UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

UMA APLICAÇÃO DA ÁLGEBRA DE CLIFFORD PARA O ENSINO DA TEORIA DA RELATIVIDADE RESTRITA

BRUNO BARROS CAMÊLO

Campina Grande – Paraíba

2014

BRUNO BARROS CAMÊLO

UMA APLICAÇÃO DA ÁLGEBRA DE CLIFFORD PARA O ENSINO DA TEORIA DA RELATIVIDADE RESTRITA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática como um dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Área de Concentração: Ensino de Física

Orientadora: Dra. Morgana Lígia de Farias Freire

Campina Grande – Paraíba
2014

C183a Camêlo, Bruno Barros.
Uma aplicação da Álgebra de Clifford para o ensino da Teoria da Relatividade Restrita [manuscrito] / Bruno Barros Camêlo. - 2014.
78 p. : il. color.

Digitado.
Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2014.
"Orientação: Profa. Dra. Morgana Lígia de Farias Freire, Departamento de Física".

1. Ensino de Física. 2. Álgebra de Clifford. 3. Teoria de Ausubel. 4. Relatividade Restrita. I. Título.

21. ed. CDD 530.7

BRUNO BARROS CAMÊLO

UMA APLICAÇÃO DA ÁLGEBRA DE CLIFFORD PARA O ENSINO DA TEORIA DA RELATIVIDADE RESTRITA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática como um dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática

Aprovado em 08/10/2014

Banca examinadora

Prof. Dra. Morgana Lígia de Farias Freire (DF/UEPB)
Orientadora

Jean Paulo Spinelly da Silva

Prof. Dr. Jean Paulo Spinelly da Silva (DF/UEPB)
Examinador Interno

Prof. Dr. Aércio Ferreira de Lima (UAF/UEPB)
Examinador Externo

AGRADECIMENTOS

A professora Dra. Morgana Ligia pela orientação e amizade.

A minha mãe que, sem suas orações e preces, não me faltaram forças para seguir nesse trabalho.

Aos Mestres do programa de Mestrado que me proporcionaram evoluir em academicamente e, em especial aos Dr. Jean Spinelly e Dr. Aécio Ferreira, pela dedicação e presteza ao analisar o trabalho com todo afinco.

Aos colegas de turma que sempre incentivaram todas as ações em prol da realização desse trabalho.

E a todos aqueles que, clássica ou quanticamente, despejaram suas energias positivas para a conclusão desse trabalho.

O que sabemos é uma gota, o que ignoramos um oceano...

UMA APLICAÇÃO DA ÁLGEBRA DE CLIFFORD PARA O ENSINO DA TEORIA DA RELATIVIDADE RESTRITA

RESUMO

Na Física é muito familiar o emprego de vetores. Estes podem ser vistos, pelo ponto de vista geométrico, como segmentos de reta orientados. No entanto, certas grandezas ficam mais bem representadas por outros objetos com características geométricas do que com os vetores. Tais objetos são representados por fragmentos de planos orientados, os quais não podem ser determinados por vetores, a menos que estejamos no espaço tridimensional. A álgebra geométrica ou de Clifford pode ser tratada como uma generalização da álgebra vetorial, e consiste em um poderoso formalismo para a descrição física da natureza. Assim, propomos nesse trabalho,construir estratégias para introduzir a álgebra de Clifford como modelador de conceitos físicos da Teoria da Relatividade Restrita à luz da concepção Ausubeliana da aprendizagem para organizar osconceitos dentro de um modelo cognitivo.

PALAVRAS-CHAVE: *Ensino de Física. Álgebra de Clifford. Teoria de Ausubel.Relatividade Restrita.*

ABSTRACT

In physics is very familiar employment of vectors. These can be seen, the geometric point of view, as straight segments oriented. However, certain quantities are better represented by other objects with geometrical features than with vectors. Such objects are represented by fragments of oriented planes, which cannot be determined by vectors, unless we are in three dimensional space. Geometric or Clifford algebra can be treated as a generalization of vector algebra, and consists of a powerful formalism for the physical description of nature. Thus, we propose in this work, to build strategies to introduce the Clifford algebra as modeler physical concepts of the Theory of Special Relativity and from the modeled concepts, develop educational material for teaching physics in the light of the conception of learning Ausubel.

KEYWORDS: *Teaching of physics, Clifford Algebra, Theory of Ausubel, Restrict* Relativity.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

As formas de representação lingüística de determinado fenômeno físico, confere à matemática, a função de promovedora de uma linguagem universal que descreve conceitos físicos e mantém constância na interpretação dos fenômenos por parte da comunidade mundial. Contudo, essa linguagem universal se torna deficiente, quando da abordagem da ciência física em seus diversos níveis de ensino.Nesse contexto, o que vemos é uma matemática sendo utilizada de forma desvinculada do conceito físico e,assim, dificultando a compreensão da expressiva ligação entre essas duas ciências, conduzindo o aprendente a uma visão fragmentada da conexão entre os conceitos físicos e a linguagem que nos servimos para representá-los.

No ensino de física, a matemática é considerada como um corpo de imutáveis verdades (axiomas, leis etc) para serem assimiladas e aplicadas aos fenômenos naturais. Embora saibamos que o processo ensino-aprendizagem da Física, no Brasil, tem sido reconhecido em diversos estudos como deficiente (BRASIL, 2006; FÁVERO et al., 2000; MOREIRA e GRECA, 2003; SOUSA, 2001; MATHEUS, 2005). Este fato é traduzido pela “frágil” aprendizagem dos conceitos físicos e do aparato matemático que descreve os mesmos. Além disso, existem problemas estruturais tais como os ineficientes ou inexistentes laboratórios didáticos e nos cursos de formação continuada dos professores.

Particularmente, gostaríamos de destacar que um dos problemas tem sido o uso de um ferramental matemático fragmentado e inadequado. A fragmentação deve-se ao uso de diversas estruturas matemáticas nos diferentes domínios da física dificultando a conexão e passagem de uma para outra. Muitas delas não proporcionam uma fácil intuição das propriedades físicas dos sistemas tratados.

Verifica-se nos últimos anos, no ambiente educacional brasileiro, uma ânsia por mudanças nas metodologias e nos processos que envolvem a relação ensino-aprendizagem em seu aspecto de cultura geral. Imerso em uma cultura tecnológica de avanços desenfreados, o processo de ensinagem - processo com o qual são executadas as ações docentes - engrena na formação continuada dos professores e no "engessamento" da estrutura curricular que rege os cursos de nível básico e médio das escolas brasileiras, bem como no superior.

Nesse avanço desenfreado, cria-se um impedimento de cunho intelectual, fazendo com que os cidadãos deixem de se tornar indivíduos que promovam um avanço tecnológico mais eficiente e com maior capacidade de abrangência de atendimento às demandas técnicas que a própria tecnologia suscita, devido a uma deficiente estrutura educacional nos diversos níveis de ensino (BRASIL, 2006; GRECA, 2003; SOUZA, 2001; MATHEUS *et al.*, 2005).

No que concerne ao campo da Física, o aprendizado da referida ciência fica sufocado pela mesma exigir - em grau elevado para nível superior - uma descrição matemática própria de entendimento, cuja linguagem tem que ser apropriada pelos aprendizes e, que em sua maioria, não a consegue devido à má interpretação do ferramental matemático utilizado pela Física, na resolução de problemas do cotidiano e de aplicações no mundo tecnológico.Neste sentido, um ferramental que traga à Física, uma clarificação de sua estrutura conceitual - de forma a interligá-la - e bom manuseio da descrição matemática associada, vem se tornar uma propostaalternativa no que concerne a discussão dos problemas encontrados por esta ciência e da sua lógica formal (HESTENES, 2003).

Inserido nesse contexto, o presente trabalho se propôs a fazer uma análise da linguagem matemática usada na física, a saber, a teoria da relatividade restrita, introduzindo uma linguagem unificada desenvolvida durante as últimas décadas, no intuito de simplificar as estruturas desse campo da física (DORAN e LASENBY, 2003), a saber, a álgebra geométrica ou de Clifford.

Esse sistema matemático possui características que permitem sua utilização em todos os domínios da Física além de ser acessível, do ponto de vista da aprendizagem, aos níveis de escolaridade onde se trabalha com esta ciência. Sua adaptabilidade a diferentes níveis de desenvolvimento cognitivo deve-se ao fato dos objetos dessa álgebra apresentar propriedades geométricas. Isto facilita o processo de “visualização” do sistema estudado.

Destarte, vemos a álgebra geométrica, ou álgebra de Clifford, como um bom ferramental matemático unificado para a Física (HESTENES, 2003), particularmente, na interpretação de fenômenos que utilizamos para descrever fenômenos relativísticos - e de forma a interpretá-los geometricamente e algebricamente.

Esta estrutura matemática, ou seja, o que denominamos ferramental matemático no parágrafo anterior, aplicada à Física proporciona uma exploração intuitiva das propriedades dos sistemas estudados, da qual destacamos como principais características:

- A possibilidade de uma *máxima codificação algébrica dos conceitos geométricos básicos* tais como magnitude, direção, sentido (ou orientação) e dimensão;
- O Estabelecimento um *método livre de coordenadas* para formular e resolver equações básicas da física;
- Oferecer um método que *uniformiza o tratamento da física* clássica, quântica e relativística evidenciando as estruturas comuns;
- Permitir uma fácil *articulação com os sistemas matemáticos* que estão amplamente em uso na física;
- Apresentar uma *máxima eficiência computacional* com relação aos sistemas matemáticos de uso corrente na física.

Enfim, nossa proposta foi elaborar um escrito didático para o ensino da relatividade restrita adaptado a esse aparato matemático, a álgebra de Clifford, visando representar algumas grandezas estudadas nessa teoria, tais como, momento linear, força e energia. No esboço desse escrito, fora utilizada para nortear pedagogicamente, a Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel que corrobora com a proposta da aprendizagem baseada nos conceitos que constitui a aprendizado das ciências em geral.

OBJETIVOS

GERAL

Construir estratégias para introduzir a álgebra de Clifford como modelador de conceitos físicos da Teoria da Relatividade restrita para o ensino de Física à luz da concepção Ausubeliana da aprendizagem.

ESPECÍFICOS

- Identificar as características fundamentais na estruturação dos conceitos presentes no domínio da Teoria da Relatividade Restrita;
- Utilizar a álgebra de Clifford e o cálculo geométrico como uma nova linguagem matemática para modelar osconceitos físicos referentes à Teoria da Relatividade Restrita.
- Identificar os subsunçores necessários para proporcionar a aprendizagem significativa dos conceitos modelados.
- Desenvolver um mapa conceitual, segundo o cognitivismoAusubeliano, dos conteúdos de física expressos nesta nova linguagem;

JUSTIFICATIVA DO TRABALHO

A matemática no ensino de Física é considerada como um elemento fundamental para que as "verdades" possam ser evidenciadas e aplicadas aos fenômenos naturais. E,cada vez mais,matematicamente, os conceitos geométricos são generalizados de modo a incluir objetos que dificilmente imaginaríamos que poderiam ser estudados com base nos alicerces da Geometria.

Sabendo-se da relação intrínseca entre Geometria e Álgebra, e de sua complexidade, poderíamos perguntar: Por que a mudança de uma álgebra para outra? Podemos responder dizendo que veio com as necessidades de explicar vários fenômenos físicos que a álgebra de Gibbs não dava conta (descrever o produto vetorial por exemplo) ou que as contradições incomodavam os estudiosos. O resgate da álgebra de Clifford deve-se ao professor David Hestenes (1986), que em seu trabalho tenta unificar a linguagem da Física-Matemática. A partir de Hestenes, outros pesquisadores se interessaram pelo assunto. Particularmente, no Brasil, temos os trabalhos de Júnior Vaz (1997; 2000). A partir daí, outros pesquisadores desenvolveram estudos sobre a álgebra geométrica.

A álgebra geométrica pode ser tratada como uma generalização da álgebra vetorial. Devido a esta generalização ela consiste em um poderoso formalismo para a descrição física da natureza.

ESTRUTURA DE ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O trabalho foi dividido em seiscapítulos.A seguir, apresentaremos um pequeno esboço sobre cada um deles.

No Capítulo 1, traremos a tona o conceito de vetor utilizado na álgebra euclidiana, bem como as operações definidas neste espaço e a caracterização dos chamados espaços vetoriais.

No Capítulo 2, desenvolveremos os aspectos relevantes da álgebra Geométrica ou álgebra de Clifford, desde sua concepção cronológica até os princípios que rege esta álgebra.

No Capítulo 3, exporemos a Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel que servirá de apoio para justificar os objetivos ora propostos nesse trabalho.

No Capítulo 4, evidenciaremos o conteúdo da Física, a saber, a Teoria da Relatividade Restrita, com o qual será analisada à luz da álgebra de Clifford.

No Capítulo 5, apresentaremos a teoria da relatividade restrita descrita, matematicamente, pela álgebra de Clifford.

No Capítulo 6, concluiremos o trabalho com as considerações finais.

PROCEDIMENTO METODOLÓGICO

Este trabalho trata-se de uma investigação de caráter teórico exploratório em que objetivaremos a construção de estratégias para inserir a álgebra de Clifford como modelador dos conceitos da teoria da Relatividade Restrita, limitado por uma concepção da aprendizagem Ausubeliana. Ao final desse estudo teremos um escrito, ou seja, um material didático simples baseado nas características de objetividade e operacionalidade da teoria cognitiva de David Ausubel, e com base nos seus fundamentos elaboramosum mapa conceitual do conteúdo trabalhado.

Em função da especificidade das ações requeridas das diversas etapas de desenvolvimento, este trabalho foi executado em dois momentos distintos que denominamos de momento teórico-hermenêutico e momento de exploração cognitiva (DE GÓES BRENNAND, 2008).

O primeiro momento a que nos referimos, o momento teórico-hermenêutico,foi caracterizado pela realização de estudos bibliográficos visando caracterizar os conceitos fundamentais presentes no domínio da Teoria da Relatividade Restrita,com basenas propriedades da álgebra de Clifford(ou geométrica) e do cálculo geométrico. Culminando assim, a aplicação deste formalismo matemático na modelagem dos conceitos estudados da Teoria da Relatividade Restrita.

Já o segundo momento, o momento de exploração cognitiva, foi caracterizado pelo uso da teoria de aprendizagem significativa de D. Ausubel para organizar os conceitos considerando um modelo cognitivo. E por que entender a teoria Ausubeliana? É porque ao entender o cognitivismo de Ausubel, tivemos fundamentos para compreender os aspectos de organização e de tratamento das informações do conteúdo. Em outras palavras, buscamos uma engrenagem didática em que o conteúdo foi organizado considerando os seguintes parâmetros: *subsunçores*, *diferenciação progressiva* e *reconciliação integrativa*. A partir destes parâmetros,foi construídoum mapa conceitualsimples do conteúdo Teoria da Relatividade Restrita e a produção do escritodidático(ou seja, oconteúdo totalmente expresso nessa dissertação)adequado aos níveis de ensino médio e superior como produto do mestrado profissionalizante.

1. O ESPAÇO VETORIAL E SUAS PROPRIEDADES

Neste Capítulo apresentaremos de forma simples uma revisão dos conceitos de espaço vetorial e suas propriedades. Devemos ressaltar que omitiremos asdemonstrações dos resultados, pois as mesmas podem ser encontradas facilmente na literatura padrão. Trazemos a tona o conceito de vetor utilizado na álgebra euclidiana, bem como as operações definidas neste espaço e a caracterização dos chamados espaços vetoriais.

1.1 VETORES NO PLANO

Antes de definirmoso que chamamos de *espaço vetorial*, necessitamos ter noção do conceito de *vetor*. Trataremos inicialmente vetores no plano e, logo em seguida, estenderemos para o espaço.

Consideremos um sistema cartesiano formado por um par de segmentos orientados e ortogonais entre si. Cada segmento é constituídopor um conjunto cujos elementos são números reais e, os mesmos, assim denominados de *eixo das abscissas (x)* e *eixo das ordenadas(y)*. A esse conjunto de eixos, assim dispostos,damos o nome de *Sistema Cartesiano Ortogonal* e que define o que conhecemos por*Plano Cartesiano*.

Segundo Iezzi e Murakami (2004) o *Plano Cartesiano* é constituído por pares ordenados obtido a partir do *produto cartesiano* entre os elementos constituintes de cada eixo e descritos algebricamente por $\mathrm{A \, x \, B} = \{(\mathrm{x,y}) \mid \mathrm{x} \in \mathrm{A} \text{ e } \mathrm{x} \in \mathrm{B}\}$. Nesta simbologia, A e B são conjuntos não vazios e $\mathrm{A \, x \, B}$ (lê-se "*produto cartesiano de A por B"* ou *"A cartesiano B"*.

Para compreendermos o conceito de *vetor* (inicialmente no plano) necessitamos fixar uma unidade de comprimento e um ponto *P = (a,b)* qualquer do plano. Os elementos *a* e *b* representam as coordenadas do ponto *P* no plano cartesiano. Para entendermos a ideia de *vetor*[1] (que denotaremos de ***v***), consideremos um segmento orientado com extremidade inicial na origem do plano

---

[1]A representação de um vetor ficará denotada por uma letra do alfabeto em negrito e não no modo convencional, a saber, $\vec{\mathrm{v}}$.

cartesiano – denotado pelo ponto *O* = *(0,0)* – e extremidade final no ponto *P*, conforme a Figura 1.

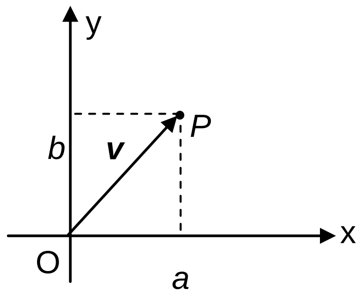

Figura 1: Representação de um vetor num sistema cartesiano.

