UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA

Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática
Campus Campina Grande

RÔNERO MÁRCIO CORDEIRO DOMINGOS

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E MODELAGEM MATEMÁTICA: UMA EXPERIÊNCIA NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE FÍSICA E MATEMÁTICA

Campina Grande
2016

RÔNERO MÁRCIO CORDEIRO DOMINGOS

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E MODELAGEM MATEMÁTICA: UMA EXPERIÊNCIA NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE FÍSICA E MATEMÁTICA

Dissertação de Mestrado, elaborada junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, para obtenção do Título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Roger Ruben Huaman Huanca

Campina Grande
2016

D671r Domingos, Rônero Márcio Cordeiro.
Resolução de problemas e modelagem matemática [manuscrito] : uma experiência na formação inicial de professores de física e matemática / Rônero Márcio Cordeiro Domingos. - 2016.
193 p. : il. color.

Digitado.
Dissertação (Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2016.
"Orientação: Prof. Dr. Roger Ruben Huaman Huanca, Departamento de Matemática".

1. Modelagem matemática. 2. Resolução de problemas matemáticos. 3. Formação docente. 4. Ensino da matemática. I. Título.
21. ed. CDD 371.12

COMISSÃO EXAMINADORA

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E MODELAGEM MATEMÁTICA: UMA EXPERIÊNCIA NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DE FÍSICA E MATEMÁTICA

Dissertação de Mestrado, elaborada junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, para obtenção do Título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

____

Dr. Roger Ruben Huaman Huanca (Orientador)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

____

Dr. Silvanio de Andrade (Membro interno)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

____

Dra. Lourdes de la Rosa Onuchic (Membro externo)
Universidade Estadual Paulista (UNESP)

____

Dr. Eduardo Gomes Onofre (Suplente)
Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)

Resultado: Aprovado com Distinção

Campina Grande, 18 de abril de 2016.

Dedico este trabalho a vocês que sempre acreditaram que eu poderia realizar todos os meus sonhos e que trabalharam muito para que eu pudesse realizá-los, meus pais, Marinalda e Rosimar.

À minha namorada Rafaela Santos, companheira no amor, na vida e nos sonhos, que sempre me apoiou nas horas difíceis e compartilhou comigo as alegrias.

AGRADECIMENTOS

Nenhuma Dissertação de Mestrado como esta chega ao seu término sem que, ao longo do caminho, seu autor tenha se endividado junto a uma multidão de generosas pessoas que o ajudaram, das mais diversas formas, a concluir o trabalho.

Inicialmente, quero agradecer a DEUS por esta vida e pela capacidade que me concedeu para enfrentar os desafios sem me deixar esmorecer.

Quero expressar minha gratidão ao professor Dr. Roger Huanca, um infatigável orientador e amigo que conheci desde a graduação no curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual da Paraíba Campus Monteiro/PB. Agradeço pelos livros que me emprestou, pelos sábados e domingos dedicados para me orientar e por ter-me mostrado caminhos que eu desconhecia.

Sou também muito grato aos professores do programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba. Tenho aprendido muito com todos que tive a oportunidade de cursar disciplinas, em especial ao professor Dr. Silvanio de Andrade, por ter-me possibilitado através de suas aulas a aumentar meus conhecimentos e a me tornar um profissional melhor.

Quero agradecer a todos os autores que referencio neste trabalho, pela excelência de seus artigos, dissertações, teses e livros, por ter sido, nesses maravilhosos trabalhos desses autores, que tiveram início meu aprendizado e interesse pelo inesgotável tema apresentado.

Um profundo agradecimento precisa ser feito aos membros da banca examinadora, em especial à Professora Dr. Lourdes de la Rosa Onuchic pelas contribuições concedidas no exame de qualificação desta pesquisa.

Aos colegas do GPRPEM, muito obrigado pela companhia durante esses dois anos, pelo apoio e incentivo. Obrigado pelas críticas, sugestões e discussões desenvolvidas referentes às minhas produções acadêmicas.

Agradeço também aos colegas de trabalho do IF Sertão PE, campus de Salgueiro, pelo apoio dado em minha pesquisa de campo.

Agradeço aos alunos do IF Sertão PE, campus Salgueiro, e aos alunos da Faculdade de Ciências Humanas do Sertão Central (FACHUSC) que vivenciaram o curso de extensão, cenário desta pesquisa, com responsabilidade dedicação e interesse.

Agradeço aos meus pais e à minha namorada por vibrarem comigo a cada etapa conquistada e pelo apoio que me deram durante essa caminhada.

O otimista é um tolo. O pessimista é um chato.
Bom mesmo é ser um realista esperançoso.

Ariano Suassuna

RESUMO

O objetivo deste trabalho foi identificar e compreender como os alunos de Licenciatura em Física e Matemática desenvolvem suas habilidades e atitudes para a prática da sala de aula no contexto da Modelagem Matemática, utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. Para a realização desta pesquisa, foi empregada como metodologia cientifica, o Modelo de Thomas A. Romberg, em que ele apresenta dez atividades essenciais para o desenvolvimento de uma Pesquisa cientifica. A partir desse Modelo, foi possível a realização da investigação, planejamento e desenvolvimento deste trabalho. A pesquisa de campo foi realizada com alunos dos cursos de Física e Matemática do Instituto Federal do Sertão Pernambucano, campos de Salgueiro/PE, e da Faculdade de Ciências Humanas do Sertão Central - FACHUSC. Para esses alunos, foi oferecido um curso de Extensão sobre Equações Diferenciais Ordinárias no contexto da Modelagem Matemática. A Coleta dos dados foi feita mediante a aplicação de questionários, cadernos e anotações dos alunos e principalmente pelas gravações feitas ao longo de cada encontro. Da análise dos dados coletados durante a pesquisa de campo, constatou-se que a Metodologia Resolução de Problemas, trabalhada no contexto da Modelagem Matemática, foi um caminho promissor no preparo de futuros professores de Física e Matemática para o desenvolvimento de habilidades e atitudes para a prática da sala de aula. O trabalho desenvolvido na pesquisa de campo concedeu aos futuros professores momentos de criatividade, interesse nos conteúdos trabalhados e participação ativa nas atividades desenvolvidas durante o curso de extensão.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Resolução de Problemas. Formação inicial de Professores. Educação Matemática Crítica. Equações Diferenciais.

ABSTRACT

The aim of this study was to identify and understand how undergraduated students of Physics and Mathematics develop their skills and attitudes to classroom practice in the context of mathematical modeling using the mathematics teaching-learning methodology through solving problems. For this research, it was employed as a scientific methodology, the Model Thomas A. Romberg, where he presents ten key activities for the development of a scientific research. From this model, it was possible to carry out the research, planning and todevelop this work. The field research was carried out with students of Physics and Mathematics major of the Federal Institute of Sertão Pernambucano, campus of Salgueiro / PE, and the Faculty of Humanities of the Sertão Central - FACHUSC. For these students it was offered an extension course on Ordinary Differential Equations in the context of Mathematical Modeling. The data collection was done through questionnaires, notebooks and students'nots, and especially by recordings made during each meeting. Da analysis of the data collected during the field research, it was found that the methodology Problems Solving, worked in the context of Mathematical Modeling, is a promising way to prepare future teachers of physics and mathematics to develop skills and attitudes to the classroom practice. The work in the field of research given to prospective teachers moments of creativity, interest in the contents worked and active participation in the activities developed during the course of extension.

Keywords: Mathematical Modeling. Problems Solving. Teachers Initial Education. Critical Mathematics Education. Differential Equations.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

> A teoria das Equações Diferenciais se distingue tanto por sua riqueza de ideias e métodos como por sua aplicabilidade. Na pesquisa de campo, os alunos obtiveram de seu estudo uma experiência de grande valor formativo. Tiveram a oportunidade de integrar, num único curso, os fundamentos da Matemática Básica, Análise Matemática Clássica, Álgebra Linear, Cálculo Diferencial e Integral, disciplinas amiúde apresentadas isoladamente.

Neste capítulo introdutório, serão apresentados alguns fatos da trajetória pessoal e acadêmica deste autor que corroboraram para o desenvolvimento desta pesquisa intitulada "Resolução de Problemas e Modelagem Matemática: uma experiência na formação inicial de professores de Física e Matemática". Além disso, discutir-se-á a relevância deste estudo para o campo da pesquisa em Modelagem Matemática e em âmbito educacional.

1.1 OS PERCURSOS DA TRAJETÓRIA ACADÊMICA

Este trabalho não poderia ser iniciado sem que antes fosse apresentada a experiência pessoal e profissional do autor. Tudo começou em 1995, quando do traslado da família da zona rural para o município de São Vicente do Seridó, no estado da Paraíba. Foi nessa cidade que se deu seu ingresso no ensino primário, tipicamente conhecido como o período da 5ª à 6ª serie, sempre sendo considerado como um bom aluno pelo esforço e pela predisposição em busca do aprender. Nesse sentido, os esforços empreendidos contribuíram positivamente na fase inicial do Ensino Fundamental.

Durante o ensino Médio houve dificuldades, pois, nesse período, foi crucial ter de trabalhar para ajudar a família, o que levou a uma mudança dos estudos para o período noturno. Mesmo não tendo tanto tempo para estudar por causa do trabalho, não houve desânimos quanto aos estudos posto que, nessa fase do Ensino Médio, nasceu um maior interesse pela disciplina Matemática e de outras matérias.

No ano de 2006 foi lograda a aprovação no primeiro vestibular para o curso de Licenciatura plena em Matemática, oferecido pela Universidade Estadual da Paraíba – UEPB, campus Monteiro. Nos primeiros semestres desse curso, muito esforço teve de ser empreendido para superar as lacunas herdadas dos anos anteriores e poder acompanhar os conteúdos curriculares que eram ministrados. Esse curso foi um divisor de águas, uma vez que promoveu, neste autor, reflexões e crescimentos, não só em termos de conteúdo mas como ser humano que pudesse contribuir para a sociedade. Em 2008, com a chegada do professor Dr. José Joelson Pimentel de Almeida e o orientador Roger Huanca – ambos da área de Educação Matemática – surgiu-lhe uma visão diferenciada sobre o que é ser professor. Nesse período, houve participação em dois eventos acerca da Educação Matemática organizados pelos professores citados. Também houve uma participação no grupo GITPEM (Grupo de Investigação em Teorias e Prática em Educação Matemática) e no GPRPEM (Grupo de Pesquisa em Resolução de Problemas e Educação Matemática), coordenados por esses professores. Nesse período fomentaram-se suas primeiras experiências com pesquisa científica.

Em Junho de 2010, deu-se a conclusão da graduação. Nesse mesmo período, foi lograda a aprovação em um concurso publico para professor substituto na área de Matemática na própria UEPB, campus Monteiro. Foi, a partir daí, iniciada sua experiência docente. Nessa fase, foram absorvidos tantos conhecimentos quanto os logrados na fase discente, pois, iniciou-se a percepção da grande responsabilidade que há ao se orientar futuros professores de matemática no caminho do conhecimento. Tendo ciência dessa responsabilidade na qualidade de professor, buscou ele mesmo, sem tanta experiência profissional, lecionar da melhor maneira possível sempre com escopo na aprendizagem dos alunos.

No ano de 2011, veio a aprovação em um concurso para professor efetivo no Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia do Sertão Pernambucano – IF SERTÃO-PE, campus Salgueiro e, em novembro do mesmo ano, deu sua nomeação para assumir um novo cargo de professor, na Instituição em que o presente autor encontra-se vinculado até hoje.

Após a aprovação no último concurso público prestado, vêm sendo, por ele, ministradas as disciplinas seguintes: Matemática Básica; Geometria Analítica; Cálculo I; Cálculo II; Cálculo III e Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) para os cursos Técnicos, Médios Integrados, Proeja, Licenciatura em Física e Engenharia de Alimentos. Nessa ocasião, foram ministradas essas disciplinas segundo o mesmo modelo de ensino adotado pelos professores da Licenciatura, ao qual foram adicionadas algumas metodologias de ensino que a Educação Matemática lhes forneceu.

No entanto, ao refletir bastante sobre a prática adotada, percebeu-se que seria imprescindível buscar novas possibilidades de apresentar esses conteúdos, de forma que os alunos pudessem perceber a importância e o sentido deles no contexto da realidade em que estão inseridos e não somente dentro de uma disciplina específica.

Após alguns anos de experiência docente no IF, sentiu-se a necessidade de lograr nova qualificação, pois uma instituição de ensino superior é sustentada sobre três pilares: ensino; pesquisa e extensão. Nesse sentido, é imprescindível que o corpo docente da instituição superior desenvolva projetos de pesquisas como PIBIC, PIBID entre outros programas, para potencializar os projetos de pesquisa científica e extensão. Para o desenvolvimento desses projetos, exige-se que os professores tenham, no mínimo, um título de Mestre. Além disso, o fato de querer-se a qualificação deve-se também ao desejo de lograr um crescimento pessoal e profissional.

Diante da necessidade de aperfeiçoamento para a busca de novas possibilidades para o ensino de matemática na sala de aula, em 2012 este autor concluiu um curso de ensino a distância de aperfeiçoamento em Ensino de Matemática pelo Centro de Ensino Tecnológico Brasileiro (CETEB). Na oportunidade, foram teoricamente dominadas algumas metodologias de ensino que potencializaram seus conhecimentos adquiridos na graduação.

Na prática profissional obtida até então, não havia uma plena segurança quanto à utilização das diversas metodologias de ensino, posto que, esporadicamente, as aulas eram ministradas segundo um padrão tradicional, segundo o qual o aluno é considerado como um receptor e o professor como o centro do saber. Sendo assim, como Salgueiro é distante dos polos onde há cursos de pós-graduação, foi necessário aguardar o término de seu estágio probatório antes de procurar um curso *stricto senso*.

Não demorou muito para se tomar conhecimento de um edital para o Mestrado Acadêmico, curso oferecido pelo programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da UEPB. Em Junho de 2014, fiz minha inscrição para a seleção do Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Foram vivenciados momentos de ansiedade, mas foi lograda a aprovação nas quatro etapas da seleção: prova de conhecimento específico, entrevista, prova de língua estrangeira e análise de currículo. Nessa seleção, foi submetido um projeto relacionado à Modelagem Matemática. Depois da aprovação no mestrado acadêmico, foi solicitado seu afastamento da instituição para poder concluir a capacitação, uma vez que Salgueiro fica distante da cidade Campina Grande, onde é realizado o mestrado.

No segundo semestre de 2014, foram cursadas algumas disciplinas do programa de mestrado, tais como: Metodologia de Ensino; Resolução de Problemas e Construtivismo Social; Tópicos de Geometria; bem como os conteúdos apresentados nos seminários do programa. Nesse mesmo semestre, foi apresentada a proposta inicial de seu projeto no XVIII Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática (XVIII EBRAPEM). Esse evento tem, como objetivo, reunir os alunos de Pós-Graduação em Educação Matemática, para que eles possam discutir melhorias para seus projetos. Nesse sentido, esse evento foi-lhe importante, já que a ele se mostrou como uma oportunidade para a discussão das fases iniciais do projeto de pesquisa que fora submetido.

Após a participação nesse evento, discutiram, o autor e seu orientador, as possíveis modificações da proposta inicial do projeto e a execução das etapas do projeto já modificado.

Desde o primeiro dia das aulas do mestrado, em paralelo aos estudos das disciplinas, foi extenuante a dedicação diária quanto à pesquisa e quanto ao levantamento bibliográfico que balizaria o objeto da pesquisa. Após esse levantamento inicial, iniciou-se a leitura e a análise de literatura nacional e internacional. Quanto maior o aprofundamento nos estudos bibliográficos, maior era o interesse na temática. No entanto, as angústias não foram poucas, e, dentre elas, destaca-se a busca por uma pergunta diretriz para o empreendimento da pesquisa.

Na trajetória acadêmica, relatada até aqui, é possível perceber que a última atuação do pesquisador foi como professor do Ensino Básico Técnico e Tecnológico do IF Sertão-PE, Campus de Salgueiro. Essa instituição oferece para a população de Salgueiro e cidades circo vizinha, cursos técnicos e cursos de nível superior. Os cursos técnicos assim como os dois cursos superiores da instituição, que são Tecnologia em Alimentos e Licenciatura em Física precisam da matemática aplicada.

Nesse sentido, o professor, ou seja, o pesquisador deste trabalho precisou ter um conhecimento sobre como modelar algumas situações-problema, dessa forma, busquei aprofundar os conhecimentos ao longo do Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática sobre o fenômeno de interesse “Modelagem Matemática” que tem como uma de suas características relacionar a Matemática com temas da realidade dos alunos.

1.2 A PROBLEMÁTICA E O OBJETIVO DA PESQUISA

Antes de começar a buscar na literatura, apesar de seu pouco conhecimento sobre a modelagem matemática, havia várias perguntas iniciais que se descortinaram mais tarde, durante a revisão, e que já haviam sido respondidas por outros pesquisadores. Nesse sentido, foram elaboradas outras perguntas que foram se modificando ao longo da pesquisa e, após certo amadurecimento, chegou-se finalmente a uma pergunta que norteia a presente pesquisa: **Como os estudantes de um curso de Licenciatura em Física ou Matemática podem desenvolver suas habilidades e atitudes para a prática da sala de aula no contexto da Modelagem ao longo de um curso de extensão sobre Equações Diferenciais Ordinárias,**

utilizando-se a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas?

Sendo assim, o principal objetivo desta pesquisa é identificar e compreender como os alunos de Licenciatura em Física e Matemática desenvolvem suas habilidade e atitudes para a prática da sala de aula no contexto da Modelagem Matemática, por meio da Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas.

A fim de trazer compreensões a respeito do objetivo geral acima, foram apresentados alguns objetivos específicos para o desenvolvimento da pesquisa:

a) Analisar como os alunos se comportam diante de um ambiente da Modelagem Matemática;
b) Avaliar o interesse dos alunos na resolução de problemas no contexto da Modelagem;
c) Observar como os alunos da formação inicial em Física ou Matemática desenvolvem seus primeiros trabalhos na prática da sala de aula, utilizando a Modelagem Matemática e a Resolução de Problemas.

Ao trabalhar dentro desses objetivos, estamos promovendo a reflexão e mudança nos processos de ensino-aprendizagem de matemática.

1.3 A RELEVÂNCIA DA PESQUISA

Os momentos dedicados para escrever esta seção, fazem lembrar as palavras de Hissa (2013, p. 141-142) segundo as quais, ao tratar das dificuldades de justificar uma pesquisa, afirma que,

> As dificuldades não residem em encontrar a relevância da pesquisa. A dificuldade é encontrar um modo de dizer que a pesquisa é relevante. Como dizer isso sem dizer, mesmo implicitamente, que o sujeito da pesquisa está em relevo porque escolhe uma boa temática e um bom problema de pesquisa, e imagina, também, que o seu exercício poderá resultar em ganhos sociais e científicos? Como farão os sujeitos para dizer as virtudes de suas pesquisas e não dizer, ao mesmo texto, que elas próprias são virtuosas?

Esse autor apresenta em sua obra intitulada “Entrenotas”, uma reflexão sobre a necessidade ou não de apresentar, na escrita de uma pesquisa, um capítulo dedicado à relevância dela. Essa reflexão é apresentada a partir das seguintes perguntas:

> [...] por qual motivo importa anunciar a relevância da pesquisa, partindo do princípio de que os leitores – preferencialmente os examinadores acadêmicos – deveriam ter uma clara compreensão do que é e do que não é relevante? Caso o texto e os

> pensamentos façam um todo coerente, o leitor do trabalho não perceberá a relevância? (HISSA, 2013, p. 143).

Ao refletir sobre as ponderações apresentadas por Hissa (2013), surgiu um receio acerca da possibilidade de incluir, nesta dissertação, uma seção dedicada à relevância da pesquisa. No entanto, resolveu-se apresentar esta seção, mas consciente de que se esta for realmente relevante, o leitor perceberá independentemente da escrita dela.

A presente investigação poderá levar a entendimentos sobre como os alunos de um curso de Licenciatura em Física ou Matemática desenvolvem, no contexto da Modelagem Matemática, suas habilidade e atitudes para a prática da sala de aula. Além disso, esta pesquisa poderá revelar que tipos de ações, na formação inicial de professores, podem implicar o desenvolvimento de habilidades e atitudes para a prática da sala de aula.

Apesar de diversos estudos que foram encontrados na literatura sobre Modelagem Matemática, pode-se perceber que não têm aparecido estudos referentes à formação de professores relacionados à Modelagem Matemática, salvo algumas exceções como (BARBOSA, 2001; ALMEIDA, 2004, SILVA, 2007, OLIVEIRA, 2010), entre outros. Nesse sentido, esta pesquisa poderá contribuir para o debate teórico referente à Modelagem Matemática do ponto de vista do professor em formação inicial.

A relevância deste trabalho no contexto da Modelagem consiste em um processo no qual as características pertinentes a uma situação problema são extraídas com a ajuda de hipóteses e aproximações simplificadoras, que são representadas por modelos. As hipóteses e aproximações significam que o modelo criado por esse processo é sempre aberto à perspectiva sócio-crítica.

Espera-se que esta investigação possa contribuir para a formação desses futuros professores em Física e Matemática no contexto da Modelagem utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas.

1.4 ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO

Esta dissertação está organizada em oito capítulos:

No capítulo 1 – a presente seção – foi introduzido o trabalho através da apresentação: da trajetória pessoal e acadêmica do autor; da pergunta norteadora da pesquisa; dos objetivos da pesquisa; bem como da forma como ela está organizada; além da relevância da pesquisa.

No capítulo 2 – A Metodologia da Pesquisa – são apresentadas algumas perspectivas acerca do que tem sido denominado metodologias de pesquisa na área da Educação Matemática. Nesta seção também é fundamentada a pesquisa a partir das orientações de

Romberg (2007), encontradas em uma tradução de Onuchic e Boero, publicada no Boletim de Educação Matemática (BOLEMA).

No capítulo 3 – A Modelagem Matemática – foi apresentado um paralelo entre o presente estudo e a literatura corrente da área. Nesse diálogo, teceram-se algumas considerações referentes a alguns conceitos da Modelagem Matemática, bem como as perspectivas atuais debatidas em âmbito nacional e internacional.

No capítulo 4 – Resolução de Problemas – é apresentado de forma sucinta algumas perspectivas da Metodologia Resolução de Problemas. Dentre as perspectivas apresentadas, o presente autor, tenta fundamenta essa metodologia segundo uma perspectiva sociocultural, trazendo algumas ideias da educação matemática crítica.

No capítulo 5– O Modelo Modificado e a Pergunta da Pesquisa – Como consequência da investigação sobre os dois eixos temáticos, foi necessário fazer uma mudança no modelo preliminar face às novas variáveis que surgiram para um modelo modificado. Após relacionar o fenômeno de interesse com o modelo modificado, foi levantado o problema da presente pesquisa.

No capítulo 6 – Segundo Bloco de Romberg – A discussão gira em torno das estratégias (o que fazer?) e procedimentos (como fazer?) adotados para o desenvolvimento da pesquisa. Nesse capitulo é apresentada a criação de um projeto, que foi aplicado na pesquisa de campo, com a finalidade de encontrar respostas para a pergunta diretriz desta pesquisa.

Já no capitulo 7 – Terceiro Bloco de Romberg: resultados e discussões dos episódios – são descritos os episódios ocorridos durante a realização da pesquisa de campo, em especial, os encontros do curso de extensão. Nesse mesmo capítulo, ao descrever cada encontro, o autor já faz uma análise inicial dos dados apresentados.

No capitulo 8 – Análise Geral dos dados – é feita uma análise com mais profundidade, tentando mostrar para o leitor, como que os dados coletados, podem responder a pergunta norteadora da pesquisa. Para isso, é situado detalhadamente o cenário onde ocorreu a pesquisa de campo, apresentadas as características dos sujeitos da pesquisa e feita uma análise por partes, como por exemplo: análise proveniente dos textos discutidos, análise proveniente das atividades trabalhadas, análise proveniente dos vídeos gravados e questionários aplicados.

Para concluir, é retomado no nono capitulo a pergunta norteadora da pesquisa a fim de sintetizar as compreensões e apresentar as conclusões, discutindo as implicações dos resultados da pesquisa para a área de ensino de ciências e educação matemática, bem como para a prática pedagógica dos professores, além de apontar as limitações da pesquisa.

Por fim, apresentam-se as referências utilizadas e os anexos referentes à pesquisa.

2 A METODOLOGIA DE PESQUISA

Serão apresentadas, neste capítulo, algumas perspectivas acerca do que se tem entendido por metodologia de pesquisa na área da Educação Matemática. Para isso, utilizaram-se, como referência, alguns autores de prestígio na área: Santos (2007); Hissa (2013); Minayo (2014); Borba (2006); Garnica (2006); Bicudo (2006) entre outros. Além disso, será apresentada a trajetória desenvolvida ao longo desta pesquisa fundamentada nas contribuições de um pesquisador de renome internacional Thomas Romberg. Esse autor apresenta de forma explicita um esboço das atividades que todo pesquisador poderia seguir no desenvolvimento de uma pesquisa científica. De início, tratou-se dos aspectos teóricos da metodologia da pesquisa em Educação Matemática. Em seguida, apresenta-se a Metodologia de Romberg e, por fim, a organização do trabalho segundo as orientações desse autor.

2.1 ASPECTOS TEÓRICOS DA METODOLOGIA DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Para apresentar os aspectos teóricos referentes à "Metodologia de Pesquisa" é imprescindível responder-se a duas perguntas básicas: O que significa Metodologia da Pesquisa? Como escolher a Metodologia da Pesquisa?.

Para responder à primeira pergunta, recorre-se, aqui, a um dos dicionários mais conceituados da língua portuguesa, o Houaiss (2009), que define **Metodologia** como sendo um conjunto de regras ou normas estabelecidas para o desenvolvimento de uma pesquisa. A **Pesquisa** é definida, por sua vez, como um conjunto de ações que buscam mais informações a respeito de algo. Nesse sentido, concebe-se inicialmente a **Metodologia da Pesquisa** como sendo um conjunto de regras ou normas estabelecidas para buscar mais informações a respeito de algo.

Quanto à segunda pergunta, *como escolher a metodologia da pesquisa?* Entende-se que não existe apenas um modelo pronto para tal escolha. Araújo (2002) chama a atenção para uma escolha metodológica que seja coerente com os objetivos da pesquisa, com o contexto de seu desenvolvimento e com a postura do pesquisador. Para essa autora, deve haver uma harmonia, um inter-relacionamento entre a opção metodológica e toda a pesquisa.

Toda investigação deve ter um procedimento metodológico que a sustente e que possa delinear e orientar todas as etapas desenvolvidas. Nessa direção, foram estudadas algumas perspectivas sobre metodologias de pesquisa com o objetivo de identificar a que melhor se enquadrasse ao desenvolvimento deste trabalho.

Na busca por encontrar uma metodologia que fosse coerente com os objetivos desta pesquisa, sentiu-se a necessidade de se mergulhar, profundamente, nas ideias de alguns autores que tratam do assunto. Inicialmente ao ler o trabalho de Huanca (2014) e Onuchic & Noguti (2014), descobriram-se algumas ideias de Santos apresentadas por estes autores. Após algumas dificuldades para encontrar tal obra ela foi, enfim, adquirida.

Esse livro foi de fundamental importância, uma vez que o autor apresenta os objetivos do desenvolvimento de um texto técnico-científico. Também, obtiveram-se conhecimentos de outros textos que versavam sobre metodologia da pesquisa e que foram apresentadas nas aulas da disciplina "Metodologia da Pesquisa", do curso de mestrado ministrado pelo professor responsável[1]. As leituras desses textos contribuíram de forma significativa para o entendimento dos vários métodos de pesquisas. Também foi importante uma das discussões, nessa disciplina, sobre pergunta da pesquisa, instrumentos de coletas de dados, etc.

Segundo Goldenberg (1999, p.106), para que uma pesquisa seja desenvolvida é imprescindível: "a existência de uma pergunta que se deseja responder; a elaboração de um conjunto de passos que permitam chegar à resposta; e a indicação do grau de confiabilidade na resposta obtida".

Para Araújo e Borba (2006), toda pesquisa começa com uma pergunta diretriz. Baseados nas ideias de Goldenberg (1998), esses autores afirmam que elaborar ou construir uma pergunta diretriz é um ponto crucial, do qual depende o sucesso da pesquisa. Para esses autores, o processo de construção de uma pergunta norteadora da pesquisa é, na maioria das vezes, um longo caminho, cheio de idas e vindas, mudanças de rumos, retrocessos, até que, depois de certo período de amadurecimento, surge a pergunta.

Ao se refletir sobre essas ideias, vem à mente uma frase de Antonio Machado "caminhante, não há caminho, faz-se caminho ao andar". Tal frase foi citada por D'Ambrosio, no prefácio da obra de Borba e Araújo (2006), intitulada "Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática".

Na literatura, de modo geral, a metodologia de pesquisa é classificada do ponto de vista de sua natureza (Pesquisa Básica, Pesquisa Aplicada, Pesquisa Quantitativa e Pesquisa Qualitativa), quanto aos fins (exploratória, descritiva, explicativa, metodológica, de campo, documental, experimental, participante, pesquisa-ação, estudo de caso). Esses tipos de

[1] Dr. Silvanio de Andrade

pesquisa não são exclusivos. Inclusive, uma mesma pesquisa pode, por exemplo, ser bibliográfica, documental, de campo e estudo de caso.

Não há a intenção, aqui, de definir detalhadamente cada um desses métodos de pesquisa. Serão enfocados, talvez quando for empreendida a pesquisa de campo, os aspectos referentes à pesquisa qualitativa, pelo fato de ser o tipo de pesquisa predominantemente corrente na comunidade científica da presente área de concentração.

Bicudo (2006, p.105) apresenta o campo de significado que o *quantitativo* e o *qualitativo* se situam,

> O *quantitativo* tem a ver com o *objetivo* passível de ser mensurável. Ele carrega consigo as noções próprias ao paradigma positivista, que destaca como pontos importantes para a produção da ciência a razão, a objetividade, o método, a definição de conceitos, a construção de instrumentos para garantir a objetividade da pesquisa. Embutida no seu significado está, também, a ideia de racionalidade entendida como quantificação.
> O *qualitativo* engloba a ideia do subjetivo, passível de expor sensações e opiniões. O significado atribuído a essa concepção de pesquisa também engloba noções a respeito de percepções de diferenças e semelhanças de aspectos comparáveis de experiências, como, por exemplo, da vermelhidão do vermelho, etc. Entende-se que a noção de rigor não seria aplicável a dados qualitativos, uma vez que a eles faltariam precisão e objetividade, dificultando ou impossibilitando a aplicação de quantificadores.

Segundo Borba (2006), o plano de pesquisa qualitativa consiste na organização das condições de coletas de dados, de modo a ter garantia e ao mesmo tempo ser pertinente ao assunto da pesquisa.

Minayo (2014, p. 57) afirma que,

> O método qualitativo é o que se aplica ao estudo da história, das relações, das representações, das crenças, das percepções e das opiniões, produtos das interpretações que os humanos fazem a respeito de como vivem, constroem seus artefatos e a si mesmos, sentem e pensam.

Pensando na presente pesquisa de campo, empreendeu-se uma reflexão sobre as características do adjetivo “qualitativo” que são apresentados de modo geral nas pesquisas:

> (a) a transitoriedade de seus resultados; (b) a impossibilidade de uma hipótese a priori, cujo objetivo da pesquisa será comprovar ou refutar; (c) a não neutralidade do pesquisador que, no processo interpretativo, vale-se de suas perspectivas e filtros vivenciais prévios dos quais não consegue se desvencilhar; (d) que a constituição de suas compreensões dá-se não como resultado, mas numa trajetória em que essas mesmas compreensões e também os meios de obtê-las podem ser (re)configuradas; e (e) a impossibilidade de estabelecer regulamentações, em procedimentos sistemáticos, prévios, estáticos e generalistas. (GARNICA, 2006, p. 88)

A partir dessas características, Borba e Araújo (2004) enfatizam que a pesquisa qualitativa deve ter implícita uma visão de conhecimento que esteja em sintonia com procedimentos como entrevistas, análises de vídeos, aplicação de questionários, atividades, interpretações, etc.

A escolha da metodologia assim como a escolha da questão central da pesquisa constituem tarefas difíceis e que angustiaram o presente autor ao longo da fase inicial de pesquisador. Em relação à metodologia, a partir de várias leituras feitas sobre o assunto, foi encontrada uma obra de Hissa (2013), intitulada “Entrenotas: Compreensão de pesquisa”. Nessa obra, o autor apresenta um capítulo intitulado “Metodologia: tu és a metodologia que usas”, que fala sobre a arte de dizer e de fazer a pesquisa.

Segundo esse autor, a maneira como é narrada a pesquisa é o que ilumina o produto final. Nesse sentido, a leitura de textos dessa natureza trazia preocupações e suscitava perguntas sobre como se deveria narrar, da melhor maneira possível, a pesquisa em gestação, se considerar que o presente autor detinha pouca experiência nesse aspecto.

Um dos grandes desafios vencidos no desenvolvimento desta pesquisa foi compreender a importância da utilização de uma metodologia cientifica visando à construção do conhecimento do pesquisador. Assim, os momentos dedicados para a produção deste capítulo fizeram-no refletir sobre as ideias de Antônio Raimundo dos Santos em sua obra intitulada “Metodologia Científica – a Construção do Conhecimento”. Nessa obra Santos, além de apresentar as relações existentes entre Metodologia Cientifica, Metodologia da Pesquisa Cientifica, Metodologia do Trabalho Científico, Metodologia da Construção do Conhecimento e a Pergunta da Pesquisa, ele chama a atenção para a importância da pesquisa como um modificador da evolução humana.

Santos afirma que ainda continua o interesse na forma correta de se apresentar um texto técnico-científico quanto às medidas das margens, da encadernação bem feita e da paginação adequada do trabalho. No entanto, ele afirma que hoje há mais interesse na geração de autonomia intelectual, na capacidade de pensar por conta própria numa pesquisa, a ser possibilitada aos estudantes e profissionais, especialmente àqueles em formação ou formados em nível superior. Afinal, diz ele: “se o médico não puder pensar Medicina, quem o fará? Se o engenheiro não for preparado para pensar Engenharia, quem o fará? Se o pedagogo não pensar Pedagogia, quem pensará?”. (SANTOS apud HUANCA, 2014, p. 15).

Após algumas leituras sobre metodologia cientifica, passou-se a conhecer, também, as orientações e contribuições de Romberg[2] (2007), Onuchic e Noguti (2014) em relação à prática de pesquisas. O modelo e o esboço apresentado por Romberg foi considerado o mais adequado para a apresentação deste trabalho, pois ele contempla todos os procedimentos da pesquisa assim como os outros autores acima citados apresentam.

As atividades de um pesquisador, apresentadas por Romberg (2007) também são apresentadas por vários outros pesquisadores da área, no entanto, entende-se que Thomas Romberg apresenta de forma explicita os passos que um pesquisador deve seguir para a realização de sua pesquisa. Nesse sentido, o presente autor, buscou seguir as orientações desse pesquisador, por entender, que, para um pesquisador principiante essa escolha pode garantir um pouco mais de segurança, uma vez que é apresentado detalhadamente o que deve ser feito em cada fase da pesquisa.

2.2 AS CONTRIBUIÇÕES DE ROMBERG PARA A PESQUISA

Quando o presente autor ingressou como aluno no curso de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática na Universidade Estadual da Paraíba, campus de Campina Grande, deparou-se com a necessidade de compreender as perspectivas e os fundamentos de uma Metodologia de pesquisa. Nesse período, percebeu-se que, para desenvolver uma pesquisa em Educação Matemática, era preciso buscar subsídios sobre a condução de um trabalho de investigação científica. Essas dificuldades fizeram-no refletir sobre a importância de uma metodologia de pesquisa em Educação Matemática.

Para Shulman (1988, p.5) a Educação é um campo de estudo, um local composto por fenômenos, eventos, instituições, problemas, pessoas e processos que, em si mesmos, constituem a matéria prima para investigações de vários tipos. Esse autor, afirma que, a escola é complexa e, assim, as perspectivas e os procedimentos de investigação dos pesquisadores, sobre muitas disciplinas, têm sido usados para investigar as questões levantadas e inerentes aos processos envolvidos no processo de ensino-aprendizagem da Matemática nas escolas.

Segundo Romberg (2007), é importante considerar a Educação Matemática como campo de estudo, para esse autor, o interesse de estudiosos em Educação Matemática se concentrou, no último quarto do século XX, nos problemas relacionados ao ensino e à

---

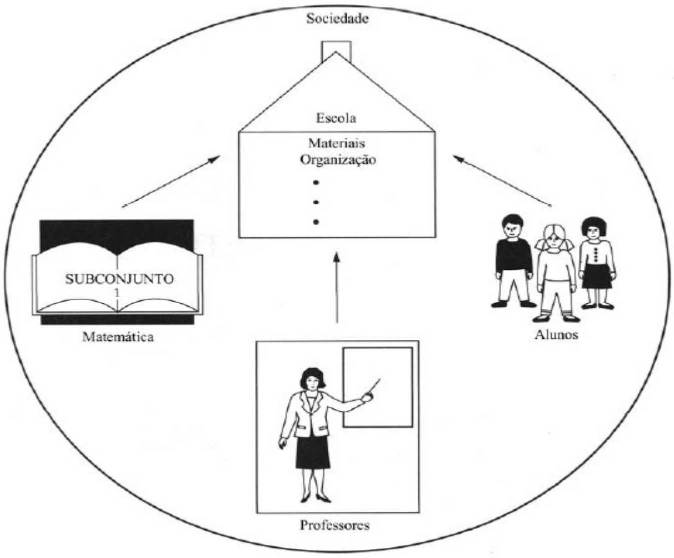
[2] Tradução de Onuchic e Boero publicada no Boletim de Educação Matemática (BOLEMA), nº 27, 2007, pag. 93 a 139.

aprendizagem de matemática. No entanto, para garantir a qualidade e a credibilidade da pesquisa, necessita-se de uma metodologia que lhe seja adequada à pesquisa que está sendo desenvolvida. O que determina qual metodologia de pesquisa deve ser adotada vai ser o tipo de estudo e o objetivo do trabalho.

Para Romberg (2007) a pesquisa em Educação Matemática deveria ter como objetivo produzir novo conhecimento sobre o ensino e a aprendizagem de matemática, porque os alunos aprendem a maior parte de sua matemática nas salas de aula, na escola. Segundo esse autor, a principal missão de um programa de pesquisa seria o de identificar a maioria dos componentes das salas de aula que promovem compreensão matemática e esclarecem algumas das características organizacionais que contribuem para a operação de tais salas de aula.

Considerando a Educação Matemática como um campo de estudos, Romberg (2007) apresenta um diagrama de E. G. Begle (1961) que elucida como os componentes dos processos da educação escolar estão inter-relacionados.

Figura 1 - Relação entre sociedade, matemática, estudantes, professor e escola.



Fonte: Romberg (2007, p.50)

Na presente pesquisa, no contexto da Modelagem Matemática, tratou-se, explicitamente, da relação entre estudantes, professores e matemática e, implicitamente, da relação apresentada no diagrama acima. Para isso, escolheu-se a metodologia de Romberg por entender-se que ela é coerente com o objeto de pesquisa aqui apresentado e por haver uma maior empatia com as atividades de um pesquisador apresentada por ele.

2.3 A METODOLOGIA DE ROMBERG-ONUCHIC

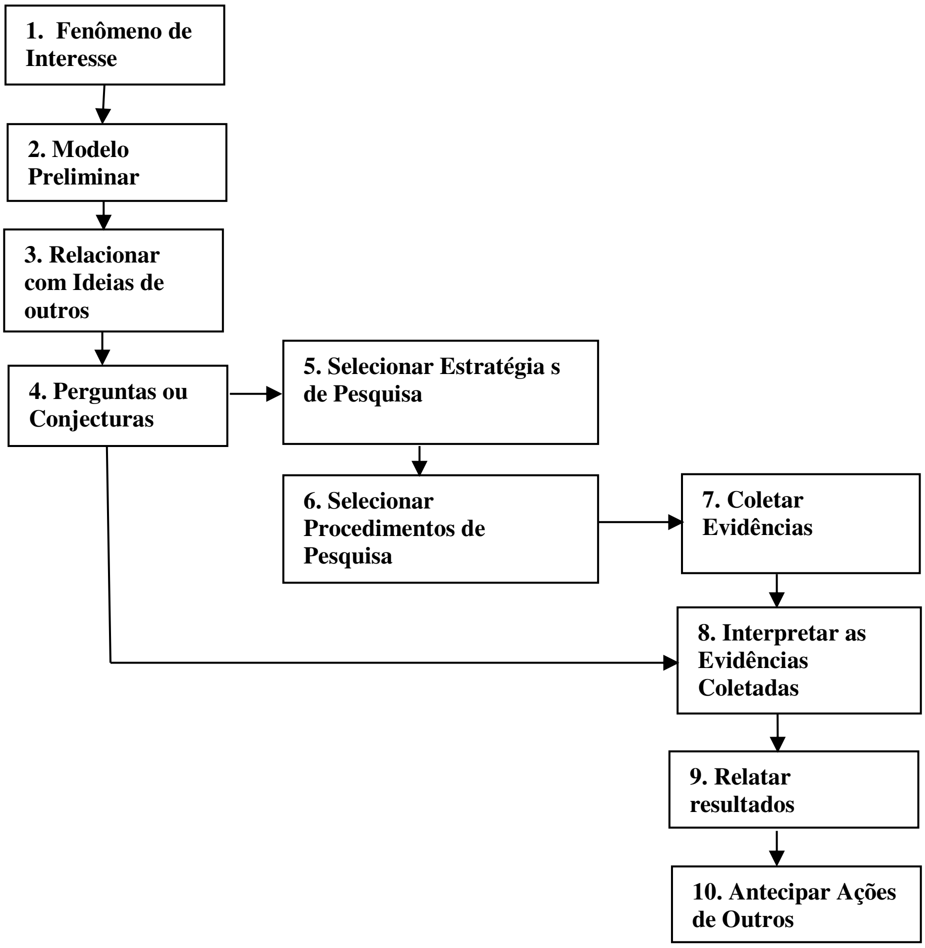
O professor Romberg é matemático e educador da Universidade de Wisconsin, nos Estados Unidos. Em seu artigo publicado em 2007, no capítulo 3 do Manual de pesquisa sobre Ensino e Aprendizagem de Matemática, intitulado “Perspectivas sobre o conhecimento e Métodos de Pesquisas”, ele procurou mostrar a importância da pesquisa em Educação Matemática, considerando-a como parte do conhecimento. Além disso, nesse artigo, ele descreve a Educação Matemática como um campo de estudo, apresenta as atividades dos pesquisadores, fala das variedades de métodos usados por pesquisadores, e também descreve cinco tendências de pesquisa gerais e suas relações com estudos em educação matemática.

Para Romberg (2007),

> Fazer pesquisa não pode ser visto como uma ação mecânica ou como um conjunto de atividades que indivíduos seguem de uma maneira prescrita ou predeterminada. As atividades envolvidas em fazer pesquisa incorporam mais características de uma arte do que de uma disciplina puramente técnica. Como em todas as artes, há um consenso em um sentido amplo sobre que procedimentos devem ser seguidos e o que é considerado como um trabalho aceitável. (ROMBERG, 2007, p. 97).

Em seu artigo, Romberg (2007, p.99) afirma que “toda pesquisa começa com uma curiosidade sobre um fenômeno particular do mundo real”. Nesse artigo, ele apresenta um fluxograma composto por dez atividades que poderiam ser seguidas por um pesquisador.

Figura 2 – Fluxograma das atividades dos pesquisadores segundo Thomas A. Romberg



Fonte: Romberg (2007)

Em seguida, compilou-se, quase integralmente, essas atividades dos pesquisadores, segundo Romberg (2007).

a) **Fenômeno de interesse:** está relacionado a uma curiosidade inicial do pesquisador sobre um fenômeno particular do mundo real. Em Educação Matemática, este fenômeno tem que envolver a relação professor e alunos. A forma como os alunos aprendem, como interagem com a matemática, como os professores planejam suas atividades e outros assuntos que devem estar envolvidos no fenômeno de interesse.
b) **Modelo Preliminar:** é um esboço que mostra aspectos importantes sobre o fenômeno de interesse e como estes aspectos estão relacionados. Não se sabe, ao certo, se o trabalho vai ser desenvolvido assim, seguindo essa ordem, mas foi assim que, pela primeira vez, foi pensado. Pode ser alterado ao longo da pesquisa. Nesse sentido, um modelo é simplesmente um conjunto de descrições de variáveis-chave e as relações

implícitas entre elas, ou seja, tipo um GPS, que apresenta a trajetória do caminho a ser seguido, mas que a qualquer momento pode mudar de rota.

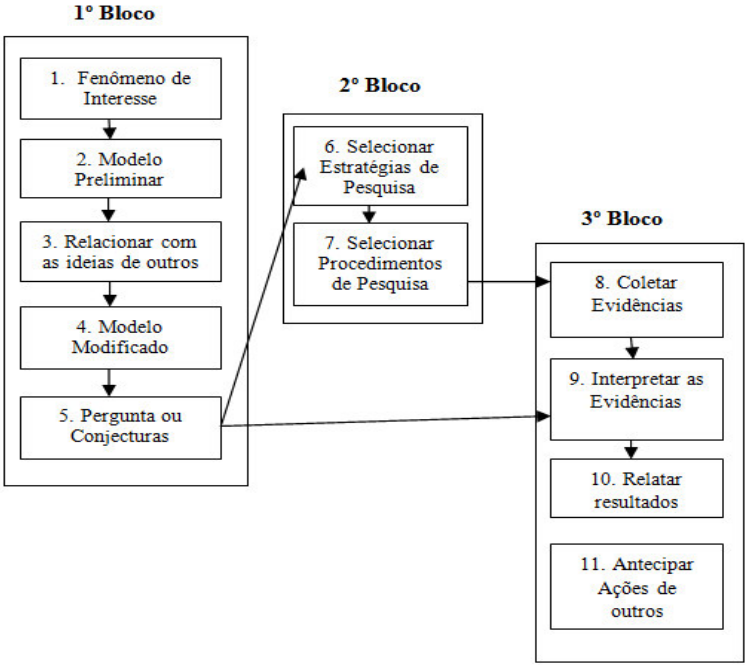
c) **Relacionar com ideias dos outros:** significa ir à procura de ideias de outros autores que já trabalharam com esse fenômeno de interesse e poder identificar se suas ideias podem ser usadas para esclarecer ou até mesmo alterar uma proposta.
d) **Pergunta ou conjectura:** Com o fenômeno de interesse e o problema identificado, o pesquisador, ao procurar caminhar para resolvê-lo, deve imaginar que respostas poderão ser dadas ou que conjectura poderá ser definida. O problema se torna, então, um desafio para o pesquisador.
e) **Estratégias da pesquisa:** Nessa atividade, o pesquisador vai encontrar o método que será utilizado para dar a resposta à sua pergunta ou conjectura.
f) **Procedimentos da pesquisa:** o pesquisador tem, como objetivo, identificar os procedimentos que irá seguir, ou seja, como vai selecionar as amostras, como vai fazer a visita de campo, como coletar os dados (Entrevistas, perguntas, observações, etc.), como organizar as informações coletadas e assim sucessivamente.
g) **Coletar Evidências:** Esta atividade pode ser levada à frente, uma vez que se tenha decidido coletar certas informações para a construção de um argumento que atenda às questões propostas, a partir da aplicação dos procedimentos idealizados adequados às estratégias selecionadas.
h) **Interpretar as Evidências Coletadas:** o pesquisador pode utilizar métodos qualitativos para interpretar os dados que foram coletados.
i) **Relatar resultados a outros:** o pesquisador, como membro de uma comunidade de pesquisa tem que ter a responsabilidade de apresentar a outros membros da comunidade o resultado completo de sua investigação.
j) **Antecipar as ações dos outros:** Dados os resultados de uma investigação específica, todo pesquisador estará interessado no que acontecerá depois e, então, poderá antecipar ações posteriores. Membros de uma comunidade de estudo discutem ideias entre si, reagem a ideias de outros e sugerem novos passos, modificações de estudos anteriores, elaborações de procedimentos e assim por diante.

Ao refletir sobre cada uma dessas atividades de um pesquisador, concluiu-se que a metodologia apresentada por Romberg é, entre outros, um procedimento metodológico relevante para se desenvolver uma pesquisa diretamente relacionada à Educação Matemática.

2.3.1 As Contribuições de Onuchic e Noguti no Fluxograma de Romberg

As atividades apresentadas por Romberg podem ser divididas em três blocos, que Onuchic (2007) e Onuchic e Noguti (2014) posteriormente os nomeou e organizou da seguinte forma:

Figura 3 - Fluxograma de Romberg-Onuchic



Fonte: Onuchic e Noguti (2014, p.59)

Fazendo uma comparação do artigo de Onuchic e Noguti (2014) com a versão original Romberg (1992), percebe-se que no Fluxograma Romberg-Onuchic há uma atividade a mais, denominada modelo modificado.

Segundo Onuchic e Noguti (2014), o modelo modificado apresenta-se como uma nova atividade no fluxograma e se faz importante a partir do momento que, ouvir os outros ou fazendo a pesquisa bibliográfica, o pesquisador percebe que seu modelo preliminar ficou defasado. Nesse sentido, o modelo modificado da pesquisa é mais abrangente do que o inicialmente proposto, ou seja, nesta pesquisa, o modelo modificado apresentado na página 79 deve conduzir o autor à sua pergunta da pesquisa.

Para Romberg (2007), as quatro primeiras atividades do primeiro bloco são as mais importantes, pois elas destinam-se a situar as ideias de alguém sobre um particular problema no trabalho de outros estudiosos e decidir o que investigar. Para esse autor, as duas atividades seguintes do bloco dois envolvem a tomada de decisão sobre que tipo de evidência coletar e como deve ser feita essa coleta. Os próximos quatro passos têm a ver com dar sentido às informações coletadas e relatar os resultados para outros, antecipando novos trabalhos.

2.4 PRIMEIRO BLOCO DE ROMBERG – A PESQUISA APOIADA NESSA METODOLOGIA

Apresentam-se, nesta seção, as ideias iniciais para o desenvolvimento desta pesquisa. Para isso, seguiu-se o mesmo procedimento apresentado por Romberg (2007). Sendo que essas ideias podem ser alteradas ao longo da pesquisa.

1ª Atividade: Identificação do Fenômeno de Interesse

Romberg (2007, p. 99) disse que “toda pesquisa começa com uma curiosidade sobre um fenômeno particular do mundo real”; assim sendo, essa curiosidade desencadeia a reflexão e a mudança ao longo da trajetória pessoal e profissional do presente autor.

> Dependendo da relação que o professor mantém com o conhecimento, sua prática colabora ou não para a manutenção do status quo [...]. No caso de uma prática que caminha no sentido de transformação da sociedade, o professor assume o dever de contestar a ordem estabelecida, não no sentido de manipulação e menos ainda de dominação, mas no sentido de aproximar, cada vez mais, o aluno em conjunto consigo, da complexidade de teia de relações e da razão de ser do objeto em estudo (FREITAS, CARVALHO, OLIVEIRA, 2012, p.72)

Nesse sentido, o fenômeno de interesse tem origem nas experiências pessoais enquanto docente. Também se sentiu a necessidade de adquirir novas posturas na qualidade de pesquisador, então, para que se pudesse tornar significativa a pesquisa, resolveu-se buscar orientações em algumas tendências da Educação Matemática. A partir daí, desencadeou-se o fenômeno de interesse de ensinar Equações Diferenciais Ordinárias no contexto da Modelagem Matemática, utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas.

