UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO ACADÊMICO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

LUCIANO MOREIRA DA SILVA JUNIOR

O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO E DAS RELAÇÕES FUNCIONAIS COM USO DE PADRÕES MATEMÁTICOS: UMA COMPREENSÃO À LUZ DA TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

CAMPINA GRANDE-PB
2016

LUCIANO MOREIRA DA SILVA JUNIOR

O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO E DAS RELAÇÕES FUNCIONAIS COM USO DE PADRÕES MATEMÁTICOS: UMA COMPREENSÃO À LUZ DA TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática do Centro e Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba.

Área de concentração: Educação Matemática

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Cibelle de Fátima Castro de Assis

CAMPINA GRANDE-PB

2016

S586d Silva Junior, Luciano Moreira da.

O desenvolvimento do pensamento algébrico e das relações funcionais com uso de padrões matemáticos [manuscrito] : uma compreensão à luz da teoria das situações didáticas / Luciano Moreira da Silva Junior. - 2016.

173 p. : il. color.

Digitado.

Dissertação (Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa, 2016.

"Orientação: Profa. Dra. Cibelle de Fátima Castro de Assis, Pró-Reitoria de Pós-Graduação e Pesquisa".

1. Ensino de álgebra. 2. Relações funcionais. 3. Situações didáticas. 4. Sequência didática. I. Título.

21. ed. CDD 512

LUCIANO MOREIRA DA SILVA JUNIOR

O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO E DAS RELAÇÕES FUNCIONAIS COM USO DE PADRÕES MATEMÁTICOS: UMA COMPREENSÃO À LUZ DA TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, do Centro e Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba.

Área de Concentração: Educação Matemática

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Cibelle de Fátima Castro de Assis

Aprovado em 26 de maio de 2016.

Prof.ª Dr.ª Cibelle de Fátima Castro de Assis

Orientadora – UFPB

Prof.ª Dr.ª Rogéria Gaudencio do Rêgo

Examinadora Interna - UFPB

Prof.ª Dr.ª Francisca Terezinha Oliveira Alves

Examinadora Externa – UFPB

Este trabalho é dedicado a todos que de alguma forma trouxeram contribuições para minha vida, particularmente para minha vida acadêmica. Dedico especialmente, a meus professores, familiares e amigos.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço a Deus pelas conquistas concedidas;

A quem sempre esteve junto a mim, colaborando e me incentivando a prosseguir;

A todos os meus familiares, que sempre me encorajaram a buscar crescimento pessoal e profissional;

À professora, Drª. Cibelle de Fátima, minha orientadora, a qual me apoiou e colaborou de maneira efetiva em todas as etapas de nossa pesquisa, trazendo significativas contribuições para minha formação profissional como educador matemático;

Agradeço mais uma vez, à professora Drª. Francisca Terezinha, pelas suas grandes contribuições em todos os momentos da minha vida acadêmica;

Aos professores Drª. Rogéria Gaudencio e Drº. Silvanio de Andrade, pelas sábias sugestões apresentadas na etapa de qualificação do presente trabalho, tendo em vista que estas foram valiosíssimas para o desenvolvimento de nossa pesquisa.

Aos professores da minha Graduação e Especialização, que proporcionaram uma formação com os subsídios necessários para conquista de meus objetivos;

Aos professores das disciplinas cursadas em nível de mestrado, os quais propiciaram para mim uma formação da qual me orgulho;

Agradeço aos amigos, Ariana Costa e Samilly Alexandre, pelos momentos de dificuldades compartilhados, pelo grande apoio e pela troca de conhecimentos.

A todos os estudantes participantes da pesquisa, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado.

RESUMO

SILVA JUNIOR, L.M. Um Estudo Sobre o Desenvolvimento do Pensamento Algébrico e das Relações Funcionais: Um Olhar Para o Uso de Padrões no Ensino Fundamental. 20016. 173 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual da Paraíba – UEPB, Campina Grande, 2015.

Esta pesquisa, intitulada *O Desenvolvimento do Pensamento Algébrico e das Relações Funcionais com Uso de Padrões Matemáticos: uma Compreensão à Luz da Teoria das Situações Didáticas* tem por objetivo investigar possibilidades para o desenvolvimento do pensamento algébrico por meio do uso de padrões a partir da Teoria das Situações Didáticas na Matemática Escolar. Tal pesquisa segue uma abordagem qualitativa. O estudo experimental foi desenvolvido com uma turma do 9º Ano do Ensino Fundamental, com foco no trabalho com Padrões voltado ao desenvolvimento do pensamento algébrico e o estudo de relações funcionais. Para o levantamento de dados, foi criada uma sequência didática baseada em nosso referencial teórico sobre o ensino de Álgebra, no trabalho com padrões e em especial na Teoria das Situações Didáticas. A mesma foi divida em três níveis, a saber: introdutório; intermediário e avançado, sendo cada um destes níveis formado por um conjunto de três atividades. A análise dos dados, em um primeiro momento concentrou-se nos principais resultados e percepções, relativas ao desenvolvimento das atividades da sequência didática, observando o desenvolvimento do pensamento algébrico e das relações funcionais, e posteriormente, em um segundo momento, concentrou-se na identificação de vivências de situações didáticas por parte dos estudantes, durante o desenvolvimento da fase experimental da pesquisa. Foram identificados diversos momentos em que os estudantes tiveram a oportunidade de vivenciar as tipologias das *situações didáticas*, tais como: *situações de ação, situações de formulação; situações de validação* e as *situações de institucionalização.* A conexão estabelecida entre padrões, álgebra e situações didáticas, pôde trazer contribuições efetivas para construção de conhecimentos, proporcionando a observação de regularidades, desenvolvimento do pensamento algébrico, observação e estudo das relações funcionais, por meio de atividades que propiciaram a vivência das diferentes tipologias das situações didáticas.

Palavras chave: Ensino de Álgebra. Padrões. Relações Funcionais. Situações Didáticas.

ABSTRACT

SILVA JUNIOR, L.M. *The* Development of Algebraic Thinking and Functional Relations Using Mathematical Patterns: An Understanding the Light of the Theory of Didactic Situations. 20016. 173 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual da Paraíba – UEPB, Campina Grande, 2015.

This research, entitled *"The Development of Algebraic Thinking and Functional Relations Using Mathematical Patterns: An Understanding the Light of the Theory of Didactic Situations"* has the objective to investigate possibilities for the development of algebraic thinking through the use of patterns from the theory of Didactic Situations in school Mathematics. This research follows a qualitative approach. The experimental study was developed with a group of the 9th year of elementary school, with a focus on working with patterns focused on the development of algebraic thinking and the study of functional relationships. For data collection, it was created a didactic sequence based on our theoretical framework on the algebra teaching, working with patterns and in particular the Theory of Didactic Situations. The same was divided into three levels, to know: introductory; intermediate and advanced. As each level formed by a set of three activities. The analysis of the data, at first concentrated on the main results and perceptions, on the development of the activities of the didactic sequence, for the development of algebraic thinking and functional relationships, and later, in a second moment, focused on identification experiences of teaching situations by students during the development of the experimental phase of the research. In class, it was identified that the students had the opportunity to experience the types of teaching situations have been identified such as *action situations*, *formulation situations*; *validation situations* and *institutionalizing situations*. The connection established between patterns, algebra and didactic situations, could bring effective contributions to building knowledge, providing the observation of regularities, development of algebraic thinking, observation and study of functional relationships, all this, through activities that led to the experience of different typologies of didactic situations.

Keywords: Algebra Teaching. Patterns. Functional relations. Teaching Situations.

LISTA DE QUADROS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO DA PESQUISA

Introdução

Nesta seção nos propomos a apresentar, de maneira geral, a pesquisa desenvolvida considerando as motivações, as justificativas para o estudo, a problemática de investigação e as considerações metodológicas que embasaram e nortearam a execução dos nossos objetivos, além de deixar explícita a forma como a mesma foi desenvolvida.

A aproximação com a temática deste trabalho teve início durante o curso de Especialização em Matemática para o Ensino Fundamental, realizado na Universidade Federal da Paraíba (UFPB), Campus IV, onde tivemos a oportunidade de cursar uma disciplina nomeada Ensino de Álgebra, na qual foram abordados temas como a Álgebra e o Pensamento Algébrico, Generalizações, padrões e funções na Álgebra escolar.

Além das experiências vivenciadas na mencionada disciplina, nos últimos sete anos temos lecionado a disciplina de Matemática, enquanto professor da Rede Estadual de Ensino da Paraíba, tanto nos anos finais do Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio. Esta oportunidade nos fez perceber que os estudantes apresentam muitas dificuldades no tocante aos conteúdos de Álgebra, as quais provavelmente decorrem de um ensino que na maioria das vezes é mecânico, priorizando métodos e técnicas, em detrimento de um ensino que possibilite ao aluno a atribuição de sentido ou de significado para a utilização dos conteúdos de Álgebra.

Neste contexto, percebemos que, enquanto professor da Educação Básica e pesquisador na área de Educação Matemática, devemos dar atenção ao desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes e trazer contribuições para o trabalho com os conteúdos de Álgebra.

Documentos referenciais como os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 1998) trazem de forma clara e precisa a importância dos conteúdos de Álgebra, além de trazer inúmeras orientações e indicações sobre como devem ser lecionados e trabalhados com os estudantes de acordo com cada ciclo, na perspectiva de contribuir efetivamente para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Diante das várias indicações e formas de se trabalhar os conteúdos de Álgebra, destacamos o uso de Padrões. Aprender a buscar por padrões, identificá-los, estudá-los, discuti-los, traduzi-los, ampliá-los, buscar generalizações, é parte integrante e fundamental do pensar algebricamente.

A exploração de Padrões em Matemática, especificamente no ensino de Álgebra, deve ter início desde os primeiros anos do Ensino Fundamental, perpassando toda esta fase de ensino e chegando até ao Ensino Médio, tendo em vista que a análise de Padrões proporciona aos estudantes partir de raciocínios recursivos até chegar a raciocínios envolvendo relações funcionais.

Sobre este importante conteúdo da Matemática, o conceito de Função[1], de acordo com Zuffi e Pacca (2002, p.2), "[...] localiza-se num patamar que vai além da compreensão dos fenômenos a que se aplica, pois pode generalizá-los e resolver vários problemas fora do mundo tangível, num mundo de abstrações muito próprias da Matemática". Neste sentido, entendemos que o conceito de Função não fica restrito as suas aplicações práticas, mas possui por meio da generalização, também a capacidade de resolver problemas mais abstratos, próprios do mundo da Matemática.

Ao falarmos de Função, estamos falando sobre uma relação existente entre ao menos dois conjuntos, estabelecida por meio de uma lei de formação, ou seja, uma regra geral, que relaciona seus elementos.

A aprendizagem de Função é iniciada desde o 1º e 2º ciclos, tendo em vista que as sequências que os estudantes trabalham neste ciclo são Funções de variável natural, que para cada número (ordem), tem por correspondência um termo (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009). Entretanto, o conceito de Função, é tratado de forma explicita, dentro dos nossos ciclos na Educação Básica, exatamente no 4º ciclo.

No caso específico do estudo com Padrões, podemos identificar em diferentes tipos de sequência, a existência de relações funcionais, ocorrendo entre os conjuntos das ordens e os conjuntos dos termos. É exatamente por este ângulo, que estaremos delineando as relações funcionais, e por este motivo, entendemos que os padrões escolhidos para o trabalho em sala de aula, devem estar de acordo com o tipo de relação que se pretende trabalhar junto aos estudantes.

---

[1] De acordo Flemming e Gonçalves (2006, p. 12), *dados dois conjuntos A e B subconjuntos do conjunto dos Números Reais, uma Função f: A → B é uma lei ou regra que a cada elemento de A faz corresponder um único elemento de B.*

Consultando a literatura específica, é fato que já existem alguns estudos que investigam o desenvolvimento do pensamento algébrico por meio de Padrões como, por exemplo, os estudos de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), Usiskin (1995), Ponte, Branco e Matos (2009), Van de Walle (2009), entre outros. No entanto, nesta pesquisa que se apresenta, a problemática incide sobre as características de atividades específicas e como elas podem contribuir para a construção de novos processos de aprendizagem, diferentemente dos métodos convencionais de ensino.

Nosso estudo se diferencia dos estudos citados anteriormente, por fazer uma investigação sobre o uso de Padrões para a aprendizagem em Álgebra, tomando como referência a Teoria das Situações Didáticas, do teórico francês Guy Brousseau (1986). A *Teoria das Situações Didáticas* - TSD é um modelo teórico que objetiva trazer contribuições para a compreensão do fenômeno da aprendizagem da Matemática no âmbito educacional. Tal teoria estabelece ligações entre o professor, os alunos e o conhecimento, dentro do campo das relações pedagógicas, pretendendo proporcionar uma aprendizagem com mais significado para os alunos (FREITAS, 2002).

Dessa forma, a questão orientadora desta pesquisa é: *quais possibilidades, para o desenvolvimento do pensamento algébrico e das relações funcionais, podem existir na vivência de atividades com uso de padrões?*

Enquanto pesquisadores, o teor de nossas preocupações consiste em não apenas investigar se o trabalho com Padrões auxilia no desenvolvimento do pensamento algébrico, tão importante na Matemática e nas situações cotidianas, mas em também observar o nível de pensamento algébrico de estudantes que vivenciaram experiências de ensino por meio do uso de Padrões, tomando como suporte teórico para construção e análise a Teoria das Situações Didáticas desenvolvida por Guy Brousseau (1986).

Objetivos

Na busca de resposta para o questionamento levantado, definimos como objetivo geral dessa pesquisa*: investigar possibilidades para o desenvolvimento do pensamento algébrico por meio do uso de padrões a partir da teoria das Situações Didáticas na Matemática Escolar*.

Para alcançar este objetivo foram determinados os seguintes objetivos específicos:

- Compreender processos de construção do pensamento algébrico e das relações funcionais de estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental por meio da criação e desenvolvimento de uma sequência didática com uso de padrões;
- Identificar no contexto da sala de aula as situações didáticas apresentadas pela Teoria das Situações Didáticas;
- Analisar a relação de uma sequência didática com as situações didáticas emergentes observando o desenvolvimento do pensamento algébrico e das relações funcionais com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental por meio de uso de Padrões.

Considerações Metodológicas

A metodologia da pesquisa seguiu uma abordagem qualitativa, não nos detendo apenas aos dados numéricos, mas, buscando principalmente a compreensão e explicação dos porquês dos fatos evidenciados durante a pesquisa. Neste sentido, Bogdan e Biklen (1994, p.47) afirmam que,

> Na investigação qualitativa a fonte directa de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal. Os investigadores introduzem-se e despendem grandes quantidades de tempo em escolas, famílias, bairros e outros locais tentando elucidar questões educativas. (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p.47)

Estes atributos da investigação qualitativa estão em consonância com o que propõe nossa pesquisa, tendo em vista o fato de buscamos no ambiente escolar de sala de aula, em conjunto com os estudantes, durante um extenso período de tempo, o desenvolvimento de uma sequência didática no sentido de elucidar a compreensão da problemática anunciada.

A pesquisa qualitativa tem sua preocupação voltada para características da realidade que não podem ser quantificadas. Mantém seu trabalho ligado aos significados, motivos, aspirações, crenças, valores e atitudes, expressando aspectos mais profundos das relações, dos processos e dos fenômenos, não podendo estes serem reduzidos à operacionalização de variáveis (SIVEIRA; CÓRDOVA, 2009).

Percebemos que na pesquisa qualitativa, a atenção está voltada muito mais aos processos, características e peculiaridades dos acontecimentos observados durante o desenvolvimento da pesquisa, e evidenciados nos instrumentos de levantamentos de dados, do que propriamente uma descrição numérica dos resultados, dando especial atenção aos caminhos percorridos até chegar ao produto final desses caminhos.

Nossa pesquisa também pode ser considerada como um estudo de caso. De acordo com Ponte (2006, p. 2),

> Um estudo de caso visa conhecer uma entidade bem definida como uma pessoa, uma instituição, um curso, uma disciplina, um sistema educativo, uma política ou qualquer outra unidade social. O seu objectivo é compreender em profundidade o "como" e os "porquês" dessa entidade, evidenciando a sua identidade e características próprias, nomeadamente nos aspectos que interessam ao pesquisador.

De fato, considerando que a pesquisa foi desenvolvida em uma única turma do 9º Ano do Ensino Fundamental e que os dados levantados trazem características próprias daquele grupo estudado.

Momentos da pesquisa

Nossa pesquisa está estruturada em quatro momentos, sendo eles:

1º. Levantamento de atividades envolvendo Padrões e relações funcionais, a partir de possibilidades para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

2º. Construção de uma Sequência Didática que explore relações funcionais com uso de Padrões, baseada na Teoria das Situações Didáticas, para estudantes do 9º Ano do Ensino Fundamental;

3º. Desenvolvimento da Sequência Didática envolvendo Padrões, junto a estudantes do 9º Ano do Ensino Fundamental de uma escola pública;

4º. Descrição e análise da aplicação da Sequência Didática envolvendo Padrões, estabelecendo ligações com a Teoria das Situações Didáticas.

O primeiro momento de nossa pesquisa se estruturou como um momento de estudo e de busca por atividades que possibilitassem o desenvolvimento do pensamento algébrico e que também envolvessem o uso de Padrões. Neste sentido, deu-se a procura por sugestões de atividades de diversos autores, entre eles, Vale et al (2011); Ponte, Branco e Matos (2009); Rêgo e Rêgo (2009).

O segundo momento de nossa pesquisa ocorreu com a construção de uma sequência didática voltada para estudantes do 9º Ano do Ensino Fundamental, baseada em nosso referencial teórico sobre o ensino de Álgebra, no trabalho com Padrões e em especial na Teoria das Situações Didáticas do teórico francês Guy Brousseau (1986). Para isso, tomamos como ponto de partida as atividades levantadas no primeiro momento da pesquisa, as quais foram adaptadas de acordo com o ano de ensino a qual se destinava, e ao conteúdo matemático que estaríamos abordando, sendo este o conteúdo de relações funcionais.

A referida sequência didática se constituiu também como instrumento de levantamento de dados. A mesma foi divida em três níveis, a saber, introdutório; intermediário e avançado, sendo cada um destes níveis formado por um conjunto de três atividades.

O terceiro momento da pesquisa constituiu a parte experimental, tendo ocorrido entre os meses de julho e setembro de 2015, com uma turma formada por vinte e quatro estudantes do 9º Ano do Ensino Fundamental de uma escola da Rede Estadual de Ensino do estado da Paraíba, na cidade de Mamanguape-PB, na qual o pesquisador atua também como professor regente. Para o desenvolvimento da sequência didática na escola, o tempo total utilizado foi de 26 horas/aula sendo cada aula de 50 minutos.

Na atividade, os estudantes foram organizados em duplas. Durante a parte experimental foram consideradas como outras fontes de registro as fotografias das duplas de estudantes em momentos de resolução das atividades, além das gravações em vídeos, sendo de uma dupla por atividade e dos momentos de sistematização das atividades, envolvendo o pesquisador e os estudantes.

Por fim, o quarto momento de nossa pesquisa constituiu-se como sendo um momento de descrição e análise, no qual foram expostos os principais resultados e percepções, relativos ao desenvolvimento das atividades da sequência didática, além de estabelecer as devidas relações com a Teoria das Situações Didáticas.

A estrutura dos Capítulos

O presente trabalho está organizado em 6 capítulo. Em nosso primeiro capítulo - A ÁLGEBRA ESCOLAR E O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO - tratamos da Álgebra escolar, o que compreende o pensamento algébrico e orientações para o desenvolvimento desta forma de pensar matematicamente. Abordamos os Padrões na Matemática escolar, seus diferentes objetivos e suas aplicações em sala de aula.

No segundo capítulo - A TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS E UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA COM PADRÕES PARA O ENSINO DE ÁLGEBRA - discutimos os principais aspectos da Teoria das Situações Didáticas estabelecendo relações com a proposta de sequência didática desta pesquisa.

No terceiro capítulo - A SEQUÊNCIA DIDÁTICA EM SALA: OS NÍVEIS INTRODUTÓRIO E INTERMEDIÁRIO, trouxemos uma descrição e análise das atividades que integram a Sequência Didática voltada para a observação de resultados relativos ao desenvolvimento do pensamento algébrico e das relações funcionais, no que diz respeito aos níveis introdutório e intermediário da referida sequência didática.

No quarto capítulo - A SEQUÊNCIA DIDÁTICA EM SALA: O NÍVEL AVANÇADO, trouxemos, assim como no capítulo anterior, uma descrição e análise das atividades que integram a Sequência Didática, entretanto nosso foco esteve sobre o terceiro e ultimo nível da sequência didática, o nível avançado.

No quinto capítulo - AS SITUAÇÕES DIDÁTICAS NA VIVÊNCIA DA PESQUISA, descrevemos as situações didáticas nos momentos de desenvolvimento da pesquisa, destacando como ocorreu a relação entre a Teoria das Situações Didática e o desenvolvimento da sequência didática com os estudantes.

Por fim, após estes capítulos, trouxemos as considerações sobre nossa pesquisa nas CONSIDERAÇÕES FINAIS.

1. A ÁLGEBRA ESCOLAR E O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO

1.1 A Álgebra, Concepções de Álgebra e de Educação Algébrica

A Álgebra se constitui como uma parte importantíssima da Matemática. Por meio dela é produzida uma grande quantidade de conhecimento, tanto para a própria área da Matemática, como também para outras áreas de estudo. De acordo com Ponte, Branco e Matos (2009, p.5), a Álgebra é um dos grandes ramos da Matemática, estando ao lado da Geometria e da Análise Infinitesimal.

Para entendermos do que trata a Álgebra e o que se define por pensamento algébrico, precisamos compreender diferentes concepções sobre a mesma e diferentes concepções de Educação Algébrica. Estudos como de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) e Usiskin (1995) apontam diversas concepções.

Para Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), as concepções de Álgebra estão categorizadas em: *processológica, linguístico-estilística, linguístico-sintático-semântica e linguístico-postulacional*.

Na concepção *processológica*, a Álgebra é vista como um conjunto de técnicas, processos, métodos e artifícios para abordar determinados tipos de problemas. Tais procedimentos consistem em técnicas algorítmicas ou processos iterativos que podem ser direcionados a problemas ou conjunto de problemas que possuem sua resolução baseada em seguir uma sequência padronizada de passos. (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993).

A segunda concepção apontada pelos autores é a *linguístico-estilística*. Essa nos traz uma visão da Álgebra como sendo uma linguagem específica, objetivando expressar de forma concisa os procedimentos (técnicas, processos, métodos e artifícios) citados anteriormente. Tal concepção prioriza a forma de expressão do pensamento algébrico em detrimento da forma como esse pensamento se manifesta. (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993).

A concepção *linguístico-sintático-semântica* da Álgebra é mais rigorosa que a concepção *linguístico-estilística*. Mesmo concebendo a Álgebra como uma linguagem específica e concisa, considera que seu poder criativo e instrumental está situado em sua dimensão sintático-semântica. Neste sentido, o diferencial acontece quando os signos desta linguagem passam a ter o caráter de símbolos, por exemplo, quando uma letra é usada para representar genericamente quantidades, sejam elas discretas ou contínuas, determinadas e particulares (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993).

A concepção *linguístico-postulacional* trata a Álgebra como a ciência das estruturas gerais, sendo estas comuns a todas as partes da Matemática. Nesta concepção, o caráter simbólico do signo linguístico é ampliado, passando a representar não só uma quantidade geral, discreta ou contínua, mas também entidades matemáticas que possuem características de tratamentos não necessariamente quantitativos, tais como as estruturas topológicas, as estruturas de ordem, as estruturas de espaço vetorial, entre outras. (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993).

Já para Usiskin (1995), as concepções de Álgebra são: *Álgebra como Aritmética generalizada; Álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problema; Álgebra como estudo de relações entre grandezas; e Álgebra como estudo das estruturas.*

Na concepção de *Álgebra como Aritmética generalizada*, as variáveis são vistas como generalizadoras de modelos numéricos. O que temos de recomendação para os estudantes dentro desta concepção de Álgebra é traduzir e generalizar. Essas técnicas são importantes tanto para a Álgebra quanto para a Aritmética. Como exemplos para esta concepção seriam: generaliza-se que $3 + 5 \cdot 7 = 5 \cdot 7 + 3$ como $a + b = b + a$, ou ainda, que das operações $-1 \cdot 5 = -5$ e $-2 \cdot 5 = -10$, é generalizada a ideia de forma a se extrair a propriedade $- x \cdot y = - (x \cdot y)$. (USISKIN,1995).

Para entendermos a concepção da *Álgebra como um estudo para resolver certos tipos de problemas*, vamos considerar o seguinte exemplo: “adicionando 3 ao quíntuplo de um número, a soma é 40. Facilmente se traduz o problema para a linguagem da álgebra: $5x + 3 = 40$” (USISKIN,1995, p. 14). Se fôssemos considerar a concepção da *Álgebra como Aritmética generalizada*, o fato de traduzir o que estava descrito no problema para a linguagem algébrica, já seria suficiente para o problema ser considerado terminado ou resolvido, tendo em vista que já tinha sido encontrado o modelo geral. Mas, no caso da concepção da *Álgebra como um estudo para resolver certos tipos de problemas*, precisaremos resolver a equação escrita com base no problema. Neste sentido, as variáveis/letras representam incógnitas ou constantes, e as instruções são simplificar e resolver (USISKIN,1995).

No caso da concepção de *Álgebra como estudo de relações entre grandezas*, podemos considerar o seguinte exemplo: ao escrevermos $A = b \cdot h$, que representa a fórmula da área de um retângulo, estamos representando uma relação entre grandezas, neste caso, representamos a relação existente entre a área A de um retângulo e as medidas b e h referentes aos seus lados. Mesmo que possamos pensar em uma formula como um tipo de generalização, o que diferencia esta concepção de Álgebra da anterior, é que nesta, as variáveis realmente variam. (USISKIN, 1995).

A concepção de *Álgebra como estudo das estruturas* é reconhecida pelas propriedades que são atribuídas às operações com Números Reais e polinômios. Um exemplo para melhor entendermos é a observação do uso da variável em um polinômio. Nesse caso, a utilização das variáveis não coincide com nenhuma das outras formas de uso expressas nas demais concepções de Álgebra apresentadas por Usiskin (1995), as variáveis representam pouco mais que um símbolo arbitrário (USISKIN, 1995).

Observando as concepções de Álgebra apresentadas podemos estabelecer relações entre elas, tais como, a relação existente entre a concepção *processológica* e a concepção da *Álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problema*, por ambas fazerem referência ao uso da Álgebra na abordagem/resolução de problemas ou conjunto de problemas. No caso das demais concepções de Álgebra percebemos, que mesmo que possuam semelhanças, as formas como são definidas são bastante distintas.

Enquanto as concepções trazidas por Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) estão mais direcionadas ao campo da linguagem algébrica, as concepções apresentadas por Usiskin (1995) estão mais ligadas às diferentes formas de uso das letras/varáveis em diferentes contextos e conteúdos da área da Álgebra. Em suma, diante de todas as concepções sobre a Álgebra expostas anteriormente, nos deparamos com diversas formas de enxergar essa riquíssima área da Matemática, desde concepções mais restritivas, até concepções mais amplas.

Tendo trazido a discussão sobre as diferentes concepções de Álgebra, traremos agora, baseados nos estudos de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), as três concepções dominantes de Educação Algébrica, são elas: concepção *linguístico-pragmática*; concepção *fundamentalista-estrutural;* e concepção *fundamentalista-analógica*.

A concepção *linguístico-pragmática* da de Educação Algébrica, principal concepção no Brasil e no mundo durante todo o século XIX e até a primeira metade do século XX, atribui à resolução de problemas um papel pedagógico na Álgebra e o vincula à concepção *linguístico-semântico-sintática* da Álgebra. Nesta concepção, acredita-se que a aquisição de técnicas, ainda que mecânicas, para lidar com a Álgebra, seria o suficiente para que o aluno adquirisse a capacidade de resolver problemas. A ideia principal destes problemas é a abordagem de determinados tópicos de Álgebra em sua resolução, entretanto não era considerada que a natureza ou relevância de um problema poderia determinar os conteúdos algébricos a serem aprendidos (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993).

A respeito da concepção *fundamentalista-estrutural* da Educação Algébrica, esta surge por meio do Movimento da Matemática Moderna em contraposição à concepção de educação algébrica citada anteriormente, sendo baseada na concepção *linguístico-postulacional* da Álgebra. Nesta concepção de Educação Algébrica, o papel pedagógico da Álgebra passa a ser fundamental nos vários campos da Matemática Escolar. Em relação à forma de abordagem dos conteúdos algébricos dentro desta concepção, acredita-se que a introdução de propriedades estruturais das operações que baseassem as passagens presentes no transformismo algébrico traria ao estudante a capacidade de identificar e ampliar essas passagens em diferentes contextos onde quer que elas estivessem subjacentes. (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993).

Em relação à concepção *fundamentalista-analógica* da Educação Algébrica, essa volta a considerar a resolução de problemas como papel pedagógico da Álgebra e o vincula a concepção *linguístico-semântico-sintática* da Álgebra. Entretanto, esta concepção de Educação Algébrica busca fazer uma síntese das duas outras concepções anteriores, uma vez que busca manter o caráter instrumental da Álgebra, além de manter o caráter fundamentalista. Nesta concepção a forma de justificar não está ligada as passagens presentes no transformismo algébrico, mas sim, em justificar, na maioria dos casos, por meio de recursos analógicos geométricos, portanto, visuais. Assim, nesta concepção de Educação Algébrica, acredita-se que uma "álgebra geométrica" seria didaticamente superior às formas de abordagem estritamente lógico-simbólicas, justamente por tornar visível por meio dos recursos citados, certas identidades algébricas. (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993).

Diante da discussão sobre as diferentes concepções de Álgebra e de Educação Algébrica, deve ficar claro que as finalidades da Álgebra são determinadas pelas concepções de Álgebra e como essas são determinadas pela utilização das variáveis. De acordo com Usiskin (1995, p.12), "[...] as finalidades do ensino de Álgebra, as concepções que tenhamos dessa matéria e a utilização de variáveis estão intrinsecamente relacionadas". Ainda segundo o autor, "**as finalidades da álgebra** *são determinadas por, ou relacionam-se com* **concepções** *diferentes* **da álgebra** *que correspondem à diferente importância relativa dada aos diversos* **usos das variáveis**" (USISKIN, 1995, p. 13, grifo do autor).

1.2 Símbolos, Variáveis e Linguagem Algébrica

Observando as concepções de Álgebra apresentadas, a presença da linguagem é uma característica dos estudos nesta área. A Álgebra pode ser vista pelo ângulo da linguagem própria da qual faz uso, a chamada Linguagem Algébrica. Tal linguagem deve ter sua importância reconhecida, tendo em vista que grande parte da Matemática se desenvolveu por meio dela. De acordo com Usiskin, “historicamente, a invenção da notação algébrica em 1564 por François Viète teve efeitos imediatos. Em cinquenta anos a Geometria Analítica foi inventada e trazida a uma forma avançada. Em cem anos surgiu o Cálculo” (USISKIN, 1995, p.14).

Quando falamos de Linguagem Algébrica, estamos nos referindo aos símbolos algébricos que trazem à Matemática seu caráter formal e sem os quais grande parte da Matemática que conhecemos hoje, simplesmente não existiria. Esta linguagem permite partir de referenciais concretos a uma abstração que muitas das vezes evolui e já não refletem mais os referenciais iniciais. Se por um lado isso permite um grande avanço para a Matemática enquanto área de conhecimento, por outro faz com que os estudantes apresentem dificuldades em aprendê-la, justamente por não encontrarem referenciais concretos relacionados aos símbolos dessa linguagem. De acordo com Ponte, Branco e Matos(2009):

> [...] esta grande potencialidade do simbolismo é também a sua grande fraqueza. Esta vida própria tem tendência a desligar-se dos referentes concretos iniciais e corre o sério risco de se tornar incompreensível para o aluno. É o que acontece quando se utiliza simbologia de modo abstracto, sem referentes significativos, transformando a Matemática num jogo de manipulação, pautado pela prática repetitiva de exercícios envolvendo expressões algébricas, ou quando se evidenciam apenas as propriedades das estruturas algébricas, nos mais diversos domínios. (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, P.8)

Esse é um ponto bastante delicado. Pretendemos que os estudantes ao lidar com esse simbolismo característico da Linguagem Algébrica tenham a oportunidade de encontrar referentes concretos que tragam significado a eles, entretanto, também desejamos que os estudantes tenham a capacidade de operar com estes símbolos sem terem que estar voltando sempre a buscar esses referenciais.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para os anos iniciais do Ensino Fundamental – PCN (BRASIL, 1997, p.45), já no primeiro ciclo, os estudantes fazem uso de representações, as quais evoluem de representações pictóricas para representações simbólicas, aproximando-se cada vez mais de representações matemáticas. Neste sentido, entendemos que desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, os estudantes já podem desenvolver certa afinidade com a Álgebra, o que alguns autores denominam de pré-álgebra, entretanto, o trabalho com a Álgebra e a Linguagem Algébrica é intensificado nos anos finais do Ensino Fundamental.

Ao falarmos de representações simbólicas e de Linguagem Algébrica, inevitavelmente somos conduzidos a tratar das letras quando escritas no contexto da Linguagem Algébrica, as quais, segundo Usiskin (1995), são comumente chamadas de variáveis. Ao observarmos as diferentes concepções de Álgebra, podemos enxergar que, para cada uma delas, as letras adquirem conotações/sentidos diferentes. Vejamos alguns exemplos.

Na concepção *linguístico-sintático-semântica* da Álgebra as letras são usadas para representar genericamente quantidades, sejam elas discretas ou contínuas, determinadas e particulares (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993).

Na concepção da *Álgebra como Aritmética generalizada*, as variáveis são pensadas como generalizadoras de modelos, o que é fundamental em modelagem matemática, em níveis mais avançados de estudo (USISKIN,1995). Na concepção da *Álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas*, as variáveis são incógnitas ou constantes (USISKIN,1995). Na concepção da *Álgebra como um estudo de relações entre grandezas*, a variável é um argumento ao representar valores do domínio de uma função, ou um parâmetro, quando representar um número do qual dependem outros números. Apenas no contexto dessa concepção, existem as noções de variável dependente e variável independente e na Álgebra, como estudo das estruturas, "a variável tornou-se um objeto arbitrário de uma estrutura estabelecida por certas propriedades. Essa é a visão da variável na Álgebra Abstrata" (USISKIN,1995, p.18).

As funções das letras também podem ser vistas de acordo com as diferentes interpretações da Álgebra Escolar, que, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para os Anos finais do Ensino Fundamental – PCN (BRASIL, 1998), são: *Aritmética generalizada; Funcional; Equações; e Estrutural.* Neste sentido, na visão da Álgebra Escolar como *Aritmética Generalizada*, as letras são usadas como generalização do modelo aritmético. Na dimensão da Álgebra Escolar como *Funcional*, as letras são vistas como variáveis para expressar relações e funções. Na dimensão da Álgebra Escolar como

Equações, as letras são consideradas como incógnitas. Já na visão da Álgebra Escolar como Estrutural, as letras representam símbolos abstratos (BRASIL, 1998).

1.3 Orientações Nacionais para a Álgebra Escolar

Atualmente dispomos de diversas orientações sobre o ensino de Álgebra. Na sequência estaremos discorrendo sobre as orientações apresentadas nos PCN de Matemática para o Ensino Fundamental, de acordo com os ciclos de ensino. Salientamos que, mesmo abordando propostas para os diferentes ciclos, nosso foco estará direcionado para os terceiro e quarto ciclos (atualmente do 6º ao 9º Anos do Ensino Fundamental), considerando que nossa pesquisa é voltada para esta fase de ensino na Educação Básica.

Em relação ao primeiro ciclo e segundo ciclo, que correspondem aos anos iniciais do Ensino Fundamental (atualmente do 1º ao 5º Ano do Ensino Fundamental), não temos orientações expressas para o trabalho com a Álgebra, tendo em vista que as atividades algébricas possuem início nos anos iniciais do Ensino Fundamental por meio de situações que introduzem ou iniciam o desenvolvimento do pensamento algébrico, mas é nos anos finais do Ensino Fundamental que os conceitos e o trabalho com a Álgebra são aprofundados.

Dentre os objetivos expressos nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para os anos iniciais do Ensino Fundamental (BRASIL,1997) relativos ao primeiro ciclo (1º Ano, 2º Ano, e 3º Ano do Ensino Fundamental), são apresentados os seguintes objetivos: "Interpretar e produzir escritas numéricas, levantando hipóteses sobre elas, com base na observação de regularidades, utilizando-se da linguagem oral, de registros informais e da linguagem matemática" e "Desenvolver procedimentos de cálculo - mental, escrito, exato, aproximado - pela observação de regularidades e de propriedades das operações e pela antecipação e verificação de resultados".

Os objetivos citados no parágrafo anterior já conduzem para uma indicação de trabalho que vai contribuir diretamente com o desenvolvimento inicial do pensamento algébrico por parte dos estudantes, tendo em vista a observação de regularidades. No primeiro ciclo, mesmo estando a Matemática dividida em blocos de conteúdos, os objetivos apontam para uma integração entre os campos da Matemática, tais como os campos geométricos, algébricos, aritméticos, entre outros.

Assim como no primeiro ciclo, o segundo ciclo (4º Ano e 5º Ano do Ensino Fundamental), apresenta objetivos que podem favorecer o desenvolvimento do pensamento algébrico por parte dos estudantes, levando em consideração a observação de regularidades. De fato, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para os anos iniciais do Ensino Fundamental (1997, p.55) um dos objetivos para este ciclo é: “Ampliar o significado do número natural pelo seu uso em situações-problema e pelo reconhecimento de relações e regularidades” e “Ampliar os procedimentos de cálculo - mental, escrito, exato, aproximado - pelo conhecimento de regularidades dos fatos fundamentais, de propriedades das operações e pela antecipação e verificação de resultados” (BRASIL, 1997, p.56).

Em relação ao terceiro ciclo e ao quarto ciclo, que correspondem aos anos finais do Ensino Fundamental (6º ao 9º Ano do Ensino Fundamental), encontramos nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para os anos finais do Ensino Fundamental, mais indicações em relação à Álgebra e ao pensamento algébrico, tanto no tocante aos objetivos e conteúdos para estes ciclos, quanto no que diz respeito aos conceitos e procedimentos. Ao observarmos os objetivos de Matemática para o terceiro ciclo (6º Ano e 7º Ano do Ensino Fundamental), encontramos objetivos que abordam o pensamento algébrico por meio da exploração de situações de aprendizagem. Neste sentido, de acordo com o citado documento são objetivos:

- Reconhecer que representações algébricas permitem expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas, traduzir situações-problema e favorecer as possíveis soluções;
- Traduzir informações contidas em tabelas e gráficos em linguagem algébrica e vice-versa, generalizando regularidades e identificar os significados das letras;
- Utilizar os conhecimentos sobre as operações numéricas e suas propriedades para construir estratégias de cálculo algébrico (BRASIL, 1998, p.64).

O primeiro desses objetivos trata o fato de que generalizações relacionadas à Aritmética podem ser expressas em linguagem algébrica. Neste sentido vemos uma interligação entre os campos da Aritmética e da Álgebra, ainda mais, uma passagem da Aritmética para a Álgebra por meio de generalizações sobre propriedades e operações. Ainda neste objetivo, é citado que a tradução de situações-problemas para a linguagem algébrica pode contribuir para a resolução dos problemas propostos.

No que diz respeito ao segundo objetivo, vemos uma ligação entre os campos da Matemática Escolar, Tratamento da Informação e Álgebra, em um processo de tradução das informações contidas em gráficos e tabelas para a linguagem algébrica, ou fazendo o caminho inverso e partindo de situações expressas em linguagem algébrica para construção de tabelas e gráficos. Tal objetivo também traz essa abordagem na busca de que a linguagem algébrica esteja vinculada de alguma forma com a realidade, não deixando de ser abstrata, mas reconhecendo a importância de identificar significado para as letras em diferentes contextos.

O terceiro dos objetivos, mais uma vez indica ligações entre os campos da Aritmética e o da Álgebra. Desta vez, instigando que os conhecimentos relacionados às operações numéricas e suas propriedades sejam aproveitados na construção de estratégias de cálculo algébrico.

No tocante aos conteúdos de Matemática para o terceiro ciclo, os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para os anos finais do Ensino Fundamental (BRASIL, 1998, p.68), recomendam que ao trabalhar com números é essencial desenvolver estudos de relações funcionais pela exploração de padrões em sequências numéricas que encaminhem os estudantes a fazerem generalizações, e por meio de aproximações sucessivas, compreenderem como se formam as representações algébricas. Ainda, é indicado que neste ciclo os estudantes tenham compreensão da noção de variável e também reconheçam que a expressão algébrica é uma forma de representar a relação existente entre a variação de duas grandezas.

Em relação aos objetivos de Matemática para o quarto ciclo (8º Ano e 9º Ano do Ensino Fundamental), são encontrados também objetivos que abordam o pensamento algébrico por meio da exploração de situações de aprendizagem. Assim, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para os anos finais do Ensino Fundamental (BRASIL, 1998, p.81) são objetivos:

- Produzir e interpretar diferentes escritas algébricas - expressões, igualdades e desigualdades-, identificando as equações, inequações e sistemas;
- Resolver situações-problema por meio de equações e inequações do primeiro grau, compreendendo os procedimentos envolvidos;
- Observar regularidades e estabelecer leis matemáticas que expressem a relação de dependência entre variáveis.

O primeiro objetivo citado aborda a produção e interpretação de diferentes escritas algébricas, podendo ser expressões algébricas, igualdades e desigualdades. Também trata sobre a identificação de equações, inequações e sistemas. Consideramos de suma importância que os estudantes possam tanto produzir quanto fazer a interpretação das diferentes formas de escrita algébrica, sabendo identificar e diferenciar cada uma delas pelas suas características particulares.

O segundo objetivo traz a resolução de situações-problema por meio de equações e inequações do primeiro grau e a compreensão dos procedimentos envolvidos nessa resolução. Para que o aluno resolva uma situação-problema por meio de uma equação ou inequação do primeiro grau é necessário que ele saiba fazer a interpretação do problema e escrevê-lo na linguagem algébrica, posteriormente deve proceder com resolução da equação ou inequação de acordo com a situação-problema proposta. Caso ele consiga passar por todas essas fases, ele poderá alcançar uma compreensão dos procedimentos envolvidos nessa resolução. Este objetivo pode ser relacionado a duas concepções de Álgebra, a concepção *processológica* (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993) e a concepção da *Álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problema* (USISKIN, 1995), justamente por ambas fazerem referência ao uso da Álgebra na resolução de problemas.

O terceiro objetivo indica a observação de regularidades como caminho para se encontrar ou estabelecer leis matemáticas que expressem a relação de dependência entre variáveis. Tal objetivo nos remete à concepção de *Álgebra como um estudo de relações entre grandezas* (USISKIN, 1995), tendo em vista que é considerada a relação de dependência entre variáveis, estabelecendo assim, a noção de variável dependente e variável independente.

A respeito dos conteúdos de Álgebra propostos para o ensino de Matemática no quarto ciclo, os PCN de Matemática para os anos finais do Ensino Fundamental (BRASIL, 1998, p.84), indicam que o ponto de partida ainda é a pré-álgebra desenvolvida no ciclo anterior, trabalhada com o uso de jogos, generalizações e representações matemáticas, como gráficos e modelos, e não por meio de formas puramente mecânicas para desenvolver os conteúdos de expressões e equações.

A Álgebra, no quarto ciclo, deve continuar proporcionando o trabalho com problemas na busca de dar significado às ideias matemáticas e à Linguagem Algébrica. Constitui-se de fundamental importância que os estudantes compreendam conceitos como o de variável e de função e compreendam a representação de fenômenos na forma algébrica e na forma gráfica. Neste trabalho acontece a formulação e a resolução de problemas por meio de equações, fazendo com que sejam identificados parâmetros, incógnitas e variáveis e que tenham conhecimento das regras para resolução de uma equação (sintaxe) indicando expressões que relacionam grandezas por meio de generalizações (BRASIL, 1998).

O trabalho com a Álgebra deve ser desenvolvido a partir de propostas que ofereçam aos estudantes a construção de conceitos matemáticos que estejam vinculados ao mundo que os cerca e que tenham significado. Os conteúdos da Álgebra não devem ser trabalhados de forma isolada, é preciso estabelecer ligações ou conexões entre os vários campos da Matemática. A Álgebra, por meio da linguagem específica que expressa o pensamento algébrico, propicia ao aluno desenvolver grande abstração, mas é necessário que mesmo com essa abstração, o estudante consiga, em um processo de ida e vinda, partir de referentes concretos a uma linguagem algébrica abstrata e voltar de uma linguagem algébrica abstrata a referentes concretos.

1.4 Dificuldades dos estudantes no Estudo da Álgebra

Mesmo com sua importância reconhecida, a ênfase muitas vezes exagerada que os professores dão para o ensino de Álgebra Escolar não tem sido suficiente para que os estudantes consigam uma aprendizagem com compreensão.

