Universidade Estadual da Paraíba
Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa
Mestrado Profissional em Matemática

Sequências Numéricas no Ensino Médio

Joab dos Santos Silva

Campina Grande - PB
Outubro/2015

Universidade Estadual da Paraíba
Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa
Mestrado Profissional em Matemática

Sequências Numéricas no Ensino Médio

por

Joab dos Santos Silva †

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UEPB, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Orientadora: Profª. Dra. Maria Isabelle Silva

† Bolsista CAPES

S586s Silva, Joab dos Santos.
Sequências numéricas no Ensino Médio [manuscrito] / Joab dos Santos Silva. - 2015.
84 p. : il. color.

Digitado.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2015.
"Orientação: Profa. Dra. Maria Isabelle Silva, Departamento de Matemática".

1. Sequências numéricas. 2. Progressão aritmética. 3. Progressão geométrica. 4. Resolução de problemas. I. Título.

21. ed. CDD 512.7

Sequências Numéricas no Ensino Médio

por

Joab dos Santos Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UEPB, modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Aprovada em: 16/10/2015

Claudilene Gomes da Costa

Profª. Dra. Claudilene Gomes da Costa - UFPB

Davis Matias de Oliveira

Prof. Dr. Davis Matias de Oliveira - UEPB

Maria Isabelle Silva

Profª. Dra. Maria Isabelle Silva - UEPB
Orientadora

Universidade Estadual da Paraíba
Centro de Ciências e Tecnologia
Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Outubro/2015

Dedicatória

A todos os profissionais da área de ensino que procuram estar em contínuo processo de formação.

Agradecimentos

Agradeço ao constante apoio dos familiares e amigos, na pessoa da minha mãe Maria do Socorro dos Santos Silva e do meu pai Gabriel da Silva, durante a jornada de estudos e, em especial a minha esposa Aluska Cristina Silva Marques, presente e atuante nas tomadas de decisão e mudanças de rumo inerentes ao processo de pesquisa.

Aos professores que compõem o corpo docente do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, PROFMAT-UEPB, na pessoa do Professora Doutora Maria Isabelle Silva, minha orientadora.

Finalmente, aos colegas de curso que durante os dois anos de programa dividiram os anseios, angustias e glórias, inerentes ao processo de formação a que nos dispomos realizar.

Resumo

Este trabalho apresenta uma proposta didática para o conteúdo de sequências numéricas, englobando o tratamento das progressões aritmética e geométrica, conteúdo comumente ministrado no primeiro ano do ensino médio regular. Neste sentido, são desenvolvidos capítulos com um recorte histórico, conteúdo programático e discussão de como o conteúdo programático deve ser dividido e abordado em encontros. A introdução do tema sequências é feita utilizando-se o recorte histórico e os quebra-cabeças Torre de Hanói e Salto da Rã para, a partir do processo de redescoberta, conduzir os alunos ao reconhecimento de padrões e formulação de conjecturas. Para as progressões aritmética e geométrica opta por dar ênfase a resolução de situações problemas e a formalização, demonstração, dos resultados apresentados, pois acredita-se que este procedimento pode contribuir para desenvolvimento lógico-dedutivo e argumentativo dos alunos. Três atividades avaliativas são sugeridas sendo os objetivos e possíveis resoluções das questões propostas também expostos no capítulo dedicado a discussão dos encontros nos quais o conteúdo programático foi dividido.
Palavras-chave: Sequências. Progressões. Ensino Médio. Resolução de Problemas. Formalização.

Abstract

This paper presents a didactic proposal for the content of numerical sequences, comprising the treatment of arithmetic and geometric progressions, content commonly taught in the first year of regular high school. In this sense, chapters are developed with a historical approach, curriculum and discussion of how the curriculum should be divided and discussed in meetings. The introduction of the theme sequences is made using the historical period and the puzzles of Hanoi Tower and Jumping Frog for, from the rediscovery process, lead students to recognize patterns and formulate conjectures. For arithmetic and geometric progressions chooses to emphasize problem solving situations and formalization, demonstration, the results presented, it is believed that this may contribute to logical-deductive and argumentative development of students. Three evaluation activities are suggested with the objectives and possible resolutions of the issues proposed also exposed in the chapter discussing the meetings in which the curriculum was divided.
Key-words: Sequences. Progressions. High School. Problem Solving. Formalization.

Sumário

1 Introdução

Este trabalho tem por objetivo geral apresentar uma proposta didática que aborda o ensino-aprendizagem de sequências numéricas no ensino médio, desde sua definição ao tratamento dos casos particulares, a saber, a progressão aritmética e a progressão geométrica. Estes conteúdos são comumente ministrado no primeiro ano deste nível de ensino e no quarto bimestre do ano letivo.

Neste sentido tomamos como objetivos específicos apresentar um recorte histórico sobre sequências, apresentar sequências numéricas históricas como números figurados, utilizar materiais manipuláveis para, a partir do processo de redescoberta, conduzir os discentes a percepção de padrões e formulação de conjecturas para com isso definir formalmente sequência por meio de função, ou seja, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que $f(n) = a_n$, representá-las graficamente e ilustrá-las com exemplos de aplicação direta e através da resolução de situações problema. Introduzir as progressões aritméticas e geométricas como casos particulares de sequências, consequentemente casos particulares de função, ilustrar estas sequências e seus principais resultados retornando as conjecturas possivelmente obtidas a respeito dos números figurados e do manuseio dos materiais manipuláveis. Além disto, abordar temas desenvolvidos em séries anteriores, como fração geratriz, e trabalhar com matemáticas relativamente recentes, como a geometria fractal.

Acreditamos que esta proposta didática possibilita aos discentes tornarem-se agentes ativos no processo de ensino-aprendizagem, nesta direção o presente trabalho está divido, além da Introdução e Considerações Finais, em mais três capítulos. O segundo apresenta um recorte histórico buscando não uma apresentação cronológica do desenvolvimento deste conteúdo mas sim a sua abordagem por diferentes povos em em diferentes períodos. Com isso, apresentamos um recorte da matemática egípcia, grega, mesopotâmica, chinesa e indiana.

O terceiro capítulo trás o conteúdo a ser trabalhado nesta proposta didática, a mesma sugere a introdução do tema sequência não a partir de sua definição formal e ilustração por meio de exemplos, mas sim a partir de um processo de redescoberta, identificação de padrões, formulação de conjecturas e o registro em tabelas. Para tanto, é trabalhado inicialmente os números triangulares, os quadrados e os pentagonais, todos exemplos de números poligonais - casos particulares dos números figurados. Num segundo momento trabalhamos com a utilização do material manipulável Torre de Hanói, ocasião na qual é disponibilizado para os discentes um kit cujo tabuleiro é confeccionado com papel A4 e as peças em EVA e, num terceiro momento, com o material manipulável Salto da Rã, também disponibilizado para os discentes em forma de kit, sendo o tabuleiro confeccionado em cartolina e as peças em dobraduras de papel A4.

Sugerimos que estes kits sejam confeccionados em oficinas - as quais não dissertamos sobre por fugir do escopo deste trabalho, ambos constituem exemplos de material de baixo custo facilmente replicáveis, por este motivo disponibilizamos imagens dos mesmos nos Apêndices A e B, respectivamente.

Para estes três momentos nosso trabalho sugere uma perspectiva de trabalho em grupo, possibilitando assim a interação entre os discentes e entre discentes e docente, esta última se dando por meio do processo de mediação.

Após esta introdução, definimos formalmente sequência enfatizando que estas são casos particulares das funções reais a variáveis reais e destacando seu aspecto gráfico, ou seja, que o mesmo é discreto. Em seguida, retoma-se os números poligonais e os quebra-cabeças Torre de Hanói e Salto da Rã para que os mesmos constituam exemplos de sequências, sendo esta retomada realizada através da análise das tabelas previamente preenchidas pelos discentes. Esta forma de introduzir o conteúdo de sequências é um dos diferenciais do presente trabalho.

Apresentada uma situação problema, defini-se progressão aritmética e ilustra-a com exemplos e contra-exemplos. A fórmula para o termo geral é demonstrada de duas maneiras, sendo uma das demonstrações por meio da Indução Finita sobre o número n de termos, e a partir desta fórmula apresenta-se uma caracterização das progressões aritméticas, a saber, uma sequência é uma progressão aritmética se, e somente se, sua representação gráfica é composta por pontos colineares. Ou seja, a representação gráfica de uma progressão aritmética é formada por pontos de uma reta.

Tópicos clássicos como interpolação e artifícios para representação de progressões aritméticas com um número ímpar e par de termos são apresentados, bem como situações problemas que ilustrem suas aplicações.

A soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética é introduzida pelo clássico fragmento de texto que apresenta o problema proposto ao então menino Gauss, cuja resolução inspira uma demonstração para este resultado. Destacamos que outra demonstração para este resultado é apresentada, a mesma é feita pelo método da Indução Finita sobre o número n de termos.

Os números poligonais são novamente abordados, agora apresentando inicialmente os primeiros números triangulares, quadrados e pentagonais decompostos em somas para, em seguida, mostrar que cada um dos n-ésimos termos desses números resulta da soma dos n primeiros termos de uma certa progressão aritmética.

A proposta didática, no tocante a progressões aritméticas, é finilizada apresentado, demonstrando e ilustrando mais duas caracterizações, a de que uma sequência é uma progressão aritmética se, e somente se, o termo geral é dado por um polinômio em n de grau menor que ou igual a 1 e, uma sequência é uma progressão aritmética se, e somente se, a soma dos n primeiros termos dessa sequência é um polinômio em n de grau menor que ou igual a 2, sem o termo independente.

Novamente os números figurados são utilizados para ilustrar tais caracterizações, assim como o quebra-cabeça Salto da Rã.

O tema progressão geométrica é introduzido por duas situações problema, ambas destacando uma taxa de crescimento ou decrescimento. Uma vez definida a progressão geométrica apresenta-se exemplos e contra-exemplos e, assim como para as progressões aritméticas, a partir da definição demonstra-se a fórmula para o termo geral. Uma demonstração por Indução Finita sobre o número n de termos é também apresentada para a fórmula para o n-ésimo termo de uma progressão geométrica e, a partir desta fórmula, apresentamos uma caracterização das progressões geométrica, a saber, uma sequência é uma progressão geométrica se, e somente se, sua representação gráfica é composta por pontos pertencentes ao gráfico de uma função exponencial.

Dentre os exemplos que ilustram as progressões geométrica damos ênfase as situações problema envolvendo juros compostos, tema da matemática financeira. Assim como no tópico de progressões aritméticas, a interpolação de meios geométricos é apresentada e ilustrada, na ocasião também trazemos exemplos que utilizam os conceitos da matemática financeira.

A soma dos termos de uma progressão geométrica é tratada em dois momentos, o primeiro aborda o caso em que o número de termos desta sequência é finito, sendo este resultado demonstrado de forma direta e por meio da Indução Finita sobre o número n de termos e ilustrado.

Antes de apresentar um resultado sobre a soma dos termos de uma progressão geométrica infinita, as condições para que tal soma faça sentido e qual o valor desta soma, a proposta didática trás uma discussão a cerca de situações cuja soma é plausível e cujo convencimento de que essa soma é finita é de fácil aceitação, e também situações em que esta soma não converge para um único número real. As situações em que a soma é possível tratam da representação decimal dos números reais e dízimas periódicas e a divisão de um quadrado unitário em triângulos cuja área de cada um é igual a metade da área do triângulo anterior.

Esta discussão sugere discretamente das condições para que a soma dos termos de uma progressão geométrica seja convergente, ou seja, tenda a um número real único.

Apresentamos uma sucinta abordagem sobre séries e séries geométricas e, em termos das séries geométrica apresentamos e demonstramos as condições para que a soma dos termos de uma progressão geométrica infinita seja convergente, bem como esta soma. Na argumentação da demonstração utilizamos o conceito de limite de maneira informal. Acreditamos que situações como esta retratam momentos importantes para introdução, de maneira informal, de conceitos e notações comuns da matemática do ensino superior no âmbito do ensino médio.

Dentre os exemplos que ilustram a soma dos termos de uma progressão geométrica infinita destacamos o tratamento das frações geratrizes como somas infinitas e o estudo de alguns fractais, a exemplo do Tapete de Sierpinski.

A retomada dos números figurados e dos quebra-cabeças durante a proposta didática busca monstrar as várias possibilidades de aplicações dos mesmos, não apenas para introdução de conteúdos mas também constituindo exemplos para soma dos termos de uma progressão aritmética e geométrica bem como suas caracterizações.

Sendo a sequência didática, desenvolvida no terceiro capítulo, uma proposta a ser aplicada no quarto bimestre de uma turma de primeiro ano do ensino médio, o quarto capítulo destina-se a descrever como o conteúdo foi subdividido em encontros.

O conteúdo foi subdividido em 18 encontros nos quais a descrição de cada um tem por objetivo não apenas delimitar o início e fim de conteúdo para cada encontro, mas apresentar os objetivos de cada encontro, a descrição dos materiais utilizados, sugestões de procedimentos metodológicos, objetivos e discussões quanto as possíveis resoluções apresentadas no capítulo de conteúdo.

Destacamos os encontros destinados a aplicação das atividades avaliativas, as quais devem ser desenvolvidas em dupla, com consulta e livre utilização de calculadora, e aplicadas ao término dos tópicos: sequências, progressão aritmética e progressão geométrica. Estas constam nos Apêndices C, D e E, com grau de dificuldade crescente entre elas e em sua maioria trabalhando situações problema. Na descrição destes encontros procuramos apresentar os objetivos de cada situação problema constante na atividade avaliativa bem como apresentar a discussão de uma possível solução.

Entendemos que os capítulos três e quatro devem caminhar juntos, ou seja, a mera apropriação do conteúdo disponibilizado no terceiro capítulo sem uma assimilação dos objetivos e procedimentos metodológicos descritos para cada um dos 18 encontros pode levar o docente que se propõe a aplicar esta proposta didática à possíveis impressões equivocadas, como quanto a utilização de materiais manipuláveis para a introdução do tema sequências e retomada destes mesmos materiais, ou pelo menos dos padrões observados nos seus manuseios, acreditando tratar-se de repetição.

2 Recorte Histórico

2.1 Papiro Rhind ou de Ahmes

Um certo número de papiros egípcios de algum modo resistiu ao desgaste do tempo por mais de três e meio milênios. O mais extenso de natureza matemática é um rolo de papiro com cerca de 0,30 m de altura e 5 m de comprimento, que está agora no British Museum (exceto uns poucos fragmentos, que estão no Blooklin Museum).

Foi comprado em 1858 numa cidade à beira do Nilo, por um antiquário escocês, Henry Rhind, por isso é conhecido como Papiro de Rhind, ou, menos frequentemente, chamado papiro de Ahmes em honra do escriba que o copiou por volta de 1650 a.C. (Figura 1). O escriba conta que o material provém de um protótipo do Reino do Meio de cerca de 2000 e 1800 a.c., e é possível que parte desse conhecimento tenha provindo de Imohtep, o quase lendário arquiteto e médico do Faraó Zoser, que superintendeu a construção de sua pirâmide a cerca de 5000 anos [1].

Figura 1 – Papiro de Rhind ou de Ahmes

Todos os 110 problemas incluídos nos papiros de Moscou — Papiro de Golonishev ou de Moscou é uma estreita tira de 5,5 m de comprimento por 0,08 m de largura, com 25 problemas, encontra-se atualmente em Moscou e foi datado aproximadamente no ano 1850 a.C. e não se sabe nada sobre o seu autor — e Rhind são numéricos, e boa parte deles é muito simples. Embora a maioria tenha origem prática, há alguns de natureza teórica.

Os egípcios esforçavam-se para evitar algumas dificuldades computacionais encontradas com frações representando-as, com exceção de $\frac{2}{3}$, como soma das frações chamadas unitárias, ou seja, aquelas de numerador igual a 1. Essa redução tornava-se possível graças ao emprego de tábuas que davam a representação desejada para frações do tipo $\frac{2}{n}$, as únicas necessárias devido à natureza didática da multiplicação egípcia, que em geral eram efetuadas por uma sucessão de duplicações com base no fato de que todo número pode ser representado por uma soma de potências de 2.

Por exemplo, para calcular a multiplicação de 41 por 77, inicialmente observava-se que $41 = 1 + 8 + 32$. A Tabela 1 apresenta na primeira coluna as potências de 2 até a maior potência utilizada na representação do número 41, e na segunda coluna os múltiplos correspondentes de 77.

Tabela 1 – Potências de 2 × Múltiplos de 77

Potências de 2	**Múltiplos de 77**	
1	77	✓
2	154	
4	308	
8	616	✓
16	1232	
32	2464	✓

Somando os múltiplos de 77 correspondentes as potências de 2 utilizadas na representação de 41, ou seja, 1, 8 e 32 temos:

$$77 + 616 + 2464 = 3157$$

que é o produto procurado.

Apresentamos a seguir problemas envolvendo progressões aritmética e geométrica que constam no Papiro de Rhind. Um problema que aborda progressão aritmética é o seguinte:

> Divida 100 pães entre 5 homens de modo que as partes recebidas estejam em progressão aritmética e que um sétimo da soma das três partes maiores seja igual à soma das duas menores.

O problema de número 79 deste papiro apresenta os seguintes dados (Tabela 2) [3]:

Tal problema, segundo a interpretação do historiador Moritz Cantor, poderia receber a seguinte formulação:

> Uma relação de bens consistia em sete casas; cada casa tinha sete gatos; cada gato comeu sete ratos; cada rato comeu sete espigas de trigo; e cada espiga de trigo produzia sete hecates de grãos. Casas, gatos, ratos, espigas de trigo e hecates de grãos, quanto havia disso tudo?

Tabela 2 – Bens

Casas	7
Gatos	49
Ratos	343
Espigas de Trigo	2401
Hecates de Grãos	16807
	19607

Este evidentemente não pedia uma resposta prática, que seria o número de hecates de grão poupadas, mas a não-prática soma dos números de casas, gatos, ratos, espigas e hecates de grão.

Portanto, o mesmo pode ser visto como envolvendo uma progressão geométrica tal que o primeiro termo 7 e a razão também 7, e cuja solução consiste na soma dos cinco primeiros termos dessa progressão geométrica.

2.2 Mesopotâmia

As realizações dos babilônios no domínio da álgebra são admiráveis, mas os motivos que impulsionaram essa obra não são de fácil compreensão. Era suposição comum que virtualmente toda a ciência e a matemática pré-helênica eram puramente utilitárias, entretanto é plausível que tenha se desenvolvido a matemática pela matemática e isto é sugerido por uma tabela (Figura 2) que encontra-se na Plimpton Collection na Columbia University [1].

Figura 2 – Tabela de Plimpton

Esta tabela data do período babilônico antigo (1900 a 1600 a.C.) e seus registros poderiam ser facilmente considerados como registros de negócios, porém a análise mostra que há profundo significado matemático na teoria dos números, e que talvez se relacionasse com uma espécie de prototrigonometria.

Em outra tabela babilônica, a tábua de Louvre, datada por volta de 300 a.C. apresenta-se dois problemas interessantes sobre sequências, a saber,

A progressão geométrica $1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^9$ é somada.

e

A soma da série dos quadrados $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2$ é calculada.

que nos levam ao seguinte questionamento: os babilônios conheciam as fórmulas gerais para a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica e a soma dos n primeiros quadrados perfeitos?

É possível que sim, e conjecturou-se que teriam percebido que a soma dos n primeiros cubos perfeitos é igual ao quadrado da soma dos n primeiros inteiros, ou seja,

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{(1+n)n}{2}\right]^2$$

Entretanto, deve-se ter em mente que as tabelas mesopotâmicas assim como os papiros egípcios apresentam apenas casos específicos, sem formulações gerais.

2.3 Números Figurados

Os números figurados se originaram com os membros mais antigos da escola pitagórica e esses números, que expressam a representação geométrica ou física por pontos ou pedras em um plano em certas configurações geométricas, bem como a investigação de suas propriedades, objetos de estudo natural para os antigos pitagóricos, representam um elo de ligação entre a geometria e a aritmética.

Dentre os números figurados destacamos os números poligonais, caso especial em que a representação geométrica assume a forma de vários polígonos.

As Figuras 3, 4 e 5 justificam as nomenclaturas números triangulares, números quadrados, números pentagonais e assim por diante.

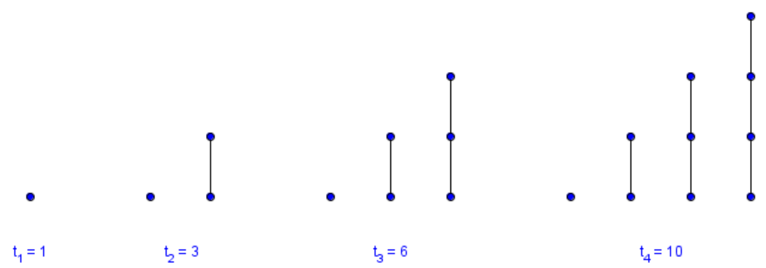


Figura 3 – Números Triangulares

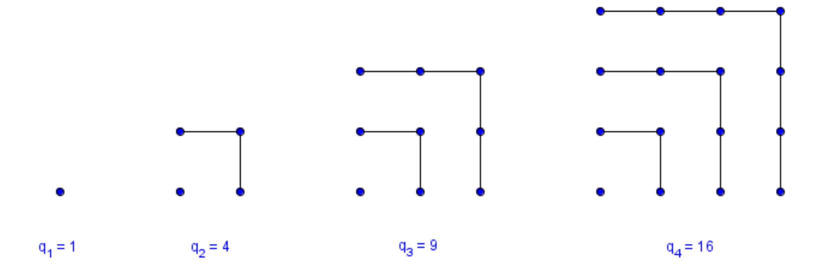


Figura 4 – Números Quadrados

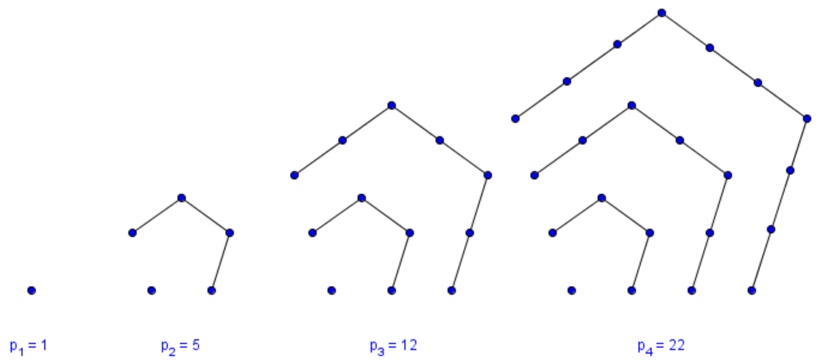


Figura 5 – Números Pentagonais

A representação triangular para o número dez, o sagrado *tetractys*, competia com o pentágono quanto à veneração na teoria dos números pitagóricos e, obviamente, havia uma infinidade de outras categorias de números privilegiados.

Podem-se estabelecer muitos teoremas interessantes relativos a números figurados de maneira puramente geométrica, e tais resultados estão implícitos na obra do grego Nicômaco de Gerasa (c. 100 d.C.), intitulada *Introductio Arithmetica* [5]. Esta obra apresenta uma discussão mais completa a respeito dos números figurados e o manuscrito mais antigo que resta remonta ao século X. A seguir, apresentamos alguns teoremas acompanhados de suas respectivas justificativas geométricas.

Teorema 2.3.1. *Todo número quadrado é a soma de dois números triangulares consecutivos.*

Para a sua justificativa geométrica, é suficiente observarmos que um número quadrado pode ser dividido em dois números triangulares, sendo os mesmos consecutivos. Ilustramos isso tomando o caso particular do quarto número quadrado, conforme Figura 6.

Teorema 2.3.2. *O n-ésimo número pentagonal é igual a n mais três vezes o $(n-1)$-ésimo número triangular.*

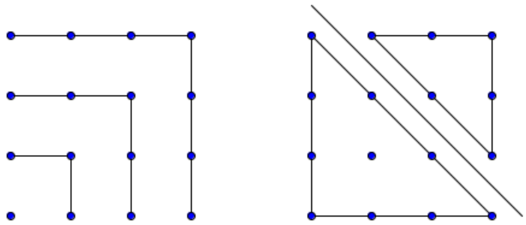


Figura 6 – $Q_n = T_n + T_{n-1}$ para o caso $n = 4$

A justificativa geométrica deste teorema é feita dividindo o número pentagonal em uma linha com n pontos e três $n-1$ números triangulares. Tomamos o caso particular do quarto número pentagonal, conforme Figura 7.