A partir da representação geométrica da Figura 1, o vetor ***v*** pode ser expresso algebricamente pelas coordenadas do ponto *P*, a saber, ***v*** = *(a,b)*, ou ainda na forma matricial de uma matriz coluna como:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \qquad (1.1)$$

1.1.1OPERAÇÕES COM VETORES

Restringindo-nos ainda a vetores no plano, podem-se definir duas operações com vetores: a multiplicação de um vetor por um escalare a adição de vetores, descritas a seguir.

A. Multiplicação de um vetor por um escalar

A operação de um vetor por escalar (número real) nos fornece um novo vetor ***w* = *kv***,sendo *kum escalar* - com as seguintes características, conforme Boldrini et al (1980):

A.1:Se $k > 0$então o vetor***w*** terá mesma direção e sentido que o vetor ***v*** e terá *k*vezes o comprimento do vetor ***v***.

A.2: Se $k < 0$então o vetor ***w*** terá mesma direção, *k* vezes o comprimento de ***v*** e sentido contrário a ***v***.

B. Adição de vetores

Para definirmos a adição de vetores, consideremos dois vetores quaisquer***v*** e ***w*** e sua representação geométrica, conforme Figura 2. Desta forma, a adição ou soma desses dois vetores – utilizando qualquer uma das regras de adição de vetores, a saber, *Regra do Polígono* ou *Regra do Paralelogramo*[2]–fica determinada pela soma das respectivas coordenadas dos vetores mencionados.

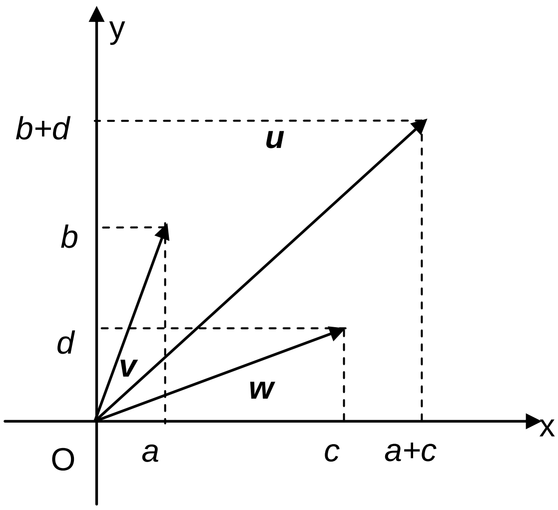

*Figura 2: Representação de dois vetores quaisquer **v** e **w** e o vetor soma **u**.*

Portanto o vetor soma ou vetor resultante $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ será representado algebricamente por $\boldsymbol{u} = (a + c, b + d)$, sendo $\boldsymbol{v} = (a,b)$ e $\boldsymbol{w} = (c,d)$.Um vetor qualquer que tem suas coordenadas nulas, chamamos este de *vetor nulo* e expresso por $\boldsymbol{O} = (0,0)$

[2]Estas Regras permitem definir a soma de n vetores tanto no plano como no espaço. A única diferença é que a Regra do Polígono permite realizar a soma de todos os vetores concomitantemente e a Regra de Paralelogramo apenas com dois vetores.

A diferença entre dois vetores ***v*** e ***w***, a saber, ***v* – *w*** é obtida a partir da soma do 1º vetor com o oposto do segundo, ou seja, ***v* – *w* = *v*** + ***(-w)***. O vetor oposto é obtido quando na operação de multiplicação de um escalar por um vetor elefor igual a ***-1*** e este fica representado algebricamente por ***w*** = *(-c,-d)*.

1.2VETORES NO ESPAÇO

Para considerarmos vetores no espaço teremos que definir para os mesmos uma terna de coordenadas assim expressas ***u*** = *(a,b,c)*. Essas coordenadas são pertencentes a um sistema cartesiano composto por três segmentos de reta orientados perpendiculares entre si. Assim como no plano essas coordenadas são números reais e podemos também expressar o vetor geometricamente com seu ponto inicial na origem do sistema cartesiano e seu ponto final no ponto *P* = *(a,b,c)* situado no espaço.

Segundo Boldriniet al.(1980, p.102), "*existe uma correspondência biunívoca entre vetores e pontos do espaço que a cada vetor* $\overrightarrow{OP}$ *associa seu ponto final* P = *(a,b,c)*". Desta forma, o vetor ***u*** (representado nesta citação por $\overrightarrow{OP}$)pode ser expresso conforme mencionamos anteriormente. Algebricamente podemos definir o espaço de dimensão 3 e representar um conjunto qualquer U que contém vetores nesse espaço representando-o como $\mathrm{U} = \{(x_1, x_2, x_3) | x_i \in \mathbb{R}\}$, ou ainda,$\mathrm{U} = \mathbb{R}\, x\, \mathbb{R}\, x\, \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$que indica o espaço de dimensão 3 e $\mathbb{R}\, x\, \mathbb{R}\, x\, \mathbb{R}$representa o produto cartesiano entre o conjunto dos reais que definem este espaço.

Assim como no plano cartesiano, as operações de *multiplicação de escalar por um vetor* e *adição de vetores*permanecem inalteradas em virtude de apenas uma coordenada ser inserida para caracterizar o espaço de dimensão 3.

1.2.1PROPRIEDADES DOS VETORES

Do mesmo modoque os números reais, os vetores obedecem algumas propriedades que permite ser definido enquanto objeto matemático, representacional de fenômenos existentes na natureza,com o intuito de mensurá-los quantitativamente. Desta forma, as propriedades dos vetores são descritas a seguir.

Considere três vetores quaisquer ***u***, ***v*** e ***w***; os escalares ***a*** e ***b*** pertencentes ao conjunto dos reais e um conjunto ***U*** qualquer que contenha tais vetores. As propriedades dos vetores são:

i. $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\ \boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$**;**

ii. $\boldsymbol{u}\ +\ \boldsymbol{v}\ =\ \boldsymbol{v}\ +\ \boldsymbol{u}$;

iii. $\exists\ 0\ \in U|\ \boldsymbol{u}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{u}, com\ \boldsymbol{0}\ sendo\ vetor\ nulo$

iv. $\exists-\boldsymbol{u}\ \in U|\ \boldsymbol{u}+(-\boldsymbol{u})=0, com\ 0\ sendo\ vetor\ nulo$

v. $a(\boldsymbol{u}\ +\ \boldsymbol{v})\ =\ a\boldsymbol{u}\ +\ a\boldsymbol{v}$

vi. $(a\ +\ b)\boldsymbol{u}\ =\ a\boldsymbol{u}\ +\ b\boldsymbol{u}$

vii. $(ab)\boldsymbol{u}\ =\ a(b\boldsymbol{u})$

viii. $1\boldsymbol{u}\ =\ \boldsymbol{u}$

Todo e qualquer vetor, esteja ele no plano ou no espaço, deve desfrutar dessas propriedades e, também, estas servem para definir o que chamamos de *espaços vetoriais*.

1.3ESPAÇOS VETORIAIS

Segundo Silva (2007, p. 23), "*um espaço vetorial sobre um corpo* $\mathbb{R}$ *(Conjunto dos números reais) ou*$\mathbb{C}$ *(Conjunto dos números complexos) é um conjunto não vazioVmunidos com duas operações*:", ou seja:

I. ***Soma:***$V\ X\ V \xrightarrow{+} V$

e

II. Multiplicação por escalar: $\mathbb{R}\ X\ V \xrightarrow{\cdot} V$.

Estas operações devem ser tais que para quaisquer ***u***, ***v***, ***w*** $\in V$ e *a*, *b* $\in \Re$, as propriedades de ***i*** a***viii***sejam satisfeitas. Em outras palavras, a operação soma tem a característica de, em um espaço vetorial com elementos $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \longmapsto \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\ \in$

V, estes obedecem as propriedades de ***i***a ***iv***. Já para a operação com escalar, esta nos diz que $(a, \boldsymbol{v}) \longmapsto a\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$ e, assim, goza das propriedades ***v*** a***viii***. Sendo assim, qualquer uma das propriedades que não seja satisfeita consideramos que o espaço não é vetorial.

1.3.1 SUBESPAÇO VETORIAL

Assim como no conjunto dos números existem subconjuntos, a saber, $\mathbb{N}$ (Naturais) é subconjunto de $\mathbb{Z}$ (Inteiros), em um espaço vetorial é possível averiguar a existência de conjuntos menores pertencentes a este último conjunto não vazio que o constitui. A um subconjunto deste espaço,chamamos de *subespaço vetorial*.Considerando que este subconjunto seja o conjunto *W*, então este é subconjunto do conjunto *V* que gera o espaço vetorial.

Um exemplo, sem demonstração, que nos faz perceber que um subespaço vetorial é o conjunto formado pelas retas que passa pela origem em um sistema cartesiano e que o espaço vetorial em questão é o $\mathbb{R}^2$.

Segundo Boldriniet al. (1980, p. 106),

> *“dado um espaço vetorialV, um subconjuntoW, não vazio, será um subespaço vetorial deVse:*
>
> ***i.****Para quaisquer* ***u****,* ***v*** *$\in$W tivermos* ***u + v*** *$\in$W.*
>
> ***ii.****Para quaisquer a$\in \Re$,* ***u*** *$\in$W tivermos a****u****$\in$W.”*

Dessas condições acima descritas, podemos visualizar também que o próprio subespaço *W*se torna um próprio espaço vetorial e sem a necessidade de verificar as oito propriedades descritas anteriormente, visto que, o conjunto *W* já é um subconjunto do espaço vetorial*V*. Outro dois pontos a serem considerados importantes é que: (a) todo subespaço *W* de *V* deve conter necessariamente o vetor nulo devido à condição ***ii*** quando *a = 0*e (b) todo espaço vetorial admite pelo menos dois subespaços, a saber, *{0}* e *V*que são chamados respectivamente de *subespaços triviais* ou *impróprios*(SILVA, 2007).

Ainda sobre subespaços vetoriais, há dois teoremas que, segundo Silva (2007, p. 34-36), são assim descritos:

> "***i.*** Seja *V* um subespaço vetorial sobre $\Re$. Se W_1 e W_2 são subespaços de *V*, então $W_1 \cap W_2$ é um subespaço de *V*.
> ***ii.*** Seja *V* um espaço vetorial sobre $\Re$. Se W_1 e W_2 são subespaços de *V*, então o conjunto $W_1 + W_2 = \{\boldsymbol{u_1} + \boldsymbol{u_2}: \boldsymbol{u_1} \in W_1 \text{ e } \boldsymbol{u_2} \in W_2\}$ é um subespaço de *V*."

1.3.2 COMBINAÇÃO LINEAR

Ao conhecermos espaços vetoriais é possível obtermos novos vetores desses espaços a partir de outros vetores conhecidos. Em virtude disso, Boldrini et al. (1980, p.112) define que: "*seja V um espaço vetorial real (ou complexo),* $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$, $\boldsymbol{v_3}$, ..., $\boldsymbol{v_n} \in V$ e a_1, a_2, ..., a_n *números reais (ou complexos). Então o vetor* $\boldsymbol{v} = a_1\boldsymbol{v_1} + a_2\boldsymbol{v_2} + \ldots + a_n\boldsymbol{v_n}$ *é um elemento de V ao que chamamos de combinação linear de* $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$, $\boldsymbol{v_3}$, ..., $\boldsymbol{v_n}$". Segundo ainda esse autor, se $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$, $\boldsymbol{v_3}$, ..., $\boldsymbol{v_n}$ são vetores fixados em *V* então um conjunto *W*, formado por essa combinação linear, é um subespaço de *V*.

1.3.3 DEPENDÊNCIA E INDEPENDÊNCIA LINEAR

Ao considerarmos os vetores $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$, $\boldsymbol{v_3}$, ..., $\boldsymbol{v_n}$ pode(m) existir vetor(es) $\boldsymbol{v_i}$, dentre os vetores $\boldsymbol{v_n}$, que podem ser descritos como uma combinação linear dos demais. Para averiguar essa proposição, devemos definir o que se conhece por Dependência linear e Independência linear.

> Sejam *V* um espaço vetorial e $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$, $\boldsymbol{v_3}$, ..., $\boldsymbol{v_n} \in V$. Dizemos que o conjunto $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$ é *linearmente independente* (LI) ou que os vetores $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$, $\boldsymbol{v_3}$, ..., $\boldsymbol{v_n}$ são LI, se a equação $a_1\boldsymbol{v_1} + a_2\boldsymbol{v_2} + \ldots + a_n\boldsymbol{v_n} = 0$ implica em $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$. Caso exista algum $a_i \neq 0$ dizemos que $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$ é *linearmente dependente* (LD), ou que os vetores $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$, $\boldsymbol{v_3}$, ..., $\boldsymbol{v_n}$ são LD (BOLDRINI et al., 1980, p. 114).

Os vetores linearmente dependentes (LD) são também caracterizados se, e somente se, existir um dos vetores $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$, $\boldsymbol{v_3}$, ..., $\boldsymbol{v_n}$ como combinação linear dos demais. Caso contrário, ou seja, se nenhum destes vetores for escrito como uma combinação linear dos demais então os vetores são linearmente independentes (LI).

1.4 BASE DE UM ESPAÇO VETORIAL

Vimos até o momento que um conjunto cujos elementos são vetores que geram um espaço vetorial do tipo $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}, ..., \boldsymbol{v_n}\}$ não pode ter vetor(es) que sejam escrito(s) como uma combinação linear dos vetores que compõe este espaço. A esses elementos que não podem ser escritos como uma combinação linear dos demais, dizemos que eles geram uma *base* para o espaço vetorial.

Segundo Boldriniet al. (1980) um conjunto $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}, ..., \boldsymbol{v_n}\}$de vetores será uma *base* se:

I. $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}, ..., \boldsymbol{v_n}\}$ é LI.

II. $[\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}, ..., \boldsymbol{v_n}] = V$.

Considerando apenas bases finitas, ou seja, "*para cada vetor, podemos escolher uma quantidade finita e vetores da base para, com eles, escrever o vetor dado*" (BOLDRINI *et al*., 1980, p.117) podemos conhecer as propriedades que regem as bases de um espaço a partir de algumas proposições:

> ***1.*** Sejam $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$, $\boldsymbol{v_3}$, ..., $\boldsymbol{v_n}$ vetores não nulos que geram um espaço vetorial $\boldsymbol{V}$. Então, dentre estes vetores podemos extrair uma base de V.
>
> ***2.*** Seja um espaço vetorial$V$gerado por um conjunto finito de vetores $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$, $\boldsymbol{v_3}$, ..., $\boldsymbol{v_n}$. Então, qualquer conjunto com mais de n vetores é necessariamente LD e, portanto, qualquer conjunto LI tem no máximo n vetores.
>
> ***3.*** Qualquer conjunto de vetores LI de um espaço vetorial V de dimensão finita pode ser completado de modo a formar uma *base* de V.

4. Se ***U*** e ***W*** são subespaços de um espaço vetorial *V* que tem dimensão finita, então *dim U* ≤ *dim V*e *dim W* ≤ *dim V*. Além disso, *dim (U + W) = dim U + dim W – dim (U* $\cap$ *W)*.

5. Dada uma base β = {$\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$, $\boldsymbol{v_3}$, ..., $\boldsymbol{v_n}$}de *V*, cada vetor de *V*pode ser escrito de maneira única como uma combinação linear de $\boldsymbol{v_1}$, $\boldsymbol{v_2}$, $\boldsymbol{v_3}$, ..., $\boldsymbol{v_n}$ (BOLDRINI et al., 1980, p. 118–120).

Devemos entender por dimensão de um espaço vetorial *V* o número de elementos que essa base possui e a representamos por *dim V*. “Qualquer base de um espaço vetorial tem sempre o mesmo número de elementos” (BOLDRINI et al., 1980, p.119).

1.5 MUDANÇA DE BASE

Segundo Silva (2007, p. 62-63), sendo

> *“Vum espaço vetorial de dimensão finita sobre $\Re$. Uma base ordenada de V é uma sequencia finita de vetores LI que gera**V**e será denotado por($\boldsymbol{u_1}$, $\boldsymbol{u_2}$, $\boldsymbol{u_3}$, ..., $\boldsymbol{u_n}$)ou{$\boldsymbol{u_1}$, $\boldsymbol{u_2}$, $\boldsymbol{u_3}$, ..., $\boldsymbol{u_n}$}. Se a seqüência $\boldsymbol{u_1}$, $\boldsymbol{u_2}$, $\boldsymbol{u_3}$, ..., $\boldsymbol{u_n}$é uma base ordenada deV, então {$\boldsymbol{u_1}$, $\boldsymbol{u_2}$, $\boldsymbol{u_3}$, ..., $\boldsymbol{u_n}$}é uma base deV.”*

Em outras palavras, isto significa que se β= {$\boldsymbol{u_1}$, $\boldsymbol{u_2}$, $\boldsymbol{u_3}$, ..., $\boldsymbol{u_n}$} é um conjunto que define uma *base ordenada* de *V*, então qualquer vetor $\boldsymbol{u} \in V$ pode ser escrito unicamente como uma combinação linear desses elementos que geram a baseβ, ou seja, $\boldsymbol{u} = a_1\boldsymbol{u_1} + a_2\boldsymbol{u_2} + \ldots + a_n\boldsymbol{u_n}$ (SILVA, 2007). Nesse contexto os escalares a_1, a_2, …, $a_n$são as coordenadas do vetor $\boldsymbol{u}$ em relação a *base ordenada*β.