Diante da dificuldade que muitos estudantes apresentam na aprendizagem da Álgebra, Usiskin (1995), baseado em uma pesquisa realizada no Reino Unido entre os anos de 1980 a 1983, lista os principais erros que os estudantes comentem nos conteúdos algébricos e discute as possíveis causas desses erros. Segundo o autor, os erros podem ser originados a partir das ideias que os estudantes apresentam sobre aspectos como: o foco da atividade algébrica e a natureza das respostas; o uso da notação e da convenção em Álgebra; o significado das letras e das variáveis; os tipos de relações e métodos utilizados em Aritmética.

Ao discorrer sobre o foco da atividade algébrica e a natureza das respostas, Usiskin (1995) afirma que, em Aritmética, as atividades estão focadas em encontrar respostas numéricas particulares. Já em Álgebra, o foco está voltado para estabelecer procedimentos e relações e os expressar de uma forma geral e simplificada. Muitos estudantes não conseguem perceber essa diferença entre o foco das atividades algébricas e aritméticas, e acabam querendo dar uma resposta numérica particular para uma atividade algébrica.

Abordando o uso da notação e da convenção em Álgebra, Usiskin (1995) trata da interpretação da utilização dos símbolos. Temos como um dos exemplos apresentados pelo autor, o fato de na Aritmética, símbolos como + (mais) e = (igual) possuem geralmente uma interpretação como ações a serem efetuadas. No caso do símbolo de adição (+), significa precisamente realizar a operação de adição, já no símbolo de igualdade (=), significa escrever a resposta, que é numérica. Em contrapartida, na Álgebra, o símbolo de adição (+) pode indicar tanto uma adição quanto uma ação, e o símbolo de igualdade (=) pode estar indicando uma relação de equivalência em vez de um símbolo para escrever uma resposta.

Ao tratar sobre os significados das letras e das variáveis, Usiskin (1995) aborda o fato de que na Aritmética podemos encontrar, por exemplo, a letra m como representando "metros". Já em Álgebra a letra m pode estar representando o número de metros, ou seja, o uso da letra para representar valores. Tal distinção de usos pode ocasionar ao aluno, no caso da Álgebra, confusão decorrente da falta de referencial numérico. Outro aspecto a ser considerado, é a própria noção de variável, tendo em vista que mesmo quando os estudantes enxergam letras como representações de números, tendem a considerar que uma letra representa um valor específico, tendo em vista que na Aritmética os símbolos representam valores específicos únicos (USISKIN,1995).

Até o momento foi possível perceber que as dificuldades listadas foram explicadas ao se estabelecer distinções entre a Álgebra e a Aritmética. Contudo, vale salientar que a Álgebra mantem fortemente uma ligação com a Aritmética, tendo em vista que até nas concepções de Álgebra, encontramos a Álgebra como Aritmética generalizada. Segundo Usiskin (1995, p.33):

> [...] a álgebra não é isolada da aritmética; na verdade é, em muitos aspectos, a "aritmética generalizada". E nisso está a fonte das dificuldades. Para compreender a generalização das relações e procedimentos aritméticos é preciso primeiro que tais relações e procedimentos sejam aprendidos dentro do contexto aritmético. Se não forem reconhecidos, ou se os alunos tiverem concepções erradas a respeito deles, seu desempenho em álgebra poderá ser afetado.

No tocante aos tipos de relações e métodos utilizados em Aritmética, Usiskin (1995) ressalta que, em muitos casos, os problemas que os estudantes apresentam em Álgebra, são tanto de Álgebra de Aritmética que não foram corrigidos. Neste sentido, entende-se que as convenções aritméticas, se não bem entendidas pelos estudantes, podem ter reflexos negativos na sua aprendizagem em Álgebra.

Atualmente, os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática- PCN (BRASIL,1998), apontam que as atividades algébricas devem possibilitar que os alunos construam seu conhecimento partindo de situações que confiram significado à linguagem, aos conceitos e procedimentos ligados a esse tema, proporcionando para os alunos um avanço no tocante às diferentes interpretações das letras.

De acordo com tal documento, os resultados do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica-SAEB, no tocante aos itens referentes à Álgebra, raramente alcançam 40% de acerto por parte dos estudantes em muitas regiões do país. Tal dado implica no fato dos professores priorizarem ainda mais o tempo dedicado a estes assuntos, sendo que na grande maioria das vezes, apenas por meio de exercícios repetitivos e mecânicos, o que além de ser uma solução ineficiente, acaba gerando graves prejuízos no desenvolvimento de outros conteúdos tais como os da área de Geometria.

Considerando o fato citado no parágrafo anterior, que relata o desempenho dos estudantes no SAEB (BRASIL, 2008), no tocante aos itens referentes à Álgebra, traremos alguns exemplos de questões deste sistema de avaliação, pertinentes aos descritores que envolvem a Álgebra.

Na matriz de referência para o 9º Ano do Ensino Fundamental, encontramos os seguintes descritores relacionados ao ensino de Álgebra: calcular o valor numérico de uma expressão algébrica (**D30**); resolver problemas que envolvam equação do 2º grau (**D31**); identificar a expressão algébrica que expressa uma regularidade observada em sequência de números ou figuras (padrões) (**D32**); identificar uma equação ou inequação do 1º grau que expressa um problema (**D33**); identificar um sistema de equações do 1º grau que expressa um problema (**D34**); identificar a relação entre as representações algébrica e geométrica de um sistema de equações do 1º grau (**D35**).

Baseados no relatório da Prova Brasil (2008), apresentaremos o que cada descritor pretende contemplar e os itens da prova que correspondem a tais descritores, discutindo sobre o percentual de acertos e erros, além de expor o que provavelmente o erro possa estar sugerindo e trazer sugestões para que melhor seja desenvolvida essas habilidades por parte dos estudantes.

Para o descritor **D30**, pretende-se avaliar, se dada uma expressão algébrica, a qual envolve várias operações, o aluno possui a habilidade de fazer a substituição das variáveis da expressão por números inteiros e calcular o seu valor numérico. Neste sentido, um exemplo de item da Prova Brasil (2011) que contempla tal descritor é:

O resultado da expressão $2x^2 - 3x + 10$, para $x = -2$, é

(A) -4 (B) 0 (C) 12 (D) 24

A reposta correta é a alternativa D, mas apenas 26 % dos estudantes acertaram. Os demais responderam: 5% alternativa A; 16% alternativa B; e 50% alternativa C. O resultado sugere que no máximo 26% dos estudantes dominavam a habilidade avaliada. Os demais possivelmente devem ter errado no cálculo da potência e na multiplicação dos números negativos.

Como sugestão para melhor desenvolver essa habilidade é apontado, no texto, o uso de atividades que atribuam significado às operações em vez de apenas memorização de regras, além de ser ressaltado o cuidado na substituição das variáveis por números inteiros, especialmente quando esses são negativos.

Para o descritor **D31**, pretende-se avaliar a habilidade do aluno em equacionar os dados de um problema, resolver a equação obtida e, se necessário for, fazer uma análise crítica das raízes obtidas chegando ao resultado do problema. Neste sentido, um exemplo de item do relatório da Prova Brasil (2008) que contempla tal descritor é:

Uma galeria vai organizar um concurso de pinturas e faz as seguintes exigências:
1º) A área de cada quadro deve ser 600 cm^2;
2º) Os quadros precisam ser retangulares e a largura de cada um deve ter 10 cm a mais que a altura. Qual deve ser a altura dos quadros?
(A) 10 cm (B) 15 cm (C) 20 cm (D) 25 cm

A resposta correta é a alternativa C, e 45% dos estudantes acertaram. Os demais responderam: 11% alternativa A; 20% alternativa B; e 19% alternativa D.

Percebemos pelo resultado que quase metade dos estudantes acertou, já os demais, ou escolheram uma resposta aleatoriamente ou repetiram algum dos números encontrados no enunciado do problema.

Como sugestão para trabalhar essa habilidade com os estudantes, é sugerido no texto, iniciar com atividades que envolvam representações simples de sentenças matemáticas e posteriormente, de forma gradativa, evoluir para construção de equações do 2º grau.

Para o descritor **D32**, pretende-se avaliar a habilidade do estudante em identificar a regularidade apresentada em uma sequência e representá-la em forma de uma expressão algébrica. Neste sentido, um exemplo de item do relatório da Prova Brasil (2008) que contempla tal descritor é:

As variáveis n e p assumem valores conforme mostra a figura abaixo:

N	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
P	**8**	**10**	**12**	**14**	**16**	**18**

A relação entre p e n é dada pela expressão

(A) P = n + 1   (B) p = n + 2   (C) p = 2n – 2   (D) p = n – 2

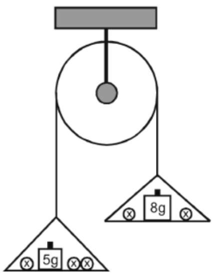
A alternativa correta é a alternativa C, e 33% dos estudantes acertaram. Os demais responderam: 19% escolheram a alternativa A; 32% escolheram a alternativa B; e 9% escolheram a alternativa D. Os resultados indicam que os estudantes que escolheram as alternativas A ou B, podem ter percebido apenas que os valores de **p** são sempre maiores do que os de **n.** Os que escolheram a alternativa D, provavelmente escolheram ao acaso.

Como sugestão para desenvolver essa habilidade são indicadas atividades inicialmente simples, que abordem temas como dobro de um número, triplo de um número, consecutivo, para posteriormente chegar a estabelecer relações mais complexas.

Para o descritor **D33**, pretende-se avaliar a habilidade do estudante em representar, por meio de uma equação ou inequação do 1º grau, situações apresentadas em problemas contextualizados. Neste sentido, um exemplo de item do relatório da Prova Brasil (2008) que contempla tal descritor é:

Uma expressão matemática que relaciona os pesos dos pratos e a roldana é:

(A) 3x – 5 < 8 – 2x
(B) 3x – 5 > 8 – 2x
(C) 2x + 8 < 5 + 3x
(D) 2x + 8 > 5 + 3x



A alternativa correta é a alternativa C. O número de acertos dos estudantes foi de 34%. Os demais: 21% optaram pela alternativa A; 24% alternativa B; e 19% alternativa D.

Podemos observar que o número de acertos chega a pouco mais de 1/3 dos estudantes. Os estudantes que optaram pela alternativa A não observaram a relação de ordem (ver quem é maior) nem que os pesos fixos são adicionados ao x. Em relação aos que escolheram a alternativa D, infere-se que eles não entenderam a relação de ordem, ou que pensaram no mais alto como maior.

Como sugestão para trabalhar essa habilidade junto aos estudantes, é indicado desenvolver atividades semelhantes a essa apresentada no item, sendo mostrado dois pratos de uma balança e a relação existente com sentenças matemáticas de igualdade ou desigualdade. O início deve ser feito com atividades mais simples, gradativamente aumentando o grau de dificuldade.

Em relação ao descritor **D34**, deseja-se avaliar a habilidade do estudante em identificar equações do primeiro grau e formar um sistema de equações, tomando por base um problema dado. Assim, um exemplo de item do relatório da Prova Brasil (2008) que contempla tal descritor é:

Na sétima série, há 44 alunos entre meninos e meninas. A diferença entre o número de meninos e meninas é 10. Qual sistema de equações do primeiro grau melhor representa essa situação?

(A) $\begin{cases} x - y = 10 \\ x \cdot y = 44 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x - y = 10 \\ x = 44 + y \end{cases}$ (C) $\begin{cases} x - y = 10 \\ x + y = 44 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} x = 10 - y \\ x + y = 44 \end{cases}$

A alternativa correta é a alternativa C. O percentual de acerto foi de 43%. Os demais: 22% escolheram a alternativa A; 14% escolheram a alternativa B; e 16% escolheram a alternativa D.

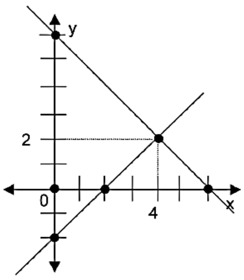
Os resultados sugerem que mesmo o item não apresentando um alto grau de dificuldade, foi acertado por apenas 43% dos estudantes. Os que optaram pelas alternativas A ou B souberam expressar corretamente a equação que envolve a diferença entre o número de meninos e o de meninas, entretanto, não conseguiram expressar o total como sendo a soma entre esses números. Já os que optaram pela alternativa D, conseguiram equacionar a soma entre os números de meninos e de meninas, mas não conseguiram equacionar a diferença entre esses valores.

Como sugestão para melhor desenvolver essa habilidade junto aos estudantes, é indicado não só resolver de forma operacional sistemas de equações do primeiro grau, mas incentivar os estudantes a construírem as equações a partir de problemas propostos. Também é indicado o trabalho com atividades em grupos, nos quais um aluno indica um problema e outro resolve com o respectivo sistema de equações do primeiro grau.

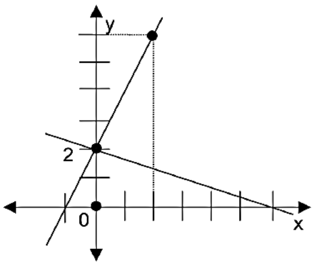
Em relação ao descritor **D35**, deseja-se avaliar a habilidade do estudante em, dado um sistema de equações do primeiro grau, identificar o gráfico cartesiano que corresponde a ele, ou, dado um gráfico cartesiano, identificar o sistema de equações que a ele corresponde. Assim, um exemplo de item do relatório da Prova Brasil (2008) que contempla tal descritor é:

Um sistema de equações do primeiro grau foi dado por $\begin{cases} \boldsymbol{y = -x + 6} \\ \boldsymbol{y = x - 2} \end{cases}$**. Qual é o gráfico que representa o sistema?**

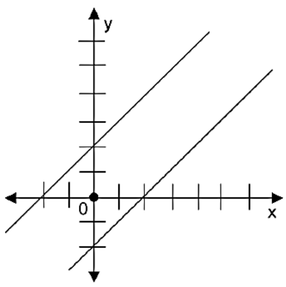
(A)



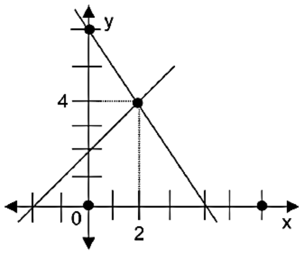
(B)



(C)



(D)



A alternativa correta é a alternativa A. O percentual de estudantes que responderam corretamente foi de 33%. Os demais: 27% escolheram a alternativa B; 11% escolheram a alternativa C; e 24% escolheram a alternativa D.

Do número total de estudantes, 1/3 mostrou ter domínio sobre a habilidade avaliada. Em relação aos 27% que optaram pelas alternativas B e D, infere-se que eles foram simplesmente atraídos pelos números que aparecem nos gráficos.

Como sugestão para melhor desenvolver essa habilidade junto aos estudantes, é indicado que o professor mostre que a solução de um sistema de equações do primeiro grau pode ser expressa como um par ordenado, e que tal par representa um ponto no sistema cartesiano, ponto este que é justamente a intersecção entre o gráfico de duas retas que são a representação gráfica das equações contidas no sistema.

Mediante todos os itens citados e discutidos anteriormente, somos direcionados a refletir sobre diferentes possibilidades para o ensino da Álgebra. Essa discussão serve para fundamentar outras formas, que não apenas as mais tradicionais, para trabalhar com o ensino deste componente curricular, na busca de construir junto aos estudantes todas as habilidades citadas, de maneira a estimular e desenvolver o pensamento algébrico por parte destes.

1.5 O Pensamento Algébrico

Ao falarmos sobre Álgebra e também sobre Linguagem Algébrica somos levados a discutir sobre mais um elemento que compõe essa área da Matemática, o chamado pensamento algébrico. Não menos importante que a Linguagem Algébrica, especificamente no âmbito educacional, o pensamento algébrico é manifestado quando, por meio de conjecturas e argumentos, são estabelecidas generalizações sobre dados e relações matemáticas, expressos em uma linguagem cada vez mais formal (KAPUT, 1998, *apud* PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p.9).

O pensamento algébrico não está restrito apenas à capacidade de manipular símbolos. Tal pensamento mantém relação com o estudo das estruturas, com a simbolização, com a modelação e com o estudo da variação. Desta forma, o pensamento algébrico, segundo Ponte, Branco e Matos (2009), envolve compreender padrões, relações e funções; representar e fazer análise de situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos; representar e compreender relações quantitativas por meio de modelos matemáticos; analisar a variação em diferentes contextos (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p.10).

Quando falamos de pensamento algébrico, compartilhamos com as ideias de Castro (2011), ao afirmar que:

> Pensar algebricamente é pensar em leis gerais, no que é genérico, exprimindo relações entre objetos, independentemente da natureza dos mesmos; é generalizar situações que apresentam regularidades, acompanhada da capacidade de apresentar argumentos que justifiquem a validade da lei para quaisquer casos (CASTRO, 2011, p.31).

O pensamento algébrico deve estar direcionado à observação de regularidades, não demandando atenção apenas aos objetos matemáticos em si, mas para identificar aspectos invariantes e/ou variantes existentes neles, estabelecendo relações, identificando padrões, em busca de expressar-se algebricamente em um processo de generalização.

De acordo com Ponte, Branco e Matos (2009, p.10), lidar com o pensamento algébrico não se limita apenas ao trabalho com o simbolismo formal. Muito pelo contrário, vai além disso, tendo em vista que, para aprender Álgebra, é necessário ter a capacidade de pensar em um grande leque de situações, envolvendo relações, regularidades, variação e modelação. Neste sentido, é entendido que não se pode resumir a Álgebra e o pensamento algébrico apenas à manipulação simbólica, pois esse é apenas um de seus elementos.

Para Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), o pensamento algébrico é um tipo especial de pensamento que pode se manifestar tanto nos diferentes campos da Matemática, quanto em outras áreas de conhecimento. Ainda, segundo os autores, o pensamento algébrico pode ser expresso por meio da linguagem natural, através da linguagem aritmética, através da linguagem geométrica e ainda por meio da linguagem específica para esse fim, ou seja, a linguagem algébrica, de natureza estritamente simbólica.

Ao discorrermos sobre o pensamento algébrico, não podemos esquecer que ele está diretamente ligado ao fato de tornar a Matemática aplicável para a vida e para a sociedade, o que reflete em uma Matemática com mais significado. Neste sentido, Van de Walle (2009,p.287) afirma que o pensamento algébrico,

> [...] envolve formar generalizações a partir de experiências com números e operações, formalizar essas ideias com o uso de um sistema de símbolos significativos e explorar o conceito de padrão e de função. Longe de ser um tópico de pouco uso no mundo real, o pensamento algébrico penetra toda a matemática e é essencial para torna-la útil na vida cotidiana (VAN DE WALLE, 2009, p287).

Ponte, Branco e Matos (2009) apresentam três vertentes para o pensamento algébrico, que são: representar, raciocinar e resolver problemas. O Quadro 1 esclarece essas vertentes, destacando o que caracteriza cada uma quanto ao pensamento algébrico.

Quadro 1 - Vertentes do Pensamento Algébrico

Representar	• Ler, compreender, escrever e operar com símbolos usando as convenções algébricas usuais; • Traduzir informação representada simbolicamente para outras formas de representação (por objeto, verbal, numérica, tabelas, gráficos) e vice-versa; • Evidenciar sentido de símbolo, nomeadamente interpretando os diferentes sentidos no mesmo símbolo em diferentes contextos.
Raciocinar	• Relacionar (em particular, analisar propriedades); • Generalizar e agir sobre essas generalizações revelando compreensão das regras; • Deduzir.
Resolver problemas e modelar situações	• Usar expressões algébricas, equações, inequações, sistemas (de equações e de inequações), funções e gráficos na interpretação e resolução de problemas matemáticos e de outros domínios (modelação).

Fonte: PONTE; BRANCO; MATOS (2009, p.11).

A primeira vertente do pensamento algébrico exposta no Quadro 1 refere-se a *representar*. Tal vertente está relacionada à capacidade do estudante de fazer uso de diferentes sistemas de representação, os quais têm como característica uma natureza simbólica (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009).

A vertente *raciocinar*, do pensamento algébrico, está relacionada ao raciocínio tanto dedutivo quanto indutivo. Nesta vertente, considera-se muito importante o relacionar (em particular, analisando propriedades de objetos matemáticos) e o generalizar (estabelecendo relações que sejam válidas para uma determinada classe de objetos). Outro aspecto muito importante dentro desta vertente é o deduzir (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009).

A terceira vertente do pensamento algébrico exposta no Quadro 1 é *resolver problemas.* Tal vertente abrange a modelagem de situações. Nesta, são usadas diferentes representações de objetos algébricos na interpretação e resolução de problemas matemáticos e também de problemas de outros domínios (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009).

Diante de tudo que foi exposto sobre o pensamento algébrico, cabe a nós reconhecermos a sua importância, tendo em vista principalmente que o ensino de Álgebra depende de estimular nossos estudantes a desenvolver esse tipo de pensamento, exercitando a capacidade de generalizar, de abstrair e de fazer desse pensamento uma ferramenta capaz de subsidiar na resolução de problemas.

1.6 Padrões no ensino da álgebra escolar

O uso de padrões na Matemática Escolar deve permear toda a Educação Básica com o objetivo de trazer contribuições para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes. Dessa forma, de acordo com Ponte, Branco e Matos (2009), o estudo da Álgebra com padrões varia conforme seus objetivos respeitando os ciclos na Educação Básica.

No 1º ciclo, o tópico Padrões faz parte do tema Números e Operações, e envolve a exploração de regularidades numéricas em sequencias e em tabelas de números. Neste ciclo, os estudantes identificam a lei de formação de uma sequência dada, e a expressam por meio de suas palavras.

Nos 2º e 3º ciclos, os padrões estão incluídos no tema Álgebra, e estes envolvem tanto a exploração de sequências, como o uso da linguagem simbólica para representá-las, sendo que, no 2º ciclo, os estudantes lidam com as ideias de "termo" e "ordem". Já no 3º ciclo, são feitas generalizações por meio do uso da linguagem algébrica, para representar o termo geral de uma sequência, assim, promovendo a compreensão do conteúdo de expressões algébricas e também a capacidade de abstração dos estudantes. (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009).

Ao tratarmos de Padrões, precisamos deixar claro o que entendemos por Padrões e quais os tipos de Padrões existentes no estudo da Álgebra, uma vez que é perceptível que a palavra padrão é bastante ampla. Os padrões podem ser observados nos mais variados contextos e locais, como, por exemplo, os padrões simétricos que são vistos nas flores; os padrões das orbitas dos planetas; os padrões de comportamento de uma determinada população; os padrões em pinturas, desenhos, ou em azulejos; os padrões musicais, entre muitos outros exemplos. Alguns destes padrões são estudados pelos matemáticos e também por pessoas de outras áreas do conhecimento. Segundo Branco (2008, p. 9), "Os padrões são usados em aplicações matemáticas para explicar e prever fenómenos naturais que se adaptem ao padrão".

Mesmo podendo identificar os padrões em diferentes contextos e locais, percebemos que é importante delimitarmos o que se entende por padrão em Matemática. Neste sentido, estaremos nos baseando em uma pesquisa realizada por Branco (2008), na qual a autora fundamentada em outros autores, apresenta várias relações entre a Matemática e os padrões, além de trazer algumas concepções sobre os padrões em Matemática.

De acordo com Devlin (2010, p.26), podemos caracterizar a Matemática como sendo "a ciência dos padrões". Nesta perspectiva , a atividade matemática está baseada na análise de padrões, sendo esses padrões, numéricos, de formas e de movimento.

Davis e Hersh (1995, *apud* BRANCO, 2008, p. 9) consideram a importância da busca de padrões na atividade matemática, além de enxergar o objetivo da Matemática como sendo descobrir regularidades. Tal objetivo está em concordância com o que afirmam Zazkis e Liljedahl (2002, *apud* BRANCO, 2008, p. 9), que consideram os padrões como sendo o coração e a alma da Matemática.

Segundo Alves (2013), os padrões se fazem presentes em todas as áreas da Matemática. Podemos perceber na Aritmética os padrões de contagem; na Álgebra encontramos os padrões de relações funcionais; na Geometria é possível considerar os padrões de figuras e formas; no caso da probabilidade, podem ser vistos os padrões de fenômenos aleatórios.

De forma geral, entendemos um padrão como um conjunto de elementos que se apresentam dispostos sob alguma lógica. Entendemos também que o uso destes, para o ensino da Matemática e principalmente para ensino da Álgebra, traz contribuições efetivas para o desenvolvimento da capacidade de abstração dos estudantes e também para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

1.7 Os diferentes tipos de Padrões e suas abordagens em sala de aula

Tendo traçado a ligação existente entre os padrões e a Matemática, discorreremos sobre dois tipos de padrões que podem ser usados no ensino da Matemática: os *padrões repetitivos* e os *padrões crescentes*. Para isso, tomaremos por base Alves (2013) e Ponte, Branco e Matos (2009). Vale salientar que estes últimos autores usam a palavra sequência para se referirem aos padrões. Assim, quando usarmos o termo sequência estaremos também nos referindo a uma apresentação de padrões.

Os tipos de padrões apresentados por Ponte, Branco e Matos (2009), são as sequências pictóricas e numéricas, e as sequências repetitivas e crescentes. Isso não significa que estes são os únicos tipos de padrões existentes. Para exemplificar outros tipos de padrões, Branco (2008) cita padrões em procedimentos computacionais e também padrões quadráticos.

No decorrer de toda a Educação básica, os estudantes lidam com sequências pictóricas e numéricas. Ao fazerem a análise de uma sequência pictórica, eles enxergam regularidades e fazem a descrição das características gerais (locais e globais) das figuras que compõem a sequência. (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009).

Ao trabalharem com sequências pictóricas e com sequencias numéricas, sejam elas finitas ou infinitas (sucessões), os estudantes são levados a buscar regularidades e, a partir dessas regularidades, ao estabelecimento de generalizações. É inegável que expressar uma generalização em linguagem natural, já demanda do aluno uma grande capacidade de abstração. O fato de passar da linguagem natural à linguagem formal/matemática/algébrica, fazendo uso de símbolos matemáticos apropriados traz contribuições para a compreensão da variável como número generalizado, além de contribuir, também, para o entendimento das convenções matemáticas que regem o cálculo algébrico. (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009).

No tocante às sequências repetitivas, nelas há uma unidade, que é composta por variados elementos (numéricos, pictóricos ou figurativos) ou termos, a qual se repete ciclicamente. Como nos exemplos na Figura 1.

Figura 1– Sequências repetitivas

☾★★☾☾★★☾☾★★☾☾★★☾…

A 1 1 A 1 1 A 1 1 A 1 1 …

vermelho, amarelo, verde, vermelho, amarelo, verde, vermelho, amarelo, verde, …

Fonte: Ponte et al (2009, p. 41)

Alves (2013, p. 11) lista as principais características dos padrões repetitivos:

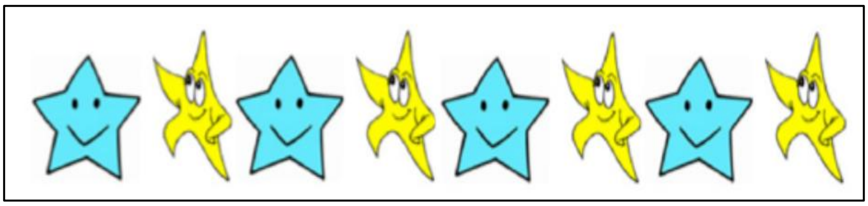
- Há um núcleo ou uma unidade que se repete ciclicamente e que constitui a menor coleção de elementos do padrão repetitivo. Ele sempre será completamente repetido e nunca parcialmente disposto no padrão.

- Podem ter apenas um atributo (tamanho, cor, forma, entre outros) ou possuírem uma coleção de atributos agregados;
- Seu conceito e desenvolvimento podem ser introduzidos para a turma de vários modos (membros do corpo, oralidade, desenhos no quadro, objetos da sala, entre outros).

Ao trabalharem com sequências como as da Figura 1, os estudantes têm a chance de continuar as representações, buscar regularidades e realizar generalizações. A observação e entendimento da unidade que está se repetindo, pode não ser facilmente identificada pelos estudantes nos primeiros anos do Educação Básica, entretanto, com o desenvolvimento do estudo de padrões, os estudantes vão de forma progressiva identificá-la mais facilmente. (PONTE; BRANCO; MATOS, 2009).

Uma proposta para o trabalho com padrões do tipo repetitivo, é apresentada por Vale et al (2011). Nesta é tomado como exemplo um padrão do tipo ABABAB, como mostra a Figura 2.

Figura 2 – Padrões do tipo ABABAB



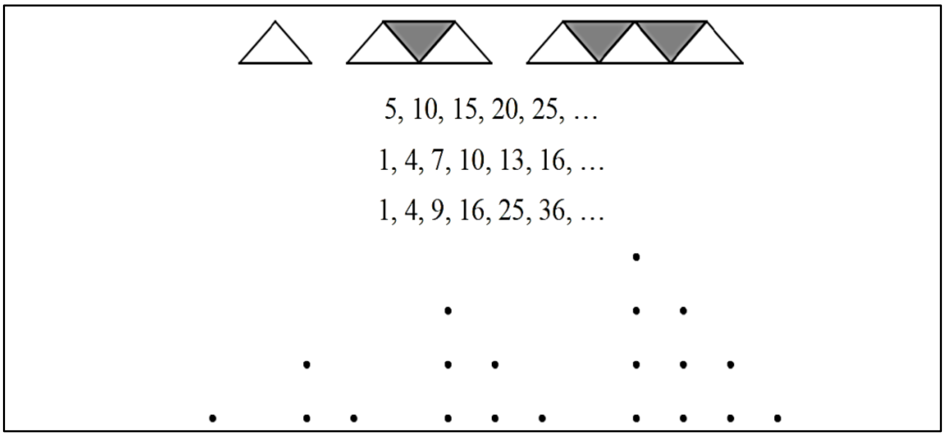
Fonte: Vale et al (2011, p. 14)

A proposta pretende ir além da simples continuação do padrão ou identificação dos elementos que se repetem, ao questionar os estudantes com perguntas como as seguintes: Que cor tem a 6ª estrela? E a 11º estrela? E a 100ª estrela? De que cor são as estrelas de ordem par? E as de ordem ímpar? Existe alguma ligação entre as cores e as ordens pares e ímpares? Entre outras perguntas.

Questões como estas abordam processos de generalização e também propriedades numéricas. Quando se pede apenas para continuar a sequência, a resposta é imediata. Mas, ao perguntar, por exemplo, a cor da estrela de ordem 100ª, o aluno precisa raciocinar além daquele objeto “concreto” e raciocinar de modo genérico, conseguindo retirar da estrutura do padrão, as relações existentes entre as figuras e a ordem que elas ocupam (VALE*et al*, 2011).

Em relação às sequencias crescentes, as mesmas são construídas por elementos ou termos diferentes, sendo que cada um dos termos das sequências depende do termo anterior e também da sua posição na sequência, o que é nomeado de ordem do termo. Tais sequências podem ser compostas por números ou por objetos, que assumem uma organização pictórica, como nos exemplos da Figura 3.

Figura 3 – Sequências Crescentes



Fonte: Ponte et al (2009, p. 42).

Alves (2013, p. 12), lista as principais características dos padrões crescentes:

- Não existe núcleo ou uma unidade;
- São formados por termos ou elementos diferentes;
- Cada termo depende do anterior e da sua *posição* na sequência (ordem do termo) de acordo com uma regra ou lei matemática;
- Abrange relações recursivas (descoberta de padrões passo a passo e envolve generalização próxima) e relações funcionais (descoberta de padrões através de regras matemáticas e envolve generalização distante);
- Demonstram o conceito de função e podem ser usados para iniciar o estudo deste tema.

Padrões numéricos como os exemplificados na Figura 3 proporcionam ao estudante oportunidades de expansão da compreensão dos padrões matemáticos, além de se constituírem como desafios adequados ao desenvolvimento do pensamento algébrico, para estudantes de todo o Ensino Fundamental. A exploração dos padrões numéricos pode ser feita por meio do uso de tabelas ou sequências numéricas formadas a partir de uma regra específica.

Vejamos alguns exemplos de sequências crescentes, com padrões numéricos, que não são do tipo repetitivo:

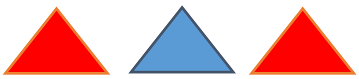
1, 2, 3, 4, 5...	(Números Naturais; adicione 1 de cada vez)
2, 4, 6, 8, 10, 12...	(Números Pares; adicione 2 de cada vez)
1, 8, 27, 64, 125...	(Potências de três; 1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, e etc.)

Uma sugestão para o trabalho com padrões é dada por Ponte, Branco e Matos (2009), no que se refere a diferentes possibilidades de continuação de uma sequência. Segundo os autores, dados alguns termos de uma sequência, podem ser feitos questionamentos aos estudantes, quanto os termos que dão continuidade a sequência, identificando alguns dos termos seguintes.

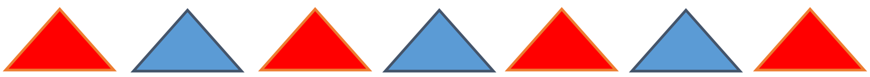
Em situações deste tipo, cabe ao professor considerar as possibilidades dos estudantes fazerem diferentes tipos de interpretações para os termos apresentados, identificando a relação existente entre eles, e podendo assim, dar continuidade à sequência de formas distintas. Entretanto, é importante que os estudantes sejam indagados e solicitados a apresentarem seu raciocínio justificando suas escolhas.

Traremos agora alguns exemplos baseados nos apresentados por Ponte, Branco e Matos (2009), nos quais são apontadas possibilidades diferentes de continuação para uma sequência, na qual se conhecem apenas os primeiros termos.

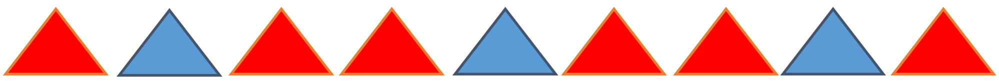
1º exemplo (sequência repetitiva): Observemos os três primeiros termos de uma sequência repetitiva:



Os estudantes podem dar continuidade a esta sequência de diferentes formas. Por exemplo:

a) 

(O conjunto que se repete é formado por dois elementos: triângulo vermelho e triângulo azul)

b) 

(O conjunto que se repete é formado por três elementos: triângulo vermelho, triângulo azul e triangulo vermelho)

c) 

(O conjunto que se repete é formado por cinco elementos: triângulo vermelho, triângulo azul, triângulo vermelho, estrela amarela e estrela amarela)

Além destas possibilidades de construção de uma sequência repetitiva a partir de três elementos dados, os estudantes ainda podem criar muitas outras possibilidades, onde cada um deles tem a oportunidade de seguir suas próprias escolhas a partir de uma lógica por eles determinada.

2º exemplo (sequência numérica crescente): observe a sequência numérica que tem como dois primeiros termos, os seguintes:1,3...

Ao questionarmos os estudantes a respeito dos termos que dão continuidade à sequência, os mesmos podem apresentar sequências diferentes, as quais têm como dois primeiros termos 1 e 3.

a) Sequência dos números ímpares: 1, 3, 5, 7, 9, 11...A justificativa dada pode ser a de que a diferença entre dois termos consecutivos é sempre dois.
b) Sequência dos números triangulares: 1, 3, 6, 10, 15, 21...Como justificativa poderíamos ter a de que a diferença entre dois termos consecutivos, sendo subtraído o menor termo do maior termo, tem sempre uma unidade a mais do que a diferença entre dois termos consecutivos anteriores.

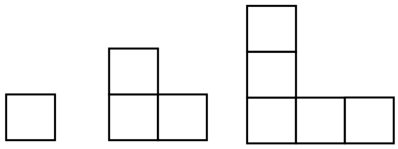
Após trazermos exemplos de diversos tipos de sequências, abordaremos no próximo tópico as estratégias dos estudantes ao trabalharem com padrões pictóricos crescentes.

1.8 Estratégias dos estudantes no estudo de padrões pictóricos crescentes

No decorrer do estudo de padrões, os estudantes podem buscar diferentes caminhos e diferentes respostas para as situações apresentadas. Na sequência, baseados ainda nos estudos de Ponte, Branco e Matos (2009), estaremos listando os principais tipos de estratégias que os estudantes costumam utilizar para lidarem com tal estudo.

Quando é solicitado ao estudante que seja estabelecida uma relação entre a ordem de um termo e algum aspecto específico de sua formação, para sequências pictóricas crescentes, os estudantes costumam seguir diversas abordagem distintas. Ponte, Branco e Matos (2009), apresentam as seguintes estratégias: *estratégia de representação e contagem; estratégia aditiva; estratégia do objeto inteiro; e estratégia da decomposição dos termos.*

As estratégias usadas para as duas primeiras abordagens citadas foram descritas tomando por base o seguinte exemplo de padrão:

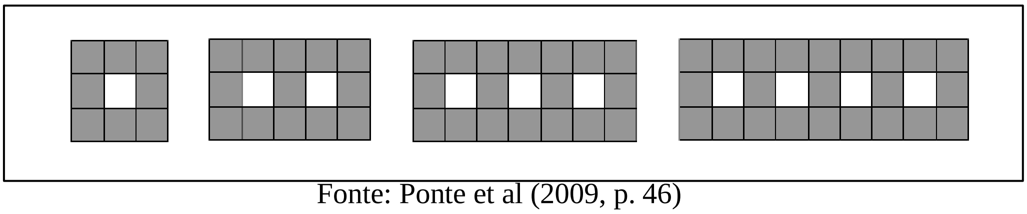


Na *estratégia de representação e contagem*, o aluno representa todos os termos da sequência até chegar ao termo solicitado. Chegando ao termo, é feita a contagem dos elementos que o constituem, para, assim, determinar a relação entre a ordem do termo e os seus aspectos específicos. Neste sentido, percebemos que nesta estratégia o aluno não faz uma generalização de caráter global, mas, a análise da sequência é feita com base na representação dos termos.

Na *estratégia aditiva,* o estudante faz uso de uma abordagem recursiva. Neste sentido, os estudantes fazem comparações entre os termos consecutivos, verificando quais alterações ocorrem entre um termo e o termo seguinte. Mesmo que nesta estratégia possam ocorrer erros de generalização, ou que muitas vezes os estudantes não consigam estabelecer a relação entre os termos e a ordem correspondente, ela permite determinar o termo geral da sequência, partindo do primeiro termo e dando n "saltos" de duas unidades.

Na *estratégia do objeto inteiro,* os estudantes determinam o termo de uma dada ordem com base num termo de uma ordem anterior, contanto que o termo pedido seja múltiplo do termo em que os estudantes estão se baseando. Neste sentido, o aluno determina o termo de ordem 100, tomando por base o termo e ordem 10, ou determina o termo de ordem 18, tendo por base a multiplicação entre os termos de ordem 3 e ordem 6. Tal estratégia, pode conduzir a generalizações erradas. Vejamos o exemplo da Figura 4.

Figura 4 – Sequência pictórica



Fonte: Ponte et al (2009, p. 46)

Alguns estudantes, podem considerar que o termo de ordem 10 é o dobro do termo de ordem 5. Entretanto, para esta sequência isso não ocorre, tendo em vista que a duplicação do termo de ordem cinco tem três quadrados cinzentos a mais que o termo de ordem 10. Neste sentido, verifica-se que para algumas ordens esta estratégia pode ser válida, mas, caso os estudantes não observem corretamente as propriedades das figuras, podem encontrar problemas na generalização.

Por fim, na *estratégia da decomposição dos termos*, dada uma sequência pictórica, a decomposição de um termo permite, em muitos casos, identificar seu processo de construção, permitindo que os estudantes determinem termos de uma ordem distante. Assim, o estudante estabelece relações entre os termos e suas respectivas ordens, podendo indicar a expressão algébrica que representa o termo geral da sequência.

1.9 Atividades com padrões: exemplos e orientações de acordo com os ciclos

Neste tópico, abordaremos exemplos e discussões de atividades envolvendo padrões, de acordo com os ciclos do Educação Básica, entretanto, gostaríamos de lembrar que, como nossa pesquisa é voltada para turmas de 9º Ano do Ensino Fundamental, nosso foco estará nas atividades direcionadas ao ciclo que inclui tal ano.

Continuaremos fomentando nossas discussões baseados em Ponte, Branco e Matos (2009), mas, nesse ponto do texto, precisaremos deixar clara semelhança e diferenças entre a organização dos ciclos da Educação Básica do Brasil e de Portugal. Como os estudos que tomamos como referência são de Portugal, os ciclos descritos pelos mesmos, são apenas três ciclos: 1º ciclo (corresponde do 1º ao 4º Ano), 2º ciclo (corresponde ao 5º e 6º Ano) e 3º ciclo (corresponde do 7º ao 9º Ano). No Brasil, os ciclos da Educação Básica são quatro mas que atualmente compreendem também 9 anos conforme já descrito anteriormente em nosso texto, e assim, seguiremos usando como referência a proposta do 3º ciclo português em nosso estudo.

Para o 1º ciclo, é indicado o trabalho inicial com sequências repetitivas, por serem mais simples e poderem ser usadas para o trabalho de busca de regularidades e também de generalizações. Ainda no 1º ciclo, podem ser exploradas as sequências crescentes. Os estudantes devem elaborar sequências, tanto numéricas quanto pictóricas, tomando por base uma lei de formação. Devem, também, fazer generalizações tomando por bases sequências numéricas crescentes, empregando a linguagem natural, e explorar e investigar regularidades presentes em tabelas e esquemas de números. Todo esse trabalho deve ser articulado com o desenvolvimento do sentido de número.

Já nos 2º e 3º ciclos, dentre as sequências crescentes, é possível destacar as sequências pictóricas, pois por meio da análise de suas propriedades figurativas, os estudantes podem ser levados a generalizações. Neste sentido, Ponte, Branco e Matos (2009, p. 58), apontam que tal trabalho pode incidir sobre os seguintes aspectos:

> (i) Continuar a representação de uma sequência (representando os termos imediatamente a seguir aos termos dados);
> (ii) Descrever os termos de uma sequência pictórica de acordo com a sua ordem (com base na análise das propriedades de cada figura da sequência);
> (iii) Usar a relação entre o modo de constituição de cada termo e a sua ordem na sequência para indicar o termo de uma dada ordem (geralmente mais distante) e para indicar a ordem de um termo dado;
> (iv) Expressar essa relação em linguagem natural (generalizar);
> (v) Representar o termo geral da sequência numérica associada a uma sequência pictórica (no 3.º ciclo, usando a linguagem algébrica);
> (vi) Determinar o termo geral de uma sequência numérica;
> (vii) Escrever os termos da sequência numérica dado o seu termo geral.

Em casos de sequências que envolvem relações quadráticas ou relações não lineares, a determinação de termos de ordem distantes é uma tarefa bastante complexa. Da mesma forma, a generalização do termo da relação entre o termo da sequência e sua respectiva ordem. Assim, consideramos importante que os estudantes, além de dar continuidade às sequências dadas, possam explorar e descrever sequências, além de trabalhar com sequências numéricas nas quais o termo geral seja dado por uma expressão algébrica que represente relações de diferentes tipos.

Outra possibilidade para o trabalho com padrões seria a construção de uma sequência numérica tendo por base um termo geral. Com exemplos deste tipo, os estudantes podem, por meio da determinação de variados termos de uma sequência, identificar o tipo de crescimento e as propriedades dos respectivos valores numéricos. Tal atividade contribui para o desenvolvimento da compreensão do conteúdo de expressões algébricas.

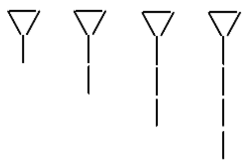
Vejamos o seguinte exemplo: "Determine os quatro primeiros termos da sequência de termo geral 4n – 1". Neste exemplo, é possível observar que de um termo para seu seguinte, são aumentadas quatro unidades. Tal fato pode ser analisado pela propriedade distributiva da adição em relação à multiplicação, veja: sendo o termo de ordem *n* representado por 4n – 1. O termo de ordem n +1 é dado por 4(n + 1) – 1 = 4n + 4 – 1= 4n + 3, logo, subtraindo os termos n e n +1 temos, 4n + 3 – (4n – 1) = 4n + 3 – 4n + 1 = 4. Além do fato da sequência ter seus termos aumentados de quatro em quatro de uma ordem para outra, pode ser visto também que esta sequência é formada pelos múltiplos de quatro menos um.

Os principais objetivos ao se desenvolver um trabalho com sequências pictóricas crescentes consistem em desenvolver a capacidade de generalização e de fazer uso da linguagem algébrica na representação de generalizações. Os padrões escolhidos pelo professor para o trabalho em sala de aula devem estar de acordo com o tipo de relação que se pretende ser delineada junto aos estudantes em relação à sequência. Podem, por exemplo, serem trabalhadas sequências pictóricas, nas quais a expressão algébrica, que representa as suas respectivas sequências numéricas, podem ser polinômios do 1º ou do 2º grau, ou ainda, alguns mais complexos.

Na busca por generalizações, e por determinar o termo geral de uma sequência, os estudantes podem estabelecer diferentes tipos de relações entre a ordem e os termos da respectiva ordem. A seguir, traremos exemplos que podem ser relacionados com Função Afim (Figuras 5, 6, 7 e 8), por terem como termo gerais expressões algébricas representadas por polinômios de 1º grau.

1º exemplo (relação do tipo $n \pm a$): Observe a sequência apresentada na Figura 5.