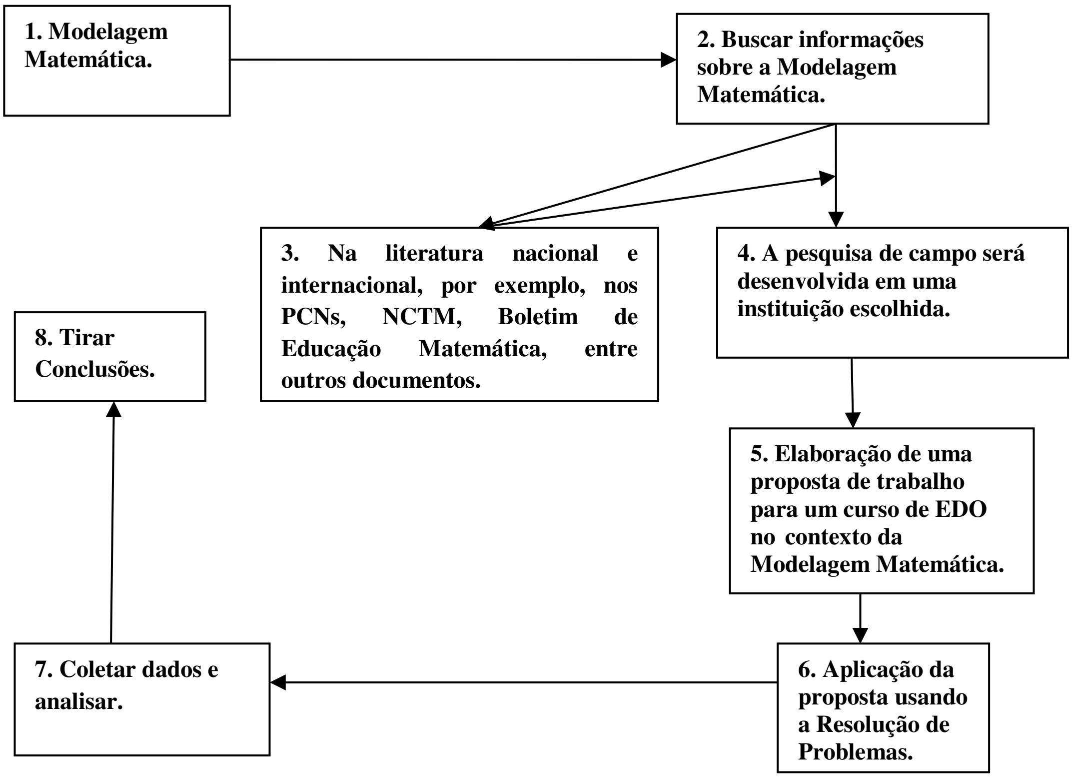
2ª Atividade: Modelo preliminar

No modelo preliminar, o pesquisador tem, como objetivo, organizar a estrutura de sua pesquisa. Romberg (2007, p. 99), falando sobre as atividades de um pesquisador, diz que um investigador “faz suposições sobre certos aspectos importantes como variáveis do fenômeno de interesse e de como esses aspectos estão relacionados”.

Como já foi dito, o modelo preliminar é um GPS que orienta o investigador a trilhar seu caminho, sabendo que podem ocorrer alterações ao longo da pesquisa.

Nessa direção, de início, elaborou-se o seguinte Modelo:

Figura 4 - Modelo Preliminar, desta pesquisa, segundo Romberg.



Fonte: Dados da pesquisa, 2015.

3ª Atividade: Relacionar fenômeno de interesse e o modelo preliminar com ideias dos outros

Depois de elaborado o modelo preliminar, segue-se para o próximo passo que seria o de relacionar as ideias iniciais sobre Modelagem Matemática a partir do pensamento de outros pesquisadores sobre o mesmo fenômeno de interesse. Nessa fase da pesquisa, com o objetivo de obter uma maior familiarização com a Modelagem Matemática, buscaram-se, inicialmente, livros e artigos de pesquisadores renomados na área, como, por exemplo, Bassanezi (2013), Almeida et all. (2013), Barbosa (2001), Biembengut (2009), entre outros. Em seguida, procurou-se entender o pensamento de alguns pesquisadores internacionais. Para isso, foram consultados alguns livros que ajudaram a buscar uma melhor compreensão acerca de como é debatida a Modelagem em âmbito internacional. Entre os livros estudados destacam-se o livro organizado por Blomhjø intitulado Mathematical Applications and Modelling in the Teaching and Learning of Mathematics; o livro Modelling Student's Mathematical Modelling Competencies, de autoria de Richard Lesh, Peter L. Galbraith, Cristopher R. Haines e Andrew Hurford; e o livro Trends in Theaching and Learning of Mathematical Modelling, de autoria de Gabriele Kaiser, Werner Blum, Rita Borromeo Ferri e Gloria Stillman. As leituras feitas nesta fase inicial da pesquisa possibilitaram identificar os tipos de pesquisas mais predominantes na comunidade da Modelagem Matemática e as perguntas de pesquisas já respondidas. Além disso, essas leituras abriram caminhos para a definição da possível pergunta diretriz.

Como o pesquisador também pretende utilizar a metodologia de Ensino-Aprendizagem de matemática através da Resolução de Problemas, durante o curso de extensão de Equações Diferenciais Ordinárias, o mesmo, buscou compreender detalhadamente alguns aspectos referentes a essa metodologia. Para isso, fez algumas leituras de alguns livros mais atualizados sobre o assunto, como por exemplo: Ouchic (1999), Onuchic e Allevato (2005), Onuchic e Allevato (2011), Onuchic e Huanca (2014), Onuchic et all (2014), etc.

Já no contexto da Modelagem Matemática para modelar algumas situações-problema, o pesquisador buscou o embasamento teórico em alguns livros sobre o assunto, como por exemplo, Bassanezi (2013), Biembengut e Hein (2003), Almeida, Silva e Vertuan (2013), Barbosa, Caldeira e Araújo (2007), Meyer, Caldeira e Malheiros (2011), etc.

Assim, percebeu-se que enfrentaria campos diferentes para trabalhar esses dois temas e sentiu-se que cada um deles merecia um trabalho separado. Nesse sentido foi planejado um capítulo para cada um desses temas.

Capítulo 3 – Modelagem Matemática

Capítulo 4 – Resolução de Problemas

3 MODELAGEM MATEMÁTICA

Neste capítulo, em um diálogo com a literatura, foram tecidas algumas considerações referentes a alguns conceitos da Modelagem Matemática, bem como as perspectivas atuais debatidas em âmbito nacional e internacional. Inicialmente, discute-se a Modelagem Matemática na Educação Matemática, abordando os pontos de vista de alguns pesquisadores da área. Em seguida, discorre-se acerca da abordagem da Modelagem na sala de aula de Matemática e Física. Por fim, apresenta-se a Modelagem na formação inicial de Professores de Física e Matemática.

3.1 MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E SUAS PERSPECTIVAS

Tematizar sobre Modelagem Matemática numa dissertação de mestrado implica, de início, a necessidade de explicitar, antes, algumas concepções que fundamentarão o trabalho, a saber: o que é entendido por Modelagem Matemática; como e para que utilizar a Modelagem em sala de aula; qual a origem dessa temática, etc.

Em Houaiss (2009), o termo “Modelagem” significa dar forma a algo por meio de um modelo. Pensando assim, pode-se dizer que a Modelagem Matemática tem como objetivo indicar formas de resolução para problemas por meio de Modelos Matemáticos. Do ponto de vista da Educação Matemática, a ideia de Modelagem vai além dessa noção.

Dentre as discussões encontradas na literatura, destaca-se a potencialidade da Modelagem Matemática não somente para o desenvolvimento do processo de ensino e a aprendizagem de vários conceitos da matemática, mas, também, para a formação crítica-reflexiva dos estudantes ao se depararem com situações-problema ou um problema real.

Para Bassanezi (2013, p. 16), por exemplo,

> [...] a modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real. [...] quando se procura refletir sobre uma porção da realidade, na tentativa de explicar, de entender ou de agir sobre ela, o processo usual é selecionar, no sistema, argumentos ou parâmetros considerados essenciais e formalizá-los através de um sistema artificial: o modelo.

Segundo Almeida, Silva e Vertuan (2013) a inserção da Modelagem Matemática na Educação Matemática não se deu no âmbito da Educação Matemática. Ao contrário, o *habitat* natural da Modelagem Matemática é a área que se convencionou chamar de Matemática

Aplicada, e no interior da qual surgiram os primeiros conceitos e procedimentos do que caracteriza uma atividade de Modelagem.

Para Biembengut (2009), a Modelagem foi transposta para o terreno do ensino-aprendizagem e têm sido amplamente difundida nos últimos trinta anos, com o objetivo de trabalhar problemas reais em sala de aula. De acordo com Borba e Villarreal (2005), ela surgiu a partir das ideias de Paulo Freire e de Ubiratan D'Ambrosio, no final da década de 1970 e começo da década de 1980, quando se tornou notável a valorização que estes pesquisadores davam aos aspectos sociais em sala de aula.

De acordo com Malheiros (2012), foi especificamente na década de 1980, que a Modelagem ganhou força por meio da influência de trabalhos como os de Ubiratan D'Ambrosio, Rodney Bassanezi, João Frederico Meyer, dentre outros. Biembengut (2009), afirma que, por meio desses pesquisadores, discussões, sobre a elaboração de modelos matemáticos em paralelo com outras sobre o ensino da Matemática, contribuíram para que a Modelagem se tornasse uma linha de pesquisa em Educação Matemática. A partir daí, muitas pesquisas que abordam essa temática começaram a ser desenvolvidas.

Nessa variedade de pesquisas que foram e são publicadas, é notória a associação da Modelagem a outras tendências da Educação Matemática e de outras áreas do conhecimento, como, por exemplo, as Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) encontradas nos trabalhos de Diniz (2007), Biologia (SOARES, 2012), Física (MOUTINHO, 2007), Formação de Professores (BARBOSA, 2001), Etnomatemática (KLÜBE, 2007), Pedagogia de Projetos (MALHEIROS, 2008), dentre outras. Nesse contexto, os autores relacionam a Modelagem com outras tendências como possibilidade de interlocução entre outras linhas de pesquisa.

Em relação às tendências em Modelagem Matemática, até algum tempo predominavam duas visões gerais nas discussões internacionais: a pragmática e a científica. Na primeira, é dada ênfase à "resolução de problemas aplicados"; na segunda procura-se estabelecer "relações com outras áreas a partir da própria matemática" (KAISER-MESSMER, apud BARBOSA, 2001, p.3). No entanto, Barbosa (2001) sugere uma terceira corrente, que ele considera de fundamental importância, a sócio-crítica, em que a Matemática e a Modelagem não são fins, mas meios para questionar a realidade vivida.

No cenário internacional, Blomhøj (2008) organizou um trabalho intitulado *Mathematical applications and modelling in the learning of mathematics*. Nesse trabalho, o autor analisou e classificou os 14 trabalhos aceitos para apresentação no *Topic Study Group 21 do 11th International Congress on Mathematical Education – ICME 11.* O autor caracterizou ainda seis perspectivas da Modelagem Matemática encontradas em Kaiser e

Sriraman (2006) denominadas de Realística, Contextual, Educativa, Epistemológica, Cognitiva e Sócio-crítica.

Entende-se, no presente trabalho que, em relação à **Perspectiva Realística,** as situações-problema são autênticas e retiradas da ciência, propiciando aos alunos o desenvolvimento das habilidades de resolução de problemas aplicados. Ela também tem, como ponto de partida, o fato de que os modelos matemáticos estão sendo amplamente utilizados em muitas disciplinas científicas e tecnológicas diferentes e em muitas situações do cotidiano.

Nessa perspectiva, a Modelagem Matemática é vista como a resolução de problemas aplicados e uma forte ênfase é colocada sobre a situação-problema do cotidiano a ser modelado, sendo que o principal critério para o desenvolvimento da aprendizagem dos alunos segundo essa perspectiva, pode-se dizer que é a Resolução de Problemas no contexto da Modelagem Matemática.

Quanto à **Perspectiva Contextual,** segundo Lesh & Doerr (2003), concentra-se em desenvolver e testar modelos de atividades de Modelagem, que são guiados pelos seguintes princípios:

a) O princípio da realidade – a situação-problema deve aparecer significativa para os alunos, e se conectar às suas experiências anteriores;
b) Princípio de construção do modelo – a situação-problema deve criar uma necessidade para os alunos a desenvolver novas construções matemáticas significativas;
c) Princípio inicial da construção – a situação-problema no contexto da Modelagem deve exigir que os estudantes expressem seu pensamento na resolução do problema;
d) O princípio da generalização da construção – neste princípio deveria ser possível a sua generalização ao modelar a situação-problema;
e) O princípio da simplicidade – O objetivo da atividade é identificar como construir um novo conhecimento no contexto da modelagem para que esta seja significativa para o aluno.
f) O princípio da auto-avaliação – a situação-problema deve permitir que os alunos avaliem seus modelos.

Na perspectiva contextual, as situações-problemas são devotadas à construção da teoria matemática, mas sustentadas nos estudos psicológicos sobre sua aprendizagem.

Considerando a **Perspectiva Educacional,** Blomhøj (2008) diz que a ideia principal é a de trabalhar com modelos no contexto da modelagem no ensino-aprendizagem da matemática desde o Ensino Básico até o Curso Superior, relacionando com a cultura escolar e o ambiente sócio-crítico. Nesse sentido, como desafiar as concepções matemáticas dos alunos e como apoiar a sua aprendizagem matemática? Na perspectiva educacional, se propõe integrar situações-problema reais com o desenvolvimento da teoria matemática. Blomhøj (2008), ao se referir à **Perspectiva Epistemológica,** diz que, trabalhando-se com modelagem de fenômenos reais, podem-se construir conceitos e conteúdos matemáticos sem perder de vista os aspectos importantes da epistemologia dos conceitos.

Como um dos objetivos da presente pesquisa é ensinar Equações Diferenciais Ordinárias no contexto da Modelagem Matemática, pretende-se que os participantes da pesquisa compreendam a epistemologia de certos conceitos matemáticos, de modo a fazer-se útil a metodologia de Ensino-Aprendizagem da Matemática através da Resolução de Problemas. Nesse sentido, a perspectiva epistemológica da Modelagem Matemática é subordinada ao desenvolvimento de teorias mais gerais para o ensino-aprendizagem de matemática através da Resolução de Problemas.

Bassanezi (2013) apresenta uma sequência de etapas do processo de Modelagem Matemática à luz do problema epistemológico denominadas Experimentação, abstração, resolução, validação e modificação. Tais etapas são inspiradas na Matemática Aplicada e adaptadas à Educação Matemática. Na perspectiva epistemológica, as situações-problema são estruturadas para gerarem o desenvolvimento da teoria matemática. Já na **Perspectiva Cognitiva,** o interesse principal é entender quais as funções cognitivas que são ativadas nos alunos em uma atividade de Modelagem Matemática. Para Blomhøj (2008) essa perspectiva está intimamente relacionada com a perspectiva educativa e o objetivo é desenvolver a competência matemática no contexto da modelagem. Nessa perspectiva, a tônica reside em contribuir para a estruturação de aspectos que, em resposta à questão de por que fazer Matemática na sala de aula, podem apontar o potencial de atividades de Modelagem Matemática como desencadeadoras de processos de pensamento matemático dos alunos.

Na perspectiva cognitiva, as situações-problema são estruturadas para construir um novo conhecimento visando à aprendizagem do aluno. Outra perspectiva da Modelagem Matemática é a **Perspectiva sócio-crítica** que está direcionada para o estudo de situações-problema que privilegiam a compreensão crítica do mundo, bem como o papel do indivíduo na sociedade. O termo "sócio-crítica", para denotar a Modelagem Matemática na Educação Matemática, foi sugerido por Barbosa (2001), como um reconhecimento às práticas pedagógicas que entendem uma atividade de Modelagem como um ambiente de investigação que possibilita aos alunos não somente o conhecimento matemático, mas, sim, a uma visão crítica da realidade em que estão inseridos.

Nesse sentido, Silva (2012) afirma que a maioria das pesquisas sobre Modelagem apresentam características da perspectiva sócio-crítica, embora não façam nenhuma referência a ela. Nessa perspectiva, Blomhøj (2008), em seu trabalho mencionado acima, identifica quatro trabalhos brasileiros que se destacam nessa linha, a saber: Araújo (2009); Aravena e Caamaño (2009); Barbosa (2009) e Caldeira (2009). Na perspectiva Sócio-crítica, as situações-problema devem propiciar a análise da natureza dos modelos matemáticos e seu papel na sociedade. Essas perspectivas apresentadas acima dão uma ideia que é apresentada na tabela a seguir:

Tabela 1 - Objetivos didáticos e as perspectivas que os contemplam

Objetivo didático	Perspectivas
O desenvolvimento da teoria Matemática	Epistemológica, Educacional e Contextual.
O desenvolvimento das habilidades de resolução de problemas	Realística
A análise da natureza e do papel dos modelos matemáticos na sociedade	Sócio-crítica
A Construção do conhecimento através da Resolução de Problemas.	Cognitiva

Fonte: Dados da pesquisa, 2015.

Para Silva (2012), essas perspectivas não possuem delimitações específicas, podendo, inclusive, uma mesma atividade de Modelagem Matemática contemplar mais de uma delas. Elas pressupõem diferentes condutas para professores e alunos diante das situações-problema que constituem a atividade. Meyer, Caldeira e Malheiros (2013), a partir de uma revisão literária, constataram que, entre todas as perspectivas sistematizadas por Kaiser e Sriraman (2006) e utilizadas por Blomhøj (2008), o que as diferencia, basicamente, é a ênfase na escolha do problema gerador, que pode partir do professor, pode ser um acordo entre professor e aluno ou, então, os estudantes podem escolher o assunto que pretendem investigar.

> Apesar da diversidade constatada, em comum, as diferentes perspectivas de Modelagem Matemática têm como objetivo a resolução de alguns problemas da realidade, por meio do uso de teorias e conceitos Matemáticos. As diferenças se apresentam à medida que se define qual é o objetivo de resolver tal problema, qual é a realidade na qual o problema esta inserido, como a matemática é concebida e se relaciona com essa realidade, etc. (ARAÚJO, 2002, p. 18)

É, nesse cenário de perspectivas diferenciadas, que é encontrada uma variedade de temas que têm sido objeto de pesquisas, as quais têm servido como suporte teórico no contexto da Modelagem.

De acordo com Meyer, Caldeira e Malheiros (2013), essas perspectivas apresentam alguns pontos de convergência. No entanto, existem algumas sutilezas que fazem com que as definições de Modelagem adotadas por diferentes pesquisadores apresentem aspectos diferenciados.

A seguir, serão apresentadas algumas discussões e concepções referentes à Modelagem em Educação Matemática, que subsidiarão o estudo e o aprofundamento da presente pesquisa no contexto da Modelagem Matemática. A maior parte dessas discussões trazem reflexões teóricas, já que a Modelagem é um processo dinâmico de transformação, no qual se procura, num enfoque transdisciplinar, a compreensão desses teóricos.

Para Bassanezi (2013), aplicar a matemática é, principalmente, usá-la para a compreensão dos fenômenos do mundo real. Nesse sentido, as ideias apresentadas por este autor aproximam-se da perspectiva epistemológica. Para Gazzetta (1989), a modelagem é uma relação existente entre a realidade e a ação. Essa autora afirma que, a partir da realidade, o indivíduo codifica uma determinada informação que acaba gerando uma ação. Para ela, a realidade – que é referida nas pesquisas sobre Modelagem Matemática – é formada por elementos concretos e abstratos, e o indivíduo, além de ser parte é, ao mesmo tempo, observador dessa realidade. Essa autora salienta, ainda, que uma atividade de modelagem se inicia a partir de um problema para o qual uma resposta é procurada, e afirma que, nesse contexto, a Modelagem deve ser utilizada como uma ferramenta auxiliar na busca do novo conhecimento matemático.

Segundo Oliveira (2010), a Modelagem pode potencializar a aprendizagem por meio da utilização de problemas do cotidiano, além de favorecer o surgimento de discussões éticas e permitir uma participação efetiva dos alunos nas aulas. Este autor, ao considerar a Modelagem como um ambiente de aprendizagem, afirma que os estudantes são convidados a problematizar ou investigar matematizando situações-problema com referência na realidade com potencialidade de gerar reflexões sobre a presença desta disciplina na sociedade.

Para Skovsmose (2001), a modelagem possibilita superar a "*ideologia da certeza*"[3] e consolidar ideias sobre a Matemática como uma ciência relacionada a diversos assuntos da

[3]Borba e Skovsmose (2001) definem o termo "Ideologia da Certeza" "como uma estrutura geral e fundamental de interpretação para um número crescente de questões que transformam a matemática em uma 'linguagem de poder'" (p. 129).

sociedade, aproximando seus utilizadores com situações-problema reais oriundas de assuntos dos mais diversos meios, seja cultural, político ou social, entre outros. A modelagem evidencia o papel das representações, tanto internas como externas, dos que utilizam a matemática na resolução de problemas no contexto de suas atividades profissionais.

Almeida et all. (2013), diz que a Modelagem Matemática constitui uma alternativa pedagógica na qual se pode fazer uma abordagem, por meio da Matemática, de uma situação-problema não necessariamente Matemática. Essas situações-problema, mencionadas nas pesquisas sobre o tema, encontram-se inicialmente imersas no mundo físico e cultural dos alunos, depois são expressas na linguagem materna e tomam sentido por meio de modelos, a partir dos quais podem ser solucionados.

Para Barbosa (2007), qualquer representação matemática do problema em questão é considerada como um modelo matemático. Assim, um modelo matemático pode ser uma relação, uma equação matemática, um gráfico, uma representação geométrica, uma tabela, entre outros. É, nesse contexto, que a modelagem possibilita aos alunos a busca de representações lógicas matemáticas e de conhecimentos matemáticos que o conduzam a alcançar soluções adequadas às situações propostas. Nesse sentido, a Modelagem Matemática é vista como um meio de promover a construção do conhecimento no ambiente de sala de aula que pode trazer resultados positivos para o processo educativo. Para Caldeira (2009), o processo de Modelagem Matemática é dinâmico, permite ao estudante criar e a estabelecer uma relação entre os modelos matemáticos construídos no contexto de sua realidade.

Barbosa (2009) diz que os modelos matemáticos podem ter diferentes papéis na educação e que sua abordagem é regida por princípios que os posicionam numa certa prática pedagógica, que vem a servir a certos propósitos, tais como o de justificar proposições, estabelecer conceitos e usar a matemática para ordenar fenômenos. Nesse contexto, o autor traz uma reflexão quanto à utilização da matemática como um instrumento ou uma linguagem para o estudo dos fenômenos a partir de modelos. Afirma que não há como situar modelos matemáticos restritamente como instrumentos, pois eles se tornam parte do discurso pedagógico das ciências.

Segundo Almeida e Dias (2004), a Modelagem pode proporcionar aos alunos oportunidades de identificar e estudar situações-problema de sua realidade, despertando maior interesse e desenvolvendo um conhecimento mais crítico e reflexivo em relação aos conteúdos matemáticos. A partir dessas ideias referentes à Modelagem na Educação Matemática, entende-se que a literatura seja composta por três abordagens: *Ensinar sobre*

Modelagem Matemática; Ensinar Para Modelar; Ensinara a modelar através da Resolução de Problemas.

A primeira remete aos trabalhos de Bassanezi (2013); Biembengut (1990, 1999); Meyer (2013); Barbosa (2007); Almeida et all. (2013) entre outros, dando ênfase às quatros fases da Modelagem Matemática: Interação, Matematização, Resolução e Validação. Além disso, nessa fase é imprescindível o entendimento dos procedimentos e dos processos que devem ser seguidos em uma atividade de Modelagem. Esta abordagem é fundamental na formação inicial do professor, pois é a partir dela que os futuros professores começam a tomar conhecimento dos aspectos teóricos referentes à Modelagem. Essa abordagem não é indissociável das demais, uma vez que ao futuro profissional não basta apenas entender o que é modelagem, ele precisa ser orientado e convidado, na formação inicial, a desenvolver suas habilidades de Modelador.

A segunda dá ênfase à aprendizagem gerada a partir da criação dos modelos matemáticos. Compreende-se que essa abordagem faz referência ao desenvolvimento das habilidades dos professores, futuros professores e alunos, como modeladores. Aqui, a ênfase dada à Modelagem herda algumas características da Matemática aplicada. Bassanezi (2013) aponta alguns caminhos de como podemos desenvolver as habilidades de modelador. Este autor afirma que, para trabalhar com esta metodologia em sala de aula, antes de tudo é preciso saber modelar.

A terceira é a que é utilizada durante o ministério de aulas do presente autor. Essa abordagem deve ser associada à primeira e à segunda, uma vez que, para ensinar no contexto da Modelagem, é preciso conhecê-la e ter a habilidade de esboçar modelos matemáticos de uma determinada situação não matemática. Nessa abordagem, o profissional vai colocar em prática na sala de aula o conhecimento adquirido nas anteriores.

Pretende-se, na pesquisa de campo, trabalhar Equações Diferenciais Ordinárias através da Resolução de Problemas no contexto da Modelagem Matemática. Para isso, tentar-se-á relacionar as três abordagens citadas acima. Embora elas não possuam delimitações específicas, percebe-se, inclusive, que algumas pesquisas sobre Modelagem Matemática contemplam mais de uma delas, mesmo sem fazer referência.

Então, a importância de conhecer as características essenciais de cada uma das abordagens da Modelagem Matemática está em determinar o propósito específico de cada uma e identificar as pequenas sutilezas que as tornam diferentes.

A partir da revisão literária sobre a temática deste capítulo, percebe-se que a maioria das pesquisas, apresentadas em diferentes perspectivas, contempla, de forma implícita, uma ou mais de uma dessas três abordagens. Defende-se aqui a ideia de que a modelagem deve ser trabalhada tanto na formação de professores como no ensino básico utilizando essas três abordagens.

Há indícios de que, na maioria das Licenciaturas, apenas a primeira abordagem é trabalhada, fazendo com que o futuro profissional entenda os aspectos teóricos da Modelagem Matemática, mas não desenvolvem as habilidades de modelador, resultando assim em lacunas que contribuem futuramente para a resistência dos professores em não utilizar a Modelagem Matemática.

O leitor já deve ter percebido que são varias as perspectivas da Modelagem na Educação Matemática. Entretanto, o presente autor, na condição de pesquisador, tem que explicitar qual das perspectivas vai utilizar na pesquisa. Para isso, será apresentada, nos próximos parágrafos, a Modelagem Matemática segundo uma perspectiva sócio-crítica fundamentada na Educação Matemática Crítica de Ole Skovsmose.

O objetivo não é fazer apologia à perspectiva sócio-crítica, mas, apresentá-la como uma possibilidade para se trabalhar com a Modelagem Matemática. Apesar de o autor estar tomando partido referente a essa perspectiva, isso não quer dizer que o mesmo, não vá utilizar em sua pesquisa de campo, durante o curso de extensão, outras perspectivas da modelagem.

Skovsmose (2000, p. 63) afirma que,

> Em geral, melhorias na educação matemática estão intimamente ligadas à quebra de contrato didático. Quando inicialmente sugeri desafiar o paradigma do Exercício, isso pode ser visto também como uma sugestão de quebrar o contrato da tradição da matemática escolar.

No Brasil, a perspectiva que predomina na maioria das pesquisas sobre Modelagem Matemática é a sócio-crítica (ARAÚJO, 2009; BARBOSA, 2009; WODEWOTZKI, 2006; CALDEIRA, 2009; ARAVENA E CAAMAÑO, 2009), que tem como base prioritária a Educação Matemática Crítica de Skovsmose e os trabalhos de Paulo Freire e Ubiratan D'Ambrósio.

Antes de apresentar as características de uma atividade de Modelagem, na perspectiva sócio-crítica, é imprescindível, definir-se a Educação Matemática crítica.

Para Meyer (2013), a Educação Matemática Crítica surgiu na década 1980, preocupada, principalmente, com os aspectos políticos da Educação Matemática, e suas discussões giram em torno da questão da democracia.

Segundo Skovsmose (1994), a Educação Matemática Crítica é aquela que reconhece e direciona suas ações para os conflitos e crises da sociedade, reagindo contra eles. Esse autor caracteriza a crise da sociedade com uma série de eventos que são presenciados no mundo: catástrofes ambientais, distribuição desigual de bens e de alimentos, grandes diferenças econômicas e sociais, abuso de poder, tensão entre negros e brancos, ricos e pobres, entre outras.

Entende-se que a Modelagem Matemática baseada nas ideias de Skovsmose (2001) na perspectiva da Educação Matemática Crítica, o diálogo e a democracia devem estar presentes na sala de aula ao se "fazer Matemática"[4]. Assim, na Educação Matemática Crítica, os estudantes possuem grau de envolvimento muito grande no desenvolvimento e no processo educacional. Nesse sentido, a relação existente entre professor e aluno tem papel fundamental.

De acordo com Skovsmose (2000) a Educação Matemática tradicional se enquadra no paradigma do exercício, ao passo que a Educação Matemática Crítica enquadra-se no paradigma da investigação, no qual os alunos são convidados a se envolver em processos de exploração e argumentação de justificativas. Para Skovsmose (2000), a distinção entre esses dois paradigmas é combinada com a diferença de três tipos de referência: referência à matemática, referência a semi-realidade e referência à situação da vida real.

Para Skovsmose (2000) um dos objetivos da Educação Matemática Crítica é o desenvolvimento da materacia, vista como uma competência similar à literacia caracterizada por Freire. Para esse autor, a Materacia não se refere apenas às habilidades matemáticas, mas também à competência de interpretar e agir numa situação social e política estruturada pela matemática. A Educação Matemática Crítica inclui o interesse pelo desenvolvimento da Educação Matemática como suporte da democracia, implicando que as micro-sociedades de salas de aulas de matemática devem também mostrar aspectos de democracia.

Nesse sentido, a Modelagem Matemática, na perspectiva sócio-crítica, tem como objetivo não só desenvolver a teoria da matemática em si, mas, também, desenvolver a Educação como um suporte da democracia, ou seja, a Modelagem torna-se um ambiente de investigação, em que o aluno é convidado a "fazer matemática" através da Resolução de Problemas.

Nessa perspectiva, Skovsmose (1990) distingue três tipos diferentes de conhecimento que podem ser relacionados à Modelagem Matemática: o conhecimento matemático em si; e o conhecimento tecnológico, que se refere a como construir e usar um modelo matemático; e o

---

[4] Para Van de Walle (2000) Fazer Matemática é se envolver em determinada situação-problema não só para obter conhecimentos pontuais e parciais, mas sim para investigar com profundidade um determinado fenômeno.

conhecimento reflexivo, que se refere à natureza dos modelos e os critérios usados em sua construção, aplicação e avaliação.

Na perspectiva sócio-crítica, a modelagem é considerada como ambiente de investigação, que tem como objetivo não apenas o saber matemático, mas também o fazer matemática. O ambiente criado pelo professor não deve ser ameaçador e os alunos devem ser respeitados por suas ideias e convidados a fazer matemática. Os estudantes devem sentir-se confortáveis e sem medo de correr riscos, ou seja, os alunos devem ser desafiados a resolver situações-problemas.

Para Skovsmose (2000) "cenário de investigação" é um ambiente que pode dar sustentação a um trabalho investigativo e apresenta diferentes ambientes de aprendizagem em que há referência à matemática pura, à semi-realidade (entendida como ambiente artificialmente criado) e à realidade propriamente dita. Barbosa (2001) compreende a Modelagem como um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a questionar ou investigar situações com referência à realidade por meio da Matemática.

Entende-se que, na perspectiva sócio-crítica, os estudantes devem aprender matemática, mas para aprender um novo conhecimento matemático devem tomar consciência do mundo no qual está inserido. Os problemas gerados a partir do tema proposto para estudo não devem ser apenas uma meta de aprendizagem matemática, mas também um modo importante de fazê-la.

Na Educação Matemática Crítica de Skovsmose (2000) fica explicito que o papel do professor nos cenários é o de orientar os alunos nas investigações, de forma que a reflexão crítica sobre a matemática e a modelagem matemática ganha um novo significado.

Segundo Araújo (2009), se trabalhar com Modelagem Matemática na Educação Matemática e não se discutir questões, como o uso da matemática na sociedade, a ideologia da certeza e o poder formatador na matemática, pode-se estar contribuindo para a manutenção de uma sociedade injusta. Pensando assim, entende-se que uma vez adotada a Modelagem na sala de aula na perspectiva sócio-crítica, pode-se encorajar o pensamento crítico sobre o papel da matemática na sociedade, sobre o papel e a natureza de modelos matemáticos e sobre a função da modelagem matemática na sociedade.

Quando se faz alusão à Educação Matemática Crítica, logo vem à mente a ideia de reflexão. Mas afinal, o que é reflexão? Para Skovsmose (2014, p.92),

> Reflexões têm a ver com o julgamento de ações (pode-se refletir também sobre descrições, sentenças, teorias e etc., mas vou me restringir aqui às ações). Reflexões podem estar associadas a profundas considerações éticas com respeito a ações e,

> dessa forma, pode ganhar uma conotação filosófica. Entretanto, também cabe conceber a reflexão como algo do dia-a-dia, o simples fato de voltar o pensamento para as ações que se faz. A vida diária exige muitas tomadas de decisão e muitas ações e, assim, está repleta de reflexões.

Para Skovsmose (2000), o ambiente é colocado em termos de "convite", ou seja, pensando assim os alunos podem não se envolver nas tarefas. O ambiente de aprendizagem que o professor organiza pode apenas colocar o convite. O envolvimento dos alunos ocorre na medida em que seus interesses se encontram com esse. Diante disso, observa-se a Modelagem Matemática Sócio-crítica e ressalta-se a ideia de Alrø e Skovsmose (2006), segundo os quais a aprendizagem baseada no contexto da Modelagem tem certas qualidades, ou seja, enfatizando mais os aspectos pessoais e de relacionamento na sociedade. Além disso, os autores citam a teoria de aprendizagem de Carl Rogers, onde a aprendizagem significativa pode ser favorecida no contexto da Modelagem Matemática.

Alrø e Skovsmose (2006), citando Freire e Rogers, também consideram que, trabalhando com a Modelagem, pode-se influenciar a qualidade da aprendizagem. Nesse sentido, o aprendizado pode estar voltado para um propósito socioeconômico particular, ou seja, o processo pode ser definido em função dos conteúdos e das competências exigidas pela sociedade produtiva. Por outro lado, aprender pode significar aprender para a cidadania; e cidadania exige competências que são importantes para uma pessoa particular da vida democrática e para desenvolver a cidadania crítica, ou seja, pensando do ponto de vista sócio-crítico, a Matemática, considerando a razão de sua estrutura lógica, foi construída com base na reflexão matemática.

Quando se alude à Modelagem Matemática sócio-crítica como uma proposta para o processo de ensino-aprendizagem, é imprescindível entender-se como os indivíduos aprendem para, em seguida, abordar-se métodos de ensino que sejam compatíveis com o tipo de aprendizagem.

Nesse sentido, do ponto de vista da psicologia, Moreira (2011) aponta três tipos de aprendizagem denominadas por: cognitiva; afetiva e psicomotora. A primeira resulta no armazenamento organizado de informações na mente do ser que aprende, a segunda resulta de sinais internos ao indivíduo e pode ser identificada com experiências tais como prazer e dor, satisfação ou descontentamento, alegria ou ansiedade. Já o terceiro tipo de aprendizagem envolve respostas musculares adquiridas por meio de treinos e prática. Segundo Moreira (2011), em termos de ensino, pode-se também distinguir três abordagens gerais: comportamentalista (behaviorista), a cognitivista e a humanista.

Segundo esse autor, o ensino baseado na linha comportamental considera o aprendiz, basicamente, como um ser que responde a estímulos que lhe são apresentados.

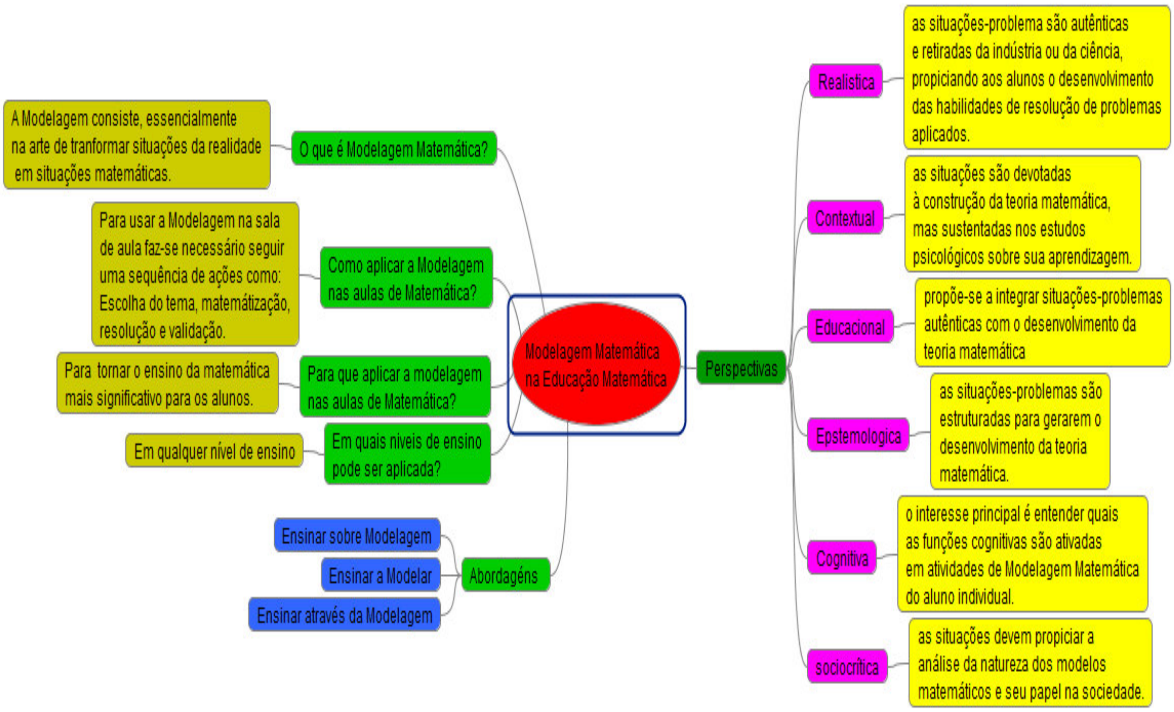
Já na linha cognitivista, Moreira enfatiza o processo da cognição por meio do qual o mundo de significados tem origem. À medida que o aluno aprende, estabelece relações de significados, isto é, atribui significados à realidade em que se encontra.

Na abordagem humanista, Moreira considera o aluno como pessoa primordialmente. Ele é essencialmente livre para fazer escolhas em cada situação. O importante é a autorização da pessoa. O ensino deve facilitar a auto-realização, o crescimento pessoal. Essa linha humanista foi defendida pelo psicólogo Carl Rogers e aproxima-se da perspectiva sócio-crítica que é apresentada nesta seção. Essa abordagem do ensino implica numa aprendizagem por completo, ou seja, essa abordagem do ensino implica uma aprendizagem que transcende e engloba os três tipos de aprendizagem apresentada por Moreira.

Já foram discutidas, na seção anterior, as abordagens de ensino que foram aqui consideradas como de fundamental importância para o trabalho com modelagem em diferentes níveis de ensino: ensinar sobre modelagem, ensinar a modelar e ensinar no contexto da modelagem. Nesse sentido, pretende-se, nesta pesquisa de campo trabalhar com a Modelagem Matemática na perspectiva sócio-crítica. No entanto, o importante para o sucesso de uma aula na qual se usa a Matemática Crítica não é somente seguir ações, mas sim, priorizar a qualidade da aprendizagem no contexto da Modelagem Matemática, fazendo uso da Resolução de Problemas.

Finaliza-se essa seção, sumarizando, de forma simplificada, as principais ideias que foram apresentadas aqui, no seguinte mapa conceitual:

Figura 5 - Mapa conceitual



Fonte: Dados da pesquisa, 2015.

Com o mapa conceitual apresentado na figura 4, tentou-se resumir os principais conceitos[5] da Modelagem Matemática utilizados nesta pesquisa. Para isso, apresentam-se as perspectivas atuais da Modelagem e o entendimento desse tema segundo cada perspectiva. Além disso, apresentaram-se algumas abordagens da Modelagem e as respostas para algumas perguntas, como: O que é Modelagem Matemática? Como aplicar a Modelagem em sala de aula? E para que aplicar a Modelagem em sala de aula?

3.2 A MODELAGEM MATEMÁTICA NA SALA DE AULA

Nesta seção objetivou-se descrever os procedimentos de uma atividade de Modelagem Matemática, ou seja, como usar a Modelagem Matemática em sala de aula com fundamento nas ideias de alguns autores (ALMEIDA, 2013; BIEMBENGUT; HEIN, 2013; MEYER, 2013; BARBOSA, 2007; BASSANEZI, 2013; SADOVSKY, 2007; RIBEIRO, 2009), que têm apontado a Modelagem Matemática como uma possibilidade para se trabalhar a

[5]Filosoficamente, entende-se por conceito uma ideia abstrata e geral.

Matemática nas escolas e substituir o "paradigma do exercício"[6]. Para eles, a Modelagem Matemática pode ser entendida como a habilidade de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real.

De acordo com Blum (apud BARBOSA, 2003, p. 67), as principais razões para a inclusão da Modelagem na sala de aula são: motivação; facilitação da aprendizagem; preparação para utilizar a matemática em diferentes áreas; desenvolvimento de habilidades gerais de exploração; compreensão do papel sociocultural da matemática. Diversas pesquisas sobre Modelagem Matemática têm apresentado uma sequência de etapas a serem seguidas no processo da resolução de um problema real. Consideram-se como representativas, as razões expostas por Almeida, Silva e Vertuan (2013, p.15) no contexto da Modelagem Matemática, as fases relativas ao conjunto de procedimentos necessários para configuração, estruturação e resolução de uma situação-problema, cujas etapas esses autores caracterizam como: "Interação, Matematização, Resolução, Interpretação de Resultados e Validação".

Para Almeida, Silva e Vertuan (2013), a **interação** é o primeiro contato que o aluno tem com a situação-problema que se pretende estudar com a finalidade de conhecer características e especificidades da situação. Pretende-se, então, nessa etapa, cercar-se de informações sobre essa situação por meio de coleta de dados quantitativos ou qualitativos, seja mediante contato direto ou indireto. Esses autores também dizem que a interação conduz à formulação do problema e à definição de metas para sua resolução. Assim, a escolha de um tema e a busca de informações ao seu respeito constitui o foco central desta fase.

Na segunda etapa, **matematização**, o objetivo principal é a transformação de uma representação da "linguagem natural" para uma "linguagem matemática". Essa transformação apresenta evidências do problema a ser resolvido, ou seja, existe a transição de linguagens. Neste trabalho, a matematização é entendida como uma forma de dar significado matemático na compreensão do problema real.

Para Almeida, Silva e Vertuan (2013), a terceira etapa, **resolução,** consiste na elaboração de um modelo matemático com o objetivo de descrever a situação eleita para estudo, permitir a análise dos aspectos relevantes da situação e responder às perguntas formuladas sobre problemas a serem investigados na situação, ou seja, confrontar o modelo e a sua interação.

---

[6] Skovsmose (2000) denomina de "paradigma do exercício" às atividades em que os alunos não são convidados a se envolverem em processo de exploração e argumentação, tal paradigma faz referência à mecanização da matemática.

A última etapa, **interpretação dos resultados e validação,** consiste em uma reflexão sobre os modelos encontrados na resolução. Nessa etapa, além da capacidade de construir e aplicar modelos, os alunos, juntamente com o professor, vão analisar se os modelos criados representam a situação eleita para o estudo.

Bassanezi (2013) apresenta outra sequência que tem pontos em comum com as ideias de Almeida, Silva e Vertuan. Esse autor entende que uma atividade de Modelagem Matemática deve seguir a seguinte ordem: Experimentação; abstração; resolução; validação e modificação. Não serão apresentadas, aqui, as definições de cada uma dessas fases, mas, convidado está o leitor a pesquisá-las em Bassanezi (2013).

Algumas pesquisas defendem a ideia de que essas etapas devam ser seguidas nessa sequência. Advoga-se, aqui, que em uma atividade de Modelagem Matemática é imprescindível a utilização dessas etapas, mas, não necessariamente, de maneira sequencial.

A literatura deixa claro que uma atividade de Modelagem Matemática tem como objetivo resolver uma situação-problema não matemática a partir dos conceitos da Matemática. Nessa situação em que é resolvido um problema do mundo real por meio da Matemática, costuma-se dizer que se está "aplicando a Matemática", ou seja, emprega-se a Matemática aplicada. Os termos "aplicações e modelagem" frequentemente são mencionados para designar as formas pelas quais se conecta a Matemática à realidade. Nesse sentido, é imprescindível ser apresentada a diferença existente entre esses dois termos.

A *Modelagem* tem como objetivo principal transformar situações do mundo real em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas com linguagem usual e todo processo envolvido para solução é valorizado. A *aplicação* faz o caminho contrário, pois utiliza a Matemática para resolver problemas do mundo real, valorizando, em particular, situações que são acessíveis a um tratamento matemático e para as quais existe um modelo matemático correspondente. Essa diferença tem gerado algumas divergências de ideias entre os autores (BORBA; MENEGHETTI; HERMINI, 1999; ALMEIDA, 2013; MEYER, 2013; SKOVSMOSE, 2000, 2001; BARBOSA, 2001; BEAN, 2001; BASSANEZI, 2002; ARAUJO, 2002; BIEMBENGUT; HEIN, 2003). No entanto, as ideias deles convergem quando o assunto são os benefícios da Modelagem Matemática para a formação dos alunos.

Muitas das pesquisas com a temática Modelagem na Educação Matemática têm alimentado, ao longo do tempo, a ideia de que a Modelagem não pode ter a característica da Matemática Aplicada. Uma das justificativas para esse fato diz que, na Modelagem, aos olhos da Educação Matemática, o aluno aprende a partir de uma situação não matemática. Já na Modelagem, no âmbito da Matemática Aplicada, os alunos aplicam a Matemática para solucionar problemas de outras áreas. Entende-se, aqui, que todas as atividades de Modelagem sejam uma atividade que, inevitavelmente, tem características da Matemática Aplicada.

> A atividade de Modelagem é entendida, geralmente, como um movimento que parte do mundo dito real, focando uma situação específica desse mundo, fase inerente ao próprio método científico que envolve interpretações, intuições e crenças sobre esse mundo, e traduzindo-a em um modelo através de um processo de matematização. Assim, do ponto de vista da Matemática Aplicada, a modelagem matemática é concebida como um método científico de pesquisa que "alia teoria e prática, motiva seu usuário na procura do entendimento da realidade que o cerca e na busca de meios para agir sobre ela e transformá-la" (BASSANEZI, 2013, p.17).

Essa mesma concepção é mantida em sua essência, passando por adaptações em função das necessidades pedagógicas de cada nível de ensino em que é abordada.

Nos estudos empreendidos, durante a presente pesquisa na literatura nacional e internacional em relação à Modelagem Matemática, percebeu-se que alguns autores denominam a Modelagem de "metodologia", outros de "ambiente de aprendizagem", "ambiente de educar matematicamente", etc. Defende-se aqui, que o ensino da matemática deve-se dar no contexto da Modelagem Matemática, pela qual se possibilita ao professor, por meio de um ambiente de investigação, dar sentido aos conteúdos da Matemática, relacionando-os com atividades não matemáticas da realidade.

Ribeiro (2009) disse que, tomando como bases as definições de Modelagem apresentadas pelos diferentes autores, é possível identificar, em cada uma delas, marcadamente, a formulação e a Resolução de Problemas como uma atividade inerente ao contexto da modelagem; segundo ela, a partir de uma situação-problema, pode-se chegar à elaboração de um modelo.

Essa característica, central na modelagem matemática, segundo essa autora, permite que outras atividades não ancoradas em formulação e resolução de problemas não sejam confundidas com atividades de modelagem, como é muito comum ocorrer. Essa autora ainda diz que, frequentemente, encontram-se professores declarando que estão realizando propostas de modelagem matemática e, no entanto, muitas delas não poderiam ser assim denominadas, pois não contemplam aspectos como a problematização e a resolução de problemas na essência de suas atividades.

Para Almeida, Silva e Vertuan (2013), o debate acadêmico relacionado à Modelagem na Educação Matemática, tanto em termos práticos como de pesquisas, tem dado ênfase às discussões que tratam do papel do professor e do aluno no desenvolvimento das atividades de Modelagem na sala de aula.

> Um aspecto que também tem causado questionamento na introdução de atividades de Modelagem Matemática, especialmente por parte de professores, diz respeito à identificação do problema a ser investigado por meio da atividade. A quem compete a definição do problema? Essa é uma questão que, por vezes, inquieta professores, conduzindo também a outra não menos conflituosa: O que eu faço é modelagem? (ALMEIDA, SILVA e VERTUAN, 2013, p.24-25)

De acordo com esses autores, não existe um consenso na literatura quanto à escolha do tema a ser investigado. As considerações em torno da escolha do tema vêm sendo orientadas pela expectativa de que a escolha pode despertar o interesse do aluno pela atividade. No entanto, o professor poderia escolher o tema que também motivasse seus alunos.

Procura-se argumentar aqui, que a escolha do tema a ser investigado em uma atividade de Modelagem, fundamenta-se em Bassanezi (2013, p.46) "a escolha final dependerá muito da orientação do professor que discursará a exequibilidade de cada tema, facilidade na obtenção dos dados, visitas bibliográficas, etc."

Há indícios de que a ideia de o tema ser escolhido pelos alunos causa insegurança nos professores, uma vez que o tema eleito para estudo possa ser complexo ao relacionar com conteúdos da Matemática. Por isso, advoga-se, nesta presente dissertação, que o professor sugira temas da realidade pelos quais, ao relacioná-los com a Matemática, não tenha como objetivo único trabalhar os conteúdos da própria disciplina, mas, também a conscientização social dos alunos sobre o tema da realidade, e por que não levar um tema que atenda ao currículo da matemática?

Baseados nas ideias de Bassanezi e Biembengut (1995) poder-se-ía desenvolver uma atividade de Modelagem da seguinte forma:

a) Escolher um tema central para ser desenvolvido;
b) Recolher dados gerais e quantitativos que ajudem na elaboração de hipóteses;
c) Elaborar situações-problema ou modelos;
d) Selecionar as variáveis envolvidas nos problemas e formular as hipóteses;
e) Sistematizar os conceitos que serão utilizados para a resolução das situações-problema ou modelos que fazem parte do conteúdo programático.
f) Interpretar a solução (analisar e, se possível, graficamente);
g) Avaliar os modelos.

A partir das ideias de Barbosa (2001), entende-se que os casos de Modelagem podem ser classificados de três diferentes formas:

1. **Caso 1**. O professor apresenta o problema, traz as informações, cabendo aos alunos a resolução do problema.

2. **Caso 2**. O professor apresenta o problema geralmente de outra área da realidade, ficando a cargo dos alunos o levantamento dos dados para a resolução de problemas.
3. **Caso 3**. Os alunos são responsáveis pela escolha do tema não-matemático de seu interesse, coleta dos dados, criação do modelo, resolução e validação via trabalho de projetos.

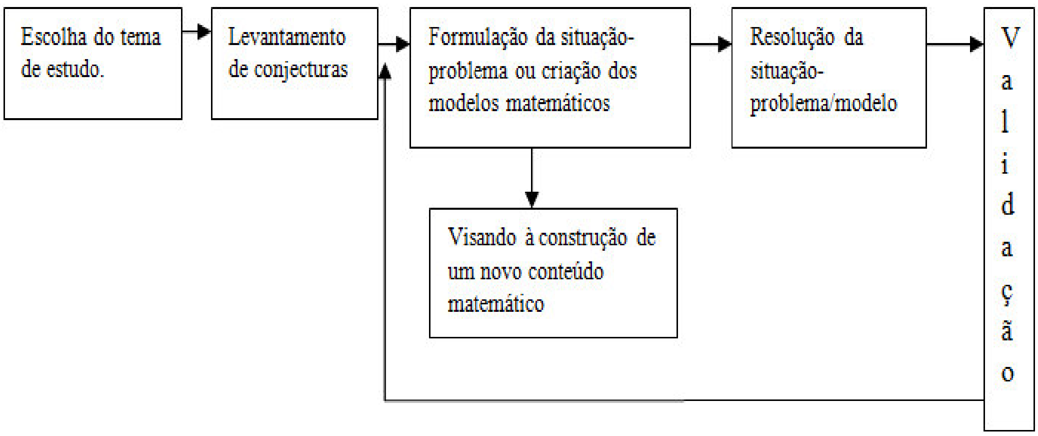
Esses três casos são apresentados como possibilidade de trabalhar a modelagem em sala de aula. O importante é que a sala de aula se torne um ambiente onde os alunos, juntamente com o professor, sejam convidados a investigar com profundidade um determinado fenômeno eleito para estudo.

Bassanezi (2013, p. 38) afirma que o fenômeno a ser modelado deve servir de "pano de fundo ou motivação" para o aprendizado dos conteúdos matemáticos e, também, que as discussões sobre o tema favorecem a formação do indivíduo como elemento ativo no seu contexto social. Esse autor defende, então, que esta forma é uma maneira de dar significado matemático ao conteúdo trabalhado.

Refletindo, nos teóricos que defendem a Modelagem como um tema de estudo para a sala de aula, entende-se que, nas primeiras experiências com a Modelagem, é preferível optar por um tema proposto pelos alunos ou principalmente pelo professor, pois as experiências com vários temas mostram que os professores têm dificuldades para orientar e, assim, como decorrência, não atingem os objetivos esperados.

Na figura a seguir apresenta-se um esquema no contexto da Modelagem Matemática

Figura 6 - Etapas da Modelagem em Sala de Aula



Fonte: Dados da pesquisa, 2015.

É bem verdade, que o trabalho com Modelagem Matemática na sala de aula, requer tempo. Como todos sabem, o tempo das aulas de matemática é curtíssimo, levando alguns professores a resistirem ao uso dessa metodologia em sala de aula. Nesse sentido, entende-se que a modelagem e qualquer outra metodologia de ensino não podem ser consideradas como únicas alternativas para o ensino de Matemática. Em alguns momentos durante as aulas, a lousa e o pincel ainda são ferramentas de fundamental importância para o ensino dessa disciplina, desde que, os alunos também tenham oportunidade de construír seus próprios conhecimentos.

