm em cada aquário?*

Com base no problema acima, temos o seguinte esquema:



$$\boxed{X + X/3 + (X - 50) = 272}$$

Percebemos que nesse problema as relações convergem para o aquário **B**. Entretanto, para fazer a conversão da linguagem natural do problema para uma representação algébrica, o aluno terá que perceber a necessidade de tomar a operação inversa expressa no enunciado e ainda descobrir que o aquário **B** é uma fonte fixa do problema representado por *"X"* e daí estabelecer as demais relações do problema. A expressão do problema "*O aquário **B** tem o triplo do **A**"* está se referindo à quantidade de peixes que o aquário **B** receberá em relação ao aquário **A**, deste modo, o aluno, deveria representar a sentença tomando a operação inversa, ou seja, representando-a por *"X/3"*. Na expressão "*50 peixes a mais que o aquário **C**"* o aluno terá que estabelecer a operação inversa, representando-a por "*(X – 50)"*, tendo no final uma representação algébrica do enunciado do problema, ou seja, X + X/3 + (X - 50) = 272.

4. ESTRATÉGIAS DE BASE NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE PARTILHA

4.1 Estratégias utilizadas por alunos do 6º ano na resolução de problemas de partilha

Neste trabalho, nossas referências de estratégias de resolução de problemas de partilha estarão baseadas nas identificadas na pesquisa realizada por Câmara e Oliveira (2010) cujo objetivo da pesquisa dos autores foi a de investigar as estratégias utilizadas por alunos do 6º ano do ensino fundamental na resolução de problemas de partilha. Os resultados apresentados por eles serão relevantes para nós, uma vez que faremos uma comparação com os resultados de nossa pesquisa em função da relação das estratégias de resolução dos problemas de partilha, com os resultados da pesquisa dos autores, salientando que, ambas foram realizadas em esferas de ensino diferentes, ou seja, a dos autores supracitados no ensino fundamental e essa no ensino superior.

Câmara e Oliveira (2010) estudaram os tipos de estratégias utilizadas pelos alunos do 6º ano do ensino fundamental. De acordo com eles, foram identificados cinco tipos. Os autores fazem uma análise explicando cada tipo de estratégia. De acordo com eles, as estratégias de resolução dos problemas de partilha foram classificadas do seguinte modo:

- ✓ **Atribuir valores (AV)**: o aluno "atribui determinado valor a uma das incógnitas, aplicando então as relações para determinar o valor das outras incógnitas" (CÂMARA e OLIVEIRA, 2010. p. 6). Neste caso os autores mencionam que por vezes os alunos se preocupam em verificar se o resultado encontrado, por meio dessa estratégia, está de acordo com o que o problema propôs, outros não verificam.

- ✓ **Dividir por três (D3)**: dada a quantidade total expressa no problema, os alunos interpretam a partilha como se ela fosse dividida em partes iguais, tomam essa quantidade do problema e a dividem pelo total de incógnitas, de modo que, geralmente, a primeira incógnita se torna a fonte do problema e por meio dela se faz a relação para a obtenção das outras incógnitas. Neste caso, Câmara e Oliveira (2010) destacam que esse tipo de estratégia é o mais adotado em problemas tipo composição.

- ✓ **Estratégia algébrica (AL)**: de acordo com os autores, a estratégia de resolução algébrica se estabelece quando o "sujeito parte do total para determinar o valor das incógnitas, identificando as relações entre elas" (CÂMARA e OLIVEIRA, 2010. p. 7).

- ✓ **Quantidade total como fonte (TF)**: no que diz respeito a essa estratégia, os autores afirmam que "consiste em associar o total do problema ao valor de uma das incógnitas" (CÂMARA e OLIVEIRA, 2010. p.8). Quando o aluno se apropria deste tipo de estratégia de resolução, assume o total como o valor de uma das incógnitas e estabelece as outras relações com as incógnitas restantes do problema.

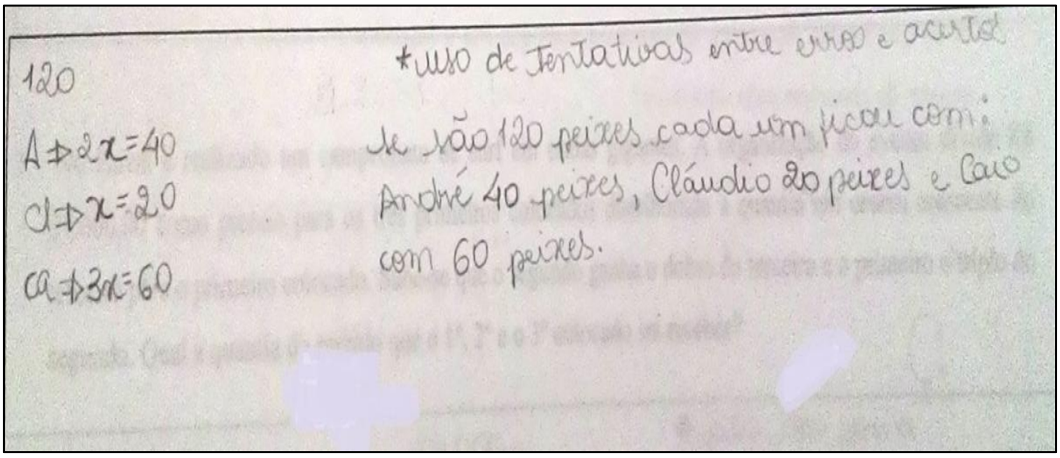
- ✓ **Efetuar um cálculo qualquer (CQ)**: Este tipo de estratégia identificada pelos autores se expressa quando os alunos não conseguem associar os dados com o enunciado do problema e acabam efetuando um cálculo aleatório para conseguirem encontrar uma solução.

Para melhor entendermos como ocorre cada uma dessas estratégias, iremos apresentar exemplos de extratos de resolução com os cinco tipos de estratégias identificadas por Câmara e Oliveira (2010). Vejamos:

Atribuir valores (AV):

No feriado do dia 7 de setembro os três amigos Claudio, André e Caio resolveram passar a tarde inteira pescando em um rio. A pescaria dos três foi muito proveitosa, pois muitos peixes foram pescados. No final da tarde decidiram dividir entre eles os 120 peixes que conseguiram pegar juntos e repartiram do seguinte modo: André ficou como dobro de peixes de Claudio e Caio com o triplo de Claudio. Com quantos peixes ficou cada um?

Figura 1 - Extrato de resolução (AV)



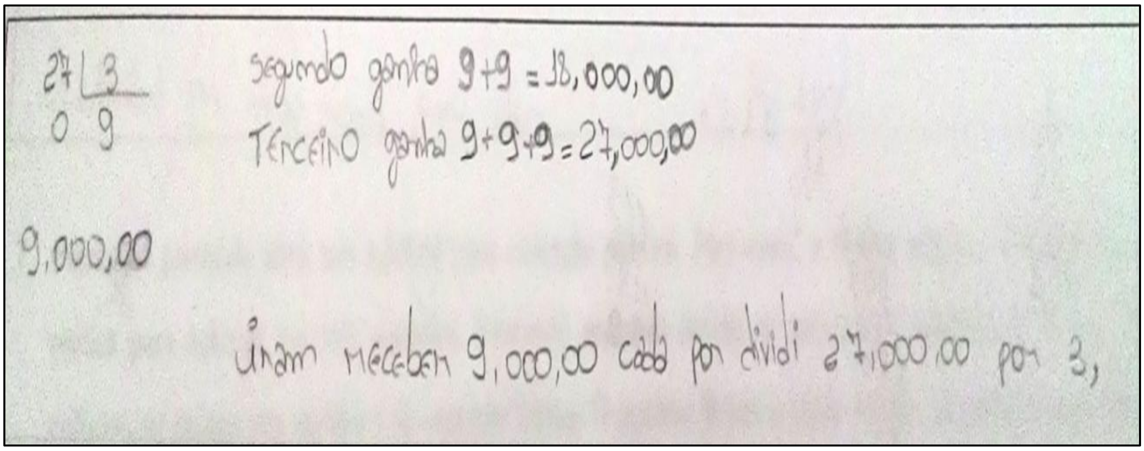
Fonte: Extrato de resolução do aluno B1

No problema acima temos um exemplo de um extrato de resolução que o sujeito/aluno utiliza a estratégia Atribuir Valores (AV). Percebemos nas palavras do aluno que foi aplicado uma série de tentativas e erros, ou seja, ao atribuir um determinado valor a uma das incógnitas do problema, faz-se a relação com as outras incógnitas a fim de determinar o valor das demais. Então, o aluno verifica se o valor do resultado se adequa ao requisitado na questão, caso não esteja de acordo, o aluno passa a utilizar outro valor e assim sucessivamente. Nesta pesquisa, Câmara e Oliveira (2010) afirmam que esse tipo de estratégia tem caráter aritmético, porém essa afirmação já está sendo repensada por haver indícios de pensamento algébrico na utilização deste tipo de estratégia.

Dividir por três (D3):

> **No Havaí é realizado um campeonato de surf em ondas gigantes. A organização do evento divide R$ 27.000,00 como prêmio para os três primeiros colocados distribuindo a quantia em ordem crescente do terceiro para o primeiro colocado. Sabe-se que o segundo ganha o dobro do terceiro e o primeiro o triplo do segundo. Qual a quantia do prêmio que o 1º, 2º e o 3º colocado irá receber?**

Figura 2 - Extrato de resolução (D3)



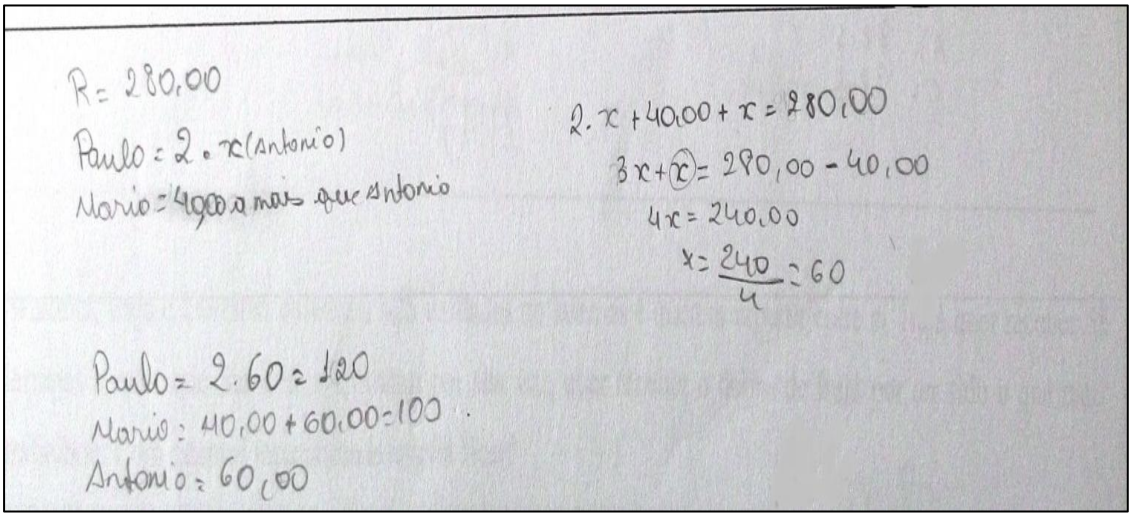
Fonte: Extrato de resolução do aluno C1

Neste problema, apresentamos um extrato de resolução com a estratégia: Dividir por 3 (D3). Logo percebemos que o aluno retira a quantidade total do problema e a divide pela quantidade de incógnitas relacionadas na situação tomando, inicialmente, a partilha como se fosse dividida em partes iguais para cada incógnita. Há casos em que o aluno, após a divisão, toma a primeira incógnita como a fonte do problema e por meio dela se faz a relação para obtenção dos valores das demais incógnitas.

Estratégia Algébrica (AL):

> **Antônio, Paulo e Mário saíram de casa com o objetivo de comprar equipamentos esportivos para iniciar seus treinamentos na escolinha de futebol do professor José. No caminho perceberam que juntos tinham R$ 280,00. Mario observou que Paulo tinha o dobro do dinheiro de Antônio e o próprio Mario tinha R$ 40,00 a mais que Antônio. Quantos reais têm cada um?**

Figura 3 - Extrato de resolução (AL)


R= 280,00
Paulo = 2 . x (Antonio)
Mario = 40,00 a mais que Antonio

$2 . x + 40{,}00 + x = 280{,}00$
$3x + x = 280{,}00 - 40{,}00$
$4x = 240{,}00$
$x = \frac{240}{4} = 60$

Paulo = 2 . 60 = 120
Mario: 40,00 + 60,00 = 100
Antonio = 60,00

Fonte: Extrato de resolução do aluno D1

A figura acima, que apresenta um problema tipo fonte, mostra a estratégia Algébrica (AL) utilizada. Nela, o aluno identifica o valor total do problema R$ 280,00. A partir disso estabelece as relações entre as incógnitas Paulo, Antônio e Mário. Percebemos que o sujeito utiliza apenas a letra **x** como incógnita para estabelecer um valor base de acordo com o enunciado do problema e chega ao resultado correto. Apesar de ser utilizada apenas a letra **x** como incógnita base, após estabelecer relações o aluno chega ao valor que cada sujeito do enunciado: Paulo, Antônio e Mário têm. Acreditamos que o fato de o aluno usar apenas a letra **x** como incógnita para representar os dados do problema é proveniente do trabalho com equações e problemas de equações do 1º grau, conteúdo matemático presente nos livros didáticos do 7º ano do ensino fundamental em que o uso da letra **x** como incógnita é privilegiado, de acordo com a pesquisa de Almeida (2011).

