UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

SAMILLY ALEXANDRE DE SOUZA

A FORMULAÇÃO E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS COM BASE EM SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

CAMPINA GRANDE-PB
2016

SAMILLY ALEXANDRE DE SOUZA

A FORMULAÇÃO E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS COM BASE EM SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, do Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Área de concentração: Educação Matemática

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Kátia Maria de Medeiros

CAMPINA GRANDE-PB

2016

S729a Souza, Samilly Alexandre de.
A formulação e resolução de problemas geométricos com base em sólidos geométricos [manuscrito] / Samilly Alexandre de Souza. - 2016.
154 p. : il. color.

Digitado.
Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa, 2016.
"Orientação: Profa. Dra. Kátia Maria de Medeiros, Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa".

1. Ensino Aprendizagem. 2. Ensino Médio. 3. Geometria. 4. Materiais Manipuláveis. I. Título.
21. ed. CDD 516

SAMILLY ALEXANDRE DE SOUZA

FORMULAÇÃO E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS COM BASE EM SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

Dissertação de Mestrado apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, do Centro e Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Área de Concentração: Educação Matemática

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Kátia Maria de Medeiros

Aprovada em: ____/____/_______.

Banca Examinadora

Kátia Maria de Medeiros

Prof.ª Dr.ª Kátia Maria de Medeiros – Presidente (UEPB)

Regina Maria Pavanello

Profª Drª Regina Maria Pavanello – Membro Titular Externo (UEM-PR)

Rogéria Gaudencio do Rêgo

Profª Drª Rogéria Gaudencio do Rêgo – Membro Titular Interno (UFPB)

Este trabalho é dedicado aos meus primeiros mestres, Eguinaldo e Ana Lúcia, que foram responsáveis pela minha educação, estiveram sempre ao meu lado, me incentivaram a prosseguir na minha jornada, me apoiaram e sempre oram por mim. Vocês não são apenas pais, são amigos e companheiros. Muito obrigado por todos os ensinamentos, todo o cuidado e todo o amor que vocês têm por mim. Amo vocês!!!

AGRADECIMENTOS

Minha trajetória acadêmica iniciou em 2007 quando havia prestado vestibular para o curso de Ciências Biológicas e, por obra do Criador, fui remanejada para o Curso de Licenciatura em Matemática na UFPB-CAMPUS-IV. Por esse motivo, meu agradecimento principal é para o nosso DEUS, que em sua infinita sabedoria traçou seus planos para minha vida, permitindo que eu me dedicasse a outra área totalmente diferente da que havia escolhido. Área essa que eu me encontrei me identifiquei e da qual, hoje, estou dando mais um passo na trajetória acadêmica. A DEUS, toda honra e toda glória!

Agradeço de coração pelo incentivo, apoio e amizade que muitos dos meus antigos professores da graduação tiveram para comigo. Em especial, agradeço imensamente a professora Severina Andrea, por acreditar no meu potencial e ter me auxiliado no processo seletivo do mestrado.

Durante os quase três anos desafiadores em que estive no mestrado, só tenho a agradecer a todos que passaram pelo meu caminho e que com certeza deixaram um pouco de si. É difícil transformar sentimentos em palavras, mas não poderia deixar de agradecer a todos aqueles que estiveram ao meu lado e me auxiliaram cada um à sua maneira para essa minha conquista.

Aos meus pais, que me educaram e contribuíram para a formação do meu caráter. À minha mãe, que sempre acreditou em mim e fez questão de me acompanhar no dia da matrícula no curso de Matemática, me incentivando sempre, mesmo quando eu pensei em desistir. A meu pai, por todas as vezes que te fiz acordar às quatro e meia da manhã em plena segunda feira e me levar à rodoviária para que eu chegasse a tempo de assistir as aulas do mestrado às oito. A minha irmã, Samara pela amizade e apoio. A vocês, eu espero estar retribuindo toda a dedicação e amor que tem por mim.

A todos os meus outros familiares, tias (os), primas (os), avó, que sempre me ajudaram e apoiaram. A uma família especial, que Deus me deu e que me acolheu em sua residência em Campina Grande, nas pessoas de Isabel, Fernando, Kaline e Isabelle. Vocês foram maravilhosos, me acolheram generosamente, me deram força, incentivo e muito carinho.

À Prof.ª Drª. Kátia Maria de Medeiros, minha orientadora, pela paciência, por seus ensinamentos e confiança ao longo das supervisões das minhas atividades nas disciplinas, no Projeto OBEDUC e na própria escrita da dissertação. Obrigada também por ter me proporcionado a oportunidade de participar do OBEDUC como bolsista/ pesquisadora e por toda parceria nos trabalhos que desenvolvemos juntas. Muito obrigada!

Minha gratidão aos membros da banca de qualificação a Prof.ª Dr.ª Regina Maria Pavanello e o Prof. Dr.º Joelson Pimentel pelas contribuições para esta pesquisa. Da mesma forma, agradeço ao o Prof.º Drº Rômulo Marinho do Rêgo que também contribuiu com a indicação de algumas leituras e a Prof.ª Dr.ª Rogéria Gaudêncio que aceitou o convite para a banca de avaliação final dessa dissertação.

À Universidade Estadual da Paraíba por essa formação acadêmica. Aos professores, funcionários e colegas do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, os quais compartilhamos vários momentos juntos.

Agradeço também à CAPES, por ter me concedido uma bolsa por meio do Projeto *Investigando a Formulação e Resolução de Problemas Matemáticos na Sala de Aula: Explorando Conexões entre Escola e Universidade*, o qual foi desenvolvido no âmbito do *Programa Observatório da Educação*. Esse apoio financeiro nos proporcionou por meio de viagens, a participação em eventos tanto nacionais como internacional, debates e discussões quinzenais com pessoas muito legais que adorei conhecer e, sem dúvida, contribuiu muito para meu crescimento pessoal e profissional.

Muito obrigado também à escola, ao professor Heleilton e aos alunos que contribuíram com os dados para essa pesquisa.

Agradeço aos meus amigos (Roberto, Ariana, Luciano) por toda parceira, partilhando alegrias, tristezas, estímulos e até mesmo cansaços (risos). Gábio, o que dizer de você? Obrigada pelo incentivo com os puxões de orelha para terminar logo a dissertação, por ter me dado força e pela ajuda em algumas ocasiões. Também não posso esquecer as amigas que o mestrado me deu, Gilmara, Janaína e Miríam, guerreiras e que compartilharam comigo muitas aventuras e conhecimentos ao longo do Projeto OBEDUC. Enfim, é com vocês que eu divido a alegria dessa conquista!!

"Se pensar é o destino do ser humano, continuar sonhando é o seu grande desafio. E isto, é lógico, implica em trajetórias com riscos, em vitórias, com muitas lutas, e não poucos obstáculos pelo caminho. Apesar de tudo, seja ousado. Liberte sua criatividade. E NUNCA DESISTA DOS SEUS SONHOS, pois eles transformarão sua vida em uma grande aventura".

Augusto Cury

RESUMO

SOUZA, S. A. A Formulação e Resolução de Problemas Geométricos com base em Sólidos Geométricos. 2016. 154 f. Dissertação (Mestrado)-Universidade Estadual da Paraíba-UEPB, Campina Grande, 2016.

A Geometria uma área muito importante do conhecimento matemático, mas o trabalho pedagógico, quando é realizado na maioria das escolas, no Brasil, com esse importante conteúdo matemático, ainda é fragilizado e, infelizmente, os alunos apresentam uma dificuldade muito grande em compreender os conceitos e aplicações desse conteúdo. Uma maneira que encontramos para possibilitar mudanças na atual realidade é propor o uso de atividades práticas com materiais manipuláveis a partir da formulação e resolução de problemas geométricos dos alunos. A formulação e resolução de problemas em Matemática ainda é uma metodologia de ensino-aprendizagem pouco explorada nas aulas de Matemática. Neste sentido, buscamos analisar o processo de formulação e resolução de problemas geométricos por alunos do 3º Ano do Ensino Médio de uma escola pública de Campina Grande-PB, com base em atividades com materiais manipulativos. Os participantes da pesquisa foram os alunos de uma turma do 3º Ano do Ensino Médio de uma escola pública estadual da cidade de Campina Grande-PB. Essa pesquisa é de natureza qualitativa e foi desenvolvida no âmbito do Projeto *Investigando a Formulação e Resolução de Problemas Matemáticos na Sala de Aula: Explorando Conexões entre Escola e Universidade,* do Programa Observatório da Educação, da CAPES e do qual fizemos parte como bolsista/pesquisadora. A pesquisa iniciou a partir de uma revisão bibliográfica e aprofundamento teórico sobre a importância da Geometria Espacial no Ensino Médio e o uso de materiais manipuláveis nas aulas de Matemática, e a Formulação e Resolução de Problemas geométricos. Posteriormente, aplicamos algumas tarefas em atividades que foram realizadas em pequenos grupos e que envolviam o uso dos Sólidos geométricos e Sólidos de Platão, nas quais os alunos usavam a criatividade para formular e resolver problemas geométricos, o que resultou em um estudo de caso da turma, com destaque a um dos grupos participantes. Os dados foram coletados por meio de uma entrevista semiestruturada com o professor da turma e com uma das alunas do grupo que se destacou, observação participante, vídeo e áudio gravações, registros gravados e escritos dos alunos. Os resultados indicaram que existe uma grande fragilidade em conhecimentos básicos de Geometria dos alunos dessa turma e devido ao fato de não estarem acostumados a trabalhar em grupos, culminou na limitação quanto à formulação de problemas, uma vez que os alunos da turma formularam problemas não geométricos, problemas geométricos com dados numéricos e problemas geométricos sem dados numéricos, utilizando apenas uma estratégia tanto para a formulação como para a resolução. Com relação o grupo em destaque, o Grupo 02, seus alunos formularam problemas geométricos com dados numéricos e problemas geométricos sem dados numéricos. A análise dos dados também nos mostrou que é possível propor tarefas e atividades aos alunos, as quais possam estimular o potencial criativo em Matemática de cada aluno.

Palavras chave: Ensino-Aprendizagem. Ensino Médio. Geometria. Materiais Manipuláveis.

ABSTRACT

SOUZA, S. A. The Formulating and Resolution of Geometrical Problems based on Geometric Solids. 2016. 154 f. Dissertation (Master's degree) – State University of Paraíba – UEPB, Campina Grande, 2016

Geometry is a very important area of mathematical knowledge, but the pedagogical work, when accomplished on most schools in Brazil, with this important mathematical content, is still fragilized and, unfortunetly, the students present a huge difficulty on comprehending the concepts and aplications of the content. A way we found to enable change on the current reality is propose the use of practical activities with manipulable materials using the formulation and resolution of geometrical problems. The formulation and resolution of problems in Mathematic still is a methodology of teaching-learning problem underexplored in math classes. In this sense, we analyze the process of formulating and resolution of geometrical problems by students of the 3rd year of high school of a public school in Campina Grande-PB, based on activities with manipulable materials. The participants of the research were students from the 3rd year of high school of a public state school from the city of Campina Grande-PB. This research is qualitative and was developed under the project *Investigating the Formulation and Resolution of Mathematical Problems in the Classroom: Exploring Connections between School and University,* from the Observatory of Education Program, from CAPES and of which we were part of as scholarship / researcher. The research initiated from a bibliographic revision and theoretical study about the importance of Spacial Geometry in high school and the use of manipulable materials in math class and the Formulation and Resolution of Geometrical Problems. Subsequently, we applied some tasks in activities that were carried out in small groups and that involved the use of Geometric Solids and Platonic Solids, in which the students used their creativity to formulate and solve geometric problems, which also resulted in a class case study, highlighting one of the participating groups. The data was collected through a semi-structured interview with the class teacher and one of the group of students who stood out, participant observation, video and audio recordings, and recorded and written records of the student. The results indicated that there is a great fragility from students of this class in geometric basic knowledge and due to the fact that they are not accustomed working in groups, resulted on limitation regarding the formulation of problems, once the students of the class formulated non-geometric problems, geometric problems with a numeric dice and geometric problems without numeric dices, utilizing only one strategy for formulation and solving. Regarding the highlighted group, Group 02, his students formulated geometric problems with numerical data and geometric problems without numerical data. The analyses of the data also showed that it is possible propose tasks and activities to the students that can stimulate the creative potential in mathematics of each student.

Keywords: Teaching-Learning; High School; Geometry; Manipulable Materials;

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Nesta seção, apresentaremos a motivação e justificativa para esse estudo, a problemática da investigação que nos orientaram na execução do nosso objetivo geral e, por fim, explicitaremos a organização de nosso trabalho.

O ano de 2014 ficou marcado no Brasil pela conquista de um prêmio mais importante de Matemática do planeta. Arthur Ávila, recebeu uma Medalha Fields, prêmio que é considerado "Nobel da Matemática". Em entrevista a BBC Brasil, o pesquisador matemático disse: "Na vida real, fazer Matemática é uma coisa extremamente criativa" e "O Ensino Fundamental deveria priorizar o lado criativo da Matemática".[1]

Entre outros objetivos do Ensino Fundamental, descritos nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCN) (BRASIL, 1998), a criatividade aparece ao lado do raciocínio lógico e espírito crítico para analisar a realidade e propor soluções de problemas, contribuindo para a formação do cidadão. Apesar de ter um documento nacional que norteia o ensino-aprendizagem dos alunos na Educação Básica de nosso país, na prática, o trabalho pedagógico com a Matemática ainda é marcado pelo ensino mecânico baseado no modelo "definição+exemplo+exercícios" na maioria das escolas de nosso Estado.

Essa realidade acaba gerando desinteresse e sentimento de fracasso quando os alunos são deparados, por exemplo, com o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), uma prova elaborada pelo Ministério da Educação para verificar o domínio de competências e habilidades dos estudantes que concluíram ou que estão concluindo o Ensino Médio e que é bastante contextualizada com o cotidiano do aluno.

Enquanto aluna da Educação Básica, podemos afirmar que as aulas de Matemática foram bastante mecânicas, em especial, as de Geometria Espacial, em que o professor tentava desenhar os sólidos geométricos no quadro branco e ensinava as extensas fórmulas para o cálculo de área e volume dos diversos sólidos. O fato de não termos estudado Geometria de uma maneira mais contextualizada e dinâmica durante o Ensino Fundamental e Médio remeteu-nos ao envolvimento durante a Licenciatura em Matemática, cursada na Universidade Federal da Paraíba (UFPB-CAMPUS IV), na

---

[1] http://noticias.terra.com.br/educacao/nobel-chama-atencao-para-a-criatividade-namatematica,fbaac52e335d7410VgnCLD200000b2bf46d0RCRD.html. Acesso em 03 de dezembro de 2015

participação de projetos de iniciação científica e iniciação a docência, com o objetivo de pesquisar e propor diferentes metodologias que pudessem auxiliar em um ensino significativo de Geometria.

A Geometria é um dos assuntos presentes nos Ensino Fundamental e Médio e tão importante como quaisquer outros. De acordo com os PCN (BRASIL, 1998, 2002), a Geometria deve ser abordada ao longo de todos os anos segundo uma abordagem em espiral, que implica passar pelos mesmos conteúdos sempre de uma forma mais aprofundada para poder ir mais longe. Porém, muitos professores ainda hesitam em ensinar esse conteúdo e alguns autores, que fazem parte de nosso referencial teórico para Geometria, apresentam algumas causas e consequências pelo abandono do ensino dessa área da Matemática no Brasil justificando a importância do ensino-aprendizagem em Geometria nos Ensinos Fundamental e Médio (PAVANELLO, 1993; LORENZATO, 1995; LORENZATO, 2012) e outros apontam a Geometria como uma área da Matemática mais propícia ao desenvolvimento de capacidades intelectuais como a criatividade e a percepção espacial (PAVANELLO & ANDRADE, 2002).

Ao ingressar na Pós-Graduação, mais especificamente no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, tivemos a oportunidade de iniciar as leituras através da Linha de Pesquisa "Metodologia e Didática no Ensino das Ciências e na Educação Matemática" e também através dos *Encontros de Estudo* e discussões em grupo, no âmbito do Projeto *Investigando a Formulação e a Resolução de Problemas Matemáticos na Sala de Aula: Explorando Conexões entre Escola e Universidade*, do Programa Observatório da Educação, da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior-CAPES, do qual fomos bolsista. Essas leituras só reforçaram o interesse em tentar colaborar para melhorar a realidade da precária aprendizagem que os alunos têm de Geometria.

Um ano depois de iniciar o Mestrado Profissional em Educação Matemática, tivemos a oportunidade de lecionar em alguns Cursos Técnicos Integrados ao Ensino Médio, no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, campus João Pessoa. Com isso, percebemos que mesmo em cursos técnicos como os de Edificações, Mecânica, Eletrotécnica, entre outros que utilizam a Geometria, os alunos apresentam grande dificuldades nesse conteúdo matemático.

Esse fato, de certa forma nos preocupa, pois os alunos ao término do Ensino Médio buscam entrar em um curso de Ensino Superior ou entre outras opções, o início de uma profissão no mercado de trabalho. Como afirma Alencar (2001), o perfil que se espera hoje de um bom profissional é que ele seja criativo, capaz de tomar decisões rápidas, enfrentar as diferentes situações do cotidiano e resolver problemas que hoje não somos capazes de prever.

Acreditamos que a escola tem o papel de proporcionar ambientes de aprendizagem que possam favorecer o potencial criativo dos alunos. Quando falamos em escola, nos referimos a um trabalho pedagógico entre profissionais de diversas áreas e principalmente os professores que são agentes principais na mudança de ensino, em especial os de Matemática.

Os professores podem e devem propor tarefas e atividades que estimulem o potencial criativo dos alunos. A metodologia de Resolução de Problemas, embora não seja tão efetiva nas aulas de Matemática, é conhecida por muitos professores. A formulação de Problemas ainda é uma metodologia bastante nova no Brasil, mas que vem recebendo maior atenção no currículo escolar de vários países para que seja dada aos alunos a oportunidade de criarem seus próprios problemas a partir de situações que lhes sejam dadas em um contexto matemático.

Quando os alunos formulam e resolvem seus próprios problemas matemáticos, eles usam seus conhecimentos prévios e linguagem própria, podendo participar mais das aulas, dialogar com seus colegas, sentir-se mais motivados para aprender Matemática, que ainda é uma disciplina considerada difícil pelos alunos.

Enfatizamos, em particular, tarefas com formulação e resolução de problemas geométricos que envolvem a utilização de materiais manipulativos como Sólidos geométricos em acrílico e em cartolina, polígonos regulares em cartolina. Tal importância se dá ao fato de que esses materiais permitem aos alunos uma manipulação e visualização de características como os elementos básicos dos Poliedros, o que favorece a uma análise e surgimento de ideias criativas.

Foi a partir desse envolvimento com o Projeto, das leituras realizadas ao longo das disciplinas do mestrado e com as inquietações sobre a aprendizagem dos alunos da Educação Básica e Tecnóloga quando nos referimos à Geometria, que buscamos investigar o processo de formulação e resolução de problemas geométricos de uma turma de alunos da etapa final da educação básica de uma escola pública estadual do município de Campina Grande-PB. Assim, elaboramos nossa hipótese de pesquisa e os objetivos a serem cumpridos.

Diante do que foi exposto, surge a seguinte questão como problemática de investigação: Como é o processo de formulação e resolução de problemas geométricos por alunos do 3º Ano do Ensino Médio, com base em atividades com materiais manipulativos?

Nossa preocupação enquanto professores pesquisadores é desenvolver alternativas para que os alunos se interessem e envolvam-se no estudo da Matemática e, em especial, da Geometria Espacial. Assim, defendemos aqui que o uso de propostas como a formulação e resolução de problemas geométricos com base em atividades com o uso de materiais manipulativos pode estimular ideias criativas dos alunos e contribuir assim, para a possibilidade dos próprios alunos produzirem problemas matemáticos e eles mesmos serem capazes de resolverem e, com isso, tentar amenizar as dificuldades encontradas neste nível de ensino quando discutimos Geometria.

Outro fator a ser considerado é que ainda existem poucas pesquisas com formulação e resolução de problemas nas aulas de Matemática. Por meio de atividades diferenciadas como esta, saímos um pouco da rotina mecânica de somente propor que os alunos resolvam exercícios nas aulas de Matemática e aos alunos é dada a oportunidade de demonstrar a compreensão de conceitos matemáticos no ato da formulação de problemas.

Para tentar responder a essa pergunta, elencamos, de modo geral, o seguinte objetivo: Analisar o processo de formulação e resolução de problemas geométricos por alunos do 3º Ano do Ensino Médio de uma escola pública de Campina Grande-PB, com base em atividades com materiais manipulativos.

Para alcançar esse objetivo, elencamos algumas ações que constituem os objetivos específicos:

- Identificar as concepções do professor da turma relativas à Geometria- possíveis dificuldades dos alunos referentes aos conceitos geométricos e a importância desses conceitos para a aprendizagem dos alunos;
- Levantar as dificuldades que os alunos apresentaram quanto à formulação e resolução de problemas geométricos com base em atividades com materiais manipulativos;
- Avaliar as dificuldades identificadas no processo, considerando critérios relativos ao ensino (seleção de questões, seleção de recursos metodológicos, encaminhamentos das atividades, dentre outros) e à aprendizagem Matemática (domínio de conhecimentos prévios, vivência de atividades em grupos, capacidade de elaboração de textos, dentre outros).

Esperamos que esta pesquisa possa contribuir para a discussão em torno do assunto e, dessa forma, apresentar mais uma alternativa metodológica que possa contribuir para uma melhoria da qualidade do ensino e aprendizagem da Matemática de nossos alunos.

Nossa pesquisa está organizada em 6 capítulos. No Capítulo 1, nos baseamos em alguns autores e traremos a importância do ensino e aprendizagem da Geometria, fazendo um breve retrospecto sobre seu ensino no Brasil. No Capítulo 2 enfatizamos a Formulação e Resolução de Problemas Matemáticos como uma alternativa metodológica a ser desenvolvida na sala de aula. No Capítulo 3 apresentamos a metodologia da pesquisa que será desenvolvida em nosso trabalho. No Capítulo 4 trazemos a realização das duas atividades iniciais. No Capítulo 5, o estudo de caso da turma, com destaque para a aluna com o pseudônimo Samara e as atividades que foram desenvolvidas por meio da formulação e resolução de problemas e os materiais manipuláveis. Por fim, apresentaremos as Considerações Finais.

Na sequência, são apresentadas as referências bibliográficas utilizadas em nossa pesquisa e, por fim, os apêndices que fazem parte dela.

CAPÍTULO 1

A GEOMETRIA E OS MATERIAIS MANIPULÁVEIS

No primeiro capítulo, enfatizamos o ensino e aprendizagem de Geometria, sua importância, como ocorre o ensino de Geometria no Brasil e como é apresentado o Ensino da Geometria Espacial no Ensino Médio e, por fim, trazemos algumas considerações sobre os Materiais Manipuláveis.

1.1. Qual a importância de ensinar e aprender Geometria?

A Geometria é uma área muito importante do conhecimento matemático, que foi construída historicamente desde as primeiras civilizações. Assim como a Álgebra, Aritmética e outras áreas da Matemática, a Geometria teve origem a partir das necessidades de resolver problemas do dia a dia, como a partilha de terras férteis às margens de grandes rios, a construção de casas, a observação para prever o movimento dos astros, entre outros. Quando nos referimos à Geometria, estamos falando de conceitos que nos remetem ao nosso redor, aos objetos do nosso cotidiano, às embalagens dos produtos, às construções, as artes e à própria natureza. Portanto, devemos considerar um ensino de Geometria que propicie aos alunos conhecer e explorar o ambiente em que eles vivem, favorecendo o conhecimento das formas geométricas e o desenvolvimento do raciocínio geométrico.

Analisando o ensino de Geometria na Educação Básica, podemos observar que durante muito tempo a escola não procurou estimular os alunos para essa percepção da Geometria no ambiente em que vivemos. A maioria dos alunos desse nível de ensino apresenta grandes dificuldades nesta área do conhecimento matemático, (SANTOS, 2007). O ensino de conceitos geométricos na Educação Básica ainda continua esquecido, quando ocorre é de maneira desligada da realidade dos alunos desse nível.

Ao atentarmos e refletirmos sobre os documentos oficiais brasileiros, percebemos nos Parâmetros Curriculares Nacionais que:

> Usar as formas geométricas para representar ou visualizar partes do mundo real é uma capacidade importante para a compreensão e construção de modelos para resolução de questões da Matemática e de outras disciplinas. Como parte integrante deste tema, o aluno poderá desenvolver habilidades de visualização, de desenho, de argumentação lógica e de aplicação na busca de solução para problemas. (BRASIL, 2002, p. 120)

Mas, infelizmente, essa não é a realidade encontrada na Educação Básica de nosso Estado. Com base na nossa experiência docente em Matemática percebemos que, quando a Geometria é discutida com os alunos do Ensino Médio, estes apresentam uma dificuldade muito grande em entender os conceitos e aplicações desse conteúdo e as justificativas é de que ou não estudaram no Ensino Fundamental ou se estudaram, foi de uma forma muito superficial, então acabam não lembrando conceitos básicos da Geometria.

As diversas habilidades que os estudantes poderiam adquirir para seu desenvolvimento acabam sendo limitadas à memorização de fórmulas e definições para a resolução de exercícios e uma futura avaliação. Isso precisa ser mudado, pois a própria natureza do conhecimento geométrico é oposta a esse tipo de situação e é importante que as mudanças no pensamento geométrico dos alunos sejam provocadas ainda na escola, desde a Educação Infantil.

A Geometria é uma área importante da Matemática, pois ela exige do aluno uma maneira diferente de raciocinar. Se bem trabalhada, estimula os alunos a observar e explorar o espaço a sua volta, perceber semelhanças e diferenças entre figuras, observar padrões, proporciona o trabalho com construções de objetos tridimensionais, além de servir como uma ferramenta importante para outras áreas do conhecimento. Por isso, ela não só deve fazer parte dos currículos das escolas, mas ser trabalhada efetivamente através de metodologias que promovam a aprendizagem geométrica.

Procuramos atualmente, novas propostas metodológicas que facilitem o ensino e a prática dos conteúdos disciplinares na Matemática, quais instrumentos devem ser utilizados para que os alunos sintam-se motivados a aprender e, quanto aos professores, como lecionar de maneira adequada à realidade dos alunos. Em especial, no ensino da Geometria Espacial, como podemos evidenciar nas sugestões para os professores contidas nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio - OCEM:

> Ao final do Ensino Médio, espera-se que os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do quotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico. (BRASIL, 2006, p. 69)

Segundo as OCEM (BRASIL, 2006), o estudo da Geometria deve possibilitar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos do quotidiano matemático e também auxiliar na aprendizagem de outras disciplinas. Encontramos em toda parte possíveis representações de objetos conceituais que estudamos em Geometria que podem nos auxiliar, por exemplo, na interpretação de um mapa na disciplina de Geografia, de um gráfico em Estatística ou até mesmo na compreensão de conceitos de grandezas e medidas.

Na maioria desses documentos oficiais do Brasil, é dada uma ênfase maior no trabalho de resolução de problemas matemáticos. Partindo desse pressuposto, desejamos motivar os alunos para que possam apropriar-se dos conceitos da Geometria e usar seus conhecimentos prévios para a formulação e resolução de problemas com base na utilização de materiais manipuláveis.

Faz-se necessário no ensino da Geometria a criação de várias situações de aprendizagem, utilizando diversos instrumentos mediadores como a manipulação de softwares, de materiais didáticos, que contribuem para o desenvolvimento da intuição e da experiência para que culmine na aprendizagem.

A aprendizagem matemática há muito tempo vem sendo discutida e pesquisada pela comunidade de Educadores Matemáticos, mais ainda há poucas pesquisas que retratam a importância de ensinar e aprender Geometria.

1.2. Como ocorre o ensino de Geometria no Brasil

O estudo dos conceitos geométricos constitui parte importante do ensino-aprendizagem de Matemática, pois propicia aos alunos desenvolver pensamentos que permitem compreender e descrever o mundo onde vivem e facilitam a compreensão de questões tanto da Matemática como de outras áreas do conhecimento (BRASIL, 1998).

Além de ser um campo que permite trabalhar diversas situações problemas que possivelmente envolvam os alunos, tornando o estudo interessante.

Porém, algumas pesquisas (LORENZATO, 1995; PAVANELLO, 1993) tem mostrado que o ensino de conceitos geométricos ainda é ausente nas salas de aula da Educação Básica e quando é oferecido geralmente é de forma mecânica através da apresentação de fórmulas e aplicação das mesmas para resolver exercícios, tornando-se desligado da realidade.

No Brasil, uma pesquisa sobre a história do ensino de Geometria, é a Dissertação de Mestrado de Regina Maria Pavanello, defendida na Universidade Estadual de Campinas em 1989. Em sua pesquisa, Pavanello (1989), apresenta uma retrospectiva sobre os diferentes momentos pelo qual passou a Educação Matemática no Brasil, em relação ao ensino de Geometria, destacando um dos fatores responsáveis pela ausência do ensino dessa disciplina, que foi a algebrização dada à Geometria durante o Movimento da Matemática Moderna.

A proposta de ensino durante esse Movimento era de trabalhar a Geometria sobre o enfoque das transformações como podemos observar.

> A ideia central da Matemática Moderna é adaptar o ensino às novas concepções surgidas com a evolução desse ramo do conhecimento, o que significa trabalhar a Matemática do ponto de vista das estruturas. A preocupação com as estruturas e com a utilização da linguagem simbólica da teoria dos conjuntos está presente nos livros didáticos de Matemática destinados ao curso ginasial, publicados no Brasil a partir da década de 60. A Geometria não pode mais ser trabalhada à maneira tradicional. Desta forma, opta-se por acentuar nesses livros, as noções de figura geométrica e de intersecção de figuras como conjunto de pontos no plano, por adotar, para a Geometria, a mesma simbologia usadas para os conjuntos em geral. Não existe, agora, uma preocupação em construir uma sistematização a partir das noções primitivas e empiricamente elaboradas. (PAVANELLO, 1989, p. 162-164)

Essa proposta de ensino, aliada ao despreparo dos professores, contribuiu para que essa área da Matemática não fosse ensinada, passando a trabalhar predominantemente a Álgebra.

Em pesquisas mais recentes a essa, Pavanello (1993) mostra que o abandono do ensino da Geometria, verificado nas últimas décadas do século XX no Brasil, acontece principalmente nas escolas públicas, justificando-se pela falta de conhecimento dos próprios professores.

Também Lorenzato (1995) em sua pesquisa: "Os por quês matemáticos dos alunos e as respostas dos professores", comenta que muitos dos professores não possuem o conhecimento geométrico necessário para realização de suas práticas pedagógicas. Nessa pesquisa, realizada com 255 professores de 1ª a 4ª séries, foram submetidas 8 questões referentes à Geometria plana euclidiana e foram obtidas 2040 respostas erradas. Para o autor, o professor que não conhece a Geometria, não conhece o poder de ensiná-la e tampouco a importância que ela possui na formação do futuro cidadão.

Mesmo depois de passados quase vinte anos da publicação de Lorenzato, essa realidade infelizmente ainda é a que perdura no ensino brasileiro e pode ser verificada nos resultados não satisfatórios pelos instrumentos como a Prova Brasil que, desde 2005 avalia os estudantes de 4ª série (5º ano) e 8ª série (9º ano) do Ensino Fundamental de escolas públicas com provas de Língua Portuguesa e Matemática, onde os resultados têm mostrado que, em relação a questões de Geometria, os alunos apenas conseguem resolvê-las relacionando à aplicação direta de fórmulas. Acreditamos, assim como Pavanello; Andrade (2002) que o insucesso dos alunos na aprendizagem da Geometria pode ser dado também pela falta de preparo dos professores.

Alguns documentos trazem diretrizes que norteiam o trabalho de resgate da Geometria, como os Princípios e Normas para a Matemática Escolar do NCTM (2008), incentivam por meio das representações e da construção de formas em duas dimensões e construção de formas tridimensionais que os alunos poderão compreender as características das formas. E no Brasil, os PCN (BRASIL, 1998) que destacam dois tipos de “(...) propriedades que a Geometria trata: associadas à posição relativa das formas e associadas às medidas”.

Com o crescimento da Educação Matemática, tanto a nível mundial como no Brasil, muitos educadores passaram a se preocupar em buscar alternativas para trazer de volta o ensino de Geometria para as salas de aula. Muitos trabalhos são publicados em diversos eventos com o objetivo de divulgar pesquisas que foram e vem sendo realizadas e que obtiveram resultados positivos em termos de aprendizagem geométrica. Porém, muitos desses trabalhos acabam não chegando às escolas onde os professores não tomam conhecimento e consequentemente os alunos não têm a oportunidade de vivenciar uma aprendizagem de conhecimentos geométricos.

Várias escolas públicas de nosso Estado possuem materiais didático-pedagógicos, mas eles acabam ficando guardados em uma sala e esquecidos ou são colocados a disposição dos alunos apenas em feiras de ciências ou amostras pedagógicas. Não queremos generalizar, pois há sempre algumas exceções de educadores que recorrem a atividades didáticas fazendo o uso de materiais concretos e proporcionando aos alunos o desenvolvimento de seu raciocínio espacial e dedutivo.

1.3. O estudo da Geometria Espacial no Ensino Médio

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), temos os conhecimentos de Matemática no campo da Geometria divididos em dois eixos, “Espaço e Forma” e “Grandezas e Medidas” que abrangem, juntos, 42% das habilidades que são avaliadas em Matemática na Prova Brasil/SAEB, sendo 58% para “os Números e Operações” e “Tratamento da Informação”. Isso indica que ocorre certo equilíbrio entre esses conteúdos, o que significa que a Geometria possui um espaço significativo na Matemática e que, por isso, não se justifica o fato de ela ser “abandonada” nas aulas. Entretanto, ainda existem muitas lacunas na aprendizagem de Geometria, tanto pelas metodologias que são utilizadas pelos professores de Matemática, quanto na compreensão dos alunos.

A Geometria Espacial é um dos conteúdos de Matemática do Ensino Médio em que, geralmente, os alunos apresentam bastante dificuldade. Um dos fatores que talvez contribuam para esse fato, é que muita vezes os professores não costumam incentivar os alunos a explorar o espaço a sua volta e acabam apresentando os conteúdos sem nenhuma relação com o cotidiano dos alunos. As aulas, que poderiam ser interessantes, muitas vezes acabam sendo somente expositivas através da explicação do professor, fazendo uso apenas do recurso quadro e pincel para apresentação de fórmulas e aplicação das mesmas na resolução de exercícios.

A Geometria é uma área que possui amplas possibilidades de contextualização em situações-problemas e permite a exploração dos objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato. Proporciona um espaço em que o estudante estabeleça conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento (BRASIL, 1997). Portanto, como um campo amplo, o professor que ensina Geometria pode se apropriar de diversos recursos para motivar a aprendizagem dos alunos.

O estudo dos Sólidos geométricos é um conteúdo previsto no 2º Ano do Ensino Médio e como não é abordado nas séries finais do Ensino Fundamental pode acabar despertando nos alunos a curiosidade em aprendê-los por estarem acostumados a trabalhar durante boa parte do ano letivo apenas com a Álgebra ou, devemos levar em consideração o fato de que os alunos possam nunca ter estudado qualquer assunto relacionado à Geometria ou ainda, podem apresentar lembranças frustradas da Geometria Plana durante o Ensino Fundamental.

É importante que possamos motivar os alunos do Ensino Médio para a curiosidade, para a construção de novas ideias ou até mesmo relembrar conceitos geométricos básicos que ficaram esquecidos na etapa escolar anterior.

Sabemos que muitos alunos, mesmo no Ensino Médio, ainda apresentam dificuldade nos conceitos e na habilidade de visualização de sólidos geométricos e percebemos essa dificuldade na nossa atuação em sala de aula onde é frequente um aluno identificar um tetraedro como um triângulo ou até mesmo um octaedro como um losango. Lorenzato (1995) afirma que os objetos que povoam o espaço são a fonte principal do trabalho de exploração das formas. Portanto, quando os alunos são deparados com situações onde eles podem observar e manusear objetos que se assemelhem ao modelo dos sólidos geométricos, como as embalagens do dia a dia, eles acabam fazendo conexão entre os elementos bidimensionais e os tridimensionais, relacionando com o mundo em que vivemos.

Há uma possibilidade de trabalhar a Geometria Espacial no Ensino Médio com diversas atividades lúdicas, dentre elas alguns materiais manipulativos como embalagens nos mais diversos formatos, que facilitam a compreensão dos elementos básicos dos sólidos, sólidos em acrílico, sólidos construídos a partir de palitos de churrasco ou canudos onde podemos observar bem suas arestas, sólidos a partir de sua planificação onde podemos identificar suas faces. Além dos materiais manipulativos, podemos trabalhar também com materiais tecnológicos como o uso de softwares como o *Poly*, o *Geogebra* que auxiliam de forma dinâmica na aprendizagem dos alunos. O importante é escolher o material que auxilie positivamente na tarefa escolhida pelo professor.

1.4. Materiais Manipuláveis

Tendo como nosso foco o Ensino Médio, a Geometria Espacial é um dos assuntos desse nível de ensino que os alunos apresentam muitas dificuldades. Uma das causas para esse fato pode ser a falta de visualização dos objetos tridimensionais e das representações planas. Kaleff (2003) acredita que a habilidade de visualização deve ocupar um lugar privilegiado no ensino de Geometria e que pode ser desenvolvida até certo ponto se ao aluno for disponibilizado um apoio didático baseado em materiais concretos que possam representar o objeto geométrico em estudo.