2. FUNDAMENTOS DA ÁLGEBRA DE CLIFFORD OU ÁLGEBRA GEOMÉTRICA

Neste Capítulo apresentamos os aspectos relevantes da álgebra Geométrica ou álgebra de Clifford, desde sua concepção cronológica até os princípios que rege esta álgebra. Apresentamos ainda uma construção da álgebra de Clifford a partir da álgebra de Grassmann discutindo a relação entre essas duas álgebras.

2.1 ASPECTOS HISTÓRICOS

A história do cálculo vetorial remonta tempos longínquos desde a Grécia Antiga, em que Euclides fundou a sua geometria. Mas foi somente após muito tempo, com René Descartes, que a existência das grandezas vetoriais ficou mais evidente. Foi Descartes quem deu à geometria de Euclides um formalismo analítico.

Nessa história devemos destacar que o matemático, Carl F. Gauss, e independentemente dele, Jean R. Argand, estudaram um novo campo da matemática que em princípio não tinha nada a ver com vetores, mas que foram essenciais à formulação do cálculo vetorial: os números complexos. Estes matemáticos perceberam que esses números podem ser representados por um par ordenado semelhante ao utilizado no plano cartesiano, também chamado plano de Argand-Gauss (VIEIRA, 2005).

Nesta representação, vem a referência dos trabalhos de Gauss e Argand que tiveram uma profunda aceitação dos matemáticos da época. Entretanto, houve dificuldades para a representação no espaço tridimensional, precisando ampliar o conjunto de números complexos. A solução só foi alcançada por William Rowan Hamilton depois de algum tempo (VAZ JÚNIOR, 1997; 2000).

Hamilton percebeu que o equívoco, ao tentar associar o conjunto dos números reais a um dos eixos, era justamente o que fazia aparecer as contradições encontradas em outras tentativas. Então, deveria associar a cada eixo do sistema, conjuntos imaginários (por exemplo: I, J e K) e que fossem independentes uns dos outros, assim como os números reais. Assim, Hamilton generalizou a álgebra dos números complexos, que agora continha quatro conjuntos: três imaginários e um real. A este objeto complexo, ou seja, os quatro conjuntos, foram denominados de quatérnions.

Os quatérnions tiveram uma importância para o cálculo vetorial pelas suas características, pois estas eram adequadas à descrição de vários fenômenos naturais. Várias aplicações dos quatérnions se sucederam e outros pesquisadores se interessaram em pesquisar novos objetos matemáticos adequados para o estudo da natureza. Entre eles, temos: Hermann GuntherGrassmann, que em 1873, publicou um artigo denominado Die LinealeAusdehnungslehre (Álgebra das Extensões Lineares), propondo que grandezas físicas fossem representadas por objetos geométricos ao invés de numéricos. Foi este o ponto crucial para o surgimento do conceito de objetos vetoriais. (MUNDIM e MUNDIM, 1997).

Além disso, Grassmann generalizou a geometria de Euclides ao sugerir um tratamento matemático válido para um espaço de qualquer dimensão. O seu trabalho tinha certa complexidade de entendimento para a época, além do que, mediante todo o prestígio de Hamilton o seu trabalho acabou quase que esquecido.

A ênfase da palavra “quase” no final do parágrafo anterior é para ressaltar a importância da contribuição de William Kingdon Clifford, que reconheceu a grandeza desse trabalho e foi além, revelando várias semelhanças entre os trabalhos de Hamilton e Grassmann. Nessa revelação de semelhanças, formulou uma nova álgebra vetorial que englobava as de Hamilton e Grassmann, de uma forma bem mais simples. Em sua homenagem denominada de álgebra de Clifford, mas, por ele, denominada Álgebra Geométrica. Infelizmente, o seu trabalho também não ganhou a sua devida atenção na época, sobretudo por causa de sua morte prematura (VAZ JÚNIOR, 1997).

Josiah Willard Gibbs também fez uma análise da álgebra de Grassmann, tornando-a mais familiar em formato de notas de aula junto a seus alunos. Quase que paralelamente, Oliver Heaviside, colaborou com o trabalho de Gibbs, surgindo uma nova álgebra denominada de vetorial, de grande praticidade para a descrição dos fenômenos naturais e funcionava bem na maioria dos casos (FERREIRA, 2006).

Em sua álgebra não havia mais bivetores, trivetores etc., apenas escalares e 1-vetores. Vale ressaltar também que, devido à simplicidade da álgebra vetorial de Gibbs-Heaviside, esta é a álgebra que comumente se ensina nas escolas e que vários profissionais fazem uso, inclusive no ensino da física nos níveis: médio e superior (VAZ JÚNIOR, 1997; 2000).

Para Dorane Lasenby (2003), o matemático H. Grassmann, em 1844, inscreveu-se num concurso matemático que daria um prêmio a quem desenvolvesse as ideias iniciais proposta por Leibniz. Neste concurso, a ideia suscitada por Grassmann foi a de definir o conceito de *congruência* comparando os segmentos reta em magnitude e direção que, segundo Hestenes (2009), os gregos haviam definido este conceito em função apenas da magnitude da reta. No mesmo ano, Willian K. Clifford analisando os trabalhos de Grassmann e Willian R. Hamilton publicaram um sistema que denominou de quatérnions - que é uma generalização dos números complexos - que descreve operações no espaço de três dimensões (DORAN, 1994). Em 1878, Clifford unifica os trabalhos desenvolvidos por Grassmann (álgebra exterior) e Hamilton (quatérnions), desenvolvendo os quatérnions a partir da estrutura algébrica de Grassmann..

Dessa forma, William Kingdon Clifford formulou no final do século XIX a álgebra geométrica, ou como também é conhecida, álgebra de Clifford. A álgebra geométrica surgiu como uma síntese e generalização dos sistemas de Hamilton e Grassmann, de forma que Clifford introduziu o análogo do produto quaterniônico de Hamilton, dentro da estrutura da álgebra de Grassmann. Assim, obteve um sistema naturalmente adaptado à geometria ortogonal de um espaço arbitrário (DORAN, 1994**)**.

O resgate da álgebra de Clifford deve-se ao professor David Hestenes (1986) que tenta unificar a linguagem da física matemática. A partir dele, outros pesquisadores se interessaram pelo assunto. Particularmente, no Brasil, temos os trabalhos de Vaz Júnior (1997; 2000).

A álgebra de Clifford pode ser utilizada no lugar da álgebra vetorial devido as suas vantagens inegáveis, porém, é necessário salientar os trabalhos de Heaviside-Gibbs não podem ser de forma alguma esquecidos, pois de fato, mesmo não sendo completamente correto o trabalho destes pesquisadores foi de grande importância para a evolução da história da ciência.

Neste pequeno relato histórico é bom frisar contribuições de outros pesquisadores como Levi-Civita, Ricci, Einstein etc., que desenvolveram o conceito de tensor, uma evolução do conceito de vetor, formulando assim a álgebra tensorial(ORTIZ e SASSE, 2003; FERREIRA, 2006).

A álgebra geométrica ou álgebra de Clifford tem seus fundamentos baseados na álgebra que envolve vetores e, também, utiliza-se das incongruências que essa álgebra vetorial (também conhecida como álgebra de Gibbs-Heaviside) nos fornece. Uma dessas incongruências está no fato do módulo do produto vetorial de dois vetores coplanares fornecer a área de um paralelogramo formado por esses vetores que tem origens coincidentes e formam um ângulo qualquer diferente de 0º ou 360º (Figura 3) e, os mesmos não existirem em espaços bidimensionais ou quadrimensionais (VAZ Júnior, 2000).A área correspondente a esse paralelogramo é o módulo do produto vetorial, representado por:

$$|\boldsymbol{C}| = |\boldsymbol{A}\ x\ \boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|sen\theta \qquad (2.1)$$

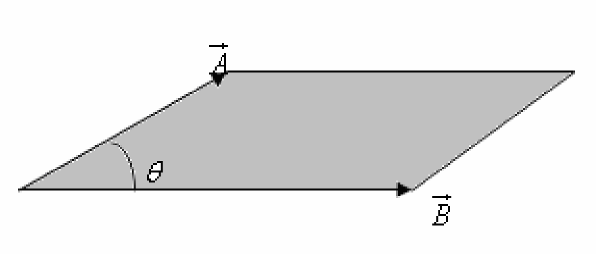

Figura 3:Paralelogramo definido pelos vetores $\vec{A}$ e $\vec{B}$.

O vetor resultante obtido é, por definição, ortogonal ao plano que contém os dois vetores, estabelecendo, dessa forma, a sua direção. Na álgebra de Gibbs-Heaviside, o produto vetorial de dois vetores é dado por:

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\ x\ \boldsymbol{B} \qquad (2.2)$$

A característica desse novo vetor $\boldsymbol{C}$ é que o mesmo é perpendicular ao plano definido pelos vetores que os contém (ALONSO e FINN, 2001). Desta forma, é fácil ver que se mudarmos o sentido do produto vetorial, ou seja, de $\boldsymbol{B}$ para $\boldsymbol{A}$ então o sentido do vetor $\vec{C}$ fica alterado. Destarte, podemos concluir que, $\boldsymbol{A}\, x\, \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B}\, x\, \boldsymbol{A}$. Como todo vetor tem módulo, direção e sentido, então o módulo do produto vetorial de $\boldsymbol{A}$ por $\boldsymbol{B}$ é dado por:

$$C = A \cdot B \cdot sen\theta = \acute{A}rea_{paralelogramo} \tag{2.3}$$

A Equação (2.3) nos fornece que, apenas o valor numérico nela é que se torna igual, pois trata-se de grandezas distintas.

Utilizando a expressão que define o produto vetorial, é possível estabelecer uma relação entre os versores, de forma semelhante do que ocorre no caso do produto escalar. Se os vetores estão escritos numa base:

$$R_3 = \{\hat{\imath}, \hat{\jmath},\ \hat{k}\}, \tag{2.4}$$

tem-se que:

$$\hat{\imath}\ x\ \hat{\imath} = 0, \hat{\jmath}\ x\ \hat{\jmath} = 0 \text{e} \hat{k}\ x\ \hat{k} = 0.$$

Ou seja, o produto vetorial de um versor por ele mesmo é nulo. Significa dizer que eles estão dispostos em paralelo, ao analisarmos a Equação (2.3). O sentido é obtido pela regra da mão direita.

> Considere os dedos indicador e médio da mão direita. Represente o primeiro vetor do produto vetorial pelo dedo indicador, e o segundo, pelo dedo médio (a ordem é importante). Disponha esses dedos da mesma forma como os vetores estão no espaço. Agora forme, com o polegar da mão direita, um ângulo de 90° com o plano formado pelos outros dedos. O sentido do vetor é o mesmo que o indicado pelo polegar (MACHADO, 2004, p. 41).

Temos que a diferença entre as álgebras geométricas e a álgebra de Gibbs-Heaviside está na definição do produto de vetores. O produto geométrico ou de Clifford de vetores "*não apenas pode ser definido em qualquer espaço vetorial como também contém mais informações do que o produto vetorial usual quando* *este existe*” (VAZ JÚNIOR, 2000, p.6). Assim, esse possui outras vantagens como associatividade e existência de um elemento inverso, propriedades que não são satisfeitas pelo produto vetorial da álgebra de Gibbs-Heaviside (VAZ JÚNIOR, 2000).

Ao projetarmos um vetor qualquer $\boldsymbol{A}$na direção de outro vetor $\boldsymbol{B}$ (Figura 4), estamos determinando o que se chama de *produto interior* e, na álgebra de Gibbs-Heaviside, representa um ponto (geometricamente) ou equivalentemente um *escalar*. Denotaremos que o produto interior será expresso por $\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}$ e seu módulo é definido por:

$$\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B} = A \cdot B \cdot cos\theta \tag{2.5}$$

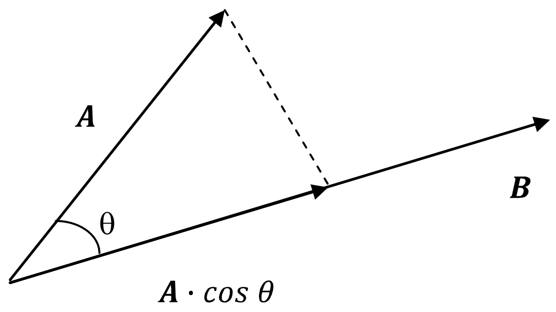

Figura 4: Projeção do vetor$\boldsymbol{A}$na direção do vetor$\boldsymbol{B}$.

O termo geométrico $\boldsymbol{A}\cdot cos\theta$ consiste na projeção do primeiro vetor sobre o segundo e é também conhecido como produto escalar ou produto ponto

O produto escalar também é utilizado para calcular o módulo de um vetor. Assim, o módulo de um vetor $\boldsymbol{v}$ qualquer pode ser obtido da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}.\boldsymbol{v} &= |\boldsymbol{v}|\,.\,|\boldsymbol{v}|\ cos0, \\ \boldsymbol{v}.\boldsymbol{v} &= |\boldsymbol{v}|^2, \\ v &= |\boldsymbol{v}| = \sqrt{\boldsymbol{v}.\boldsymbol{v}}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Considere o produto escalar de versores na base$R_3 = \{\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}\}$. Esses versores, de módulo 1, são ortogonais. Uma base com essas características é denominada*ortonormal*.

Assim, de acordo com Machado (2004, p. 40), "*numa base ortonormal que siga as propriedades do produto escalar de vetores, o módulo de um vetor é dado pela raiz quadrada da soma dos quadrados das suas componentes*".Diante das considerações feitas até agora, algumas inquietações surgem:

- O produto cruzado entre dois vetores não gera um vetor, e sim um pseudo-vetor.
- Observando atentamente a eq. (2.2), se invertermos os sentidos dos vetores$\boldsymbol{A}$ e$\boldsymbol{B}$, o vetor $\vec{C}$não se inverte.
- O produto vetorial entre $\boldsymbol{A}$e $\boldsymbol{B}$ resulta em um vetor axial, quando sabemos que o vetor $\boldsymbol{C}$é um vetor polar.
- A regra da mão direita é mnemônica, portanto, convencional.

2.2 ÁLGEBRA DE CLIFFORD

Para atacar as inconsistências, inerentes da álgebra vetorial de Gibbs, vamos lançar mão de um novo formalismo matemático. Este, recebe o nome de álgebra Geométricaou álgebra de Clifford, em homenagem a seu precursor.

Na álgebra de Clifford, vamos nos deparar com os objetos vetoriais, que são entidades matemáticas que representam grandezas físicas de forma que toda grandeza física deve ser representada por um objeto vetorial. Esses objetos abrangem desde os escalares até k-vetores (VIEIRA, 2005).

Todo objeto vetorial, para ser completamente especificado, requer quatro propriedades: grade, módulo, direção e sentido.

Grade: Permite a classificação dos objetos vetoriais de acordo com o objeto geométrico (ponto, reta, plano, triedo etc.) a que está associado. Logo, a grade dos escalares é 0, a grade dos vetores é 1, a grade dos bivetores é 2 e assim por diante. Sendo a grade de um k-vetor igual a k. Para diferenciar os diferentes tipos de objetos vetoriais, doravante, utilizaremos a seguinte notação: um objeto vetorial será sempre escrito em negrito, com a sua grade especificada pelo número de setas sobrescritas.

Módulo: Representa a magnitude do objeto vetorial, equivale a medida do comprimento, área, volume, etc. em sua representação geométrica. O módulo de um k-vetor é um número sempre real e não-negativo que nos fornece a intensidade grandeza representa por ele quando especificamos uma unidade de medida adequada.

Direção: Corresponde à reta, plano, volume etc. que dá suporte ao k-vetor. A direção de 1-vetor será a mesma da reta de atuação da grandeza vetorial que ele representa; a direção de um 2-vetor será o plano de atuação da grandeza bivetorial que lhe é associado; e assim por diante, sendo inexistente a direção dos escalares.

Sentido: Define a origem do vetor e o seu destino. Há apenas dois sentidos possíveis para um dado k-vetor. Para determinar a forma com que uma grandeza atua é necessário dizer de onde ela provém e a onde ela atuará. Desta forma, chamamos de sentido de um k-vetor a sua direção quando orientada da origem para o destino. Toda grandeza vetorial possui dois sentidos associados a cada direção. Assim, os escalares podem ser positivos ou negativos; os vetores podem apontar para qualquer uma das direções possíveis ao longo de sua reta de atuação, um bivetor, pode possuir um sentido horário ou anti-horário, um trivetor tem um dos sentidos definidos pela “regra da mão direita” e outra pela “regra da mão esquerda” e assim, sucessivamente.

As grandezas escalares ficam determinadas apenas por uma magnitude, não necessitando de uma direção, a qual pode geometricamente ser associada a pontos; já aquelas grandezas que necessitam de orientação devem ser representadas por vetores. Estes podem ser vistos, pelo ponto de vista geométrico, como segmentos de reta orientados.A representação das grandezas vetoriais é feita da seguinte forma: o comprimento do vetor informa a magnitude da grandeza, a direção desta é determinada pela reta-suporte do vetor e o seu sentido por uma flecha colocada em uma das extremidades dele. Estas três propriedades, magnitude, direção e sentido, são suficientes para descrever um vetor em sua totalidade.