3.3 A MODELAGEM MATEMÁTICA PARA A FORMAÇÃO INICIAL DO PROFESSOR DE FÍSICA E MATEMÁTICA

As pesquisas têm apresentado a Modelagem Matemática como uma proposta promissora para o processo de ensino-aprendizagem da matemática. Sendo assim, alguns autores e o próprio Ministério da Educação (MEC) defendem um ensino que tenha como objetivo formar os alunos como cidadãos críticos, reflexivos e capazes de resolverem problemas e de exercerem sua cidadania. Como alcançar esses objetivos? Para Meyer, Caldeira e Malheiros (2013, p.60) "a Modelagem é um dos caminhos, mas, para isso, é necessário que os professores de Matemática sejam formados para que possam levar isso para a sala de aula".

Algumas pesquisas fazem referência à Modelagem Matemática na formação inicial e continuada, dentre elas destacam-se Barbosa (2001); Almeida (2004), Silva (2007) e Oliveira (2010). Nas investigações sobre a formação inicial, esses autores reforçam a ideia de que é preciso que a Modelagem seja incorporada, na prática, nos cursos de Licenciatura em Matemática. Atualmente, há indícios de que, nos cursos de Licenciatura, o único contato que os estudantes têm com Modelagem Matemática limita-se a algumas leituras sobre o assunto.

Tal fato tem contribuído para o estacionamento dos futuros professores quanto a aspectos teóricos da Modelagem, gerando, assim, insegurança para trabalhar em sala de aula. Nesse sentido, Malheiro (2012) afirma que é necessário ler e discutir sobre Modelagem, mas não é o suficiente. Essas ideias foram justificadas mediante o argumento de que é preciso fazer Matemática no contexto da Modelagem, nas diferentes disciplinas presentes no currículo.

Um curso sobre Modelagem Matemática vai além das leituras, é preciso pôr a mão na massa e desenvolver as habilidades de modelador. Segundo Silva (2007), a Modelagem deve contribuir com a mudança de concepções dos licenciandos sobre o ensinar e o aprender, além de apontar caminhos para uma formação que permita a construção de um profissional criativo, reflexivo, autônomo, colaborativo e pesquisador de sua própria prática.

Portanto, acredita-se que, além das leituras trabalhadas na Licenciatura sobre Modelagem, devem ser seguidas, pelo professor formador, duas ações fundamentais para a formação inicial de professores: ensinar sobre modelagem e ensinar a modelar. Na primeira, as ações permitem que os estudantes se familiarizem com a Modelagem e a segunda faz com que a Modelagem passe a ser

> [...] fonte de reflexão sobre seu potencial no processo de ensino e aprendizagem da Educação Básica, sobre os argumentos que a constituem como estratégia de ensino, sobre os obstáculos à sua implementação, sobre sua essência enquanto processo investigativo, sobre sua viabilidade, sobre os caminhos para sua implementação, entre outros. (SILVA, 2007, p. 226).

Há evidências de que, em muitos dos cursos de formação, a modelagem não têm surtido o efeito desejado na prática docente. Silveira (2007) constatou que vários programas de formação inicial e continuada sobre Modelagem na Educação Matemática são oferecidos para os futuros professores e professores em exercício. Segundo ele, ainda que os professores acreditem na potencialidade da Modelagem, os programas não resultam em mudanças significativas na prática cotidiana de sala de aula. Afirma ainda que, talvez, melhor do que dizer aos professores o que deve ser feito, seja fazer junto com eles.

Nesse sentido, Ferreira (2010, p. 3) lista vários problemas que podem dificultar a adoção da Modelagem por parte da maioria dos professores. Tais problemas foram apresentados pelos próprios professores da Educação Básica que foram entrevistados por esse pesquisador:

> O currículo é previamente estabelecido não dando oportunidade de o professor variar suas metodologias de ensino, pois é necessário cumprir o programa, que é inflexível; falta de apoio da escola no sentido de propiciar condições para a prática de ensino alternativa; insegurança e falta de domínio para adotar a metodologia de Modelagem; a desmotivação por parte dos professores que exercem uma carga excessiva de trabalho; falta de interesse por parte dos alunos, indisciplina; falta de tempo para a elaboração de projetos de ensino alternativos; resistência por parte dos outros professores da área que preferem o ensino tradicional e se opõem à tentativa de se buscar novas metodologias de ensino.

Dos problemas apresentados por Ferreira, o que mais se destaca é a insegurança dos professores que, mesmo ao final dos cursos de formação, ainda apresentam dúvidas sobre a aplicação das fases da Modelagem Matemática em sala de aula. Nesse sentido, acredita-se que essas dificuldades se explicam pelo fato de os professores, após os cursos, se depararem com algumas dúvidas que surgem e por sentirem medo de não conseguirem relacionar conteúdos da matemática com as situações reais escolhidas pelos alunos.

Foi pensando nesses problemas que se quis desenvolver esta pesquisa com futuros professores de Física e Matemática. Acredita-se que essa escolha se justifica pelo fato de a resistência, tanto de futuros professores quanto de alguns professores em relação à utilização de algumas metodologias de ensino, ser decorrente de lacunas derivadas de sua formação.

Barbosa (2001) discute as implicações da formação inicial de docentes na preparação do professor para desenvolver atividades de Modelagem em sala de aula e chama atenção para a necessidade de os cursos de Licenciaturas incorporarem essa temática em seus currículos, defendendo que, para efetivá-la, o professor precisa estar familiarizado com a Matemática no contexto da Modelagem.

Almeida e Dias (2003) chamam atenção para a importância de se introduzir atividades de Modelagem no curso de formação inicial (Licenciatura em Matemática) por meio de disciplinas especificas ou em outras disciplinas do currículo, com o intuito de proporcionar, aos futuros professores, experiências e perspectivas afetas ao uso da Modelagem Matemática em sua prática profissional.

Atualmente, muitas pesquisas em Educação Matemática têm, como foco principal, a formação de professores, seja em nível inicial ou continuada. Segundo Bisognin e Bisognin (2012), a divulgação dos resultados dessas pesquisas tem impulsionado a melhoria dos programas de formação e a vivência de experiências inovadoras. Dentro dessa temática, diversos pesquisadores têm apresentado a Modelagem Matemática como uma proposta promissora para a formação de professores de matemática (BARBOSA, 1999, 2002; BASSANEZI, 2002; OLIVEIRA, 2010, 2010; ALMEIDA, 2004; DIAS, 2005; entre outros).

As ideias desses autores apresentadas nessas pesquisas convergem no sentido de serem favoráveis à aplicação da Modelagem na formação docente. No entanto, existem pequenas sutilezas referentes às concepções da Modelagem que as tornam diferentes, ou seja, de uma maneira ou de outra essas pesquisas têm contribuído, significativamente, para o desenvolvimento dos cursos de formação.

Em relação à Modelagem Matemática na formação inicial, Bisognin e Bisognin (2012) desenvolveram uma pesquisa que tinha como objetivo analisar e interpretar as respostas de professores que concluíram um curso de Mestrado em Ensino de Matemática e defenderam suas dissertações utilizando a Modelagem Matemática. Nessa pesquisa, os professores participantes relataram o quanto a Modelagem Matemática tem contribuído para a atuação prática nas aulas de matemática, e apresentaram as dificuldades que encontraram para trabalhar com essa abordagem. Dentre as dificuldades, destacam-se: o tempo insuficiente; a falta de leitura; turmas cheias, etc.

A partir da fala dos professores, essas autoras destacam três eixos principais: possibilidade de mudanças na prática dos professores; dificuldade no exercício da docência com Modelagem Matemática; e repercussões na aprendizagem docente e discente.

Silva (2006, p. 2) destaca, por sua vez, dois tipos de ações referentes à Modelagem Matemática na formação de professores, a saber: ações de vivências da Modelagem e ações didático-pedagógicas de Modelagem. Na primeira ação, a autora aponta "a leitura, discussão, análise e reflexão sobre textos com a temática da Modelagem". Essa autora entende que a teoria e a prática precisam ser pautadas numa interlocução permanente a partir de referências bibliográficas atualizadas.

O presente autor concorda com a necessidade de se usar a Modelagem Matemática na formação inicial de professores. No entanto, é preciso focar no processo de incorporação da Modelagem na prática docente e instaurar uma nova cultura profissional que dê condições para que os professores sejam reflexivos, críticos, colaboradores e investigadores.

Até aqui, nas reflexões já empreendidas em relação à formação inicial no contexto da Modelagem Matemática, entende-se que esta não deve se limitar simplesmente a produzir conhecimento sobre Modelagem Matemática, mas, procurar incorporá-la na prática do professor. Para isso, pretende-se abordar, na pesquisa de campo, três tipos de ações: ensinar sobre modelagem, ensinar para modelar e ensinar a modelar através da resolução de problemas.

Nas próximas subseções, fundamentar-se-á o que se entende por essas três ações. Isso será feito aos poucos, à medida que forem sendo trazidas algumas pesquisas realizadas nesse sentido.

3.3.1 Ensinar sobre Modelagem na Formação do Professor

Quando aqui se faz referência ao termo "ensinar sobre Modelagem", é apresentada uma ação teórica da Modelagem Matemática dentro da formação de professores.

> A Modelagem Matemática constitui-se como uma situação didática capaz de propiciar um ensino com maior motivação, facilitação da aprendizagem, preparação para utilizar a matemática em diferentes áreas, desenvolvimentos gerais de exploração e compreensão do papel sociocultural da matemática. (BARBOSA, 2004, p. 2).

O argumento de Barbosa sugere a valorização da Modelagem Matemática na formação inicial de professores. No entanto, diante de tais necessidades, é importante definir-se quais as teorias que devem ser integradas na formação de professores e discutir a qualidade dessas teorias, ou seja, buscar uma compreensão melhor sobre a Modelagem.

Nessa ação, os formadores devem deixar claro para os alunos as respostas das seguintes perguntas: O que é Modelagem Matemática? Como usar a Modelagem Matemática em sala de aula? E para que usar a Modelagem Matemática? Essa ação não é suficiente para a ação prática.

3.3.2 Ensinar Para Modelar na Formação do Professor

Bassanezi (2013), a partir de suas experiências com Modelagem Matemática, disse que a maior dificuldade na adoção do processo de Modelagem, pela maioria dos professores de matemática, é a transposição da barreira criada pelo ensino tradicional onde o objetivo de estudo é quase sempre bem delineado, obedecendo a uma sequência de pré-requisitos e que vislumbra um horizonte claro de chegada. Para ele, esse horizonte é muitas vezes o cumprimento do programa da disciplina, ou seja, primeiro se ensina para depois modelar um problema.

Nesse sentido, esse autor apresenta algumas técnicas de Modelagem que podem possibilitar, ao professor, romper com essa barreira. Bassanezi defende a ideia de que, na formação inicial, os futuros professores desenvolvam a capacidade de modeladores. Para isso, na formação inicial ou continuada, deve predominar o paradigma ensinar para modelar.

Bassanezi (2013, p. 44) diz, ainda, que é possível ensinar Modelagem Matemática "[...] diríamos que a melhor maneira de se aprender modelagem matemática é fazendo modelagem e, de preferência, juntamente com alguém mais experiente".

3.3.3 Ensinar a Modelar através da Resolução de Problemas na Formação do Professor

Quando se emprega a expressão "Ensinar a Modelar", defende-se a ideia de que, na formação inicial, deve ser criado um ambiente de investigação em que os futuros professores não tomem conhecimento apenas da teoria referente à Modelagem, mas como também desenvolvam suas habilidades de Modeladores.

Essa ideia aqui defendida é reforçada por Barbosa (2004), ao afirmar a importância de oportunizar aos docentes a vivência de experiências como alunos e como professor.

> No primeiro caso, como aluno, ele deve desenvolver diferentes atividades de Modelagem, ou seja, aprendendo a modelar, já no segundo, como professor, deve realizar atividades de Modelagem com seus alunos através da Resolução de Problemas, sendo responsável pela ação na sala de aula. (BISOGNIN, 2012, p.279)

Nessa ação, a situação-problema deve ser considerada como o ponto de partida na construção de um novo conhecimento matemático no contexto da modelagem matemática. Também se pode reconstruir, nessa ação, a capacidade do futuro professor de refletir sobre sua própria prática, aquela que aprendeu durante sua graduação.

D'Ambrosio (1998), ao se referir à prática do professor em sala de aula, comenta que, à medida que se vai exercendo a crítica sobre a prática, mesclada com observações e reflexões teóricas, vão se dando elementos para aprimorá-la.

O ponto central de interesse, ao se trabalhar o processo de ensino-aprendizagem de matemática no contexto da Modelagem Matemática, baseia-se na ideia de que a razão mais importante para esse tipo de ensino é a de ajudar os alunos a enxergarem o sentido da matemática no seu dia-a-dia e a desenvolverem um conhecimento crítico reflexivo.

Quando se faz a opção de ensinar no contexto da Modelagem Matemática, o professor deve desempenhar o papel de orientador. Almeida, Silva e Vertuan (2013) apresentam alguns significados acerca do que seja um professor orientador.

> (a) Orientar é indicar caminhos, é fazer perguntas, é não aceitar o que não está bom, é sugerir procedimentos; (b) Orientar não é dar respostas prontas e acabadas, orientar não é sinalizar que "vale-tudo"; (c) Orientar não é esperar que o aluno simplesmente siga exemplos; (d) orientar não é livrar-se de estudar, de se preparar para o exercício da função; (e) orientar não é despir-se da autoridade de professor. (ALMEIDA, SILVA e VERTUAN, 2013, p.24).

Nessa ação, entende-se que o professor deve explorar o tema eleito para estudo e propor novos problemas relacionados a ele. Sendo assim, esse professor está transformando a atividade de Modelagem em um ambiente de investigação, em que os alunos são convidados a desenvolver o conhecimento crítico e reflexivo através de uma situação-problema.

Entende-se, aqui, que ensinar matemática no contexto da Modelagem Matemática seja uma alternativa pedagógica que pode ser definida mediante o uso de cinco termos básicos: situação-problema; situação real ou semi-real; proposição; resolução; e investigação.

3.3.4 O Desenvolvimento Profissional dos Professores de Matemática

Ao refletir sobre as considerações apresentadas anteriormente pelos autores que discutem a Modelagem na Formação do Professor, acreditou-se que, na pesquisa de campo empreendida, na qualidade de professores formadores, todos têm que desenvolver um ensino coerente com as condições do aprendiz. Sendo assim, fundamentar-se-ão as ações da pesquisa que serão realizadas em campo nos documentos apresentados pelo NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS - NCTM (Conselho Nacional de Professores de Matemática) em especial a uma seção referente às NDPPM[7]

Segundo o NCTM (1994), as Normas para o Desenvolvimento Profissional dos Professores de Matemática dirigem-se às necessidades dos alunos em formação inicial e dos professores em serviço desde o pré-escolar até o final do Ensino Médio. Essas normas aplicam-se aos programas de Formação de Professores de Matemática, quer se trate de formação básica, quer se trate de estudos avançados. Aplicam-se também a uma grande variedade de seminários de formação continuada, sessões práticas e outras experiências de aprendizagem com que os professores de Matemática se confrontam durante sua formação e carreira.

As Normas para o Desenvolvimento Profissional dos Professores de Matemática integram um documento importantíssimo criado pelo NCTM com objetivos direcionados para a formação do professor. Nesse sentido, torna-se indispensável, para um professor de Licenciatura, a leitura desse documento.

Sendo assim, foram compilados, na íntegra, alguns trechos referentes às normas para o desenvolvimento profissional dos professores de Matemática.

A primeira Norma, **Experimentar um Bom Ensino da Matemática,** inicia-se destacando que os professores de Matemática e de Educação Matemática, envolvidos em programas de formação inicial ou continuada, devem apresentar um bom modelo do ensino da matemática,

a) Propondo atividades matemáticas adequadas;
b) Envolvendo os futuros e atuais professores no discurso matemático;
c) Realçando o discurso matemático através do uso de grande variedade de ferramentas, incluindo calculadoras, computadores, modelos físicos e representação gráfica;

[7] Normas para o Desenvolvimento Profissional dos Professores de Matemática.

d) Criando ambientes de aprendizagem que apoiem e encorajem o raciocínio matemático e as tendências e aptidões dos professores para fazer matemática;
e) Encorajando os futuros e atuais professores a correr riscos intelectuais ao fazer matemática e trabalhar cooperativamente mas também de forma independente; tendo expectativas positivas a este respeito;
f) Apresentando a matemática como uma atividade humana permanente;
g) Assegurando e apoiando a participação plena e o estudo continuado da Matemática por todos os estudantes.

Assim, os professores de Matemática e de Educação Matemática devem, em toda e qualquer situação, estar atentos aos principais componentes do ensino – atividades, discurso, ambiente e análise do ensino – discutidos na primeira seção do primeiro documento do NCTM, "Normas para o ensino-aprendizagem da Matemática". Esta visão do ensino implica uma mudança importante: a aula de matemática deixa de ser exposição e demonstração para passar a ser participação e envolvimento. Os professores não se limitam a "descarregar" conteúdos, pelo contrário, facilitam aos que estão a aprender a construção do seu próprio conhecimento em Matemática.

Para o NCTM, a formação em Matemática e Educação Matemática deve fazer com que todos os que estão a aprender experimentem a matemática como um empenhamento dinâmico na Resolução de Problemas. Estas experiências devem ser planeadas deliberadamente para ajudar os professores a repensar a sua concepção da matemática, sobre o que deve ser uma aula de matemática, e como se aprende matemática. O ensino deve ser organizado em torno da procura de soluções para problemas e deve incluir constantes oportunidades para falar acerca da matemática através da Resolução de Problemas.

Na segunda norma, **Saber Matemática e Conhecer a Matemática Escolar**, o NCTM dispõe que a formação dos professores de Matemática deve desenvolver o seu conhecimento quanto ao conteúdo e ao discurso matemático, incluindo:

a) Conceitos e procedimentos matemáticos e as conexões entre eles;
b) Múltiplas representações dos conceitos e dos procedimentos matemáticos;
c) Tipos de raciocínio matemático, formas de resolver problemas e de comunicar matemática eficazmente em diferentes níveis de formalidade;

E, além disso, desenvolver as suas perspectivas sobre:

a) A natureza da matemática, as contribuições de diferentes culturas para o desenvolvimento da matemática, e o papel da matemática na cultura e na sociedade.

b) As mudanças na natureza da matemática e na forma como se ensina, se aprende e se faz matemática como resultado da tecnologia disponível;
c) A matemática escolar dentro da disciplina de Matemática;
d) A natureza mutável da matemática escolar, as suas relações com outras matérias escolares e as suas aplicações na sociedade.

Sendo assim, os conhecimentos não devem ser construídos de forma isolada. Para o NCTM, a capacidade de identificar, definir e discutir conceitos e procedimentos de aprofundar a compreensão das conexões entre eles, e de apreciar a relação entre a matemática e outros campos é criticamente importante.

Na terceira norma, **Conhecer o modo como os alunos aprendem Matemática**, o NCTM afirma que a formação inicial e continuada dos professores de matemática deve fornecer múltiplas perspectivas acerca do modo como os alunos aprendem matemática, desenvolvendo o conhecimento dos professores sobre

a) Os resultados da investigação sobre a aprendizagem matemática pelos alunos;
b) Os efeitos da idade, aptidões, interesses e experiências dos alunos na aprendizagem da matemática;
c) As influências da origem linguística, étnica e racial, e do sexo, na aprendizagem da matemática;
d) Os processos de afirmar e defender a participação empenhada e o estudo continuado da Matemática por todos os alunos.

Então, a aprendizagem é um processo ativo, dinâmico e contínuo que é, ao mesmo tempo, individual e social. Para o NCTM, os estudantes são naturalmente curiosos e desejosos de aprender, isto é, as suas experiências refletem a excitação da descoberta, ou seja, ao resolverem um problema.

Na quarta norma, **Conhecer a Pedagogia da Matemática,** o NCTM, afirma que a formação inicial de professores de Matemática deve desenvolver, nos professores, conhecimentos e aptidões para usar e avaliar,

a) Materiais e recursos para o ensino, incluindo tecnologia;
b) Modos de representação dos conceitos e procedimentos matemáticos;
c) Estratégias de ensino e modelos de organização da sala de aula;
d) Modos de estimular o discurso matemático e desenvolver, na aula, o sentido de comunidade matemática.

Dessa forma, a pedagogia da matemática se refere aos processos pelos quais os professores ajudam os seus alunos a compreender e a ser capazes de fazer e utilizar a matemática, isto é, esta norma identifica algumas componentes da pedagogia que são essenciais no ensino de qualidade.

Na quinta norma, **Progredir enquanto professor de matemática**, o NCTM diz que a formação inicial de professores de matemática lhes deve proporcionar oportunidades para:

a) Examinar e rever suas ideias sobre a natureza da matemática, sobre como deve ser ensinada e sobre o modo como os alunos a aprendem;
b) Observar e analisar diversas abordagens do ensino e aprendizagem da matemática, centradas em atividades, discursos, ambientes e avaliação;
c) Trabalhar com grande diversidade de alunos, individualmente, em pequenos grupos e com toda a turma, apoiados por profissionais da educação matemática e em colaboração com eles;
d) Analisar e avaliar a adequação e a eficácia do seu ensino;
e) Desenvolver predisposição para o ensino da Matemática.

Assim, um bom ensino de Matemática é aperfeiçoado através da troca de experiências com colegas e supervisores que sabem matemática e têm tido êxito como professores de Matemática, isto é, os futuros professores devem ter oportunidade de ensinar ao lado de bons professores de matemática que possam ser tomados como modelos. Ainda diz o NCTM, que devem ser orientados por formadores de professores de matemática que saibam matemática e sejam professores de matemática experientes. Logo, os professores efetivos devem também ter a ajuda de colegas e formadores experientes, em ensino da matemática, quando estão a explorar novos caminhos ou procuram ser avaliados em relação às estratégias que estão a utilizar.

Na sexta e última norma, **O papel dos professores no desenvolvimento profissional**, o NCTM aponta que os professores de matemática devem desempenhar um papel ativo no seu próprio desenvolvimento profissional, aceitando a responsabilidade de

a) Experimentar cuidadosamente abordagens e estratégias alternativas nas suas aulas;
b) Refletir sobre a aprendizagem e o ensino, quer individualmente quer com colegas;
c) Participar em seminários, cursos e outras oportunidades educacionais específicas para a matemática;
d) Participar ativamente na comunidade profissional dos educadores de matemática;
e) Ler e discutir ideias apresentadas em publicações profissionais;
f) Discutir com colegas questões relativas à matemática e ao seu ensino e aprendizagem;

g) Participar na proposta, elaboração e avaliação de programas para o desenvolvimento profissional específico para a matemática;
h) Participar nos esforços desenvolvidos pela escola, pela comunidade e nível político, para conseguir uma mudança positiva na educação matemática.

Sendo assim, os professores desenvolvem-se, na qualidade de profissionais, em um processo permanente. O NCTM diz que os professores, centrados na prática das aulas, experimentam abordagens alternativas para levar os alunos a pensar matematicamente. Esse documento ainda diz que o desenvolvimento profissional dos professores, dentro e fora da sala de aula, é o resultado da sua reflexão e participação em oportunidades de formação que melhore e amplie o seu desenvolvimento e progresso.

As normas para o Desenvolvimento Profissional dos Professores de Matemática apresentadas pelo NCTM serão de fundamental importância para o pesquisador, uma vez que as normas apresentadas guiarão todo o trabalho dentro do curso de extensão que será oferecido durante a realização da pesquisa de campo.

4 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Apresenta-se, neste capítulo, o entendimento que se coaduna com o de alguns autores sobre a Resolução de Problemas e algumas pesquisas realizadas por pesquisadores da área. Inicialmente, será feito um breve relato sobre o Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. Posteriormente, serão discutidas as novas reflexões sobre o Ensino-Aprendizagem de matemática através da Resolução de Problemas; Pesquisas em Resolução de Problemas: caminhos; avanços e novas perspectivas; e o Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que através da Resolução de Problemas? Por fim, apresenta-se a Resolução de Problemas na perspectiva da Educação Crítica.

4.1 ENSINO-APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Ao longo do percurso histórico da ciência, é perceptível que grandes descobertas aconteceram sempre a partir da resolução de alguns problemas. Contudo, os problemas sempre antecederam as descobertas.

> Problema de Matemática têm ocupado um lugar central no currículo de matemática escolar desde a antiguidade. Registros de problemas matemáticos são encontrados na história antiga egípcia, chinesa e grega, e são, ainda, encontrados problemas em livros-texto de matemática dos séculos XIX e XX. (ONUCHIC, 1999, p.199)

Segundo Onuchic (1999), até muito recentemente, ensinar a resolver problemas significava apresentar situações-problema e, talvez, incluir um exemplo com uma solução técnica específica. Hoje, a Resolução de Problemas vem sendo apresentada por pesquisadores da área de forma cada vez mais significativa.

Ao falar das reformas no ensino de Matemática durante o século XX, Onuchic (1999) disse que a passagem de uma sociedade rural (onde “poucos precisavam conhecer matemática”) para uma sociedade de informação (onde a maioria das pessoas “precisa saber matemática”) fundamentou a sociedade do conhecimento, na qual se exige que todos devam “saber muito matemática”; tal transição implicou, naturalmente, o aumento do interesse do homem em promover mudanças na forma de como ensinar e como aprender matemática.

Para chegar às pesquisas atuais em resolução de problemas, foram várias as mudanças na forma em que se ensina e aprende matemática. Onuchic (1999) faz uma análise acerca dos movimentos de reforma do ensino de matemática no século XX, destacando: O ensino de matemática por repetição, o ensino de matemática com compreensão e a matemática moderna.

O ensino de matemática por repetição ocorreu no início do século XX, quando se priorizava a memorização e a repetição que eram considerados importantes, o professor falava e o aluno recebia a informação, escrevia, memorizava e repetia; no final do processo de ensino, a maioria dos alunos se esquecia do que haviam memorizado em pouco tempo.

No **ensino de matemática com compreensão,** os alunos deveriam aprender Matemática com compreensão, o aluno deveria entender o que fazia; entretanto, o aluno escutava o professor e em seguida repetia, não participando da construção do conhecimento. O professor não estava preparado para trabalhar de forma diferente.

A **Matemática Moderna** ocorreu entre as décadas de 1960 e 1970, e apresentava uma matemática estruturada, apoiada em estruturas lógicas, algébricas, topológicas e de ordem e enfatizava a teoria dos conjuntos. A aprendizagem da matemática ficava limitada a poucos, pois era ensinada com muitos símbolos e de forma complexa; até mesmo o professor tinha insegurança no que falava. Era uma matemática muito abstrata que não levava o aluno a perceber aplicações com a matemática usada fora da sala de aula.

Ao refletir sobre a reforma da matemática moderna, Onuchic (1999) levanta alguns questionamentos, como: estaria essa reforma voltada para a formação de um cidadão consciente, útil à sociedade em que vivia? Buscava ela ensinar matemática de modo a preparar os alunos para um mundo de trabalho que exigia mais conhecimento matemático?

Com o passar do tempo, percebeu-se que as reformas já citadas não atingiram o sucesso desejado, talvez por não ter sido dada a devida importância à Resolução de Problemas.

> A importância dada à Resolução de Problemas é recente e somente nas últimas décadas é que os educadores matemáticos passaram a aceitar a ideia de que o desenvolvimento da capacidade de se resolver problemas merecia mais atenção. A característica de Educação Matemática, em termos de Resolução de Problemas, reflete uma tendência de reação a características passadas como um conjunto de fatos, domínios de procedimentos algorítmicos ou um conhecimento a ser obtido por rotina ou por exercício mental. Hoje, a tendência é caracterizar esse trabalho considerando os estudantes como participantes ativos, os problemas como instrumentos precisos e bem definidos e a atividade na resolução de problemas como uma coordenação complexa simultânea de vários níveis de atividades. (ONUCHIC, 1999, p.203)

Após as três reformas apresentadas anteriormente, a resolução de problemas passou a receber a devida importância dos educadores matemáticos. Somente após a década de 1970 é que os educadores matemáticos passaram a dar mais atenção, como uma ideia que merecia mais destaques.

Destaca-se, como início das pesquisas com resolução de problemas, o trabalho de George Polya (1995) em seu livro “A arte de resolver problemas” no qual propõe um método em quatro etapas para a resolução de problemas: 1º) compreender o problema; 2º) elaborar um plano; 3º) executar o plano e 4º) fazer o retrospecto ou verificação da solução do problema original; cada uma dessas etapas se subdivide em outras.

Segundo Onuchic (1999) no fim dos anos 70, a Resolução de Problemas ganhou espaço no mundo inteiro. Começou o movimento a favor do ensino de resolução de problemas. Essa autora disse que, na década de 80, o NCTM (Conselho Nacional de Professores de Matemática), entidade norte-americana que apresentou um documento: “*An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematicsof the 1980's*”, que chamava todos os interessados, pessoas e grupos para, juntos, num esforço cooperativo maciço, buscar uma melhor educação matemática para todos.

> A primeira dessas recomendações dizia que a Resolução de Problemas devia ser o foco da matemática escolar para os anos 80 e destacava que o desenvolvimento da habilidade em resolução de problemas deveria dirigir os esforços dos educadores matemáticos por toda essa década e que o desempenho em saber resolver problema mediria a eficiência de um domínio, pessoal e nacional, da “competência matemática”. O documento ainda dizia que resolução de problemas abrange uma grande quantidade de rotinas e lugares comuns, assim como funções não rotineiras consideradas essenciais na vida diária dos cidadãos. Dizia, também, que é preciso preparar indivíduos para tratar com problemas especiais com que irão se deparar em suas próprias carreiras. Resolução de Problemas envolve aplicar a matemática ao mundo real, atender a teoria e a prática de ciências atuais e emergentes e resolver questões que ampliam as fronteiras das próprias ciências matemáticas. Não se deveria interpretar esta recomendação entendendo a matemática a ser ensinada somente em função da matemática necessária para se resolver um dado problema, num dado momento. Uma inter-relação do todo não deveriam ser sacrificadas. (ONUCHIC, 1999, p.204)

A década de 90 foi considerada a mais produtiva em pesquisas sobre a metodologia de Resolução de Problemas no Brasil e no Mundo. Com todas essas recomendações de ação, pesquisadores passaram a questionar o ensino e o efeito de estratégias e modelos. Começam a discutir as perspectivas didático-pedagógicas da Resolução de Problemas. Nessa época, a Resolução de Problemas como metodologia de ensino passa a ser o lema das pesquisas e estudos de Resolução de Problemas.

Os trabalhos de Onuchic (1999) assumem uma perspectiva de Resolução de Problemas segundo a qual o problema deve ser proposto ou formulado de modo a contribuir para a formação dos conceitos antes mesmo de sua apresentação em linguagem matemática formal.

Para ela, ao se ensinar matemática através da Resolução de Problemas, os problemas são importantes não somente como um propósito de se aprender matemática, mas, também, como um primeiro passo para se fazer isso.

Dessa forma buscou-se nesta pesquisa, durante a realização do curso de extensão que fez parte da pesquisa de campo, apresentar situações-problemas antes mesmo de falar e expor para eles a formalização do conteúdo Equações Diferenciais Ordinárias. Essas situações-Problema continham um nível que eles eram capazes de resolver, mesmo sem ter visto nada de Equações Diferenciais, apenas com os conhecimentos prévios necessários para a compreensão de novos conceitos (Equações Diferenciais Ordinárias).

Entende-se que não basta apenas ensinar o aluno a resolver problemas. Primeiramente, defende-se que a situação-problema deva ser o ponto de partida da discussão em sala de aula de determinado conteúdo. Na resolução de problemas, a resposta final tem o valor menor, é mais importante o processo com que se fez chegar a esta resposta.

4.1.1 O que é um problema?

Segundo Onuchic (1999, p.215), "Problema é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver". Para essa autora, o problema deve ser um ponto de partida e que, através da resolução do problema, os professores devem fazer conexões entre diferentes ramos da matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos.

Para os Parâmetros Curriculares Nacionais (1997), um problema é:

> [...] uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter o resultado, ou seja, a solução não está disponível de inicio, no entanto é possível construí-la. Em muitos casos, os problemas usualmente apresentados aos alunos não constituem verdadeiros problemas porque, via de regra, não existe um real desafio nem a necessidade de verificação para validar o processo de solução (BRASIL, 1997. p.44).

Dante (1998) entende um problema como uma situação onde se procura algo desconhecido e que não existe, de antemão, nenhum algoritmo que garanta a solução de imediato.

Para Kilpatrick (2014), os problemas são o coração da matemática. Segundo ele, formular e resolver problemas são, não apenas o motor que impulsiona a matemática, mas, igualmente, o principal meio de ensino e aprendizagem dela.

A literatura estudada deixa claro que uma atividade de Resolução de Problemas não se caracteriza pela simples aplicação de um exercício. Nas pesquisas sobre essa metodologia, frequentemente são mencionados os termos “problemas e exercícios”. Sendo assim, é imprescindível apresentar a diferença entre essas duas palavras.

De acordo com Pozo (1998) os alunos, quando resolvem exercícios, geralmente usam procedimentos e fórmulas que foram aprendidos em outras aulas. Já o problema exige dos alunos questionamento, reflexão e tomada de decisão. Os exercícios são aplicados para verificar se os alunos entenderam o conteúdo já explicado, já o problema é aplicado para desenvolver o conteúdo a ser ensinado.

Apesar de serem várias as definições sobre o que é um problema matemático, todas elas convergem para um mesmo significado e indicam que, só temos um problema quando não temos uma solução de imediato, mas que temos a vontade de encontrar.

4.2 AS NOVAS REFLEXÕES SOBRE O ENSINO-APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Segundo Onuchic e Allevato (2005), durante a década de 80, muitos recursos em Resolução de Problemas foram desenvolvidos, visando ao trabalho de sala de aula, na forma de coleções de problemas, listas de estratégias, sugestões de atividades e orientações para avaliar o desempenho em Resolução de Problemas. Muitos desses materiais passaram a ajudar os professores a fazer, da Resolução de Problemas, o ponto central de seu trabalho.

Entretanto, segundo essas autoras, “Muito possivelmente devido a uma falta de concordância entre as diferentes concepções que pessoas e grupos tinham sobre o significado de Resolução de Problemas ser o foco da Matemática escolar, o trabalho dessa década não chegou a um bom término” (ONUCHIC E ALLEVATO, 2005, p.216).

Schroeder e Lester, citados por Onuchic e Allevato (2005), apresentam três caminhos diferentes de abordar Resolução de Problemas que ajudam a refletir sobre essas diferenças de concepções: teorizar sobre Resolução de Problemas; ensinar a resolver problemas; e ensinar Matemática através da Resolução de Problemas. Esses autores ressaltam que, embora na teoria essas três concepções de trabalhar Resolução de Problemas possam ser separadas, na prática elas se superpõem e acontecem em várias combinações de sequências.

Embora na década de 80 tenham existido várias concepções sobre Resolução de Problemas, foi percebido que, nessa época, ainda havia muitos estudantes que não sabiam Matemática apesar de haver bons resolvedores de problemas.

No fim da década de 80, o NCTM, em busca de uma nova reforma para a Educação Matemática publicou, em 1989, o documento *Curriculum and Evaluation Standards for*

School Mathematics (Padrões de Currículo e Avaliação para a Matemática Escolar), onde: o **"Currículo"**é entendido como um plano operacional para o ensino que detalha a Matemática que os alunos precisam aprender; a forma como os alunos devem atingir os objetivos curriculares identificados; e o que os professores devem fazer para ajudar os estudantes a desenvolver seu conhecimento matemático e o contexto no qual a aprendizagem e o ensino ocorrem; e a **"Evaluation"** onde os padrões devem estar articulados para avaliar tanto o desempenho do estudante quanto os programas curriculares, com ênfase no papel das medidas avaliativas para a obtenção de informação na qual os professores podem basear o ensino.

Após dois anos, em 1991, foram publicados os *Professional Standards for Teaching Mathematics* (Padrões profissionais para o ensino da Matemática). Esse segundo documento deveria explicar, nos mínimos detalhes, o que os professores deveriam saber para ensinar, visando aos novos objetivos da Educação Matemática e como o ensino deveria ser avaliado para o proposito de melhora.

No ano de 1995, foram lançados os *Assessment Standards for School Mathematics* (Padrões de Avaliação para a Matemática Escolar). Esse documento está baseado sobre pesquisa extensiva recente e desenvolvimentos relacionados aos esforços nacionais para a reforma do ensino e aprendizagem da Matemática.

Segundo Onuchic e Allevato (2005, p.217),

> Esses Standards não pretendiam dizer, passo a passo, como trabalhar esses documentos. Ao contrario, queriam apresentar objetivos e princípios em defesa de que práticas curriculares, de ensino e de avaliação pudessem ser examinadas. Eles queriam estimular políticos educacionais, pais, professores, administradores, comunidades locais e conselhos escolares a melhorar os programas de Matemática em todos os níveis educacionais.

Ao se iniciar um novo século, percebeu-se que a visão colocada em 1989 pelos Standards não se realizou. Houve progresso, a mudança é visível, se bem que lenta, e a revolução continua.

Van de Walle (2001), no prefácio de seu livro, intitulado "Elementary and Middle School Mathematics", citado por Onuchic e Allevato (2005), afirma que esse livro reflete o crescimento e a mudança que está ocorrendo de modo contínuo na Educação Matemática e que ele foi projetado para ajudar o aluno a ser a parte mais importante desse crescimento e a desenvolver, nele, confiança e compreensão enquanto faz Matemática.

Para esse autor, os professores de Matemática para serem realmente eficientes, devem envolver quatro componentes básicos em suas atividades: gostar da disciplina Matemática; o que significa fazer Matemática com prazer; compreender como os alunos aprendem e constroem suas ideias; ter habilidade em planejar e selecionar tarefas e, assim, fazer com que os alunos aprendam Matemática num ambiente de Resolução de Problemas; ter habilidade em integrar diariamente a avaliação com o processo de ensino a fim de melhorar esse processo e aumentar a aprendizagem.

Essas quatro ideias, segundo Onuchic e Allevato (2005), foram trabalhadas no contexto da reforma em Educação Matemática, uma revolução na Matemática escolar que começou em 1989 quando o NCTM publicou seu primeiro documento Standards e que continua no século XXI com a publicação dos Standars (2000).

Van Walle (2001) no terceiro capítulo de seu livro intitulado Developing, Understanding in Mathematics, disse que o Construtivismo está firmemente enraizado na escola cognitiva de psicologia e nas teorias piagetianas, nas quais se acredita que as crianças não absorvem ideias enquanto seus professores as apresentam, pois as crianças são as criadoras de seu próprio conhecimento.

Esse autor disse que a construção de qualquer coisa no mundo físico requer ferramentas, materiais e esforço e que, também para se construir ideias, isso é necessário. Nesse caso, as ferramentas que se necessita para construir a compreensão são as ideias e o conhecimento que já se tem. Os materiais usados para construir compreensão podem ser coisas que vemos, ouvimos ou tocamos. Às vezes esses materiais só existem em nossos pensamentos e ideias.

Para Onuchic e Allevato (2005, p.220)

> Os conceitos matemáticos que os alunos criam, num processo de construção, não são as ideias bem formadas concebidas pelos adultos. Novas ideias são formadas pouco a pouco, ao longo do tempo, quando os alunos refletem ativamente sobre elas e as tentam através dos muitos diferentes caminhos que o professor pode lhes oferecer. Ai está o mérito das discussões entre os estudantes em grupos de trabalho. Quanto mais condições se deem aos alunos para pensar e testar uma ideia emergente, maior é a chance de essa ideia ser formada corretamente e integrada numa rica teia de ideias e de compreensão relacional.

De acordo com essas autoras, é nesse contexto que se insere a metodologia de “Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas”, que se constitui num caminho para se ensinar Matemática através da Resolução de Problemas e não apenas para se ensinar a resolver problemas. Nessa metodologia, conforme já foi dito anteriormente, o problema é um ponto de partida e, na sala de aula, através da Resolução de Problemas, deve-se fazer conexões entre os diferentes ramos da matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos.

Para Van de Walle (2001), a Resolução de Problemas deve ser vista como a principal estratégia de ensino e ele chama a atenção para que o trabalho docente comece sempre onde estão os alunos, ao contrário da forma usual em que o ensino começa onde estão os professores, ignorando o que os alunos trazem consigo para a sala de aula. Diz ainda que o valor de se ensinar com problemas é muito grande e, apesar de ser difícil, há boas razões para empreender esse esforço.

Onuchic e Allevato (2005) disseram que a maioria (senão todos) dos importantes conceitos e procedimentos matemáticos pode ser melhor ensinada através da Resolução de Problemas. Tarefas e problemas podem e devem ser dados de modo a engajar os alunos no "pensar sobre" e no desenvolvimento de Matemática importante que eles precisam aprender.

Apresenta-se, para finalizar essa seção, uma tabela que resume as fases do Ensino-Aprendizagem da Matemática através da Resolução de Problemas, segundo Van deWalle (2000).

Tabela 2- Estrutura simples de três fases para trabalhar a Matemática.

Fase ANTES	**Fase DURANTE**	**Fase DEPOIS**
Preparando os alunos • Verifique se o problema foi compreendido. • Ative os conhecimentos prévios úteis. • Estabeleça expectativas claras para os produtos.	**Alunos Trabalhando** • Deixe os alunos construírem seu conhecimento. Evite antecipações desnecessárias. • Escute cuidadosamente. • Forneça sugestões adequadas • Observe e avalie.	**Alunos Debatendo** • Encoraje a formação de uma comunidade de estudantes. • Escute/aceite soluções dos estudantes sem julgá-las. • Sintetize as principais ideias e identifique futuros problemas.

Fonte: Van de Walle (2000, p.62).

A concepção de Resolução de Problemas apresentadas nesta seção vai de encontro à teoria de Vigotsky (1978), segundo o qual o professor prepara (criando ou tirando de algum lugar) o problema para ser trabalhado em sua sala de aula com o objetivo de construir um conhecimento novo.

Assim, ele sabe que, para isso, o aluno deve trazer, com ele, um conhecimento prévio, para que o torne preparado para a construção de um conhecimento real e novo.

A metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas defendida por Onuchic e Allevato (2005) parte do princípio de que o professor, ao preparar um problema, deve visar à construção de um conhecimento novo, se preocupar em saber se o aluno tem conhecimento prévio que lhe dê potencialidade para a construção de um conhecimento real novo.

A distância entre o conhecimento prévio e o conhecimento real e novo é chamada Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP). Nesse espaço em sala de aula, o professor se coloca como o veículo que vai conduzir o aluno partir de um conhecimento já dominado até o conhecimento que se quer alcançar, levantando questionamentos, procurando ligar o que o aluno já sabe com as respostas que ele sabe que o aluno possa lhe dar.

Nesse movimento, espera-se que o aluno perceba que algo de novo está acontecendo e que a aprendizagem está ocorrendo.

Assim sendo, buscou-se dentro do curso de extensão que foi oferecido durante a realização da pesquisa de campo, seguir todas as orientações de Onuchic e Allevato (2005), para trabalhar a Modelagem Matemática dentro da Metodologia Resolução de Problemas.

4.3 PESQUISAS EM RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: CAMINHOS, AVANÇOS E NOVAS PERSPECTIVAS

Huanca (2006, p.43) apoiado no trabalho de Pironel, disse que

> Ao escrevermos Ensino-Aprendizagem-Avaliação, queremos dizer que essas três ações estão intimamente relacionadas por constituir um ser maior que ensino, aprendizagem e avaliação e que tem, por objetivo final, promover o crescimento do professor e a aprendizagem do aluno. O professor, responsável pelo ensino, trabalha para a aprendizagem do aluno que, como co-construtor do novo conhecimento, se apoia no professor como um guia. A avaliação, integrada ao ensino, melhora as ações de ambos.

Pironel (2002) na sua dissertação de mestrado intitulada “A Avaliação Integrada no Processo de Ensino-Aprendizagem da Matemática”, disse que a avaliação começou a ser repensada a partir da compreensão da necessidade de serem adotados princípios de avaliação contínua, ela passou a ser incorporada mais ao desenvolvimento dos processos e menos ao julgamento dos resultados obtidos com esse processo.

Para deixar claro para o leitor, a evolução dos três processos: ensino; aprendizagem e avaliação apresenta-se o quadro a seguir.

Tabela 3: O Processo de Ensino-Aprendizagem-Avaliação

Três processos distintos	**Ensino** Responsabilidade é do professor que visa a aprendizagem do aluno.	**Aprendizagem** Os alunos devem aprender com compreensão. Responsabilidade é dos alunos. Como? Sabendo relacionar as idéias que têm com as novas idéias que se quer construir.	**Avaliação** A avaliação apóia a aprendizagem e informa aos professores quanto ao crescimento dos alunos e, também, informa aos professores quanto ao seu próprio trabalho.
Um processo duplo	**Ensino-Aprendizagem** É um ser maior. É maior que o ensino. É maior que a aprendizagem. Acontece simultaneamente durante a construção do conhecimento, através da resolução de problemas, tendo os alunos como co-construtores desse conhecimento.		
Um processo triplo	**Ensino-Aprendizagem-Avaliação** É um ser ainda maior. É maior que o ensino, que a aprendizagem, que a avaliação, tendo a avaliação integrada ao processo de **ensino-aprendizagem**. O professor avalia o crescimento dos alunos. Os alunos fazem também sua avaliação destinada a guiar e aumentar sua aprendizagem.		

Fonte: Huanca (2006, p.44)

O ensino, a aprendizagem e a avaliação, serão relacionados nesta pesquisa da seguinte forma: primeiro, o ensino ficará sobre a responsabilidade do professor pesquisador que terá, como foco, a aprendizagem dos alunos que participarem do curso de extensão a ser oferecido na pesquisa de campo. Nesse processo, o pesquisador se encarregará de escolher, cuidadosamente, as situações-problema a serem trabalhadas dentro do curso de extensão, de tal forma que elas levem em consideração os conhecimentos prévios dos alunos, de modo a facilitar que os alunos partam de um conhecimento consolidado para galgar rumo a saberes que se pretende alcançar.

Todas as ações realizadas dentro do curso de extensão – sejam relacionadas ao ensino ou avaliação – terão, como foco principal, a aprendizagem. Nesse sentido, pretende-se possibilitar que os alunos aprendam com compreensão, tornando-os os principais responsáveis para utilizarem os conhecimentos prévios para adquirir um conhecimento novo.

A avaliação será de extrema importância durante a pesquisa de campo, pois será, a partir dela, que o pesquisador poderá acompanhar o crescimento de seus alunos e, além disso, poderá fazer uma auto avaliação de seu próprio desempenho em sala de aula.

Segundo Onuchic e Allevato (2011), o ensino, a aprendizagem e a avaliação são três coisas distintas que não necessariamente ocorrem ao mesmo tempo, no entanto, quando se refere ao ensino, todas as ações desenvolvidas voltam-se a objetivos direcionados para a aprendizagem, e, quando se fala em aprendizagem, a avaliação se torna um elemento de destaque, pois, para saber se realmente o aluno aprendeu, o professor tem como desafio identificar e avaliar as atitudes frente a uma determinada situação-problema.

O século XX foi um século de muitas reformas no Ensino da Matemática; nele passou-se a entender que o ensino e aprendizagem deveriam ocorrer simultaneamente. Adotando este objetivo, o grupo de trabalho e estudos – GTERP – passou a utilizar, nessa época, a palavra composta ensino-aprendizagem.

Alguns anos depois, o conceito de avaliação começou a ser repensado nos ambientes de ensino. A partir da compreensão da necessidade de se adotar os princípios da avaliação contínua e formativa, esta passou a ser incorporada mais ao desenvolvimento dos processos e menos ao julgamento dos resultados obtidos com esses processos. No ensino-aprendizagem, a avaliação passou a ser um componente extremamente importante.

Nesse sentido, o Grupo de Trabalho e Estudo em Resolução de Problemas (GTERP)[8] envolvido com a linha de pesquisa Resolução de Problemas, e assumindo a concepção de trabalhar Matemática através da Resolução de Problemas, passou a empregar a palavra composta Ensino-Aprendizagem-Avaliação, isto é, ao ter em mente um trabalho em que esses três elementos ocorrem simultaneamente, passaram a entender que, enquanto o professor ensina, o aluno, como um participante ativo, aprende, e que a avaliação se realiza por ambos, integrando-se ao ensino para promover a aprendizagem. (ONUCHIC e ALLEVATO, 2011)

Essas autoras afirmam que, na Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, o problema é o ponto de partida e, na sala de aula, através da resolução de problemas, os alunos devem fazer conexões entre diferentes ramos da matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos.

As pesquisas têm revelado que, apesar de se falar em trabalhar com problemas para ensinar Matemática, poucos têm clareza acerca do que seja um problema.

Na literatura da Resolução de Problemas, Onuchic e Allevato (2011) apresentam os vários conceitos de problemas adjetivados, refletindo qualidades específicas que deles se esperam: problemas de fixação; exercícios; problemas abertos; problemas fechados; problemas padrão; problemas rotineiros e não rotineiros; quebra-cabeças; desafios entre outros. Na realidade, são todos problemas, e os adjetivos expressam diferentes tipos de problemas que admitem, para sua resolução, diferentes estratégias.

[8] Grupo de Pesquisa que desenvolve seus trabalhos no departamento de Matemática da UNESP – Rio Claro.

Utilizar a Resolução de Problemas nessas concepções e implementar a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas,

> Exige do professor e dos alunos novas posturas e atitudes com relação ao trabalho em sala de aula. O professor precisa preparar, ou escolher, problemas apropriados ao conteúdo ou ao conceito que pretende construir. Precisa deixar de ser o centro das atividades, passando para os alunos a maior responsabilidade pela aprendizagem que pretendem atingir. Os alunos por sua vez, devem entender e assumir essa responsabilidade. Esse ato exige de ambos, portanto, mudanças de atitudes e postura, o que nem sempre é fácil conseguir. (ONUCHIC e ALLEVATO, 2011, p.82)

Segundo o documento “Orientações Curriculares” (BRASIL, 2006), o padrão de ensino “definições, propriedades, exercícios e problemas” era habitual do ensino da Matemática. Na literatura, é possível encontrar um caminho inverso, qual seja, “problemas, definições, propriedades, exercícios e novos problemas”. Nessa concepção, a aprendizagem de um novo conceito matemático dar-se-ia pela apresentação de uma situação-problema ao aluno, ficando a formalização do conceito como a última etapa do processo de aprendizagem.

Nesse sentido, Romanatto (2012) propõe o problema como o centro ou início do processo de ensinar e de aprender Matemática e isso pode ser decisivo para que a matemática possa fazer sentido para os estudantes.

De acordo com Onuchic e Allevato (2011), há, entretanto, boas razões para se fazer esse esforço. A seguir, são compilados, na íntegra, alguns pontos apresentados pelas autoras.

a) A Resolução de Problemas coloca o foco da atenção dos alunos sobre ideias matemáticas e sobre dar sentido a elas;
b) A Resolução de problemas desenvolve poder matemático, nos alunos, ou seja, capacidade de pensar matematicamente, utilizar diferentes e convenientes estratégias em diferentes problemas, permitindo aumentar a compreensão e conteúdos e conceitos matemáticos;
c) A Resolução de problemas desenvolve a crença de que os alunos são capazes de fazer matemática e de que ela faz sentido; a confiança e a autoestima dos estudantes aumentam;
d) A Resolução de problemas fornece dados de avaliação contínua, que podem ser usados para a tomada de decisões instrucionais e para ajudar os alunos a obter sucesso com a matemática;

e) Professores que ensinam dessa maneira se empolgam e não querem voltar a ensinar mediante a tradicional forma. Sentem-se gratificados com a constatação de que os alunos desenvolvem a compreensão por seus próprios raciocínios;
f) A formalização dos conceitos e teorias matemáticas, feita pelo professor, passa a fazer mais sentido para os alunos.

O presente autor acompanhou os trabalhos de Onuchic desde que foram iniciadas as primeiras experiências na docência. Percebeu-se que, nas primeiras versões de seus trabalhos sobre Resolução de Problemas como metodologia de ensino, ela apresentava um roteiro composto pelas seguintes etapas: formar grupos e entregar uma atividade; o papel do professor; registrar os resultados na lousa; realizar uma plenária; analisar os resultados; buscar um consenso; fazer a formalização.

Entretanto, em um de seus artigos, que foi apresentado no Boletim de Educação Matemática (BOLEMA Nº 41) essa autora, juntamente com Norma Suely Gomes Allevato, apresentam um artigo intitulado "Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas". Nesse artigo, essas autoras apresentam um novo roteiro para a implementação da Resolução de Problemas em sala de aula.

Esse novo roteiro, criado pelas autoras, justifica-se, segundo elas, pelo fato de que ele, o roteiro, deve atender à demanda de professores que têm tido dificuldades ao utilizar essa metodologia em suas salas de aula. O primeiro roteiro foi alterado, gerando assim, um novo que foi compilado na íntegra. Apresentam-se, a seguir, as etapas geradas para se trabalhar com tal dinâmica de ensino.

a) **Preparação do problema** – selecionar um problema, visando à construção de um novo conceito, princípio ou procedimento. Esse problema será chamado problema gerador. É bom ressaltar que o conteúdo matemático necessário para a resolução do problema não tenha, ainda, sido trabalhado em sala de aula.
b) **Leitura individual** – entregar uma cópia do problema para cada aluno e solicitar que seja feita a leitura.
c) **Leitura em conjunto** – formar grupos e solicitar uma nova leitura do problema, agora nos grupos.
   – se houver dificuldades na leitura de textos, o próprio professor pode auxiliar os alunos, lendo o problema.
   – se houver, no texto do problema, palavras desconhecidas para os alunos, surge um problema secundário. Busca-se uma forma de poder esclarecer as dúvidas e, se necessário, pode-se, com os alunos, consultar um dicionário.