Geralmente os professores que ensinam Geometria utilizam apenas a lousa e pincel para desenhar os sólidos e não associam-nos com os objetos do nosso cotidiano. Diante do exposto, é importante que o professor de Matemática que leciona Geometria Espacial saiba utilizar alguns recursos que torne a aprendizagem interessante e significativa. Aqui defendemos uma abordagem com materiais didáticos concretos para o ensino e aprendizagem desse importante conteúdo matemático, pois ajuda o aluno a desenvolver a habilidade de visualização, a construir, poder explorar, comparar e fazer algumas descobertas.

Para Lorenzato (2006), material didático é qualquer instrumento útil ao processo de ensino aprendizagem. Portanto, pode ser um giz, uma calculadora, um filme, um livro, um jogo, uma embalagem, um quebra-cabeça, entre outros. Quando nos referimos a materiais manipuláveis, estamos falando de materiais didáticos concretos, em que os alunos podem de forma ativa, tocar, manipular e com isso se envolver durante uma situação de aprendizagem. Portanto, os materiais manipuláveis são também materiais didáticos concretos.

É importante destacar que a utilização de materiais manipuláveis deve ser planejada, levando em consideração as vantagens e desvantagens do material que será usado, assim como os objetivos da atividade que será proposta, pois cada um deles possui limites para sua utilização. Como afirma Lorenzato (2006), o material didático nunca ultrapassa a categoria de meio auxiliar de ensino à disposição do professor e do aluno, e, como tal, o mesmo não é garantia de um bom ensino, nem de uma aprendizagem significativa e não substitui o professor. Matos e Serrazina (1996) também concordam que somente a manipulação do material não garante uma aprendizagem significativa. Para esses autores, o professor tem um papel muito importante nesse processo, pois ele deve escolher o material cuidadosamente para que a atividade tenha sucesso. Portanto, o material manipulável deve servir como um meio para auxiliar no ensino e para que ocorra uma aprendizagem significativa, as atividades devem ser bem planejadas pelo professor.

Para Rêgo e Rêgo (2006), durante a utilização do material didático, cabe ao professor alguns cuidados básicos, dentre os quais se destacam:

I. Dar tempo para que os alunos conheçam o material (inicialmente é importante que os alunos o explorem livremente);
II. Incentivar a comunicação e troca de ideias, além de discutir com a turma os diferentes processos, resultados e estratégias envolvidos;
III. Mediar, sempre que necessário, o desenvolvimento das atividades, por meio de perguntas ou da indicação de materiais de apoio, solicitando o registro individual ou coletivo das ações realizadas, conclusões e dúvidas;
IV. Realizar uma escolha responsável e criteriosa do material;
V. Planejar com antecedência as atividades, procurando conhecer bem os recursos a serem utilizados, para que possam ser explorados de forma eficiente, usando o bom senso para adequá-los às necessidades da turma, estando aberto a sugestões e modificações ao longo do processo, e
VI. Sempre que possível, estimular a participação do aluno e de outros professores na confecção do material. (RÊGO; RÊGO, 2006, p. 54).

É importante sempre lembrar que apenas a simples manipulação de um ou uns materiais manipuláveis não garante que o aluno construiu um conceito matemático. Lorenzato (2006) acredita que a utilização de materiais concretos manipuláveis facilita a compreensão dos conceitos matemáticos, pois desperta a curiosidade, concentração e criatividade, incentivando a aprendizagem. O planejamento, discussão e reflexão do professor tornam-se essencial no processo de aprendizagem dos alunos.

Em nosso trabalho, foi dada aos alunos a oportunidade de manipular diversos sólidos geométricos confeccionados em acrílico do Laboratório de Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, observados na figura 01.

Figura 01: Sólidos geométricos em acrílico do LEM da UEPB

Fonte: Registro nosso

Os autores Rêgo, Rêgo e Vieira (2012) destacam a necessidade da realização de tarefas que demandem materiais de baixo custo e de grande valor sociocultural, não exigindo do aluno um conhecimento prévio aprofundado, motivando-o pela carga intuitiva associada às ações envolvendo o uso de recursos táteis e visuais.

Propomos também, a utilização de algumas representações de polígonos em cartolina guache para que os alunos pudessem visualizar o modelo de forma a aguçar sua percepção espacial. Além disso, os alunos também puderam construir os Poliedros de Platão, o que os possibilitou uma melhor percepção de objetos geométricos como as faces, vértices e arestas.

Segundo Kaleff (2003), a utilização da representação concreta de poliedros pode favorecer o aluno a visualizar, reconhecer e analisar as propriedades geométricas. Essas representações, de acordo com o que a autora sugere, podem ser por meio do *modelo casca* que representa a superfície do poliedro ou por meio do *modelo esqueleto* que representa a estrutura das arestas do poliedro. Acreditamos que ambos esses modelos podem ser muito bem aceito pelos alunos, mas escolhemos realizar em uma das atividades, a construção dos Poliedros de Platão a partir de sua planificação por meio do modelo casca, que auxilia na percepção dos elementos básicos desses sólidos que são as faces, os vértices e as arestas.

A proposta de construção dos Poliedros de Platão e em seguida a formulação e resolução de problemas a partir deles, além de outras atividades com modelos de sólidos geométricos pode ser importante para que possamos identificar as características de criatividade dos alunos, bem como da identificação de deficiências de conhecimentos de séries anteriores relacionadas à Geometria.

CAPÍTULO 2

FORMULAÇÃO E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

Neste capítulo apresentaremos alguns documentos que apontam a importância de efetuar um trabalho com a metodologia da Resolução de Problemas nas aulas de Matemática. Além disso, trazemos a Formulação de Problemas como uma alternativa metodológica a ser utilizada nas aulas de Matemática, bem como os resultados de algumas pesquisas que foram desenvolvidas e, por fim, algumas relações entre Uma relação entre a Formulação e Resolução de Problemas Matemáticos e a Criatividade.

2.1. Algumas considerações referentes à Resolução de Problemas como uma alternativa metodológica

Muitas pesquisas sobre Resolução de Problemas no ensino da Matemática já foram e ainda vem sendo realizadas por pesquisadores e educadores, porém ainda existem muitas dúvidas a respeito de sua utilização prática nas aulas de Matemática. Na década de sessenta ocorreu um movimento intitulado “Matemática Moderna”. Nesta época, as pesquisas em Educação Matemática foram intensificadas, pois os formuladores dos currículos insistiam em uma reforma educacional, onde procuravam aproximar a Matemática que era estuda nas escolas, com aquela estudada pelos pesquisadores. O ensino era mais voltado à teoria do que à prática, através de um excesso de formalização e grande abstração, como podemos observar nos PCN:

> O ensino proposto fundamentava-se em grandes estruturas que organizam o pensamento matemático contemporâneo e enfatizava a teoria dos conjuntos, as estruturas algébricas, a topologia, etc. Porém toda esta proposta estava longe da realidade dos alunos, principalmente das séries iniciais do Ensino Fundamental. (BRASIL, 1998, p. 19)

Essa proposta como podemos observar, estava fora do contexto dos alunos, pois havia um exagero de símbolos, os conteúdos eram bastante complexos, o ensino acabava ocorrendo por meio de repetição, sem contextualizações para que os alunos pudessem fazer conexões entre os conteúdos e seu dia a dia. O Movimento da Matemática Moderna, “não teve o sucesso esperado”, Onuchic e Allevato (2005, p. 215)

A Resolução de Problemas ganhou destaque mundial no final da década de 1970, passando a ser o foco do ensino de Matemática a partir dos anos 80. Em 1980 foi editado nos Estados Unidos uma publicação do NCTM – National Council of Teachers of Mathematics, que é uma Associação Norte-Americana de Professores de Matemática, intitulado "Agenda para a Ação", que descreve recomendações para o ensino de Matemática, sendo a resolução de problemas apontada como o principal foco do ensino da Matemática. (ONUCHIC, 1999)

A primeira recomendação de *A Agenda for Action* (NCTM, 1980) para a década de oitenta era centrar a Matemática escolar na resolução de problemas no sentido em que esta atividade poderia ser a base de aprendizagem das capacidades, conceitos e procedimentos. Segundo os NCTM, (1989) a resolução de problemas deve ser *o foco central do currículo de Matemática.* Afirmam também de modo explícito que é essencial no desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas colocar os alunos na situação de formularem, eles próprios, problemas a partir de contextos do quotidiano, de problemas já explorados, de expressões Matemáticas, gráficos, imagens ou campanhas publicitárias.

No Brasil, encontramos nos Parâmetros Curriculares Nacionais, entre outros objetivos, que o trabalho com a Matemática almeja "desenvolver as capacidades de raciocínio e *resolução de problemas*, de comunicação, bem como o *espírito crítico e criativo*" (BRASIL, 1999, p.85).

Ainda no cenário nacional encontramos alguns autores que apresentam suas opiniões favoráveis em relação a um trabalho com a Resolução de Problemas e a importância de organizar o currículo escolar através dessa metodologia, no sentido de promover um trabalho centrado no aluno, onde ele participa ativamente da construção do conhecimento através da mediação do professor que, somente ao final desse processo de construção que formalizará a partir das ideias dos alunos os conceitos e as definições corretas.

Onuchic e Zuffi (2007) explicam que

> A Resolução de Problemas passa, então, a ser pensada como uma metodologia de ensino, ponto de partida e meio de se ensinar Matemática. Sob esse enfoque, problemas são propostos de modo a contribuir para a construção de novos conceitos e novos conteúdos, antes mesmo de sua apresentação em linguagem Matemática formal. (ZUFFI & ONUCHIC, 2007, p.3)

Nessa mesma linha Callejo e Vila (2004) afirmam que:

> "Os problemas são utilizados para ajudar os alunos a terem consciência de que seus conhecimentos são insuficientes para responder às questões que lhes são propostas e despertar-lhes, assim, a motivação para incorporar novos conhecimentos reestruturando os que já têm."(CALLEJO; VILA, 2004, p.170).

É necessário destacar a importância que tem o professor na utilização dessa metodologia nas aulas, pois ele deve ser o incentivador da aprendizagem dos alunos, desde o momento que prepara as atividades e às leva para a sala de aula até o momento da aplicação prática da Resolução de Problemas pelos alunos, sendo ele, um mediador entre essa metodologia e a prática dos alunos. O professor deve ter consciência de que para ele propor a metodologia de resolução de problemas em suas aulas ele também deve ser um resolver de problemas, pois ele poderá entender as dificuldades que os próprios alunos possam enfrentar ao resolver uma atividade desafiadora como a resolução de um problema.

Por meio da resolução de problemas devemos deixar de lado a sequência "definições, exercícios e problemas" para colocar os problemas como inicio e meio de ensinar e aprender Matemática como "problemas, definições, exercícios e mais problemas". Em fim, o professor tem que ter conhecimento dessa metodologia e saber que o problema é o ponto de partida para que em seguida, sejam introduzidos os conceitos e, mesmo em meio a algumas dificuldades, ele possa facilitar a aprendizagem Matemática dos alunos.

Podemos destacar as concepções de alguns autores brasileiros sobre problema. Segundo Onuchic (1999) problema é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver. Van de Walle (2009) diz que um problema é definido como qualquer tarefa ou atividade para a qual os estudantes não têm regras prescritas ou memorizadas, nem a percepção de que haja um método específico para chegar à solução correta.

Nossa concepção aproxima-se do que esses autores apresentam, pois acreditamos que problemas existem em qualquer área e o ato de resolver problemas está presente no cotidiano das pessoas e geralmente exige a utilização de várias estratégias. Com a Matemática não é diferente, resolver problemas é envolver-se em uma atividade ou tarefa cujo método para se chegar à solução não é conhecido de imediato. Acreditamos que quando os alunos aplicam seus conhecimentos matemáticos para encontrar a solução de um problema eles estão fazendo a Matemática acontecer. Devemos nos lembrar que encontrar a solução de um problema não significa necessariamente que resolvemo-lo, para isso, devemos refletir sobe a resposta e verificá-la.

Portanto, entendemos que na resolução de problemas os alunos podem utilizar várias estratégias para encontrar a resposta como intuição, imaginação, criatividade, tentativas e até mesmo o erro e também podem recorrer à problemas já conhecidos para que facilitem seu raciocínio para resolver o problema. Acreditamos que quando o aluno sente-se desafiado, ele irá se esforçar para buscar a solução de diferentes maneiras através de seus conhecimentos prévios.

O grande matemático Polya (1997), considerado o pai da resolução de problemas, diz que a resolução de problemas foi e é a coluna vertebral da instrução Matemática desde o Papiro de Rhind. Em seu livro, “A Arte de Resolver Problemas”, Polya comenta que depois de estudar muitos testes matemáticos, quis saber como os matemáticos chegavam a certas conclusões, desenvolvendo sua heurística para resolver problemas, segundo (POLYA, 1997), são quatro as etapas principais para a resolução de problema:

- Compreender o problema;
- Elaborar um plano;
- Executar o plano;
- Fazer o retrospecto ou verificação.

De acordo com Polya, seguindo essas etapas, os alunos podem pensar matematicamente, refletir e construir o conhecimento. Para que essa importante metodologia de ensino não se torne apenas um procedimento seguido pelo famoso “passo a passo”, os professores devem planejar bem as atividades, propor problemas desafiadores, estimular o uso de diferentes estratégias para se solucionar o mesmo problema, contemplando o potencial criativo dos alunos.

Em seu artigo, Branca (1997) coloca a Resolução de Problemas como meta, processo ou habilidade básica:

Na primeira concepção, anterior ao movimento da Educação Matemática, a resolução de problemas é considerada uma meta. Resumidamente, segundo essa concepção, devemos primeiro ensinar Matemática aos alunos para que depois eles possam resolver os problemas, ou seja, os alunos devem estar preparados e dominar definições e conceitos para poder aplicá-los posteriormente na estruturação da resolução de um determinado problema. Por isso, essa é a concepção que ainda predomina entre os matemáticos e os cientistas.

A segunda concepção evidencia a Resolução de Problemas como um processo, onde os alunos aplicam seus conhecimentos prévios para resolver situações que para eles são novas. Essa concepção surge a partir dos trabalhos de Polya (1997) onde os educadores começam a preocupar-se com os processos ou estratégias que os alunos usam para resolver problemas para que possam ensinar como fazer para resolver. Além disso, surge a classificação dos tipos de problemas, tipos de estratégias de resolução e esquemas de passos a serem seguidos para melhor resolver problemas. A preocupação é ensinar a resolver problemas o que, como consequência resultaria em aprender Matemática.

Como habilidade básica, a Resolução de Problemas é entendida como uma competência mínima para que o aluno possa inserir-se no mundo do conhecimento e do trabalho. Nessa perspectiva, o foco é o que essencialmente precisa ser ensinado em relação à Resolução de Problemas, levando-se em consideração o conteúdo específico, os variados tipos de problemas e os métodos de resolução de problemas para que se alcance o desenvolvimento do senso crítico e da criatividade, fatores importantes na aprendizagem Matemática.

Percebemos que apesar de distintas, uma concepção não excluí a outra. Pelo contrário, é interessante que possamos discutir um pouco sobre cada uma delas e fazer uma análise mais crítica sobre a Resolução de Problemas. para refletirmos sobre qual dessas concepções estará pautada nossa prática pedagógica. Baseamo-nos na terceira concepção, pois concordamos que a Resolução de Problemas deve ser entendida como uma competência mínima para que o individuo possa inserir-se no mundo do conhecimento e do trabalho, pois estamos constantemente resolvendo problemas em nosso dia a dia, e tendo que tomar decisões rápidas baseadas em melhores estratégias.

A resolução de problemas é uma metodologia interessante e, se bem trabalhada, pode torna-se bastante satisfatória no ensino de Matemática, segundo as autoras:

> A importância da Resolução de Problemas vai muito além da Matemática, pois sua prática pode contribuir para o desenvolvimento das potencialidades cognitivas de nossos alunos. Para muitos educadores, um dos principais objetivos da educação deve ser o de preparar o aluno para resolver problemas. Essa competência, em um mundo dinâmico e com o volume de informações que se tem hoje, pode fazer a diferença, seja para atuação no mercado de trabalho como também para o pleno exercício da cidadania. (REGO & PAIVA, 2009, p. 245)

Segundo essas autoras, a resolução de problemas pode ser trabalhada em qualquer área, em especial na Matemática, pois a utilização das variadas estratégias que os alunos utilizam ao resolver problemas pode contribuir para o desenvolvimento do raciocínio lógico e os ajudar a resolver outras situações e entender o cotidiano o qual estão inseridos.

D'Ambrósio (2008) aponta pesquisas como projeto Quasar nos EUA, que indica que alunos que resolvem problemas apresentam um resultado positivo em avaliações de porte nacional e até mesmo internacional, sendo bem sucedidos nessas avaliações. É importante destacar o papel do professor ao se trabalhar com a resolução de problemas, pois dependendo de como eles são propostos e trabalhados, podem torna-se meros exercícios.

Com a utilização da Resolução de Problemas com uma metodologia de ensino, devemos priorizar além da resposta correta, o caminho até que se chegue à solução. Para resolver um problema é importante que os alunos possam desenvolver uma atitude de reflexão e não apenas compreender o que foi pedido e aplicar as fórmulas para se chegar à solução. É importante também estabelecer um diálogo com os alunos, deixar que eles apresentem e comentem com a turma sua maneira de chegar numa solução. O trabalho em pequenos grupos permite que os alunos interajam e compartilhem suas habilidades para que cheguem à solução de um problema.

Na obra de Smole e Diniz (2001) encontramos diferentes tipos de problemas e de maneira geral as autoras classificam os problemas em *problemas convencionais* e *problemas não-convecionais.* Problema convencional é aquele que apresenta como características: estar ligado a um conteúdo específico; ter sempre uma resposta e solução única, que é geralmente numérica; apresentar todos os dados que a pessoa que irá resolvê-lo necessita. Já o problema não-convencional não está necessariamente ligado a um conteúdo específico; possui várias soluções possíveis; os alunos precisam interpretar o problema e selecionar os dados que são importantes para planejar o que vai fazer e como vai fazer para encontrar a solução e, por fim, verificá-la para conferir se realmente faz sentido.

Essas autoras ainda subclassificam os problemas não-convencionais em, problemas sem solução, problema com mais de uma solução, problemas com excesso de dados e problemas de lógica, Apresentaremos essa subclassificação por meio de um quadro organizador, o quadro 01, a seguir:

Quadro 01: Classificação dos problemas não convencionais

(continua)

Problemas não convencionais	**Características**	**Exemplos**
Problemas sem solução	Ajuda a desenvolver no aluno a habilidade de aprender a duvidar, a qual faz parte do pensamento crítico.	Monte uma pirâmide de base quadrada usando 5 triângulos isósceles.
Problemas com mais de uma Solução	Ajuda o aluno a perceber que ao resolver problemas desse tipo ele esta participando de um processo investigativo do qual atua como um ser pensante e produtor do seu próprio conhecimento.	Eu e você temos juntos 6 reais. Quanto dinheiro eu tenho?
Problemas com excesso de dados	Evidencia ao aluno a importância de ler, fazendo com que aprenda a selecionar dados relevantes para a resolução de um problema.	Caio é um garoto de 6 anos e gosta muito de brincar com bolinhas de gude. Todos os dias acorda às 8 horas, toma seu café e corre para a casa de seu amigo Júnior para brincar. Caio levou 2 dúzias de bolinhas coloridas para brincar. No final do jogo ele havia perdido um quarto de suas bolinhas e Júnior ficou muito contente, pois agora tinha o triplo de bolinhas de Caio, Quantas bolinhas Júnior tina ao iniciar o jogo?

(conclusão)

Problemas não convencionais	**Características**	**Exemplos**
Problemas de Lógica	Estimula mais a análise dos dados, favorecem a leitura e interpretação do texto e, por serem motivadores, atenuam a pressão para obter-se a resposta correta imediatamente.	Alice, Bernardo, Cecília, Otávio e Rodrigo são irmãos. Sabemos que: Alice não é a mais velha; Cecília não é a mais nova; Alice é mais velha que Cecília; Bernardo é mais velho que Otávio; Rodrigo é mais velho que Cecília e mais moço que Alice. Qual a ordem que nasceram esses cinco irmãos?

Fonte: Adaptado de Smole e Diniz (2001, p. 107-115)

Segundo as autoras, esses tipos de problemas não-convencionais foram classificados dessa maneira levando em consideração a existência de algumas habilidades e funções específicas que não podem deixar de ser trabalhadas para que possamos mudar a postura do aluno frente à Resolução de Problemas.

Além disso, elas salientam que não pretendem esgotar outras classificações possíveis e que o objetivo maior é auxiliar o trabalho em sala de aula. Nas aulas de Matemática os professores podem propor todos esses tipos de problemas, mas destacamos os Problemas sem solução, que quase não são utilizados nas aulas, pois estamos acostumados a pedir aos alunos que resolvam problemas com no mínimo uma solução possível e se passarmos a propor também problemas que não tenham solução, estaremos rompendo com a concepção de que todo problema tem solução e, além disso, ajudando os alunos a refletir sobre o problema.

Outra possibilidade é de que podemos pedir que os alunos reformulem problemas sem solução de modo que possam modificar os dados e/ou a incógnita para que o problema passe a ter solução. Enquanto professores, podemos apresentar problemas que de inicio não tenham resposta e incentivar aos alunos que reflitam sobre os dados que faltam ou sobre como poderíamos reformular o problema para que ele tenha solução. Os alunos, que antes eram resolvedores de problemas, começarão a ter contato com a formulação de problemas e assim, expressar suas ideias e criatividade associando a produção de texto à Matemática.

2.2. Formulação de Problemas como uma metodologia a ser usada nas aulas de Matemática

Com o avanço de pesquisas em Educação Matemática no Brasil, várias tendências metodológicas podem ser usadas para melhorar o ensino e aprendizagem da Matemática na sala de aula. Dentre elas: a EtnoMatemática, a História da Matemática, a Modelagem Matemática, o Uso do computador e das calculadoras nas aulas de Matemática, a Resolução de Problemas e várias outras. O objetivo geral das pesquisas que são realizadas no âmbito educacional é o de buscar alternativas que melhorem o ensino que é oferecido e, consequentemente, a aprendizagem dos alunos. Por isso, devemos estar sempre pesquisando alternativas metodológicas e utilizando em nossa prática pedagógica para que esse objetivo geral seja alcançado.

A formulação de Problemas é um tema bastante novo no Brasil e recentemente vem recebendo maior atenção mundial para que seja incluída no currículo escolar e na prática pedagógica em Educação Matemática. Recomendações recentes para a reforma na Educação Matemática sugerem a inclusão no ensino de atividades em que estudantes formulem seus próprios problemas, além de resolver problemas pré-reformulados (NCTM, 2000).

Assim como a Resolução de Problemas, a Formulação de Problemas também pode ser uma metodologia útil nas aulas de Matemática. Silver (1994) diz que geralmente é pedido aos alunos que eles resolvam problemas que são trazidos nos livros didáticos ou apresentados pelos professores e raramente ou nunca é dada a oportunidade de os alunos criarem seus próprios problemas de Matemática. O autor ainda acrescenta que isso resulta do modelo tradicional de ensino-aprendizagem que é feito por transmissão/recepção em que os alunos recebem passivamente o conhecimento como um resultado do ensino de transmissão.

Infelizmente, ainda estamos arraigados ao tradicionalismo nas aulas de Matemática em que os professores propõem que os alunos apenas resolvam exercícios ou problemas. Quase nunca os professores preocupam-se com o fato de que seus alunos podem e são capazes de formular seus próprios problemas e com isso, raciocinar para expor suas ideias Matemáticas, desenvolver sua autonomia ou até mesmo aproximar a Língua Portuguesa à Matemática. Esses fatos citados deveriam ser efetivos nas aulas de

Matemática para que não tenhamos apenas um ensino de transmissão de conteúdos como no modelo tradicional.

Complementando, em seu artigo, Medeiros e Santos (2007) afirmam que a exploração da formulação de problemas não é uma tarefa comum nas aulas de Matemática, E, mais ainda, ao propor aos alunos que formulem problemas, seus textos irão confirmar a compreensão ou não que eles têm sobre determinados conteúdos matemáticos além de os alunos poder se familiarizar com as características de um problema e utilizarem sua criatividade. A concepção desses autores é de que a formulação de problemas também sirva como uma avaliação em que, a partir dos problemas formulados, os professores possam perceber se os alunos realmente compreendem alguns conteúdos e se não, refletir a partir disso para tomar decisões cabíveis na busca de solucionar esse problema.

Mas, antes de iniciarmos a discussão sobre essa metodologia de ensino é importante compreendermos seu significado. "Formulação de problema refere-se tanto a produção de novos problemas como a reformulação de determinados problemas. Assim, formulação pode ocorrer antes, durante, ou após a solução de um problema" (SILVER, 1994, p. 19).

Segundo esse autor, para criar um problema basta pensar em uma situação que se queira resolver e atribuir dados e incógnitas, ou seja, podemos criar um problema espontaneamente e em seguida pensar em sua solução ou podemos reformular um problema não trivial a fim de tornar sua solução mais acessível. Por esse motivo, a formulação ou reformulação de problema caminha lado a lado com a resolução de problemas e pode ser bastante útil nas aulas de Matemática.

Ao propor que os alunos formulem problemas a partir de uma determinada situação, de certa forma temos a possibilidade de investigar o tipo de texto que será produzido pelos alunos, se eles utilizam conhecimentos prévios, se baseiam em algum problema que já tenham resolvido ou que foi resolvido por seu professor anteriormente, se eles conseguem conectar os dados com o contexto do problema. Esse fato é evidenciado em Smole e Diniz (2001) que explicam:

> Dar oportunidade para que os alunos formulem problemas é uma forma de levá-los a escrever e perceber o que é importante na elaboração e na resolução de uma dada situação; que relação há entre os dados apresentados, a pergunta a ser respondida e a resposta; como articular o texto, os dados e a operação a ser usada. Mais que isso, ao formularem problemas, os alunos sentem que têm controle sobre o

> fazer Matemática e que podem participar desse fazer, desenvolvendo interesse e confiança diante de situações-problema. (SMOLE & DINIZ, 2001, p.152)

Entre outros objetivos, nós escrevemos para poder comunicar nossas ideias e registrá-las para que elas possam ser propagadas. Quando os alunos constroem um texto, mesmo que pequeno, eles usam sua criatividade para expressar suas ideias, sejam elas narrando um acontecimento, contando uma história, fazendo uma análise crítica sobre alguma situação do cotidiano. É importante propor diferentes experiências aos nossos alunos e a Formulação de Problemas matemáticos é uma delas, pois além de não ser ainda uma atividade comum, os alunos tem a oportunidade de produzir textos nas aulas de Matemática. É importante destacar que os alunos não produzirão textos quaisquer e sim problemas matemáticos, situações Matemáticas que permitam a colocação de questionamentos ou perguntas e que podem proporcionar um desafio e ao mesmo tempo uma motivação maior para que os alunos tenham controle sobre o fazer Matemática citado por Smole e Diniz (2001).

De acordo com Brown e Walter (2005), propondo tarefas desafiadoras e estimulando o potencial criativo dos alunos podemos contribuir para o que esses autores chamam de superação da matematofobia ou ansiedade Matemática. Ainda segundo esses autores, a formulação de problemas atua como um componente crítico na tentativa de compreender e enfrentar o medo, tornando-se uma atividade potencialmente menos ameaçadora do que responder questões.

Os alunos geralmente possuem uma aversão à Matemática e acabam não acreditando que são capazes de aprendê-la. No entanto, quando o professor conhece diversas metodologias e propõe tarefas não rotineiras, nas quais os alunos passam a ser os sujeitos ativos no processo de aprendizagem eles se sentem mais capazes de aprender, pois têm a oportunidade de tentar e de se expressar mesmo que não obtenham a resposta correta de imediato. Então, concordamos com esses autores, pois acreditamos que quando os alunos formulam e resolvem seus próprios problemas eles sentem-se menos “ameaçados” por essa disciplina considerada tão “difícil” pela maioria dos alunos.

Para que a atividade de Formulação de Problemas seja trabalhada nas aulas de Matemática é preciso ser planejada com cuidado, o professor deve orientar os alunos sem que atrapalhe suas criações e intervir quando necessário para que eles possam raciocinar matematicamente e avançar na produção de problemas.

Boavida et al (2008) apresentam duas estratégias que são uteis para facilitar o processo de formulação de problemas, são elas: "*E se em vez de?*" e "*Aceitando os dados*". Na primeira, os alunos podem modificar um ou mais aspectos de um determinado problema, como por exemplo, os dados, a incógnita e a partir daí formulam-se mais perguntas.

As autoras sugerem que esse tipo de estratégia seja realizada antes de pedir que os alunos formulem um problema livremente, pois a modificação dos dados de um problema pode ser um suporte para formulações livre. Já a segunda, está relacionada com a criação de problemas, partindo de uma situação estática como uma figura, uma tabela, uma definição ou simplesmente de um conjunto de informações sobre os quais possam ser formuladas questões. Esse tipo de estratégia é interessante para investigar a criatividade dos alunos, mas é preciso levar em conta que a atividade de formular um problema sem um suporte prévio, termo utilizado por essas autoras, pode levar os alunos a criarem problemas sem conexão alguma com a Matemática ou até mesmo problemas tão complicados que nem eles mesmos são capazes de resolver.

Devemos traçar os objetivos que pretendemos atingir com a utilização de cada uma dessas estratégias para formulação de problemas e avaliar sua utilização nas aulas de Matemática, pois ambas são bastante importantes e podem ser utilizadas nas aulas de Matemática, individualmente ou a "*E se em vez de?*" seguida de "Aceitado os dados", pois os alunos podem demonstrar dificuldades em formular problemas sem que tenham vivenciado alguma atividade anterior em que eles pudessem testar suas hipóteses como a alteração de dados de um determinado problema a fim de resolvê-lo. Muitos alunos estão acostumados a apenas resolver problemas ou exercícios, então é importante propor inicialmente, atividades em que eles possam avaliar e reformular problemas trazidos pelos professores ou encontrados nos livros didáticos para que em seguida, eles possam formular seus próprios problemas.

Stoyanova e Ellerton 1996 (citado por HARPEN; SRIRAMAN, 2011) propuseram que a investigação sobre o potencial de formulação de problema como uma importante estratégia para o desenvolvimento de compreensão da Matemática dos alunos tinha sido prejudicada pela ausência de um quadro que liga resolução de problemas, formulação de problemas e os currículos de Matemática. Esses autores se basearam na estrutura do intelecto de Guillford (1950) e propuseram um quadro que identifica três tipos de situações na formulação de problemas, são elas: situações *livres, semiestruturadas e estruturadas*.

De acordo com este quadro, a formulação de problemas é uma situação conhecida como *livre* quando os alunos são convidados a formular um problema a partir de uma dada situação, artificial ou naturalista. A situação de formulação de problemas é referida como *semiestruturada* quando aos alunos é dada uma situação aberta como uma imagem, um gráfico, uma equação e eles são convidados a criar um problema a partir disso. Por fim, uma situação de formulação de problemas é referida como *estruturada* quando as atividades de formulação de problemas são baseadas em um problema específico e os alunos são estimulados a explorar a estrutura do problema ou completá-la.

Em nossa pesquisa, optamos por propor aos alunos atividades baseadas na situação de formulação de problemas *semiestruturada* fazendo uso também das duas estratégias citadas por Boavida et al (2008): "*E se em vez de?*" e "*Aceitando os dados*".

2.3. Diferentes perspectivas com as quais a Formulação de Problemas é trabalhada

Formular problemas é uma atividade consideravelmente mais complexa que resolver problemas. Acreditamos que o objetivo maior de um trabalho com a Formulação de Problemas é incentivar os alunos para que sejam ativos em sua aprendizagem Matemática, autônomos e desenvolvam a criatividade e habilidades de observação e argumentação. Há várias perspectivas que são pertinentes de serem analisadas para que o trabalho com a formulação de problemas seja valorizado e efetivado na prática pedagógica.

No Brasil, infelizmente, ainda encontramos poucos trabalhos de pesquisa que utilizam a formulação de problemas como metodologia de ensino. Encontramos em Medeiros e Santos (2007) um trabalho de pesquisa relacionado à utilização da formulação de problemas nas aulas de Matemática, no qual o objetivo geral foi descrever como os alunos formulam problemas matemáticos a partir de diferentes tipos de textos no sentido backhitiniano.

Esses autores propuseram a formulação de onze problemas matemáticos, a partir de onze diferentes tipos de textos a alunos com idades entre 13 e 16 anos. De maneira geral, os autores concluíram que mesmo em meio a algumas dificuldades, alguns alunos conseguiram perceber o significado expresso na relação intertextual comum aos onze textos, que foram os problemas sociais, associados à dificuldade de exercer a cidadania no Brasil e conseguiram formular alguns problemas relacionados com as frações e cálculo de porcentagem, entre outros conteúdos matemáticos.

Medeiros e Santos (2007) partem do princípio de que na Matemática, a atividade de formulação de problemas é tão importante quanto a resolução, constituindo um rico potencial didático visto que na sala de aula, essa atividade está associada à criatividade dos alunos e concluem argumentando que os resultados obtidos em sua pesquisa sugerem que os alunos iniciaram um processo de compreensão sobre a formulação de problemas e que se estabelecesse uma relação entre a Matemática e o pensamento contextualizado e crítico.

Recentemente, Silva (2015), em sua dissertação de mestrado voltada para a formação inicial de professores de Matemática, buscou analisar como a formulação e resolução de problemas matemáticos sobre frações, a partir de materiais manipuláveis no 6°Ano do Ensino Fundamental, podem contribuir para uma prática reflexiva no Estágio Supervisionado. Para tal, a autora buscou, verificar como duas professoras formadas de Matemática do 6° Ano abordam a formulação e a resolução de problemas matemáticos envolvendo fração, identificar quais as contribuições das atividades de formulação e resolução de problemas matemáticos sobre frações na prática letiva dos futuros professores no Estágio Supervisionado e investigar, através do Diário de Bordo, como os dois futuros professores, no Estágio Supervisionado, refletem sobre suas práticas, com a utilização da formulação e resolução de problemas matemáticos a partir de materiais manipuláveis. Silva (2015) fez uso de dois estudos de caso, em que dois futuros professores de Matemática da mesma instituição, mas de municípios diferentes, que deveriam associar a teoria formulação e resolução de problemas à prática para observarem as aulas dos professores das turmas de 6º Ano e ministrarem aulas que despertassem o interesse dos alunos em cada uma das escolas de seus respectivos municípios. Nesta pesquisa, os dois futuros professores, planejaram as aulas a partir do conteúdo de adição e subtração de frações atrelado a Formulação e Resolução de problemas e aos materiais manipuláveis estojo de frações, materiais emborrachados e interviram refletiram sobre sua prática durante o Estágio Supervisionado. Em relação ao trabalho com a Formulação e Resolução de Problemas matemáticos, a autora pôde concluir que os dois futuros professores puderam identificar os erros mais cometidos pelos alunos nas atividades realizadas com as frações.

Apesar dos objetivos dessas duas pesquisas citadas serem diferentes, os autores propuseram um trabalho em que alunos do Ensino Fundamental participaram de atividades com a Formulação e Resolução de Problemas Matemáticos e puderam concluir que ainda há muito a ser explorado com essa atividade, mas, de maneira geral pode ser utilizada tanto para relacionar a Matemática e o pensamento crítico como para avaliar a compreensão que os alunos têm sobre determinado conteúdo e o desenvolvimento da criatividade.

Em nível mundial, algumas pesquisas foram e vem sendo desenvolvidas sobre a formulação e resolução de problemas. Em Portugal, a Dissertação de Mestrado de Pedro Almeida faz menção à formulação de problemas como um hábito passível de ser aprendido e crucial para a capacidade de Resolução de Problemas. Segundo Almeida (2011), no contexto educativo de iniciação não se trata de aprender a inventar problemas, mas de desenvolver a formulação de perguntas pertinentes sobre os dados, as condições, as relações e as incógnitas do problema proposto, que ajudem na compreensão do problema e na descoberta do processo de resolução.

Em sua pesquisa, Almeida (2011) utiliza a formulação de problemas como uma tarefa cujo objetivo é descrever e procurar interpretar o que acontece na resolução de problemas, quando os alunos são confrontados com a tarefa de formularem perguntas a situações problemáticas, sendo essas situações Matemáticas apresentadas sobre a forma de texto aos alunos. Os resultados desse estudo mostraram que na realização das quatro tarefas, os alunos foram capazes de mostrar o domínio de conceitos e procedimentos que não eram esperados pelo autor e também, em algumas tarefas, os alunos formularam perguntas para as quais saberiam respondê-las e na ultima tarefa, apresentaram respostas incorretas às perguntas formuladas.

O resultado dessa pesquisa levou o próprio autor a refletir se o contexto da situação problemática pode interferir no interesse pelas perguntas dos alunos ou se eles apenas formulam problemas pensando em uma solução fácil que não lhes deem muito trabalho para encontrá-la.