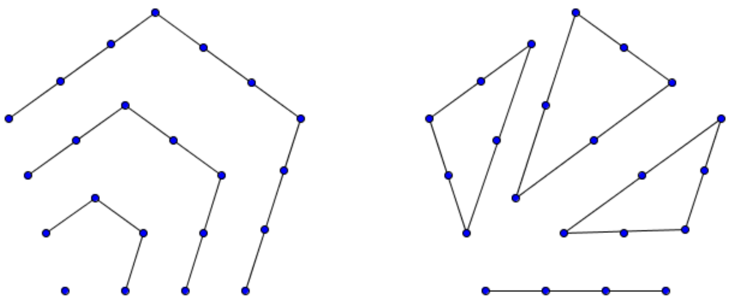


Figura 7 – $P_n = n + 3T_{n-1}$ para o caso $n = 4$

Teorema 2.3.3. *A soma de um número qualquer de inteiros ímpares consecutivos, começando com o* 1*, é um quadrado perfeito.*

Geometricamente, justificamos a soma dos n primeiros números ímpares dividindo o n-ésimo número quadrado conforme Figura 8, que ilustra o caso particular da soma dos cinco primeiros números ímpares tomando o quinto número quadrado.

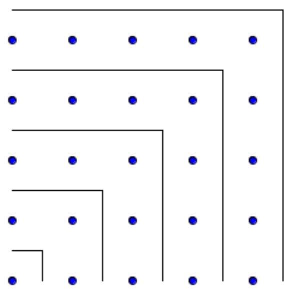


Figura 8 – $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$ para o caso $n = 5$

Dessa forma, os números quadrados consecutivos são formados pela sequência

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)$$

em que cada número ímpar por sua vez era considerado como uma configuração de pontos semelhantes a um gnômom (o relógio de sombra babilônico) colocado em torno de dois lados da precedente configuração de pontos em forma de quadrado.

De modo semelhante aos números triangulares, quadrados e pentagonais eram designados números poligonais de todas as ordens e o processo se estende naturalmente ao espaço tridimensional, donde trabalha-se com números poliedrais.

2.4 *Elementos* de Euclides

O livro *Elementos* se compõe de 465 proposições distribuídas em treze livros, tratando tanto de geometria quanto de teoria dos números e álgebra elementar.

Figura 9 – Elementos - Euclides

O Livro VIII ocupa-se das proporções contínuas e progressões geométricas relacionadas [1]. Este livro apresenta o seguinte resultado:

Proposição 2.4.1. *Se temos uma proporção contínua $a : b = b : c = c : d$, então a, b, c, d formam uma progressão geométrica.*

O Livro IX, o último dos três sobre teoria dos números, apresenta na Proposição 35 uma fórmula para a soma de números em progressão geométrica, expressa em termos elegantes mas pouco usuais:

> Se tantos números quanto quisermos estão em proporção continuada, e se subtrairmos do segundo e último números iguais ao primeiro, então assim como o excesso do segundo está para o primeiro, o excesso excesso do último estará para todos os que o precedem.

Do enunciado da proposição, temos que

$$\frac{a_2 - a_1}{a_1} = \frac{a_{n+1} - a_1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \Leftrightarrow$$

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Portanto, a soma S_n dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de razão q é dada por

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

2.5 Diofanto

Diofanto de Alexandria, em um de seus três trabalhos, a saber, *Aritmética* - uma abordagem analítica da teoria algébrica dos números, dedica uma parte para à resolução de 130 problemas. Dentre estes, apresentamos dois problemas, um envolvendo progressão aritmética e outro progressão geométrica. Destacamos que, para Diofanto, "números" significa "número racional positivo", portanto as respostas destes problemas tem como universo o conjunto dos números racionais positivos [3].

Problema 7 do Livro III:

> Encontre três números em progressão aritmética, sabendo que a soma de dois quaisquer deles é um quadrado.

Problema 21 do Livro IV:

> Encontre três números em progressão geométrica de maneira que a diferença entre dois quaisquer deles é um quadrado.

As respostas de Diofanto para estes dois problemas são

$$\left(\frac{241}{2}, \frac{1681}{2}, \frac{3121}{2}\right) \text{ e } \left(\frac{81}{7}, \frac{144}{7}, \frac{256}{7}\right)$$

respectivamente.

2.6 China e Índia

As civilizações da China e da Índia são muito mais antigas que as da Grécia e Roma, porém não mais que as do vale no Nilo e Mesopotâmia.

Yang Hui que viveu por volta de 1261 e 1275, do qual quase nada se sabe sobre sua vida e cuja obra apenas parcialmente foi preservada, apresenta entre suas contribuições preservadas os mais antigos quadrados mágicos chineses de ordem maior que três, inclusive dois de cada ordem de quatro a oito, um de ordem nove e um de ordem dez.

A obra de Yang Hui inclui também resultados quanto a soma de séries e o chamado triângulo de Pascal, coisas publicadas e melhor conhecidas através do *Espelho Precioso de Chu Shih-chieh* com o qual a idade áurea da matemática chinesa teve fim [1].

Algumas das muitas somas de séries encontradas no *Espelho* são as seguintes:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3!}$$

e

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \frac{i^2(i+1)(i+2)}{3!} &= 1 + 8 + 30 + 80 + \cdots + \frac{n^2(n+1)(n+2)}{3!} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(4n+1)}{5!}\end{aligned}$$

No entanto, não são dadas as provas, nem o tópico parece ter continuado na China outra vez senão no século dezenove. *Chu Shih-chieh* parece ter tratado suas somas pelo método de diferenças finitas, elementos do qual parecem remontar na China ao século sete, mas logo depois de sua obra o método desapareceu por muitos séculos.

Os hindus, hábeis aritméticos, somavam progressões aritméticas e geométricas, resolviam problemas comerciais envolvendo juros simples e compostos, descontos e regras da sociedade e seus problemas comumente envolviam irracionais quadráticos.

Durante o sexto século, logo depois da composição dos *Shiddāntas*, ou sistemas (de astronomia), viveram dois matemáticos hindus dos quais se sabe terem escrito livros sobre o mesmo tipo de material. O mais antigo e importante dos dois foi Aryabhata, cuja obra mais conhecida, escrita em 499 e entitulada *Aryabhatiya*, é uma curta obra descritiva, em 123 estrofes metrificadas, destinadas a fornecer regras de cálculo usadas na astronomia e na matemática de mensuração, sem nenhum espírito lógico ou de metodologia dedutiva.

A posição do *Aryabhatiya* de Aryabhata na Índia é semelhante a de *Elementos* de Euclides na Grécia, cerca de oito séculos antes. Entretanto, há mais diferenças significativas que analogias entre as obras.

Uma parte típica do *Aryabhatiya* é a que trata de progressões aritméticas, e contém regras arbitrárias para achar a soma dos termos numa progressão e determinar o número de termos de uma progressão, dados o primeiro termo, a razão e a soma dos termos. A primeira regra a muito era conhecida por autores anteriores. A segunda constitui uma explanação curiosamente complicada:

> Multiplica-se a soma da progressão por oito vezes a razão, some-se o quadrado da diferença entre duas vezes o primeiro termo e a razão, extraia-se a raiz quadrada disso, subtraia-se duas vezes o primeiro termo, divida-se pela razão, some-se um, divida-se por dois. O resultado será o número de termos.

Em notação atual, sendo $(a_1, \ldots, a_n)$ uma progressão aritmética, dados a_1, a razão r e a soma S_n dos n primeiros ternos, teríamos

$$n = \frac{\dfrac{\sqrt{8rS_n + (2a_1 - r)^2} - 2a_1}{r} + 1}{2}$$

Assim como no restante do *Aryabhatiya*, não se dá motivação ou justificação para a regra. Provavelmente chegou-se a ela resolvendo uma equação quadrática, o que poderia ter sido aprendido da Mesopotâmia ou da Grécia.

Grande parte do conhecimento da aritmética hindu é proveniente do texto *Lilāvati* de *Bhāskara* (1114 a cerca de 1185), o mais importante matemático do século doze. *Bhāskara* foi o último matemático medieval importante na Índia, e sua obra representa a culminação de contribuições hindus anteriores.

O *Lilāvati* como o *Vija-Ganita*, também de *Bhāskara*, contém numerosos problemas sobre os tópicos favoritos dos hindus: equações lineares e quadráticas, tanto determinadas quanto indeterminadas, simples mensuração, progressões aritméticas e geométricas, radicais, tríades pitagóricas e outros. Por exemplo, vejamos o problema adaptado de *Bhāskara* (c. 1150):

> Numa expedição para capturar os elefantes de seu inimigo, um rei marchou 2 yojanas no primeiro dia. Diga, calculador inteligente, a razão com que sua marcha diária aumentou, se ele alcançou a cidade do inimigo, a uma distância de 80 yojanas, em uma semana?

3 Sequências Numéricas

Este capítulo destina-se ao desenvolvimento da teoria sobre as sequências numéricas a ser aplicada em sala do primeiro ano do ensino médio. Nesta perspectiva, tratamos inicialmente das sequências numéricas de forma geral e, posteriormente, de dois casos particulares, a saber, as progressões aritmética e geométrica, apresentando os principais resultados e aplicações por meio da resolução de problemas.

3.1 Números Poligonais

Os números figurados se originaram com os membros mais antigos da escola pitagórica. Esses números, que expressam a representação geométrica ou física por pontos ou pedras em um plano em certas configurações geométricas, bem como a investigação de suas propriedades, objetos de estudo natural para os antigos pitagóricos, representam um elo de ligação entre a geometria e a aritmética.

Dentre os números figurados destacamos os números poligonais, caso especial em que a representação geométrica assume a forma de vários polígonos.

A Figura 10 justifica as nomenclaturas números triangulares, números quadrados, números pentagonais e assim por diante.

Passemos então a algumas reflexões com relação a esses números e suas representações, analisando aos três casos de números poligonais apresentados anteriormente.

Para tanto, propomos que determine os três próximos valores para os números triangulares, quadrados e pentagonais, de forma a obter os dados para o completamento das Tabelas 3, 4 e 5, e discuta com os demais discentes as estratégias utilizadas para obtenção de novos números triangulares, quadrados e pentagonais.

Analisando os dados nas tabelas, é possível determinar os números poligonais subsequentes sem ter que necessariamente representá-los geometricamente? Discuta com os demais discentes e justifique sua resposta.

Tabela 3 – Número Triangular × Número de Pontos

Número de Triangular	1	2	3	4	5	6	7	···
Número de Pontos								···

Tabela 4 – Número Quadrado × Número de Pontos

Número de Quadrado	1	2	3	4	5	6	7	···
Número de Pontos								···

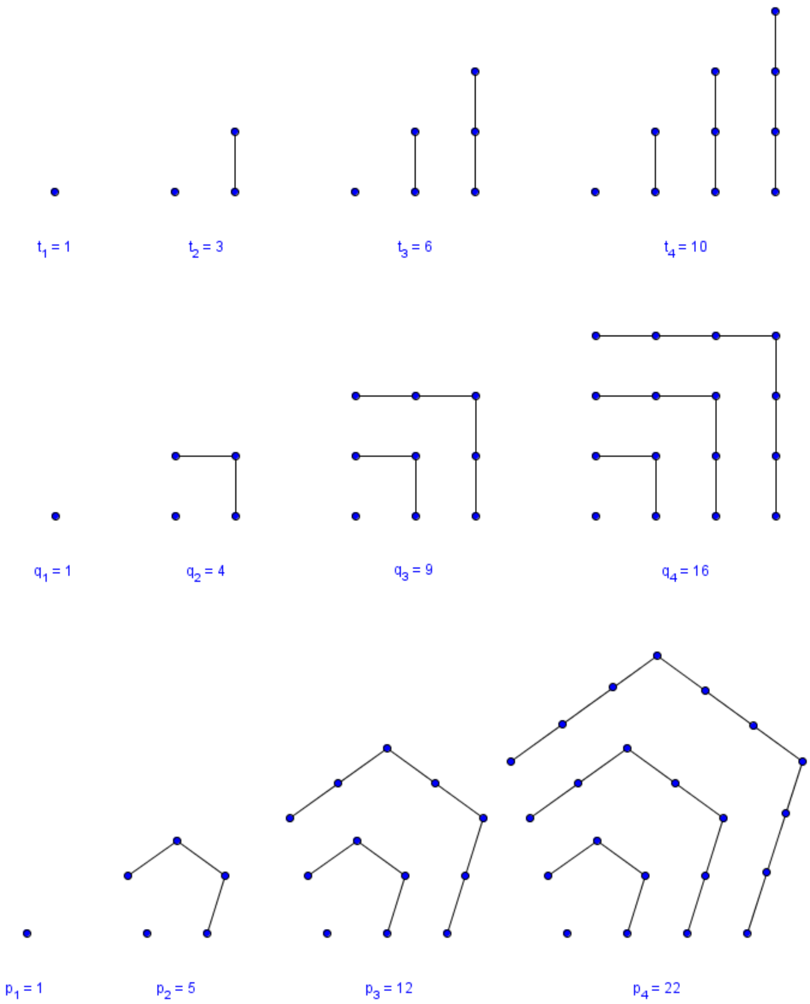


Figura 10 – números triangulares, quadrados e pentagonais

Tabela 5 – Número Pentagonal × Número de Pontos

Número de Pentagonal	1	2	3	4	5	6	7	...
Número de Pontos								...

3.2 Torre de Hanói

A Torre de Hanói é um quebra-cabeça criado pelo matemático francês Eduard Lucas em 1883, constituido originalmente por oito discos empilhados em tamanhos diferentes em um dos três pinos (Figura 11) [14].

O objetivo do quebra-cabeça é transferir a torre de discos para um dos dois outros pinos, movendo apenas um disco de cada vez e nunca colocando um maior sobre um menor.

Novamente, passemos a algumas reflexões com relação a solução do quebra-cabeça e o número mínimo de movimentos necessários para concluí-lo quando tem-se 1,2,3, ...

Figura 11 – Quebra-cabeça Torre de Hanói

discos.

Para tanto, propomos que determine então o número mínimo de movimentos T_n que são necessários para concluir o quebra-cabeça quando tivermos uma torre com n discos, $n = 1, 2, 3, \ldots$, de forma a obter os dados para o completamento da Tabela 6, e discuta com os demais discentes as estratégias utilizadas para solucionar o quebra-cabeça.

Analisando os dados na tabela, é possível determinar o número mínimo de movimentos para solucionar o quebra-cabeça a cada vez que aumentamos um disco na torre sem ter necessariamente que manuseá-lo? Discuta com os demais discentes e justifique sua resposta.

Tabela 6 – Número de Discos × Número de Movimentos

Número de Discos	1	2	3	4	5	6	···
Número de Movimentos							···

3.3 Salto da Rã

O Salto da Rã é um quebra-cabeça, constituído por três rãs de uma cor e três outra cor distribuídas em um tabuleiro com sete casas, cujo objetivo é transferir as rãs de um cor para o lugar que inicialmente estão as rãs de outra cor e vice-versa, de modo que cada rã pode ser movida para uma casa vazia ou saltar sobre uma rã (e apenas uma) para uma casa vazia. E mais, as rãs só podem mover-se em uma direção (isto é, não podem voltar) e cada casa só pode conter uma rã (Figura 12) [13].

De forma análoga ao trabalho realizado com a Torre de Hanói, passemos a algumas reflexões com relação a solução do quebra-cabeça e o número mínimo de movimentos necessários para concluí-lo quando tem-se 1,2,3, ... rãs em cada lado.

Para tanto, propomos que determine então o número mínimo de movimentos r_n que são necessários para concluir o quebra-cabeça quanto tivermos um número n de rãs em

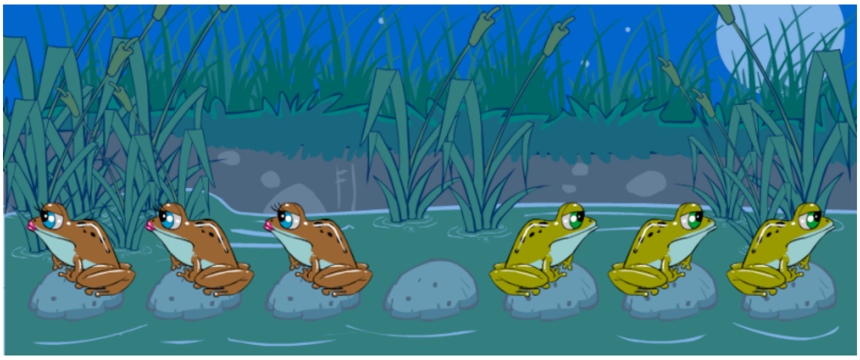


Figura 12 – Quebra-cabeça Salto da Rã

cada lado, $n = 1, 2, 3, \ldots$, de forma a obter os dados para o completamento da Tabela 7, e discuta com os demais discentes as estratégias utilizadas para solucionar o quebra-cabeça.

Analisando os dados na tabela, é possível determinar o número mínimo de movimentos para solucionar o quebra-cabeça a cada vez que aumentamos uma rã em cada lado sem te necessariamente que manuseá-lo? Discuta com os demais discentes e justifique sua resposta.

Tabela 7 – Número de Rãs (cor) × Número de Movimentos

Número de Rãs (cor)	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
Número de Movimentos							$\cdots$

3.4 Sequência

Os conteúdos programáticos que precedem sequências numéricas, a saber, funções, trabalha com funções reais a variáveis reais, ou seja, cujo domínio e contradomínio são subconjuntos dos números reais. Simbolicamente,

$$\begin{array}{rcccc} f & : & D \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & y = f(x) \end{array}$$

No entanto, no cotidiano, muitas das situações problema que podem ser modeladas através de funções não possuem domínios contínuos, mas sim domínios discretos, ou seja, funções cujo domínio é, por exemplo, o conjunto dos números naturais. Desta forma, passemos então ao trato de tais funções e estudemos posteriormente dois casos particulares das mesmas.

Definição 3.4.1. *Uma sequência ou sucessão de números reais é uma função que associa a cada número natural n um número real a_n. Simbolicamente,*

$$\begin{array}{rcccc} a & : & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & n & \longmapsto & a_n \end{array}$$

Diremos que a_n é o termo geral, o termo de ordem n ou o n-ésimo termo da sequência. Geralmente, ao invés da notação de função $a(n)$ para o valor que a função assume no número natural n, usam-se as seguintes notações para representar uma sequência:

1. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$
2. $(a_n)_{n=1}^{\infty}$
3. (a_n)
4. $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$

Observação 3.4.1. *(a_n), leia-se: a índice n. Aqui faremos uso das notações 3 e 4. Na literatura, encontra-se também a notação de sequência por meio de chaves, ou seja, $\{a_n\}$ ou $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.*

Sendo (a_n) uma função, passemos a observar seu comportamento gráfico (Figura 13).

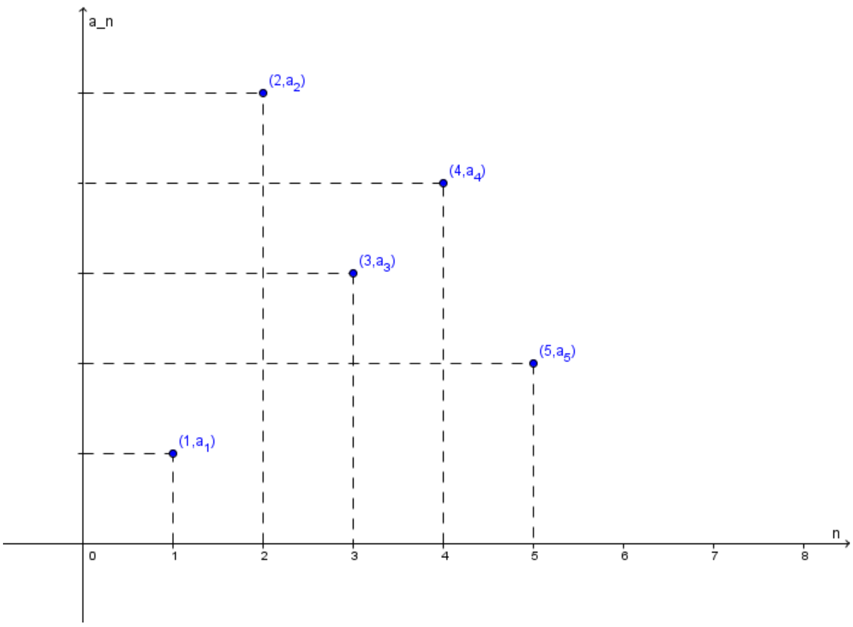


Figura 13 – Gráfico de uma sequência (a_n) arbitrária

Observemos o fato de que o domínio de uma sequência é o conjunto dos números inteiros positivos, ou seja, um conjunto discreto, consequentemente na sua representação gráfica temos pontos isolados. Portando, não devemos ligar os pontos obtidos a partir do cálculo dos valores funcionais para alguns valores de n, procedimento utilizado em funções anteriormente estudadas cujos domínios eram subconjuntos $D \subset \mathbb{R}$ de números reais, ou seja, domínios contínuos.

Da literatura, temos que duas aplicações f e g são ditas iguais quando têm o mesmo domínio e $f(x) = g(x)$ para todo x do domínio. Logo, duas sequências $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$

são iguais quando $a_n = b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Simbolicamente, temos que

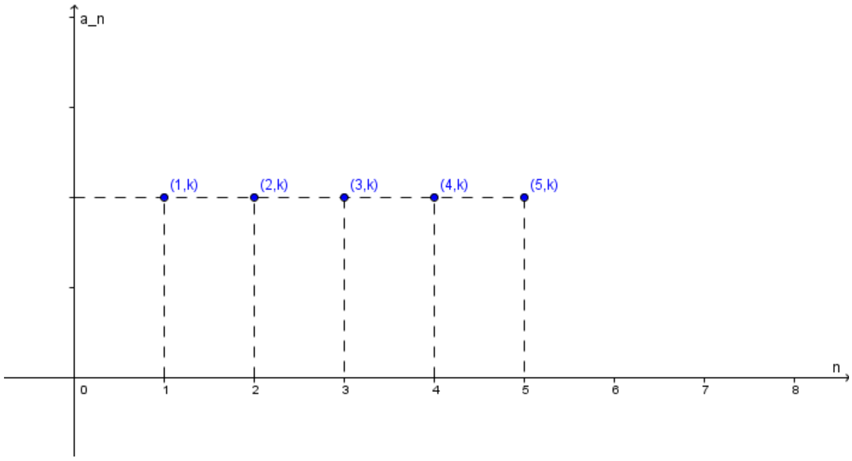
$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \Leftrightarrow a_n = b_n,\ \forall\ n \in \mathbb{N}$$

Vejamos alguns exemplos de sequências.