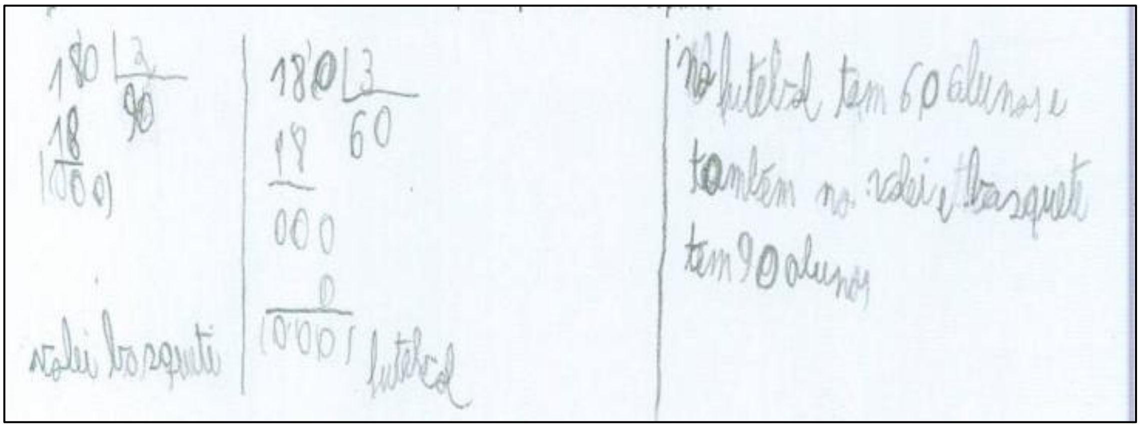
Quantidade total como fonte (TF):

Extrato de Resolução - Câmara e Oliveira (2010)

Em uma escola, 180 alunos praticam esportes. O número de alunos que joga futebol é o triplo do número de alunos que joga vôlei e o número de alunos que joga basquete é o

dobro do número de alunos que joga vôlei. Nesta escola, quantos alunos praticam cada esporte?

Figura 4 - Extrato de resolução Câmara e Oliveira (2010) (TF)



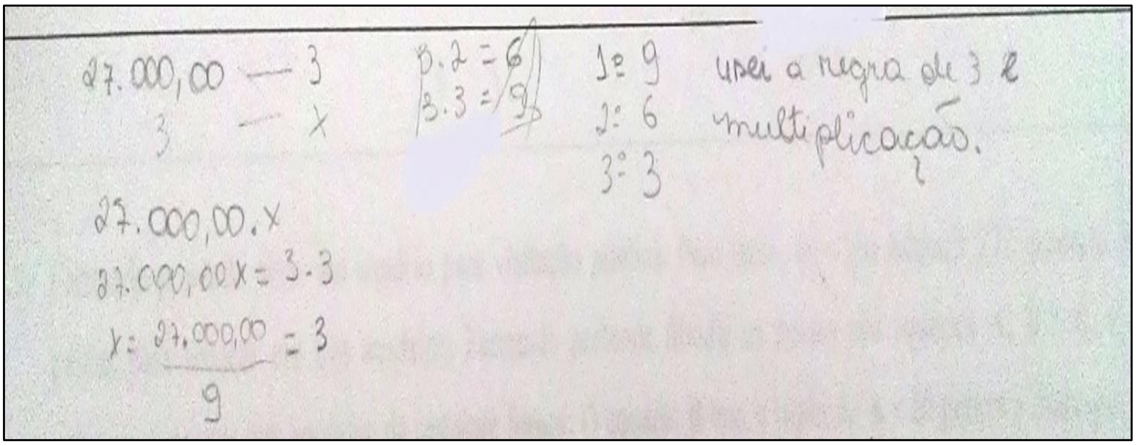
Fonte: Extrato de resolução Câmara e Oliveira 2010

A estratégia de base total como fonte (TF) consiste em associar o total do problema ao valor de uma das incógnitas. Na resolução desse tipo de problema extraído da pesquisa de Câmara e Oliveira (2010), o sujeito, após adotar o total como o valor de uma das incógnitas, aplica as duas relações do enunciado e encontra os valores para as outras duas incógnitas. Observamos na solução que o aluno divide 180 por 2 e depois, dividir novamente 180 por 3. Percebe-se que o aluno encontra 90 e 60 respectivamente, restando estabelecer relações para encontrar o valor restante correspondente, que seria 30. Em nosso estudo pouco ocorreu a resolução dos problemas por meio dessa estratégia.

Efetuar um cálculo qualquer (CQ):

> **No Havaí é realizado um campeonato de surf em ondas gigantes. A organização do evento divide R$ 27.000,00 como prêmio para os três primeiros colocados distribuindo a quantia em ordem crescente do terceiro para o primeiro colocado. Sabe-se que o segundo ganha o dobro do terceiro e o primeiro o triplo do segundo. Qual a quantia do prêmio que o 1º, 2º e o 3º colocado irá receber?**

Figura 5 - Extrato de resolução (CQ)



Fonte: Extrato de resolução do aluno E1

De acordo com Câmara e Oliveira (2010), este tipo de estratégia identificada se expressa quando os alunos não conseguem associar os dados com o enunciado do problema e acabam efetuando um cálculo aleatório para conseguirem encontrar uma solução. No problema acima observamos que o aluno utiliza uma regra de três simples na expectativa de encontrar o resultado desejado. Porém, não realizando corretamente a operação de meio pelos extremos, revelando um resultado forçado para obter as relações exigidas pelo enunciado do problema.

4.2 Percentual da utilização das estratégias de base no 6º ano do EF

Destas estratégias, os autores expressam o percentual utilizado pelos alunos nos problemas de partilha. O quadro a seguir, retirada da pesquisa de Câmara e Oliveira (2010), cuja pesquisa teve por objetivo investigar as estratégias utilizadas por alunos do 6º ano do ensino fundamental na resolução de problemas de partilha, expressa o percentual referente às estratégias de base utilizadas pelos alunos da pesquisa.

Quadro 1 - Percentual da utilização das estratégias de base

Atribuir valores (AV)	40%
Dividir por 3 (D3)	34%
Algébrica (AL)	9%
Considerar o total como fonte (TF)	8%
Cálculo qualquer (CQ)	6%
Não identificada (NI)	3%

Fonte: Câmara e Oliveira, 2010, p. 5.

Como podemos perceber, as estratégias mais utilizadas pelos alunos do 6º ano do ensino fundamental, de acordo com a pesquisa de Câmara e Oliveira (2001), foi Atribuir Valores (AV) 40% e Dividir por 3 (D3) 34%. De acordo com os autores, os alunos procuram mais esse tipo de estratégia no momento da resolução sendo influenciados pela estrutura do problema. Segundo o percentual demonstrado no quadro, poucos alunos utilizam a estratégia algébrica (AL) 9% ainda que os problemas possibilitem uma representação algébrica. Explica-se esse dado, talvez, pelo fato de esses alunos do 6º ano ainda não terem aprofundado seus conhecimentos algébricos, todavia, alguns conseguem raciocinar nesse sentido.

No estudo de Câmara e Oliveira (2010), podemos perceber que o grau de dificuldade encontrado pelos alunos na resolução dos problemas de partilha varia de acordo com o encadeamento da relação.

4.3 Rendimento por encadeamento de relações

Notamos claramente quando os autores expressam em termos quantitativos os resultados obtidos, destacando a dificuldade maior dos alunos em relação aos problemas tipo poço.

Quadro 2 - Rendimento por encadeamento das relações com erro/acerto

	Fonte	**Composição**	**Poço**
Acertos	44%	33%	23%
Erros	41%	43%	39%
Não resposta	15%	24%	38%

Fonte: Câmara e Oliveira, 2010, p. 5.

Segundo eles, "no problema tipo poço apenas 23% dos sujeitos obteve sucesso, contra 33% para problemas do tipo composição e 44% para problemas do tipo fonte" (p. 5). Ou seja, há uma dificuldade considerável em relação à resolução do problema tipo poço, devido à representação inversa que o problema requer.

Além disso, os autores relacionam os dados obtidos com as estratégias utilizadas pelos alunos de acordo com o encadeamento da relação, como nos explica:

> [...] podemos observar que a escolha da estratégia de base AV cresce em função da complexidade das relações, atingindo o percentual de 44% em problemas do tipo poço. Já a escolha da estratégia D3 mostra pouca variação em relação ao encadeamento das relações. Por outro lado, o recurso à estratégia algébrica (AL), contrariamente à estratégia AV, decresce em função da dificuldade do problema, sendo mais adotada em problemas do tipo fonte. (CÂMARA e OLIVEIRA, 2010. p. 6)

De acordo com o quadro 3 a seguir apresentado pelos autores, poderemos nos referenciar no que diz respeito à frequência de estratégias utilizadas pelos alunos de acordo com cada encadeamento.

Quadro 3 - Rendimento por encadeamento de relações e estratégia de base

	Fonte	Composição	Poço
Atribuir valores (AV)	37%	40%	44%
Dividir por 3 (D3)	32%	33%	36%
Algébrica (AL)	12%	9%	6%
Considerar o total como fonte (TF)	11%	6%	7%
Cálculo qualquer (CQ)	5%	9%	6%
Não identificada (NI)	3%	3%	2%

Fonte**:** Câmara e Oliveira, 2010, p. 6.

Observamos no quadro de Câmara e Oliveira (2010) que a escolha da estratégia de base (AV) cresce de acordo com o grau de dificuldade do encadeamento atingindo o percentual de 44% em problemas do tipo poço. Em relação à estratégia Dividir por 3 (D3), percebemos pouca variação dos dados em referência ao encadeamento.

Segundo Câmara e Oliveira (2010), por outro lado, o recurso à estratégia algébrica (AL), contrariamente à estratégia (AV), decresce em função da dificuldade do problema, sendo mais adotada em problemas do tipo fonte.

Os autores indicam que em problemas tipo fonte, 56% dos sujeitos que adotam a estratégia de base atribuir valor (AV) conseguem atribuir o valor correto à incógnita em uma primeira tentativa; os outros, após verificar a incoerência com o total, partem para a atribuição de novos valores. Já para os problemas tipo composição, 60% dos sujeitos precisaram realizar mais de uma tentativa, comparando os resultados obtidos com o total, até encontrar os valores adequados para as incógnitas.

De acordo com Câmara e Oliveira (2010), utilizar o resultado da divisão por três como o valor de uma das incógnitas determinando as relações do problema é mais adotada em problemas tipo composição (55%). A dificuldade em conseguir identificar a estrutura associada a um problema tipo poço aparece reforçada quando observamos que um a cada três alunos (34%), nesse tipo de encadeamento, ou abandona a resolução após dividir por três, ou adota como resposta para o problema o valor obtido nessa divisão, considerando apenas uma das incógnitas.

Segundo Câmara e Oliveira (2010), na estratégia algébrica (AL), ao contrário das aritméticas, o sujeito parte do total para determinar o valor das incógnitas, identificando as relações entre elas. Os resultados mostram que problemas cujo encadeamento das relações é do tipo fonte, parecem facilitar, para o sujeito, a mobilização correta de estratégias algébricas. De fato, pode-se verificar que, no caso desse tipo de problema, 99% dos sujeitos que mobilizaram estratégias algébricas o fizeram corretamente; esse percentual decresce com os outros dois tipos de problema.

Câmara e Oliveira (2010) encontraram, ainda, 6% dos sujeitos que não conseguem se apropriar do significado do problema. Nesse caso, eles buscam efetuar uma conta qualquer, estratégia de base (CQ), na tentativa de encontrar uma solução.

Os resultados desse estudo mostram que, no caso de problemas de partilha, os alunos apresentavam mais dificuldade quando o encadeamento das relações é do tipo "poço" e a natureza das relações é multiplicativa/multiplicativa, como mostra o exemplo a seguir.

> **Isabel, Alice e Liliane foram desafiadas por seu professor de matemática a dividir entre elas R$ 133,00 em um exercício na sala de aula. Seu professor impôs as condições que Alice receba a metade de Isabel e um quarto do de Liliane. Quanto recebeu cada uma?**

De acordo com nossos estudos os problemas de partilha com encadeamento tipo poço, as relações convergem para um dos dados do problema; no caso do problema acima, as relações convergem para Alice. Quando nos referimos à natureza das relações o problema apresenta duas relações, sendo a primeira "**Alice receba a metade de Isabel**" e a segunda "**Alice tem um quarto do de Liliane",** sendo a natureza de ordem multiplicativa/multiplicativa.

De acordo com Marchand e Bednarz (1999) os problemas de partilha podem ser classificados levando em consideração o "*número de relações*", a "*natureza das relações*" e o "*encadeamento*" das relações. Ou seja, em relação à natureza das relações pode ser aditiva, quando se lança mão de somas ou subtrações, multiplicativa, quando de multiplicações ou divisões, ou naturezas diferentes, quando se tem em um mesmo problema uma natureza aditiva e uma multiplicativa. No estudo realizado por Câmara e Oliveira (2010) em problemas tipo "composição", os alunos demonstram mais facilidade quando a primeira relação é multiplicativa (MM e MA), o que, segundo eles, pode estar relacionado ao tipo de representação que o aluno elabora a partir do enunciado do problema.

Segunda Câmara e Oliveira (2008), estratégias que fazem recurso a raciocínios aritméticos, em que se busca partir de valores para as incógnitas, são mobilizadas por 80% dos alunos de 6° ano. Os autores constatam que somente 10% deles se servem de estratégias mobilizando o pensamento algébrico, em que o ponto de partida são as relações estabelecidas entre as incógnitas. Segundo eles, parece reforçar o peso que o trabalho com a aritmética nas séries iniciais de escolaridade tem na formação do pensamento matemático dos alunos.

Por outro lado, queremos reforçar a ideia de que nossa pesquisa se interessa, neste momento, em conhecer tão somente as estratégias que os alunos de um curso em licenciatura em matemática utilizam quando deparados com problemas de estrutura algébrica tipo partilha, deste modo, a razão pela qual ele utiliza uma estratégia aritmética ou algébrica não compete a nós responder neste estudo.

Dentro do estudo de Câmara e Oliveira (2008), eles concluem lembrando que se trata de um estudo com características de diagnóstico, cujo instrumento de coleta de dados comporta somente a resolução, com papel e lápis, de uma tarefa. É imprescindível, e isso está contemplado na continuidade do estudo, a aplicação de entrevistas com os alunos, para afinar as hipóteses.