Figura 5 – Sequência que pode determinar uma relação do tipo $n \pm a$



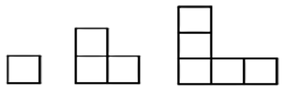
Ordem	1	2	3	4	…	n
Número total de segmentos	4	5	6	7	…	$n+3$

Fonte: Ponte et al (2009, p. 60)

Todos os segmentos dos termos desta sequência possuem o mesmo comprimento. Cada termo apresenta uma parte exatamente igual ao termo imediatamente anterior, acrescido de um segmento na vertical. Entretanto, para determinar o termo geral desta sequência, o estudante precisa observar que, cada termo possui uma parte comum, e uma parte que se altera, sendo que a parte que se altera tem o mesmo número de segmentos que a ordem do termo. Já a parte comum, possui sempre três segmentos, que formam um triângulo equilátero. Com essas informações, obtém-se a expressão algébrica n + 3, que representa o termo geral.

2º exemplo (relação do tipo *an* ± *c*): Observe a sequência apresentada na Figura 6.

Figura 6 – Sequência que pode determinar uma relação do tipo *an* ± *c*



Ordem	1	2	3	4	…	n
Número total de quadrados	1	3	5	7	…	$2n-1$

Fonte: Ponte et al (2009, p. 61)

Os termos desta sequência são formados por quadrados. Pretende-se encontrar a relação existente entre cada termo e sua ordem, para determinar o número de quadrados de qualquer termo. Podemos observar que o número total de quadrados, tanto na horizontal quanto na vertical, é igual à ordem do respectivo termo, entretanto, vemos que há um quadrado que não pode ser contado duas vezes. A análise desta sequência também pode nos levar a identificar a sequência formada pelos números ímpares.

Em relação a sequências como estas, os professores precisam estar inteirados sobre as propriedades presentes na mesma, possuindo capacidade de observá-las e traçar raciocínios mais formais, para que elas possam ser exploradas da melhor forma possível em sala de aula. Nesta sequência, o termo geral pode ser encontrado por meio da observação da diferença entre os termos, como mostra a Figura 7.

Figura 7 – Diferença entre os termos da sequência

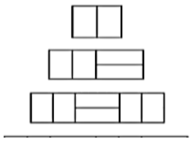
Ordem	1		2		3		4		5
Número total de quadrados	1		3		5		7		9
Primeira diferença		2		2		2		2	

Fonte: Ponte et al (2009, p. 61)

Considerando que a diferença entre os termos é constante, tal sequência pode ser representada por um termo geral de 1º grau. Em casos como esse, para determinar o termo geral do tipo u_n = an + b, basta substituir dois pares ordenados da sequência $(n\,, u_n)$, por exemplo (1, u_1) e (2,u_2), no termo geral para ficarmos com um sistema de duas equações e também duas incógnitas. Neste caso, temos u_1= 1e u_2= 3, assim:$\begin{cases} 1 = \text{ a } 1 + \text{b} \\ 3 = \text{a } 2 + \text{b} \end{cases}$. Tal sistema, tem por solução, a = 2 e b = -1. Portanto, temos como termo geral da sequência: 2*n* – 1.

3º exemplo (relação do tipo *an*): Observe a sequência na Figura 8.

Figura 8- Sequência que pode determinar uma relação do tipo *an*



Ordem da Figura	1	2	3	4	…	*n*
Número de blocos retangulares	2	4	6	8	…	2*n*

Fonte: Ponte et al (2009, p. 62-63)

Para que os estudantes possam dar continuidade à sequência, é preciso observar que a orientação de cada bloco constituído por dois retângulos vai se alternando, tendo ora retângulos na vertical, ora retângulos na horizontal. Nesta sequência, busca-se determinar a relação entre o número total de retângulos e o número de blocos que representa a ordem do termo na sequência.

O trabalho com a análise da constituição dos termos desta sequência contribui para o desenvolvimento do raciocínio multiplicativo. Neste exemplo, temos a sequência formada pelos números pares, sendo cada bloco formado por *a* retângulos. Com esta lei de formação o número total de retângulos é dado pela expressão a*n*.

Encerrada a apresentação destas atividades e as orientações que cercam o estudo com padrões, esperamos ter deixado clara a ideia de sequências pictóricas e numéricas. É importante destacar que primeiro exemplo (relação do tipo *n* ± *a*) e o segundo exemplo (relação do tipo *an* ± *c*), comporão a Sequência Didática desta pesquisa.

De forma geral, destacamos a importância desse capítulo, tendo em vista que ele nos proporciona a fundamentação teórica necessária para construção de nosso instrumento de lavamento de dados (Sequência Didática). Além disso, nos fornece os conhecimentos relativos à Álgebra e aos padrões, e a ligação existentes entre estes quando se trata de ensino de álgebra com significado e compreensão, nos dando subsídios também para o desenvolvimento de nossa pesquisa junto aos estudantes, principalmente nos momentos reservados à sistematização das atividades propostas em nossa sequência didática.

A seguir, em nosso Capítulo 2, discutiremos os principais aspectos da Teoria das Situações Didáticas estabelecendo relações com a proposta de sequência didática desta pesquisa.

2. A TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS E UMA SEQUENCIA DIDÁTICA COM PADRÕES PARA O ENSINO DE ÁLGEBRA

No presente capítulo, abordaremos aspectos da *Teoria das Situações Didáticas* – TSD discutida pelo francês Guy Brousseau[2]. Vale salientar que neste trabalho a TSD foi usada como referência para criação e sistematização das Sequências Didáticas em sala de aula, bem como, em um segundo momento, para a análise da proposta desenvolvida. Para descrever tal teoria, nos fundamentamos principalmente em Brousseau (2008), Pais (2002), Freitas (2002), D'Amore (2007), Teixeira e passos (2013) e Reis e Allevato (2015).

3.1 A Teoria das Situações Didáticas

A *Teoria das Situações Didáticas* é um modelo teórico estruturado pelo francês Guy Brousseau (1986) com o objetivo de contribuir para a compreensão do fenômeno da aprendizagem matemática no âmbito educacional. Esta teoria estabelece ligações entre o professor, os alunos e o conhecimento, dentro do campo das relações pedagógicas visando, principalmente, propiciar uma aprendizagem com mais significado para os alunos. (FREITAS, 2002).

De acordo com Reis e Allevato (2015), até o ano 1986, Piaget, entre outros autores, ressaltava dentro do campo educacional, a visão cognitivista. Para Piaget, a ação apresenta um papel central no desenvolvimento do raciocínio, na originalidade do pensamento matemático, e nas etapas de desenvolvimento deste pensamento nas crianças. Entretanto, Piaget não considerava a estrutura formal da Matemática e a função da lógica como elementos de fundamental importância para a construção do conhecimento. Considerando este contexto, Brousseau desenvolveu um estudo aprofundado, na busca de compreender o que levaria um

[2]Guy Brousseau nasceu em 4 de fevereiro de 1933, em Taza, no Marrocos. Em 1953, começou a dar aulas no Ensino Fundamental. Após ter se formado em Matemática, no final dos anos 1960 passou a lecionar na Universidade de Bordeaux, onde atualmente é diretor do Laboratório de Didática das Ciências e das Tecnologias, sendo também professor emérito. Recebeu o título de doutor honoris causa das universidades de Montreal (Canadá), Genebra (Suíça), Córdoba (Argentina), Palermo (Itália) e Chipre. No ano de 2003, recebeu prêmio Felix Kleindo do Comitê Internacional do Ensino da Matemática, sendo ele o primeiro ganhador. (NOVA ESCOLA, 2009).

sujeito a fazer uso de seus conhecimentos para tomada de decisões, e estudar as razões que propiciam essas tomadas de decisões. Assim, Brousseau criou a TSD, uma teoria que procura entender as diferentes condições e a forma como o conhecimento matemático é apreendido pelos alunos (REIS; ALLEVATO, 2015).

De acordo com Teixeira e Passos (2013), a TSD deixa clara a integração das dimensões epistemológicas, cognitivas e sociais, dentro do campo da Educação Matemática, o que permite a compreensão das interações sociais que ocorrem no âmbito da sala de aula, entre aluno e professor, e da forma de apropriação e aprendizado do conhecimento matemático.

Brousseau (2008, p. 21), define *situação* com sendo “um modelo de interação de um sujeito com um meio determinado”. Neste sentido, ao interagir com o *meio*, o sujeito dispõe de um conjunto de decisões que podem implicar em alcançar ou manter um estado favorável diante do *meio*. Ou seja, estando o sujeito inserido em uma situação, de acordo com as suas tomadas de decisões e as reações causadas por essas decisões na interação com o meio, o sujeito pode obter respostas positivas ou negativas, observar e analisar estas repostas e, com base nisso, manter ou reformular suas ações.

Brousseau (2008, p. 21) ainda define *meio*, como sendo um “subsistema autônomo, antagônico ao sujeito”, tendo em vista o fato de que, de acordo com a TSD, o estudante é colocado diante de um meio que pode ser encarado, como um desafio, um jogo ou um problema. O meio ser antagônico ao sujeito significa que o meio pode ser encarado como um opositor, um adversário, com o qual o estudante precisa lidar.

Para entendermos o que é *meio* Brousseau (2008) traz exemplos materiais, como as peças de um jogo, um desafio, um problema, um exercício, fichas, mas, de acordo com Pommer (2008), *meio* também pode envolver o conhecimento de colegas e do professor.

Em se tratando de uma *situação didática,* a mesma pode ser entendida como “todo o contexto que cerca o aluno, nele incluídos o professor e o sistema educacional” (BROUSSEAU, 2008, p. 21). Segundo Brousseau (1986, *apud* CAVALCANTI, 2011, p.52),

> Uma situação didática é um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber construído ou em vias de constituição (...) o trabalho do aluno deveria, pelo menos em parte, reproduzir características do trabalho científico propriamente dito, como garantia de uma construção efetiva de conhecimentos pertinentes.

Ao afirmar que o trabalho do aluno deveria, em parte, reproduzir características do trabalho científico, Brousseau (1986) está propondo que os estudantes produzam conhecimento mediante uma motivação, um meio; que ele aja sobre esse meio, observe as respostas obtidas mediante suas ações, construam afirmações, formulem hipóteses, posteriormente ponham essas hipóteses à prova, verifiquem quais delas são realmente válidas, para que, após isso, se tenha uma garantia efetiva de conhecimentos.

Uma *situação didática* tem sua formação a partir das múltiplas relações pedagógicas empreendidas entre o professor, os alunos e o saber, tendo como finalidade, o desenvolvimento de atividades voltadas para o ensino e para a aprendizagem de um determinado conteúdo. Os três componentes (professor, alunos, saber) de uma *situação didática,* formam a parte necessária para estruturar o espaço vivo de uma sala de aula. (PAIS, 2002).

Na Figura 9, temos o triângulo didático que foi proposto por Brousseau (1988), com a finalidade de modelar a teoria das situações didáticas.

Figura 9 – Triângulo Didático

Fonte: BROUSSEAU (1988, *apud* REIS; ALLEVATO, 2015, p. 258)

Os três elementos *saber, aluno* e *professor,* constituem uma relação dinâmica e complexa, a chamada relação didática (REIS; ALLEVATO, 2015).

Vemos que nos vértices do triângulo estão dispostos o aluno, o professor e saber. A interação entre o professor e o saber está relacionada à epistemologia do professor. Na interação entre o aluno e o saber, surge o posicionamento do aluno, a forma como este lida com os problemas propostos, os toma para si em um processo de *devolução* mobilizando seus conhecimentos na busca de solução dos problemas, para chegar, assim, a construir um saber. Quanto às interações entre o professor e o aluno, estas ocorrem por meio da relação didática que é mediada pelo saber.

Ao considerarmos que a *Teoria das situações didáticas* teve como referência a Matemática, temos que considerar também as especificidades que são inerentes ao conhecimento matemático, a saber, os conceitos, os sistemas de representações simbólicas, os processos de desenvolvimento e a validação. Neste sentido, não cabe falar de uma *situação didática* genérica, mas em diferentes tipos delas (D'AMORE; 2007). Isso ocorre justamente pelo fato de Brousseau considerar as particularidades de aprendizagem do conhecimento matemático, a estrutura formal desse conhecimento e a função da lógica na construção do mesmo.

Na TSD também encontramos tipologia~~s~~ para as *situações didáticas*, que são, a saber: *situações de ação; situações de formulação; situações de validação;* e *situações de institucionalização*. Vale lembrar que estas situações "se entrelaçam fortemente, umas em relação às outras" (FREITAS, 2009; p.77). Isso significa afirmar que, estando um sujeito diante de uma situação didática, o que determina sua tipologia, muito mais do que o meio envolvido na referida situação, são as ações tomadas pelo sujeito ao interagir com o meio, e também as respostas que estas ações trazem ao sujeito, podendo este passar de uma situação de ação para uma situação de formulação e uma situação de validação, mediante sua interação com o mesmo meio.

Uma *situação didática* pode ser dita uma *situação de ação* quando o sujeito encontra-se diante de um problema (meio) e, na busca pela solução do problema, o sujeito realiza ações imediatas que, em alguns momentos ocasionam erros, em outros momentos ocasionam acertos, implicando na produção de conhecimentos mais intuitivos do que teóricos. De acordo com Brousseau (2008, p.28),

> Para um sujeito, "atuar" consiste em escolher diretamente os estados do *meio* antagonista em função de suas próprias motivações. Se o meio reage com certa regularidade, o sujeito pode relacionar algumas informações às suas decisões (*feed-back)*, antecipar suas respostas e considera-las em suas futuras decisões (BROUSSEAU, 2008, p.28).

Neste sentido, os conhecimentos produzidos mediante a ação do sujeito sobre o problema, advêm das respostas emitidas pelo mesmo, e mediante a observação das regularidades presentes nessas respostas. Logo, em uma *situação de ação* se o meio emite respostas positivas diante das ações tomadas pelo estudante, estas decisões podem ser observadas e consideradas em situações futuras. No entanto, se o meio traz respostas negativas, significa que as ações precisam ser revistas e modificadas, para servirem em outras situações.

Nas *situações de formulação*, os estudantes já fazem uso de modelos ou esquemas teóricos explícitos ao trabalharem com a resolução de um problema. Nesse tipo de *situação didática*, os estudantes já fazem afirmações baseadas nas suas interações com o problema, entretanto, não há ainda uma obrigação de verificação da validade dessas afirmações, mesmo que haja intenções da validação futura. As *situações de formulação*, não cobram dos estudantes que sejam expostos os porquês da validade dos conhecimentos por eles formulados (FREITAS, 2002).

De acordo com Brousseau (2008, p.29), "a formulação de um conhecimento corresponderia a uma capacidade do sujeito retomá-lo (reconhecê-lo, identificá-lo, decompô-lo, e reconstruí-lo em um sistema linguístico)". Neste sentido, ainda que não haja uma necessidade imediata de validação das afirmações feitas pelos estudantes, os mesmos, ao formularem um determinado conhecimento, deverão ter a capacidade de retomá-lo em problemas futuros.

De acordo com Brousseau (2008), os esquemas de ação e de formulação, provocam processos de correção. Logo, surge outro tipo de *situação didática*, que são as *situações de validação*. Nessas situações, o aluno já passa a fazer uso de mecanismos que ponham à prova as afirmações feitas por eles diante dos problemas, verificando se estas são, ou não, corretas. De acordo com Freitas (2002, p. 80), "essas situações estão relacionadas ao plano da racionalidade e diretamente voltadas para o problema da verdade" e ainda nestas, "o trabalho do aluno não se refere somente às informações em torno do conhecimento, mas sim a certas afirmações, elaborações, declarações a propósito deste conhecimento". Neste sentido, constitui-se necessário elaborar uma prova a respeito das afirmações que foram feitas.

Em uma pesquisada realizada por Brousseau (2008), foi observado que os professores precisavam, antes de passar para uma lição seguinte, separar um espaço de tempo durante as aulas para rever o que já haviam feito. Neste momento, o professor, em conjunto com os estudantes, traçava discussões sobre os conhecimentos por eles formulados, buscando identificar os conhecimentos formulados de maneira incorreta, além de dar destaque aos conhecimentos aceitos pela sociedade e pela cultura, dando aos conhecimentos o status de saber. Com base nas observações citadas acima, foi percebido que era necessário considerar também as fases de institucionalização do conhecimento. Daí surgem as *situações de institucionalização*.

As *situações de institucionalização* pretendem conferir o caráter de objetividade e universalidade para o conhecimento. Neste sentido, o conhecimento necessita apresentar para o aluno e para a sociedade um status universal, que rompa com as limitações decorrentes das particularidades do problema estudado. É necessário que o professor organize a síntese do conhecimento, fazendo com que este não dependa de aspectos subjetivos e particulares, e sejam elevados a um status de saber (FREITAS, 2002).

De acordo com Pais (2002), quando consideramos a possibilidade de expansão do domínio cognitivo, nos deparamos com a diferença entre o saber e o conhecimento. O conhecimento é entendido como algo que se revela diante das condições que o sujeito tem de utilizá-lo ao lidar com a resolução de um problema; já o saber apresenta como principais características o seu caráter histórico e impessoal. Um exemplo, para entendermos melhor a diferença entre conhecimento e saber, é apresentado por Teixeira e Passos (2013):

> As crianças são hábeis em achar respostas para questões propostas, sem mesmo examinar seu sentido e sua validade, em alguns casos. O aluno, nessa situação, mostra conhecimento, mas não, necessariamente, o saber matemático. Esse saber vai sendo construído durante todo o desenvolvimento da situação, e essa construção do saber só evolui em função das decisões do ator — aquele que resolve — e das condições objetivas (TEIXEIRA; PASSOS, 2013, p.162).

Logo, entendemos que o conhecimento está relacionado à ação do sujeito, apresentando, portanto, aspectos mais experimentais. Já o saber, um conhecimento que passou por uma validação. No caso específico da Matemática, esta validação está relacionada ao raciocínio lógico-dedutivo (REIS; ALLEVATO, 2015).

Dentro da referida *Teoria das situações didáticas* é feita uma descrição e uma análise de diferentes tipos de *situações didáticas*, situações nas quais, em alguns casos, o professor possui algum tipo de controle por meio da ação didática, e em outros casos, não possui controle direto. (FREITAS, 2002).

Em busca de compreender estas situações sobre as quais o professor não apresenta um controle direto, precisamos abordar um dos pontos da *teoria das situações didáticas*, que é a noção de *situação a-didática.* Neste sentido, Freitas (2002) afirma que, uma *situação a-didática* é caracterizada por momentos do processo de aprendizagem sobre os quais o professor não tem um controle direto e os alunos trabalham de forma independente. De acordo com Brousseau (1986, *apud* FREITAS, 2002, p. 69),

> Quando o aluno se torna capaz de pôr em funcionamento e utilizar por si mesmo o saber que está construindo, em situação não prevista em qualquer contexto de ensino e também na ausência de qualquer indicação intencional. Uma tal situação é chamada de situação a-didática.

De acordo com Pais (2002), a noção de *situação a-didática*, traz a possibilidade de compreender a interação existente entre o ambiente escolar e o fluxo do espaço maior da vida. Assim, esta noção contribui para diferenciar as variáveis que estão dentro do comando pedagógico do professor, de outras variáveis que não estão sob um controle pedagógico direto, mas que podem condicionar o fenômeno cognitivo.

Em uma *situação a-didática*, estão em jogo os estudantes e o objeto de conhecimento, mas, neste caso, não o professor. Tal situação apresenta determinadas exigências e os alunos respondem às mesmas. Considerando que nestas situações não existem obrigações didáticas, o que é realizado pelos estudantes não está ligado a estímulos gerados pelo professor. Os estudantes (sozinhos ou em grupo) desenvolvem tentativas, verificam sua funcionalidade ou não funcionalidade diante do problema, interagem com os elementos presentes no ambiente e modificam os seus sistemas de conhecimentos por conta das adaptações que os mesmos realizam ao fazer uso de diferentes estratégias (D'AMORE, 2007).

É preciso entender que existem diferenças entre *situações a-didáticas* e *situações não-didáticas*. De acordo com Freitas (2002, p. 70), situações *não-didáticas* "são aquelas que não foram planejadas visando uma aprendizagem. Nesse caso o problema surge de forma eventual na vivência pessoal do sujeito".

Mesmo que uma *situação não-didática* possa também acontecer dentro do contexto de uma sala de aula, neste tipo de situação o professor não planejou ou objetivou a aprendizagem de algum conhecimento específico. D'Amore (2007), nos traz um exemplo de *situação não-didática*:

> [...] as crianças em classe, na presença do professor, jogam com as peças de um jogo matemático (como fazer construções utilizando as peças dos blocos lógicos). As estratégias realizadas, ainda que com instrumentos "matemáticos", não são específicas para objetivos cognitivos escolares. Não é dito que o estudante não aprenda: apenas o professor não constituiu um "ambiente didático" com o objetivo da aprendizagem de alguma noção específica [...]. (D'AMORE, 2007, p. 234).

Não poderíamos deixar de discorrer sobre a aprendizagem por adaptação, tendo em vista que esta é mais uma das ideias que Brousseau utiliza para a estruturação da *Teoria das situações didáticas.* Segundo Pais (2002) a *aprendizagem por adaptação* apresenta uma proximidade com os esquemas de assimilação e acomodação expressos primeiramente por Piaget. Neste tipo de aprendizagem, o estudante deve ser desafiado a adaptar os conhecimentos que ele já possui, diante das necessidades de solução de um novo problema. Neste sentido, entende-se que para um problema ser resolvido, o estudante precisa ultrapassar seu nível atual de conhecimento, fazendo uso da criatividade, e assim revelando a operacionalidade dos conteúdos que ele já dominava. De acordo com Teixeira e Passos (2013, p.158),

> A aprendizagem deve ser um processo envolvente para o aluno, que constrói, modifica, enriquece e diversifica esquemas de conhecimento já internalizados a respeito de diferentes conteúdos, a partir do significado e do sentido que pode atribuir a esses conteúdos e ao próprio fato de estar aprendendo.

Neste sentido, entendemos que estando o estudante inserido em um processo de aprendizagem (o qual deve ser envolvente, instigante e desafiador), o mesmo consegue agregar novas informações aos conhecimentos que já possuía, modificando, enriquecendo e diversificando os seus esquemas de conhecimento.

A noção de *aprendizagem por adaptação* nos conduz para a relação entre a resolução de problemas e a teoria das *situações didáticas.* Dentro da teoria das *situações didáticas,* a resolução de problemas é vista sob o ângulo de que o problema seja proposto ao aluno de forma que ele tome esse problema para si, e resolva não apenas porque foi solicitado pelo professor, mas porque isso tem importância e pode produzir algum significado para ele mesmo. Neste sentido, surgem dois importantes conceitos que integram a *teoria das situações didáticas*, o conceito de *contrato didático* e o conceito de *devolução*.

O *contrato didático* é, de acordo com Brousseau (1996a, *apud* REIS; ALLEVATO, 2015, p.261),

> [...] o conjunto de comportamentos do professor que são esperados pelos alunos e o conjunto de comportamentos dos alunos que são esperados pelo professor. [...] Esse contrato é o conjunto de regras que determinam uma pequena parte explicitamente, mas sobretudo implicitamente, do que cada parceiro da relação didática deverá gerir e daquilo que, de uma maneira ou de outra, ele terá de prestar conta perante o outro.

Neste sentido, o contrato didático está relacionado ao conjunto das regras explicitas e implícitas que organizam o espaço escolar da sala de aula, neste incluídas as relações de aprendizagem estabelecidas entre professor e aluno, na qual não há necessariamente um documento listando estas regras, mas existe por parte tanto do professor, quantos dos estudantes, expectativas quanto ao cumprimento das mesmas.

De acordo com Reis e Allevato (2015, 262), o c*ontrato didático* é "o regulador das intenções do aluno e do professor diante da situação didática". Ainda segundo os autores, a aceitação do *contrato didático* acontece quando os estudantes se mobilizam na busca de resolução dos problemas propostos, e o professor toma consciência que não deve intervir na transmissão direta de conhecimentos.

Sendo assim, o conceito de *devolução* é essencial ao contrato didático. De acordo com Brousseau (2008, p.91), "a devolução é o ato pelo o professor faz com que o aluno aceite a responsabilidade de uma situação de aprendizagem (didática) ou de um problema e assume ele mesmo as consequências dessa transferência". Neste sentido, entende-se que, para um estudante construir conhecimentos, é necessário que o mesmo apresente interesse pessoal pelo problema que lhe foi proposto em uma situação didática, e com isso possa tomar o problema como seu, empreendendo uma mobilização de seus conhecimentos na busca de soluções.

Na sequência, traçaremos as relações existentes entre a *Teoria das Situações Didáticas*- TSD e a proposta com Padrões para o ensino de Álgebra, mais especificamente para o desenvolvimento do pensamento algébrico que conduza ao tratamento das relações funcionais, de acordo com a proposta planejada.

3.2 Uma aproximação da Teoria das Situações Didáticas com a Sequência Didática

Para o desenvolvimento de nossa pesquisa, foi criada uma sequência didática fazendo uso de padrões voltada ao ensino de Álgebra, especificamente ao ensino das relações funcionais.

Ao falarmos sobre sequência didática, compartilhamos da definição apresentada por Teixeira e Passos (2013, p.162), na qual os autores afirmam que "uma sequência didática é uma série de situações que se estruturam ao longo de uma quantidade prefixada de aulas". Ainda segundo os autores, essa série de situações devidamente estruturadas tem como objetivo tornar possível a aquisição de saberes, sem esgotar o assunto trabalhado. Neste sentido, o tempo de duração de uma sequência didática precisa ser flexível, não necessariamente se limitando ao tempo programado, já que o seu cumprimento deve levar em consideração as dificuldades e necessidades que os estudantes apresentam durante seu desenvolvimento.

Percebermos como *meio*, no contexto da TSD, os diversos problemas presentes na sequência didática, os recursos disponibilizados para o desenvolvimento de algumas atividades (peças em Material emborrachado – EVA, papel milimetrado, malha quadriculada, entre outros) de modo que os estudantes consigam formular conhecimentos e saberes ligados às relações funcionais.

Tendo em vista que o conhecimento dos colegas também pode ser visto como meio, propomos que os estudantes fossem organizados em duplas durante o desenvolvimento da sequência didática. Dessa forma acreditamos que seria possível proporcionar aos estudantes diferentes tipos de *situações didáticas* na busca efetiva de uma construção de conhecimentos por parte dos mesmos.

Cabe salientar que as situações propostas colocadas para os estudantes no primeiro momento do desenvolvimento em sala, foram inspiradas como situações *a-didáticas*, considerando que o pesquisador não teria interferência direta sobre os momentos de resolução dos problemas propostos, e dentro destas situações *a-didáticas,* os estudantes iriam se deparar com os diferentes tipos de *situações didáticas* mediante a interação com o *meio*.

Consideramos também, no segundo momento do desenvolvimento da pesquisa em sala, a importância da fase de institucionalização do conhecimento sob a orientação do professor pesquisador após a realização de cada atividade proposta. Assim, foi reservado um tempo ao final de cada atividade, para que, em conjunto, o pesquisador e todos os estudantes debatessem e deixassem clara a importância dos saberes por eles formulados.

Dentro da perspectiva do *contrato didático* e da *devolução*, os estudantes foram estimulados a trabalhar de maneira autônoma, estando conscientes do seu papel, e encarando os problemas propostos como seus, tomando para si e se sentindo desafiados a solucioná-los, sabendo ainda que a sua interação com estes problemas, e a mobilização dos conhecimentos que já possuem, lhes possibilitariam a construção de novos conhecimentos.

Diante disso, afirmamos que a Teoria das Situações Didáticas constitui-se como uma ferramenta de fundamental importância para o desenvolvimento de nossa pesquisa, a qual nos norteou desde a formulação de nossa sequência didática, passando aos momentos de desenvolvimento da mesma, chegando finalmente aos momentos de discussão e análise do estudo realizado.

3.3 A Sequência Didática

A sequência didática construída para a pesquisa foi organizada por níveis (introdutório, intermediário e avançado) tendo em vista o desenvolvimento do pensamento algébrico, especificamente das relações funcionais, de forma que ocorresse gradativamente à medida que os estudantes prosseguiam na resolução das atividades propostas. No Apêndice, encontra-se a sequência didática.

Para cada nível foi estabelecido o objetivo geral e também objetivos específicos do conjunto de atividades, sendo cada nível composto por três atividades, organizados no Quadro 2, a seguir.

Quadro 2 – Objetivos das atividades por nível

Nível Introdutório
Objetivo geral: Familiarizar-se com os padrões, por meio de sequências pictóricas repetitivas. **Objetivos específicos:** • Discutir o significado de sequência pictórica e de sequência repetitiva; • Identificar nas sequências a unidade que se repete ciclicamente; • Prever termos da sequência identificando os termos de ordens posteriores; • Dar continuidade à sequência por meio de desenhos.
Nível Intermediário
Objetivo geral: Identificar e dar continuidade a padrões para estabelecer generalizações. **Objetivos específicos:** • Identificar a forma como o padrão está sendo gerado; • Estabelecer relações entre termos e suas respectivas ordens; • Dar continuidade à sequência e prever termos de ordens posteriores; • Traçar relações entre sequências pictóricas e sequências numéricas; • Realizar generalizações com base nas características dos padrões.
Nível Avançado
Objetivo geral: Explorar padrões envolvendo relações funcionais.

Objetivos específicos:

- Desenvolver generalizações a partir de padrões de regularidade;
- Construir tabelas a partir de padrões de regularidade;
- Construir expressões algébricas que representem generalizações de padrões de regularidade;
- Construir gráficos no plano cartesiano a partir de padrões de regularidade;
- Explorar relações funcionais a partir de padrões de regularidade;
- Obter a fórmula do termo geral de uma progressão aritmética e também da soma de uma progressão aritmética.

As atividades foram elaboradas de forma que os estudantes procurassem mobilizar seus conhecimentos, a partir da leitura e reflexão sobre o que foi solicitado na questão. Os enunciados precisavam ter clareza e foram pensados de maneira a interligar a observação das sequências para, em seguida, possibilitar aos estudantes fazer generalizações, fossem elas faladas ou escritas na língua materna, para posteriormente passar para linguagem algébrica

As atividades que compõem o nível introdutório são consideradas introdutórias em termos de dificuldades quanto ao tipo de sequência, tendo em vista que usamos sequências pictóricas que permitem fácil observação do grupo que se repete ciclicamente, e também quanto ao pensamento algébrico, já que nestas atividades podem ser feitas generalizações, mas ainda não são cobradas expressões algébricas para representá-las, o que demandaria maior abstração.

As atividades que compõem o nível intermediário de nossa sequência didática avançam em relação às atividades do nível introdutório, principalmente, por permitir aos estudantes estabelecerem generalizações baseadas nos padrões. Tais generalizações são abordadas de forma que os estudantes consigam determinar uma relação existente entre os termos e suas respectivas ordens e, com base nisso, os mesmos possam criar expressões algébricas que são também as representações algébricas de uma Função Polinomial do Primeiro Grau.

As atividades que compõem o nível avançado da sequência didática são consideradas avançadas em termos de pensamento algébrico, não das sequências em si, tendo em vista que as sequências que foram utilizadas neste nível são sequências pictóricas crescentes, assim como duas das sequências que foram utilizadas no nível intermediário. Entretanto, este nível aborda o desenvolvimento de generalizações em todas as suas atividades, e, além disso, avança também ao trabalhar com construção de gráficos a partir de tabelas e ao solicitar aos estudantes expressões algébricas que relacionam os termos e suas respectivas ordens nas sequências em estudo.

Vale salientar que existe uma semelhança na forma como as três atividades que fazem parte deste nível avançado foram pensadas. Todas elas vêm abordar principalmente a construção de tabelas com base nas sequências, observação de regularidades, generalizações, construção de expressões algébricas e também construção de gráficos com base nas sequências dadas.

Um fato importante a ser observado, é que tendo escolhido trabalhar com atividades abordando sequências pictóricas, principalmente as sequências pictóricas crescentes. As representações gráficas das funções mantiveram-se restritas apenas ao primeiro quadrante do plano cartesiano, o que pode ser visto como uma limitação das sequências pictóricas crescentes ao serem abordadas sob o aspecto das relações funcionais. Como sugestão para correção desta limitação, podemos indicar o uso de sequências numéricas decrescentes, pois estas podem possibilitar a exploração de outros quadrantes do plano cartesiano.

3. A SEQUÊNCIA DIDÁTICA EM SALA: OS NÍVEIS INTRODUTÓRIO E INTERMEDIÁRIO

Neste tópico do texto trouxemos os principais resultados e percepções relativas ao desenvolvimento das atividades da sequência didática elaborada como instrumento de levantamento de dados da nossa pesquisa, entretanto, focaremos a escrita nos dois primeiros níveis de nossa sequência.

Esta fase experimental ocorreu entre os meses de julho e setembro de 2015, em uma turma do 9º Ano do Ensino Fundamental de uma Escola Estadual de Ensino Fundamental, da cidade de Mamanguape-PB, na qual o pesquisador também atua como professor.

No total foram utilizadas 26 horas/aula distribuídas da seguinte forma: 7 horas/aula para as atividades do nível introdutório; 7 horas/aula para as atividades do nível intermediário; e 12 horas aula para as atividades do nível avançado.

No que diz respeito ao contrato didático estabelecido no início do desenvolvimento das atividades, foi comunicado aos estudantes que se tratariam de uma pesquisa. Primeiramente os mesmos se mostraram curiosos, buscando entender como funcionaria a dinâmica das aulas. Foi explicado que estaríamos trabalhando com uma sequência didática, formada por um conjunto de nove atividades, as quais seriam desenvolvidas por eles de maneira autônoma, sem que o pesquisador tivesse algum tipo de interferência direta sobre suas respostas. Também foi informado que os momentos em sala de aula seriam filmados e fotografados, para levantamento de dados a respeito do que estava sendo desenvolvido, tanto por eles, quanto pelo pesquisador. As câmeras no início causaram uma estranheza moderada, mas rapidamente os estudantes se adaptaram e ficaram à vontade.

Também foi acordado que os estudantes seriam organizados em duplas durante o primeiro momento do desenvolvimento de nossa pesquisa. As duplas foram formadas segundo a escolha dos próprios estudantes, e eram mantidas nas aulas seguintes, caso os dois participantes de cada dupla estivessem presentes. Caso contrário, os estudantes formavam duplas diferentes.

Cada estudante foi identificado por nós por uma letra diferente na intenção de preservar os seus nomes. Neste sentido, se o aluno A formou dupla com o aluno B, denominamos essa dupla de AB (seguindo a ordem alfabética, no momento de nomear a dupla). Como 24 estudantes participaram da pesquisa e cada estudante foi denominado por uma letra fixa durante toda a pesquisa, temos as letras entre A e Y representado os 24 e quatro estudantes. Ao total foram formadas vinte e cinco duplas diferentes.

Seguindo a proposta da Teoria das Situações Didáticas, as atividades propostas eram vistas como meio para que os estudantes mobilizassem os conhecimentos que já possuíam, e em um processo de gênese artificial do conhecimento (BOUSSEAU, 2008), pudessem desenvolver o seu pensamento algébrico. Neste sentido, as atividades foram distribuídas aos estudantes, os quais eram orientados a trabalhar de forma autônoma e mobilizando seus próprios conhecimentos na busca de respostas.

As sequências eram apresentadas principalmente em material impresso, o qual era entregue sempre no início das aulas logo após a formação das duplas. Quanto à forma como iriam atuar para o desenvolvimento da atividade, as duplas eram livres de qualquer interferência do pesquisador, entretanto, eram orientados a não apagarem ou modificarem as respostas em momento de sistematização, pois buscávamos observar como as duplas pensaram inicialmente ao responderem as atividades.

Em algumas atividades as sequências poderiam ser obtidas fazendo–se uso de material emborrachado (EVA) e outros materiais como palitos de fósforo e malha quadriculada. Mais uma vez, a forma como fariam uso desses materiais era determinada pelas próprias duplas, observando apenas o que a atividade solicitava.

Ao final de cada atividade foi reservado um momento para sistematização do conteúdo com o pesquisador e toda a turma. Neste momento, era feita uma discussão coletiva da atividade, de maneira que as duplas se posicionassem, seja para tirar alguma dúvida, seja para expor a maneira como pensaram ao resolver determinada questão, ou para debater qual resposta era mais adequada em caso de respostas divergentes.

O pesquisador, enquanto professor, se posicionou como mediador destes debates. Usando como referência as atividades impressas e respondidas pelas duplas, esses momentos renderam sempre ótimas discussões, solucionando as questões levantadas e proporcionando uma visão das diferentes formas de chegar à resposta dos problemas propostos na sequência didática. Em tais momentos, foi possível observar o uso do material distribuído, mas o que se tornou mais evidente, foi justamente o compartilhamento de ideias e interação estabelecida entre as duplas e o pesquisador, nos momentos de exposição das estratégias utilizadas para a resolução das atividades.

3.1 O Nível Introdutório da Sequência Didática

O nível introdutório de nossa sequência didática é composto por um conjunto de três atividades. Para estas, tínhamos, conforme o Quadro 2, o objetivo geral de promover a familiarização dos estudantes com os padrões, por meio de sequências pictóricas repetitivas. Para tanto, o conjunto de atividades tinha como objetivos específicos: discutir o significado de sequência pictórica e de sequência repetitiva; identificar nas sequências a unidade que se repete ciclicamente; prever termos da sequência identificando os termos de ordens posteriores; e dar continuidade à sequência por meio de desenhos.

Para o desenvolvimento das atividades do nível introdutório, foram necessárias 7 horas/aula, incluindo os momentos de desenvolvimento e sistematização das atividades (sendo aproximadamente sessenta e um minutos para sistematização). A média de estudantes que participaram deste nível foi de dezessete por atividade. A seguir apresentaremos e discutiremos cada uma das atividades do nível introdutório de nossa sequência didática. As atividades deste nível encontram-se no Apêndice A.

3.1.1 Atividade 1- Nível Introdutório

A primeira atividade da sequência didática do nível introdutório foi trabalhada com dezoito estudantes organizados em nove duplas (AB, CD, EF, GX, IJ, KL, MN, OP, e QR) e durante 2 horas/aula (noventa minutos), incluindo desenvolvimento e sistematização (dezessete minutos). A atividade foi crida pelo próprio pesquisador. A Figura 10 apresenta a estrutura da atividade.

Figura 10 – Atividade 1/ Nível Introdutório

Observe as figuras abaixo e responda o que se pede.

a) Qual será a figura que ocupará as 11ª, 14ª e 17ª posição? Justifique.

b) Dê continuidade à sequência por meio de desenhos.

c) Elabore alguma pergunta sobre a sequência e proponha que um colega responda.

Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador

A atividade também pôde ser realizada fazendo uso de material concreto. Para isso, foram produzidos círculos, triângulos e quadrados em EVA (material emborrachado) coloridos. Quando fazemos uso desse material, estamos considerando os atributos de forma, tamanho e cor das figuras. Assim, as mesmas devem ser construídas nas cores indicadas na sequência, e cada uma delas em um tamanho fixo.

Outra possibilidade a ser considerada é fazer uso de material concreto chamado de “blocos lógicos”, o mesmo é composto por 48 peças as quais incluem quadrados, triângulos e círculos, de cores e tamanhos variados. Ao fazer uso desse material, consideramos apenas o atributo forma, desprezando os atributos cor e tamanho das figuras. Entretanto, as figuras devem ser organizadas de acordo com a unidade que se repete ciclicamente na sequência.

Para que os estudantes respondessem aos questionamentos, esperávamos que os mesmos entendessem que as figuras geométricas (círculo, quadrado e triângulo) estão dispostas segundo uma ordem e que se repetem sempre nesta mesma ordenação, formando assim, uma sequência pictórica repetitiva.

No desenvolvimento das atividades, os estudantes foram organizados em duplas, cada dupla recebia a atividade impressa e junto com a atividade recebia também círculos, quadrados e triângulos confeccionados em EVA, nas mesmas cores que as figuras da sequência. Observe a Figura 11, que ilustra a dupla de estudantes CD, fazendo uso dos círculos, quadrados e triângulos confeccionados em EVA.

Figura 11 - Dupla CD Usando material confeccionado em EVA

Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador

Em relação à questão (a), todas as duplas de estudantes conseguiram perceber que a figura que ocupará as posições 11ª, 14ª e 17ª serão quadrados, e mesmo que alguns não tenham escrito de forma clara uma justificativa, trouxeram afirmações como as seguintes:

- Dupla AB: "Todos são quadrados por que ele vem em intervalo de três".
- Dupla CD: "quadrado. Porque a posição do quadrado está na mesma sequência".
- Dupla KL: "montando as pessas pude chegar a conclusão". (Sic)
- Dupla QR: "Quadrado porque? São múltiplos de 3 em cada 2 figuras o quadrado se repeti". (Sic)

As afirmativas das duplas CD, QR e AB estão relacionadas como a forma que a sequência foi gerada. As duplas observaram que o quadrado aparece na sequência sempre nas ordens que são representadas por números múltiplos de três. Quanto à dupla KL, os estudantes concluíram que as posições 11ª, 14ª e 17ª eram ocupadas por quadrados, justamente dando continuidade à sequência.

Quanto à questão (b), as duplas não apresentaram dificuldades, tendo em vista que ao responderem a questão (a), todas as duplas já haviam dado continuidade à sequência, fosse mentalmente, usando as figuras em material emborrachado ou por meio de desenhos.

Em relação à questão (c), enquanto um dos integrantes da dupla formulava a questão o outro respondia. Observamos que muitas duplas se basearam nas questões (a) e (b) para formularem suas perguntas. Vejamos alguns exemplos:

- A dupla CD formulou a seguinte questão: "Qual figura ocupará as 6ª, 9ªe 12ª posição?" (resposta: "triângulo")
- A dupla EF formulou a seguinte questão: "Qual a figura que ocupará a posição 22?" (resposta: "É um círculo")
- A dupla KL formulou a seguinte questão: "Qual será a figura que ocupará a 25 e 30 posição?" (resposta: "25 triângulo 30 círculo")

As perguntas formuladas assemelham-se com a pergunta proposta na atividade, entretanto, as duplas EF e KL avançaram ao fazerem questionamentos relativos à ordens ainda maiores que a mencionada na atividade.

No decorrer desta atividade, os estudantes foram desafiados a lidar com algo ainda novo para eles, tendo em vista que foi possível observar durante o decorrer da atividade, que os mesmos não possuíam familiaridade com problemas envolvendo padrões. Mas, de forma geral, consideramos que foi possível aos estudantes uma familiarização com os padrões por meio de uma sequência pictórica repetitiva. Todas as duplas de estudantes não só observaram o padrão, como também deram continuidade à sequência por meio de desenhos e também identificaram termos de ordens posteriores. Além disso, baseados na sequência, foram capazes de formular e responder problemas. Assim, é possível afirmar que a atividade contemplou os objetivos determinados.

3.1.2 Atividade 2 - Nível Introdutório

Esta segunda atividade é uma atividade que já avança em relação à atividade anterior, tendo em vista que nela propomos a construção de uma tabela tomando por base uma sequência pictórica e também os grupos que se repetem nesta sequência.

Participaram desta atividade, dezoito estudantes organizados em nove duplas (AB, CD, EF, GX, IJ, KL, MN, OP, e QR) durante 2 horas/aula (noventa minutos), incluindo resolução e sistematização (vinte e seis minutos). Observemos na Figura 12 como a atividade foi estruturada. A atividade foi adaptada de Vale et al (2011, p.15).

Figura 12 – Atividade 2/ Nível Introdutório

Atividade 2: A corda enfeitada

Uma linha estava enfeitada com círculos e quadrados como mostra a imagem:

a) Complete a seguinte tabela:

Nº de Grupos Repetidos	Nº de Círculos	Nº de Quadrados	Nº Total de Objetos
1	3	2	5
		4	
	9		
5			
			50
		28	
80			

b) Explique como você pensou para construir a tabela.

Fonte: Atividade adaptada de Vale et al (2011, p.15)

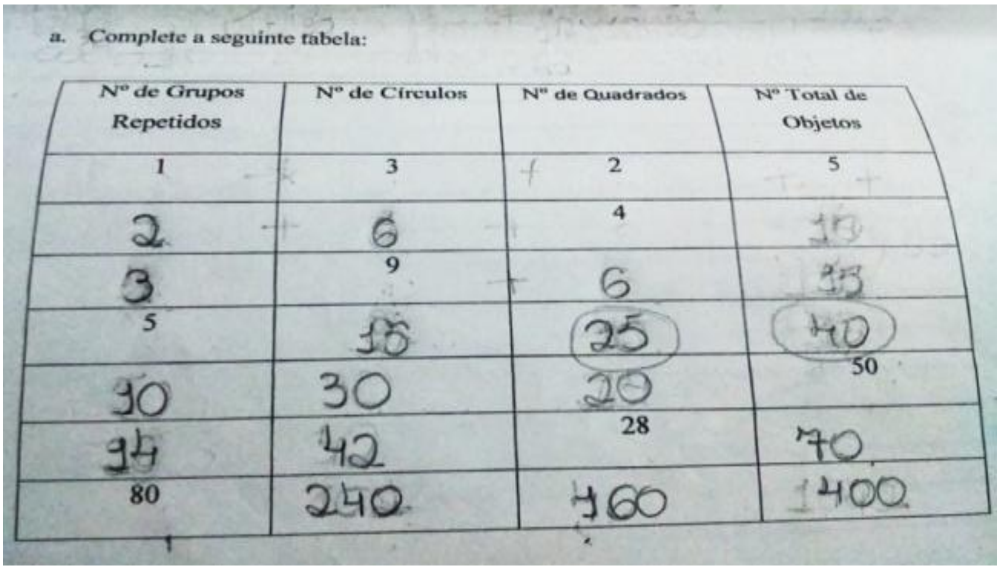
Para que os estudantes respondessem aos questionamentos, esperávamos que conseguissem inicialmente entender como a sequência estava sendo formada. Logo em seguida era preciso identificar o grupo de figuras (três círculos e dois quadrados) que se repete ciclicamente, para que, com essas informações, eles conseguissem identificar termos de ordens posteriores e completar a tabela na atividade.