– **resolução do problema** – A partir do entendimento do problema, sem dúvidas quanto ao enunciado, os alunos, em seus grupos, em um trabalho cooperativo e colaborativo, buscam resolvê-los. Considerando os alunos como coconstrutores da matemática nova que se quer abordar, o problema gerador é aquele que, ao longo de sua resolução, conduzirá os alunos para a construção do conteúdo planejado pelo professor para aquela aula.

– **observar e incentivar** – Nessa etapa, o professor não tem mais o papel de transmissor do conhecimento. Enquanto os alunos, em grupo, buscam resolver o problema, o professor observa, analisa o comportamento dos alunos e estimula o trabalho colaborativo. Ainda, o professor, como mediador, leva os alunos a pensar, dando-lhes tempo e incentivando a troca de ideias entre eles.

d) O professor incentiva os alunos a utilizarem seus conhecimentos prévios e técnicas operatórias, já conhecidas e necessárias à resolução do problema proposto. Estimula-se a escolha de diferentes caminhos (métodos) a partir dos próprios recursos de que se dispõe. Entretanto, é necessário que o professor atenda aos alunos em suas dificuldades. Colocando-se como interventor e questionador. Acompanhar suas explorações e ajudá-los, quando necessário, a resolver problemas secundários que podem surgir no decurso da resolução: notação; passagem da linguagem vernácula para a linguagem matemática; conceitos relacionados a técnicas operatórias; enfim, tudo com o fito de possibilitar a continuação do trabalho.

– **registro das resoluções na lousa** – Representantes dos grupos são convidados a registrar, na lousa, suas resoluções. Resoluções certas, erradas ou feitas por diferentes processos devem ser apresentadas para que todos os alunos as analisem e discutam.

– **plenária** – Para esta etapa, são convidados todos os alunos, a fim de discutirem as diferentes resoluções registradas na lousa pelos colegas, para defenderem seus pontos de vista e esclarecerem suas dúvidas. O professor se coloca como guia e mediador das discussões, incentivando a participação ativa e efetiva de todos os alunos. Este é um momento bastante rico para a aprendizagem.

– **busca do consenso** – Depois de sanadas as dúvidas, e analisadas as resoluções e soluções obtidas para o problema, o professor tenta, com todos os alunos, chegar a um consenso sobre o resultado correto.

– **formalização do conteúdo** – Neste momento, denominado formalização, o professor registra, na lousa, uma apresentação formal – organizada e estruturada em linguagem matemática – padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução de problemas, destacando as diferentes técnicas operatórias e as demonstrações das propriedades qualificadas sobre o assunto.

Entende-se que esse roteiro consiste em uma série de ações que o professor deve utilizar em sala de aula quando adotar a Resolução de Problemas como metodologia. No entanto, é claro que o sucesso de uma aula não depende somente do sequenciamento dessas ações, e sim da qualidade como cada uma delas é abordada.

A Educação Matemática é um campo fértil de tendências metodológicas que podem contribuir para a formação inicial de futuros professores. Nessa pesquisa,apresenta-se a Resolução de Problemas no contexto da Modelagem Matemática como uma possibilidade para a formação inicial de professores.

4.4 ENSINO-APRENDIZAGEM-AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA: POR QUE ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS?

No século XX, em especial na década de 1980, ocorreram relevantes mudanças de perspectivas na Educação Matemática. Nas diferentes fases pelas quais passou, foram desenvolvidas diferentes visões de como ensinar, aprender e avaliar, de como identificar que Matemática deveria ser trabalhada e como deveria ser trabalhada.

Nessa época, três diferentes formas de realizar um trabalho, em sala de aula eram apontadas na literatura, que ainda se faz perceber mesmo com o fim da década de 1980, quando Schroeder e Lester (1989) destacam sua coexistência (1) O ensino sobre Resolução de Problemas, (2) O ensino para a resolução de problemas e (3) o ensino através da resolução de problemas. Vários trabalhos, desenvolvidos desde então, buscaram explicar detalhadamente as características fundamentais e as implicações pedagógicas de cada uma dessas concepções.

A terceira concepção apresentada por Schroeder e Lester (1989), refere-se ao ensino de Matemática através da Resolução de Problemas. Nessa concepção, ressalta-se a inserção da Matemática na expressão, com o intuito de retirar o foco exclusivamente da resolução de problemas (como ocorre na primeira concepção que é o ensino sobre resolução de problemas).

Onuchic e Allevato (2014, p.38), consideram que, “A expressão ‘através’ – significa ‘ao longo’, ‘no decurso’ – enfatiza o fato de que ambas, Matemática e Resolução de Problemas, são consideradas simultaneamente e são construídas mútua e continuamente”.

Segundo essas autoras, essa perspectiva era, ainda, bastante incipiente no final da década de 80 e se consolidou a partir de vários trabalhos desenvolvidos pelo NCTM, os quais a culminaram com a publicação dos Standards 2000 (NCTM, 2000).

Hoje, essa é uma das abordagens mais atuas no que tange à Resolução de Problemas, acredita-se que seja uma das alternativas metodológicas adequadas ao cenário de complexidade em que se encontram atualmente as escolas, onde se insere o relevante trabalho do educador matemático.

Ao falar da complexidade do ensino, Onuchic e Allevato (2014) disseram que as novas demandas de formação para uma sociedade plural – informatizada e mais complexa – levaram a um aumento significativo da procura por Educação, especialmente pelos jovens em busca de condições para fazer frente ao surgimento de novas áreas de trabalho. Simultaneamente, também, novas leis e incentivos ampliaram as possibilidades de acesso à educação formal, com alternativas oferecidas, inclusive, pela iniciativa privada. Desse modo, observou-se uma fragmentação da oferta com o aumento quantitativo de instituições de ensino e, consequentemente, dos estudantes na escola.

Nesse sentido, a escola, supostamente, deixa de ser seletiva e passa a ser inclusiva. Mas essa realidade traz, para essa mesma escola, uma série de dificuldades e novos desafios. Um deles, segundo Onuchic e Allevato (2014), diz respeito à necessidade de se otimizar o relacionamento com alunos de perfis diferenciados daqueles com que se está acostumado, e de lidar com grupos de estudantes heterogêneos em termos de perfil social, econômico e cultural.

A partir deste cenário de complexidade que permeia os ambientes de ensino, orientações oficiais em todo o mundo e, em particular no Brasil, destacam a necessidade de superar práticas ultrapassadas de transmissão de conhecimento e transferir para os alunos grande parte da responsabilidade por sua própria aprendizagem, colocando-se como protagonistas de seu processo de construção do conhecimento. É nesse contexto que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática, através da Resolução de Problemas, pode ser considerada como uma proposta promissora para trabalhar nos dias atuais dentro da complexidade do ensino.

Onuchic e Allevato (2014, p.41) disseram que,

> A partir dessas reflexões, que permanecem a relevância de Resolução de Problemas no trabalho com a Matemática em sala de aula, e da pesquisa sobre Resolução de Problemas em Educação Matemática. A busca por renovadas formas de realizar o ensino, a aprendizagem e a avaliação em Matemática, e a necessidade de desenvolver estudos nesse âmbito indicam que as pesquisas devem ser orientadas de modo que problemas relacionados à complexidade do ensino e à aprendizagem de Matemática para uma sociedade em mudanças sejam atacados.

Ao refletir sobre a literatura nacional referente ao processo de Ensino-Aprendizagem da Matemática, percebe-se que, ao longo do tempo, a discussão tem sido gerada em torno de duas correntes.

A primeira corrente segundo Onuchic (2013) identifica o ensino como transmissão do conhecimento e a aprendizagem como mera recepção de conteúdos. Para essa autora, nessa corrente, a aprendizagem é vista como um acúmulo de conhecimento, e o ensino se baseiam, essencialmente, na verbalização do conhecimento por parte do professor. Essa concepção apresenta pontos positivos e negativos. É vantajoso pelo fato de atingir um grande número de alunos ao mesmo tempo, visto que a atividade estaria a cargo do professor, por outro lado, exige alunos muito motivados e atentos à verbalização do professor.

A segunda corrente transfere para o aluno, em grande parte, a responsabilidade pela sua própria aprendizagem, na medida em que o aluno é colocado como ator principal desse processo.

> As ideias socioconstrutivistas da aprendizagem partem do princípio de que a aprendizagem se realiza pela construção dos conceitos pelo próprio aluno, quando ele é colocado em situação de resolução de problemas. Essa ideia tem como premissa que a aprendizagem se realiza quando o aluno, ao confrontar suas concepções, constrói os conceitos pretendidos pelo professor. Dessa forma, caberia a este o papel de mediador, ou seja, de elemento gerador de situações que propiciem esse confronto de concepções, cabendo ao aluno o papel de construtor de seu próprio conhecimento matemático (ONUCHIC 2013, p.89)

Segundo Romanatto (2012), essa segunda corrente surgiu na década de 1990 após a influência do Movimento da Matemática Moderna ocorrida nas décadas de 1960 e 1970. Nesse sentido, ele disse que o problema é o ponto de partida da atividade matemática, e não a definição, e disse mais:

> Se na primeira corrente a sequência “definições, propriedades, exercícios e problemas” eram habitual do ensino da Matemática e com o agravante regras, fórmulas e algoritmos, a proposta metodológica da resolução de problemas faz uma inversão significativa, qual seja, “problemas, definições, propriedades, exercícios e novos problemas”. Propomos o problema como o centro ou o início do processo de ensinar e de aprender Matemática e isso pode ser decisivo para essa disciplina adquirir um sentido para os estudantes (ROMANATTO, 2012, p.302).

Jeremy Kilpatrick (2014), em uma entrevista publicada na revista Educação Matemática no ano de 2014, afirmou que, desde a década de 80, um dos aspectos que considera positivo em relação à Resolução de Problemas é o apoio a essa metodologia por parte de muitos investigadores em Educação Matemática em muitos documentos. Segundo esse autor, os professores de Matemática ficaram conscientes de que deveriam ter uma maior atenção à resolução de Problemas e, segundo ele, de acordo com algumas investigações, parece haver um interesse em tentar utilizar essa metodologia em sala de aula.

Um ponto fraco, segundo Kilpatrick (2014), poderá ser o fato de alguns professores (e autores de manuais) terem concluído que a Resolução de Problemas pode ser tratada como uma unidade de ensino em separado, em vez de algo que permeia todo o ensino. Outra fraqueza poderá ser o descurar-se a formulação de problemas como uma atividade de sala de aula, pois, segundo esse autor, uma das melhores maneiras de os alunos aprenderem a resolver problemas é através da formulação dos seus próprios problemas. Esta atividade pode lhe ensinar o que diferencia um problema rotineiro de um problema não rotineiro, bem como o que é necessário para que um problema tenha solução.

Nessas condições, o propósito da metodologia Resolução de Problemas vai de encontro ao propósito da modelagem matemática, uma vez que, na modelagem, um dos objetivos é dar oportunidade para que os alunos participem da construção de seu próprio conhecimento, formalizando seus próprios problemas referentes a temas presentes em um contexto social.

Quando questionados os futuros professores, sobre o que achavam que era preciso melhorar na formação inicial em relação à resolução de problemas, Kilpatrick (2014) afirmou que não é uma tarefa fácil levar para a sala de aula a Resolução de Problemas genuína, mas defendeu a ideia de que um dos caminhos mais promissores é a abordagem de Pólya. Para esse autor, Pólya defendia uma formação de professores não somente em relação ao conteúdo matemático, mas também experiência em fazer matemática, concretizada numa espécie de seminário de resolução de problemas.

Nesse sentido, a perspectiva sociocultural da resolução de problemas, defendida nesta dissertação e apresentada na próxima seção, não se opõe, de forma alguma, à teoria de Pólya, ao contrário, essa perspectiva tem muito a somar com a teoria genuína da resolução de problemas.

4.5 A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NA PERSPECTIVA DA EDUCAÇÃO CRÍTICA

No Brasil, na maioria das pesquisas, a Resolução de Problemas está ligada ao desenvolvimento da teoria da matemática. Trata-se de uma forma limitada que se resume em formar grupos na sala de aula, apresentar um problema para os alunos e tornar-se como professor um mediador que vai orientar os alunos a partirem de um conhecimento já dominado para um conhecimento que se pretende alcançar. No entanto, outras formas mais eficientes de organização das atividades de Resolução de Problemas são apontadas na literatura. Andrade (1998), por exemplo, defende a ideia de que o uso dessa metodologia pode ir além do desenvolvimento do conhecimento matemático. Para esse autor, essa metodologia deve, também, fazer o aluno pensar criticamente sobre os aspectos sociais. Para isso, Andrade (1998) sugere a exploração e a proposição de problemas como alternativas que podem ser utilizadas em aulas de matemática.

As práticas escolares da Resolução de Problemas têm tido fortes influências teóricas nos parâmetros relacionados ao desenvolvimento dos conteúdos da matemática. A compreensão dessa metodologia, em muitos casos, é apresentada em termos do uso das quatro fases apontada por Polya (1995) em seu livro intitulado “A Arte de Resolver Problemas”. No entanto, alguns autores de prestígio nessa área, em especial Andrade (1998), afirmam que é uma ideia equivocada pensar a Resolução de Problemas apenas como uma sequência de procedimentos que deva ser seguida pelos alunos para encontrar a solução de um determinado problema. Há indícios, porém, das limitações referentes ao entendimento conceitual para fundamentar a Resolução de Problemas na Educação Matemática. Essa situação tem levado a algumas incoerências entre o que diz a teoria e o que deve ser seguido na prática.

Nessa seção, advoga-se uma perspectiva teórica que se instale nas práticas da Resolução de Problemas nas aulas de Matemática e Física. A intenção é apontar essa metodologia na perspectiva sociocultural tentando atingir o envolvimento permanente dessa metodologia no ciclo da teoria-prática, oferecendo a contribuição inicial do presente autor.

A partir de uma revisão literária, foram identificadas três perspectivas da Resolução de Problemas, que foram denominadas: epistemológica; cognitiva e sociocultural. Essas perspectivas predominam na maioria das pesquisas sobre Resolução de Problemas, embora não se faça referência sobre elas.

Na perspectiva epistemológica, entende-se que as situações-problema que são apresentadas em sala de aula têm, como objetivo, gerarem a teoria da Matemática, ou seja, o objetivo principal é apresentar um problema que possa desenvolver, nos alunos, a aprendizagem de alguns conteúdos da matemática necessários para solucionar o problema. Nessa perspectiva, as quatro fases apresentadas por Polya (1995) é o que caracteriza uma atividade de Resolução de Problemas. As ideias contidas em Brasil (1997) sobre essa temática contemplam essa perspectiva, uma vez que defende o uso dessa metodologia para desenvolver nos alunos o conhecimento de alguns conteúdos da matemática.

Na segunda perspectiva, o interesse principal é entender que funções cognitivas são ativadas no aluno numa atividade de Resolução de Problemas. Essa perspectiva, segundo Reis e Törner (2007), tem origem no século XX na Alemanha. Segundo esses autores, a Resolução de Problemas não era primariamente um aspecto da Educação Matemática e sim da psicologia cognitiva.

A perspectiva sociocultural, que o presente autor utiliza para fundamentar a Resolução de Problemas é entendida como um ambiente de aprendizagem que estimula o aluno a desenvolver atividades que gerem o conhecimento. Skovsmose (2000) apresenta a noção de *ambiente de aprendizagem* para se referir às condições nas quais os alunos são estimulados a desenvolver determinadas atividades. Essa perspectiva tem como base prioritária a Educação Matemática Crítica de Skovsmose (2000) e os trabalhos de Paulo Freire e Ubiratan D'Ambrósio. Nessa perspectiva, as quatro fases de Polya (1995) devem ser trabalhadas, mas, não necessariamente na ordem que é apresentada na maioria das pesquisas.

Entende-se que estas perspectivas não possuem delimitações específicas, inclusive, se for feita uma análise detalhada, percebe-se que uma determinada atividade de Resolução de Problemas pode contemplar mais de uma delas. A importância de conhecer as características essenciais de cada uma das perspectivas apresentadas nesse texto está em determinar o propósito específico de cada uma e identificar as pequenas sutilezas que as tornam diferentes.

As três perspectivas têm, como um dos pontos de convergência, a caracterização da Resolução de Problemas como uma metodologia poderosa para trabalhar a matemática em sala de aula. No entanto, na prática, ainda há uma grade demanda de profissionais que tenham conhecimento teórico sobre essa metodologia. Para Andrade (2008) há um desencontro entre a literatura acadêmica e a sala de aula de matemática e tanto as pesquisas quanto os pesquisadores não vêm se relacionando de modo eficaz com a sala de aula. A partir daí, esse autor afirma que passa a ser necessário um estudo investigativo entre pesquisa e sala de aula.

Na literatura, Schroeder e Lester (1989) apresentam três abordagens do uso da Resolução de Problemas em sala de aula: ensinar sobre resolução de problemas, ensinar a resolver problemas e ensinar através da resolução de problemas.

A primeira está relacionada aos trabalhos de Polya (1995) que enfatizam as quatro fases denominadas de: compreensão do problema; estabelecimento de um plano; execução do plano e verificação dos resultados.

Na segunda, ensina-se matemática para, depois, usar essa matemática ensinada para resolver problemas.

Já a terceira abordagem apresenta a Resolução de Problemas como uma metodologia de ensino, a qual nos apresenta caminhos para ensinar matemática e não apenas para resolver problemas.

> O ponto central de nosso interesse em trabalhar o ensino-aprendizagem de matemática através da Resolução de Problemas baseia-se na crença de que a razão mais importante para esse tipo de ensino é a de ajudar os alunos a compreender os conceitos, os processos e as técnicas operatórias necessárias dentro do trabalho feito em cada unidade temática. (ONUCHIC, 1999, p.208)

O presente autor não teve a pretensão de esgotar o assunto dessa temática nesta seção. O objetivo foi apresentar a Resolução de Problemas numa perspectiva que tem como objetivo desenvolver, nos alunos, não só o conhecimento da matemática em si, mas, que possa contribuir para que eles pensem criticamente e politicamente dentro da sociedade em que estão inseridos, a partir do conhecimento da matemática.

A Resolução de Problemas na perspectiva sociocultural pode proporcionar, aos alunos, um ambiente de investigação. Nesse ambiente de investigação, os estudantes são convidados a "fazer matemática"[9]. O papel do professor é criar este espírito de pesquisa, de confiança e de expectativas.

Essas ideias podem ser complementadas por Andrade (1998) que defende, em sua dissertação de mestrado, intitulada "*ensino-aprendizagem da matemática via resolução, exploração, codificação e descodificação de problemas e a multicontextualidade da sala deaula*", a exploração e a proposição de novos problemas como alternativas para a criação do ambiente de aprendizagem.

Para Andrade (2008, p.2), a exploração e a resolução de problemas são desenvolvidas a partir do movimento da relação Problema-Trabalho-Reflexão e síntese (P-T-RS). Para esse autor, a exploração é caracterizada pelo seguinte procedimento:

> Inicialmente é dado um problema, os alunos realizaram um trabalho sobre ele e, juntos, professor e alunos, discutem o trabalho feito num processo de reflexões e

[9]Para van Walle (2009) o "fazer matemática" está relacionado com um ambiente em que os alunos se envolvem na busca pelas soluções de determinados problemas.

> síntese. Chegando, assim, possivelmente à solução do problema, a novos conteúdos, a novos problemas, à realização de novos trabalhos, a novas reflexões e novas sínteses.

Segundo esse autor, o processo da exploração de problemas vai além da busca da solução do problema, refere-se a tudo que se faz nele a partir da relação (P-T-RS). Ainda nesse processo de exploração de problemas o professor pode propor novos problemas para os alunos, de tal forma que estejam relacionados com o problema inicial. Entende-se que esse processo constitui um ambiente de investigação.

Para Andrade (1998), o ambiente de Resolução de Problemas torna-se investigativo a partir do momento em que o professor não aplica o problema apenas com o objetivo de desenvolver os conteúdos da matemática, mas sim, de fazer através da exploração e proposição de problemas com que os alunos tornem-se cidadãos críticos dentro dos aspectos sociais da realidade em que estão inseridos.

Entende-se que a Resolução de Problemas é abordada em sala de aula, na perspectiva sociocultural, quando o ambiente torna-se investigativo e não tem como objetivo único o desenvolvimento dos conteúdos da matemática, e sim, desenvolver nos alunos a capacidade crítica e reflexiva da realidade que estão inseridos.

Nesse processo, ilustremos essa perspectiva com um exemplo imaginário. Suponhamos que os alunos tenham um problema referente aos gastos mensais com energia elétrica e água. Imagine que os alunos conseguiram verificar o consumo de energia de cada aparelho eletrodoméstico de suas residências e identificaram, ainda, que a cada quantidade x de energia economizada estariam economizando y litros de água, uma vez que a energia é gerada a partir das hidrelétricas e, por isso, gastando energia, consequentemente estariam gastando água. Até aqui, os alunos estariam envolvidos com o conhecimento da matemática em si. A partir daqui, com a proposição e a exploração de problemas defendida por Andrade (1998), o professor pode convidar os alunos a uma reflexão sobre a economia de energia e de água, entre outros fatores que poderiam ser explorados pelo professor. Nesse processo o professor poderia levantar os seguintes questionamentos: O que ganhamos quando economizamos água e energia elétrica? O que a matemática mostrou em relação a essa economia? Que tipos de projetos poderiam ser lançados para ajudar a população nessa situação? E muitas outras questões poderiam ser formuladas. Observa-se que, na perspectiva sociocultural, além de trabalharmos os conteúdos da Matemática, estaríamos utilizando a matemática como uma ferramenta que possibilita a reflexão dos alunos sobre a realidade, e, assim, tornando-os cidadãos mais críticos.

A perspectiva sociocultural é embasada na Educação Matemática Crítica que, segundo Skvsmose (2000), tem como objetivo o desenvolvimento da *materacia,* vista como uma competência similar a *literacia* caracterizada por Paulo Freire. Para esse autor,

> A materacia não se refere apenas às habilidades matemáticas, mas também à competência de interpretar e agir numa situação social e política estruturada pela matemática. A Educação Matemática Crítica inclui o interesse pelo desenvolvimento da Educação Matemática como suporte de democracia, implicando que as microsociedades de sala de aula de matemática devem também mostrar aspectos de democracia. (p.2)

Nessa perspectiva, o ambiente é colocado como um “convite” aos alunos, tendo como referência a Educação Matemática Crítica de Skovsmose (2000). Nesse caso, o convite é realizado a partir do uso da proposição e exploração de problemas e faz indagação à investigação.

Para Andrade (1998), a proposição e exploração de problemas é um caminho pelo qual a indagação se faz. Pode-se dizer que o professor pode tornar a metodologia Resolução de Problemas em um ambiente de investigação, pois, essa metodologia pode-se dar por meio de conceitos, ideias e algoritmos da própria matemática.

5 O MODELO MODIFICADO E A PERGUNTA DA PESQUISA

Neste capítulo, é retomado o Modelo de Romberg. Após o estudo realizado nos dois capítulos anteriores, esclareceu-se e definiu-se melhor a presente pesquisa. Sendo assim, foi apresentado um modelo modificado que é uma evolução do Modelo Preliminar e que guiará este estudo até o fim – o qual será aqui nomeado de Modelo Modificado – bem como a resposta à pergunta de pesquisa já apoiada na investigação realizada nos Capítulos três e quatro.

5.1 A INFLUÊNCIA DOS NOSSOS "OUTROS" NA PESQUISA

Após a investigação feita sobre os dois temas identificados e já apresentados nesta pesquisa: Capítulo 3 – Modelagem Matemática e Capítulo 4 – Resolução de Problemas, entendeu-se que é necessário reavaliar o Modelo Preliminar e, consequentemente, elaborar um novo modelo e definir a pergunta da pesquisa.

No Capítulo 3, Modelagem Matemática, logrou-se um aprofundamento dos conhecimentos sobre a Modelagem Matemática e sobre suas perspectivas em âmbito nacional e internacional. Além disso, a partir dos estudos realizados para a composição do terceiro capítulo, conseguiu-se localizar a perspectiva sócio-crítica ancorada na Educação Matemática Crítica de Skovsmose (2000).

No Capítulo 4, ao pesquisar sobre a Metodologia de Ensino na Formação Inicial do Professor, verificou-se que foram aprofundados os conhecimentos em uma perspectiva de formação que daria oportunidade aos professores em exercício, entre outras situações, de repensar e problematizar suas concepções sobre o processo de ensino-aprendizagem e que se lhes possibilitaria, ao participarem do curso, tornar-se pessoas que pudessem contribuir coletivamente para a sua formação inicial. Além disso, nesse estudo, tomou-se conhecimento da Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas e das normas do desenvolvimento profissional do professor de Matemática, apresentada pelo NCTM.

Compreende-se, portanto, a importância de abordar conceitos que tratem da Matemática do Ensino Básico e que façam uma ligação entre os conceitos do curso Superior, nesse sentido, pretende-se trabalhar num Curso de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) através da Resolução de Problemas no contexto da Modelagem, com base nos documentos oficiais, nos livros escolhidos e na ementa da Disciplina de EDO do Instituto Federal do Sertão Pernambucano, Campus de Salgueiro.

Nesse sentido, tentar-se-á trabalhar a ementa do curso, utilizando a Metodologia Resolução de Problemas no contexto da Modelagem Matemática.

Encontra-se, abaixo, a ementa para o curso de EDO que será trabalhada através da resolução de problemas no contexto da Matemática.

Tabela 4 - A ementa do curso de Equações Diferenciais Ordinárias

Ementa do Curso
Disciplina: Equações Diferenciais Ordinárias no Contexto da Modelagem Matemática
Curso: Física
Professor/ Responsável:
Carga Horária: 120 horas/aulas
Equações Diferenciais Exatas e Fator integrante; Equações Diferenciais Lineares de primeira ordem; Equações Diferenciais Lineares de segunda ordem; Equações de variáveis separáveis; Equações homogêneas soluções em séries de potências; Modelos de dinâmica populacional (Malthus, Verhurst, Volterra, entre outros); Aplicação de modelos matemáticos na queda de corpos; Modelos Clássicos da Física Modelos Complementares

Fonte: Elaborada pelo autor.

O objetivo deste curso é o de apresentar, para futuros professores, a Modelagem Matemática como uma proposta promissora para o ensino de Física e Matemática no Ensino Básico. No entanto, para trabalhar com os futuros professores os conceitos da Modelagem Matemática, será abordado, durante um curso de extensão, o conteúdo Equações Diferenciais Ordinárias. Para abordar esse conteúdo, será utilizada a Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas.

Como um dos propósitos desta pesquisa é o de oferecer, aos alunos de um curso de Física e Matemática, uma possibilidade de se prepararem para futuramente serem professores, de forma geral espera-se que os alunos, inscritos no Curso de EDO, despertem para os estudos e consigam, além de revisar conceitos, identificar um método de estudo que lhes seja útil para todas as disciplinas do curso de graduação.

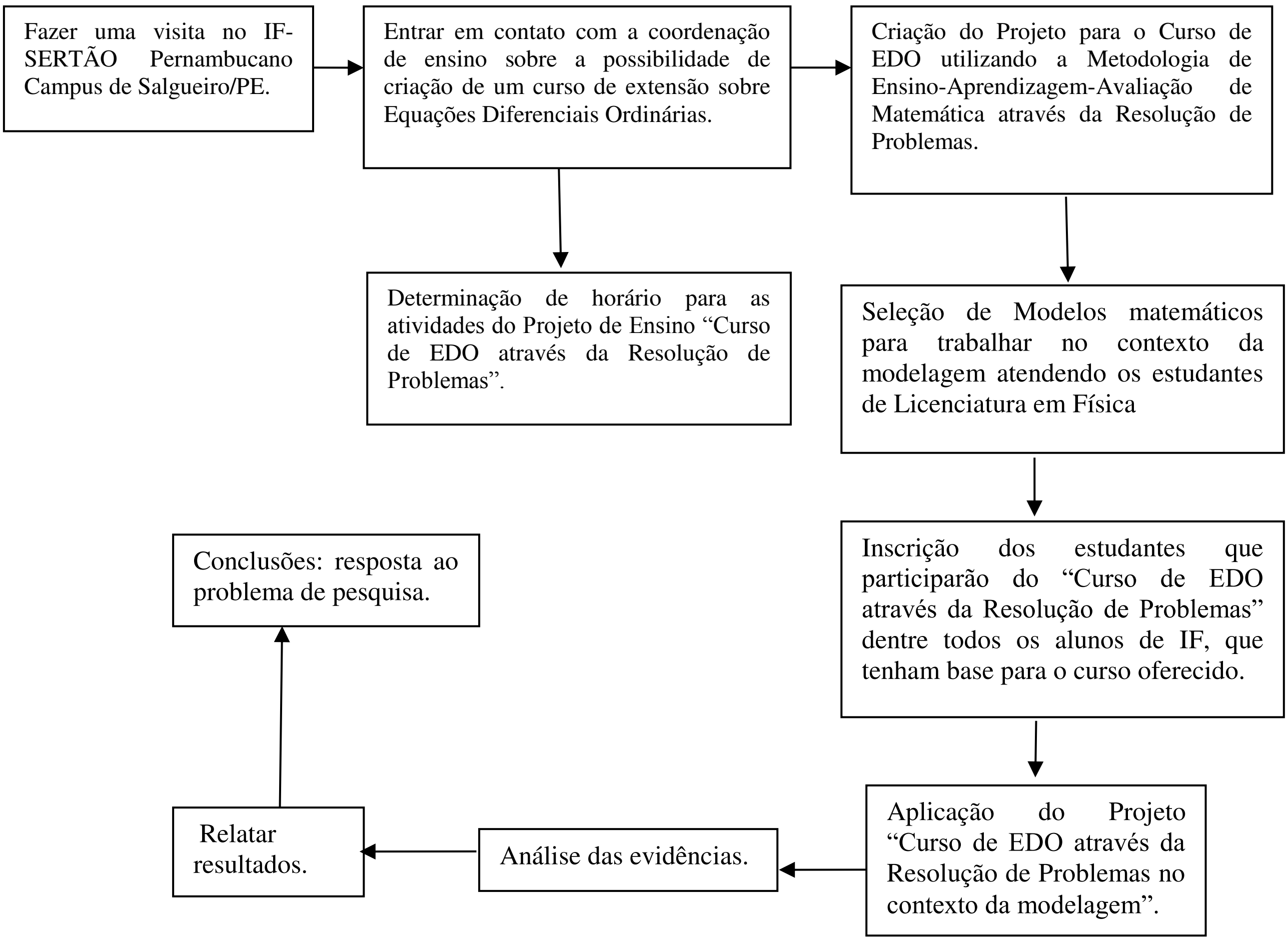
Deseja-se que esses alunos tenham autonomia para estudar os diversos conteúdos necessários para sua formação e espera-se que a Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas seja o foco principal para que isso aconteça; reitere-se que a Modelagem Matemática faz parte desse processo.

5.2 O MODELO MODIFICADO

Como definido na página 30, é importante salientar que o Modelo Preliminar permanece como espinha dorsal para um possível Modelo Modificado. O que ocorre é que o Modelo Preliminar expõe, de forma simples, os problemas detectados pelo pesquisador. Nesse sentido, descrever-se-á o Modelo Modificado detalhando as variáveis que foram detectadas no estudo dos capítulos anteriores, para auxiliar na busca pela resposta à questão proposta neste trabalho.

Cabe novamente salientar que o Modelo Modificado apresentado aqui é fruto dessa pesquisa, ao serem relacionadas às ideias de outros pesquisadores. Sendo assim, considera-se, no presente trabalho, que são “variáveis” as ações dispostas no modelo.

Figura 7- Modelo Modificado segundo Romberg.



Fonte: Elaborado pelo autor

5.3 A PERGUNTA DA PESQUISA

Após relacionar o fenômeno de interesse e o modelo modificado, com ideias de "outros" em nossa pesquisa, chegou-se, finalmente, a uma pergunta norteadora da presente pesquisa: ***Como os estudantes de um curso de Licenciatura em Física ou Matemática podem desenvolver suas habilidades e atitudes para a prática da sala de aula no contexto da Modelagem ao longo de um curso de extensão sobre Equações Diferenciais Ordinárias, utilizando-se a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas?***

A fim de trazer compreensões a respeito da pergunta diretriz, apresentam-se alguns objetivos específicos para o desenvolvimento da pesquisa:

a) Analisar como os alunos se comportam diante de um ambiente da Modelagem Matemática;
b) Avaliar o interesse dos alunos na resolução de problemas no contexto da Modelagem;
c) Observar como os alunos da formação inicial em Física ou Matemática desenvolvem seus primeiros trabalhos na prática da sala de aula, utilizando a Modelagem Matemática e a Resolução de Problemas.

Constam na pergunta diretriz da pesquisa duas palavras que podem ser consideradas como palavras-chave: habilidade e atitude. Nesse sentido, apresenta-se, no próximo parágrafo, o entendimento do autor sobre os referidos termos.

Entende-se por habilidade, a capacidade que uma pessoa tem de utilizar o que sabe para realizar algo, ou seja, a ideia de habilidade está relacionada com a ideia do saber fazer. Já a atitude, é a capacidade que uma pessoa tem de querer fazer algo.

6 SEGUNDO BLOCO DE ROMBERG

Este capítulo trata do segundo Bloco de Romberg (2007) que consiste em apresentar as estratégias (o que fazer?) e os procedimentos (como fazer?) que foram selecionados para por em prática as atividades do modelo modificado e buscar respostas coerentes para a pergunta diretriz da pesquisa. Para Romberg, essa é uma fase complexa, pois, da cuidadosa seleção das estratégias e dos procedimentos depende o bom andamento da pesquisa.

No modelo proposto por Romberg, especificamente as atividades cinco e seis referem-se à seleção de estratégias e correspondentes procedimentos de trabalho. Essa fase da pesquisa exige muito esforço e decisões cuidadosas referentes aos métodos e técnicas que devem ser usadas para se obter clareza sobre as questões levantadas e, ainda, dar resposta à pergunta da pesquisa. Portanto, o presente autor se propõe a apresentar, neste capítulo, uma estratégia geral, suas estratégias auxiliares e os respectivos procedimentos que foram utilizados no desenvolvimento deste trabalho.

6.1 ESTRATÉGIAS E PROCEDIMENTOS DE PESQUISA

Ao refletir sobre o Modelo Modificado e a pergunta diretriz desta pesquisa, ambos expostos no capitulo anterior, sem perder de vista o fenômeno de interesse “Modelagem Matemática e Resolução de Problemas”, decidiu-se ir à busca de estratégias eficientes para responder a pergunta que norteia este trabalho.

Nessa direção, o presente autor elaborou uma estratégia geral (o que fazer?) que representasse as situações apresentadas na pesquisa. Da análise feita no Modelo Modificado foi considerada a seguinte estratégia geral:

Ministrar um curso de extensão referente às equações diferenciais ordinárias no contexto da modelagem matemática, utilizando a resolução de problemas como uma metodologia de ensino. O curso de extensão relacionará os aspectos teóricos e práticos da modelagem matemática.

Optou-se por oferecer um curso de extensão que relacionasse teoria e prática, para que o autor pudesse compreender quais as implicações teóricas da Modelagem Matemática na prática da sala de aula, ou seja, saber como os estudantes de Licenciatura em Física e Matemática desenvolvem suas habilidades e atitudes para a ação docente. No curso, dentro do contexto da Modelagem Matemática foi utilizada a Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas.

Selecionada a estratégia geral, reconheceu-se que ela precisava ser desdobrada em estratégias auxiliares para que pudesse dar continuidade à concretização do plano determinado. O modelo modificado apresenta variáveis-chave que são consideradas como estratégias auxiliares necessárias para o cumprimento da estratégia geral.

E_1: Identificar a instituição onde será desenvolvido o curso de extensão.

E_2: Entrar em contato com os representantes legais da instituição com a finalidade de solicitar autorização para ministrar o curso de extensão.

E_3: Criar um Projeto para o Curso de EDO utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas no contexto da Modelagem Matemática.

E_4: Selecionar Modelos matemáticos para trabalhar no contexto da modelagem atendendo os estudantes de Licenciatura em Física e Matemática.

E_5: Divulgar o curso de extensão na instituição onde será realizada a pesquisa.

E_6: Aplicar o projeto referente a um curso de Equações Diferenciais Ordinárias através da Resolução de Problemas no contexto da Modelagem Matemática.

6.2 PROCEDIMENTO GERAL

Para a realização das ideias da estratégia geral e suas correspondentes estratégias auxiliares, faz-se necessário estabelecer seus respectivos procedimentos gerais e auxiliares. De acordo com Romberg (2007), selecionar os procedimentos para responder a pergunta da pesquisa é uma tarefa em que o pesquisador deve tomar muito cuidado. Nessas condições, tentando seguir as orientações de Thomas Romberg, escolheu-se o seguinte procedimento geral:

A criação de um projeto referente a um curso de extensão sobre as equações diferenciais ordinárias no contexto da modelagem matemática para ser aplicado para alunos do curso de Física e Matemática no IF Sertão PE campus de Salgueiro.

É bom frisar que, durante a realização do curso de extensão, para trabalhar com o conteúdo equações diferenciais ordinárias no contexto da modelagem, o presente autor, utilizou a metodologia de ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas.

Esse procedimento geral (como fazer?) precisa ser desdobrado em partes que o constituem. Para isso, o autor, criou uma serie de procedimentos auxiliares sem perder de vista o fenômeno de interesse, o Modelo Modificado e a Pergunta da Pesquisa. Esses procedimentos auxiliares permitirão, por em ação o procedimento geral da pesquisa.

6.3 PROCEDIMENTOS AUXILIARES

P_1: A instituição **identificada** foi o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sertão Pernambucano campus de Salgueiro (cenário onde será realizada a pesquisa, ou seja, onde será aplicado o projeto de trabalho em sala de aula).
P_2: A primeira **conversa** com o diretor geral do IF Sertão PE campus de Salgueiro, com o coordenador do curso de Física e com a coordenadora de pesquisa e extensão dessa instituição, para apresentar a pesquisa a ser desenvolvida.
P_3: A **criação** de um projeto que contemplasse o conteúdo de Equações Diferenciais Ordinárias utilizando a Resolução de Problemas no contexto da Modelagem Matemática.
P_4: A **seleção** de situações-problema e modelos matemáticos para serem trabalhados no curso de extensão.
P_5: A **divulgação** do curso de extensão em todas as turmas de Física e Matemática do IF Sertão PE e da Faculdade de Ciências Humanas do Sertão Central (FACHUSC).
P_6: Aplicação do projeto juntamente com o roteiro de atividades.

6.4 PROCEDIMENTO GERAL EM AÇÃO

Tendo em vista colocar em ação o procedimento geral da pesquisa, será necessário, antes, colocar em ação cada um dos procedimentos auxiliares P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 e P_6.

P_1 Em Ação

O presente autor tinha como um dos objetivos desenvolver uma pesquisa que contribuísse de forma direta ou indireta para a instituição na qual exerce a função de professor EBTT (Ensino Básico, Técnico e Tecnológico). Sendo assim, optou-se por escolher como cenário de investigação o Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia do Sertão Pernambucano campus de Salgueiro/PE, especificamente, alunos do curso de Licenciatura em Física dessa instituição e alunos da Licenciatura em Matemática da Faculdade de Ciências Humanas do Sertão Central (FACHUSC), também localizada na cidade de Salgueiro/PE.

Devido à admissão do pesquisador, como professor do IF Sertão – PE Campus de Salgueiro foi-lhe concedida permissão para aplicação de um projeto de trabalho sobre Modelagem Matemática e Resolução de Problemas, utilizando o conteúdo Equações Diferenciais Ordinárias em uma turma de Licenciatura em Física.

Faz-se aqui uma pausa no relato sobre o procedimento (P_1) para apresentar ao leitor, de forma sucinta, o IF Sertão – PE Campus de Salgueiro, local onde foi o cenário do desenvolvimento desta pesquisa.

A cidade de Salgueiro, situada no sertão pernambucano passou a integrar o cenário da Educação Profissional, Científica e Tecnológica da Rede Federal de Ensino no momento em que um Campus do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sertão Pernambucano (IF Sertão - PE) foi implantado em seu território no ano de 2010, com base na Lei nº 11.892 de dezembro de 2008 que transformou o então Centro Federal de Educação Tecnológica de Petrolina (CEFET Petrolina) no Instituto Federal, atualmente, reconhecido por seu tempo de atuação e qualidade imprimida na região sertaneja de Pernambuco, formando profissionais nas mais diversas áreas, respeitando e respondendo as demandas da área.

Além de Salgueiro/PE mais quatro cidades tem campi do IF Sertão – PE – Petrolina, Petrolina Zona Rural, Floresta e Ouricuri, como destaca o mapa abaixo.

Figura 8 – Mapa: Localização dos campi do IF Sertão - PE

Fonte: www.ifsertao-pe.edu.br/reitoria/images/mapa%20abertura%20site.jpg

O campus de Salgueiro fica localizado na BR 232, Km 508, sentido Recife, Zona Rural. O campus completou cinco anos em agosto de 2015 e atualmente oferece cursos de modalidade básica e superior, como: Ensino Médio integrado a Agropecuária, Ensino Médio Integrado a Edificações, Ensino Médio Integrado a Informática, Curso superior de Engenharia de Alimentos e o Curso de Licenciatura em Física. Esses cursos são administrados por três coordenações, sendo uma o núcleo comum responsável pelos cursos de nível básico e as outras duas responsáveis pelos cursos superiores.

No que diz respeito aos cursos técnicos, o IF Sertão campus de Salgueiro, tem como objetivo preparar o seu egresso para o mundo do trabalho, agindo na prática social utilizando-se de todas as perspectivas éticas desenvolvidas com base nas Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, articulando uma educação equilibrada e integrada no contexto propedêutico e técnico.

A concepção do Curso de Licenciatura em Física, parte do princípio que o Licenciado em Física é, primeiramente, um Físico, ou seja, um profissional detentor de profundo e embasado conhecimento científico a respeito dos fenômenos naturais. Nesse intuito, o formando deve conhecer e dominar o método científico, instruindo-se maximamente nas teorias e experiências fundamentais da área. Unindo a esse processo um efetivo treinamento didático-pedagógico, ter-se-á um profissional amplamente habilitado para atuar no Ensino Fundamental e no Ensino Médio. Nesse sentido, o perfil profissional desejado é o do físico-educador, entendido como o profissional que deverá se dedicar preferencialmente à formação e à disseminação do saber científico em diferentes instâncias educacionais quer através da atuação no ensino escolar formal, quer através de novas formas de educação científica, com uso de recursos audiovisuais modernos, uso da internet, uso e/ou desenvolvimento de programas computacionais que simulem fenômenos físicos, etc., associando ao ensino, práticas de pesquisa voltadas para a experimentação e desenvolvimento de um conhecimento original. Dessa forma, espera-se que o egresso desenvolva um perfil profissional altamente qualificado nos fundamentos gerais, na pesquisa e na docência, ciente de seu papel social como educador e pesquisador, atento às inovações e tendências da ciência e da tecnologia contemporâneas e com um forte compromisso ético diante aos desafios do seu entorno e da humanidade.

O Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Sertão Pernambucano Campus Salgueiro, tem como prioridade enfatizar a preparação de seu corpo discente, ofertando uma educação sólida, alto padrão de qualidade, competente e ciente do seu papel no meio em questão.

Baseado nas ponderações apresentadas anteriormente, referente à apresentação do IF Sertão Campus de Salgueiro e os objetivos desse campus para o curso de Licenciatura em Física, o presente autor ao realizar o procedimento P_2 apresentado a seguir, combinou, com a coordenação do curso de Física, trabalhar com os alunos participantes alguns tópicos da ementa do curso, mas, sem perder de vista o objetivo da pesquisa, que foi trabalhar com a

Modelagem Matemática e com a Resolução de Problemas numa perspectiva sócio-crítica, utilizando o conteúdo Equações Diferenciais Ordinárias.

P_2 Em Ação

Em contato com o Diretor[10] geral do campus, com a Coordenadora[11] de pesquisa da instituição e com o Coordenador[12] do curso de Licenciatura em Física, em agosto de 2015, foi solicitado, de maneira formal, a permissão para a realização de um curso de extensão sobre Equações Diferenciais Ordinárias no contexto da Modelagem Matemática. Nessa ocasião ficou acordado que, ao término do curso, os alunos participantes receberiam certificados. Além disso, nesse primeiro contato com os coordenadores, recebi uma cópia via e-mail do PPC – Plano Político Pedagógico do curso.

Caso o leitor esteja interessado em vê o plano de curso da Licenciatura em Física do IF Sertão, Campus de Salgueiro, encontra-se disponível no site http://www.ifsertao-pe.edu.br/reitoria/images/cursos/superior/reformulao%20curso%20de%20licenciaturaplena%20em%20fsica%20campus%20salgueiro.pdf.

Ao informar aos coordenadores que a pesquisa seria desenvolvida no IF Sertão Campus de Salgueiro, os mesmos demonstraram interesse pela proposta e se dispuseram a ajudar no que fosse necessário.

P_3 Em Ação

Após a identificação da Instituição e da conversa inicial com os coordenadores supramencionados, foi criado um projeto que contemplasse o conteúdo de Equações Diferenciais Ordinárias, utilizando como metodologia de ensino a resolução de problemas no contexto da Modelagem Matemática. Esse projeto consistiu na realização de um curso de extensão que tinha como objetivo identificar e compreender como os alunos de Licenciatura em Física e Matemática desenvolvem suas habilidades e atitudes para a prática da sala de aula.

No curso de extensão que foi oferecido, o objetivo principal não foi trabalhar o conteúdo das Equações Diferenciais Ordinárias, mas, sim, utilizá-lo para apresentar a

[10] Professor Ms. Eriverton Rodrigues.
[11] Professora Dr. Camila Macedo Medeiros
[12] Professor Dr. Marcelo Souza da Silva

Modelagem Matemática como uma possibilidade para o processo de ensino-aprendizagem de Física e Matemática.

Nesse procedimento P_3, foi criado um programa de atividades para ser colocado em prática no curso de extensão.

<table>
<tr><td colspan="3">INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIAS E TECNOLOGIA DO SERTÃÕ PERNAMBUCANO CAMPUS DE SALGUEIRO</td></tr>
<tr><td colspan="3">PROGRAMA DE ATIVIDADES</td></tr>
<tr><td colspan="3">TEMA: EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS NO CONTEXTO DA MODELAGEM MATEMÁTICA</td></tr>
<tr><td colspan="3">PROFESSOR</td></tr>
<tr><td colspan="3">Rônero Márcio Cordeiro Domingos</td></tr>
<tr><td>Carga Horária Total</td><td>Carga Horária Teórica</td><td>Carga Horária Prática</td></tr>
<tr><td>40 horas</td><td>30h</td><td>10h</td></tr>
<tr><td colspan="3">EMENTA</td></tr>
<tr><td colspan="3">Na aplicação do curso de Extensão, o trabalho será desenvolvido seguindo a seguinte ordem:
1. A Modelagem Matemática e a Resolução de Problemas no Contexto Social;
2. Equações Diferenciais de 1ª e 2ª Ordem;
3. Realização de Seminários/aulas sobre conteúdos de Física e Matemática utilizando a Metodologia Resolução de Problemas no contexto da Modelagem Matemática.</td></tr>
<tr><td colspan="2">DESCRIÇÃO DO CONTEÚDO PROGRAMÁTICO</td><td>HORAS/A</td></tr>
<tr><td colspan="2">1. O que é, para que e como utilizar a Modelagem e a Resolução de Problemas na sala de aula de Física e Matemática?
2. Equações Diferenciais de Primeira e Segunda Ordem;
3. Equações de variáveis separáveis;
4. Modelos de dinâmica populacional (Malthusiano)
5. Modelos clássicos da Física;
6. Aplicação de Modelos matemáticos na queda de corpos;
7. Conteúdos de Nível Básico escolhido em sala, para a apresentação dos seminários/aulas.</td><td>40h</td></tr>
<tr><td colspan="3">AVALIAÇÃO</td></tr>
<tr><td colspan="3">A avaliação será processual devendo ocorrer em todos os momentos do desenvolvimento do curso, podendo, assim, os processos de ensino e aprendizagem serem retomados. Serão considerados para fins de compreensão sobre o aprender dos alunos: a participação nas discussões, o envolvimento nas situações-problema propostas, a construção dos trabalhos individuais, a realização das leituras e a apresentação de trabalhos.</td></tr>
</table>

BIBLIOGRAFIA
[1] ALMEIDA. L. W.; SILVA. K. P.; VERTUAN. R. E. Modelagem Matemática na Educação Básica. 1ª.ed reimpressão – São Paulo: contexto, 2013. 157p [2] BARBOSA, J. C. Modelagem Matemática e a Perspectiva sócio-crítica. In: Seminário Internacional de Pesquisas em Educação Matemática, 2003, Santos, SP. Anais. Santos, SP: SBM, 2003. p. 1-13. [3] BASSANEZI, C. R. Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática. 3. ed. São Paulo: contexto, 2013. 389 pag. [4] BOYCE, William E., DIPRIMA, Richard C. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. Tradução e revisão técnica: Valéria de Magalhães Iório. 9.ed. Rio de Janeiro: Editota LTC, 2010. [5] ONUCHIC. L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. p.199-218. In: Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas, São Paulo: editora UNESP, 1999. [6] ONUCHIC. L. R.; HUANCA. R. R. H. Uma Revolução no campo da Formação de professores de Matemática. In. II congresso Nacional de Formação de Professores de Matemática. 2014, Águas de Lindóia. Anais. p. 1-10 [7] ONUCHIC. L. R.; ALLEVATO, N. S. G (2011). Pesquisa em resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. In: Boletim de Educação Matemática (BOLEMA), v.5 – n.41 – Dezembro de 2011. [8] SOTOMAYOR, J.; Equações Diferenciais Ordinárias. 1. ed. São Paulo: editora Livraria da Física, 2011. 169pag. [9] ZILL, Dennis G. Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem. Tradução: Cyro de Carvalho Patarra, revisão: Antônio Luis Pereira. São Paulo: Editora Pioneira Thomson Learning, 2003.

Os objetivos específicos desse projeto são:

1) Enfatizar aplicações da matemática e da Física, usando técnicas de modelagem como procedimentos, de modo a desenvolver nos alunos, capacidades e atitudes críticas na direção da resolução de problemas.
2) Desenvolver o espirito crítico do educando de modo que ele possa entender e interpretar a Matemática ou a Física em todas as suas facetas.
3) Levar os alunos, futuros professores, a construírem conhecimentos relacionados às equações diferenciais ordinárias, à Modelagem Matemática e aos campos educacionais, pedagógicos e profissionais.
4) Levar os futuros professores a refletir sobre o aprender a ensinar, refletindo na prática e sobre a prática.

5) Levar os futuros professores a construir novas ideias sobre o conteúdo Equações Diferenciais Ordinárias e a Modelagem Matemática, afim de que possam desenvolver uma forma de ensino que levem seus futuros alunos a uma aprendizagem com compreensão e significado.

P_4 Em Ação

Após a criação do plano de curso exposto em P_3, foram elaboradas e selecionadas algumas situações-problema que contemplassem alguns conteúdos referentes às Equações Diferenciais Ordinárias. Além das situações-problema selecionadas, com a finalidade de deixar os alunos familiarizados com a Modelagem Matemática, foram selecionados também alguns textos sobre essa temática, de autoria de Barbosa (2001), Almeida et all (2013), Bassanezi (2013), entre outros.

As situações-problema apresentadas durante o curso, tinham como objetivo possibilitar aos alunos uma reflexão sobre alguns modelos clássicos da Matemática, representados por Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira e Segunda ordem. Contudo, objetivava-se também, possibilitar aos alunos, a entenderem que, apesar de estarem sendo trabalhadas as Equações Diferenciais no curso de extensão, eles poderiam utilizar essa metodologia em atividades que envolvam conteúdos de nível básico.

Em todos os momentos da realização do curso, o presente autor tentou ser coerente com a teoria apresentada na fundamentação teórica desta dissertação. Sendo assim, buscou-se em todos os momentos do curso, fazer uma reflexão sobre a Modelagem Matemática na perspectiva sócio-crítica, ancorada na Educação Matemática Crítica de Ole Skovsmose (2000). O fato de estar trabalhando com as Equações Diferenciais Ordinárias não é, de maneira alguma, um empecilho para o uso da Modelagem na perspectiva sócio-crítica.

Passa-se, agora, a apresentar as principais situações-problema que foram utilizadas nas aulas do curso de Extensão. No entanto, os detalhes das discussões ocorridas em relação a cada um desses problemas, serão apresentados no próximo capítulo referente aos episódios vivenciados.