Exemplo 3.4.1. *Seja $k \in \mathbb{R}$ uma constante arbitrária e tomemos $a_n = k$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Temos que*

$$(k) \ \textit{ou} \ (k, k, k, \ldots)$$

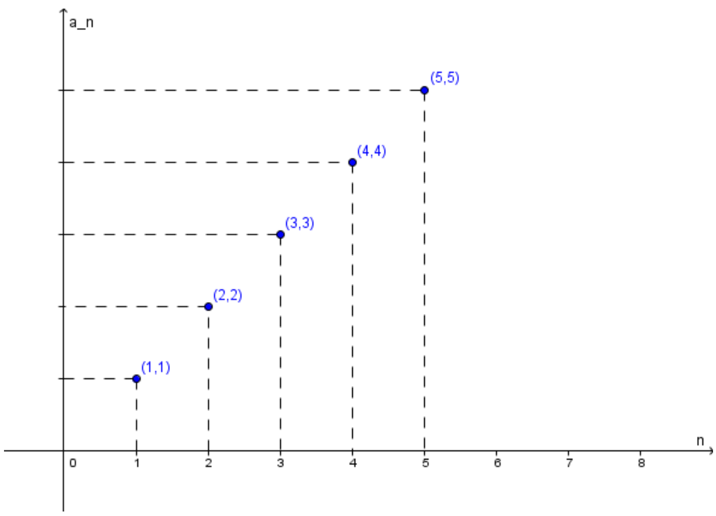
Graficamente,



Exemplo 3.4.2. *Seja (a_n) a sequência cujo termo geral é $a_n = n$. A sequência é dada por*

$$(n) \ \textit{ou} \ (1, 2, 3, \ldots, n, \ldots)$$

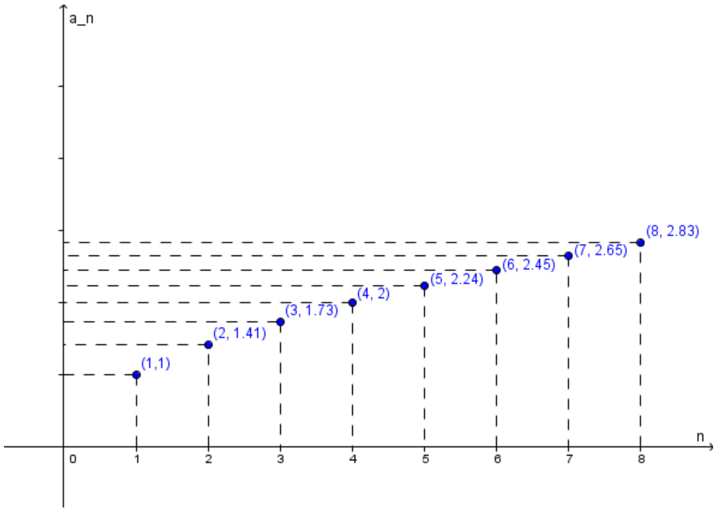
Graficamente,



Exemplo 3.4.3. *Seja (a_n) a sequência cujo termo geral é $a_n = \sqrt{n}$. Temos então*

$$(\sqrt{n}) \ \textit{ou} \ (1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{n}, \ldots)$$

Graficamente,



Exemplo 3.4.4. *Represente, usando as notações* (a_n) *e* $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$*, bem como graficamente, as sequências cujo termo geral é:*

a) $a_n = \frac{1}{n}$

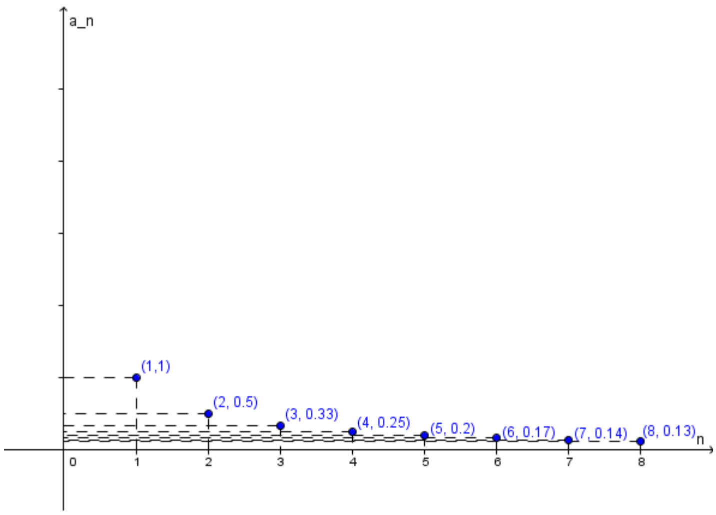
b) $a_n = \frac{n}{n+1}$

Solução.

a)

$$\left(\frac{1}{n}\right) \text{ ou } \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right)$$

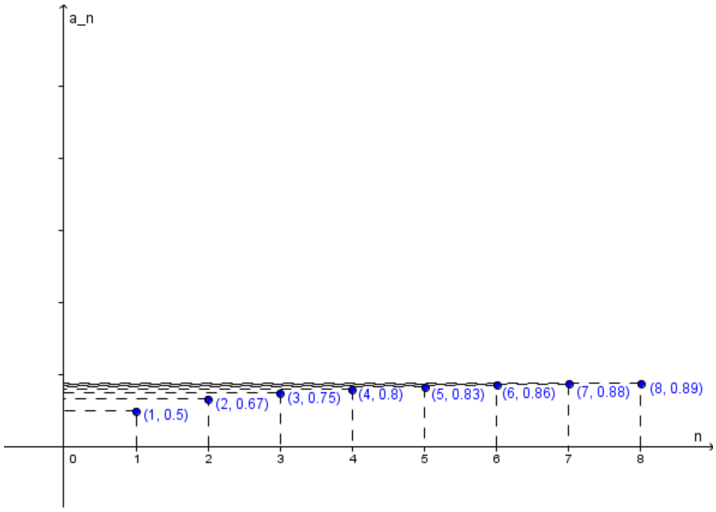
Graficamente,



b)

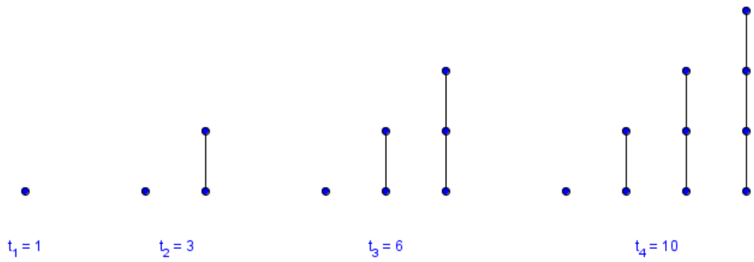
$$\left(\frac{n}{n+1}\right) \text{ ou } \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots\right)$$

Graficamente,



Retornemos os temas tratados anteriormente, ou seja, os números poligonais e os quebra-cabeças Torre de Hanói e Salto da Rã, e passemos a abordá-los com a notação de sequência.

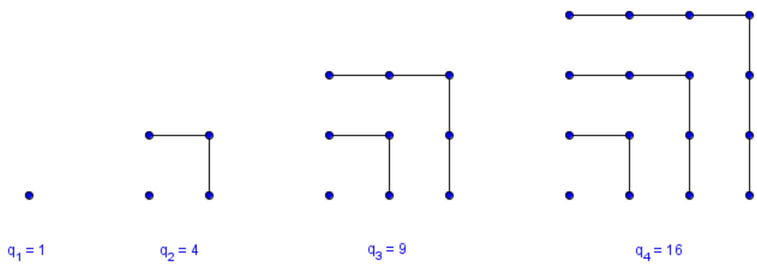
Observemos os números triangulares:



Estes números formam a sequência (t_n) cujo termo geral é $t_n = \dfrac{(1+n)n}{2}$. Logo, temos

$$\left(\frac{(1+n)n}{2}\right) \text{ ou } \left(1, 3, 6, 10, \ldots, \frac{(1+n)n}{2}, \ldots\right)$$

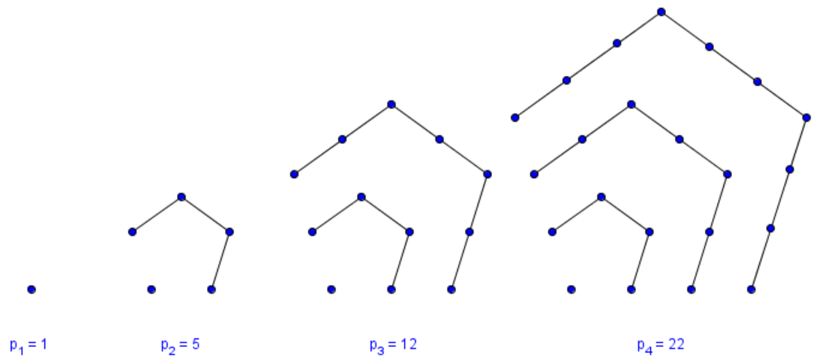
Os números quadrados,



formam a sequência (q_n) cujo termo geral é $q_n = n^2$. Donde, temos

$$(n^2) \text{ ou } (1, 4, 9, 25, \ldots, n^2, \ldots)$$

Já os números pentagonais,



formam a sequência (p_n) cujo termo geral é $p_n = \dfrac{3n^2 - n}{2}$. Daí, temos

$$\left(\frac{3n^2 - n}{2}\right) \text{ ou } \left(1, 5, 12, 22, \ldots, \frac{3n^2 - n}{2}, \ldots\right)$$

A Tabela 8 relaciona o número de peças (discos) com o número mínimo de movimentos necessários para solucionar o quebra-cabeça Torre de Hanói.

Tabela 8 – Número de Discos × Número de Movimentos

Número de Discos	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
Número de Movimentos	1	3	7	15	31	63	$\cdots$

Esta relação pode ser representada pela sequência (T_n) cujo termo geral é $T_n = 2^n - 1$. Portanto, temos

$$(2^n - 1) \text{ ou } (1, 3, 7, 15, \ldots, 2^n - 1, \ldots)$$

De forma análoga, a Tabela 9 relaciona o número de rãs, de cada cor, com o número de movimentos necessários para solucionar o quebra-cabeça Salto da Rã.

Tabela 9 – Número de Rãs (cor) × Número de Movimentos

Número de Rãs (cor)	1	2	3	4	5	6	$\cdots$
Número de Movimentos	3	8	15	24	35	48	$\cdots$

Esta relação pode ser representada pela sequência (r_n) cujo termo geral é $r_n = n^2 + 2n$. Temos, então,

$$(n^2 + 2n) \text{ ou } (3, 8, 15, 24, \ldots, n^2 + 2n, \ldots)$$

3.5 Progressão Aritmética

3.5.1 Definição e Exemplos

É bastante comum nos depararmos com situações em que grandezas apresentam variações iguais para intervalos de tempo também iguais, ou seja, grandezas proporcionais. Vejamos uma destas situações:

> Uma fábrica de automóveis produziu 400 veículos em janeiro de 2014 e aumenta mensalmente sua produção em 30 veículos. Determine a quantidade de veículos produzidos nos demais meses deste mesmos ano.

A solução do problema pode ser representado pela sequência $(400, 430, \ldots, 730)$. Observemos nesta sequência que cada termo, a partir do segundo, é igual ao termo anterior acrescido de 30, ou seja, o acréscimo é constante.

Definição 3.5.1. *Uma progressão aritmética é uma sequência na qual a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante. Chamamos essa constante de razão e a denotamos por r.*

Uma progressão aritmética pode ser classificada em relação à sua razão da seguinte forma:

1. Crescente: quando $r > 0$.
2. Decrescente: quando $r < 0$
3. Constante ou Estacionária: quando $r = 0$.

Exemplo 3.5.1. *Dada cada sequência, temos que:*

a) $(1, 2, 3, \ldots)$ *é uma progressão aritmética crescente cuja razão é* $r = 1$.

b) $(7, 1, -5 \ldots)$ *é uma progressão aritmética decrescente cuja razão é* $r = -6$.

c) $(12, 12, 12, \ldots)$ *é uma progressão aritmética constante ou estacionária, logo a razão é* $r = 0$.

Exemplo 3.5.2. *(Contra-exemplo) A sequência* $(-3, 1, 4, 8, 12, 16, 20, \ldots)$ *não representa uma progressão aritmética, pois a diferença entre cada termo e o termo anterior não é constante, haja vista que* $1 - (-3) = 4$ *e* $4 - 1 = 3$.

Da definição, se $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n, \ldots)$ é uma progressão aritmética de razão r, então $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \cdots = a_n - a_{n-1} = \cdots = r$. Daí, temos que

$$\begin{array}{rcl} a_2 & = & a_1 + r \\ a_3 & = & a_2 + r \\ a_4 & = & a_3 + r \\ & \vdots & \\ a_n & = & a_{n-1} + r \end{array}$$

Somando todas as $n-1$ igualdades, membro a membro, obtemos

$$a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + (n-1)r$$

donde segue que

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

A discussão anterior justifica o resultado a seguir.

Teorema 3.5.2. *Em uma progressão aritmética cujo primeiro termo é a_1 e a razão é r, o n-ésimo termo é $a_n = a_1 + (n-1)r$.*

Outra demonstração para esse teorema, esta pelo método da Indução Finita, é apresentada a seguir.

Demonstração. Seja $P(n) : a_n = a_1 + (n-1)r$, mostremos por indução sobre n que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para $n = 1$ temos

$$a_1 = a_1 + 0r = a_1 + (1-1)r$$

Portanto, $P(1)$ é verdadeira

Para $n = 2$, temos

$$a_2 = a_1 + r = a_1 + 2r - r = a_1 + (2-1)r$$

Portanto, $P(2)$ é verdadeira.

Suponha $P(n)$ verdadeira para algum $n \in \mathbb{N}$, ou seja, que $a_n = a_1 + (n-1)r$. Sendo esta a nossa hipótese de indução, mostremos então que $P(n+1)$ é verdadeira, ou seja, que

$$a_{n+1} = a_1 + [(n+1) - 1]r$$

Temos que

$$a_{n+1} = a_n + r \overset{\text{hip.}}{=} a_1 + (n-1)r + r = a_1 + [(n-1)+1]r = a_1 + [(n+1)-1]r$$

donde segue que $P(n+1)$ é verdadeira.

Portanto, por Indução, $P(n) : a_n = a_1 + (n-1)r$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. ∎

Esta expressão pode ser generalizada da seguinte forma:

$$a_n = a_m + (n-m)r, \ m, n \in \mathbb{N}, \ m < n$$

sendo sua aplicação um facilitador na resolução de alguns problemas.

Como a progressão aritmética é uma sequência cujo termo geral é dado por $a_n = a_1 + (n-1)r$, a mesma pode ser reescrita como $f(n) = an + b$, onde $a = r$ e $b = a_1 - r$, sendo esta função uma restrição do domínio da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$, função afim ou função polinomial do primeiro grau, ao conjunto $\mathbb{N}$. Portanto, o gráfico de uma progressão aritmética é formado por uma sequência de pontos colineares no plano.

Ou seja, (a_n) é uma progressão aritmética se, e somente se, os pontos do plano

$$(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), \ldots$$

são colineares (Figura 14).

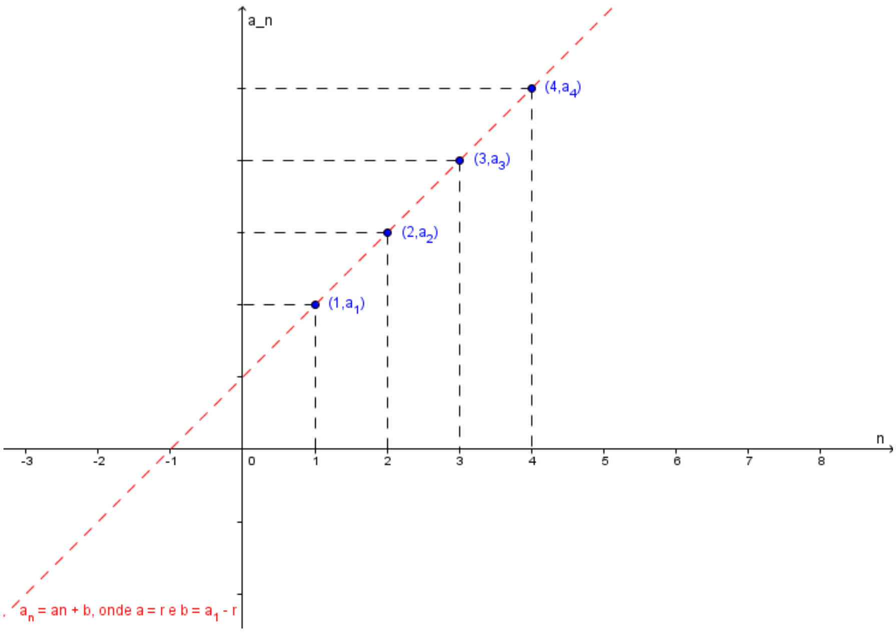


Figura 14 – Gráfico de uma progressão aritmética arbitrária

Vejamos alguns exemplos sobre progressão aritmética.

Exemplo 3.5.3. *Em cada uma das progressões aritméticas calcule a razão r e o termo geral a_n.*

a) $(-3, -1, 1, \ldots)$

b) $\left(\frac{7}{3}, \frac{11}{4}, \ldots\right)$

Solução.

A razão da progressão aritmética $(-3, -1, 1, \ldots)$ é dada por $r = -1 - (-3) = 2$ e seu termo geral por

$$a_n = -3 + (n-1) \cdot 2 = -3 + 2n - 2 = 2n - 5$$

Já para a progressão aritmética $\left(\frac{7}{3}, \frac{11}{4}, \ldots\right)$ temos $r = \frac{11}{4} - \frac{7}{3} = \frac{33-28}{12} = \frac{5}{12}$ e

$$a_n = \frac{7}{3}(n-1) \cdot \frac{5}{12} = \frac{7}{3} + \frac{5}{12}n - \frac{5}{12} = \frac{5}{12}n + \frac{4}{3}$$

Exemplo 3.5.4. *Uma fábrica de automóveis produziu 400 veículos em janeiro de 2014 e aumenta mensalmente sua produção em 30 veículos. Determine a quantidade de veículos produzidos no último mês deste mesmos ano.*

Solução.
Como o acréscimo é constante, o problema consiste em determinar o décimo segundo termo de uma progressão aritmética cujo primeiro termo é 400 e cuja razão é 30. Desta forma, temos que

$$a_{12} = 400 + (12 - 1) \cdot 30 = 400 + 330 = 730$$

Portanto, foram produzidos por esta fábrica 730 veículos no mês de dezembro de 2014.

Exemplo 3.5.5. *Em uma progressão aritmética, o terceiro termo é 11 e o vigésimo quinto termo é 77. Determine o trigésimo termo dessa progressão aritmética.*

Solução.
Temos que

$$a_{25} = a_3 + (25 - 3)r \Leftrightarrow 77 = 11 + 22r \Leftrightarrow 22r = 66 \Leftrightarrow r = 3$$

Logo,

$$a_{30} = a_{23} + (30 - 23)r \Leftrightarrow a_{30} = 77 + 7 \cdot 3 \Leftrightarrow a_{30} = 77 + 21 \Leftrightarrow a_{30} = 88$$

Portanto, o trigésimo termo dessa progressão aritmética é 88.

Para o exemplo a seguir necessitamos da seguinte definição.

Definição 3.5.3. *Interpolar, inserir ou intercalar k meios aritméticos entre dois números A e B é formar a progressão aritmética finita de $k + 2$ termos cujos extremos são $a_1 = A$ e $a_n = a_{k+2} = B$.*

Exemplo 3.5.6. *Qual é a razão da progressão aritmética que se obtém inserindo 10 termos entre os números 3 e 25?*

Solução.
Ao inserir 10 termos entre os números 3 e 25 obtém-se uma progressão aritmética com doze termos tal que $a_1 = 3$ e $a_{12} = 25$. Segue então que

$$a_{12} = a_1 + (12 - 1)r \Leftrightarrow 25 = 3 + 11r \Leftrightarrow 11r = 22 \Leftrightarrow r = 2$$

Portanto, a razão da progressão aritmética obtida ao inserir 10 termos entre 3 e 25 é 2.

Na resolução de alguns problemas, por vezes faz-se necessário o uso de artifícios matemáticos, e os dois exemplos a seguir ilustram esse fato.

Exemplo 3.5.7. *O perímetro de um triângulo retângulo mede 24 cm. Calcule as medidas dos lados sabendo que elas estão em progressão aritmética.*

Solução.
Um artifício matemático para representar progressões aritmética com um número ímpar de termos é denotar o termo central por x e tomar a razão igual a r. Daí, uma progressão aritmética com três termos é dada por $(x-r, x, x+r)$.

Desta forma, sejam $x-r$, x e $x+r$ as medidas dos lados deste triângulo. Como o perímetro do triângulo é 24, segue que

$$(x-\cancel{r})+x+(x+\cancel{r})=24 \Leftrightarrow 3x=24 \Leftrightarrow x=8$$

Como o triângulo é retângulo, e supondo que a progressão aritmética formada pelas medidas dos lados do triângulo é crescente, temos que

$$(8+r)^2=8^2+(8-r)^2 \Leftrightarrow \cancel{64}+16r+\cancel{r^2}=\cancel{64}+64-16r+\cancel{r^2} \Leftrightarrow 32r=64 \Leftrightarrow r=2$$

Portanto, as medidas dos lados deste triângulo são 6, 8 e 10.

Exemplo 3.5.8. *Determine quatro números em progressão aritmética, crescente, sabendo que a soma entre eles é 16 e o produto dos extremos é 7.*

Solução.
Um artifício matemático para representar progressões aritmética com um número par de termos é denotar os termos centrais por $x-y$ e $x+y$, isso faz com que a razão seja $r=(x-y)+(x+y)=2y$. Daí, uma progressão aritmética com quatro termos é dada por $(x-3y, x-y, x+y, x+3y)$.

Como a soma dos termos da progressão aritmética é 16, temos que

$$(x-\cancel{3y})+(x-\cancel{y})+(x+\cancel{y})+(x+\cancel{3y})=16 \Leftrightarrow 4r=16 \Leftrightarrow r=4$$

Sendo o produto dos extremos igual a 7, segue que

$$(4-3y)(4+3y)=7 \Leftrightarrow 16-9y^2=7 \Leftrightarrow 9y^2=9 \Leftrightarrow y=\pm 1$$

Uma vez que a progressão aritmética é crescente, a razão é 1. Portanto, os quatro números em progressão aritmética são 1, 3, 5 e 7.

Exemplo 3.5.9. *O cometa Halley visita a Terra a cada 76 anos.Sua última passagem por aqui foi em 1986. Quantas vezes ele visitou a Terra desde o nascimento de Cristo? Em que ano foi sua primeira passagem na era cristã?*

Solução.
Os anos de passagem do cometa formam a sequência $(1986, 1910, 1834, \ldots)$, que é uma progressão aritmética cujo $a_1 = 1986$ e $r = -76$. Daí, temos que o n-ésimo termo desta progressão aritmética é dado por $a_n = 1986 + (n-1)(-76) = 2062 - 76n$. Queremos determinar o valor de n tal que $a_n > 0$, donde tem-se $n < 27,1315$. Como $n \in \mathbb{N}$, o maior valor de n que satisfaz a desigualdade é $n = 27$. Com isso

$$a_{27} = 2062 - 76 \cdot 27 = 10$$

Portanto, o cometa visitou a Terra 27 vezes na era cristã e sua primeira visita na era cristã foi no ano 10.

3.5.2 Soma dos n Primeiros Termos de uma Progressão Aritmética

> Há uma história segundo a qual o professor de Carl [1] na escola pública, quando ele tinha dez anos de idade, teria passado à classe, para mantê-la ocupada, a tarefa de somar os números de 1 a 100. Quase que imediatamente Carl colocou sua lousa sobre a escrivaninha do irritado professor. Quando as lousas foram finalmente viradas, o professor surpreso verificou que Carl tinha sido o único a acertar a resposta correta, 5050, mas sem fazê-la acompanhar de nenhum cálculo. Carl havia mentalmente calculado a soma da progressão aritmética $1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100$ observando que $100 + 1 = 101$, $99 + 2 = 101$, $98 + 3 = 101$ e assim por diante com os cinquenta pares possíveis dessa maneira, sendo a soma portanto, $50 \times 101 = 5050$. Mais tarde, quando adulto, Gauss costumava jactar-se [2] de ter aprendido a contar antes de aprender a falar. ([3], p. 519)

Como podemos observar, o problema proposto a Gauss é o de somar os 100 primeiros termos da progressão aritmética cujo $a_1 = 1$ e $r = 1$. A partir do texto, podemos

[1] Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855), Nascido em Brunswick, Alemanha, é considerado o maior matemático do século XIX e, ao lado de Arquimedes e Isaac Newton, um dos maiores de todos os tempos.

[2] Vangloriar-se.

conjecturar que para calcular a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética, deve-se somar o primeiro com o n-ésimo termo da progressão aritmética, multiplicar a soma pelo número de termos a serem somados e dividir o produto por dois.

Essa conjectura é demonstrada no teorema a seguir.

Teorema 3.5.4. *A soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética (a_n) é*

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Demonstração. Temos $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$ e, escrevendo a soma na ordem inversa temos $S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1$. Somando estas duas expressões membro a membro, temos

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \cdots (a_{n-1} + a_2) + (a_1 + a_n)$$

Observe que, ao passar de um parêntese para o seguinte, a primeira parcela aumenta de r e a segunda parcela diminui de r, o que não altera a soma. Portando, todos os parênteses são iguais ao primeiro, (a_1+a_n). Como são n parênteses, temos $2S_n = (a_1+a_n)n$, portanto

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

■

Outra demonstração para esse teorema, esta pelo método da Indução Finita, é apresentada a seguir.

Demonstração. Seja $P(n) : S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$, mostremos por indução sobre n que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para $n = 1$ temos

$$S_1 = a_1 = \frac{2a_1}{2} = \frac{(a_1 + a_1) \cdot 1}{2}$$

Portanto, $P(1)$ é verdadeira.

Para $n = 2$, temos

$$S_2 = a_1 + a_2 = \frac{(a_1 + a_2) \cdot 2}{2}$$

Portanto, $P(2)$ é verdadeira.

Suponha $P(n)$ verdadeira para algum $n \in \mathbb{N}$, ou seja, que $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$. Sendo esta a nossa hipótese de indução, mostremos então que $P(n + 1)$ é verdadeira, ou seja, que

$$S_{n+1} = \frac{(a_1 + a_{n+1})(n + 1)}{2}$$

Temos que

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} \overset{\text{hip.}}{=} \frac{(a_1 + a_n)n}{2} + a_{n+1} \\
&= \frac{(a_1 + a_n)n + 2a_{n+1}}{2} = \frac{a_1 n + (a_{n+1} - r)n + 2(a_1 + nr)}{2} \\
&= \frac{a_1 n + a_{n+1} n - rn + 2a_1 + 2nr}{2} = \frac{a_1 n + a_{n+1} n + a_1 + a_1 + nr}{2} \\
&= \frac{a_1 n + a_{n+1} n + a_1 + a_{n+1}}{2} = \frac{(a_1 + a_{n+1})n + (a_1 + a_{n+1})}{2} \\
&= \frac{(a_1 + a_{n+1})(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

donde segue que $P(n+1)$ é verdadeira.