Também temos no trabalho de Bonotto e Dal Santo (2015), na Itália, em uma pesquisa cujo objetivo foi examinar a relação entre as atividades de formulação de problemas e criatividade, quando esses processos são implementados em situações que envolvem o uso de artefatos da vida real. No caso dessa pesquisa, esses artefatos foram panfletos do parque de diversões Mirabilândia, localizado no norte da Itália. As autoras acreditam que panfletos de um parque de diversão, chamados de artefato cultural, podem se tornar uma fonte concreta para tipos de tarefas e atividades semiestruturadas, nas quais os alunos são convidados a explorar toda a estrutura Matemática contida, como por exemplo, preços especiais para quem visita o parque, descontos para grupos de pessoas, preços em decimais, porcentagens de descontos e, por meio dos conhecimentos prévios, formularem problemas matemáticos.

Esse estudo exploratório envolveu quatro turmas de quinta série, duas em cada escola, com alunos na faixa etária de 10 a 11 anos de idade. Uma escola estava localizada em uma área urbana, na qual os alunos já estavam familiarizados com atividades que envolviam artefatos culturais, trabalhos em grupo e discussões. A outra escola, se localizava em uma área montanhosa e os alunos não estavam familiarizados com esse tipo de atividade. As autoras utilizaram duas análises diferentes, uma qualitativa para avaliar a formulação de problemas dos alunos a partir da estrutura dos problemas e suas soluções e outra, quantitativa, para avaliar a criatividade a partir da contagem do número de problemas criados pelos alunos.

Bonotto e Dal Santo (2015) concluíram que a primeira escola teve melhor desempenho na formulação de problemas. Quanto à criatividade, a segunda escola foi mais bem sucedida em todas as três categorias utilizadas para avaliar o desempenho (*fluência*, *flexibilidade* e *originalidade*). Segundo essas autoras, os resultados podem sugerir que há uma correlação entre criatividade e desempenho em Matemática, já que a segunda escola tem alunos com melhor desempenho e acreditam que este aspecto merece ser investigado em um estudo posterior.

A importância das atividades de formulação de problemas em Matemática é enfatizada em documentos educacionais em muitos países, incluindo os Estados Unidos e Turquia. A Turquia é um dos países que enfatizaram a importância das competências de Formulação de Problemas matemáticos. Desde 2006, um novo currículo matemático foi organizado pelo Ministério da Educação Nacional da Turquia onde a educação passa a ser centrada no aluno, Arikan e Unal (2015). Esses autores realizaram uma pesquisa cujo objetivo foi monitorar a capacidade de formulação de problemas de alunos da oitava série de acordo com as quatro operações, frações e medidas geométricas.

Os participantes desse estudo foram 46 alunos de duas turmas da oitava série. Segundo os autores, os alunos da turma A eram mais bem sucedidos na Resolução de Problemas comparados com os alunos da turma B e foi pedido a esse alunos para que eles formulassem problemas a partir de três situações semiestruturadas, como por exemplo, os autores apresentaram as seguintes operações: $9 \times 4 = 36$ e $36 \div 3 = 12$ e pediram que os alunos formulassem um problema de tal modo que a solução fosse mencionada. Outra situação proposta foi referente a uma fração, que foi dada a seguinte fração: $\frac{1}{2}$ e pedido que formulassem um problema de tal forma que sua resposta fosse essa fração. Por fim, a última situação semi-estruturada foi uma sequencia com, respectivamente, 1, 3, 6 e 10 quadradinhos e foi pedido que formulassem um problema de acordo com os modelos de padrão dessa sequência de quadradinhos.

Dos resultados, os autores concluiram que embora os alunos da turma A eram melhores resolvedores de problemas, foram os alunos da turma B que se saíram melhor em termos de formulação de problemas referentes as frações e medidas geométricas e Arikan e Unal (2015) acreditam que a motivação foi o fator principal para essa atividade, pois segundo eles, os alunos da turma A não se mostravam interessados e curiosos no desenvolvimento da atividade. De forma geral, os autores concluíram que as experiências Matemáticas são condições necessárias, mas não suficientes para a Formulação de Problemas.

Essas cinco pesquisas citadas, cada uma com objetivos diferentes, são as mais recentes encontradas na literatura sobre Formulação e Resolução de Problemas e todas nos auxiliaram no modo de buscar compreender como diferentes atividades Matemáticas podem permitir que possamos investigar o processo de formulação e resolução de problemas matemáticos dos alunos em sala de aula. Alem de Gontijo (2007) e Vale e Pimentel (2012), em especial, a pesquisa de Bonotto e Dal Santo (2015) serviu de base para que pudéssemos criar nossa categorização dos problemas formulados pelos alunos.

É importante que possamos propor variadas atividades para que os alunos possam conectar seus interesses matemáticos com a formulação dos problemas como é sugerido “os alunos devem ter a oportunidade de formular perguntas e problemas que resultam de seus próprios interesses" (NCTM, 1989, p. 67). Porém, em uma sala de aula, o interesse pessoal não é o único fator de motivação, principalmente se for feito um trabalho em grupo, pois cada aluno tem sua maneira de pensar. Uma alternativa interessante para motivar os alunos a formularem problemas é pedir que eles desafiem o grupo vizinho ou a dupla visinha ou até mesmo os alunos de outra classe a resolverem seus problemas baseados em atividades que agucem a curiosidade dos alunos.

Em Brown e Walter (2005), a Formulação de Problemas é apresentada como uma estratégia para gerar um problema através de tentativas focadas em observações, conjecturas e perguntas, sem estar inicialmente preocupado com tanta formalidade. De acordo com os autores, nós sempre enxergamos aquilo que está a nossa frente, por esse motivo que eles acreditam que não devemos nos preocupar inicialmente com muita formalidade ao formular problemas, pois esse é um processo de descobertas e amadurecimento, onde cada pessoa desenvolve sua ferramenta intelectual à seu modo, por isso, não podemos ser muito exigentes na primeira tentativa de propor que se formulem um problema.

No artigo *Um Modelo Estrutural para Formulação de Problemas*, Pittalis et. al (2004) propõem um modelo, o qual, segundo eles, pode permitir que a formulação de problemas de jovens estudantes possa ser descrito através de quatro processos cognitivos, que são eles: *edição, filtragem, compreensão e tradução*.

A *edição* de informação quantitativa é geralmente associada com as tarefas que exigem que os alunos formulem um problema sem qualquer restrição a partir de informações fornecidas.

A *filtragem* de informações quantitativas é associada com tarefas que exigem que os alunos apresentem problemas ou questões, que são apropriados para respostas específicas dadas.

A *compreensão* de tarefas de formulação de problemas exige a compreensão do contexto estrutural dos problemas e das relações entre as informações fornecidas.

A *tradução* de informação quantitativa exige que os alunos formulem problemas ou questões apropriadas a partir de gráficos, diagramas ou tabelas.

Nesse estudo, verificou-se que, dos quatro processos cognitivos, a *edição* e a *filtragem* são os que mais contribuem para a formulação de questões. Os autores afirmam que, o modelo usado nesse estudo oferece a professores e pesquisadores um meio para examinar a complexibilidade e sofisticação da formulação de problemas. A partir da perspectiva dos investigadores, é provável que o modelo possa ser útil como um protótipo para posteriores análises dos processos cognitivos da formulação de problemas, para articular e testar empiricamente um modelo teórico e ajudar educadores a criar novos entendimentos sobre os processos cognitivos necessários por estudantes na criação de problemas.

Na verdade, afirmam Cai et. al (2012), existem pelo menos duas razões pelas quais pode-se acreditar que o envolvimento em atividades de formulação de problemas devem ter um impacto positivo na aprendizagem dos alunos. Segundo os autores, a primeira razão é que as atividades de formulação de problemas geralmente são tarefas cognitivamente exigentes, quer se trate da criação de novos problemas com base em uma determinada situação ou reformular um problema já existente. Em segundo lugar, formular problemas pode ser uma atividade complexa, pois muitas vezes, requer para ir além dos procedimentos de resolução de problemas, pode fornecer ricos contextos intelectuais para o desenvolvimento matemático dos alunos.

Portanto, propor atividades em que os alunos serão formuladores de problemas só contribuirá para que eles sejam aprendizes autônomos, apresentem a compreensão dos conteúdos matemáticos, desenvolvam o raciocínio e a criatividade e se interessem pela Matemática. Nosso propósito é apresentar uma forma diferenciada de trabalhar a Matemática em sala de aula, pois acreditamos que a Formulação e Resolução de Problemas podem desencadear habilidades criativas muito importantes para a formação dos alunos.

2.4. Uma Relação entre a Formulação e Resolução de Problemas Matemáticos e a Criatividade

Nossa pesquisa não foca a criatividade nas aulas de Matemática, mas consideramos interessante comentar sobre algumas pesquisas que também trazem a Formulação e Resolução de Problemas atrelada a outras perspectivas como o potencial criativo dos alunos.

Dillon 1982 (citado por HARPEN; SRIRAMAN, 2011) alegou que não há uma teoria de Formulação de Problemas que tenha sido construída e que existem vários termos diferentes tais como a detecção de problemas, formulação de problemas, descobertas criativas de problemas, problematização. Também não temos conhecimento sobre uma teoria forte que relacione a Formulação e Resolução de Problemas à Criatividade, mas nós enquanto educadores matemáticos, independentemente de teorias, devemos promover a criatividade Matemática de nossos alunos.

De acordo com Silver (1997), a Formulação de Problemas juntamente com a Resolução de Problemas é fundamental para a disciplina de Matemática e para a natureza do pensamento matemático. Além disso, a pesquisa direcionada para o ensino da Matemática que compreende a Formulação e Resolução de problemas pode promover nos alunos abordagens mais criativas nesta área. De acordo com este autor, tanto a resolução quanto a formulação de problemas estão intimamente ligadas com a criatividade na aula de Matemática.

Alguns estudos focaram em tipos de tarefas que podem promover a criatividade Matemática. Em sua tese de doutorado, Gontijo (2007) cita a formulação, resolução e redefinição de problemas como uma estratégia metodológica que pode ser empregada para favorecer o desenvolvimento da criatividade em Matemática. Esse autor, que é psicólogo, fez uso dessas metodologias com o objetivo de examinar as relações entre criatividade, criatividade em Matemática e motivação em Matemática em uma amostra de 100 alunos, dos gêneros masculino e feminino do 3ª Ano do Ensino Médio de uma escola da rede privada do Distrito Federal. Os instrumentos utilizados foram o Teste Torrance de Pensamento Criativo, Teste de Criatividade em Matemática e Escala de Motivação em Matemática. Gontijo (2007) desenvolveu um teste de Criatividade em Matemática baseado na resolução de problemas, formulação de problemas e redefinição de elementos, que segundo ele possibilitam a expressão da criatividade em Matemática. Os resultados apontaram que em relação à criatividade em Matemática, os alunos do gênero masculino apresentaram desempenho superior em relação aos alunos do gênero feminino.

Na verdade a criatividade nem sempre é prevista ou planejada nas aulas, mas ela pode ser proporcionada. Segundo Levenson (2014) a perspectiva da sala de aula como um sistema complexo onde os alunos interagem entre si, com o professor e o conhecimento, pode nos proporcionar a possibilidade de examinar como a criatividade pode emergir. Essa autora acredita que podemos usar alguns princípios da Teoria da Complexidade, tais como diversidade interna, redundância e controle descentralizado, para organizar a sala de aula a fim de proporcionar o surgimento de diferentes aspectos da criatividade Matemática. Nesse caso, a Teoria da Complexidade leva em conta a interação dinâmica e, ao mesmo tempo, a interdependência dos participantes da sala de aula, concentrando-se em e dar sentido de como o conhecimento, e neste caso, o pensamento criativo, emerge no nível do grupo.

É importante que os professores estejam cientes que as propostas de tarefas que podem proporcionar o desenvolvimento da criatividade são apenas uma etapa para a criatividade Matemática. É preciso que, além disso, possam criar um ambiente em sala de aula que seja favorável as interações entre alunos, que incentive a partilha de ideias mediadas pelo professor para que os alunos se tornem autônomos e criativos.

Harpen e Sriraman (2011) em seu artigo *Criatividade e Formulação de Problema Matemático: Uma Análise da Formulação de Problemas de Matemática dos alunos do Ensino Médio* (ou seu equivalente curricular) na China e nos Estados Unidos comentam que há muito poucas tentativas de compreender a natureza da Criatividade

Matemática em estudantes do Ensino Médio, quando confrontados com tarefas Matemáticas novas.

Ainda sobre esse artigo, os autores dão continuidade a esses estudos através de uma pesquisa com estudantes do Ensino Médio (ou seu equivalente curricular) da China e dos EUA, cujo objetivo era explorar a criatividade em Matemática desses alunos através da análise de suas habilidades em formular problemas em cenários geométricos. Para isso, os autores investigaram e compararam os resultados de dois grupos de estudantes chineses, um da cidade de Xangai e outro de Jiaozhou com alunos dos EUA.

Os resultados indicam que há uma diferença na capacidade de formulação de problema matemático entre os três grupos. O grupo de Jiaozhou formularam problemas de maior diversidade do que os outros dois grupos. Um fator que os autores colocam como determinante nos resultados é a influencia do currículo das escolas e de experiências em Matemática. Os EUA são uma potência mundial e os alunos que participaram desse estudo eram alunos de uma escola modelo de uma Universidade, ou seja, alunos preparados matematicamente. Isto sugere que os alunos que são bons em resolver problemas matemáticos de rotina ou resolver testes matemáticos podem não ser bons em formular problemas matemáticos.

Portanto, o contexto escolar acaba causando certa influência nas habilidades criativas dos alunos, fazendo-se necessário uma investigação mais aprofundada também nesse aspecto se quisermos identificar as características de criatividade na formulação e resolução dos problemas dos alunos.

A palavra Resolução de Problemas tem uma extrema importância para o autor Brolezzi (2013) que acredita que ela ajuda a ver o valor que tem na vida das pessoas, pois significa ir adiante, tocar a vida, progredir, remover os obstáculos ao longo de nosso caminho. De maneira geral, um problema é como um obstáculo que nos impede de chegar a um caminho desejado e a Matemática constantemente apresenta-se como um problema para diversos alunos, que os impedem de progredir na aprendizagem escolar.

Pessoas consideradas inteligentes ou com excelente desempenho acadêmico nem sempre sabem lidar com problemas pessoais que, talvez, fossem facilmente solucionados por pessoas consideradas mais medianas. Resolver problemas do nosso cotidiano é tão importante como resolver problemas matemáticos, pois ambos nos ajudam a pensar sobre nossa maneira de pensar e agir. Parece até redundante “pensar sobre o nosso pensar”, mas é isso que acontece ou pelo menos deveria acontecer ao resolvermos problemas. Quando raciocinamos criamos estratégias que são fundamentais no processo de resolução de problemas e também na formulação deles.

Por isso, é importante ter um cuidado especial ao propor uma situação de aprendizagem baseada na Formulação e Resolução de Problemas. Devemos propor tarefas que instiguem a curiosidade do aluno e que chamem a sua atenção para o novo.

Sobre a Resolução de Problemas Geométricos, Milauskas (1994), afirma ter convicção de que o aluno aprende a resolver problemas resolvendo problemas de qualidade e ainda mais, toda tarefa escolar deveria incluir problemas planejados para estimular a criatividade e o raciocínio dos alunos. Esse autor enfatiza que seu objetivo é motivar professores para diferenciar suas aulas de Geometria apresentando problemas criativos que podem entreter os alunos e desafiar o próprio professor para criar e propor problemas e, continua afirmando, Milauskas (1994):

> Para mim o mais estimulante no ato de ensinar é ver o entusiasmo e o orgulho dos alunos quando se inspiram para utilizar técnicas que abstraíram de trabalhos anteriores. Esses lampejos de criatividade não são exclusivos dos melhores alunos. Muitos alunos “médios” também produzirão ideias inusitadas, dignas de discussões posteriores. (MILAUSKAS, 1994, p. 91)

Ideias inusitadas, citadas por esse autor, tem tudo a ver com o potencial criativo dos alunos. Ele sugere a utilização de problemas geométricos de qualidade pelos professores nas aulas de Matemática para aguçar a curiosidade dos alunos e os desafiarem a resolvê-los. Milauskas (1994) apresenta uma coletânea de problemas geométricos criativos seguidos de dicas e algumas resoluções e que diferem quanto ao nível de complexidade e as diversas técnicas de resolução de problemas que podem ser exercitadas. São problemas educativos muito interessantes que com certeza servem de estímulo tanto para resolvê-los como para estimular os professores a criarem seus próprios problemas e propor aos alunos.

Resolver problemas matemáticos é uma atividade que exige concentração. Formular e resolver problemas geométricos é ainda mais complexo, por que temos que ter um base boa em relação a alguns conceitos, propriedades de objetos geométricos, definições, nomenclatura de figuras ou sólidos e ao mesmo tempo pensar em uma situação que possa ser problematizada, atribuindo-lhe dados, incógnita.

Como é de nosso conhecimento, infelizmente, os alunos das escolas públicas de nosso Estado não têm uma base boa ou simplesmente não tem base alguma em relação ao conteúdo de Geometria, além disso, não estão acostumados com esse tipo de atividade. Mas, não podemos cruzar nossos braços e aceitar essa realidade. Nossos alunos, independente de ter conhecimentos sobre um conteúdo ou não, apresentam ideias diversificadas, basta que nós possamos estimular o potencial criativo de cada um e, para isso, podemos iniciar propondo a resolução de problemas simples, mas que permita o raciocínio dos alunos e, em seguida, propor que eles formulem seus próprios problemas.

CAPÍTULO 3

A PESQUISA

Este capítulo tem como finalidade descrever os procedimentos metodológicos utilizados na pesquisa, ou seja, o local no qual se realizou a pesquisa, os participantes, os instrumentos de coleta de dados e a forma como tabulamos e analisamos os dados.

3.1. Escolhas metodológicas

Buscamos responder a seguinte questão norteadora: Como é o processo de formulação e resolução de problemas geométricos por alunos do 3º Ano do Ensino Médio, com base em atividades com materiais manipulativos? Essa questão nos levou a formulação do seguinte objetivo geral:

Analisar o processo de formulação e resolução de problemas geométricos por alunos do 3º Ano do Ensino Médio de uma escola pública de Campina Grande-PB, com base em atividades com materiais manipulativos.

De acordo com o problema e levando em consideração os objetivos desse estudo, optamos inicialmente, por uma pesquisa de natureza qualitativa através de um estudo de caso de caráter interpretativo dos alunos da turma.

Buscamos observar todo o desenvolvimento dos processos envolvidos na pesquisa, desde a apresentação da proposta até a análise dos resultados das formulações e resoluções dos problemas dos alunos, interpretando suas produções. Portanto, a base para a investigação sobre a aquisição e análise dos dados dessa pesquisa é um estudo de caso interpretativo que, segundo Ponte (2006), esse tipo de estudo busca compreender detalhadamente o “como” e os “porquês” do acontecimento de determinado fato.

De acordo com Bogdan & Biklen (1994, p. 16) “(...) Os dados recolhidos são designados por qualitativos, o que significa ricos em pormenores descritivos relativamente a pessoas, locais e conversas.”. Ainda segundo esses autores, existem algumas particularidades que caracterizam a pesquisa qualitativa, são elas:

(i) A fonte direta de dados é o ambiente natural, o investigador torna-se o instrumento principal de recolha de dados;

(ii) Os dados recolhidos são predominantemente descritivos;

(iii) A investigação qualitativa incide mais nos processos do que nos resultados ou produtos que dela decorrem;

(iv) A análise dos dados tende a seguir um processo indutivo, não se pretendendo confirmar hipóteses prévias;

(v) Compreender o "significado" que os participantes atribuem às suas experiências assume uma importância vital para o investigador qualitativo (BOGDAN & BIKLEN, 1994, pp. 47-50).

Consideramos que essas características adéquam-se aos objetivos da presente pesquisa, pois se trata de um estudo do tipo naturalista visto que a sala de aula tornou-se um ambiente em que acontecem situações que pudemos considerar naturais, como por exemplo, a constante conversa entre os alunos, a preferência pelos amigos para participar de atividades em grupos, a ausência do professor regente durante a intervenção da pesquisadora, etc. É importante salientar também que nossa preocupação maior foi com o estudo dos processos a partir do contato direto com o ambiente da sala de aula em que estavam inseridos os alunos e não com os resultados.

Quanto aos objetivos, caracteriza-se como um estudo exploratório descritivo, pois têm por objetivo descrever completamente determinado fenômeno, como, por exemplo, o estudo de um caso para o qual são realizadas análises empíricas e teóricas (MARCONI & LAKATOS, 2003). Segundo as autoras, a descrição do objeto de estudo é tanto quantitativa quanto qualitativa, empregando procedimentos sistemáticos ou para obter observações empíricas ou para analisar os dados. Ainda sobre esse tipo de estudo, o autor Gil (1999) considera que a pesquisa exploratório-descritiva tem o objetivo de proporcionar uma visão geral ou aproximada sobre determinado fato além de descrever as principais características de determinado fenômeno.

No decorrer da coleta dos dados, interessava-nos as características dos problemas formulados e resolvidos pelos alunos da turma a partir das atividades de formulação e resolução de problemas geométricos por meio de tarefas que envolviam materiais manipuláveis. Nesse sentido, nos preocupamos em utilizar variados instrumentos de coleta de dados para perder o mínimo possível de aspectos para a análise dos dados.

A coleta de dados foi realizada durante quatro meses, de Junho à Setembro do ano letivo 2015 na sala de aula de uma turma do 3º Ano do Ensino Médio de uma escola pública estadual de Campina Grande, interior da Paraíba. Inicialmente, realizamos uma entrevista semi estruturada com o professor da turma, o qual chamamos pelo pseudônimo de Heleilton, com o objetivo de conhecer um pouco sobre sua prática letiva, principalmente referente aos conteúdos de Geometria na turma que foi escolhida para este estudo.

Os instrumentos que utilizamos para coletar os dados foram: *a gravação em vídeo e áudio* de todos os encontros realizados na turma que foram um total de oito, *as notas de campo* da pesquisadora a partir da observação participante, *o registro dos alunos* realizado durante a realização das cinco tarefas que propomos e *a entrevista semiestruturada* tanto com o professor da turma como com uma aluna de um dos grupos que mais se destacou ao longo das atividades e quanto à formulação e resolução de problemas geométricos.

Para o estudo de caso da turma, apresentamos as formulações e resoluções dos problemas de três grupos, 02, 04 e 05 e destacamos de maneira mais detalhada as interações e respostas do Grupo 02 que, em meio às suas dificuldades, continha uma das alunas que mais se destacou por ter participado ativamente de todas as atividades que foram propostas e que apresentou um desenvolvimento considerado satisfatório ao longo das atividades, formulando e resolvendo melhores problemas geométricos em relação aos demais alunos da turma.

Para analisar os problemas que foram formulados por esse grupo e suas respectivas respostas, procuramos observar a quantidade, a qualidade e a complexidade deles em relação à turma como um todo.

3.2. O Contexto e a Caracterização do ambiente da intervenção

3.2.1. Contexto da Pesquisa

Nossa pesquisa fez parte de um projeto maior, intitulado: *Investigando a Formulação e a Resolução de Problemas Matemáticos na Sala de Aula: Explorando Conexões entre Escola e Universidade*, desenvolvido no âmbito do Programa Observatório da Educação, financiado pela CAPES, do qual a mestranda foi bolsista/pesquisadora. A proposta desse Projeto é analisar como os alunos do Ensino Fundamental, Ensino Médio e uma turma de Licenciatura em Matemática concebem, formulam e resolvem problemas matemáticos a partir de diferentes tipos de texto (no sentido backhtiniano), diferentes materiais manipuláveis e diferentes materiais tecnológicos.

Optamos por trabalhar com alunos de uma turma do 3º Ano do Ensino Médio, por entendermos que os alunos deste Ano já tiveram a oportunidade de estudar os conceitos geométricos, além de estarem na fase final da Educação Básica onde alguns pretendem exercer uma profissão e a Geometria é um conteúdo bastante importante que permeia diversas áreas.

Inicialmente, identificamos o conteúdo a ser trabalho, que foi o de Geometria Espacial, mas especificamente, os Poliedros de Platão, pois geralmente os alunos do Ensino Médio apresentam bastante dificuldades de aprendizagem nesse conteúdo, principalmente no Estado da Paraíba, que ainda falta um trabalho efetivo para incluir uma proposta pedagógica que implemente esse conteúdo no currículos da escolas públicas de nosso estado.

Além disso, escolhemos para este estudo, trabalhar com materiais manipuláveis por entendermos que podemos associar a representação de modelos de sólidos geométricos à materiais manipuláveis, permitindo aos alunos um momento de visualização, exploração, no qual eles podem relacionar conteúdos geométricos com situações mais concretas, desafiando e aguçando sua criatividade.

E por fim, a Resolução de Problemas é uma das metodologias de ensino mais discutida a nível mundial e a Formulação de Problemas é uma proposta mais recente, porém, ainda há muito a ser explorado nas aulas de Matemática.

3.2.2. A escola

A pesquisa foi realizada em uma Escola Pública Estadual de Ensino Médio no bairro Catolé, em Campina Grande-PB.

A escola funciona em dois turnos, manhã e tarde. No turno da manhã os alunos assistem aulas das disciplinas básicas e no turno da tarde deveriam permanecer na escola para as aulas de macro campo. Porém, como ainda não estava funcionando essas aulas de macro campo, nesse espaço de tempo aconteciam reuniões pedagógicas para a estruturação desses projetos. No turno da manhã funcionam as três séries do Ensino Médio (1º, 2º e 3º Ano), com aproximadamente um total de 700 alunos na faixa etária de 14 a 19 anos.

Na escola trabalham duas coordenadoras pedagógicas, um professor articulador do Ensino Médio Inovador, que trabalha exclusivamente com os professores na questão de planejamento de aulas, 46 professores, todos possuindo Licenciatura, muitos com Especialização, alguns com Mestrado e poucos com Doutorado.

Fisicamente, a escola possui uma boa estrutura, contando com 21 salas de aula, diretoria, biblioteca, cantina, pátio, uma sala para diretoria, uma sala para vice-diretoria, um sala para secretaria, uma sala para coordenação pedagógica, uma sala de professores, uma sala de leitura, Laboratórios de Química, Física, Matemática e Informática, ginásio para a prática esportiva e uma sala climatizada com aparelho data-show, para possíveis reuniões e apresentações.

Para a escolha dessa escola levamos em consideração o fato de ser bem organizada e considerada por várias pessoas do município, uma boa escola. Além disso, foi a escola que teve o segundo lugar no IDEB das escolas públicas e ano passado, um aluno do 3º Ano passou em 1º lugar entre os alunos das escolas públicas para o curso de Medicina na Universidade Federal de Campina Grande.

A escola atende alunos tanto da zona urbana, rural e também alguns municípios ao redor de Campina Grande, como Massaranduba, Queimadas e Remígio. Funciona em tempo integral com o Ensino Médio Inovador. Além das disciplinas básicas, os alunos têm disciplinas de macro campo, alguns obrigatórios como, por exemplo, leitura e letramento, acompanhamento pedagógico e iniciação científica e outros opcionais como, cultura corporal e cultura digital. Infelizmente, como foi relatado pela Coordenadora Pedagógica, em uma conversa conosco, esses projetos macro campo, começaram a efetivar-se somente ao final de nossa coleta de dados. Segundo ela, por falta de verba do Governo do Estado da Paraíba para a merenda e almoço dos alunos, que deveriam permanecer em tempo integral na escola.

3.2.3. Materiais manipuláveis utilizados

Os materiais manipuláveis utilizados nessa pesquisa foram: Modelos de sólidos geométricos em acrílico: o cubo, o cone, o cilindro, a esfera, as pirâmides de base triangular, quadrada e hexagonal, prismas de base triangular, quadrada e hexagonal e os cinco Sólidos de Platão. Moldes dos Sólidos de Platão em cartolina guache, representação de polígonos regulares feitos também em cartolinas guache, régua, cola.

3.3. Instrumentos e procedimentos de coleta dos dados

Em uma investigação qualitativa é muito importante obter informações de variadas fontes. Utilizamos os seguintes instrumentos coleta de dados de nossa pesquisa: as entrevistas semiestruturadas, a observação participante e cinco tarefas que foram propostas para que possamos interpretar as características dos problemas formulados e resolvidos pelos alunos.

3.3.1. A entrevista

A entrevista é uma das principais técnicas de coleta de dados e pode ser realizada através de uma conversa formal ou informal face a face com o entrevistado. De acordo com Bogdan & Biklen, (1994), a entrevista pode ser utilizada como um instrumento de coleta de dados descritivos na linguagem do próprio participante, permitindo, assim, que o pesquisador consiga desenvolver de maneira intuitiva uma ideia a respeito do modo como os participantes interpretam aspectos do mundo.

A primeira etapa da pesquisa foi a realização de uma *entrevista semiestruturada* com o professor da turma. Apesar de o foco de nossa investigação não ter sido o professor, buscamos com a entrevista elaborar um diagnostico a respeito de aspectos de seu perfil profissional, concepções que o professor tem acerca do ensino de Geometria, da formulação e resolução de problemas nas aulas de Matemática e também sobre o uso de materiais manipulativos nas aulas de Matemática. Foi a partir das respostas do professor que obtemos o conhecimento a cerca do perfil dos alunos para que pudéssemos elaborar as Atividades.

Marconi e Lakatos (2003) apresentam algumas vantagens na utilização da técnica de entrevista, tais como, maior flexibilidade, oportunidade de conseguir informações mais precisas e de avaliar atitudes. Além disso, permite que o entrevistador repita ou esclareça perguntas e permite o registro de gestos e reações do entrevistado.

As autoras apresentam também algumas limitações que devem ser consideradas na fase de coleta de dados, como falta de compreensão ou motivação do entrevistado, dificuldade de expressão e comunicação de ambas as partes. Essas limitações podem ser trabalhadas para que não prejudiquem a qualidade da entrevista.

Essa técnica de coleta de dados também foi utilizada na última etapa de nossa pesquisa quando entrevistamos uma aluna do grupo o qual destacamos durante o desenvolvimento de todas as atividades, Samara. Buscamos investigar entre outras, as considerações que Samara fiz sobre o ensino de Geometria nas aulas de Matemática, sobre a oportunidade de formular e resolver seus próprios problemas e sobre o que ela identificou como maior dificuldade durante a realização das atividades.

3.3.2. A observação

A observação também é considerada uma técnica de coleta de dados para conseguir informações sob determinados aspectos da realidade que normalmente não são acessíveis por outras técnicas. Ela ajuda o pesquisador a "[...] identificar e obter provas a respeito de objetivos sobre os quais os indivíduos não têm consciência, mas que orientam seu comportamento" Marconi e Lakatos (,2003, p. 191). A observação de certa forma permite ao pesquisador ter um contato mais direto com a realidade, pois podemos compreender as ações dos alunos, que são quase sempre espontâneas durante a realização das tarefas.

Para uma melhor investigação e posterior estudo de caso, utilizamos uma observação participante desde a formulação do problema de pesquisa até a análise e interpretação dos dados, porém foi na fase de coleta de dado que a observação se tornou mais evidente.

Em nossa pesquisa o objeto de investigação são os registros de formulações e resoluções dos problemas elaborados e resolvidos pelos alunos.

Durante todo o momento da coleta de dados estivemos realizando observações para melhor entender como os alunos de cada grupo se expressavam, como eles participavam das atividades e a maneira como eles interagiam entre si. Para isso contamos com notas de campo, onde a cada intervenção estivemos anotando alguns fatos como, por exemplo, a maneira como os alunos estabeleciam uma classificação dos sólidos para agrupá-los ou o grupo que possui uma habilidade maior ao se expressar oralmente em relação às características de figuras geométricas.

Também contamos com a gravação de vídeos e áudios que incidiram inicialmente sobre todos os grupos e, posteriormente incidiram somente nos alunos dos grupos 02, 04 e 05 e, mais ainda sobre o Grupo 02. "A abordagem da investigação qualitativa exige que o mundo seja examinado com a ideia de que nada é trivial, que tudo tem potencial para construir uma pista que nos permita estabelecer uma compreensão mais esclarecedora do nosso objeto de estudo" (BOGDAN & BIKLEN, 1991, p.41). A utilização da máquina de filmar deve-se ao fato de registrar momentos que poderiam ter passados despercebidos pela investigadora como, por exemplo, a maneira que os alunos manipulavam os materiais para responder às tarefas e posteriormente formular os problemas.

3.3.3. As tarefas de formulação e resolução de problemas geométricos

As tarefas propostas aos alunos, referentes ao conteúdo de Geometria Espacial, totalizaram cinco. As duas iniciais objetivavam, por meio de suas atividades adaptadas de Oliveira e Gazire (2012), propor um contato dos estudantes da turma com os Sólidos geométricos, visto que a maioria afirmou não conhecê-los, para que eles pudessem identificar características, discutir, compartilhar ideias. É importante destacar a diferença entre tarefas e atividades. De acordo com Ponte (2014),

> (...) a tarefa representa apenas o objetivo de cada uma das ações em que a atividade se desdobra e é exterior ao aluno (embora possa ser decidida por ele). (...) a aprendizagem resulta da atividade, não das tarefas, e o mais determinante são sempre as atitudes e conceções dos atores envolvidos. (PONTE, 2014, p. 15)

Segundo esse autor, as tarefas geralmente são propostas pelo professor com o principal objetivo de apoiar a aprendizagem e os alunos interpretam-nas de modo que podem dar origem a diversas ou nenhuma atividade. Em resumo, a atividade depende da tarefa proposta e de uma sistematização didática proposta pelo professor.

Então, propomos cinco tarefas relacionadas ao conteúdo de Geometria Espacial para que os alunos pudessem ter um suporte básico para suas formulações. Ao final das atividades realizadas com as duas tarefas iniciais, realizamos uma síntese de todos os conceitos envolvidos e de tudo que os alunos vivenciaram. Para as últimas três tarefas, optamos por propor aos alunos atividades baseadas na situação de formulação de problemas *semiestruturada* citadas em Stoyanova e Ellerton (1996) e fazendo uso também das duas estratégias citadas por Boavida et al (2008): "*E se em vez de?*" e "*Aceitando os dados*".

3.4. Instrumentos e Categorias de análise dos dados

Após o contato inicial com os participantes da pesquisa e a fase de coleta de dados, segue a fase da análise sistemática dos dados, que segundo Yin (2010), “consiste no exame, na categorização, na tabulação, no teste ou nas evidências recombinadas de outra forma, para tirar conclusões baseadas empiricamente” (YIN, 2010, p. 154). De acordo com Bogdan e Biklen (1994), a análise de dados é:

> “(…) O processo de busca e de organização sistemático de transcrições de entrevistas, de notas de campo e de outros materiais que foram sendo acumulados, com o objetivo de aumentar a sua própria compreensão desses mesmos materiais e de lhe permitir apresentar aos outros aquilo que encontrou. A análise envolve o trabalho com os dados, a sua organização, divisão em unidades manipuláveis, síntese, procura de padrões, descoberta dos aspectos importantes e do que deve ser aprendido e a decisão sobre o que vai ser transmitido aos outros” (BOGDAN & BIKLEN, 1994, p. 205).

Em resumo, para analisar os dados, precisamos compreender e sistematizar toda a informação que foi colhida, objetivando responder a questão que norteia a pesquisa.

Em nossa pesquisa, começamos a analisar os dados durante o processo de coleta dos mesmos e intensificamos após o término de nossa intervenção. Todos os dados foram organizados e cuidadosamente analisados de acordo com o problema de pesquisa e o enquadramento teórico adotado.

A primeira etapa da análise dos dados baseou-se na transcrição na íntegra de todas as sessões gravadas em vídeos e áudios. Em seguida, foi executada a leitura dos vários dados recolhidos (respostas ao questionário, transcrições dos áudios e vídeos e registros escritos tanto dos alunos como das notas de campo da pesquisadora).

Então, depois de organizar todos os instrumentos de coleta de dados, delimitamos as Categorias de Análise que nos ajudou a analisar os dados com base nos objetivos como sugerem Bogdan e Biklen (1994). A Categoria de Análise a Priori foi *o Nível de conhecimento geométrico dos alunos da turma ao término do Ensino Médio*. Essa categoria foi estabelecida no momento em que planejamos as duas atividades iniciais, onde os alunos em grupo, podiam manipular os matérias concretos e responder as atividades relacionada a Geometria Espacial.

Ao darmos continuidade em nossa intervenção, percebemos a importância do estabelecimento de uma análise qualitativa para interpretar a estrutura dos problemas formulados e suas respectivas resoluções. Estabelecemos uma categoria de análise a Posteriori para os problemas formulados pelos alunos que foi *Problemas não geométricos* e *Problemas geométricos*. Os *problemas não geométricos*, caracterizamos por questões em forma de texto que não podem ser considerados problemas ou que não são resolvidos por mecanismos matemáticos. E os *problemas geométricos*, caracterizamos como questões que utilizem em seu contexto objetos e propriedades do espaço geométrico. Os problemas geométricos foram analisados e divididos em *Problemas geométricos com dados numéricos* e *Problemas geométricos sem dados numéricos*, ambos respeitam as condições de um problema geométrico e podem aparentemente serem resolvidos.