Situação-Problema 1

A tabela abaixo apresenta os dados do censo demográfico da cidade de Salgueiro/PE realizado pelo IBGE entre os anos de 2000 a 2010. A partir dos dados apresentados, considerando que a taxa de crescimento é proporcional à população existente em cada instante, determine uma estimativa do número de habitantes dessa cidade no ano 2020.

Tabela - Censo demográfico da cidade de Salgueiro/PE de 2000/2010

ANOS	IBGE POPULAÇÃO	TAXA MÉDIA DE CRESCIMENTO ANUAL
2000	51.571	0.94%
2010	56.629	0.94%

Fonte: IBGE

Essa situação-problema teve como objetivos:

1. Diagnosticar o desempenho dos alunos em relação a alguns conteúdos da Matemática.
2. Possibilitar os alunos a refletirem sobre os conceitos das Equações Diferenciais Ordinárias e de outros conteúdos básico da matemática, como: funções, funções exponenciais, progressão aritmética, funções logarítmicas, progressão geométrica e proporcionalidade.
3. Explorar o Modelo de Malthus para a Dinâmica Populacional.
4. Trabalhar conceitos aritméticos, geométricos e algébricos.

Situação-Problema 2

Considere a água em um recipiente a uma temperatura de $90°C$ logo depois de ser esquentada, um minuto depois passa para $85°C$, em uma temperatura ambiente de $25°C$. Determine a temperatura da água em função do tempo e o tempo que levará para que a água chegue a $60°C$.

Objetivos:

1. Reconhecer na prática, por meio de experimentos, como ocorre o processo de resfriamento e aquecimento de um corpo.
2. Possibilitar aos alunos refletir sobre alguns conceitos das Equações Diferenciais, das funções exponenciais e proporcionalidade.
3. Ensinar os alunos a enfrentar situações novas.
4. Dar aos alunos oportunidade de se envolver com as aplicações da Matemática.
5. Explorar o Modelo de Resfriamento de Newton.

Situação-Problema 3

Um paraquedista, pesando 70kg, salta de um avião e abre o paraquedas passados 10 segundos. Antes da abertura do paraquedas, o seu coeficiente de atrito é k=5kg/s, depois é k=100kg/s

a) Qual a velocidade do paraquedista no instante em que se abre o paraquedas?

b) Qual a distância percorrida em queda livre?

Objetivos:

1. Levar os alunos a entender como se dá o processo de um corpo em queda livre.
2. Apresentar conceitos das Equações Diferenciais e de outros conteúdos da Física, como: força e segunda Lei de Newton.
3. Formalizar por meio dessa situação-problema um modelo clássico da matemática representado por uma Equação Diferencial Ordinária.

Situação-Problema 4

Um tambor cilíndrico de 2 metros de altura e base circular de raio 1 metro está cheio de água. Se fizermos um furo no fundo e em 30 minutos a água cair pela metade vamos determinar a altura h da água dentro do tambor em função do tempo e em quanto tempo o tanque esvazia.

Objetivos:

1. Formalizar os conceitos da Lei de Torricceli.
2. Possibilitar os alunos, entender na prática, por meio de experimento como se comporta o escoamento de um liquido por um orifício situado a uma altura h de um determinado recipiente.
3. Generalizar a situação-problema para casos da vida real, como por exemplo, vazamentos de barragens, cisternas, açudes, etc.

Situação-Problema 5

Suponha que uma aplicação renda juros de 1% ao mês (continuamente). Encontre o saldo como função do tempo e o saldo após 12 meses se o saldo inicial é de $R\$100,00$.

Objetivos:

1. Desenvolver conceitos das Equações Diferenciais Ordinárias e de outros conteúdos Básicos da matemática como, progressão geométrica, juros simples e composto, função exponencial e proporcionalidade.

2. Formalizar um modelo matemático tipo exponencial que representa o tema juros.
3. Possibilitar aos alunos, por meio da matemática refletir sobre situações reais do dia a dia.

Situação-Problema 6

Suponha que seja aberta uma caderneta de poupança com o objetivo de no futuro adquirir um bem no valor de $R\$\ 40.000,00$. Suponha que os juros sejam creditados continuamente a uma taxa de $r = 1\%$ ao mês e que os depósitos também sejam feitos continuamente a uma taxa constante, sendo no início o saldo igual à zero. Determine de quanto deve ser a taxa de deposito mensal para que em 20 meses se consiga atingir o valor pretendido.

Objetivos:

1. Aprofundar os conceitos trabalhados na situação-problema anterior.
2. Trabalhar conceitos referentes ao problema de valor inicial.
3. Explorar os conceitos da Matemática Financeira.

Situação-Problema 7

Um tanque com $1000l$ de água salgada com $15kg$ de sal dissolvido. Água pura entra no tanque a uma taxa de $10l/min$ e a mistura se escoa com a mesma taxa. Quanto de sal há no tanque após $20min$?

Objetivos:

1. Aprofundar os conceitos relacionados a taxas de variações.
2. Construir um modelo clássico da matemática que possibilite aos alunos resolver a situação-problema apresentada.
3. Trabalhar as Equações Diferenciais de primeira ordem.

Situação-Problema 8

Num tanque há 100 litros de salmoura contendo 30 gramas de sal em solução. A água (sem sal) entra no tanque à razão de 6 litros por minuto e a mistura se escoa a razão de 4 litros por minuto, conservando-se a concentração uniforme por agitação. Determine qual a concentração de sal no tanque ao fim de 50 minutos.

Objetivos:

1. Aprofundar os conceitos apresentados e trabalhar na situação-problema anterior.

2. Reforçar os conceitos das equações Diferenciais já apresentadas na situação-problema anterior.
3. Reconhecer todas as variáveis envolvidas em uma situação-problema.

Situação-Problema 9

Considere um objeto de $10g$ suspenso por uma mola presa a um suporte fixo. Considere a aceleração da gravidade dada por $g = 981cm/seg^2$ e a constante da mola dada por $k = 1000$. Nessas condições, determine a expressão matemática que represente o deslocamento do objeto.

Objetivos:

1. Reforçar os conceitos da segunda lei de Newton através de um novo problema.
2. Explorar alguns conceitos da Física, como: força, força de ação e reação, Lei de Hooke, etc.
3. Formalizar e compreender o modelo matemático que represente o contexto da situação trabalhada.
4. Trabalhar os conceitos das Equações Diferenciais de segunda ordem.

Situação-Problema 10

Considere um objeto de $10g$ suspenso por uma mola presa a um suporte fixo. Considere a aceleração da gravidade dada por $g = 981cm/seg^2$ e a constante da mola dada por $k = 1000$. Nessas condições, determine a expressão matemática que represente o deslocamento do objeto.

Objetivos:

1. Aprofundar os conceitos das Equações Diferenciais de Segunda ordem trabalhados na situação-problema anterior.
2. Formalizar o modelo matemático através da situação trabalhada que representa.
3. Explorar alguns conceitos da Física.

Além dessas situações-problema, em alguns encontros, a partir da exploração e proposição de problemas, foram apresentadas outras situações relacionadas às que foram, inicialmente discutidas. Na condução das atividades desenvolvidas, o presente autor sempre buscava utilizar a exploração e a proposição de problemas, o leitor, talvez perceba tal fato ao ler a descrição dos episódios apresentadas no próximo capítulo.

As situações-problema, apresentadas e trabalhadas, tinham como objetivo geral possibilitar aos participantes a aprender, a partir da construção dos modelos trabalhados, as técnicas utilizadas para tal construção. Objetivava-se, com essas situações-problema, formalizar modelos clássicos da matemática com a finalidade de ajudar os alunos a aprenderem a modelar.

P_5 Em Ação

Após a elaboração do projeto de EDO, foi feita uma divulgação do curso de extensão em todas as salas de aulas do curso de Física. Além disso, foi feita a divulgação desse curso em algumas turmas de Licenciatura em Matemática de uma instituição privada do município de Salgueiro/PE. Nessa ocasião foi informado aos estudantes o tema do curso oferecido, a relevância do mesmo para a formação inicial dos estudantes de Licenciatura em Física e Matemática, a carga horária e a certificação após o término do curso.

Foi informado ainda na divulgação que os interessados teriam que confirmar a participação na coordenação de Física do IF Sertão PE, Campus Salgueiro. Além disso, ficou claro que o curso seria oferecido para uma turma de no máximo 20 estudantes.

Como o leitor já deve ter percebido, o IF Sertão campus de Salgueiro é novo, com apenas 5 anos. Com isso, a comunidade que compõe essa instituição tem enfrentado alguns problemas referentes à quantidade de salas para a realização das aulas. Nessas condições, o único dia e horário que este pesquisador encontrou para ministrar o curso de extensão foram as terças feiras das 13h às 17h. Nesse horário são realizadas aulas das disciplinas regulares do curso de Física, impossibilitando alguns alunos de participarem do curso de extensão. Assim sendo, a divulgação do curso também foi feita em uma Faculdade Privada do Município de Salgueiro/PE, para alunos de Licenciatura em Matemática.

P_6 Em Ação

Esse procedimento é referente à realização do curso de extensão, ou seja, a implementação do projeto que foi criado e apresentado neste trabalho como procedimento geral. Ao descrever os episódios ocorridos durante a realização do referido curso, percebeu-se que se incluídos dentro desse procedimento em ação, tornaria esse capitulo muito extenso. Pensando nisso e na estética da escrita deste trabalho, esse procedimento em ação, referente à implementação do projeto que foi criado, será apresentado no próximo capítulo dedicado apenas aos episódios ocorridos.

7 TERCEIRO BLOCO DE ROMBERG: RESULTADOS E DISCUSSÃO DOS EPISÓDIOS

Segundo Goldenberg (apud HUANCA, 2014, p. 204), na pesquisa qualitativa a preocupação do pesquisador não é com a representatividade numérica do grupo pesquisado, mas com o aprofundamento da compreensão sócio-crítica de um grupo, de uma instituição, etc. Nesse sentido, esta pesquisa consiste em descrições detalhadas de situações com o objetivo de compreender os indivíduos em seus próprios termos.

Como o objetivo desta pesquisa foi identificar e compreender como os estudantes de Licenciatura em Física e Matemática desenvolvem suas habilidades e atitudes para a prática da sala de aula através da resolução de problemas no contexto da Modelagem Matemática, foi imprescindível fazer com que os alunos participantes colocassem em prática os conhecimentos teóricos trabalhados no primeiro momento de realização do curso de extensão.

A turma participante da pesquisa de campo foi composta por 16 alunos, sendo 7 do curso de Licenciatura em Física do IF Sertão, Campus de Salgueiro, 8 do curso de Licenciatura em Matemática da Faculdade de Ciências Humanas do Sertão Central – FACHUSC (Instituição Privada) e um professor substituto do IF Sertão, Campus de Salgueiro. Dos 16 participantes, três já exerciam a função docente.

Para os três alunos que já lecionavam em algumas escolas do município de Salgueiro/PE, foi combinado que cada um teria que ministrar uma aula, cujo assunto a ser ministrado fosse um dos conteúdos de Física ou Matemática, de preferência, seguindo a ementa proposta pela Instituição que trabalham, utilizando a Modelagem para o ensino no decorrer dos encontros.

Os dados desta pesquisa são constituídos pelas anotações das observações no decorrer do curso, pelos cadernos e anotações dos alunos e, principalmente pelas gravações feitas ao longo da realização de cada encontro.

Entende-se que o relato dos episódios e a análise dos dados é uma das partes essenciais da pesquisa, onde o autor compartilha sua experiência vivenciada de tal forma que, o leitor possa ter uma boa compreensão de tudo que foi vivido e, a partir daí, comparar os dados obtidos com a pergunta da pesquisa. Assim sendo, este capítulo, sem dúvidas, foi um dos mais difíceis de descrever.

A partir das anotações feitas no diário de campo, que era composto pelos fatos que mais chamaram a atenção do pesquisador e, conjuntamente, com a análise dos áudios e vídeos gravados, elaboraram-se alguns episódios. Esses episódios configuram os dados da pesquisa e compõem este capítulo.

Todos os episódios foram elaborados segundo a visão de pesquisa do presente autor, buscando respostas para a questão central: Como os estudantes de um curso de Licenciatura em Física ou Matemática podem desenvolver suas habilidades e atitudes para a prática da sala de aula no contexto da Modelagem ao longo de um curso de extensão sobre Equações Diferenciais Ordinárias, utilizando-se a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas?

Nas próximas seções será feita, uma breve descrição sobre como ocorreu a aplicação do projeto, focalizando sete episódios dos 10 encontros realizados, onde a Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática, através da Resolução de Problemas, foi adotada para trabalhar no contexto da Modelagem. As transcrições apresentadas são trechos referentes às conversas entre os alunos e o professor pesquisador. Além da descrição das ocorrências, em alguns momentos é possível encontrar os comentários do pesquisador.

Dentro do curso de extensão, o objetivo principal, foi levantar reflexões sobre o que fazer, e como fazer Modelagem em sala de aula. Nesse processo, a Resolução de problema, serviu como Metodologia de Ensino para que o pesquisador pudesse realizar esse objetivo.

7.1 EPISÓDIO – DINÂMICA POPULACIONAL (1º Encontro 27/10/2015)

Às 13h do dia 27 de outubro de 2015, deu-se início ao primeiro encontro do curso de extensão intitulado “Equações Diferenciais Ordinárias no contexto da Modelagem Matemática”. Nessa ocasião, compareceram 16 alunos.

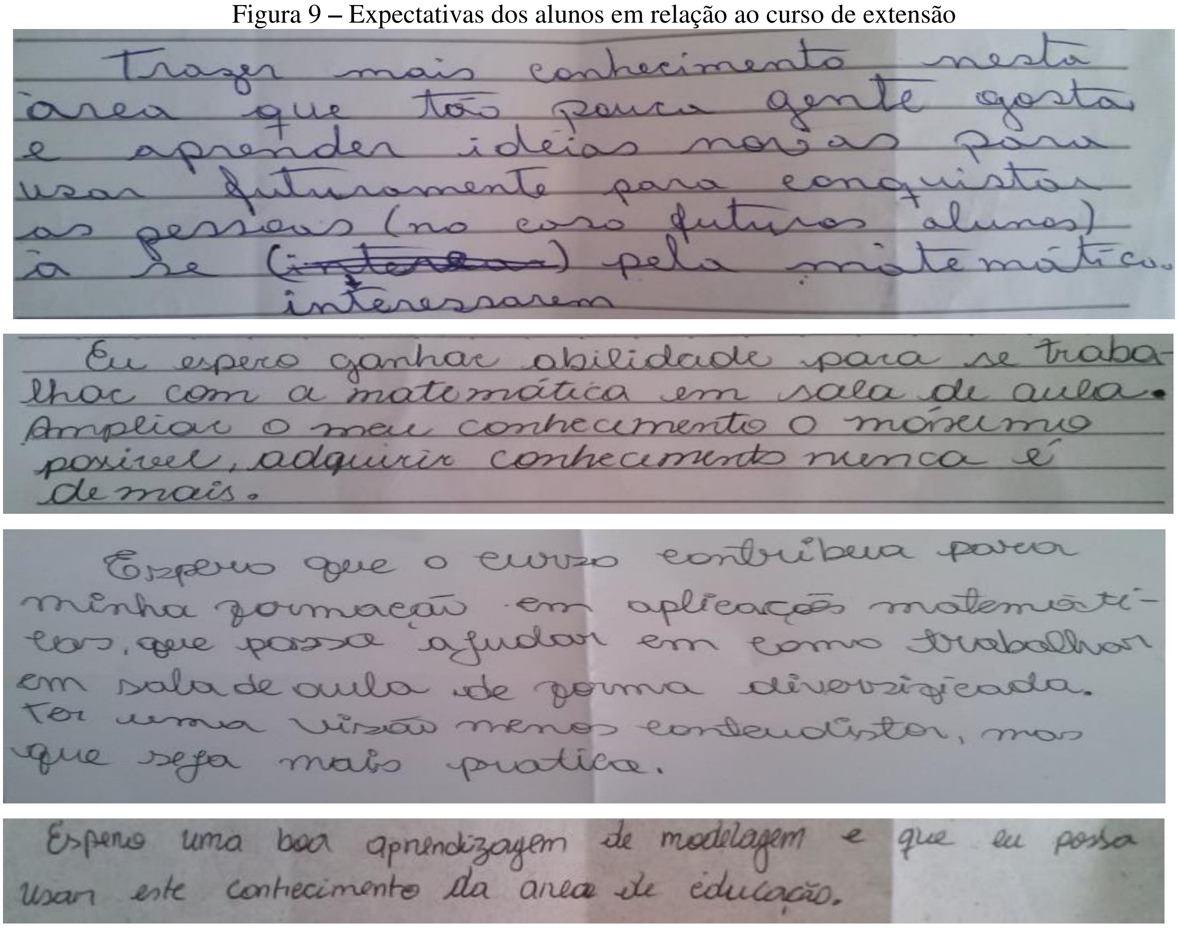
Em um primeiro momento, foram dadas as boas vindas aos participantes, que foram informados sobre qual era o objetivo do curso e quais seriam as contribuições dele para sua formação, foi falado também sobre carga horária, ementa a ser trabalhada e sobre o dia em que os encontros aconteceriam. Além disso, foi acrescentado que, ao término do curso, todos os participantes receberiam os certificados comprovando sua participação.

Na conversa inicial, buscou-se identificar se os participantes tinham conhecimento da Modelagem Matemática e de Equações Diferenciais Ordinárias. Alguns, já haviam estudado ou estavam estudando esse conteúdo, contudo a maioria não se lembrava de alguns conceitos referentes ao assunto. Quanto à Modelagem Matemática, apenas um dos participantes já tinha ouvido falar sobre o assunto, em um minicurso ministrado em uma semana de ciências e tecnologia do sertão central, realizada no IF Sertão PE, Campus de Salgueiro, mas os demais alunos não tinham conhecimento sobre modelagem.

Para dar início à discussão sobre o assunto do encontro, foi solicitado que os participantes escrevessem, em um pedaço de papel, quais as expectativas em relação ao curso, ou seja, em que sentido eles achavam que o curso contribuiria para sua vida profissional ou pessoal. Para conhecimento do leitor, foram selecionadas algumas das respostas dadas pelos participantes. Essas e outras respostas que foram dadas vão ao encontro do propósito do curso oferecido.

As respostas que seguem abaixo foram selecionadas.

Figura 9 – Expectativas dos alunos em relação ao curso de extensão



Trazer mais conhecimento nesta área que tão pouca gente gosta e aprender ideias novas para usar futuramente para conquistar as pessoas (no caso futuros alunos) à se (~~[illegible]~~) pela matemática.
interessarem

Eu espero ganhar abilidade para se trabalhar com a matemática em sala de aula. Ampliar o meu conhecimento o máximo possível, adquirir conhecimento nunca é demais.

Espero que o curso contribua para minha formação em aplicações matemáticas, que possa ajudar em como trabalhar em sala de aula de forma diversificada. Ter uma visão menos conteudista, mas que seja mais prática.

Espero uma boa aprendizagem de modelagem e que eu possa usar este conhecimento da area de educação.

Fonte: Dados da pesquisa, 2016.

A partir das expectativas relatadas pelos alunos de forma escrita e oral, notou-se que eles preocupavam-se com quais seriam as melhores técnicas de ensino da Matemática e da Física em sala de aula. Tomar conhecimento das expectativas supramencionadas foi de extrema importância, posto que o presente autor, na condição de professor pesquisador, pôde refletir sobre as ações futuras a serem realizadas dentro do curso de extensão.

Percebeu-se, no primeiro encontro, que a turma era bem participativa e que a grande maioria estava interessada em aprofundar seus conhecimentos e estudar mais uma possibilidade de trabalhar a Física e a Matemática em sala de aula. No início desse primeiro encontro, a tentativa voltava-se a possibilitar, aos alunos, a aquisição de uma visão geral sobre o que é Modelagem Matemática, e como conduzir uma atividade com Modelagem em sala de aula de Física e de Matemática.

Nesse sentido, o pesquisador apresentou o entendimento de alguns autores da área sobre a Modelagem. Nessa primeira apresentação, os autores que serviram como referência foram: Bassanezi (2013), Almeida et al. (2013), Barbosa (2001) entre outros. Praticamente foi um estudo teórico sobre a Modelagem.

Ao ter falado um pouco sobre a metodologia de trabalho, também foi falado sobre a pesquisa da qual o curso de extensão fez parte. Foi apresentado para os participantes, um termo de compromisso que tinha como objetivo deixá-los cientes de que os encontros seriam filmados e gravados e que o material seria utilizado para análise dos dados da pesquisa. Antes de apresentar o termo de compromisso foi deixado claro para os estudantes o porquê da câmera de filmagem em sala de aula.

Após ter apresentado a proposta do curso e seus objetivos para os participantes, em seguida foi apresentada uma situação-problema que tinha como objetivo diagnosticar o desempenho dos alunos, para que, a partir desse diagnóstico, se pudesse ter uma noção de como trabalhar nos encontros seguintes. Outro objetivo que estava por trás desta situação-problema foi o de possibilitar aos alunos, partirem de um conhecimento prévio já dominado, para um conhecimento novo (Equações Diferenciais Ordinárias). Pensando nisso, o pesquisador apresentou uma situação-problema que poderia ser resolvida tanto pelo conhecimento das Equações Diferenciais Ordinárias como também por conteúdos da matemática de nível Básico. A situação-problema apresentada foi adaptada do livro de Bassanezi (2013, p.329) e consta no projeto como situação-problema 1.

Situação-Problema

A tabela abaixo apresenta os dados do censo demográfico da cidade de Salgueiro/PE realizado pelo IBGE entre os anos de 2000 a 2010. A partir dos dados apresentados, considerando que a taxa de crescimento é proporcional à população existente em cada instante, determine uma estimativa do número de habitantes dessa cidade no ano de 2020.

Tabela - Censo demográfico da cidade de Salgueiro/PE de 2000/2010

ANOS	IBGE POPULAÇÃO	TAXA MÉDIA DE CRESCIMENTO ANUAL
2000	51.571	0.94%
2010	56.629	0.94%

Fonte: IBGE

Posteriormente à situação-problema foi exposta em um slide e entregue uma cópia a cada um dos participantes, o pesquisador solicitou que fosse feita, inicialmente, uma leitura individual. Em seguida, foi solicitado que eles formassem grupos de três, e o pesquisador novamente solicitou uma nova leitura da situação-problema, agora nos grupos. Após isso, juntos discutiram a situação-problema.

Enquanto os alunos buscavam encontrar a solução da situação apresentada, percebeu-se que alguns membros de alguns grupos pareciam esperar que os demais colegas resolvessem a situação-problema. Dessa forma, o pesquisador abordava cada grupo, na tentativa de inserir os alunos que nada faziam na discussão referente à situação-problema trabalhada. Para isso, buscava-se fazer várias perguntas com o objetivo de instigar os alunos a partirem de alguns conhecimentos prévios já dominados para um novo conhecimento (Equações Diferenciais Ordinárias).

Alguns dos alunos tiveram muita dificuldade sobre o que deveriam fazer, pois não conseguiam encontrar o ponto de partida ou alguns conhecimentos já dominados que se conectassem com a situação proposta. Outros deles se dedicaram bastante, ao passo que outros seguiam uma linha de raciocínio que desconsiderava variáveis importantes do contexto da Situação-problema.

Pretendia-se, com essa situação-problema, avaliar o nível de conhecimento dos alunos, para, assim, saber como proceder nos demais encontros.

No processo de resolução da situação-problema, alguns alunos falavam sobre suas dificuldades com a matemática, seus pontos fracos e fortes.

Juliana, aluna do curso de Licenciatura em Matemática, disse: “– Professor, eu ainda não vi nada sobre Equações Diferenciais Ordinárias, acho que não vou conseguir resolver essa situação-problema”.

Então, o pesquisador perguntou se teria como resolver a situação-problema utilizando outros conteúdos básicos da Matemática. Nesse momento o aluno Hugo disse: “– estou tentando resolver por PA”.

Após o aluno Hugo informar como estava resolvendo a situação-problema, a maioria passou a seguir o mesmo raciocínio. Na tentativa de evitar repetições nas soluções dos alunos, o pesquisador informou que outros conteúdos poderiam ser utilizados, como: Proporcionalidade, Função Exponencial e Progressões Geométricas. Após essas informações, foi dado um tempo para que os alunos voltassem a resolver a situação-problema.

Em seguida, o pesquisador, dentro da Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas, solicitou que os alunos entregassem as atividades que resolveram, atendendo assim ao referencial teórico que foi apresentado no capítulo 4.

Passados, em média, 20 minutos, alguns grupos já sinalizavam haver resolvido a situação-problema. A partir daí, foi solicitado que um dos membros de cada grupo colocasse, na lousa, a resolução do seu grupo e, em seguida, explicasse para os colegas a maneira como haviam resolvido.

Figura 10 – Representantes do segundo e terceiro grupos

Fonte: Dados da pesquisa, 2016.

Segundo Onuchic e Huanca (2014), um representante de cada grupo é convidado a registrar sua resolução na lousa; resoluções certas, erradas ou feitas por diferentes processos que devem ser apresentados para que todos os membros as observem, analisem e discutam.

Para que o leitor tenha uma melhor compreensão sobre o diálogo que ocorreu em torno dessa situação-problema, faz-se necessário apresentar as falas de alguns alunos no momento que defendiam sua resolução.

Por questões éticas, a partir do próximo parágrafo, quando for feita referência a alguns participantes, serão utilizados, para esse encontro os seguintes prenomes[13]: Vitória; Juliana; Hulk; Nicolas; Regis; Hugo; Joana Dark e Henrique. Nesse sentido, pelo fato de ter comparecido uma quantidade razoável de participantes no curso de extensão, não serão citados, nesse parágrafo, todos os pseudônimos, no entanto, deixa-se a cargo do leitor acompanhar nesse e nos próximos episódios como aconteceu a participação dos alunos durante a execução das atividades realizadas.

A aluna Vitória, componente do grupo 1, explicou como seu grupo chegou à solução:

> – Fizemos assim: pegamos a população do ano de 2010 que é 56.629 em seguida subtraímos desse valor a população do ano de 2000 que é 51571 e deu 5058, ou seja, em dez anos houve um aumento de 5.058 pessoas. Agora, basta somar esse valor a 56.629 e obteremos a população de 2020 que é 61.687 pessoas [– Explicou Vitória].

[13] Os nomes apresentados são pseudônimos, visando a garantir o direito à privacidade dos participantes.

Em seguida, a aluna Juliana, componente do grupo 2, explicou os procedimentos para chegar à solução:

> – Eu fiz um pouquinho diferente, peguei a população de 2010 que é de 56.629 pessoas menos a população de 2000 que é de 51.571 e o valor obtido foi 5.058, depois eu dividi esse valor por 10 e obtive o resultado de 505,8. Esse valor é a quantidade de pessoas que cresce em cada ano. Agora, se calcularmos 9,4% desse valor obterá 4.754 que somando com 56.629 da igual a 61.384.

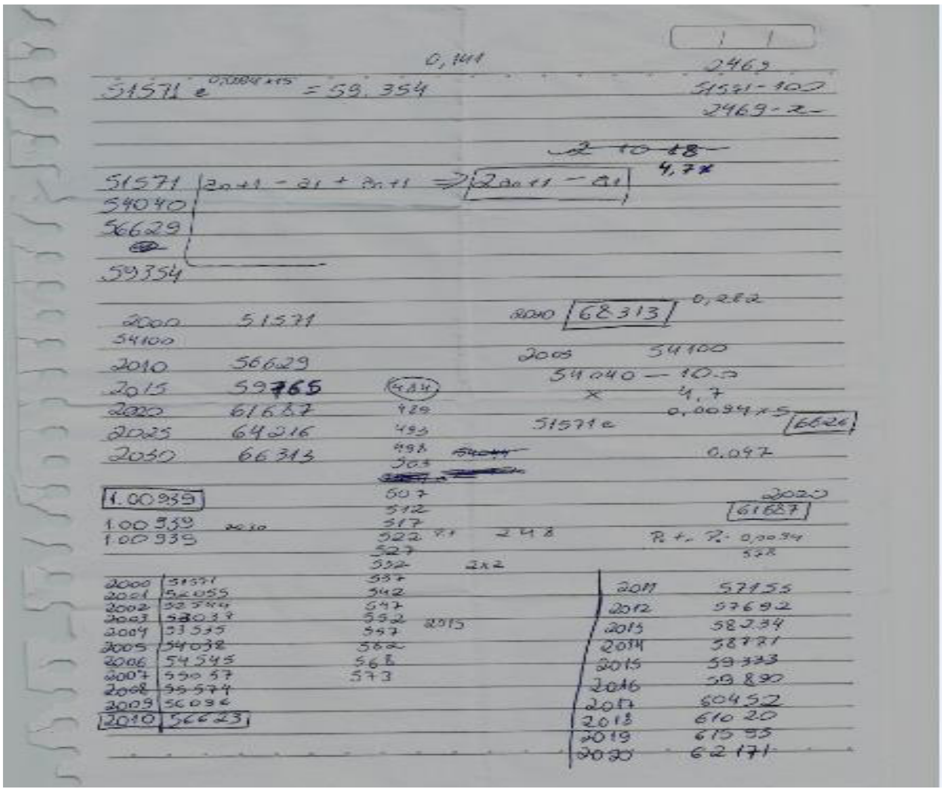
Já Hulk, do grupo três explica da seguinte maneira:

> – De início, fizemos o que os demais colegas fizeram, subtraímos de 56629 o valor referente à população do ano 2000 que era de 51.571 e obtivemos o valor de 5.058. Depois utilizando regra de três analisamos quantos por cento esse valor é de 51.571 e chegamos em 9,8%, ou seja, houve em 10 anos um aumento de 9,8% da população, depois calculamos 9,8% de 56.629 e somamos com a população de 2010 e obtivemos a solução 62.178 [– Explica Hulk].

E para fechar as apresentações, Nicolas, do quarto grupo, disse o seguinte: "– Fizemos diferente dos outros grupos, primeiro fomos encontrando quantos habitantes teria em 2001 em 2002 até chegar em 2020 no valor 62190,6 habitantes".

Tem como você mostrar para os colegas como o grupo pensou? Perguntou-se para Nicolas. – Sim. Responde Nicolas mostrando em seu caderno a forma como haviam pensado.

Figura 11 – Resolução apresentada pelo representante do quarto grupo



Fonte: Dados da pesquisa, 2016.

O quinto grupo não apresentou, na lousa, a solução que encontraram, mas, informaram que seguiram o mesmo raciocínio utilizado pelo grupo 1.

Foi percebido, durante o processo de resolução da situação-problema, que os estudantes tinham um conhecimento prévio da matemática, de natureza aritmética. No entanto, como futuros professores, foi pontuado que, além desse conhecimento, eles precisariam, também, desenvolver os conhecimentos algébrico e geométrico. A identificação da falta de domínio dos conceitos algébricos e geométricos por parte dos alunos foi importante nessa primeira situação-problema pelo fato de que o pesquisador pôde trabalhar, nos encontros seguintes, esses conceitos.

Após as apresentações na lousa, o aluno Regis perguntou: "– Professor! – exclamou Regis – Pode existir mais de uma solução para um determinado problema? Todas as soluções colocadas na lousa estão diferentes." – questiona Regis.

Esse momento foi aproveitado para informar que quando se trabalha com Modelagem Matemática o objetivo é partir de uma situação real e chegar a um modelo matemático que represente a situação real, no entanto, para saber se o modelo é consistente, é imprescindível fazer uma reflexão crítica sobre o modelo encontrado. Tal reflexão, na modelagem é chamada de validação do modelo. Além disso, foi informado que não necessariamente um modelo tem que representar 100% da realidade, mas, ele pode se aproximar bastante. Nessa ocasião, foi informado, também, que as soluções apresentadas na lousa pelos alunos tinham que passar por uma análise para verificar a veracidade das diferentes soluções encontradas.

Validação da solução 1

Solução do grupo 1

$$56.629 - 51.571 = 5.058$$

Somando

$$56.629 + 5.058 = 61.687$$

Logo, a população do município de Salgueiro no ano de 2020 será 61.687 habitantes.

Ao analisar juntamente com os estudantes a forma com que o grupo 1 resolveu a situação-problema, percebeu-se que eles haviam interpretado a situação como uma progressão aritmética de razão 5.058, embora não tivessem percebido tal fato. Nesse caso, foi solicitado que os estudantes tentassem expressar o modelo do grupo 1 de forma algébrica. Com algumas dificuldades, chegaram ao seguinte modelo:

$$P_t = P_0 + 5058t.$$

Onde: P_0 representa a população inicial e t o tempo (termo da sequência). Nesse caso, cada termo é associado a dez anos. Por exemplo, o ano de 2000 equivale ao 1º termo da sequência, já 2010 equivale ao 2º e assim por diante.

A partir de uma análise cuidadosa feita juntamente com os alunos, foi percebido pela turma que o modelo encontrado não contemplava a situação real, uma vez que, a situação-problema considerava que a taxa de crescimento é proporcional à população existente em cada instante, caso contrário, a solução encontrada pelo grupo estaria correta.

Em nenhum momento, foi necessário afirmar que a solução encontrada pelo grupo estava errada, pois, a validação do modelo proporcionou aos alunos momentos de criatividade e senso crítico. E isso foi possível utilizando a metodologia adotada.

Onuchic e Allevato (2011) dizem que na plenária são convidados todos os alunos, a fim de discutirem as diferentes resoluções registradas e encontradas, para defenderem seus pontos de vistas e esclarecerem suas dúvidas. Nesse sentido, o pesquisador se colocou como um guia e mediador das discussões, este foi um momento bastante rico neste encontro.

Validação da solução 2

Solução do grupo 2

$$56.629 - 51.571 = 5.058$$
$$5.058 \div 10 = 505{,}8$$
$$505{,}8 \times 9{,}4 = 4.754$$
$$4.754 + 56.629 = 61.384$$

Logo, a população de Salgueiro em 2020 será 61.687 habitantes.

Nesse caso, os alunos entenderam que 505,8 era a quantidade de pessoas que cresce em cada ano. Só que, pelos cálculos que eles apresentaram na lousa, percebeu-se que esse valor encontrado corresponde a uma média anual. Após chegarem a esse valor, eles multiplicaram por 9,4 e encontraram o resultado 4.754. Em seguida, somaram o valor encontrado a 56.629 e obtiveram 61.384 habitantes em 2020.

Na validação desse modelo, os alunos perceberam que, além de terem confundido a média anual com crescimento anual, os componentes do grupo 2 haviam interpretado o contexto da situação-problema como uma progressão aritmética.

Validação da solução 3

Solução do grupo 3

$$\begin{matrix} 51571 - 100 \\ 5058 - x \end{matrix} \Rightarrow x = 9{,}8\% \text{ da população inicial}$$

$$\begin{matrix} 56629 - 100 \\ x - 9{,}8 \end{matrix} \Rightarrow x = 62178$$

A população de Salgueiro em 2020 será de 62.178 habitantes.

O raciocínio desse grupo já foi mencionado na fala de Hulk. No diálogo, em sala de aula, a turma entendeu que esse grupo tinha encontrado uma nova taxa para cada década, no entanto, nesse raciocínio a taxa de crescimento está sendo considerada constante e não proporcional à população existente em cada instante.

Validação do Grupo 4

Solução do grupo 4

2000 -------------51571
2001--------------52055,7
2002--------------52545,0
Prosseguindo o mesmo raciocínio com a calculadora, temos que em 2020 terá 62.190,6 habitantes.

Para um melhor entendimento dos demais participantes do curso, o raciocínio empregado pelo grupo 4 para solucionar a situação-problema foi organizado na lousa em uma tabela como a que é apresentada abaixo.

Tabela 5 – Crescimento populacional da cidade de Salgueiro em função do tempo

Anos	População
2000	51.571
2001	52.055,7
2002	52.545,0
2003	53.038,9
2004	53.537,4
2005	54.040,6
2006	54.548,5
2007	55.061,2
2008	55.578,7
2009	56.101,1
2010	56.628,4
2011	57.168,7
2012	57.706,0
2013	58.248,4
2014	58.795,9
2015	59.348,5

2016	59.906,3
2017	60.469,4
2018	61.037,8
2019	61.611,5
2020	62.190,6

Fonte: Dados da pesquisa, 2016.

Para chegar ao valor da população do ano de 2001 os alunos do grupo 4 utilizaram uma calculadora e fizeram o seguinte procedimento matemático:

$$51571 \times \frac{0{,}94}{100} = 484{,}7.$$

Em seguida, para encontrar o valor da população do ano 2001, somaram o valor encontrado 484,7 com 51571, ou seja,

$$51571 + 484{,}7 = 52055{,}7.$$

Seguiram o mesmo raciocínio para encontrar o valor da população dos demais anos.

Após a apresentação do grupo 4, foi perguntado o que poderia ser feito para calcular a população estimada do ano de 2015 e o aluno Nicolas respondeu da seguinte maneira: "– É só continuar da mesma forma que fizemos para encontrá o valor referente ao ano de 2020".

A partir daí, ao fazer uma análise juntamente com os alunos, da padronização dos dados expostos na tabela já apresentada, foi percebido que a segunda coluna representa uma progressão geométrica, embora os membros do grupo não tivessem percebido tal fato. Sendo assim, foi solicitado que os dados da tabela fossem organizados algebricamente. Para isso, os alunos aplicaram alguns valores do enunciado do problema na fórmula dos termos de uma PG e obtiveram o seguinte modelo:

$$P_t = P_0 \times 1{,}0094^{t-1}.$$

Onde P_0 é a população inicial e t é o tempo.

Depois de terem encontrado o modelo acima, os alunos aplicaram alguns valores nas variáveis para verificarem se realmente contemplava a situação que deu origem ao modelo. Após o teste, todos perceberam que o modelo apresentado pelo grupo 4 aproxima-se da situação real, pois, vários testes foram feitos, comparando os dados gerados pelo modelo com os dados apresentados pelo IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística).

Onuchic e Huanca (2014) dizem que, após serem sanadas as dúvidas e analisadas as resoluções e soluções obtidas para a situação-problema; o professor tenta, com toda a classe, chegar a um consenso sobre o resultado obtido. No denominado "formalização por Onuchic" o professor registra, na lousa, uma apresentação formal – organizada e estruturada em linguagem matemática – padronizando os conceitos, os princípios e os procedimentos construídos através da resolução da situação-problema, destacando as diferentes técnicas operatórias. Essa situação-problema envolvia as equações diferenciais Ordinárias.

Na Metodologia Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas é defendida a ideia de que a situação-problema que deve ser apresentada tem que ter como finalidade levar o aluno de um conhecimento prévio já dominado para um novo conhecimento. Pensando nisso, e nas dificuldades que alguns alunos teriam com as Equações Diferenciais Ordinárias, as situações-problema foram selecionadas de tal forma que pudessem ser resolvidas tanto pelas Equações Diferencias como também com conteúdos básicos da Matemática. Esses conteúdos básicos serviram como escada para introduzir os conceitos das Equações Diferenciais.

Logo em seguida à validação dos modelos matemáticos encontrados pelos alunos, o presente autor, na função de professor, apresentou outra possibilidade de resolução, utilizando um modelo matemático já conhecido e denominado de modelo exponencial ou Malthusiano. Esse modelo é representado por uma equação diferencial ordinária de primeira ordem, e parte do princípio de que a taxa de variação de uma população em crescimento é proporcional à população existente em cada instante, ou seja,

$$\frac{dP}{dt} = kP(t).$$

Nesse caso, tem-se uma equação diferencial separável que pode ser reescrita como:

$$\frac{dP}{P(t)} = kdt.$$

Integrando-se ambos os membros da igualdade, obtêm-se

$$\int \frac{dP}{P(t)} = \int kdt.$$

Resolvendo a integral utilizando-se algumas propriedades, encontra-se

$$\ln P(t) = kt + c$$

$$e^{\ln P(t)} = e^{kt} + e^{c}$$

$$P(t) = e^{kt} + e^{c}$$

$$P(t) = ke^{kt}.$$

No instante em que $P(0) = P_{0,}$ tem-se,

$$P_0 = P(0) = ke^{k\cdot 0} = k^1 = P_0,$$

o que implica em

$$\mathbf{P(t) = P_0 e^{kt}} \text{ (Modelo contínuo Malthusiano).}$$

Nesse modelo, P_0 representa a população inicial no instante $t = 0$, ou seja, $P(t = 0) = P_0$. Portanto, conclui-se que:

1) Se $k > 0$, a população cresce.
2) Se $k < 0$, a população se reduzirá.

Além de ter mostrado para os alunos esta outra possibilidade apresentada anteriormente, foi mostrado também que esse modelo nos possibilita encontrar a taxa de crescimento de uma população, seguindo o seguinte raciocínio.

Seja P o número de indivíduos em uma população animal ou vegetal. Este número é dependente do tempo e assim podemos escrever

$$\frac{dP}{dt} = kP(t).$$

Na realidade, $P(t)$ assume somente valores inteiros sendo, pois, uma função discreta de t. Entretanto, quando o número de indivíduos é suficientemente grande, $P(t)$ pode ser aproximado por uma função contínua, variando continuamente no tempo.

Admitimos que a proporção de indivíduos reprodutores permaneça constante durante o crescimento da população. Admitimos também que as taxas de fertilidade n e de mortalidade m sejam constantes. Estas hipóteses são realísticas em uma população grande que varia em condições ideais, isto é, quando todos os fatores inibidores do crescimento estão ausentes (a espécie tem recursos ilimitados e não interagem com competidores ou predadores).

Temos que $k = n - m$ (coeficiente de natalidade menos o de mortalidade) é a taxa de crescimento específico da população $P(t)$, aqui considerada constante. Assim,

$$\frac{P(t+1)-P(t)}{P(t)} = n - m = k.$$

Essa formulação matemática indica que a variação relativa da população é constante ou, em outras palavras, que a variação da população é proporcional à própria população em cada período de tempo.

O modelo discreto (tempo discreto) de Malthus é dado por

$$P(t + 1) - P(t) = kP(t).$$

Considerando que a população inicial seja $P(0) = P_0$, a solução de $\mathbf{P(t) = P_0e^{kt}}$ é obtida por recorrência da expressão:

$$\begin{cases} P_{t+1} = (1 + \alpha)P_t \\ P(0) = P_0 \end{cases},$$

ou seja,

$$P_t = (\alpha + 1)^t P_0.$$

Assim, dados dois censos P_0 e P_t, a taxa de crescimento demográfico em t anos é obtida fazendo,

$$(\propto +1)^t = \frac{P_t}{P_0} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha} = \sqrt[t]{\frac{\mathbf{P_t}}{\mathbf{P_0}}} - 1.$$

A formalização do modelo Malthusiano possibilitou aos alunos entenderem que um modelo matemático leva em consideração algumas variáveis. Após ter sido formalizado esse modelo, foi construída, juntamente com os participantes, uma tabela que relacionava as soluções encontradas com os dados disponíveis no site do IBGE.

Tabela 6 – comparação dos resultados encontrados

Anos	Modelo do grupo 4 ($P_t = P_0 \times 1{,}0094^{t-1}$)	Modelo Malthusiano ($P(t) = P_0e^{kt}$)	IBGE
2000	51.571	51.571	51.571
2010	56629	56.637	56.629
2015	59341	59.354	59.769

Fonte: Dados da pesquisa, 2016.

Na tabela acima, o valor de t apresentada na expressão $P_t = P_0 \times 1{,}0094^{t-1}$ assume um valor correspondente ao termo da sequência apresentado na tabela gerada a partir da solução do quarto grupo.

Essa comparação possibilitou, aos alunos, garantirem ainda mais a validade do modelo Malthusiano e o modelo encontrado pelo grupo 4. Além disso, compreenderam que, caso a taxa fosse constante, as soluções encontradas pelos demais grupos também estariam corretas.

Depois de ter apresentado o modelo Malthusiano, o aluno Nicolas perguntou:

> – Professor, o senhor disse que o modelo Malthusiano é conhecido também como modelo exponencial e nós encontramos nosso modelo em forma de uma progressão geométrica. Então, quer dizer que o gráfico de uma função exponencial é a mesma coisa que o gráfico de uma progressão geométrica?

A partir da pergunta feita por Nicolas, se fez necessário fazer uma comparação geométrica entre o modelo Malthusiano e o modelo encontrado pelo grupo 4. Para essa comparação, foi utilizada a planilha do Excel e o Software Geogebra. Nessa ocasião, os alunos começaram a entender a relação entre funções exponenciais e progressões geométricas.

Levantaram-se algumas questões: O modelo Malthusiano é válido para todo tipo de crescimento populacional? "– Sim, desde que esteja sendo considerada nesse crescimento apenas a quantidade de pessoas que nascem e das que morrem" – disse o aluno Hulk.

"– E o crescimento de uma população só depende da taxa de natalidade e mortalidade?" perguntou-se à turma.

– Não, depende da economia, da alimentação e de outras variantes – responde Henrique.

Nesse momento, todos os alunos participaram da discussão e mostravam ter entendido que o modelo Malthusiano era válido considerando apenas a taxa de natalidade e mortalidade e que desprezava o fato de ter migração de pessoas, de aumentar o número de reprodutores, da possível falta de alimentação, de uma epidemia atingir várias pessoas, etc. A partir desse entendimento, foi informado que existem outros modelos que consideram alguns dos fatores apresentados acima.

> – Podemos utilizar esse modelo Malthusiano em outra situação da vida real? – pergunto à turma.
> – Sim – responde Henrique.
> – Em que situação? – pergunto novamente.
> – Em um crescimento de uma praga de uma determinada plantação – responde Henrique.
> – No Crescimento de uma epidemia que predomina em uma região – explica Juliana.

Muitos dos participantes, no início, quando foi apresentada a situação-problema, ficavam perguntando qual era a solução, pois, eles estavam acostumados a resolver várias listas de exercícios cujas respostas encontravam-se no final do livro.

Ao final do encontro, foi proposta, como tarefa extraclasse, a leitura do texto "Modelagem Matemática na Educação Matemática: o que é, por que usar e como usar?" de Almeida et al. (2013).

Fazendo uma reflexão sobre as discussões realizadas em sala de aula e analisando cuidadosamente as falas dos alunos várias vezes na filmagem desse primeiro encontro, foi percebido que a Modelagem Matemática garante uma maior autonomia ao estudante. Ainda na análise da filmagem, o pesquisador, na condição de professor, pôde fazer uma avaliação de suas próprias ações em sala de aula e identificar novos caminhos que podem ser seguidos dentro da formação inicial de professores de Matemática e Física.

Ao término desse primeiro encontro, dois dos alunos que já atuavam como docentes comentaram que gostaram da modelagem e que pretendiam utilizá-la na prática da sala de aula, perguntaram se era possível sugerir alguma atividade para trabalharem em suas respectivas escolas. Nesse momento, o pesquisador não arriscou sugerir nenhuma atividade, por entender que se fazia necessário ter uma conversa com esses professores para que conhecessem bem, tanto a modelagem como a resolução de problemas que estavam querendo utilizar. Contudo, foi agendada com esses dois professores uma conversa que aconteceria ao término do segundo encontro, com a finalidade de pensar possibilidades de desenvolver atividades utilizando a metodologia de Resolução de Problemas e trabalhar com situações-problema no contexto da Modelagem Matemática.

7.2 EPISÓDIO – RESFRIAMENTO DE UM CORPO (2º Encontro 03/11/2015)

O segundo encontro, aconteceu em uma terça feira, dia 3 de novembro de 2015 com início às 13h e contou com a participação de 11 alunos. Inicialmente, fez-se uma reflexão sobre o que havia sido discutido no primeiro encontro e logo em seguida foi dada continuidade a outro diálogo referente a um texto retirado do livro "Modelagem Matemática na Educação Básica" de autoria de Almeida et. al. (2013), que havia sido enviado via e-mail para os participantes do curso.

A discussão do texto já mencionado foi pouco significativa pelo fato de apenas um dos alunos ter feito a leitura. A maioria justificou que não haviam lido, porque estavam em uma semana de provas, mas disseram que gostariam muito de ter estudado. Como o entendimento do conteúdo presente no texto era imprescindível para uma melhor compreensão acerca da Modelagem Matemática, o presente autor colocou o texto em slides e de forma sucinta estimulou debates, sempre solicitando que os participantes lessem alguns parágrafos e, em seguida, comentassem o que haviam entendido.

Após a discussão do texto, a partir de uma conversa tida com os alunos, foi possível identificar que eles conseguiam responder algumas perguntas, como: o que é Modelagem Matemática? Como utilizar a modelagem em sala de aula? E porque usar modelagem na aula de Matemática e Física? Embora, tais perguntas já tivessem sido respondidas no texto estudado, alguns alunos conseguiram respondê-las com suas próprias palavras, demonstrando terem entendido o assunto discutido. Além disso, foram apresentadas, nesse encontro, algumas características de uma atividade com modelagem.

Nesse sentido, o pesquisador concorda com Bassanezi (2013), que aplicar a matemática segundo esse autor é principalmente usá-la para a compreensão do mundo real. Isso ficou claro ao discutir-se o texto.

Por outro lado, Almeida et al. (2013) diz que a Modelagem visa a propor soluções para situações-problemas por meio de Modelos Matemáticos. Para esses autores, o modelo matemático é o que dá forma à solução do problema, e a Modelagem Matemática é a atividade por meio da qual se busca por essa solução.

Após ter feito a discussão do texto e ter trabalhado a situação-problema Dinâmica Populacional no primeiro encontro, foi feita uma formalização dos conceitos referentes às equações diferenciais ordinárias. Na ocasião, foi definido o que era uma equação diferencial de primeira ordem e mostrado como se encontravam as soluções das referidas equações. Nesse momento, percebeu-se que alguns alunos demonstravam dificuldades em entenderem os conceitos apresentados, segundo eles, pelo fato de não terem visto completamente as disciplinas de cálculo diferencial e integral, muito menos a análise matemática clássica. Mesmo com as dificuldades presentes, alguns dos estudantes não desanimaram e continuavam demonstrando o interesse pelo curso. Ciente dessas dificuldades, o conteúdo das equações diferenciais foi formalizado em uma linguagem matemática acessível para todos os participantes, sem perder de vista o rigor matemático que esse conteúdo exige.

Depois de ter introduzido os conceitos básicos das equações diferenciais ordinárias, foi apresentada outra situação-problema para que os alunos pudessem resolvê-la. Ao apresentar a situação problema que foi exposta em um slide e entregue de forma impressa para cada um dos participantes, foi solicitado que eles formassem grupos de três pessoas. A sala de aula onde foi realizado o curso não favoreceu muito nesse sentido, uma vez que era uma sala de videoconferências com piso desnivelado, mas, mesmo assim, houve dialogo entre os membros de cada grupo. A sala utilizada, a partir desse encontro, foi cedida pela instituição para a realização dos demais encontros do curso.

A situação-problema apresentada foi adaptada pelo presente autor do livro de Santos (2011).

Situação-Problema

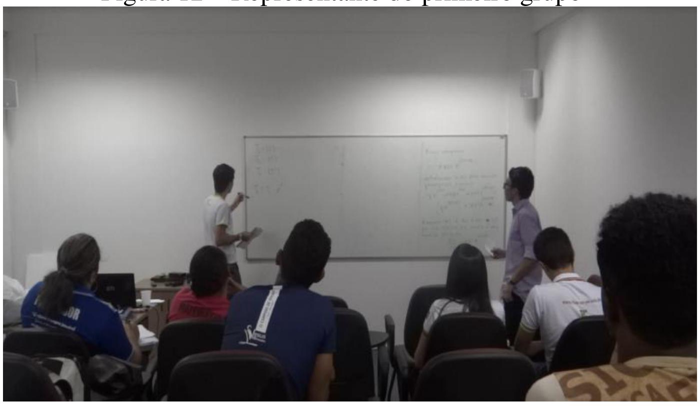
Considere a água em um recipiente a uma temperatura de $90°C$ logo depois de ser esquentada, um minuto depois passa para $85°C$, em uma temperatura ambiente de $25°C$. Determine a temperatura da água em função do tempo e o tempo que a água levará para chegar a $60°C$.

Após ter entregado a situação-problema para os participantes, o presente autor, como de costume, seguindo sempre os procedimentos apresentados por Onuchic e Allevatto (2011) no tocante à metodologia resolução de problemas, leu juntamente com os alunos, a situação-problema a ser trabalhada e logo em seguida atuou como mediador na busca pela solução.

Os alunos (futuros professores) procuraram desenvolver as discussões nos grupos. Alguns se saiam muito bem na procura pela solução, outros travavam e não conseguiam sequer dar o primeiro passo em busca da solução. Dessa forma, o pesquisador sugeriu aos alunos mais experientes de cada grupo que compartilhassem com os colegas o raciocínio que estava sendo utilizado para se chegar à solução desejada. Quando os alunos mais experientes tentavam explicar para os colegas com dificuldades, percebia-se que alguns dos alunos com dificuldades, quando aprendiam, ficavam mais empolgados e, no momento de apresentar as soluções na lousa, eles se prontificavam para demonstrar o conhecimento adquirido.

Depois de aproximadamente vinte minutos, percebeu-se que a grande maioria da turma não conseguiu resolver o problema, exceto o primeiro grupo cujo representante era o aluno Hulk que apresentou, na lousa, a forma como haviam pensado.