Portanto, por Indução, $P(n) : S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Vejamos alguns exemplos envolvendo a soma dos termos de uma progressão aritmética.

Exemplo 3.5.10. *Calcular a soma dos 20 primeiros termos da progressão aritmética*

$$(2, 6, 10, \ldots)$$

Solução.

Temos $a_1 = 2$ e $r = 4$, como $n = 20$ segue que $a_{20} = a_1 + 19r = 2 + 19 \cdot 4 = 78$. Portanto,

$$S_{20} = \frac{(2 + 78)20}{2} = 800$$

Exemplo 3.5.11. *De acordo com a discussão sobre números poligonais, cada n-ésimo número triangular pode ser escrito como a soma dos n primeiros números inteiros positivos. Temos então que*

$$\begin{aligned}
t_1 &= 1 \\
t_2 &= 3 = 1 + 2 \\
t_3 &= 6 = 1 + 2 + 3 \\
t_4 &= 10 = 1 + 2 + 3 + 4 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Desta forma, observa-se que t_n é igual a soma dos n primeiros termos da progressão aritmética $(1, 2, 3, \ldots, n, \ldots)$. Portanto,

$$t_n = S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(1 + n)n}{2}$$

que é exatamente o termo geral apresentado para a sequência (t_n) dos números triangulares.

Outra forma de denotarmos tal soma é a seguinte:

$$t_n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{(1+n)n}{2}$$

podendo esta fórmula ser demonstrada por indução finita sobre n.

Exemplo 3.5.12. *De forma análoga aos números triangulares, cada n-ésimo número quadrado pode ser escrito como a soma dos n primeiros números ímpares. Logo,*

$$\begin{aligned}
q_1 &= 1 & & \\
q_2 &= 4 &=& \ 1+3 \\
q_3 &= 9 &=& \ 1+3+5 \\
q_4 &= 16 &=& \ 1+3+5+7 \\
&\vdots & &
\end{aligned}$$

Desta forma, observa-se que q_n é igual a soma dos n primeiros termos da progressão aritmética $(1, 3, 5, \ldots, 2n-1, \ldots)$. Portanto,

$$q_n = S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(1+2n-1)n}{2} = \frac{2n^2}{2} = n^2$$

que é exatamente o termo geral apresentado para a sequência (q_n) dos números quadrados.

Outra forma de denotarmos tal soma, aplicando as propriedades de somatório, é a seguinte:

$$q_n = \sum_{i=1}^{n} (2i-1) = n^2$$

podendo também ser demonstrada por indução finita sobre n.

Exemplo 3.5.13. *Determine a expressão do termo geral da sequência (p_n) dos números pentagonais por meio da fórmula da soma dos n primeiros termos da uma progressão aritmética.*

Solução.
Cada n-ésimo número pentagonal pode ser decomposto em somas como a seguir:

$$\begin{aligned}
p_1 &= 1 & & \\
p_2 &= 5 &=& \ 1+4 \\
p_3 &= 12 &=& \ 1+4+7 \\
p_4 &= 22 &=& \ 1+4+7+10 \\
&\vdots & &
\end{aligned}$$

Desta forma, observa-se que p_n é igual a soma dos n primeiros termos da progressão aritmética $(1, 4, 7, \ldots, 3n-2, \ldots)$. Portanto,

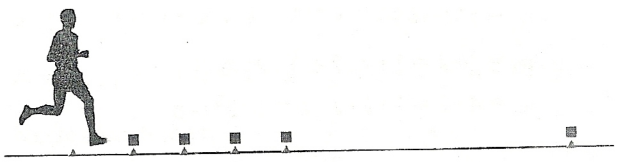
$$p_n = S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(1+3n-2)n}{2} = \frac{3n^2 - n}{2}$$

Outra forma de denotarmos a soma no exemplo anterior, também aplicando as propriedades de somatório, é a seguinte:

$$p_n = \sum_{i=1}^{n}(3i-2) = \frac{3n^2-n}{2}$$

Consideremos a seguinte situação problema e vamos abordá-la com o conceito de soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética.

Exemplo 3.5.14. *(UFG-GO) Em uma gincana, 20 caixinhas estão distribuídas ao longo de uma linha retilínea distantes 4 metros uma da outra. Um competidor que se encontra a 5 metros da primeira caixinha, conforme a figura a seguir, deve correr até a primeira caixinha, pegar um objeto e retornar ao local de partida. Em seguida, ele vai até a segunda caixinha, retira um objeto e retorna ao ponto de partida, e assim sucessivamente, até atingir a vigésima caixinha.*



Quantos metros esse competidor deverá percorrer para realizar sua prova?

Solução.
Ao ir até a primeira caixinha e voltar o competidor terá percorrido 10 m, ao ir até a segunda caixinha e voltar o competidor terá percorrido 18 m, pois a segunda caixinha encontra-se a quatro metros da primeira. Da mesma forma, terá percorrido 26 m ao ir o voltar a terceira caixinha. Logo, temos a seguinte progressão aritmética,

$$(10, 18, 26, \ldots)$$

cujo primeiro termo é $a_1 = 10$ e a razão é $r = 8$. Com isso,

$$a_{20} = a_1 + 19 \cdot r = 10 + 19 \cdot 8 = 162$$

Daí,

$$S_{20} = \frac{(10+162)20}{2} = 1720$$

Portando, o competidor deverá percorrer 1720 m para realizar sua prova.

O resultado a seguir caracteriza as progressões aritméticas [10].

Proposição 3.5.5. *Uma sequência é uma progressão aritmética se, e somente se, o termo geral é dado por um polinômio em n de grau menor que ou igual a 1.*

Demonstração. Em uma progressão aritmética, o termo geral é dado por um polinômio em n, a saber,

$$a_n = a_1 + (n-1)r = rn + (a_1 - r)$$

Se $r \neq 0$, ou seja, se a progressão é não estacionária, esse polinômio é de grau 1. Se $r = 0$, isto é, se a progressão for estacionária, esse polinômio é de grau menor que 1. Por esse motivo, as progressões aritméticas de razão $r \neq 0$ são chamadas de progressões aritméticas de primeira ordem.

Reciprocamente, se em uma sequência o n-ésimo termo é dado por um polinômio em n, de grau menor que ou igual a 1, então ela será uma progressão aritmética. De fato, se $x_n = an + b$, então (x_n) é uma progressão aritmética na qual $a = r$ e $b = a_1 - r$, ou seja, $r = a$ e $a_1 = a + b$. ■

Exemplo 3.5.15. *Em cada caso, determine o primeiro termo, a razão e escreva os cinco primeiros termos da progressão aritmética cujo termo geral é dado por:*

a) $a_n = 7n - 4$;

b) $a_n = \dfrac{n}{2} + 3$;

c) $a_n = -\dfrac{5n}{3} + \dfrac{49}{24}$.

Solução.

Para a letra a) temos

$$r = a = 7 \quad \text{e} \quad a_1 = a + b = 7 + (-4) = 3$$

Em b),

$$r = a = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad a_1 = a + b = \frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2}$$

Já em c),

$$r = a = -\frac{5}{3} \quad \text{e} \quad a_1 = a + b = -\frac{5}{3} + \frac{49}{24} = \frac{-40 + 49}{24} = \frac{3}{8}$$

Portanto, as progressões aritméticas são

$$(3, 10, 17, 24, 31, \ldots), \left(\frac{7}{2}, 4, \frac{9}{2}, 5, \frac{11}{2}, \ldots\right) \quad \text{e} \quad \left(\frac{3}{8}, -\frac{31}{24}, -\frac{71}{24}, -\frac{37}{8}, -\frac{151}{24}, \ldots\right)$$

respectivamente.

Outra forma de caracterização das progressões aritméticas é apresentada no próximo resultado.

Proposição 3.5.6. *Uma sequência é uma progressão aritmética se, e somente se, a soma dos n primeiros termos dessa sequência é um polinômio em n de grau menor que ou igual a 2, sem o termo independente.*

Demonstração. A soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética é

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{[a_1 + a_1 + (n-1)r]n}{2} = \frac{2a_1 n + rn^2 - rn}{2} = \frac{r}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{r}{2}\right)n$$

Se $r \neq 0$, então S_n é um polinômio de grau 2 sem termo independente. Se $r = 0$, então S_n é um polinômio de grau menor que 2, sem termo independente.

Reciprocamente, todo polinômio em n, de grau menor que ou igual a 2, sem o termo independente, é o valor da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética. De fato, se $P(n) = ax^2 + bx$, então $P(n)$ é a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética na qual $\frac{r}{2} = a$ e $a_1 - \frac{r}{2} = b$, ou seja, $r = 2a$ e $a_1 = a + b$. ■

Exemplo 3.5.16. *Em cada caso, determine o primeiro termo, a razão e escreva os cinco primeiros termos da progressão aritmética cuja soma dos n primeiros termos é dado por:*

a) $S_n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$;

b) $S_n = n^2$;

c) $S_n = 2n^2 - n$;

d) $S_n = \frac{5n^2}{24} + \frac{17n}{8}$.

Solução.
Para a letra a) temos

$$r = 2a = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \quad \text{e} \quad a_1 = a + b = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Em b),

$$r = 2a = 2 \cdot 1 = 2 \quad \text{e} \quad a_1 = a + b = 1 + 0 = 1$$

Já em c),

$$r = 2a = 2 \cdot 2 = 4 \quad \text{e} \quad a_1 = a + b = 2 + (-1) = 1$$

Agora, em d),

$$r = 2a = 2 \cdot \frac{5}{24} = \frac{5}{12} \quad \text{e} \quad a_1 = a + b = \frac{5}{24} + \frac{17}{3} = \frac{56}{24} = \frac{7}{3}$$

Portanto, as progressões aritméticas são

$$(1, 2, 3, 4, 5, \ldots), (1, 3, 5, 7, 9, \ldots), (1, 5, 9, 13, 17, \ldots) \quad \text{e} \quad \left(\frac{7}{3}, \frac{11}{4}, \frac{19}{6}, \frac{43}{12}, 4, \ldots\right)$$

respectivamente.

Exemplo 3.5.17. *Determinar a progressão aritmética cuja expressão para a soma dos n primeiros termos é igual a expressão do termo geral da sequência de movimentos mínimos para a resolução do quebra-cabeça Salto da Rã, ou seja, a sequência cujo termo geral é dado por* $r_n = n^2 + 2n$.

Solução.
Sendo $r_n = n^2 + 2n$ a expressão para a soma dos n primeiros termos da progressão aritmética, então

$$r = 2a = 2 \cdot 1 = 2 \quad \text{e} \quad a_1 = a + b = 1 + 2 = 3$$

donde segue que

$$a_n = 3 + (n-1) \cdot 2 = 2n + 1$$

Portanto, a progressão aritmética procurada é

$$(2n+1) \quad \text{ou} \quad (3, 5, 7, \ldots, 2n+1, \ldots)$$

3.6 Progressão Geométrica

3.6.1 Definição e Exemplos

Observemos a situação problema da produção automobilística.

> De acordo com um artigo publicado em 15 de dezembro de 1992 no Wall Street Journal, a Ford Motor Company agora usa cerca de $7,25$ h de trabalho para produzir a carroceria de um veículo médio, menos do que as 15 h estimadas em 1980. Os japoneses precisam apenas cerca de $3,5$ h. O aperfeiçoamento da Ford desde 1980 representa um decréscimo médio de 6% ao ano. Se essa taxa continuar, então em n anos a partir de agora a Ford usará cerca de
>
> $$h_n = 7,25 \cdot 0,94^n$$
>
> horas de trabalho para produzir carrocerias de veículos médios. Presumindo que os japoneses continuem a gastar $3,5$ h por veículo, quantos anos mais a Ford levará para alcançá-los?

Temos neste problema que o tempo de produção de carrocerias de um veículo médio demandado pela Ford Motor Company decresce a uma taxa anual de $i = 6\%$, donde segue que o tempo em cada ano passa a ser $100\% - 6\% = 94\%$ do tempo necessário no ano anterior.

Portanto, a cada ano que passa, o tempo de produção é multiplicado por $94\% = 0,94$.

Vejamos outra situação problema.

> Aplicando R$ 1000,00 em uma caderneta de poupança, cuja taxa de rendimento é de $0,6\%$ a.m., qual o montante obtido após quatro meses? Qual será o montante dessa aplicação após n meses?

Se a taxa de rendimento mensal é de $i = 0,6\%$, então a cada mês, o montante obtido é de $100\% + 0,6\% = 100,6\%$ do montante do mês anterior. Dessa forma, a cada mês, o montante é multiplicado por $100,6\% = 1,006$. Logo, pós quatro meses de aplicação, o montante será de $1000 \cdot 1,006^4 \cong 1024,22$ reais.

Portando, denotando por M o montante após n meses, temos que

$$M = 1000 \cdot 1,006^n$$

Definição 3.6.1. *Uma progressão geométrica é uma sequência na qual o quociente entre cada termo e o termo anterior é constante. Chamamos essa constante de razão e a denotamos por q.*

Da definição, tem-se que uma progressão geométrica é uma sequência em que cada termo é obtido multiplicando o termo anterior por uma constante. A diferença entre esta constante e 1, denotada por i, é chamada taxa de crescimento.

Portanto, progressões geométricas são sequências nas quais a taxa de crescimento i de cada termo para o seguinte é constante.

Uma progressão geométrica pode ser classificada em relação à sua razão da seguinte forma:

1. Crescente: quando $q > 1$ e seus termos são positivos, ou quando $0 < q < 1$ e seus termos são negativos;

2. Decrescente: quando $q > 1$ e seus termos são negativos, ou quando $0 < q < 1$ e seus termos são positivos;

3. Constante ou Estacionária: quando $q = 1$;

4. Alternante ou Oscilante: quando $q < 0$.

Mostremos que a afirmação 1 é verdadeira e as demais mostra-se de forma análoga.

Se os termos de uma progressão geométrica $(a_1, a_2 \ldots, a_{n-1}, a_n, \ldots)$ são positivos e se $q > 1$, temos que $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = q > 1$, donde segue que $a_n > a_{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se os termos de uma progressão geométrica $(a_1, a_2 \ldots, a_{n-1}, a_n, \ldots)$ são negativos e se $0 < q < 1$, temos que $0 < \dfrac{a_n}{a_{n-1}} < 1$, donde segue que $a_n > a_{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, segue a tese.

Exemplo 3.6.1. *Dada cada sequência, temos que:*

a) $(3, 12, 48, 192, \ldots)$ *é uma progressão geométrica crescente cuja razão é* $q = 4$*, logo a taxa de crescimento é dada por* $1 + i = 4$*, donde* $i = 3 = 300\%$.

b) $\left(-4, -2, -1, -\frac{1}{2}, \ldots\right)$ *é uma progressão geométrica crescente cuja razão é* $q = \frac{1}{2}$*, logo a taxa de crescimento é dada por* $1 + i = \frac{1}{2}$*, donde* $i = -\frac{1}{2} = -50\%$.

c) $\left(-1, -\frac{6}{5}, -\frac{36}{25}, -\frac{216}{125}, \ldots\right)$ *é uma progressão geométrica decrescente cuja razão é* $q = \frac{6}{5}$*, logo a taxa de crescimento é dada por* $1 + i = \frac{6}{5}$*, donde* $i = \frac{1}{5} = 20\%$.

d) $\left(\frac{2}{5}, \frac{6}{20}, \frac{18}{80}, \frac{54}{320}, \ldots\right)$ *é uma progressão geométrica decrescente cuja razão é* $q = \frac{3}{4}$*, logo a taxa de crescimento é dada por* $1 + i = \frac{3}{4}$*, donde* $i = -\frac{1}{4} = -25\%$.

e) $(k, k, k, k, \ldots)$ *é uma progressão geométrica constante ou estacionária, ou seja, a razão é* $q = 1$*, logo a taxa de crescimento é dada por* $1 + i = 1$*, donde* $i = 0 = 0\%$.

f) $\left(2, -\frac{2}{3}, \frac{2}{9}, -\frac{2}{27}, \ldots\right)$ *é uma progressão geométrica alternante ou oscilante cuja razão é* $q = -\frac{1}{3}$*, logo a taxa de crescimento é dada por* $1 + i = -\frac{1}{3}$*, donde* $i = -\frac{4}{3} = -133,33\%$.

Exemplo 3.6.2. *(Contra-exemplo) A sequência* $(3, 15, 75, 375, 1500, 7500, \ldots)$ *não representa uma progressão geométrica, pois o quociente entre cada termo e o termo anterior não é constante, haja vista que* $\frac{15}{3} = 5$ *e* $\frac{1500}{375} = 4$.

Da definição, se $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n, \ldots)$ é uma progressão geométrica de razão q, então $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \cdots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \cdots = q$. Daí, temos que

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 \cdot q \\ a_3 &= a_2 \cdot q \\ a_4 &= a_3 \cdot q \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} \cdot q \end{aligned}$$

Multiplicando todas as $n - 1$ igualdades, membro a membro, obtemos

$$a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \cdots \cdot a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \cdots \cdot a_{n-1} \cdot q^{n-1}$$

donde, dividindo ambos os membros da última igualdade por $a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \cdots \cdot a_{n-1}$, que é possível pois $a_i \neq 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$, segue que

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

A discussão anterior justifica o seguinte resultado.

Teorema 3.6.2. *Em uma progressão geométrica cujo primeiro termo é* a_1 *e a razão é* q*, o n-ésimo termo é* $a_n = a_1 q^{n-1}$.

Outra demonstração para esse teorema, pelo método da Indução Finita, é apresentada a seguir.

Demonstração. Seja $P(n)$: $a_n = a_1q^{n-1}$, mostremos por indução sobre n que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para $n = 1$ temos

$$a_1 = a_1q^0 = a_1q^{1-1}$$

Portanto, $P(1)$ é verdadeira.

Para $n = 2$, temos

$$a_2 = a_1q = a_1q^{2-1}$$

Portanto, $P(2)$ é verdadeira.

Suponha $P(n)$ verdadeira para algum $n \in \mathbb{N}$, ou seja, que $a_n = a_1q^{n-1}$. Sendo esta a nossa hipótese de indução, mostremos então que $P(n+1)$ é verdadeira, ou seja, que

$$a_{n+1} = a_1q^{(n+1)-1}$$

Temos que

$$a_{n+1} = a_nq \overset{\text{hip.}}{=} a_1q^{n-1}q = a_1q^{(n-1)+1} = a_1q^{(n+1)-1}$$

donde segue que $P(n+1)$ é verdadeira.

Portanto, por Indução $P(n)$: $a_n = a_1q^{n-1}$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. ∎

Em muitos casos, como quando tratamos de situações problema envolvendo juros compostos, crescimento populacional, decaimento radioativo, em que o primeiro termo da sequência passa a ser o instante em que o tempo é zero, é natural enumerarmos os termos de uma progressão geométrica a partir de zero, ou seja, o primeiro termo é denotado por a_0. Desta forma, o n-ésimo termo de uma progressão geométrica passa a ser dado por $a_n = a_0q^n$, uma vez que para passarmos do termo a_0 para o termo a_n faz-se necessário n multiplicações.

Esta expressão pode ser generalizada da seguinte forma:

$$a_n = a_mq^{n-m}, \ m, n \in \mathbb{N}, \ m < n$$

sendo sua aplicação um facilitador na resolução de alguns problemas.

Como a progressão geométrica é uma sequência cujo termo geral é dado por $a_n = a_0q^n$ quando seus termos são numerados a partir de zero, sendo esta função uma restrição do domínio da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = f(0)q^x$, função exponencial, ao conjunto $\mathbb{N}$, o gráfico de uma progressão geométrica é formado por uma sequência de pontos pertencentes ao gráfico de uma função exponencial.

Ou seja, (a_n) é uma progressão geométrica se, e somente se, os pontos do plano

$$(0, a_0), (1, a_1), (2, a_2), \ldots$$

pertencem ao gráfico de uma função exponencial (Figura 15).

Vejamos alguns exemplos sobre progressão geométrica.

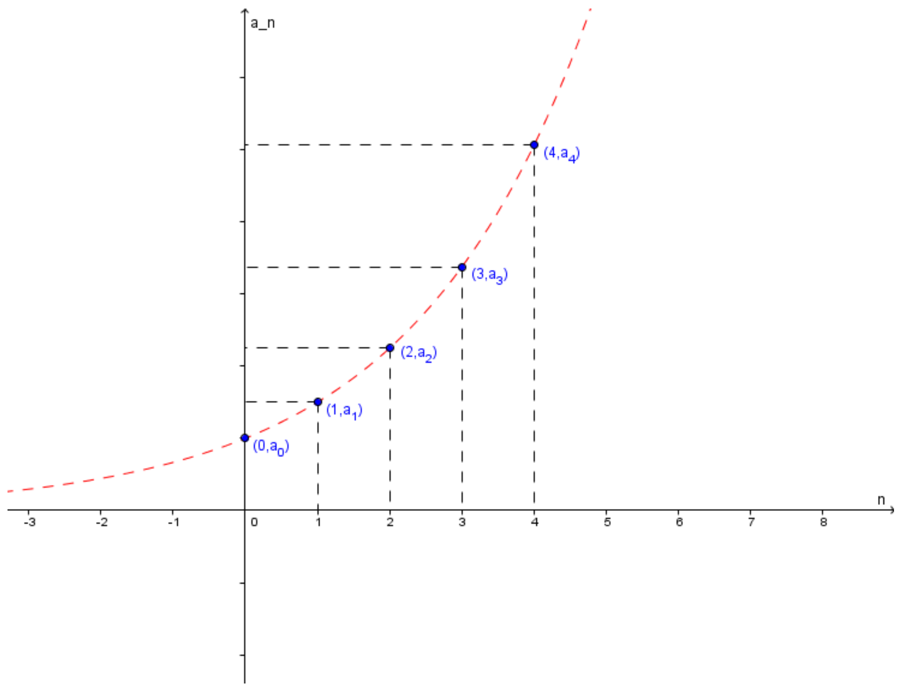


Figura 15 – Gráfico de uma progressão geométrica arbitrária

Exemplo 3.6.3. *Em cada uma das progressões geométricas calcule a razão q e o termo geral a_n.*

a) $(6, -12, 24, \ldots)$

b) $\left(\frac{7}{4}, \frac{21}{20}, \frac{63}{100}, \ldots\right)$

Solução.

a) Temos que $q = \dfrac{-12}{6} = \dfrac{24}{-12} = -2$, daí

$$a_n = a_1 q^{n-1} = 6 \cdot (-2)^{n-1} = 6 \cdot \frac{(-2)^n}{-2} = -3 \cdot (-2)^n$$

b) Temos que $q = \dfrac{\frac{21}{20}}{\frac{7}{4}} = \dfrac{\frac{63}{100}}{\frac{21}{20}} = \dfrac{3}{5}$, daí

$$a_n = a_1 q^{n-1} = \frac{7}{4} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} = \frac{7}{4} \cdot \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n}{\frac{3}{5}} = \frac{7}{4} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^n \cdot \frac{5}{3} = \frac{35}{12} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^n$$

Exemplo 3.6.4. *Uma obra de arte foi comprada por um investidor por R\$ 13.000,00. O investidor espera uma valorização de 10% ao ano. Qual o valor da obra 15 anos após a data da compra?*

Solução.

Temos que o valor inicial da obra de arte é de $a_0 = 13000$. A taxa de crescimento constante do valor da obra de cada ano para o ano seguinte é $i = 10\% = 0,1$, donde segue que após um ano, o valor da obra passa a ser

$$a_1 = 13000 \cdot 1,1$$

Após dois anos,

$$a_2 = 13000 \cdot 1,1 \cdot 1,1 = 13000 \cdot 1,1^2$$

Dessa forma, obtemos a progressão geométrica cujo primeiro termo é $a_0 = 13000$ e cuja razão é $q = 1,1$. Com isso, o n-ésimo termo dessa progressão geométrica é dado por

$$a_n = a_0 q^n = 13000 \cdot 1,1^n$$

Logo, para $n = 15$, temos que

$$a_{15} = 13000 \cdot 1,1^{15} \cong 54304,23$$

Portanto, o valor da obra de arte 15 anos após a data da compra será de R$ 54.304,23.

Exemplo 3.6.5. *Um capital gera um montante de R$ 14.000,00 quando aplicado durante 6 meses a uma taxa de juros compostos de i a.a. e um montante de R$ 37.240,30 quando aplicado durante 13 anos a mesma taxa de juros. Determine:*

a) O montante caso este capital fosse aplicado nas mesmas condições por um período de 25 anos.

b) A taxa de juros da aplicação.

c) O capital inicial aplicado.