Porém, *Problemas geométricos com dados numéricos* foram analisados em relação à estrutura do problema, uma aparente ligação entre o contexto, a realidade do cotidiano e a linguagem Matemática utilizada. Já os *Problemas geométricos sem dados numéricos* foram analisados a partir das informações específicas do problema com a utilização ou não dos dados e da incógnita para a solução. Em seguida apresentamos o Quadro 02 com as categorias de problemas e alguns exemplos dos problemas elaborados pelos alunos da turma.

Quadro 02: Categorias de problemas

(continua)

Categoria		Descrição	Exemplo
Problemas não geométricos		Textos que não podem ser considerados problemas ou que não são resolvidos por mecanismos matemáticos.	A que poliedro pertence o nome de hexágono: quantos lados, vértices e aresta ele possui?

(conclusão)

Categoria		Descrição	Exemplo
Problemas geométricos	**Problemas geométricos com dados numéricos**	Textos que apresentam dados numéricos, uma ligação entre o contexto e a realidade do cotidiano e utiliza uma linguagem Matemática adequada.	Gealanzia de Jesus pretende fazer uma cisterna no solo de seu quintal, medindo 2 metros de altura e sua base 2 m e a lateral 2 metros em formato de Hexaedro. Gealanzia tem um quintal de $10m^2$, o quintal de Gealanzia tem capacidade para suportar essa cisterna?
	Problemas geométricos sem dados numéricos	Textos que não apresentam dados numéricos e incógnita para a solução.	Descreva as características que define cada sólido de Platão. E qual(is) sólido(os) encontramos com mais frequência no nosso cotidiano.

Fonte: criação nossa

Em cada caso, a ênfase na Resolução de Problemas é em relação às estratégias que são utilizadas como: O nível de facilidade na resolução, a quantidade de soluções para um mesmo problema e as operações que são utilizadas na resolução.

Uma vez que os problemas geométricos dos alunos foram categorizados, foi realizada uma contagem para saber a quantidade de problemas que a turma formulou. Bogdan e Biklen (1994) enfatizam que o estudo de caso pode ser comparado com um funil em que a parte mais larga é o inicio do estudo e à medida que iremos categorizando os dados, eles se estreitam de modo que possamos interpretar os resultados e verificar nossa hipótese. Esse estreitamento dos dados ocorreu na última etapa quando interpretamos os resultados observados a partir de um estudo mais aprofundado, o estudo do caso da turma com destaque a três grupos e mais ainda, ao Grupo 02, em termos de suas possíveis produções, que veremos mais adiante nos próximos capítulos.

CAPÍTULO 4

A TURMA E AS DUAS ATIVIDADES INICIAIS QUE FORAM DESENVOLVIDAS COM BASE NOS MATERIAIS MANIPULÁVEIS

Nesse capítulo, apresentaremos o desenvolvimento da turma na primeira etapa da pesquisa com os alunos e os resultados obtidos. A primeira etapa trata-se das duas atividades iniciais que foram realizadas pelos alunos da turma. Estas atividades visavam revisar sobre os sólidos geométricos, os Poliedros e Poliedros de Platão. Apresentamos também o professor da turma, o qual identificamos pelo pseudônimo de Heleilton e comentamos de modo geral sobre os alunos da turma.

4.1. O professor e a turma do 3° Ano

O professor, o qual passamos a chamar pelo pseudônimo de Heleilton, possui formação inicial em Licenciatura em Matemática e uma Especialização em Tecnologia da Educação. Exerce a profissão há trinta anos, não tem outra formação e nem outra atividade profissional. Faz críticas à falta de conhecimentos básicos que os alunos têm e afirma que eles cometem erros operacionais, pois conseguem entender o problema, mas por falta de atenção erram nos cálculos.

Em relação ao conteúdo de Geometria, o professor confessa que, geralmente, não aborda, porém esse ano ele abordou com os alunos o conteúdo de Geometria Analítica, mas relata que o corpo docente de sua escola prefere selecionar os conteúdos que por ventura são exigidos no ENEM. Heleilton comenta sobre a importância do ensino de Geometria ser efetivo desde as Séries Iniciais, principalmente se for feito analogias com situações reais e depois uma sistematização algébrica, pois segundo ele, "*os alunos criam antipatia com a disciplina e não entendem exatamente o que fazer*". Quando questionado se a abordagem que teve de Geometria durante a graduação é suficiente para ensiná-la aos seus alunos, o professor respondeu que não. No entanto, considera ser capaz de abordar esse conteúdo, pois segundo ele, aprendemos com a prática.

O professor acredita que o trabalho com material manipulativo só apresenta pontos positivos, principalmente se os próprios alunos confeccionarem o material, pois eles gostam de participar de atividades. Em outro momento posterior a entrevista, ele relatou que quando foi professor de uma disciplina em uma Universidade Privada, realizou um trabalho com materiais manipulativos que gerou resultados positivos, porém confessa nunca ter trabalhado com seus alunos, pois segundo ele, não foi professor desses alunos ano passado e esse ano o foco é no ENEM onde as atenções se voltam para a contribuição com macetes e conteúdos do 3º Ano.

Em relação à Resolução de Problemas, demonstra preocupação, pois os alunos não costumam ler e, por isso, apresentam dificuldade em interpretar um problema. Heleilton afirma que já trabalhou resolução de problemas em sala de aula com seus alunos por algumas aulas, mas eles não têm costume em raciocinar acabam querendo seguir um modelo determinado para a resolução.

Por fim, mostrou-se entusiasmado com a possibilidade de os alunos formularem e resolverem seus próprios problemas nas aulas de Matemática e acredita que possam ser criativos, pois segundo ele, "*acho que depende do incentivo que eles recebem... eles podem ate não ter interesse, mas se nós provocá-los eles são criativos*".

Na escola em que foi realizada nossa pesquisa, funcionam quatro turmas de 3º Ano do Ensino Médio. A turma escolhida tem aproximadamente 35 alunos, sendo 19 meninas e 16 meninos, na faixa etária de 16 a 19 anos. Escolhemos o 3º Ano D, pois o único professor de todos os 3º Anos dessa escola, Heleilton, nos informou que dentre as outras, essa era a turma em que os alunos são mais interessados, participativos e possuía um rendimento razoável em matemática.

Nossa proposta foi inicialmente de desenvolver todas as atividades em grupos com quatro alunos cada. Porém, por questão de afinidades, os alunos preferiram montar seus próprios grupos, totalizando cinco grupos com quatro alunos e dois grupos com três alunos. Durante os meses em que intervimos nas aulas dessa turma, pudemos observar que os alunos não estavam habituados a trabalhar em grupo, em vários momentos foi preciso chamar a atenção de alguns alunos que preferiam realizar as atividades individualmente para que eles interagissem com os demais alunos de seu grupo.

As aulas eram, por várias vezes barulhentas, devido a grande agitação dos alunos em se trabalhar com materiais manipulativos e a ausência do professor regente na sala de aula durante todas as atividades realizadas pela pesquisadora.

Observamos inicialmente com mais atenção, três grupos com quatro alunos cada, os quais nomeamos Grupo 02, Grupo 04 e Grupo 05. Esses grupos possuíam alunos comunicativos, com rendimentos variados e tinham pelo menos um aluno que mais se destacava entre os demais. Porém, na análise dos dados, optamos por destacar um grupo que possuía uma aluna que, dentre todos os outros alunos, não faltou nenhuma das atividades, prestava bastante atenção, tirava dúvidas, buscava interagir com seus colegas de grupo mesmo tendo que desenvolver as atividades praticamente só. Essa aluna, do Grupo 02 como já adiantamos, chamamos pelo pseudônimo de Samara e ela foi a quem mais se destacou em relação formulação e resolução de problemas geométricos, além de ser uma aluna de bom rendimento em Matemática.

Os demais grupos sempre ficavam desfalcados por alguns dos alunos, comprometendo a interação, o diálogo, a exposição de ideias entre todas as atividades. Alguns grupos, por mais que insistíssemos ou ajudássemos, não realizavam todas as atividades, sobretudo as principais que era a formulação e resolução dos problemas geométricos.

Como o professor Heleilton só possuía uma aula por dia nessa turma, combinamos com ele de trocar pelo menos uma aula com outro professor para que pudéssemos permanecer por duas aulas seguidas com a turma, pelo menos uma vez por semana. Assim foi feito e a partir das informações do professor com a entrevista semiestruturada, preparamos o roteiro das atividades que foram realizadas e serão explicitadas a partir de agora.

4.2. Tarefas e atividades que foram realizadas

4.2.1. Primeira tarefa: Distinguindo as figuras espaciais...

A primeira tarefa ocorreu no dia 15 de Julho de 2015. Para a primeira atividade, conseguimos a quarta e a quinta aula desse dia. Atendendo ao nosso pedido, Heleilton reservou um aparelho data show e ficou na sala apenas durante a quarta aula, pois ele teria que estar em outra turma na aula seguinte, então pediu que os alunos colaborassem conosco, deixando-nos a sós.

A escola apresenta uma boa estrutura física e, apesar de possuir um espaço onde funciona o Laboratório de Matemática, preferimos realizar a primeira atividade na sala de aula. Nesse dia estavam presentes vinte e seis alunos. Depois de montado o data show, posicionada a câmera e os gravadores, iniciamos com alguns questionamentos aos alunos através de animações em Power Point. O objetivo desses questionamentos era propor um clima inicial agradável, além de buscar uma primeira participação oral dos alunos.

O primeiro questionamento foi: “Vocês gostam de Matemática?”. Pedimos para que os alunos respondessem de forma sincera. O professor da turma que estava presente durante a quarta aula até brincou dizendo: *“ó, eu to aqui viu!”*. Vários alunos comentaram que sim outros não, uma aluna até chegou a comentar que a Matemática tem seu lado legal sim, principalmente quando ela entende, mas às vezes é chata por que tem muitos números e muitas contas.

Em seguida, comentamos que muitos alunos tem pavor à disciplina de Matemática então, indagamos: “Por que a Matemática é considerada o terror de muitos alunos? Vocês apresentam dificuldades em Matemática?”. Uma aluna nos respondeu: *“É porque são muitos números aí fica muito complicado”*, completando essa fala, outra aluna nos disse: *“às vezes o professor e o assunto também ajuda muito né?”*. Um aluno complementando a fala anterior disse: *“as pessoas tem preguiça de pensar”*. Já outra aluna de maneira explicada nos disse que: *“a falta de capacitação dos professores também influencia muito na aprendizagem do aluno e também a Matemática é uma disciplina lógica, você tem que pensar bastante e normalmente as pessoas não gostam de raciocinar”*. A fala dessa aluna reflete no que Lorenzato (1995) escreveu em seu artigo: Por que não ensinar Geometria? Há dez anos esse autor apresentou algumas causas da omissão geométrica que ocorriam na sala de aula e uma delas foi justamente “[...] muitos professores não detêm os conhecimentos geométricos necessários para realização de suas práticas pedagógicas” (LORENZATO, 1995, p. 3), então acabam entrando em um dilema ou tentam ensinar Geometria sem conhecê-la bem ou então não ensinam. Sempre indagávamos os alunos, buscando escutar as diversas opiniões deles a cerca da Matemática e, em especial da Geometria. Quando ninguém mais opinou, passamos para o próximo questionamento.

A segunda pergunta foi voltada especificamente para a Geometria, “O que vocês entendem por Geometria?” as respostas iam surgindo simultaneamente, alguns alunos falaram palavras que lhes lembravam o assunto Geometria, como: *“triângulo”*, *“área, perímetro”*, *“ângulos”, “retas”, “arestas”,* já outras duas alunas definiram Geometria como sendo: *“é a medida dos espaços”, “medição do espaço geográfico”*. Nesse momento, os alunos ficavam nos indagando se estavam corretos e sobre a definição correta de Geometria. Percebemos que eles eram bastante curiosos, pois apesar de responderem, nos perguntavam a definição correta de Geometria e nós sempre dizíamos que ainda não iríamos comentar, pois é importante saber primeiro o que os alunos entendem e quais são seus conhecimentos prévios.

Outra pergunta ainda relacionada à Geometria, foi: “Quais os objetos de nosso dia a dia que podemos relacionar com objetos geométricos?”. As respostas foram: *“tudo”*, *“papel”*, *“quadro”*, *“caderno”*, *“celular”*, *“tablet”*, *“a própria sala de aula”*, *“a janela”, “o quadro”, “a cerâmica”, “o relógio”, “a porta”.* Nesse momento eles ficaram eufóricos, todos falavam ao mesmo tempo pelo menos alguns objetos do dia a dia que lembre um objeto geométrico, inclusive falaram que nosso brinco também era um objeto geométrico por ele ter a forma de um quadrado. Percebemos que os alunos conseguem relacionar objetos encontrados em nosso cotidiano com alguns objetos geométricos.

Nossa proposta inicialmente era de desenvolver todo o trabalho e as atividades em grupos formados por três alunos. Sendo assim perguntamos, “Vocês acreditam que possamos realizar um trabalho efetivo em equipes nessa turma?”. Os alunos rapidamente responderam que sim. Então perguntamos, “O que vocês entendem por trabalho em equipe?”. Alguém respondeu: “*um ajudar o outro*” ou “*todos se ajudarem*”. Propomos realizar um trabalho em equipe e reforçamos a necessidade de essas equipes permanecerem até o final da pesquisa. Continuando, pedimos para que os alunos se dividissem em grupos de três, mas eles foram bastante resistentes, disseram que já possuíam seus grupos e queriam trabalhar em quarteto. Por mais que houvéssemos insistido na importância dos grupos com três alunos, eles insistiram nos quartetos. Como na turma estavam presentes vinte e seis alunos, conseguimos formar dois grupos com três alunos e cinco grupos com quatro alunos.

Assim que os alunos se organizaram em seus grupos, apresentamos para eles vários sólidos geométricos confeccionados em acrílico para que eles pudessem manipulá-los e assim, darmos início a primeira atividade, denominada: **Distinguindo as Figuras Espaciais**. O objetivo principal da primeira atividade foi propor observação e discussão de ideias entre os alunos para que eles pudessem tratar das características dos sólidos geométricos e assim descobrirem que eles dividem-se em dois grandes grupos formais: os Poliedros e os Corpos Redondos. Inicialmente, deixamos os alunos manipular livremente os sólidos observando os comentários entre eles, se conseguiam reconhecer os sólidos, se sabiam os nomes e se observavam as características de cada um deles.

Alguns alunos observaram que os sólidos eram transparentes e explicamos que eles eram confeccionados em acrílico, outros alunos observaram que eles possuíam um furo, então explicamos que o furo servia para preenchê-los com água, areia ou qualquer outro material. Explicamos aos alunos que existem sólidos confeccionados com vários tipos de materiais além do acrílico, como por exemplo, em madeira, com cartolina, com canudinhos de refrigerante, em barra de sabão, etc.

Para iniciar a primeira atividade, pedimos que cada grupo escolhesse dois dos sólidos. Nesse momento vários alunos correram para escolher com quais sólidos iriam ficar e, assim, indagamos se eles já tiveram a oportunidade de manipular alguns sólidos geométricos como estavam fazendo, mas apenas uma aluna do Grupo 01 comentou que já teve contato com alguns sólidos quando ela participou de uma gincana em uma escola particular no seu Ensino Fundamental.

Entregamos para cada grupo uma Ficha de Registros de Observações e explicamos aos alunos a importância de preenchê-la com seus nomes para que pudéssemos identificar os grupos e eles, discutirem com seus colegas sobre as formas dos sólidos, as principais características, as semelhanças e diferenças para que fossem registradas por escrito na Ficha que lhe entregamos. Na figura 02 abaixo, temos alguns grupos registrando as observações.

Figura 02: Alunos manipulando os sólidos e preenchendo a Ficha de Registro.

Fonte: nossos registros

Alguns alunos nos procuraram para um melhor esclarecimento sobre essa atividade e mais uma vez eles insistiam em nos perguntar sobre a forma das figuras e seus nomes, mas sempre reforçávamos que eles buscassem lembrar os conceitos que haviam estudado antes, pois nós não podíamos intervir em suas respostas.

No desenvolvimento dessa atividade, percebemos algumas dificuldades para nomear as figuras, pois muitos alunos tentaram escrever os nomes dos sólidos, mas confundiram-nos com suas formas como, por exemplo, o Grupo 03 que escolheram um Hexaedro (Cubo) e um cone, mas registraram na Ficha que as formas dessas figuras eram "*quadrado e cone*". O Grupo 06, que estava com uma Pirâmide de base quadrangular e um Tetraedro em mãos, registrou que suas formas eram respectivamente "*pirâmide e triângulo*", ou seja, percebeu que como o tetraedro é formado apenas por triângulos equiláteros sua forma seria apenas de triângulos. Os alunos de ambos os grupos, apresentaram dificuldades para nomear as figuras, pois, olharam apenas para as formas das figuras e atribuíram seus nomes. Percebemos que o Grupo 04 respondeu corretamente, eles possuíam em mãos um Hexaedro (Cubo) e uma esfera e responderam que a forma dessas figuras eram "*quadrado e círculo*".

O grupo 02, o qual Samara estava inserida, escolheu uma Esfera e uma Pirâmide de base Triangular (Tetraedro) e em suas anotações nos surpreendeu ao apresentar características de elementos geométricos que não eram esperados pela pesquisadora.

Segundo essa aluna, ela tinha em mãos um objeto redondo que rola e apresenta um preenchimento representando seu diâmetro referindo-se à Esfera, que realmente demarcava em seu interior o diâmetro e também o hemisfério, que é a metade da esfera. O outro sólido é um objeto reto com "*lados*" equiláteros e ângulos agudos que tem quatro vértices e quatro faces referindo-se ao Tetraedro. Além das palavras "*diâmetro*", "*lados equiláteros*" e "*ângulos agudos*", todas referentes a elementos da Geometria Plana, ela também identificou os elementos básicos de um Poliedro que são faces e vértices, faltando citar apenas a quantidade de arestas.

Na questão das semelhanças e diferenças, essa aluna registrou que os objetos são semelhantes por serem geométricos e confeccionados em acrílico. Para as diferenças, registraram que os formatos são diferentes, pois o círculo apresenta uma marcação de 180º com seu centro, não apresenta vértices e sua massa é maior. Já o triangular, todos os lados podem ser base. Samara apresenta uma boa visão geométrica, sabe reconhecer sólidos geométricos e diferenciá-los de figuras planas, reconhece algumas particularidades como, por exemplo, no Tetraedro (mesmo sem saber o nome), todos os "lados" (na verdade seriam faces) podem ser usados como base. Além disso, se referiu a massa do circular dizendo que era maior que a do outro sólido. Encontramos em Kaleff

(2003) que ao disponibilizarmos um apoio didático baseado principalmente em materiais concretos que representem o objeto geométrico em estudo, podemos desenvolver a habilidade de visualização dos alunos. No entanto, essa habilidade ainda segundo a autora, não é uma característica inata a todas as pessoas, existe pessoas "visualizadoras" e pessoas "não-visualizadoras" e, Samara, embora não tenha estudado Geometria Espacial no Ensino Médio, pode ser considerada uma pessoa "visualizadora", por detalhar algumas características das semelhanças e diferenças dos sólidos.

Ao término dessa atividade, voltamos aos slides e perguntamos aos alunos: "Esses sólidos que vocês têm em mãos pertencem a um mesmo grupo de sólidos ou a grupos diferentes?". Todos responderam que pertenciam a grupos diferentes. Foi então que lançamos a segunda pergunta: "Que critérios vocês usaram para separar esses grupos?". Houve algumas respostas do tipo: "*o número de vértices e arestas*", "*as formas entre eles*". A próxima pergunta foi: "Quais as semelhanças e diferenças entre esses grupos?". Nesse momento pedimos para que pelo menos um aluno representante de seu grupo ficasse de pé e apresentasse para os demais os sólidos que escolheram e as suas conclusões a respeito da análise feita. Todos os alunos de todos os grupos participaram ativamente das apresentações mostrando-se bastante empolgados. Alguns alunos até comentaram que nunca tiveram um momento como esse numa aula de Matemática. Consideramos importante dar a oportunidade de os próprios alunos exporem suas conclusões oralmente e não só escrita por meio da folha de registro.

Com o objetivo de levar os alunos a observarem e concluírem a partir de suas observações que existem dois grandes grupos de sólidos geométricos, os Poliedros e os Corpos Redondos, propomos uma dinâmica em que um grupo iria observar as características de seus dois sólidos e criar uma regra para agrupá-los. Os demais alunos iriam agrupar seus sólidos aos já agrupados pelo grupo anterior ou estabelecer outro tipo de agrupamento. Esse momento foi bastante rico e demorou um pouco, pois houve várias discussões e os alunos ficavam inseguros quanto à classificação dos grupos dos sólidos e queriam mudá-los de colocação a todo o momento.

A dinâmica foi iniciada por uma aluna do Grupo 01 que tinha em mãos uma pirâmide de base hexagonal e um prisma também de base hexagonal e afirmou que os dois pertenciam a grupos diferentes, pois, "*esse aqui tem duas bases* (apontando para o prisma) *e esse aqui só tem uma base* (apontando para a pirâmide)*, mas os dois tem um hexágono na base*". O Grupo 04 que tinham em mãos um cubo e uma esfera apenas agrupou, sem explicar, o cubo junto do prisma hexagonal e a esfera ficou separada. O Grupo 06 que estavam com uma pirâmide de base quadrada e uma esfera agrupou sua pirâmide com a outra do Grupo 01 e a esfera junto com a esfera do Grupo 04. O grupo 07 colocou suas pirâmides de base triangular (tetraedro) e de base quadrada, juntas ao outro conjunto de pirâmides e o Grupo 03 agrupou seu cubo aos demais prismas e o colocaram o cone juntamente com a esfera. O grupo 02 estava com uma esfera e uma pirâmide de base triangular e assim como os demais grupos, perceberam que a esfera deveria estar ao lado das outras esferas e do cone, já o tetraedro juntamente com as demais pirâmides.

Até então os grupos citados agruparam os sólidos em três grupos, o grupo dos que têm duas bases (primas), o grupo que têm apenas uma base (pirâmides) e o grupo das esferas e cone que possuem forma arredondada. Apenas o Grupo 05, que tinham um cubo e um prisma de base triangular, agrupou o cubo aos demais prismas, mas deixaram o prisma de base triangular separado e ainda acrescentaram que discordavam dos demais grupos, pois todos os sólidos que tinham base triangular deveriam estar em um só grupo. Nesse caso, percebemos que esses alunos do Grupo 05 estabeleceram como regra para agrupamento o polígono da base dos sólidos, diferente dos demais grupos que atentaram para as faces laterais, agrupando prismas separadamente de pirâmides e de superfícies arredondadas, nesse caso os corpos redondos. Na figura 03 podemos observar os alunos realizando o agrupamento dos sólidos geométricos.

Figura 03: Alunos agrupando os sólidos geométricos.

Fonte: nossos registros.

Depois de muita discussão os alunos chegaram à conclusão que existem três grupos de sólidos, talvez por não lembrarem ou por que não tiveram a oportunidade de estudar mais detalhadamente o conteúdo de Geometria Espacial, eles concluíram que os sólidos que possuem duas bases são agrupados separadamente dos que têm apenas uma base e por sua vez, dos que possuem forma arredondada. No entanto, mesmo eles não possuindo a definição de Poliedros, criaram esse tipo de classificação que divide os Poliedros em três grupos.

Continuando, indagamos se os alunos ainda conseguiriam fazer mais uma divisão entre esses grupos. Eles prontamente responderam que se olhássemos somente para as bases, sim. Foi ai que pedimos para eles olharem para a forma das faces de cada um, como um todo. Os alunos ficaram confusos e ainda assim não conseguiram classificar em apenas dois grandes grupos.

Então demos a dica: "podemos afirmar que só temos dois grupos dentre esses sólidos", foi então que Samara, aluna do Grupo 02 disse: "*ah professora, então se formos olhar para o formato das faces, esses dois grupos aqui ficarão juntos (apontando para os prismas e as pirâmides) e esses outros ficarão sós*". Em outras palavras, essa aluna disse que as faces tanto dos prismas como das pirâmides são todas formadas por polígonos, diferentemente dos corpos redondos que possuem superfície arredondada. Os demais alunos concordaram e então explicamos sobre a existência dos dois grandes grupos de sólidos geométricos, sem especificar nomes, pois a próxima atividade dependerá da percepção dos alunos para a identificação de características dos Poliedros, inclusive a nomenclatura deles.

4.2.2. Segunda tarefa: Diagnosticando o Poliedro

O dia 24 de Julho de 2015 foi reservado para o desenvolvimento das atividades da segunda tarefa, **Diagnosticando o Poliedro**. O professor Heleilton, assim como na atividade anterior, não pôde ficar conosco em sala devido à troca de horários com outro professor para que pudéssemos permanecer durante duas aulas seguidas na turma. Para essa atividade levamos apenas alguns Poliedros como prismas e pirâmides de base triangular, quadrada e hexagonal, réguas e a folha de atividade juntamente com uma folha para resposta. Levamos apenas esses sólidos por considerar mais fácil o cálculo da área de suas respectivas bases.

O objetivo dessa atividade era diagnosticar, ou seja, verificar as características de um Poliedro, por exemplo, suas dimensões, quantidade de faces, vértices e arestas, o cálculo do perímetro e da área da base desse poliedro, a representação do sólido planificado, além disso, buscamos aprofundar mais e investigar se os alunos conseguiam estabelecer uma relação numérica entre as faces, os vértices e as arestas, ou seja, se eles conseguem chegar à Relação de Euler.

Lembrando que, tanto essa atividade com a anterior, objetivava buscar subsídios para que os alunos pudessem relembrar ou aprender, interagindo com os colegas de seu grupo, sobre os sólidos geométricos em geral e em particular, os Poliedros. Essas duas primeiras atividades serviram, como suporte para que os alunos pudessem revisar ou adquirir conhecimentos básicos necessários para a formulação e resolução dos seus próprios problemas nas atividades posteriores.

No desenvolvimento dessa atividade gravamos vídeos e áudios de todos os grupos, também fizemos fotografias, observações diretas e transcrição de algumas falas durante o desenvolvimento da atividade. Com isso pudemos observar alguns registros de falas e também os escritos através das respostas.

Antes de iniciar, relembramos o que foi feito na atividade anterior, ou seja, que temos dois grandes grupos de sólidos geométricos, segundo os alunos, os que rolam e os que não rolam. Pedimos para que eles observassem os que estavam em cima da mesa e nos dissessem que grupo de sólidos era aquele. Os alunos disseram que não tinha os sólidos que rolam, então explicamos que a partir de agora iremos trabalhar apenas com os sólidos que possuem em todas as suas faces polígonos, ainda sem dizer que se tratava de Poliedros.

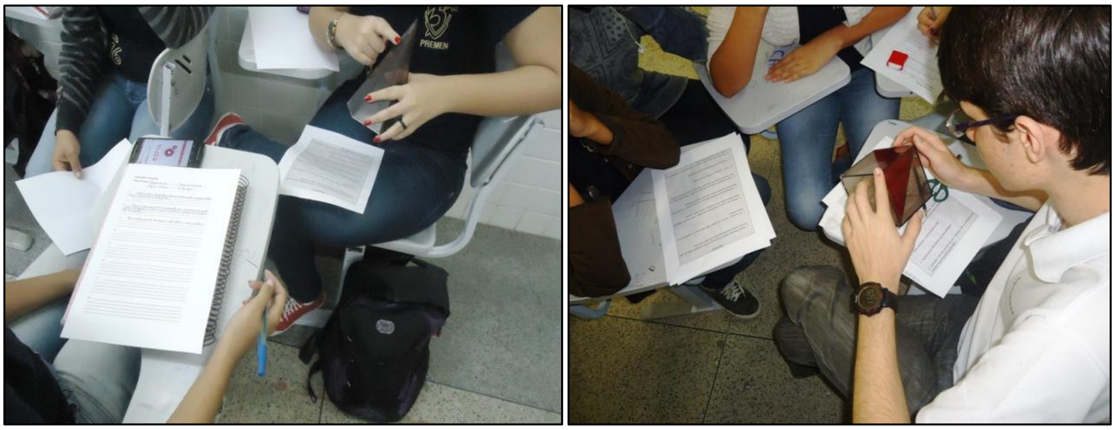
Disponibilizamos esses Poliedros na mesa e pedimos para que cada grupo escolhesse apenas um deles. Quando todos escolheram o Poliedro, entregamos a segunda atividade, uma folha para respostas, já com as linhas para ficar mais organizado e réguas necessárias para responder uma das questões. Em seguida, explicamos cada uma das questões sempre orientando os alunos para que pudessem interagir e responde-las.

No primeiro questionamento da atividade **Diagnosticando o Poliedro** pretendíamos verificar se os alunos identificam corretamente todas as dimensões de um objeto tridimensional e se conhecem o nome do sólido geométrico. Dos resultados, temos que apenas os alunos do Grupo 05, que estavam com um Hexaedro (Cubo), responderam corretamente, informando que o sólido possui "*3 dimensões. Altura,* *comprimento e largura. Sim, um cubo*". Outros grupos acertaram as quantidades de dimensões e os nomes dos sólidos, como os grupos 01, 02, 03, 04 e 07, porém erraram em identificar quais são as dimensões. O Grupo 01 informou que elas seriam "*faces, vértices e arestas. Sim, cubo*". O Grupo 02, "*altura, comprimento e profundidade. Sim, é uma pirâmide hexagonal.*". Grupo 03, "*altura, largura e volume. Pirâmide triangular.*", Grupo 07 "*altura, comprimento e volume. Sim, conhecemos, um cubo.*".

Já os grupos 04 e 06 não acertaram em suas respostas. O Grupo 04, estava com um prisma triangular e apresentou a seguinte resposta: "*Cinco dimensões; retângulos e triângulos, conhecemos.*", já o Grupo 06, estava com um prisma de base retangular apresentando como resposta: "*Seis dimensões, quadrado e retângulo. Sim, retângulo.*". Analisando suas respostas, respectivamente os grupos 04 e 06, as dimensões são retângulos e triângulos e as dimensões são quadrados e retângulos. Se realmente fossem cinco dimensões como afirma o Grupo 04 ou seis dimensões como afirma o Grupo 06, eles teriam que descrever as cinco e seis dimensões respectivamente e não apenas as duas como fizeram. Os PCN (BRASIL, 1997) apontam que, ainda no Ensino Fundamental, espera-se que os alunos percebam as semelhanças e diferenças entre formas geométricas tridimensionais e bidimensionais, mas provavelmente esses alunos associaram a quantidade de dimensões ao número de faces do sólido e ainda confundiram dimensões de um sólido com a forma de suas faces.

Observamos a aluna Samara em seu grupo, pois ela acabava respondendo as atividades de maneira individual. De acordo com sua resposta, colocada pelo Grupo 02, acertou a quantidade de dimensões e o nome do sólido, porém não identificou corretamente as dimensões de um sólido. Percebemos que ela sabe que um sólido geométrico apresenta três dimensões, porém confundiu o termo altura com profundidade e esqueceu-se de identificar a altura. Na figura 04 temos imagens de Samara e um aluno do grupo 05 manipulando os sólidos.

Figura 04: Alunos interagindo no desenvolvimento da segunda atividade



Fonte: nossos registros

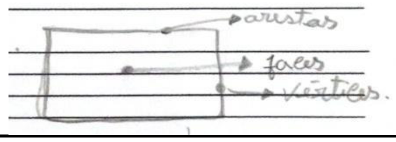
No segundo questionamento, buscamos investigar se os alunos sabiam analisar as partes que compõem um sólido e em seguida identificar quais eram as faces, vértices e arestas. Esperávamos que os alunos usassem nomenclaturas usuais para identificar as partes dos sólidos atribuindo quantidades a elas, como por exemplo, uma pirâmide hexagonal é composta por seis triângulos e um hexágono e possuem seis “lados” laterais, sete quinas, etc ou até mesmo identificassem por meio de um desenho as faces, vértices e arestas. No Quadro 03 temos uma visão geral dos grupos e seus respectivos sólidos e respostas.

Quadro 03: Descrição das respostas dos alunos referente à segunda questão da segunda atividade.

(continua)

Grupo	**Poliedro**	**Respostas dos alunos**
01	Hexaedro	*6 partes iguais, 24 arestas. As linhas que compõe as faces são chamadas de aresta e os pontos de ligação de vértice.*
02	Pirâmide Hexagonal	*Esse sólido geométrico é composto por uma base (hexágono) e altura (triângulos), sendo as faces vértices e arestas as componentes das partes.*
03	Pirâmide Triangular	*Faces, vértices e arestas. Os lados e a base são as faces. As arestas são as retas que se encontram em um único ponto. Os vértices são os pontos.*

(conclusão)

Grupo	Poliedro	Respostas dos alunos
04	Prisma Triangular	*Triângulo e retângulos. As faces são os lados, as vértices as linhas e arestas os encontros das linhas.*
05	Hexaedro (Cubo)	*Faces, arestas e vértices. As faces são os lados, as arestas são as linhas e vértices os pontos.*
06	Prisma Retangular	*Retângulo e quadrado.* 
07	Hexaedro (Cubo)	*Faces é cada parede do composto. Vértices, cada linha da parede, cada lado. Arestas é cada ponto do composto.*

Fonte: nossos registros.

Como podemos observar, o Grupo 01 identifica o Cubo com seis partes iguais, se referindo as faces, identificam as arestas como linhas e os vértices como pontos, porém, afirmam que esse sólido possui 24 arestas, quando na verdade são apenas 12. Esses alunos não conseguiram perceber que cada aresta é comum a duas faces. O Grupo 02, na pessoa de Samara, identificou que a pirâmide hexagonal possui uma base que tem como polígono o hexágono, porém identificou a altura como sendo triângulos, não percebeu que os triângulos formam as faces laterais desse sólido e, por fim, identificou as faces, vértices e arestas como componentes das partes, o que não deixa de ser verdade. O Grupo 03 respondeu corretamente que esse sólido, a pirâmide triangular, é composto por faces, vértices e arestas e perceberam que os lados e a base são as faces, pois são todos iguais, as arestas são as retas que se encontram em um único ponto e que os vértices são os pontos.

O Grupo 04 identificou que o prisma triangular é composto por triângulos e reângulos, mas não especificou a quantidade de cada um deles, informaram que as faces são os lados, mas trocaram os elementos vértices pelas arestas. O Grupo 05 acertou mais uma vez, porém, os alunos não identificaram as partes do cubo, que são seis faces quadrangulares. O Grupo 06 apresentou uma resposta diferente, pois seus componentes informaram que o prisma retangular é formado por retângulos e quadrados sem informar a quantidade de cada um deles, porém, foi o único grupo que fez uma representação do que seriam as faces, vértices e arestas por meio de um desenho. De acordo com o desenho desse grupo, a face é a região poligonal limitada pelas arestas, que são as linhas, e os vértices eles também apontaram como se fossem uma linha. O último grupo, o 07, denominou o cubo de composto e suas faces de parede. Esse grupo, assim como o G4, atribuiu a palavra linha aos vértices e pontos ou encontros, às arestas.

De forma geral, nessa questão, todos os grupos identificaram as partes ou os elementos que compõe o sólido que tinham em mãos, somente os alunos dos grupos 04 e 07 que até então não conseguiram distinguir arestas de vértices.

O terceiro questionamento dava continuidade ao anterior e buscava investigar se os alunos sabiam identificar corretamente a quantidade de faces, vértices e arestas, além disso, se eles conseguiam estabelecer alguma relação numérica entre esses elementos básicos de um Poliedro, ou seja, chegar à Relação de Euler. A realidade nos mostra que hoje a maioria dos alunos, ao estudar os conteúdos de Matemática, não aprende a pensar, raciocinar, conjecturar e estabelecer relações entre elementos matemáticos. Nasser e Tinoco (2003, p. 7) afirmam que "(...) os alunos devem ser preparados para dominar o processo dedutivo". Acreditamos que a habilidade de argumentar, deve ser proporcionada tanto quanto a habilidade de visualizar, por esse motivo, nessa questão buscamos verificar se os alunos conseguiam deduzir ou argumentar sobre uma possível relação numérica entre os elementos do Poliedro, que seria a Relação de Euler. Vejamos suas respostas no Quadro 04:

Quadro 04: Descrição das respostas dos alunos referente à terceira questão da segunda atividade.

(continua)

Grupo	**Poliedro**	**Quantidade de faces, vértices e arestas**	**Relação numérica**	**Outra relação**
01	Hexaedro	*6 faces, 8 vértices, 8 arestas*		*Cada face contém 4 arestas e 4 pontos de ligação para vértice.*
02	Pirâmide Hexagonal	*Esse sólido possui seis faces, sete vértices e seis arestas.*		*Para cada face, três arestas e três vértices.*

(conclusão)

Grupo	**Poliedro**	**Quantidade de faces, vértices e arestas**	**Relação numérica**	**Outra relação**
03	Pirâmide Triangular	*4 faces, 4 vértices e 6 arestas.*		*Sim, faces e vértices tem a mesma quantidade.*
04	Prisma Triangular	*5 faces, 9 vértices e 6 arestas.*		*Não.*
05	Hexaedro (Cubo)	*6 faces, 12 arestas e 8 vértices.*		*Sim.*
06	Prisma Retangular	*4 faces, 2 arestas e 8 vértices.*		*Sim.*
07	Hexaedro (Cubo)	*Faces=6, vértices=12 arestas=8*		

Fonte: nossos registros.