5. METODOLOGIA

Neste capítulo apresentaremos qual a metodologia empregada para o desenvolvimento da pesquisa, bem como a ferramenta de coleta de dados.

5.1 Proposta e método para o desenvolvimento da pesquisa

Propomos, neste trabalho, analisar quais estratégias são utilizadas por alunos licenciandos em matemática na resolução de problemas de partilha, como também verificar a influência do tipo de encadeamento do problema de partilha no rendimento dos alunos. Escolhemos o ensino superior por se tratar de estudantes que completaram o ciclo da educação básica, e assim, supomos que apresentam conhecimentos matemáticos mais elevados. Deste modo, pretendemos comparar o rendimento e as estratégias desses alunos com as utilizadas por alunos do 6º ano do ensino fundamental, com a finalidade de investigarmos se os alunos graduandos utilizam ou não as mesmas estratégias que os do ensino fundamental e se apresentam dificuldades em relação ao encadeamento e natureza das relações presentes em problemas de estruturas algébricas tipo partilha, levando em consideração a resolução com papel e lápis, de uma tarefa.

A pesquisa com alunos do 6º ano foi desenvolvida por Câmara e Oliveira (2010), a qual nos deu base teórica e metodológica em relação às estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de problemas de partilha, como também nos forneceu resultados que iremos comparar com os obtidos neste estudo.

Como nosso objetivo nesse estudo é identificar quais as estratégias utilizadas pelos alunos licenciandos em matemática para resolver problemas tipo partilha, deixamos o aluno optar por qual estratégia utilizar, deixando a livre escolha. Diante dessa situação, não buscamos inferir as razões que levam o aluno a utilizar ou não determinada estratégia, mas almejamos identificar quais estratégias ele possivelmente utilizará.

5.2 Sujeitos da Pesquisa

Para tanto, a coleta consistiu da aplicação de um instrumento tipo teste classificado em dois tipos A e B, contendo problemas de partilha que foram aplicados a três turmas de alunos do 2º, 3º e 4º períodos de licenciatura em matemática no Centro de Educação e Saúde da Universidade Federal de Campina Grande, localizada na cidade de Cuité- PB, Curimataú paraibano, universidade pública do Estado da Paraíba. Os problemas foram aplicados em um horário de 120 minutos em cada turma. Aplicamos o teste a um total de 50 alunos.

Apesar de estarmos tratando de três turmas com períodos diferentes, nossas análises, não identificamos uma disparidade nas estratégias de base utilizadas por esses alunos, nem tão pouco em relação ao desempenho. Deste modo, consideramos em nossa análise todo o conjunto, sem haver necessidade de diferenciarmos cada teste por período do aluno.

Quadro 4 - Demonstrativo de alunos por turma

IES – CUITÉ-PB	**ALUNOS**
2º PERÍODO / TURMA I	19
3º PERÍODO / TURMA II	17
4º PERÍDO / TURMA III	14
TOTAL GERAL	50

5.3 Instrumento de coleta de dados

O teste, conforme a pesquisa realizada por Câmara e Oliveira (2010), apresenta sete problemas de partilha. O primeiro problema tinha apenas uma relação, para facilitar a entrada do aluno na resolução, como mostra o exemplo a seguir.

> **Deseja-se cortar uma tira de couro de 120cm de comprimento em duas partes tais que o comprimento de uma seja o triplo da outra. Quanto mede a parte maior?**

Percebemos que o problema acima apresenta apenas uma relação, **"O comprimento de um seja o triplo da outra",** sendo essa relação de natureza multiplicativa.

Os outros problemas envolvem duas relações. Os problemas que envolvem duas relações variam o tipo de encadeamento (fonte, composição e poço) e a natureza das relações (aditiva/multiplicativa).

Cada teste A e B contém uma questão de partida, como a descrita acima, duas questões tipo fonte, duas questões do tipo composição e duas do tipo poço, totalizando sete questões, conforme os quadros a seguir.

Quadro 5 - Teste A. Encadeamento e Natureza das Relações

Nº	Problemas	Encadeamento das Relações	Natureza das Relações
02	Pedro, Fátima e Rogério colecionam álbuns de figurinhas há muitos anos. Conversando em um determinado dia viram que, juntos, possuíam 173 álbuns de figurinhas. Fátima tem 33 álbuns a mais que Pedro e Rogério têm o dobro de álbuns de Pedro. Quantos álbuns de figurinhas têm cada um?	Fonte	Aditiva $\Rightarrow$ Multiplicativa
03	Antônio, Paulo e Mário saíram de casa com o objetivo de comprar equipamentos esportivos para iniciar seus treinamentos na escolinha de futebol do professor José. No caminho, perceberam que juntos tinham R$ 280,00. Mário observou que Paulo tinha o dobro do dinheiro de Antônio e o próprio Mario tinha R$ 40,00 a mais que Antônio. Quantos reais têm cada um?	Fonte	Multiplicativa $\Rightarrow$ Aditiva
04	No Havaí é realizado um campeonato de surf em ondas gigantes. A organização do evento divide R$ 27.000,00 como prêmio para os três primeiros colocados distribuindo a quantia em ordem crescente do terceiro para o primeiro colocado. Sabe-se que o segundo ganha o dobro do terceiro e o primeiro o triplo do segundo. Qual a quantia do prêmio que o 1º, 2º e o 3º colocado irá receber?	Composição	Multiplicativa $\Rightarrow$ Multiplicativa

05	Samanta, Irajá e Ubiratan colheram 425 unidades de laranjas e querem repartir entre si. Como Samanta quase não trabalhou na colheita, Irajá quer receber 55 laranjas a mais que Samanta e Ubiratan por sua vez, quer receber o dobro de Irajá por ter sido o que mais trabalhou. Com quantas laranjas cada um irá ficar?	Composição	Aditiva ⇒ Multiplicativa
06	Um fazendeiro quer separar 170 galinhas nos galinheiros **A**, **B** e **C**. Ele percebeu que deveria colocar uma determinada quantidade de galinha em cada galinheiro para que não enchesse demais. E assim o fez, ficando os galinheiros do seguinte modo: O galinheiro **B** tem 25 galinhas a mais que o **A** e 15 galinhas a mais que o **C**. Quantas galinhas têm em cada galinheiro?	Poço	Aditiva ⇒ Aditiva
07	Luis Augusto fechou sua locadora de DVD e atualmente possui 840 filmes. Sem saber o que fazer com tanto filme perguntou a seus três amigos Marcelo, Lucas e Romário se eles queriam os filmes. Seus amigos ficaram animados com a proposta e aceitaram ganhar os filmes. Luis Augusto dividiu para seus amigos da seguinte forma: Marcelo recebeu 180 filmes a mais que Lucas e o dobro de Romário. Quantos filmes receberam cada um?	Poço	Aditiva ⇒ Multiplicativa

Fonte: Elaborado pelo autor

Quadro 6 - Teste B. Encadeamento e Natureza das Relações

Nº	Problema	Encadeamento das Relações	Natureza das Relações
02	Em uma tarde de domingo, Geraldo, Dorival e Murilo foram ao sítio dos avôs de Dorival e levaram bolinhas de gude para jogar. Eles possuem 132 bolinhas de gude e resolveram dividir de modo que Dorival receba 12 bolinhas a mais de Geraldo e Murilo15 bolinhas a menos que Geraldo. Quantas bolinhas de gude devem receber cada um?	Fonte	Aditiva ⇒ Subtração
03	No feriado do dia 7 de setembro os três amigos Claudio, André e Caio resolveram passar a tarde inteira pescando em um rio. A pescaria dos três foi muito proveitosa, pois muitos peixes foram pescados. No final da tarde decidiram dividir entre eles os 120 peixes que conseguiram pegar juntos e repartiram do seguinte modo: André ficou com o dobro de peixes de Claudio e Caio com o triplo de Claudio. Com quantos peixes ficou cada um?	Fonte	Multiplicativa ⇒ Multiplicativa
04	O senhor Mohamed possui uma grande propriedade nos Emirados Árabes com 125 camelos. Como é de idade avançada e sentindo que está perto de bater as botas, resolveu escrever no seu testamento a divisão dos seus camelos para	Composição	Multiplicativa ⇒ Aditiva

	seus três filhos, o caçula, o do meio e o mais velho. No seu testamento estava escrito a forma da como iria repartir, o qual dizia: “O meu filho do meio receberá o dobro do caçula e o mais velho 25 camelos a mais que o filho do meio”. Quantos camelos receberam cada filho?		
05	Bia ganhou uma competição no programa “A arca da felicidade” do famoso apresentador Juju Literato. Ele recebeu como prêmio 341 moedas de chocolate. Chegando a sua casa, pensando que iria comer tudo sozinha, recebeu a visita de suas primas Renata e Jaqueline. Assim, dividiu as moedas de chocolate de modo que Renata ficou com 23 moedas a mais que Bia e Jaqueline 34 a mais que Renata. Com quantas moedas de chocolate cada uma ficou?	Composição	Aditiva ⇒ Aditiva
06	Isabel, Alice e Liliane foram desafiadas por seu professor de matemática a dividir entre elas R$ 133,00 em um exercício na sala de aula. Seu professor impôs as condições que Alice receba a metade de Isabel e um quarto de Liliane. Quanto recebeu cada uma?	Poço	Multiplicativa ⇒ Multiplicativa
07	Fernando pretende abrir um aquário para visitação pública. Para tanto, teve que adquirir 272 espécies de peixes para colocar em três aquários. Fernando pretende dividir os peixes nos	Poço	Multiplicativa ⇒ Aditiva

	aquários **A**, **B** e **C**. Ele colocou os peixes nos aquários da seguinte forma: O aquário **B** tem o triplo do **A** e 50 peixes a mais que o aquário **C**. Quantos peixes têm em cada aquário?		

Fonte: Elaborado pelo autor

As questões foram dispostas aleatoriamente, com exceção do problema com uma relação, o qual encabeçou o teste. Ressaltamos que os problemas de partilha apresentados acima foram elaborados por nós, seguindo as definições de Marchand e Bednarz (1999), não sendo retirados de nenhum livro didático ou pesquisa. Na análise, os problemas com uma relação não foram incluídos nos dados obtidos, pelo fato de eles servirem apenas de caráter introdutório. A análise dos dados foi feita a partir do rendimento (acerto, erro e não resposta) e das estratégias utilizadas pelos alunos.

Para análise das estratégias de base encontradas nos testes, utilizamos as mesmas apresentadas por Câmara e Oliveira (2010), ou seja, cinco estratégias de base para resolução: Atribuir Valores (AV), Dividir por 3 (D3), Resolução Algébrica (AL), Considerando o Total como Fonte (TF) e Realizar Cálculo Qualquer (CQ), além dos casos que não seja possível identificar a estratégia utilizada pelos sujeitos (NI).

6. ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

6.1 Análise do rendimento dos alunos

Neste capítulo, faremos a discussão a respeito dos resultados obtidos em nossa pesquisa, comparando-os com os resultados encontrados na pesquisa de Câmara e Oliveira (2010).

De acordo com o que foi relatado nesse estudo, realizamos a aplicação do teste em três turmas de licenciatura em matemática do 2º, 3º e 4º períodos da graduação. Entretanto, em nossas análises, não identificamos diferentes estratégias de base utilizadas por esses alunos em relação aos períodos de estudo, nem o desempenho desses sujeitos ficaram distantes um dos outros. Deste modo, consideramos todos os resultados obtidos em uma mesma análise, sem julgarmos a necessidade de diferenciarmos cada teste por período do aluno.

A análise dos testes foi realizada do seguinte modo: em um primeiro momento observamos o rendimento (erro/acerto e não resposta) dos alunos na resolução dos problemas propostos. Na sequência, analisamos os extratos de resolução dos alunos em cada estratégia de base identificada na pesquisa, seguindo as definidas por Câmara e Oliveira (2010). Partimos então para análise das estratégias de base privilegiadas pelos estudantes. Analisamos as estratégias de base em função do encadeamento e natureza das relações. Por fim, comparamos os resultados desta pesquisa com os de Câmara e Oliveira (2010), em três quadros de categorias definidas em: rendimento dos alunos por encadeamento das relações, estratégia de base adotada pelos alunos e estratégias de base em função do encadeamento das relações.

Iniciaremos discutindo a respeito da quantidade de erros, acertos e questões não respondidas dos problemas propostos aos alunos envolvidos na pesquisa. Os resultados nos mostram que 68% dos problemas foram respondidos de forma correta pelos alunos e percebemos que 7% dos problemas não foram respondidos pelos alunos. Por outro lado, 25% dos problemas não tiveram sua resolução correta.

Todavia, por se tratar de alunos do ensino superior, tínhamos a expectativa de que o percentual de acertos seria mais elevado, independentemente da estratégia de base utilizada pelo aluno. Em relação ao percentual de questões sem respostas, observa-se uma quantidade considerável (7%), tendo em vista que nestes casos os alunos não esboçaram tentativas de resolução, apontando para uma possível dificuldade em relação à resolução de problemas de estrutura algébrica. Ainda por serem alunos do ensino superior, Lochhead e Mestre (1995) apontam que as dificuldades para resolução de problemas de estrutura algébrica não são inerentes a alunos que estão iniciando seus estudos em álgebra, mas também, a alunos de níveis de escolaridade mais avançados, sendo assim, notamos que os dados da nossa pesquisa corroboram com a observação de Lochhead e Mestre (1995), pois mesmo os alunos do ensino superior já com certa maturidade em álgebra, tiveram dificuldades em resolver os problemas de estrutura algébrica.