Solução.

a) Do enunciado temos que os valores dos montantes geram uma progressão geométrica $(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$, em que o termo a_0 corresponde ao capital inicialmente aplicado, ou seja, quando o período decorrido é zero, cujo sétimo termo é $a_6 = 14000$ e o décimo quarto termo é $a_{13} = 37240,3$. Daí,

$$a_{13} = a_6 q^{13-6} \quad \Leftrightarrow \quad 37240,3 = 14000q^7 \quad \Leftrightarrow \quad q = \sqrt[7]{\frac{37240,3}{14000}} \quad \Leftrightarrow \quad q \approx 1,15$$

Tomemos $q = 1,15$. Dessa forma, temos que

$$a_{25} = a_{13} q^{25-13} = 37240,3 \cdot 1,15^{12} \approx 199244,92$$

Portanto, após 25 anos, a aplicação geraria um montante (arredondado para duas casas decimais) de R$ 199.244,92.

b) A taxa de juros da aplicação é dada por $1 + i = 1,15$, donde segue que a taxa é de $i = 0,15 = 15\%$ a.a.

c) Temos que

$$a_6 = a_0 q^6 \quad \Leftrightarrow \quad 14000 = a_0 \cdot 1,15^6 \quad \Leftrightarrow \quad a_0 = \frac{14000}{1,15^6} \quad \Leftrightarrow \quad a_0 \approx 6052,59$$

Portanto, o capital aplicado (arredondado para duas casas decimais) foi de R$ 6.052,59.

Para os exemplos a seguir necessitamos da seguinte definição.

Definição 3.6.3. *Interpolar, inserir ou intercalar k meios geométricos entre dois números A e B é formar a progressão geométrica finita de $k+2$ termos cujos extremos são $a_1 = A$ e $a_n = a_{k+2} = B$.*

Exemplo 3.6.6. *Inserir quatro meios geométricos entre os números $X = -\frac{2}{3}$ e $Y = \frac{2048}{9375}$.*

Solução.
Ao inserir quatro meios geométricos entre os números $-\frac{2}{3}$ e $\frac{2048}{9375}$ obtém-se uma progressão geométrica com seis termos tal que $a_1 = -\frac{2}{3}$ e $a_6 = \frac{2048}{9375}$. Segue então que

$$a_6 = a_1 q^5 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2048}{9375} = -\frac{2}{3} q^5 \quad \Leftrightarrow \quad q = \sqrt[5]{\frac{\frac{2048}{9375}}{-\frac{2}{3}}} \quad \Leftrightarrow \quad q = -\frac{4}{5}$$

Portanto, os quatro meios geométricos são:

- $a_2 = -\frac{2}{3} \cdot -\frac{4}{5} = \frac{8}{15}$;
- $a_3 = \frac{8}{15} \cdot -\frac{4}{5} = -\frac{32}{75}$;
- $a_4 = -\frac{32}{75} \cdot -\frac{4}{5} = \frac{128}{375}$;
- $a_5 = \frac{128}{375} \cdot -\frac{4}{5} = \frac{512}{1875}$.

Exemplo 3.6.7. *Um capital de R$ 13.000,00 pode transformar-se em R$ 28.497,81 através de uma aplicação a juros compostos. Determine:*

a) A taxa de juros para que o montante final tenha sido obtido após dez meses de aplicação.

b) Os montantes do primeiro ao nono mês.

Solução.

a) Os montantes formam a progressão geométrica cujo primeiro termo é 13200 e o último termo é 28497,81, logo determinar a taxa de juros para que o montante final tenha sido obtido após dez meses de aplicação significa que devemos interpolar nove meios geométricos a progressão geométrica $(13200; \ldots ; 28497,81)$.

Dessa forma, como $a_0 = 13200$ e $a_{10} = 28497,81$, temos que

$$a_{10} = a_0 q^{10} \quad \Leftrightarrow \quad 28497,81 = 13200q^{10} \quad \Leftrightarrow \quad q = \sqrt[10]{\frac{28497,81}{13200}} \quad \Leftrightarrow \quad q = 1,08$$

Agora, temos que $1 + i = 1,08$, logo $i = 0,08$. Portando, a taxa de juros deve ser de $i = 8\%$ a.m..

b) Os montantes são dados por $M_n = a_0 q^n$, onde n é o número de meses da aplicação, logo

- Após 1 mês, $M_1 = 13200 \cdot 1,08^1 = 14.256,00$ reais;
- Após 2 meses, $M_2 = 13200 \cdot 1,08^2 = 15.396,48$ reais;
- Após 3 meses, $M_3 = 13200 \cdot 1,08^3 = 16.628,20$ reais;
- $\vdots$
- Após 9 meses, $M_9 = 13200 \cdot 1,08^9 = 26.386,86$ reais.

3.6.2 Soma dos Termos de uma Progressão Geométrica

Em algumas situações problema envolvendo progressões geométricas, o objeto de interesse não é encontrar um termo específico da progressão, a razão ou a taxa de crescimento da mesma, mas sim a soma de uma quantidade finita de termos desta progressão geométrica. Em alguns casos, essa soma não se restringe a um número finito de termos, ou seja, o objeto de interesse passa a ser a soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica.

Tratemos inicialmente do caso finito.

Se $q = 1$, então a progressão geométrica é constante ou estacionária, ou seja, $(a, a, \ldots, a)$. Portanto, a soma dos n primeiros termos é dada simplesmente por

$$S_n = \underbrace{a + a + \ldots + a}_{n \text{ vezes}} = na$$

Para $q \neq 1$, temos o seguinte resultado.

Teorema 3.6.4. *A soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica (a_n) é*

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}, \quad q \neq 1$$

Demonstração. Temos que $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$ e, multiplicando ambos os membros dessa igualdade por q, obtemos

$$qS_n = a_1q + a_2q + \cdots + a_{n-1}q + a_nq = a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}$$

Subtraindo a primeira desta última igualdade, membro a membro, temos

$$\begin{aligned} qS_n - S_n &= (\cancel{a_2} + \cdots + \cancel{a_n} + a_{n+1}) - (a_1 + \cancel{a_2} + \cdots + \cancel{a_n}) \\ S_n(q-1) &= a_{n+1} - a_1 \\ S_n(q-1) &= a_1q^n - a_1 \end{aligned}$$

Portanto, supondo $q \neq 1$, temos que

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

■

Outra demonstração para esse teorema, esta pelo método da Indução Finita, é apresentada a seguir.

Demonstração. Seja $P(n) : S_n = \dfrac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$, $q \neq 1$, mostremos por indução sobre n que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para $n = 1$ temos

$$S_1 = a_1 = \frac{a_1(q-1)}{q-1} = \frac{a_1(q^1 - 1)}{q - 1}$$

Portanto, $P(1)$ é verdadeira.

Para $n = 2$, temos

$$S_2 = a_1 + a_2 = a_1 + a_1q = a_1(q+1) = \frac{a_1(q+1)(q-1)}{q-1} = \frac{a_1(q^2-1)}{q-1}$$

Portanto, $P(2)$ é verdadeira.

Suponha $P(n)$ verdadeira para algum $n \in \mathbb{N}$, ou seja, que $S_n = \dfrac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$. Sendo esta a nossa hipótese de indução, mostremos então que $P(n+1)$ é verdadeira, ou seja, que

$$S_{n+1} = \frac{a_1(q^{n+1} - 1)}{q - 1}$$

Temos que

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} \overset{\text{hip}}{=} \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} + a_{n+1} \\ &= \frac{a_1(q^n - 1) + (q-1)a_{n+1}}{q - 1} = \frac{\cancel{a_1q^n} - a_1 + qa_1q^n - \cancel{a_1q^n}}{q - 1} \\ &= \frac{a_1q^{n+1} - a_1}{q - 1} = \frac{a_1(q^{n+1} - 1)}{q - 1} \end{aligned}$$

donde segue que $P(n+1)$ é verdadeira.

Portanto, por Indução $P(n) : S_n = \dfrac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Vejamos alguns exemplos envolvendo a soma dos termos de uma progressão geométrica.

Exemplo 3.6.8. *Calcule a soma dos dez primeiros termos da progressão geométrica* $(-3, 9, -27, \ldots)$.

Solução.
A soma dos dez primeiros termos é

$$S_{10} = \frac{-3 \cdot (3^{10} - 1)}{-3 - 1} = \frac{177144}{4} = 44286$$

Exemplo 3.6.9. *Determinar* n *tal que* $\displaystyle\sum_{i=3}^{n} 2^i = 4088$.

Solução.
Observe que

$$\sum_{i=3}^{n} 2^i = 2^3 + 2^4 + 2^5 + \cdots + 2^n$$

ou seja, o primeiro membro da equação é a soma dos $n-2$ primeiros termos da progressão geométrica cujo primeiro termo é 2^3 e a razão é 2.

Segue então que

$$\begin{aligned} \sum_{i=3}^{n} 2^i &= 4088 \quad \Leftrightarrow \\ \frac{2^3(2^{n-2} - 1)}{2 - 1} &= 4088 \quad \Leftrightarrow \\ 2^{n-2} &= 2^9 \quad \Leftrightarrow \\ n &= 11 \end{aligned}$$

Exemplo 3.6.10. *(UFC-CE) A progressão geométrica infinita* $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ *tem* $q = \dfrac{1}{2}$ *e* $a_1 = 1$. *Determine o menor inteiro positivo* n *tal que* S_n, *a soma soma dos* n *primeiros termos da progressão, satisfaça a desigualdade* $S_n > \dfrac{8191}{4096}$.

Solução.
Temos que

$$\frac{1 \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1\right]}{\frac{1}{2} - 1} > \frac{8191}{4096} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{-\frac{1}{2}} > \frac{8191}{4096} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{2}\right)^n - 1 < -\frac{8191}{8192} \quad \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n < 1 - \frac{8191}{8192} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{1}{8192} \quad \Leftrightarrow \quad 2^{-n} < 2^{-13} \quad \Leftrightarrow \quad n > 13$$

Portanto, o menor inteiro positivo que satisfaz a desigualdade é 14.

Passemos então a tratar do caso infinito, ou seja, somar os infinitos termos de uma progressão geométrica. Mas antes de apresentarmos um resultado, vamos refletir um pouco sobre o tema. Sabe-se que a adição de uma quantidade finita de números reais é sempre um número real, entretanto, o que pode-se afirmar sobre adição quando a quantidade de parcelas é infinita?

Nesta direção, os seguintes questionamentos surgem naturalmente: faz sentido a adição com uma quantidade infinita de parcelas? É possível encontrarmos uma "soma finita", no sentido de que a soma aproxima-se de um único número real quando aumentamos arbitrariamente o número de parcelas, a partir de uma adição com infinitas parcelas? Vejamos então algumas discussões.

A representação de um número real x em notação decimal [9] é dada por

$$x = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$$

onde $a_0 \in \mathbb{Z}$ e a_1, a_2, ..., a_n, ... são dígitos, ou seja, $1 \leq a_n \leq 9$, $n = 1, 2, \ldots$. O número a_0 chama-se parte inteira de x.

Quando, a partir de um certo ponto, todos os dígitos a_n se tornam iguais a zero, ou seja,

$$x = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n 000 \ldots$$

este número pode ser escrito como

$$x = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}$$

Logo, x é um número racional, mais particularmente uma fração decimal.

De maneira mais geral, mesmo não ocorrendo o caso supracitado, a representação decimal

$$x = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$$

pode ser escrita como uma adição com infinitas parcelas

$$x = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots$$

É sabido do ensino fundamental que $\dfrac{2}{9} = 0,222\ldots$, consequentemente

$$0,222\ldots = 0 + \frac{2}{10} + \frac{2}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \cdots = \frac{2}{9}$$

Portando, temos assim a adição de uma quantidade infinita de parcelas resultando em uma "soma finita".

Considere um quadrado unitário, ou seja, de área igual a 1 [11]. Ao traçarmos uma de suas diagonais o dividimos em dos triângulos retângulos cada um com área igual a $\dfrac{1}{2}$. Em seguida, dividamos um dos triângulos ao meio traçando a bissetriz do seu ângulo reto para obter dois triângulos retângulos cada um com área igual a $\frac{1}{4}$. Dividamos um dos triângulos com área igual a $\frac{1}{4}$ de forma análoga à do triângulo de área igual a $\frac{1}{2}$ obtendo dois triângulos de área igual a $\frac{1}{8}$. Repetindo esse processo indefinidamente, obtemos uma infinidade de triângulos com área igual à metade da área do triângulo anterior. O processo é ilustrado na Figura 16.

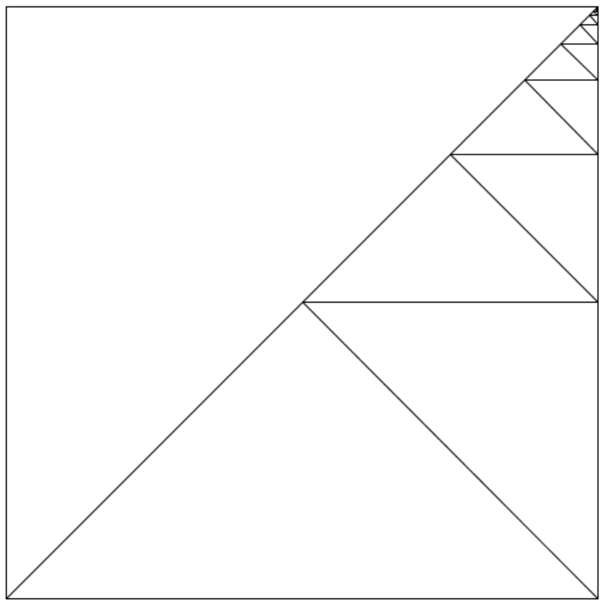


Figura 16 – Quadrado unitário dividido em infinitos triângulos

Desta forma, a soma das áreas destes infinitos triângulos equivale a área do quadrado original, ou seja, diz-se que a área do quadrado unitário se exprime como a "soma infinita" das áreas dos triângulos. Esta situação é representada pela igualdade

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1$$

Novamente temos a adição de uma quantidade infinita de parcelas resultando em uma "soma finita".

Por outro lado, consideremos as sequências

$$(1, 2, 4, 8, \ldots) \quad \text{e} \quad (1, -1, 1, -1, \ldots)$$

Na primeira, ao somarmos seus termos obtemos a expressão $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots$, donde não poderíamos encontrar uma soma finita uma vez que ao adicionarmos os termos obtém-se as somas cumulativas apresentadas na Tabela 10, somas estas que se tornam arbitrariamente grandes a medida que n aumenta. Já na segunda, é impossível definir a soma infinita $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ ficando o questionamento: é 0, 1 ou nenhum dos dois?

Tabela 10 – Soma dos termos da sequência $(1, 2, 4, 8, \ldots)$

n	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
Soma dos n Primeiros Termos	1	3	7	15	31	63	127	$\cdots$

Dada uma sequência $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, chama-se de série infinita ou simplesmente série [16], e denotamos por $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, a soma de todos os termos dessa sequência, ou seja,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

De forma geral, consideramos as somas parciais

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ \vdots &= \vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \end{aligned}$$

Essas somas parciais podem ou não se aproximarem de, ou tenderem a, um único número real S à medida que n cresce arbitrariamente.

Se as somas parciais S_n tendem a um número real S à medida que o número de parcelas n tende ao infinito, o que denota-se por,

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S$$

diz-se que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente e S é chamado soma da série, e denotamos por

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Caso contrário, a série é dita divergente.

Agora temos elementos para tratarmos da soma dos termos de uma progressão geométrica para o caso infinito, ou seja, a soma de todos os termos de uma progressão geométrica.

Se a sequência (a_n) é uma progressão geométrica, então a série dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}$$

é chamada de série geométrica.

O próximo resultado apresenta as condições para que a soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica seja uma "soma finita", ou equivalentemente, que a série geométrica seja convergente [8].

Teorema 3.6.5. *A série geométrica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_1 q^{n-1} + \cdots$$

é convergente se $|q| < 1$ *e sua soma é*

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = \frac{a_1}{1-q}$$

Se $|q| \geq 1$, *a série geométrica é divergente.*

Demonstração. Se $q = 1$, temos que $S_n = na$. Então, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$, se $a > 0$ ou $a < 0$, respectivamente. Se $q = -1$, a série torna-se

$$a - a + a - \cdots + (-1)^{n-1}a + \cdots$$

donde segue que $S_n = 0$ se n é par, e $S_n = a$ se n é ímpar. Consequentemente, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ não existe. Portando, a série geométrica diverge quando $|q| = 1$.

Se $q \neq 1$, temos que a n-ésima soma parcial é dada por

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1} = \frac{a_1 q^n}{q-1} + \frac{a_1}{1-q}$$

Se $|q| < 1$, então $q^n \to 0$ quando $n \to \infty$. Assim,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$$

Portanto, a série geométrica é convergente quando $|q| < 1$ e sua soma é $\dfrac{a_1}{1-q}$.

Se Se $|q| > 1$, então $|q^n| \to \infty$ quando $n \to \infty$. Portando, a série geométrica diverge quando $|q| > 1$. ∎

Exemplo 3.6.11. *Retomemos a situação problema do quadrado unitário dividido em infinitos triângulos retângulos com área igual à metade da área do triângulo anterior e mostremos, utilizando a fórmula para série geométrica, que a soma das áreas destes infinitos triângulos equivale a área do quadrado original, a saber, 1.*

Solução.

As áreas dos triângulos formam a sequência

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right)$$

que é uma progressão progressão geométrica onde $a_1 = \dfrac{1}{2}$ e $q = \dfrac{1}{2}$.

Daí, a soma das áreas dos triângulos a dada pela soma da série geométrica

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

Portanto, a soma das áreas dos triângulos é igual a área do quadrado original.

Uma primeira aplicação do resultado da série geométrica convergente, ou seja, do limite da soma dos termos de uma progressão geométrica infinita de razão $|q| < 1$ remete-nos ao sexto e sétimo anos do ensino fundamental no tocante a fração geratriz.

Exemplo 3.6.12. *Determinar as frações geratrizes das seguintes dízimas periódicas:*

a) $5,121212\ldots$

b) $2,7353535\ldots$

Solução.

a) A dízima periódica $5,121212\ldots$ pode ser escrita como

$$5,121212\ldots = 5 + \frac{12}{10^2} + \frac{12}{10^4} + \frac{12}{10^6} + \cdots$$

A partir do segunda parcela temos uma série geométrica onde $a_1 = \dfrac{12}{10^2}$ e $q = \dfrac{1}{10^2}$. Daí, segue que

$$\begin{aligned} 5,121212\ldots &= 5 + \frac{12}{10^2} + \frac{12}{10^4} + \frac{12}{10^6} + \cdots = 5 + \frac{\frac{12}{10^2}}{1-\frac{1}{10^2}} = 5 + \frac{12}{99} \\ &= \frac{169}{33} \end{aligned}$$

Portanto, a fração geratriz da dízima periódica $5,121212\ldots$ é $\dfrac{169}{33}$.

b) A dízima periódica $2,7353535\ldots$ pode ser escrita como

$$2,7353535\ldots = 2,7 + \frac{35}{10^3} + \frac{35}{10^5} + \frac{35}{10^7} + \cdots$$

A partir do segunda parcela temos uma série geométrica onde $a_1 = \dfrac{35}{10^3}$ e $q = \dfrac{1}{10^2}$. Daí, segue que

$$\begin{aligned} 2,7353535\ldots &= 2,7 + \frac{35}{10^3} + \frac{35}{10^5} + \frac{35}{10^7} + \cdots = \frac{27}{10} + \frac{\frac{35}{10^3}}{1-\frac{1}{10^2}} = \frac{27}{10} + \frac{35}{990} \\ &= \frac{27080}{9900} = \frac{2708}{990} \end{aligned}$$

Portanto, a fração geratriz da dízima periódica $2,7353535\ldots$ é $\dfrac{2708}{990}$.

Exemplo 3.6.13. *Encontre a soma*

$$5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + \cdots$$

Solução.

Observe que

$$\frac{-\frac{10}{3}}{5} = \frac{\frac{20}{9}}{-\frac{10}{3}} = \frac{-\frac{40}{27}}{\frac{20}{9}} = -\frac{2}{3}$$

Logo, esta é a soma dos termos da progressão geométrica infinita cujo primeiro termo é $a_1 = 5$ e a razão é $q = -\dfrac{2}{3}$, e como $|q| < 1$ segue que

$$5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + \cdots = \frac{5}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{5}{\frac{5}{3}} = 3$$

Fractal é uma figura geométrica não-euclidiana, ou seja, que não é prevista pela geometria Euclidiana, dotada das seguintes características:

- Autossimilaridade (também denominada egossimilaridade): existe um padrão que se repete tanto na parte quanto no todo.

- Recursividade ou iteratividade: é a própria repetição do padrão em si.

- Holismo (ou sinergia): o todo é superior à soma das partes. A partir de figuras de uma dimensão (duas retas) se constrói uma figura (quase) bidimensional. É evidente que quanto maior o número de repetições do padrão (iteração) mais próximo de 2 chegará o valor do número de dimensões topológicas dessa figura.

- Amplificação: uma figura fractal poderá sempre ser "ampliada" ou "amplificada" se aumentarmos o número de repetições (iterações) - daí a necessidade da utilização da computação para a construção de modelos mais aproximados dos fractais.

Assim, por extensão de conceito, ao afirmarmos que um fractal é uma figura geométrica não-euclidiana, estamos afirmando que seria uma figura cuja dimensão topológica não poderá assumir os valores, zero, um, dois ou três.

O próximo exemplo aborda uma dessas figuras.

Exemplo 3.6.14. *O* ***Tapete de Sierpinski*** *é construído pela remoção do nono subquadrado central de um quadrado de lado 1 dividido em nove subquadrados. A etapa seguinte consiste em remover os subquadrados centrais dos oito quadrados menores que permaneceram e assim por diante (Figura 17). Determinar a soma das áreas dos quadrados removidos. O que pode-se dizer sobre a área do Tapete de Sierpinski?*

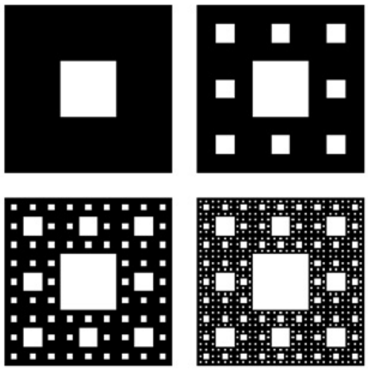


Figura 17 – Tapete de Sierpinski - as quatro primeiras etapas

Solução.

Denotando por a_n a área removida do Tapete de Sierpinski na n-ésima etapa de retirada dos quadrados centrais temos que

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{9} \\ a_2 &= 8 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} = \frac{8}{81} \\ a_3 &= 8 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{8}{81} = \frac{64}{729} \\ \vdots &= \vdots \end{aligned}$$

Logo, as áreas dos quadrados retirados do Tapete de Sierpinski em cada etapa formam a sequência

$$\left(\frac{1}{9}, \frac{8}{81}, \frac{64}{729}, \dots\right)$$

Como,

$$\frac{\frac{8}{81}}{\frac{1}{9}} = \frac{\frac{64}{729}}{\frac{8}{81}} = \dots = \frac{8}{9}$$

segue que a sequência é uma progressão geométrica onde $a_1 = \dfrac{1}{9}$ e $q = \dfrac{8}{9}$.

Daí, a soma das áreas dos quadrados removidos é a dada pela soma da série geométrica

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9}\left(\frac{8}{9}\right)^{n-1} = \frac{\frac{1}{9}}{1 - \frac{8}{9}} = 1$$

Portanto, a soma das áreas dos quadrados removidos é igual a 1 e a área do Tapete de Sierpinski é 0.

4 Proposta de Aplicação da Sequência Didática

Neste capítulo propomos a aplicação de uma sequência didática desenvolvida para o conteúdo de sequências, englobando progressão aritmética e progressão geométrica, comumente ministrados no primeiro ano do ensino médio regular. Desta forma, procuramos desenvolver um trabalho, entre conteúdo e as atividades avaliativas, de forma a contemplar 40 horas/aula.

Uma vez que as aulas são comumente dispostas em pares, optamos por fazer a separação dos conteúdos e atividades avaliativas por encontros, onde cada encontro corresponde a duas horas/aula consecutivas.

Desta forma, descreveremos então 18 encontros sendo os dois restante reservados para aulas de dúvidas, correção de atividades avaliativas ou outras atividades. Passemos então a descrição da proposta didática para cada encontro.

4.1 Encontro 1

Neste encontro, o tema é Números Figurados e o tem por objetivo, a partir do processo de redescoberta, procurar identificar padrões e estabelecer conjecturas a cerca dos números poligonais, caso particular dos números figurados.

Inicialmente a turma deve ser divida em grupos de no máximo quatro alunos. O encontro deve ser iniciado apresentando o recorte histórico que consta no capítulo 2, na sequência o professor passa a representar no quadro os números triangulares apresentando apenas os três primeiros números em sua representação geométrica.