Em relação à quantidade de faces, vértices e arestas, temos que o Grupo 01 acertou na quantidade das faces e vértices, porém, talvez por falta de atenção, errou na quantidade de arestas. Já o Grupo 02, apresentou 6 como resultado para a quantidade de faces de uma pirâmide hexagonal, eles esqueceram de incluir a base. Acertaram a quantidade de vértices que é 7, mas erraram na quantidade de arestas pois consideraram como arestas apenas as da base ou da superfície lateral. Os alunos do Grupo 03, responderam corretamente que a pirâmide triangular tem 4 faces, 4 vértices e 6 arestas. O Grupo 04 acertou na quantidade de faces do prisma triangular, porém como na questão anterior, os alunos desse grupo trocaram os elementos vértices por arestas, obviamente trocaram as quantidades, informando que esse primas contém 6 arestas e 9 vértices, como sabemos seria o contrário.

O Grupo 05 acertou na quantidade de faces, vértices e arestas do cubo, pois na questão anterior, identificou corretamente esses elementos. Já o os alunos do Grupo 06 apresentaram uma resposta totalmente desconectada de sentido, pois segundo esses alunos, o sólido apresenta 4 faces, 8 vértices e 2 arestas, mas sabemos que o único sólido que apresenta 4 faces é o tetraedro e ele possui apenas 4 arestas, diferentemente do prisma retangular, do Grupo 06. Por fim, os alunos do Grupo 07, assim como o Grupo 04, mais uma vez confundiram vértices com arestas, informando que o cubo possui 6 faces, 12 vértices e 8 arestas.

Talvez por falta de interpretação da segunda pergunta, ainda no terceiro questionamento, os alunos não conseguiram estabelecer uma relação numérica entre as faces, vértices e arestas. Os únicos grupos que tentaram estabelecer algum outro tipo de relação entre esses elementos foram os Grupos 01, 02 e 03. O Grupo 01 percebeu que cada face contém 4 arestas e possui 4 vértices, poderiam ter ido além e identificado que cada aresta é comum a duas faces, mas não o fizeram. O Grupo 02 pensou de maneira parecida ao primeiro grupo, pois informaram que para cada face, temos 3 arestas e 3 vértices, se os alunos desse grupo observassem melhor, poderiam ter especificado que para cada face lateral que é composta por triângulos, temos 3 arestas e 3 vértices, pois a base também é uma face, mas ela é representada por um hexágono que contém 6 arestas e 6 vértices.

Por fim, o Grupo 03 observou que a quantidade de faces e vértices do tetraedro são iguais, foi o grupo que mais se aproximou da relação de Euler, embora faltasse observar que a quantidade de faces somada com a quantidade de vértices é igual a quantidade de arestas somado com 2. No Ensino Médio é importante que o aluno consiga perceber determinados processos que levam a sistematização das fórmulas OCEM (BRASIL, 2006) e evitar apenas apresentá-las para que possivelmente os alunos memorizem. Como o professor da turma gosta de trabalhar com macetes de conteúdos visando o ENEM, os alunos acabam tendo que memorizar fórmulas. Considerando todos os resultados que tivemos até então, o fato de os alunos não ter conseguido obter a Relação de Euler já era esperado, porém acreditamos que os alunos podem ser capazes de ir mais longe quando são estimulados.

No quarto questionamento, saímos da ideia do "todo" que pode ser representado pelo objeto tridimensional para buscar a compreensão das "partes" compreendidas pelos elementos da Geometria Plana. Quando perguntamos a qual figura plana corresponde cada uma das faces laterais e da base do sólido aos alunos e se essas figuras apresentam alguma característica em comum, estamos buscando verificar se eles reconhecem os polígonos que compõe o sólido geométrico e se expressam alguma relação entre seus elementos ou até mesmo se enxergam algumas propriedades das figuras planas. Vejamos as respostas dos alunos.

O Grupo 01: "*quadrado, sim são iguais por que são quadrados".* Esse grupo identificou que o Hexaedro (cubo) é formado por quadrados e justificaram que eles são iguais apenas por serem quadrados, mas não informaram as propriedades do quadrado. Grupo 02: "*As faces laterais do sólido correspondem à triângulos planos e a base à um hexágono. Sim, pois se divide em seis partes a base forma seis triângulos".* Os alunos desse grupo expressaram bem as figuras planas correspondentes às faces laterais e a base da pirâmide hexagonal, poderiam ter explicitado que os triângulos das faces laterais são isósceles ao invés de planos.

Esse grupo foi além, observando que o hexágono que forma a base da pirâmide pode ser dividido em seis triângulos, esse sólido em acrílico tem em seu interior um triângulo para identificar a altura da pirâmide, o apótema da base e o apótema da pirâmide, além de em sua base ter os riscos que delimitam os seis triângulos inclusos no hexágono. Por isso esses alunos perceberam que o hexágono pode ser dividido em seis triângulos, mas não identificaram que tipos de triângulos seriam esses.

O Grupo 03: "*Triângulo. Sim, todos os lados tem a forma de triângulo".* Como esse grupo estava com o tetraedro, perceberam que suas faces são todas formadas por triângulos, mas poderiam ter especificado que são todos iguais ou regulares, ou ainda que são equiláteros. O Grupo 04: *"As faces laterais são retangulares e suas bases são triangulares".* Alguns alunos só conseguem observar o modelo de um prisma triangular "deitado" onde uma possível base seria um retângulo. Esse grupo percebeu corretamente que as bases desse sólido são os triângulos e as faces laterais são retângulos, o que caracteriza um prisma, não apresentaram características em comum. O Grupo 05: *"Quadrado. Sim, todas são quadrados e elas tem o mesmo comprimento".* Como esse grupo estava com o Cubo, todas as suas faces eram quadradas e segundo os alunos, a característica comum é que elas têm o mesmo comprimento.

O Grupo 06: *"retângulo, quadrado. Sim, tem 4 lados".* Os alunos desse grupo registraram de maneira correta a figura plana correspondente ao sólido com o qual estavam e ainda informaram que a característica comum ao retângulo e quadrado é que eles possuem quatro lados, porém poderiam ter aprofundado informando que quadrado é um retângulos de iguais medidas. O último grupo, o 07: *"Quadrado, possui 4 lados iguais, 4 vértices e 4 arestas. São proporcionais, ou seja, um quadrado perfeito."* Esse grupo alem de perceber que só tem quadrados em todas as faces do cubo, nomearam algumas propriedades do quadrado mesmo que repetindo a quantidade de lados e arestas que são 4 e a quantidade de vértices , também 4. Além disso, os alunos desse grupo afirmaram que os quadrados que formam esse sólido são proporcionais e por isso, um quadrado perfeito. O termo que melhor se encaixaria seria semelhante e não proporcionais, pois proporcionalidade está ligada a grandeza de medidas e sua ideia é mais ligada a igualdade entre frações.

No quinto questionamento o objetivo era que os alunos pudessem observar que dentro do grupo dos sólidos que "não rolam" ainda existem dois os prismas e as pirâmides. Imaginávamos que os alunos não chegassem à nomenclatura "prismas", porém pensamos que eles podiam apontar características dos sólidos que se remetam aos prismas, como por exemplo, que as faces laterais são retangulares, que possuem duas bases, que são diferentes das pirâmides. Ao explicar essa questão para os alunos, pedimos que eles observassem o sólido que estavam em mãos e os dos colegas e os que sobraram e identificassem características em comum ou diferenças que pudessem servir para uma possível subdivisão. Dos resultados, tivemos que dois grupos apresentaram respostas negativas, os Grupos 03 e 06 responderam: "não".

Dos grupos restantes, temos que o G1 disse: *"Sim! Pirâmides, losango, paralelepípedos e etc levam em consideração semelhanças e tamanhos das faces e arestas."*. O G2, *"Sim, as dividindo em pirâmides, quadrados e trapézios."*. O G4, *"Sim, atravez das formas de suas faces e bases."*. O G5, *"Sim, dividir o sólido em várias formas pode se obter novas formas de sólidos geométricos",* mas não especificaram que divisão de formas seria essa. O G7, *"Sim, formas e bases, tipo dividi-los em pirâmides, retângulos, cubos."*. Acreditamos que os grupos G1, G2 e o G7 quiseram dizer que os sólidos podiam ser divididos entre pirâmides e sólidos que possuem em sua base, retângulos, quadrados, losango, trapézios. Já o G4 não apresentou um exemplo para que pudéssemos interpretar melhor sua resposta, assim como o G5 que também não apresentou uma resposta com argumentos e exemplos que nos permitisse interpreta , apenas disse podemos obter várias formas de sólido a partir da divisão de um sólido.

Por fim, na última questão, pedimos que os alunos fizessem um desenho representando o sólido que eles tinham em mãos de forma planificada. O objetivo dessa questão era exercitar a habilidade de visualização em outra perspectiva, que segundo Kaleff (2003),

> Ao visualizar objetos geométricos, o individuo passa a ter controle sobre o conjunto das operações mentais básicas exigidas no trato da Geometria, como (...) produzir imagens mentais de um objeto e visualizar suas transformações e movimentos, identificar um objeto ou um desenho quando apresentado em

> diferentes posições; comparar vários objetos, suas representações gráficas ou suas imagens mentais para identificar semelhanças e diferenças entre eles. (KALEFF, p. 16, 2003)

Perguntamos se alguém sabia o significado de "planificar um sólido", ninguém respondeu, então percebemos que esses alunos não apresentam um raciocínio espacial bem desenvolvido por isso, procuramos explicá-los da maneira mais simples possível para que eles pudessem entender.

Foi então que mostramos um sólido e explicamos que planificar um objeto tridimensional é representá-lo em uma superfície plana, em outras palavras, é como se fizéssemos um corte em uma de suas linhas (optamos em não usar a palavra aresta para não induzi-los em suas respostas) e abríssemos esse sólido, desenhando todas as figuras planas que obtivermos desse corte.

Ainda perguntamos quantas dimensões podemos observar em um sólido, os alunos responderam corretamente que são três, em seguida, perguntamos quantas dimensões tem agora um sólido planificado. Eles já entendendo o significado de planificação, responderam corretamente que são duas dimensões e todos os grupos conseguiram planificar seus sólidos corretamente.

CAPÍTULO 5

O CASO: TURMA DO 3º ANO

Neste capítulo trazemos as nossas considerações sobre o estudo de caso da turma com relação às atividades de formulação e resolução de problemas geométricos. Apresentaremos alguns diálogos, imagens de alguns momentos de realização das três últimas atividades e imagens dos resultados das atividades de alguns grupos, em especial do Grupo 02, de uma das alunas a qual chamamos pelo pseudônimo de Samara.

5.1. Terceira tarefa: Reformulando o problema do gato e do rato...

No dia 28 de Agosto de 2015 apresentamos e resolvemos o problema do gato e do rato, extraído do livro ***How To Solve it,*** Polya (1978), para que os alunos pudessem reformulá-lo e com isso, observarmos quais são as estratégias que eles utilizam. Escolhemos esse problema por podermos aplicar a Heurística de Polya em sua resolução e consequentemente propor que os alunos reformulassem-no.

Antes de apresentarmos e resolvermos esse problema para os alunos, explicamos sobre a definição de problema, problema matemático, a diferença entre problemas e exercícios e sobre o que é necessário para que tenhamos bons problemas matemáticos. Em seguida, explicamos um pouco sobre Polya e sua heurística para resolução de problemas matemáticos.

Por meio de animações em slides, iniciamos com a pergunta: "O que é um problema para vocês?". Um aluno do Grupo 05 respondeu: "*é uma coisa não resolvida*". Uma aluna do Grupo 02 disse: "*é não passar no ENEM. Isso é um problema, professora!*". Um das alunas, do Grupo 07 disse: "*é algo pra ser resolvido*". "*A Matemática é um problema*", outra aluna do Grupo 07: "*Não ter dinheiro é um problema*". Percebemos que esses alunos associam problemas a algo desafiador em seus cotidianos, como "não passar no ENEM", "não ter dinheiro" ou até mesmo "a Matemática é um problema". Já os alunos do Grupo 05 e 07 se aproximam mais da definição de problema dada por Onuchic (1999) "problema é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em resolver".

Como o objetivo era explicar aos alunos a definição de um problema matemático e o que lhe diferencia de um exercício, perguntamos: "Com base na definição de problema por Onuchic (1999) (a qual foi apresentada aos alunos através dos slides), o que é um problema matemático?". Um aluno do Grupo 03 respondeu: "*é algo a ser resolvido que tem a ver com números"*. Uma das alunas do Grupo 05 disse: "*É um problema com fórmulas*". Um aluno do Grupo 01 falou: "*É um quebra cabeça*". O aluno do Grupo 05 disse: "*É um problema que resolve com números*". Então, explicamos que um problema matemático é toda circunstância que se busca descobrir ou resolver, por meio de informações matemáticas.

Para uma melhor compreensão, mostramos e exemplificamos a diferença entre exercícios e problemas, mas antes, buscamos ouvir as concepções que os alunos têm a respeito da diferença entre exercícios e problemas. O aluno do Grupo 05 disse: "*exercício é pra exercitar e o problema tem que tentar solucionar ele sem saber como*", a uma aluna do Grupo 07 disse: "*exercício é uma revisão de algo que agente já conhece*". Samara, aluna do Grupo 02 "*exercício é praticar o que agente já sabe e problema agente não sabe e quer resolver*". As explicações para esses alunos sobre exercícios e problemas, muito se assemelham com a afirmação de (PONTE, 2005; MEDEIROS, 2001). Eles argumentam que ambos são tipos de tarefas Matemáticas, a diferença é que o propósito dos exercícios é de consolidar conhecimentos que os alunos já possuem como uma fórmula Matemática já conhecida e memorizada, já os problemas possuem certo grau de dificuldade, não sendo resolvidos através de procedimentos padronizados (PONTE, 2005; MEDEIROS, 2001).

Exemplificamos essas tarefas. Um exemplo de exercício é: Resolva a seguinte equação do 2º grau: $x^2 - 3x + 1 = 0$. Se os alunos já conhecem a fórmula de Bhaskara só irão precisar aplicá-la e efetuar uns cálculos para encontrar as raízes desta equação. Um exemplo de problema é pedir para os alunos provarem a existência dessa fórmula de Bhaskara. Se eles nunca viram essa demonstração com certeza será um problema para eles resolverem.

Em seguida, comentamos com os alunos que resolver exercícios matemáticos é importante, porém não devemos ficar apenas na resolução de exercícios, pois atualmente nos deparamos em nossas vidas com vários problemas que exige de nós, soluções criativas, decisões corretas, pensamento crítico. Então, explicamos que é importante começarmos a aprender a resolver bons problemas e, para isso, listamos algumas características para que tenhamos bons problemas matemáticos. São elas, enunciado acessível, tem que exercitar o pensamento matemático dos alunos, não deve ser nem muito fácil e nem tão difícil, deve exigir criatividade na resolução.

Como estávamos falando sobre problemas, pensamos ser interessante comentar sobre Polya e sua heurística para resolução de problemas matemáticos. Polya, como sabemos, foi um dos matemáticos mais importantes do século XX que criou uma heurística empregada para resolver um problema, sendo chamadas de heurística de resolução de problemas específica para a Matemática, conhecida como Heurística de Polya. Então indagamos os alunos para saber suas opiniões sobre as etapas[2] criadas por Polya para se resolver um problema. "Qual o primeiro passo para se resolver um problema?". Um aluno do Grupo 03 disse: "*interpretar o problema*". Continuamos, "e depois de interpretar o problema?". Esse mesmo aluno do Grupo 03 falou "*tenta achar um meio de resolver, separando os dados e depois resolve o problema*". Então perguntamos, "para aí ou ainda tem algo a mais que possamos fazer?". Os alunos disseram que termina ai! Foi então que comentamos que segundo Polya, não acabamos de resolver um problema quando encontramos sua solução, pois é necessário verificar o resultado. Por fim, explicamos cada uma das etapas apresentadas por Polya, como, *compreender o problema, elaborar um plano, executar o plano e fazer o retrospecto ou verificação*.

Realizamos todas essas explicações para chegar a nosso objetivo principal, que era apresentar e resolver o *Problema do Gato e do Rato* para pedir que os alunos o reformulassem.

O problema foi o seguinte: "Um gato está sobre um muro de 4m de altura quando avista um rato a uma distância de 8m da base do muro. Quando o rato dirige-se a sua casa (em linha reta até o muro) é comido pelo gato, que pula diagonalmente, andando o mesmo comprimento que o rato tinha andado até então. Qual a distância que cada um percorreu?". Apresentamos e resolvemos esse problema utilizando a Heuristica de Polya e sempre indagando os alunos quanto aos dados e a incógnita do problema. Em seguida, pedimos que eles reformulassem esse problema por meio da estratégia "*E se em vez de?*". Pretendíamos provocar uma situação inicial em que os alunos poderão reformular um problema ligado à Geometria para que nas próximas atividades, eles formulem e resolvam seus próprios problemas.

Boavida et al (2008) comentam que essa estratégia "*E se em vez de?*" pode facilitar o processo de formulação de problemas, pois os alunos podem modificar um ou

[2] Temos convicção de que a Heurística de Polya não deve ser considerada um mero "passo a passo", porém, resolvemos usar essa nomenclatura que é menos formal e mais compreensível pelos alunos.

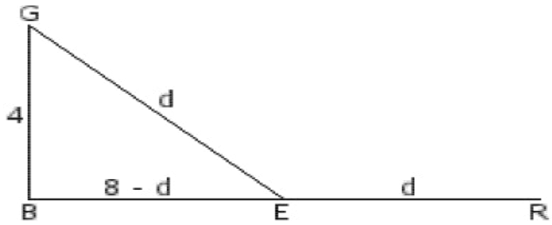
mais aspectos de um determinado problema, como por exemplo, os dados, a incógnita e a partir daí formulam-se mais perguntas. As autoras sugerem que esse tipo de estratégia seja realizada antes de pedir que os alunos formulem um problema livremente, pois modificando os dados de um problema pode ser um suporte para formulações livre.

Para a reformulação do problema do gato e do rato esperávamos que os alunos, inicialmente, apenas mudassem os dados da questão e para isso, teriam que pensar em números ideais para atribuir à altura do muro e a distância do rato à base do muro para que pudessem aplicar o Teorema de Pitágoras no menor triângulo retângulo existente. Além disso, imaginamos que os alunos também poderiam mudar o contexto e os dados, ou apenas o contexto do problema utilizando os mesmos dados.

No momento em que os grupos começaram a discutir sobre quais estratégias iriam usar para reformular o problema proposto, gravamos áudios e imagens dessa interação entre os alunos dos grupos.

Na resolução desse problema, apresentamos para os alunos uma estratégia a partir da aplicação do Teorema de Pitágoras em um dos triângulos retângulos (GBE) esquematizados na figura 05:

Figura 05: Esquema para a resolução do problema do gato e do rato.



Fonte: criado no paint por nós.

Nessa figura, G representava o gato, B a base do muro e E a distância percorrida por cada um. Podemos visualizar três triângulos (ΔBGE, ΔBGR e ΔEGR), sendo os dois primeiros retângulos e o último isósceles. O plano que utilizamos é resolvê-lo através do triângulo retângulo menor (ΔBGE, retângulo em B) aplicando o Teorema de Pitágoras, pois conhecemos a distância BG = 4m e as distâncias BE e GE em função de d, isto é, BE = 8 –d e a distância GE = d.

Então:

$$\rightarrow d^2 = (8-d)^2 + 4^2$$

$$\leftrightarrow d^2 = 64 - 16d + d^2 + 16$$
$$\leftrightarrow 16d = 80$$
$$\leftrightarrow d = 5$$

Para verificar a solução, substituímos $d = 5$ na figura e obtivemos o menor triângulo retângulo de lados consecutivos e que se aplica corretamente o Teorema de Pitágoras.

A seguir, apresentaremos as reformulações com suas respectivas respostas, de três grupos, os quais mais se destacaram os Grupos 02, 04 e 05, com ênfase no Grupo 02 e na aluna Samara.

Como podemos ver no diálogo abaixo das alunas do Grupo 02, Samara tomava sempre a iniciativa de ler o problema e pensar em sua solução. Nesse caso, como se tratava de uma reformulação, ela juntamente com sua colega de grupo se comunicava e discutia possibilidades sobre a criação de um contexto para a reformulação do problema inicial.

***Samara*:** Eu pensei na gente usar o homem aranha... hã...

Roberta: É...tipo ele ta em cima de um prédio né?

Samara: É... a trajetória de teia, da hipotenusa do maior seria a garra...a garra não, a teia...é...ele estaria em busca de salvar alguém...

Roberta: Aí tipo, ele avista alguém em perigo lá de cima do prédio, que tipo os super heróis fazem isso. Aí ele pega a teia e se lança do prédio...

Samara: Tipo, ele avista alguém sendo sequestrado indo em direção ao prédio que ele tá em cima. Ele joga lá a teia e pega a pessoa.

Roberta: Vamos colocar em prática!

Samara: Crie novos problemas. É pra criar mais de um... aí já complica viu!

Tarefa 3: [Dia 28-08-2015]

As alunas usam inicialmente o mesmo contexto do problema inicial trocando o gato que está em cima do muro pelo homem aranha que está em cima de um prédio e o rato por uma pessoa que está em situação de perigo. Na última fala de Samara, ela criou certo espanto com a possibilidade de ter que criar mais de um problema enfatizando a afirmação de Silver (1994) quando diz que na pedagogia baseada em um ensino de transmissão, a formulação de problemas é exclusividade dos professores e autores de livros didáticos.

Nesse momento as alunas dialogavam sobre o enunciado do problema e Samara diz que pretende usar a estratégia de colocar uma informação falsa que, nesse caso, seria um quadrado. Vejamos:

Samara: Oh, agente pode botar um quadrado que não sirva pra nada, tipo, o homem aranha tá lá em cima e ele vê verticalmente a 10 metros que uma pessoa está sendo... como é?

Roberta: Sequestrada!

Samara: Abordada....

Roberta*:* Ok Samara!

Samara: Uma pessoa está sendo abordada e ele começa a observar que ela acena e percebe que a pessoa... andou cerca de 4 metros, 8 metros? Aí gente, é difícil!!!

Roberta: Agente pode mudar os personagens!

Samara: Peraí, ta aqui o homem aranha no muro e aqui é uma rua (fazendo o rabisco)

Roberta: Rua não, um prédio.

Samara: Aí ele avista uma dama sendo abordada. O campo de visão dele foi de cerca de 10 metros e ele começa a observar essa cena, sim... observa em 10 metros que ela veio andando com esse cara sendo sequestrada e blá, blá, blá...até chegar a cerca de 8 metros do campo de visão dele que é quando ele percebe que é um sequestro e pega ela.Vai ser a mesma coisa só que vai ser uma parada em dupla só pra formar um quadrado.

Roberta: Aí fica essa distância daqui pra cá (apontando para os rabiscos)

Samara: Agora tem que fazer uma pergunta: Qual a distância que a teia...

Roberta: Qual a distância que o homem aranha percorreu...

Samara: Qual a distância que a teia que o homem aranha lançou e a que velocidade? Não, aí já é demais (risos)! Então bora! Vamos fazer o rascunho disso...

Tarefa 3: [Dia 28-08-2015]

Podemos interpretar que Samara decidiu colocar uma situação em que pudesse aparecer o quadrado, figura geométrica diferente do triângulo que utilizamos, tornando assim um problema original. Mas à medida que iam discutindo, ela percebeu que tinha que atribuir valores aos dados em que pudessem utilizá-los para calcular a distância que cada um percorreu no momento do encontro entre o homem aranha e o sequestrador. Samara sempre tem a palavra final e acaba permanecendo suas estratégias. Em seguida, ela já tem outra ideia para criar outro problema e Roberta sempre concorda com ela.

Samara: Pera, agora já pode ter outro problema... esse aqui não foi descendo, a gente pode fazer um subindo...

Roberta: Dois em um, Samara?

Samara: Esse aqui não foi descendo, a gente pode fazer um subindo...

Roberta: É isso que eu tava pensando, de fazer um ele subindo.

Samara: Com uma escada ou, tipo assim... Em um teste físico para a Policia Federal...

Roberta: Tem que ter policia...

Samara: (continuando) deve-se subir...

Pesquisadora: Então, qual a estratégia que vocês estão utilizando?

Samara: A do homem aranha.

Pesquisadora: O homem aranha está fazendo o que?

Samara: Salvando uma vítima de um sequestro.

Pesquisadora: Que chique. Muito bem!

Samara: E o próximo vai ser um teste físico para a Polícia Federal que tem que subir um...como é o nome daquele negoçinho? É tipo uma rede. É uma escalada na verdade que é adotada.

Pesquisadora: seria uma rede de escalada? Vocês estão sendo criativas, muito bem!

Tarefa 3: [Dia 28-08-2015]

Na primeira frase de Samara desse ultimo diálogo ela menciona que no problema do homem aranha que criaram o super-herói estava no alto de um prédio, assim como no problema original em que o gato se encontrava em cima de um muro e que agora, ela iria criar uma situação em que fosse o contrário, onde o contexto partiria do solo.

Enquanto Roberta copia o problema do homem aranha, Samara pensa em voz alta sobre o novo problema que irão criar: "Em um teste físico para a polícia federal deve-se subir uma escala em diagonal que está no chão, de altura máxima 4 metros. Após uma pequena corrida até chegar à rede, em menor tempo possível."

Roberta: Quando tu terminar eu passo a limpo. Agora vamos fazer o esboço!

Samara: Percebendo que a distância em linha reta do inicio da prova até o local de 4 metros que suspende a rede de 8 metros... Qual o comprimento da rede?

Pesquisadora: Como estão indo? Já terminaram?

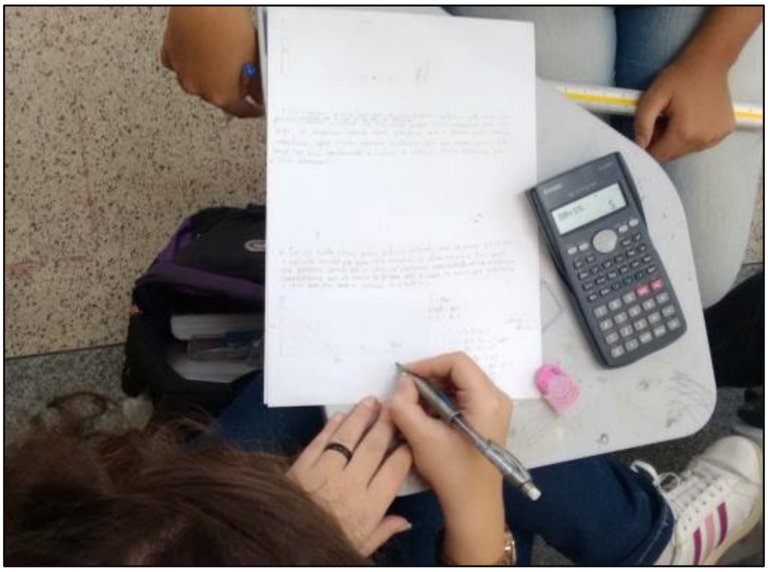
Samara: Estamos terminando ainda....

Pesquisadora: Hum... Que bom!

Tarefa 3: [Dia 28-08-2015]

Nesse momento, Samara resolve o problema, testando os valores que vai usar para dar certo, como podemos ver na figura 06.

Figura 06: Samara reformulando o problema do gato e do rato



Fonte: Registro nosso.

Samara: Então borá lá... Sabe-se que a altura é igual a 4 metros e o... a distância é igual a 8 metros. O comprimento vai ser igual a...
Samara: Não sei se tá certo. Agora temos que provar!
Roberta: Ei, professora, prova colocando o resultado que deu aqui no lugar não é?
Pesquisadora: Substitui pra ver se está certo, entendeu? Mas, é se está correto em relação a todos os dados do problema que vocês criaram.
Samara: Ai Jesus! A gente não fez como a senhora fez... a gente só colocou esse ao quadrado, esse ao quadrado, dando o resultado desse aproximadamente que deu nove.
Pesquisadora: Deixem eu ler o problema pra tentar entender...
Samara lê o problema... "Em um teste físico para a Policia Federal, uma das provas pedem que o aspirante escale por uma rede diagonal de altura máxima 4 metros. Após uma pequena corrida até a rede em menor tempo possível. Percebendo que a distância em linha reta do início da prova até o local de 4 metros que suspende a rede é de 8

metros. Qual o comprimento aproximado da rede?”

Pesquisadora: Peraí, percebendo que a distância em linha reta do inicio da prova até o local, mas que local? Vocês colocaram aqui: até o local, mas que local? É bom explicar, que esse local seria a base que sustenta a rede, para ficar mais compreensível. Vamos dar um nome a esse local que suspende a rede?

Samara: Então até a base da parede.

Pesquisadora: Pode ser, então complete... até a parede que suspende a rede cuja altura é de 4 metros., entendeu? Por fim, o problema que saber qual o comprimento da rede?

Samara: É, a gente só fez o Teorema...

Pesquisadora: Aplicou o Teorema de Pitágoras onde? Vocês têm essa distância aqui (estávamos nos referindo à distância da base da escalada até a base do muro)

Samara: Ah não...

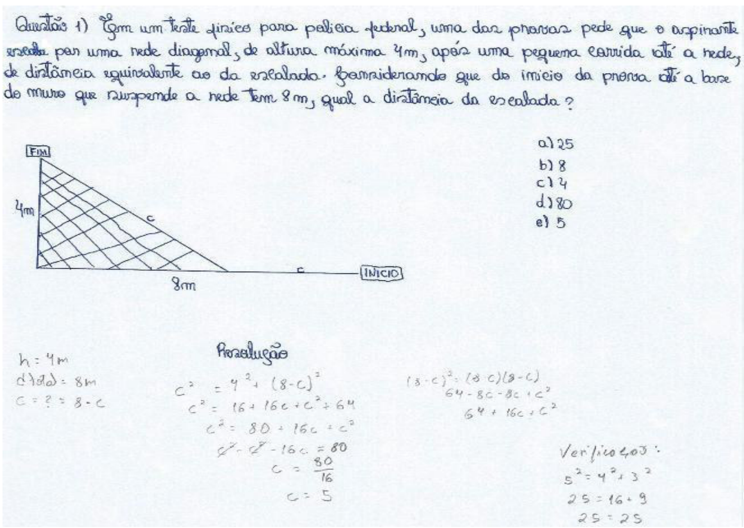
Pesquisadora: Vocês tem que dizer que distância seria essa... Ou criar uma situação para dizer que distância seria essa ou diz que essa distância é igual a essa... como a distância do inicio da prova até o local que suspende a rede é de 8 metros, essa distância teria que ser 8 menos uma incógnita (apontando para o rascunho).

Samara: Huuum, entendi!

Tarefa 3: [Dia 28-08-2015]

A figura 07 nos mostra a formulação do problema com sua respectiva resposta.

Figura 07: Problema reformulado e resolvido referente à atividade 3.

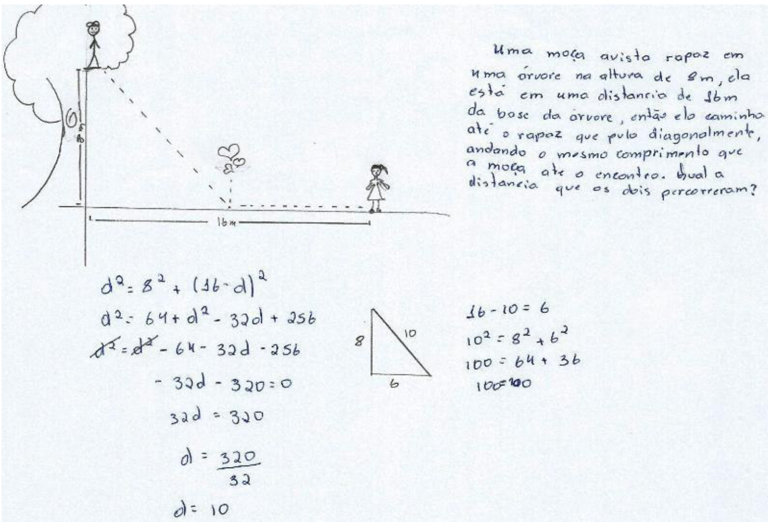


Fonte: Registro da aluna

Nesse momento a aluna percebeu, com nossa ajuda, que faltava esclarecer algumas informações para a criação do problema, pois ela se preocupou apenas em mudar o contexto para que a situação problema iniciasse do solo e não do alto como o anterior, mas acabou utilizando os mesmos valores numéricos do problema inicial, do gato e do rato, pois esses já eram conhecidos e testados.

O Grupo 04 apresentou a seguinte reformulação, como indica a figura 08, abaixo: *"Uma moça avista um rapaz em uma arvore na altura de 8m, ela está em uma distância de 16m da base da arvore, então ela caminha ate o rapaz que pula diagonalmente, andando o mesmo comprimento que a moça até o encontro. Qual a distância que os dois percorreram?"*.

Figura 08: Reformulação e resolução do Grupo 04



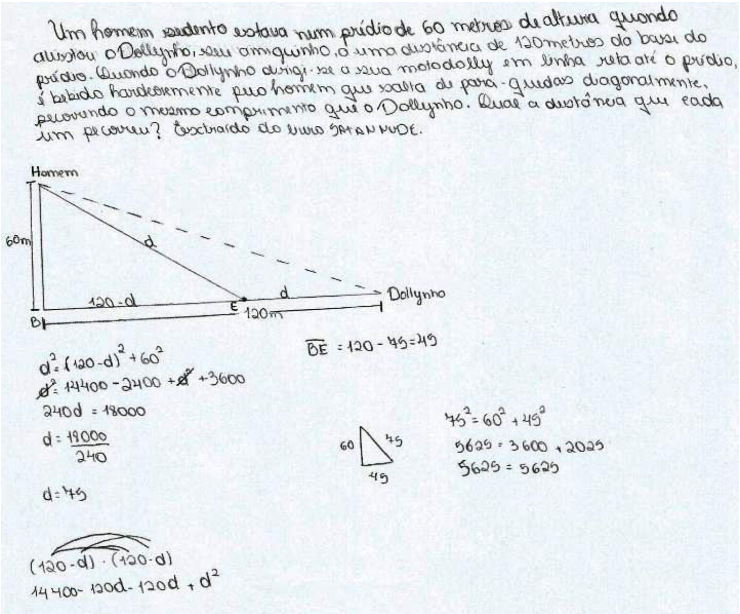
Fonte: registro dos alunos

Os alunos desse grupo modificaram o contexto do problema e também os dados, mas percebemos que palavras como: altura, distância até a base, diagonalmente e mesmo comprimento, foram mantidas. Apesar de manterem essas palavras citadas, eles pensaram em valores numéricos que pudessem atribuir tanto a altura da árvore como a distância da moça até a base da árvore para que quando aplicassem o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo de catetos 6, 8 e hipotenusa 10, verificassem que estava correto.

Esses alunos criaram um problema de certa forma sem sentido, pois como pode alguém estar sobre uma árvore de 8m de altura (equivalente a um prédio de três andares) e pular diagonalmente de lá? É importante refletirmos sobre a pertinência das soluções dos alunos, em especial dessa adaptação, porém, não foi realizada uma reflexão nesse sentido devido ao tempo destinado para cada atividade, visto que já estávamos ocupando uma aula de outro professor da turma.

Já no Grupo 05, pudemos observar que os alunos também modificaram apenas o contexto do problema e dos dados, permanecendo a mesma estrutura. Eles trocaram gato e rato por “um homem” e o “Dollynho”, respectivamente e o valor da altura e da distância do Dollynho à base do prédio em que o homem estava. Vejamos na figura 09:

Figura 09: Formulação e Resolução do problema do G5.



Fonte: registro dos alunos do G5.

Ao reformular esse problema, os alunos discutiram se o homem estaria embaixo para pegar seu Dollynho ou se ele estaria em cima e se iria pular diagonalmente de cima do prédio para pegar seu Dollynho. Os alunos dialogavam pra saber como o Dollynho iriam se mover para que o homem conseguisse capturá-lo a uma mesma distância que o Dollynho percorreu. Nesse diálogo a seguir, usamos as letras A, B, M e T para identificar os alunos pelas letras iniciais de seus nomes:

A: *a incógnita vai ser: qual a distância percorrida para o homem pegar o Dollynho?*

B: *pra o homem subir né, por que tá embaixo!*

M: *Ele vai ter que subir para pegar o Dollynho?*

T: *Não, é o contrário, vamos dizer que ele salta de paraquedas!*

B: *Não o Dollynho tem que tá embaixo e o homem em cima.*

T: *mas o refrigerante tem que se mover, como o Dollynho vai se mover? O Dollynho vai se mover a pé é?*

A: *sim, e qual o problema? O Dollynho na propaganda ele anda, fala e tudo mais!*

M*: gente isso é só teórico, é claro que o Dollynho não vai ter perna pra andar. Isso é só ficção!*

A: *Oh, então vai ser assim: o homem ta em cima e o Dollynho ta embaixo e ele vai andar ate sua casa.*

B: *Mas o Dollynho tem casa?*

M: *não, mas ele tem que chegar em algum lugar embaixo do prédio não é?*

T: *vocês estão viajando demais!*

B: *então a sua casa é o que? Um pote? Uma geladeira?*

A: *então coloca que ele vai até a sua motodolly.*

B: *motodolly? (Risos)*

A: *aí podemos dizer que o homem pula de paraquedas por que ele estava com muita sede para tomar o Dollynho.*

Esses alunos do Grupo 05 utilizaram um personagem de propaganda de televisão, que é o Dollynho do refrigerante Dolly guaraná, na reformulação do problema. Enquanto dialogavam, os alunos B e T testavam as possíveis respostas, olhando para o quadro onde estava a figura que fizemos para responder o problema. Os alunos tentavam encontrar números para que quando substituísse pela altura e pela distância do Dollynho à sua motodolly que está localizada na base do prédio que o homem estava, pudessem obter de forma correta uma aplicação do Teorema de Pitágoras.