Assim como na atividade anterior, esta sequência pôde ser representada fazendo uso de material concreto. Neste sentido, além da atividade impressa, foram utilizados círculos e quadrados feitos de EVA nas mesmas cores dos círculos e quadrados da sequência.

Em relação à questão (a), os estudantes teriam que preencher uma tabela que relacionava o número de grupos repetidos na sequência, número de círculos, número de quadrados e número total de objetos (soma da quantidade de círculos e de quadrados). Por exemplo, quando o número de grupos repetidos era 1, o número de círculos era 3, o número de quadrados era 2 e número total de objetos era 5.

Mesmo os estudantes precisando elaborar raciocínios mais abstratos para completar a tabela, cinco duplas (CD, EF, GX, KL, e QR) responderam corretamente e 4 duplas (AB, IJ, MN e OP) não conseguiram completá-la totalmente de forma correta, portanto, conseguiram desenvolver a atividade de forma parcialmente correta. Vejamos a figura 13 extraída da atividade da dupla IJ:

Figura 13 - Tabela da Atividade 2/ Dupla IJ



a. Complete a seguinte tabela:

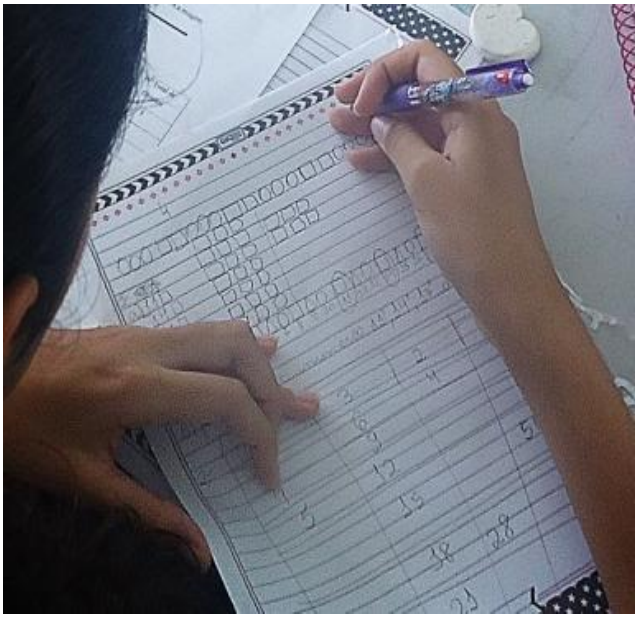
Nº de Grupos Repetidos	Nº de Círculos	Nº de Quadrados	Nº Total de Objetos
1	3	2	5
2	6	4	10
3	9	6	15
5	15	25	40
10	30	20	50
14	42	28	70
80	240	160	1400

Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador

É possível perceber que as sete primeiras linhas da tabela foram preenchidas corretamente. Entretanto, na 4ª linha são encontrados erros no número de quadrados e consequentemente no número total de objetos. Sendo 25 o número correto do total de objetos, inferimos que a dupla de estudantes se equivocou ao colocar esse valor no número de quadrados. Quantos às duplas OP e MN, ocorreram erros em números de grupos repetidos, número de círculos, número de quadrados e número total de objetos. Já a dupla AB, apresentou erros em números de grupos repetidos, número de círculos, e número total de objetos, não apresentado erros em número de quadrados.

Como um exemplo de estratégia de resolução, registramos a dupla GX que trabalhou na construção da tabela por meio de desenhos que dão continuidade à sequência, essa estratégia pode ser comprovada pela Figura 14.

Figura 14 - Estratégia da dupla GX



Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador

Quanto à questão (b), que solicitava que os estudantes explicassem como eles pensaram para construir a tabela, obtivemos respostas como as seguintes: “dando continuidade a sequência” (Sic); “usando operações”; “multiplicando números da sequência”; “é só contar a quantidade entre quadrados e círculos de um grupo somar o total de entre eles e concluir o total de objetos. E usar a multiplicação”; “o número de grupos multiplicado pelo número de círculos e quadrados que chega ao total de objetos”; entre outras respostas que seguem essa mesma linha de pensamento.

Durante a aplicação e a sistematização desta atividade, foi possível observar que a maioria das duplas iniciava dando continuidade à sequência por meio de desenhos ou faziam uso dos quadrados e círculos de EVA, para que, a partir de então, pudessem completar a tabela.

No entanto, uma vez que a tabela aborda quantidades variadas de grupos repetidos, para a opção de 80 grupos repetidos, a estratégia do desenho se tornaria inviável pelo total de objetos a serem desenhados. Assim, seria necessário que os estudantes buscassem outros meios de responder ao que foi pedido. Dessa forma, tendo em vista a quantidade cada vez mais alta de figuras que precisaria ser usada, os estudantes informaram que fizeram uso das operações, principalmente da multiplicação para encontrar a quantidade referente aos demais grupos. Quanto à escolha das linhas para iniciar o preenchimento da tabela, os estudantes as escolheram livremente e não foi feita nenhuma indicação por onde começar.

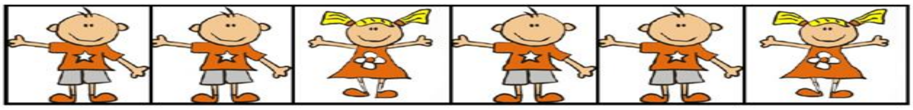
Em relação aos objetivos já expostos para esse nível, é possível afirmar que esta atividade suscitou a discussão e a reflexão necessárias para alcançá-los e proporcionou aos estudantes uma familiarização com os padrões por meio da sequência pictórica repetitiva usada na atividade. Todas as duplas de estudantes identificaram na sequência a unidade que se repete ciclicamente; conseguiram prever termos da sequência; identificaram os termos de ordens posteriores; deram continuidade à sequência por meio de desenhos; e foi discutido juntamente com o pesquisador e os estudantes o significado de sequência pictórica repetitiva durante o momento de sistematização da atividade.

3.1.3 Atividade 3 - Nível Introdutório

A atividade 3 é a última do nível introdutório. Tal atividade demanda dos estudantes uma maior atenção, ao trabalhar com maiores quantidades de termos e de grupos repetidos. O tempo de aplicação da atividade foi de 3 horas/aula (duas horas e quinze minutos), incluindo o desenvolvimento e a sistematização (dezoito minutos). A mesma foi adaptada de Vale et al (2011, p.17) e foi estruturada da como mostra a Figura 15.

Figura 15 – Atividade 3/ Nível Introdutório (continua)

Observe com atenção a seguinte sequência:



a. Se construirmos uma sequência com 71 meninos quantas meninas teremos? E quantos grupos repetidos?

b. Na trigésima posição encontra-se um menino ou uma menina?

c. Em uma sequência como esta, com 600 crianças, teremos quantos meninos e quantas meninas? Escreva como você pensou para responder este tópico.

d. Escreva alguma frase que explique aquilo que você concluiu sobre esta sequência.

Fonte: Atividade adaptada de Vale et al (2011, p.17)

Participaram desta atividade 16 estudantes organizados em oito duplas, sendo estas: AB; CD; FG; IJ; KL; MN;OP; e QR.

Quanto à questão (a), os estudantes precisavam saber que cada grupo que se repete na sequência é formado por dois meninos e uma menina. Se a questão pergunta sobre a quantidade de meninas quando esta sequência tiver 71 meninos, uma possibilidade seria multiplicar o número de meninos em cada grupo (que neste caso são dois meninos) por 35, que chegaríamos a 70 meninos. Entretanto, o número de meninas é 35 (já que a cada dois meninos temos uma menina). Tendo em vista que ao completar os 71 meninos, o ultimo grupo após os 35 grupos não precisou ser completado por mais um menino e uma menina, neste caso temos 35 grupos completos e um incompleto com apenas um menino. Assim, quando a sequência tiver 71 meninos, teremos 35 meninas e 35 grupos completos. Todas as oito duplas conseguiram responder de forma correta a questão (a).

Durante a sistematização, ao serem questionados sobre se ao completarem 71 meninos terão todos os grupos completos, a equipe IJ, respondeu que “não” e justificou dizendo: “vai ficar faltando um grupo, vai faltar um menino e uma menina”. A mesma equipe também expos o raciocínio usado ao responder a questão: “multipliquei duas vezes 35 que dava 70, mas ficava faltando 1, mas como passava se eu fizesse um número maior, aí eu deixei com 35”.

Podemos perceber que essa dupla, fez uso da multiplicação para solucionar o problema. Ao perceber que cada grupo possui dois meninos multiplicaram por 35 (número de grupos completos), e adicionaram mais um menino (um grupo incompleto), formando os 71 meninos, sabendo que a quantidade de meninas é uma por grupo, eles determinaram que essa quantidade era de 35.

A dupla AB informou que usou a divisão para chegar ao resultado: “dividi 70, como eram dois meninos, dividi 70 por dois que deu 35”. Neste caso, a equipe conseguiu determinar a quantidade de grupos e posteriormente determinar a quantidade de meninas. As demais duplas não declararam outros procedimentos durante a sistematização.

Na questão (b) perguntamos se na trigésima posição encontra-se um menino ou uma menina. Para este caso alguns caminhos são possíveis para chegar a uma resposta, por exemplo: os estudantes podem responder dando continuidade à sequência até chegar ao trigésimo termo; podem observar que quando a sequência chegar ao trigésimo termo teremos exatamente dez grupos repetidos, e sendo a menina o último elemento de cada grupo, na trigésima posição encontra-se uma menina; ainda poderiam pensar que, sendo a menina o terceiro termo, e como trinta é múltiplo de três, concluir que uma menina ocupa o trigésimo termo.

Todas as duplas conseguiram perceber que na trigésima posição se encontrava uma menina. Durante a sistematização, as duplas QR e KL afirmaram que para determinar que o trigésimo termo é uma menina, deram continuidade à sequência por meio de desenho. Já a dupla AB, informou que para responder tal questão, fizeram uso da multiplicação, e afirmaram: “multipliquei três por dez”. A dupla AB observou que o terceiro termo é uma menina, como eles precisavam saber qual o trigésimo termo, multiplicaram 3 por 10, chegando a trinta e assim concluíram que o trigésimo termo também é uma menina. As demais duplas não expuseram nenhum outro caminho para resolução.

Em relação à questão (c), o raciocínio usado na questão anterior pôde ser ampliado. É perguntado quantos meninos e quantas meninas teremos em uma sequência como esta, com 600 crianças. Usar a ideia que um grupo tem três crianças pode ser um ótimo ponto de partida. Neste sentido, para se chegar a 600 crianças, precisaríamos multiplicar a quantidade 3(termos em cada grupo) por 200, assim chegaríamos a 600 crianças, mas se cada grupo tem dois meninos e uma menina, em duzentos grupos (equivale a 600 crianças), teremos 200 vezes dois meninos, chegando a um total de quatrocentos meninos, e 200 vezes uma menina, chegando a um total de duzentas meninas.

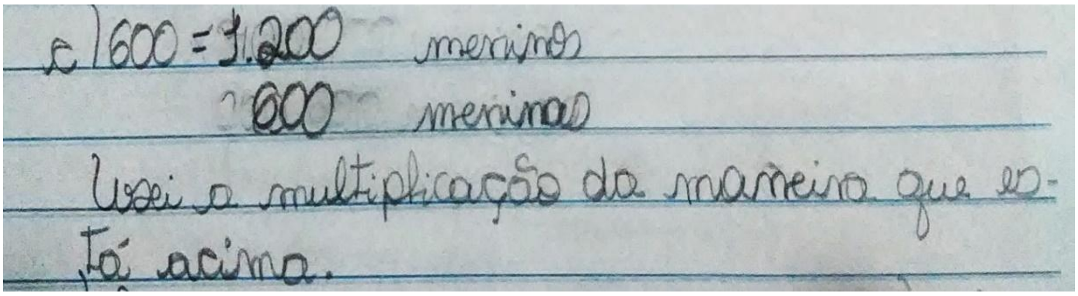
Das oito duplas de estudantes, apenas a dupla IJ não conseguiu identificar a quantidade correta de meninos e meninas. As sete equipes conseguiram perceber que em uma sequência com 600 crianças teremos 400 meninos e 200 meninas. Quanto à justificativa dada pelas duplas, para tal resposta, tivemos as seguintes afirmações:

- Dupla AB: “Se a ordem é 2 meninos e 1 menina é só multiplicar o número de meninos e meninas e depois somar”;
- Dupla CD: “desenhado a sequência até chegar a 600”;
- Dupla FG: “é so multiplicar”; (Sic)
- Duplas KL e QR: “multiplicando”.

Percebemos que, as duplas AB, FG, KL e QR fizeram uso da multiplicação para responder o problema, entretanto, a dupla AB confunde ordem com grupo, ao afirmar que “a ordem é 2 meninos e 1 menina”. Já a equipe CD, apresentou uma forma de resolução fazendo uso de desenhos para dar continuidade à sequência e determinar as quantidades de meninos e meninas, entretanto, esse raciocínio pode não ser útil para grandes quantidades de termos. As duplas MN e OP não apresentaram justificativas para suas respostas.

A equipe IJ não conseguiu chegar à resposta correta. A mesma respondeu como mostra a Figura 16.

Figura 16 - Resposta da dupla IJ para a questão (c)



Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador

É possível perceber, que a dupla multiplica 600 por 2, chegando a 1.200 e também 600 por 1 resultando em 600. Constatamos que a dupla confundiu a quantidade de crianças, que é 600, com grupos, e imaginou 600 grupos e não 600 crianças. Chegando a um total de 1.200 meninos e 600 meninas.

Em relação à questão (d), foi pedido que os estudantes escrevessem alguma frase que explicasse aquilo que concluíram sobre esta sequência. Vejamos algumas afirmações feitas pelas duplas de estudantes:

- Dupla AB: “A atividade foi muito fácil”;
- Dupla CD: “Eu achei um pouco ruim fazer a letra c, mas as outras estavam fáceis”;
- Dupla FG: “É só repetir o conjunto até chegar ao resultado”;
- Dupla IJ: “Que na resposta da sequência (a) falta um componente no grupo para dar o resultado correto”;
- Dupla OP: “2 duas menina vale por 4 quatro menino”. (Sic)

A dupla AB fez uma afirmação sobre sua percepção da atividade. A dupla CD, assim como a AB, se refere à atividade e não à sequência, entretanto, salienta que teve dificuldade ao responder a questão (c). Vale lembrar que nesta questão a dupla afirmou ter desenhado 600 crianças para determinar a quantidade de meninos e meninas em uma sequência com 600 termos. A equipe FG, ressalta a questão da repetição para chegar ao resultado dos problemas, isso está ligado à percepção e identificação dos grupos dentro da sequência pictórica repetitiva. Já a equipe IJ lembra o fato de na questão (a), ter trabalhado com 35 grupos completos e um incompleto. Por fim, inferimos que a dupla OP tenha percebido que a cada duas meninas temos quatro meninos na sequência. As duplas MN e Kl não apresentaram respostas.

Em síntese, acreditamos ter alcançado nosso objetivo geral, de proporcionar aos estudantes uma familiarização com os padrões por meio de sequências pictóricas repetitivas. Está claro que os objetivos citados para cada uma das atividades foram atingidos, os quais foram expostos e discutidos anteriormente. Na sequência traremos as considerações sobre o nível intermediário de nossa sequência didática.

3.2 O Nível Intermediário da Sequência Didática

Assim como no nível introdutório, o nível intermediário de nossa sequência didática é composto por um conjunto de três atividades. Para esta, segundo o Quadro 2, tínhamos como objetivo geral: identificar e dar continuidade a padrões para estabelecer generalizações. E como objetivos específicos: identificar a forma como o padrão está sendo gerado; estabelecer relações entre termos e suas respectivas ordens; dar continuidade à sequência e prever termos de ordens posteriores; traçar relações entre sequências pictóricas e sequências numéricas; e realizar generalizações com base nas características dos padrões.

Para o desenvolvimento das atividades do nível intermediário, foram necessárias 7 horas/aula, incluindo os momentos de desenvolvimento e sistematização das atividades (sendo aproximadamente trinta minutos para sistematização). As atividades deste nível encontram-se no Apêndice B.

A média de estudantes que desenvolveram a sequência didática neste nível foi de dezoito por atividade. A seguir apresentaremos e discutiremos cada uma das atividades do nível intermediário de nossa sequência didática.

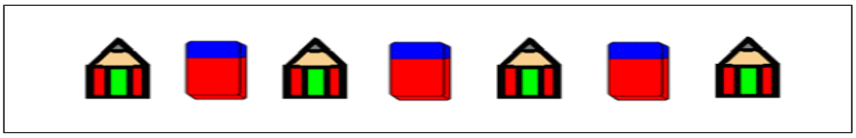
3.2.1 Atividade 1 - Nível Intermediário

A primeira atividade do nível intermediário foi aplicada com um total de dezesseis estudantes organizados em oito duplas (AB, CD, FG, IJ, KL, MN, OP, e QR). Tal atividade teve a duração de uma hora/aula incluindo seu desenvolvimento e a sistematização (sete minutos). A atividade foi adaptada de Ponte; Branco; Matos (2009, p.48) .Vejamos na Figura 17 como a atividade foi estruturada.

Figura 17 – Atividade 1/ Nível Intermediário

Atividade 1: Sequência dos lápis e das borrachas. Atividade adaptada de Ponte; Branco; Matos (2009, p. 48)

Observe a seguinte sequência:



a. Existe alguma relação entre as figuras e a posição que elas ocupam na sequência? Justifique.

b. Você consegue associar a posição que os lápis estão ocupando a alguma sequência de números?

c. E sobre a posição que as borrachas ocupam, o que você consegue afirmar?

Fonte: Atividade adaptada de Ponte; Branco; Matos (2009, p.48)

Quanto à questão (a), que pergunta se existe alguma relação entre as figuras (termos) e a posição (ordem) que elas ocupam na sequência, uma possível relação que os estudantes poderiam citar, seria o fato dos lápis ocuparem as ordens ímpares e as borrachas ocuparem as ordens pares. Esta atividade pretende contemplar, principalmente, os objetivos de identificar a forma como o padrão está sendo gerado e de estabelecer relações entre termos e suas respectivas ordens.

Das oito duplas que responderam a questão (a), seis (CD, FG, IJ, KL, OP e QR) afirmaram existir uma relação entre as figuras e a posição que elas ocupam na sequência; uma (AB) afirmou não existir essa relação; e uma (MN) apenas identificou a alternância das figuras e que tem um lápis a mais que uma borracha. Vejamos a seguir as respostas dadas pelas duplas de estudantes:

- Dupla AB: "Não existe relação entre as figuras porque um é um lápis e o outro é uma borracha";
- Dupla MN: "Por que os grupos estão certo de lápis e borracha também sobrou um lápis";
- Dupla CD: "Sim. Por que todas estão seguindo uma sequência";
- Dupla FG: "Sim, por que a repetição das figuras"; (Sic)
- Dupla IJ: "Sim. Que na sequência a quantidade dos componentes são iguais, sendo: um lápis e uma borracha; repetidamente";
- Dupla Kl: "Sim. Porque estão em sequência lápis borracha";
- Dupla OP: "Sim, cada lápis uma borracha";
- Dupla QR: "Sim; pois a cada lápis tem uma borracha".

A dupla AB se equivocou ao informar não existir relação. A dupla MN conseguiu identificar o grupo (lápis e borracha) que está se repetindo ciclicamente na sequência, inclusive verificou que na figura da atividade o último grupo não está completo, mas não afirma a existência de uma relação entre ordem e termo. Já as duplas CD, FG, IJ, KL, OP e QR conseguiram afirmar que existe uma relação, mas ao justificarem apenas mencionaram características da sequência, como o fato de as figuras estarem seguindo uma sequência, a repetição das figuras e que a cada lápis tem uma borracha.

A questão (b) busca encaminhar os estudantes a traçarem ligações entre uma sequência pictórica e uma sequência numérica. Dessa forma, poderíamos associar a posição que os lápis ocupam com a sequência numérica formada pelos números ímpares.

Das oito duplas que participaram desta atividade, apenas a dupla CD conseguiu associar a posição que os lápis ocupam na sequência com a sequência dos números ímpares, tal dupla afirmou: "Sim, os lápis associam os números impares". Quantos as demais duplas, nenhuma delas conseguiu estabelecer essa relação. Vejamos o que as demais duplas responderam:

- Dupla AB: "Não";
- Dupla FG: "Sim, é uma sequência de um lápis e uma borracha ai vai se repetindo";
- Dupla IJ: "Posição de número 1 ou 1º posição";
- Dupla KL: "Sim, porque estão três grupos é um lápis";
- Dupla MN: "Não por que está seguindo a sequência";
- Duplas QR e OP: "O lápis e o dobro da borracha"

Em relação à questão (c), os estudantes foram questionados sobre o que eles conseguem afirmar em relação à posição que as borrachas ocupam na sequência. Essas afirmativas deveriam ser feitas baseadas na forma como a sequência foi organizada. Das oito duplas de estudantes, três conseguiram apresentar uma relação entre as borrachas e suas respectivas ordens. A dupla CD conseguiu perceber que as borrachas ocupam ordens que sempre são números pares, já as duplas OP e QR, perceberam que as borrachas estão seguindo ordens que são múltiplos de dois. As duplas AB, FG, IJ, KL e MN não conseguiram determinar uma relação entre os termos (borracha) e as ordens.

É possível perceber que existe uma grande semelhança entre os itens (b) e (c), sendo que no (b) os estudantes são questionados sobre a posição que os lápis ocupam na sequência e no (c) os estudantes foram questionados sobre o que eles conseguem afirmar em relação à posição que as borrachas ocupam na sequência. Entretanto, o número de duplas que conseguiu responder corretamente a questão (c) foi maior que o número de duplas que respondeu corretamente a questão (b). Provavelmente, os estudantes conseguiram traçar mais facilmente a relação entre a posição das borrachas com os números pares, do que a posição dos lápis com os números ímpares.

Muitas duplas apresentaram dificuldades ao responder esta primeira atividade do nível intermediário. O principal problema observado foi o fato de os estudantes não compreenderem que na sequência abordada na atividade, é possível estabelecer relações entre os termos e suas respectivas ordens. Ou ainda, quando reconhecem a existência de relações, não conseguem determiná-las.

Durante a sistematização, o pesquisador discutiu a atividade detalhadamente com os estudantes, frisando os conceitos de termo e de ordem e das relações que podem ser estabelecidas entre estes. Também foi discutido que os lápis ocupam ordens representadas por números ímpares e as borrachas ordens representadas por número pares, e que estas posições (ordens), podem ser associadas tanto à sequência dos números pares quanto dos números ímpares.

Esta primeira atividade do nível intermediário contemplou os objetivos específicos de: estabelecer relações entre termos e suas respectivas ordens; e traçar relações entre sequências pictóricas e sequências numéricas.

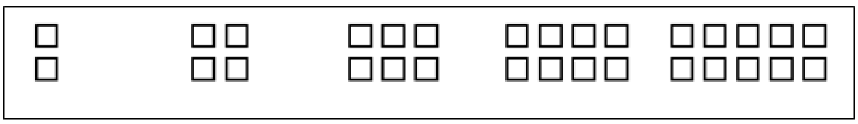
3.2.2 Atividade 2 - Nível Intermediário

A segunda atividade pertencente ao nível intermediário da sequência didática foi desenvolvida com um total de dezoito estudantes, organizados em nove duplas sendo elas: AB; CD; FG; IJ; KL; MR; NS; OP e QT. O tempo de aplicação da atividade foi de 3 horas/aula, sendo onze minutos utilizados para discussão e sistematização com o pesquisador. A atividade foi baseada em uma sequência trazida por Ponte; Branco; Matos (2009, p.52), mas os itens foram montados pelo pesquisador. Vejamos na Figura 18 como a atividade foi estruturada.

Figura 18 - Atividade 2/ Nível Intermediário (Continua)

Atividade 2: Sequência pictórica

Observe a seguinte sequência:



(PONTE; BRANCO; MATOS, 2009, p. 52)

Figura 18 - Atividade 2/ Nível Intermediário (Continuação)

a. Em algum momento esta sequência apresentará um número ímpar de quadrados? Justifique.

b. Existe alguma relação entre cada termo e sua respectiva ordem? Qual relação?

c. Quantos quadrados terá a figura da vigésima ordem?

d. Você consegue relacionar alguma sequência de números às figuras que aparecem nesta sequência?

e. Indique por escrito a forma como esta sequência está sendo gerada?

f. Com base no item anterior, quantos quadrados terá o centésimo termo desta sequência?

Fonte: Atividade adaptada de Ponte; Branco; Matos (2009, p.52)

A questão (a) indaga se em algum momento a sequência apresentará um número ímpar de quadrados. Para responder a esta questão, os estudantes precisam observar como a sequência está sendo gerada. Os termos da sequência são formados por quadrados, partindo do primeiro termo que possui dois quadrados e aumentando de dois em dois quadrados a cada termo. Neste sentido, os termos da sequência vão sempre apresentando um número par de quadrados, já que todos os termos são múltiplos de dois.

Todas as nove duplas conseguiram perceber que em nenhum momento a sequência apresentará um número ímpar de quadrados. Vejamos o que oito das duplas de estudantes responderam e como justificaram esse fato:

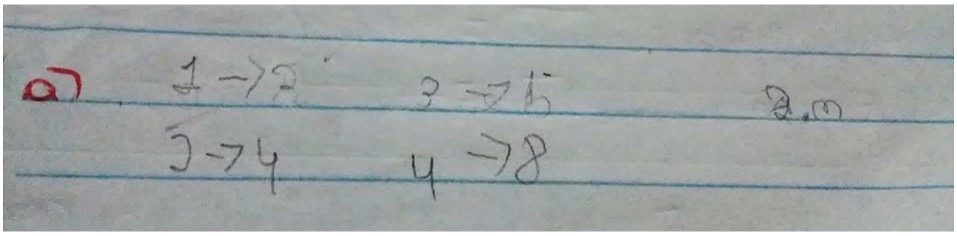
- Dupla AB: “Nem um porque as sequencia são de dois em dois.”; (Sic)
- Dupla CD: “Não. Porque a sequências está representa por números pares.”; (Sic)
- Dupla FG: “Não, porque começou com um número par e vai acabar com um número par.”;
- Dupla IJ: “Não. Pois 2 é par, e a sequência é feita de mais 2 quadrados sem parar.”;
- Dupla KL: “Não, porque a sequência vai pulando só nos números pares”;
- Dupla MR: “Ésta sequência so apresenta números pares.”; (Sic)
- Dupla NS: “Não, porque são todos pares.”;
- Dupla QT: “Não, pois está representado em múltiplo de 2.”.

De maneira geral, é possível perceber que todas estas duplas conseguiram trazer justificativas coerentes com o que estava sendo questionado. Muitas das justificativas são semelhantes, tais como as duplas CD, FG, KL, MR, e NS se apoiaram principalmente no fato de que a sequência só apresenta números pares; as duplas AB e IJ justificaram se baseando na formação da sequência, tendo em vista que ela aumenta de dois em dois; já a dupla QT, observou o fato de a sequência ser formada apenas por múltiplos de dois, o que implica em não apresentar números ímpares.

Observa-se que nas respostas das duplas FG e IJ, a primeira percebe que a sequência é limitada superiormente ao afirmar que “vai acabar com um número par”, o que não está correto, tendo em vista que a mesma é crescente e limitada apenas inferiormente pelo primeiro termo que é formado por dois quadrados, sendo ilimitada superiormente. Já a dupla IJ percebe o fato de ser ilimitada superiormente, uma vez que eles entenderem a sequência como “feita de mais 2 quadrados sem parar”.

A resposta da dupla OP, não foi transcrita acima, pois preferimos trazê-la por meio de uma figura, já que está foi a única dupla que apresentou uma resposta numérica. Observando a figura 19, percebe-se que a dupla OP verificou que o primeiro termo é formado por dois quadrados, o segundo termo é formado por quatro quadrados, o terceiro termo é formado por seis quadrados e o quarto termo é formado por oito quadrados.

Figura 19 – Resposta da Dupla OP para questão (a)



Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador

Além disso, a dupla escreveu os termos da sequência na forma “2.n”. Se os termos são da forma “2.n”, significa que são múltiplos de dois e que também são pares, logo que não terá números ímpares de quadrados na sequência. Esta dupla avança em pensamento algébrico ao apresentar uma representação algébrica para os números pares, com base na observação da sequência.

Ainda referente à questão (a), foi possível constatar que todos os estudantes conseguiram responder de maneira satisfatória. Apenas a dupla FG, mesmo percebendo que não teria números ímpares de quadrados, se equivocou ao afirmar que a sequência "começou com um número par e vai acabar com um número par", trazendo um sentido de que a sequência é limitada superiormente. Foi verificado, também, que todas as duplas fizeram claramente a associação de sequência pictórica formada sempre por um número par de quadrados com a sequência numérica dos números pares. Tal ligação pode ser verificada em todas as falas e também no registro da Figura 19. Vale destacar que nenhuma das duplas escreveu "número par de quadrados", escrevendo apenas "número par" ou "números pares", ou na Figura 19 estando a quantidade de quadrados representada apenas por números.

Em relação à questão (b), a resposta esperada é que existe uma relação entre os termos e suas respectivas ordens. Uma relação que os estudantes poderiam identificar seria de que cada termo possui exatamente a quantidade de quadrados igual ao dobro do número da ordem.

Das nove duplas de estudantes, oito duplas (AB, CD, FG, IJ, KL, NS, OP e QT) afirmaram que existe uma relação entre os termos e suas respectivas ordens. Já a dupla MR não trouxe uma resposta clara, nem afirmou a existência de nenhuma relação. Mesmo as oito duplas trazendo respostas afirmativas relacionadas à existência de uma relação entre os termos e suas respectivas ordens, nenhuma delas conseguiu identificar a relação mencionada no parágrafo anterior, de que cada termo possui exatamente o dobro do número da ordem que a quantidade de quadrados. As justificativas das oito duplas foram as seguintes:

- Dupla AB: "Sim, porque termo em paris"; (Sic)
- Dupla CD: "Sim, porque todos os termo aumenta dois quadrado";
- Dupla FG: "Sim, a ordem vai de 2 em 2";
- Dupla IJ: "Sim, porque a ordem é de dois em dois; E sempre repete mais dois quadrados";
- Dupla KL: "Sim, cada respectiva adiciona dois quadrados";
- Dupla NS: "Sim, dois e dois";
- Dupla OP: "Sim, dois em dois";
- Dupla QT: "Tem, que todos são pares".

Todas as justificativas não fazem relação entre ordem e termo. As duplas conseguiram apenas apontar características relativas ao modo como a sequência está sendo formada, relacionando a quantidade de quadrados do termo anterior com o seguinte. Neste sentido, nenhuma das duplas conseguiu trazer uma justificativa adequada ao que estava sendo questionado.

A questão (c) pergunta quantos quadrados terá o vigésimo termo da sequência. Existem variadas possibilidades para chegar à resposta, entretanto, podemos citar algumas: os estudantes podem determinar o vigésimo termo da sequência dando continuidade por meio de desenhos. Entretanto, esperamos que os estudantes já consigam usar métodos mais abstratos e criativos para isso; os estudantes podem determinar a quantidade de quadrados dando continuidade à sequência mentalmente; ou, se os estudantes já tiverem observado que cada termo possui exatamente o dobro do número da ordem em quantidade de quadrados, eles podem apenas multiplicar 20 por 2 e encontrar que o vigésimo termo possui exatamente quarenta quadrados.

Das nove duplas que participaram da atividade, apenas a dupla IJ não identificou que a figura de vigésima ordem apresentará quarenta quadrados. Tal dupla afirmou que o termo de vigésima ordem terá vinte quadrados, o que não está de acordo com o fato de que cada termo possui o dobro de quadrados de sua respectiva ordem.

Mesmo não tendo identificado a relação existente entre ordem e termo, questionada no item (b), todas as duplas que responderam corretamente, afirmaram, durante o momento de sistematização da atividade, que responderam a questão (c), tomando por base o fato de que o número de quadrados de cada termo é o dobro do número da respectiva ordem, nenhuma delas afirmou ter dado continuidade à sequência para chegar ao resultado.

No tocante à questão (d), os estudantes precisavam traçar uma relação entre os termos da sequência e uma sequência numérica. Como todos os termos da sequência são formados por número pares de quadrados, iniciando de forma crescente a partir do número dois, poderíamos relacionar a quantidade de quadrados dos termos à sequência numérica 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18..., que é sequência dos números pares.

As duplas AB, CD e FG, conseguiram relacionar a sequência pictórica trazida na questão com a sequência numérica dos números pares. Entretanto, a dupla FG, relacionou apenas as ordens trazidas na questão, apresentando apenas cinco ordens da sequência numérica, e não usou as reticencias para indicar que a sequência cresce ilimitadamente Isso mostra que algumas duplas já conseguem abstrair a ideia de sequencia infinita, mesmo vendo sua limitação no desenho. É uma forma de pensamento que pode ser desenvolvida à medida que se trabalha com sequências infinitas. Vejamos o que as duplas afirmaram:

- Dupla AB: “Sim: 2,4,6,8,10...” ;
- Dupla CD: “sequência dos números pares.”;
- Dupla FG: “2,4,6,8,10”.

As duplas IJ, OP e QT, perceberam a ligação entre a sequência pictórica e uma sequência numérica, entretanto, apresentaram em forma de representação numérica a ligação com a sequência dos números pares. Todas as duplas citadas fizeram menção à característica da sequência aumentar de dois em dois quadrados. Vejamos o que as duplas afirmaram:

- Dupla IJ: “Sim. Dois em dois”;
- Dupla OP: “Dois em dois e dois”;
- Dupla QT: “aumenta de dois em dois”.

A dupla KL apenas afirmou que “sim”, ou seja, que conseguia relacionar a sequência pictórica a uma sequência numérica, mas não justificou nem apontou que sequência seria essa. Quanto às duplas MR e NS, as mesmas informaram que não conseguiram fazer a associação.

A questão (e) solicita que os estudantes indiquem por escrito a forma como a sequência está sendo gerada. Nesta questão os estudantes podem expressar em língua materna o que eles observaram e concluíram sobre a formação/estruturação/organização da sequência. Isso servirá de base para que posteriormente eles consigam utilizar também a linguagem algébrica por meio de uma expressão algébrica, que represente uma Função Polinomial do Primeiro Grau que relaciona as variáveis ordem (variável independente) e termo (variável dependente). Vejamos o que as duplas afirmaram quanto à questão (e):

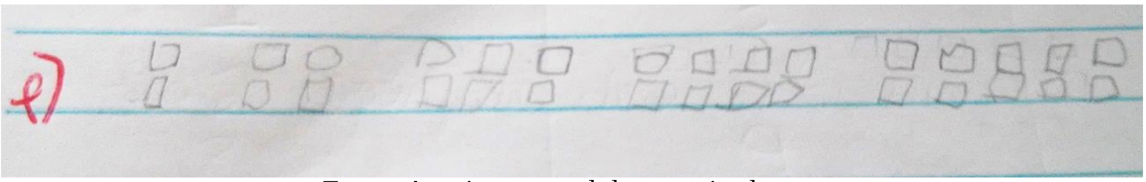
- Duplas AB e CD: “De 2 em 2”;
- .Dupla FG: “A sequência é gerada em dois em dois em dois, cada vez que vai crescendo vai aumentando dois quadrados.”;
- Dupla IJ: “2 + 2 + 2 e assim sucessivamente.”;
- Dupla KL: “Está sendo gerada a parti de dois quadrados.”; (Sic)
- Duplas MR e NS: “A sequência de dois, quatro, seis, oito e des.”; (Sic)
- Dupla QT: “Em múltiplos de 2.”

As duplas AB, CD, FG, IJ e QT conseguiram descrever o modo como a sequência estava sendo gerada, considerando que a mesma aumenta de dois em dois quadrados e todas essas quantidades de quadrados são quantidades representadas por números múltiplos de dois. A dupla KL afirmou que a sequência “Está sendo gerada a parti de dois quadrados”, o que traz certa ambiguidade, tendo em vista que não fica claro se queriam afirmar que a sequência apenas iniciava com dois quadrados, ou se a sequência crescia de dois em dois quadrados.

Quanto às duplas MR e NS, ocorreu um fato curioso, pois, ao serem questionadas se conseguiam associar a sequência pictórica a alguma sequência numérica, na questão (d), ambas afirmaram que não. Entretanto, diante da pergunta (e), relacionada à forma como a sequência está sendo gerada, as mesmas duas duplas estabeleceram a relação com a sequência dos números pares, para informar como a sequência estava sendo gerada. Provavelmente, o questionamento sobre como a sequência estava sendo gerada, fez com que as duplas refletissem e percebessem a relação entre ela e a sequência dos números pares.

Já a dupla OP, não trouxe uma resposta por escrito para a questão (e). Sua resposta consistiu em apenas trazer novamente em forma de desenho a sequência pictórica, tal qual constava no material impresso entregue às duplas. Vejamos a Figura 20 que ilustra esta situação.

Figura 20 – Resposta da Dupla OP para questão (e)



Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador

O último item desta atividade, o item (f), traz o questionamento sobre a quantidade de quadrados que terá no centésimo termo. Tal questão praticamente impossibilita a resolução por meio de desenhos, tendo em vista a enorme quantidade de quadrados que seria necessário desenhar para dar continuidade á sequência. Neste sentido os estudantes poderiam mais uma vez usar o fato de que a quantidade de quadrados de cada termo é o dobro do número da ordem e, assim, chegarem à resposta.

Das nove duplas que responderam à atividade, oito delas conseguiram identificar que o centésimo termo desta sequência será formado por exatamente duzentos quadrados. Apenas a dupla NS, se equivocou e afirmou que o centésimo termo terá cem quadrados. Novamente, as duplas justificaram durante o momento de sistematização, que chegaram à resposta observando que o número de quadrados de cada termo é o dobro do número da respectiva ordem, neste sentido, se a ordem é cem o termo terá duzentos quadrados.

Esta segunda atividade do nível intermediário buscou trabalhar os objetivos específicos de: identificar a forma como o padrão está sendo gerado; estabelecer relações entre termos e suas respectivas ordem; permitir que os estudantes deem continuidade à sequência e que possam prever termos de ordens posteriores; e traçar relações entre sequências pictóricas e sequências numéricas. Mesmo que algumas das duplas tenham cometido alguns equívocos, os quais já foram apontados e discutidos, consideramos que esses objetivos foram alcançados, tendo em vista que a grande maioria das questões foi respondida de forma satisfatória e coerente com o que estava sendo pedido. Os equívocos mencionados foram discutidos e esclarecidos em conjunto com todas as duplas durante o momento de sistematização da atividade.

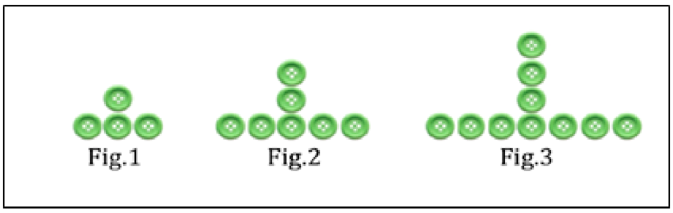
3.2.3 Atividade 3 - Nível Intermediário

A terceira atividade que compõe o nível intermediário da sequência didática foi aplicada com um total de vinte e dois estudantes, organizados em onze duplas sendo elas: AB; CD; ES; FG; JY; KL; MN; OP; QT; UV; e WX. O tempo de aplicação da atividade foi de 3 horas/aula, sendo de dez minutos o tempo usado para a sistematização com o pesquisador. A atividade foi adaptada a partir de Vale et al (2011, p. 21), mas as questões foram criadas pelo pesquisador. A Figura 21 mostra como a atividade foi estruturada.

Figura 21 – Atividade 3/ Nível Intermediário (continua)

Atividade 3: Sequência dos botões

-Observe a seguinte sequência formada por botões:



(VALE; PIMENTEL; ALVARENGA; FÃO, P. 21)

Figura 21 - Atividade 3/ Nível Intermediário (continuação)

a. Complete uma tabela que relaciona a ordem à quantidade de botões em cada termo.

Ordem	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Quantidade de botões										

b. Qual quantidade de botões que é acrescentada de um termo para o seguinte?

c. Indique por escrito a forma como esta sequência está sendo gerada.

d. Identifique uma expressão algébrica que lhe permita calcular o número de botões para qualquer ordem.

Fonte: Atividade adaptada a partir de Vale et al (2011, p. 21)

Em relação à questão (a), espera-se que os estudantes por meio da observação da sequência pictórica formada por botões, consiga preencher a tabela que relaciona a ordem com a quantidade de botões nos termos. Tendo em vista, que a sequência trazida no material impresso só mostra até o terceiro termo, os estudantes precisam observar como os termos da sequência estão sendo gerados e o que muda de um termo para o termo seguinte para, assim, conseguir identificar os termos de ordens posteriores e completar a tabela.

Esta atividade é a primeira a propor a tabela como forma de organizar a relação existente entre ordem e termo, relação esta, que os estudantes tiveram dificuldades em identificar, na questão (b) da segunda atividade deste nível.

As duplas AB, CD, ES, FG, JY, KL, OP, QT e WX conseguiram completar a tabela corretamente. Vejamos na Figura 22, a resposta escolhida de forma aleatória, de uma dessas duplas, a dupla CD. As duplas citadas conseguiram responder a tabela desta mesma maneira.

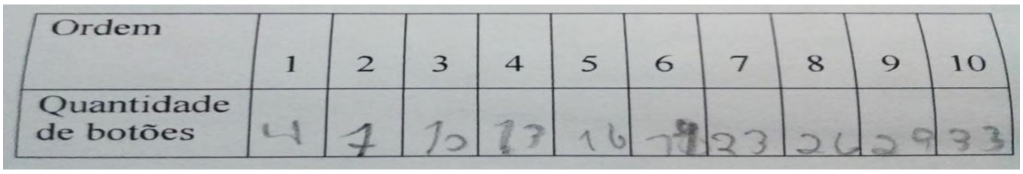
Figura 22 - Tabela preenchida pela dupla CD

Ordem	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Quantidade de botões	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31

Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador

As duplas MN e UV, não conseguiram preencher a tabela corretamente. Entretanto, nos dois casos, os erros foram distintos. Vejamos, nas Figuras 23 e 24, as tabelas preenchidas por estas duplas:

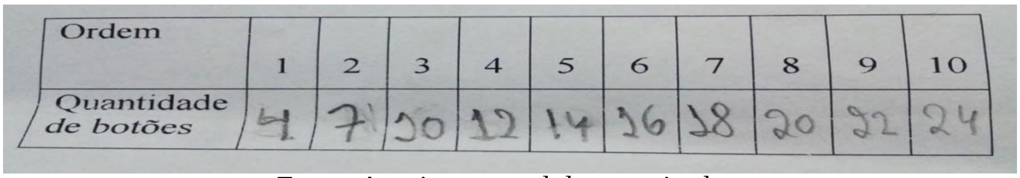
Figura 23 – Tabela preenchida pela dupla MN



Ordem	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Quantidade de botões	4	7	10	13	16	19	23	26	29	33

Fonte: arquivo pessoal do pesquisador

Figura 24 – Tabela preenchida pela dupla UV



Ordem	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Quantidade de botões	4	7	10	12	14	16	18	20	22	24

Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador

A dupla MN iniciou o preenchimento da tabela corretamente. É possível verificar que a mesma percebeu que de um termo para o termo seguinte são acrescentados três botões, entretanto ao preencher a quantidade de botões referentes à sétima ordem, a dupla errou o cálculo, ao somar 19 com 3 para obter a quantidade de quadrados da ordem seguinte, a dupla se equivocou e teve como resposta 23 (19 + 3 = 23) em vez de 22. A partir daí a dupla continuou somando três ao número de botões da ordem anterior, mas pelo erro cometido, todas as quantidades seguintes continuaram apresentando erro. Chegando a nona ordem na tabela, a dupla afirmou que a quantidade de botões é de 29, entretanto ao somar com 3 para indicar a décima ordem, a dupla erra novamente e traz como resposta 33 (29 + 3 = 33), o que nos sugere que o erro ocorreu por dificuldades na soma de 9 + 3.

Já a dupla UV, preencheu corretamente a tabela até o terceiro termo, justamente os termos trazidos na sequência no material impresso. Entretanto, a dupla não percebeu que de um termo para o termo seguinte são acrescentados três botões. A mesma preencheu a tabela posteriormente a terceira ordem, como se de um termo para o seguinte fossem acrescentados apenas dois botões, isso ocasionou o erro da referida dupla.