Figura 12 – Representante do primeiro grupo



Fonte: Dados da pesquisa, 2016.

Visando ao entendimento do leitor referente à solução que foi exposta na lousa, passa-se a apresentar a forma como o aluno Hulk explicou o raciocínio seguido:

– Bom, a questão deu essas três variáveis, - disse Hulk ao escrever, na lousa, as seguintes informações:

$$T_0 = 90°C, \qquad T_1 = 85°C \quad e \quad T_m = 20$$

> – Eu parti do pressuposto que o decaimento da temperatura é um modelo exponencial, ai, eu construí uma fórmula, por exemplo, a taxa de variação da temperatura é proporcional à temperatura inicial vezes a exponencial de alguma coisa, tá ligado, explica Hulk ao copiar na lousa seu raciocínio matemático.

$$T_t = T_0 e^k$$

– Essa constante não sei quem é, ai eu fiz o que para encontrar k?, Joguei os valores na fórmula, por exemplo,

$$85 = 90e^k$$

– Ai, fazendo 85 dividido por 90 temos o seguinte resultado, disse Hulk ao copiar na lousa

$$\frac{85}{90} = e^k$$

– Tirando o ln de todos os lados, vou ter que o k vai ser justamente $\ln\frac{85}{90}$, que eu fiz na calculadora e deu aproximadamente $-0{,}05$.

– Esse k seria o que? – pergunta-se ao aluno.

– Alguma coisa que eu quero achar, como encontrei $k = -0{,}05$ é só substituir esse valor na fórmula inicial e ai obtenho o modelo da questão que é

$$T_t = T_0 e^{-0{,}05t}.$$

O pesquisador, apoiado nessa resolução, juntamente com todos os alunos, a analisou na plenária, explorou bastante as formas de resolver a situação-problema dessa natureza e questionou o caminho percorrido pelo grupo que solucionou. A partir da análise, com a devida retirada das dúvidas, buscou-se fazer a validação do modelo que havia sido encontrado no contexto da Modelagem, ou seja, essa situação-problema foi trabalhada em três etapas: interação; matematização e o modelo matemático em si.

Ao analisar a apresentação desse aluno, foi detectado que ele havia tentado generalizar o modelo da dinâmica populacional para solucionar a situação-problema supracitada (Referente ao resfriamento de um corpo). No entanto, a turma percebeu que o modelo não tinha consistência, uma vez que é desconsiderada, no raciocínio empregado pelo grupo 1, a temperatura ambiente que influencia diretamente o processo de resfriamento de um corpo.

Na explicação do aluno Hulk, ele afirma que partiu do pressuposto de que o decaimento da temperatura é um modelo exponencial. Nesse momento, foi discutido com a turma que quando se quer encontrar um modelo matemático para representar uma situação real como no caso do resfriamento de um corpo, não tem como saber de imediato como é o comportamento geométrico desse modelo, pois, para isso, é imprescindível, antes de tudo, encontrar o modelo ou realizar alguns experimentos. No caso de Hulk, foi feito o procedimento inverso, ele já concluiu, antes de encontrar o modelo ou fazer qualquer experimento, que o comportamento do resfriamento de um corpo é de forma exponencial.

Na Modelagem, segundo Bassanezi (2013) um dos procedimentos que devem ser utilizados para solucionar determinados problemas é justamente o emprego de técnicas conhecidas em situações novas. Nesse sentido, o grupo 1 parecia já ter entendido essa técnica. No entanto, precisava desenvolver um olhar mais crítico sobre a abordagem dos conteúdos da matemática que estavam utilizando para cada problema.

Em seguida, a apresentação do aluno Hulk, como os demais participantes não haviam conseguido solucionar a situação-problema, foi formulado um modelo clássico da matemática conhecido como resfriamento de Newton. Esse modelo parte do princípio de que a taxa de variação da temperatura $T(t)$ de um corpo em resfriamento é proporcional à diferença entre a temperatura atual do corpo $T(t)$ e a temperatura constante do meio ambiente T_m, ou seja, a temperatura do corpo, $T(t)$ é solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = k(T - T_m) \\ T(0) = T_0 \end{cases}$$

Onde, $k > 0$, pois se $T < T_m$, $\frac{dT}{dt} > 0$ e se $T > T_m$, $\frac{dT}{dt} < 0$.

A solução é obtida, considerando,

$$\frac{dT}{(T - T_m)} = -kdt \Leftrightarrow \int \frac{dT}{(T - T_m)} = \int -kdt.$$

Integrando ambos os membros, teremos,

$$\ln|T - T_m| = -kt + C,$$

ou seja,

$$T(t) = T_m + ke^{-kt}, \text{ em que } k \text{ é uma constante real.}$$

Usando $T(0) = T_0$, obtém-se $k = T_0 - T_m$. Logo, a solução do problema é dada pelo modelo:

$$\mathbf{T(t) = T_m + (T_0 - T_m)e^{-kt}}$$

Após ter generalizado esse modelo, os alunos perceberam que bastava agora substituir os valores fornecidos pela situação-problema no modelo encontrado. Foi, a partir daí, que se iniciou um debate sobre a quebra de alguns costumes que ainda predominam no ensino que se convencionou chamar de tradicional, como, por exemplo, apresentar um exercício, fornecer o modelo pronto e esperar que os alunos substituam os valores nos seus respectivos lugares para encontrar a solução.

Essa discussão foi importante pelo fato de que muitos dos participantes estavam presos a esses procedimentos e que, consequentemente, transfeririam os mesmos costumes para seus futuros alunos. A partir desse debate anterior, foi possível perceber, na fala dos participantes, que eles haviam entendido que a Modelagem Matemática pode possibilitar a quebra de alguns costumes cuja origem surgiu no âmbito do ensino limitado à decoreba.

Além da discussão anterior, notou-se que os alunos começaram a entender que a modelagem pode possibilitar uma melhor autonomia na busca da solução de uma situação-problema, e que não necessita ficar consultando, no final do livro, se a resposta está correta ou não, Basta fazer uma análise crítica sobre o modelo encontrado no processo de validação do modelo.

Com a finalidade de desenvolver, nos alunos, uma análise crítica referente ao modelo de resfriamento de Newton, foi realizado um experimento que simulava uma situação real. Para a realização desse experimento, foram utilizados os seguintes materiais: Recipiente com água; Aquecedor de água; Termômetro e Cronômetro.

Na realização do experimento, os alunos mostraram-se dedicados e ansiosos para ver se realmente o experimento corresponderia à realidade que estava sendo trabalhada.

O experimento foi realizado seguindo os seguintes procedimentos:

1. A água foi aquecida;
2. Logo após ser aquecida, foi medida a temperatura;
3. Após a primeira medida, um dos alunos anotou na lousa o resultado, enquanto outro aluno cronometrava, em um celular, o tempo em minutos;
4. Após o primeiro minuto que o aluno havia cronometrado, foi feita uma nova medida na temperatura e um dos alunos novamente anotou na lousa e assim se fez durante cinco vezes.

Para que não houvesse erros no experimento, cada aluno se responsabilizou em assumir uma função. Por exemplo, um dos alunos fazia anotações na lousa, outro cronometrava o relógio no celular, outro ajudava a aquecer a água e os demais auxiliavam na realização de todo o processo.

Figura 13 – Realização do experimento

Fonte: Dados da pesquisa, 2016.

Visando sempre ao entendimento do leitor referente ao acontecimento deste episódio, passou-se a apresentar uma tabela com alguns valores encontrados durante o experimento.

Tabela 7 – Dados do experimento

Temperatura ambiente na hora da realização do experimento era de 27 °C	
Tempo em minutos	Temperatura em °C
0	45°C
1	44°C
2	43°C
3	42°C

Fonte: Dados da pesquisa, 2016.

A partir das informações da tabela, com o intuito de testar a veracidade do modelo de resfriamento de Newton, os alunos adaptaram a situação-problema original que resultou em outra situação-problema de fixação.

Situação-problema: Considere a água em um recipiente a uma temperatura de $45°C$ logo depois de ser esquentada, um minuto depois passa para $44°C$, em uma temperatura ambiente de $27°C$. Determine a temperatura da água em função do tempo e o tempo que levará para que a água chegue à temperatura de $42°C$.

Percebe-se que o resultado da nova situação-problema encontra-se na tabela, na primeira coluna e sexta linha, o entanto, os alunos queriam testar se realmente o modelo de resfriamento de Newton era válido para a situação trabalhada. Após repetirem os mesmos cálculos já feitos anteriormente, os alunos finalmente constataram a veracidade do modelo e alguns ficaram impressionados com a beleza da matemática colocada em prática, isto foi possível perceber nos alunos participantes da pesquisa no momento em que, compararam a teoria com a prática do experimento que foi realizado.

Os valores apresentados na tabela anterior, quando apresentadas no plano cartesiano, resultam em uma reta. No entanto, os alunos foram informados de que o decaimento da temperatura não necessariamente ocorre de forma linear.

O presente autor informou, nesse momento, novamente que o objetivo, em modelagem, é que cada professor crie seus próprios modelos com seus alunos. No entanto, como eles estavam começando a conhecer a Modelagem Matemática, era imprescindível que eles tomassem conhecimento de alguns modelos clássicos da matemática e, a partir daí, começassem a desenvolver algumas técnicas de modelagem.

O leitor deve estar se perguntando, por que o professor do curso de extensão que fez parte desta pesquisa não criou modelos novos com seus alunos?

A resposta para essa pergunta é decorrente do fato de o presente autor entender que, em um curso de formação inicial sobre Modelagem Matemática, antes de tudo, é imprescindível que os alunos aprendam a modelar e, para isso, alguns procedimentos devem ser seguidos como, por exemplo, o estudo de problemas clássicos para que os alunos possam compreender algumas técnicas de modelagem utilizadas nesses problemas, questionamento ou crítica a respeito da fiabilidade dos modelos clássicos, entre outros procedimentos. Também para atender o currículo.

Contudo, os alunos foram informados de que o curso de extensão tinha, como uma das finalidades, deixá-los cientes sobre o que é Modelagem Matemática e como modelar, no entanto, para a prática da sala de aula de Física e Matemática eles precisariam buscar meios para criar seus próprios modelos e que algumas técnicas de modelagem trabalhadas durante o curso, poderiam ser utilizadas por eles em conteúdos de nível básico e médio.

Ao término desse encontro, foi proposta como tarefa extraclasse, a leitura do texto "Técnicas de Modelagem", de autoria de Rodney Carlos Bassanezi. Depois foi iniciada uma conversa que havia sido agendada no encontro anterior com dois dos participantes, Henrique e Juliana.

Henrique queria saber um tipo de atividade com modelagem que ele pudesse utilizar para trabalhar o conteúdo de trigonometria com seus alunos da oitava série. Na ocasião, ele havia dito que já tinha pensado em uma atividade que, segundo ele, consistia em solicitar que os alunos calculassem a altura da escola utilizando a sombra projetada pelo sol, em seguida, ele perguntou se essa atividade poderia ser considerada como Modelagem Matemática.

Como resposta à dúvida de Henrique, o presente autor entendeu que calcular a altura da escola pode ser considerado, sim, uma atividade de modelagem. No entanto, Henrique foi orientado a colocar essa atividade dentro de um contexto como, por exemplo, trabalhar com os alunos a estrutura física da escola onde eles estudam. Nesse sentido, os alunos poderiam adquirir conhecimento afetos aos conteúdos da matemática como, também, poderiam fazer uma análise crítica acerca dos espaços físicos de sua escola e buscarem responder algumas perguntas, como, por exemplo: As salas de aulas são adequadas para a quantidade de alunos existentes? Quais as possíveis melhoras referentes aos ambientes físicos da escola?

Existem vários outros questionamentos que poderiam ser trabalhados dentro de uma aula com modelagem, cujo tema é espaço físico de uma escola. O aluno Henrique entendeu que, dentro desse tema, ele poderia solicitar que seus alunos pudessem calcular a área de cada sala de aula, a altura do prédio da escola e várias outras atividades. No entanto, como Henrique tinha começado a exercer a função docente há poucos dias, essa seria uma de suas primeiras experiências em sala de aula. Percebeu-se que existia uma insegurança, e Henrique insistia em querer trabalhar com, seus alunos, uma atividade cujo objetivo fosse calcular a altura do prédio da escola. Nesse sentido, o pesquisador, sugeriu que, além de calcular a altura do prédio da escola utilizando a sombra projetada pelo sol, ele poderia, juntamente com seus alunos, construir um teodolito caseiro para auxiliar a análise da questão durante a atividade, desde que tivesse o conhecimento matemático.

Embora Henrique ainda não tivesse entendido de forma clara o conceito teórico da Modelagem Matemática, ele tinha em mente que precisava possibilitar a seus alunos entender onde a matemática pode ser aplicada. Sendo assim, como Henrique estava iniciando seus trabalhos utilizando modelagem, foi entendido que a atividade com o teodolito poderia servir como um bom treinamento, para introduzir a modelagem em sua prática docente.

Por outro lado, na conversa com Juliana, ela disse que estava pensando em utilizar a modelagem em sala de aula, mas ainda não estava preparada e, assim, ela pediu algumas orientações sobre alguns artigos que lhe possibilitariam aprofundar seus conhecimentos sobre modelagem.

Ao término desse segundo encontro, foi percebido que o curso de extensão estava aos poucos, despertando algumas atitudes positivas em alguns dos participantes e que eles também começavam a partir dos modelos clássicos trabalhados a desenvolver suas habilidades para modelar, ou seja, estavam começando a aprender a modelar o que é um dos primeiros passos para poder levar a modelagem para a prática da sala de aula.

7.3 EPISÓDIO – CORPO EM QUEDA LIVRE (3º Encontro 10/11/2015)

Este encontro começou com a discussão da tarefa extraclasse, onde os alunos (futuros professores) puderam refletir sobre o texto “Técnicas de Modelagem”, de autoria Bassanezi (2013). Com a discussão do texto, os alunos refletiram sobre as dificuldades encontradas para a adoção do processo de Modelagem pela maioria dos professores de matemática.

Bassanezi (2013) disse que a maior dificuldade que notamos para a adoção de Modelagem, pela maioria dos professores de matemática, é a transposição da barreira naturalmente criada pelo ensino tradicional onde o objeto de estudo apresenta-se quase sempre delineado, obedecendo a uma sequência de pré-requisitos e que vislumbra um horizonte claro de chegada – tal horizonte é muitas vezes o cumprimento do programa da disciplina.

Muitos dos alunos, ao discutirem esse texto, aceitaram a Modelagem Matemática como uma possibilidade a ser trabalhada em sala de aulas de Física e Matemática, no entanto, questionavam a quantidade de trabalho e tempo necessário para colocá-la em prática. Além disso, os alunos que já lecionavam em algumas escolas de Salgueiro, afirmavam que a modelagem impossibilita o professor de seguir o currículo escolar.

Nesse momento, o pesquisador disse que o professor pode levar para a sala de aula situações-problema já elaboradas. Foi dito, ainda, que essas situações-problema que o professor deve levar para seus alunos devem ser relacionadas a algum tema da realidade. Dessa forma, a partir do momento que esses alunos estiverem tentando resolver a situação proposta, estarão dentro do contexto da Modelagem.

No texto discutido, Bassanezi (2013) disse que o aprendizado da Modelagem não se restringe ao aprendizado de técnicas padronizadas ou a procedimentos sequenciais tal como um protocolo cirúrgico. Para esse autor, da mesma forma que só se pode aprender a jogar futebol, jogando, só se aprende, modelagem, modelando. Ainda segundo esse autor, o técnico pode aprimorar o comportamento de um jogador e ensaiar algumas jogadas mais efetivas, mas o resultado final depende exclusivamente da criatividade e habilidade deste jogador.

Como o leitor já deve ter percebido, em cada um dos encontros passados, a preocupação foi a de buscar familiarizar os alunos sobre o que é modelagem e tentar desenvolver algumas habilidades para modelar. Nesse sentido, o terceiro encontro, realizado no dia 10 de novembro de 2015 teve, como objetivo, deixar os alunos cientes de algumas técnicas que eles precisariam conhecer antes de introduzirem as atividades de modelagem na prática da sala de aula de Física e Matemática.

O terceiro encontro contou com a participação de oito alunos. Dos demais participantes do curso, alguns justificaram a ausência alegando terem outros compromissos com as disciplinas de seus respectivos cursos (provas, eventos etc.), outros apresentaram atestado médico.

O encontro foi iniciado com apresentações de alguns procedimentos de modelagem, sugeridos por alguns pesquisadores, como, por exemplo, Bassanezi (2013). Dentre os procedimentos discutidos, destacaram-se:

1. Aquisição de técnicas básicas e teorias;
2. Estudo de problemas clássicos;
3. Emprego de técnicas conhecidas em situações novas;
4. Questionamento ou crítica a respeito da fiabilidade de modelos clássicos;
5. Improvisação de novas técnicas quando as existentes são inadequadas;

6. Formulação de problemas em termos matemáticos;
7. Organização de material (dados experimentais, bibliográficos etc.);
8. Cooperação com especialistas de outras áreas.

Logo em seguida, alguns desses procedimentos foram aplicados, em situações-problema parecidas com as já trabalhadas nos encontros anteriores. A primeira situação-problema apresentada foi retirada de Boyce e Driprima (2010).

Situação-Problema

Uma cultura tem inicialmente P_0 bactérias. Em $t = 1h$, o número medido de bactérias é de $\frac{3}{2}P_0$. Se a taxa de crescimento for proporcional ao número de bactérias $P(t)$ presente no instante t, determine o tempo necessário para triplicar o número de bactérias.

A discussão gerada em relação a esse problema possibilitou, aos alunos, aplicar alguns dos procedimentos já citados. Nessa ocasião, os alunos puderam perceber que, quando se trabalha com modelagem em sala de aula, é possível utilizar alguns procedimentos conhecidos, em situações novas. Além disso, foi possível entender o quanto o estudo de alguns modelos clássicos da matemática pode ajudar a solucionar outras situações reais, ou seja, os futuros professores compreenderam que o raciocínio empregado para se chegar a um modelo já conhecido pode ser utilizado para encontrar modelos que representem novas situações reais.

Para solucionar a situação-problema já citada, os alunos utilizaram o modelo Malthusiano, modelo formalizado e trabalhado durante o primeiro encontro do curso de extensão. Na busca pela solução, ao comparar a situação-problema trabalhada com a primeira situação apresentada no primeiro encontro, os alunos perceberam que o Modelo Malthusiano pode ser aplicado a outros tipos de populações não humanas e até mesmo em outras situações que não estejam relacionadas com o crescimento populacional.

A segunda situação-problema trabalhada durante esse encontro foi encontrada em http://pt.slideshare.net/cristianepetrylima/aula-de-edo-lei-do-resfriamento-de-newton e teve como finalidade mostrar para os alunos outra situação onde se poderia aplicar o modelo do resfriamento de Newton. A situação apresentada foi a seguinte:

Situação-Problema

Na investigação de um homicídio, ou de uma morte acidental, é muitas vezes importante estimar o instante da morte. Suponha que folheando um jornal, encontramos a seguinte notícia: Corpo foi encontrado morto pelas 4h na esquina da rua **J** com a rua **G** o corpo de um homem aparentando 30 anos. Moradores do local disseram ter ouvido tiros por volta da meia-noite e também em torno das 3 da madrugada. A polícia já encontrou ambos os autores dos disparos. Somente após o legista identificar a hora da morte é que a polícia poderá prender um dos suspeitos. Considerando as informações abaixo, determine o instante em que a vítima morreu?

I_1 - A temperatura do corpo no instante que foi encontrado é de 30°C.
I_2 - Duas horas depois de ter sido encontrado, a temperatura do corpo passou a ser de 24°C.
I_3 - A temperatura normal de um corpo é de aproximadamente 37°C.
I_4 – A temperatura ambiente era de 20°C.

Como essa situação-problema tinha como finalidade reforçar a utilização do modelo de resfriamento de Newton, a resolução foi construída juntamente com os alunos.

Primeiramente foi admitido que a temperatura do corpo fosse 30°C no instante em que foi encontrado, e 23°C duas horas depois, e à temperatura ambiente de 20°C.

Em seguida, foi aplicado o modelo do resfriamento de Newton apresentado no episódio anterior para determinar a constante k.

$$T = 23°C, t = 2h, T_m = 20°C, T_0 = 30°C$$

$$T(t) = T_m - (T_0 - T_m)e^{-kt}$$

$$23 = 20 + (30 - 20)e^{-2t}$$

$$k = 0{,}6.$$

Logo em seguida, determinou-se o instante da morte, ou seja, a hora exata da morte.

Para isso, admitimos que a temperatura do corpo fosse igual à temperatura normal 37°C no instante $t = 0$, e a temperatura ambiente fosse de 20°C. A partir daí, calculou-se t (instante da morte), tendo os dados

$$T_0 = 37°C, \quad T_m = 20°C, \quad T = 30°C, \quad k = 0{,}6$$

$$T(t) = 20 + (37 - 20)e^{-0{,}6t}$$

$$30 = 20 + (37 - 20)e^{-0{,}6t}$$

$$\frac{10}{17} = e^{-0{,}6t}$$

$$t = 53\text{min}.$$

Na plenária, com todos os participantes do curso em relação a essa situação-problema, foi concluído que o instante da morte foi às três horas e sete minutos, pois o corpo foi encontrado às quatro horas.

Um dos alunos participantes é policial e ficou impressionado com a matemática trabalhada nessa situação-problema. Ele disse que: – em alguns casos são seguidos justamente esses procedimentos do enunciado do problema. No entanto, acrescentou que existem outras formas que são utilizadas quando, por exemplo, o corpo encontrado está com uma temperatura igual à temperatura ambiente. Nesse caso, ele informou que outro procedimento envolve todo o processo de coagulação do sangue, pois depois de certo tempo sem vida, o sangue começa a coagular.

As duas situações-problema apresentadas anteriormente visaram a reforçar os conceitos referentes aos modelos matemáticos trabalhados nos dois primeiros encontros e aplicados na dinâmica populacional e no resfriamento de um corpo.

Como o leitor já deve ter percebido, em cada encontro do curso de extensão, além de algumas discursões sobre os conceitos teóricos da Modelagem Matemática, foi apresentado um modelo clássico da matemática. No terceiro encontro, não foi diferente, pois foi trabalhado um modelo referente à queda livre de corpos. Para formalizar o modelo, foi apresentada para os alunos uma situação-problema retirada do livro "Equações Diferenciais com aplicações em Modelagem", de autoria de Dennis G. Zill e traduzido por Cyro de Carvalho Patarra, para que, a partir da discussão gerada em torno da situação-problema, se pudesse chegar a um modelo matemático que representasse um corpo em queda livre.

Fique claro para o leitor que os modelos clássicos trabalhados durante o curso tinham, como finalidade, possibilitar reconhecimento de algumas técnicas que pudessem ser utilizadas, futuramente, em outras situações reais trabalhadas com seus alunos. Entende-se que o futuro professor, para aprender a modelar, antes de tudo, é imprescindível que ele comece estudando, de forma crítica, os modelos pré-existentes. Nesse sentido, depois de adquirir um pouco de experiência poderá, juntamente com seus alunos, desenvolver seus próprios modelos matemáticos referentes à realidade.

A situação-problema que tinha como contexto o tema queda livre de um corpo, foi a seguinte:

Situação-Problema

Um paraquedista, pesando 70kg, salta de um avião e abre o paraquedas passados 10 segundos. Antes da abertura do paraquedas, o seu coeficiente de atrito é k=5kg/s, depois é k=100kg/s

c) Qual a velocidade do paraquedista no instante em que se abre o paraquedas?

d) Qual a distância percorrida em queda livre?

Após ter sido entregue, a cada um dos participantes, essa situação-problema, foi solicitado que eles formassem quatro duplas. Como de costume, após as duplas estarem formadas, o presente autor buscou atuar como mediador, sempre procurando seguir as orientações de Onuchic (1999), Onuchic e Allevato (2011), Onuchic et. all. (2014) relativamente à condução de uma aula em que se utiliza a metodologia resolução de problemas.

Percebeu-se que, nessa situação-problema, os alunos de Matemática tiveram um pouco de dificuldades para encontrar a solução. Uma das alunas chamada Joana Dark usou a seguinte justificativa: "– Professor, já faz muito tempo que vi essas fórmulas, diz a aluna Joana Dark".

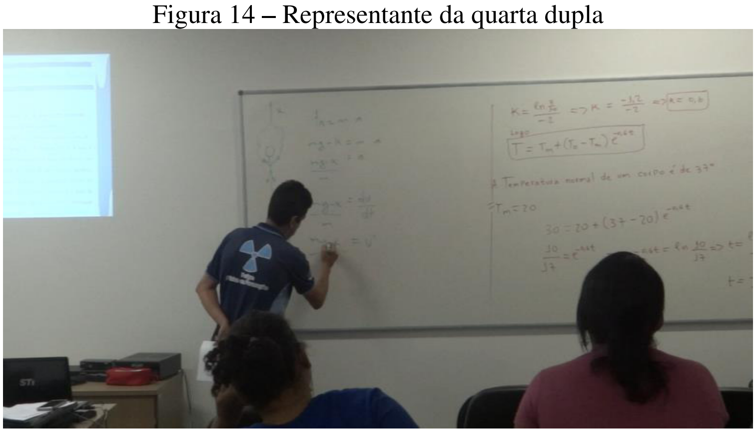
A justificativa dessa aluna deixa claro as cicatrizes geradas por um ensino baseado na decoreba segundo a qual, para se resolver uma situação-problema, principalmente de Física, precisa-se ter em mente, inicialmente, uma fórmula para iniciar a procura da solução.

O momento foi aproveitado para informar, novamente, que, em atividades de modelagem um dos objetivos é quebrar com costumes resultantes de um ensino baseado somente na memorização e repetição.

Já os alunos de Física tiveram mais facilidade em interpretar a situação-problema, o que é compreensível pelo fato de eles terem mais contato com os termos técnicos tratados na situação-problema apresentada.

Após aproximadamente 25 minutos, a dupla representada pelo aluno Nicolas sinalizava ter encontrado a solução do problema e, a partir dai, foi solicitado, como de praxe no decorrer das aulas do curso de extensão, que ele expusesse sua solução na lousa.

Figura 14 – Representante da quarta dupla

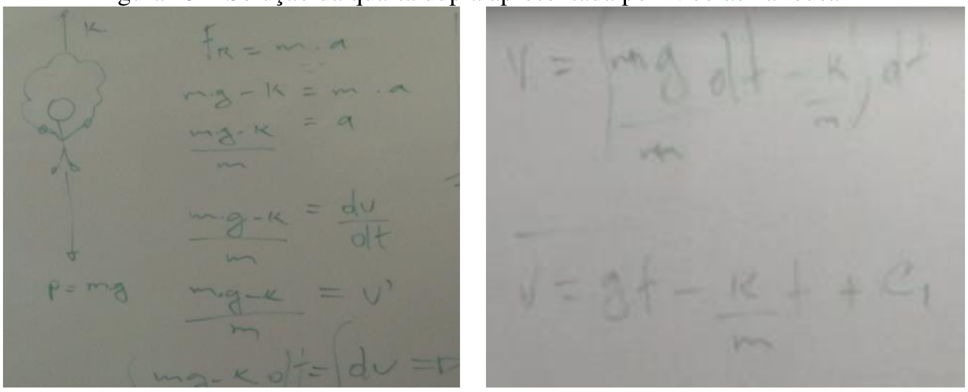


Fonte: Dados da pesquisa, 2016.

Nicolas, com o objetivo de facilitar sua explicação para os colegas, faz um desenho na lousa com o objetivo de mostrar as forças que atuam em um corpo em queda livre. Em seguida, apresenta o raciocínio que ele utilizou para se chegar à solução.

Ao escrever sua resposta na lousa, Nicolas mostrou ter um bom domínio dos conceitos físicos e matemáticos exigidos pela situação-problema. Ele mostrou, em sua explicação, que a segunda lei de Newton é a que governa o movimento de objetos, e que, segundo ela, a massa do objeto vezes a aceleração é igual à força total que atua sobre o objeto. Partindo dessa informação, Nicolas apresentou na lousa o seu raciocínio inicial para chegar à solução.

Figura 15 – Solução da quarta dupla apresentada por Nicolas na lousa



Fonte: Dados da pesquisa, 2016.

No processo de validação do modelo encontrado por Nicolas, percebeu-se que ele havia entendido que a força resultante que atua em um corpo em queda livre é dada por:

$$\mathrm{F_r = m \cdot g - k.}$$

Na fala de Nicolas, ele informou que $\mathrm{m \cdot g}$ representa o peso do corpo e k é a força da resistência do ar. Tal raciocínio é possível identificar na figura supracitada referente à escrita de Nicolas na lousa.

A partir do momento em que foi se explorando a situação-problema, os participantes perceberam e entenderam que Nicolas seguira um raciocínio correto Entretanto, não considerara, na construção de seu modelo, uma variável importantíssima, a que influencia diretamente na queda livre de um corpo, a velocidade.

Sendo assim, a turma chegou a um consenso de que a força resultante que atua em um corpo em queda livre é dada por:

$$\mathrm{F_r = m \cdot g - k \cdot v.}$$

O que mudou o entendimento de Nicolas foi apenas a segunda parte da expressão que passou de k para $\mathrm{k \cdot v}$.

Partindo das ideias iniciais apresentadas pelo aluno Nicolas, foram feitos alguns cálculos para se chegar a um modelo matemático que representasse um corpo em queda livre e consequentemente responder as perguntas da situação-problema trabalhada.

Para iniciar a construção do modelo, antes foi enunciada a segunda lei de Newton segundo a qual o produto da massa pela aceleração de um corpo é igual ao somatório das forças a que ele está sujeito, ou seja,

$$m \cdot a = \sum_i F_i.$$

Nesse caso, para um corpo em queda livre temos, assim:

$$m\frac{dV}{dt} = m \cdot g - k \cdot v,$$

Em que V é uma velocidade do corpo, k, o coeficiente de atrito e g, a aceleração da gravidade. Rearranjando a equação anterior, obtém-se:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{kv}{m} = g, \qquad \text{EDO de 1º Ordem.}$$

Para encontrar a solução dessa equação foi seguido o procedimento já trabalhado juntamente com os alunos durante o segundo encontro, que consistia em determinar o fator integrante da equação. Para isso, foi seguido o procedimento abaixo.

$$P(x) = \frac{k}{m} \qquad \text{e} \qquad q(x) = g.$$

No segundo encontro, já havia sido demonstrado que o fator integrante de uma equação diferencial de primeira ordem é dado por $e^{\int P(x)dx}$, ou seja,

$$e^{\int P(x)dx} = e^{\int \frac{k}{m}dt} = e^{\frac{k}{m}t}.$$

Multiplicando a equação $\frac{dv}{dt} + \frac{kv}{m} = g$, por $e^{\frac{k}{m}t}$ temos,

$$e^{\frac{k}{m}t}v' + \frac{k}{m}e^{\frac{k}{m}t}v = e^{\frac{k}{m}t}g.$$

Podemos reescrever esta equação como

$$[e^{\frac{k}{m}t}v]' = ge^{\frac{k}{m}t}$$

Integrando ambos os membros desta igualdade, temos

$$e^{\frac{k}{m}t}v = g\int e^{\frac{k}{m}t}dt$$

$$e^{\frac{k}{m}t}v = g\frac{m}{k}e^{\frac{k}{m}t} + C$$

$$\mathbf{v = \frac{m}{k}g + Ce^{\frac{-k}{m}t}}. \quad \text{Generalização do Modelo.}$$

Esse modelo representa um corpo em queda livre. Após ter sido encontrado esse modelo foi resolvida a situação-problema.

1. Qual a velocidade do paraquedista no instante em que se abre o paraquedas?

Solução

$$\frac{dV}{dt} - \frac{kV}{m} = g \Rightarrow V = \frac{mg}{k} + Ce^{\frac{-kt}{m}}.$$

A constante de integração é definida a partir da condição inicial:

$$V(t=0)=0 \Rightarrow C=\frac{-mg}{k}$$

A solução particular é

$$V=\frac{mg}{k}\left(1-e^{\frac{-kt}{m}}\right) \Rightarrow (t<10s).$$

Ao fim de 10s, a velocidade alcançada pelo pára-quedista é:

$$V=\frac{mg}{k}\left(1-e^{\frac{-k\cdot 10}{m}}\right)=70m/s.$$

2. Qual a distância percorrida em queda livre?

Solução

$$V=\frac{dx}{dt} \Rightarrow x=\int vdt+c=\int \frac{mg}{k}\left(1-e^{\frac{-kt}{m}}\right)dt+C,$$

ou seja,

$$x=\frac{mg}{k}\left(t+\frac{m}{k}e^{\frac{-kt}{m}}\right)+C.$$

Aplicando a condição inicial:

$$x(t=0) \Rightarrow C=\frac{-m^2g}{k^2}$$

e a solução particular é:

$$x=\frac{mg}{k}\left(t+\frac{m}{k}\left(e^{\frac{-kt}{m}}-1\right)\right).$$

Passando os tais $10s$, a distância percorrida foi

$$t=10s \Rightarrow x=\frac{70\cdot 9{,}8}{5}\left[10+\frac{7}{5}\left(e^{\frac{-5\cdot 10}{70}}-1\right)\right]=392m.$$

Espera-se que o homem se tenha atirado do avião quando este se encontrar a uma altura superior a $392m$.

A discussão gerada em torno dessa situação-problema possibilitou aos alunos perceberem que o mais importante em Física e Matemática não é a utilização de fórmulas já prontas para resolver determinados problemas, mas, sim, o processo da construção do modelo que representa a situação trabalhada, seja uma situação real ou semirreal.

Com essa situação-problema, os participantes do curso reforçaram as ideias já trabalhadas nos dois primeiros encontros e perceberam que, para se construir um modelo matemático, é imprescindível seguir alguns procedimentos, como:

1. Identificar as variáveis envolvidas e atribuir letras para representá-las;
2. Escolher as unidades de medidas de cada variável, e ter cuidado para escolher a unidade mais conveniente para a situação trabalhada;
3. Usar princípios básicos ou as leis que regem o problema em investigação;
4. Certificar-se de que cada parcela da equação está nas mesmas medidas físicas.

Ao final deste encontro, foi proposta, como tarefa extraclasse, a leitura de dois textos: "Da Matemática a Modelagem" e "Modelagem e cotidiano escolar" do livro "Modelagem em Educação Matemática" de autoria de Meyer et al. (2013).

7.4 EPISÓDIO – LEI DE TORRICELLI (4º Encontro 17/11/2015)

Esse episódio ocorreu no dia 17 de novembro de 2015 e é composto por discussões referentes à Modelagem Matemática, equações diferenciais e modelos matemáticos. O objetivo deste encontro foi compreender, juntamente com os alunos, algumas técnicas de modelagem e investigar, por meio da matemática, o comportamento de alguns fenômenos reais, em particular, o comportamento do escoamento de um líquido por um orifício situado em uma altura h de um determinado recipiente.

O encontro iniciou com uma conversa sobre os textos "Da Matemática à Modelagem" e "Modelagem e cotidiano escolar", deixados como atividade extraclasse. Nesse momento inicial, o pesquisador solicitou que os alunos apresentassem seus entendimentos sobre os textos lidos. Poucos dos alunos faziam as leituras sugeridas. Nessas condições, o texto era colocado em slides e era solicitado que se fizesse uma leitura conjunta, sempre dando pausa para a reflexão dos alunos sobre o que haviam lido.

Depois que os alunos iam compreendendo o texto, eles se mostravam interessado na discussão. O primeiro texto mostrava como se deu a passagem da Modelagem da Matemática aplicada para a Educação Matemática. Além disso, esse texto mostrava a evolução da Modelagem dentro da Educação Matemática. Já o segundo texto tratava das diferentes perspectivas da Modelagem no cotidiano escolar.

Depois da discussão dos textos, especificamente do segundo, os alunos concordaram que a perspectiva sócio-crítica da Modelagem Matemática pode ser uma alternativa promissora para que eles possam trabalhar com seus futuros alunos.

Entende-se, que um professor de matemática que utiliza ou pretende utilizar a Modelagem Matemática em sala de aula de Física ou Matemática, necessita do conhecimento de algumas técnicas que vão lhe possibilitar conduzir seus alunos a encontrarem modelos matemáticos consistentes e que realmente representem a realidade que está sendo trabalhada em sala de aula. Nesse sentido, o presente autor entende que o conhecimento de alguns conceitos básicos da estatística é imprescindível para qualquer profissional que utiliza a modelagem como metodologia de ensino, pois, em algumas atividades de modelagem, alguns temas de investigação exigem esse tipo de conhecimento.

Pensando assim, esse quarto encontro foi iniciado com um diálogo gerado em torno dos conceitos de correlação e regressão. Muitos dos alunos nunca tinham ouvido falar sobre esses conteúdos, exceto alguns alunos do curso de Física, que já haviam cursado a disciplina de Física experimental e que tinham um conhecimento razoável sobre os conceitos de ajuste linear utilizando o método dos mínimos quadrados.

Quando se vai construir um modelo matemático referente a alguma situação real, é necessário que, antes de tudo, sejam conhecidas as variáveis envolvidas. Conhecendo as variáveis, em alguns casos é preciso conhecer até que ponto elas estão relacionadas e para isso, utilizam-se os conceitos de correlação entre as duas variáveis.

Nesse encontro, antes de terem sido formalizados os conceitos referentes ao coeficiente de correlação entre duas variáveis envolvidas em uma determinada situação real ou semirreal, fez-se referência à importância de se explorar o gráfico de dispersão das variáveis e de se observar se há alguma tendência e se há um crescimento ou decrescimento.

Os termos correlação, regressão, gráfico de dispersão eram novos para alguns dos alunos presentes. Sendo assim, algumas explicações foram apresentadas.

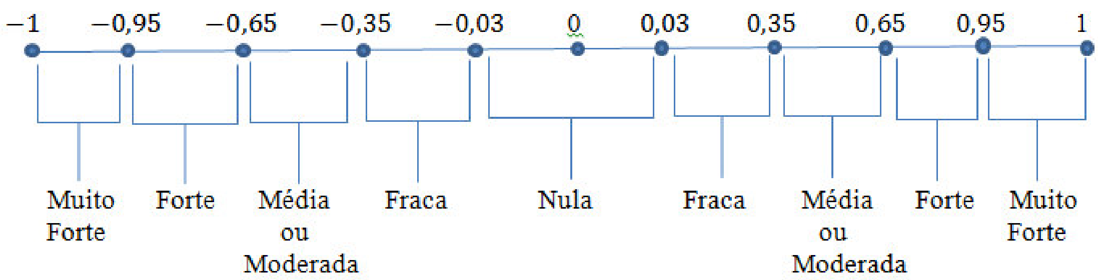
O que significa o coeficiente de correlação r?

O coeficiente de correlação r é uma medida numérica da força da relação entre duas variáveis que representam dados quantitativos. Esse coeficiente mede a intensidade da relação linear entre os valores quantitativos emparelhados x e y em uma amostra. O coeficiente r é chamado de coeficiente de correlação do produto de momentos de Pearson.

Além do entendimento sobre o significado do coeficiente de correlação, é imprescindível saber interpretá-lo.

O valor de r deve sempre estar entre -1 e $+1$. Se r estiver muito próximo de 0, conclui-se que não há correlação linear significativa entre as duas variáveis x e y. Se r estiver próximo de -1 ou de $+1$, conclui-se que há uma relação linear significativa entre as duas variáveis x e y. O valor numérico r mede a intensidade de relação linear, não sendo planejado para medir intensidade de relação que não seja linear. O valor de r^2 é a proporção da variação em y que é explicada pela relação linear entre x e y.

Visando ao melhor entendimento por parte dos participantes do curso de extensão, foi apresentado, graficamente, a ideia de como se deve interpretar o coeficiente r.



Além disso, foi apresentado o procedimento para se chegar ao coeficiente de correlação.

$$r = \frac{n(\sum xy) - (\sum x)\sum y}{\sqrt{n(\sum x^2) - (\sum x)^2}\sqrt{n(\sum y^2) - (\sum y)^2}}.$$

Com o objetivo de facilitar o entendimento dos alunos sobre como encontrar o coeficiente r, foi apresentada outra situação-problema que foi resolvida de forma coletiva.

Situação-Problema: Um agricultor plantou um pé de feijão no quintal de sua casa, anotando semanalmente sua altura. Os resultados obtidos estão na tabela abaixo:

Tabela 8 – Altura do pé de feijão em função do tempo

Idade (semana)	Altura (cm)
1	5
2	12
3	16
4	22
5	34
6	38
7	41
8	45
9	50

Fonte: Situação artificial criada em sala de aula pelo pesquisador e seus alunos

Qual a altura que o pé de feijão tinha com 3,5 semanas de vida?

Ao lerem essa situação-problema, todos os alunos concordaram que o resultado deveria estar entre 16 e 22, que são os valores correspondentes à terceira e à quarta semana respectivamente. Depois de algum tempo, tentando resolver o problema com o raciocínio aritmético, os alunos foram orientados a trabalha a situação-problema de forma algébrica. Após algumas tentativas, os participantes perceberam que, para determinar a altura do pé de feijão com 3,5 semanas de vida, seria necessário determinar um modelo matemático que relacionasse as duas variáveis, tempo e altura. Para isso, foi encontrado o coeficiente de correlação de Pearson seguindo o procedimento a seguir:

Em um primeiro momento, os dados foram organizados em uma tabela, como a que segue:

Tabela 9 – Dados das variáveis da situação-problema

x	y	y^2	x^2	$x \cdot y$
1	5	25	1	5
2	12	144	4	24
3	16	256	9	48
4	22	484	16	88
5	34	1156	25	170
6	38	1444	36	228
7	41	1681	49	287
8	45	2025	64	360
9	50	2500	81	450
$\sum x = 45$	$\sum y = 263$	$\sum y^2 = 9715$	$\sum x^2 = 285$	$\sum x \cdot y = 1660$

Fonte: Criada pelo pesquisador juntamente com os alunos

Depois de terem organizado os dados na tabela e já conhecerem como chegar ao coeficiente de correlação

$$r = \frac{n(\sum xy) - (\sum x)\sum y}{\sqrt{n(\sum x^2) - (\sum x)^2}\sqrt{n(\sum y^2) - (\sum y)^2}}.$$

Aplicaram os dados da tabela na expressão anterior e encontraram $r = 0{,}99$. Esse valor possibilitou, aos alunos concluírem que existe uma relação significativa entre as duas variáveis, pois o coeficiente foi bem próximo do número 1. Essa ocasião foi aproveitada para informar que nem sempre que o coeficiente de correlação é próximo de $+1$ e -1 significa que existe uma relação significativa entre as duas variáveis.

Depois de já terem verificado a relação entre as duas variáveis, os alunos recorreram aos conceitos de regressão para determinar o ajuste linear dos dados apresentados na tabela da situação-problema e, assim, chegaram à seguinte expressão:

$$y = 5{,}75x + 0{,}5.$$

Esse modelo representa um ajuste linear dos dados da situação-problema. Após terem encontrado esse modelo, os alunos para determinarem a altura da árvore em 3,5 semanas fizeram os seguintes cálculos,

$$y = 5{,}75 \times 3{,}5 + 0{,}5 = 20{,}6\text{cm}.$$

Esse valor encontrado foi ao encontro da hipótese dos alunos, segundo a qual o resultado seria um número entre 16 e 22.

Para que os alunos aplicassem, na prática, as ideias de correlação e regressão, foi utilizado – também como situação real – o crescimento populacional, que foi trabalhado durante o primeiro encontro. Para isso, foi mostrado no Excel, inicialmente, como verificar o gráfico de dispersão de determinada situação e como fazer o ajuste linear para encontrar o coeficiente de correlação utilizando uma planilha do Excel.

Figura 16 – Gráfico do Modelo encontrado no primeiro encontro

Fonte: Dados da pesquisa, 2016.

Os dados contidos na planilha da figura acima já haviam sido trabalhados na situação-problema do primeiro encontro.

Logo em seguida à apresentação dos conceitos de correlação e regressão, percebeu-se, na fala dos alunos, principalmente a de Física, que eles conheciam alguns experimentos da Física que eles iriam aplicar por meio do conhecimento adquirido durante esse encontro.

Alguns dos alunos estavam na fase de produção do TCC[14] e relataram como iriam utilizar os conceitos de correlação e regressão em sua pesquisa. O aluno Henrique disse que, em sua pesquisa, o objetivo é chegar a um modelo que relacione a quantidade de sal colocado em certa quantidade de água e a resistência elétrica que pode ser medida por um aparelho chamado multímetro. Para isso, ele relatou que já havia feito alguns experimentos em que colocava certa quantidade de sal dentro de certa quantidade de água e, utilizando um multímetro, ia verificando qual a resistência que a quantidade de sal inserida provocava. Apesar dos experimentos feitos, Henrique, juntamente com seu orientador, ainda não haviam encontrado o modelo esperado, tanto é que, segundo ele, estava pensando em mudar o rumo

[14] Trabalho de Conclusão de Curso.

de seu TCC, ou seja, fugir do problema. Nesse sentido, foi discutido com Henrique que o processo para se chegar a esse modelo não era fácil, pelo fato de que existem outras variáveis envolvidas, como por exemplo, a temperatura e o tempo. No entanto, foi debatida a importância significativa da investigação à qual ele estava seguindo em seu TCC.

No relato de Henrique sobre seu trabalho de TCC, é perceptível que ele já utilizava a Modelagem Matemática numa perspectiva de projetos, embora ainda não tivesse percebido tal fato. Paralelo a seus estudos, Henrique, apesar de ser aluno de Física, ministrava aulas de matemática em uma das escolas do município de Salgueiro. Ele sempre demonstrava, em sua fala, o interesse de encontrar situações reais para trabalhar a matemática com seus alunos.

Além de Henrique, outro aluno, chamado Hugo, relatou que os conhecimentos adquiridos sobre correlação e regressão foram de extrema importância para ele pois, ele aplicaria esse conhecimento em uma aula de Física experimental onde tinha que apresentar um experimento que relacionava as seguintes variáveis: dilatação; tempo e temperatura. Para a realização desse experimento, ele informou que seria utilizado um equipamento do laboratório de Física.

A cada encontro, foi perceptível que cada conteúdo trabalhado e a fora trabalhado despertava algumas atitudes positivas em alguns dos alunos participantes. Alguns, dos futuros professores participantes do curso demonstravam interesse em adquirir um novo conhecimento, sempre com um foco voltado para a prática da sala de aula.

Depois de ter formalizado os conceitos de correlação e regressão e de ter discutido juntamente com os alunos sobre a Modelagem Matemática no processo de ensino e aprendizagem de Matemática e Física, foi apresentada uma situação-problema que tinha como objetivo investigar, por meio da matemática, o comportamento do escoamento de um líquido por um orifício situado em uma altura h de um determinado recipiente. A situação-problema trabalhada foi retirada do livro de Santos (2011).

Situação-Problema

Um tambor cilíndrico de 2 metros de altura e base circular de raio 1 metro está cheio de água. Se fizermos um furo no fundo e em 30 minutos a água cair pela metade vamos determinar a altura h da água dentro do tambor em função do tempo e em quanto tempo o tanque esvazia.

Depois de apresentar a situação-problema de forma impressa para cada um dos participantes, foi feita uma leitura coletiva com o objetivo de provocar uma interação dos alunos com a situação-problema trabalhada. Em seguida foi solicitado que fossem formadas duplas para que juntos pudessem resolver o problema.

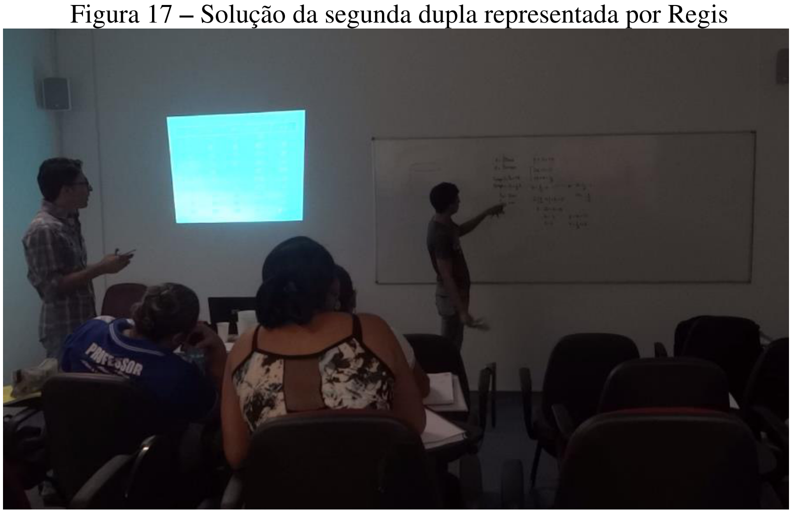
O objetivo de ter-se apresentado essa situação-problema deve-se ao fato de querer formalizar, juntamente com os participantes, outro modelo clássico da matemática, conhecido como Lei de Torricelli, segundo a qual a taxa com que um líquido escoa por um orifício situado a uma profundidade h é proporcional a $\sqrt{h}$.

Depois de os alunos terem feito a interação com o problema e formado as duplas, iniciaram a busca pela solução. Nesse processo, o pesquisador interceptava cada dupla para analisar as diferentes formas utilizadas para se chegar à solução do problema.

Após um tempo, foi percebido que, das quatro duplas formadas, apenas uma afirmava ter encontrado a solução. Nesse sentido, foi solicitado que um dos alunos da dupla escrevesse, na lousa, a forma como havia sido encontrada a solução, para que, juntos, todos pudessem fazer uma análise crítica sobre a solução encontrada.

Na lousa, o aluno Regis escreveu a solução que havia encontrado com seu parceiro de dupla.

Figura 17 – Solução da segunda dupla representada por Regis



Fonte: Dados da pesquisa, 2016.

A solução exposta na lousa pelo aluno Regis, foi a seguinte:

$x = Altura$
$y = Tempo$
$t_0 = 2m$
$t_2 = 1m$

$$y = ax + b$$
$$\begin{cases} 2a + b = 0 \\ 1a + b = \frac{1}{2} \end{cases}$$
$$a = \frac{1}{2} - b$$
$$2 \cdot \left(\frac{1}{2} - b\right) + b = 0$$
$$1 - 2b + b = 0$$
$$b = 1$$

Substituindo $b = 1$ em $a = \frac{1}{2} - b$ obtemos $a = \frac{-1}{2}$

Logo temos o seguinte modelo $y = \frac{-1}{2}x + 1$

Ao fazer algumas perguntas a Regis sobre sua solução, ele afirmou que a expressão $2a + b$ foi igualada a zero, pelo fato de, no instante inicial, a altura correspondente a água que baixou, nesse caso, seria 0. Já a segunda expressão $1a + b$ foi igualada a $\frac{1}{2}$ segundo Regis pelo fato de que, após uma hora, o volume teria baixado pela metade. Dessa forma, resolvendo o sistema, pode-se perceber que o aluno chegou ao seguinte modelo $y = -\frac{1}{2}x + 1$. Esse modelo, segundo Regis, relaciona o escoamento da água e o tempo.

Os demais participantes, ao analisarem o modelo encontrado por Regis, perceberam que, na solução apresentada, havia um mau entendimento de alguns conceitos utilizados e que o sistema utilizado como ponto de partida para chegar a sua solução, não correspondia, corretamente, ao enunciado da situação-problema.

Apesar dos demais participantes do curso não terem resolvido o problema, eles participaram ativamente da discussão gerada em torno da solução apresentada por Regis. Isso comprova que dar oportunidade aos alunos para apresentarem suas soluções na lousa – independentemente de estarem corretas ou não, pode auxiliar no processo de ensino e aprendizagem de Física e Matemática, pois, com a exploração da situação-problema feita a partir das soluções apresentadas na lousa, é possível promover tanto a aprendizagem dos alunos que escreveram suas soluções como a dos demais que não conseguiram chegar à solução.

Após Regis ter apresentado a solução na lousa, o pesquisador, utilizando a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, dentro de um processo dinâmico, junto com os alunos, passou a trabalhar o erro da resolução apresentada pelo aluno Regis. Nessa ocasião, percebeu-se que a aprendizagem pode ser gerada a partir do erro dos alunos. As dificuldades apresentadas por Regis eram comuns entre os alunos do curso. Nesse sentido, o trabalho encima do erro foi muito significativo, pois atingiu diretamente alguns pontos fracos, possibilitando a correção de alguns equívocos.