Deste modo, pensando em pesquisas em diferentes níveis de ensino, os autores Araújo (1999), Biazi (2003), Câmara e Oliveira (2010) e Santos Júnior (2013), são exemplos que nos levam a uma reflexão sobre o ensino de álgebra. Câmara e Oliveira (2010, p. 1), apontam através de seu estudo que “os resultados obtidos em avaliações de larga escala têm demonstrado a grande dificuldade dos alunos da escola básica no trabalho com álgebra; pode-se perceber que, nos itens referentes à álgebra nesses instrumentos, raramente os alunos atingem o índice de 40% de acertos.”. Os autores se referem a resultados tomados em nível de ensino fundamental II e percebemos que tal afirmação corrobora, por exemplo, com Santos Junior (2013), apontando resultados que não são totalmente satisfatórios em relação ao estudo com alunos do ensino fundamental II, envolvendo conceitos algébricos. Tal fato pode convergir para o pensamento de Miguel, Fiorentini e Miorim (1992), que questionam sobre o problema da álgebra ser ensinada com um caráter reprodutivo, sem significado, apenas como ferramenta para resolver problemas.

Nesse sentido, entendemos a necessidade de olharmos para o ensino de álgebra com a perspectiva de o professor construir os conceitos com o aluno, dando significado. Conforme Borba (2011), se referindo à “falta de significação” das letras para os alunos no ensino da álgebra, provocando uma série de dificuldades em termos de compreensão e manipulação dos conceitos algébricos. Diante desse fator *significado*, Santos (2013) afirma que muitos alunos fazem confusão quando se troca a variável x por outra letra, por exemplo. Isso acontece devido à falta de significado do que representa a variável, implicando em uma ausência de compreensão das diversas notações que a álgebra pode assumir.

Todavia, Santos Junior (2013) também infere que ao avançar nos estudos, o aluno tende a melhorar seu desempenho na resolução de problemas com estruturas algébricas. Entretanto, estudos também apontam que as dificuldades em álgebra são correlatas tanto no ensino fundamental, médio e superior (BIAZI, 2003), como também, que alunos em nível de ensino superior e final de ensino médio mostram um baixo rendimento em testes envolvendo a álgebra. Esse contexto abrange desde o desconhecimento total da álgebra quanto ao uso incorreto de operações, propriedades, definição de incógnitas e até mesmo de dificuldades advindas da aritmética, tais como, erros em operações, propriedades e na prioridade de operações (ARAÚJO, 1999). Segundo Araújo (1999), essa dificuldade advém dos alunos seguirem um mecanismo modelo para resolver equações algébricas simples; equações sem significado; o uso equivocado de incógnitas. Percebemos então que essas dificuldades caminham com o aluno do ensino básico ao ensino superior, levantando para pesquisadores no ensino de matemática uma discussão para o ensino-aprendizado de álgebra na sala de aula. Concordamos então com o pensamento de Borralho et al (2007, p. 1) afirmando que “os alunos precisam entender os conceitos algébricos, as estruturas e princípios que regem as manipulações simbólicas e como estes símbolos podem ser utilizados para traduzir ideias matemáticas”.

Percebemos, ainda, que as dificuldades dos alunos em álgebra passam para o nível de pensamento algébrico, ficando constatado na pesquisa de Almeida e Câmara (2014) que quando o problema algébrico não é resolvido com um registro simbólico (estrutura algébrica), esses alunos em fase de graduação não conseguem identificar a resposta como certa, dando a questão resolvida como errada, isso, segundo os autores, “parece indicar que, mesmo estando no ensino superior, alguns licenciandos ainda têm dificuldades em responder problemas simples envolvendo equações polinomiais do 1º grau” (ALMEIDA e CÂMARA, 2014. p. 10).

Em nosso estudo percebemos indícios de que os alunos, em fase de graduação, também encontram dificuldades em álgebra. Ao propormos problemas de estrutura algébrica, percebemos indícios de dificuldades coadunados aos tipos de encadeamentos e relações desses problemas. Deste modo, percebemos que os alunos do ensino fundamental II, como também alunos do ensino superior, carregam dificuldades no ensino de álgebra, e assim consideramos que existe a necessidade de discutir o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos da educação básica ou mesmo como esses problemas podem contribuir para o desenvolvimento do pensar algébrico do aluno dos anos iniciais/finais do ensino fundamental II.

Queremos lembrar que não existe uma única maneira de os alunos expressarem esse tipo de pensamento, uma vez que ele pode ser explicitado por distintas linguagens, como a natural, a aritmética, a geométrica ou a algébrica de natureza estritamente simbólica.

Corroborando com os resultados das pesquisas de Câmara (2010) e Oliveira e Câmara (2011), as quais destacaram que o aluno pode expressar um pensar algébrico sem necessariamente ser em uma linguagem algébrica, de símbolos e sinais.

As expectativas que a investigação traz para o pesquisador o levam a estipular hipóteses que poderão ou não aparecer no estudo. A nossa pesquisa passa por um campo complexo, a sala de aula, onde as relações estabelecidas pelos sujeitos – professor/aluno/instituição – nesse ambiente podem interferir ou não nos caminhos que almejamos percorrer no estudo. Nosso objetivo é identificar as estratégias que os alunos do ensino superior, licenciandos em matemática, utilizam para resolver problemas de estrutura algébrica do tipo partilha e para isso aplicamos um teste com sete problemas para que eles resolvessem.

Nesse sentido, compreendemos que o saber (objeto), as pessoas (alunos/professor) e a instituição estão presentes. Apesar de não procurarmos avaliar/construir o saber, neste caso, o conceito algébrico matemático, percebemos que ele existe. Bessa de Menezes e Câmara (2015) afirmam que o objeto existirá a partir do momento que ele for reconhecido como existente por uma pessoa X ou instituição I. Desse modo, os alunos tiveram a liberdade suficiente para resolver os problemas propostos na sala de aula, e assim, procuramos não induzir qualquer modo de resolução, considerando que eles já apresentam um conhecimento prévio em álgebra.

A característica de um problema de estrutura algébrica é a de possibilitar a conversão dos dados do enunciado em uma equação algébrica polinomial do primeiro grau, e isso nos leva a considerar que o aluno em licenciatura em matemática encontrará como meio de resolução essa equação. Claro que não podemos desconsiderar qualquer outro possível método de resolução dos alunos, entretanto, Da Rocha Falcão (1992) aponta que, se tratando de problemas de estrutura algébrica, os procedimentos aritméticos tornam-se cansativos, enfadonhos ou insuficientes. Além disso, de acordo com Bessa de Menezes e Câmara (2008) essas escolhas se dão através dos seus interesses (dos alunos) sobre aquele determinado objeto (saber) em I (Instituição), o maior interesse passa a ser “ficar adequado” nessa relação sob o constrangimento de I. Assim podemos inferir que apesar da liberdade que o aluno tem em resolver o problema, por fazer parte de uma instituição, ele se adequaria ao tipo de resolução convertendo o problema de sua linguagem natural para a linguagem algébrica.

Não obstante, Bessa de Menezes e Câmara (2008, p.5) enfatizam que "não podemos deixar de fora esses outros fatores, de forma alguma, porém, é extremamente necessário quando olhamos para o saber escolar, entender que a relação dos contratos (pedagógico e didático) estabelecidos têm se, assim podemos dizer, um peso maior nas escolhas realizadas pelos sujeitos X1 (alunos)". Olhando para possíveis contratos por nós estabelecidos com os alunos, entendemos que não poderíamos fixar uma regra de resolução, haja vista que, procurávamos justamente perceber, através dos registros por meio de lápis e papel, as estratégias mobilizadas pelos alunos sem nenhuma influência por parte do professor. Para Bessa de Menezes e Câmara (2015, p. 7) "essas alterações nas relações entre o sujeito X1 e o objeto O1 vão muito além da questão epistemológica do objeto O1 (saber) ou de uma questão metodológica". Partindo também de uma intencionalidade ligada ao contrato que é estabelecido, como também, de acordo com os autores, outro fator que interfere nas escolhas dos alunos está diretamente ligado à maturidade deles.

Bessa de Menezes e Câmara (2008, p. 5) indicam que, "em alguns momentos, que os sujeitos X1 realizam certas escolhas, ou seja, quais são os objetos O1 que desejam construir ou alterar a relação existente R(X1, O1)". Em outras palavras, os autores afirmam que um dos agentes reguladores dessa conformidade será a avaliação, o que poderá fazer com que X1 abra mão de todos os outros "pertences", interessando a ele (X1), quase que somente, as estruturas, mecanismos, sequências que necessitará para realizar, em um determinado momento, seu papel de aluno.

6.2 Análise de extrato de resolução por estratégia de base

Faremos agora uma análise por estratégia de base em que apresentaremos alguns extratos, retirados do estudo realizado nessa pesquisa, dos problemas resolvidos pelos alunos, mostrando as estratégias de base utilizadas pelos estudantes. Como pressuposto teórico, tínhamos as cinco estratégias de base para resolução de problemas de estrutura algébrica tipo partilha definidas por Câmara e oliveira (2010), Atribuir Valores (AV), Dividir por 3 (D3), Resolução Algébrica (AL), Considerando o Total como Fonte (TF) e Realizar Cálculo Qualquer (CQ), no estudo com alunos de 6º ano do ensino fundamental.

Realizamos o teste com alunos do 2º, 3º e 4º períodos do Centro de Educação e Saúde da Universidade Federal de Campina Grande, universidade pública do Estado da Paraíba.

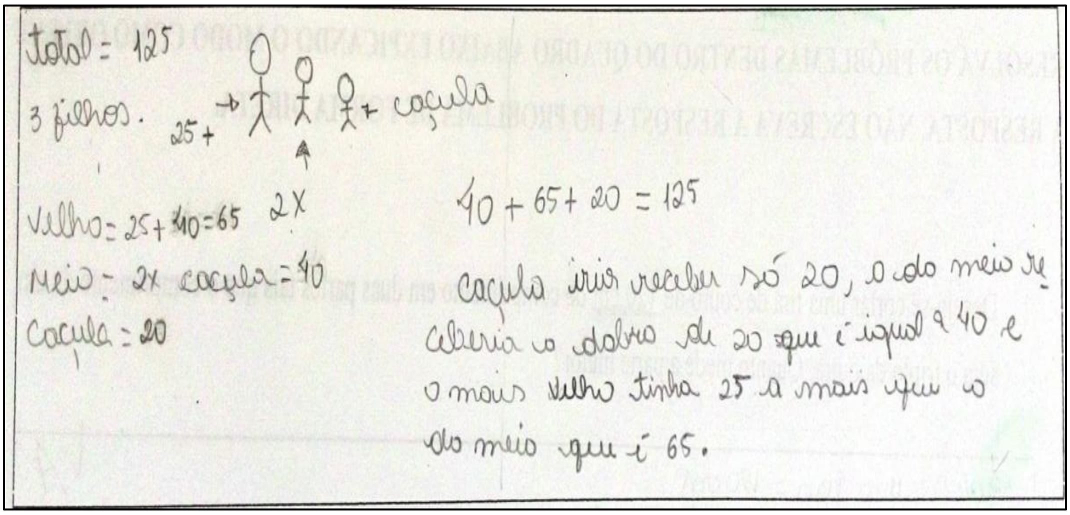
Logo, percebemos que eles realizam a resolução do teste com as mesmas categorias de estratégias de base definidas por Câmara e oliveira (2010).

Na estratégia **Atribuir Valores (AV)** notamos que os alunos supõem determinado valor a uma das incógnitas do problema e em seguida atribuem valores fazendo a relação estabelecida no problema até encontrar o valor total das três incógnitas dadas no problema. Vejamos o extrato a seguir.

PROBLEMA 4 –TESTE B

O senhor Mohamed possui uma grande propriedade nos Emirados Árabes com 125 camelos. Como é de idade avançada e sentindo que está perto de bater as botas, resolveu escrever no seu testamento a divisão dos seus camelos para seus três filhos, o caçula, o do meio e o mais velho. No seu testamento estava escrito a forma da como iria repartir, o qual dizia: "O meu filho do meio receberá o dobro do caçula e o mais velho 25 camelos a mais que o filho do meio". Quantos camelos receberam cada filho?

Figura 6 - Extrato de resolução do aluno "A". Estratégia AV.


total = 125
3 filhos. 25+ 2X ← caçula
velho = 25+40=65
Meio = 2x caçula = 40
Caçula = 20
40 + 65 + 20 = 125
Caçula iria receber só 20, o do meio receberia o dobro de 20 que é igual a 40 e o mais velho tinha 25 a mais que o do meio que é 65.

Fonte: Extrato de resolução do aluno "A"

Essa questão trata de um problema de partilha de encadeamento do tipo composição com duas relações, sendo elas de natureza mista multiplicação/adição. De acordo com Câmara e Oliveira (2010) em problemas deste tipo os alunos demonstram mais facilidade quando a primeira relação é multiplicativa (MM e MA), observamos em nossa análise que os problemas com esta estrutura foram resolvidos com alto grau de facilidade independente da ordem da relação apresentada no problema.

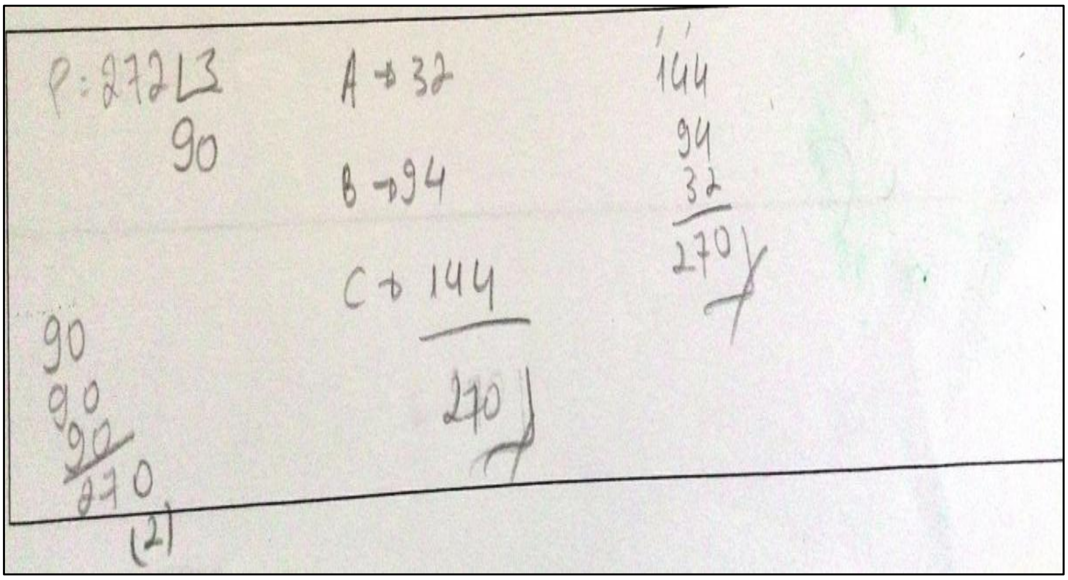
Ao interpretar o problema, o aluno procura representar cada elemento da situação por meio de desenhos, extrai os dados do enunciado e então começa a estabelecer valores para cada indivíduo. Ao supor a quantidade de camelos que o filho caçula irá receber, no caso 20, começa através do que se pede no enunciado do problema, atribuir valores aos outros sujeitos envolvidos na questão. E por fim chega ao resultado pretendido. Câmara e Oliveira (2010) destacam em sua pesquisa que, em alguns casos, os alunos não verificam a coerência dos valores encontrados e constatamos o mesmo em nossa pesquisa. Notamos também que os alunos não conseguem atribuir valores corretos as incógnitas na primeira tentativa, fazendo assim vários testes antes de obterem o resultado desejado e, em alguns casos, deixam de resolver a questão. Nosso estudo aponta que, esta estratégia foi utilizada pelos alunos em 45% dos problemas, constatando o índice mais alto entre todas as estratégias, da mesma forma na pesquisa de Câmara e Oliveira (2010), chegando a 40%.