Deste mesmo modo, para representar grandezas angulares utilizaremos os bivetores, que nada mais é do que um fragmento de plano orientado. O valor de sua área informa a magnitude da grandeza por ele representada, a direção da grandeza é determinada pela direção do plano-suporte do bivetor, e também admite dois sentidos: horário e anti-horário. Aliás, até mesmo o ângulo fica bem mais representado por um bivetor. Com este mesmo raciocínio podemos definir os trivetores que podem ser associados àtriedos orientados que equivale a um elemento de volume com duas orientações possíveis de acordo com a regra da mão direita e a regra da mão esquerda. Desde modo podemos abranger desde os escalares até k-vetores (quadrivetores, pentavetores etc.). A Figura 5 apresenta alguns dos objetos da álgebra de Clifford ou Geométrica, para o espaço euclidiano tridimensional.

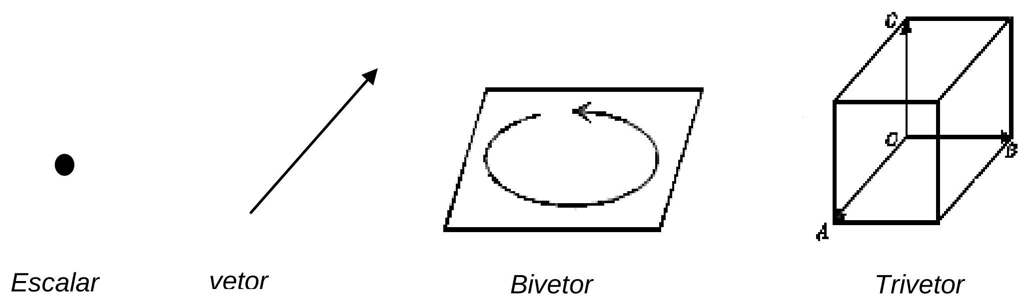

Figura 5: Representação geométrica dos objetos da álgebra de Clifford para o espaço euclidiano tridimensional.

Para analisar a álgebra de Clifford, identificaremos os objetos geométricos a partir da terminologia *k-vetor*. Nesta notação, entender-se-á que o objeto:*0-vetor* simboliza um escalar (geometricamente representado por um ponto); *1-vetor*simboliza o vetor geométrico na álgebra vetorial de Gibbs-Heaviside (representado por uma seta). Prosseguindo, podemos visualizar geometricamente os objetos: *2-vetor*(bivetor) e *3-vetor* (trivetor). O *4-vetor*,em diante, é chamado de *multivetor,* que se tornará nosso alvo para definir operações com esse objeto geométrico.

A Figura 6, representando o *2-vetor*, pode ser orientadoem duas direções, a saber, *anti-horário* e *horário*. Para definir sua orientação utilizaremos o produto de Grassmann, ou ainda, produto exterior (conhecido como produto vetorial na álgebra de Gibbs-Heaviside) denotado por $\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B}$. Ao nos fornecer uma orientação, este produto atende a seguinte propriedade: $\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{A}$, e sua representação na álgebra de Clifford é observada conforme Figura 6.

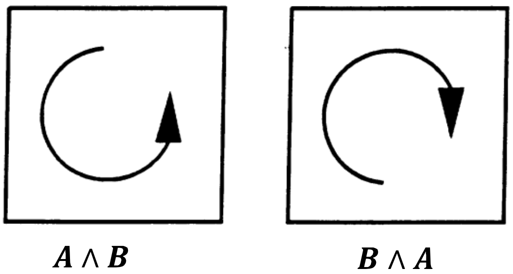

Figura 6: Representação geométrica dos objetos da álgebra de Clifford para fragmentos de planos orientados ou bivetores.

Convém salientar que, em ambos os casos, os vetores $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ têm seus sentidos orientados para direita e para cima,respectivamente, e com mesma origem.

No plano, qualquer *1-vetor*($\boldsymbol{A}$) pode ser escrito como uma combinação linear de uma base ortonormal $\{\boldsymbol{e_1},\ \boldsymbol{e_2}\}$, ou seja, $\boldsymbol{A} = a_1\boldsymbol{e_1} + a_2\boldsymbol{e_2}$.

A área orientada delimitada pelo paralelogramo corresponderá ao módulo desse bivetor – que equivale ao módulo do vetor $\boldsymbol{C}$, ortogonal ao paralelogramo formado entre $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$. O sentido pode ser horário ou anti-horário.

Para calcular o módulo desse bivetor vamos admitir a existência de um operador que será chamado de produto externo ou produto de Grassmann. O produto externo entre $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$nada mais é do que a extensão do vetor $\boldsymbol{A}$sobre o vetor$\boldsymbol{B}$ou vice-versa, assim como o produto escalar é a projeção de um vetor sobre outro. O símbolo $\wedge$, denominado de cunha, é usado para representá-lo. Assim, considerando dois vetores$\boldsymbol{A}$ e$\boldsymbol{B}$, o produto externo entre os dois é escrito como$\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B}$. Em termos matemáticos o produto externo é anticomutativo. Sejam dois vetores $\boldsymbol{a}$ e$\boldsymbol{b}$, temos que:

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{a} \tag{2.7}$$

Se estendermos o vetor $\boldsymbol{a}$, ou o vetor $\boldsymbol{b}$, através dele mesmo não obteremos nenhuma área, logo:

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{a} = 0$$

e

$$\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{b} = 0$$

A seguir apresentaremos algumas propriedades importantes do produto externo, sendo γ um escalar:

(a) *Propriedade associativa:*$(\gamma\boldsymbol{a}) \wedge \boldsymbol{b} = \gamma(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b})$
(b) *Propriedade comutativa:*$\gamma(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b})\gamma$
(c) *Propriedade distributiva:*$\boldsymbol{a} \wedge(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c})$

Considerando o que foi exposto, surge uma inquietação: como é possível representar o vetor $\boldsymbol{c}$através de um fragmento de plano orientado se ele é, na verdade, um segmento de reta orientado?

A resposta reside em um conceito de fundamental importância no estudo da álgebra de Clifford: o de **dualidade**. Dentro de um mesmo sistema n-dimensional, o *dual de um objeto vetorial* consiste em outro objeto vetorial que apresenta o mesmo número de componentes. O número binomial [n k], definido como:

$$[nk] = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \tag{2.9}$$

onde k é a grade e n é a dimensão, que determina o número de componentes de um objeto vetorial. Por exemplo, em um sistema tridimensional é possível descrever desde 0-vetor até 3-vetor. Dessa forma, temos:

0-vetor → N_0 = [n 0] = 1,

1-vetor → N_1 = [n 1] = 3,

2-vetor→ N_2 = [n 2] = 3

e

3-vetor→ N_3 = [n 3] = 1.

É possível observar que 1-vetor e 2-vetor formam um dual, uma vez que ambos, dentro de um sistema tridimensional, apresentam três componentes.

A importância de se determinar o dual de um vetor reside no fato de que, a partir de um p-vetor, é possível definir um q-vetor dual que represente a mesma grandeza, só que de forma mais clara. Dessa forma é possível definir dualidade como sendo a operação cujo objetivo é transformar um p-vetor em um q-vetor dual. O q-vetor procurado deve ter o mesmo módulo do p-vetor original uma vez que ambos devem representar a mesma grandeza. Em um sistema tridimensional a direção do q-vetor dual é ortogonal a do p-vetor original. A escolha do sentido é arbitrária, ou seja, depende apenas de uma mera convenção. A Figura 7 ilustra um bivetor e o seu dual.

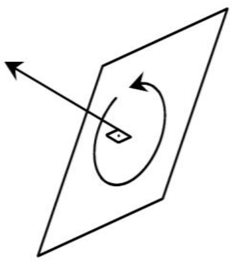

Figura 7. Um bivetor e o seu dual.

2.2.1 PRODUTO DE CLIFFORD

Ao mencionarmos o produto interior e exterior, definiremos a seguir o produto de Clifford de dois vetores em direções quaisquer. Sendo assim, chamamos de *produto de Clifford* dos vetores $\boldsymbol{A}$e$\boldsymbol{B}$ a expressão:

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A}\ \underbrace{(\boldsymbol{B}_{\parallel} + \boldsymbol{B}_{\perp})}_{\substack{Decomposição \\ vetorial}} = \boldsymbol{AB}_{\parallel} + \boldsymbol{AB}_{\perp} \qquad (2.10)$$

O primeiro termo depois do segundo sinal de igualdade nos representa tão somente a projeção do vetor $\boldsymbol{A}$ na direção do vetor $\boldsymbol{B}_{\parallel}$ e, assim, simboliza o que denotamos de *produto interior* de Grassmann. O segundo termo nos reporta a uma orientação dada pelo objeto geométrico de Clifford *2-vetor*. Desta forma, a Equação (2.10) pode ser assim reescrita como:

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B} \qquad (2.11)$$

O produto de vetores obtido na Equação (2.11)é denominado de *produto de Clifford*. Sendo assim definido, podemos perceber que para os vetores que formam uma base ortonormal, o produto de Clifford nos diz que:

$$\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 = 0 + [-(\boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_1)] = \underbrace{\boldsymbol{e}_{12}}_{bivetor} \qquad (2.12)$$

E, daí, obtemos a relação que:

$$\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 = -(\boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_1) = -\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1 \Rightarrow \ \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1 = 0 \qquad (2.13)$$

Um resultado importante desta equação é que o produto de qualquer vetor (1-vetor) por um escalar é comutativo e por um bivetor (2 -vetor) é anti-comutativo. Daí, nesse último produto, há uma rotação de 180º e, portanto, opostos entre si geometricamente.

2.2.2 MULTIVETOR

Sejam os três objetos de Clifford *0-vetor*, *1-vetor* e *2-vetor*, definimos um *multivetor (A)* como sendo uma combinação linear dos elementos dessa base$\{1,(e_1,e_2),e_1e_2\}$, ou seja,

$$\boldsymbol{A} = a_0 + a_1\boldsymbol{e_1} + a_2\boldsymbol{e_2} + a_3(\boldsymbol{e_1}\boldsymbol{e_2}). \tag{2.14}$$

Desta equação, a_0, a_1, a_2, a_3 são escalares.

2.2.2.1 Operação com Multivetores

2.2.2.1.1 Soma

Dados dois multivetores$\boldsymbol{A} = a_0 + a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2)$ e $B = b_0 + b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2)$ então definimos a soma desses multivetores por:

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = a_0 + a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2) + b_0 + b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2) \tag{2.15}$$

ou ainda,

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = (a_0+b_0) + (a_1 + b_{1)}\boldsymbol{e}_1 + (a_2 + b_2)\boldsymbol{e}_2 + (a_3 + b_3)(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2). \tag{2.16}$$

Esta última equação nos diz que a soma de dois multivetores também é um multivetor.

2.2.2.1.2 Produto

Para o produto entre os multivetores temos que:

$$AB = [a_0 + a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2)][b_0 + b_1\boldsymbol{e}_1 + b_2\boldsymbol{e}_2 + b_3(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2)] \tag{2.17}$$

Realizando a distribuição entre os termos deste produto e aplicando as propriedades vistas entre os *k-vetor*, é fácil ver que o produto é dado por:

$$AB = [(a_0b_0 + a_1b_1 + \ a_2b_2 - a_3b_3\ ) + (a_0b_1 + a_1b_0 + a_3b_2 - a_2b_3)\boldsymbol{e}_1 + (a_0b_2 + a1b3+a2b0-a3b1)\boldsymbol{e}2+(a0b3+a1b2+a3b0-a2b1\boldsymbol{e}1e2 \qquad (2.18)$$

Analisando o produto entre os multivetores, verificamos que podemos reescrever o produto entre eles como segue

$$AB = M = m_0 + m_1\boldsymbol{e}_1 + m_2\boldsymbol{e}_2 + m_3(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2) \qquad (2.19)$$

AEquação (2.19), representa também um multivetor, pois m_0, m_1, m_2, m_3 são escalares e M é uma combinação linear dos *k-vetores(k = 0,1,2)*. Sendo assim, segundo Doran e Lasenby (2002), este conjunto de multivetores dotados com duas operações (soma e produto) constitui a álgebra denominada de *álgebra de Clifford*.

2.2.4 REFLEXÃO E ROTAÇÃO

Uma daspotencialidades da álgebra geométrica encontra-se na maneira claracomo ela aborda as reflexões e rotações.Inicialmente, consideremosa reflexão de um vetor **r**em relação ao plano perpendicular (α) a determinado vetor **a**unitário ($\mathbf{a}^2 = 1$), obtendo-se deste modo o vetor **r'**, conforme Figura 8.

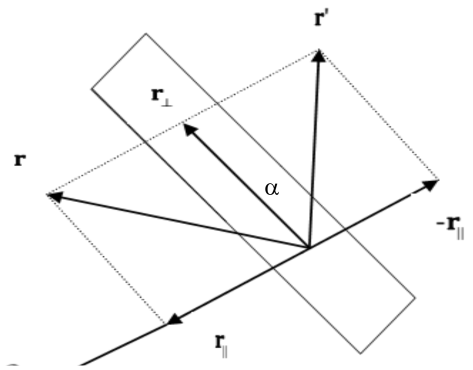

*Figura 8. Reflexão de um vetor **r** em relação ao plano perpendicular (α) ao vetor **a**.*

Sendo,

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r} + \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r}_{\parallel} + \boldsymbol{r}_{\perp} \tag{2.20}$$

Então,a partir da Figura 8, podemos verificar que:

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}_{\perp} - \boldsymbol{r}_{\parallel} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{r}) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{a}) = -\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{a}) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{a})$$

$$\boldsymbol{r}' = -\boldsymbol{ara} \tag{2.21}$$

Analisando a Equação (2.21), vê-se que amesma é válida para espaços de qualquer dimensão e mantém inalterado o comprimento e os ângulos entre o vetor e a sua reflexão. Para o caso em que os vetores **r** e **a** sejam perpendiculares entre si, a reflexão de **r** com relação ao vetor **a** é dada por

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}_{\parallel} - \boldsymbol{r}_{\perp} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{a}) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{r}) = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{a})$$

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{ara} \tag{2.22}$$

A Equação (2.22) representa quea rotação de um vetor com relação a outro permanece inalterada, conforme é visto na Figura 9.

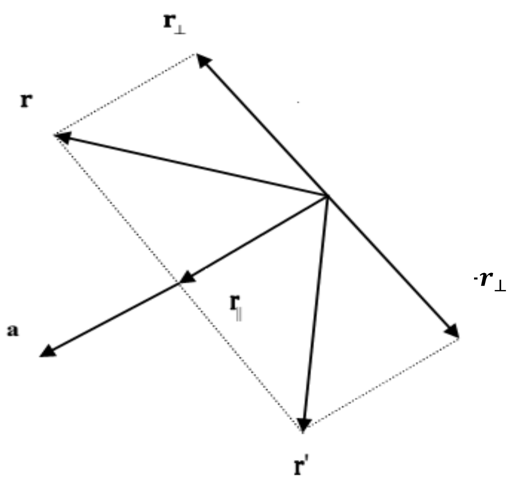

*Figura 9. Reflexão de um vetor **r** com relação ao vetor **a**.*

Utilizando um raciocínio análogo ao realizado acima, ou seja, como o resultado expresso na Equação (2.21), que determina-se a reflexão de um bivetor$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{q}$, expresso por$\boldsymbol{B'}$, com relação ao plano perpendicular ao vetor **a,** temos que:

$$\boldsymbol{B'} = (-\boldsymbol{ara}) \wedge (-\boldsymbol{aqa}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{araaqa} - \boldsymbol{aqaara}) \Rightarrow \boldsymbol{B'} = \frac{1}{2}\boldsymbol{a}(\boldsymbol{rq} - \boldsymbol{qr})\boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{B'} = \boldsymbol{aBa} \tag{2.23}$$

Utilizaremos o resultado exposto na Equação (2.23) para modelarmos os conceitos relativísticos propostos nesse trabalho. A representação geométrica desse resultado é exposto na Figura 10.

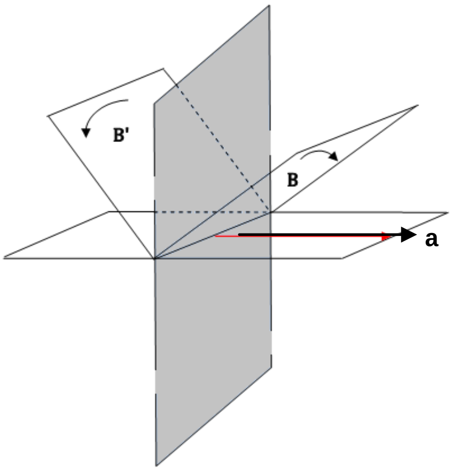

*Figura 10. Reflexão do bivetor **B** com relação ao plano perpendicular ao vetor **a**.*

Para entendermos a rotação de vetores no plano ou no espaço, considere o exposto na Fig. 9 que contém os vetores **a**, **r** e **r**' situados geometricamente em um mesmo plano. Nesse caso, deslocaremos os vetores $\boldsymbol{r}_{\perp}$ e $-\boldsymbol{r}_{\perp}$ de tal forma que suas origens coincidam com a extremidade final do vetor $\boldsymbol{r}_{\parallel}$. Sendo assim, podemos obter a reflexão desse vetor como segue:

$$\boldsymbol{r}_{\parallel} = (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{a})\boldsymbol{a}^{-1}, \tag{2.24}$$

com:$\boldsymbol{a}^{-1} = \frac{1}{a^2}\boldsymbol{a}$.

$$\boldsymbol{r}_{\perp} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_{\parallel} = (\boldsymbol{ra} - \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{a})\boldsymbol{a}^{-1} = (\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{a})\boldsymbol{a}^{-1} \qquad (2.25)$$

ou,

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}_{\parallel} - \boldsymbol{r}_{\perp} = (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{a} - \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{a})\boldsymbol{a}^{-1} = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r} + \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{r})\boldsymbol{a}^{-1} = \boldsymbol{ara}^{-1} \quad (2.26)$$

Com o resultado apresentado na Equação (2.26), e realizando uma nova reflexão a um vetor **b** qualquer, tem-se o que se entende, na álgebra geométrica,por rotação de um vetor. Portanto, sendo a reflexão de um vetor (denotado por $\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{r}'$) em relação a um vetor **a** dado por $\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{ara}^{-1}$, uma segunda reflexão em relação a um vetor **b** será expresso, analogamente, por $\boldsymbol{r}' \to \boldsymbol{r}'' = \boldsymbol{br}'\boldsymbol{b}^{-1}$. Esta reflexão sucessiva está representada geometricamente conforme Figura 11.