Em seguida, procedeu-se a discussão sobre a solução apresentada pelo aluno Regis, foi formalizado um modelo matemático que pode ser utilizado para resolver a situação-problema. Esse modelo parte do princípio de que a taxa com que um líquido escoa por um orifício situado a uma profundidade h é proporcional a $\sqrt{h}$. Ou seja,

$$\frac{dV}{dt} = k\sqrt{h}.$$

Foi mostrado que existe uma relação entre V e h, $V = V(h)$, que depende da forma do tanque. Como

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh}\frac{dh}{dt},$$

Então, a altura $h(t)$, é solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dh}{dt} = k\frac{\sqrt{h}}{\frac{dV}{dh}} \\ h(0) = h_0 \end{cases}$$

Logo após a exibição de todo o procedimento adotado para se chegar a esse modelo, os alunos o utilizaram para resolver a situação-problema que foi proposta, e o fizeram da seguinte maneira:

Como para o cilindro

$$V(h) = \pi R^2 h = \pi h,$$

então,

$$\frac{dV}{dh} = \pi.$$

Como uma constante sobre π é também uma constante, então o problema pode ser modelado por

$$\begin{cases} \frac{dh}{dt} = k\sqrt{h} \\ h(0) = 2, h(30) = 1. \end{cases}$$

Multiplicando-se a equação por $\frac{1}{\sqrt{h}}$ obtém-se

$$\frac{1}{\sqrt{h}}h' = k.$$

Integrando-se ambos os membros em relação a t obtém-se

$$\int \frac{1}{\sqrt{h}} h' dt = \int kdt.$$

Fazendo-se a substituição $h'dt = dh$ obtém-se

$$\int \frac{1}{\sqrt{h}} dh = \int kdt.$$

Calculando-se as integrais obtém-se a solução geral na forma implícita

$$2\sqrt{h} = kt + c,$$

ou explicitando-se a solução:

$$h(t) = (\frac{c + kt}{2})^2.$$

Substituindo-se $t = 0$ e $h = 2$ em $2\sqrt{h} = kt + c$, obtém-se:

$$2\sqrt{h} = c.$$

Substituindo-se $t = 30$ e $h = 1$ em $2\sqrt{h} = kt + c$:

$$c + 30k = 2 \Rightarrow k = \frac{2 - c}{30} = \frac{1 - \sqrt{2}}{15}.$$

Assim, a função que descreve como a altura da coluna de água varia com o tempo é dada por

$$h(t) = (\frac{c + kt}{2})^2 = (\sqrt{2} + \frac{1 - \sqrt{2}}{30} t)^2.$$

Substituindo-se $h = 0$:

$$t = -\frac{c}{k} = \frac{30\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} \approx 102\text{min}.$$

Com o objetivo de possibilitar os alunos enxergarem na prática a situação-problema, foi trabalhado um experimento utilizando os seguintes materiais:

1- Recipiente com água;
2- Cronômetro.

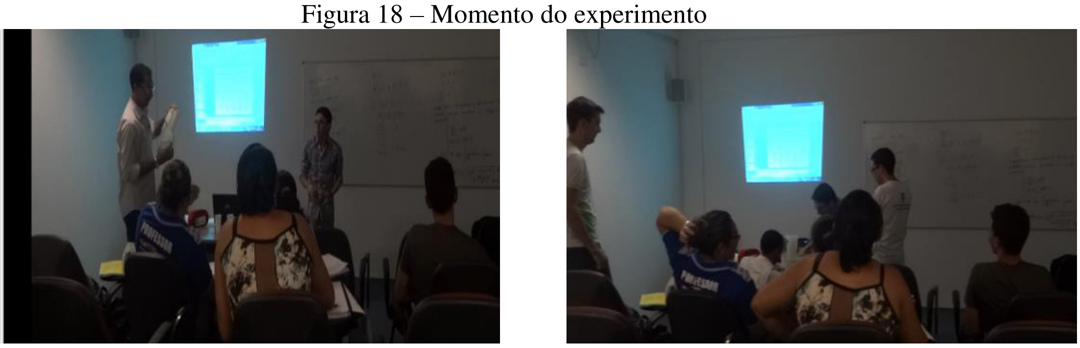
Para a realização do experimento, foram seguidos alguns procedimentos:

1- Foi utilizado um recipiente cilíndrico com água;
2- Foi marcado com um pincel o nível da água dentro do recipiente;
3- Foi feito um pequeno furo situado próximo à base do recipiente;
4- Foi cronometrado um minuto no celular e liberada a água para escoar pelo orifício;
5- Após o minuto cronometrado, o furo foi tapado e observada a altura referente à água escoada;

6- Em seguida, o orifício foi liberado novamente até que a água dentro do recipiente atingisse a altura 0.

Logo após ter feito todo esse procedimento, os alunos aplicaram a lei de Torricelli e constataram que os dados obtidos no experimento, correspondiam aos que foram encontrados utilizando o modelo formalizado em sala de aula.

Figura 18 – Momento do experimento



Fonte: Dados da pesquisa, 2016.

As imagens acima mostram o momento em que estava sendo realizado o experimento. Nessa ocasião, todos os alunos participavam ativamente e alguns ficavam ansiosos para compararem os resultados obtidos no experimento com os resultados obtidos utilizando-se o modelo matemático formalizado.

Após a realização do experimento, chega-se ao fim do quarto encontro, onde foi apresentada como atividade extraclasse a leitura do texto “A Modelagem e a sala de Aula” de autoria de Meyer et al. (2013).

7.5 EPISÓDIO – JUROS (5º encontro 01/12/2015)

Esse episódio aconteceu no dia 1º de dezembro de 2015, e contou com a presença de 6 alunos. O encontro foi iniciado a partir de uma revisão sobre o que já havia sido trabalhado nos encontros anteriores. Logo em seguida, deu-se continuidade a uma nova discussão com a tentativa de mostrar, para os alunos, que, apesar de estarem sendo trabalhadas, no curso de extensão, as Equações Diferenciais no contexto da modelagem, é possível utilizar a Modelagem Matemática para trabalhar com conteúdos de ensino Básico.

Inicialmente, foi realizada a discussão do texto “A Modelagem e a sala de Aula”, que havia sido apresentada no encontro anterior como atividade extraclasse.

No texto discutido, os alunos refletiram sobre alguns obstáculos que podem dificultar o trabalho com a Modelagem em sala de aula. Nesse sentido, Meyer et al. (2013) disse que ensinar e aprender Matemática usando como pressuposto teórico a Modelagem nem sempre se traduz em uma experiência de sucesso. Como exemplo, esse autor cita o trabalho de Silveira (2007) que apresenta alguns desses obstáculos como: a preocupações dos professores em cumprir o conteúdo, à preocupação com a sequência dos conteúdos diferentes da “sequência lógica”, à falta ou à preocupação com o gasto excessivo de tempo, a preocupação com a reação dos pais, à preocupação acerca da construção do conhecimento, a insegurança diante do novo, entre outras preocupações que podem tornar-se obstáculos para o uso da Modelagem em sala de aula.

Os alunos, ao se depararem com essas reflexões, concordaram que realmente o trabalho com a Modelagem em sala de aula exige muito esforço por parte do professor. Nesse momento, o pesquisador informou que, algumas dessas preocupações ocorrem pelo fato de muitos pesquisadores dessa área defenderem a ideia de que o tema a ser trabalhado em sala de aula tem que ser escolhido pelos alunos.

O pesquisador informou que o professor de Matemática ou de Física pode levar situações-Problema já prontas de tal forma que essas situações envolvam temas da realidade dos alunos. Nessas condições, a partir do momento em que os alunos estiverem envolvidos com a procura da solução desejada, estarão dentro do contexto da Modelagem Matemática.

Com esse objetivo, o presente autor, na condição de professor pesquisador, sugeriu alguns temas que se encontravam em destaque no período de realização do curso de extensão. Os temas sugeridos foram os seguintes: Black Friday; Microcefalia; Barragem de Mariana; Economia de água e energia. Após ter sugerido esses temas, com a intenção de verificar como os alunos tinham interpretado o uso da Modelagem Matemática, foi solicitado que eles escolhessem um dos temas sugeridos e explicassem como eles aplicariam os conteúdos de Física e Matemática.

Nas respostas dadas pelos alunos, percebeu-se que eles apontavam alguns procedimentos sobre como trabalhar os temas supracitados. No entanto, mostravam não saber, ainda, como inserir a matemática em temas dessa natureza. Por exemplo, a aluna Joana Dark, disse: “– Para trabalhar o tema Black Friday, eu pediria para os alunos fazerem uma pesquisa de preços em algum supermercado antes e depois do Black Friday e depois pediria para eles analisarem se realmente teve o desconto anunciado pelo mercado”.

Percebe-se, na fala de Joana Dark, que ela já havia percebido que um dos objetivos da Modelagem Matemática é o de possibilitar aos alunos, por meio da matemática, tornarem-se cidadãos mais críticos sobre situações reais de seu cotidiano. Entretanto, ela não conseguiu explicar como iria inserir os conteúdos da matemática nesse tema.

Dentre os temas que foram sugeridos, os escolhidos foram o Black Friday e a economia de água e energia. No que diz respeito ao tema economia de água e energia, o aluno Hulk, do curso de Física, disse

> – Eu trabalharia com os estudantes os princípios e fundamentos de uma hidrelétrica ou então apresentaria um problema pedindo que os alunos calculassem o quanto eles gastam mensalmente de água e energia consumida durante os banhos tomados e, depois, eles iriam poder ver o quanto que um banho demorado influencia tanto na despesa familiar quanto nas questões ambientais.

Quando questionado sobre que conteúdo de Matemática e Física que seria utilizado no tema consumo de água e energia, Hulk disse: "– utilizaria o conteúdo potencial elétrico, função afim, e pediria para os alunos trazerem de casa o potencial de consumo de alguns aparelhos eletrodomésticos para calcularmos o quanto eles consomem por mês".

As falas dos alunos sobre como conduziriam uma atividade de modelagem utilizando determinados temas revelaram que eles já haviam aprendido alguns conceitos básicos sobre a Modelagem Matemática.

No meio da aula, a aluna Joana Dark perguntou se poderia utilizar a modelagem para trabalhar conteúdos como equações de primeiro e segundo grau e funções exponenciais.

Para responder a essa pergunta, o pesquisador, nesse instante, improvisou a forma de trabalhar com Modelagem. Assim, foi solicitado que cada um dos alunos pegassem uma folha de papel. Em seguida, pediu-se que dobrassem a folha ao meio e, logo após, que abrissem para verificar em quantos pedaços ficou dividida a folha. Depois desse procedimento, foi solicitado que fizessem outra dobra e novamente observassem em quantas partes a folha ficou dividida. Depois de ter seguido o procedimento quatro vezes, os dados encontrados foram expostos na lousa em uma tabela como a que segue

Tabela 10 – Dados da situação-problema

Dobras	Partes em que a folha ficou dividida
1	2
2	4
3	8
4	16

Fonte: Dados da pesquisa, 2016.

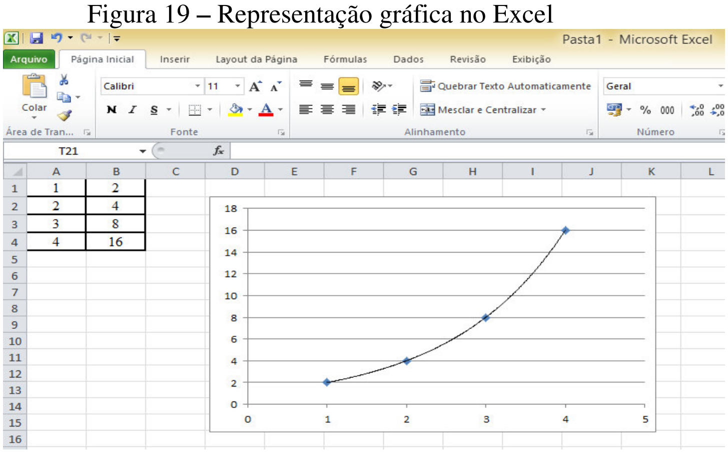
Depois de os dados terem sido colocados em uma tabela na lousa, foram feitas as seguintes perguntas: Quantas dobras devem ser feitas para que a folha fique dividida em 640 partes? Depois que dobrarmos a folha 40 vezes, em quantas partes a folha vai ficar dividida?

Alguns alunos perceberam que não conseguiriam encontrar as respostas para essas perguntas apenas dobrando a folha, pois, seria impossível dobrá-la tantas vezes. No entanto, eles perceberam que, para encontrar a solução, precisariam determinar um modelo matemático que relacionasse a quantidade de dobras e a quantidade de partes em que a folha ficou dividida.

Com as informações da tabela, encontrar um modelo matemático era uma tarefa. No entanto, alguns alunos tiveram algumas dificuldades e não conseguiram encontrar a expressão matemática que representasse os dados expostos na lousa.

Nessa ocasião, objetivando, também, familiarizar os alunos com alguns recursos tecnológicos, foi feito o esboço do gráfico que representasse a situação trabalhada, utilizando a planilha no Excel.

Figura 19 – Representação gráfica no Excel



Fonte: Dados da pesquisa, 2016.

Apesar de o gráfico ter sido esboçado com a ajuda do Excel, os alunos entenderam que cada par de valores da tabela, apresentados na lousa, correspondia a um ponto na curva. Além disso, a visualização do gráfico permitiu que os participantes identificassem que a situação remetia a uma função exponencial. Observando a tabela na coluna “partes que a folha ficou dividida”, os alunos chegaram a concluir que um dos modelos que pode representar a situação-problema é:

$$y = 2^x,$$

onde y é a quantidade de partes em que a folha fica dividida e x a quantidade de dobras feitas. A partir desse ponto, os participantes conseguiram responder às perguntas propostas no enunciado da situação-problema.

Essa situação-problema foi criada de improviso, com a finalidade de responder à pergunta feita pela aluna Joana Dark. Com essa situação-problema, ela e os demais participantes do curso puderam perceber que, utilizando recursos simples em sala de aula, como uma folha de papel, é possível facilitar a aprendizagem de quem está disposto a aprender. E isto que nos proporciona a modelagem.

Como o leitor já deve ter percebido durante a leitura do referencial teórico desta dissertação, o presente autor anunciou que está adotando uma perspectiva da Modelagem Matemática denominada de sócio-crítica, fundamentada na educação matemática crítica de Ole Skovsmose (2000). No entanto, é possível perceber que, em alguns episódios, algumas atividades trabalhadas vão ao encontro de outras perspectivas da Modelagem Matemática.

Nesse sentido, espera-se deixar claro, para o leitor, que a intenção não é somente fazer apologia à perspectiva sócio-crítica, mas, sim, apresentar a modelagem como uma atividade científica que tenha como objetivo, não somente a transmissão dos conteúdos, mas que também permita que os alunos possam conceber, criticamente, por meio da matemática e da Física, conteúdos da própria matemática e da Física de modo a entender a aplicação prática de conceitos teóricos em situações reais ou semirreais trabalhadas em determinadas atividades.

No referencial teórico desta dissertação, esclareceu-se que o curso de extensão foi ministrado levando em consideração duas abordagens da Modelagem Matemática: ensinar sobre modelagem e ensinar a modelar.

Para ensinar sobre o que é modelagem, um dos caminhos seguidos durante o curso foram as leituras e discussões referentes a Modelagem Matemática. Embora as leituras não tenham sido muito significativas por parte dos alunos, talvez por eles de não terem o hábito da leitura, foi possível perceber, já no quinto encontro, que já mostravam entender sobre o que é Modelagem Matemática na prática, especialmente quando o pesquisador apresentou alguns experimentos.

Já para ensinar a modelar, uma das estratégias seguidas durante o curso de extensão foi trabalhar com situações-problema que possibilitassem, aos alunos, aprender algumas técnicas que podem ser utilizadas em algumas atividades de modelagem, com a intenção de que os futuros professores pudessem aplicá-las mais tarde em suas respectivas salas de salas de aula, tanto de Física quanto de Matemática.

A situação-problema apresentada nesse quinto encontro teve como objetivo mostrar, para os futuros professores que, em uma atividade de modelagem, a discussão pode ser referente tanto ao conteúdo da Física ou Matemática quanto ao tema da realidade que está sendo trabalhado. Nesse sentido, um dos temas que pode possibilitar esse tipo de discussão é o tema Juros. A situação-problema que se apresenta abaixo foi retirada do livro de Santos (2011)

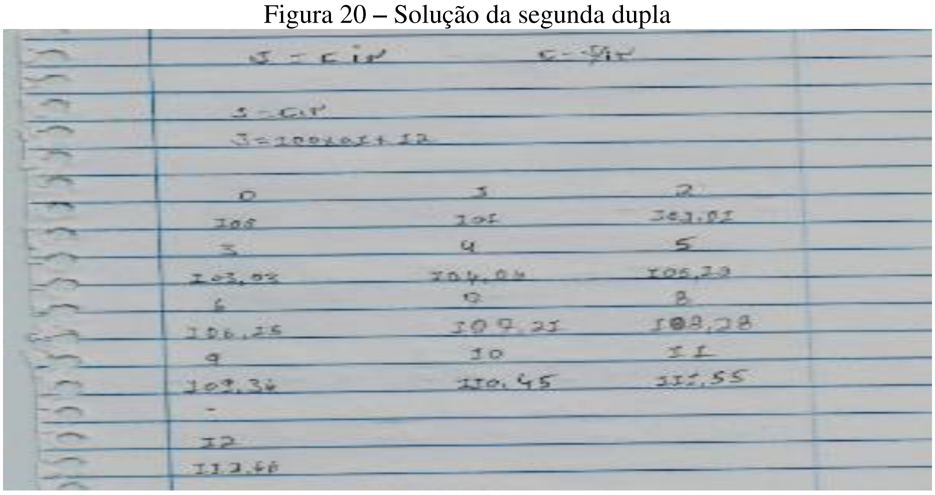
Situação-Problema

Suponha que uma aplicação renda juros de 1% ao mês (continuamente). Encontre o saldo como função do tempo e o saldo após 12 meses se o saldo inicial é de $R\$100{,}00$.

Ao apresentar a situação-problema, os alunos foram divididos em três duplas e, em seguida, foi feita a leitura para que os participantes pudessem interagir com a situação-problema. Após 10 minutos, alguns alunos já sinalizavam ter resolvido. A rapidez e facilidade com que alguns alunos resolveram levou o presente autor a concluir que talvez a situação apresentada não fosse um problema para os alunos. Pensando sempre em compartilhar a experiência com o leitor, apresentam-se, a seguir, algumas soluções encontradas pelos alunos.

As alunas Juliana e Joana Dark encontraram uma solução de forma aritmética utilizando a calculadora. A solução encontrada pelas duas alunas encontra-se abaixo:

Figura 20 – Solução da segunda dupla

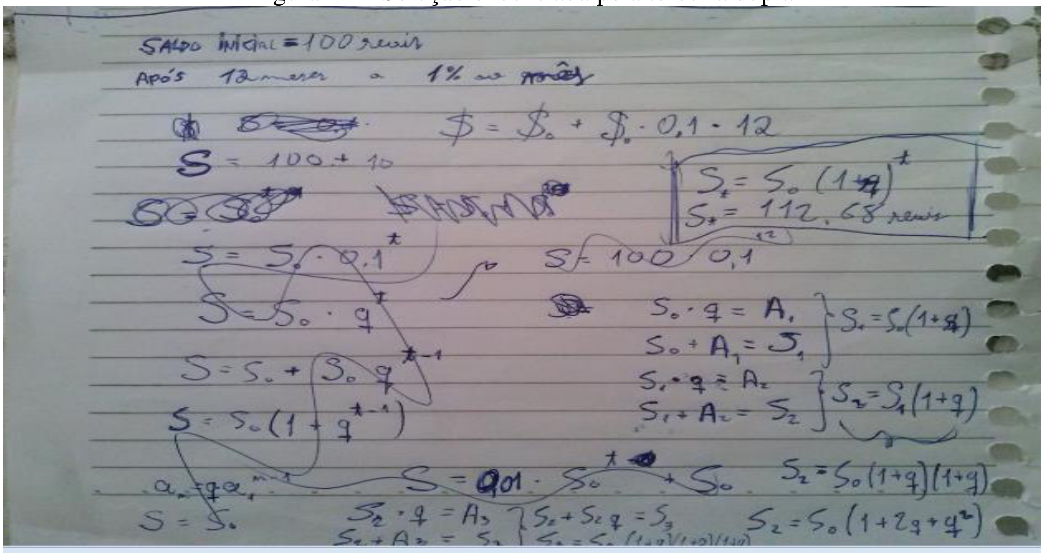


Fonte: Dados da pesquisa, 2016.

É perceptível, na solução de Juliana e Joana Dark, que elas foram calculando a porcentagem em cima do saldo de cada mês, ou seja, calcularam 1% do saldo inicial 100 e obtiveram como resultado o número 1, em seguida somaram esse valor a 100 e obtiveram um novo saldo referente ao primeiro mês que é 101 reais. Depois, calcularam 1% de 101 que é 1,01 e fizeram a soma $101 + 1{,}01 = 102{,}01$ obtendo, assim, o valor correspondente ao segundo mês após a aplicação. Assim foram fazendo até chegarem ao valor correspondente ao 12º mês.

Já a dupla composta pelos alunos Hulk e Hugo utilizaram um raciocínio algébrico e encontraram um modelo que relaciona as variáveis, saldo e tempo, como se pode ver na imagem abaixo:

Figura 21 – Solução encontrada pela terceira dupla



Fonte: Dados da pesquisa, 2016.

Na expressão $S_0 q = A_1$ essa dupla expressou q% do saldo inicial S_0 obtendo o valor A_1. Em seguida somaram S_0 com A_1 obtendo S_1 que é o saldo referente ao primeiro mês, depois fizeram o mesmo procedimento e perceberam que a situação poderia ser generalizada pelo seguinte modelo:

$$S_t = S_0(1+q)^t.$$

Após terem encontrado esse modelo, os alunos substituíram os valores do enunciado para solucionarem a situação-problema simples.

Como os alunos haviam resolvido com facilidade a situação-problema já apresentada, foi apresentado outro problema, que também foi retirado do livro de Santos (2011).

Situação-Problema

Suponha que seja aberta uma caderneta de poupança com o objetivo de no futuro adquirir um bem no valor de $R\$$ 40.000,00. Suponha que os juros sejam creditados continuamente a uma taxa de $r = 1\%$ ao mês e que os depósitos também sejam feitos continuamente a uma taxa constante, sendo no início o saldo igual à zero. Determine de quanto deve ser a taxa de deposito mensal para que em 20 meses consiga atingir o valor pretendido.

Essa situação-problema é uma continuação da anterior, só que, agora, além de ter sido feito uma aplicação financeira, é possível fazer saques e depósitos.

Nessa segunda situação, os alunos tiveram mais dificuldades e não conseguiram resolvê-la. O fato de os alunos não terem conseguido resolver não pode ser interpretado como algo absolutamente indesejado, justamente porque foi possível levantar uma discussão que reforçou a ideia de que, para determinar modelos matemáticos um pouco mais complexos, às vezes é imprescindível recorrer a conhecimentos aplicados para determinar modelos mais simples.

Como de costume, após os alunos terem tentado resolver o problema proposto, sempre era formalizado um modelo matemático que representasse a situação trabalhada.

Começamos supondo que, se tivéssemos feito uma aplicação de uma quantia S_0 em um banco e que a taxa de variação do investimento $\frac{dS}{dt}$ fosse proporcional ao saldo em cada instante $S(t)$, dessa forma descreveríamos o problema de encontrar $S(t)$ como o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = rS \\ S(0) = S_0. \end{cases}$$

Este problema é análogo ao que já foi resolvido no primeiro encontro quando se trabalhava com dinâmica populacional, pela qual se chegou ao seguinte modelo.

$$S(t) = S_0 e^{rt}.$$

Pode parecer que este modelo não seja muito realista, pois normalmente os juros são creditados em períodos inteiros igualmente espaçados, ou seja, se j é a taxa de juros em uma unidade de tempo, então o saldo após n unidades de tempo $S(n)$ é dado por

$$\begin{aligned} S(1) &= S_0 + S_0 j = S_0(1 + j) \\ S(2) &= S(1)(1 + j) = S_0(1 + j)^2 \\ &\vdots \\ S(n) &= S(n - 1)(1 + j) = S_0(1 + j)^n. \end{aligned}$$

Substituindo-se t por n na solução do problema de valor inicial obtido em $S(t) = S_0 e^{rt}$ e comparado com $S(n) = (1 + j)^n$ obtém-se que

$$S_0 e^{rn} = S_0(1 + j)^n,$$

ou seja,

$$1 + j = e^r \qquad \text{ou} \qquad r = \ln(1 + j).$$

Assim, a hipótese inicial de que os juros são creditados continuamente é realista desde que a constante de proporcionalidade na equação diferencial r e a taxa de juros j estejam relacionadas por $1 + j = e^r$ ou $r = \ln(1 + j)$.

Depois, para determinar o modelo que representasse a segunda situação-problema, supusemos que, além do investimento inicial S_0, pudéssemos fazer depósitos ou saques continuamente a uma taxa constante d (positivo no caso de depósito e negativo no caso de saques), então, nesse caso, o modelo que descreve esta situação é o do problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = rS + d \\ S(0) = S_0 \end{cases}$$

A equação é linear, e pode ser reescrita como

$$\frac{dS}{dt} - rS = d.$$

Para resolvê-la determina-se o fator integrante, que já tinha sido estudado no segundo encontro e que se encontra a seguir:

$$\mu(t) = e^{\int -rdt} = e^{-rt}.$$

Multiplicando-se a equação ($\frac{dS}{dt} - rS = d$) por $\mu(t) = e^{-rt}$ obtém-se

$$S(t) = ce^{rt} - \frac{d}{r}.$$

Substitui-se $t = 0$ e $S = S_0$ e obtém-se

$$S_0 = ce^{r \cdot 0} - \frac{d}{r} \Rightarrow c = S_0 + \frac{d}{r},$$

ou seja, a solução encontrada para o problema de valor inicial, foi:

$$S(t) = S_0 e^{rt} + \frac{d}{r}(e^{rt} - 1).$$

Em seguida compara-se este resultado com o caso em que além dos juros serem creditados em intervalos constantes, os depósitos ou saques de valor D são feitos em intervalos constantes. Neste caso, o saldo após n unidades de tempo é dado por

$$S(1) = S_0(1 + j) + D$$

$$S(2) = S_0(1 + j)^2 + D(1 + j) + D$$

$$\vdots \quad \vdots \qquad \vdots$$

$$S(n) = S_0(1 + j)^n + D((1 - j)^{n-1} + \cdots + 1)$$

$$S(n) = S_0(1 + j)^n + D\frac{(1+j)^n - 1}{j}.$$

Foi usada a soma de uma progressão geométrica. Substituindo-se t por n na solução do problema de valor inicial $S(t) = S_0 e^{rt} + \frac{d}{r}(e^{rt} - 1)$ e comparando-se com a equação $S(n) = S_0(1 + j)^n + D\frac{(1+j)^n - 1}{j}$, obtém-se que

$$S_0 e^{rn} + \frac{d}{r}(e^{rn} - 1) = S_0(1 + j)^n + D\frac{(1+j)^n - 1}{j},$$

ou seja, usando

$$1 + j = e^r \text{ ou } r = \ln(1 + j),$$

obtém-se

$$d = \frac{\ln(1+j)D}{j} \qquad \text{ou} \qquad D = \frac{(e^r - 1)d}{r}.$$

Assim, pode-se também, nesse caso, usar o modelo contínuo em que os depósitos ou saques são feitos continuamente desde que a taxa contínua de depósito d e os depósitos constantes D estejam relacionados pelas últimas duas expressões.

Percebe-se que o modelo que representa a primeira situação-problema já havia sido encontrado pelos alunos Hulk e Hugo, e também através de um raciocínio aritmético pelas alunas Juliana e Joana Dark, no entanto, nenhum dos alunos presentes conseguiu determinar o modelo que representasse a segunda situação-problema. Após a plenária, os participantes puderam comparar e perceber que o modelo matemático que representa a segunda situação é uma extensão do primeiro modelo.

Ao fim desse episódio, foi apresentada como atividade extraclasse: a leitura do texto “Modelagem Matemática: um método científico de pesquisa ou uma estratégia de ensino e aprendizagem?” de autoria de Bassanezi (2013)

7.6 EPISÓDIO – MISTURAS (6º Encontro 08/12/2015)

As experiências vivenciadas até o quinto encontro e já descritas, anteriormente, seriam suficientes para responder à pergunta desta pesquisa, pois, fazendo uma análise superficial de tudo que aconteceu durante esses encontros, foi possível identificar algumas habilidades e atitudes desenvolvidas pelos alunos, no decorrer do curso. Contudo, visando sempre a compartilhar, com o leitor, todas as experiências vividas no decorrer da realização desta pesquisa, o presente autor se propôs, juntamente com seu orientador, a apresentar todos os episódios, destacando o que mais chamou atenção na realização do curso.

O sexto encontro ocorreu no dia 08 de dezembro de 2015 com a presença de 6 alunos. Como sempre, de costume, esse encontro foi iniciado com uma rápida revisão sobre o que havia sido discutido no encontro anterior. Logo em seguida a essa revisão, foi discutido um texto referente a um dos capítulos do livro de Bassanezi (2013). O texto era intitulado “Modelagem Matemática: um método científico de pesquisa ou uma estratégia de ensino e aprendizagem?”

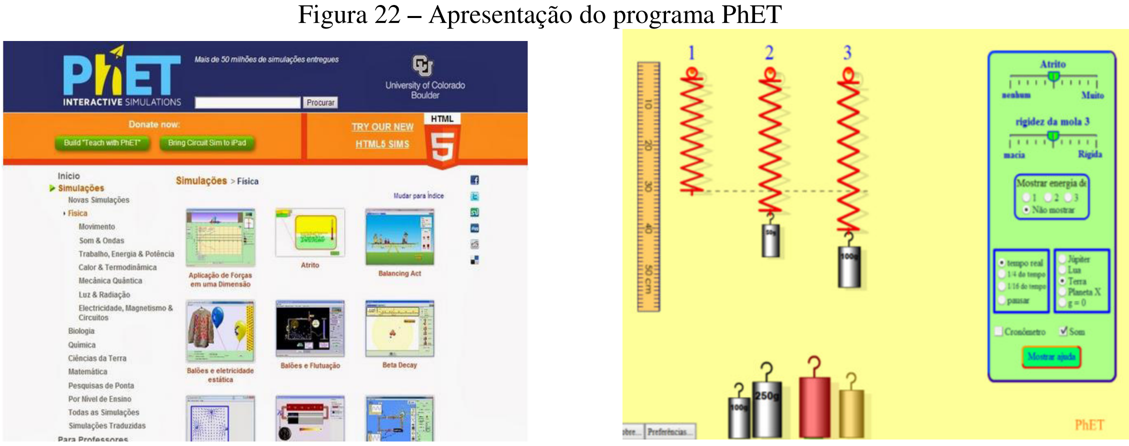
Nesse texto, os alunos puderam refletir sobre a Modelagem Matemática como a arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real.

Nesse texto, Bassanezi (2013) apresenta alguns conceitos das Equações Diferenciais Ordinárias e fala da importância dessas Equações enquanto representantes de vários fenômenos da realidade. Além disso, esse autor disse que a Modelagem de uma situação ou problema real deve seguir uma sequência de etapas, como: Experimentação; Abstração; Resolução; Validação e Modificação. Não é o objetivo definir aqui essas etapas, convida-se o leitor a rever as definições na fundamentação teórica.

Após ter sido feita uma discussão referente ao texto já citado, foram apresentados, para os alunos, alguns recursos que podem ser utilizados para o desenvolvimento de algumas atividades com Modelagem Matemática. Os recursos apresentados nesse encontro foram: PhET; Geogebra e Excel.

O PhET é um programa de simulações gratuito, que oferece, aos alunos e professores diversas simulações em Física e, em outras áreas. Nesse programa, o aluno pode interagir com os experimentos e é uma boa opção para quem quer aprender alguns conteúdos de Física de forma fácil. Além de ter sido definido o que é o PhET, foi visto, também de forma rápida, como trabalhar com esse programa e como ele pode auxiliar em algumas atividades de modelagem na Física e na Matemática, envolvendo alguns temas específicos dessas duas disciplinas. Segue, abaixo, uma imagem referente a uma das simulações contidas no programa supracitado e que foi utilizada como exemplo no decorrer do curso.

Figura 22 – Apresentação do programa PhET



Fonte: https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulations/category/physics/quantum-phenomena

Já o Geogebra, criado por Markus Hohenwarter, é um software gratuito de matemática dinâmica que reúne recursos de geometria, álgebra e cálculo. Por um lado, o Geogebra possui todas as ferramentas tradicionais de um software de geometria dinâmica: pontos; segmentos; retas e seções cônicas.

Durante o curso de extensão, em particular nesse sexto encontro, esse Software foi apresentado para os alunos como um recurso possível de ser utilizado em algumas atividades com modelagem. Alguns alunos do curso de matemática que participaram do curso de extensão, já tinham conhecimento da existência desse software. No entanto, afirmaram ter pouco domínio sobre ele, no que diz respeito a prática.

Esse software facilitou, para os alunos, a interpretação gráfica de alguns modelos matemáticos trabalhados no decorrer do curso. Além disso, os participantes puderam relacionar aspectos aritméticos, algébricos e geométricos referentes aos modelos matemáticos vistos durante os encontros.

Outro recurso apresentado durante esse sexto encontro foi o Excel. Esse recurso inclusive já havia sido utilizado no quinto encontro. Ele pode ter várias funções. Entre elas destacam-se: esboço de gráfico; possibilidade de encontrar o coeficiente de correlação entre as variáveis utilizadas em um modelo matemático, Possibilidade de fazer ajustes lineares, entre outras utilidades.

Entende-se que a apresentação de alguns recursos como os que já foram citados foram necessários para que os futuros professores pudessem aumentar o leque de recursos, que eles podem invocar durante uma atividade de Modelagem Matemática.

Esses recursos tecnológicos apresentados, além de ter facilitado o entendimento dos alunos referentemente aos conteúdos trabalhados, garantiu-lhes o conhecimento de mais uma ferramenta que eles poderão utilizar quando estiverem trabalhando com seus alunos.

Depois de ter apresentado alguns recursos tecnológicos e mostrado como podem ser utilizados em sala de aula de Matemática e Física, foi proposta para os alunos a seguinte situação-problema:

Situação-Problema
Um tanque com $1000l$ de água salgada com $15kg$ de sal dissolvido. Água pura entra no tanque a uma taxa de $10l/min$ e a mistura se escoa com a mesma taxa. Quanto de sal há no tanque após $20min$?

Nessa situação-problema, foi seguido o mesmo procedimento já realizado nos encontros anteriores. Os alunos foram divididos em duplas e foi feita uma leitura do problema. No entanto, não houve apresentação dos alunos na lousa pelo fato de eles não terem conseguido resolver a situação-problema proposta. Sendo assim, foi dado início à formulação de um modelo matemático que pudesse representar a situação proposta.

O pesquisador, para iniciar a formalização, levantou a seguinte suposição: um tanque contém uma mistura de água e sal com um volume inicial de V_0 litros e Q_0 gramas de sal e que uma solução salina seja bombeada para dentro do tanque a uma taxa de T_e litros por minuto, possuindo uma concentração de C_e gramas de sal por litro. Suponha-se que a solução bem misturada atinja uma taxa de T_s litros por minuto.

A taxa de variação da quantidade de sal do tanque é igual à taxa com que entra sal no tanque menos a taxa com que sai sal do tanque.

A taxa com que entra sal no tanque é igual à taxa com que entra a mistura, T_e, vezes a concentração de entrada, C_e. E a taxa com que sai do tanque é igual à taxa com que sai a mistura do tanque, T_s, vezes a concentração de sal que sai do tanque, C_s. Como a solução é bem misturada, essa concentração é igual à concentração de sal do tanque, ou seja,

$$C_s(t) = \frac{Q(t)}{V(t)}.$$

Como o volume no tanque, $V(t)$, é igual ao volume inicial, V_0, somado ao volume que entra no tanque menos o volume que sai do tanque, então

$$V(t) = V_0 + T_e t - T_s t = V_0 + (T_e - T_s)t.$$

Assim, a quantidade de sal no tanque, $Q(t)$, é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dQ}{dt} = T_e C_e - T_s \frac{Q}{(T_e - T_s)t} \\ Q(0) = Q_0 \end{cases}$$

Depois de esse modelo matemático ter sido apresentado, pelo pesquisador, para os alunos, foi solicitado que eles retomassem a situação-problema proposta e tentassem resolvê-la.

Após analisarem e seguirem o mesmo procedimento percorrido no modelo já apresentado, os alunos conseguiram, depois de algumas tentativas, encontrar a solução apresentada abaixo.

Primeiramente, levaram em consideração uma das informações contidas no modelo apresentado segundo as quais a taxa de variação da quantidade de sal do tanque é igual à taxa com que entra sal no tanque menos a taxa com que sai sal do tanque, ou seja,

$$\frac{dQ}{dt} = T_e - T_s.$$

Em seguida, ainda baseados nas informações já formalizadas no modelo apresentado, chagaram a determinar a taxa de entrada e a taxa de saída.

$$T_e = 0 \times 10 = 0$$

$$T_s = \frac{Q(T)}{1000} \times 10 \Rightarrow T_s = \frac{Q(t)}{100}.$$

Depois, substituíram T_e e T_s na expressão $\frac{dQ}{dt} = T_e - T_s$ e obtiveram,

$$\frac{dQ}{dt} = 0 - \frac{Q(t)}{100} \Rightarrow \frac{dQ}{dt} = -\frac{Q(t)}{100}.$$

Em seguida, fizeram uma separação das variáveis e encontraram a expressão a seguir.

$$\frac{dQ}{Q(t)} = -\frac{dt}{100} \Rightarrow \int \frac{dQ}{Q(t)} = \int -\frac{dt}{100} \Rightarrow \ln|Q| = -\frac{1}{100}\int dt$$

$$\ln|Q| = -\frac{t}{10} + c \quad \text{Solução Geral.}$$

Para determinar o valor da constante c, aplicaram o valor inicial contida no enunciado da situação problema $Q(0) = 15$.

$$Q(0) = 15 \Rightarrow \ln|15| = -\frac{0}{10} + c \Rightarrow c = \ln|15|.$$

Logo após determinarem a constante c, aplicaram na solução geral, obtendo assim,

$$\ln|Q| = -\frac{t}{10} + \ln|15|.$$

Aplicando a exponencial

$$e^{\ln|y|} = e^{\frac{t}{100}} + e^{\ln|15|} \Rightarrow y = 15e^{\frac{-t}{100}}.$$

Para saberem, quanto havia de sal após 20 minutos, fizeram

$$y = 15e^{-\frac{20}{100}} \Rightarrow y = 15e^{-0,2}$$

$$y = 12{,}3 \text{ Quilograma de sal.}$$

Como o leitor já deve ter percebido na situação-problema apresentada, a taxa com que sai água do tanque é igual à taxa com que entra água nesse mesmo tanque. Nesse sentido, foi trabalhada outra situação-problema que considerava a taxa de entrada e saída com vasões diferentes. Nesse sentido, o pesquisador propôs uma nova situação-problema como uma extensão ao modelo anterior.

Situação-Problema

Num tanque há 100 litros de salmoura contendo 30 gramas de sal em solução. A água (sem sal) entra no tanque a razão de 6 litros por minuto e a mistura se escoa a razão de 4 litros por minuto, conservando-se a concentração uniforme por agitação. Determine qual a concentração de sal no tanque ao fim de 50 minutos.

Apesar de existir uma diferença no enunciado das duas situações-problema, os alunos conseguiram perceber que, para resolver a segunda situação, bastava seguir o mesmo raciocínio utilizado na formalização do modelo que foi formalizado. Sendo assim, foi encontrada a seguinte situação.

O problema pode ser modelado pelo seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dQ}{dt} = -4\dfrac{Q}{100+2t} \\ Q(0) = 30 \end{cases}$$

A equação é linear e pode ser escrita como

$$\frac{dQ}{dt} + 4\frac{Q}{100+2t} = 0.$$

Um fator integrante é neste caso

$$\mu(t) = e^{\int \frac{4}{100+2t}dt} = e^{2\ln(100+2t)} = e^{\ln(100+2t)^2} = (100+2t)^2.$$

Multiplicando-se a equação por $\mu(t) = e^{\int \frac{4}{100+2t}dt} = (100+2t)^2$ obtém-se

$$\frac{d}{dt}((100+2t)^2 Q) = 0.$$

Integrando-se, obtém-se

$$((100+2t)^2 Q) = c,$$

ou seja,

$$Q(t) = \frac{c}{(100+2t)^2}.$$

Substituindo $t = 0$ e $Q = 30$:

$$c = 30 \cdot 100^2 = 3 \cdot 10^5.$$

Substituindo o valor de c encontrado:

$$Q(t) = \frac{3 \cdot 10^5}{(100+2t)^2}.$$

A concentração é o quociente da quantidade de sal pelo volume que é igual a $V(t) = 100 + 2t$. Assim

$$c(t) = \frac{3 \cdot 10^5}{(100+2t)^3}.$$

E, após 50 minutos

$$c(50) = \frac{3 \cdot 10^5}{(200)^3} = \frac{3}{80} = 0{,}0375 \text{ Gramas / litro.}$$

7.7 EPISÓDIO – SISTEMA MOLAR (7º Encontro 15/12/2015)

O sétimo encontro ocorreu no dia 15 de dezembro de 2015, no qual estavam presentes 8 alunos. Inicialmente, fomentou-se uma discussão referente a algumas perspectivas da Modelagem Matemática na sala de aula de Física e Matemática. Além dessa discussão inicial, o aluno Henrique do curso de Física, apresentou, para os demais participantes, uma experiência que havia vivenciado como professor de matemática da escola onde atualmente ele exerce a função de docente (Escola Estadual Professora Maria Bernadete Marins Brito), localizada no município de Salgueiro/PE.

No relato de Henrique, ele afirmou que o conteúdo que havia trabalhado com seus alunos fora funções trigonométricas. Ele desenvolveu uma atividade em que os alunos tinham que calcular distâncias inacessíveis utilizando um teodolito caseiro construído em sala de aula e os conhecimentos prévios referentes às funções trigonométricas. Antes do desenvolvimento da atividade, segundo Henrique, ele apresentou três perguntas para seus alunos: como você faria para encontrar a altura de um prédio? Qual a importância da matemática em sua vida? E para que serve a trigonometria?

Após ter relatado como introduziu a atividade, Henrique apresentou algumas respostas dadas por seus alunos para as perguntas que ele havia feito em sala de aula. Será exposta, a seguir, a fala de Henrique para explicar a resposta dada por um de seus alunos.

> Aí, uma das respostas que eu vou ler aqui foi mais ou menos assim: “apenas calcularia usando a base vezes a altura”. Aí a segunda resposta “acho que é essencial para a vida, pois quase todos os dias usamos a matemática”. Por essas respostas já dá pra ver que eles sabem que a matemática é importante, mas não estudam, porque se estudassem saberiam que era pra calcular a altura do prédio e não a área de um retângulo. E a outra resposta foi assim, “acho que é para calcular a medida de um triângulo”.

O Aluno Henrique continuou a relatar sua experiência falando das dificuldades que teve para trabalhar algo diferente em sala de aula; segundo ele, uma das dificuldades foi o fato de os alunos não terem levado, para a sala de aula, os materiais solicitados para a produção do teodolito.

Na fala de Henrique, ele disse: Quando eu fiz essas perguntas para eles, alguns disseram “aff, Matemática em minha vida não serve para nada, só para me dar raiva.” Eles falavam assim em voz alta, mas, na hora de escrever no papel eles tiveram um pouco mais de cuidado.

Segundo Henrique, alguns dos alunos foram sinceros e disseram que não sabiam calcular a altura de um prédio, muito menos a importância da matemática e da trigonometria em suas vidas.

Quando questionado sobre o porquê que ele havia feito essas perguntas para seus alunos, ele respondeu que as perguntas foram necessárias porque um de seus objetivos era fazer outras perguntas depois da realização da atividade e comparar as respostas dadas pelos alunos, para verificar se houve mudança de atitudes no que diz respeito às concepções sobre a matemática e a trigonometria.

Para ser uma das primeiras tentativas de Henrique a fazer algo diferente em sua sala de aula, entende-se que ele foi muito bem. No entanto, pode-se melhorar ao longo da realização de outras experiências.

Henrique afirmou ter gostado de ter desenvolvido essa atividade. Ele relatou que, comparando as aulas que ele ministrava nessa turma e as aulas ministradas utilizando a modelagem, é perceptível um pouco mais de participação e interação por parte dos alunos. No entanto, Henrique comentou que fazer algo diferente demanda um pouco mais de trabalho, mas, segundo ele, vale a pena.

Fazendo uma análise prévia da atividade desenvolvida por Henrique, percebe-se que a característica da atividade não corresponde às características de uma atividade de Modelagem Matemática, contudo, é perceptível que Henrique apresentasse algumas atitudes e habilidades no desenvolvimento da atividade já mencionada.

Logo após Henrique ter relatado sua experiência, deu-se continuidade ao sétimo encontro com a discussão referente às equações diferenciais ordinárias de segunda ordem. Nesse encontro, foi definido o que é uma equação diferencial de segunda ordem, como encontrar as soluções de tais equações e alguns teoremas referentes ao assunto.

Logo em seguida, foi apresentada uma situação-problema com a finalidade de explorar os conhecimentos prévios dos alunos referentes às equações diferenciais ordinárias de segunda ordem.

Situação-Problema

Considere um objeto de $10g$ suspenso por uma mola presa a um suporte fixo. Considere a aceleração da gravidade dada por $g = 981cm/seg^2$ e a constante da mola dada por $k = 1000$. Nessas condições, determine a expressão matemática que represente o deslocamento do objeto.

Depois de várias tentativas para resolver a situação-problema proposta, a maioria dos alunos presentes, afirmou não saber resolvê-la. Sendo assim, foi formulado um modelo clássico da matemática que representasse a situação presente no contexto do problema.

O modelo que foi formalizado é conhecido como sistema de massa molar, que parte do princípio segundo o qual uma mola pode sofrer deformações como consequência da aplicação de uma força e, devido a essa força, a mola responde com uma força contrária que tende a restaurar o estado de equilíbrio do sistema. Dentro de certos limites, é possível descrever-se o comportamento dessas forças de restituição baseado na lei de Hooke:

$$\vec{F} = -k\vec{x}.$$

Na fórmula supracitada, F é a força elástica de restituição exercida pela mola, k é a constante elástica característica da mola e x é o deslocamento (distensão ou compressão) sofrido pela mola.

Para determinar o modelo matemático que representa o deslocamento da mola, os alunos foram informados que precisariam conhecer a segunda lei de Newton.

$$F = m \cdot a = m\frac{d^2s(t)}{dt}.$$

Depois de os alunos terem lembrado o que diz a segunda lei de Newton, reescreveu-se a lei de Hooke da seguinte forma:

$$F_{\text{Tensão}} = -kx$$

$$mx'' = -kx$$

$$\mathbf{x}'' = \frac{\mathbf{-k}}{\mathbf{m}}\mathbf{x}, \text{ EDO de 2ª Ordem.}$$

Após a formalização desse modelo, os alunos seguiram o mesmo procedimento para chegarem à solução da situação problema que havia sido proposta. Dessa forma, chegaram à seguinte solução:

Pela segunda lei de Newton, tem-se que a resultante das forças que atuam sobre o objeto é igual a sua massa vezes sua aceleração e, assim, tem-se que:

$$F = m \cdot a = \text{peso} - \text{tensão} = mg - kx \text{ ou ainda } m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - kx.$$

Substituindo os dados do enunciado do problema, obtiveram.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 981 - 100x,$$

que é a equação diferencial que modela o deslocamento do objeto.

Ao todo, foram realizados 10 encontros, com duração de 4h em cada um, perfazendo então 40h. Contudo, acredita-se, que os sete primeiros encontros descritos anteriormente já são o suficiente para responder à pergunta desta pesquisa.

Nos três encontros seguintes, as atividades giraram em torno das Equações Diferenciais lineares de segunda ordem.

O fato de ter trabalhado com os estudantes (futuros professores) participantes do curso de extensão, a Modelagem Matemática – utilizando conteúdos de nível superior, como por exemplo, as Equações Diferenciais Ordinárias – não impossibilitou, de forma alguma, a efetivação de um dos objetivos principais do curso, que foi refletir e discutir a prática de Modelagem para o ensino Básico de Física e Matemática.

Algumas das situações-problema trabalhadas durante o curso de extensão tinham como objetivo explorar o conteúdo das Equações Diferenciais Ordinárias. No entanto, as situações exigiam dos alunos, além do conhecimento prévio das Equações Diferenciais Ordinárias o conhecimento de alguns conteúdos básicos da matemática. Nessas condições, visando às dificuldades dos alunos referentemente ao conteúdo “Equações Diferenciais Ordinárias”, as situações-problema foram selecionadas de tal forma que as soluções pudessem ser encontradas tanto por meio das Equações Diferenciais Ordinárias como também por meio de conteúdos básicos da matemática. Os conteúdos básicos necessários para encontrar as soluções serviram como escada para introduzir os conceitos das Equações Diferenciais

Ao trabalhar com as Equações Diferenciais Ordinárias, os alunos tiveram a oportunidade de reforçarem os conhecimentos sobre vários conteúdos de nível Básico, como: Regra de Três; Proporcionalidade; Função Exponencial; Logaritmo; Progressão Aritmética; Progressão Geométrica; Limites; Derivadas; Integrais entre outros. Na medida em que reforçavam o conhecimento dos conteúdos supracitados, adquiriam um conhecimento novo (Equações Diferenciais Ordinárias).

8 ANÁLISE GERAL DOS DADOS

No capítulo 7, dedicado à descrição dos episódios, além de terem sido apresentadas as ocorrências consideradas mais importantes pelo presente autor, durante a realização do curso de extensão, foi feita também uma análise inicial dos dados da pesquisa. Aqui, neste capítulo apresenta-se uma análise mais geral com vistas a explicitar, para o leitor, como os dados coletados podem responder à pergunta desta pesquisa.

Compreendendo o conhecimento como processo dinâmico e contínuo, concebe-se que todo produto final da análise de uma pesquisa assume um caráter de incompletude. Por isso, não serão tomadas conclusões definitivas e nem generalizações, mas, aproximações que subsidiem as discussões sobre a Resolução de Problemas no contexto da Modelagem Matemática. Nesse sentido, discorrem-se, nos próximos parágrafos, sobre algumas considerações a respeito da análise realizada pelo pesquisador ao longo desta pesquisa.

Quando um pesquisador se preocupa com a qualidade da pesquisa que está desenvolvendo e com a transcrição dela para os leitores, fazer a análise dos dados torna-se uma tarefa difícil. As dificuldades encontradas, para fazer a análise dos dados coletados durante a realização da pesquisa de campo, consistiram na tentativa de manter um olhar minucioso e tomar os devidos cuidados para que não seja adotada uma postura simplista diante dos fatos. Nessa direção, busca-se neste capítulo adotar uma postura que seja a mais realista possível, tentando transcrever pontos positivos e negativos. Os dados da pesquisa são analisados à luz da literatura estudada. Dessa forma, a análise traz compreensões complementares àquelas elaboradas inicialmente no capítulo referente às descrições dos episódios.

O trabalho de análise dos dados foi realizado quase que de forma concomitante com a coleta dos dados, ou seja, após a realização de cada encontro no curso de extensão, sempre era feita a análise dos vídeos que haviam sido filmados, do material escrito pelos participantes das falas dos alunos, seu comportamento, etc.

Fazer a análise de forma concomitante à colheita dos dados foi uma experiência que possibilitou, ao presente autor, ao término de cada encontro, fazer uma auto-avaliação de sua postura como professor pesquisador, das ações realizadas em sala de aula e da condução das atividades.

> A análise de dados é um processo de busca de organização sistemática de transcrições de entrevistas, de notas de campo e de outros materiais que foram sendo acumulados, com o objetivo de aumentar a sua própria compreensão desses mesmos

> materiais e de lhe permitir apresentar aos outros aquilo que encontrou. A análise envolve o trabalho com os dados, a sua organização, divisão em unidades manipuláveis, síntese, procura de padrões, descoberta dos aspectos importantes e do que deve ser aprendido e a decisão sobre o que vai ser transmitido aos outros. (BOGDAN, BIKLEN, 1994, p. 205)

Sendo assim, neste capítulo, aprofunda-se a análise para responder à pergunta norteadora desta pesquisa: Como os estudantes de Licenciatura em Física e Matemática podem desenvolver suas habilidades e atitudes para a prática da sala de aula no contexto da Modelagem Matemática ao longo de um curso de extensão sobre Equações Diferenciais Ordinárias, utilizando-se a Metodologia Resolução de Problema?

8.1 SITUANDO O CENÁRIO DA PESQUISA

Conforme já foi mencionado no capítulo anterior, o cenário onde ocorreu esta investigação foi o Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia do Sertão Pernambucano, Campus de Salgueiro/PE.

Durante a divulgação do curso de extensão, feita nas turmas de Física, apenas dez alunos demonstraram interesse em participar. Essa quantidade de alunos era razoável para o desenvolvimento do curso, no entanto, pensando que alguns poderiam desistir, o presente autor também fez a divulgação do curso na Faculdade de Ciências Humanas do Sertão Central – FACHUSC (Instituição Privada). Na FACHUSC, não há Licenciatura em Física, mas a Instituição oferece um curso de Licenciatura em matemática.

Nessas condições, o curso de extensão – oferecido durante a pesquisa de campo – contemplou alunos da Licenciatura em Física e Matemática das duas instituições supramencionadas.