Na estratégia **Dividir por 3 (D3)**, os alunos se apropriam da quantidade total do problema e fazem uma divisão pelo número de incógnitas como se a partilha fosse em partes iguais, como nos mostra o extrato abaixo.

PROBLEMA 7 – TESTE B

Fernando pretende abrir um aquário para visitação pública. Para tanto, teve que adquirir 272 espécies de peixes para colocar em três aquários. Fernando pretende dividir os peixes nos aquários A, B e C. Ele colocou os peixes nos aquários da seguinte forma: O aquário B tem o triplo do A e 50 peixes a mais que o aquário C. Quantos peixes têm em cada aquário?

Figura 7 - Extrato de resolução do aluno "B". Estratégia D3.



Fonte: Extrato de resolução do aluno "B"

Trata-se de um problema de partilha com encadeamento tipo poço, envolvendo duas relações divisão/subtração. De acordo com a pesquisa de Câmara e Oliveira (2010) no caso de problemas de partilha, os alunos mostram mais dificuldade quando o encadeamento das relações é desse tipo e a natureza das relações é multiplicativa/multiplicativa (MM). De forma semelhante, notamos um alto grau de dificuldade dos alunos em resolverem as questões com esse encadeamento, independente da estratégia utilizada e da natureza das relações em problemas tipo poço.

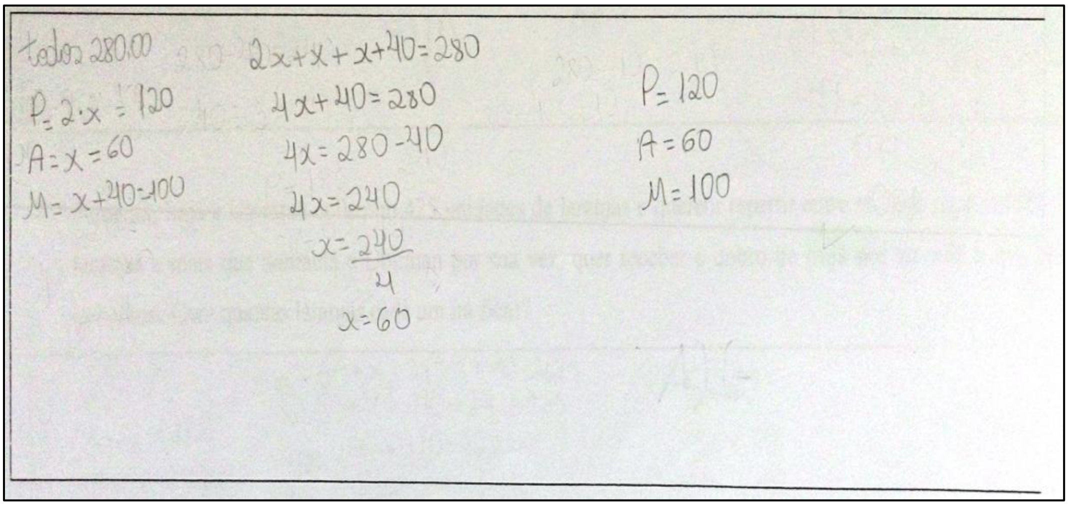
No problema acima, o aluno se apropria do valor total do problema e o divide por 3, encontrando valores iguais para cada incógnita. Observamos que o aluno utiliza como base o valor da divisão por três e se apropria desse resultado como caminho para encontrar o valor das incógnitas do problema, em seguida, procura estabelecer as relações propostas sem ao menos se importar com a coerência do resultado. Notamos também que o aluno não percebe que o resultado final encontrado não se verifica com o total estabelecido na questão, revelando uma falta de percepção ou compreensão do problema. Essa estratégia foi utilizada em 20% dos problemas em nossa pesquisa e na pesquisa de Câmara e Oliveira (2010) 34%.

Na **estratégia algébrica (AL)**, o estudo indica que apenas 27% dos problemas foram resolvidos por meio dessa estratégia. Na pesquisa de Câmara e Oliveira (2010) os resultados mostram que problemas cujo encadeamento das relações é do tipo fonte, parecem facilitar, para o sujeito, a mobilização correta de estratégias algébricas, sendo que dos problemas resolvidos por meio da estratégia AL, em nossa pesquisa, 97% foram resolvidos corretamente e percebemos também que ao mudar o tipo de encadeamento do problema, os alunos tendem a privilegiar outro tipo de estratégia, em sua maioria a AV. De modo semelhante, Câmara e Oliveira (2010) apontam em seu estudo com alunos de 6º ano que, no caso desse tipo de problema, 99% dos sujeitos que mobilizaram estratégias algébricas o fizeram corretamente; esse percentual decresce com os outros dois tipos de problema. Vejamos no extrato a seguir de uma resolução com problema tipo fonte.

PROBLEMA 3 – TESTE A

Antônio, Paulo e Mário saíram de casa com o objetivo de comprar equipamentos esportivos para iniciar seus treinamentos na escolinha de futebol do professor José. No caminho perceberam que juntos tinham R$ 280,00. Mário observou que Paulo tinha o dobro do dinheiro de Antônio e o próprio Mário tinha R$ 40,00 a mais que Antônio. Quantos reais têm cada um?

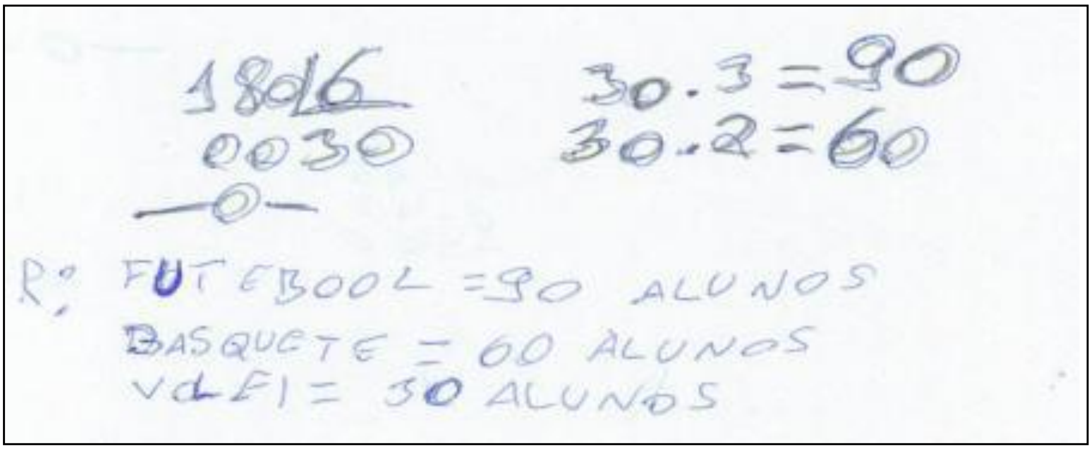
Figura 8 - Extrato de resolução do aluno "C". Estratégia AL



Fonte: Extrato de resolução do aluno “C”

Notamos que, neste caso, o aluno se depara com um problema tipo fonte com duas relações “**Paulo tinha o dobro do dinheiro de Antônio”** e “**Mário tinha R$ 40,00 a mais que Antônio”** de natureza mista multiplicativa/aditiva. Ele representa o problema em linguagem algébrica, utilizando símbolos, como a letra X, para representar as incógnitas, de maneira a levar em consideração o enunciado do problema corretamente e resolvendo somente por meio da equação polinomial do primeiro grau. Após determinar um valor da incógnita, aplica as outras relações e encontra os valores restantes. Constatamos nesses casos envolvendo problemas tipo fonte, um grande índice de resolução por meio da estratégia algébrica, além disso, da mesma forma, os problemas tipo fonte favorecem uma mobilização correta dessa estratégia convergindo para pesquisa de Câmara e Oliveira (2010). Porém, na pesquisa dos autores, apesar de os alunos utilizarem essa estratégia, eles ainda não conseguem representar o problema em uma linguagem algébrica, ou seja, por meio de símbolos algébricos, como a letra X para representar uma incógnita. Vejamos o extrato a seguir que traz um exemplo de um aluno do 6º ano utilizando a estratégia algébrica para resolver um problema de partilha.

Figura 9 - Extrato de resolução do aluno 6° ano. Estratégia AL.



Fonte**:** Câmara e Oliveira, 2010, p. 8.

Apesar de não identificarmos imediatamente, esse extrato de resolução extraído da pesquisa de Câmara e Oliveira (2010), expressa uma resolução do problema de partilha por meio da estratégia algébrica realizada pelo aluno do 6º ano do ensino fundamental. Entendemos esse fato devido o aluno, nessa etapa de escolaridade, ainda não transcrever a equação algébrica correspondente ao problema, porém, segundo os autores, os alunos equacionam mentalmente o problema. De acordo com eles, “nesse problema, tipo fonte, as relações são identificadas pelo sujeito, mesmo que ele não as represente, como sendo V, 3V e 2V. Em seguida ele equaciona, mentalmente, V+3V+2V=180, daí a divisão de 180 por 6” (CÂMARA e OLIVEIRA, 2010, p. 8).

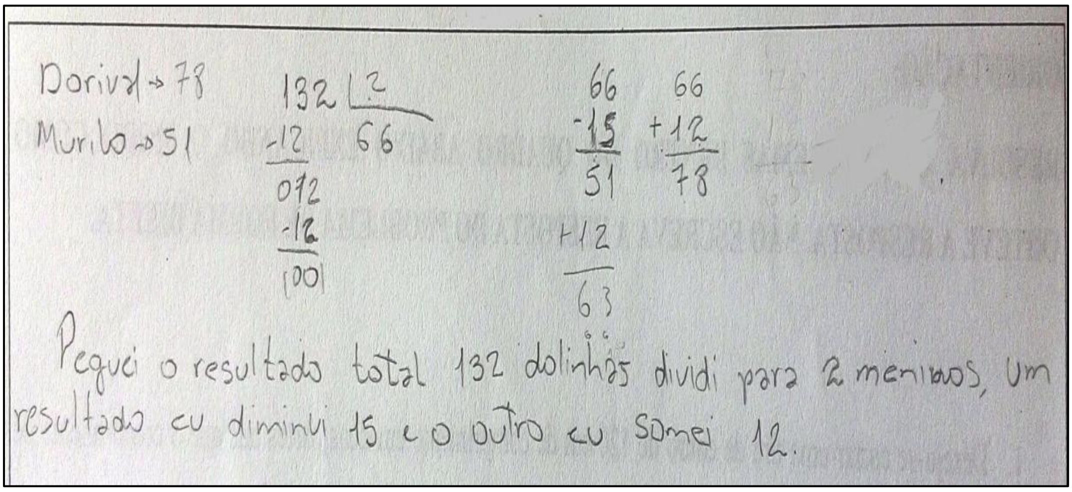
A estratégia de base considerar o **total como fonte (TF)**, de acordo com Câmara e Oliveira (2010), consiste em associar o total do problema ao valor de uma das incógnitas. Na resolução desse tipo de problema, o sujeito, após adotar o total como o valor de uma das incógnitas, aplica as relações do enunciado e encontra os valores para as outras incógnitas.

Abaixo apresentamos um extrato de resolução da nossa pesquisa, nela o aluno utiliza a estratégia total como fonte.

PROBLEMA 2 – TESTE B

Em uma tarde de domingo, Geraldo, Dorival e Murilo foram ao sítio dos avôs de Dorival e levaram bolinhas de gude para jogar. Eles possuem 132 bolinhas de gude e resolveram dividir de modo que Dorival receba 12 bolinhas a mais de Geraldo e Murilo 15 bolinhas a menos que Geraldo. Quantas bolinhas de gude devem receber cada um?

Figura 10 - Extrato de resolução do aluno "D". Estratégia TF.