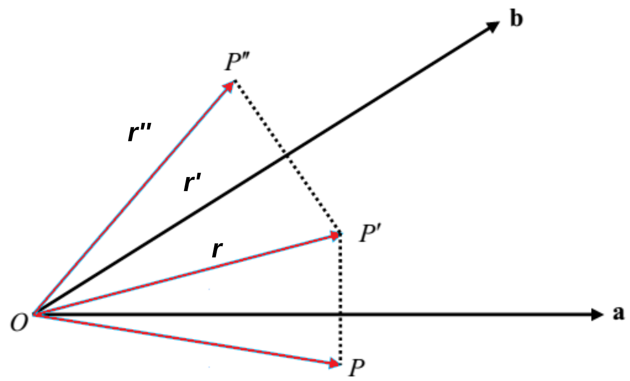

Figura 11. Reflexão sucessiva do vetor **r** com relação aos vetores **a** e **b**.

Considerando que o ângulo entre os vetores a e b (a,b) é $\frac{\boldsymbol{\theta}}{\mathbf{2}}$, então temos que, se (a,r) = (a,r') = α e (r',b) = (b,r'') = β, logo $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{2}\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{2}\boldsymbol{\beta}$. Daí, conclui-se que$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{cos2\alpha}$, $\boldsymbol{r}' \cdot \boldsymbol{r}'' = \boldsymbol{r}^{\mathbf{2}}\boldsymbol{cos2\beta}$. Por conseguinte, temos que:

$$\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}'' = \boldsymbol{r}^2 \cos(2\alpha + 2\beta) = |\boldsymbol{r}|^2 \cos\theta. \qquad (2.27)$$

Portanto, $\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{r}' = \boldsymbol{ara}^{-1} \to \boldsymbol{r}'' = \boldsymbol{br}'\boldsymbol{b}^{-1}$ e, assim, podemos escrever que

$$\boldsymbol{r}'' = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{ara}^{-1})\boldsymbol{b}^{-1} = (\boldsymbol{ba})\boldsymbol{r}(\boldsymbol{ba})^{-1}, \qquad (2.28)$$

com: $(\boldsymbol{ba})^{-1} = \boldsymbol{b}^{-1}\boldsymbol{a}^{-1}$.

Da Equação (2.28), considerando os vetores **a** e **b** unitários, podemos perceber que $(\boldsymbol{ba})^{-1} = \boldsymbol{ba} = \boldsymbol{ab}$. Desta forma,

$$\boldsymbol{r}'' = \underbrace{\boldsymbol{ab}}_{R}\,\boldsymbol{r}\,\underbrace{\boldsymbol{ba}}_{\tilde{R}} = R\boldsymbol{r}\tilde{R} \tag{2.29}$$

Na Equação (2.29), percebe-se também que $R\tilde{R} = 1$. Sendo R um multivetor, com $R\tilde{R} = 1$ e $\boldsymbol{r}''$podendo ser obtido a partir de $\boldsymbol{r}$, então chamamos R de rotor.

2.2.4 ÁLGEBRA DE CLIFFORD NO ESPAÇO QUADRIMENSIONAL

A álgebra geométrica (ou álgebra de Clifford) para o espaço quadrimensional é a mesma interpretada para o espaço-tempo. Desta forma, ao reportarmos à geometria quadrimensional o faremos, associativamente, à do espaço-tempo.

Para definir trivetores e quadrivetores vamos considerar o produto geométrico envolvendo 1-vetor e um bivetor (2-vetor). “O produto geométrico envolvendo, por exemplo, o vetor e_0 e os bivetores e_0e_i $(i = 1, 2, 3)$resulta em vetor, no caso em que o índice do vetor é igual a um dos índices do bivetor". (VAZ JUNIOR, 2000, p.21).

No produto geométrico, em que os índices são diferentes, por exemplo,do vetor e_0 pelo bivetore_1e_2, obtemos como resultado uma quantidade conhecida como *trivetor (3- vetor)* e expresso simbolicamente por $e_0e_1e_2$. Analisando todas as combinações desses *trivetores* possíveis, percebe-se que $e_0e_1e_2$, $e_0e_1e_3$, $e_0e_2e_3$ e $e_1e_2e_3$formam quatro trivetores linearmente independentes, assim como os bivetorese_0e_1, ee_1e_2 o fazem.

Seguindo o mesmo raciocínio, podemos definir o objeto chamado de *quadrivetor (4-vetor)* - objeto este que fornecerá subsídios para descrever a álgebra do espaço-tempo de Minkowski - a partir do produto de um vetor e_0 e um trivetor $e_1e_2e_3$, com todos os índices diferentes, nos fornece o elemento geométricoexpresso por $e_0e_1e_2e_3$. Por simplicidade de notação, vamos abreviá-lo por e_{0123}. Todos os produtos possíveis de um vetor por um trivetor, desde que os índices sejam distintos, fornece como resultado o quadrivetor e_{0123}. Desta forma, este é o único quadrivetor linearmente independente, segundo Vaz Júnior (2000).Na algébrica geométrica convém citar que, em geral, certas quantidades possuem mesma dimensão - sendo esta examinada pela Equação (2.9) - e, sendo assim, os quadrivetores possui um isomorfismo com relação aos escalares ou *0 - vetor* podendo ser considerados *pseudo-escalares*.

Para descrever a álgebra geométrica dos quadrivetores, partiremos do fato que, segundo o resultado apresentado na Equação (2.13), qualquer quadrivetoranticomuta com um pseudo-escalar, ou seja:

$$\boldsymbol{v}e_{0123} + e_{0123}\boldsymbol{v} = 0. \tag{2.20}$$

E que:

$$(e_0)^2 = 1 \text{ e } (e_i)^2 = -1, (i = 1,2,3) \tag{2.21}$$

Tomando por base as Equações (2.20), (2.21) e que v é um multivetor, então o espaço vetorial dotado das características apresentadas, definem, segundo Vaz (2000), a *álgebra geométrica do espaço-tempo*.

3. MODELO COGNITIVISTA DE AUSUBEL E MAPAS CONCEITUAIS

Neste Capítulo apresentaremos de maneira simples a Teoria da Aprendizagem Significativa de David Ausubel que serviu de apoio para justificar os objetivos propostos nesse trabalho. Por que a Teoria de Ausubel para estruturação didática do conteúdo? Deve ao fato desta poder permitir explorar a estrutura cognitiva do estudante, além de manipular seus mecanismos para a retenção dos conceitos hierárquicos da Física de forma propedêutica.

3.1. APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DE AUSUBEL

Considerando a proposta de modelagem de conceitos físicos com o novo formalismo matemático e a possibilidade de produção de material didático sobre a Teoria da Relatividade Restrita para o ensino médio e superior, esta pesquisa pretende utilizar da teoria da aprendizagem significativa de Ausubel para organizar os conceitos dentro de um modelo cognitivo.

Dentre as teorias da aprendizagem existentes, estudadas na psicologia educacional, tais como a teoria behaviorista de Skinner, a teoria do desenvolvimento cognitivo de Piaget, a teoria da mediação de Vygotsky e a teoria da aprendizagem significativa de Ausubel (também conhecida por teoria da aprendizagem de Ausubel e Novak), deteremos-nos a priori, nesta última, em virtude desta teoria servir como suporte teórico para o objetivo maior deste trabalho. Entretanto, deixamos claro que o conteúdo a seguir é bastante limitado para quem deseja ter uma compreensão completa desta teoria, carecendo assim de uma consulta mais minuciosa das obras utilizadas, aqui, como referência.

Para Ausubel, “aprendizagem significa organização e integração do material na estrutura cognitiva” (MOREIRA 1999, p. 152) do aprendiz. Essa, por sua vez, é entendida, pelo mesmo, como o mecanismo com o qual o aprendiz consegue organizar as ideias com relação ao contexto geral das informações (conceitos, proposições, leis etc.) recebidas (MOREIRA, 1999; MOREIRA 2006).

A teoria da aprendizagem significativa de Ausubel parte do pressuposto de que o que mais influencia no processo da aprendizagem é aquilo que o aprendiz já traz em sua estrutura cognitiva e, nesse sentido, cabe ao professor identificar e criar estratégias de ensino condizentes com tal estrutura. A aprendizagem neste processo se dará de forma significativa, quando uma nova informação interage com um conhecimento específico existente na estrutura cognitiva do aprendiz, conhecido por *subsunçor* e, esta informação ancora-se neste conhecimento sabido, reorganizando e/ou reforçando determinado conceito relevante para tal ancoragem.

Na ausência deste subsunçor, Ausubel recomenda o uso de organizadores prévios que são "materiais introdutórios, apresentados antes do próprio material a ser aprendido, porém em um nível mais alto de abstração, generalidade e inclusividade do que esse material" (MOREIRA, 2006, p. 23) para facilitar a aprendizagem do aprendiz. Os organizadores prévios não necessariamente precisam ser um material escrito, podendo dessa forma, ser, dependendo do contexto, um filme, um vídeo ou qualquer outro material que possa servir como uma "ponte cognitiva" capaz de conectar aquilo que o aprendiz já traz em sua estrutura cognitiva e o que realmente deve ser aprendido em termos conceituais (que aqui nos reportamos aos conteúdos disciplinares com seus conceitos específicos) generalizados e inclusivos, ou seja, os organizadores prévios norteiam os caminhos realmente primordiais para a elaboração e reforço dos conceitos tão importantes no meio científico. Desta forma, a elaboração (construção) de um material (chamado de material instrucional) remete-se à importância de uma aprendizagem em que aspectos como a interdisciplinaridade, o movimento CTS (Ciência, Tecnologia e Sociedade) e a transdisciplinaridade sejam criteriosamente questionados e levados à discussão, como meio de otimizar valores e intenções quanto à construção desse material.

Como forma de dar significado àquilo que é aprendido pelo aprendiz, Ausubel considera isto como o produto da aprendizagem significativa (MOREIRA, 2006). Nesta significação, o aprendiz deve ser capaz de resolver problemas com os quais sejam passíveis de resolução com aquilo (conceitos) que fora aprendido. É nesse cenário que estratégias de ensino se tornam um elemento em potencial para corroborar com a teoria da aprendizagem significativa Ausubeliana, e de convergência para os valores relevantes no âmbito educacional.

Para Ausubel, os principais conceitos relativos à aprendizagem se articulam da forma esquematizada na Figura 8. Este esquema implica que a estrutura cognitiva é o conteúdo total de ideias de um dado indivíduo naquela área particular do conhecimento. A modificação da estrutura cognitiva, através da incorporação de novas ideias é a aprendizagem. Dependendo do tipo de relação que se tem entre as ideias pré-existentes, os denominados conhecimentos prévios, e as ideias novas que estão internalizando, pode ocorrer um aprendizado que varia do mecânico ao significativo. E a aprendizagem significativa tem lugar quando as novas ideais vão se relacionando de forma não arbitrária e substantiva com as já existentes. A aprendizagem significativa pode ser dada por recepção e por descoberta.

Na aprendizagem por recepção, o aprendiz, segundo Moreira (2006), recebe o conteúdo em sua forma final, enquanto que na aprendizagem por descoberta, o mesmo, deve descobrir o que aprender quando da situação proposta pelo professor. Nesse sentido, tanto a aprendizagem por recepção ou por descoberta, será significativa se o conteúdo, por hora apresentado ao aprendiz, se relacionar de forma não arbitrária e substantiva à sua estrutura cognitiva. Não obstante, segundo Moreira (2006, p.18), "em termos de *aprendizagem de conteúdo*(grifo do autor), aquilo que for descoberto se torna significativo da mesma forma que aquilo que for apresentado ao aprendiz na forma receptiva". Nessa perspectiva, vale salientar também que, tais aprendizagens, a saber, recepção e descoberta, não devem ser confundidas com aprendizagem mecânica e significativa, pois as duas primeiras são reportadas no contexto de como a aprendizagem significativa pode ser "mensurada".

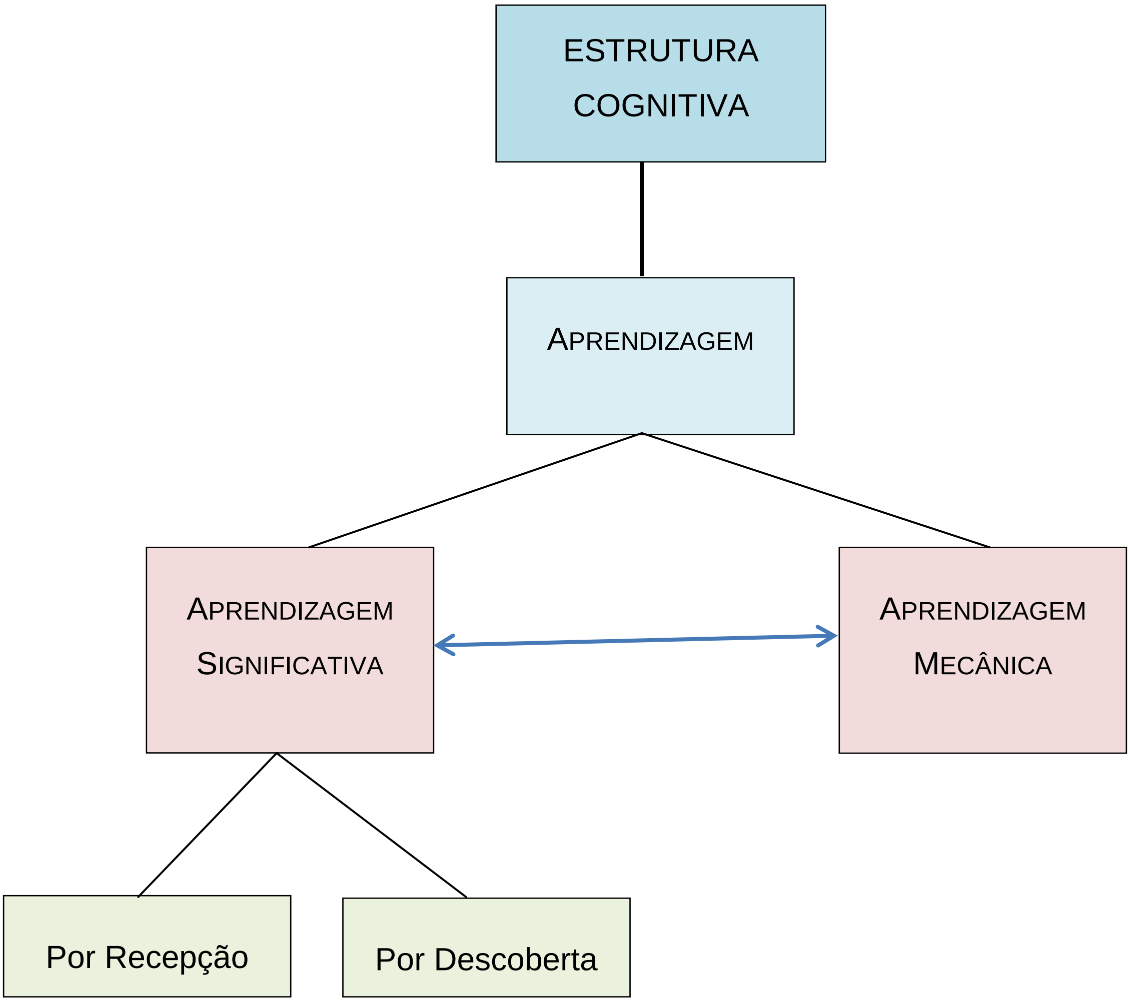

Figura 12: Esquema dos conceitos relativos à aprendizagem significativa
Fonte: Vieira (2010)

Para Moreira (1999), o conhecimento prévio pode ser definido como:

> A principal função do organizador prévio é a de servir de ponte entre o que o aprendiz já sabe e o que ele deve saber, afim que o material possa ser aprendido de forma significativa, ou seja, organizadores prévios são úteis para facilitar a aprendizagem na medida em que funcionam como pontes cognitivas (MOREIRA, 1999, p. 155).

Segundo Helckler (2004) para ter um melhor aproveitamento da teoria de Ausubel, tendo como objetivos uma aprendizagem significativa devemos ter os seguintes cuidados:

a) O material a ser assimilado seja potencialmente significativo, ou seja, não arbitrário em si. Mesmo materiais arbitrários então, pode ser tornado significativo através de organizadores prévios. Portanto, cabe ao professor fazer a organização do material, para que seja potencialmente significativo e quando necessário incluir materiais e informações anteriores que sirvam de organizadores prévios.

b) Ocorra um conteúdo mínimo na estrutura cognitiva do individuo, com subsunçores em suficiência pra suprir as necessidades relacionais. Nesse caso, o professor deve identificar os organizadores prévios que faltam e disponibilizar os mesmos, para que o aluno consiga fazer todas as relações necessárias para o entendimento do conteúdo.

c) O aluno apresente disposição para o relacionamento (conceito e ideia) e não simplesmente memorize-o mecanicamente. Cabe ao professor, neste ponto, tomar o cuidado com o seu método de ensino, buscar novas alternativas, pois salas de aula onde só acontecem exercícios e avaliação repetitivos e padronizados tornam o ambiente favorável à aprendizagem mecânica.