Neste momento, o professor questiona os alunos sobre quais seriam os dois próximos números triangulares e solicita que os alunos expressem em linguagem natural o procedimento realizado para determiná-los e suas impressões sobre a obtenção desses dois números triangulares. O professor dá então um tempo para que os alunos discutam o tema no grupo e retoma a discussão com as colocações dos alunos.

Caso os alunos tenham dificuldades em determinar os dois próximos números triangulares o professor deve mediar por meio de questionamentos. Uma possibilidade seria questioná-los sobre o número de pontos acrescidos do primeiro para o segundo número triangular, depois sobre o número de pontos acrescidos do segundo para o terceiro número triangular e, então, questioná-los a certa de quanto seria o acréscimo para o próximo número triangular.

Dando continuidade a atividade, com procedimento análogo, o professor apresenta os números quadrados e os números pentagonais, passando então aos alunos a atividade de preencher as tabelas que constam no capítulo 2. As mesmas têm em sua primeira linha números de 1 a 7 representando o primeiro número triangular, o segundo número triangular e assim por diante e, na segunda linha o número de pontos necessários para representar cada número triangular.

A utilização desta tabela tem por objetivo relacionar o tema trabalhado em sala com o conteúdo de função por meio de uma de suas formas de representação, a saber, a representação tabular. Analisando as tabelas o professor questiona então os alunos a cerca dos padrões apresentados por estes números poligonais e a quais conjecturas os mesmos podem chegar quanto a uma expressão que gere todos os números triangulares, quadrados e pentagonais. Ou seja, neste momento o professor verifica a capacidade de generalização dos alunos ao procurarem conjecturar uma fórmula para o n-ésimo termo de tais números.

Para finalizar este encontro, o professor pode chamar a atenção dos alunos para a forma como os números poligonais estão representados geometricamente, destacando, no caso dos números triangulares, que cada um desses números pode ser representado como uma soma. Ou seja, que denotando o n-ésimo número triangular por t_n, tem-se:

- $t_1 = 1$;
- $t_2 = 1 + 2$;
- $t_3 = 1 + 2 + 3$;
- $t_4 = 1 + 2 + 3 + 4$;
- $t_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$;
- $t_6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$;
- $\vdots$

O professor então faz o seguinte questionamento: os números quadrados e os números pentagonais também podem ser representados como somas? Em caso afirmativo, descreva-as.

Este processo de escrita dos números poligonais tem sua importância no fato de possibilitar a verificação de que o acréscimo entre uma parcela e a parcela seguinte é constante em cada uma das somas, característica esta que nos conduzirá à definição de progressão aritmética e a obtenção de cada número poligonal à soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética.

Sendo este o final do encontro, para garantir que os alunos desenvolvam a atividade proposta, o professor deve solicitar aos mesmos a entrega por escrito desta atividade no próximo encontro. Esta atividade deve compor as atividades avaliativas.

4.2 Encontro 2

O tema deste encontro é Torre de Hanói e tem por objetivo, a partir do processo de redescoberta, procurar identificar padrões e estabelecer conjecturas a cerca das possíveis soluções para o quebra-cabeça.

Inicialmente a turma deve ser divida em duplas e, então, entregue um kit do quebra cabeça Torre de Hanói, constituído de um tabuleiro em folha de papel A4 e seis quadrados de EVA, de tamanhos diferentes e em duas cores (Apêndice A).

O kit Torre de Hanói é sugerido por constituir um material de fácil confecção e baixo custo, podendo o mesmo ser confeccionado pelos alunos, sob a supervisão do professor, em uma oficina.

Fornecidas as regras do quebra-cabeça os alunos passam ao livre manuseio deste, procurando desenvolver estratégias para a sua solução. Havendo questionamentos dos alunos quanto as estratégias por eles desenvolvidas, aconselha-se que o professor as responda não diretamente, mas com questionamentos que os direcione a uma possível solução.

Possivelmente os alunos apresentarão dificuldades para a resolução do quebra-cabeça ao trabalharem com 6 peças, portanto o professor pode sugerir que os alunos procurem resolver o quebra-cabeça com um número menor de peças. Caso alguma dupla resolva de maneira rápida o quebra-cabeça com 6 peças, para que estas não fiquem ociosas, o professor deve desafiá-las a solucioná-lo com um número maior de peças.

Passado o tempo reservado ao livre manuseio, os alunos devem ser convidados a responder o seguinte questionamento: qual o número mínimo de movimentos para a resolução do quebra-cabeça Torre de Hanói com $1, 2, \ldots$ peças? Com os dados obtidos após a manipulação do quebra-cabeça e discussão em cada grupo e entre os grupos, os alunos devem preencher a tabela que relaciona o número de peças e o número mínimo de movimentos para resolução do quebra-cabeça.

Assim como no encontro anterior, a utilização desta tabela tem por objetivo relacionar o tema trabalhado em sala com o conteúdo de função por meio de uma de suas formas de representação, a saber, a representação tabular. Analisando conjuntamente com os alunos os dados na tabela supracitada, o professor deve questionar os alunos a cerca dos padrões observados na resolução do quebra-cabeça e a quais conjecturas os mesmos podem chegar quanto a uma expressão que fornece o número mínimo de movimentos para tal resolução. Neste momento o professor verifica a capacidade de generalização dos alunos ao procurarem conjecturar uma fórmula que represente o número mínimo de movimentos para a resolução de uma Torre de Hanói com n peças.

Para finalizar este encontro, o professor deve fazer o seguinte questionamento: o número mínimo de movimentos necessários para resolver o quebra-cabeça Torre de Hanói, em cada caso, pode ser representado como uma soma? Em caso afirmativo, descreva-as.

Este processo de escrita dos números mínimos de movimentos tem sua importância no fato de possibilitar a verificação de que o crescimento entre uma parcela e a parcela seguinte ocorre à uma taxa constante em cada uma das somas, característica esta que nos conduzirá à definição de progressão geométrica e a obtenção do número mínimo de movimentos para a resolução de uma Torre de Hanói com n peças à soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica.

Para garantir que os alunos desenvolvam a atividade proposta, o professor deve solicitar aos mesmos a entrega por escrito desta atividade no próximo encontro. A mesma deve compor as atividades avaliativas.

4.3 Encontro 3

O tema deste encontro é Salto da Rã e tem os mesmos objetivos do encontro anterior.

De forma análoga, a turma deve ser divida em duplas e, então, entregue um kit do quebra-cabeça Salto da Rã, constituído de um tabuleiro em cartolina e oito rãs em dobradura de papel A4, em duas cores (Apêndice B).

O kit Salto da Rã é sugerido por constituir um material de fácil confecção e baixo custo, podendo o mesmo ser confeccionado pelos alunos, sob a supervisão do professor, em uma oficina.

O desenvolvimento deste encontro segue a mesma sequência descrita para o encontro anterior. A diferença é que para este quebra-cabeça o professor pode deixar as regras do mesmo menos rígidas, possibilitando que os alunos movimentem as rãs em ambas as direções, ou seja, que as rãs andem para a frente e para trás, mas respeitando as demais regras. Este procedimento poderá conduzir os alunos a seguinte observação: ao seguir as regras do quebra-cabeça, se conseguir solucioná-lo então o terá feito com o número mínimo de movimentos.

4.4 Encontro 4

Neste encontro desenvolve-se o tema sequências, sendo este expositivo, objetivando apresentar o conceito de sequência como uma restrição do domínio de funções reais a variáveis reais ao conjunto dos números naturais.

Para tanto, o professor apresenta a definição de sequência ou sucessão de números reais como uma função que associa a cada número natural n um número real a_n, bem como suas notações.

Sendo uma restrição das funções reais a variáveis reais, estudadas durante toda esta série, como por exemplo, função constante, polinomiais de primeiro e segundo grau, modular, exponencial e logarítmica, o professor deve apresentar a representação gráfica das sequências chamando a atenção para o fato do domínio desta função ser um conjunto discreto. Desta forma, em sua representação gráfica tem-se pontos isolados, diferentemente do que ocorria para as funções anteriormente estudadas, onde tem-se uma curva contínua.

Apresentando alguns exemplos de sequência, ao solicitar o esboço do gráfico das mesmas, o professor deve sugerir o uso de calculadora para o cálculo de alguns valores funcionais de cada sequência, ou seja, para o cálculo de alguns dos termos desta sequência, afim de facilitar o processo de plotar os pontos obtidos.

4.5 Encontro 5

Este encontro é a continuação do último, nele o professor retoma os temas: números poligonais e os quebra-cabeças Torre de Hanói e Salto da Rã, tomando como base os dados obtidos e registrados nas tabelas referentes a cada um desses temas para representar tanto os números poligonais quanto os números mínimos de movimentos para resolução de cada quebra-cabeça em notação de sequência, seja pelo termo geral ou apresentando os quatro primeiros termos desta sequência e seu n-ésimo termo.

Num segundo momento, o professor deve dividir a turma em duplas para a realização de um estudo dirigido. Nesta oportunidade é entregue as duplas a atividade avaliativa que consta no Apêndice C e para a resolução dos problemas propostos o professor deve sugerir o uso de calculadora.

O primeiro problema tem por objetivo a verificação da capacidade do aluno em cálculos aritméticos. O segundo problema objetiva, assim como o trabalho desenvolvido nos três primeiros encontros, verificar a capacidade de generalização dos alunos ao procurar obter o termos geral de cada uma das sequências a partir da obervação e conjectura dos padrões apresentados.

A terceira questão é uma situação problema na qual o objetivo é determinar a distância total percorrida pelo competidor. Para tanto, os alunos devem determinar a distância percorrida pelo competidor para pegar cada objeto e retornar ao local de partida e, em seguida, somar estas distâncias. Ou seja, os alunos devem calcular os vinte primeiros termos da sequência formada por essas distâncias e somá-los.

Um segundo objetivo desta situação problema é que os alunos possam identificar o padrão apresentado pelos termos iniciais da sequência formada pelas distâncias percorridas pelo competidor, conjecturar uma expressão para o n-ésimo termo desta sequência e, assim, tornar mais ágil a resolução de tal situação problema.

Esta situação problema ilustra o caso em que a sequência é uma progressão aritmética e sua resolução ilustra a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética, por este motivo ela é novamente abordada como exemplo quando for ministrado o conteúdo de soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética.

A quarta questão é uma situação problema na qual o objetivo é determinar o número de anos que a Ford levará para alcançar o tempo (em horas) necessário para a produção da carroceria de um veículo médio utilizado pelos japoneses. Para tanto, os alunos devem calcular os valores de S_n, com $n = 1, 2, 3, \ldots$, até obter um valor para S_n que seja menor ou igual que 3,5 h. Logo, deve-se calcular os termos da sequência formada pelos tempos (em horas) necessários para a Ford produzir a carroceria de um veículo médio até encontrar um termo que seja menor ou igual que 3,5 h.

Um segundo objetivo desta situação problema é verificar se os alunos procurarão resolvê-la utilizando inequação e, no processo de resolução, utilizar os conhecimentos de logaritmos e suas propriedades para a obtenção do número de anos.

Esta situação problema ilustra o caso em que a sequência é uma progressão geométrica e sua resolução ilustra a obtenção do número de termos para que S_n seja menor ou igual que 3,5. De forma análoga a situação problema anterior, ela é novamente abordada como exemplo quando for ministrado o conteúdo de progressões geométricas.

Esta atividade avaliativa deve ser realizada com consulta e entregue ao término deste encontro.

4.6 Encontro 6

Sendo destinado ao tema progressão aritmética, o professor deve iniciar o encontro trabalhando a situação problema da fábrica de automóveis, objetivando com isso introduzir o conceito de progressão aritmética, passando então a definir tal sequência e classificá-la quanto ao valor de sua razão, quando positiva, negativa ou zero, apresentando em seguida exemplos e contra-exemplos de progressão aritmética.

A partir da definição de progressão aritmética, o professor deve iniciar uma discussão que conduza e justifique o teorema para obtenção do n-ésimo termo de uma progressão aritmética sendo conhecido o primeiro termo e sua razão. Apresenta-se também uma generalização para a fórmula do n-ésimo termo de uma progressão aritmética uma vez conhecido o m-ésimo termo desta progressão aritmética, com $m < n$, e sua razão.

Mostrando que o termo geral de uma progressão aritmética pode ser reescrito como uma função que é uma restrição de uma função real a valores reais, a saber, a função polinomial do primeiro grau ou função afim, o professor apresenta a representação gráfica de uma progressão aritmética, sendo esta composta por pontos $(1, a_1)$, $\cdots$, (n, a_n), colineares no plano. Para ilustrar, o professor pode tomar algumas progressões aritmética e representá-las graficamente.

O encontro é então finalizado apresentando três exemplos, o primeiro exemplo exibe os primeiros termos de duas progressões aritméticas e pede-se para determinar a razão e uma expressão para o n-ésimo termo da cada uma delas. Portanto, este exemplo tem por objetivo a aplicação direta do conceito de progressão aritmética para a obtenção da razão e o uso direto da fórmula do termo geral.

O segundo exemplo retoma a situação problema utilizada para introdução do conceito e definição de progressão aritmética, e sua resolução consiste em determinar o décimo segundo termo da progressão aritmética, sendo estes termos as produções mensais de veículos de uma fábrica de automóveis, onde o primeiro termo referente a janeiro é 400. Portanto, a resolução desta situação problema consiste em determinar a_{12} dado $a_1 = 400$ e $r = 30$, por meio da fórmula do n-ésimo termo de uma progressão aritmética.

O terceiro exemplo objetiva ilustrar a fórmula generalizada para o n-ésimo termo de uma progressão aritmética. Para isto são dados o terceiro e o vigésimo quinto termos e é pedido para determinar o seu trigésimo termo.

4.7 Encontro 7

O sétimo encontro deve ser iniciado com o professor revisando os conceitos estudados no encontro anterior, ou seja, definição de progressão aritmética, classificação em relação à razão e a fórmula do termo geral.

Definindo interpolação de meios aritméticos, tema deste encontro, o professor deve ilustrar este conceito por meio do exemplo de aplicação direta que consiste em determinar a razão da uma progressão aritmética obtida ao se inserir dez meios aritméticos entre os números 3 e 25. Portanto, a resolução deste exemplo requer tão somente a percepção de que se trata de uma progressão aritmética cujo primeiro termo é 3 e décimo segundo termo é 25, sendo suficiente a utilização da fórmula do termo geral.

Antes da aplicação direta de fórmula, o professor pode questionar os alunos quanto a definição de progressão aritmética, objetivando destacar o fato de que a diferença entre cada termo e seu antecessor é igual a um valor constante e com isso, dado o primeiro termo da progressão aritmética e sua razão, pode-se obter o termo seguinte adicionando a razão ao termo anterior. Desta forma, os alunos podem chegar a solução do problema por meio da experimentação, e o professor, apresentando situações em que a experimentação não é um método adequado, como quando a razão não é inteira, ilustrar a importância do reconhecimento de padrões e utilização de sua generalização.

Os dois exemplos seguintes dispostos na sequência didática tem por objetivo tratarem da aplicação de artifícios matemáticos, usualmente utilizados em algumas situações problemas onde se tem a informação que n números estão em progressão aritmética mais alguma informação adicional.

O primeiro exemplo é uma situação problema que trás como dados o fato do triângulo ser retângulo, o valor do perímetro do triângulo e o fato da medida de seus lados estar em progressão aritmética. Antes de tratar da resolução da situação problema, o professor deve apresentar o artifício matemático utilizado quando o número de termos da progressão aritmética é ímpar. De posse do artifício, denotando os lados do triângulo por $x - r$, x e $x + r$, os alunos necessitarão do conhecimento prévio de mais dois resultados, a saber, do perímetro de um polígono e, por se tratar de um triângulo retângulo, do teorema de Pitágoras.

Destacamos que no desenvolvimento dos termos $(x+r)^2$ e $(x-r)^2$, onde faz-se necessário o conhecimento de produtos notáveis para maior celeridade nos cálculos, é comum que os alunos apresentem certa resistência, o que aponta para possível deficiência na aprendizagem do conteúdo de produtos notáveis. O professor pode então realizar uma intervenção utilizando-se da propriedade distributiva, ou "chuveirinho", para que os alunos assimilassem o desenvolvimento dos cálculos.

De forma análoga, o segundo exemplo é uma situação problema que além de trazer o fato de quatro números estarem em progressão aritmética, fornece o valor da soma desses quatro números e o produto entre seus extremos. Assim como foi o procedimento para o primeiro exemplo, o professor deve apresentar o artifício matemático utilizado quando o número de termos da progressão aritmética é par. De posse do artifício, denotando os lados do triângulo por $x-3r$, $x-r$, $x+r$ e $x+3r$, é suficiente escrever as equações referentes a soma e produto dados.

Para encerrar o encontro, o professor deve discutir com os alunos uma possível resolução para a situação problema acerca do cometa Halley. Esta objetiva ilustrar problemas envolvendo progressões aritméticas decrescentes e que cuja resolução envolve inequação. Tais situações problema têm sua importância pelo fato de que ao resolver a inequação, faz-se necessário uma interpretação da desigualdade final obtida para determinar a resposta requerida.

4.8 Encontro 8

O oitavo encontro é reservado ao tema soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética e deve ser iniciado apresentando um fragmento de texto do livro Introdução à História da Matemática, de Howard Eves, que apresenta o desafio proposto pelo professor a classe que Gauss fazia parte, abrindo um momento de discussão com os alunos objetivando o desenvolvimento de estratégias e possíveis soluções para o mesmo.

A discussão a cerca deste desafio e sua possível resolução deve se constituir como situação motivadora para a conjectura do resultado objeto de estudo deste encontro, uma vez que o método utilizado por Gauss vem a ser inspiração da argumentação para a demonstração da fórmula para soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética sendo conhecidos o primeiro termo, o n-ésimo e sua razão.

Destacamos que o professor deve apresentar a primeira demonstração deste resultado que consta no capítulo 2, pois a mesma apresenta-se como exemplo de demons-tração acessível para o nível de ensino a que se propõe este trabalho e porque acreditamos ser importante para os alunos, já no ensino médio, terem contato com demonstrações de resultados matemáticos. O contato com estas demonstrações podem contribuir para o desenvolvimento lógico-dedutivo e argumentativo dos alunos.

É interessante que o professor retorne ao desafio proposto a classe de Gauss abordando-o com a fórmula para o cálculo dos n primeiros termos de uma progressão aritmética, afim de mostrar para os alunos que o procedimento utilizado pelo jovem consiste no uso desta fórmula para calcular a soma dos 100 primeiros termos da progressão aritmética cujo primeiro termo é 1 e o centésimo termo é 100. Além do exemplo de Gauss, o professor deve apresenta mais um exemplo de aplicação direta desta fórmula.

Dando continuidade ao encontro, o professor deve retomar a discussão a cerca dos números figurados e, verificando as sequências constituídas por estes números, destacar que as mesmas não constituem exemplos de progressões aritméticas. Entretanto, os termos de cada sequência de números poligonais podem ser escritos como somas que obedecem a certo padrão.

Desta forma, o professor relaciona o tema trabalhado no primeiro encontro, quando solicitado aos alunos em atividade a ser entregue no segundo encontro que procurassem reescrever os números triangulares, quadrados e pentagonais como somas.

Mais precisamente, os números triangulares não formam uma progressão aritmética (de primeira ordem), mas o n-ésimo número triangular pode ser reescrito como a soma dos n primeiros termos da progressão aritmética $(1, 2, 3, \ldots, n, \ldots)$, ocorrendo resultados análogos com os números quadrados e pentagonais.

Estes fatos devem ser ilustrados pelo professor com a resolução dos exemplos relativos a esses números figurados presentes no capítulo 2, encerrando-se assim este encontro.

4.9 Encnotro 9

Dando continuidade ao tema do encontro anterior, o professor deve retomar a situação problema da distância percorrida pelo competidor em uma gincana, abordada na atividade avaliativa 1 (Apêndice C). Desta vez, uma possível resolução para esta situação problema deve ser desenvolvida fazendo uso dos conceitos de progressão aritmética e soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética.

Ou seja, ao ir até a primeira caixinha e voltar o competidor terá percorrido 10 m, ao ir até a segunda caixinha e voltar o competidor terá percorrido 18 m e assim sucessivamente, formando então com as distâncias percorridas uma progressão aritmética cujo primeiro termo é 10 e a razão 8. Portanto, a solução é dada pela soma dos 20 primeiros termos desta progressão aritmética.

O tema central deste encontro é tratar de duas características apresentadas pelas progressões aritméticas, com isso, o objetivo do mesmo é, por meio destas propriedades, caracterizar este tipo de sequência.

A primeira caracterização diz que uma sequência é uma progressão aritmética se, e somente se, o termo geral é dado por um polinômio em n de grau menor que ou igual a 1. Sendo sua demonstração acessível ao nível do aluno de primeiro ano do ensino médio, sugerimos ao professor fazê-la.

Para ilustar esta primeira caracterização, o professor deve resolver o exemplo disposto no capítulo 2, o qual apresenta o termo geral de uma sequência, dado por um polinômio de grau menor que ou igual a 1, e pede para determinar o primeiro termo, a razão e escrever os cinco primeiros termos da progressão aritmética associada.

A segunda caracterização diz que uma sequência é uma progressão aritmética se, e somente se, a soma dos n primeiros termos dessa sequência é um polinômio em n de grau menor que ou igual a 2, sem o termo independente. De forma análoga a primeira caracterização, o professor deve ilustrar a segunda com o exemplo disposto no capítulo 2.

Finalizando o encontro, o professor pode deixar como atividade o exemplo que pede para determinar a progressão aritmética cujo termo geral é dado por $a_n = n^2 + 2n$, que é o termo geral para a solução do quebra-cabeça Salto da Râ. Desta forma, o professor relaciona o tema do terceiro encontro, encontrar o número mínimo de movimentos para solucionar o quebra-cabeça Salto d Rã, que no quinto encontro foi representado em notação de sequência, com o conteúdo de progressão aritmética por meio da caracterização do seu termo geral.

O professor pode desafiar os alunos a verificarem inicialmente que os termos gerais dos números poligonais são expressos por polinômios de grau menor que ou igual a dois, sem o termo independente, e posteriormente que o n-ésimo número j-gonal é a soma dos termos de uma progressão aritmética.

4.10 Encontro 10

Este encontro destina-se a realização da atividade avaliativa que consta no Apêndice D, referente aos conteúdos de sequência e de progressão aritmética. Para tanto, o professor deve dividir a turma em duplas para a realização de um estudo dirigido, e para a resolução dos problemas propostos o professor deve sugerir o uso de calculadora.

A primeira questão retoma o estudo de sequências e tem por objetivo a determinação de termos de uma sequência a partir da fórmula do termo geral e a apresentação de um esboço da representação gráfica de tal sequência.

A segunda questão trata novamente de números figurados, sendo desta vez os números hexagonais. Na mesma objetiva-se verificar a assimilação por parte dos alunos do conteúdo de progressão aritmética, englobando o resultado sobre a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética. Espera-se que os alunos identifiquem os padrões apresentados pelos números hexagonais, que cada número hexagonal é a soma de termos que estão em progressão aritmética e, consequentemente, que o n-ésimo número hexagonal é dado pela soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética. Logo, determinando o termo geral da progressão aritmética, a partir da fórmula de soma determina-se uma expressão para o n-ésimo número hexagonal. De posse dessa fórmula, calcula-se então o quinquagésimo número hexagonal.

A terceira questão é uma situação problema que objetiva determinar a quantia em reais obtida pela arrumação de moedas de 10 centavos proposta. Tal arrumação sugere a sequência

$$(1, 6, 12, 18, \ldots, 84)$$

que não consiste em uma progressão aritmética, pois $6-1 \neq 12-6$. Entretanto, retirando o primeiro termo, a sequência resultante consiste na progressão aritmética $(6, 12, 18, \ldots, 84)$ formada pelas camadas, cuja razão é 6. Portanto, nesta situação problema objetiva-se que o aluno determine o número de termos da progressão aritmética por meio da fórmula do termo geral e, com isso, determine a soma dos termos da progressão aritmética $(6, 12, 18, \ldots, 84)$. Desta forma, a quantia em reais é dada pelo resultado desta soma mais 1 multiplicada por 0,10.

A quarta questão é uma situação problema na qual o objetivo é determinar a última vez que a super "lua perigeu" poderá ser vista neste milênio. Logo, o aluno deve observar o padrão do fenômeno "lua perigeu" de forma que os anos que o mesmo ocorre formam uma progressão aritmética cujo primeiro termo é 2011 e cuja razão é 18. Assim, além do uso da fórmula do termo geral, como na questão 4 da atividade avaliatiava aplicada no quinto encontro, objetiva-se também verificar se os alunos procurarão resolvê-la utilizando inequação. Portanto, deve-se observar se os alunos interpretarão a desigualdade corretamente, ou seja, tomando o menor número inteiro que a satisfaça.