Sabe-se que a Matemática trabalhada no curso de Licenciatura em Matemática e em Licenciatura em Física tem finalidades diferentes. Entretanto, o objetivo principal foi mostrar, para os alunos – a partir do trabalho com as Equações Diferenciais Ordinárias – uma possibilidade de trabalhar com a Modelagem em sala de aula.

8.2 CARACTERIZANDO OS SUJEITOS DA PESQUISA

Os Sujeitos desta pesquisa foram 16 alunos, sendo 7 do curso de Licenciatura em Física do IF Sertão campus de Salgueiro, 8 do curso de Licenciatura em Matemática da Faculdade de Ciências Humanas do Sertão Central – FACHUSC (Instituição Privada) e um professor substituto do IF Sertão campus de Salgueiro. Desses participantes, alguns residiam na zona rural, outros em distritos ou cidades próximas a Salgueiro/PE. Dessa forma, o acesso ao Instituto Federal se deu por meio de transportes das prefeituras de seus respectivos municípios. Dos 16 alunos que compareceram ao primeiro encontro, apenas cinco residiam em Salgueiro/PE. Desses 16 participantes, seis eram do sexo feminino.

O acesso dos alunos ao curso de Licenciatura em Física do IF Sertão-PE, Campus de Salgueiro, se dá por meio do Sistema de Seleção Unificada (Sisu) do Ministério da Educação (MEC), com base na nota obtida pelos candidatos no Exame Nacional do Ensino Médio (Enem). Já os alunos de Licenciatura em Matemática da Faculdade de Ciências Humanas do Sertão Central, ingressaram no curso por meio de vestibular promovido pela própria instituição.

Ao longo do curso, alguns desistiram e apenas 10 conseguiram concluir o curso. Dos dez alunos que concluíram o curso, 5 eram da Licenciatura em matemática da Faculdade de Ciências Humanas do Sertão Central (FACHUSC), 4 eram alunos do curso de Licenciatura em Física do IF Sertão PE campus de Salgueiro e 1 era professor substituto do IF Sertão PE campus Salgueiro.

O presente autor, na condição de professor pesquisador, buscou identificar o porquê de alguns alunos terem desistido do curso. Ao buscar os motivos que levaram à evasão de alguns alunos, foi constatado que uma das causas deveu-se ao fato de o curso ter sido oferecido de forma simultânea com às disciplinas regulares do curso de Física. Talvez o fato de o curso ter sido oferecido em final de semestre tenha provocado algumas dessas desistências, uma vez que, nesse período, os alunos ficam sobrecarregados. Também, outro fator que influenciou a pouca procura pelo curso, foi a greve dos professores.

Mesmo com essas desistências, entende-se que o número de participantes que concluíram o curso foi o ideal para a realização desta pesquisa, uma vez que o pesquisador pôde acompanhar de perto a evolução de cada um dos participantes.

É bom destacar que, durante a realização do curso, dificilmente compareciam os dez alunos que chegaram a concluí-lo, alguns justificavam as faltas, mediante a apresentação de atestados médicos, outros recorriam a outras justificativas, mas, o número mínimo de participantes por encontro nunca foi inferior a seis alunos. A maioria dos alunos que tiveram 100% de presença, era do curso de Licenciatura em matemática da (FACHUSC).

Os alunos da FACHUSC estudavam no turno noturno e todos residiam em cidades e distritos próximos de Salgueiro/PE. Nesse sentido, foi perceptível o esforço desses alunos para participarem do curso, uma vez que tinham que viajar pela manhã para participarem do curso que era realizado no período da tarde. Após o término de cada encontro, os alunos iam para o curso de Licenciatura em Matemática que ocorre no período noturno. Esse esforço era feito uma vez por semana, especificamente nas terças-feiras (que era o dia de realização do curso de extensão). Apesar das dificuldades, esses alunos demonstraram muito comprometimento com o curso.

Fazendo uma comparação entre os alunos da Licenciatura em Física e da Licenciatura em Matemática, foi possível identificar que os alunos de Licenciatura em Matemática apresentaram maiores dificuldades no entendimento do conteúdo Equações Diferenciais Ordinárias. Entretanto, essas dificuldades não impossibilitaram a participação desses alunos nas atividades desenvolvidas, pois as situações-problema apresentadas também poderiam ser resolvidas por meio de conteúdos básicos da Matemática. Podemos tomar, como exemplo, as situações-problema referentes à Dinâmica populacional, Resfriamento de um corpo e juros.

Foi percebido que, quanto mais próximo da realidade fosse o contexto da situação-problema trabalhada, mais os alunos demonstravam sua criatividade, motivação e participação ativa.

É bom destacar que as dificuldades não foram apresentadas em todas as situações-problema, pois, em algumas situações esses alunos sobressaiam muito bem, como por exemplo, na situação-problema referente aos temas Dinâmica Populacional e Juros.

8.3 ANÁLISE PROVENIENTE DOS TEXTOS DISCUTIDOS

Embora as discussões dos textos não tenham sido 100% significativas, pelo fato de alguns dos alunos não terem feito as leituras, foi constatado, através de algumas perguntas feitas em sala de aula, nos últimos encontros, que alguns dos participantes compreenderam o que é a Modelagem Matemática.

Para identificar se realmente os alunos haviam compreendido o que é modelagem, primeiramente, foram comparadas as respostas dadas por eles nos primeiros e nos últimos encontros. Nos primeiros encontros, muitos alunos afirmaram não terem conhecimento sobre Modelagem Matemática, exceto uma aluna da Licenciatura em Matemática. Nos últimos encontros, foi percebido que houve uma evolução e alguns alunos já demonstravam entender o que é Modelagem Matemática e como conduzir uma atividade utilizando modelos clássicos da Matemática.

Quando um dos alunos teve a atitude de aplicar, pela primeira vez Modelagem Matemática na prática da sala de aula, em uma escola do município de Salgueiro/PE, ele, embora tenha enfrentado algumas dificuldades para colocar em prática o que havia visto na teoria durante o curso de extensão, conseguiu demonstrar algumas habilidades referentes à condução da atividade. O aluno Henrique surpreendeu, pelo fato de, além de ter aplicado a modelagem em suas aulas, buscou identificar as concepções de seus alunos em relação a alguns conteúdos da matemática, antes e depois de iniciar os trabalhos. Quando Henrique apresentou sua experiência para os colegas do curso de extensão foi possível perceber que ele utilizou os conceitos aprendidos para desenvolver suas atividades a partir de situações-problema.

Os textos trabalhados durante o curso tiveram, como objetivo, permitir que os estudantes entendessem a Modelagem. Já na aplicação das situações-problema, a finalidade foi permitir que os alunos aprendessem a modelar, enquanto resolviam problema.

Ao confrontar a temática estudada no referencial teórico, em que diversos pesquisadores apresentaram Modelagem Matemática como uma proposta promissora para a formação de professores de matemática (BARBOSA, 1999, 2002; BASSANEZI, 2002; OLIVEIRA, 2010, 2010; ALMEIDA, 2004; DIAS, 2005; entre outros), o pesquisador, olhando para os encontros e focando os textos estudados sobre Modelagem Matemática, que tem sido apresentado na literatura como uma eficiente forma de contextualização dos conceitos matemáticos escolares e possibilidade de o aluno vivenciar a experiência nova, percebeu que, isto não é bem assim, pois, o uso da modelagem como método de ensino de matemática ainda apresenta questões a serem esclarecidas do ponto de vista da Educação Matemática.

A partir do momento em que os alunos iam tomando conhecimento da Modelagem Matemática por meio dos textos discutidos, eles iam apresentando suas primeiras impressões. Muitos dos alunos acharam a Modelagem um caminho complicado de se trabalhar em sala de aula. Como justificativa, alguns deles diziam que esse tipo de trabalho demanda muito tempo para a preparação e realização das aulas, outros, apesar de acharem um trabalho que exige do professor mais dedicação, afirmavam ter gostado. Um dos alunos tentou trabalhar pela primeira vez com a Modelagem em sala de aula e, apesar da insegurança, esse aluno ao compartilhar sua experiência com os colegas durante o curso de extensão, informou que sentiu um maior envolvimento e participação de seus alunos em sala de aula.

8.4 ANÁLISE PROVENIENTE DAS ATIVIDADES DESENVOLVIDAS

As situações-problema selecionadas e trabalhadas durante a realização do curso de extensão, demandavam conhecimento prévio por parte dos alunos não somente das Equações Diferenciais Ordinárias, mas, também, de alguns conteúdos de nível básico. Nesse sentido, embora alguns dos alunos não tivessem ainda o conhecimento das Equações Diferenciais Ordinárias, eles demonstraram interesse e participação ativa nas atividades desenvolvidas, pois, algumas situações-problema os possibilitavam usar o conhecimento de nível básico para chegar à solução esperada. Podemos citar, como exemplo, a primeira situação-problema trabalhada, que exigia dos alunos um conhecimento prévio de alguns conteúdos básicos, como por exemplo, funções, função exponencial, função logarítmica, porcentagens, progressões geométricas, derivadas, integrais e limites.

Nessas condições, o conhecimento de alguns conteúdos básicos da matemática por parte dos alunos serviu como escada para introduzir os conceitos das Equações Diferenciais Ordinárias. Dessa forma, as orientações de Onuchic e Allevato (2011) – apresentadas na fundamentação teórica deste trabalho – foram atendidas, pois o pesquisador teve os devidos cuidados para apresentar situações-problema que possibilitassem, aos alunos, partirem de um conhecimento prévio já adquirido, para um conhecimento novo.

As situações-problema trabalhadas, no decorrer do curso de extensão, possibilitou aos alunos desenvolverem algumas habilidades referentes ao “saber modelar”. Dentre as habilidades desenvolvidas, destacam-se:

a) Saber utilizar técnicas conhecidas em situações-problema diferentes.

Essa habilidade foi detectada a todo momento no decorrer da busca da solução das situações-problema apresentadas. Um exemplo é perceptível se compararmos as situações-problema referentes ao tema dinâmico populacional e juros. Nessas situações, foram empregados raciocínios parecidos para solucionar dois problemas distintos.

Sempre que era apresentada uma situação-problema nova, os alunos inicialmente analisavam se poderiam utilizar procedimentos já utilizados em outras situações, como, por exemplo, criação de tabela para organizar os dados, esboço de gráfico, utilização de algum software como Geogebra, planilha Excel etc.

b) Improvisação de novas técnicas quando as existentes são inadequadas.

A segunda habilidade detectada a partir da participação dos alunos foi a improvisação de novas técnicas quando percebiam que as que tinham em mente eram inadequadas para a situação-problema que estavam trabalhando. Em alguns momentos, quando os alunos não conseguiam resolver a situação-problema, o pesquisador tinha que intervir, com a apresentação de outras situações-problema, o que Onuchic e Allevatto (2011) chamam de problemas secundários.

Para analisar a aprendizagem na modelagem e a complementação com a resolução de problemas, foram desenvolvidas 14 situações-problema, nas quais a modelagem nos encontros desempenhou funções com objetivos didáticos diferentes.

Outra habilidade adquirida pelos participantes foi a organização dos dados das situações-problema. Em cada situação-problema, percebeu-se que alguns alunos organizavam cuidadosamente os dados referentes a cada situação. Isso ficou perceptível principalmente nas situações onde se utilizavam experimentos.

A perspectiva de formação de professores, colocada em prática pelo presente autor, durante a realização do curso de extensão, sobre equações diferenciais ordinárias no contexto da Modelagem Matemática, revelaram algumas habilidade e atitudes para a prática de sala de aula de Física e Matemática de alguns dos alunos participantes do curso.

No entanto, é preciso entender que não é certo que essas habilidades e atitudes sejam desenvolvidas em todos os alunos. No caso das situações- problema, trabalhadas no decorrer do curso, pode-se fazer algumas considerações:

- Talvez os alunos estivessem interessados, no fundo pelo certificado que iriam receber no final do curso que serviria para aumentar seu currículo;
- Alguns devem ter gostado dos experimentos realizados em sala de aula; outros gostaram mais dos textos discutidos;
- Alguns talvez tenham gostado dos modelos clássicos apresentados e dos recursos tecnológicos utilizados para a interpretação desses modelos;
- Outros devem ter achado desagradável a forma como foram conduzidas as atividades;

- Outros (quem sabe?) só pensavam em voltar para o método tradicional de se trabalhar com as equações diferenciais;

Os futuros professores podem ter tido experiências muito diferentes. Nada garante que os futuros professores efetivamente se colocaram na posição de questionar o andamento do curso.

Para fazer a análise dos dados coletados durante a realização desta pesquisa, tentar-se-ia ser o menos tendencioso possível. Para isso, partiu-se do princípio de que não se deve inclinar de forma tendenciosa para os aspectos teóricos e práticos referentes à área trabalhada nesta dissertação, pois, entende-se que há certos tipos de favorecimento, que ocorrem, primeiramente, no processamento dos dados empíricos, e se multiplicam depois nas análises teóricas que tomam esses dados como base para a realização da prática.

Durante toda a realização do curso, tentou-se fazer com que os participantes trabalhassem em duplas ou em grupos na construção de um novo conhecimento. Nesse sentido, com essa perspectiva de formação, percebeu-se que, ao término de cada encontro, algumas atitudes eram despertadas em alguns dos alunos:

a) Alguns alunos tiveram a atitude de aplicarem a Modelagem Matemática em suas respectivas salas de aulas;
b) Os alunos que não exerciam ainda a função docente estão concluindo artigos referentes à Modelagem Matemática, o que com certeza aumentará o conhecimento sobre essa metodologia;
c) Outros estão utilizando a modelagem em seu Trabalho de Conclusão de Curso (TCC).

Dois dos participantes do curso convidaram o presente autor, no decorrer do curso para ser seu orientador na produção de um projeto de TCC sobre Modelagem Matemática.

No decorrer do curso de extensão, foram trabalhadas várias situações-problema. Fazendo uma reflexão após a realização do curso, percebe-se que, dentre as situações apresentadas, algumas aproximavam-se mais da realidade que outras.

Das perguntas apresentadas para os participantes, uma exigia que eles apresentassem alguns momentos que mais lhe chamaram a atenção durante a realização do curso. As respostas dadas pelos alunos encontram-se no anexo desta dissertação.

Alguns dos alunos informaram que os momentos que mais chamaram a atenção foi o episódio em que foram trabalhadas as situações-problema referentes à dinâmica populacional e o resfriamento de Newton, pelo fato de serem situações que mais se aproximam da realidade. Isto vem confirmar, mais uma vez, que os estudantes compreendem aquilo que tem significado para eles. Sendo assim, conclui-se que, para que o conhecimento seja significativo, ele deve ser construído a partir de situações reais vivenciadas pelos sujeitos, considerando seu meio social e cultural, isto se dá justamente no contexto da Modelagem Matemática.

Percebeu-se que os futuros professores, quando têm a oportunidade de se expressar e de participar ativamente nas atividades desenvolvidas em sala de aula, desenvolverão atitudes e habilidades para quando vierem a atuar como docentes.

Não foi possível analisar todos os alunos atuando na prática, pelo fato de apenas alguns já exercerem a função docente. Contudo, aqueles que ainda não atuavam como professores, foram questionados a todo o momento, sobre como trabalhariam determinados temas da realidade utilizando os conteúdos de Física e de Matemática. Mesmo com esses alunos que ainda não estejam atuando em sala de aula, foi possível identificar, a partir de suas falas e dedicação, alguns indícios de habilidades e atitudes que futuramente serão colocadas em prática.

8.5 ANÁLISE PROVENIENTE DAS FILMAGENS

As filmagens foram de extrema importância não somente para a análise dos dados, mas, também, para auxiliar o presente autor a fazer uma auto avaliação de seu comportamento em sala de aula, sua postura como professor para, a partir daí, buscar melhoras para aperfeiçoar suas práticas pedagógicas.

Ao finalizar esta dissertação, considera-se que, a partir da investigação realizada, a Modelagem Matemática favoreceu o desenvolvimento, nos futuros professores, de atitudes e habilidades em resolução de problemas.

O presente autor, fazendo uma comparação entre as duas formas de agir em sala de aula, foi notando que o uso da resolução de problemas no contexto da Modelagem Matemática possibilitou, aos alunos, momentos de criatividade, de participação ativa, no processo de construção de um novo conhecimento. Isto não ocorria quando as aulas eram ministradas segundo padrões tradicionais.

A intenção aqui não foi condenar o ensino tradicional das equações diferenciais, mas apresentar outra proposta que pode ser adotada em alguns momentos de um curso dessa natureza e que pode implicar na facilidade de aprendizagem dos alunos.

Em todas as aulas do curso de extensão, foi apresentada uma situação-problema para os alunos, no entanto, entende-se que, em alguns momentos de um determinado curso, seja de

Equações Diferenciais ou não, a lousa e o pincel são essenciais para formalizar, com todo o rigor matemático, o conteúdo trabalhado.

Um curso de 40h é pouco para que se possa desenvolver todas as habilidades e atitudes pretendidas. A pesquisa identificou que houve mudanças significativas nas atitudes e habilidades dos estudantes participantes, porém, não se pode garantir que essas mudanças sejam instantâneas, pois podem demandar muito trabalho para o professor pesquisador. Portanto, o futuro professor que desejar trabalhar com Modelagem, deve ter paciência e persistência, pois as respostas não são imediatas, elas acontecem com o tempo e com o aumento da experiência. Isso ficou claro em quase todos os encontros.

9 CONSIDERAÇÕES FINAIS

"De tudo ficaram três coisas,
a certeza de que estamos sempre começando;
a certeza de que é preciso continuar;
a certeza que podemos ser interrompidos
antes de terminar.
Fazer da interrupção um novo caminho;
fazer da queda um passo de dança;
do medo, uma escada;
do sonho; uma ponte;
e da procura um encontro."

(Fernando Pessoa)

Ser membro de uma comunidade de pesquisa, segundo Romberg (2007), implica uma responsabilidade de informar, aos outros membros, sobre a investigação terminada e buscar seus comentários e críticas. Seguindo essas orientações, após os dados terem sido coletados e analisados, os resultados iniciais foram divulgados por meio de seminários, na instituição onde foi desenvolvida a pesquisa, no exame de qualificação desta pesquisa, e em um seminário obrigatório realizado no programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da UEPB.

O último encontro do curso de extensão foi dedicado a apresentar, para os participantes do curso, alguns dados já analisados, com a finalidade de legitimar ainda mais a pesquisa. A apresentação da análise dos dados, a cargo dos alunos foi imprescindível para verificar se eles confirmavam ou não suas falas descritas no texto que se encontra em anexo, referentes à análise feita.

Neste capítulo, busca-se sintetizar, em linhas gerais, as compreensões que foram construídas acerca da pergunta norteadora da pesquisa: **Como os estudantes de um curso de Licenciatura em Física ou Matemática podem desenvolver suas habilidades e atitudes para a prática da sala de aula no contexto da Modelagem ao longo de um curso de extensão sobre Equações Diferenciais Ordinárias, utilizando-se a Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas?**

Na busca por respostas para a pergunta supracitada, o pesquisador envolveu alunos (futuros professores de Física e Matemática) de Salgueiro e cidades circunvizinhas, vivenciando diferentes momentos e situações, dentro de um curso de extensão intitulado “Equações Diferenciais Ordinárias no contexto da Modelagem Matemática”.

O objetivo do curso foi o de proporcionar, aos alunos, momentos de reflexão sobre o que fazer, por que fazer e como fazer Modelagem Matemática em sala de aula de Física e Matemática. Para isso, buscou-se trabalhar duas abordagens da Modelagem entendidas como fundamentais dentro da formação inicial de professores: Ensinar sobre Modelagem e Ensinar a Modelar.

A Metodologia Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas serviu para o pesquisador, professor do curso de extensão, trabalhar a partir de situações-problema com seus alunos em sala de aula seguindo o roteiro proposto por Onuchic e Allevato (2011).

Reconhece-se que não é fácil trabalhar com a Modelagem Matemática em sala de aula e que esse trabalho requer tempo para ser assimilado. O roteiro para o desenvolvimento de uma aula utilizando a Modelagem requer maturidade dos professores, dedicação e uma grande vontade de mudar. Nesse sentido, foi importante a Resolução de Problemas para o pesquisador cumprir suas atividades e o cronograma do curso.

Desenvolver um trabalho utilizando a Resolução de Problemas no contexto da Modelagem Matemática foi, sem sombras de dúvidas, uma grande conquista. O presente autor tem, hoje, a consciência e a coragem para confessar que tinha uma prática bastante tradicional. Mesmo tendo uma boa base teórica e um projeto elaborado para encaminhar a pesquisa, nada disso garantiu uma caminhada tranquila e sem percalços. Dúvidas e incertezas surgiram a todo o momento, mas o importante foi saber conviver com elas e superá-las.

Este trabalho modificou, definitivamente, a concepção pedagógica do pesquisador que a realizou, suscitando interesses para novas investigações.

O estudo revelou que, trabalhando através de situações-problema no contexto da Modelagem Matemática em uma perspectiva que considera o aluno como parceiro na construção de um novo conhecimento é um caminho promissor para o ensino-aprendizagem de Matemática e Física. Além disso, constatou-se que o estudo de modelos clássicos da matemática pode possibilitar, aos futuros professores, desenvolver técnicas para aplicarem em outras atividades envolvendo temas da realidade de seus futuros alunos.

Na perspectiva adotada pelo presente autor, referente à Modelagem Matemática, defendeu-se que os cursos de formação inicial de professores de Matemática e Física devem ser organizados de modo a permitir, aos futuros docentes, vivenciar experiências de aprendizagem desejáveis para seus futuros alunos, mas, de tal forma que constitua um desafio intelectual. Aprender Matemática num curso de formação inicial é importante, mas, desenvolver atitudes de investigação e de constante questionamento em Matemática e Física é mais importante ainda. Nessa linha de raciocínio, não interessa a quantidade de matemática e Física, mas a qualidade das atividades em que eles estarão envolvidos. Nessas condições, o futuro professor tornar-se-á um profissional que refletirá sobre o seu ensino.

Para finalizar, deixam-se algumas sugestões aos colegas que venham a usar a Resolução de Problemas no contexto da Modelagem Matemática em sala de aula. Primeiramente, é necessário adquirir um embasamento teórico sobre o assunto para, aí então, partir para a prática. Ao implementar este tipo de trabalho, é importante estabelecer objetivos e fazer registros diários de tudo o que ocorreu durante as atividades, pois isso possibilita uma avaliação permanente e a realização de adequações, caso sejam necessárias.

Por fim, acredita-se que os dados aqui estudados poderão possibilitar outras análises, porque eles sugerem diversidade de questões impossíveis de serem discutidas em uma única investigação. Conscientes dessa limitação, reconhece-se que há lacunas na análise e no tratamento dos dados.

Então, faz-se necessário aprofundar os estudos em relação à Modelagem Matemática no currículo de algumas disciplinas do curso de Licenciatura em Matemática e Física, como, por exemplo, equações diferenciais ordinárias.

O ponto de chegada desta pesquisa pode significar o ponto de partida para outras investigações, com outras perspectivas com outros desdobramentos proporcionados pela ideologia de uma metodologia de Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas no contexto da Modelagem Matemática como geradora de novos caminhos e como uma possibilidade promissora para o ensino-aprendizagem de Matemática.

Respondendo à pergunta que norteou a presente pesquisa, que diante do questionário respondido que se encontra em anexo e olhando para toda a aplicação do projeto em dez encontros, o autor deste trabalho está convencido de que os estudantes de Licenciatura em Física e Matemática desenvolveram habilidades e algumas atitudes para que utilizem a teoria e a prática na sala de aula no contexto da Modelagem.

Feitas estas considerações, encerra-se esta dissertação com a expectativa de que o trabalho possibilite discussões sobre as abordagens e, com isso, contribua para superar dificuldades do processo de ensino-aprendizagem de Matemática e Física.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. M. W. Modelagem Matemática e Formação de Professores. In: Encontro Nacional de Educação de Matemática, 8., 2004, Recife. Anais... Recife: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2004. 1 CD-ROM.

ALMEIDA. L. W.; SILVA. K. P.; VERTUAN. R. E. Modelagem Matemática na Educação Básica. 1ª.ed reimpressão – São Paulo: contexto, 2013. 157p.

ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de. DIAS, Michele Regiane. Um Estudo sobre o Uso da modelagem matemática como Estratégia de Ensino e Aprendizagem. Bolema, n. 22, pp 19-35. Rio Claro: 2004.

ALRØ, H.; SKOVSMOSE, O. Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática. Traduzido por: Figueiredo, O. A. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

ARAÚJO, J. L. Relação entre matemática e realidade em algumas perspectivas de modelagem matemática na educação matemática. In: BARBOSA, J. C.; CALDEIRA, A. D.; ARAÚJO, J. L. (Orgs.) Modelagem matemática na educação matemática brasileira: pesquisas e práticas educacionais. Recife: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2007a. p. 17-32.

ARAÚJO, J. L. Cálculo, Tecnologias e Modelagem Matemática: as discussões dos alunos. 253f. Tese (Doutorado) – Instituto de Geociências e ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2002.

BARBOSA, J. C. As relações dos professores com a Modelagem Matemática. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2004, Recife. Anais... Recife: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2004. 1 CDROM.

BARBOSA, J. C. Modelagem e modelos matemáticos na educação científica. Alexandria: Revista de Educação em Ciências e Tecnologias, v.2, n.2, p. 69-85. Jul. 2009. Disponível em: http://alexandria.paginas.ufsc.br/files/2012/03/jonei.pdf. Acesso em: 14 de out. 2014.

BARBOSA, J. C. Modelagem Matemática e a Perspectiva sócio-crítica. In: SEMINÁRIO INERNACIONAL DE PESQUISAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2., 2003, Santos, SP. Anais...Santos, SP: SBM, 2003. p. 1-13.

BARBOSA, J. C. Modelagem matemática e os professores: a questão da formação. Bolema, Rio Claro, v. 14, n. 15, p. 5-23, 2001a.

BARBOSA, J. C. Modelagem matemática: concepções e experiências de futuros professores. 2001. 253f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2001b.

BARBOSA, J. C. Sobre a pesquisa em modelagem matemática no Brasil. In: ARAUJO, J. L.; CORRÊA, R. A. (Eds.). Conferência Nacional sobre Modelagem Matemática, 5., 2007, Ouro Preto. Anais... Ouro Preto: Universidade Federal de Ouro Preto/ Universidade Federal de Minas Gerais, 2007. [CD-ROM](p. 82-103).

BARREIRA, L.; VALIS, C. Equações Diferenciais Ordinárias: Teoria Qualitativa. 1. ed. São Paulo: editora Livraria da Física, 2012. 256 pag.

BASSANEZI, C. R. Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática. 3. ed. São Paulo: contexto, 2013. 389 pag.

BASSANEZI, R. C., BIEMBENGUT, M. S. Modelação matemática: uma alternativa para o ensino aprendizagem de matemática em cursos regulares. Bol. Informativo do Dep. Matem. Blumenau, v.10, n.33, p. 1-5, maio 1995.

BIEMBENGUT, M. S. 30 anos de Modelagem Matemática na Educação Brasileira: das propostas primárias às propostas atuais. Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, Florianópolis, v.2, n.2, p. 7-32. Jul. 2009. Disponível em: <http://www.ppgect.ufsc.br/alexandriarevista/numero_2_2009/mariasalett.pdf >. Acesso em: 14 de out. 2014.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. Modelagem matemática no ensino. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2003. 127 pag.

BISOGNIN, E.; BISOGNIN, V. Percepções de Professores sobre o uso da Modelagem Matemática em Sala de Aula. Bolema. Boletim de Educação Matemática (UNESP. Rio Claro. Impresso), v. 26 – nº 46. p. 1049-1079, 2012.

BLOMHØJ, M. Different perspectives on mathematical modelling in educational research – categorizing the TSG21 papers. In: INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION, 11th, 2008, Monterrey, México. Proceedings… Monterrey, México: Topic Study Group 21. 2009. p. 1 – 18.

BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.) Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

BORBA, M. C.; ARAUJO, J. L.; FIORENTINE, P. GARNICA, A.V. M.; BICUDO, M. A. V. Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática. 2ª Ed. – Belo Horizonte : autêntica, 2006. 120p.

BORBA, M. C., MENEGHETTI, R. C. G., HERMINI, H. A. Estabelecendo critérios para avaliação do uso de Modelagem em sala de aula: estudo de um caso em um curso de ciências biológicas. In: BORBA, M. C. Calculadoras gráficas e educação matemática. Rio de Janeiro: USU, Ed. Bureau, 1999. p. 95-113 (Série Reflexão em Educação Matemática).

BORBA, M.C.; VILLARREAL, M.E. Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking: information and communication technologies, modeling, visualization and experimentation. New York: Springer Science+Business Media, Inc. 2005.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos. Tradução Maria J. Alvarez, Sara B. Santos e Telmo M. Baptista. Porto (Portugal): Porto Editora, 1994.

BOYCE, W. E. ; DIPRIMA, R. C. 7. ed. Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno. Rio de Janeiro: LTC, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais, ciências da Natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília, 2002.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática. Brasília: Ministério da Educação, 2000. 71 pag.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais : introdução aos parâmetros curriculares nacionais / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília : MEC/SEF, 1997. 126p.

CALDEIRA, A.D. Modelagem Matemática: um outro olhar. Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v.2, n.2, p. 33-54. Jul. 2009. Disponível em: <http://www.ppgect.ufsc.br/alexandriarevista/numero_2_2009/mariasalett.pdf>. Acesso em: 14 de out. 2014.

CARVALHO, L. M.; CARVALHO, W. L. P. Formação de professores e questões sociocientíficas no ensino de ciências. São Paulo: Escrituras Editora, 2012.

D'AMBRÓSIO, U. Educação Matemática: teoria à prática. 4. ed. Campinas: Papirus, 1998.

DIAS, M. R. Uma experiência com Modelagem Matemática na formação continuada de professores. 2005. 199f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2005.

FERREIRA, C.R. Modelagem Matemática na Educação Matemática: contribuições e desafios à formação continuada de professores na modalidade educação a distância online. Ponta Grossa, 2010. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós Graduação em Educação, Universidade Estadual de Ponta Grossa, UEPG, 2010.

FERREIRA, D. H. L. Modelagem Matemática no Curso de Licenciatura em Matemática: uma Experiência. In: Anais da V Conferência Nacional sobre Modelagem e Educação Matemática, Ouro Preto, 2007 (p. 1018-1027).

GAZZETTA, M. A Modelagem como estratégia de aprendizagem da Matemática em cursos de aperfeiçoamento de professores. 1989. 150f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1989.

GOLDENBERG, M. A arte de pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais. Rio de Janeiro: Record, 1999.

HISSA. C. E. V. Entrenotas: compreensão de pesquisa. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2013. 197p.

HOUAISS, A.; VILLAR, M. S. Dicionário Houaiss de Língua Portuguesa. Rio de Janeiro: Objetiva, 2009.

HUANCA, R. R. H. A resolução de problemas no processo de ensino-aprendizagem-avaliação de matemática na e além da sala de aula. 198F. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)-UNESP. SP, 2006. Disponível em: <http://www.athena.biblioteca.unesp.br/exlibris/bd/brc/33004137031P7/2006/huaman uanca rr me rcla.pdf> Acesso: 20 de out. 2014.

HUANCA, R. R. H. A Resolução de Problemas e a Modelização Matemática no processo de Ensino-Aprendizagem- Avaliação: uma contribuição para a formação continuada do professor de matemática. 2014. 315 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2014.

KILPATRICK, J. Como vamos de Resolução de Problemas? Uma conversa escrita com Jeremy Kilpatrick. In: Revista Educação e Matemática, nº 130, Portugal, 2014.

LESH, R. Tools, Researchable Issues & Conjectures for investigating what it means to Understand Statistics (or Other Topics) Meaningfully. Journal of Mathematical Modelling and Application, Blumenau, v. 1, n. 2, p.16 – 48, 2010.

LESH, R., and Doerr, H. (Eds.) (2003). Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematical Problem Solving, Learning and Teaching. Mahwah, NJ: Erlbaum.

MALHEIROS, A. P. S. A produção matemática dos alunos em ambiente de modelagem. 2004. 180 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2004. Disponível em: http://www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/dissetacoes/malheiros_aps_me_rcla.pdf. Acesso em: 15 de fev. 2015

MALHEIROS, A. P. S. Educação Matemática Online: a elaboração de projetos de modelagem matemática. 2008. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociência e Ciências Exatas (IGCE), Universidade Estadual Paulista (UNESP), Rio Claro, 2008.

MALHEIROS, A. P. S. Pesquisas em Modelagem Matemática e diferentes tendências em Educação e em Educação Matemática. Bolema. Boletim de Educação Matemática (UNESP. Rio Claro. Impresso), v. 26, p. 89-110, 2012.

MEYER. J. F. C.; CALDEIRA. A.D.; MALHEIROS. A.P.S. Modelagem em Educação Matemática. 3.ed. – Belo Horizonte: autêntica editora, 2013. 142p.

MINAYO, M. C. S. O desafio do conhecimento: pesquisa qualitativa em saúde. 14ª ed. São Paulo: Hucitec, 2014.

MOREIRA, M. A. Teorias de aprendizagem/ Marco Antônio. 2ª ed. São Paulo: EPU, 2011.

MOUTINHO, P. E. C. CTS e a Modelagem Matemática na Formação de Professores de Física. Dissertação. 2007. 115f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas). Núcleo Pedagógico de Apoio ao Desenvolvimento Científico da Universidade Federal do Pará, Belém, 2007.

NCTM (1994). Normas profissionais para o ensino da Matemática. Tradução de João Pedro da Ponte. Lisboa: APM e IIE.

_______. Principles and Standards for School Mathematics. Reston: NCTM, 2000. 402p.

OLIVEIRA, A. M. P. Modelagem Matemática e as Tensões nos Discursos dos Professores. 2010. 199f. Tese (Doutorado em Ensino, Filosofia e História das Ciências) – Universidade Federal da Bahia, Universidade Estadual de Feira de Santana, Salvador, 2010.

OLIVEIRA, M. L. C. Discussões Éticas em Educação Matemática. Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v.2, n.2, p.207-218. Jul. 2009. Disponível em: http://alexandria.ppgect.ufsc.br/files/2012/03/ualace.pdf. Acesso em: 10 de out. 2014.

ONUCHIC. L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. p.199-218. In: Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas, São Paulo: editora UNESP, 1999.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org.) **Educação Matemática: pesquisa em movimento**. São Paulo: Cortez, 2005, p. 212-231.

ONUCHIC. L. R.; ALLEVATO, N. S. G (2011). Pesquisa em resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. In: Boletim de Educação Matemática (BOLEMA), v.25 – p. 73-98 – n.41 – Dezembro de 2011.

ONUCHIC, L. R. Resolução **de problemas na Educação Matemática – Onde estamos e para onde iremos?** IV Jornada Nacional de Educação Matemática e XVII Jornada Regional de Educação Matemática, Passo Fundo, 2012.

ONUCHIC. L. R.; HUANCA. R. R. H. Uma Revolução no campo da Formação de professores de Matemática. In. II congresso Nacional de Formação de Professores de Matemática. 2014, Águas de Lindóia. Anais. p. 1-10

ONUCHIC. L. R.; ALLEVATO. N. S. G.; NOGUTI. F.C.H.; JUSTULIN. A. M. Resolução de Problemas: teoria e prática. Jundiaí, Paco editora, 2014.

ONUCHIC, L. R.; BOERO, M. L. (2007). Perspectiva sobre o conhecimento e métodos de pesquisa. In: Boletim de Educação Matemática (BOLEMA), v. 20 – n. 27 – p. 93-139 – 2007.

PEREZ, Geraldo. Formação de Professores de Matemática sob a Perspectiva do Desenvolvimento Profissional. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p.263-282.

PIRONEL, M. (2002). A avaliação integrada ao processo ensino-aprendizag em de Matemática. Tese de mestrado não publicada, Universidade do Estado de São Paulo Júlio de Mesquita Filho. Rio Claro, Brasil.

POZO, Juan Ignacio (Org.) A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: Artmed, 1998.

RIBEIRO, F. D. Jogos e Modelagem na Educação Matemática. São Paulo: Saraiva, 2009. 124p.

ROMANATTO, M. C. Resolução de Problemas nas aulas de Matemática. In: Revista Eletrônica de Educação, v.6 – n.1 – maio de 2012.

ROMBERG, T. A. Perspectives on scholarship and research methods. In: GROUWS, D. A. Handbook of research on mathematics teaching and learning. New York: Macmillan, 1992. p. 49-64

ROMBERG, T. A. Perspectivas sobre o Conhecimento e Métodos de Pesquisa. Tradução: Onuchic, L.; Boero, M.L. In: BOLEMA - Boletim de Educação Matemática. Rio Claro: UNESP, n.27, p.93-139, 2007.

SANTOS, A. R. Metodologia científica: a construção do conhecimento. 4. ed. Rio de Janeiro: DP&A, 2007. 144p.

SANTOS, R. J. Introdução as Equações Diferenciais ordinárias. 1. ed. Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG, 2011, 716 pag.

SHROEDER, T. L.; LESTER JR., F. K. Developing understanding in mathematics via problem solving. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Ed.). New directions for elementary school mathematics. Reston: NCTM, 1989. p. 31-32.

SILVA, D. K. Ações de Modelagem para a formação inicial de professores de Matemática. In: BARBOSA, J. C.; CALDEIRA, A. D.; ARAÚJO, J. L. (Org.). Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: Pesquisas e Práticas Educacionais. Recife: Sbem, 2007. p. 215-232. (Biblioteca do Educador Matemático). v.3.

SILVEIRA, E. Modelagem matemática em educação no Brasil: entendendo o universo de teses e dissertações. 2007. 208f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2007. Disponível em: <http://www.ppge.ufpr.br/teses/M07_silveira.pdf>. Acesso em: 10 de mar. 2015

SKOVMOSE, O. Educação Crítica: Incerteza, Matemática, Responsabilidade. p.223-229.Trad. Maria Aparecida V. Bicudo. São Paulo: Cortez, 2001.

SKOVSMOSE. O. Cenários para Investigação. BOLEMA (14), Universidade Estadual Paulista ‘Julio de Mesquita Filho’ (UNESP), 2000. p. 66-91.

SKOVSMOSE. O. Educação Matemática Critica: a questão de democracia. Campinas, SP. Papirus, 2001.

SKOVSMOSE. O. Um Convite a Educação Matemática Crítica. Campinas, SP. Papirus, 2014.

SOTOMAYOR, J.; Equações Diferenciais Ordinárias. 1. ed. São Paulo: editora Livraria da Física, 2011. 169pag.

VAN DE WALLE, John A. Matemática no Ensino Fundamental (recurso eletrônico): formação de professores em sala de aula/ John, A. Van Walle; tradução Paulo Henrique Colonese,- 6ª ed., Porto Alegre: Artmed, 2009.

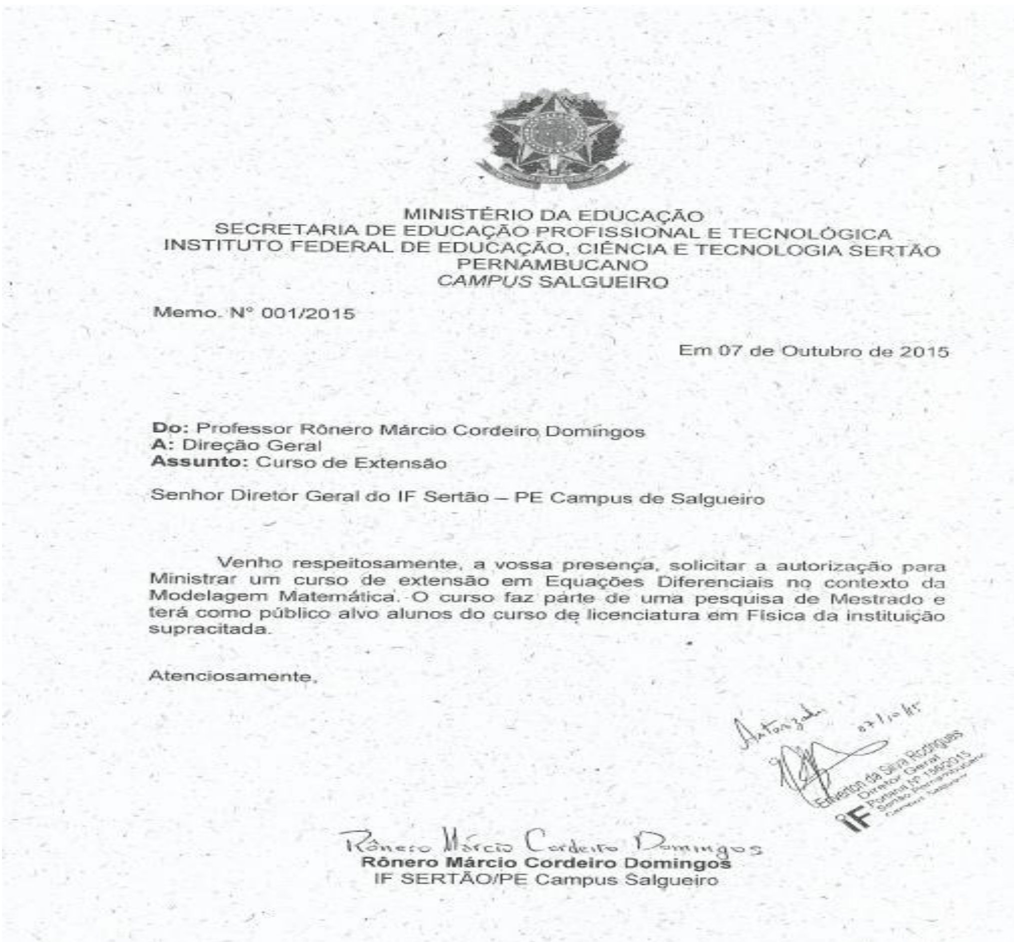
ZILL, Dennis G. Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem. Tradução: Cyro de Carvalho Patarra, revisão: Antônio Luis Pereira. São Paulo: Editora Pioneira Thomson Learning, 2003.

ANEXOS

O anexo em questão é composto por documentos e perguntas que foram utilizados para e na realização do curso de extensão intitulado “Equações Diferenciais Ordinárias no contexto da modelagem matemática”. Constam nesse anexo, os seguintes tópicos:

1) Memorando que teve como objetivo solicitar formalmente a autorização para oferecer um curso de extensão na instituição (cenário) da pesquisa.
2) Termo de Consentimento que teve como objetivo informar aos participantes que os encontros estavam sendo filmados para fins de pesquisa cientifica.
3) Perguntas apresentadas aos alunos ao término do curso, com a finalidade de possibilita-los avaliarem até que ponto o curso correspondeu às suas expectativas e as contribuições para a formação.

ANEXO 1 - MEMORANDO



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA SERTÃO PERNAMBUCANO
CAMPUS SALGUEIRO

Memo. Nº 001/2015

Em 07 de Outubro de 2015

Do: Professor Rônero Márcio Cordeiro Domingos
A: Direção Geral
Assunto: Curso de Extensão

Senhor Diretor Geral do IF Sertão – PE Campus de Salgueiro

Venho respeitosamente, a vossa presença, solicitar a autorização para Ministrar um curso de extensão em Equações Diferenciais no contexto da Modelagem Matemática. O curso faz parte de uma pesquisa de Mestrado e terá como público alvo alunos do curso de licenciatura em Física da instituição supracitada.

Atenciosamente,

Rônero Márcio Cordeiro Domingos
Rônero Márcio Cordeiro Domingos
IF SERTÃO/PE Campus Salgueiro

ANEXO 2 - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Eu____ portador do RG nº __________________, CPF: __________________ aceito participar do curso de extensão intitulado "As Equações Diferenciais Ordinárias no Contexto da Modelagem Matemática" **promovido pelo Professor/pesquisador Rônero Márcio Cordeiro Domingos** e permito que o mesmo obtenha fotografia, filmagem ou gravação de minha pessoa para fins de pesquisa científica. Tenho conhecimento sobre a pesquisa e seus procedimentos metodológicos.

Autorizo que o material e informações obtidas possam ser publicados em aulas, seminários, congressos, palestras ou periódicos científicos. Porém, não deve ser identificado por nome em qualquer uma das vias de publicação ou uso.

As fotografias, filmagens e gravações de voz ficarão sob a propriedade do pesquisador pertinente ao estudo e, sob a guarda do mesmo.

Salgueiro, 10 de Novembro de 2015

____

Nome completo do pesquisador

ANEXO 3 – AVALIAÇÃO DOS ALUNOS SOBRE O CURSO DE EXTENSÃO

QUESTIONÁRIO (Use o verso, se considerar necessário)

INSTITUIÇÃO QUE ESTUDA: IF sertão

GRADUAÇÃO:

( ) Licenciatura em Matemática

(X) Licenciatura em Física

1. Caso existiu, cite um ou dois momentos que mais lhe interessou durante o curso.

A aula que tratou sobre o Resfriamento de Newton.
A aula sobre densidade demografica, pois nesta aula o modelo utilizado condiz de acordo com a realidade

2. O que você achou da metodologia modelagem? Você utilizaria essa metodologia em sala de aula?

muito Bom sim.

3. O que mais lhe chamou atenção nessa metodologia?

a maneira de construir modelos matematicos que se adequem com a situação problema proposto.

4. Você aprendeu alguma coisa durante o curso, o que?

sim, parte da perspectiva de que aprender não é reproduzir a realidade, mas ser capaz de construir modelos matematicos de acordo com sua realidade.

5. Quais foram os pontos negativos?

Os encontros teriam que ser pelo menos duas vezes por semana.

Data: 02/02/16

QUESTIONÁRIO (Use o verso, se considerar necessário)

INSTITUIÇÃO QUE ESTUDA: IF - SERTÃO CAMPUS SALGUEIRO

GRADUAÇÃO:

( ) Licenciatura em Matemática

(X) Licenciatura em Física

1. Caso existiu, cite um ou dois momentos que mais lhe interessou durante o curso.

A explanação do conceitos principais da EDO's, e a exemplificação com exemplos envolvendo conceitos reais do nosso dia-a-dia.

2. O que você achou da metodologia modelagem? Você utilizaria essa metodologia em sala de aula?

As atividades foram bem dinâmicas e que proporcionou os participantes a pensar sobre assuntos que não tinha abordado antes.

3. O que mais lhe chamou atenção nessa metodologia?

A exemplificação com os conteúdos do curso de física, e a importância da modelagem no contexto físico.

4. Você aprendeu alguma coisa durante o curso, o que?

Sim a importância da modelagem na formação e atuação dos professores em sala de aula.

5. Quais foram os pontos negativos?

O pouco tempo para que fosse abordados mais pontos importantes da modelagem, com o contexto de realidade dos alunos.

Data: 02/02/16

QUESTIONÁRIO (Use o verso, se considerar necessário)

INSTITUIÇÃO QUE ESTUDA: IF-SERTÃO PE

GRADUAÇÃO: LICENCIATURA EM FÍSICA

( ) Licenciatura em Matemática

(X) Licenciatura em Física

1. Caso existiu, cite um ou dois momentos que mais lhe interessou durante o curso.

FOI QUANDO A MODELAGEM FOI UTILIZADA PARA A DEMONSTRAÇÃO DE PROCESSOS FÍSICOS, TAIS COMO O RESFRIAMENTO DE NEWTON E DA EQUAÇÃO DE TORICELLI PARA HIDROSTÁTICA. A VERIFICAÇÃO POSTERIOR COM OS EXPERIMENTOS EM SALA DE AULA FOI MUITO INTERESSANTE.

2. O que você achou da metodologia modelagem? Você utilizaria essa metodologia em sala de aula?

SIM, EU UTILIZARIA. ELA PERMITE QUE OS ALUNOS ENTENDAM MELHOR COMO É FEITO TODO O PROCESSO CIENTÍFICO NA BUSCA POR UM MODELO QUE EXPLIQUE DETERMINADO FENÔMENO.

3. O que mais lhe chamou atenção nessa metodologia?

O FATO DE QUE ELA PODE SER MUITO ÚTIL NO ENSINO DA FÍSICA, PELO FATO QUE PERMITE ESTABELECER UMA RELAÇÃO INTERESSANTE ENTRE A CONSTRUÇÃO TEÓRICA E A EXPERIMENTAÇÃO EM SALA DE AULA.

4. Você aprendeu alguma coisa durante o curso, o que?

APRENDI OS CONCEITOS FUNDAMENTAIS DA MODELAGEM E DO SEU USO EM SALA DE AULA. ALÉM DE TER FIXADO MELHOR OS CONTEÚDOS DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS.

5. Quais foram os pontos negativos?

APENAS O TEMPO QUE FOI CURTO E NÃO DEU PRA VER OUTROS TIPOS DE APLICAÇÕES.

Data: 02/02/2016

QUESTIONÁRIO (Use o verso, se considerar necessário)

INSTITUIÇÃO QUE ESTUDA: Faculdade de Ciências Humanas do Sertão Central - FACHUSC

GRADUAÇÃO:

(X) Licenciatura em Matemática

( ) Licenciatura em Física

1. Caso existiu, cite um ou dois momentos que mais lhe interessou durante o curso.

Praticamente todos os momentos foram interessantes pois ao estudar algo que é instigante, somos levados a ficarmos bastante envolvidos durante todos os momentos. Porém sempre há momentos mais marcantes e nesse caso foram as demonstrações práticas.

2. O que você achou da metodologia modelagem? Você utilizaria essa metodologia em sala de aula?

Com certeza, pois a área educacional necessita de novos instrumentos que busquem no aluno uma vontade de aprender mais e mais e torná-lo um cidadão mais-crítico

3. O que mais lhe chamou atenção nessa metodologia?

O envolvimento do aluno na construção dos modelos matemáticos, pois quebra-se aquele tabu que o professor é o único que possui conhecimento, e passa-se a utilizar a matemática cotidiana do aluno na sala de aula.

4. Você aprendeu alguma coisa durante o curso, o que?

Muitas coisas mas dou ênfase a melhor compreensão da metodologia da modelagem e a alguns conhecimentos de EDO que pude compreender.

5. Quais foram os pontos negativos?

Na verdade não foi um ponto negativo do curso, mas sim o meu ponto negativo, é que a maior parte dos assuntos básicos de EDO ~~[illegible]~~ eu não tinha domínio, ficando assim, difícil a compreensão de vários pontos importantes do curso, mas este curso me proporcionou um aprendizado enorme para a continuidade do meu ~~[illegible]~~ curso!

Data: 02/02/2016

QUESTIONÁRIO (Use o verso, se considerar necessário)

INSTITUIÇÃO QUE ESTUDA: FACHUSC

GRADUAÇÃO:

(X) Licenciatura em Matemática

( ) Licenciatura em Fisica

1. Caso existiu, cite um ou dois momentos que mais lhe interessou durante o curso.

A questão da modelagem em si, eu tinha noção de coisas do cotidiano na matemática, mas lá [illegible] conhecer a modelagem.

2. O que você achou da metodologia modelagem? Você utilizaria essa metodologia em sala de aula?

Gostei muito, e com certeza irei usá-la em sala.

3. O que mais lhe chamou atenção nessa metodologia?

O professor poder levar para a sala de aula fatos do dia-a-dia, aplicando e ensinando a matemática.

4. Você aprendeu alguma coisa durante o curso, o que?

Sim, toda a modelagem ensinada e um pouco das equações.

5. Quais foram os pontos negativos?

"pouco tempo", poderia ter sido mais [illegible].

Data: 02/02/16

QUESTIONÁRIO (Use o verso, se considerar necessário)

INSTITUIÇÃO QUE ESTUDA: FACHUSC

GRADUAÇÃO:

(X) Licenciatura em Matemática

( ) Licenciatura em Física

1. Caso existiu, cite um ou dois momentos que mais lhe interessou durante o curso.

Um dos momentos mais interessantes foi a experiência realizado para trabalhar o resfriamento de Newton.

2. O que você achou da metodologia modelagem? Você utilizaria essa metodologia em sala de aula?

Creio que tal metodologia possa realmente contribuir para um melhor desempenho de determinado conteúdo. E sim, eu usaria essa metodologia.

3. O que mais lhe chamou atenção nessa metodologia?

A forma de interação com todos.

4. Você aprendeu alguma coisa durante o curso, o que?

Durante o curso pude entender melhor os objetivos da modelagem e ainda aperfeiçoar meus conhecimentos em integral e derivada.

5. Quais foram os pontos negativos?

A dificuldade com EDO.

Data: 02/02/2016

QUESTIONÁRIO (Use o verso, se considerar necessário)

INSTITUIÇÃO QUE ESTUDA: Fachusc

GRADUAÇÃO:

(X) Licenciatura em Matemática

( ) Licenciatura em Física

1. Caso existiu, cite um ou dois momentos que mais lhe interessou durante o curso.

O que mais me chamou a atenção foi facilidade de transmitir o assunto é claro

2. O que você achou da metodologia modelagem? Você utilizaria essa metodologia em sala de aula?

muito Interessante pois facilita no lidar, com alunos no ato de transmitir. Sim uti-lizaria

3. O que mais lhe chamou atenção nessa metodologia?

A forma de interagir com todos, independendo curso.

4. Você aprendeu alguma coisa durante o curso, o que?

aprendi a melhor se expressar, na maneira de pensar e agir

5. Quais foram os pontos negativos?

não tive ponto negativos

Data: 02.02.2016