Ao analisar as proposições de Helckler e percebendo que, quando uma nova ideia é assimilada à estrutura cognitiva de uma pessoa, isto é, feito através do estabelecimento de relações entre ela e ideias já existentes, esta modifica tanto uma quanto outra, e como a estrutura cognitiva é uma verdadeira teia de relacionamentos entre conceitos e ideias, a inserção de algo novo pode provocar a modificação destes conceitos e ideias, mesmo que não esteja diretamente ligado a eles e, portanto, a presença de organizadores prévios é de suma importância na teoria Ausubeliana.

A finalidade de um organizador prévio é prover ideias de base, ou evidenciá-las na estrutura cognitiva do aluno, de modo a potencializar ao estudante uma aprendizagem significativa. Portanto, ele não deve ser confundido com introdução ou resumo, uma vez que sua função não é (somente) fornecer uma visão geral sobre o que se vai estudar, ou apontar os pontos principais do conteúdo em questão. A função do organizador prévio é potencializar a criação de relações não-arbitrárias e substantivas entre os novos conceitos e as ideias que lhes servirão de âncora na estrutura cognitiva do aluno, através da “inserção” ou da explicitação destas.

A vantagem do organizador prévio é permitir ao aluno o aproveitamento das características de um subsunçor, ou seja,

> a) identificar o conteúdo relevante na estrutura cognitiva e explicar a relevância deste conteúdo para a aprendizagem do novo material;
> b) dar uma visão geral do material em um nível mais alto de abstração, salientando as relações importantes;
> c) prover elementos organizacionais inclusivos, que levem em consideração mais eficientemente e ponham em melhor destaque o conteúdo específico do novo material (MOREIRA e MANSINI, 2001, p.22).

É com esse intento que esse trabalho se debruça construir um material potencialmente significativo para o ensino da Teoria da Relatividade Restrita, utilizando a álgebra de Clifford como meio para mudança estratégica de ensino e a teoria ausubeliana como instrumento metodológico para corroborar com os objetivos do referido trabalho.

3.2 MAPAS CONCEITUAIS

Conforme já foi dito, do ponto de vista Ausubeliano, o desenvolvimento de conceitos é facilitado quando os elementos mais gerais, mais inclusivos de um conceito são introduzidos em primeiro lugar, e posteriormente, então, esse conceito é progressivamente diferenciado, em termos de detalhe e especificidade. Para seguir, tal procedimento, é necessário à utilização de mapas conceituais.

Para fazer um mapa conceitual, tomando por base o princípio Ausubeliano da diferenciação progressiva como também a reconciliação integrativa,os conceitos mais gerais e inclusivos aparecem no topo do mapa. Prosseguindo de cima para baixo do eixo vertical, outros conceitos aparecem em ordem descendente de inclusividade até que, ao pé do mapa, chega-se aos conceitos mais específicos. Exemplos podem também aparecer na base do mapa. As linhas conectando conceitos sugerem relação entre os mesmos (NOVAK e GOWIN, 1996).

Esse modelo, portanto, propõe uma hierarquia vertical de cima para baixo, indicando relações de subordinação entre conceitos. Conceitos que englobam outros conceitos aparecem no topo, enquanto que conceitos que são englobados por outros aparecem na base. Conceitos com aproximadamente o mesmo nível de generalidade e inclusividade aparecem na mesma posição vertical. O fato de que vários conceitos diferentes podem aparecer na mesma posição vertical dá ao mapa sua dimensão horizontal (MOREIRA e MASINI, 2001).

No sentido de se tornarem evidentes as relações hierárquicas existentes entre os diversos conceitos relativos a um determinado conteúdo, podem ser úteisà utilização de mapas conceituais. Segundo Moreira e Masini (2011),

> "Num sentido amplo, mapas conceituais são apenas diagramas indicando relações entre conceitos. Mais especificamente, no entanto, eles podem ser vistos como diagramas hierárquicos que procuram refletir a organização conceitual de uma disciplina ou parte de uma disciplina" (MOREIRA e MASINI, 2011, p 51).

Por conta disso, estas representações podem ajudar a entender o relacionamento entre os vários conceitos envolvidos, permitindo-se ter uma visão,por completa, do conteúdo como um todo. No caso do conteúdo ora trabalhado neste trabalho, a saber, Teoria da Relatividade Restrita, esta relacionamento se faz necessário devido a sua complexidade e conexões múltiplas com outras áreas da Física (eletromagnetismo, mecânica quântica etc.).

Estes diagramas constituem uma técnica desenvolvida por *Joseph Novak* e colaboradores (Universidade Cornell - USA, 1972) e que tem o intuito de moldar-se a teoria da aprendizagem significativa de Ausubel no que concerne a um "mapeamento cognitivo" das atividades executadas pelos aprendizes (MOREIRA e MANSINI, 2001).

Dependendo do tipo de mapa conceitual construído, o mesmo pode abordar conteúdos específicos de aula, planejamento de cursos de curta duração bem como planejamento de ações em termos do desenvolvimento de projetos educacionais mais complexos (NOVAK, 2000). No que compete a análise, feita à luz dos objetivos do presente trabalho, realizada na elaboração de mapas conceituais concernente a explanação dos conceitos da teoria da relatividade restrita, vislumbrada nos fundamentos da álgebra de Clifford, vê-se que os mesmos servem de "ponte cognitiva" para demonstração dos resultados obtidos nesta proposta e, por conseguinte, poderão servir de apoio para criação de estratégias de ensino para este assunto e abrir precedentes para outras áreas da Física.

4.CONCEITOS E DEFINIÇÕES NO ESTUDO DA RELATIVIDADE RESTRITA

Neste Capítulo, apresentamos alguns conceitos e definições da Teoria da Relatividade Restrita. Por essa ser uma contribuição de referida valia ao campo da Física e analisadas com maior profundidade pelos Físicos, entendemos ser, este assunto, de grande importância para tratarmos as descrições matemáticas com nova roupagem, a saber, a álgebra de Clifford. Neste sentido, apresentaremos de forma acessível, desta teoria, seus postulados, as transformações de Lorentz, os conceitos de contração do espaço e dilatação do tempo e a descrição da dinâmica de sistemas relativísticos, analisando a energia e momento linear.

4.1A TEORIA DA RELATIVIDADE RESTRITA

Em que pese o grande avanço da Física, iniciado com a mecânica de Newton, a ideia de movimento absoluto,solidamente estabelecido na teoria newtoniana, permaneceu objeto de contestação por parte de cientistas epensadores, segundo Poincaré (1995). No entanto, se a mecânica newtoniana distinguia observadores inerciais de não inerciais, manifestando a ideiade uma aceleração absoluta, a teoria eletromagnética deMaxwell parecia estabelecer uma distinção até mesmoentre dois observadores inerciais, implicando o reconhecimento de uma aparente velocidade absoluta. Segundoa teoria, as equações que governam os fenômenos eletromagnéticos seriam diferentes, conforme os observadoresestivessem em repouso ou em movimento com velocidadeconstante. Entretanto, as experiências realizadas com oobjetivo de detectar a possível influência do movimento uniforme sobre os fenômenos eletromagnéticos apresentaram resultados negativos, indicando a presença de umelemento contraditório no seio da Física clássica.

A Teoria da Relatividade Restrita ou Especial é umas das contribuições que o cientista Albert Einstein desenvolveu para o progresso de uma Física unificada, pois, no período em que as pesquisas e divulgação dessa teoria eram sistematizadas, venceria um embate entre a mecânica Newtoniana e as leis do eletromagnetismo de Maxwell no que concerne aos sistemas de referência para a observação de determinado fenômeno físico (HALLIDAY, RESNICK e KRANE, 2004).

4.2 POSTULADOS DA TEORIA DA RELATIVIDADE ESPECIAL

Segundo Young e Freedman (2009, p.141) "a teoria da relatividade especial introduziu muitas mudanças significativas em nossa compreensão da natureza". Uma dessas mudanças está no conceito de espaço e tempo absolutos definido por Newton que, pela teoria especial Einsteniana, exprime uma relatividade nesses conceitos analisados a luz de *referencias inerciais* (referenciais nos quais as leis de Newton são válidas) e que, segundo Hewit (2002), existe uma relação entre tempo e espaço, e exposto em dois postulados, a saber,

> ***Postulado 1[3]:*** *Todas as leis da natureza são as mesmas em todos os sistemas de referência que se movam com velocidade uniforme* (HEWIT, 2002, p. 598).
> ***Postulado 2[4]:****A velocidade da luz no vácuo é sempre a mesma em qualquer sistema de referência inercial, e não depende da velocidade da fonte* (YOUNG e FREEDMAN, 2009, p. 142).

Desses postulados supracitados, acarretam conseqüências imediatas e de extrema importância para o modelo utilizado, pela Física, enquanto ciência. Uma dessas conseqüências é a inexistência de um sistema de referência mais "correto" que outro para analisar fenômenos físicos, Halliday, Resnick e Krane(2004).

Nesse sentido, reportemo-nos à situação em que uma pessoa dentro de um trem - com velocidade constante - vê duas crianças, também dentro do trem, jogando bola de uma para outra. De acordo com o primeiro postulado, qualquer sistema dentro ou fora do trem medirá a velocidade do mesmo com a mesma

---

[3] Não existe um referencial inercial privilegiado (referencial absoluto).
[4] A velocidade da luz é independente da velocidade da fonte

precisão, ou seja, as leis que descrevem os fenômenos são as mesmaspara diversos sistemas (inerciais) escolhidos.

Einstein observou que o único conceito físico real envolvido na nossa noção intuitiva de tempo era o de conceito de simultaneidade. Assim, temos imediatamente que a simultaneidade de eventos distantes não tem cáraterabsoluto. Se dois eventos são simultâneos num particular referencial, por exemplo, O, estes não serão simultâneos em nenhum outro referencial inercial O’ quese move em relação a S com velocidade constante ou em movimento retilíneo uniforme (MRU).

Dessa forma, podemos nos perguntar: quais são os efeitos cinemáticos? Os efeitos são: (1) **Dilatação Temporal**: dois observadores, um emrepouso e outro em um referencial em MRU medem o tempode forma diferente e (2) **Contração Espacial**: dois observadores, um emrepouso e outro em um referencial em MRU medemcomprimentos de forma diferente.

4.3 AS TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ

Com o intuito de descrever matematicamente sistemas físicos relativísticos, utilizamos um conjunto de equações que fornecem os meios com os quais se verificam a validade de um fenômeno de natureza relativística, analisadas em sistemas de referência distintos. A esse conjunto de equações denominamos de *transformações de Lorentz*. Para baixas velocidades - tendendo a zero no limite da velocidade da luz - são válidas as *transformações de Galileu*.Nessas transformações, as coordenadas em cada sistema de referência (inercial) devem ser equivalentes ao descrever o fenômeno observado.

Seja um determinado evento - "ocorrência caracterizada por valores definidos da posição e do tempo" (YOUNG e FREEDMAN, 2009, p. 144) - que é observado em um sistema de referências O, através das coordenadas (x, y, z, t). Este mesmo evento é observado em um sistema de referência O' através das coordenadas (x', y', z', t'). O sistema O' se move paralelamente ao eixo *Ox* com velocidade constante *u*, conforme Figura 12.

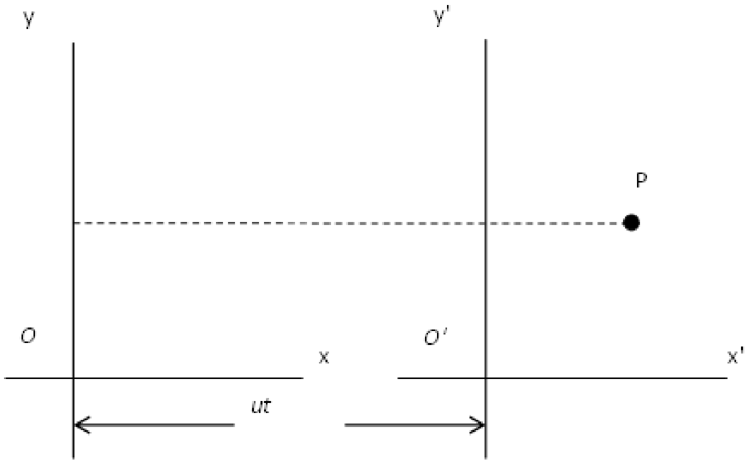

Figura 13: Dois sistemas de referencias O e O' movendo paralelamente ao eixo Ox com velocidade u constante.

Para sistemas de referência que se movem em baixas velocidades, as transformadas de Galileu demonstram que as coordenadas da posição de uma partícula P (ver Figura 6) qualquer podem ser descrita, nos sistemas de referência O visto pelo de O', por:

$$\begin{cases} x = x' + ut \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases} \tag{4.1}$$

A Equação (4.1) é conhecida como as transformadas de Galileu para as coordenadas da posição de uma partícula P qualquer em dois sistemas de referência distintos. Como na mecânica clássica, ou mecânica Newtoniana, a dinâmica de um sistema físico fica bem definida quando conhecemos posição e velocidade de uma partícula,então, a velocidade da mesma - se deslocando ao longo do eixo *Ox* - é dada pela componente $v_x = dx/dt$, medida a partir do sistema de referência *O*.

Dessa forma, a velocidade da partícula P no sistema de referência *O'* deve ser obtido por derivação com relação ao tempo da Equação (4.1) e, assim, obtemos que:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx\prime}{dt} + u \qquad (4.2)$$

Reescrevendo a Equação (4.2), obtemos que $v_x = v'_x + u$. Dessa última equação, v_x é a velocidade da partícula P no sistema de referência *O* e v'_x é a velocidade no sistema de referência *O'*.

Ao analisar o segundo postulado da Teoria da Relatividade Restrita, vemos que a velocidade da luz no vácuo será sempre a mesma independente do sistema de referência (desde que seja inercial) adotado. Porém, analisando a Equação (4.2) vemos que a velocidade da luz nos sistemas de referência *O* e *O′* seriam relacionadas por $c = c' + u$ e, por conseguinte, contrariando a constância da velocidade da luz, independente do sistema de referência escolhido.

Comoconseqüência desta "contradição",advêmo conceito de*Simultaneidade*de eventos. Segundo Hewit (2002, p.599), "*dois eventos são simultâneos se eles ocorrem no mesmo instante de tempo*". No caso, das transformadas de Galileu para as velocidades nos sistemas adotados, verifica-se que quando um dos sistemas referência estiver em movimento os eventos analisados não ocorrem simultaneamente, pois "*intervalos de tempo entre dois eventos podem ser diferentes em sistemas de referência diferentes*" (YOUNG e FREEDMAN, 2009, p. 145).

Esta incompatibilidade fornecida pelas transformadas de Galileu, foi corrigida pelas transformações de Lorentz, levando em consideração os efeitos relativísticos da contração no comprimento e pela dilatação do tempo. Tomando como base a Figura 9, a transformada de Lorentz nos fornece para as coordenadas da posição:

$$x = ut + x'\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}. \qquad (4.3)$$

Isolando o valor da coordenada da posição *x′*no sistema de referência *O′* obtemos que:

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \qquad (4.4)$$

com$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{1}{\gamma}$: sendo o fator de contração do comprimento tomando por base o sistema de referência *O*.

Para a constituição das transformações de Lorentz serão necessárias as compensações com relação a variável tempo, devido a sua dilatação para fenômenos relativísticos. Desta forma, segundo Tipler e Llewllyn (2010), o princípio da relatividade garante que as transformações do sistema de referência *O* para *O'* devem apresentar a mesma forma de *O'* para *O*, porém com única diferença a mudança de sinal da velocidade relativa *u*.

A Equação (4.3),escrita do sistema de referência *O'* para *O*, mudando o sinal da velocidade relativa *u* é expressa por:

$$x' = -ut' + x\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \tag{4.5}$$

Isolando o valor de x', ao igualar as Equações (4.4) e (4.5) obtemos uma relação entre os valores de t, t' e x. Sendo assim:

$$\frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = -ut' + x\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

ou,

$$x - ut = -ut'\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} + x\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)$$

Dessa última simplificação,é fácil ver que $t' = \frac{t - u\frac{x}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \gamma(t - ux/c^2)$. Portanto, verifica-se que as transformações de Lorentz são constituídas pelas relações:

$$x' = \gamma(x - ut)$$
$$y' = y \qquad (4.6)$$
$$z' = z$$
$$t' = \gamma(t - ux/c^2)$$

As relações apresentadas nas direções y e z se justificam pela direção do movimento ser perpendicular as mesmas e, portanto, não sofrem contração no comprimento.