Em relação à questão (b), que apenas questionava sobre a quantidade de botões que era acrescentada de um termo para o termo seguinte, esperávamos que os estudantes, observando a sequência, identificassem que de um termo para outro são adicionados três botões. Todas as duplas de estudantes conseguiram responder a questão de maneira correta. Até mesmo a dupla UV, que completou a tabela como se fossem adicionados dois botões de um termo para o termo seguinte, ao responder a questão (b), afirmou que são acrescentados três botões, e não dois. Mesmo assim, a dupla não corrigiu o erro do item anterior.

No tocante à questão (c), era solicitado aos estudantes, que os mesmos indicassem por escrito a forma como a sequência foi gerada. Esperávamos que os estudantes percebessem o fato da sequência pictórica respeitar uma lógica de formação: a partir do primeiro termo, formado por três botões, são acrescentados mais três botões no termo seguinte, entretanto, estes três botões não são acrescentados de maneira aleatória, sempre são adicionados partindo do termo anterior, um botão do lado direito, um botão do lado esquerdo e um botão acima.

Vejamos a seguir, o que cada uma das duplas afirmou sobre o modo como a sequência está sendo gerada:

- Dupla AB: “De 3 em 3”;
- Dupla CD: “Está sendo gerada de forma crescente de 3 em 3 números começando por 4, 7, 10 e assim por diante.”;
- Dupla ES: “Ela está sendo somada de 3 em 3 botões e cada termo”;
- Dupla FG: “Esta sequência é gerado por 3 em 3 botões”;
- Dupla JY: “A sequência está sendo gerada de número ímpares e pares”;
- Dupla KL: “por números pares e impas.”; (Sic)
- Dupla MN: “Está gerada por botões”;
- Dupla OP: “4+3+3+3+3”;
- Dupla QT: “A sequência está sendo gerada com um número mais três.”;
- Duplas UV e WX: “3+3+3+3”.

A dupla AB afirma que a sequência está sendo gerada “de 3 em 3”, entretanto, não informa o ponto inicial da sequência, e também não menciona que esse “3 em 3” é relacionado a três em três botões, já que a sequência proposta na atividade é uma sequência pictórica.

A dupla CD estabelece em sua resposta uma relação entre a sequência pictórica da atividade e a sequência numérica 4, 7, 10... . Também é mencionado pela dupla que a sequência é crescente e ainda que aumenta de três em três. Entretanto, a ligação que a referida dupla estabelece entre a sequência pictórica e a sequência numérica permite, de acordo com a sua resposta, perceber a identificação de ambas como uma só sequência, não considerando o fato de a sequência pictórica ser formada por figuras, em particular, a sequência em estudo é composta por botões dispostos segundo um determinada lógica de formação. A referida dupla demonstrou certo grau de abstração, uma vez que ela não necessita mais dos botões para pensar sobre a sequência.

As duplas ES e FG não mencionam a quantidade de botões do primeiro termo, mas conseguiram perceber que a sequência vai crescendo a partir da adição de três em três botões de uma ordem para a seguinte.

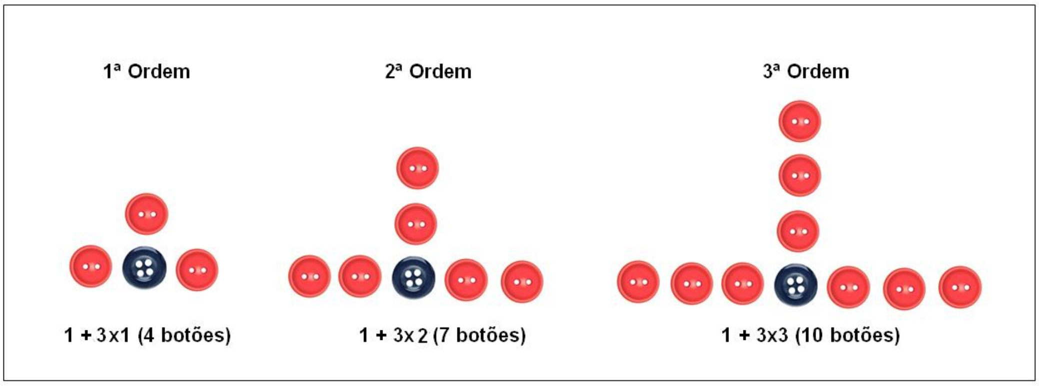
As duplas JY e KL, assim como a dupla CD, associa a sequência pictórica a uma sequência numérica. Com base nisso, as duplas JY e KL, afirmaram que a sequência é formada por números ímpares e números pares. Realmente as quantidades de botões dos termos da sequência se alternam entre quantidades ímpares e quantidades pares, mas apenas afirmar que a sequência é formada por números ímpares e números pares não descreve correta e completamente a forma como a sequência pictórica é gerada.

A dupla MN se ateve apenas a afirmar que a sequência é gerada por botões, mas não apontou especificamente nenhum detalhe sobre a disposição dos botões nos termos da sequência.

As duplas UV e WX representaram a formação da sequência pictórica, por meio da adição de "3+3+3+3". Contudo, a dupla OP foi mais coerente, ao colocar o quatro como porto de partida e escrever a formação da sequência como sendo "4+3+3+3+3". Em todos estes casos, novamente a sequência pictórica é totalmente relacionada com uma sequência numérica, tendo em vista que as duplas não afirmam que estas adições são adições de botões e não só de números. Neste mesmo sentido, a dupla QT afirmou que "a sequência está sendo gerada com um número mais três".

A questão (d), ultima questão da terceira atividade do nível intermediário, solicita aos estudantes, que os mesmos identifiquem uma expressão algébrica que lhe permita calcular o número de botões para qualquer ordem, ou seja, a quantidade de botões em cada termo, de acordo com sua respectiva ordem. Para tanto, os estudantes precisariam estar baseados na sequência pictórica, nas suas características e no modo como a mesma está sendo formada, para identificar uma expressão algébrica que relacione a ordem com a quantidade de botões em cada termo. Um caminho que poderia ser tomado é o destacado no esquema da Figura 25:

Figura 25 – Esquema para identificar características da sequência



Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador

Ao observarmos a figura acima, é possível perceber que desde o termo de primeira ordem, temos um botão azul no centro e botões vermelhos do lado direito, do lado esquerdo e acima. No primeiro termo temos 1+ 3x1 botões, já no segundo termo, temos 1 + 3x2 botões, no terceiro termo temos 1 + 3x3 botões. Neste sentido, o termo de ordem *n*, terá 1 + 3*n* botões. Logo, uma expressão algébrica que me permite calcular o número de botões para qualquer ordem seria 3*n* + 1.

Ainda pode ser observado que se chamarmos a quantidade de botões de y, esta quantidade pode ser escrita como $y(n) = 3n + 1$. Neste caso temos uma Função polinomial do primeiro grau, cujo domínio é o conjunto dos Números Naturais e a imagem pertence ao conjunto dos Números Naturais maiores que quatro. Assim, já poderíamos identificar que a quantidade de botões depende da ordem, ou seja, temos o y como variável dependente e o *n* como variável independente.

Nenhuma das duplas que participou da atividade conseguiu encontrar uma expressão algébrica que permitisse calcular o número de botões para qualquer ordem. Sobre tal fato, inferimos que, caso a sequência estivesse sido apresentada com diferenciação de cores entre os botões, como é mostrado na Figura 25, os estudantes poderiam ter percebido com mais facilidade a forma como as figuras são geradas, o que poderia implicar em uma maior facilidade em estabelecer uma expressão algébrica para calcular o número de botões para qualquer ordem. Entretanto, durante a sistematização, o pesquisador em conjunto com todas as duplas, encaminhou uma discussão no sentido de que a expressão algébrica fosse identificada, com base na observação da sequência e de suas características, seguindo a mesma ideia apresentada na Figura 25.

Esta terceira atividade comtempla também todos os objetivos específicos citados na segunda atividade do nível intermediário, mas avança ao buscar alcançar o objetivo específico de realizar generalizações com base nas características dos padrões. A busca de generalizações nesta atividade estava voltada para a identificação de uma expressão algébrica que relaciona a ordem com a quantidade de quadrados de cada termo. Mesmo tendo ocorrido o fato de nenhuma das duplas identificarem uma expressão que atendesse ao que havia sido pedido na questão, como já foi mencionado no paragrafo anterior, durante a sistematização essa expressão foi encontrada, de forma coletiva, mesmo que o pesquisador tenha conduzido a discussão para busca da mesma. Neste sentido, tal objetivo foi contemplado.

Quanto ao objetivo geral, relacionado ao nível intermediário de atividades, que é o de Identificação e dar continuidade de padrões para estabelecer generalizações, consideramos que o mesmo foi alcançado baseados no fato de que o conjunto de objetivos específicos foi também alcançado ao final das três atividades que compunham o referido nível.

A seguir, no próximo capítulo, traremos a apresentação do nível avançado, o terceiro nível de nossa sequencia didática. Será feita uma apresentação, discussão e análise de todas as atividades que fazem parte deste nível.

4. A SEQUÊNCIA DIDÁTICA EM SALA: O NÍVEL AVANÇADO

O Presente capítulo tem a finalidade de descrever os principais resultados e percepções relativas ao desenvolvimento das atividades da sequência didática elaborada como instrumento de levantamento de dados da nossa pesquisa, entretanto, nosso foco estará sobre o nível avançado da referida sequência, tendo em vista que os dois níveis anteriores (nível introdutório e nível intermediário) foram discutidos no Capítulo 3.

4.1 O Nível Avançado da Sequência Didática

O nível avançado da sequência didática é formado por um conjunto de três atividades, assim como foram formados os níveis introdutório e intermediário, entretanto, a última atividade deste nível foi organizada em duas partes. Para este nível, segundo o Quadro 2, a sequência tinha como objetivo geral explorar padrões envolvendo relações funcionais. Quanto aos objetivos específicos, foram determinados os seguintes: desenvolver generalizações a partir de padrões de regularidade; construir tabelas a partir de padrões de regularidade; construir expressões algébricas que representem generalizações de padrões de regularidade; construir gráficos no plano cartesiano a partir de padrões de regularidade; explorar relações funcionais a partir de padrões de regularidade; obter a fórmula do termo geral de uma progressão aritmética e também da soma de uma progressão aritmética.

Para o desenvolvimento das atividades deste nível foram necessárias 12 horas/aula, incluindo os momentos de desenvolvimento e sistematização das atividades (sendo aproximadamente cem minutos para sistematização). As atividades deste nível encontram-se no Apêndice C.

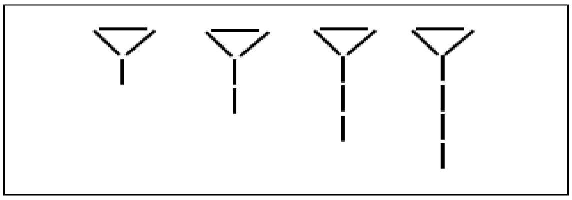
4.1.1 Atividade 1 - Nível Avançado

A primeira atividade do nível avançado foi aplicada com um total de dezesseis estudantes, organizados em oito duplas, sendo estas: AB, CD, FG, JS, KL, MY, OP e VW. A mesma foi aplicada durante 3 horas/aula, incluindo o desenvolvimento e a sistematização da atividade (vinte e um minutos). Esta atividade foi adaptada de Ponte; Branco; Matos (2009, p. 60). Vejamos na Figura 26 como a atividade foi estruturada.

Figura 26 – Atividade 1

Atividade 1. Sequência pictórica com palitos. Atividade adaptada de Ponte; Branco; Matos (2009, p.60).

Considere que cada segmento de reta dos termos do seguinte padrão crescente possui o mesmo tamanho e pode ser representado por um palito de fósforo. Com base nisso, responda o que se pede.



a. Usando palitos de fósforo, construa o quinto termo e o sexto desta sequência.
b. Quantos palitos seriam necessários para construir o nono termo desta sequencia? E o vigésimo termo? Justifique sua resposta.
c. Complete a seguinte tabela que relaciona a ordem e a quantidade palitos de cada um dos termos desta sequência:

Ordem										
Quantidade de palitos de cada termo										

d. Escreva o que você percebe sobre o aumento de palitos de um termo para o termo seguinte.
e. Construa uma expressão algébrica que lhe permita calcular o número de palitos para qualquer ordem.
f. Consideremos agora, que o número de palitos de cada termo é representado pela variável y e que a ordem esta sendo representada pela variável x. Tome então, os números encontrados na tabela, e forme pares ordenados.
g. Usando papel milimetrado, desenhe o plano cartesiano e marque os pares ordenados, encontrados com base na sequência.

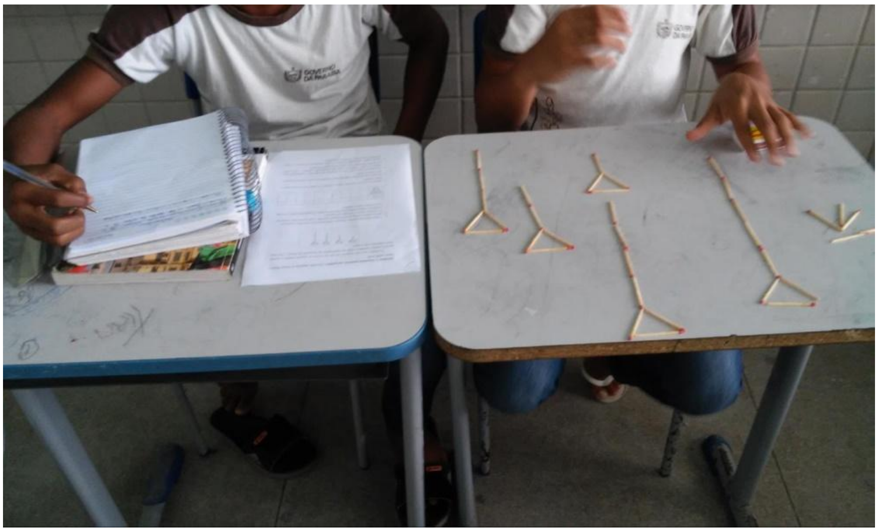
Fonte: Atividade adaptada de Ponte; Branco; Matos (2009, p. 60)

Como já foi citado anteriormente, a sequência desta primeira atividade do nível avançado é uma sequência pictórica crescente. A mesma é formada por segmentos de retas, sendo todos com a mesma medida.

É possível observar que em cada um dos termos da sequência existe uma parte fixa em formato de triângulo, formada justamente por três segmentos de reta e, além dessa parte fixa, temos segmentos de reta abaixo de um dos vértices desse triângulo, os quais aumentam uma unidade ao passar de um termo para o termo seguinte.

Por ser a sequência formada por segmentos de reta, optamos por disponibilizar durante a aplicação da atividade, palitos de fósforo, para que os estudantes conseguissem representar e dar continuidade à sequência (Figura 27).

Figura 27 – Dupla de estudantes usando palitos de fósforo



Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador

Os itens da atividade foram adaptados de modo a fazer com que os estudantes possam ir avançando gradativamente, buscando propiciar às duplas as condições necessárias para que os objetivos propostos para a atividade fossem alcançados.

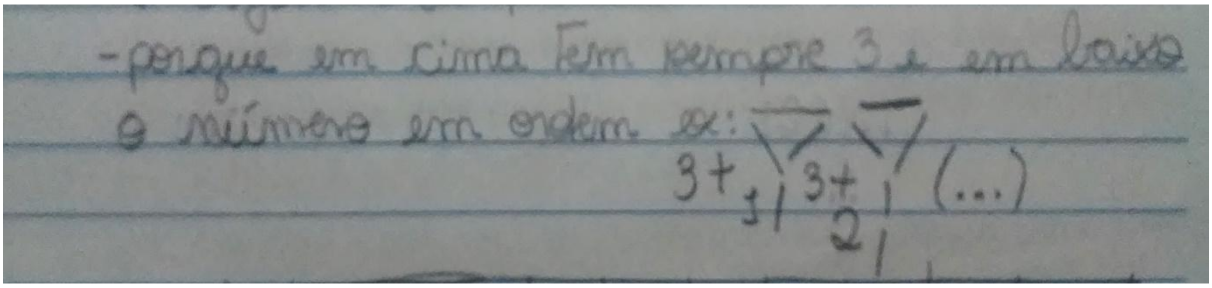
Quanto à questão (a), os estudantes deveriam relacionar os palitos de fósforo com os segmentos de reta que formam a sequência pictórica e representar o quinto e sexto termos da sequência. Após a representação, os mesmos deveriam fazer o registro escrito na atividade.

Das oito duplas de estudantes que participaram da atividade, sete delas (AB, CD, FG, KL, MY, OP e VW) conseguiram representar o quinto termo e o sexto termo da sequência usando palitos de fósforo e trazer essa representação por meio de desenho em seus registros de respostas das questões. Quanto à dupla JS, a mesma respondeu apenas com um “OK” e não trouxe o registro escrito dos termos. A dupla conseguiu representar os termos usando os palitos de fósforo, apenas não fez o registro dessa representação, o que não constitui um erro, já que a questão (a) não solicita explicitamente que esse registro fosse feito.

Em relação à questão (b), vislumbramos três caminhos para que os estudantes chegassem à resposta. O primeiro caminho seria os estudantes darem continuidade ao padrão fazendo uso dos palitos de fósforo e, tendo representado o nono e o vigésimo termos da sequência, fazerem a contagem da quantidade de palitos em cada um desses termos. Outra opção seria os estudantes observarem como o padrão está sendo formado; entendendo a lógica de formação dos termos; representarem por meio de desenho os mesmos; fazerem a contagem da quantidade de segmentos de reta; relacioná-los aos palitos e assim determinar a quantidade de palitos no nono termo e no vigésimo termo. O terceiro caminho seria os estudantes darem continuidade à sequência mentalmente, termo a termo, acrescentando um palito a quantidade de palitos do termo anterior e assim determinar a quantidade de palitos necessária para representar o nono termo e o vigésimo termo da sequência.

Dentre as oito duplas de estudante, as duplas AB, JS, MY e VW responderam a questão corretamente, ou seja, afirmaram que o nono termo é formado por doze palitos e o vigésimo termo é formado por vinte e três palitos. Entretanto, destas duplas apenas as duplas JS e MY apresentaram uma justificativa relativa às suas repostas. A dupla MY escreveu "Por que eu segui a sequência". Já a dupla JS apresentou a justificativa trazida na Figura 28.

Figura 28 – Justificativa da dupla JS



Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador

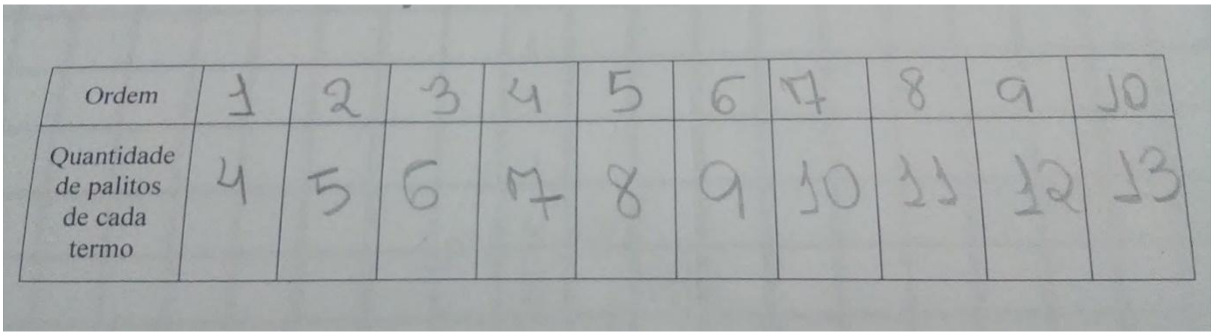
É possível perceber que as duas justificativas seguem caminhos distintos. A dupla MY apenas afirmou ter dado continuidade à sequência para chegar ao resultado. Já a dupla JS, observou a lógica de formação dos termos, e assim explicou "em de cima tem sempre 3", se referindo à parte fixa do padrão pictórico, a qual é formada por três segmentos organizados em formato triangular, e que "em baixo o número em ordem", o que implica em que cada figura, abaixo do triângulo, é composta por três unidades mais a quantidades de segmentos referente à ordem numérica. Neste sentido o primeiro termo terá 3+1 segmentos, já o segundo termo 3 +2 segmentos, e assim sucessivamente.

Quanto às duplas CD, FG, KL e OP, as mesmas responderam à questão (b) de forma parcialmente correta, tendo todas elas acertado apenas a quantidade de palitos referentes ao nono termo e errado a quantidade de palitos referentes ao vigésimo termo. Destas duplas, apenas uma delas trouxe uma justificativa adequada ao que pode ser observado no padrão. A dupla FG afirmou: “porque está crescendo de 1 em 1”. Neste sentido, podemos observar que a dupla percebeu que de um termo para o termo seguinte é acrescentado mais um segmento, o que pode ser representado por um palito.

A questão (c) propõe uma tabela que relaciona a ordem à quantidade de palitos necessária para representar cada um dos termos. Para preencher a tabela, os estudantes precisam dar continuidade à sequência, seja por meio dos palitos, por meio de desenhos ou mentalmente, para poder determinar a quantidade de palitos nos termos de 1ª ordem até a 10ª ordem.

A questão (c) foi respondida de maneira correta por todas as oito duplas de estudantes. Vejamos na Figura 29 a resposta de uma das duplas, que foi escolhida aleatoriamente para representar um exemplo de resposta correta:

Figura 29 – Tabela preenchida corretamente pela dupla FG



Ordem	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Quantidade de palitos de cada termo	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador

A questão (d) solicitou que os estudantes escrevessem o que eles perceberam sobre o aumento de palitos de um termo para o termo seguinte. Vejamos a seguir o que as duplas afirmaram sobre isto:

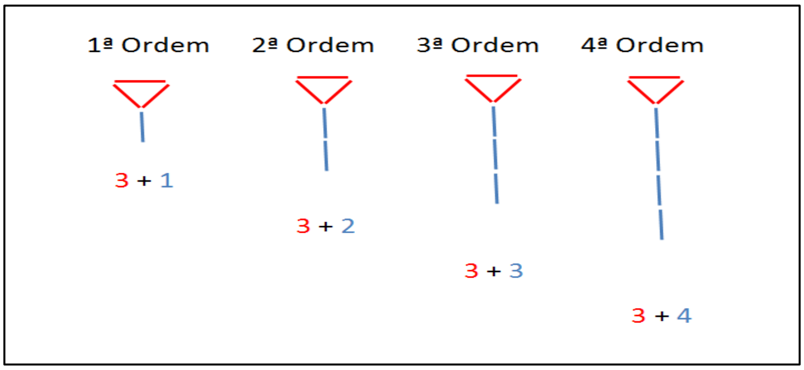
- Dupla AB: “De um termo para o outro aumenta 1 palito”;

- Dupla CD: “Percebo que em cada ordem aumenta um palito”;
- Dupla FG: “Esta crescendo de 1 um em 1 para baixo”;
- Dupla JS: “Que cada termo aumenta 1 número de palito”;
- Dupla KL: “Vai aumentando sempre de 1 em 1 palitos”;
- Dupla MY: “Aumenta de palitos e de 1 palito para o outro”;
- Dupla OP: “Primeiro termo 4, de 1 termo para o outro aumenta 1 palito”;
- Dupla VW: “Que cada vez mais aumenta 1 palito”.

É notável que todas as duplas conseguiram perceber o aumento de um palito de um termo para o termo seguinte. Entretanto, não foi descrito em detalhes nenhuma observação mais minuciosa sobre a sequência. A dupla FG, afirma que a sequência “está crescendo de 1 em 1 palito para baixo”, fazendo menção a forma como estes palitos estão sendo dispostos no padrão, e a dupla OP, salientou o fato de o primeiro termo ser formado por quatro palitos. Nenhuma das duplas relatou na referida questão, que as figuras que formam o padrão apresentam uma parte fixa e uma parte que varia de um termo para o outro.

A questão (e) trata sobre a construção de uma expressão algébrica que relaciona o número de palitos em cada termo e sua respectiva ordem. Um caminho que os estudantes poderiam adotar para buscar a resposta seria observar o que a sequência traz de fixo em cada um dos termos, e o que varia de acordo com a ordem. Vejamos o esquema na Figura 30:

Figura 30 – Esquema de formação da sequência

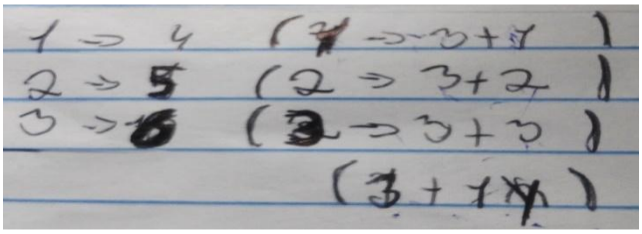


Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador

Observando o esquema acima, é possível perceber que, em um termo de ordem *n*, a quantidade de palitos será exatamente 3 + *n*. Logo essa seria uma expressão algébrica que permitiria calcular o número de palitos para qualquer ordem.

Dentre todas as duplas que participaram da atividade, apenas a dupla KL conseguiu chegar a uma expressão algébrica que permite calcular o número de palitos para qualquer ordem. Tal dupla chegou à expressão 3 + 1*y*, como pode ser visto na Figura 31.

Figura 31 – Expressão Algébrica da dupla KL

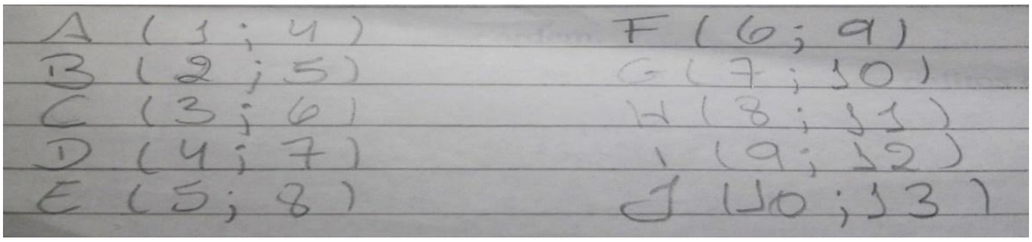


Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador

A questão (f) solicitava que os estudantes formassem pares ordenados, relacionando a ordem e quantidade de palitos dos respectivos termos, sendo a quantidade de palitos representada pela variável y (estando ligada ao eixo das ordenadas) e a ordem representada pela variável x (estando ligada ao eixo das abscissas). Logo, como exemplo podemos citar o par ordenado A (1 , 4), onde a ordem é 1 e a quantidade de palitos é 4. É esperado que os estudantes sigam esse caminho para chegar à resposta da referida questão.

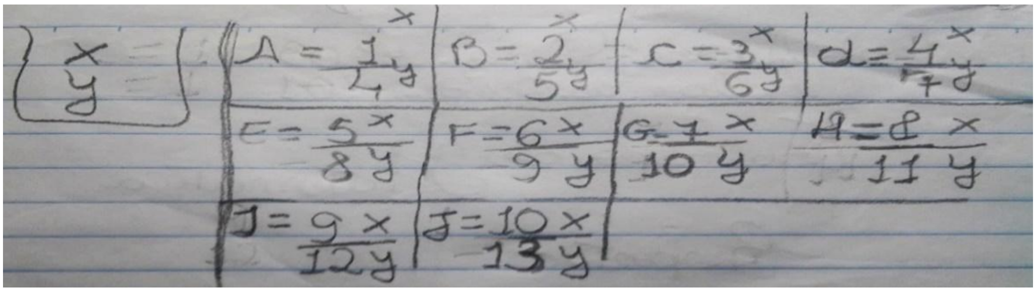
As duplas AB, CD, FG, JS, KL, MY e VW, responderam a questão corretamente. A dupla OP não respondeu a questão. Vale ressaltar que, dentre as sete duplas que responderam corretamente, seis delas representaram os pontos da forma convencional (x, y), e uma delas, a dupla JS, relacionou em cada um dos pontos a ordem e a quantidade de palitos nos termos, da maneira esperada, mas representou os pontos de forma não convencional. Para ilustrar, vejamos nas Figuras 32 e 33 as respostas das duplas CD e JS.

Figura 32 – Pontos representados pela dupla CD (escolha aleatória)



Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador

Figura 33 – Pontos representados pela dupla JS (representação própria)

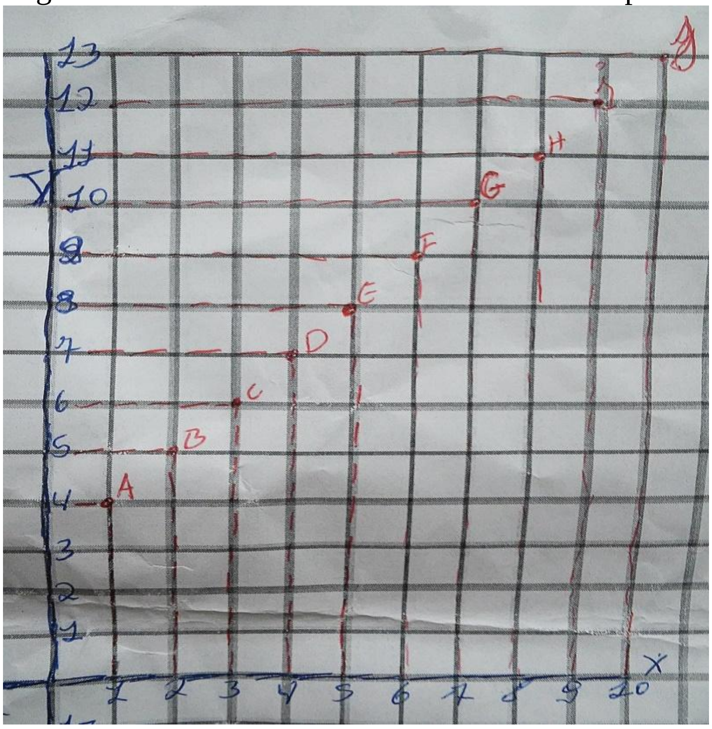


Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador

Quanto à questão (g), a mesma solicitava aos estudantes que marcassem no plano cartesiano, os pares ordenados encontrados na questão anterior. Com esta finalidade, cada dupla de estudantes recebeu uma folha de papel milimetrado, para que nesta folha fosse desenhado o plano cartesiano, e os pares ordenados fossem marcados. Assim, teríamos a representação gráfica, de uma Função Polinomial do Primeiro Grau obtida a partir de uma representação tabular, sendo esta obtida por meio de uma sequência pictórica.

As duplas AB, CD, KL, e OP conseguiram marcar corretamente no plano cartesiano, os pontos encontrados na questão (f). Vejamos na Figura 34 a respostas de uma destas duplas, escolhida aleatoriamente.

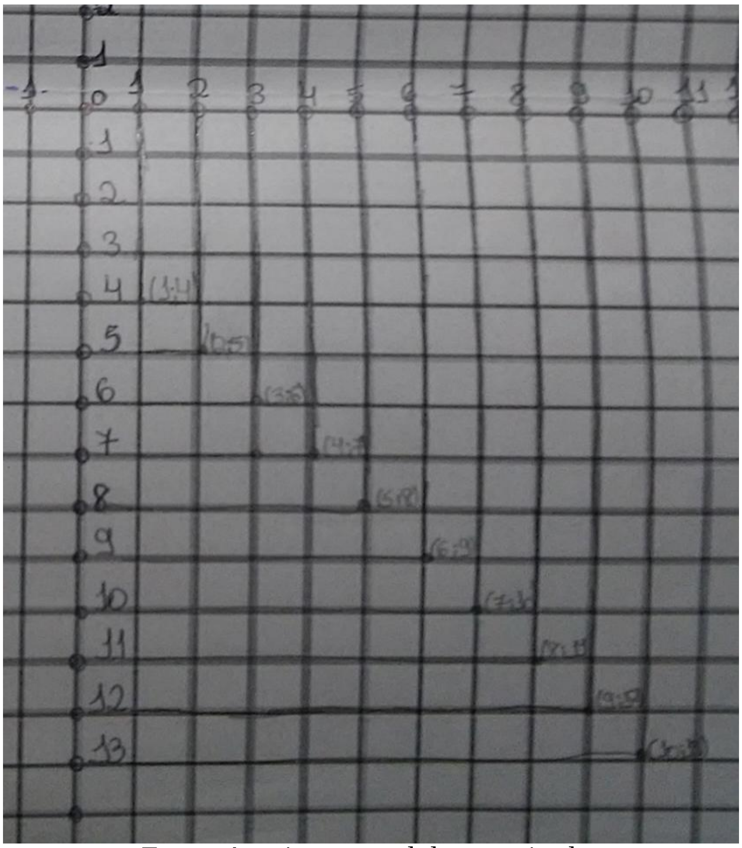
Figura 34 – Pares Ordenados Marcados Pela Dupla AB



Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador

Um fato que pôde ser observado foi relativo à dupla OP, que não respondeu a questão (f), ou seja, não listou os pontos encontrados com base na tabela e na sequência, mas mesmo assim os representou corretamente no plano cartesiano. As duplas JS, MY não marcaram os pontos corretamente. Já a dupla FG, marcou os pontos de maneira incorreta, tendo em vista que a mesma errou ao desenhar o plano cartesiano, uma vez que os pontos deveriam estar todos representados no primeiro quadrante. Vejamos a resposta da dupla, trazida na Figura 35.

Figura 35 – Pontos marcados pela dupla FG



Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador

Durante o momento de sistematização desta atividade, foram discutidas todas as questões que a integram. Foi perceptível que os estudantes não apresentaram dificuldades ao representar os termos da sequência fazendo uso dos palitos de fósforo, a não ser quando o termo era de uma ordem que demandava uma grande quantidade de palitos, nestes casos os estudantes recorriam a desenhos ou buscavam entender como os termos eram gerados, para assim os determinar. No preenchimento da tabela referente à questão (c), nenhuma das duplas apresentou dificuldades e fez o preenchimento de forma correta. Vale lembrar que, o uso de tabelas como recurso para relacionar ordens e termos em sequências, pode auxiliar na observação da formação da sequência, fazendo com que os estudantes observem com maior facilidade as regularidades, e façam generalizações, contribuindo com o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Foi discutido entre o pesquisador e as duplas de estudantes, o fato de os termos da sequência apresentarem uma parte fixa e uma parte que variava de um termo para o seguinte, estando isso relacionado à forma como a sequência está sendo gerada, servindo de base para buscar uma expressão algébrica que relaciona a ordem à quantidade de palitos em cada termo. Finalmente, foi discutido sobre como formar pares ordenados com base em tabelas e como marcar esses pares ordenados no plano cartesiano.

A grande dificuldade dos estudantes, evidenciada tanto durante a sistematização quanto na análise das atividades, foi a de encontrar justamente a expressão algébrica solicitada na questão (e). Entretanto, no momento de sistematização o pesquisador encaminhou uma discussão com toda a turma, e, seguindo a ideia do esquema exposto na Figura 30, chegando à expressão algébrica $3 + n$ (onde n é a ordem), que permite calcular o número de palitos para qualquer ordem.

A atividade em análise buscou contemplar os objetivos específicos de: desenvolver generalizações a partir de padrões de regularidade; construir tabelas a partir de padrões de regularidade; construir expressões algébricas que representem generalizações de padrões de regularidade; construir gráficos no plano cartesiano a partir de padrões de regularidade; e explorar relações funcionais a partir de padrões de regularidade. Os itens, mesmo não tendo sido resolvidos pela totalidade das duplas durante o desenvolvimento da atividade, puderam ser um a um trabalhados durante o momento de sistematização da atividade.

Na sequência, apresentaremos e discutiremos a segunda atividade que compôs o nível avançado de nossa sequência didática.

4.1.2 Atividade 2 - Nível Avançado

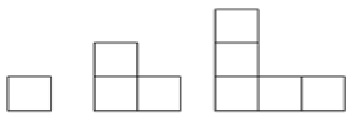
A segunda atividade do nível avançado de nossa sequência didática foi desenvolvida com um total de quatorze estudantes organizados em sete duplas, sendo estas: AB; CY; FG; KS; LV; MN; e OP. O tempo de duração da atividade foi de 3 horas/aula incluindo o desenvolvimento e a sistematização (dezoito minutos).

Tendo em vista o fato de muitas duplas terem apresentado dificuldades relacionadas a determinar uma expressão algébrica relacionada à sequência em estudo e também o fato de muitos estudantes não terem representado corretamente pontos no plano cartesiano, essa atividade retoma esses conceitos, que foram discutidos durante o momento de sistematização da atividade anterior. A mesma foi Adaptada de Ponte et al (2009, p. 61). Vejamos na figura 36 como esta atividade foi organizada:

Figura 36 – Imagem da Atividade 2

Atividade 2. Sequência pictórica na malha quadriculada. Adaptado de Ponte et al (2009, p. 61)

Observe o seguinte padrão crescente e responda o que se pede.



a. Usando malha quadriculada, construa os cinco próximos termos desta sequência.
b. Quantos quadrados terá o vigésimo termo desta sequência?
c. Complete a seguinte tabela que relaciona a ordem e a quantidade de quadrados de cada um dos termos desta sequência:

Ordem										
Quantidade de quadrados de cada termo										

d. Escreva o que você percebe sobre o aumento de quadrados de um termo para o termo seguinte.
e. Determine a relação existente entre a ordem e o número de quadrados de cada termo.
f. Você consegue associar esta sequência a alguma sequência numérica?
g. Construa uma expressão algébrica que lhe permita calcular o número de quadrados para qualquer ordem.
h. Consideremos agora, que o número de pequenos quadrados de cada termo é representado pela variável y e que a ordem esta sendo representada pela variável x. Tomem então, os números encontrados na tabela, e formem pares ordenados.
i. Usando papel milimetrado, desenhe o plano cartesiano e marque os pares ordenados, encontrados com base na sequência.

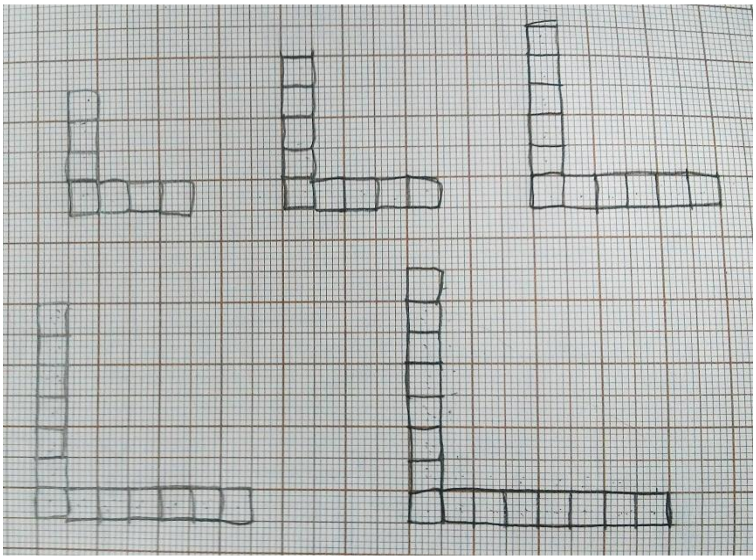
Fonte: Atividade adaptada de ponte et al (2009,p. 61)

Para o desenvolvimento desta atividade, cada dupla recebeu duas folhas de papel milimetrado, uma para usar como malha quadriculada para os desenhos da questão (a) e outra para construção do plano cartesiano e marcação dos pontos baseados na sequência, na questão (i).

A questão (a) solicitava que os estudantes construíssem os cinco próximos termos da sequência. Tendo em vista que a sequência trazida na questão está representada até o terceiro termo, ao representarem os cinco próximos termos, os estudantes teriam a representação até do oitavo termo.

As duplas AB, CY, FG, KS e OP, construíram os termos de forma correta, fazendo uso do papel milimetrado. Tendo em vista que a sequência aumenta de dois em dois quadrados de um termo para o outro, sempre sendo um quadrado na horizontal do lato direito e um quadrado acima na vertical, o quarto, quinto, sexto, sétimo e oitavo termos devem possuir respectivamente sete, nove, onze, treze e quinze quadrados. Vejamos na Figura 37 a resposta de uma das duplas, escolhida aleatoriamente.

Figura 37 – Termos representados pela dupla FG

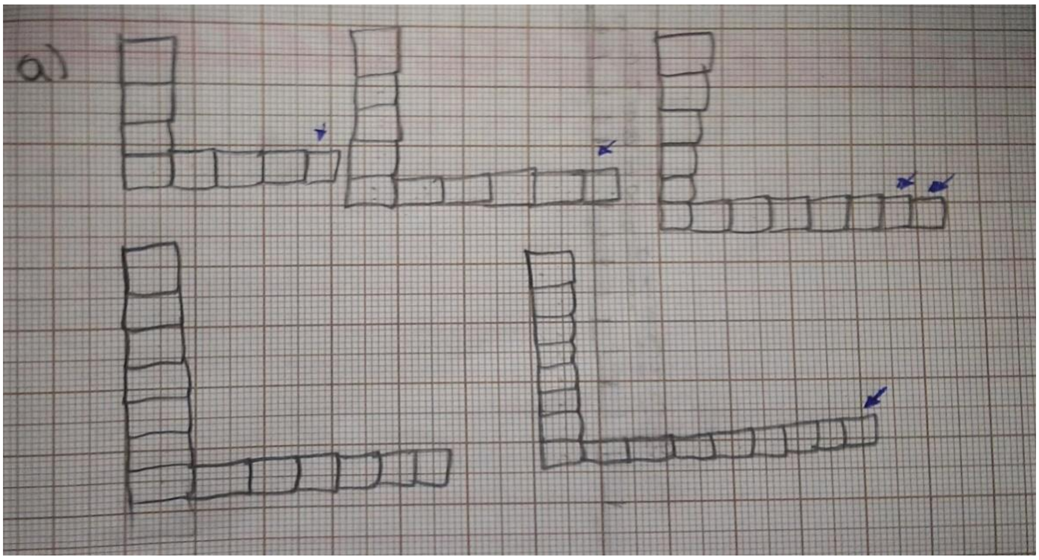


Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador

No caso das demais duplas, a dupla MN representou da maneira correta, entretanto interpretou o enunciado incorretamente, e representou apenas até o quinto termo, e não os próximos cinco termos da sequência.

Já a dupla LV, como pode ser observado na Figura 38, representou os termos de maneira parcialmente correta, acertando o sétimo termo e cometendo erros em todos os outros, sempre na quantidade de quadrados que estão dispostos na horizontal.

Figura 38 – Resposta da dupla LV



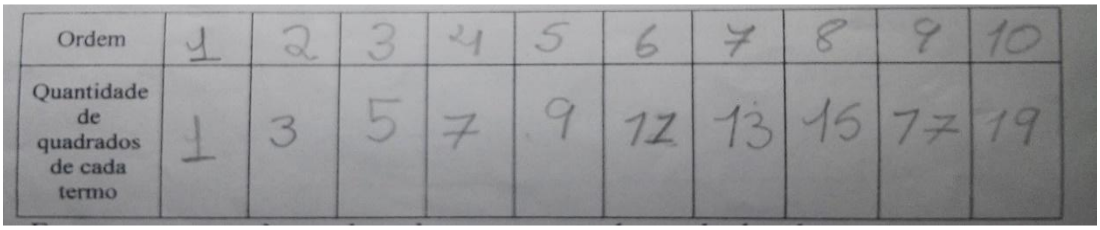
Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador

Na Figura 38, as setas indicam os quadrados extras que foram adicionados aos termos, sendo que a primeira e segunda representações apresentam um quadrado a mais, na terceira representação são apresentados dois quadrados a mais, e na ultima representação também um quadrado a mais.

A questão (b), indagava sobre a quantidade de quadrados que terá o vigésimo termo da sequência. Das sete duplas que participaram da atividade, apenas duas (AB e OP) conseguiram responder a questão corretamente. As demais duplas (CY, FG, KS, LV e MN) responderam, entretanto, não conseguiram determinar a quantidade correta de quadrados. Inferimos que tal erro ocorreu pela grande quantidade de quadrados necessários para compor o vigésimo termo, uma vez que o referido termo tem trinta e nove quadrados e que a estratégia desses estudantes resumiu-se a representação por meio de desenho e contagem.

Quanto à questão (c), a mesma solicitava que os estudantes preenchessem uma tabela que relacionava a ordem e a quantidade de quadrados dos respectivos termos. Todas as duplas conseguiram completar a tabela corretamente. Entendemos que isso aconteceu pelo fato de já termos discutido e trabalhado com tabelas do mesmo tipo em atividades anteriores. Além disso, consideramos que a tabela permite aos estudantes uma maior percepção da sequência através da representação numérica. Vejamos na Figura 39 a resposta de uma das duplas, escolhida aleatoriamente:

Figura 39 – Tabela Preenchida Pela Dupla CY



Ordem	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Quantidade de quadrados de cada termo	1	3	5	7	9	12	13	15	17	19

Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador

A questão (d) solicitava que os estudantes escrevessem o que eles perceberam sobre o aumento de quadrados de um termo para o termo seguinte. Uma resposta esperada seria que os quadrados aumentam de dois em dois de um termo para o outro, entretanto, aumentam sempre um na horizontal do lato direito e um na vertical. Vejamos o que as duplas responderam:

- Dupla AB: "Percebece que o ordem de quadrado cresce para cima e o lado direito"; (Sic)
- Dupla CY: "Percebo que de um termo para o outro aumenta 2 quadrado";
- Dupla FG: "Está aumentando de 2 em 2 na sequência";
- Dupla KS: "O almento dois quadrados em cada termo da sequência"; (Sic)
- Dupla LV: "Percebese aumento de 2 e 2 quadrados para o termo seguinte"; (Sic)
- Dupla MN: "Os quadrados vão aumentando de 2 em 2";
- Dupla OP: "Dois em dois".