Esta atividade avaliativa deve ser realizada com consulta e entregue ao término deste encontro.

4.11 Encontro 11

Este encontro é reservado a uma atividade avaliativa individual.

4.12 Encontro 12

Tendo progressões geométricas como tema e por objetivo a definição e ilustração por meio de exemplos, o professor deve iniciar o encontro retomando a situação problema que consta na atividade avaliativa 1 (quarta questão), Apêndice C . Agora, a abordagem desta situação problema tem por objetivo destacar o fato de que os termos da sequência formada pelas quantidades de horas usadas pela Ford Motor Company para a produção da carroceria de um veículo médio decresce, ano a ano, com uma taxa constante. Com o mesmo objetivo, o professor apresenta a segunda situação problema que consta no capítulo 2, esta abordando o conteúdo de juros compostos ao calcular-se o montante de uma aplicação em uma caderneta de poupança à uma taxa de rendimentos fixa.

Com a discussão a cerca das duas situações problemas o professor define progressão geométrica e a classifica quanto à razão. Sendo a demonstração acessível ao nível dos alunos, é importante que o professor justifique, demonstre, pelo menos a primeira das classificações, a saber, quando a progressão geométrica é crescente.

Os exemplos presentes no capítulo 2 procuram destacar as razões de cada uma das progressões geométricas apresentadas, bem como suas taxas de crescimento por meio da igualdade $1 + i = q$. Para finalizar o encontro é importante que o professor apresente contra-exemplos de progressões geométricas.

4.13 Encontro 13

O décimo terceiro encontro tem como tema a fórmula para termo geral de uma progressão geométrica e suas aplicações. Assim como para as progressões aritméticas, a partir da definição de progressão geométrica, o professor deve iniciar uma discussão que justifica o teorema para obtenção do n-ésimo termo de uma progressão geométrica uma vez que é conhecido o primeiro termo e sua razão. Destaca-se no capítulo 2 que em diversas situações, pelo fato do primeiro termo de uma progressão geométrica representar o instante em que o tempo é zero, comumente denota-se por a_0 o seu primeiro termo. Apresenta-se também uma generalização para a fórmula do n-ésimo termo de uma progressão geométrica uma vez que é conhecido o m-ésimo termo desta progressão aritmética, com $m < n$, e sua razão.

Mostrando que o termo geral de uma progressão geométrica pode ser reescrita como uma função que é uma restrição de uma função real a valores reais, a saber, a função exponencial, o professor apresenta a representação gráfica de uma progressão geométrica, sendo esta composta pelos pontos $(0, a_0)$,$(1, a_1)$, ..., (n, a_n), pertencentes a curva $f(x) = f(0)a^x$ no plano, onde $f(0) = a_0$ e $a = q$. Para ilustrar, o professor pode tomar algumas progressões geométricas e representá-las graficamente.

Para finalizar o encontro o professor deve ilustrar o conteúdo ministrado apresentando três exemplos, onde o primeiro exemplo exibe os primeiros termos de duas progressões geométricas e pede-se para determinar a razão e uma expressão para o n-ésimo termo de cada uma delas. Logo, este exemplo tem por objetivo a aplicação direta do conceito de progressão geométrica para a obtenção da razão e o uso direto da fórmula do termo geral.

O segundo exemplo é uma situação problema na qual os dados apresentados são o valor atual de um objeto e a taxa de valorização deste objeto, com isso sua resolução consiste em tomar-se o primeiro termo como sendo $a_0 = 13000$ e, a partir da taxa de crescimento, determinar-se a razão e uma expressão para o n-ésimo termo da progressão geométrica. E, de posse dessa expressão, calcular o valor da obra após 15 anos de sua compra.

Destacamos que o uso de calculadora para a resolução deste e dos demais exemplos deve ser indicado e praticado.

O terceiro exemplo é uma situação problema que retoma o tema matemática financeira, mas neste caso os dados remetem aos sexto e décimo terceiro termos de uma progressão geométrica. Logo, para uma possível solução do item a) objetiva-se que os alunos façam uso da fórmula generalizada para o termo geral de uma progressão geométrica em dois momentos, inicialmente para determinação da razão e, posteriormente, para o cálculo do montante após 25 anos de aplicação. De posse da razão, o item b) tem por objetivo a determinação da taxa de crescimento ao ano, ou seja, da taxa de juros a.a.. Utilizando a fórmula do termo geral de uma progressão geométrica calcula-se no item c) o capital inicialmente investido, neste caso o termo a_0.

4.14 Encontro 14

Neste encontro, o professor deve iniciá-lo revisando os conceitos estudados no encontro anterior, ou seja, definição de progressão geométrica, classificação em relação à razão e fórmula do termo geral.

Definindo interpolação de meios geométricos, tema deste encontro, o professor deve ilustrar este conceito por meio de exemplos. O primeiro exemplo pode ser uma aplicação direta da definição de interpolação como a que consta no capítulo 2, onde pede-se para inserir seis meios geométricos entre os números X e Y.

O segundo exemplo é uma situação problema envolvendo matemática financeira. Destacamos que esta situação problema requer atenção por parte dos alunos uma vez que o capital aplicado é o termo a_0 e o montante obtido por meio de uma aplicação a juros compostos é o termo a_{10}. Portando, a progressão geométrica deve ter 11 termos e, assim, deve-se interpolar 9 meios geométricos, logo para resolução deste exemplo é suficiente a utilização da fórmula do termo geral para determinação da razão e, posteriormente, a utilização da igualdade $1+i=q$ para o cálculo da taxa de juros. O item b) deste exemplo é uma aplicação direta da fórmula do n-ésimo termo de uma progressão geométrica.

4.15 Encontro 15

O décimo quinto encontro tem como tema a soma dos termos de uma progressão geométrica, tratando do caso em que a mesma é finita. Uma vez discutido o caso em que a razão da progressão geométrica é 1, o professor deve apresenta o teorema que expressa a fórmula para a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica, sendo conhecido o primeiro termo e sua razão, e demonstrá-la.

Assim como no caso das progressões aritméticas, reafirmamos que o professor deve discutir a primeira demonstração deste resultado apresentada no capítulo 2, pois a mesma apresenta-se como exemplo de demonstração acessível para o nível de ensino a que se propõe este trabalho e porque acreditamos ser importante para os alunos, já no ensino médio, terem contato com as demonstrações de resultados matemáticos. O contato com estas demonstrações podem contribuir para o desenvolvimento lógico-dedutivo e argumentativo dos alunos.

Dando continuidade ao encontro, o professor deve passar a apresentação e resolução de três exemplos de aplicação a fórmula para a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica. O primeiro trás uma aplicação direta da fórmula para a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica.

O segundo exemplo trata-se de uma aplicação da fórmula da soma dos n primeiros termos da progressão aritmética cujo primeiro termo é 2^3 e a razão é 2, mas desta vez para a resolução de uma equação. É interessante que, após a identificação dos dados do problema e de quê o mesmo se trata, o professor disponibilize um tempo para que os discentes desenvolvam a resolução deste exemplo. É provável que alguns discentes não atentem para o fato de que o número de elementos da progressão geométrica a serem somados não é n, mas sim $n - 2$, conduzindo-os assim a obtenção de uma solução errada.

O terceiro exemplo é uma situação problema que envolve uma desigualdade, portanto é objetivo deste exemplo não apenas a aplicação da fórmula para a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica, mas também a verificação quanto ao domínio de conhecimentos prévios a cerca da resolução de inequações e propriedades de potência. Assim como na situação problema da "lua perigeu", constante na atividade avaliativa 2, deve-se observar se os alunos interpretarão a desigualdade corretamente, ou seja, tomando o menor número inteiro positivo que satisfaça a inequação.

4.16 Encontro 16

Este encontro é destinado também ao tema da soma dos termos de uma progressão geométrica, agora tratando do caso em que a progressão geométrica é infinita. Nesta perspectiva, antes do professor apresentar uma fórmula para tal cálculo, é importante que o mesmo levante alguns questionamentos objetivando uma discussão sobre o tema, tais como: faz sentido a adição com uma quantidade infinita de parcelas? É possível encontrarmos uma soma finita a partir de uma adição com infinitas parcelas?

A proposta didática apresentada por este trabalho trás no capítulo 2 três situações que objetivam conduzir e direcionar a discussão. A primeira situação trata da representação decimal dos números reais e como os mesmos podem ser escritos como a adição de um inteiro e de frações decimais, tendo por objetivo o tratamento do tema dízimas periódicas e frações geratrizes, inicialmente abordadas no sexto e sétimo anos do ensino fundamental. As dízimas periódicas ilustram um caso em que a adição de uma quantidade infinita de termos, ou parcelas, resulta em uma soma finita.

A segunda situação trás consigo um apelo geométrico, sendo este aspecto de relevante importância por seu caráter de fácil convencimento. Esta trata de um quadrado unitário que é dividido, a partir de uma diagonal, em dois triângulos retângulos, em seguida, divide-se um dos triângulos ao meio traçando a bissetriz do seu ângulo reto, novamente divide-se um dos triângulos obtidos de forma análoga à do triângulo anterior obtendo dois novos triângulos. Este processo é repetido indefinidamente obtendo assim uma infinidade de triângulos retângulos cuja área é igual à metade da área do triângulo anterior.

A partir dos dados e de sua representação geométrica a situação pode ser representada por meio da igualdade

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1$$

O primeiro membro desta igualdade trata-se de uma adição de infinitas parcelas resultando, no segundo membro, em uma soma finita. Geometricamente, é intuitivo pensar que a adição das áreas dos infinitos triângulos é igual a área do quadrado unitário.

A terceira sequência apresenta duas sequências, mais particularmente, duas progressões geométricas, cuja soma de seus termos não é definida, sendo que na primeira sequência a soma torna-se arbitrariamente grande a medida que o número de termos aumenta e na segunda tal soma alterna entre os valores 0 e 1.

Após a apresentação e discussão destas situações, o professor deve fazer, assim como consta no capítulo 2, uma breve abordagem sobre séries geométricas. Esta tem por objetivo tão somente a introdução de conceitos e notações, a exemplo do conceito e notação de limite, convergência e divergência, e sua utilização na argumentação utilizada para a demonstração do resultado que apresenta as condições para que a adição dos infinitos termos de uma progressão geométrica seja uma soma finita, ou equivalentemente, que a série geométrica seja convergente.

Uma vez apresentado tal resultado, acreditamos ser de fundamental importância uma discussão sobre sua demonstração.

O final do encontro é destinado a resolução de exemplos que ilustram a utilização do resultado para a soma dos termos de uma progressão geométrica infinita. Como primeiro exemplo, é proposto que o professor retome a situação problema do quadrado unitário abordando-o com o resultado supracitado. O segundo exemplo aborda a discussão sobre dízimas periódicas e como obter suas frações geratrizes por meio de uma série geométrica, sendo sugerido que o professor resolva um dos itens deixando o outro como desafio para os alunos.

De forma análoga, o terceiro exemplo deve constituir um desafio para os alunos. Objetiva-se com este exemplo verificar a capacidade dos alunos em identificar que o problema se trata da soma dos termos de uma progressão geométrica infinita, ou seja, uma série geométrica, determinar sua razão e que esta razão tem valor absoluto menor que 1. O resultado consta então de uma aplicação direta do teorema.

O último exemplo apresenta um tema cujo tratamento é relativamente novo na matemática, a saber, fractais, e o ilustra com o clássico Tapete de Sierpinski. Ao invés de uma resolução direta deste exemplo, o professor deve promover uma discussão a cerca de sua resolução e apresentar um pouco mais sobre os fractais, suas características e outros exemplos clássicos. Sendo necessário, o professor pode abordar este último exemplo bem como o tema fractais em um outro encontro uma vez que existem dois encontros reservados para aulas de dúvidas, correção de atividades avaliativas ou outras atividades.

4.17 Encontro 17

Este encontro destina-se a realização da atividade avaliativa que consta no Apêndice E, referente ao conteúdo de progressão geométrica. Para tanto, o professor deve dividir a turma em duplas para a realização de um estudo dirigido, e para a resolução dos problemas propostos o professor deve sugerir o uso de calculadora.

A primeira questão tem por objetivo a determinação do comprimento do décimo primeiro círculo de uma sequência dado em que cada um dos círculos, a partir do segundo, possui a metade da área do anterior e que o primeiro tem raio igual a 16 cm. Portanto, faz-se necessário que os alunos identifiquem que a sequência formada pelas áreas corresponde a uma progressão geométrica e, além da fórmula para o n-ésimo termo de uma progressão geométrica, os alunos devem apresentar domínio dos conhecimentos prévios referentes a círculo para o cálculo de ária e comprimento dos mesmo.

Na segunda questão, tem-se uma situação problema onde objetiva-se determinar a altura da pilha de papel formada após 33 operações como citado no texto da questão, para tanto faz-se necessário observar que as referidas operações geram a seguinte sequência

$$1, 1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$$

onde cada um dos termos representa a quantidade de folhas empilhadas na operação correspondente.

Os alunos devem observar que tal sequência não consiste em uma progressão geométrica, pois $\frac{1}{1} \neq \frac{2}{1}$. Entretanto, retirando o primeiro termo, a sequência resultante é uma progressão geométrica cuja razão é 2. Portanto, para a resolução desta situação problema, os alunos devem determinar a soma dos 32 primeiros termos da progressão geométrica $(1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots)$ e observar que a altura da pilha é dada pelo resultado desta soma adicionado de 1 e multiplicado por $0,1$ mm.

Além do uso do conteúdo referente a progressão geométrica, esta questão exige dos alunos conhecimentos prévios de conversão de unidades de medida bem como estimativa de comprimento, uma vez que os valores das medidas em cada alternativa não é explicitada, entretanto tratam-se de valores com diferenças consideráveis.

A situação problema da quarta questão tem por objetivos determinar o comprimento da espiral e a abscissa do ponto P, ponto assintótico da espiral, ou seja, o ponto para o qual o centro da espiral está convergindo. O primeiro destes objetivos é alcançado determinando os comprimentos das semicircunferências de raio $r_1 = 1$, $r_2 = \frac{1}{2}$, $r_3 = \frac{1}{4}$ e assim sucessivamente, obtendo então os comprimentos:

- $c_1 = \pi \cdot 1^2 = \pi$;
- $c_2 = \pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}$;
- $c_3 = \pi\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{\pi}{16}$;
- $\vdots$

formando, com estes comprimentos, uma progressão geométrica cujo primeiro termo é $c_1 = \pi$ e cuja razão é $q = \frac{1}{4}$. Desta forma, o comprimento da espiral é igual a soma da série geométrica cujo termo geral é $a_n = \pi\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$. Portanto, basta aplicar a fórmula para soma de uma série geométrica tal que $|q| < 1$.

Destaca-se que além do conteúdo de progressão geométrica, exige-se dos alunos, como conhecimento prévio, o cálculo do comprimento de um círculo.

O segundo objetivo requer um pouco mais de atenção dos alunos, exigindo que os mesmos tenham, por exemplo, a seguinte percepção: o primeiro semicírculo tem extremidade no ponto de abscissa 2, o segundo no ponto de abscissa 1, o terceiro em $\frac{3}{2}$, o quarto em $\frac{5}{4}$ e assim sucessivamente. Logo, ao fim do primeiro semicírculo a distância do final da espiral à origem é 2, ao fim do segundo recua-se uma unidade, assim temos -1, no terceiro avança-se $\frac{1}{2}$, no quarto recua-se $\frac{1}{4}$, obtendo então a seguência

$$\left(2, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \ldots\right)$$

Neste ponto os alunos são desafiados a perceber que a sequência obtida trata-se de uma progressão geométrica alternada ou oscilante, cujo primeiro termo é $a_1 = 2$ e sua razão é $q = -\frac{1}{2}$. A partir deste ponto, faz-se necessário apenas a aplicação direta da soma de uma série geométrica, já que $|q| < 1$, para a determinação da abscissa do ponto assintótico da espiral.

Outra possibilidade a ser considerada é a de que os alunos separem a sequência em duas subsequências, sendo a primeira a progressão geométrica

$$\left(2, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \ldots\right)$$

cujo primeiro termo é $a_1 = 2$ e cuja razão é $q_1 = \frac{1}{4}$, e a segunda a progressão geométrica

$$\left(-1, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{16}, \ldots\right)$$

cujo primeiro termo é $b_1 = -1$ e cuja razão é $q_2 = \frac{1}{4}$.

Portanto, a abscissa do ponto assintótico da espiral é dado por

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_n + \sum_{i=1}^{\infty} b_n$$

ambas séries geométricas convergentes.

Como este segundo objetivo apresenta um maior grau de dificuldade, é recomendado que o professor faça intervenções levantando questionamentos que direcionem os discentes a tal percepção.

A quarta questão trás uma situação problema na qual objetiva-se calcular a área total ocupada pelos círculos, o que pode ser obtido somando a área do círculo central com três vezes a soma das áreas dos infinitos círculos que se aproximam de um dos vértices do triângulo equilátero. Consequentemente, se fará necessário o cálculo da soma dos infinitos termos de uma progressão geométrica, ou seja, a soma de uma série geométrica.

Nesta situação problema, os conhecimentos prévios exigidos aos discentes são referentes à geometria euclidiana plana, como pontos notáveis de um triângulo, trigonometria no triângulo retângulo e o cálculo da área de um círculo. Possivelmente os alunos não apresentem domínio de tais conhecimentos prévios, portando indicamos que durante a resolução desta situação problema o professor discuta com os mesmos uma possível abordagem do problema objetivando preencher as lacunas existentes.

Portanto, assim como a terceira questão, para a resolução da quarta questão faz-se necessário que o professor realize intervenções em forma de questionamentos, tendo por objetivo direcionar os discentes a um possível caminho para a resolução do problema ao invés de fornecer respostas diretas.

4.18 Encontro 18

Este encontro é reservado a uma atividade avaliativa individual.

5 Comentários Finais

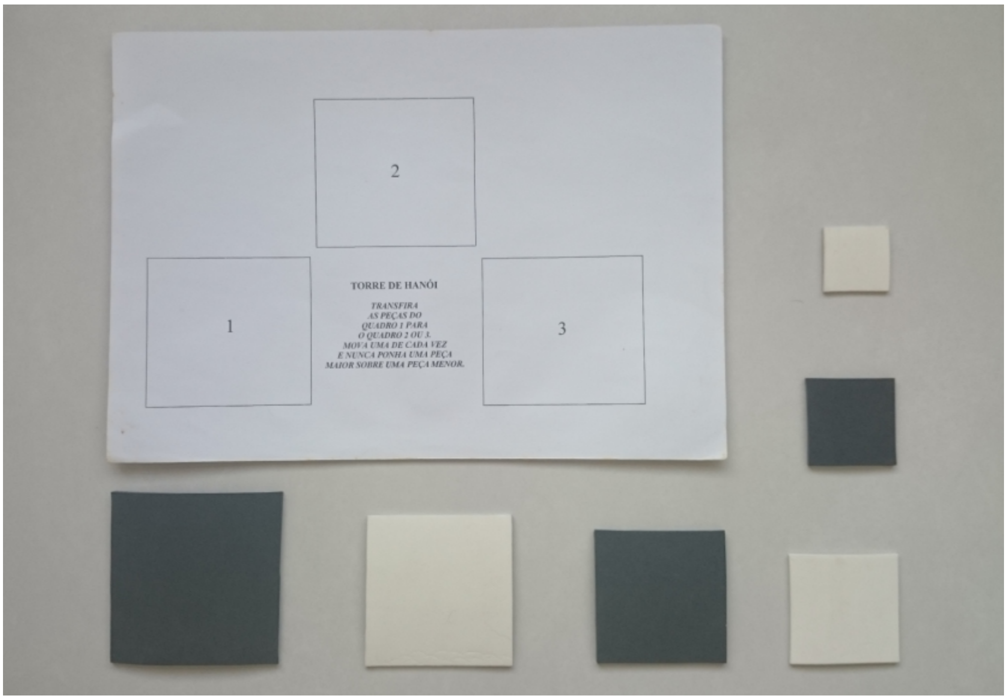
Este trabalho teve por objetivo a apresentação de uma proposta didática para o conteúdo de sequências, englobando o tratamento das progressões aritmética e geométrica. Nesta perspectiva apresentamos um recorte histórico sobre como o tema foi abordado por algumas civilizações, em períodos e regiões distintas. Apresentamos também um capítulo com o conteúdo programático a ser trabalhado pelos professores sendo este constituído por conceitos, definições, exemplos e contra-exemplos, principais resultados, atividades avaliativas, sempre privilegiando a resolução de situações problema, e um capítulo dedicado a discussão dos encontros nos quais o conteúdo será ministrado.

Entretanto, alguns temas, como algumas propriedades das progressões aritmética e geométrica, não são desenvolvidos no capítulo de conteúdo por se tratarem, segundo revisão de literatura, de acréscimo desnecessário de fórmulas e suas eventuais memorizações, ambos obstáculos ao processo de ensino-aprendizagem. Já a ausência do tema sequências definidas por recorrências trata-se de uma opção nossa, mas esta pode ser suprida ministrando-o nos encontros destinados a aulas de dúvidas, correção de atividades avaliativas ou outras atividades.

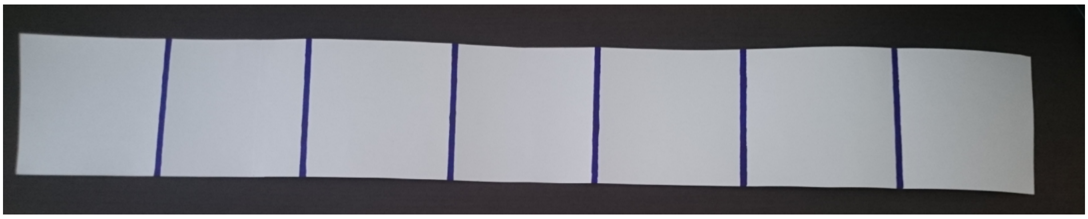
Portando, entendemos que esta proposta didática deste trabalho atende os objetivos aos quais se propões e compõe uma possibilidade de intervenção do tema sequência no âmbito do ensino médio.

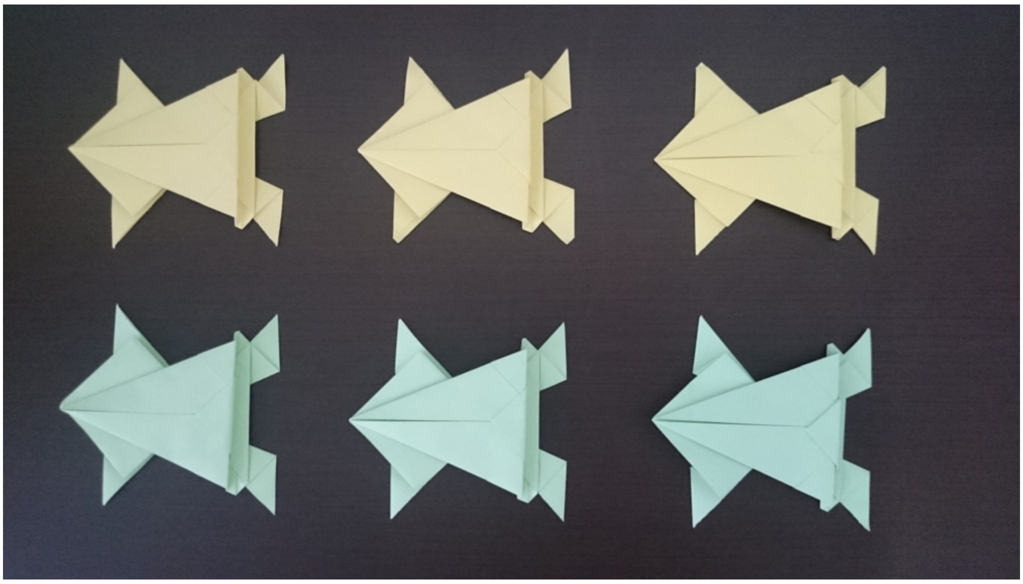
Por fim, mesmo não sendo objetivos do nosso trabalho, acreditamos que a aplicação e análise da proposta didática são procedimentos indispensáveis para maiores reflexões a cerca da mesma, possibilitando assim a validação ou não de hipóteses.