Para a interpretação da contração do comprimento mencionada anteriormente, suponha que no referencial O', num instante t_0 foi efetuada uma medida entre dois pontos, x_{01} e x_{02}, a distância entre estes pontos no referencial O vale:$\Delta x' = x_2' - x_1'$. Usando a transformação de Lorentz, temos:

$$\Delta x' = x_2' - x_1' = \gamma\,(x_2 - vt) - \gamma\,(x_1 - vt) \equiv \gamma\,\Delta x \qquad (4.7)$$

Desta forma, a distância entre estes dois pontos, quando registrado por um observador em O, é:

$$\Delta x = \frac{1}{\gamma}\Delta x', \qquad (4.8)$$

ou com geralmente estão escritos nos livros didáticos, em que $\Delta x = L$ e $\Delta x' = L'$.

$$\mathrm{L} = \frac{1}{\gamma}\mathrm{L}'. \qquad (4.9)$$

Para a interpretação da dilatação do tempo mencionada anteriormente, suponha usaremos, também, diretamente as transformações de Lorentz. Para isso vamos imaginar que um observador A (relógio) estáno centro do sistema O, ou seja, a coordenada do relógio no sistema sem linha é $x = 0$. Então um observadorB no sistema O, que vê O' se mover com velocidade v para a direita. Usando a transformação, temos:

$$t' = \gamma \left[t - \frac{v\,(x=0)}{c^2}\right] = \gamma\, t \tag{4.10}$$

Vamos agora ver o caso de B, estando no centro do sistema com linha ($x' = 0$) e também tiver um relógio, o observador A, no sistema sem linha, verá o relógio de B, movendo-se com velocidade para esquerda ($-v$). Usando a transformação de Lorentz, temos:

$$t = \gamma \left(t' - \frac{(-v)x}{c^2}\right) = \gamma \left(t' - \frac{v(x=0)}{c^2}\right) = \gamma\, t' \tag{4.11}$$

O intervalo de tempo entre dois eventos depende da distância entre os eventos, tanto no espaço quanto no tempo. As separações temporais e espaciais estão interligadas (intervalo espaço-tempo).Se dois eventos ocorrem no mesmo ponto, em um referencial inercial, o intervalo de tempo entre os eventos, medido neste referencial, é chamado intervalo de tempo próprio ou tempo próprio e o intervalo de tempo em qualquer outro referencial é sempre maior que o tempo próprio.

4.4 MOMENTO LINEAR RELATIVÍSTICO

Em termos gerais, usamos as transformações de Lorentz em vez das Galileanas, pelo fato destas últimas não atenderem a fenômenos de natureza relativística. Neste sentindo, ao descrever a dinâmica de um sistema mecânico relativístico, temos a necessidade de nos reportar a mecânica Newtoniana, feito as devidas correções com as transformações de Lorentz. Um dos conceitos mais importantes nesta mecânica é o conceito de momento linear.

Segundo o princípio da conservação do momento linear, temos que quando:

> [...] dois corpos interagem o momento linear total permanece constante, desde que a força externa resultante que atua sobre os corpos no sistema de referência inercial seja igual a zero (por exemplo, quando eles formam um sistema isolado e existe apenas forças de interação entre eles) (YOUNG e FREEDMAN, 2009, p. 161).

Classicamente, temos que a definição de momento linear é $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ e, em um sistema de referência inercial que se move com relação a outro, o princípio do momento linear não se conserva neste segundo. Portanto, se faz necessário recorrer ao princípio da relatividade restrita a as transformações de Lorentz para "corrigi-lo". Sendo o objetivo deste trabalho, mostrar como a álgebra de Clifford modela os conceitos da Teoria da Relatividade Restrita, não iremos fazer demonstrações a respeito da expressão do momento linear relativístico e, sendo assim, apenas expor-se-á seu resultado, a saber,

$$\boldsymbol{p} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{4.12}$$

AEquação (4.12)pode ser reescrita como $\boldsymbol{p} = \gamma m\boldsymbol{v}$, com $m$sendo a massa de repouso da *partícula material* e γ o fator de correção para fenômenos relativísticos. No limite para velocidades muito menores que a da luz c, o momento linear relativístico se aproxima do Newtoniano, ou seja, $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$.

4.5SEGUNDA LEI DE NEWTON RELATIVÍSTICA

Segundo a mecânica Newtoniana, a 2ª lei de Newton é expressa como:

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}. \tag{4.13}$$

Dessa forma, Young e Freedman (2009) apresentam que, a 2ª lei de Newton na forma diferencial do momento com relação ao tempo, é válida também para fenômenos relativísticos e, desta forma, o momento relativístico é utilizado nesta definição. Sendo assim, a força resultante relativística é dada por:

$$\boldsymbol{F} = \frac{d}{dt}\frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{4.14}$$

A Equação (4.14) nosmostra que o momento linear não é mais proporcional à velocidade e, por conseguinte, uma força constante não produz uma aceleração constante(TIPLER e LLEWLLYN, 2010). Para o movimento de uma partícula em uma dimensão, com os vetores força e velocidade numa mesma direção, a força resultante é dado por:

$$\boldsymbol{F} = \frac{m}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\boldsymbol{a}. \tag{4.15}$$

4.6 ENERGIA RELATIVÍSTICA

Pelo Teorema da Energia Cinética, usado na mecânica Newtoniana para descrever fenômenos mecânicos pelo conceito de energia, tem-se que a variação da energia cinética é equivalente ao trabalho realizado pela força resultante atuante ($\Delta K = K - K_0 = W$), para uma partícula ser deslocada do repouso aum ponto qualquer da trajetória com velocidade v. Pela definição de trabalho de uma força temos que

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{m}{\left(1-\frac{v_x{}^2}{c^2}\right)^{3/2}} a dx. \tag{4.16}$$

Nesse caso, convém fazermos uma mudança de variável para resolvermos a Equação (4.16), em termos da velocidade, visto que a energia relativística que analisaremos ser a *Energia Cinética (K)* e esta ser o tipo de energia associada ao movimento dos corpos. Considerando o movimento unidimensional, então teremos que:

$$a dx = \frac{dv_x}{dt} dx = \frac{dx}{dt} dv_x = v_x dv_x \tag{4.17}$$

Substituindo a Equação (4.16)na Equação (4.17) obtemos que:

$$K = W = \int_0^v \frac{m v_x}{\left(1-\frac{v_x{}^2}{c^2}\right)^{3/2}} dv_x \tag{4.18}$$

AEquação (4.18), resolvida por uma substituição simples do tipo $u = \left(1 - \frac{v_x{}^2}{c^2}\right)$, chegar-se-á ao resultado ora exposto por:

$$K = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v_x{}^2}{c^2}}} - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2. \qquad (4.19)$$

Analisando a Equação (4.19), verificamos que nos casos em que v é muito menor que c chegamos ao resultado esperado para a mecânica clássica, a saber, $k = \frac{1}{2}mv^2$. Para encontrar este resultado, basta expandirmos binomialmente o 1º termo da Equação (4.19) em uma aproximação confiável para determinada margem de erro considerada.

Nesta mesma equação, podemos concluir que, segundo Younge Freedman (2009, p. 165),"a energia cinética de umapartículaé a diferença entre uma *Energia Total (E)* e uma energia mc^2que sempre existe, mesmo quando a o corpo está em repouso", e, a essa energia, dá-se o nome de *Energia de Repouso*. Portanto, a energia total de uma partícula relativística é dada por:

$$E = K + mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v_x{}^2}{c^2}}} = \gamma mc^2 \qquad (4.20)$$

Analisando as transformações de Lorentz, bem como os conceitos força, momento e energia relativísticas, nos reportaremos aos mesmos, tomando como base matemática a álgebra de Clifford, objeto maior de análise deste trabalho, e executando suas conversões nessa álgebra citada.

De acordo com o Capítulo 3, apresentamos um mapa conceitual simples, de acordo com princípios da teoria de Ausubel para uma aprendizagem significativa,hierarquizando alguns conceitos relacionados à Teoria da Relatividade Restrita que nos servirá de guia didático para construção de um material instrucional – “o produto do mestrado profissionalizante” - contendo os elementos relativísticos modelados com aálgebra de Clifford.

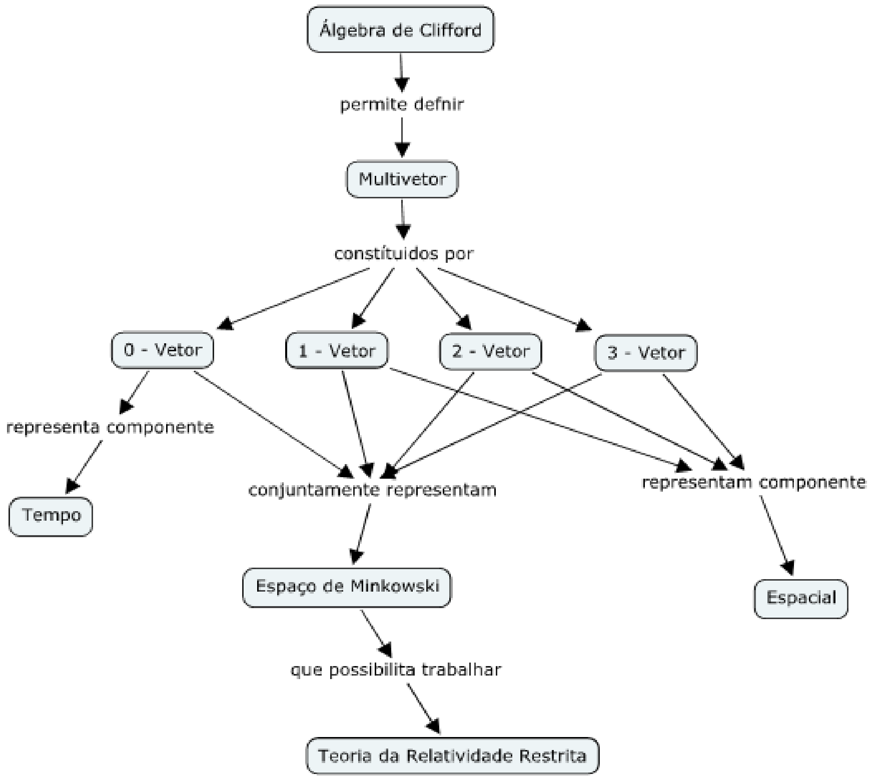

Figura 14. Mapa conceitual modelador sobre a Teoria da Relatividade Restrita numa perspectiva da álgebra de Clifford à luz da teoria ausubeliana de aprendizagem.

5. CONCEITOS RELATIVÍSTICOS MODELADOS PELA ÁLGEBRA DE CLIFFORD

Ao analisarmos os conceitos relativísticos, a luz da álgebra Geométrica já outrora citados no Capítulo anterior, a saber, momento, força e energia, faremos a descrição matemática dos mesmos tomando um *evento* - acontecimento qualquer que ocorre no espaço e em certo instante de tempo - mediante referencial de observação (TIPLER e LLEWLLYN, 2010).

No espaço-tempo, o evento P pode ser expresso pelas coordenadas (x_0, x_1, x_2, x_3), com x_0: coordenada temporal ex_1, x_2, x_3: coordenadas espaciais. Em notação pela álgebra de Clifford, o mesmo pode ser expresso por

$$\boldsymbol{x} = x_0\boldsymbol{e_0} + \underbrace{x_1\boldsymbol{e_1} + x_2\boldsymbol{e_2} + x_3\boldsymbol{e_3}}_{x = x(t)} \tag{5.1}$$

Na Equação (5.1), temos que $x_0 = ct$. Sabendo-se que ${e_0}^2 = 1$, então reescrevemos a última equação como segue:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\boldsymbol{e}_0\boldsymbol{e}_0 = \underbrace{\overbrace{(\boldsymbol{x} \cdot e_0)e_0}^{componente\ temporal} + \overbrace{(\boldsymbol{x} \wedge e_0)e_0}^{componente\ espacial}}_{Produto\ de\ Clifford} = cte_0 + (\boldsymbol{x} \wedge e_0)e_0. \tag{5.2}$$

O termo e_0 que aparece na Equação (5.2) pode ser interpretado como o observador que analisa o evento num instante de tempo. Considerando uma característica intrínseca do evento P, a evolução da posição temporalprópria (τ) (ou velocidade) do mesmo, uma vez que, este pode ser descrito de tantas formas diferentes quanto os diferentes sistemas referenciais que o observam, pode ser expressa como segue:

$$\mathbf{v} = \frac{d\boldsymbol{x}}{d\tau} = \mathbf{v}\boldsymbol{e}_0\boldsymbol{e}_0 = \left(\frac{d\boldsymbol{x}}{d\tau} \cdot \boldsymbol{e}_0\right)\boldsymbol{e}_0 + \underbrace{\left(\frac{d\boldsymbol{x}}{d\tau} \wedge \boldsymbol{e}_0\right)\boldsymbol{e}_0}_{\frac{dx}{dt}}. \tag{5.3}$$

A equação acima pode ainda ser reescrita como:

$$\mathbf{v} = \left(\frac{d(ct)}{d\tau}\right)\boldsymbol{e}_0 + \frac{d\vec{x}}{d\tau} = \left(c\,\frac{dt}{d\tau}\right)\boldsymbol{e}_0 + \frac{d\vec{x}}{dt} \qquad (5.4)$$

Da mesma forma, a evolução da posição numinstante de tempo t do evento P, vista na concepção do observador O, é expressa por:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}\boldsymbol{e}_0\boldsymbol{e}_0 = \left(\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} \cdot \boldsymbol{e}_0\right)\boldsymbol{e}_0 + \underbrace{\left(\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} \wedge \boldsymbol{e}_0\right)\boldsymbol{e}_0}_{\vec{v}(t)} \qquad (5.5)$$

A Equação (5.5) foi descrita por analogia a Equação (5.2). Nesta última, o segundo termo depois do terceiro sinal de igualdade, reporta-se a velocidade do evento espacialmente. Sendo assim, temos que

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \left(\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} \wedge \boldsymbol{e}_0\right)\boldsymbol{e}_0 \qquad (5.6)$$

E, da Equação (5.6), podemos utilizar o seguinte artifício

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d\tau}{dt}\frac{d\vec{x}}{d\tau} = \frac{d\tau}{dt}\left(\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} \wedge \boldsymbol{e}_0\right)\boldsymbol{e}_0 \qquad (5.7)$$

Da Equação (5.4) e manipulando algebricamente a Equação (5.5), obtemos que

$$\vec{v} = \frac{c}{\mathrm{v}\cdot e_0}\left(\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} \wedge \boldsymbol{e}_0\right)\boldsymbol{e}_0 = c\,\frac{(\mathrm{v} \wedge \boldsymbol{e}_0)\boldsymbol{e}_0}{\mathrm{v} \cdot \boldsymbol{e}_0} \qquad (5.8)$$

Considere agora, o mesmo evento P sendo analisado por outro observador $\boldsymbol{u}$, eque se desloca com velocidade constante com relação ao observador O'. Sendo assim, o evento terá suas coordenadas expressas por:

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u})\boldsymbol{u} + \underbrace{(\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{u}}_{x' = x'(t)} = ct'\boldsymbol{u} + \underbrace{(\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{u})\boldsymbol{u}}_{x' = x'(t)} \qquad (5.9)$$

Analisando as Equações (5.2) e (5.9), com base nas transformações de Lorentz, vê-se que as quantidades temporal e espacial de ambas são distintas, devido ao evento ser analisado por referenciais também distintos. Com o intuito de verificar como são descritas, na álgebra de Clifford, as transformações de Lorentzmediante os observadores nos referenciais inerciais O e O',então analisaremos o que acontece com a quantidade definida pelo produto dos vetores e_0 e $\boldsymbol{u}$. Sendo assim,

$$\boldsymbol{u}\boldsymbol{e}_0 = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}_0 + \boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{e}_0 = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}_0 + (\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{e}_0)\boldsymbol{e}_0\boldsymbol{e}_0 \tag{5.10}$$

A Equação (5.10), pode ainda ser reescrita como:

$$\boldsymbol{u}e_0 = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}_0(1 + \underbrace{\left(\frac{(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{e}_0)\boldsymbol{e}_0}{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}_0}\right)}_{\frac{\vec{u}}{c}})\boldsymbol{e}_0 \tag{5.11}$$

Chamando $\boldsymbol{u}\cdot e_0 = \gamma$ e tomando o resultado análogo apresentado pela Equação (5.8), então a Equação (5.11) pode ainda ser expressa por:

$$\boldsymbol{u}\boldsymbol{e}_0 = \gamma\left(1 + \frac{\vec{u}}{c}\boldsymbol{e}_0\right) \tag{5.12}$$

Sendo $\vec{u}$ a velocidade relativa do observador. Como$\boldsymbol{u}$ **e** $\boldsymbol{e}_0$ são unitários, temos que vale a relação $\boldsymbol{u}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}e_0e_0\boldsymbol{u} = 1$. A quantidade $e_0\boldsymbol{u}$ pode ser expressa pela álgebra de Clifford da seguinte maneira:

$$\boldsymbol{e}_0\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_0\cdot\boldsymbol{u} + \boldsymbol{e}_0\wedge\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}_0 - \boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{e}_0 \tag{5.13}$$

Com uso das propriedades já apresentadas dos produtos que surgem na Equação (5.13), bem como fazendo analogia ao expresso na Equação (5.12), pode observa-se facilmente que:

$$\boldsymbol{e}_0\boldsymbol{u} = \gamma\left(1 - \frac{\vec{u}}{c}\boldsymbol{e}_0\right) \tag{5.14}$$

Dessa forma então, a quantidade $\boldsymbol{uu} = \boldsymbol{u}e_0e_0\boldsymbol{u} = \gamma\left(1 + \frac{\vec{u}}{c}e_0\right)\gamma\left(1 - \frac{\vec{u}}{c}e_0\right) = 1$. Manipulando algebricamente a referida quantidade, temos que

$$\gamma = \left(1 - \frac{(\vec{u}\boldsymbol{e}_0)^2}{c^2}\right)^{-1/2} = \left(1 - \frac{(\vec{u}e_0)^2}{c^2}\right)^{-1/2} = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2} \qquad (5.15)$$

Analisando a Figura 12, e por questões de simplificação de demonstração da álgebra de Clifford mediante as transformações de Lorentz, podemos escrever o vetor $\vec{u}$, sem perda de genelaridade, como segue:

$$\vec{u} = u\boldsymbol{e}_1. \qquad (5.16)$$

Com a simplificação expressanaEquação (5.16), temos que:

$$\boldsymbol{u} = \gamma\boldsymbol{e}_0 + \gamma\frac{u}{c}\boldsymbol{e}_1 \qquad (5.17)$$