Durantes essa atividade de reformulação, nós apresentamos uma estratégia para a resolução e comentamos sobre outra que seria a utilização da Lei dos cossenos, porém, os alunos alegaram nunca terem estudado esse assunto. Além da dificuldade em reformular o problema, criando outro contexto e outros dados numéricos, os alunos não utilizaram mais de uma estratégia na solução e não chegaram a formular mais de um problema, exceto o Grupo 02, que formulou, mas não chegou a responder.

Entre todos os grupos que realizaram essa atividade, apenas os alunos do Grupo 03 não conseguiram criar outro problema a partir do inicial. Os alunos testaram várias possibilidades em vários contextos, mas acabaram devolvendo a atividade rabiscada sem nenhum problema e solução.

5.2. Quarta tarefa: Construindo representações dos Poliedros de Platão e formulando e resolvendo problemas geométricos

No dia 30 de Agosto de 2015, propomos a quarta tarefa aos alunos cujo objetivo principal era propor que eles construíssem as representações dos Poliedros de Platão a partir de suas planificações e estimulassem a visualização geométrica para favorecer o surgimento de ideias quando chegasse o momento de formular e resolver os problemas geométricos. Inicialmente, levamos os Sólidos de Platão em acrílico do Laboratório de Matemática da UEPB e utilizamos os slides para lhes mostrar a associação que Platão fez entre esses sólidos e os elementos da natureza, relembramos os elementos básicos dos Poliedros e, em seguida propomos que os alunos construíssem seus sólidos a partir da planificação.

Então, cada grupo recebeu os cinco Sólidos de Platão já colados em cartolina guache, cola, régua e a folha com as atividades que desenvolveram antes de formular e resolver os problemas geométricos com base nesses sólidos. Entregamos aos alunos a planificação de cada Sólido de Platão já colado na cartolina guache para que eles não perdessem tempo ao colar na cartolina, recortar e montar. Mas, infelizmente nesse encontro apenas foi possível à apresentação da proposta, algumas curiosidades sobre os Sólidos de Platão e a construção dos sólidos pelos alunos.

Portanto, foi necessário recolhermos todos os sólidos e levarmos no próximo encontro para que os alunos pudessem desenvolver as atividades e com isso formular e resolver seus problemas ligados aos sólidos por eles construídos. Na figura 10 temos alunos do Grupo 04 construindo os Poliedros de Platão e ao lado, uma imagem com alguns dos sólidos construídos pelos demais grupos.

Figura 10: Alunas do Grupo 04 construindo os Poliedros de Platão

Fonte: nossos registros.

Ao levarmos para os alunos os moldes de cada um dos sólidos de Platão para que eles pudessem construí-los, buscamos privilegiar o desenvolvimento da visualização geométrica que segundo Kaleff (2003), baseada no Modelo de van Hiele para o desenvolvimento do pensamento em Geometria, a visualização e a organização informal das propriedades geométricas relativas a um conceito geométrico são passos preparatórios para o entendimento de um conceito. Antes de formularem seus problemas, os alunos tiveram a oportunidade de construir esses sólidos ricos de características geométricas e realizar cinco atividades baseados neles para que pudessem revisar ou vivenciar de maneira dinâmica, a partir da manipulação dos Poliedros de Platão, as principais características desses sólidos e com isso pudessem ter um suporte prévio para suas formulações e resoluções de problemas.

Foi então no dia 01 de Setembro de 2015 que entregamos uma atividade inicial com perguntas, as quais imaginávamos que poderiam auxiliar os alunos para que eles pudessem ter ideias no momento da formulação dos problemas. Essas perguntas foram:

- ✓ *Qual a principal característica que vocês podem observar nesses sólidos?*
- ✓ *Qual o número mínimo de faces interligadas é necessário para se formar um Poliedro?*
- ✓ *Qual desses três elementos: Arestas, Faces ou Vértices é usado para estabelecer o nome do Poliedro?*
- ✓ *O que acontece se vocês somarem o número de faces com o número de vértices de cada um desses poliedros? Descrevam ou estabeleçam alguma relação entre esses elementos.*
- ✓ *Além desses cinco poliedros de Platão, será que existem outros tipos de poliedros de Platão?*

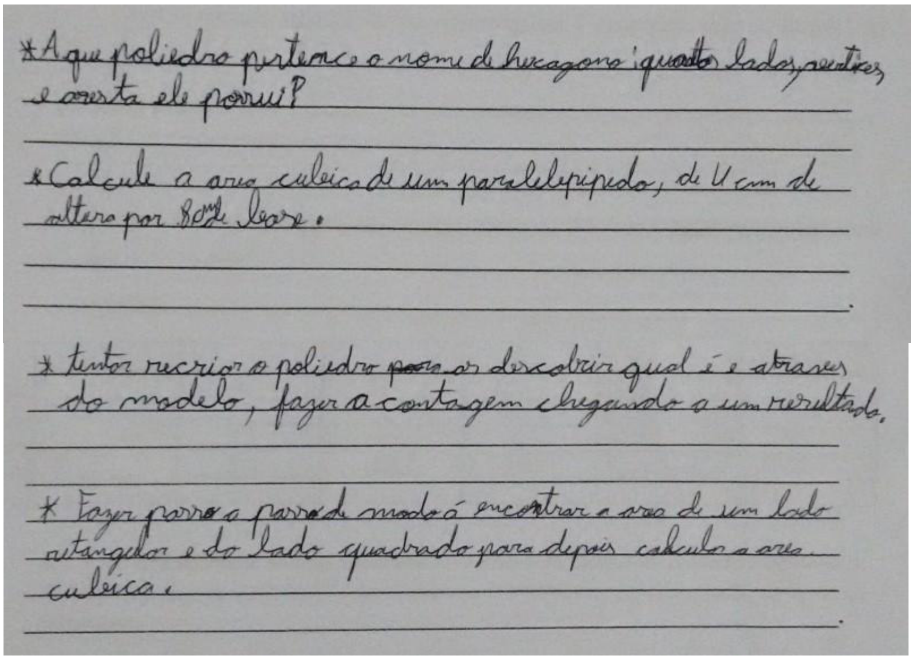
Além dessas perguntas, foi dada aos alunos uma tabela em que eles teriam que preencher com o nome do Poliedro, o número de arestas, faces e vértices, o polígono que forma suas faces e a quantidade de arestas que partem de cada vértice.

Muitos alunos apresentaram dificuldades no desenvolvimento dessa atividade, pois mesmo depois de termos explicado em atividades anteriores sobre nomenclatura dos Poliedros e seus elementos básicos, eles ainda não sabiam diferenciar vértice de arestas e acabavam errando no preenchimento da tabela. Essas questões, juntamente com a tabela que foi preenchida pelos alunos e com a associação dos Sólidos de Platão aos elementos da natureza serviram de base, digamos assim, para que os alunos pudessem ter ideias que culminassem na formulação e resolução dos problemas geométricos ligados a esses sólidos.

Explicamos que os alunos eram livres para formular qualquer tipo de problema, desde que fossem ligados aos Sólidos de Platão e ao final, eles teriam que resolvê-lo. Nesse momento alguns alunos ficaram confusos alegando até que essa era uma tarefa difícil chegando a pedir exemplos para que pudessem iniciar a formulação. Então o máximo que ajudamos foi em dizer que eles podiam formular seus problemas escolhendo apenas um dos Sólidos de Platão ou todos e relacionando-os a algum objeto do dia a dia e ainda pedimos para que os alunos usassem a criatividade e formulassem um problema no intuito de desafiar outro grupo de alunos para resolvê-lo, utilizamos esse fato para tentar motivar os alunos já que eles apresentavam dificuldades.

A seguir, na figura 11, traremos a formulação e resolução do Grupo 01, para evidenciar as dificuldades do trabalho com a prática de elaboração de problemas.

Figura 11: Problema e solução do Grupo 01 referente à tarefa 4.


*A que poliedro pertence o nome de hexagono quantos lados, vertices e aresta ele possui?

*Calcule a area cubica de um paralelepipedo, de 4 cm de altura por 80 cm de base.

* tentar recriar o poliedro ~~para~~ os descobrir qual é e através do modelo, fazer a contagem chegando a um resultado.

* Fazer passo a passo do modelo encontrar a area de um lado retangular e do lado quadrado para depois calcular a area cubica.

Fonte: Registro dos alunos do grupo G1.

Os alunos desse grupo ainda confundem nomenclatura de sólidos geométricos com polígonos e demonstram não apresentar um entendimento referente à área total de um sólido geométrico, pois pedem para calcular “área cúbica” de um paralelepípedo, mas só disponibilizam a altura e a base. Sabemos que um paralelepípedo é um sólido geométrico, então, além de altura e base, ele apresenta a largura. Esses alunos podem ter confundido área cúbica com volume de um sólido, pois para calcular o volume de um paralelepípedo, basta multiplicar suas três dimensões. Ressaltamos também que o cubo, um dos sólidos de Platão possui volume e uma das unidades mais utilizadas para expressar sua capacidade é o $1m^3$(metro cúbico) que equivale a 1000 litros. Então, acreditamos que os alunos misturaram todas essas informações geométricas (área e volume, metro cúbico com paralelepípedo) e tentaram criar um problema, mas sem sucesso.

Quando analisamos as respostas, fica claro que os alunos não sabem diferenciar as nomenclaturas de um sólido geométrico e de um polígono, pois apenas os poliedros apresentam faces, vértices e arestas e não um hexágono como foi registrado. Além disso, na resposta da segunda pergunta, eles sugerem calcular a área do lado retangular e depois do lado quadrangular, para depois calcular a "área cúbica", que nesse caso, seria então a área total do paralelepípedo. Mas, esses alunos apenas explicaram e não chegaram a realizar nenhuma operação aritmética. Por esses motivos, consideramos essa formulação apenas como uma simples pergunta acompanhada de erros conceituais. Não consideramos como um problema geométrico.

Samara, aluna do Grupo 02, gostou muito da primeira etapa dessa atividade que foi a construção dos Poliedros de Platão e construiu cuidadosamente os sólidos apresentando um bom manuseio com os materiais, recorrendo a seu escalímetro[3] para facilitar as dobraduras e depois a colagem dos sólidos. No momento da entrevista perguntamos se a aluna já teve alguma experiência de trabalhar com matérias manipuláveis nas aulas de Matemática e ela nos respondeu que no Ensino Fundamental trabalhou e construiu objetos geométricos, por isso houve uma facilidade maior na construção dos Poliedros de Platão, como podemos ver na figura 12.

[3] Escalímetro: Instrumento de desenho na forma de um prisma triangular que possui seis réguas com diferentes escalas. É utilizado para medir e conceber desenhos em escalas ampliadas ou reduzidas.

Figura 12: Samara construindo os Poliedros de Platão.

Fonte: Registro nosso.

No desenvolvimento da atividade, onde os alunos deveriam explorar os sólidos e analisar as características geométricas dos Poliedros de Platão, esperávamos que a aluna juntamente com seu grupo percebessem as características principais desses sólidos como: as faces dos poliedros regulares possuem todas, o mesmo formato ou que para cada vértice concorre o mesmo número de arestas. Mas Samara respondia de maneira bem direta, então estávamos sempre buscando extrair o máximo de informações que ela podia nos dar. Perguntamos:

Pesquisadora: Já responderam a primeira questão?

Samara: Então... a gente disse que são Poliedros de Platão com vértices, arestas e faces.

Pesquisadora: Só isso?

Samara: Tá bom, professora!

Pesquisadora: É por que eu estou querendo buscar mais informações de vocês, entendeu? São Poliedros de Platão! Tudo bem, todos aqui são, e como são Poliedros, independentemente se são de Platão ou não, eles têm vértices, faces e arestas, certo? Só que, além disso, vocês conseguem observar ainda outra coisa?

Samara: Eles não rolam por que são planos e retos!

Pesquisadora: O que mais? Olhando para o formato das faces deles o que vocês conseguem identificar?

Samara: Que tem figuras planas!

Pesquisadora: Ok. O que mais?

Samara: Fala minha gente...

Wilian: Não sei...

Samara: Ééé... tem faces iguais!

Pesquisadora: Todos eles?

Samara: Éé

Pesquisadora: Se você olhar cada um deles, as faces são todas iguais?

Samara: Cada um tem as faces iguais!

Pesquisadora: Então como podemos escrever isso que você falou?

Samara: As faces de cada poliedro são iguais.

Pesquisadora: São iguais em relação ao que? Elas têm o que para serem iguais?

Samara: Mesma quantidade de vértices, arestas... faces não, só tem uma mesmo que é sempre igual.

Pesquisadora: Isso! Formalize então isso que você falou, por que o que vocês fizeram estava certo, mas estão vendo que conseguiu observar ainda mais?

Tarefa 4: [Dia 01-09-2015]

Em seguida, na próxima questão Samara lê e responde ao mesmo tempo.

Samara: Bora... Qual o número mínimo de faces interligadas para se formar um sólido geométrico? Quatro faces formando uma pirâmide, né?

Wilian: E eu sei!

Samara: Aqui está a prova (mostrando o Tetraedro)

Tarefa 4: [Dia 01-09-2015]

A aluna apresenta uma boa percepção do objeto geométrico, pois prontamente respondeu que um sólido precisa ter no mínimo quatro faces interligadas. O material concreto, no caso o tetraedro construído por ela, serviu de apoio didático da representação do objeto geométrico em estudo, com aponta Kaleff (2003). Então, mais uma vez fica clara a importância dos materiais concretos e manipulativos na aprendizagem dos alunos, pois eles levam ao aluno vivenciar experiências que aguçam a produção de imagens mentais, que favorecem o reconhecimento de algumas propriedades de objetos geométricos e que podem ser usadas até como justificativas, como fez Samara.

Na próxima atividade os alunos teriam que observar cada um dos Poliedros de Platão já construídos e anotar em uma tabela o número de arestas, faces e vértices de cada um. Além disso, deveriam identificar o nome do polígono que forma as faces, a quantidade de arestas que partem de cada vértice e o nome do Poliedro. Essa atividade era bastante rica em detalhes e características de cada um dos Poliedros. Então se os alunos não soubessem a diferença entre os elementos básicos dos Poliedros eles consequentemente não preencheriam corretamente a tabela.

Nesse caso, Samara apresentou uma única dúvida referente a contagem das arestas do primeiro sólido escolhido, que foi o Hexaedro (cubo) e discutiu com seu colega que a fez compreender melhor. Samara começou a contar a quantidade de faces, vértices e arestas de cada Poliedro de Platão e anotou na folha de atividades. Pudemos perceber em nossas observações que a aluna apesar de chamar a atenção dos colegas do grupo para participarem e em determinados momentos se negar a responder tudo, ela não confia nas respostas dadas pelos colegas e por fim acaba resolvendo tudo. O próximo fragmento a seguir, nos mostra que mesmo no trabalho que deveria ser em grupo, Samara sempre faz as atividades sozinhas, sendo considerada por seus colegas de grupo, a líder:

Samara: Olhe, agora os problemas quem vão fazer é vocês, não quero nem saber!

Roberta: Quem? Daqui a pouco eu tô indo embora! Samara você não invente não por que eu escrevo tudo, você não me venha não!

Samara: Você escreve tudo o que eu digo e eu tô escrevendo tudo sem ninguém dizer...

Roberta: E então, mas eu escrevo!

Samara: Eu estou trabalhando em dobro! Eu já fiz três problemas, num tô doida. Os três problemas que agente fez, foi eu quem criei!

Roberta: Quem manda ser a líder? Responsabilidade de líder é responsabilidade de líder!

Samara: E é!??

A última atividade anterior à formulação e resolução dos problemas tinha como objetivo verificar se os alunos conseguiam chegar a Relação de Euler através da dica que passamos a dar quando perguntamos: O que acontece se vocês somarem o número de faces com o número de vértices de cada um desses poliedros? Descrevam ou estabeleçam alguma relação entre esses elementos. Samara utilizou o algoritmo da multiplicação, mas não obteve sucesso, então nos perguntou:

Samara: Não tem nenhuma continha não professora? A gente tentou umas aqui mas...

Pesquisadora: Mas aqui não é nem de multiplicar, é de somar não é? Vejam o enunciado! O que acontece em relação às arestas se vocês somarem faces mais vértices? Isso de cada um deles (dos sólidos), vai acontecer o que?

Samara: É mais dois!

Pesquisadora: Exemplo, aqui vocês preencheram 4 faces, 4 vértices e 6 arestas! 4 +4=8. Qual a relação entre 8 e 6? Vamos ver o que acontece com os demais?

Wilian: É menos dois!

Samara: Não, é mais dois!

Pesquisadora: Para todos sólidos acontece isso?

Wilian: Até agora sim!

Pesquisadora: Terminem e verifiquem se acontece para todos!

Samara consegue perceber que para todos os Poliedros de Platão existe uma relação entre seus elementos básicos, porém mesmo com nossa ajuda, ela não chegou à fórmula Matemática da Relação de Euler. Mas, registrou de forma escrita que ao somarmos a quantidade de faces com a quantidade de vértices, a quantidade de arestas será acrescida de dois. Nasser e Tinoco (2005) trazem em seu livro alguns autores que defendem a prova ingênua que é uma argumentação aceitável, que pode ter diversos níveis de rigor, dependendo da idade e do ano de escolaridade do aluno que a apresenta. Outros autores como Resende e Nasser (1994) também encontraram em suas investigações alguns tipos de provas ingênuas e entre elas o exemplo crucial, que é um tipo de prova em que o aluno desenvolve através de um exemplo o raciocínio que poderia ter sido feito no caso geral. Esse tipo de prova, o exemplo crucial, foi realizado por Samara no momento que, a partir de nossa ajuda, ela registrou a Relação de Euler de maneira escrita.

A penúltima atividade dessa quarta tarefa se referia à Formulação e Resolução dos problemas, então pedimos aos alunos que utilizassem o potencial criativo que há em cada um deles para explorar os Sólidos de Platão que construíram e assim formularem bons problemas matemáticos. Para motivá-los, demos a dica: formulem um bom problema como se vocês fossem desafiar outro grupo de colegas para resolvê-lo.

Pesquisadora: Vocês já tiveram a oportunidade de criar um problema assim?

Samara: Já...eu já estudei a matéria Geometria e eu sempre tive que criar problemas na minha vida.

Roberta: Mas, ela não quer criar não!

Samara: Eu que fiz mais coisas... eles não trabalharam em nada

Roberta: Trabalhamos em tudo, colamos, escrevemos!

Pesquisadora: Mas, Samara ajude o pessoal também, dê umas dicas... Se um entende mais que o outro, é importante que vocês se ajudem para que possam formular bons problemas.

Roberta: É grupo, então o trabalho é em grupo!

Nesse momento houve um pequeno conflito por que Samara não queria formular os problemas, pois já havia feito isso na tarefa anterior e foi ela que acabou respondendo às atividades. Então, Roberta acaba tomando a iniciativa e pensa em uma situação.

Samara por vezes se torna impaciente, pois ela percebe que mesmo depois de todas as atividades anteriores que foram realizadas na turma, seus colegas de grupo ainda não compreendem a diferença entre um quadrado e um cubo, ou seja, uma figura plana de um sólido geométrico que contém três dimensões. Então, mais uma vez, ela começa a pensar em um problema enquanto os demais alunos do grupo conversavam sobre outros assuntos.

Samara: Para uma amostra pedagógica os professores de química e Geometria resolveram se juntar para a execução de um projeto envolvendo o volume dos sólidos geométricos na produção de um perfume, as medidas dos componentes utilizados seria obtida através da área...

Ela rabisca algumas possibilidades de dados e resolução... Repete oralmente várias vezes sobre o que está pensando e escreve:

Samara: Para uma amostra pedagógica os professores de química e Geometria resolveram se juntar para a execução de um projeto envolvendo o volume dos sólidos geométricos na produção de um perfume, as medidas dos componentes utilizados seria obtida através do cálculo do volume dos sólidos. Para a produção de um litro de perfume era necessário um cubo de essência. Tendo o cubo, 6 cm de lado, qual a medida necessária?

Pesquisadora: Posso dar uma olhada? Vocês usaram o cálculo do volume!? Que bom...agora é só resolver! Como calculamos o volume do Cubo?

Samara: Área da base vezes a altura!

Roberta: Área da base vezes o volume da altura?

Samara: Hããã? (espanto) volume da altura? (risos)

Roberta: Eu me esqueci da Teoria de Polya... Primeiro é o que?

Samara: Não tem ai? Primeiro compreende, depois constrói a estratégia, depois executa a estratégia e depois verifica...

Roberta: Compreender é colocar os dados né?

Samara: É...

Roberta: A conta vou fazer de lápis...

Samara: Qual o volume do cubo?

Roberta: É isso vezes isso...

Samara: Coloque aí, v maiúsculo com um c pequenininho embaixo, é igual a *ele* ao cubo l^3

Roberta: Como é a fórmula?

Samara: É *ele* elevado a três (l^3)!

Roberta: Eu coloco aqui é?

Samara: V maiúsculo, v minúsculo que é o volume do cubo.

Roberta: Igual a três *ele* é?

Samara: Igual a *ele* ao cubo (l^3)!

Samara: Agora cria a estratégia...

Roberta: Como?

Samara: Sei lá...desenha um quadrado, desenha o cubo e coloca os lados...sei lá...

Roberta: Onde é que têm seis centímetros, aqui fora é?

Samara: São os lados, cada um tem 6 centímetros!

Samara: Isso não é um cubo não, isso é um quadrado!

Roberta: Eita, eu não sei fazer um cubo não

Samara: O cubo tem que ser feito em 3D!

Roberta: Depois da estratégia, é a execução da estratégia... qual a fórmula mesmo?

Samara: Tá ai...

Roberta: Calcula ai 6 três vezes... Faz aí a conta...

Samara: Vai dar 6 vezes 6 que é 36 agora vezes 6 de novo dá 216!

Roberta: Pronto!

Samara: Agora confira e coloque a resposta final!

Roberta: Como é que confere?

Samara: Nesse caso aí, eu não sei como vai conferir não!

Roberta: E agora, hein?

Samara: Raiz de 216 prova!

Roberta: Vê ai quanto que dá!

Samara: Raiz cúbica! Eu não sei usar essa calculadora não (se referindo à opção da raiz cúbica da calculadora científica). Vamos escrever a justificativa... Coloca aí: ao analisar a questão percebemos que o cubo têm 6 cm de lado, para calcular o volume aplica-se a fórmula lado ao cubo, seis ao cubo daria 216, que seria o volume total, consequentemente a medida necessária de essência.

Roberta: Isso é o que, a resposta final é?

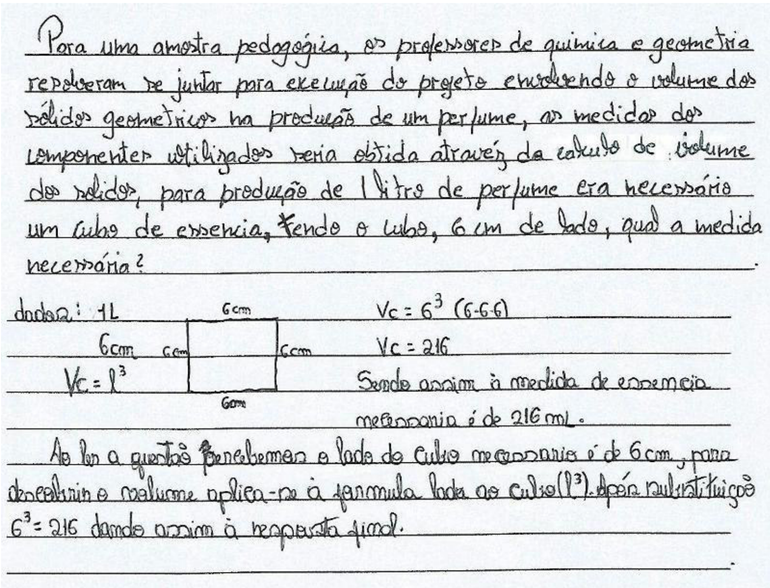
Samara: Não, isso é a conta em forma de texto... ô gente, vocês nunca fizeram situações problemas na 2ª, 3ª série?

Roberta: Já, mas não assim! Pergunta ai a ela...

Samara muda a estratégia que seria o cálculo de área para o cálculo do volume, pois lembrou que sabia como calcular o volume de um cubo. Nesse caso, a aluna realizou o processo que Brown e Walter (2005) denomina de “What if?” ou “What-if-not?” e que consiste em examinar as condições do problema e alterar livremente com base em seus conhecimentos. Como a aluna conhecia a fórmula do cálculo do volume do cubo, ela criou apenas um problema que o envolvesse.

A seguir, na figura 13, temos a formulação e resolução do problema do Grupo 02.

Figura 13: Formulação e resolução do problema referente à quarta atividade.



Para uma amostra pedagógica, os professores de química e geometria resolveram se juntar para execução do projeto envolvendo o volume dos sólidos geometricos na produção de um perfume, as medidas dos componentes utilizados seria obtida através do calculo de volume dos sólidos, para produção de 1 litro de perfume era necessário um cubo de essencia, sendo o cubo, 6 cm de lado, qual a medida necessária?

dados: 1L
6cm
$Vc = l^3$

$Vc = 6^3$ (6·6·6)
$Vc = 216$
Sendo assim à medida de essencia necessaria é de 216 mL.

Ao ler a questão percebemos o lado do cubo necessario é de 6 cm, para desenvolver o volume aplica-se à formula lado ao cubo (l^3). Após substituição $6^3 = 216$ dando assim à resposta final.

Fonte: Registro da aluna.

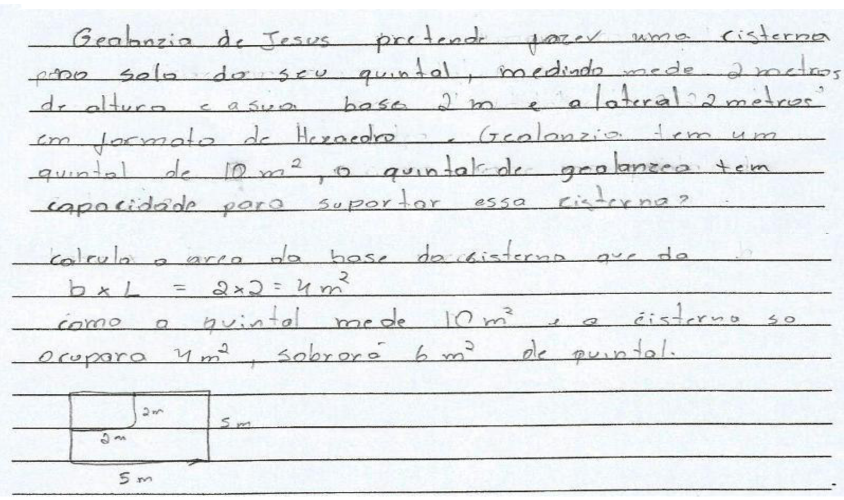
Constatamos que Samara se destacou em relação a seu grupo, pois ela acabava realizando as atividades sozinha. Criou um problema geométrico com dados numéricos que envolve um projeto interdisciplinar entre duas disciplinas para a produção de um perfume, Química e Matemática. Além disso, utilizou o conceito matemático de cálculo de volume que, neste caso seria o do Hexaedro (Cubo). O problema formulado é geométrico, por que envolve o conceito de volume, porém não apresenta uma clareza nas últimas informações: “para a produção de um 1L de perfume era necessário um cubo de essência. Tendo o cubo, 6 cm de lado, qual a medida necessária?” Entendemos que Samara utilizou a informação “para a produção de 1L de perfume era necessário um cubo de essência” sem relevância para a resolução do problema, pois o que é pedido mesmo no problema em nada se relaciona com essa informação. Além do mais, ela poderia ter formulado esse problema com mais clareza de informação e também de dados.

Na resolução desse problema, em um dos diálogos, ela deixa claro que sabe que o cubo apresenta três dimensões, porém, faz o esboço de um quadrado e representa seus quatros lados pelo valor de 6 cm e o substitui na fórmula do cálculo do volume. Um detalhe importante é que ela utiliza a escala de centímetros no problema, mas na solução aparece mL sem que a aluna tenha realizado cálculos de convenção de cm para mL. Ela finaliza justificando por escrito o que fez como forma de provar que sua solução está correta e não apresentou outra estratégia em sua resolução.

Atribuímos a utilização de apenas uma estratégia na resolução ao fato de os alunos não estarem acostumados a esse tipo de atividade e, por isso, consideram-na difícil. Apesar de termos insistido, a aluna não conseguiu resolver os problemas utilizando estratégias diferentes.

Outro grupo que também formulou e resolveu seu problema, foi o Grupo 04, vejamos na figura 14 a formulação e resolução do problema desse grupo.

Figura 14: Formulação e resolução do Grupo 04 referente à atividade 4.


Geabnzia de Jesus pretende fazer uma cisterna para solo do seu quintal, medindo mede 2 metros de altura e a sua base 2 m e a lateral 2 metros em formato de Hexaedro. Geolanzia tem um quintal de 10 m², o quintal de geolanzea tem capacidade para suportar essa cisterna?

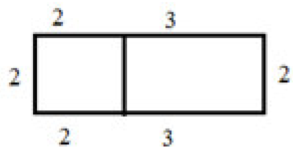
calculo a area da base da cisterna que da
b x L = 2x2 = 4 m²
como o quintal mede 10 m² e a cisterna so ocupara 4 m², sobrara 6 m² de quintal.

Fonte: Registro dos alunos

O problema formulado por esse grupo foi: "Gealanzia de Jesus pretende fazer uma cisterna pro solo do seu quintal, medindo 2 m de altura e sua base 2m e a lateral 2 metros em formato de Hexaedro. Gealanzia tem um quintal de 10 m^2. O quintal de Gealanzia tem capacidade para suportar essa cisterna?"

Diferente do Grupo 02, os alunos desse grupo criaram uma situação em que uma caixa d' água no formato de cubo com todas as dimensões iguais a 2 m ficaria sobre o solo do quintal de Gealanzia que possui $10m^2$ de área e eles gostariam de saber se o espaço ocupado pela caixa d'água caberia no quintal. Formularam um problema geométrico com dados numéricos em que para obter a resposta, bastava calcular apenas a área da base do cubo e comparar com a área do quintal de Gealanzia. Os alunos responderam corretamente, porém como podemos observar na figura 13, eles esboçaram uma figura incorreta para representar o quintal de Gealanzia. Realizamos um esboço para melhor ilustrar a resposta do Grupo 04, na figura 15.

Figura 15: Ilustração para a resposta do Grupo 04



Fonte: feito por nós no paint

Os alunos dos Grupos 03 e 06 completaram essa atividade, mas não chegaram a formular nenhum problema. O Grupo 01, como vimos no primeiro exemplo formulou um mero exercício, assim como também os Grupos 05 e 07.

5.3. Desvendando o mistério da existência de apenas cinco poliedros regulares e formulando e resolvendo problemas geométricos...

Dia 09 de Setembro de 2015 iniciamos as atividades da quinta e última tarefa onde os alunos provaram de forma indutiva a partir da manipulação dos polígonos regulares o porquê da existência de apenas cinco Sólidos de Platão e em seguida formularam e resolveram problemas geométricos.

A prova ou demonstração é fundamental na Matemática, mas nem sempre os alunos veem necessidade para comprovar um resultado. Nasser e Tinoco (2003) apresentam duas funções para a prova em Matemática, a primeira é **validar** um resultado, ou seja, comprovar que é verdadeiro e a outra é a de **explicar** ou **elucidar**, ou seja, mostrar por que o resultado é verdadeiro. Nesse sentido, buscamos estimular o raciocínio dos alunos para que eles pudessem tanto validar como explicar sobre a existência de apenas cinco Poliedros de Platão, por meio da Proposição XXI, encontrada no Livro XI de Os Elementos de Euclides, BICUDO (2011). Nesse livro, essa proposição diz que: “A soma dos ângulos dos polígonos em volta de cada vértice de um Poliedro é sempre menor do que 360º”.

Explicamos para os alunos que as faces dos Poliedros são formadas por polígonos. Então, a soma dos ângulos dos polígonos que formam um ângulo poliédrico em volta de cada vértice de um Poliedro tem que ser sempre menor que 360º. Para melhor compreensão, mostramos um Tetraedro para os alunos e explicamos:

“Se olharmos para esse vértice aqui ele é comum a essas três faces, então a soma dos ângulos aqui em torno desse vértice, tem que ser menor que 360º. Lembram que na outra atividade a primeira questão perguntava qual a principal característica desses sólidos? Muitos de vocês chegaram à conclusão que as faces deles são todas iguais, se ele for formado por triângulos, todos eles são iguais ou regulares. Então vamos demonstrar essa proposição! Prestem atenção agora. Para demonstrarmos, vocês tem que lembrar a definição de polígono, como calcular a soma dos ângulos externos e internos de um polígono e saber o que é necessário para que tenhamos um sólido de Platão. Antes de mostrar a resposta aqui no slide, para vocês o que é um polígono?”

Aluno do Grupo 05: É uma figura geométrica com vários ângulos.

Pesquisadora: Quem mais? Lembram-se da definição de Poliedro? Poly (várias) e Hedros (faces)? Então Polígono vem de Poly (vários) Gonos (Ângulos). Numa definição menos formal, é uma figura geométrica formada pelo mesmo número de lados e ângulos. O polígono mesmo é o que está aqui dentro, é a figura que é formada nesse espaço dentro da junção dos segmentos de reta. O polígono que tem três lados chamamos de triângulo, o de quatro lados quadrado, cinco lados pentágono e por ai vai.

Em seguida revisamos sobre o cálculo da soma dos ângulos externos e internos de um polígono. Fizemos um esboço de um triângulo no quadro apontando os ângulos internos e externos e informamos que tem uma proposição que diz que a soma dos ângulos externos de um polígono é sempre igual a 360º. Então, sabendo disso, podemos calcular os ângulos internos de cada polígono. Explicamos que para determinar a medida de cada ângulo externo de um polígono basta dividir 360º pelo número de lados do polígono, lembrando que o polígono tem que ser regular. Por exemplo, o triângulo equilátero, que tem todos os três lados iguais e os três ângulos internos dele também são iguais. Para descobrir a medida de cada ângulo externo do triângulo basta pegar 360º e dividir por três que dá 120º, ou seja, cada ângulo externo de um triângulo vai ser 120º.

Continuando, perguntamos aos alunos qual seria o valor de cada ângulo interno, ninguém soube nos responder, então seguimos com a explicação: "Se um ângulo é suplementar sua medida é 180º, então quando temos dois ângulos suplementares, a soma deles tem que ser igual a 180º (fizemos um esboço no quadro para que os alunos pudessem entender melhor). Então se o ângulo externo do triângulo equilátero mede 120º e a soma do externo com o interno tem que dar 180º, quanto mede o interno?" Os alunos chegaram a conclusão de que o ângulo interno mede 60º.

Realizamos o mesmo procedimento para encontrar as medidas dos ângulos externos e internos do quadrado (ambos 90º) e pentágono (ângulo externo 72º e ângulo interno 108º) e recapitulamos mais uma vez o que é necessário para que tenhamos Poliedros de Platão ou convexo: "Um poliedro convexo é regular quando todas as faces são polígonos regulares iguais e em todos os vértices concorrem o mesmo número de arestas." (Lima et al, pag. 241, 2006).

Nesse dia realizamos essa breve revisão. A atividade, mais uma vez, teve que ser recapitulada no dia seguinte quando entregamos a folha de atividades, os polígonos regulares e os sólidos para que os alunos pudessem testar, de acordo com a proposição, se a soma dos ângulos dos polígonos em torno de cada vértice é realmente menor que 360º e anotar suas conclusões.

Explicamos cada uma das atividades e orientamos quanto ao preenchimento das tabelas onde os alunos teriam que analisar as possibilidades para faces triangulares regulares com ângulos internos medindo 60°, para as faces quadrangulares com ângulos internos medindo 90°, para as possibilidades para faces pentagonais regulares com ângulos internos medindo 108° e as possibilidades para faces hexagonais regulares com ângulos internos medindo 120° e em seguida, preencher a tabela com o número de polígonos, a soma dos ângulos e o poliedro formado.