APÊNDICE A – Kit Torre de Hanói

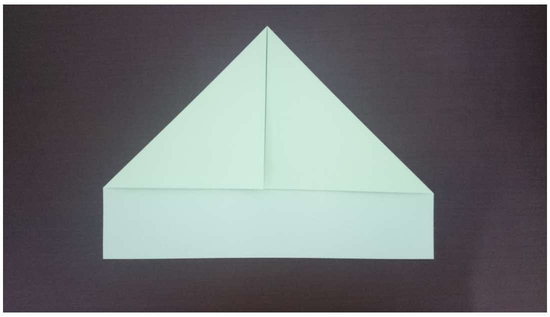


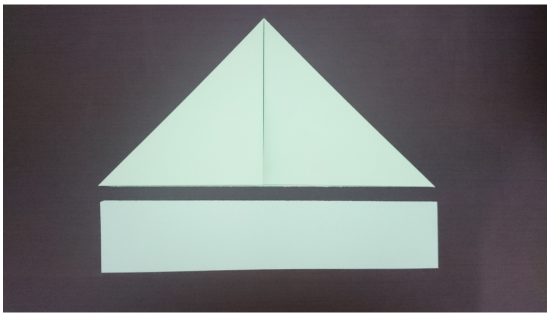
APÊNDICE B – Kit Salto da Rã

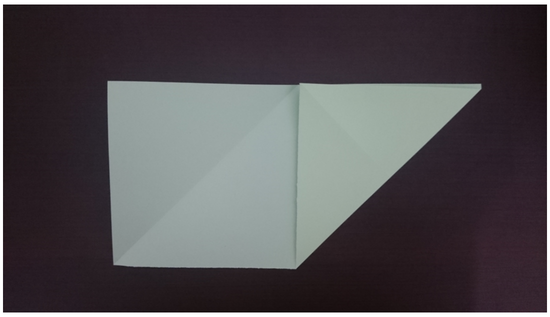
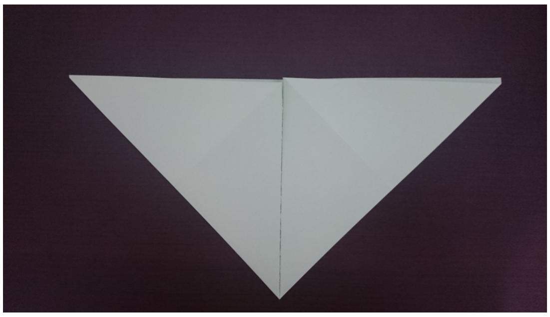
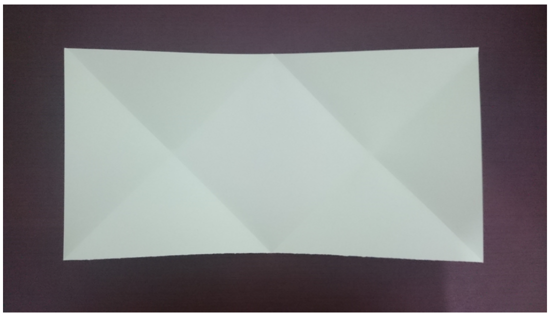
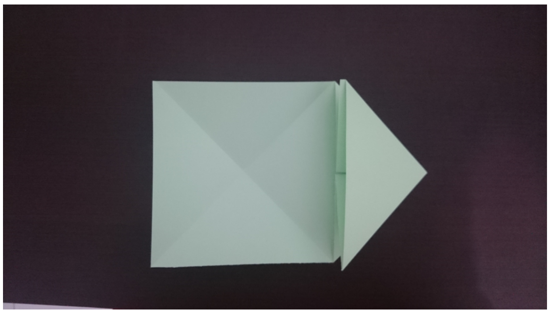
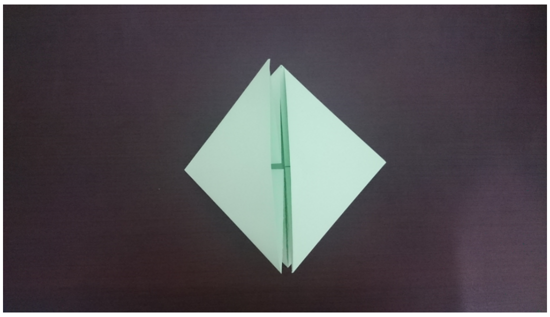
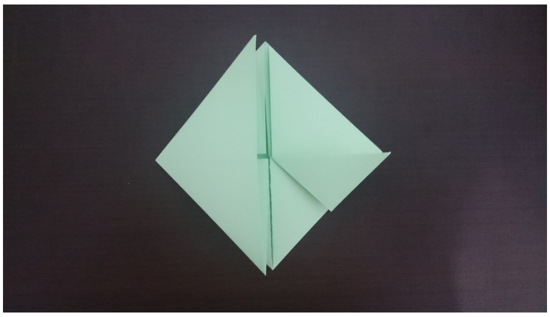
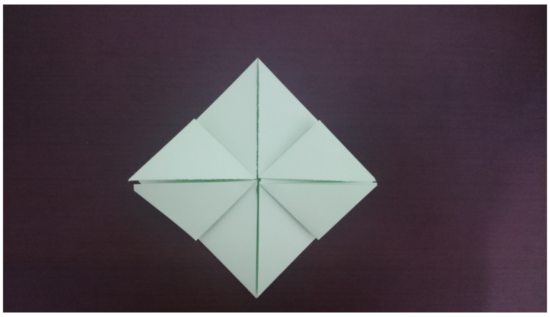
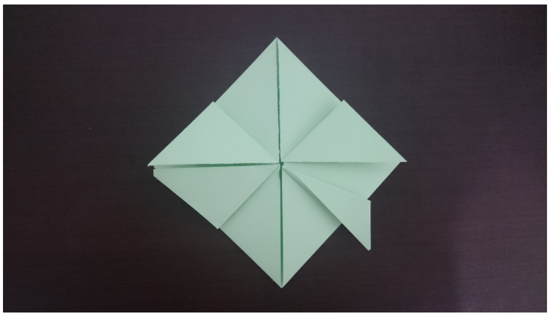
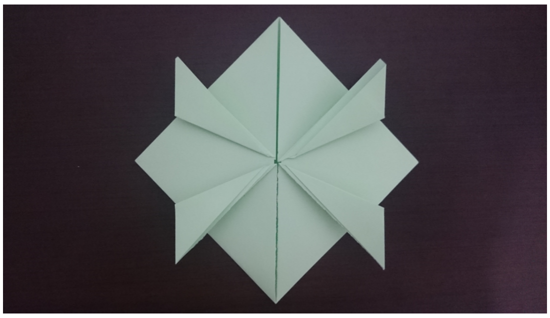
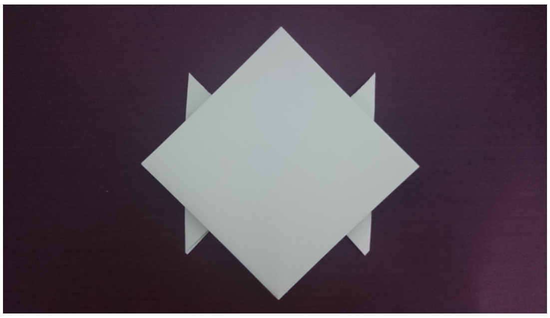


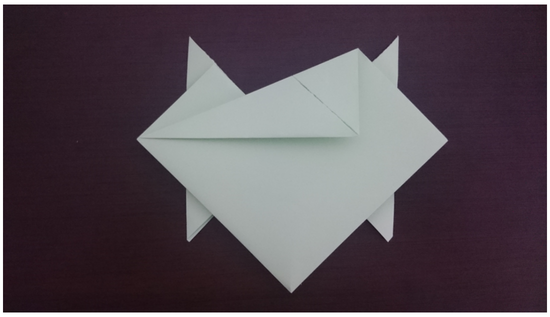


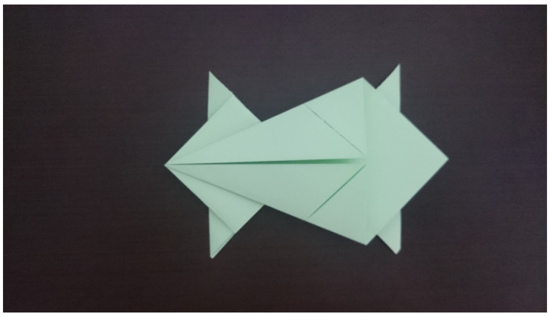
Passo à passo da dobradura da Rã.

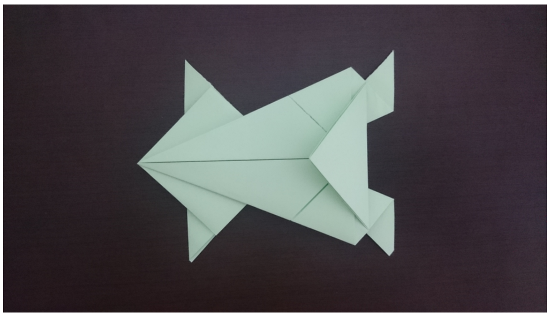


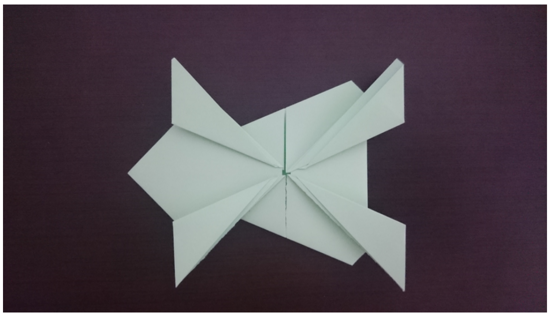


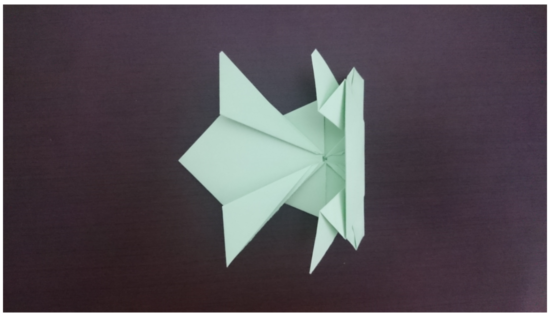











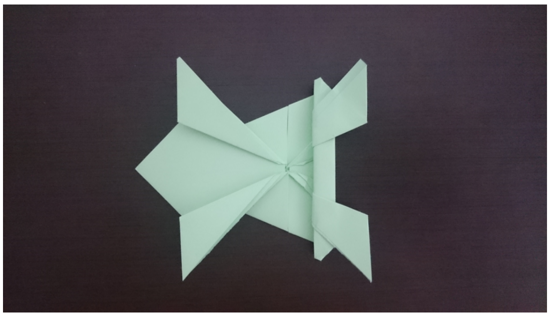


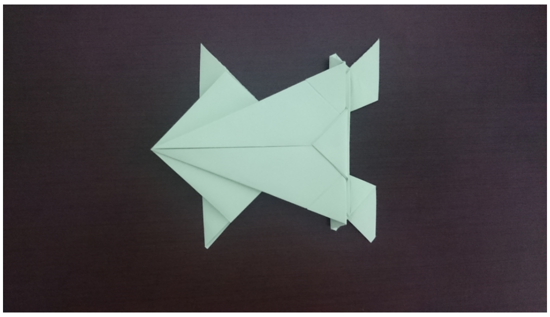












APÊNDICE C – Atividade Avaliativa 1

Exercício C.0.1. *Liste os cinco primeiros termos da sequência.*

a) $a_n = 2n - 1$

b) $a_n = 1 - (0,2)^n$

c) $a_n = \frac{n+1}{3n-1}$

d) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$

Exercício C.0.2. *Determine uma fórmula para o termo geral* a_n *da sequência, assumindo que o padrão dos primeiros termos continue.*

a) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \ldots\right\}$

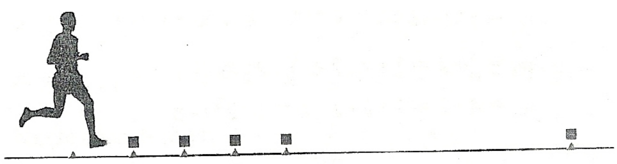
b) $\{2, 7, 12, 17, \ldots\}$

c) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right\}$

d) $\left\{1, -\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{8}{27}, \ldots\right\}$

e) $\left\{\frac{3}{5}, -\frac{4}{25}, \frac{5}{125}, -\frac{6}{625}, \ldots\right\}$

Exercício C.0.3. *(UFG-GO) Em uma gincana, 20 caixinhas estão distribuídas ao longo de uma linha retilínea distantes 4 metros uma da outra. Um competidor que se encontra a 5 metros da primeira caixinha, conforme a figura a seguir, deve correr até a primeira caixinha, pegar um objeto e retornar ao local de partida. Em seguida, ele vai até a segunda caixinha, retira um objeto e retorna ao ponto de partida, e assim sucessivamente, até atingir a vigésima caixinha.*



Quantos metros esse competidor deverá percorrer para realizar sua prova?

Exercício C.0.4. *(Melhorando a Produção Automobilística) De acordo com um artigo publicado em 15 de dezembro de 1992 no Wall Street Journal, a Ford Motor Company agora usa cerca de* $7,25$ *h de trabalho para produzir a carroceria de um veículo médio, menos do que as* 15 *horas estimadas em 1980. Os japoneses precisam apenas cerca de* $3,5$

h. O aperfeiçoamento da Ford desde 1980 representa um decréscimo médio de 6% *ao ano. Se essa taxa continuar, então em* n *anos a partir de agora a Ford usará cerca de*

$$S_n = 7,25 \cdot 0,94^n$$

horas de trabalho para produzir carrocerias de veículos médios. Presumindo que os japoneses continuem a gastar $3,5$ *h por veículo, quantos anos mais a Ford levará para alcançá-los? (Adote o seguinte procedimento: encontre os primeiros termos da sequência* S_n *que é menor ou igual a* $3,5$*. Fazer uso de calculadora.)*

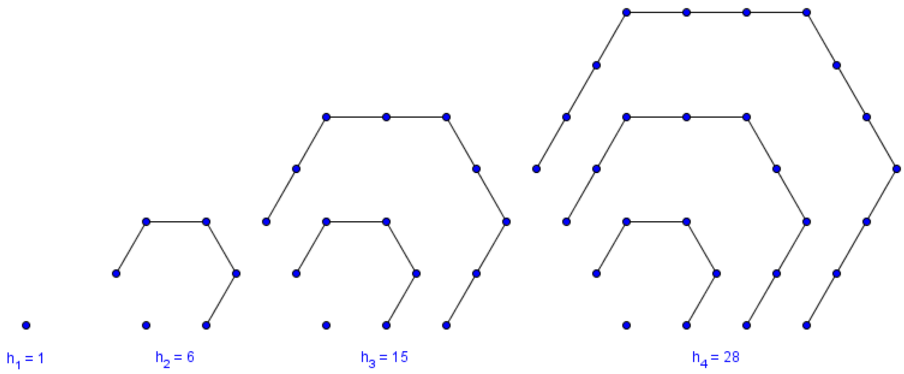
APÊNDICE D – Atividade Avaliativa 2

Exercício D.0.5. *Seja* (a_n) *a sequência cujo termo geral é dado por* $a_n = \dfrac{n}{2n+1}$.

a) Liste os cinco primeiros termos desta sequência.

b) Represente graficamente (a_n).

Exercício D.0.6. *Os números 1, 6, 15, 28 , ... são chamados de números hexagonais pois sua representação geométrica por meio de pontos assume a forma de hexágonos, como podemos observar a seguir.*

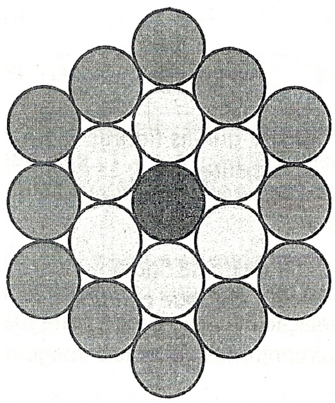


a) Escreva o próximo número hexagonal, ou seja, h_5.

b) Determine uma expressão algébrica para o n-ésimo número hexagonal, ou seja, o termo geral da sequência (h_n) *dada por* $(1, 6, 15, 28, \ldots)$.

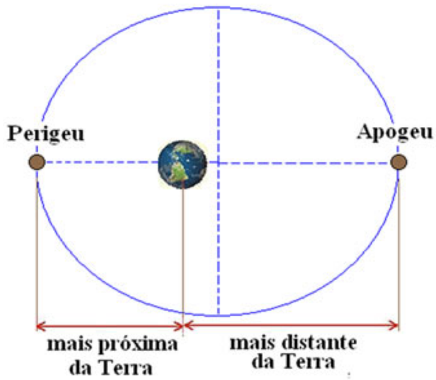
c) Determine h_{50}.

Exercício D.0.7. *(Uerj) Moedas idênticas de 10 centavos de real foram arrumadas sobre uma mesa, obedecendo à disposição apresentada no desenho: uma moeda no centro e as demais formando camadas tangentes.*



Considerando que a última camada é composta por 84 moedas, calcule a quantia, em reais, do total de moedas usadas na arrumação.

Exercício D.0.8. *Em março de 2011, observadores na Terra puderam registrar um fenômeno conhecido como super "lua perigeu", que ocorre a cada dezoito anos. A super "lua perigeu" consiste no fato de que a lua pode ser vista maior (a lua fica a menos de 357000 quilômetros de distância da Terra) e mais brilhante do que o normal, devido à sua órbita elíptica. O trajeto elíptico da lua tem um lado, o perigeu, cerca de 50000 quilômetros mais perto da Terra do que o outro, o apogeu. Um observador na Terra vê a lua perigeu 1,14 vezes maior e 1,3 vezes mais brilhante do que a apogeu. Determine a última vez que a super "lua perigeu" poderá ser vista neste milênio.*



APÊNDICE E – Atividade Avaliativa 3

Exercício E.0.9. *Considere uma sequência de círculos em que cada um, a partir do segundo, possui a metade da área do anterior. Se o primeiro tem raio igual a 16 cm, qual o comprimento da circunferência do décimo primeiro círculo?*

Exercício E.0.10. *A espessura de uma folha de estanho é 0,1 mm. Forma-se uma pilha de folhas colocando-se uma folha na primeira vez e, em cada uma das vezes seguintes, tantas quantas já houverem sido colocadas anteriormente. Depois de 33 dessas operações, a altura da pilha será, aproximadamente:*

a) A altura de um poste de luz.

b) A altura de um prédio de 40 andares.

c) O comprimento da praia de Copacabana.

d) A distância Rio-São Paulo.

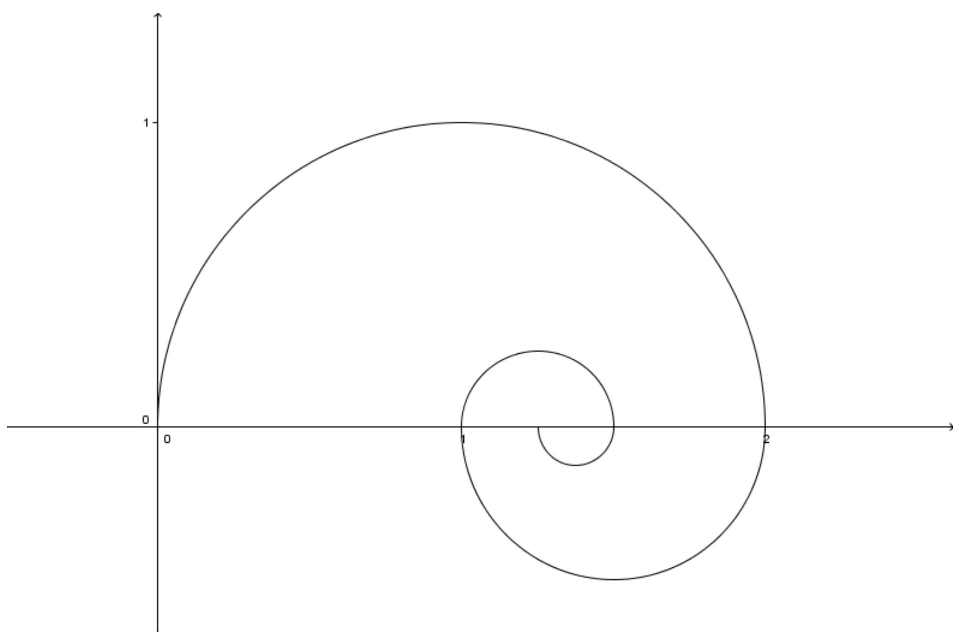
e) O comprimento do equador terrestre.

Justifique sua resposta.

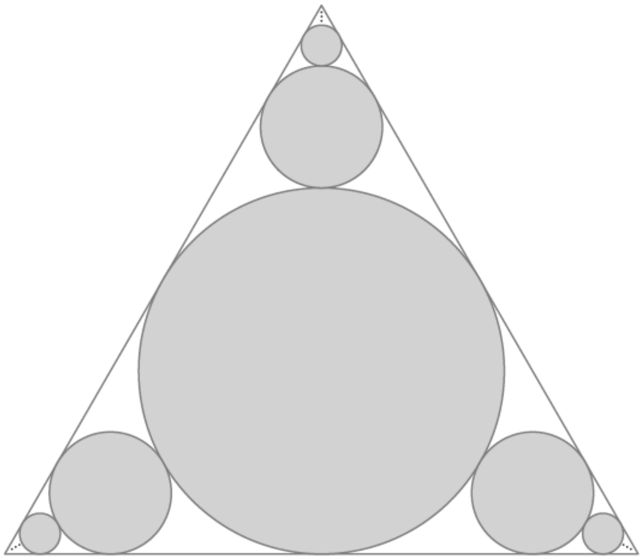
Exercício E.0.11. *Na figura temos uma espiral formada por semicírculos cujos centros pertencem ao eixo das abscissas. Se o raio do primeiro semicírculo é igual a 1 e o raio de cada semicírculo é igual à metade do raio do semicírculo anterior, determine:*

a) O comprimento da espiral;

b) A abscissa do ponto P, ponto assintótico da espiral.



Exercício E.0.12. *Na figura existem infinitos círculos se aproximando dos vértices de um triângulo equilátero. Cada círculo toca os outros círculos e lados do triângulo. Se o triângulo tiver lados de comprimento 1, calcule a área total ocupada pelos círculos.*



Referências

[1] Boyer, C. B., *História da Matemática*, tradução: Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blücher, Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.

[2] Dante, L. R., *Matemática.* - 1.ed. - São Paulo: Ática, 2004.

[3] Eves, H., *Introdução à História da Matemática*; tradução: Hygino H. Domingues. - Capinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

[4] Giovanni, J. R., Bonjorno, J. R., *Matemática Completa.* - 2.ed. renov. - São Paulo: FTD, 2005 - (Coleção Matemática Completa).

[5] Gundlach, B. H., *História dos Números e Numerais*; trad. Hygino H. Domingues, - São Paulo: Atual, 1992. - (Tópicos de História da Matemática para Uso em Sala de Aula; v. 1).

[6] Hygino, H. D., *Fundamentos de Aritmética*, - São Paulo: Atual, 1991.

[7] Iezzi, G. e Outos, *Fundamentos da Matemática Elementar*, vol. 4, São Paulo, Atual Ed.,1977.

[8] Leithold, L., *O Cálculo com Geometria Analítica - Volume 2*, 3.ed. tradução Cyro de Carvalho Patarra; revisão técnica Wilson Castro Ferreira, Jr. / Silvio Pregnolatto - São Paulo: Editora ARBRA Ltda, 1994.

[9] Lima, E. L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E., Morgado, A. C., *A Matemática do Ensino Médio - Volume 1*, - 10.ed. - Rio de Janeiro: SBM 2012.

[10] Lima, E. L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E., Morgado, A. C., *A Matemática do Ensino Médio - Volume 2*, - 6.ed. - Rio de Janeiro: SBM 2006.

[11] Maciel, A. B., Lima, O. A. *Introdução à Análise Matemática.* Campina Grande: EDUEP, 2005.

[12] Martins, D. P., *Sequências, Progressões e Séries: Uma Abordagem para o Ensino Médio.* Abril, 2013. p. 112. Dissertação - Universidade Federal da Bahia - UFBA, Salvador. Mestrado Profissional em rede Nacional -PROFMAT.

[13] Rêgo, R. G., Rêgo, R. M., *Matematicativa*, - 3 Ed. - João Pessoa: Editora Universitária/UFPB, 2004.

[14] Rêgo, R. M., Silva, J. S., *Descobrindo Padrões Matemáticos com a Torre de Hanói*, Cesur em Revista, Rondonópolis MT, v.5, n.1, p. 107-118, jan./jun., 2005.

[15] Samanez, C. P., *Matemática Financeira: Aplicações à Análise de Investimentos*, - São Paulo: Prentice Hall, 2002.

[16] Stewart, J., *Cálculo - Volume 2*, tradução EZ2 Translate. - São Paulo: Cengage Learning, 2013.

[17] Thomas, G. B., Finney, R. L., Weir, M. D., Giordano, F.R., *Cálculo - Volume 2*, tradução Claudio Hirofume Asano; revisão técnica Leila Maria Vasconcelos Figueiredo. - São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2003.