Fonte: Extrato de resolução do aluno "D"

Notamos claramente que ao se apropriar do total da questão, 132 bolinhas, o aluno imediatamente divide o resultado por 2, como se a fonte do problema fosse o resultado total. Ao dividir, associa o valor 66 a uma das incógnitas do problema. Em seguida realizada as operações de acordo com o enunciado do problema, a fim de encontrar o valor das demais incógnitas da questão, ou seja, 66 +12 que representa a relação **Dorival recebe 12 bolinhas a mais de Geraldo** e 66 - 15 representando a relação **Murilo 15 bolinhas a menos que**

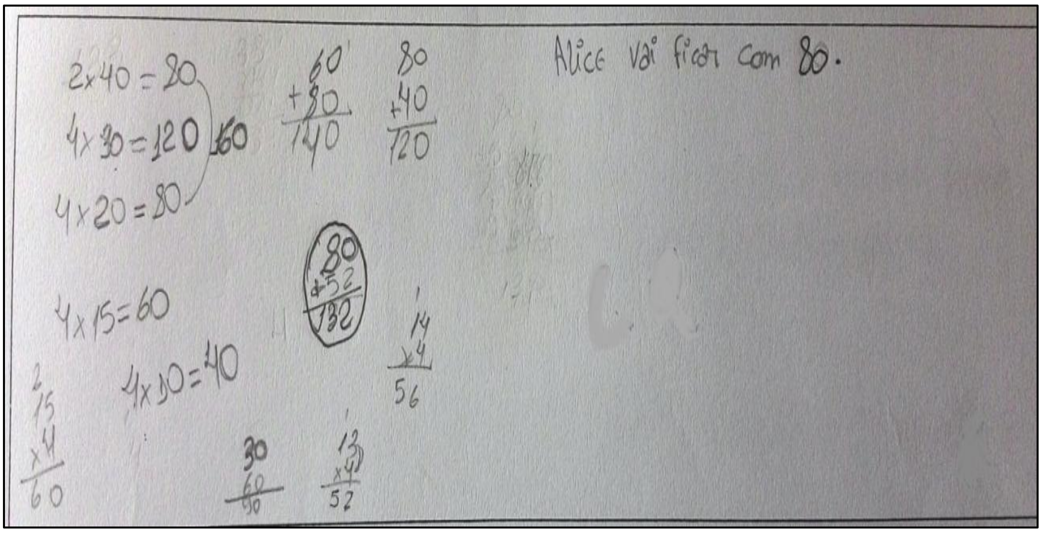
Geraldo. Na pesquisa de Câmara e Oliveira (2010), verifica-se que 8% dos alunos adotaram essa estratégia de base e que a mesma diminui o índice de acordo com o encadeamento das relações. Em nossas análises, constatamos que para esse tipo de estratégia o índice foi praticamente nulo, ficando em torno de 1% como estratégia de base privilegiada e sendo identificada apenas em problemas com encadeamento tipo fonte.

Encontramos em nossos testes, resoluções que apontam para o tipo de estratégia que Câmara e Oliveira (2010) denominam de **Efetuar um cálculo qualquer (CQ)**, de acordo com os autores, esse tipo de estratégia se expressa quando os alunos não conseguem associar os dados com o enunciado do problema e acabam efetuando um cálculo aleatório para conseguirem encontrar uma solução.

Nosso estudo apresenta um índice muito baixo de problemas resolvidos por meio dessa estratégia de base, identificamos 3%. Olhando para o estudo de Câmara e Oliveira, perceberam que 6% dos alunos do 6º do ensino fundamental, que resolveram problemas tipo partilha, utilizam essa estratégia de base. Apresentaremos abaixo um extrato de resolução de nosso estudo. Neste, o aluno resolve um problema pela estratégia **efetuar um cálculo qualquer (CQ).**

> **Isabel, Alice e Liliane foram desafiadas por seu professor de matemática a dividir entre elas R$ 133,00 em um exercício na sala de aula. Seu professor impôs as condições que Alice receba o dobro de Isabel e o quádruplo de Liliane. Quanto recebeu cada uma?**

Figura 11 - Extrato de resolução do aluno "E". Estratégia CQ.



Fonte: Extrato de resolução do aluno “E”

Câmara e Oliveira (2010) argumentam que o aluno não consegue associar os dados com o enunciado do problema, ou seja, as relações que precisam ser estabelecidas por meio dos dados ficam, para o aluno, sem compreensão. Trata-se de um problema com encadeamento tipo poço, segundo os autores, todas as relações convergem para um dos dados do problema, percebemos nesse extrato que o aluno utiliza soma e multiplicação, com indícios que supôs um valor inicial e tentar estabelecer as relações do problema, **Alice receba o dobro de Isabel e o quádruplo de Liliane,** para chegar ao resultado total R$ 133,00, porém não obtendo êxito. Observando esse tipo de estratégia, por meio dos extratos de resolução, temos um pouco de clareza em qual fonte o aluno se baseou, sendo estabelecidos cálculos aleatórios para chegar ao resultado que a questão deseja.

6.3 Análise por Estratégias de Base

Câmara e Oliveira (2010) identificaram em sua pesquisa cinco estratégias de base utilizadas pelos alunos do 6º ano do ensino fundamental para resolução dos problemas de partilha. Da mesma forma, em nossa pesquisa, procuramos identificar as estratégias utilizadas na resolução dos problemas de partilha por estudantes licenciandos em matemática, trazendo os resultados obtidos em tabelas.

Percebemos que os resultados obtidos em nosso estudo convergem no mesmo sentido da pesquisa de Câmara e Oliveira (2010). O quadro 7 apresentado a seguir, nos mostra o percentual de estratégias de base utilizada pelos alunos da graduação em matemática. Lembramos que, neste caso, não consideramos os problemas que os alunos deixaram sem resposta.

Quadro 7 - Análise por estratégias de base utilizada pelos alunos

Atribuir valores (AV)	45%
Dividir por 3 (D3)	20%
Algébrica (AL)	27%
Considerar o total como fonte (TF)	1%

Cálculo qualquer (CQ)	3%
Não identificada (NI)	4%

Fonte: Elaborado pelo autor

Notamos, por este quadro, que a estratégia de base mais usada pelos alunos na resolução dos problemas é a estratégia Atribuir Valores (AV) com 45%. Em relação às estratégias Dividir por 3 (D3) e algébrica (AL), 20% e 27% dos problemas são resolvidos, respectivamente, pelos alunos por meio dessas estratégias. Por se tratar de alunos do ensino superior, subentende-se que teriam mais facilidade em resolver os problemas de partilha se apropriando da estratégia algébrica, considerando que, os alunos já tomam conhecimento desse campo matemático já no início dos anos finais do ensino fundamental, quando começam a trabalhar conceitos de equações polinomiais do primeiro e segundo grau. Entretanto, vemos que há uma controvérsia em relação a essa hipótese previamente estabelecida tendo em vista os dados obtidos na pesquisa que revelam apenas 27% dos alunos utilizaram a estratégia algébrica. Quando nos referimos à estratégia de efetuar um cálculo qualquer, notamos, no estudo, que alguns alunos não conseguiram se apropriar do raciocínio envolvido no problema, se apropriando de cálculos aleatórios, assim, 3% dos problemas resolvidos foram pela estratégia de efetuar um cálculo qualquer.

6.4 Análise do rendimento por encadeamento de relações

Câmara e Oliveira (2010) trazem em sua pesquisa a quantidade de erros, acertos e não resposta observando o rendimento por encadeamento de relações. Fizemos a mesma análise e os resultados não ficaram distantes em relação às conclusões da pesquisa desses autores. Podemos constatar esses resultados pelo quadro 8, que expressa o resultado de nossa pesquisa no que diz respeito ao rendimento por encadeamento de relações.

Quadro 8 - Análise do rendimento por encadeamento de relações e erro/acerto

	Fonte	**Composição**	**Poço**
Acertos	72%	66%	46%
Erros	22%	25%	43%
Não resposta	6%	9%	11%

Fonte: Elaborado pelo autor

Observamos no quadro que os alunos têm maior facilidade ao resolverem os problemas tipo fonte, pois 72% foram resolvidos corretamente. Identificamos nesse caso que os alunos não encontram dificuldades nesse encadeamento independente do tipo de natureza das relações. Atentamos também para o fato do percentual de erros com relação aos problemas tipo poço, pois 43% dos problemas foram resolvidos de modo errado pelos alunos, como também o maior percentual representado em questões em branco, ou seja, não respondidas 11%. Como exemplo desse tipo de problema, Almeida (2011, p. 104) apresenta um exemplo com encadeamento tipo poço extraído do livro didático de Bianchini (2016, p.114).

Figura 12 - Extrato de um PP tipo poço com três relações.

43 Quatro candidatos disputavam a prefeitura de uma cidade. Após a apuração dos 5.219 votos, foram obtidos os resultados: o primeiro candidato conseguiu 22 votos a mais que o segundo, 130 a mais que o terceiro e 273 votos a mais que o último. Quantos votos recebeu o candidato eleito? Responda no caderno. 1.411

Fonte**:** Bianchini (2006, p. 114)

O estudante precisa levar em consideração as operações inversas as que estão no enunciado para realizar a conversão desse problema da linguagem natural para algébrica, ou seja, a equação equivalente a esse problema é:

$$X + (X - 22) + (X - 130) + (X - 237) = 5219$$

Deste modo, ao lermos *"22 a mais que o segundo"*, não representamos por "X + 22", e sim por "X – 22", quando lemos *"130 a mais que o terceiro"*, não significa imediatamente, "X + 130", e sim "X – 130", e por fim, quando lemos "273 votos a mais que o último", não podemos representar pela expressão "X + 273" mas, "X – 273". Justificando a ideia expressa por Câmara e Oliveira (2010) que nesse tipo de encadeamento de relações o aluno encontra dificuldades.

Nesse caso, conseguimos observar que o grau de dificuldade desse problema é considerado alto, uma vez que no momento da conversão o enunciado do problema tomado como registro de partida (em linguagem natural) não transparece no registro de chegada (em linguagem algébrica).

Neste tipo de problema, o percentual de erros se sobressai com relação aos outros tipos, como foi observado também na pesquisa de Câmara e Oliveira (2010), esse fato pode ser entendido porque é exigida do aluno a interpretação inversa das operações, que são expressas nas relações do problema. Deste modo, para fazer a conversão da linguagem natural do problema para uma representação algébrica, o aluno terá que perceber a necessidade de tomar a operação expressa no enunciado de maneira inversa e ainda descobrir a fonte fixa do problema representado por *"X"* e daí estabelecer as demais relações do problema e formar a equação que represente a situação em questão, como vimos no exemplo acima.

Percebemos também, pelo quadro, a influência no grau de dificuldade dos alunos em resolver problemas de acordo com o encadeamento da relação, pois notamos que a quantidade de acertos decresce dos problemas tipo fonte, composição e poço, e a quantidade de erros cresce em comparação aos mesmos tipos de problemas.

6.5 Análise da escolha da estratégia de base em função do encadeamento das relações

Também analisamos a escolha da estratégia de base em função do encadeamento das relações. Esses resultados expressam certa influência do tipo de encadeamento na escolha das estratégias utilizadas pelos alunos. Destacamos também que, os problemas que não foram respondidos pelos alunos, não foram incluídos no percentual expresso na tabela. Podemos compreender claramente as relações entre as estratégias de base em função dos encadeamentos das relações no quadro 9 a seguir.

Quadro 9 - Análise das estratégias de base em função do encadeamento das relações

	Fonte	**Composição**	**Poço**
Atribuir valores (AV)	42%	48%	57%
Dividir por 3 (D3)	20%	17%	19%
Algébrica (AL)	29%	25%	15%
Considerar o total como fonte (TF)	1%	-	-
Cálculo qualquer (CQ)	5%	7%	7%
Não identificada (NI)	3%	3%	2%

Fonte: Elaborado pelo autor

No quadro percebemos que, na estratégia de base AV o percentual de problemas resolvidos cresce, tendo em vista a relação de encadeamento, saindo de 42% nos problemas tipo fonte, 48% tipo composição e alcançando maior índice nos problemas tipo poço, com 57%. Câmara e Oliveira (2010) destacam em sua pesquisa que o recurso à estratégia algébrica (AL), contrariamente à estratégia AV, decresce em função da dificuldade do problema, sendo mais adotada em problemas do tipo fonte. Entendemos esses dados pelo fato da dificuldade que cada encadeamento proporciona ao aluno mediante a resolução, constatando que os problemas tipo poço são os mais propícios à estratégia de atribuir valores. Em relação à estratégia D3 a pouca variação do percentual em relação ao encadeamento, tendo até o mesmo percentual nos encadeamentos tipo composição e poço. Percebemos também que o percentual de problemas resolvidos pelos alunos utilizando a estratégia AL decresce significativamente de acordo com o encadeamento, sendo mais adotada nos problemas tipo fonte.

6.6 Análise comparativa dos resultados

Fizemos uma análise dos resultados encontrados em nosso estudo, atingindo um de nossos objetivos que é a análise comparativa sobre as estratégias de resolução dos problemas de partilha pelos alunos licenciandos em matemática com os de Câmara e Oliveira (2010).

O quadro 10 faz um comparativo com os resultados obtidos nesta pesquisa e na de Câmara e Oliveira (2010), levando em consideração o rendimento por encadeamento das relações dos problemas de partilha. Do lado direito do quadro os dados obtidos por Câmara e Oliveira (2010) e do lado esquerdo do quadro, em negrito, os dados obtidos nesta pesquisa.

Quadro 10 - Comparativo do rendimento por encadeamento de relações

	Fonte		Composição		Poço	
Acertos	**72%**	44%	**66%**	33%	**46%**	23%
Erros	**22%**	41%	**25%**	43%	**43%**	39%
Não resposta	**6%**	15%	**9%**	24%	**11%**	38%

Fonte: Elaborado pelo autor

Nesta comparação, notamos que os resultados caminham no mesmo sentido, porém percebemos que o índice de acerto quase dobra. Os problemas tipo poço se tornam mais difíceis de serem resolvidos para ambas as séries de estudo indicando 43% nesta pesquisa e 39% no estudo de Câmara e Oliveira (2010), da mesma forma como os problemas tipo fonte se mostraram mais fáceis de serem resolvidos pelos alunos, de modo que 72% foram resolvidos corretamente nesta pesquisa e 44% na dos autores. O erro em cada tipo de problema cresce e decresce no mesmo sentido em ambos os estudos, tomando como referência a relação de encadeamento. Esta comparação pode nos indicar também que os alunos em fase de graduação detêm certas dificuldades em interpretar problemas, uma vez que, os resultados mostram o alto índice de erro.