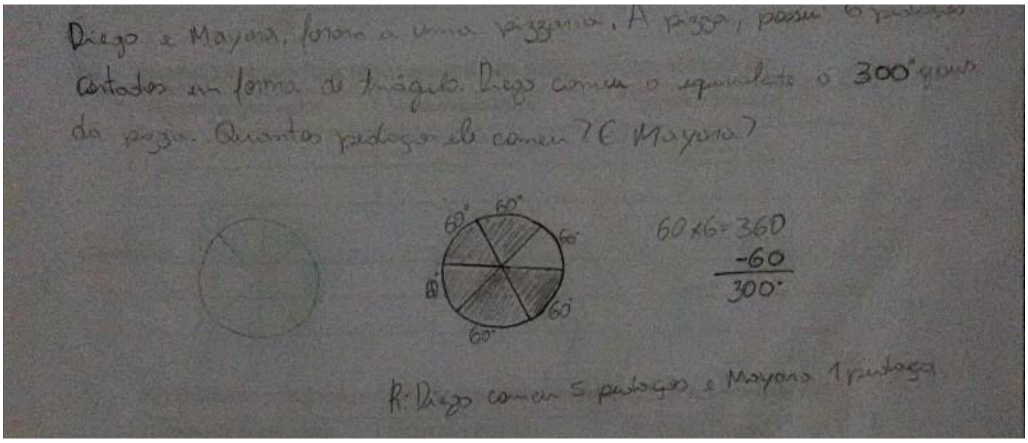
Como esse foi nosso último encontro, iniciamos agradecendo a participação dos alunos ao longo das atividades e mais uma vez informamos que iríamos atribuir nomes fictícios para que a identidade deles fosse mantida.

A turma estava muito eufórica e tivemos que pedir silêncio várias vezes. Os alunos sentiram muita dificuldade nessa atividade, pois, muitos ainda não compreendiam, sendo preciso reforçar a explicação grupo a grupo.

Constatamos que apenas quatro grupos conseguiram realizar todas as atividades dessa última tarefa, foram eles, os Grupos 02, 04, 05 e 07. Os demais, não conseguiram preencher a tabela corretamente e não formularam nenhum problema. Todos os grupos que chegaram a formular pelo menos algum problema, não utilizaram ideias da Geometria Espacial, apenas da Geometria Plana, com exceção do Grupo 02, grupo, que criou um problema utilizando um dos sólidos geométricos, porém um problema teórico, sem dados numéricos, o qual comentaremos mais adiante.

Os alunos do grupo 05 apresentaram a seguinte formulação: "*Diego e Mayara foram a uma pizzaria. A pizza, possui 6 pedaços cortados em forma de triângulo. Diego comeu o equivalente a 300º da pizza. Quantos pedaços ele comeu? E Mayara?*". A seguir, apresentamos a Figura 16 com a formulação e resolução do problema geométrico por esse grupo:

Figura 16: Formulação e resolução do Grupo 05 referente à tarefa 5



Fonte: Registro dos alunos

Acreditamos que esses alunos usaram a "pizza cortada em forma de triângulo" como base para essa pergunta, pois tinham em mãos alguns polígonos (vários triângulos) e associaram a pizza aos triângulos, pois encontraram uma maneira de relacionar o contexto do problema com a realidade do cotidiano e ainda conseguiram relacionar ângulos com frações, criando assim, um problema geométrico com dados numéricos.

Na resposta, representaram a pizza por meio de um desenho dividido em seis partes, pois eles perceberam que em termos de ângulos, o círculo trigonométrico possui 360º e, nesse caso, como está divido em seis partes iguais, cada parte terá 60º. A afirmação é de que Diego comeu o equivalente a 300º da pizza e a pergunta é referente a quantidade de pedaços que Diego comeu e também quantos pedaços Mayara comeu. A resposta foi respectivamente, 5 e 1 pedaços. Bastava saber relacionar os ângulos com a quantidade de fatias e foi o que esses alunos fizeram.

Todas as tarefas e atividades realizadas foram muito importantes para a interpretação das características dos problemas geométricos formulados e resolvidos. O único grupo que realizou todas as tarefas e se destacou em relação aos demais foi o Grupo 02, e como havíamos comentado, a aluna Samara ganhou um destaque especial nesse grupo, pois ela que praticamente desenvolveu individualmente as atividades.

De inicio, Samara tinha dúvidas referentes à quantidade de triângulos que ela juntaria em torno de um vértice para formar um Poliedro e não estava atenta ao ângulo poliédrico. Quando nos procurou, ela já havia juntado quatro triângulos em torno do vértice, por entender que o Poliedro que contém quatro faces triangulares é o tetraedro. Mas, quando explicamos que ela deveria unir os polígonos em torno de um vértice, olhando para o ângulo poliédrico formado, realizar a soma dos ângulos dos triângulos em torno do ângulo poliédrico e verificar se seria menor que 360º, ela entendeu e fez isso para os outros polígonos. Ela passou vários minutos respondendo a atividade enquanto mais uma vez os outros integrantes dos grupos ficavam conversando ou brincando com os sólidos.

Roberta mais uma vez troca as nomenclaturas entre os polígonos e poliedros. Ela apresenta bastante dificuldade de diferenciar figura plana de objeto tridimensional e Samara, meio impaciente, tenta lhe explicar mais uma vez a diferença.

Samara: Sabe uma coisa que eu tenho certeza? É que eu nunca mais vou esquecer o nome desses sólidos!

Roberta: Eu já esqueci! Eu só sei o que é hexágono, tetraedro....

Samara: Isso aqui é um pentágono mulher, pentágono! O Brasil é pentacampeãooo (apontando para um pentágono que forma o dodecaedro)

Roberta: E hexágono é o que?

Samara: O Brasil quer ser hexacampeãoo...vem de seis...seis faces!... Eu desisto de te dizer o nome dos polígonos e dos sólidos!!! Olha pra cá... ta vendo isso aqui, olha que lindo, 1,2,3,4,5 e 6: Hexágono! (mostrando o hexágono em cartolina que foi usado na atividade). Isso é um Poliedro (mostrando um dodecaedro), isso é uma face do poliedro (mostrando o pentágono) a Roberta!

Roberta: Então isso é um hexágono por que tem seis laterais!?

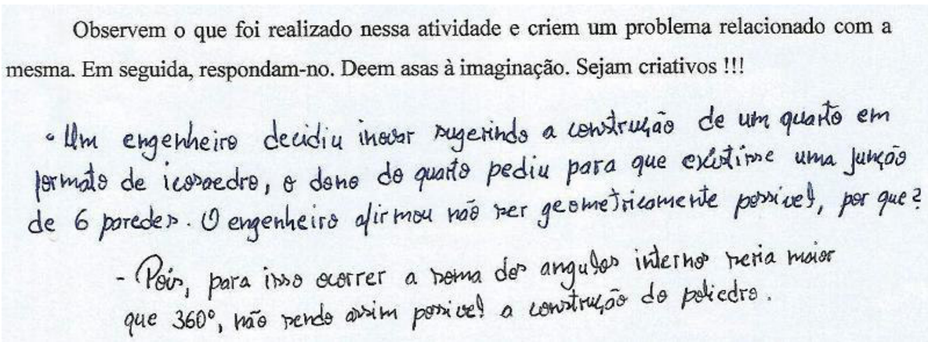
Samara: É!

Nesse momento Samara começa a pensar no problema:

Samara: Um engenheiro decidiu inovar construindo um quarto... o dono do quarto pediu que na formação do cômodo houvesse a junção de seis paredes. O engenheiro afirmou não ser geometricamente possível. Por quê?. .. Eu já to me sentindo professora com tanto problema (risos).

Ela pensou em um problema em que pudesse utilizar algum dos Poliedros de Platão, mas que não envolvesse cálculos nem de área e nem de volume e sim uma possível justificativa. Então, escolheu o icosaedro como sólido geométrico base para o problema, que seria a construção de um quarto no formato deste sólido. Ela atribuiu uma informação ao problema que diz: "o dono do quarto pediu para que existisse uma junção de 6 paredes" mas não especificou como seria essa junção das paredes. Vejamos na figura 17 o problema formulado por Samara.

Figura 17: Formulação e resolução do problema do Grupo 02 referente à quinta atividade.



Observem o que foi realizado nessa atividade e criem um problema relacionado com a mesma. Em seguida, respondam-no. Deem asas à imaginação. Sejam criativos !!!

• Um engenheiro decidiu inovar sugerindo a construção de um quarto em formato de icosaedro, o dono do quarto pediu para que existisse uma junção de 6 paredes. O engenheiro afirmou não ser geometricamente possível, por quê?

- Pois, para isso ocorrer a soma dos angulos internos seria maior que 360°, não sendo assim possível a construção do poliedro.

Fonte: Registro da aluna.

Ao resolver o problema, a aluna apresenta uma *justificativa pragmática*, que conforme em Nasser e Tinoco (2003), o aluno atesta a veracidade de uma afirmativa com base em apenas alguns casos particulares. Nesse caso ela não utilizou cálculos e sim o resultado da Proposição XXI de Euclides.

Samara criou um problema geométrico sem dados numéricos, porém de justificativa, baseando-se na atividade de prova da existência de apenas cinco Poliedros de Platão. Ao supor que o dono do quarto pediu para que existisse uma junção de 6 paredes e ao informar que o engenheiro afirmou não ser geometricamente possível, ela quis dizer que se juntarmos seis triângulos equiláteros com cada ângulo interno medindo 60º em torno de um vértice, formando um ângulo poliédrico, a soma deste seria exatamente 360º o que contradiz a proposição de Euclides e no caso do problema, é a justificativa para a afirmação do engenheiro.

Nesse caso, diferentemente dos demais alunos, o problema que Samara criou não apresenta dados numéricos e sim, dados afirmativos, onde para se encontrar a solução não é preciso efetuar cálculos e sim, necessário saber da Proposição XXI do Livro XI de Os Elementos de Euclides BICUDO (2011). Portanto, tanto o problema como sua resolução dependia unicamente do resultado dessa proposição, tornando assim um problema mais teórico e original em relação aos demais problemas da turma.

6. CONCLUSÕES

Neste capítulo, apresentamos uma visão geral da pesquisa retomando os objetivos que nos nortearam no decorrer desse estudo. Ressaltamos também algumas dificuldades encontradas ao longo da realização da pesquisa e, por fim, as considerações finais onde elencamos alguns questionamentos para futuras pesquisas, bem como sugestões para uma possível utilização das atividades em outras salas de aula ou outros sistemas de ensino.

6.1. Visão Geral da Pesquisa

A Educação brasileira vem mudando a cada ano, porém ainda está longe de ser satisfatória e de qualidade. Apesar de o Ensino público instituir metas de qualidade, ainda há muitos problemas a serem resolvidos. Em nosso caso, aconteceram algumas dificuldades para a realização dessa pesquisa, dentre elas, três mudanças de escolas e cidades, pois os alunos se recusavam a participar de uma pesquisa em Matemática por alegarem não gostar da disciplina e não possuírem uma base, uma das escolas escolhidas inicialmente, passou por um período de reforma estrutural e greve dos professores e por fim, encontramos dificuldades no tempo de realização da coleta dos dados, pois a turma que participou de nossa pesquisa possuía apenas uma aula de Matemática por dia, sendo necessário pedir a outro professor para trocar sua aula para que pudéssemos permanecer por pelo menos duas aulas seguidas por semana na turma.

O Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais nos fornece uma base de dados referentes à Prova Brasil a ao SAEB, na qual podemos identificar os conteúdos matemáticos nos quais os alunos mais apresentam resultados insatisfatórios no nosso Estado. Nossa pesquisa fez parte de um projeto maior, que utilizou os dados da base do Inep, referentes ao conteúdo de Geometria Espacial e os explorou em atividades de formulação e resolução de problemas matemáticos, intitulado: *Investigando a Formulação e a Resolução de Problemas Matemáticos na Sala de Aula: Explorando Conexões entre Escola e Universidade*, desenvolvido no âmbito do Programa Observatório da Educação, financiado pela CAPES, do qual a mestranda foi bolsista/pesquisadora.

Nosso objetivo geral foi analisar o processo de formulação e resolução de problemas geométricos por alunos do 3º Ano do Ensino Médio de uma escola pública de Campina Grande-PB, com base em atividades com materiais manipulativos. Na sequência, de acordo com os objetivos específicos, realizamos uma entrevista semiestruturada com o professor regente da turma com o objetivo de identificar suas concepções referentes ao uso de atividades diferenciadas como a formulação e resolução de problemas matemáticos, em seguida, preparamos as atividades ligadas ao conteúdo geométrico Poliedros e Poliedros de Platão para identificar as dificuldades que os alunos apresentaram quanto à formulação e resolução de problemas geométricos e por fim, avaliamos as dificuldades encontradas no processo considerando aspectos relativos ao ensino e à aprendizagem de Matemática.

A metodologia foi do tipo qualitativa interpretativa, onde coletamos os dados a partir da observação participante, das tarefas de formulação e resolução de problemas dos alunos da turma e uma entrevista com o professor da turma e com a aluna, Samara participante do Grupo 02, a qual acreditamos ter se destacado em relação ao demais alunos da turma por apresentar um certo conhecimento prévio de Geometria que possibilitou a formulação e resolução de problemas geométricos diferenciados em relação aos dos demais alunos da turma.

Acreditamos que as concepções do professor da turma relativas à Geometria poderia ser relevante para entendermos as dificuldades dos próprios alunos, por isso, realizamos uma entrevista semiestruturada com o professor da turma, o qual chamamos de Heleilton e pudemos constatar que ele foi professor dessa turma apenas durante o ano letivo de 2015, ou seja, não acompanhou os alunos ao longo do Ensino Médio e ainda afirmou que durante o 3º Ano, o foco está nos conteúdos desta série que possivelmente são cobrados pelo ENEM. Identificamos que o professor apresenta uma prática mais voltada ao ensino tradicional, fato que também foi comprovado na entrevista a Samara.

Apesar de possuir uma prática de transmissão de conteúdos, o professor se mostrou receptivo a nossa proposta e afirmou que os alunos gostariam e se envolveriam no trabalho com materiais manipuláveis. O próprio professor da turma, Heleilton, alegou na entrevista que os alunos são criativos: “eles podem até não ter interesse pela Matemática, mas se forem estimulados, eles poderão apresentar criatividade”. O incentivo é um fator emocional como elogios, medo, aversão e nós acreditamos, assim como Brown e Walter (2005) que somos influenciados o tempo todo por fatores emocionais e eles podem tanto bloquear como ajudar a desenvolver a aprendizagem dos alunos. No entanto, esses mesmos autores acreditam que a atividade de formulação de problemas pode ser muito importante para enfrentar o medo da própria Matemática, ou matematofobia, pois o sentimento de intimidação dos alunos em relação à Matemática acaba tornando-se potencialmente menor.

Foram desenvolvidas cinco tarefas de forma sequencial em 10 horas/aula com atividades aplicadas de forma hierárquica para que os alunos pudessem identificar os sólidos geométricos e distingui-los em duas classes, os Poliedros e os Corpos Redondos e em seguida, analisar as características dos Poliedros. Essas atividades, adaptadas de Oliveira e Gazire (2012), serviram como revisão para os alunos que já haviam estudado esse assunto e, ao mesmo tempo serviu de aprendizagem para a maioria, que mesmo no 3º Ano do Ensino Médio, ainda não havia estudado sobre os sólidos geométricos. Em seguida, foram realizadas mais três tarefas com atividades introdutórias às formulações e resoluções dos problemas geométricos, com o objetivo de fornecer uma melhor preparação para o surgimento de ideias dos alunos. Todas as atividades foram realizadas em grupos com quatro alunos e alguns em trios, apresentamos algumas atividades de alguns grupos, mas destacamos as formulações e resoluções dos problemas geométricos apresentados por Samara.

Pudemos identificar que durante as duas primeiras atividades os alunos interagiram mais e mostraram-se mais motivados e entusiasmados com a visualização e manipulação dos Sólidos geométricos em acrílico. Porém, nas tarefas que envolviam as atividades de formulação e resolução de problemas geométricos eles sentiram bastante dificuldade, principalmente por não terem uma base em relação a conceitos e propriedades dos sólidos geométricos além de ser uma tarefa não costumeira e nova para os alunos da turma participante.

6.2. Considerações finais

A aprendizagem Matemática dos alunos deve ir além de tarefas rotineiras como meras resoluções de exercícios e ser enriquecida por meio de tarefas e atividades desafiadoras, como a Formulação e Resolução de Problemas. Como vimos, algumas pesquisas tem mostrado que a Formulação e Resolução de Problemas está essencialmente ligada à criatividade (SILVER, 1997; VALE E PIMENTEL, 2012; HARPEN E SRIRAMAM). Um bom ensino de Matemática deve propiciar aos alunos a exploração do seu raciocínio, o desenvolvimento de estratégias para a resolução de problemas e o potencial criativo dos alunos.

Apesar de no Brasil e, principalmente na Paraíba, a literatura que trata da Formulação e Resolução de Problemas ainda ser praticamente inexistente e, pelo fato de termos utilizado um conteúdo de Geometria, especificamente os Poliedros de Platão que também é raro ser ensinado nas escolas públicas, acreditamos que à medida que iam sendo estimulados, os alunos iriam produzindo ideias para formularem seus próprios problemas. Esse estímulo partiu das atividades que foram realizadas como o uso de materiais manipuláveis como os sólidos geométricos em Acrílico e a própria construção dos Sólidos de Platão pelos alunos. Mas, pudemos perceber que além do estímulo, era necessária uma boa base matemática e, principalmente em Geometria, pois os alunos da turma e, em especial Samara, só formularam problemas os quais, soubessem antecipadamente responder.

Ao longo das atividades Samara apresentou algumas pequenas dificuldades em relação à Geometria, no entanto, identificamos em suas formulações e resoluções duas características de criatividade que são a fluência e originalidade.

Em nossa pesquisa, pudemos observar que, ao propor aos alunos a formulação de problemas geométricos baseados nas atividades, eles sentiram-se menos intimidados pela Matemática e, apesar de considerarem essa atividade uma tarefa difícil, os alunos alegaram que a Matemática não é uma disciplina apenas de números e contas. Eles perceberam que as formas geométricas estão representadas em vários os lugares do cotidiano, desde a estruturada de uma sala de aula, até um aparelho eletrônico, como o tablet. Os alunos estudaram e/ou relembraram conceitos e conteúdos geométricos por meio das atividades e formularam e resolveram problemas relacionados à Geometria, percebendo também que a Matemática está intimamente ligada à Língua Portuguesa com a criação de textos.

Os alunos da turma que participou de nossa pesquisa, de maneira geral, não estavam acostumados a participar de atividades em grupo nas aulas de Matemática e muito menos de atividades onde lhes eram pedido para formular e resolver problemas reacionados à Geometria. Talvez tenha sido esta a principal dificuldade encontrada por nós, mas como já havíamos levantado essa hipótese, decidimos realizar duas atividades introdutórias sobre os Sólidos geométricos adaptadas de Oliveira e Gazire (2012), com o objetivo de propor um contato inicial dos alunos com os Sólidos geométricos em acrílico, para que eles pudessem manipular, discutir, identificar as características e chegar à conclusão de que existem duas classes de Sólidos, os Poliedros e os Corpos Redondos.

Durante a realização das duas atividades iniciais, nós apenas mediamos o conhecimento que os alunos iam apresentando e, ao final, formalizávamos para que todos entendessem e pudéssemos prosseguir no andamento das demais atividades. Estivemos o tempo todo prestando atenção de forma direta, por meio da observação participante, conforme Marconi & Lakatos (2003), nos grupos de alunos que iam se destacando no desenvolvimento dessas atividades e também nos alunos de forma individual, mesmo estando inseridos em um grupo, pois durante o desenvolvimento das atividades, muitos grupos ficaram desfalcados. Por mais que tivéssemos avisado desde o inicio que seria muito importante a participação de todos os alunos em todas as atividades, muitos alunos faltaram e esse fato, de certa forma, prejudicou um pouco o andamento das atividades em grupo.

A terceira tarefa continha a atividade de Reformulação do *Problema do Gato e do Rato* e, pudemos perceber que os alunos apresentaram menor dificuldade, pois, inicialmente, apresentamos e resolvemos o problema para os alunos por meio da Heurística de Polya. Seguimos a sugestão de Boavida et al (2008) que foi a utilização da estratégia "*E se em vez de*". Por meio dessa estratégia, os alunos puderam modificar alguns aspectos do problema como o contexto, os dados, a incógnita e assim, facilitar e ter um contato inicial com o processo de formulação de problemas.

Nas outras duas últimas tarefas, os alunos realizaram uma atividade introdutória que serviu de base para as formulações e resoluções dos problemas. Essas atividades foram baseadas na estratégia "*Aceitando os dados*", também sugerida por Boavida et al (2008), na qual os alunos teriam que usar a criatividade para formular problemas livremente a partir da atividade introdutória que foi realizada em cada uma dessas tarefas.

Como foi destacado na Metodologia, sentimos necessidade de criar uma classificação para os problemas formulados pelos alunos para que pudéssemos analisar as características dos problemas que surgiram. Então, classificamos os problemas formulados pelos alunos em *Problemas não geométricos* e *Problemas geométricos*. Os primeiros, consideramos as perguntas em forma de texto que não podem ser considerados problemas ou que não são resolvidos por mecanismos matemáticos. Já os segundos, caracterizamos como perguntas cujo contexto apresentasse objetos e propriedades do espaço geométrico.

Os *Problemas geométricos,* ainda foram subdivididos em *Problemas geométricos com dados numéricos* e *Problemas geométricos sem dados numéricos.*

Estes problemas foram analisados, respectivamente, em relação à estrutura, uma aparente ligação entre o contexto, a realidade do cotidiano, linguagem matemática utilizada e, a partir das informações específicas do problema com a utilização ou não dos dados e da incógnita para a solução.

Ao todo, foram três tarefas com atividades de formulação e resolução de problemas. Na atividade **Reformulando o Problema do Gato e do Rato**, obtivemos um total de sete reformulações ou formulações, ou seja, todos os grupos reformularam e resolveram o problema do gato e do rato utilizando apenas uma estratégia tanto para a formulação como para a resolução. Na sequência, a atividade **Construindo Representações dos Poliedros de Platão e Formulando e Resolvendo Problemas Geométricos**, obtivemos um total de cinco formulações e resoluções, uma de cada grupo.

Por último, na atividade **Desvendando o Mistério da Existência de Apenas Cinco Poliedros Regulares e Formulando e Resolvendo Problemas Geométricos**, foram totalizadas quatro formulações e resoluções, também uma para cada grupo. Em relação à turma, pudemos perceber que à medida que as atividades iam exigindo mais empenho dos alunos, o número de formulações e resoluções de problemas ia diminuindo, pois os alunos afirmavam ser uma tarefa difícil e não ter uma boa base em relação a conceitos geométricos. Por esse motivo, apresentamos nessa pesquisa apenas os problemas e as respostas formulados pelos Grupos 02, 04 e 05, os que mais se destacaram.

Com relação à Samara, apesar de ela estar inserida em um grupo, essa aluna praticamente realizou as atividades sozinha e se destacou em relação ao seu grupo e aos demais alunos da turma, sendo possível encontrar em suas formulações, problemas geométricos, dois problemas geométricos com dados numéricos e um problema geométrico sem dados numéricos.

Nosso enquadramento teórico foi baseado na literatura constituída mais por recomendações como os NCTMs e por pesquisas que foram realizadas e relacionadas ao tema (BROWN; WALTER, 2005; SILVER, 1994; VALE, 2013). A pesquisa que realizamos, sem dúvidas merecia um estudo mais profundo no sentido de escolher adequadamente os problemas para o trabalho em sala de aula para que ajudem a formar o senso crítico dos alunos, buscar perceber melhor como os alunos reagem a atividades em grupos ou em díades, a necessidade de observarmos, o tempo todo, se é necessário fazermos correções em nossos planejamentos dependendo do que acontece em sala de aula, na medida em que trabalhamos com os alunos.Também poderíamos ter propiciado um momento de reflexão com os alunos sobre suas formulações e resoluções ao final de cada atividade com o objetivo de discutir com eles sobre a estrutura dos problemas que foram colocados.

Acreditamos que a capacidade de elaboração de problemas é uma rica potencialidade que pode e deve ser explorada nas aulas de Matemática e em especial, de Geometria, mas que devemos prestar atenção aos mínimos detalhes que ela nos revela, pois essa capacidade pode ficar comprometida pela falta de conhecimentos prévios específicos dos alunos, quase total ausência, na prática escolar, do trabalho com a resolução de problemas abertos e produção/interpretação de textos em aulas de Matemática e o pouco uso de materiais manipulativos em sala de aula, que poderiam auxiliar no desenvolvimento da visualização matemática e, portanto, na elaboração de conceitos geométricos, particularmente do âmbito da Geometria Espacial.

Dentre todas as atividades, pudemos identificar que na tarefa de reformulação, os alunos se mobilizaram mais e produziram mais problemas. Até mesmo Samara, que pensou em duas reformulações, embora tenha dado continuidade apenas a uma.

Os alunos dessa turma são curiosos, mas como não eram acostumados a resolver problemas e tampouco formularem, não utilizaram mais de uma estratégia nas formulações e resoluções dos problemas. Precisamos realizar com mais frequência, atividades investigativas de Matemática em sala de aula, que possibilitem a interação entre os alunos, a leitura e produção de textos e a socialização de procedimentos de resolução.

Diante dos resultados apresentados e das discussões realizadas, apontamos os seguintes questionamentos para futuras pesquisas:

1. Qual o potencial pedagógico que as atividades de formulação e resolução de problemas geométricos têm na identificação da compreensão dos conceitos matemáticos dos alunos?
2. Alunos que possuem bons desempenhos em Matemática e que são bons resolvedores de problemas são criativos ao formular problemas matemáticos?
3. Em relação à formação docente, como os programas de formação de professores podem contribuir para uma prática de estímulo ao desenvolvimento do potencial criativo dos alunos nas aulas de Matemática?

4. Como seriam os problemas produzidos pelos alunos, sem que lhes fossem pedido antecipadamente para resolver o próprio problema?

Finalizando, toda a produção realizada neste trabalho, pode ser utilizada pelos docentes em suas práticas. Além disso, as tarefas e atividades podem ser adaptadas e testadas em outros níveis educacionais e sistemas de ensino com a finalidade de explorar ao máximo as potencialidades de formulação e resolução de problemas, o desenvolvimento da criatividade nas aulas de Matemática e reflexões sobre o ensino de Geometria.

REFERÊNCIAS

ALENCAR, E.S. **Criatividade e educação de superdotados.** Petrópolis, RJ: Vozes, 2001.

ALMEIDA, P.C. **Se não sabe, por que não pergunta?** 2011. 76f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto Politécnico de Lisboa. Escola Superior de Educação, Portugal. 2011.

Arikan, E. E. & Unal, H.. An investigation of eighth grade students' problem posing skills (Turkey sample). *International Journal of Research in Education and Science (IJRES), 1*(1), p. 23-30, (2015).

BICUDO, I. **Os elementos/Euclides; tradução e introdução de Irineu Bicudo**. São Paulo; Editora UNESP, 2009.

BOAVIDA, A.; PAIVA, A. L.; CEBOLA, G.; PIMENTEL T. *Resolução de Problemas em Matemática*. In: A experiência Matemática no ensino básico. Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular. Lisboa: [s.n.], 2008.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e métodos**. Porto: Porto Editora, 1994.

BONOTTO, C.; Dal SANTO, L. **On the Relationship Between Problem Posing, Problem Solving and Creativity in Primary School.** Singer, F.M.; Ellerton N.F; Caí, J. (Eds) Mathematical Problem Posing: From Research to Effective Practice. New York: Springer, 2015.

BRANCA, N. A. **Resolução de problemas como meta, processo e habilidade básica.** In KRULIK, Stephen, REYS, Robert E. (Org.) A Resolução de Problemas na Matemática Escolar. Tradução: Hygino H. Domingues, Olga Corbo — São Paulo: Atual, 1997.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Matemática 3º e 4º ciclos. Brasília, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos: apresentação dos temas transversais / Secretaria de Educação Fundamental.*Matemática – Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos: apresentação dos temas transversais / Secretaria de Educação Fundamental.* – Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL, Ministério da Educação (MEC). Secretaria de Educação Básica (SEB). Departamento de Políticas de Ensino Médio. **Orientações Curriculares do Ensino Médio.** Brasília: MEC/SEB, 2006.

BRASIL, **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio** (PCN +): Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, DF: MEC, 2002.

BROWN, S.; WALTER, M. **The art of problem posing**. (3ª ed). New York: Routledge, 2005.

BROLEZZI, A. C. **Criatividade e Resolução de Problemas.** São Paulo: Editora: Livraria da Física, 2013.

CAI, J.; WANG, N.; MOYER, J. C.; NIE, B. **Mathematical problem posing as a measure of curricular effect on students' learning.** Jornal Internacional de pesquisa em educação, 50(2), 117–136. 2012.Versão aceita. Estudos Educacionais em Mathematica, (Setembro, 2012). DOI: 10.1007/ s10649-012-9429-3. © Springer 2012. Usado com permissão.

D' AMBRÓSIO, U. ***A Evolução da Resolução de Problemas no Currículo Matemático.*** In Anais do I Seminário em Resolução de Problemas, São Paulo: UNESP: 2008.

D' AMBRÓSIO, U. **Educação Matemática para Cidadania e Criatividade. Educação e Matemática**. Revista da Associação de Professores de Matemática. Lisboa, Portugal. p. 44-50, 2013.

GIL, A. C.. **Métodos e Técnicas de Pesquisa Social.** 6ª. ed. São Paulo: Atlas, 2011.

GONTIJO, C. H. *Relações entre criatividade, criatividade em Matemática e motivação em Matemática de alunos do Ensino Médio*. 2007. 206f. Tese (Doutorado em Psicologia)-Instituto de Psicologia, Universidade de Brasília, Brasília. 2007.

KALEFF, A. M. **Vendo e entendendo poliedros: do desenho ao cálculo do volume através de quebra cabeças e outros materiais concretos.** Niterói: EDUFF, 2003.

LEE, K. S.; HWANG, D.; SEO, J. J. **A development of the test for mathematical creative problem solving ability.** Journal of the Korea Society of Mathematical Education, Coréia, v.7, No. 3, p.163-198, setembro de 2003. Disponível em: <http://icms.kaist.ac.kr/mathnet/kms_tex/981204.pdf>. Acesso em: 14 ago. 2013.

LEVENSON, E. **Investigating Mathematical Creativity in Elementary School Through the Lens of Complexity Theory**. In: **A Critique of Creativity and Complexity Deconstructing Clichés**. The University of Montana, USA: Sense Publishers, 2014.

LIMA, E.L., CARVALHO, P.C.P. ,WAGNER, E., MORGADO, A.C. A Matemática do Ensino Médio. SBEM. v.2. 6 ed. Rio de Janeiro, 2006.

LORENZATO, S. **Por que não ensinar Geometria?** Educação Matemática em Revista, Ano III, nº 4, p. 3-13, 1º semestre, 1995.

LORENZATO, S. ***Laboratório de ensino de Matemática e materiais didáticos manipuláveis.*** In: O laboratório de ensino de Matemática na formação de professores. Org. Sergio Lorenzato (Coleção Formação de Professores) – Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

MACHADO, R. A.. **O Ensino de Geometria espacial em ambientes educacionais informatizados: um projeto de ensino de prismas e cilindros para o 2º ano do Ensino Médio.** Mestrado Profissional em Educação Matemática. Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Ouro Preto. Ouro Preto2010. Disponível em: http://www.ppgedmat.ufop.br/arquivos/Diss_Ronaldo_Asevedo_Machado.pdf. Acesso em: 01 fev. 2013.

MARCONI, M. A; LAKATOS, E. M. **Fundamentos de Metodologia Científica.** 5. ed. São Paulo: Atlas, 2003.

MATOS, J. M., & SERRAZINA, M. L. *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta, 1996.

MEDEIROS, K.M.; SANTOS, A.J.B. Uma experiência didática com a formulação de problemas matemáticos. In *Zetetiké* (UNICAMP), São Paulo, Volume 15, p. 87-118, n° 28, 2007.

MILAUSKAS, G. A. Problemas de Geometria criativos podem levar à resolução criativa de problemas. In: LINDQUIST, Mary, Montgomery, SHULTE, Albert P. (Orgs.). Aprendendo e ensinando Geometria. São Paulo: Atual, 1994. p. 86-105.

NASSER, L.; TINOCO, L. A de A. **Argumentação e Provas no ensino de Matemática.** 2 ed. Rio de Janeiro: UFRJ/Projeto Fundão, 2003.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM. 2000.

National Council of Teachers of Mathematics. *Professional standards for school mathematics*. Reston,VA: National Council of Teachers of Mathematics. 2008..

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (NCTM). *An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980s.* Reston: NCTM. 1989. Disponível em: <http://www.nctm.org /standards/content.aspx?id=17278>. Acesso em: 13 de Nov. de 2013.

OLIVEIRA, M. C.; GAZIRE, E. S. *Ressignificando a Geometria plana no Ensino Médio, com auxílio de van Hiele.* Belo Horizonte, 2012. Disponível em: http://www.pucminas.br/imagedb/documento/DOC_DSC_NOME_ARQUI20121128150635.pdf?PHPSESSID=fdb6d12870c8aaf4688b74f0ad0dd734.
Acesso em: 22 de set. de 2013.

ONUCHIC, L. R. **Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de Problemas.** In: Maria Aparecida Viggiani Bicudo. (Org.). Pesquisa em educação Matemática. São Paulo: Editora da UNESP, p. 199-218, 1999.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. **Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas.** In: Maria Aparecida Viggiani Bicudo; Marcelo de Carvalho Borba. (Org.). Educação Matemática: pesquisa em movimento. 3 ed. São Paulo: Cortez, cap. 12, p. 213-231, 2005.

ONUCHIC, L.L.R. & ZUFFI, E. M. **O ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas e os processos cognitivos superiores.** Revista Iberoamericana de Matemática, 79- 97, 2007.

PAIVA, J. P. A. A.. **O estudo da simetria inspirado em resultados de pesquisas em etnoMatemática.** Dissertação. Mestrado em Educação. Centro de Educação, Universidade Federal da Paraíba. João Pessoa: Editora UFPB, 2003.

PAVANELLO, Regina M. **O abandono do ensino da Geometria no Brasil: causas e consequências**. Zetetiké. Campinas, SP. Ano I, nº1, p.7-17, 1993.

PAVANELLO, R.M.; ANDRADE, R.N.G. **Formar professores para ensinar Geometria: um desafio para as licenciaturas em Matemática**. Educação Matemática em Revista, ano 9 no 11A, edição especial, abril de 2002, pp 78-87.

PEREZ, G.; COSTA, G.L.M.; VIEL, S.R. **"Desenvolvimento profissional e prática reflexiva"**. Boletim de Educação Matemática (BOLEMA), Rio Claro, vol. 15, n. 17, PP.59-70, 2002.

POLYA, J. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciências, 1997.

PONTE, J. P. **Estudos de caso em educação Matemática**. Bolema, 25, p. 105-132, 2006.

PONTE, J.P. **Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. In: Práticas p Profissionais do Professores de Matemática.** 1ª Ed, p. 13-27. Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Portugal, 2014.

RÊGO, R. G; PAIVA, J. P. A. A. Tópicos Especiais em Matemática III. In: ASSIS et al. Licenciatura em Matemática a distância, volume 6. Universidade Federal da Paraíba. João Pessoa: Editora Universitária da UFPB, 2009.

RÊGO, R. M.; RÊGO, R. G. *Desenvolvimento e uso de materiais didáticos no ensino de Matemática*. In: O laboratório de ensino de Matemática na formação de professores. Org. Sergio Lorenzato. Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

RÊGO, R.G., RÊGO, R. M.; VIEIRA, K.M. **Laboratório de ensino de Geometria.** Campinas, SP: Autores Associados, 2012.

RESENDE, J.; NASSER, L. Kinds of argumentation used in geometry. Atas do PME-18, vol. 1, p. 66, Lisboa, 1994.

ROSEIRA, N. A. **Educação Matemática e Valores: das concepções dos professores à construção da autonomia**. Brasília: Liberlivro, 2010.

SANTOS, M. R.. **Teoria de Van Hiele: Uma alternativa para o ensino da Geometria no 2º ciclo**. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9, 2007, Belo Horizonte: SBEM, 2007. p. 1-18. Disponível em: www.sbem.com.br/files/ix_enem/.../CC61508500487aT.rtf. Acessado em 01 fev. 2013.

SILVA, M. R. A. *Refletindo a partir da prática: Contribuições da Formulação e Resolução de Problemas Matemáticos no Estágio Supervisionado.* 2015. 217 p. Dissertação (Mestrado) -Universidade Estadual da Paraíba- UEPB, Campina Grande.

SILVER, E. On mathematical problem posing. For the Learning of Mathematics 14,p. 19-28, 1994.

SILVER, E. *Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing*. *ZDM, 3*,p. 75-80, 1997.

SMOLE, K.S.; DINIZ, M.I. **Ler, Escrever e Resolver Problemas**. São Paulo: Artmed, 2001.

VALE, I.; PIMENTEL, T. **Um novo-velho desafio: da resolução de problemas à criatividade em Matemática**. In A. P. Canavarro, L. Santos, A. M. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes, & S. Carreira (Ed.), *Investigação em Educação Matemática - Práticas de Ensino da Matemática* (pp. 347-360). Lisboa: SPIEM, 2012.

VILA, Antoni; CALLEJO, María Luz. “O que são crenças?” **In: Matemática para aprender a pensar: o papel das crenças na resolução de problemas.** Trad. Ernani Rosa. Porto Alegre: Artmed, 2006.

VAN de WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental:** formação de professores e aplicação em sala de aula. Tradução: Paulo Henrique Colonese. 6. Ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VAN HARPEN, X. Y.; SRIRAMAN, B. ***An Analysis of High School Students' Mathematical Problem Posing in China and the United States.*** Retirado de http://hs.umt.edu/math/research/technicalreports/documents/2011/20_2011_vanHarpenSriraman.pdf. Acesso em 10/10/13

YIN, R. K. **Estudo de caso: planejamento e métodos**. Tradução Ana Thorell; Revisão Técnica Cláudio Damascena. 4ª Ed. Porto Alegre: Bookman, 2010.