As duplas CY, FG, KS, LV, MN E OP afirmaram perceber o aumento de dois quadrados de um termo para o termo seguinte, entretanto, estas não descrevem a forma como este aumento ocorre na figura. A dupla AB descreveu que a quantidade de quadrados cresce para cima e para o lado direito, mas não mencionou a quantidade de quadrados que foi acrescentada de um termo para o termo seguinte. Portanto, podemos concluir que os estudantes não conseguiram apresentar uma descrição geral da formação da sequência usando características do desenho e numéricas simultaneamente, e, sobre esta última, foi a resposta mais presente.

A questão (e) solicita que os estudantes determinem a relação existente entre a ordem e o número de quadrados de cada termo. Tal questão, objetiva fazer com que os estudantes comecem a fazer generalizações, e encaminha a determinação da expressão algébrica que relaciona a ordem e a quantidade de quadrados em cada termo. Uma relação que poderia ser observada pelos estudantes, era a de que a quantidade de quadrados em cada termo é sempre o dobro do número relativo à ordem, menos um.

Nenhuma das duplas conseguiu determinar a relação descrita no parágrafo anterior. A dupla CY não respondeu a questão. Quanto às demais duplas, nenhuma delas determinou uma relação correta entre ordem e termo. Vejamos o que as duplas responderam:

- Dupla AB: “A relação existente entre os dois e que os dois começam com o numero um”; (Sic)
- Dupla FG: “1, 3 5 7, 9 11, 13, 15, 17, 19...”;
- Dupla KS: “Para cima e para o lado em cada ponto almenta um quadrado”; (Sic)
- Dupla LV: “A relação que eles tem de ordem dos quadrados de cada termo e que cada termo e aumenta de quadrados 2 x 3”; (Sic)
- Dupla MN: “O numero de quadrado corresponde a ordem”; (Sic)
- Dupla OP: “A cada 1 termo aumenta dois quadrados”.

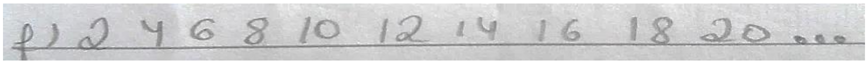
As duplas AB, LV e MN não souberam responder. A dupla FG relacionou a sequência pictórica a uma sequência numérica (de números ímpares), entretanto, não era isso que a questão solicitava. A dupla KS observou o fato dos quadrados aumentarem para cima e para o lado, uma resposta que era esperada para a questão anterior. Assim como a dupla KS, a dupla OP fez uma observação que caberia para a questão anterior, ao afirmar que a cada termo são aumentados dois quadrados.

Em relação à questão (f), a mesma solicita que os estudantes relacionem a sequência pictórica a alguma sequência numérica. Para isso, deveriam observar a quantidade de quadrados em cada termo, partindo de um quadrado e aumentando dois quadrados de um termo para o termo seguinte, o que levaria aos números 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13..., que é justamente a sequência dos números ímpares.

As duplas AB, CY e KS afirmaram que “sim”, ou seja, conseguiram associar a sequência pictórica a uma sequência numérica, entretanto, nenhuma delas descreveu qual seria essa sequência numérica. Tal erro pode ter ocorrido por uma falha no enunciado, tendo em vista que o mesmo apenas questiona se eles conseguem fazer a associação, mas não solicita que a sequência seja descrita.

A dupla MN respondeu de forma incorreta, uma vez que associou a sequência pictórica à sequência numérica dos números pares. Inferimos que este erro tenha ocorrido justamente pelo fato de serem acrescentados dois quadrados de um termo para o termo seguinte, entretanto, é uma quantidade par de quadrados que é adicionada a uma quantidade ímpar de quadrados que formam os termos da sequência, o que resulta sempre em quantidades ímpares de quadrados. A resposta da dupla MN pode ser vista na figura 40.

Figura 40 – Resposta da Dupla MN Para a Questão (f)



Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador

As duplas FG e LV responderam que conseguiram associar a sequência pictórica a uma sequência numérica e apontaram a sequência: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19... . As duas duplas responderam corretamente, entretanto, não citaram que esta era a sequência dos números ímpares. Já a dupla OP, não trouxe a resposta seguindo essa representação, e respondeu de maneira correta por meio de uma figura. Figura 41:

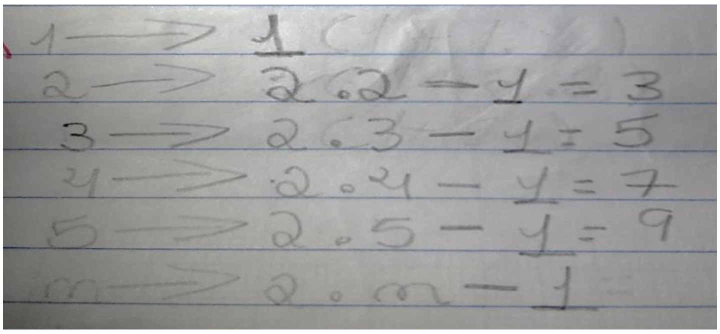
Figura 41– Representação da Dupla OP

Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador

A questão (g) pede que os estudantes construam uma expressão algébrica que lhe permita calcular o número de quadrados para qualquer ordem. Um caminho está em partir do fato da sequência pictórica poder ser associada à sequência numérica dos números ímpares, e, então, determinar uma expressão algébrica. A representação algébrica para um número ímpar, $2n + 1$, não é aplicável neste caso, pelo fato do n estar iniciando a partir do número 1, que é a ordem, o que faria não corresponder à quantidade de quadrados nos termos. Por esse motivo, a expressão que cabe para relacionar a ordem à quantidade de quadrados em cada em cada termo é 2*n – 1, onde n* é um Número Inteiro e maior ou igual a 1.

As duplas KS e MN não souberam responder a questão. A dupla FG respondeu a questão fazendo uso da expressão 2*n* + 1, que não se aplica a esta sequência, como comentado anteriormente. As duplas AB, CY, LV e OP responderam a questão corretamente e identificaram como expressão algébrica que relaciona a ordem à quantidade de quadrados em cada termo a expressão 2*n* – 1. Todas as duplas montaram esquemas semelhantes para chegar à resposta correta. Vejamos na Figura 42 a resposta de uma destas duplas, escolhida aleatoriamente.

Figura 42 – Esquema da dupla CY

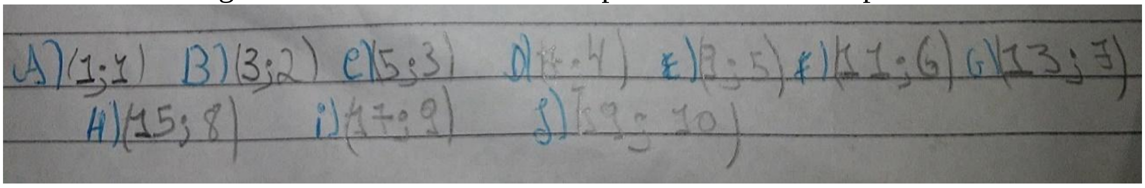


Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador

No tocante à questão (h), a mesma solicitava que os estudantes considerassem que o número de quadrados de cada termo é representado pela variável *y* e que a ordem está sendo representada pela variável *x*, para que sejam tomados os números encontrados na tabela e formados pares ordenados. Neste sentido, teríamos como exemplo os seguintes pares ordenados: (1,1); (2,3); (3;5); entre outros.

As duplas CY e FG não responderam a questão. A dupla LV, representou apenas os dois primeiros pares ordenados, não representando até o décimo, como consta na tabela. A dupla OP iniciou representando os pares corretamente, entretanto, a partir do quarto par ordenado a dupla inverteu as coordenadas *x* e *y*, ocasionando uma representação incorreta. Figura 43.

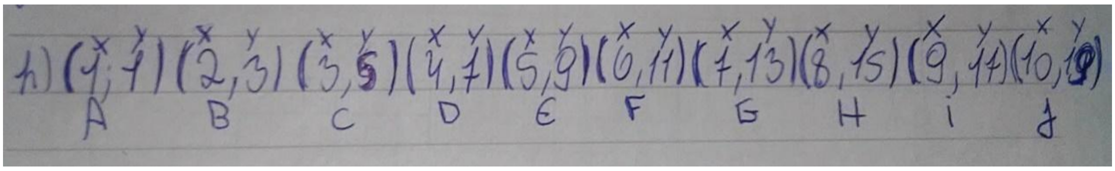
Figura 43 - Pares Ordenados Representados Pela Dupla OP



Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador

As duplas AB, KS e MN responderam a questão corretamente. Vejamos na Figura 44 a reposta de uma destas duplas, escolhida de maneira aleatória.

Figura 44 - Pares Ordenados Representados Pela Dupla KS

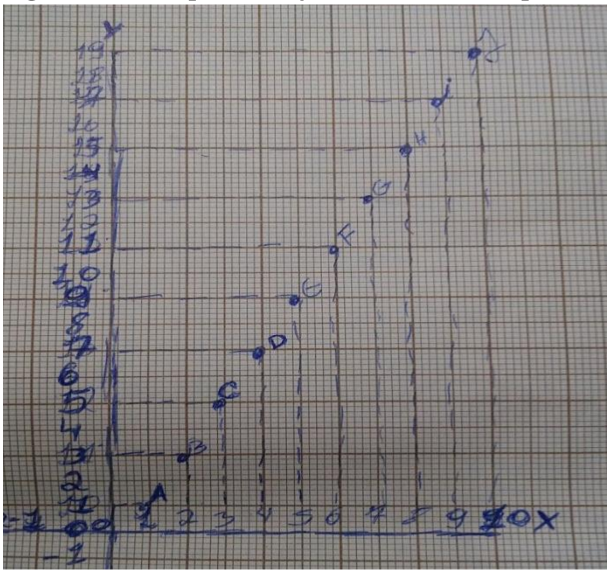


Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador

Em relação à questão (i), a mesma solicitava que os estudantes, fazendo uso do papel milimetrado, desenhassem o plano cartesiano e marcassem os pares ordenados encontrados com base na sequência. Como já foi mencionado na atividade anterior, assim, daríamos início à representação gráfica de uma Função Polinomial do Primeiro Grau, obtida a partir de uma representação tabular, sendo esta obtida por meio de uma sequência pictórica.

As duplas AB, KS e MN marcaram os pares ordenados corretamente. A dupla OP fez a marcação correta, entretanto, marcou os pares ordenados incorretos, tendo em vista que a mesma errou ao montar os pares ordenados, erro já apresentado na questão anterior. As duplas CY, FG e LV não souberam marcar os pares ordenados no plano cartesiano, o que pode ser também um reflexo do que foi observado na questão (h), tendo em vista que as duplas CY e FG não montaram os pares ordenados e a dupla LV montou de forma incompleta. Vejamos na Figura 45 uma marcação correta de uma das duplas, escolhida aleatoriamente.

Figura 45 – Representação Gráfica da dupla AB



Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador

Durante o momento de sistematização, foram discutidas todas as questões da atividade. Foi debatida uma divergência que ocorreu entre as respostas dadas para a questão (b), pelas duplas AB e FG, as quais responderam respectivamente que o vigésimo termo da sequência teria trinta e nove quadrados e trinta e sete quadrados. Foi constatado, em discussão com toda a turma, que a resposta correta é trinta e nove quadrados. De maneira geral, todas as duplas conseguiram interagir com o pesquisador e expor suas opiniões.

A segunda atividade do nível avançado de nossa sequência didática buscou atingir os mesmos objetivos específicos descritos para a questão anterior, até mesmo pela semelhança existente entre as atividades. Os objetivos foram: desenvolver generalizações a partir de padrões de regularidade; construir tabelas a partir de padrões de regularidade; construir expressões algébricas que representem generalizações de padrões de regularidade; construir gráficos no plano cartesiano a partir de padrões de regularidade; e explorar relações funcionais a partir de padrões de regularidade. Esses objetivos, mesmo não tendo sido alcançados pela totalidade das duplas durante o desenvolvimento da atividade, puderam ser mais uma vez trabalhados durante o momento de sistematização da atividade.

Na sequência apresentaremos e discutiremos a terceira atividade do nível avançado de nossa sequência didática, a qual também é a ultima atividade da referida sequência didática.

4.1.3 Atividade 3 - Nível Avançado

A Atividade 3 apresenta uma maior complexidade em termos tanto da sequência quanto do pensamento algébrico necessário à sua resolução. Sendo assim, a mesma foi dividida em duas partes, as quais serão apresentadas e discutidas separadamente.

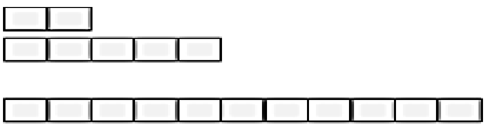
A primeira parte da terceira atividade foi desenvolvida com um total de quatorze estudantes, organizados em sete duplas, sendo estas: AB, CD, EQ, FG, LS, MY e OP. O tempo de duração da atividade foi de 3 horas/aula incluindo o desenvolvimento e a sistematização (vinte e sete minutos).

Nesta primeira parte desenvolvemos uma atividade baseada em um padrão pictórico que proporcionou aos estudantes a busca por uma expressão algébrica que representa o termo geral de uma progressão aritmética. A mesma foi adaptada de Rêgo e Rêgo (2009). Vejamos na Figura 46 como esta atividade foi organizada:

Figura 46 – Primeira Parte da Atividade 3

1ª Parte. Observe a seguinte sequência onde estão representados o 1º, 2º e 4º termos da sequência. Complete com alguns termos que estão em falta usando a malha quadriculada.

1º termo
2º termo
3º termo
4º termo
5º termo
6º termo
7º termo



Com base na sequência formada responda as seguintes questões:

a. O que você percebeu em relação à formação da sequência?
b. Você poderá encontrar um termo que seja formado por dezesseis quadrados? Caso a sua resposta seja afirmativa, identifique qual é a ordem deste termo. Caso a sua resposta seja negativa, justifique.
c. Por quantos quadrados será formado o décimo termo desta sequência? E O vigésimo termo?
d. Identifique a sequência numérica que podemos associar a esta sequência pictórica.
e. Descreva a forma como esta sequência está sendo gerada.
f. Complete a tabela que associa a ordem dos termos ao número de quadrados de cada termo:

Ordem	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Quantidade de quadrados															

g. Considere agora, que o número de quadrados de cada termo é representado pela variável y e que a ordem está sendo representada pela variável x. Tome então, os pares encontrados na tabela, e represente-os no plano cartesiano.
h. Construa uma expressão algébrica que permita calcular o número de quadrados (y) presentes em cada termo (x) de acordo com sua respectiva ordem.

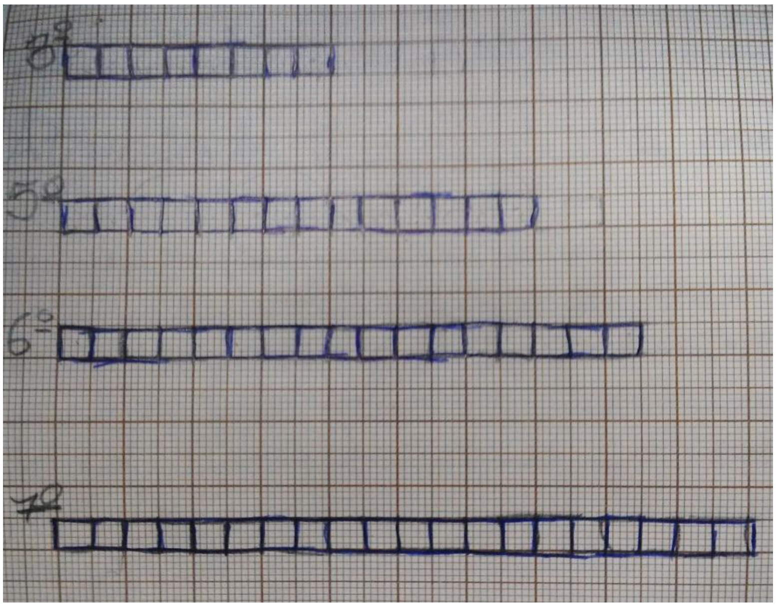
Fonte: Atividade adaptada de Rêgo e Rêgo (2009)

A primeira parte da atividade inicia trazendo três dos termos de uma sequência pictórica, sendo estes o primeiro termo, segundo termo e quarto termo, e deixando quatro espaços vazios referentes ao terceiro, quinto, sexto e sétimo termos, para que os estudantes possam identificar quais figuras devem constar em tais espaços. Para responder, os alunos receberam papel milimetrado, o qual usaram como malha quadriculada e fizeram a representação dos termos que estavam faltando.

A sequência era formada por quadrados todos no mesmo tamanho e dispostos em linha reta na horizontal, onde o primeiro termo é composto por dois quadrados e de um termo para o termo seguinte são acrescentados três quadrados, sempre do lado direito.

Todas as duplas de estudantes conseguiram representar corretamente os termos que estavam faltando. Vejamos na Figura 47, uma representação feita por uma das duplas, escolhida aleatoriamente.

Figura 47 – Termos Representados Pela Dupla CD



Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador

Quanto à questão (a), a mesma indagava os estudantes sobre o que eles perceberam em relação à formação da sequência. Vejamos a seguir as repostas dadas pelas duplas:

- Dupla AB: “sequencia aumenta de 3 em 3”;
- Dupla CD: “Que a sequência está crescendo para direita, a medida que a ordem aumenta o termo aumenta três quadrados”; (Sic)

- Dupla EQ: “a relação entre os dois primeiros quadrados de cada termo”;
- Dupla FG: “Os quadrados foram aumentando de 3 em 3”;
- Dupla LS: “Que ela vai aumentando de 3 em 3”;
- Dupla MY: “Eu percebo que o 3º termo não está relacionado au outros”; (Sic)
- Dupla OP: “A cada termo aumenta 3 quadrados”.

As duplas AB, CD, LS e OP afirmaram perceber o aumento de três quadrados de um termo para o termo seguinte. A dupla AB, além de perceber o referido aumento, ainda salientou que a sequência está crescendo para a direita, ou seja, os quadrados estão sempre sendo adicionados do lado direito. A dupla EQ mencionou a existência de uma relação entre os dois primeiros quadrados de cada termo. Inferimos que a mesma observou que é a partir desses dois primeiros quadrados que a sequência foi sendo gerada, e que eles se repetem termo a termo. A dupla MY fez uma observação incorreta, e afirmou que o terceiro termo da sequência não estava relacionado aos demais, talvez por ele não ter sido desenhado.

A questão (b), indaga os estudantes sobre a possibilidade de encontrar um termo na sequência que seja formado por dezesseis quadrados. A resposta esperada é negativa, uma vez que, com base na observação dos termos, tendo em vista que o quinto termo da sequência possui quatorze quadrados e o sexto termo possui dezessete quadrados, não há um termo com dezesseis quadrados. Vejamos as repostas dadas pelas duplas:

- Dupla AB e LS: “Não porque 5 termo tem 14 quadrados e o 6 termo tem 17 quadrados”;
- Dupla CD: “Não. Porque não tem nenhuma quantidade de quadrados formado por dezesseis”;
- Dupla EQ: “Não: porque cada termo é composto de 3 em 3 quadrados”;
- Dupla FG: “Não porque o 6º termo tem 17 quadrados”;
- Dupla MY: “Não porque eu encontrei termo de 17 quadrados ou mais”;
- Dupla OP: “Não, não existe dezesseis quadrado nessa sequência”.

Todas as duplas responderam corretamente que não há na sequência em estudo, um termo que seja formado por dezesseis quadrados. As justificativas foram distintas, mas todas foram feitas com base na observação da sequência feita pelas duplas.

A questão (c) solicitava que os estudantes informassem por quantos quadrados é formado o décimo termo e o vigésimo termo da sequência. Para responder a esta questão, os estudantes poderiam dar continuidade à sequência por meio de desenhos ou ainda observar como a sequência está sendo formada, e dar continuidade mentalmente à sequência, chegando assim à resposta esperada; o décimo termo é formado por vinte o nove quadrados e o vigésimo termo é formado por cinquenta e nove quadrados.

As duplas FG, MY e OP responderam corretamente a questão, informando as quantidades correspondentes de quadrados do décimo termo e do vigésimo termo. As duplas AB e CD responderam a questão de forma parcialmente correta, tendo a dupla AB acertado a quantidade de quadrados do décimo termo e não respondido a quantidade de quadrados do vigésimo e a dupla CD também acertado a quantidade de quadrados do décimo termo, mas errado na quantidade de quadrados do vigésimo termo. As duplas EQ e LS responderam a questão incorretamente, errando as quantidades de quadrados. Vejamos a seguir, respostas escolhidas aleatoriamente, dadas pelas duplas, que ilustram uma resposta correta, uma resposta parcialmente correta e uma resposta incorreta, respectivamente.

- Dupla FG: “O décimo termo é: 29, e o vigésimo é: 59”;
- Dupla CD: “O décimo termo é formado por 29 quadrados, e o vigésimo é formado por 62 termos”;
- Dupla EQ: “por 30 quadrados”.

A questão (d) solicitava que as duplas de estudantes identificassem uma sequência numérica que pudessem associar à sequência pictórica. Para isso, os estudantes deveriam fazer a contagem de quadrados em cada termo, e, a partir daí, organizar essas quantidades em forma de sequência numérica. Neste sentido, uma sequência numérica que estaria associada à sequência pictórica, seria a sequência: 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26... .Vejamos a seguir as repostas dadas pelas duplas AB, CD, EQ, LS, MY e OP.

- Dupla AB: “Uma sequência de numero 3 6 9 12 ...”;
- Dupla CD: “Esta sendo asosiada a um número par e um número impa”; (Sic)
- Dupla EQ: “2+3+3”;
- Dupla LS: “Com sequencia de números 3, 6, 8,12 etc.”;
- Dupla MY: “Sim”;

- Dupla OP: “2, 5, 8, 11, 17, 20...”.

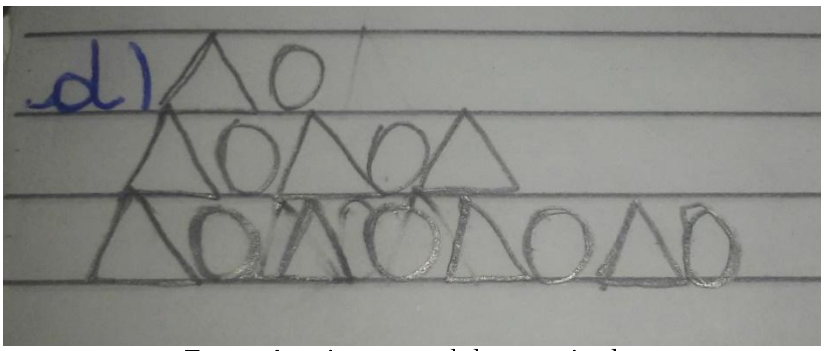
A dupla OP foi a única dupla que associou a sequência pictórica a sequência numérica correta, a qual já foi mencionada anteriormente. As duplas AB e LS relacionaram a sequência pictórica com a sequência 3, 6, 9, 12..., fato que ocorreu justamente por estarem sendo adicionados três quadrados de um termo para o termo seguinte, entretanto, os mesmos não observaram que a sequência inicia com dois quadrados e a partir daí é que são adicionados mais três quadrados de um termo para o outro.

A Dupla EQ observou corretamente que a sequência inicia com dois quadrados e a partir desses são adicionados sucessivamente três quadrados à medida que a ordem vai aumentando, entretanto, a dupla não indicou claramente a sequência numérica associada à pictórica.

A dupla CD, observou que as quantidades de quadrados nos termos se alternam entre quantidades pares e ímpares, o que reflete em uma sequência numérica que alterna números pares e ímpares, entretanto, a dupla também não informou qual sequência seria essa. A dupla MY não soube responder a questão.

Por fim, a dupla FG também não relacionou a sequência pictórica a uma sequência numérica, mas a outra sequência pictórica, que alterna círculos e triângulos em seus termos, de forma que a quantidade de círculos e triângulos corresponde à quantidade de quadrados em cada termo da primeira sequência pictórica. Vejamos na Figura 48 a resposta da referida dupla.

Figura 48 – Figura da dupla FG



Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador

A dupla FG percebeu a sequência dos números ímpares e dos números pares relacionadas à sequência pictórica em estudo e, para cada uma, associou respectivamente os triângulo e os círculos. Essa representação pode ter sido influenciada pela sequencia da Atividade 1 do nível introdutório, onde trabalhamos com essas figuras.

A questão (e) solicita que os estudantes descrevam a forma como a sequência está sendo gerada. Tal questão é muito semelhante à questão (a), entretanto, ela é mais precisa, uma vez que a questão (a) apenas indaga sobre o que eles perceberam em relação à formação da sequência, e não solicita que os estudantes descrevam como a sequência está sendo gerada. Vejamos o que as duplas responderam:

- Dupla AB: “Ela está sendo gerada por 3 em 3 quadrados”;
- Dupla CD: “Quando a ordem é par o termo é ímpar e quando a ordem é impar o termo é par”;
- Dupla EQ: “Dois quadrados mais três quadrados e assim sucessivamente”;
- Dupla FG: “Esta sequência está sendo gerada de 3 em 3”;
- Dupla LS: “Por números pares e ímpas e de 3 em 3 quadrados”; (Sic)
- Dupla MY: “Está gera por quadrados de três em três”;(Sic)
- Dupla OP: “3 em 3”.

Todas as duplas perceberam que a sequência cresce de três em três quadrados de um termo para o tremo seguinte. A única dupla que não fez essa afirmação na questão (e) foi a dupla CD, que observou que quando a ordem é ímpar a quantidade de quadrados nos termos é par, e quando a ordem é par a quantidade de quadrados nos termos é ímpar, entretanto, essa mesma dupla já havia afirmado que sequência cresce de três em três quadrados de um termo para o termo seguinte, na questão (a). De maneira geral, as duplas não apresentaram avanços significativos na descrição da sequencia, quando comparados com a questão (a).

A questão (f) solicita que os estudantes completem a tabela que associa a ordem dos termos ao número de quadrados de cada termo. Para responder essa questão, os estudantes, precisaram dar continuidade à sequência, seja por meio de figuras ou apenas mentalmente, para saber a quantidade de quadrados presentes do primeiro até o décimo quinto termo.

Todas as duplas de estudantes conseguiram completar a tabela corretamente. Foi possível observar que até mesmo as que duplas haviam cometido erros ao responder a questão (c), que indagava sobre as quantidades de quadrados do décimo termo e do vigésimo termo, questão que demandava a mesma forma de raciocínio para ser resolvida, conseguiram completar a tabela de forma totalmente correta. Tal fato indica uma evolução do pensamento algébrico entre a questão (c) e a questão (f) com auxílio do recurso da tabela. Vejamos na Figura 49 a tabela completada corretamente, de uma das duplas escolhida de aleatoriamente:

Figura 49 – Tabela completada pela dupla FG

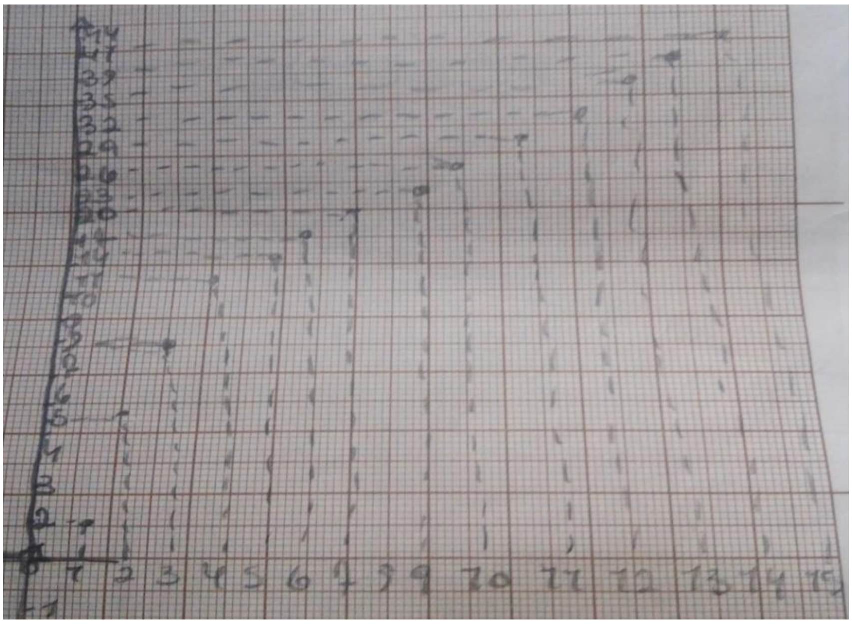
Ordem	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Quantidade de quadrados	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35	38	41	44

Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador

Quanto à questão (g), a mesma solicitava que os estudantes tomassem os números encontrados na tabela, e formassem pares ordenados relacionando ordem e quantidade de quadrados nos termos, e, após terem formado os pares ordenados, as duplas deveriam marcá-los no plano cartesiano.

As duplas AB, CD, EQ, LS, MY e OP representaram os pares ordenados corretamente. Já a dupla FG não representou os pares ordenados. Quanto à marcação no plano cartesiano, as duplas AB, CD e OP fizeram a marcação correta. As duplas FG, LS e MY não souberam fazer a marcação dos pares ordenados no plano cartesiano. A dupla FG não tinha representado os pares ordenados. A dupla EQ representou os pontos no plano cartesiano de forma parcialmente correta, uma vez que fez a marcação incorreta do oitavo ponto, e, a partir desse erro, desencadeou as demais marcações incorretas, o que pode ser verificado na Figura 50.

Figura 50 – Pares Ordenados Marcados Pela Dupla EQ



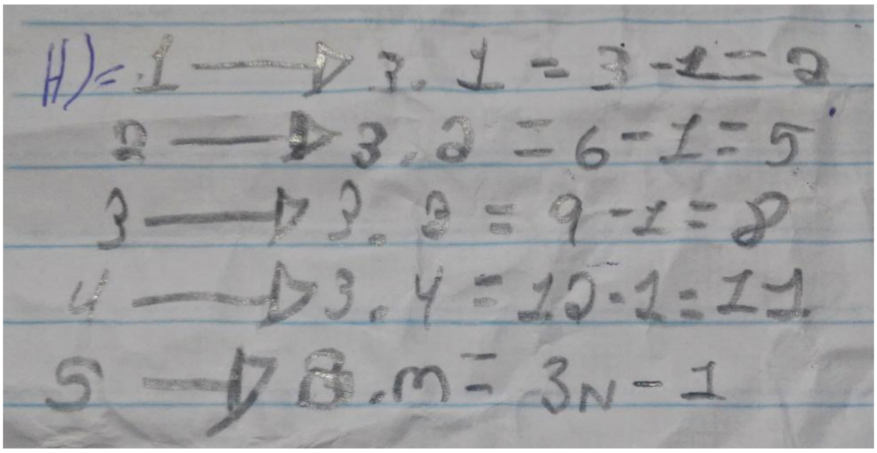
Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador

A última questão, da primeira parte da terceira atividade do nível avançado é a questão (h), que solicita que os estudantes construam uma expressão algébrica que lhe permita calcular o número de quadrados (y) presentes em cada termo (x) de acordo com suas respectivas ordens. Uma expressão algébrica que permite relacionar a ordem e a quantidade de quadrados nos termos seria a expressão $y = 3x - 1$.

Nenhuma das duplas conseguiu chegar a uma expressão algébrica usando as variáveis x e y, como era pedido na questão. Entretanto, as duplas AB e OP chegaram a expressões semelhantes, e trouxeram como resposta a expressão $3.n - 1$. As duplas CD LS e MY não responderam a questão. As duplas EQ e FG trouxeram expressões algébricas incorretas do tipo, respectivamente, $z + 3$ e $n + 3$.

Vejamos na Figura 51, o esquema usado pela dupla OP para chegar à expressão algébrica. A dupla observou que multiplicando a ordem por três e subtraindo um, desse resultado, sempre se chegava à quantidade de quadrados do respectivo termo.

Figura 51 – Esquema da dupla OP



Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador

É sabido que o termo geral de uma Progressão Aritmética - PA é dado pela expressão $a_n = a_1 + (n - 1).r$, onde a_n é o enésimo termo da Progressão, a_1 é o primeiro termo da progressão e r é a razão da Progressão.

Assim, quando associamos a sequência pictórica trabalhada na atividade com a sequência numérica 2, 5, 8, 11,... relacionamos a quantidade de quadrados constante que é adicionada de um termo para o outro com a razão $r = 3$ de uma PA, na qual o termo $a_1 = 2$. Logo, o termo a_n, para este caso específico, é dado pela expressão $a_n = 2 + (n -1) . 3$, que por meio da propriedade distributiva da multiplicação, leva à expressão equivalente $a_n = 3.n - 1$.

Logo, podemos perceber, que as duplas que conseguiram determinar a expressão algébrica que relaciona a ordem e a quantidade de quadrados nos termos. De uma maneira implícita, chegaram à fórmula do termo geral da PA em estudo.

A segunda parte da terceira atividade do nível avançado de nossa sequência didática foi desenvolvida com um total de quatorze estudantes, organizados em sete duplas, sendo estas: AB, CD, EQ, FG, LS, MY e OP. O tempo de duração da atividade foi de 3 horas/aula incluindo o desenvolvimento e a sistematização (trinta e três minutos). A mesma foi adaptada de Rêgo e Rêgo (2009).

Nesta parte foi trazida uma atividade baseada no mesmo padrão pictórico que proporcionou aos estudantes a da expressão algébrica que representa o termo geral de uma PA, entretanto, os itens foram adaptados de forma que os estudantes gradativamente fossem encaminhados a buscar o termo geral. Vejamos nas Figuras 52 e 53 como esta atividade foi organizada.

Figura 52 – Imagem da Segunda Parte da Atividade 3 (continua)

2ª Parte. Considere que $\mathbf{S_n}$ é a soma do número de quadrados dos termos, do primeiro termo até o termo de ordem **n**, sendo que, nesta soma, os termos são representados por $\mathbf{a_1, a_2, a_3, \ldots , a_n}$. Veja o exemplo: $\mathbf{S_3}$ é a soma do número de quadrados do primeiro termo até o terceiro termo. Assim, ela será: $\mathbf{S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 2 + 5 + 8 = 15}$ quadrados.

a. Obtenha então o número de quadrados para as seguintes somas: $\mathbf{S_1}$, $\mathbf{S_2}$, $\mathbf{S_4}$, $\mathbf{S_6}$, $\mathbf{S_7}$ e $\mathbf{S_8}$;
b. Fazendo uso de quadrados de EVA (material emborrachado) obtenha para cada soma $\mathbf{S_1}$, $\mathbf{S_2}$, $\mathbf{S_3}$, $\mathbf{S_4}$, $\mathbf{S_5}$ e $\mathbf{S_8}$ a quantidade de quadrados.
c. Complete a tabela a seguir que relaciona a ordem **n (de 1 até 8)**, com os termos $\mathbf{a_n}$ e a soma $\mathbf{S_n}$ ao número de quadrados da respectiva soma:

n (ordem)	Sn (soma do número de quadrados de a_1 até a_n)
1	$S_1 = a_1 = 2$
2	$S_2 = a_1 + a_2 = 2 + 5 = 7$
3	
4	
5	
6	
7	
8	
...	...
n	

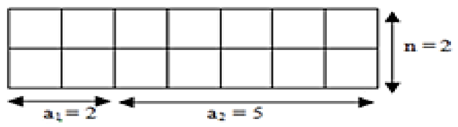
Figura 53 – Imagem da Segunda Parte da Atividade 3 (continuação)

d. Consultando a tabela construída, estabeleça uma relação algébrica entre n e S_n, ou seja, relacione a ordem n com a quantidade de quadrados da soma S_n.

e. Duplique o número de quadrados de cada uma das somas, e usando os quadrados de EVA (material emborrachado), construa livremente retângulos para cada caso. Além disso, identifique com cores diferentes os quadrados de S_n e os quadrados que foram adicionados para a construção dos retângulos.

f. Comparando os retângulos de cada caso construídos pelos colegas, eles apresentam algo em comum? Os retângulos encontrados são semelhantes? Iguais? Justifique.

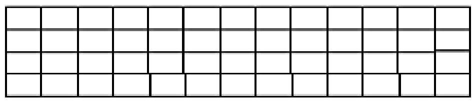
g. Vamos estudar os retângulos construídos com 14 quadrados. Como foram construídos? Alguém representou da seguinte forma:



h. Caso o seu retângulo não tenham sido feito seguindo esse aspecto, tente formá-lo da maneira acima representada na malha quadriculada ou usando o EVA (material emborrachado).

i. Vamos agora analisar os seguintes casos:

- Caso s_3: represente o retângulo da soma s_3 de forma que a sua base seja formada por a_1 somado a a_3, e que sua altura seja n.
- Caso s4: observe o seguinte retângulo e identifique onde podem estar localizados o a_1, a_4 e n.



- Caso s1: construa o retângulo para s_1, seguindo a mesma orientação discutida nos demais casos.

j. Encontre a soma do número de quadrados de cada um dos retângulos, fazendo uso da fórmula do cálculo da área.

k. Com base nos retângulos formados, determine uma expressão algébrica que lhe permita calcular o número de quadrados de s_n.

Fonte: Atividade adaptada de Rêgo e Rêgo (2009)

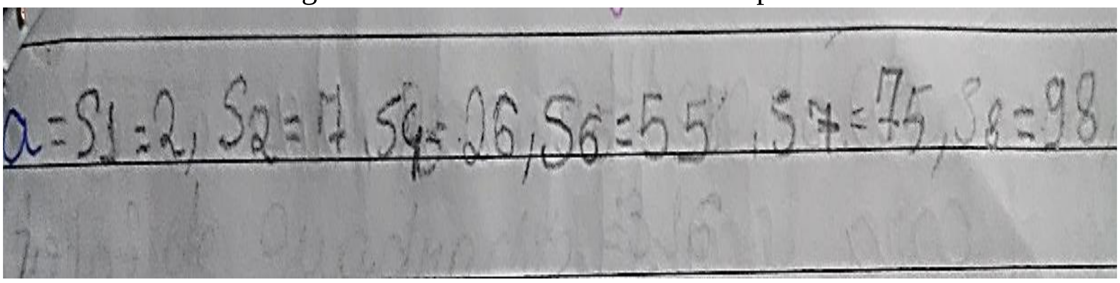
Para esta segunda parte da atividade, os estudantes precisam se basear ainda na sequência trazida na primeira parte da atividade. A segunda parte tem início solicitando que os estudantes considerem S_n como sendo a soma do número de quadrados dos termos, do primeiro termo até o termo de ordem ***n***. Apresenta o exemplo para a soma $S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 2 + 5 + 8 = 15$, ou seja, a soma S_3 é formada por quinze quadrados, que é justamente a soma da quantidade de quadrados do primeiro termo até o terceiro termo. Esta informação deve ser tomada como base para que os estudantes consigam dar andamento ao que é pedido nos itens da atividade.

Para o desenvolvimento da atividade, os estudantes receberam quadrados produzidos em EVA (material emborrachado), para que estes fossem associados aos quadrados que formam os termos da sequência.

Para responder a questão (a), os estudantes precisavam obter o número de quadrados para as somas S_1, S_2, S_4, S_6, S_7 e S_8. Neste sentido, os mesmos deveriam observar que a soma S_1 é justamente a quantidade de quadrados do primeiro termo, a soma S_2 é quantidade de quadrados do primeiro termo somada à quantidade de quadrados do segundo termo, e assim sucessivamente. Logo, as somas corretas são: $S_1 = 2$; $S_2 = 7$; $S_4= 26$; $S_6= 57$; $S_7= 77$; e $S_8= 100$.

Apenas a dupla AB conseguiu responder a questão corretamente. As duplas CD, EQ, LS, MY e OP não responderam a questão. A dupla FG respondeu a questão de maneira parcialmente correta, acertando as somas S_1 , S_2 e S_4, e errando as demais somas, informando que $S_6 = 55$, $S_7= 75$ e $S_8= 98$. Tal erro, provavelmente ocorreu por conta de um cálculo incorreto, tendo em vista que nas três somas erradas, a diferença era de apenas dois quadrados para a soma correta. Observemos na Figura 54 a resposta dada pela dupla.

Figura 54 – Somas Indicadas Pela Dupla FG



Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador

A questão (b) solicitava que as duplas de estudantes fizessem uso dos quadrados de EVA (material emborrachado) para representar as somas S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 e S_6. Das sete duplas que participaram da atividade, apenas a dupla OP respondeu a questão. Mesmo não tendo acertado a questão anterior, e sem ter usado os quadrados de EVA, fazendo uso de desenhos, a dupla obteve êxito em determinar varias somas, como pode ser observado na Figura 55.

Figura 55 – Desenhos da Dupla OP

Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador

A questão (c) traz uma tabela que relaciona a ordem *n*, com os termos a_n e a soma S_n ao número de quadrados da respectiva soma. Nela, os estudantes precisam relacionar as ordens indicadas, que já constam na tabela, com as somas relativas a estas ordens. Como exemplo, a tabela já traz as duas primeiras linhas preenchidas, e os estudantes devem continuar preenchendo as demais, indicando qual a soma (número de quadrados), que vai estar relacionada com a ordem indicada na tabela. Na última linha da tabela, as duplas precisam fazer uma generalização, indicando algebricamente uma representação de S_n para a ordem *n*.

As duplas AB, CD e OP preencheram a tabela corretamente em todas as somas que as ordens eram indicadas por números, ou seja, responderam corretamente da ordem três até a ordem oito, entretanto, não souberam responder quando houve a necessidade de generalizar para a ordem *n*, preenchendo a última linha da tabela de forma incorreta.

Quanto às demais duplas (EQ, FG, LS e MY), nenhuma delas conseguiu generalizar para a ordem *n*, e estas completaram a tabela de forma parcialmente correta, acertando algumas somas e errando outras. Vejamos dois exemplos (Figuras 56 e 57) escolhidos aleatoriamente, sendo o primeiro onde todas as somas em que as ordens eram indicadas por números foram preenchidas corretamente, e outro exemplo no qual estas somas foram preenchidas de maneira parcialmente correta.

Figura 56 – Somas Indicadas pela Dupla CD

n (ordem)	Sn (soma do número de quadrados de a_1 até a_n)
1	$S_1 = a_1 = 2$
2	$S_2 = a_1 + a_2 = 2 + 5 = 7$
3	$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 2+5+8 = 15$
4	$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2+5+8+11 = 26$
5	$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 2+5+8+11+14 = 40$
6	$S_6 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 2+5+8+11+14+17 = 57$
7	$S_7 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 2+5+8+11+14+17+20 = 77$
8	$S_8 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 2+5+8+11+14+17+20+23 = 100$
...	...
n	$S_n = a_n = 2.n$

Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador

Figura 57 – Somas Indicadas pela Dupla LS

n (ordem)	Sn (soma do número de quadrados de a_1 até a_n)
1	$S_1 = a_1 = 2$
2	$S_2 = a_1 + a_2 = 2 + 5 = 7$
3	$S3 = a^1 + a^2 + a^3 = 2+5+8 = 15$
4	$S4 = a^1 + a^2 + a^3 + a4 = 2+5+8+11 = 26$
5	$S5 + a^1 + a^2 + a^3 = 2+5+14 = 21$
6	$S6 + a1 + a^2 + a^3 = 2+5+17 = 24$
7	$S7 + a1 + a2 + a3 = 2+5+20 = 27$
8	$S8 + a1 + a2 + a3 = 2+5+23 = 30$
...	...
n	

Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador

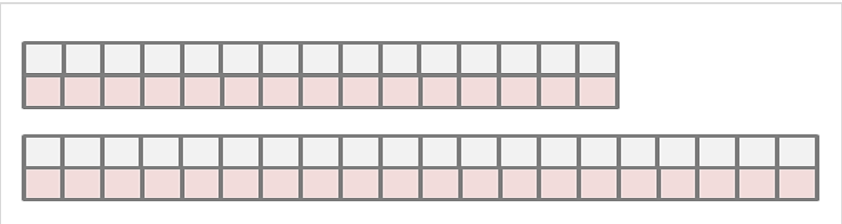
A dupla CD respondeu corretamente da terceira até a oitava ordem, como já havia sido mencionado anteriormente. Já a dupla LS, respondeu corretamente a terceira e a quarta ordens, tendo errado da quinta até a oitava ordens. Tal erro ocorreu por somarem a quantidade de quadrados dos dois primeiros termos à quantidade de quadrados da ordem indicada, esquecendo das quantidades que estão entre a segunda ordem e a ordem indicada. Cabe observar que esta dupla modificou a representação de cada termo a_n por a^n, como se fosse uma representação de potências.

Na última linha da tabela, as duplas precisavam fazer uma generalização, indicando algebricamente uma representação de S_n para a ordem *n.* Uma representação possível seria indicar S_n como sendo $S_n= a_1 + a_2 + a_3 +...+ a_n$, entretanto, nenhuma das duplas conseguiu chegar a essa representação.

A questão (d) reforça o pedido para que as duplas estabeleçam uma relação algébrica entre *n e* S_n , relacionando a ordem *n* com a quantidade de quadrados em cada soma. A relação seria mais uma vez indicada pela representação S_n como sendo $S_n = a_1 + a_2 + a_3 +...+ a_n$. Mais uma vez nenhuma das duplas conseguiu estabelecer a relação, e não trouxeram resposta alguma para a questão.