Ao analisarmos a influência da natureza das relações nos problemas de partilha, percebemos que, dos problemas tipo poço que apresentava natureza da relação multiplicativa/multiplicativa (MM), 56% desses problemas foram respondidos de maneira errada e 36% acertaram. No estudo realizado por Câmara e Oliveira (2010) os resultados mostram que, no caso de problemas de partilha, os alunos mostram mais dificuldade quando o encadeamento das relações é do tipo “poço” e a natureza das relações é multiplicativa/multiplicativa (MM).

Nesse sentido, nossas pesquisas caminham juntas, quando comparamos os resultados nesse determinado tipo de encadeamento e natureza. Câmara e Oliveira (2010) destacam outro dado em seu estudo em relação à natureza da relação dos problemas no rendimento dos alunos, segundo eles em problemas tipo “composição”, os alunos demonstram mais facilidade quando a primeira relação é multiplicativa (MM e MA). Para compararmos essa situação, fizemos a análise nos problemas de nosso teste que apresentavam esse tipo de característica, ou seja, encadeamento tipo composição e natureza da relação inicial multiplicativa (MM e MA). Percebemos nos problemas tipo composição com relação de natureza multiplicativa/multiplicativa (MM) que, 64% desses problemas foram respondidos corretamente. Por outro lado, verificando os problemas com relação de natureza multiplicativa/aditiva (MA), constatamos que 84% tem como resultado a resposta correta. Logo, percebemos que a comparação caminha no mesmo sentido nas duas pesquisas. Importante mencionarmos que o nosso estudo, parte de um diagnóstico cujo instrumento de coleta de dados comporta somente a resolução, com papel e lápis, de uma tarefa.

Deste modo, pensar sobre fatores externos envolveria uma análise mais refinada, explorando outros tipos de instrumentos. Por isso nos detemos a analisar quais as estratégias que os alunos usaram e qual a influência dos aspectos teóricos (encadeamento e natureza das relações) dos problemas de partilha no resultado exposto na folha de resposta.

O quadro 11, a seguir, que nos mostra um comparativo entre os dados obtidos nessa pesquisa e os resultados de Câmara e Oliveira (2010) em relação as estratégias de base utilizada pelos alunos.

Quadro 11 - Comparativo das estratégias de base

Atribuir valores (AV)	**45%**	40%
Dividir por 3 (D3)	**20%**	34%
Algébrica (AL)	**27%**	9%
Considerar o total como fonte (TF)	**1%**	8%
Cálculo qualquer (CQ)	**3%**	6%
Não identificada (NI)	**4%**	3%

Fonte: Elaborado pelo autor

Neste quadro, apresentamos do lado direito os dados obtidos por Câmara e Oliveira (2010) e do lado esquerdo, em negrito, os dados obtidos nesta pesquisa. Observamos uma conformidade com o estudo de Câmara e Oliveira (2010), pois tanto os alunos do 6º ano do ensino fundamental como os do ensino superior utilizam com mais frequência a estratégia Atribuir Valores. Segundo os autores, a escolha da estratégia de base AV cresce em função da complexidade das relações. Observamos um fator interessante nesses dados referente à utilização das estratégias Dividir por 3 e Algébrica. Na pesquisa de Câmara e Oliveira (2010) os alunos pouco utilizam a estratégia (AL) 9%, enquanto que neste estudo se constatou que 27% dos problemas foram resolvidos com essa estratégia, a (AL). Vemos também que na pesquisa dos autores os alunos do 6º ano utilizaram mais significativamente a estratégia (D3) e esse dado diminui em relação à pesquisa feita com os alunos do ensino superior, ou seja, 20%.

Também fizemos um comparativo com os dados de Câmara e Oliveira (2010) e observamos semelhança entre a escolha da estratégia de base em função do encadeamento das relações dos alunos do ensino superior. Do lado direito do quadro os dados obtidos por

Câmara e Oliveira (2010) e do lado esquerdo, em negrito, os dados obtidos nesta pesquisa. Podemos verificar isso no quadro 12 a seguir.

Quadro12 - Comparativo da escolha por estratégia de base em função do encadeamento das relações

	Fonte		Composição		Poço	
Atribuir valores (AV)	**42%**	37%	**48%**	40%	**57%**	44%
Dividir por 3 (D3)	**20%**	32%	**17%**	33%	**19%**	36%
Algébrica (AL)	**29%**	12%	**25%**	9%	**15%**	6%
Considerar o total como fonte (TF)	**1%**	11%	**-**	6%	**-**	7%
Cálculo qualquer (CQ)	**5%**	5%	**7%**	9%	**7%**	6%
Não identificada (NI)	**3%**	3%	**3%**	3%	**2%**	2%

Fonte: Elaborado pelo autor

Do lado direito do quadro os dados obtidos por Câmara e Oliveira (2010) e do lado esquerdo do quadro, em negrito, os dados obtidos nesta pesquisa. Nela, percebemos que, na estratégia de base AV o percentual de problemas resolvidos cresce tendo em vista a relação de encadeamento, saindo de 42% nos problemas tipo fonte, 48% tipo composição e alcançando maior índice nos problemas tipo poço, com 57%. Esses dados expressam certa dificuldade que cada encadeamento proporciona ao aluno na resolução, constatando que os problemas tipo poço são os mais propícios à estratégia de atribuir valores, devido o maior grau de dificuldade que o problema impõe aos alunos. Em relação à estratégia D3, à pouca variação entre os tipos de encadeamentos, tendo até o mesmo percentual nos encadeamentos tipo composição e poço. Percebemos pelos dados na tabela, que o percentual de problemas resolvidos pelos alunos utilizando a estratégia AL decresce significativamente de acordo com o encadeamento revelando um grau de dificuldade nos alunos de ensino superior.

Da mesma forma que em nossa pesquisa, no estudo de Câmara e Oliveira (2010) a estratégia AV é mais utilizada nos problemas tipo fonte, com 37% e à um crescimento em relação ao percentual de problemas resolvidos pelos alunos por essa estratégia em cada encadeamento, passando para 40% no tipo composição e 44% no tipo poço constatando um raciocínio semelhante dos alunos das diferentes pesquisas, ainda que, em etapas de ensino diferentes. O mesmo ocorre para o percentual da estratégia D3, a qual em ambas as pesquisas o percentual de problemas resolvidos por essa estratégia permanece praticamente o mesmo em relação ao tipo de encadeamento. Olhando para a estratégia AL, percebemos que o percentual de problemas resolvidos decresce de acordo com o encadeamento, ocorrendo o mesmo na pesquisa de Câmara e Oliveira (2010). Na estratégia considerar o total como fonte, em nossa pesquisa não temos dados consideráveis a respeito de problemas resolvidos por meio dessa estratégia. Observando o encadeamento tipo fonte e poço em ambas as pesquisas percebemos que os percentuais se mantem equilibrados. Em relação à estratégia CQ, no encadeamento tipo composição há uma diferença em relação aos três tipos de encadeamento. Deste modo podemos compreender que os alunos do ensino superior ainda resolvam problemas de estrutura algébrica carregando estratégias de resolução dos alunos do ensino fundamental.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A pergunta que nos motivou a iniciarmos uma investigação com esta pesquisa foi: quais as estratégias utilizadas por alunos licenciandos em matemática na resolução de problemas tipo partilha? Com a finalidade de respondermos essa indagação, percorremos alguns caminhos teóricos e práticos no campo da pesquisa cientifica e chegamos a algumas considerações neste estudo. Apresentamos como resultado as estratégias de resolução de problemas de partilha dos alunos licenciandos em matemática, como também chegamos aos nossos objetivos iniciais, ou seja, analisamos o rendimento por encadeamento de relações na resolução dos problemas de partilha; analisamos estratégias de base em função do encadeamento de relações; verificamos a influência das variáveis dos problemas de partilha (do número das relações, natureza das relações e tipo de encadeamento) no tipo de estratégia adotada pelos licenciandos em matemática e como estratégia de análise, comparamos os dados obtidos desses estudantes com o estudo realizado com os alunos do 6º ano do ensino fundamental na pesquisa desenvolvida por Câmara e Oliveira (2010). Para tanto, levamos em consideração três quadros de categorias definidas em: rendimento dos alunos por encadeamento das relações, estratégia de base adotada pelos alunos e estratégias de base em função do encadeamento das relações.

Estudos indicam que resolver problemas algébricos é sempre um desafio para alunos em todas as etapas de ensino. Conforme Lochhead e Mestre (1995, p.144), de acordo com eles, as "pesquisas recentes indicam que muitos alunos parecem ter dificuldades enormes para resolver certos tipos de problemas algébricos bastante simples [...]" e esse fato se estende a todos os níveis de escolaridade, do ensino fundamental ao superior. Miguel, Fiorentini e Miorim (1993), que apontam que isso deriva do problema da álgebra ser ensinada com um caráter reprodutivo, sem significado, apenas como ferramenta para resolver problemas.

Consideramos também o estudo de Almeida e Câmara (2014) nos mostrando indícios das dificuldades dos alunos em problemas algébricos, uma vez que, no referido estudo, os autores têm como questão de pesquisa se os alunos de licenciatura em matemática de uma instituição de ensino superior conseguem identificar indícios de pensamento algébrico em questões de problemas de estrutura algébrica tipo partilha, resolvidas por alunos da educação básica.

Nossas referências de estratégias de resolução de problemas de partilha foram baseadas nas estratégias identificadas na pesquisa realizada por Câmara e Oliveira (2010), cujo objetivo da pesquisa dos autores foi a de investigar as estratégias utilizadas por alunos do 6º ano do ensino fundamental na resolução de problemas de partilha. Os resultados apresentados por eles se tornaram relevantes para nós, uma vez que, realizamos uma comparação com os resultados de nossa pesquisa em função da relação das estratégias de resolução, com os resultados da pesquisa dos autores, salientando que, ambas foram realizadas em esferas de ensino diferentes.

Câmara e Oliveira (2010) estudaram os tipos de estratégias utilizadas pelos alunos do 6º ano do ensino fundamental. De acordo com eles, foram identificados cinco tipos. Os resultados do estudo mostram que, no caso de problemas de partilha, os alunos mostram mais dificuldade quando o encadeamento das relações é do tipo "poço", 43% dos problemas foram resolvidos de maneira errada pelos alunos e apresentam maior facilidade nos problemas tipo "fonte", em que 72% foram resolvidos corretamente. Já em problemas tipo "composição", os resultados nos mostram que esse tipo de problema não gerou tanta dificuldade para os alunos de graduação, pois 66% foram resolvidos corretamente pelos alunos, entretanto podemos considerar ainda um baixo rendimento se tratando de alunos licenciandos em matemática. Na pesquisa de Câmara e Oliveira (2010), 44% dos problemas tipo "poço" foram respondidos de maneira errada pelos alunos, 33% de erro em relação ao tipo composição e 23% nos do tipo fonte. Logo, percebemos que os nossos dados convergem no mesmo sentido da pesquisa de Câmara e Oliveira (2010), em relação aos erros e acertos nos problemas tipo poço e fonte, porém, esperávamos que os alunos do ensino superior tivessem maior facilidade em se apropriar dos problemas tipo poço.

Quando nos referimos aos dados observados em relação às estratégias de resolução de problemas de partilha, percebemos no estudo que o uso de raciocínios aritméticos tem permanecido ainda no ensino superior, raciocínio que busca partir de valores para as incógnitas, como percebemos na análise feita sobre a estratégia de resolução de Atribuir Valores e Dividir por 3. Importante destacar que os estudos apontam indícios de pensamento algébrico nas estratégias de Atribuir valores (ALMEIDA 2016). No estudo, 45% dos problemas foram resolvidos pelos alunos por meio dessa estratégia que atribui um determinado valor a uma das incógnitas do problema e em seguida, determinar os outros valores, aplicando as relações entre as incógnitas. Na presente pesquisa observamos que os alunos do ensino superior utilizaram, em sua maioria, esta estratégia. Da mesma forma se observa na pesquisa de Câmara e Oliveira (2010), em que 40% dos problemas foram resolvidos por essa estratégia, sendo também a maioria.

Percebemos, em nosso estudo, que somente 27% dos problemas foram resolvidos pelos alunos mobilizando a estratégia algébrica e na pesquisa de Câmara e Oliveira (2010) um índice ainda menor, 9%, em que os alunos iniciam o problema estabelecendo relações entre as incógnitas. Nossa pesquisa focou alunos do ensino superior que já possuem conhecimentos algébricos mais avançados que alunos do 6º ano fundamental, isso parece indicar que o trabalho com a aritmética nas séries iniciais de escolaridade tem predominado na formação do pensamento matemático dos alunos.

Sobre a influência da natureza das relações nos problemas de partilha, percebemos que, dos problemas tipo poço que apresentavam natureza da relação multiplicativa/multiplicativa (MM), 56% desses problemas foram respondidos de maneira errada e 36% acertaram. Câmara e Oliveira (2010) mostram que, no caso de problemas de partilha, os alunos mostram mais dificuldade quando o encadeamento das relações é do tipo "poço" e a natureza das relações é multiplicativa/multiplicativa (MM). Segundo Câmara e Oliveira (2010) em problemas tipo "composição", os alunos demonstram mais facilidade quando a primeira relação é multiplicativa (MM e MA). Percebemos nos problemas tipo composição com relação de natureza multiplicativa/multiplicativa (MM) que, 64% desses problemas foram respondidos corretamente. Por outro lado, verificando os problemas com relação de natureza multiplicativa/aditiva (MA), constatamos que 84% tem como resultado a resposta correta.

Os estudos de Câmara e Oliveira (2010), Santos Júnior (2013), Araújo (1999) e Biazi (2003) apontam dificuldades dos alunos no ensino de álgebra, desde a resolução de problemas, como também, em aspectos de conceitos, propriedades e significados. Esses estudos nos mostram que as dificuldades transcendem o ensino básico e são percebidos até o ensino superior, em nível de graduação. Dessa forma, acreditamos que trabalhar os problemas de estrutura algébrica envolvendo equações polinomiais do 1º grau com uma incógnita pode contribuir significativamente para o desenvolvimento do pensamento algébrico em alunos iniciantes na álgebra, conforme Fiorentini, Miorin e Miguel (1993), ao defenderem que o ensino de álgebra deve ser introduzido com problemas que estimulem o uso de uma linguagem algébrica com significado para o aluno.