APÊNDICES

APÊNDICE A: Modelo de roteiro da entrevista semiestruturada com o Professor da Turma

i. Aspectos do perfil profissional

1. Há quanto tempo você atua como professora de Matemática e qual a sua formação inicial? Possui pós-graduação? Se sim, em quê?

2. Além de professor, você exerce outra atividade profissional?

ii. Concepções acerca do ensino de Geometria

3. O que é Geometria para você? Qual a importância da Geometria na formação dos estudantes?

4. Em algumas de suas pesquisas, Pavanello, no ano de 93 afirma que o abandono no ensino da Geometria verificado nas últimas décadas no Brasil, acontece principalmente, nas escolas públicas, justificando-se pela falta de conhecimento dos próprios professores. No seu planejamento anual, você contempla o ensino de Geometria?

5. Quais conteúdos de Geometria foram trabalhados com seus alunos neste ano? Como foram essas aulas? Você gostou de preparar e desenvolver essas aulas? Quais os desafios que você teve?

iii. Concepções a cerca da formulação e resolução de problemas na aula de Matemática associados aos materiais manipuláveis

6. Como vê a resolução de problemas matemáticos na sala de aula? Utiliza em suas aulas? Se sim, como?

7. Uma vez trabalhada a metodologia de formular e resolver problemas em sua sala de aula relacionada ao trabalho com materiais manipuláveis para o ensino de alguns

conteúdos geométricos, quais seriam os pontos positivos e os negativos que você poderia observar na aprendizagem de seus alunos?

iv. Concepções a cerca da criatividade em Matemática

8. Em sua concepção, os alunos podem apresentar características de criatividade ao formularem e resolverem problemas geométricos? Se sim, por quê?

v. Comentários gerais sobre o ensino de Geometria

9. Você tem mais algum comentário, observação, sugestão ou crítica a fazer em relação ao ensino de Geometria, no geral?

APÊNDICE B: Transcrição da entrevista semiestruturada com o professor regente

Data: Dia 18 de junho de 2015

Horário: 10:22

Local: Escola Estadual (Premem), bairro Catolé, Campina Grande-Paraíba

Nessa entrevista identificamos o professor da turma pelo pseudônimo de Heleilton e a palavra entrevistadora nos remete a tal função.

Entrevistadora: Há quanto tempo você atua como professor de Matemática e qual a sua formação inicial?

Heleilton: Há 30 anos, Minha formação é em Licenciatura em Matemática.

Entrevistadora: O senhor tem outra formação ou só em Matemática mesmo?

Heleilton: Só Matemática mesmo.

Entrevistadora: Possui pós-graduação? Se sim, em quê?

Heleilton: Sim. Especialização

Entrevistadora: Em que área?

Heleilton: Tecnologia da Educação

Entrevistadora: Só uma ou tem mais de uma?

Heleilton: Só uma.

Entrevistadora: Além de professor, você exerce outra atividade profissional?

Heleilton: Não.

Entrevistadora: O que é Geometria para você? Qual a importância da Geometria na formação dos estudantes?

Heleilton: Eu acho que a Geometria deveria ser introduzida bem nas séries iniciais por que desenvolve a questão da visualização, partindo do prático, do real para depois passar a álgebra e não fazer o contrário como geralmente é feito com alguma coisa totalmente abstrata e fica sem entendimento ou criam antipatia com a disciplina e não entendem exatamente o que fazer. Eu acho que a Geometria é importante nisso ai, a partir de coisas palpáveis para eles.

Entrevistadora: Em algumas de suas pesquisas, Pavanello, no ano de 93 afirma que o abandono no ensino da Geometria verificado nas últimas décadas no Brasil, acontece principalmente, nas escolas públicas, justificando-se pela falta de conhecimento dos próprios professores. No seu planejamento anual, você contempla o ensino de Geometria?

Heleilton: Agente segue o programa que é definido pelo MEC. Agente se importa a fazer um trabalho em cima disso, ultimamente agente ta mudando algumas coisas tendo em vista o ENEM, então agente ta procurando adaptar os conteúdos. Mas se agente fosse seguir simplesmente os conteúdos do terceiro ano o que ta na grade regular não há nada que possa ser utilizado, praticamente nada no ENEM. Então agente tem que fazer uma mudança nisso ai por que agente fica com o seguinte dilema: se eu sigo,,,mas não faço para meus alunos, se eu não sigo to deixando o conteúdo, a determinação regular ao superior...então o que fazer??

Entrevistadora: Você acha que a abordagem que você teve de Geometria durante a graduação é suficiente para ensinar Geometria aos seus alunos?

Heleilton: A que eu tive praticamente na universidade não, agora, eu considero que tenho a capacidade por que eu estudei depois. Não só Geometria, muitas coisas que agente não viu agente aprende com a prática, ensinando.

Entrevistadora: Você sugeria alguma mudança na abordagem do ensino de Geometria?

Heleilton: Eu acho que hoje tem mais disponibilidade de recursos pra isso. A questão da internet, da informática em geral que permite uma visão melhor dos conteúdos, uma maneira melhor de se mostrar.

Entrevistadora: Quais conteúdos de Geometria foram trabalhados com seus alunos neste ano? Como foram essas aulas? Você gostou de preparar e desenvolver essas aulas? Quais os desafios que você teve?

Heleilton: Esse ano trabalhamos Geometria Analítica.

Entrevistadora: Como foram essas aulas? Os alunos estão aprendendo? Estão achando o conteúdo fácil, difícil?

Heleilton: O conteúdo em si não estão achando difícil. Eu senti uma dificuldade nas avaliações que eu fiz agora, essas últimas que eles tinham dificuldades referentes a outras séries, na questão operacional.

Entrevistadora: Da para o senhor identificar algum desafio que teve em dar esse conteúdo ou está tranquilo?

Heleilton: Ta tranquilo. A questão é essa, operacional. As vezes eles até entendem, tentam resolver mas erram nos cálculos, erram coisas básicas.

Entrevistadora: Como você vê a resolução de problemas matemáticos na sala de aula?

Heleilton: Essa é outra dificuldade que agente enfrenta na escola por que os alunos não costumam ler, então eles tem dificuldade em interpretar a questão. Isso se debate há muito tempo, a questão de interpretação. Eles se ligam muito em seguir o modelo.

Entrevistadora: Você utiliza em suas aulas resolução de problemas, ou já utilizou?

Heleilton: Já

Entrevistadora: Como foi a abordagem?

Heleilton: Os alunos tiveram dificuldade exatamente no que eu falei, na questão de interpretar exatamente o que agente quer. A resolução de problemas agente parte do problema e eles tem que discutir a maneira de... o interesse é esse, fazer eles discutirem a maneira de sair de uma determinada situação. As vezes eles tem preguiça, não tem muito costume de raciocinar, eles querem que agente diga pra eles o que eles devem fazer.

Entrevistadora: Uma vez trabalhada a metodologia de formular e resolver problemas em sua sala de aula relacionada ao trabalho com materiais manipuláveis para o ensino de alguns conteúdos geométricos, quais seriam os pontos positivos e os negativos que você poderia observar na aprendizagem de seus alunos?

Heleilton: Material manipulável se torna um entendimento mais fácil para eles, então só tem pontos positivos e até o fato deles confeccionarem o material isso serve como um incentivo, eles gostam dessa parte de fazer alguma coisa que eles vejam resultados.

Entrevistadora: Então o senhor acha que não teriam pontos negativos?

Heleilton: Creio que não.

Entrevistadora: Em sua concepção, os alunos podem apresentar características de criatividade ao formularem e resolverem problemas geométricos?

Heleilton: eu creio que sim.

Entrevistadora: Se sim, por quê?

Heleilton: Por que eles são muito criativos, acho que depende do incentivo que eles recebem. Isso ai agente não pode negar. Eles podem ate não ter interesse, mas se nós provocá-los eles são criativos.

Entrevistadora: Você tem mais algum comentário, observação, sugestão ou crítica a fazer em relação ao ensino de Geometria, no geral?

Heleilton: A crítica que eu tenho a fazer, no geral, é a questão do programa, do currículo. Eu acho que já passou da época de ser modificado no Ensino Médio. Para se ter uma abordagem melhor sobre Geometria, Matemática financeira, estatística...que não são devidamente abordados.

Entrevistadora: O senhor tem alguma sugestão para melhorar o ensino de Geometria?

Heleilton: Não. Não. Eu creio que ai é vontade, o que precisa pra começar é vontade.

Entrevistadora: Pronto. Então está bom professor. Obrigada atenção e pela entrevista, por ter nos disponibilizado um tempinho para nos ajudar.

APÊNDICE C: Roteiro de planejamento das atividades que serão realizadas

As atividades que serão descritas adiante serão desenvolvidas em uma turma de 3º ano do Ensino Médio Integral de uma escola pública estadual localizada no município de Campina Grande situada no agreste paraibano. O objetivo dessas atividades é primeiramente propor um contato dos estudantes da turma com os Sólidos geométricos para que eles possam identificar características, discutir, compartilhar ideias, além de permitir subsídios para que o potencial criativo dos alunos possa emergir no momento posterior onde eles irão formular e resolver os problemas geométricos.

PRIMEIRA ATIVIDADE: Distinguindo as figuras espaciais

OBJETIVOS:

Desenvolver a habilidade de visualização e representação;

Observar e discutir as principais características dos sólidos geométricos;

Levar a turma a distinguir dois tipos de figura espacial: os poliedros e os corpos redondos e as principais diferenças entre eles;

RECURSOS NECESSÁRIOS:

Alguns sólidos geométricos, como por exemplo: o cubo, o cone, o cilindro, a esfera, a pirâmide de base quadrada, prisma e base triangular, entre outros. Data show para a apresentação da proposta, folhas de registro para os alunos e pincel para o professor e para a pesquisadora.

ESTRATÉGIAS/PROCEDIMENTOS:

Iremos propor que a partir de agora as atividades sejam realizadas em equipe de três alunos. Apresentaremos diversos sólidos à turma, deixando que eles manipulem livremente, observando os comentários dos alunos, se eles identificam as aparências, se observam alguma propriedade e se identificam o nome dos sólidos. Em seguida, cada dupla, irá escolher ao acaso dois sólidos e juntos irão anotar na folha de registro, adaptado de Oliveira e Gazire (2012), o maior número de semelhanças e diferenças entre os sólidos.

Feito isso, eles irão socializar dizendo ao grupo pelo menos uma característica em que se assemelham e outra que os diferencia. Em seguida, a pesquisadora, junto com o professor da turma, irá comentar sobre as atividades dos alunos e indagá-los com questionamentos do tipo: *Quantos grupos vocês encontraram? Que critérios usaram para separar os grupos? Quais as semelhanças e diferenças entre esses grupos?* A ideia é induzir os alunos para que eles cheguem à conclusão de que temos dois grupos de sólidos geométricos, os poliedros e os corpos redondos.

SEGUNDA ATIVIDADE: Diagnosticando o Poliedro

OBJETIVOS:

Observar e discutir as principais características dos Poliedros;

Analisar as partes que compõem um sólido geométrico em três dimensões;

Propor a verificação de propriedades de figuras planas que compõem um Poliedro;

Efetuar cálculo de perímetro e área do polígono da base do Poliedro;

Identificar a representação do sólido planificado.

RECURSOS NECESSÁRIOS:

Alguns sólidos geométricos, como por exemplo: o cubo, o prisma, a pirâmide de base triangular, quadrada e hexagonal, prisma de base triangular, quadrangular e hexagonal. Folhas de registro, réguas e folhas A4 para os alunos e pincel para o professor e para a pesquisadora.

ESTRATÉGIAS/PROCEDIMENTOS:

No terceiro momento, passaremos a trabalhar apenas com os Poliedros. Cada dupla irá escolher um poliedro para analisá-lo respondendo a segunda atividade (apêndice D), também adaptado de Oliveira e Gazire (2012).

TERCEIRA ATIVIDADE: Reformulando o problema do gato e do rato

OBJETIVOS:

Propor aos alunos a reformulação desse problema por meio da estratégia "*E se em vez de?*";

Propor uma familiarização dos alunos com esse tipo de atividade de reformulação de problemas.

RECURSOS NECESSÁRIOS:

Folhas de registros para os alunos. Data show para apresentar o problema do gato e do rato e a proposta de atividade. Pincel para o quadro para a pesquisadora.

ESTRATÉGIAS/PROCEDIMENTOS:

Inicialmente, explicaremos aos alunos sobre a definição de problema, problema matemático, a diferença entre problemas e exercícios e sobre o que é necessário para que tenhamos bons problemas matemáticos. Em seguida, comentaremos um pouco sobre Polya e sua heurística para resolução de problemas matemáticos.

Dando continuidade, apresentaremos o problema do gato e do rato e resolveremos para os alunos a partir das quatro etapas para se resolver um problema, apresentada por Polya. Logo após, iremos pedir que os alunos reformulem esse problema por meio da estratégia "*E se em vez de?*", pois pretendemos provocar uma situação inicial em que os alunos poderão reformular um problema ligado à Geometria para que nas próximas atividades, eles formulem e resolvam seus próprios problemas.
Por fim, os alunos irão receber uma folha de registro com o problema do gato e do rato para que eles reformulem esse problema. Iremos questionar quais as estratégias que eles irão utilizar para reformular esse problema, como por exemplo, a mudança nos dados do problema, a mudança da incógnita, etc. Existem várias opções para reformular esse problema, mas esperamos que nessa atividade os alunos percebam que para alterar os dados do problema temos que pensar inicialmente na possível resposta.

QUARTA ATIVIDADE: Construindo representações dos Poliedros de Platão e formulando e resolvendo problemas geométricos

OBJETIVOS:

Construir representações dos Poliedros de Platão a partir de suas planificações;

Propor que os alunos observem os sólidos e identifique suas principais características;

Estimular criatividade dos alunos para criarem e resolverem problemas geométricos;

Estimular o desenvolvimento de mais de uma estratégia para resolução dos problemas.

RECURSOS NECESSÁRIOS:

Os moldes dos sólidos de Platão. Cartolina. Cola. Tesoura. Folhas de Registro para as formulações e resoluções, lápis e borracha.

ESTRATÉGIAS/PROCEDIMENTOS:

Iniciaremos nosso terceiro encontro comentando as atividades anteriores, dando oportunidade para que os alunos expressem o que vivenciaram, se gostaram, se sentiram dificuldades. Em seguida faremos uma breve revisão sobre conceitos básicos de Geometria Plana e também Espacial para recapitular os elementos básicos de um Poliedro. Logo depois, através de slides apresentaremos os sólidos de Platão e sua associação com os elementos da natureza, como o tetraedro que é associado ao fogo, o hexaedro a terra, o octaedro ao ar, o icosaedro a água e o dodecaedro ao universo. Mostraremos também alguns objetos cotidianos que foram inspirados nos modelos dos Poliedros de Platão.

Antes de começar a atividade, iremos expor os sólidos de Platão e deixar que os alunos manipulem livremente. Em seguida, entregaremos uma ficha de registro com as seguintes indagações:

- ✓ *Qual a principal característica que vocês podem observar nesses sólidos?*
- ✓ *Qual o número mínimo de faces interligadas é necessário para se formar um Poliedro?*
- ✓ *Qual desses três elementos: Arestas, Faces ou Vértices é usado para estabelecer o nome do Poliedro?*
- ✓ *O que acontece se vocês somarem o número de faces com o número de vértices de cada um desses poliedros? Descrevam ou estabeleçam alguma relação entre esses elementos.*
- ✓ *Além desses cinco poliedros de Platão, será que existem outros tipos de poliedros de Platão?*

Com essas perguntas objetivamos que os alunos pelo menos consigam observar que todas as faces dos poliedros de Platão são regulares ou que eles consigam ir além, observando que cada face possui o mesmo número de arestas e que em todo vértice concorre o mesmo número de aresta ou mais ainda, que a Relação de Euler é válida para esses poliedros e que todos são convexos.

Cada grupo receberá um molde planificado em folha de papel A4 de cada um dos Poliedros de Platão. Entregaremos cartolinas coloridas, colas e tesouras para que eles possam montar seus sólidos. Depois de terem construído os Poliedros de Platão entregaremos as folhas de registro para que os alunos, em grupo, responda às perguntas citadas e em seguida formulem problemas geométricos com base no que eles já sabem sobre Geometria e também a partir das atividades anteriores. Explicaremos que eles serão livres para a formulação dos problemas geométricos, mas estimularemos o uso da criatividade dos alunos. Quando todos formularem seus problemas, pediremos que eles resolvam utilizando mais de uma estratégia.

QUINTA ATIVIDADE: Desvendando o mistério da existência de apenas cinco poliedros regulares...

OBJETIVOS:

Demonstrar de maneira intuitiva que existem apenas cinco poliedros de Platão;

Estimular a criatividade dos alunos para criarem e resolverem problemas geométricos;

RECURSOS NECESSÁRIOS:

Alguns polígonos regulares feitos em cartolina, folha de registros, pincel para a pesquisadora.

ESTRATÉGIAS/PROCEDIMENTOS:

Para ajudar os alunos, distribuiremos polígonos regulares como triângulos equiláteros, quadrados, pentágonos, hexágonos, heptágonos e octógonos regulares para que eles, ainda em grupos, demonstrem de maneira intuitiva que existe apenas cinco poliedros de Platão. Essa demonstração será baseada na Proposição 21, encontrada no Livro XI de, Os Elementos de Euclides, que diz: “a soma dos ângulos dos polígonos em volta de cada vértice de um poliedro é sempre menor do que 360°”.

Juntamente com os polígonos regulares, entregaremos uma tabela (apêndice 4) onde os alunos irão poder analisar as diversas possibilidades de união entre as faces poligonais iguais em torno de cada vértice para que a soma dos ângulos das faces formadas pelos polígonos unidos em cada vértice seja menor que 360°. Eles deverão registrar na tabela os resultados e conclusões.

Lembraremos aos alunos que por definição os sólidos platônicos são construídos por polígonos regulares congruentes e que eles têm que unir pelo menos três faces em torno de um vértice para que possam formar um sólido. Eles devem ter em mente a planificação dos sólidos para que ao juntar, por exemplo, três triângulos equiláteros, percebam que é possível construir um vértice de um tetraedro. Por fim, pediremos que os alunos formulem e resolvam um problema baseado na atividade que fizeram.

APÊNDICE D: Atividade 1

FICHA DE OBSERVAÇÃO

GRUPO: ______________________________e__________________________________

______________________________e__________________________________

Forma (figuras): ____

CARACTERÍSTICAS OBSERVADAS:

- ✓ ____
- ✓ ____
- ✓ ____
- ✓ ____
- ✓ ____

Ou

SEMELHANÇAS	DIFERENÇAS

Ou

REGRA ESTABELECIDA: ____

- ✓
- ✓
- ✓
- ✓

APÊNDICE E: Atividade 2

Diagnosticando o Poliedro
1. Quantas dimensões podemos observar em um sólido geométrico? Quais são elas? Vocês já conhecem esse sólido que tem em mão? Qual o nome dele?
2. De que partes é composto esse sólido? Quais delas podem ser chamadas de faces, vértices e arestas?
3. Quantas faces, vértices e arestas possui esse sólido? Vocês conseguem estabelecer alguma relação numérica entre os elementos “faces”, vértices e arestas? 4. A qual figura plana corresponde cada uma de suas faces laterais e sua base? Essas figuras planas apresentam alguma característica comum? Justifiquem.
5. Estamos trabalhando apenas com um grupo de sólidos. Vocês seriam capazes de fazer ainda alguma subdivisão nesse grupo? Como seria e quais os critérios utilizados?
6. Faça um desenho representando esse sólido planificado.

APÊNDICE F: Atividade 3

Reformulando o problema do gato e do rato...

Equipe: ________________________________e ________________________________

________________________________e ________________________________

“Um gato está sobre um muro de 4m de altura quando avista um rato a uma distância de 8m da base do muro. Quando o rato dirige-se a sua casa (em linha reta até o muro) é comido pelo gato, que pula diagonalmente, andando o mesmo comprimento que o rato tinha andado até então. Qual a distância que cada um percorreu?” Extraído do livro: ***How To Solve it***, Polya (1978).

Agora é a vez de vocês criarem problemas!

Através da estratégia “*E se em vez de?*” Criem novos problemas a partir da modificação dos dados apresentados no problema anterior. Em seguida resolva-os por meio da Heurística de Polya: Compreendendo o problema; elaborando um plano; executando o plano e verificando a solução.

APÊNDICE G: Atividade 4

Construindo representações dos Poliedros de Platão e formulando e resolvendo problemas geométricos

EQUIPE: ______________________________e____________________________

______________________________e_____________________________

1. Qual a característica principal que vocês conseguem observar nesses sólidos?

____

____

____.

2. Qual o número mínimo de faces interligadas é necessário para se formar um sólido geométrico?

____

____

____.

3. Qual desses três elementos: Arestas, Faces ou Vértices é usado para estabelecer o nome do Poliedro?

____

____

____.

4. Observando os poliedros que vocês construíram, identifiquem o número de arestas, faces e vértices de cada um deles.

Nome do Poliedro	**Número de Arestas (A)**	**Número de Faces (F)**	**Número de Vértices (V)**	**Polígono que forma suas faces:**	**Quantidade de arestas que partem de cada vértice:**

5. O que acontece se vocês somarem o número de faces com o número de vértices de cada um desses poliedros? Descrevam ou estabeleçam alguma relação entre esses elementos.

____.

6. O autor Silver (1997) afirma que a formulação de problemas envolve a geração de novos problemas e questões para explorar uma dada situação. A partir da comunicação de ideias propostas por meio de trabalho em equipe, podemos obter vários resultados positivos. Então, utilizem o potencial criativo que há em cada um de vocês para explorar os Sólidos de Platão que vocês construíram e assim formularem bons problemas matemáticos. Dica: formulem um bom problema como se vocês fossem desafiar outro grupo de colegas para resolvê-lo.

____.

7. O grande matemático Polya (1994) criou um modelo para a resolução de problemas o qual prevê quatro etapas para a resolução de um problema: compreensão do problema, construção de uma estratégia de resolução, execução da estratégia escolhida e revisão da solução. Agora é hora de vocês explicarem o processo mental que utilizaram para chegar a solução do problemas que foi formulado na questão anterior.(Se possível utilizem mais de uma estratégia para a resolução).

____.

APÊNDICE H: Atividade 5

Desvendando o mistério da existência de apenas cinco poliedros regulares e formulando e resolvendo problemas geométricos

EQUIPE: ______________________________e______________________________

______________________________e______________________________

1. Possibilidades para faces triangulares regulares com ângulos internos medindo 60°

Número de triângulos	Soma dos ângulos	Poliedro formado

Conclusão:____

____

____.

2. Possibilidades para faces quadrangulares com ângulos internos medindo 90°.

Número de quadrados	Soma dos ângulos	Poliedro formado

Conclusão:____

____

____.

3. Possibilidades para faces pentagonais regulares com ângulos internos medindo 108°

Número de pentágonos	Soma dos ângulos	Poliedro formado

Conclusão:____

____

____.

4. Possibilidades para faces hexagonais regulares com ângulos internos medindo 120°

Número de hexágonos	Soma dos ângulos	Poliedro formado

Conclusão:____

____

____.

Observem o que foi realizado nessa atividade e criem um problema relacionado com a mesma. Em seguida, respondam-no. Deem asas à imaginação. Sejam criativos !!!

APÊNDICE I: Modelo da entrevista semiestruturada com Samara

Data:

Horário:

Local:

1. A Matemática apresenta alguma importância no seu dia a dia? Qual?
2. Quais as considerações que você pode fazer sobre o ensino de Geometria nas aulas de Matemática? Que sugestões você daria para melhorá-lo?
3. Você já teve a oportunidade de trabalhar com materiais manipuláveis nas aulas de Matemática? Se sim, foi nas aulas de Geometria? Como foi, pode nos descrever?
4. Você já havia formulado algum problema matemático antes de sua participação em nossas atividades? Se sim, como foi a experiência?
5. Já resolveu algum problema formulado por você mesmo alguma vez? Se sim, isso aconteceu nas aulas de Matemática?
6. Nas aulas de Matemática os professores costumam trabalhar com a resolução de problemas? E com a formulação de problemas?
7. Você acha que o trabalho em grupo ao longo das atividades que foram realizadas contribuiu para uma melhor formulação e resolução dos problemas?
8. Você considera a formulação e resolução de problemas como um recurso importante nas aulas de Matemática? Por quê?
9. Enumere alguns desafios que você encontrou juntamente com seu grupo para formular e resolver os problemas.
10. Você acha que os problemas formulados por você e seu grupo foram criativos? Por que?

Obrigada por Colaborar em Nossa Pesquisa!

APÊNDICE J: Transcrição da entrevista semiestruturada com Samara

Data: Dia 18 de junho de 2015

Horário: 10:22

Local: Escola Estadual (Premem), bairro Catolé, Campina Grande-Paraíba

Nessa entrevista identificamos a aluna pelo pseudônimo de Sabrina e a palavra entrevistadora nos remete a tal função.

Entrevistadora: A Matemática apresenta alguma importância no seu dia a dia?

Sabrina: Sim!

Entrevistadora: Qual?

Sabrina: Éé...Assim, agora que eu to no terceiro ano agente cresce aprendendo Matemática mas não vê importância, mas com uma certa maturidade agente vai percebendo que quase tudo que agente faz tem Matemática... seja numa construção... eu to reformando, meus mais tão reformando a casa e agente sempre ta vendo isso , principalmente a Geometria também.

Entrevistadora: Quais as considerações que você pode fazer sobre o ensino de Geometria nas aulas de Matemática?

Sabrina: Eu acho muito superficial, eu acho que eles prezam muito pela álgebra e esquecem muito a Geometria...

Entrevistadora: Você poderia dar alguma sugestão para melhorar, para que os professores trabalhem mais a Geometria, alguma sugestão de uma forma geral?

Sabrina: Bom, eu estudei num colégio que tinha dois professores, um pra álgebra e um pra Geometria, facilitou muito.

Entrevistadora: Esse colégio era particular?

Sabrina: Era

Entrevistadora: É por que geralmente nas escolas particulares tem sempre no mínimo dois professores para cada matéria, já nas escolas públicas não, é um professor só para cada matéria. Por que você acha que os professores não ensinam o os conteúdos de Geometria nas escolas públicas?

Sabrina: Eu acho que é por que priorizam mais a álgebra. Não, sei...acho que por que ligam muito a Geometria com a parte de Arquitetura mais pra ser tratada na Universidade.

Entrevistadora: Mas você acha que se fosse visto e estudado durante o Ensino Fundamental e Médio, o conteúdo de Geometria, ajudaria para quando vocês chegassem numa Universidade?

Sabrina: Muito!!

Entrevistadora: Você já teve a oportunidade de trabalhar com materiais manipuláveis nas aulas de Matemática?

Sabrina: Sim

Entrevistadora: Como foi?

Sabrina: han, eu sempre tive isso de construir objetos, de trabalhar...eu sempre estudei Geometria na verdade.

Entrevistadora: Você está estudando aqui só esse ano?

Sabrina: Estudei primeiro ano, segundo e terceiro.

Entrevistadora: O Ensino Médio completo aqui nessa escola?

Sabrina: Sim, aqui!

Entrevistadora: E o Ensino Fundamental numa escola particular?

Sabrina: Foi, posso dizer o nome?

Entrevistadora: Se quiser, é daqui de Campina Grande mesmo?

Sabrina: É, foi no Motiva!

Entrevistadora: Da para perceber a diferença do ensino, não é?

Sabrina: Muita diferença!!

Entrevistadora: Foi nas aulas de Geometria que você trabalhou com material manipulável ou foi em outra disciplina?

Sabrina: Eu trabalhei em Geometria, mas eu também trabalhava em física, química, sempre tinha nos laboratórios.

Entrevistadora: Isso lá no Motiva?

Sabrina: Lá no Motiva!

Entrevistadora: E aqui?

Sabrina: Aqui não!

Entrevistadora: Nunca foi trabalhado aqui?

Sabrina: Nunca!

Entrevistadora: Você já havia formulado algum problema matemático antes da sua participação nessas atividades?

Sabrina: Também!

Entrevistadora: Foi lá também? Como foi?

Sabrina: Lá também. Sempre tinha isso pra formular questões, problemas, depois probleminhas mesmo... desde de guriazinha.

Entrevistadora: Mas, nas aulas de Matemática?

Sabrina: Nas aulas de Matemática

Entrevistadora: Como foram? Você pode dar um exemplo?Algum professor pediu isso na aula, em prova, como foi?

Sabrina: Humm, eu não lembro, mas sempre tinha... mais sobre situações do cotidiano que envolviam, que era pra criar um problema.

Entrevistadora: Mas, era em uma prova que era pedido para fazer isso ou nas atividade em sala de aula mesmo?

Sabrina: Nas atividades, mas em prova sim!

Entrevistadora: Você já tinha resolvido algum problema formulado por você mesmo na aula de Matemática?

Sabrina: Já!

Entrevistadora: No Ensino Médio aqui?

Sabrina: Não!

Entrevistadora: Nas aulas de Matemática os professores costumam trabalhar com a Resolução de Problemas?

Sabrina: Nãã... Sim. Pouco, pouquíssimo, mas sim!

Entrevistadora: E com a Formulação de Problemas?

Sabrina: Não!

Entrevistadora: Como era a Resolução? Como o professor trabalha?

Sabrina: Eu acho que eles caracterizam mais o problema pela questão de tá mais contextualizada, eles já dizem que é um problema.

Entrevistadora: Você viu que tem uma diferença pra exercício. Você acha que o que acontece nas aulas de Matemática são mais exercícios ou problemas?

Sabrina: Eu acho que é mais exercício.

Entrevistadora: É mais aplicação de fórmula?

Sabrina: É, só contextualizada.

Entrevistadora: Você acha que o trabalho em grupo ao longo das atividades que foram realiadas contribuiu para uma melhor formulação e resolução dos problemas?

Sabrina: Depende do grupo. Boa parte dos grupos ficaram só brincando e acabava atrapalhando.

Entrevistadora: Mas no seu grupo, a comunicação entre vocês, a maneira que raciocinaram e de um ajudar ao outro, ajudou ou foi mais individual a tua participação?

Sabrina: Foi mais individual!

Entrevistadora: *Você trabalhou mais do que os outros alunos (pode ser sincera)!?*

Sabrina: *Foi!*

Entrevistadora: *Você considera a Formulação e Resolução de Problemas como um recurso importante nas aulas de Matemática?*

Sabrina: *Sim!*

Entrevistadora: *Por que?*

Sabrina: Por que na vida agente não encara situações Matemáticas de forma obvia. Tem que analisar o problema!

Entrevistadora: Mas nas aulas de Matemática, você acha importante ter esse trabalho com Formulação, você acha importante que os professores peçam para formular problemas de acordo com o conteúdo que já foi estudado ou para você, se não tivesse não faria falta?

Sabrina: Não, acho que faz falta sim, por conta disso, agente não recebe muito facilmente. Ao contrário agente tem que analisar quando aparece situações na nossa vida, matematicamente.

Entrevistadora: Então formulando problema você acha que facilita no seu dia a dia!

Sabrina: É, facilita.

Entrevistadora: Enumere alguns desafios que você encontrou juntamente com seu grupo para formular e resolver os problemas. Para você foi fácil formular e resolver problemas, foi difícil, o que você achou?

Sabrina: Não, achei fácil. Acho que o único problema era as fórmulas. Eu esqueci as fórmulas, principalmente de área.

Entrevista: Área de figura plana?

Sabrina: É.

Entrevista: Então vocês precisavam das fórmulas mas não lembravam?

Sabrina: Isso!

Entrevistadora: Tirando isso, foi fácil? Pois vocês reformularam o problema do gato, depois formularam problemas a partir dos Poliedros e agora esse última que foi para formular depois daquela atividade para demonstrar que só existem apenas cinco Poliedros de Platão. Então, qual foi sua maior dificuldade nessas três atividades de formulação? Em qual você precisou pensar um pouco mais?

Sabrina: Eu acho que foi a do gato e do rato.

Entrevistadora: Por quê?

Sabrina: Por que tinha a parte do triângulo e agente não costuma trabalhar muito com triângulo.

Entrevistadora: Do triângulo retângulo e vocês tinham que pensar em um número que desse certo quando aplicasse o Teorema de Pitágoras, né?

Sabrina: É!

Entrevistadora: Então você acha que reformular um problema foi mais difícil do que formular um problema livre?

Sabrina: Foi!

Entrevista: Você pensa que os problemas formulados por você e pelo seu grupo foram criativos?

Sabrina: Ixe...bom...escutando os dos colegas, eu acho que foi um pouquinho mais além.

Entrevistadora: Mas por que? O que vocês fizeram que foi mais além?

Sabrina: Por que agente tentou envolver não só os conhecidos: os quadrados, triângulos... mas, envolver outras fórmulas.

Entrevistadora: Como o que, por exemplo?

Sabrina: Esse último que agente fez foi com o icosaedro, enquanto eles tavam fazendo com pizza.

Entrevista: Você acha que foi criativo por que diferenciou! O que você viu nos outros que faz você achar que o seu foi mais criativo?

Sabrina: Ééé...isso...Acho que também há uma certa dificuldade, tem que pensar mais na resolução do nosso para não ser uma coisa tão comum.

Entrevistadora: Então para formular você teve que pensar já na resposta né?

Sabrina: É.

Entrevistadora: Se eu tivesse pedido para formular é uma coisa, mas formular e resolver, você tem que pensar já numa possível resposta para poder criar os dados, colocar os dados numéricos para que dê certo, não é? Você teve essa dificuldade também, de pensar na resposta para poder formular?

Sabrina: Sim, isso volta muito às fórmulas por que se agente não tinha certeza de uma fórmula, agente não ia fazer um problema que envolvesse ela.

Entrevistadora: Então, assim, no geral a dificuldade maior era por que vocês, que dizer, no seu caso, você tem uma base boa de Geometria. Não lembrava de algumas coisas por que você no Ensino Médio não viu, mas, você estudou no Fundamental . Mas, por exemplo, outra pessoa que não estudou isso nem no Fundamental nem no Médio já tem uma dificuldade maior para pensar em formular! Então, você acha que seus colegas, o pessoal do seu grupo, estudaram em escolas públicas então por isso que eles tiveram uma dificuldade maior?

Sabrina: Bem maior!

Entrevistadora: Eu via que você era a líder de seu grupo, ficava dando as dicas e as vezes não queria responder mais por que era só você que estava fazendo. O que você achou disso, pois o grupo vocês mesmos que escolheram por afinidade, mas na hora de fazer as atividades, foi você que se destacou mais e liderou o grupo, digamos assim.

Sabrina: éé...(risos)

Entrevistadora: Você ajudou as meninas por que elas tinham dificuldades. O único rapaz do grupo faltou várias vezes.

Sabrina: Foi.

Entrevistadora: O grupo ficou meio desfalcado. Tudo isso, juntamente com o ensino de Geometria que deveria ser melhor nas escolas públicas, o que você pode dizer de forma geral, do trabalho em grupo, da formulação de problemas, da Geometria, das aulas do professor. Vocês já viram Geometria Analítica esse ano, não é?

Sabrina: haan...não...

Entrevistadora: Eu me lembro que quando cheguei aqui, eu vi no quadro algumas coisas sobre Geometria Analítica.

Sabrina: Muito pouco.

Entrevistadora: O que vocês estudaram tanto do conteúdo de Matemática até agora?

Sabrina: Agente viu basicamente distância entre pontos.

Entrevistadora: Somente?

Sabrina: Só

Entrevistadora: estamos em qual bimestre?

Sabrina: Acho que Matemática vai começar o terceiro.

Entrevistadora: A greve atrapalhou um pouquinho. Eu ia vir até antes, mas acabou entrando em greve e atrasou todo mundo (risos). De maneira geral o que você pode dizer para melhorar o ensino de Geometria?

Sabrina: Eu acho que é isso, precisa de base. Do Ensino Fundamental servir para o Ensino Médio, do Ensino Médio servir como base para a Universidade e tudo servir como base pra vida. É isso, tem que melhorar o ensino.

Entrevistadora: Essa pergunta não tem aqui, mas você se considera uma boa aluna em Matemática e no geral?

Sabrina: Han...aqui eu to me considerando por que o ensino é muito diferente, então aqui até que sim.

Entrevistadora: Mas quando era lá?

Sabrina: Quando era lá não, era nota dois pra baixo

Entrevistadora: Aqui você tira notas boas?

Sabrina: Aqui sempre notas boas!

Entrevistadora: Tu pretende terminar o Ensino Médio e fazer vestibular e fazer algum curso de graduação, concurso ou o que?

Sabrina: Eu pretendo fazer Farmácia provavelmente pra depois seguir a carreira de Pericia Criminal fazendo concurso depois que me formar.

Entrevistadora: Pronto! É basicamente isso. Queria só agradecer por você ter colaborado com a pesquisa e com a entrevista também e, Obrigada. Minha dissertação estará disponível na UEPB e se você tiver curiosidade, sua entrevista vai estar lá, não com seu nome. Então obrigada Sabrina!

Sabrina: de nada, tchau!