A questão (e) solicita que os estudantes dupliquem o número de quadrados das somas S_n, e usando os quadrados de EVA (material emborrachado), construíam livremente retângulos para cada caso. Além disso, que identifiquem com cores diferentes os quadrados de S_n e os quadrados que forem adicionados para a construção dos retângulos. Neste sentido, vejamos a Figura 58 que indica possibilidades de respostas corretas para as somas S_3 e S_4, elaboradas pelo autor.

Figura 58 – Retângulos Formados a Partir das Somas S_3 e S_4



Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador

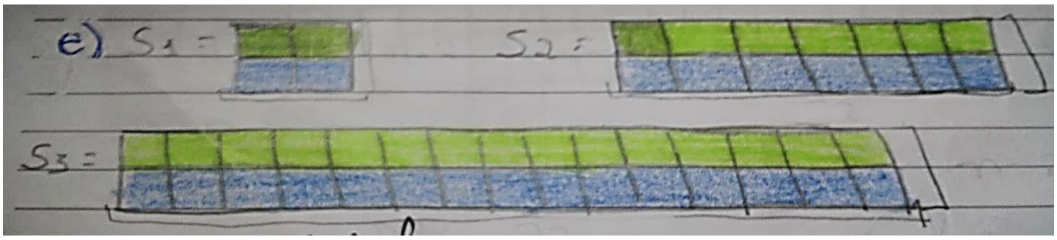
Nenhuma das duplas representou retângulos das somas S_1 até S_8 . Provavelmente, isso pode ter ocorrido pelo grande número de quadrados que seriam necessários usarem ao duplicar somas como a S_8 , que geraria um retângulo com duzentos quadrados. Entretanto, todas as duplas representaram parcialmente os retângulos compreendidos entre as somas S_1 e S_8.

A dupla AB representou corretamente retângulos referentes às somas S_1 , S_2 e S_4 . A dupla CD representou corretamente retângulos das somas S_1 , S_2 , S_3 , S_4 e S_5 , e de forma incorreta os retângulos referentes à soma S_6 . A dupla EQ representou corretamente retângulos das somas S_1 , S_2 e S_3 , errando na representação do retângulo referente à soma S_4 .

A dupla FG representou corretamente retângulos referentes às somas S_1 , S_2 e S_3 . A dupla LS representou corretamente retângulos das somas S_1 , S_2 , S_3 e S_4 , errando a representação do retângulos referente à soma S_5 . A dupla MY representou corretamente apenas o retângulo referente à soma S_1 , errando a representação dos retângulos referentes às demais somas. Por fim, a dupla OP representou corretamente retângulos referentes às somas S_1 , S_2 , S_3 e S_4 .

Tendo em vista que todas as repostas foram parcialmente corretas ou incompletas, vejamos na Figura 59 a repostas de uma das duplas, escolhida aleatoriamente.

Figura 59 – Retângulos Representados pela Dupla FG



Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador

A questão (f) solicitava que as duplas comparassem os retângulos construídos pelos colegas e que verificassem se eles apresentam algo em comum, ou se os retângulos encontrados são semelhantes, ou são iguais, e com base nessas observações registrassem suas considerações. As duplas FG e MY não responderam a questão. Quanto às demais duplas, vejamos o que cada uma delas respondeu:

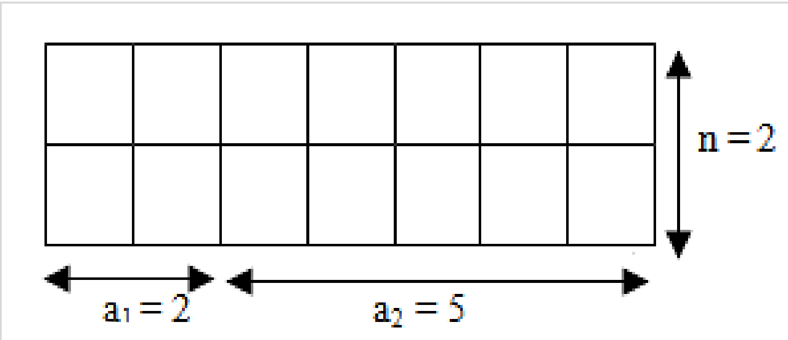
- Dupla AB: “Sim, porque eles se duplico”; (Sic)
- Dupla CD: “Sim. São semelhantes por que é a mesma quantidade de quadrados”;
- Dupla EQ: “São sim, por que eles fazem seguindo dividindo os números e formando os quadrados”;
- Dupla LS: “Sim! Porque ser semelhante”;

- Dupla OP: “por que todo almenta são em dois e dois”.(Sic)

As duplas AB e EQ, afirmaram que sim, mas não especificaram se os retângulos são semelhantes ou são iguais, quanto às suas justificativas, estas não foram claras. As duplas CD e LS afirmaram que os retângulos são semelhantes, tendo a dupla CD mencionado que esta semelhança está ligada ao fato dos retângulos comparados terem as mesmas quantidades de quadrados. Já a dupla OP não soube responder a questão.

A questão (g) convida os estudantes a observarem os retângulos, analisarem como foram construídos e verificar se alguém representou de acordo com a imagem (Figura 60) apresentada na atividade, na qual o retângulo referente à soma S_2 , tem a base formada pela quantidade de quadrados do primeiro termo (a_1) da sequência, somada à quantidade de quadrados do segundo termo(a_2) da sequência, e tem a altura dois, que é justamente a ordem da soma S_2 .

Figura 60 – Retângulo Trazido na Questão (g)



Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador

As duplas MY e OP não responderam a questão. Vejamos a seguir o que cada uma das demais duplas trouxe como resposta:

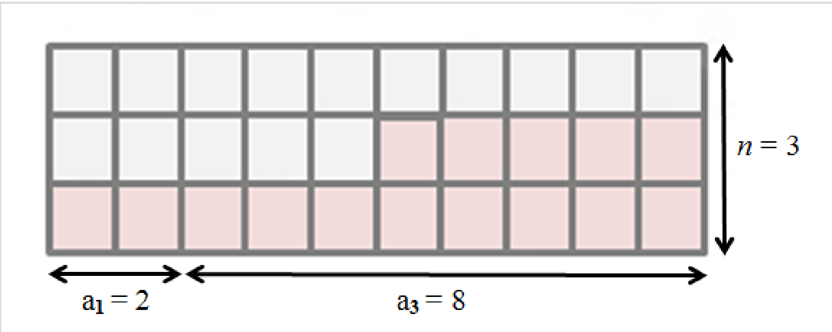
- Dupla AB: “7 abaixo de 7”;
- Dupla CD: “Foram construídos 7 em cima e 7 em baixo um ao lado do outro”;
- Dupla EQ: “Foram construídos 14 quadrados e formados em retângulos usando 4 quadrados em lado”;
- Dupla FG: “É formado por 14 quadrados e dividido por 4 para dar 14”;
- Dupla LS: “Foi construído pela ordem 2 pelo termo 7. Que deu 14 duplicado”;

Nenhuma das duplas conseguiu entender que a questão trazia esse retângulo como parâmetro para comparação com os demais retângulos formados por elas. Todas as duplas que responderam, trouxeram afirmações relativas ao retângulo da imagem, fizeram observações sobre sua formação, entretanto, nenhuma comparação foi feita com a maneira como foram construídos os retângulos na questão (e) por eles mesmos. A dupla que apresentou uma descrição mais completa foi a dupla LS, que observou o fato do retângulo apontar a ordem dois, o que implica na relação com a soma S_2, além de citar também a duplicação do número de quadrados de sete para quatorze.

A questão (h) solicita que os estudantes, caso não tenham representado os retângulos de acordo com o modelo exposto na questão (g), tentem formá-los fazendo uso da malha quadriculada (que nesta atividade foi substituída por papel milimetrado) ou usando os quadrados produzidos em EVA.

Para que as duplas respondessem a atividade, elas precisavam primeiramente entender como o retângulo da questão (g) foi construído e, a partir daí, comparar com seus retângulos e verificar se eles foram representados de acordo com o modelo indicado ou se foram feitos de maneira diferente, podendo ajustá-los de acordo com o modelo indicado, cuja base é formada pela quantidade de quadrados do primeiro termo (a_1) da sequência somada à quantidade de quadrados do segundo termo (a_2) da sequência, e tem a altura igual a dois, que é justamente a ordem da soma S_2. Para entendermos melhor, observemos a Figura 61, que ilustra o retângulo formado a partir das somas S_3, seguindo o modelo indicado.

Figura 61 – Retângulo formado a partir da Soma S_3



Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador

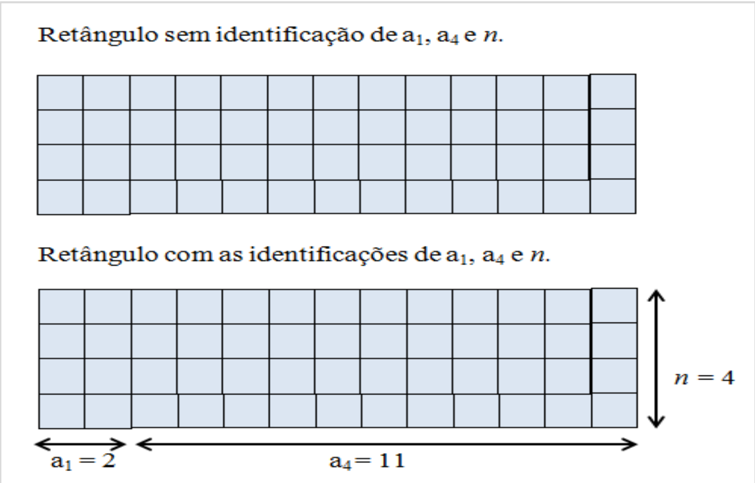
Nenhuma das duplas respondeu a questão. Tal fato pode estar ligado ao que já havia sido evidenciado na questão (g), que nenhuma das duplas conseguiu perceber que a questão trazia o retângulo como parâmetro para comparação com os demais retângulos formados por elas. Mediante esse fato, as duplas não conseguiram responder nem representar os retângulos seguindo o modelo indicado.

A questão (i) pede que os estudantes façam uma análise de três casos relacionados aos retângulos: Caso $S_{3;}$ Caso S_4; e Caso S_1.

No caso S_3 , é solicitado que os estudantes representem o retângulo da soma $S_{3,}$ de maneira que a sua base seja formada por a_1 somado ao a_3, e que sua altura seja n. Para responderem a esse item, os estudantes precisariam apenas representar o retângulo referente à soma S_3 de acordo com o modelo indicado na questão (g). Essa representação é justamente a exposta na figura 55.

No caso $S_{4,}$ a atividade traz sem identificação alguma, uma figura do retângulo relativo à soma S_4, e solicita que os estudantes identifiquem nesta figura onde podem estar localizados a_1, a_4 e *n*. Vejamos na Figura 62, respectivamente o retângulo sem a identificação (já trazido na questão) e o retângulo com a identificação, que é justamente a resposta esperada.

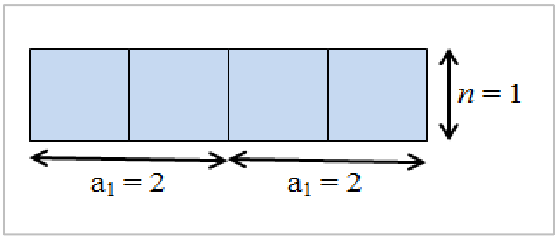
Figura 62- Retângulo Referente à Soma S_4



Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador

No caso S_1, mais uma vez é pedido para os estudantes que representem um retângulo segundo o modelo que vem sendo indicado, só que desta vez o retângulo deve ser referente à soma S_1. Vejamos na Figura 63, a representação do referido retângulo.

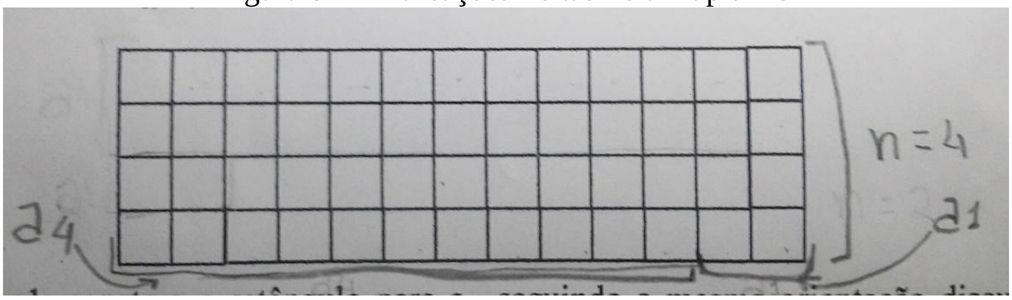
Figura 63 - Retângulo relativo à soma S_1



Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador

As duplas AB, CD, EQ, LS, MY e OP não responderam nenhum dos casos da questão (i). A dupla FG, respondeu apenas um dos casos, que foi o caso S4, no qual identificou corretamente as posições de a_1, a_4 e *n*, mesmo tendo na base do retângulo, marcado primeiro o $\mathbf{a_4}$ e depois o $\mathbf{a_1}$, como pode ser visto na Figura 64:

Figura 64 – Marcações Feitas Pela Dupla FG



Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador

Em relação à questão (j), a mesma solicitava que os estudantes encontrassem o número de quadrados em cada um dos retângulos formados, fazendo uso da fórmula do cálculo de área. Para responder este item, as duplas precisavam saber que para calcular a área de um retângulo, é preciso multiplicar a medida da base pela medida da altura.

Nenhuma das duplas apresentou uma resposta para a questão. Esse fato ocorreu provavelmente, pela dificuldade apresentada pelas duplas nos itens anteriores, referentes à formação dos retângulos.

Por fim, a questão (k), solicitava que os estudantes, tomando por base os retângulos formados, determinassem uma expressão algébrica que lhe permite calcular o número de quadrados de $S_{\mathbf{n}}$. Para que os estudantes respondessem esta questão, os mesmos precisariam observar o modo como os retângulos estavam sendo formados. Todos os retângulos, escritos de acordo com o modelo indicado na questão (g), tinham altura igual a *n*, e base formada pelas medidas somada de $a_{\mathbf{1}}$ com $a_{\mathbf{n}}$.

Entendendo o modo de formação dos retângulos, os estudantes tinham que lembrar também que os mesmos eram formados pelo dobro do número de quadrados da soma a qual eles estavam associados. Logo, a quantidade de quadrados de $\mathbf{S_n}$ é igual ao número de quadrados do retângulo ligado a soma S_n dividido por dois. Com isso bastaria usar a fórmula de cálculo da área do retângulo e determinar uma expressão para $\mathbf{S_n}$.

Considerando que a base do retângulo é igual a $\mathbf{a_1 + a_n}$ e a altura é igual a $\boldsymbol{n}$, a área do retângulo é a multiplicação entre essas medidas, sendo igual a $\mathbf{(a_1 + a_n) \cdot} \boldsymbol{n}$. Como a área vai indicar justamente a quantidade de quadrados no retângulo (o que já foi discutido na questão (j)), e essa quantidade é o dobro da quantidade de quadrados de $\mathbf{S_n}$, uma expressão para $\mathbf{S_n}$ é $\mathbf{S_n = [(a_1 + a_n) \cdot n]/2}$. Essa expressão, corresponde à fórmula da soma de uma Progressão Aritmética.

Nenhuma das duplas conseguiu apresentar uma expressão algébrica para $\mathbf{S_n}$. Acreditamos que este fato tenha ocorrido pelos problemas que as duplas apresentaram na resolução das questões desta atividade, principalmente nas questões a partir da questão (g).

A sistematização da atividade buscou discutir de forma detalhada todas as questões que integraram a primeira e a segunda parte desta ultima atividade do nível avançado. Houve mais interação dos estudantes nas questões relativas à primeira parte da atividade, justamente pelo fato de as duplas terem se saído melhor nela. Entretanto, o pesquisador encaminhou a discussão juntamente com as equipes, de modo que as questões como um todo fossem discutidas e respondidas.

Em relação aos objetivos para esta atividade, a mesma buscou contemplar os objetivos específicos já procurados na Atividade 1 e na Atividade 2 deste nível, que foram os de: desenvolver generalizações a partir de padrões de regularidade; construir tabelas a partir de padrões de regularidade; construir expressões algébricas que representem generalizações de padrões de regularidade; construir gráficos no plano cartesiano a partir de padrões de regularidade; explorar relações funcionais a partir de padrões de regularidade. Mas esta atividade ainda buscou, além dos objetivos já mencionados, contemplar também o objetivo específico de: obter a fórmula do termo geral de uma Progressão Aritmética e também da soma de uma progressão aritmética.

Os objetivos acima mencionados, não foram alcançados pela totalidade das duplas, principalmente no momento de resolução das atividades. Entretanto, o pesquisador teve o cuidado de buscar trabalhar cada um desses objetivos no momento de sistematização e, principalmente, focar no objetivo de obter a fórmula do termo geral de uma progressão aritmética e também da soma de uma progressão aritmética, tendo em vista que esse objetivo não havia sido contemplado em questões anteriores, e também pelo fato de nenhuma das duplas ter conseguido determinar, no momento de resolução da atividade, uma expressão algébrica que represente a fórmula da soma de uma Progressão Aritmética.

Observando as atividades em todos os níveis, foi possível perceber que a segunda parte da Atividade 3 do nível avançado, foi a atividade na qual os estudantes apresentaram maior grau de dificuldade. Ao refletir sobre os motivos que levaram isso a acontecer, podemos indicar como um dos motivos, o fato da atividade ter se tornado muito extensa, e para responderem a segunda parte da atividade, os estudantes precisavam recorrer à primeira parte, já que havia uma continuidade entre tais partes.

Ao olhar o conjunto de atividades do nível avançado, percebemos que levando em consideração os momentos de resolução das atividades e também os momentos de sistematização das mesmas, o objetivo geral proposto para o referido nível que foi de explorar padrões envolvendo relações funcionais, foi contemplado.

5. AS SITUAÇÕES DIDÁTICAS NA VIVÊNCIA DA PESQUISA

Após a descrição e análise das atividades desenvolvidas na sequência didática apesentadas no capítulo anterior, buscamos neste capitulo destacar as relações entre a vivência com os estudantes e a *Teoria das Situações Didáticas* de Guy Brousseau – TSD (1986).

Dessa forma, retomaremos os conceitos de *contrato didático* e de *devolução* presentes na TSD para interpretar as condições nas quais as situações se desenvolveram e revisitaremos a tipologia das *situações didáticas* trazendo exemplos que emergiram na vivência da pesquisa em sala de aula com os estudantes.

É importante salientar que estas tipologias “se entrelaçam fortemente, umas em relação às outras” (FREITAS, 2009; p.77). Assim, um mesmo problema pode implicar em uma tipologia de *situação didática* para uma dupla, e para outra dupla uma tipologia diferente, ou até mesmo, a dupla pode desenvolver diferentes tipologias dentro de um só problema. Tal fato poderá ser verificado na continuidade de nossa escrita.

As situações presentes em nossa sequência didática foram colocadas para os estudantes como situações *a-didáticas*, considerando que o pesquisador não teve interferência direta sobre os momentos de resolução dos problemas propostos, no primeiro momento da intervenção. Dentro destas situações *a-didáticas*, os estudantes puderam se deparar com os diferentes tipos de situações didáticas mediante a interação com o *meio* (sequência didática, matérias, colegas e professor), a saber, *situações de ação, situações de formulação* e *situações de validação*.

No segundo momento da intervenção de cada atividade, ocorreram as *situações de institucionalização,* onde, juntamente com os demais estudantes, as duplas também interagiram com o professor.

A seguir, buscaremos trazer exemplos dessas *situações* presentes em cada um dos três níveis (Nível introdutório, Nível intermediário e Nível Avançado) de nossa sequência didática e percorrendo os dois momentos da intervenção. Isso não significa afirmar que listaremos e classificaremos todas as *situações didática* ocorrentes, mas significa que traremos evidências pontuais de que elas emergiram em diferentes circunstâncias no desenvolvimento de nossa pesquisa.

5.1 O contrato didático e a devolução na vivência da pesquisa

O contrato didático está relacionado ao conjunto das regras explicitas e implícitas que organizam o espaço escolar da sala de aula, neste incluídas as relações de aprendizagem estabelecidas entre professor e aluno, na qual não há necessariamente um documento listando estas regras, mas existem por parte tanto do professor, quanto dos estudantes, expectativas quanto ao cumprimento das mesmas.

De acordo com Reis e Allevato (2015, 262), o c*ontrato didático* é "o regulador das intenções do aluno e do professor diante da situação didática". Ainda segundo os autores, a aceitação do *contrato didático* acontece, quando os estudantes se mobilizam na busca de resolução dos problemas propostos, e o professor, toma consciência que não deve intervir na transmissão direta de conhecimentos.

Diante do entendimento do que é o contrato didático, podemos afirmar que em nossa pesquisa, houve uma ruptura em relação ao que os estudantes esperam tradicionalmente quanto ao desenvolvimento de atividades, considerando que, na maioria dos casos, apresentam dependência do professor em momentos de resolução. Esta dependência está ligada a falta de segurança dos estudantes quanto as suas interpretações relativas aos problemas, o que os faz buscar no professor elementos para suprir essa carência. Também está relacionada à busca de indicações de caminho e de conhecimentos prévios que podem ser utilizados para alcançarem soluções. Todos estes fatores tornam os estudantes menos autônomos ao lidarem com as atividades propostas.

Em nossa pesquisa as atividades foram tomadas como situações a-didáticas. De acordo com D'Amore (2007), em uma *situação a-didática*, estão em jogo os estudantes e o objeto de conhecimento, mas, neste caso, não o professor. Os estudantes precisaram romper com a dependência do professor, e se tornarem autônomos. Isso, só foi possível pelas regras estabelecidas por meio do contrato didático.

A autonomia dos estudantes precisou ser instigada para que pudesse efetivamente acontecer. Isso se deu justamente pela noção de devolução, a qual constitui parte essencial do contrato didático. De acordo com Brousseau (2008, p.91) "A devolução é o ato pelo qual o professor faz com que o aluno aceite a responsabilidade de uma situação de aprendizagem (didática) ou de um problema e assume ele mesmo as consequências dessa transferência".

Assim, os estudantes conseguiram desenvolver interesse pessoal pelos problemas que lhes foram propostos nos momentos de situações a-didática e, com isso, os enxergaram como seus, empreendendo a mobilização de conhecimentos que já possuíam, na busca de soluções.

Podemos, então, afirmar que os conceitos de contrato didático e de devolução foram de extrema importância no desenvolvimento da pesquisa, constituindo-se como elementos fundamentais para a aplicação da sequência didática em sala de aula e para a construção de novos conhecimentos por parte dos estudantes.

5.2 As situações de Ação

Como já abordado em nosso referencial teórico, uma *situação didática* pode ser dita uma *situação de ação* quando o sujeito encontra-se diante de um problema (meio) e, na busca pela solução do problema, o sujeito realiza ações imediatas, que, em alguns momentos ocasionam erros, em outros momentos ocasionam acertos, implicando na produção de conhecimentos mais intuitivos do que teóricos.

Neste sentido, os conhecimentos produzidos mediante a ação do sujeito sobre o problema, advêm das respostas emitidas por ele, e mediante a observação das regularidades presentes nessas respostas. Logo, em uma *situação de ação* se o meio emite respostas positivas diante das ações tomadas pelo estudante, estas decisões podem ser observadas e consideradas em situações futuras. Se o meio traz respostas negativas, estas decisões podem ser revistas e modificadas (BROUSSEAU, 2008).

Buscaremos então exemplificar, mediante as atividades propostas, momentos em que os estudantes tiveram a oportunidade de vivenciar *situações de ação*. Vejamos a seguir alguns exemplos percorrendo os três níveis da sequência didática.

Exemplo 1

Com a questão (a) da Atividade 1 do nível introdutório (ver Apêndice A), encontramos um exemplo de *situação de ação.* A questão solicitava que os estudantes identificassem quais figuras ocupariam as posições 11ª, 14ª e 17ª da sequência formada por círculos, quadrados e triângulos. A Dupla KL, conseguiu determinar que estas posições eram ocupadas por quadrados, e justificou afirmando: “montando as pessas pude chegar a conclusão” (sic). É possível perceber, que a dupla chegou à resposta correta por meio da ação de dar continuidade à sequência. Para isso, usou as peças em material emborrachado que foram distribuídas para os estudantes. A dupla observou o problema, agiu sobre o mesmo e obteve respostas por meio de um método mais intuitivo do que teórico, de apenas dar continuidade à sequência.

Exemplo 2

Outro exemplo de *situação de ação* pôde ser encontrado com a questão (b) da Atividade 1 do nível introdutório da sequência didática (ver Apêndice A). Tal questão solicitava que os estudantes dessem continuidade à sequência por meio de desenhos, e foi constatado que as duplas não apresentaram dificuldades, tendo em vista que já na questão (a) da mesma atividade, todas as duplas haviam dado continuidade à sequência, fosse mentalmente, por meio de desenhos ou usando as figuras em material emborrachado distribuídas para os estudantes. Neste caso, os estudantes, observaram como o padrão estava sendo formado e realizam a ação de reproduzi-lo, dando continuidade ao mesmo, mais uma vez de maneira mais intuitiva do que teórica.

Exemplo 3

Uma *situação de ação* pôde ser identificada com questão (a) da Atividade 3 do nível intermediário (ver Apêndice B). Tal questão solicitava que os estudantes preenchessem uma tabela que relacionara a ordem à quantidade de botões em cada termo da sequência. Identificamos neste exemplo, uma *situação de ação*, pelo fato de que os estudantes que responderam a questão, o fizeram mediante a observação do problema e a mobilização dos conhecimentos que já possuíam (conhecimentos estes construídos durante o desenvolvimento da sequência didática, tendo em vista que a observação de regularidades vinha sendo trabalhada desde o nível introdutório da sequência didática), para que, com base na observação da sequência, conseguissem perceber e identificar termos de ordens posteriores que completariam a tabela.

Exemplo 4

Na questão (a) da Atividade 1 do nível avançado (ver Apêndice C), os estudantes deveriam relacionar os palitos de fósforo com os segmentos de reta que formam a sequência pictórica e representar o quinto e sexto termos da sequência. Das oito duplas de estudantes que participaram da atividade, sete delas (AB, CD, FG, KL, MY, OP e VW) conseguiram representar o quinto termo e o sexto termo da sequência usando palitos de fósforo e trazer essa representação por meio de desenho em seus registros de respostas das questões. Percebemos aqui um exemplo de *situação de ação*, tendo em vista que os estudantes conseguiram observar o problema, e agir sobre ele, representando termos fazendo uso de palitos de fósforo e posteriormente representando-os por meio de desenhos.

Exemplo 5

É possível identificar um exemplo de *situação de ação* com a questão (b) da Atividade 1 do nível avançado (ver Apêndice C). Os estudantes eram questionados em relação à quantidade de palitos que seria necessária para construir o nono e o vigésimo termos da sequência. A dupla MY conseguiu determinar as quantidades corretas de cada um dos termos, e ainda justificou afirmando: “Por eu segui a sequência” (Sic). Logo, a dupla afirma ter dado continuidade à sequência para chegar ao resultado. A ao responder a referida questão, fez uso da ação de dar continuidade à sequência para determinar o resultado. O fato de essa dupla ter vivenciado uma situação de ação nessa atividade não significa que todas as demais duplas obrigatoriamente vivenciaram da mesma forma, fato este que poderá ser verificado no Exemplo 5 das *Situações de Formulação*, que trata desta mesma atividade envolvendo outra dupla de estudantes.

Exemplo 6

Na questão (a) da Atividade 2 do nível avançado (ver Apêndice C), foi solicitado que os estudantes dessem continuidade à sequência (a qual apresentava os três primeiros termos formados por quadrados em forma de L), construindo os próximos cinco termos, fazendo uso de malha quadriculada. Dentre as duplas que responderam, as Duplas AB, CY, FG, KS e OP conseguiram responder corretamente ao que era pedido. Observaram que os termos da sequência eram formados por quadrados e representaram os termos seguintes fazendo uso de papel milimetrado (usado como malha quadriculada). Ou seja, na busca pela solução do problema, as duplas realizaram a ação imediata de observar e reproduzir o padrão pictórico no papel milimetrado, obtendo êxito em suas respostas.

5.3 As Situações de Formulação

De acordo com nosso referencial teórico, em uma *situação de formulação* os estudantes fazem uso de modelos ou esquemas teóricos explícitos ao trabalharem com a resolução de um problema. Nesse tipo de *situação didática*, os estudantes fazem afirmações baseadas nas suas interações com o problema, entretanto, não há ainda uma obrigação de verificação da validade dessas afirmações, mesmo que haja intenções da validação futura.

De acordo com Brousseau (2008, p. 29), "a formulação de um conhecimento corresponderia a uma capacidade do sujeito retomá-lo (reconhecê-lo, identificá-lo, decompô-lo, e reconstruí-lo em um sistema linguístico)." Neste sentido, ainda que não haja uma necessidade imediata de validação das afirmações feitas pelos estudantes, ao formularem um determinado conhecimento, deverão ter a capacidade de retomá-lo em problemas futuros.

A partir de agora, traremos exemplos de momentos em que os estudantes vivenciaram *situações de formulação* durante o desenvolvimento da sequência didática, em nossa pesquisa.

Exemplo 1

Voltamos a mencionar a questão (a) da atividade 1 do nível introdutório (ver Apêndice A), já citada no Exemplo 1 das *situações de ação*. Tal fato vem reforçar que um mesmo problema (meio) pode implicar em diferentes tipologias de *situações didáticas* para os estudantes. A questão solicitava que os estudantes identificassem quais figuras ocupariam as posições 11ª, 14ª e 17ª da sequência. A dupla AB afirmou "Todos são quadrados por que ele vem em intervalo de três". Tal situação se constitui como uma *situação de formulação,* pelo fato dos estudantes terem feitos afirmações sobre o que foi observado no problema. Neste caso, as afirmações são compostas por argumentos matemáticos, tendo em vista que a dupla observou que os quadrados aparecem em intervalos de três.

Exemplo 2

É possível perceber, com a questão (c) da Atividade 3 do nível introdutório (ver Apêndice A), um exemplo de situação de formulação. A questão indagava sobre quantos meninos e quantas meninas teria uma sequência como a em estudo, quando esta fosse composta por 600 crianças. A dupla IJ respondeu a questão corretamente, identificando que teria quatrocentos meninos e duzentas meninas. Além disso, tal dupla afirmou, ao justificar como respondeu a questão: “Se a ordem é 2 meninos e 1 menina é só multiplicar o número de meninos e meninas e depois somar”, e, além de conseguir responder, conseguiu fazer uma afirmação, em relação ao modo como essa resposta foi pensada por eles. Ainda que a dupla IJ não tenha provado se a afirmação feita realmente era correta, do ponto de vista matemático ela vivenciou uma situação de formulação ao responder a questão.

Exemplo 3

A questão (a) da Atividade 1 do nível intermediário (ver Apêndice B), apresenta uma sequência formada por um padrão pictórico repetitivo, no qual se alternam figuras de lápis e borrachas. Foi perguntado se existe alguma relação entre as figuras (termos) e a posição (ordem) que elas ocupam na sequência. A dupla IJ afirmou existir uma relação entre a ordem e os termos: “Sim. Que na sequência a quantidade dos componentes são iguais, sendo: um lápis e uma borracha; repetidamente”. Mesmo a dupla não identificando o fato dos lápis ocuparem ordens ímpares e as borrachas ocuparem ordens pares, que seria a relação esperada entre ordens e termos, a mesma conseguiu observar a sequência e fazer afirmações com base nela. Ainda que não se tenha uma necessidade de prova imediata destas afirmações, o fato dos estudantes as terem produzido, constitui uma situação de formulação.

Exemplo 4

A questão (a) da Atividade 2 do nível intermediário (ver Apêndice B) apresenta um sequência onde os termos são formados por quadrados, partindo do primeiro termo que possui dois quadrados e aumentando de dois em dois quadrados a cada termo. Logo, termos são múltiplos de dois e necessariamente pares. A atividade questiona se em algum momento a sequência apresentará um número ímpar de quadrados. Para responder a esta questão, os estudantes precisam observar como a sequência está sendo gerada. A dupla IJ, ao responder a questão, afirma: “Não. Pois 2 é par, e a sequência é feita de mais 2 quadrados sem parar”. Temos aqui, mais um exemplo em que a dupla observa o problema, e consegue fazer afirmações matemáticas baseadas no mesmo, o que reflete em uma *situação de formulação.*

Exemplo 5

Na questão (b), da Atividade 1 do nível avançado (ver Apêndice C), os estudantes eram indagados sobre a quantidade de palitos que era necessária para construir o nono e o vigésimo termo da sequência, além disso a questão pedia uma justificativa para resposta. Vemos um exemplo de situação de formulação, na resposta dada pela dupla JS, além da dupla ter identificado corretamente as quantidades, sendo o nono termo formado por doze palitos e o vigésimo termo formado por vinte e três palitos. Tal dupla fez uma afirmação sobre a formação dos termos de maneira geral: “porque em cima tem sempre 3 e em baixo o número em ordem”. A dupla JS, mesmo não provando matematicamente a veracidade de sua afirmação, observou a lógica de formação dos termos, e assim explica “em de cima tem sempre 3”, se referindo à parte fixa do padrão pictórico, a qual é formada por três segmentos organizados em formato triangular, e que “em baixo o número em ordem”, o que implica em que cada figura, abaixo do triângulo, é composta pela quantidade de segmentos referente à ordem numérica. Neste sentido o primeiro termo terá 3+1 seguimentos, já o segundo termo 3 +2 seguimentos, e assim sucessivamente. Logo, percebemos nesse exemplo, uma situação de formulação.

Exemplo 6

Com a questão (a) da primeira parte da Atividade 3 do nível avançado (ver Apêndice C), são identificados alguns exemplos de situação de formulação. Tal questão apresentava uma sequência formada por quadrados segundo uma progressão aritmética. Este item indagava os estudantes sobre o que eles perceberam em relação à formação da sequência. Trazemos aqui a resposta da Dupla CD que afirmou: “[...] a sequência está crescendo para direita, à medida que a ordem aumenta o termo aumenta três quadrados”. É possível perceber, que a dupla observou como a sequência esta sendo gerada, e com base em suas observações, conseguiu traçar afirmações relativas à sequência em estudo.

5.3 As Situações de Validação

De acordo com Brousseau (2008), os esquemas de ação e de formulação, provocam processos de correção. Logo, surge outro tipo de *situação didática*, que são as *situações de validação*. Segundo Freitas (2002, p. 80) neste tipo de situação, “o trabalho do aluno não se refere somente às informações em torno do conhecimento, mas sim a certas afirmações, elaborações, declarações a propósito deste conhecimento". Neste sentido, constitui-se necessário, elaborar uma prova a respeito das afirmações que foram feitas.

Com base em nosso referencial teórico, nas *situações de validação*, o aluno passa a fazer uso de mecanismos que ponham à prova as afirmações feitas por eles diante dos problemas, verificando se estas são, ou não, corretas.

A seguir, traremos exemplos de *situações de validação* identificados durante os momentos de desenvolvimento da sequência didática, em nossa pesquisa. Ressaltamos que, não foram identificados exemplos de *situações de validação* no nível introdutório de nossa sequência didática.

Exemplo 1

A questão (a) da Atividade 2 do nível intermediário (ver Apêndice B), já havia sido mencionada no Exemplo 4 das *Situações de Formulação*. A mesma questiona se em algum momento a sequência apresentará um número ímpar de quadrados. Tal questão aparece aqui, tendo em vista que a dupla OP ao respondê-la, verificou que o primeiro termo da sequência é formado por dois quadrados, o segundo termo é formado por quatro quadrados, o terceiro termo é formado por seis quadrados e o quarto termo é formado por oito quadrados. Além disso, a dupla escreveu os termos da sequência na forma "2.n". Se os termos são da forma "2.n", significa que são múltiplos de dois e que também são pares, logo, não terá números ímpares de quadrados na sequência. A resposta dada pela dupla pode ser verificada por meio da Figura 19. Tal situação pode ser caracterizada como uma *situação de validação*, pelo fato da dupla ter conseguido chegar a uma "prova"/generalização, e ter escrito matematicamente uma expressão algébrica que assegura que a sequência em momento algum apresentará um número ímpar de quadrados.

Exemplo 2

A questão (d) da Atividade 1 do nível avançado (ver Apêndice C) solicitou que os estudantes escrevessem o que eles perceberam sobre o aumento de palitos de um termo para o termo seguinte, na sequência em estudo. Nesta, é possível verificar que a dupla KL afirmou: "Vai aumentando sempre de 1 em 1 palitos". A referida sequência possui uma parte fixa formada por três palitos e de um termo para o termo seguinte é acrescentado um palito. Por esse motivo a dupla KL menciona o aumento de um em um. Entretanto, essa dupla não só formulou uma afirmação na questão (d), como na questão (e) da mesma atividade, conseguiu representar matematicamente, por meio de uma expressão algébrica, como os termos da sequência estavam sendo gerados (ver Figura 31). Neste sentido, podemos perceber que a dupla afirmou e fez uso de mecanismo da própria Matemática para confirmar que sua afirmação era válida. Neste sentido, percebemos aí um exemplo de situação de validação.

Exemplo 3

A questão (f) da Atividade 2 do nível avançado (ver Apêndice C), solicita que os estudantes relacionem a sequência pictórica a alguma sequência numérica. A dupla OP respondeu fazendo uso de um desenho (ver Figura 41) e associou corretamente a sequência pictórica em estudo à sequência numérica dos números ímpares. Posteriormente, na questão (g) da mesma atividade, a dupla fez uso da expressão algébrica $2n - 1$, como expressão para representar a quantidade de quadrados de cada um dos termos da sequência, de acordo com sua respectiva ordem. Logo, a dupla assegura matematicamente a ligação da sequência pictórica com a sequência numérica dos números ímpares, ao conseguir determinar a expressão algébrica que também é uma representação algébrica de um número ímpar. Portanto, temos aqui, mais um exemplo de *situação de validação*.

Mediante todos os exemplos discutidos no presente tópico, podemos afirmar a presença das diferentes tipologias das *situações didáticas*, nos momentos de desenvolvimento da sequência didática, em nossa pesquisa. Fica claro, que a sequência e o conjunto de materiais ou recursos é apenas o meio, entretanto, o que determina a tipologia da *situação didática*, é justamente a forma como os estudantes, em suas particularidades, e em seus diferentes conhecimentos, lidam com o problema proposto, e as ações que estes empreendem na busca pela solução do problema.

5.4 As Situações de Institucionalização

As *situações de institucionalização* são de extrema relevância em nossa pesquisa, e foram apresentadas anteriormente como momentos de sistematização, citados em nosso capítulo 4. As *situações de institucionalização* pretendem conferir o caráter de objetividade e universalidade para o conhecimento. Neste sentido, o conhecimento necessita apresentar para o aluno e para a sociedade um status universal, que rompa com as limitações decorrentes das particularidades do problema estudado (FREITAS, 2002). Buscando identificar os conhecimentos formulados pelos estudantes de maneira incorreta, além de dar destaque aos conhecimentos aceitos pela sociedade e pela cultura, dando aos conhecimentos o status de saber (BROUSSEAU, 2008).

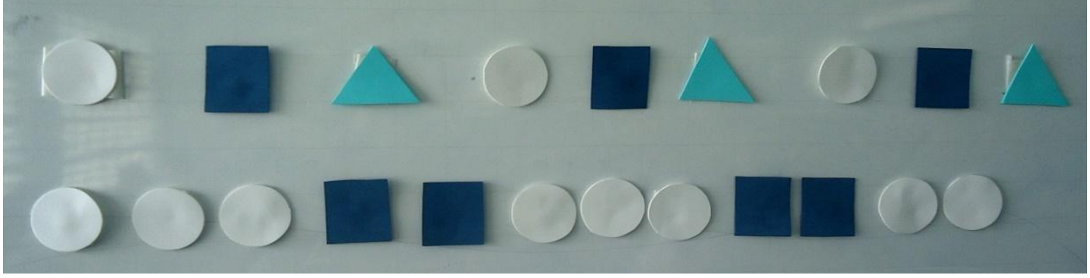
Durante tais situações, o debate era realizado em conjunto, pesquisador e todas as duplas de estudantes, ao final de cada uma das atividades que compunham a nossa sequência didática. Vejamos, a seguir, trechos extraídos de nossas análises, nos quais são relatados momentos de *situações de institucionalização:*

Exemplo 1

No desenvolvimento da Atividade 2 do nível introdutório da sequência didática (Capítulo 4), enfatizamos um momento onde foi discutido juntamente com o pesquisador e os estudantes o significado de sequência pictórica e sequência repetitiva durante o momento de sistematização da atividade. A relevância deste momento está baseada justamente no fato de que durante o desenvolvimento da atividade foram trabalhadas sequências pictóricas e sequências repetitivas, mas a apresentação ou definição desses tipos de sequência só ocorre de fato no momento de sistematização. Logo, temos nesse exemplo uma *situação de institucionalização*.

Vejamos as Figuras 65 e 66, a seguir. A Figura 65 ilustra a utilização de figuras geométricas construídas em EVA no momento de sistematização junto aos estudantes. Estas figuras foras dispostas no quadro branco, e utilizadas na discussão sobre o significado de sequência pictórica e sequência repetitiva. A Figura 66 ilustra os estudantes em sala de aula, durante o referido momento de sistematização. As trajas utilizadas sobre os olhos dos estudantes, têm a finalidade de não permitir a identificação dos mesmos, no sentido de preservar suas identidades.

Figura 65 - Material Usado Para Discutir os Significados de Sequência Pictórica e Sequência Repetitiva



Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador

Figura 66 – Estudantes no Momento de Sistematização da Atividade 2 do nível introdutório

Fonte: Arquivo pessoal do pesquisador

Exemplo 2

Vejamos a transcrição do momento de sistematização (registrado em vídeo) da questão (c) da Atividade 2 do nível intermediário, para ilustrar uma das situações de institucionalização vivenciadas na pesquisa. A transcrição registra um momento onde o professor/pesquisador incentiva os estudantes a estabelecer relações entre o termo e a ordem de forma generalizada.

> **Pesquisador:** Existe alguma relação entre cada termo e a sua respectiva ordem? Qual é o primeiro termo?
> **Estudante Q:** Dois quadrados.
> **Pesquisador:** São dois quadrados o primeiro termo. E a ordem é o quê?
> **Estudante Q:** Par.
> **Estudantes J e N:** Dois.
> **Pesquisador:** A ordem é um. Não é o primeiro termo? Observem bem isso. Esse é o termo de primeira ordem. Está certo? Qual é o segundo termo?
> **Estudantes J e Q:** Quatro.
> **Pesquisador:** Quatro o quê?
> **Estudante J:** Quatro quadrados.
> **Pesquisador:** Qual é a ordem dele?
> **Estudante N:** Segunda ordem.
> **Pesquisador:** Qual é o terceiro termo?
> **Estudante A:** Seis
> **Pesquisador:** Seis? Qual é a ordem?
> **Estudante A:** Três.
> **Pesquisador:** Esse é o terceiro termo, ele está sendo formado por seis quadrados, mas, a ordem dele é três. O segundo termo é formado por quatro quadrados, a ordem dele é?
> **Estudantes J e N:** Dois.
> **Pesquisador:** O primeiro termo é formado por dois quadrados e a ordem dele é um. Qual relação vocês conseguem estabelecer entre o termo e a ordem?

Estudante J: Cada vez que os termos vão aumentando os pares vão aumentado.
Pesquisador: Se eu aumentar os termos a quantidade de quadrados aumenta. É uma relação, Mas, a gente consegue dizer mais sobre isso. Aumenta como?
Estudantes J e N: De dois em dois.
Pesquisador: De dois em dois. Por que? O primeiro termo, o termo de ordem um, tem quantos quadrados?
Estudantes N e Q: dois.
Pesquisador: O primeiro termo tem dois quadrados. E o segundo?
Estudante J: Quatro.
Pesquisador: Qual a relação entre dois e um?
Estudante A: Um mais um é dois.
Pesquisador: Qual a relação entre quatro e dois?
Estudante J: Dois mais dois é quatro.
Pesquisador: O que significa isso?
Estudante Q: São múltiplos de dois. O dobro.
Pesquisador: É isso aí. O termo de ordem três tem seis quadrados. O que acontece? De acordo com o que o nosso colega (Estudante Q) disse, a quantidade de quadrados é o dobro de que?
Estudante Q: Daquele negócio de cima.