Esses dados nos indicam como os resultados verificados em nosso estudo corroboram com as pesquisas que serviram como fundamento teórico para nossa investigação. Percebemos que os alunos do ensino superior detêm dificuldades e habilidades parecidas com a dos alunos do ensino fundamental em relação aos problemas estrutura algébrica tipo partilha.

Questionamos a respeito de como alunos do ensino superior responderiam esse tipo problema, será que ainda com estratégias aritméticas ou com um grau de representação algébrica dentro das expectativas que giram em torno do ensino superior? Uma vez que as pesquisas se limitaram à esfera da educação básica, em nosso estudo tivemos a oportunidade de explorar esse tipo de problema dentro da esfera do ensino superior e isto nos trouxe apontamentos importantes que poderão ser aprofundados futuramente, uma vez que tivemos grandes indícios das dificuldades dos alunos de ensino superior em resolver problemas algébricos simples, como aponta nosso estudo.

A Teoria Antropológica do Didático nos leva a pensar que, o aluno como sujeito institucional (escola/universidade), desenvolve o seu papel sendo sujeitos de sua instituição. Deste modo, a instituição para Bessa de Menezes e Câmara (2008, p.3) “pode ser explicitado como sendo um dispositivo social, total ou parcial, que impõe aos seus sujeitos formas de fazer e de pensar, que são próprias a cada ‘tipo ou forma’ de instituição” e entendem *sujeito* “quando se sujeita a uma Instituição I, sob suas demandas, hábitos, formas, enfim, se sujeitando a esta relação.”. (BESSA DE MENEZES e CÂMARA, 2009, p.4). Quando nós trabalhamos com problemas de estrutura algébrica, percebemos que a instituição (universidade) poderia trazer uma forma mais forte da evidência da resolução dos problemas de partilha via estratégia algébrica (AL), uma vez que os sujeitos, de acordo com Bessa de Menezes e Câmara (2008), buscariam conformidade[2] com a instituição. Na sala de aula, já estava posto em jogo o saber algébrico e os alunos já tinham (em níveis diferentes) conhecimento desse conceito.

Partindo para uma reflexão sobre a TAD no contexto da sala de aula, de acordo com Bessa de Menezes e Câmara (2008), pensar que a instituição “sala de aula” com suas relações entre sujeitos (professor/alunos), objetos (saberes) e seus agentes (professor, contrato didático, avaliações, transposição didática) que regulam ou não a conformidade com a instituição de

[2] Conformidade expressa o sentido, segundo os autores, de estar adequado ou corresponder às expectativas da instituição.

acordo com a intencionalidade estabelecida, aparecerão de acordo com o momento necessário. Deste modo, não acreditamos que apontar um modo de resolução dos problemas de partilha para os alunos seria correto, pois pretendíamos investigar quais as estratégias que, por eles, seriam mobilizadas. Logo, em se tratando de suposições que poderiam surgir na pesquisa sobre o aluno de ensino superior ter como estratégia de base privilegiada, em sua maioria, a estratégia algébrica (AL), teríamos como pressuposto dois apontamentos, ou seja, a TAD nos ajudando a compreender, o aluno como sujeito institucional e assim, adequado a instituição. Um segundo pensamento é que, um problema de partilha se caracteriza por ser um problema de estrutura algébrica e assim sua resolução naturalmente seria mais adequada via equação polinomial do 1º grau, além de corroborarmos com a ideia de Da Rocha Falcão (1992), tratando-se de problemas de estrutura algébrica, os procedimentos aritméticos tornam-se cansativos, enfadonhos ou insuficientes.

Neste sentido, deixamos os seguintes questionamentos para que possam ser melhor aprofundados ou mesmo, gerar mais implicações e hipóteses de estudo, pois na pesquisa não encontramos somente respostas, às vezes, as perguntas que surgem são mais significativas, pois abrem caminho para outras pesquisas e assim contribuiremos para o avanço no ensino de matemática.

Logo, a respeito da dificuldade dos alunos pensarem algebricamente, o que seria possível de ser trabalhado nas aulas de matemática para melhor desenvolver o pensamento algébrico? Quais os caminhos que o professor pode percorrer para melhorar em suas aulas a abordagem do ensino de álgebra e consequentemente potencializar o pensamento algébrico desses alunos? Almeida (2016) trabalha com um modelo que identifique os níveis de pensamento algébrico dos alunos e isso nos motiva a pensarmos em pesquisas futuras em nível de doutorado com a possível questão norteadora: **Como os problemas de estrutura algébrica do tipo partilha podem contribuir no desenvolvimento do pensamento algébrico do aluno?** Uma vez apoiados no estudo desenvolvido por Almeida (2016), vislumbramos a possibilidade de darmos continuidade com a pesquisa envolvendo problemas de estrutura algébrica do tipo partilha.

Uma hipótese, que nos leva a pensar em questões para pesquisas futuras, é que acreditamos em uma sequência didática, envolvendo esses tipos de problemas, que pode favorecer o desenvolvimento do pensamento algébrico, como também uma possível passagem de um determinado nível de pensamento algébrico que o aluno iniciante em álgebra pode se encontrar para outro, como indicam algumas pesquisas (CÂMARA; OLIVEIRA, 2010, OLIVEIRA; CÂMARA, 2011, ALMEIDA 2016). Interessamo-nos também pela investigação das práticas de ensino em sala de aula e sua relação com as atividades matemáticas desenvolvidas pelos alunos. Em outras palavras, a presente pesquisa fomenta uma discussão inicial para a construção de processos didáticos que facilitem, ao professor, a construção de sequências de ensino adequadas e, ao aluno, desenvolver o pensamento algébrico através dos problemas de estrutura algébrica tipo partilha.

Portanto, finalizamos este trabalho com um panorama importante sobre nossa proposta de pesquisa e ela possibilita aprofundarmos esse estudo abrindo mais os horizontes sobre o pensar algébrico dos alunos, assim como o estudo de estratégias de resolução dos problemas algébricos tipo partilha. Lembramos que a base de diagnóstico de nosso estudo envolveu um instrumento de coleta de dados comportando somente a resolução, com papel e lápis, de um teste. É imprescindível, e isso pode ser pensado na continuidade deste estudo, a aplicação de entrevistas com os alunos, para afinar as nossas hipóteses.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, E. A. **Influências das habilidades e das atitudes em relação a matemática e a escolha profissional**. Tese (Doutorado). FE. Campinas, SP, Unicamp, 1999.

ARAÚJO, E. A. Ensino de álgebra e formação de professores. **Educ. Mat. Pesqui**. São Paulo, v. 10, n. 2, p. 331-346, 2008.

ARAÚJO, L. F. **Rompendo o contrato didático: a utilização de estratégias metacognitivas na resolução de problemas algébricos**. Tese de Doutorado em Educação, UFPE, Recife, 2009.

ALMEIDA, C. S. **Dificuldades de aprendizagem em matemática e a percepção dos professores em relação a fatores associados ao insucesso nesta área**. Trabalho de conclusão de curso de Matemática - Universidade Católica de Brasília, Brasília, DF, 2006.

ALMEIDA, J. R.. **Problemas propostos para o ensino de equações polinomiais do 1º grau com uma incógnita**: um estudo exploratório nos livros didáticos de matemática do 7º ano do ensino. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco, CE, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Recife, PE, 2011.

ALMEIDA, J. R. Níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico: em busca de um modelo para os problemas de partilha de quantidade. In: **Anais do XII encontro nacional de educação matemática. Educação matemática na contemporaneidade: desafios e possibilidades**. São Paulo, SP, 2016.

ALMEIDA, J. R.; CÂMARA, M. Pensamento algébrico e formação inicial de professores de matemática. EM TEIA – **Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana** – vol. 5 – n. 2, p.1-17. 2014.

BAUMGART, J. K. **História da Álgebra**. São Paulo. Atual. 1992.

BESSA DE MENEZES, M.; CÂMARA, M. O saber escolar na perspectiva da teoria antropológica do didático. In: **2º Simpósio internacional de pesquisa em educação matemática. Matemática formal e matemática não-formal 20 anos depois: sala de aula e outros contextos**. Recife, PE. 2008.

BESSA DE MENEZES, M.; CÂMARA, M. A Teoria Antropológica do Didático: uma Releitura Sobre a Teoria. **Revista do programa de pós-graduação em educação matemática da universidade federal de mato grosso do sul (UFMS)** – vol. 8, p. 1-23. 2015.

BIANCHINI, E**. Matemática** – 7º ano. 6ª Ed. São Paulo: Moderna, 2006.

BIAZI, L. M. C. **Erros e dificuldades na aprendizagem de álgebra**. Dissertação (Mestrado) - Facipal , Palmas, PR, 2003.

BOYER, C. B. **Historia da Matemática**. São Paulo: Editora Edgard Blucher Ltda, 1974.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.** P. 22, Brasília: MEC, SEF. 1998.

CÂMARA, M. Desenvolvimento do Pensamento Algébrico: o que estamos fazendo em nossas salas de aulas? In: **Anais do X ENEM**, Salvador, 2010.

CÂMARA, M. Um exemplo de situação-problema: o problema do bilhar. In: **Revista do Professor de Matemática**. V. 50. Sociedade Brasileira de Matemática. 2002.

CÂMARA, M.; OLIVEIRA, I. C.. Estratégias utilizadas por alunos de 6° ano na resolução de problemas de estrutura algébrica In**: Anais do X encontro nacional de educação matemática educação matemática, cultura e diversidade.** Salvador , BA**,** 2010. p. 1-11.

COSTA, W. R. **Investigando a conversão da escrita natural para registros em escrita algébrica em problemas envolvendo equações de primeiro grau**. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CE. Educação, Recife, PE, 2010.

D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática: da teoria à prática.** 2 ed. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática). Campinas, SP: Papirus, 1997.

DANTE, L. R. **Formulação e Resolução de Problemas de Matemática – Teoria e Prática.** São Paulo: Ática, 2009.

DA ROCHA FALCÃO, J. T. A álgebra como ferramenta de representação e resolução de problemas. In: SCHLIEMANN, A. D. Et al. **Estudos em psicologia da educação matemática.** Recife: Editora Universitária da UFPE, 1997.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. 3ª ed. Campinas: Editora da Unicamp. 2002.

FALCÃO, J. T. R. Clinical analysis of difficulties in algebraic problem solving among brasilian students: principal aspects and didactic issues. In**: Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education** - PME, V. 2, Valencia, Spain, p. 257-264. 1996.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. Contribuição para um repensar... a Educação Algébrica Elementar. In: **Pro-Posições**. vol. 4, n.1., p.78-90, março. 1993.

GAMA, C. PAL Tool: uma ferramenta cognitiva para organização e representação de problemas algébricos. In: **XIV Simpósio Brasileiro de Informática na Educação** – NCE – IM/UFRJ, Rio de Janeiro. 2003.

IMENES, L. M.; e LELLIS, M. O currículo tradicional e o problema: um descompasso. **SBEM – Educação Matemática em Revista,** v. 2, n. 2. p. 5-12, 1994.

KANTOWSKI, M. G. Problem solving. In: **Fennema** (Ed.) Mathematics Educations Research Implications for the 80‟s. p. 111 – 126. 1981.

KIERAN, C. **The learning and teaching of school algebra. Handbook of research on mathematics teaching and learning**. National Council of Teachers of Mathematics; New York, NY, 1992.

LOCHHEAD, J.; MESTRE, J. P. Das palavras à álgebra: corrigindo concepções erradas. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (orgs). **As ideias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.

LUPINACCI, M. L. V.; BOTIN, M. L. M. Resolução de problemas no ensino de matemática. In: **Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática**, Recife, p. 1-5. 2004.

MARCHAND, P. & BEDNARZ, N. L'enseignement de l'algèbre au secondaire: une analyse des problèmes présentés aux élèves. **In Bulletin AMQ**, Vol. XXXIX, N°4. Québec: AMQ, 1999.

MIGUEL, A.; FIORENTINI, D.; MIORIM, Â. Álgebra ou Geometria: para onde Pende o Pêndulo? In: **Pró-Posições**, v. 3, n. 1, p. 39-54. 1992

OLIVEIRA, I.; CÂMARA, M. Problemas de estrutura algébrica: uma análise comparativa entre as estratégias utilizadas no Brasil e no Québec. In: **Anais da XIII Conferência Iteramericana de Educação Matemática**, Recife, 2011.

ONUCHIC. L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. p.199-218. In: **Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas**. São Paulo: editora UNESP, 1999.

ONUCHIC, L. R. Resolução de Problemas no Brasil e no Mundo. In: **II Seminário em Resolução de Problemas – SERP II**. Rio Claro, 2008. Disponível em: <http:// http://www2.rc.unesp.br/gterp/?q=serp2008/trabalhos> Acesso em: 03 de janeiro de 2016.

PIRES, C. M. **Currículos de Matemática da Organização Linear à ideia de Rede**. Tese (Doutorado) - FE. São Paulo, USP, 1995.

PONTE, J. P.; BRANCO, N.; MATOS, A. **Álgebra no ensino básico.** Lisboa: DGIDC, 2009. Disponível em: < http://hdl.handle.net/10451/7105>. Acessado em: 20 de julho de 2016.

SANTOS JUNIOR, C. P. **Estratégias utilizadas por alunos do 7º, 8º e 9º ano do ensino fundamental na resolução de problemas de partilha**. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Pernambuco. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Recife, PE, 2013.

SANTOS, L.; PONTE, J. P. A prática lectiva como actividade de resolução de problemas: Um estudo com três professoras do ensino secundário. In: **Actas do XII Seminário de Educação Matemática.** Lisboa, 2001.

SANTOS, S. P. **Erros e dificuldades de alunos em álgebra elementar: uma metanálise qualitativa de dissertações brasileiras de mestrado**. Dissertação (Mestrado). Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas, SP, 2013.

SOUZA, A. S. **Metacognição e o ensino da álgebra: Análise do que pensam e dizem professores de matemática da educação básica**. Dissertação (Mestrado). Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, 2007.