Pesquisador: Da ordem? É isso?
Estudante Q: É.
Pesquisador: Então, o termo de primeira ordem tem duas vezes um quadrado, que dá dois. O termo de segunda ordem tem duas vezes dois quadrados, que dá quatro. O termo de terceira ordem tem duas vezes três quadrados, que dá seis. Conseguiram observar isso?
Estudante J: Sim.
Pesquisador: Isso vai se repetir sempre?
Estudante N: Sim.
Pesquisador: Qual é o próximo termo?
Estudantes J e N: Quatro.
Pesquisador: O termo de ordem quatro vai ter quantos quadrados?
Estudante A: Oito.
Pesquisador: Oito é duas vezes quatro?
Estudante J: É.
Aluno A: Sucessivamente assim né? (Sic)
Pesquisador: E assim... Se por um acaso, eu continuar seguindo a minha sequência e chegar a uma ordem qualquer, eu não sei qual é, e chamar essa ordem de *n*?
Estudante Q: Aí ia ficar n^2.
Pesquisador: n^2?
Estudante Q: É. Não é duas vezes *n* não?
Pesquisador: Duas vezes *n*...
Estudante Q: Há! É...
Pesquisador: n^2 é *n* vezes *n*. Ou seja, se eu chegasse lá em um termo qualquer, a quantidade de quadrados... Aliás, se eu chegasse a uma ordem qualquer, a quantidade de quadrados desse termo, dessa respectiva ordem, seria duas vezes *n*. Por que eu chamei a ordem de *n*. O que significa? Por exemplo: se eu chegasse lá no milésimo termo, quantos quadrados teriam?
Estudante Q: Mil... Ia ficar mil vezes mil, dois mil.
Estudante O: Dois mil.
Pesquisador: Mil vezes mil, dois mil? Certeza?

Estudante J: Não.
Pesquisador: É o que? Duas vezes mil que dá dois mil. Está certo? Deixa eu ver aqui quais são as próximas perguntas...

Na discussão da Atividade 2 do nível intermediário, os equívocos cometidos pelas duplas de estudantes foram discutidos e esclarecidos em conjunto com todas as duplas e o pesquisador, durante o momento de sistematização da atividade, tal fato pode ser verificado pela transcrição apresentada. Vemos neste exemplo, mais uma vez a importância de uma *situação de institucionalização*, que neste caso aponta para a discussão de equívocos cometidos pelos estudantes, os quais foram identificados e corrigidos, por meio do diálogo entre o pesquisador e toda a turma.

Exemplo 3

No desenvolvimento da Atividade 2 do nível avançado da sequência didática, durante o momento de sistematização, foram discutidas todas as questões pertencentes à atividade. Foi debatida uma divergência que ocorreu entre as respostas dadas para a questão (b), pelas duplas AB e FG, as quais responderam que o vigésimo termo da sequência tem trinta e nove quadrados e trinta e sete quadrados, respectivamente. Foi constatado, em discussão com toda a turma, que a resposta correta é trinta e nove quadrados. Vemos aqui, um relato de divergência de respostas entre duas duplas, sendo que a divergência foi discutida e a resposta correta foi determinada por meio da discussão entre todas a duplas e o pesquisador, o que demonstra mais uma vez a importância da *situações de institucionalização.*

Vejamos a transcrição deste momento de sistematização (gravado em vídeo) da questão (b) da Atividade 2 do nível avançado, para ilustrar uma situação de institucionalização:

Pesquisador: Quantos quadrados terá o vigésimo termo desta sequência? Como é que vocês responderam?
Estudante O: Trinta e nove.
Pesquisador: Alguém respondeu diferente?
Estudante L: Trinta e nove.
Pesquisador: E o seu? (Pergunta direcionada à dupla FG)
Estudante G: Trinta e sete.
Pesquisador: Tem alguma diferença aí. Tem que ver. Alguém respondeu de forma diferente?
Estudante L: Não.
Pesquisador: Então vamos lá. De um termo para outro aumenta quantos quadrados?
Estudante O: Dois.
Pesquisador: Dois? Dois quadrados. No oitavo termo tinha quantos? Vejam aí.
Estudante O: Quinze.

Pesquisador: No nono?
Estudantes A e O: Dezessete.
Pesquisador: No décimo?
Estudantes A e O: Dezenove.
Pesquisador: No vigésimo?
Estudante B: Trinta e três.
Pesquisador: Tem algum erro aí? Deu trinta e três?
Estudante L: Não.
Pesquisador: E agora?
Estudante O: E agora o senhor passa para próxima questão.
Pesquisador: Não. A gente tem que saber. Vai ter quantos quadrados o vigésimo termo? Quem fez, fez como?
Estudante A: Trinta e nove.
Pesquisador: Quem chegou a trinta e nove foi dessa forma? Acrescentando de dois em dois?
Estudante A: Foi.
Pesquisador: Você fez como? (Pergunta direcionada ao estudante O)
Estudante O: Eu?...
Pesquisador: Sim. É melhor a gente fazer "direitinho" para não ter erro. Vamos lá. Vamos anotar. A tabela onde você construíram, vai até qual termo?
Estudante L: Dezenove.
Pesquisador: Até o décimo termo, não é isso? O décimo termo tem quantos quadrados?
Estudante O: Dezenove.
Pesquisador: O décimo primeiro?
Estudante L: Vinte e um.
Pesquisador: Décimo Segundo?
Estudantes A, L e O: Vinte e três.
Pesquisador: Décimo terceiro?
Estudantes A, L e O: Vinte e cinco.
Pesquisador: Décimo Quarto?
Estudante A, L e O: Vinte e sete.
Pesquisador: Décimo quarto?
Estudantes A, L e O: Vinte e sete.
Pesquisador: Décimo quinto?
Estudantes A, L e O: Vinte e nove.
Pesquisador: Décimo sexto?
Estudantes A, L e O: Trinta e um.
Pesquisador: Décimo sétimo?
Estudantes A, L e O: Trinta e três.
Pesquisador: Décimo oitavo?
Estudantes O: Trinta e cinco, trinta e sete...
Pesquisador: Décimo nono?
Estudantes A, L e O: Trinta e sete.
Pesquisador: Décimo nono vai dar trinta e sete, e vigésimo vai dar?
Estudantes A, L e O: Trinta e nove.
Pesquisador: Eu vejo que o erro foi só uma que você passou (afirmação direcionada à dupla FG). São trinta e nove quadrados no vigésimo termo.

Um fato importante que pode ser destacado, é que as situações de institucionalização demandaram menor tempo durante as aulas. A etapa de resolução das atividades ocupava um espaço de tempo maior durante o desenvolvimento da pesquisa. Tal fato ocorreu justamente pelos estudantes desenvolverem as atividades sem interferência direta do pesquisador, o que gerava um processo mais lento por parte dos mesmos, desde a leitura e interpretação das atividades, passando pela busca por caminhos que levassem a solução, reflexão a respeitos desses caminhos, até a formulação de afirmações e validação das mesmas. Ao chegarem à etapa de institucionalização do conhecimento, os momentos anteriores já proporcionavam maior embasamento para discussões e reflexões, o que tornava os momentos de *situações de institucionalização* mais rápidos que os demais.

Os momentos de institucionalização do conhecimento foram de extrema importância para que os estudantes percebessem os conhecimentos que foram construídos nos momentos de resolução das atividades, tendo em vista que, nas atividades eram trabalhadas as ideias, mas a formalização dos conceitos acontecia justamente nos momentos de discussão entre o pesquisador e toda a turma. Também destacamos a identificação e discussão de erros, além de debates sobre divergências de respostas apresentadas pelas duplas. Tudo isso só foi possível por meio da vivência de *situações de institucionalização*.

6 CONSIDERACÕES FINAIS

Na busca empreendida por repostas pertinentes ao nosso problema de pesquisa, a saber, *quais possibilidades, para o desenvolvimento do pensamento algébrico e das relações funcionais, podem existir na vivência de atividades com uso de padrões?* percorremos um longo caminho.

Iniciamos nossa caminhada na busca por compreender mais profundamente o que constitui o pensamento algébrico, as relações funcionais e como e por qual razão o trabalho com padrões é indicado para desenvolver esta forma de pensamento. No entanto, não bastava apenas entender sobre padrões e sua utilização em sala de aula, tivemos que buscar referenciais que trabalhassem a Álgebra em suas diversas características e suas concepções, as concepções de educação algébrica, os significados dos símbolos e das variáveis, a linguagem algébrica, as orientações trazidas nos PCN de Matemática para o Ensino Fundamental, relativas ao ensino de Álgebra e também as principais dificuldades dos estudantes ao lidarem com os conteúdos de álgebra. Neste sentido, podemos mencionar algumas referências que foram utilizadas em nossos estudos, como: Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), Usiskin (1995), Ponte, Branco e Matos (2009), os PCN (BRASIL, 1998), e SAEB (BRASIL, 2008).

Seguiram, portanto, momentos de estudo e de busca por atividades que permitissem o desenvolvimento do pensamento algébrico, mas que fizessem uso de padrões. Neste sentido, buscamos sugestões de atividades nas indicações trazidas por uma série de outros autores, entre eles, Vale et al (2011); Ponte, Branco e Matos (2009); Rêgo e Rêgo (2009). Estes autores foram fundamentais para que aprofundássemos nosso entendimento sobre o uso de padrões nas aulas de Matemática.

Dessa forma, ficou muito clara a ligação existente entre a utilização dos padrões e o ensino de Álgebra. Portanto, aos nossos olhos, e principalmente com base em nosso referencial teórico utilizado, podemos afirmar que é possível o desenvolvimento de propostas de ensino de Álgebra baseada na utilização de padrões.

Considerando o fato de que buscávamos compreender as possibilidades para o desenvolvimento do pensamento algébrico por meio do uso de padrões, resolvemos também aplicar à nossa proposta a *Teoria das Situações Didáticas – TSD* de Guy Brousseau (1986). Tal decisão ocorreu uma vez que a teoria traz contribuições relativas ao entendimento de como pode ocorrer a aprendizagem da Matemática no âmbito educacional, interpretando e proporcionando diferentes situações de aproximação dos estudantes com o objeto matemático no contexto de um *meio*. Assim, nosso estudo ganhou mais um elemento, além dos padrões e do ensino de Álgebra, que em nosso caso especificamente, fica voltada ao desenvolvimento do pensamento algébrico e das relações funcionais, as situações didáticas e demais conceitos dentro da TSD.

Tomando por base todos os elementos citados no parágrafo anterior, desenvolvemos uma sequência didática. Nosso ponto de partida foram as atividades encontradas no primeiro momento da pesquisa, as quais foram adaptadas de acordo com o ano de ensino a qual se destinava e ao conteúdo matemático que estaríamos abordando.

A sequência didática foi considerada, incialmente, como o instrumento para o levantamento de dados. Esta foi desenvolvida no momento experimental de nossa pesquisa, em uma turma do 9º Ano do Ensino Fundamental, da Rede Estadual de Ensino do Estado da Paraíba, na Cidade de Mamanguape/PB, da qual o pesquisador também é professor regente. Durante o desenvolvimento da sequência didática junto aos estudantes, que ocorreu entre os meses de julho e setembro do ano de 2015, participaram um total de vinte e quatro estudantes, durante um período de 26 horas/aula.

Organizados em duplas, os estudantes eram conscientes de seu papel autônomo na resolução das atividades propostas. Tal fato se deu baseado nos conceitos de *contrato didático* e de *devolução*, além de quê as atividades eram colocadas em nossa pesquisa como *situações a-didáticas* e nesses momentos, os estudantes tiveram a oportunidade de vivenciar *situações didáticas* de *ação*, de *formulação* e de *validação*. Todos os conceitos mencionados são elementos estruturantes da Teoria das Situações Didáticas.

Os estudantes foram organizados em duplas durante os momentos de resolução. Ao final de cada atividade trabalhada, era separado um tempo para que em conjunto, o pesquisador e todos os estudantes, debatessem e deixassem clara a importância dos saberes por eles formulados. Tal momento constituiu-se como a fase de sistematização do conhecimento, e estes eram tidos em nossa pesquisa como os momentos de vivência das *situações de institucionalização*.

Além da sequência didática, foram tomados como instrumentos de levantamento de dados, registros orais e escritos, fotografias e vídeos produzidos durante o desenvolvimento da sequência didática com os estudantes e também durante os momentos institucionalização do conhecimento, envolvendo o pesquisador e toda a turma.

Finalmente, após todos os caminhos trilhados, passamos a fase de descrição e análise dos dados. Em um primeiro momento esta análise se concentrou nas respostas dos estudantes e nos registros deles relativos ao desenvolvimento das atividades da sequência didática, voltada para a observação do desenvolvimento do pensamento algébrico e das relações funcionais, e posteriormente, em um segundo momento, na identificação de vivências de *situações didáticas* por parte dos estudantes, durante o desenvolvimento da fase experimental da pesquisa. Esse foi o caminho percorrido na pesquisa.

Considerando o objetivo geral formulado para este estudo, a saber, *investigar possibilidades para o desenvolvimento do pensamento algébrico por meio do uso de padrões na Matemática Escolar*, e aos objetivos mais específicos de *compreender processos de construção do pensamento algébrico e das relações funcionais por meio do desenvolvimento de uma sequência didática com uso de padrões; identificar no contexto da sala de aula as situações didáticas apresentadas pela Teoria das Situações Didáticas; e analisar a relação de uma sequência didática com as situações didáticas emergentes observando o desenvolvimento do pensamento algébrico e das relações funcionais com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental por meio de uso de Padrões,* afirmamos que alcançamos todos eles.

Quanto ao primeiro objetivo específico, afirmamos que a partir da construção e da intervenção da sequência didática em sala, houve uma aproximação nossa com as formas de pensamentos dos estudantes, pois identificamos fonte de dificuldades, mas também os conhecimentos prévios acionados. Considerando a própria estrutura da sequência em níveis, compreendemos que esses processos de pensamento avançam gradativamente quando estimulados e não são generalizáveis.

De fato, partindo da observação de regularidades nos dos padrões, os estudantes conseguiram avanços quanto ao pensamento algébrico, tendo em vista que foram realizadas generalizações, representações de generalizações na linguagem algébrica, assim como foram determinadas relações funcionais dos tipos: $\boldsymbol{n \pm a}$; $\boldsymbol{an \pm c}$; $\boldsymbol{an}$. Estes tipos de relações, são descritos por Ponte et al (2009), e foram discutidos em nosso referencial teórico.

Ainda, quanto às relações funcionais, os estudantes conseguiram desenvolver representações tabulares, representações algébricas e representações gráficas de funções, todas tomando por base o estudo de padrões e as relações existentes entre ordens e termos nas sequências. Neste sentido, consideramos que foi possível verificar diferentes processos que proporcionaram construção do pensamento algébrico e das relações funcionais por meio do desenvolvimento de uma sequência didática com uso de padrões. Vale lembrar que para este ano escolar (9º Ano), inserido no 4º ciclo (corresponde ao 8º Ano e 9º Ano), o estudo das funções apresenta ligação com os objetivos expressos nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para os anos finais do Ensino Fundamental (BRASIL, 1998, p.81), sendo um deles, o objetivo de "observar regularidades e estabelecer leis matemáticas que expressem a relação de dependência entre variáveis". Quanto às representações gráficas e tabulares, estas são mencionadas no mesmo documento, no objetivo de "traduzir informações contidas em tabelas e gráficos em linguagem algébrica e vice-versa, generalizando regularidades e identificar os significados das letras" (BRASIL, 1998, p.64).

A diversidade das atividades permitiu afirmar que esses processos de pensamento não são generalizáveis e dependem fortemente do que compõe o *meio*. Sendo assim, a sequência foi vista não apenas como instrumentos para o levantamento dos dados, mas como elemento constituinte do *meio.*

Sobre o segundo objetivo específico, é possível afirmar que foi identificado no contexto da sala de aula as *situações didáticas* apresentadas pela Teoria das Situações Didáticas, o que significa o alcance de nosso segundo objetivo específico.

Como mencionado anteriormente, foram verificados diversos momentos em que os estudantes tiveram a oportunidade de vivenciar as tipologias das *situações didáticas*, tais como: *situações de ação, situações de formulação; situações de validação* e as *situações de institucionalização.* Sobre elas podemos dizer que foram observados diversos momentos em que os estudantes tiveram a oportunidade de vivenciar diferentes tipos de situações didáticas. Embora não possamos afirmar que cada dupla vivenciou todas elas ao menos uma vez.

Também foi percebido que elas podem se configurar diferentemente para duplas distintas, mesmo em se tratando de uma mesma proposta de atividade. Isso foi destacado no texto no exemplo 5 das *situações de ação* e no exemplo 5 das *situações de formulação,* com as duplas MY e JS respectivamente.

Outro fato interessante que adveio da pesquisa foi que para o nível introdutório de atividades da sequência didática não foram identificadas *situações de validação*. Acreditamos que este fato esteja relacionado ao objetivo geral proposto para o nível, que era o de "proporcionar aos estudantes uma familiarização com os padrões por meio de uma sequência pictórica repetitiva". Logo, as atividades foram pensadas de maneira a contemplar esse objetivo, sendo assim as mesmas não demandavam uma necessidade de prova matemática, portanto não ocorreram *situações de validação.*

Sobre as *situações de institucionalização,* em especial, podemos reafirmar a importância desse momento, tendo em vista que já destacamos tal importância no exemplo1 onde o significado de sequência pictórica e sequência repetitiva foi discutido juntamente com o pesquisador e os estudantes durante o momento de sistematização da atividade, uma vez que estes conceitos foram construídos e não foram definidos nas atividades, demonstra a necessidade de organização e apresentação dos conceitos em estudo pelo professor. Além de que, as *situações de institucionalização* propiciam a identificação e discussão de erros, além de debates sobre divergências de respostas, como foi indicado nos exemplo 2 e 3 das referidas situações.

De forma geral, acreditamos que a vivência das diferentes *situações didáticas* se relaciona diretamente com a construção do conhecimento com significado para os estudantes e que a ausência de alguma delas pode fazer falta no processo de aprendizagem, já que segundo a TSD, a aprendizagem em Matemática se dá com a ocorrência das *situações didáticas*. Portanto, a ausência de vivências de uma das tipologias, pode significar a falta de elementos no processo de construção do conhecimento.

Por fim, sobre o nosso terceiro objetivo específico, também consideramos que o mesmo foi contemplado. Tomamos por base o fato de termos conseguido estabelecer as relações entre a sequência didática com padrões e a TSD, consequentemente, com as *situações didáticas* que emergiram no decorrer do desenvolvimento das atividades em sala de aula

A sequência didática desenvolvida e trabalhada junto aos estudantes estava estruturada em níveis. Cada um dos níveis foi formado por um conjunto de três atividades, estando todas elas relacionadas aos objetivos previstos para cada nível, conforme apresentado no Quadro 2. Neste sentido, ao final de cada nível, esperávamos que o conjunto de atividades proporcionasse o alcance dos objetivos determinados.

O nível introdutório da nossa sequência didática tinha como objetivo geral proporcionar aos estudantes uma familiarização com os padrões por meio de uma sequência pictórica repetitiva. O nível intermediário tinha como objetivo desenvolver a capacidade de identificação e continuidade de padrões para estabelecer generalizações, e por fim, o último nível, avançado, explorar padrões envolvendo relações funcionais.

Na análise do desenvolvimento das atividades do nível introdutório foi percebido que, as atividades conjuntamente permitiram que os estudantes atribuíssem significado para uma sequência pictórica e uma sequência repetitiva, ou seja, os estudantes conseguiram identificar e entender as características destes tipos de sequências. Perceberam nas sequências a unidade que se repete ciclicamente. Realizaram previsões sobre os termos da sequência, identificando os termos de ordens posteriores e ainda deram continuidade à sequência por meio de desenhos.

Quanto às atividades do nível intermediário, estas promoveram situações que auxiliaram aos estudantes a identificarem a forma como o padrão está sendo gerado. Dada uma determinada sequência, possibilitaram aos estudantes estabelecer relações entre termos e suas respectivas ordens, dar continuidade à sequência e prever termos de ordens posteriores, traçar relações entre sequências pictóricas e sequências numéricas, além de realizar generalizações com base nas características dos padrões.

Mesmo as duplas não tendo conseguido estabelecer uma generalização por meio de uma expressão algébrica, estas atividades auxiliam na construção de futuros conhecimentos por isso, mais uma vez a importância da discussão em detalhes durantes os momentos de sistematização das atividades. Logo, consideramos também que o objetivo geral para o nível intermediário da sequência didática foi alcançado.

No nível avançado de nossa sequência didática, o conjunto das atividades promoveu o desenvolvimento de generalizações a partir de padrões de regularidade, a formação de tabelas a partir de padrões de regularidade, a construção de expressões algébricas que representem generalizações de padrões de regularidade, a representação de gráficos no plano cartesiano a partir de padrões de regularidade, a exploração de relações funcionais a partir de padrões de regularidade. Ainda que nem todas as duplas tenham conseguido desenvolver todos estes conceitos em todas as atividades, cada um deles foi trabalhado e discutido, entre os estudantes e o pesquisador, o que nos leva a afirmar que o objetivo geral de explorar padrões envolvendo relações funcionais foi alcançado.

Percebemos então, que o alcance dos objetivos gerais estabelecidos para cada um dos níveis da sequência didática implica que a mesma promoveu significativas contribuições para a compreensão das relações funcionais, além de possibilitar o desenvolvimento do pensamento algébrico junto aos estudantes, por meio de atividades envolvendo padrões mediante a vivência em diferentes fases ou *situações didáticas.*

Sobre a Teoria das Situações Didáticas, esta teve um triplo papel no desenvolvimento de nossa pesquisa. Primeiramente, a TSD nos trouxe orientação quanto à forma de criação e organização de nossa sequência didática. Em segundo lugar, a TSD foi utilizada sob um aspecto metodológico, nos dando subsídios quanto à forma de conduzir o desenvolvimento da sequência didática, na parte experimental da pesquisa. Por fim, a TSD nos forneceu elementos para análise dos dados levantados.

A afirmação de que a TSD nos orientou quanto à forma de criação e organização de nossa sequência didática está ligada ao fato da sequência estar organizada em níveis. Isso tem relação com a referida teoria, ao ponto que com essa forma de organização, o aluno pode ir mobilizando seus conhecimentos, de maneira autônoma, iniciando de atividades menos complexas e, a partir daí, em uma construção progressiva de conhecimentos, ir evoluindo, e conseguir maior compreensão dos conteúdos em estudo. Com o tempo será capaz de lidar com atividades cada vez mais avançadas e complexas, e, nos momentos de sistematização, institucionalizar os conceitos, ideias e pensamentos sobre as relações funcionais.

A afirmação de a TSD ter sido utilizada sob um aspecto metodológico se deu por diversos fatores. As noções de *contrato didático* e de *devolução* permitiram maior autonomia aos estudantes nos momentos de resolução das atividades propostas, permitiram também conscientizar os estudantes e motiva-los a buscarem respostas e soluções, mobilizando seus próprios conhecimentos e construindo novos conhecimentos a partir da interação com os meios: a sequência didática em si, materiais manipulativos, material impresso, parceiro de dupla e o próprio professor. Quanto ao pesquisador, o fato de os estudantes terem um posicionamento mais autônomo, promoveu um maior conforto e tranquilidade nos momentos em sala, embora a tradição do ensino de Matemática seja de que os estudantes, na maioria dos casos, não assumam uma postura autônoma durante o processo de construção de conhecimentos.

Finalmente, retomamos nosso problema de pesquisa, na busca de apresentar as respostas que surgiram a partir das análises dos dados levantados. As principais possibilidades para o desenvolvimento do pensamento algébrico estão ligadas ao processo de observação, compreensão e comunicação das regularidades presentes nas sequências que exploram relações funcionais entre termos e ordens. Ao se apropriarem dos conhecimentos e das características que são inerentes às sequências, principalmente das sequências pictóricas, que foram as mais abordadas em nossas atividades, os estudantes têm a oportunidade de observar, interagir entre si e interagir com as atividades propostas na busca de respostas. No processo podem formular afirmações com base em seus próprios conhecimentos e em especial nas informações obtidas através das sequências, e transformar essas informações, por meio da criação de expressões algébricas, criando possibilidades para o desenvolvimento do pensamento desse campo.

Tendo em vista que é necessária uma grande abstração para chegar a esse nível de representação, todas estas etapas, e as vivências de diferentes tipologias de situações didáticas no decorrer do desenvolvimento das atividades pertencentes à sequência didática, estimulam o desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes. Além disso, permite uma construção de conhecimentos com muito mais significado e solidez, conhecimentos estes que podem ser transportados e aplicados em uma série de outras atividades, em outros conteúdos, com outras possiblidades de estudo e de utilização.

Avaliamos que a ligação entre padrões, álgebra e *situações didáticas*, pode realmente trazer contribuições efetivas para construção de conhecimentos, proporcionando a observação de regularidades, desenvolvimento do pensamento algébrico, observação e estudo das relações funcionais, por meio de atividades que propiciem a vivência de diferentes *situações didáticas*, com vista na construção de um conhecimento matemático com significado. Tendo afirmado que foram contemplados todos os nossos objetivos específicos, fica claro que nosso objetivo geral de *investigar possibilidades para o desenvolvimento do pensamento algébrico por meio do uso de padrões a partir da teoria das Situações Didáticas na Matemática Escolar*, foi contemplado.

Esperamos que em outras oportunidades possam ocorrer novos estudos, expandindo os horizontes de pesquisa para outros conteúdos da área de Álgebra, e também para outras, etapas de ensino, tais como Ensino Médio e Nível de Ensino Superior, bem como articulando outros e variados materiais didáticos, à exemplo de jogos.

Existem ainda duas considerações principais que podem ser mencionadas em relação às pesquisas futuras, as quais emergiram de nossas análises. Em primeiro lugar, buscar trabalhar com atividades que abordem outros tipos de sequências, tais como sequências numéricas decrescentes, tendo em vista a limitação percebida nas sequências pictóricas crescentes (sendo este o tipo de sequência mais utilizado em nossa pesquisa) quanto à representação gráfica de Funções baseadas nas mesmas, considerando que a referida representação limita-se sempre ao primeiro quadrante do plano cartesiano.

Outro fato que podemos indicar relaciona-se à busca por um equilíbrio entre a autonomia dos estudantes ao trabalharem com atividades propostas como *situações a-didáticas*, e a relação com a estrutura das atividades, de forma que as mesmas não sejam criadas de maneira a encaminhar respostas, nem sejam tão abertas ao ponto que os estudantes não consigam mobilizar seus conhecimentos na busca de respostas. A investigação pelo equilíbrio estre estes extremos pode render futuras pesquisas.

De maneira geral, concluímos afirmando que foi muito gratificante para nós enquanto pesquisadores, poder desenvolver o presente estudo, tendo nos proporcionado crescimentos tanto em âmbito pessoal, quanto profissional. Abriu o estudo nossos horizontes, sensibilizando nosso olhar cada vez mais para enxergar o quanto de beleza existe na Matemática, esperando que os estudantes também tenham estas convicções, e estejam cada vez mais focados em desvendar os mistérios e belezas que a Matemática tem a nos revelar.

REFERÊNCIAS

Alves, Carlos Alex. **Desenvolvendo o Pensamento Algébrico: Padrões, Funções e Problemas**. 2013. 28 f. Projeto de Intervenção Pedagógica (Especialização em Matemática para o Ensino Fundamental) – Universidade Federal da Paraíba, Centro de Ciências Aplicadas e Educação, Rio Tinto, 2013.

BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e métodos**. Portugal: Porto Editora, 1994.

BRASIL, Ministério de Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática /Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL, Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental. 5ª à 8ª série**, Brasília: SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. PDE: Plano de Desenvolvimento da Educação. **Prova Brasil: ensino fundamental**. Matrizes de referência, tópicos e descritores. Brasília: MEC, SEB; Inep, 2008.

BRANCO, Neusa. **O Estudo de Padrões e regularidades no Desenvolvimento do Pensamento Algébrico.** 2008. 241 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade de Lisboa, Faculdade de ciências, Portugal, 2008.

BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao Estudo das Situações Didáticas:** conteúdos e métodos de ensino. [tradução Camila Bógea]. São Paulo: Ática, 2008.

CASTRO, Edson Eduardo. **Um Estudo Exploratório das Relações Funcionais e Suas Representações no Terceiro Ciclo do Ensino Fundamental**. 2011. 174 f. Dissertação (Mestrado profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011.

CAVALCANTI, Valdir de Souza. **Composição de Paródias:** um recurso didático para compreensão sobre conceitos de circunferência. 2011. 160 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba, Brasil, 2011.

D'AMORE. **Elementos de Didática da matemática**. [tradução Maria Cristina Bonomi]. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.

FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Ângela; MIGUEL, Antônio. Contribuição Para um Repensar... a educação Algébrica Elementar. **Pro-Posições**, São Paulo, V. 4, N. 1, p. 78-90, Março. 1993.

FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss. **Cálculo A**: funções, limite, derivação, integração. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

FREITAS, José Luiz Magalhães. Situações Didáticas. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara; at al. (Org). **Educação Matemática**: uma introdução. 2. ed. São Paulo: EDUC, 2002. 212 p.

GIL, Antonio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. São Paulo: Atlas, 2007.
PONTE, João Pedro; BRANCO, Neusa; MATOS, Ana**. Álgebra no Ensino Básico**. Portugal: ME, 2009. Disponível em :<http://www.esev.ipv.pt/mat1ciclo/textos/003_Brochura_Algebra_NPMEB_%28Set2009%29.pdf>. Acesso em: 19 Dez. 2014.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da matemática**: uma análise da influência francesa. 2. Ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

POMMER, Wagner Marcelo. **Brousseau e a idéia de Situação Didática.** SEMA - Seminários de Ensino de Matemática/ FEUSP, 2008. Disponível em: < http://www.nilsonjosemachado.net/sema20080902.pdf>. Acesso em: 20 de Fev. 2016.

PONTE, João Pedro; BRANCO, Neusa; MATOS, Ana**. Álgebra no Ensino Básico**. Portugal: ME, 2009. Disponível em :<http://www.esev.ipv.pt/mat1ciclo/textos/003_Brochura_Algebra_NPMEB_%28Set2009%29.pdf>. Acesso em: 19 Dez. 2014.

REIS, Luciano André Carvalho; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. **Trigonometria no Triângulo Retângulo:** As Interações em Sala de Aula Sob a Ótica da Teoria das Situações Didáticas. Revista HOLOS, Ano 31, V.1, 2015. Disponível em: < http://www2.ifrn.edu.br/ojs/index.php/HOLOS/article/view/1616/pdf_164>. Acesso em: 20 de FEV. 2016.

RÊGO, Rogéria Gaudencio; RÊGO, Rômulo Marinho. Matemática ativa. João Pessoa: Universitária/UFPB, INEP, Comped: 2000.

SILVEIRA, Denise Tolfo; CÓRDOVA, Fernanda Peixoto. A Pesquisa Científica. In: GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. (Org). **Métodos de Pesquisa**. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009. Disponível em: <http://www.ufrgs.br/cursopgdr/downloadsSerie/derad005.pdf> . Acesso em: 17 Mar. 2016.

TEIXEIRA, Paulo Jorge Magalhães; PASSOS, Claudio Cesar manso. **Um Pouco da Teoria das Situações didáticas (tsd) de Guy Brousseau**. Revista Zetetiké – FE/ Unicamp , V. 21, n. 39, Jan/ Jun 2013. Disponível em: <http://ojs.fe.unicamp.br/ged/zetetike/article/view/4327/5110>. Acesso em: 20 de Fev. 2016.

USISKIN, Zalman. Concepções sobre a álgebra da escola média e a utilização das variáveis. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Org.). **As idéias da álgebra.**São Paulo: Atual, 1995.
VALE, Isabel; PIMENTEL, Teresa; ALVARENGA, Dina; FÂO, António. **Uma Proposta Didática Envolvendo Padrões**. Portugal: 2011. Disponível em: < http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_npmeb/071_tarefas_padroes.pdf>. Acesso em: 19 Dez. 2014.

VALE, Isabel; PIMENTEL, Teresa; ALVARENGA, Dina; FÂO, António. **Uma Proposta Didática Envolvendo Padrões**. Portugal: 2011. Disponível em: < http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_npmeb/071_tarefas_padroes.pdf>. Acesso em: 19 Dez. 2014.

VAN DE WALLE, John. A. **Matemática no Ensino Fundamental:** formação de professores e aplicação em sala de aula. 6.ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

ZUFFI, Edna Maura; PACCA, Jesuína Lopes de Almeida. **O Conceito de Função e Sua Linguagem Para os Professores de Matemática e de Ciências**. Revista Ciência e Educação, V8, nº1, p 1 – 12, 2002. Disponível em:
< http://www.scielo.br/pdf/ciedu/v8n1/01.pdf>. Acesso em: 17 Mar. 2016

APÊNDICE A – Atividades do Nível Introdutório

Atividade 1: Observe as figuras abaixo e responda o que se pede.

a. Qual será a figura que ocupará as 11ª, 14ª e 17ª posição? Justifique.
b. Dê continuidade à sequência por meio de desenhos.
c. Elabore alguma pergunta sobre a sequência e proponha que um colega responda.

Atividade 2: A corda enfeitada[3]. Uma linha estava enfeitada com círculos e quadrados, como mostra a imagem:

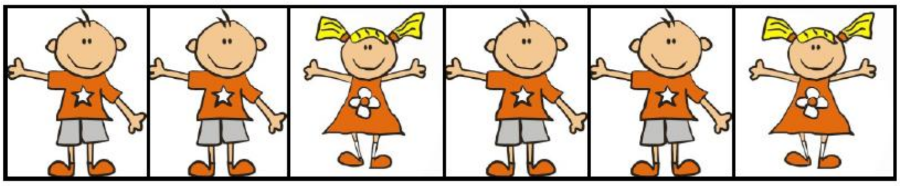
a. Complete a seguinte tabela:

Nº de Grupos Repetidos	Nº de Círculos	Nº de Quadrados	Nº Total de Objetos
1	3	2	5
		4	
	9		
5			
			50
		28	
80			

b. Explique como você pensou para construir a tabela.

Atividade 3:Meninos e Meninas[4]. Observe com atenção a seguinte sequência:

[3]Atividade adaptada de Vale et al (2011, p.15).

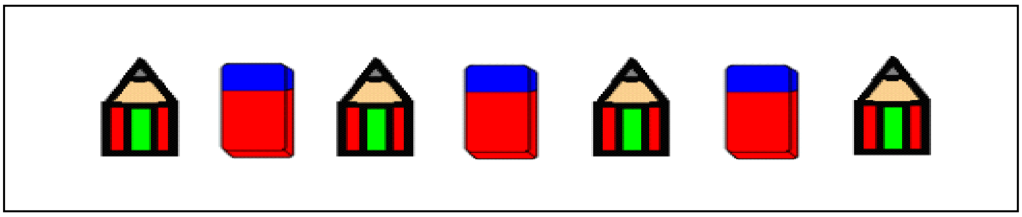


a. Se construirmos uma sequência com 71 meninos quantas meninas teremos? E quantos grupos repetidos?
b. Na trigésima posição encontra-se um menino ou uma menina?
c. Em uma sequência como esta, com600 crianças, teremos quantos meninos e quantas meninas? Escreva como você pensou para responder este tópico.
d. Escreva alguma frase que explique aquilo que você concluiu sobre esta sequência.

[4]Atividade adaptada de Vale et al (2011, p.17).

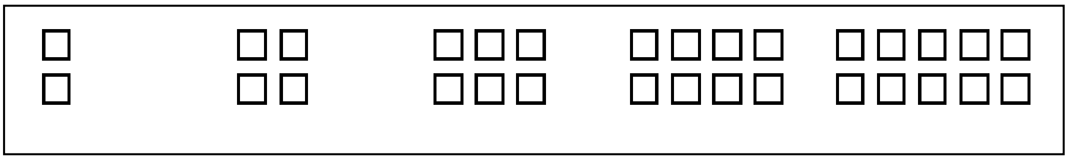
APÊNDICE B – Atividades do Nível Intermediário

Atividade 1: Sequência dos lápis e das borrachas[5]. Observe a seguinte sequência:



a. Existe alguma relação entre as figuras e a posição que elas ocupam na sequência? Justifique.
b. Você consegue associar a posição que os lápis estão ocupando a alguma sequência de números?
c. E sobre a posição que as borrachas ocupam, o que você consegue afirmar?

Atividade 2: Sequência pictórica[6]. Observe a seguinte sequência:



a. De um termo da sequência para o termo seguinte, o que muda em cada figura?
b. Em algum momento esta sequência apresentará um número ímpar de quadrados? Justifique.
c. Existe alguma relação entre cada termo e sua respectiva ordem? Qual relação?
d. Quantos quadrados terá a figura da vigésima ordem?
e. Você consegue relacionar alguma sequência de números às figuras que aparecem nesta sequência?
f. Indique por escrito a forma como esta sequência está sendo gerada.
g. Com base no item anterior, quantos quadrados o centésimo termo desta sequência será formada?

[5]Atividade adaptada de Ponte; Branco; Matos (2009, p. 48)

[6]Atividade adaptada de Ponte; Branco; Matos (2009, p.52)

Atividade 3: Sequência dos botões[7]. Observe a seguinte sequência formada por botões:

a. Complete uma tabela que relaciona a ordem à quantidade de botões em cada termo.

Ordem										
Quantidade de botões										

b. Qual quantidade de botões é acrescentada de um termo para o seguinte?

c. Indique por escrito a forma como esta sequência está sendo gerada.

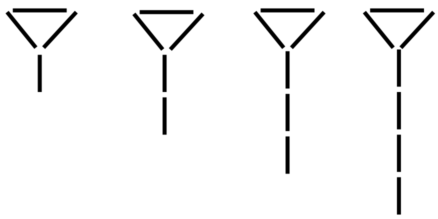
d. Identifique uma expressão algébrica que lhe permita calcular o número de botões para qualquer ordem.

[7]Atividade adaptada de Vale et al (2011, p.21)

APÊNDICE C – Atividades do Nível Avançado

Atividade 1. Sequência pictórica com palitos[8].

Considere que cada segmento de reta dos termos do seguinte padrão crescente possui o mesmo tamanho e pode ser representado por um palito de fósforo. Com base nisso, responda o que se pede.



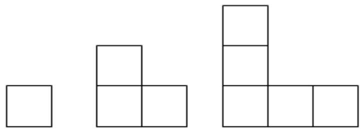
a. Usando palitos de fósforo, construa o quinto termo e o sexto desta sequência.
b. Quantos palitos seriam necessários para construir o nono termo desta sequencia? E o vigésimo termo? Justifique sua resposta.
c. Complete a seguinte tabela que relaciona a ordem e a quantidade palitos de cada um dos termos desta sequência:

Ordem										
Quantidade de palitos de cada termo										

a. Escreva o que você percebe sobre o aumento de palitos de um termo para o termo seguinte.
b. Construa uma expressão algébrica que lhe permita calcular o número de palitos para qualquer ordem.
d. Consideremos agora, que o número de palitos de cada termo é representado pela variável y e que a ordem esta sendo representada pela variável x. Tome então, os números encontrados na tabela, e forme pares ordenados.
e. Usando papel milimetrado, desenhe o plano cartesiano e marque os pares ordenados, encontrados com base na sequência.

[8]Atividade adaptada de Ponte; Branco; Matos (2009, p.60)

Atividade 2. Sequência pictórica na malha quadriculada[9]. Observe o seguinte padrão crescente e responda o que se pede.



a. Usando malha quadriculada, construa os cinco próximos termos desta sequência.
b. Quantos quadrados terá o vigésimo termo desta sequência?
c. Complete a seguinte tabela que relaciona a ordem e a quantidade quadrados de cada um dos termos desta sequência:

Ordem										
Quantidade de quadrados de cada termo										

d. Escreva o que você percebe sobre o aumento de quadrados de um termo para o termo seguinte.
e. Determine a relação existente entre a ordem e o número de quadrados de cada termo.
f. Você consegue associar esta sequência a alguma sequência numérica?
g. Construa uma expressão algébrica que lhe permita calcular o número de quadrados para qualquer ordem.
h. Consideremos agora, que o número de pequenos quadrados de cada termo é representado pela variável y e que a ordem esta sendo representada pela variável x. Tomem então, os números encontrados na tabela, e formem pares ordenados.
i. Usando papel milimetrado, desenhe o plano cartesiano e marque os pares ordenados, encontrados com base na sequência.

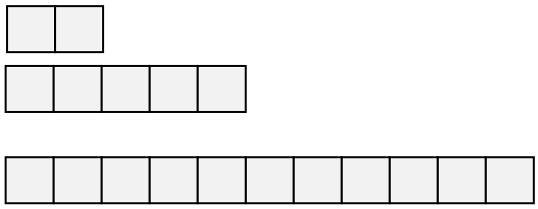
Atividade 3. Termo geral de uma Progressão Aritmética[10]. Esta atividade está dividida em duas partes. Na primeira parte desenvolveremos uma atividade baseada em um padrão

[9]Adaptado de Ponte et al (2009, p. 61)

pictórico, que nos conduzirá a encontrar a expressão algébrica que representa o termo geral de uma progressão aritmética. Já na segunda parte a atividade nos levará a buscar a fórmula da soma de uma progressão aritmética.

1ª Parte. Observe a seguinte sequência onde estão representados o 1º , 2º e 4º termos da sequência. Complete com alguns termos que estão em falta usando a malha quadriculada.

1º termo
2º termo
3º termo
4º termo
5º termo
6º termo
7º termo



Com base na sequência formada responda as seguintes questões:

a. O que você percebeu em relação à formação da sequência?
b. Você poderá encontrar um termo que seja formado por dezesseis quadrados? Caso a sua resposta seja afirmativa, identifique qual é a ordem deste termo. Caso a sua resposta seja negativa, justifique.
c. Por quantos quadrados será formado o décimo termo desta sequência? E O vigésimo termo?
d. Identifique a sequência numérica que podemos associar a esta sequência pictórica.
e. Descreva forma como esta sequência está sendo gerada.
f. Complete a tabela que associa a ordem dos termos ao número de quadrados de cada termo:

Ordem	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Quantidade de quadrados															

[10]Adaptado de Rêgo e Rêgo (2009)

g. Considere agora, que o número de quadrados de cada termo é representado pela variável y e que a ordem está sendo representada pela variável x. Tome então, os pares encontrados na tabela, e represente-os no plano cartesiano.
h. Construa uma expressão algébrica que permita calcular o número de quadrados (y) presentes em cada termo (x) de acordo com sua respectiva ordem.

2ª Parte. Considere que $\mathbf{S_n}$ é a soma do número de quadrados dos termos, do primeiro termo até o termo de ordem **n**, sendo que, nesta soma, os termos são representados por $\mathbf{a_1, a_2, a_3, ..., a_n}$. Veja o exemplo: $\mathbf{S_3}$é a soma do número de quadrados do primeiro termo até o terceiro termo. Assim, ela será: $\mathbf{S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 2 + 5 + 8 = 15}$quadrados.

a. Obtenha então o número de quadrados para as seguintes somas: $\mathbf{S_1, S_2, S_4, S_6, S_7}$ **e** $\mathbf{S_8}$**;**
b. Fazendo uso de quadrados de EVA (material emborrachado) obtenha para cada soma $\mathbf{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5}$ **e** $\mathbf{S_6}$a quantidade de quadrados**.**
c. Complete a tabela a seguir que relaciona a ordem **n (de 1 até 8)**, com os termos $\mathbf{a_n}$ e a soma $\mathbf{S_n}$ ao número de quadrados da respectiva soma:

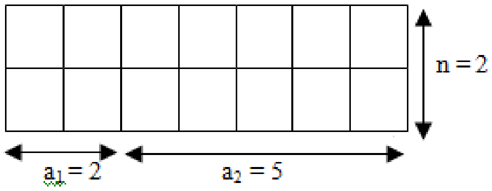
n (ordem**)**	Sn (soma do número de quadrados de a_1 até a_n)
1	$S_1 = a_1 = 2$
2	$S_2 = a_1 + a_2 = 2 + 5 = 7$
3	
4	
5	
6	
7	
8	
...	...
n	

d. Consultando a tabela construída, estabeleça uma relação algébrica entre n e S_n, ou seja, relacione a ordem n com a quantidade de quadrados da soma S_n.
e. Duplique o número de quadrados de cada uma das somas, e usando os quadrados de EVA (material emborrachado), construa livremente retângulos para cada caso. Além

disso, identifique com cores diferentes os quadrados de s_n e os quadrados que foram adicionados para a construção dos retângulos.

f. Comparando os retângulos de cada caso construídos pelos colegas, eles apresentam algo em comum? Os retângulos encontrados são semelhantes? Iguais? Justifique.

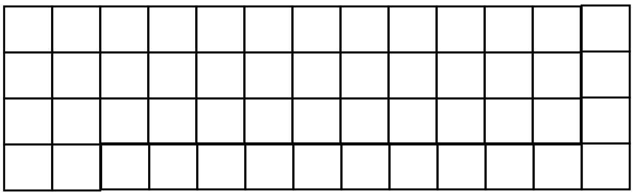
g. Vamos estudar os retângulos construídos com 14 quadrados. Como foram construídos? Alguém representou da seguinte forma:



h. Caso o seu retângulo não tenham sido feito seguindo esseaspecto, tente formá-lo da maneira acima representada na malha quadriculada ou usando o EVA (material emborrachado).

i. Vamos agora analisar os seguintes casos:

- Caso s_3: represente o retângulo da soma s_3 de forma que a sua base seja formada por a_1 somado a a_3, e que sua altura seja n.
- Caso s4: observe o seguinte retângulo e identifique onde podem estar localizados o a_1, a_4 e n.



- Caso s1: construa o retângulo para s_1, seguindo a mesma orientação discutida nos demais casos.

j. Encontre a soma do número de quadrados de cada um dos retângulos, fazendo uso da fórmula do cálculo da área.

k. Com base nos retângulos formados, determine uma expressão algébrica que lhe permita calcular o número de quadrados de s_n.