Agora, acharemos a relação entre t e t' que justifica, na teoria da relatividade, o espaço-tempo como um contínuo geométrico. Para isto, da Equação (5.9), com os resultados apresentados nas Equações (5.2) e fazendo as substituições $x_1 = x, x_2 = y$ e $x_3 = z$, temos que:

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{u} = ct' = (ct\boldsymbol{e}_0 + x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3)\cdot\left(\gamma\boldsymbol{e}_0 + \gamma\frac{u}{c}\boldsymbol{e}_1\right) \qquad (5.18)$$

Dessa forma, ao simplificarmos a Equação (5.18) por igualdade de vetores, obtemos o seguinte resultado:

$$ct' = \gamma ct - \gamma x\frac{u}{c} \Rightarrow \left\{t' = \gamma\left(t - \frac{ux}{c^2}\right)\right. \qquad (5.19)$$

E, portanto, a Equação (5.19) é a componente temporal do espaço-tempo, conforme expressa em (4.6) no conjunto de equações da transformação deLorentz. Já para a componente espacial, temos que $\vec{x}'(t) = (\boldsymbol{x}\wedge\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{u}$. Sendo assim,

$$\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{u} = (ct\boldsymbol{e}_0 + x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{2}} + z\boldsymbol{e}_3) \wedge \left(\gamma\boldsymbol{e}_0 + \gamma\frac{u}{c}\boldsymbol{e}_1\right)$$

$$= \gamma tu\boldsymbol{e}_0 \wedge \boldsymbol{e}_1 + \gamma x\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_0 + \gamma y\boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_0$$

$$+\gamma z e_3 \wedge \boldsymbol{e}_0 + \gamma y\frac{u}{c}\boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{1}} + \gamma z\frac{u}{c}\boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_1, \qquad (5.20)$$

Ou ainda,

$$(\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{u} = -\gamma^2 tu\boldsymbol{e}_1 + \gamma^2 x\boldsymbol{e}_1 + \gamma^2 y\boldsymbol{e}_2 + \gamma^2 z\boldsymbol{e}_3$$

$$-\gamma^2 t\frac{u^2}{c}\boldsymbol{e}_0 + \gamma^2 x\frac{u}{c}\boldsymbol{e}_0 - \gamma^2 y\frac{u^2}{c^2}\boldsymbol{e}_2 - \gamma^2 z\frac{u^2}{c^2}\boldsymbol{e}_3 \qquad (5.21)$$

Agrupando os elementos comuns, pode-se reescrever a Equação (5.21) como segue:

$$(\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{u} = (x - tu)\gamma^2\frac{u}{c}\boldsymbol{e}_0 + (x - tu)\gamma^2\boldsymbol{e}_1$$

$$+\gamma^2\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)y\boldsymbol{e}_2 + \gamma^2\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)z\boldsymbol{e}_3. \qquad (5.22)$$

Ao analisarmos a Equação (5.22) e com o exposto na Equação (5.15), temos que:

$$\vec{x}'(t) = (x - tu)\gamma^2\frac{u}{c}\boldsymbol{e}_0 + (x - tu)\gamma^2\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3. \qquad (5.23)$$

Deve-se ser enfatizado que, a equação acima nos fornece corretamente o vetor $\vec{x}'$. No entanto em termos da base $\beta = (0, 1, 2, 3)$. Precisamos encontrar uma base $\beta' = (0, 1, 2, 3)$ a partir da base $\beta = (0, 1, 2, 3)$, através da rotação hiperbólica , ou seja:$\beta'_\mu = L\,\beta_\mu L^{-1}$ com $(\mu = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$. Em outras palavras, daEquação (5.23), precisamos obter alguma relação entre as coordenadas espaciais do evento P analisados pelos observadores $\boldsymbol{u}$ e e_0. Dessa forma, a Equação (5.23) fornece a coordenada espacial em termos da base ortonormal $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$. Contudo, precisamos encontrar a base ortonormal $\{e'_0, e'_1, e'_2, e'_3\}$ em termos de $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$. Sendo assim, por uma rotação hiperbólica, temos que:

$$e'_\beta = Re_\beta R^{-1}, \tag{5.26}$$

com $\beta = (0, 1, 2, 3)$e $R = LU$, onde L descreve uma rotação hiperbólica e U uma rotação espacial.Nesse contexto, para e'_0 temos que $e'_0 = \boldsymbol{u}$ (VAZ JÚNIOR, 2000) pois os mesmos estão relacionados com a Equação (5.12). No caso dos demais vetores, temos que:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{e'}_1 = \gamma \boldsymbol{e}_1 + \gamma \frac{u}{c} \boldsymbol{e}_0 \\ \boldsymbol{e'}_2 = \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e'}_3 = \boldsymbol{e}_3. \end{gathered} \tag{5.27}$$

Das Equações (5.23) e (5.27), podemos reescrever $\vec{x}'(t)$ em função da base ortonormal e'_β. Sendo assim, a componente espacial fica sob a forma

$$\vec{x}'(t) = \gamma(x - tu)\boldsymbol{e'}_1 + y\boldsymbol{e'}_2 + z\boldsymbol{e'}_3. \tag{5.28}$$

Sendo esta mesma coordenada expressa de forma genérica por:

$$\vec{x}'(t) = x'\boldsymbol{e'}_1 + y'\boldsymbol{e'}_2 + z'\boldsymbol{e'}_3, \tag{5.29}$$

temos que, por comparação com as Equações (5.28) e (5.29), as transformações de Lorentz para as coordenadas espaciais são válidas, ou seja:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - ut) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} \tag{5.29}$$

Como observação temos, neste cenário, que $\vec{u}$foia velocidade relativa entre os referenciais inerciais O e O', pois $\vec{u} = ue_1$. E no Capítulo 4, essa velocidade foi denominada de $\vec{v}$, sendo que neste caso $\vec{v} = v_x\hat{\imath} = v\hat{\imath}$.

Das Equações (5.19) e (5.29) obtemos as transformações de Lorentz da por:

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - ut) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \frac{ux}{c^2}\right) \end{cases}$$

O procedimento para obtê-las, seguindo a álgebra de Clifford, é do ponto de vista conceitual mais completo. Dessa forma, podemos obter os fenômenos da dilatação temporal e contração do comprimento.

Vamos agora discutir alguns aspectos da dinâmica relativística. Pela segunda lei de Newton, a resultante das forças que atuam sobre umapartícula é mensuradapela taxa de variação do momento linear em relação ao tempo (próprio), ou seja,

$$\vec{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{d\tau} \tag{5.30}$$

sendo$\vec{p}$ momento linear associado a partícula e dado por $\boldsymbol{p}(\tau) = m_0\boldsymbol{v}(\tau)$.

Dessa forma, considere o momento (próprio) da partícula é descrito por:

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}\boldsymbol{e}_0\boldsymbol{e}_0 = (\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{e}_0)\boldsymbol{e}_0 + (\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{e}_0)\boldsymbol{e}_0 \tag{5.31}$$

Para uma partícula de massa m, a energia da mesma pode ser expressa por:

$$E = c\boldsymbol{p}\boldsymbol{e}_0 \tag{5.32}$$

Com a quantidade expressa em (5.32), podemos reescrever (5.31), como segue

$$\boldsymbol{p} = \frac{E}{c}\boldsymbol{e}_0 + \vec{p} = \frac{E}{c}\boldsymbol{e}_0 + \underbrace{p_1\boldsymbol{e}_1 + p_2\boldsymbol{e}_2 + p_3\boldsymbol{e}_3}_{\vec{p}} \tag{5.33}$$

A massa da partícula pode ser expressa pelo módulo do momento e, que por conveniência, o vetor $\boldsymbol{p}$é tipo-tempo, ou seja, $\boldsymbol{p}^2 > 0$. Sendo assim,

$$m_0{}^2 = \frac{\boldsymbol{p}^2}{c^2} \tag{5.34}$$

Por outro lado, de (5.33), temos que

$$\boldsymbol{p}^2 = \left(\frac{E}{c}\boldsymbol{e}_0 + \vec{p}\right)\left(\frac{E}{c}\boldsymbol{e}_0 + \vec{p}\right) = \frac{E^2}{c^2} + \vec{p}^2 \tag{5.35}$$

Considerando que

$$\vec{p}^2 = (p_1e_1 + p_2e_2 + p_3e_3)^2 = -(p_1)^2 - (p_2)^2 - (p_3)^2 = -p^2 \tag{5.36}$$

Então, podemos reescrever (5.35), como segue

$$\boldsymbol{p}^2 = \frac{E^2}{c^2} - p^2$$

$$= \frac{E^2}{c^2} + m_0{}^2c^2 \tag{5.37}$$

Ou ainda, expressamos a energia da partícula na forma

$$E^2 = m_0{}^2c^4 + p^2c^2 \tag{5.38}$$

De (5.34), podemos escrever o momento da partícula como segue:

$$\boldsymbol{p} = m_0c\boldsymbol{v}, \tag{5.39}$$

com$\boldsymbol{v}^2 = 1$.Utilizando-se dos resultadosdas Equações (5.15) e (5.17), (5.39)temos:

$$\boldsymbol{p} = m_0c\left(\gamma\boldsymbol{e}_0 + \gamma\frac{\vec{v}}{c}\right) = m_0c\gamma\boldsymbol{e}_0 + m_0\gamma\vec{v} \tag{5.40}$$

Comparando as Equações (5.33) e (5.40), chegamos que

$$\begin{cases} E = m_0\gamma c^2 \\ \vec{p} = m_0\gamma\vec{v} \end{cases} \tag{5.41}$$

Da Equação (5.41), se analisarmos uma partícula classicamente, chegamos na energia de repouso da partícula considerada na Teoria da Relatividade Restrita, bem como no momento clássico. Bastando, para isso, que a quantidade $\frac{v}{c} \to 0$.

Analisando a segunda lei de Newton, na álgebra de Clifford, temos que:

$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{F}\boldsymbol{e}_0)\boldsymbol{e}_0 + (\boldsymbol{F} \wedge \boldsymbol{e}_0)\boldsymbol{e}_0 \tag{5.42}$$

De modo análogo ao que fora realizado no caso do momento (próprio) da partícula,temos que:

$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{F}\boldsymbol{e}_0)\boldsymbol{e}_0 + \underbrace{\vec{f}}_{força\ relativa\ ao\ movimento} \tag{5.43}$$

A segunda lei de Newton pode também ser expressa a partir do conceito de aceleração, ou seja,

$$\boldsymbol{F} = m_0 c\boldsymbol{a} = m_0 c[(\boldsymbol{a}\boldsymbol{e}_0)e_0 + (\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{e}_0)\boldsymbol{e}_0] \tag{5.44}$$

Comparando a Equação (5.43) com a Equação (5.44), a força relativa ao movimento pode ser reescrita conforme expressão abaixo:

$$\vec{f} = m_0 c(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{e}_0)\boldsymbol{e}_0. \tag{5.45}$$

Desenvolvendo o segundo membro da igualdade e considerando o conceito de aceleração (relativa) da partícula dado por $\boldsymbol{a} = \frac{dv}{d\tau}$, logo temos que:

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{e}_0) \cdot \boldsymbol{e}_0 &= \frac{d}{d\tau}(\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{e}_0) \cdot \boldsymbol{e}_0 = \gamma \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\gamma}{c}\vec{v}\right) \\ &= \frac{\gamma^2}{c}\vec{a} + \frac{\gamma}{c}\frac{d\gamma}{dt}\vec{v}\end{aligned} \tag{5.46}$$

A quantidade $\frac{d\gamma}{dt}$ pode ser determinada a partir da Equação (5.15) e, dessa forma, expressa por:

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{\gamma^3}{c^2}\vec{v} \cdot \vec{a} = \frac{\gamma^3}{c^2}\langle\vec{v}, \vec{a}\rangle = -\frac{\gamma^3}{2c^2}(\vec{v} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{v}) \tag{5.47}$$

Dessa forma, ao comparar as Equações (5.45), (5.46) e (5.47), obtemos a generalização da segunda lei de Newton relativística como segue:

$$\vec{f} = m_0\gamma^2\vec{a} + m_0\frac{\gamma^4}{c^2}\langle\vec{v},\vec{a}\rangle\vec{v} \qquad (5.48)$$

Considerando a Equação (5,48), situações de partículas em baixas velocidades, ou seja, $\frac{v}{c} \to 0$, encontrar-se-á a segunda lei de Newton classicamente.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Vimos neste trabalho de pesquisa, que gerou um material didático (o próprio), uma ferramenta matemática (álgebra de Clifford) poderosa e eficaz na representação de objetos geométricos quadrimensionais, sem a necessidade de recorrer a estruturas matemáticas outras.

No contexto destaálgebra, foram apresentados os objetos geométricos que fazem analogia aos vetores de natureza Euclidiana e a correspondência com estes. Na álgebra de Clifford, em particular, foi visto a poderosa descrição algébrica da geometria do espaço-tempo de Minkowski, espaço este que permite descrever a Teoria da Relatividade Restrita (objeto da Física visto neste trabalho) de forma concisa e de acordo com a álgebra até então manipulada nesta ciência.Fora descrito e comprovado, nesta álgebra, as transformações de Lorentz, a dinâmica relativística à luz da segunda lei de Newton e, por fim, a energia de uma partícula relativística.

O trabalho teve um direcionamento didático baseado na Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel, pois esta foi, dentre as existentes teorias de aprendizagem, a que mais se aproximou na confecção desse material didático e seu eventual usufruto em cursos que utilizem esta ferramenta matemática no âmbito da Teoria da Relatividade Restrita.

Neste trabalho buscamos entender a teoria de Ausubel dentro de um contexto particular visando alcançar nosso objetivo. Pois, a organização do conteúdo da Teoria da Relatividade Restrita compreendendo os aspectos da aprendizagem significativa nos permitiu organizar o conteúdo baseados nos parâmetros dos subsunçores, da diferenciação progressiva e da reconciliação integrativa.

A partir destes parâmetros relatados no parágrafo anterior construímos um mapa conceitual simples e dessa forma temos como resultado um material didático para o ensino de Física.

Quanto ao nosso objetivo, que relatamos no primeiro parágrafo relativo a construção de um material didático, que consiste no produto do mestrado profissionalizante, queríamos deixar registrado que este foi um material introdutório, pois envolveu apenas alguns conceitos da Teoria da Relatividade Restrita, usando a álgebra de Clifford.

Dessa forma discorremos alguns elementos dessa álgebra e que esta pode descrever qualquer elemento do espaço físico. O aparato dessa álgebra permite o tratamento matemático das áreas da Física sem que seja preciso de outro ferramental matemático paralelo.A álgebra de Clifford tem como característica fundamental representar e manipular objetos geométricos de forma algébrica.

Como sugestões para pesquisas futuras, sugerimos trabalhar com os diagramas de Minkowski, explorar o cone de luz, explicar (eliminar) alguns paradoxos da teoria e trabalhar as transformações de Lorentez nas formas ativas e passivas.

REFERÊNCIAS

ALONSO, M.; FINN, E. Um curso universitário. Volume 1 - Mecânica. São Paulo: Edgar Blucher, 2001.

BOLDRINI, José Luiz. et al. Álgebra linear. 2ª Edição. São Paulo: Harper &Row do Brasil, 1980.

BRASIL. Diretrizes Curriculares de Física para a Educação Básica. Secretaria de Educação do Paraná. Curitiba, 2006.

DE GÓES BRENNAND, E. Fundamentos e aplicações da álgebra de Clifford no ensino de física. Notas de aula conferida na Pós Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática na Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande-PB, 2008.

DORAN, C.; LASENBY, A. Geometric Algebra for Physicists. Cambridge: Cambridge University Press, 2003

DORAN, C.; LASENBY, A. Physical Applications of Geometric Álgebra.Disponível em: *www.mrao.cam.ac.uk/~clifford/ptIIIcourse*. 2002.

DORAN, Chris. Geometric Algebra and its Application to Mathematical Physics.Ph.D. thesis, University of Cambridge, 1994.

FÁVERO, M. H.; SOARES, M. T. C. Initiation scolaireet notation numérique: une question pour l'étude du development cognitive adult. Colloque "Construtivismes: usageset perspectives eneducation", Genève, 4-8 septembre 2000, Resumés, p. 26, Université de Genève, Suisse, 2000.

FERREIRA, G. F. L. Uma mini-introdução à concisa álgebra geométrica do eletromagnetismo, Revista Brasileira de Ensino de Física, São Paulo, v.28, n. 4, 2006.

GRECA, I. M. Cambio conceptual: analysis critico propuestas a la luz de lateoríadelaprendizaje significativo. Ciência & Educação, v. 9, n. 2, 2003.

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; KRANE, Kenneth S. Física 4. 5ª Edição, Rio de Janeiro: LTC, 2004.

HECKLER, V. Uso de Simuladores e Imagens como Ferramentas Auxiliares no Ensino/Aprendizagem de Óptica. *Dissertação de Mestrado*. Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física. Instituto de Física, Porto Alegre, 2004.

HESTENES D.Spacetime Physics with Geometric Algebra, Am. J. Phys. v. 71, n. 7, 2003, p. 691-714.

HEWIT, Paul G. Física Conceitual. Tradução: Trieste Freire Ricci e Maria Helena Gravina, 9ª Edição, Porto Alegre: Bookman, 2002.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos. Fundamentos de Matemática Elementar 1: Conjuntos e Funções. 8ª Edição, São Paulo: Atual, 2004.

MACHADO, Kleber Daum. Análise Vetorial em Física. Disponível em *http://www.ebah.com.br/analise-vetorial-em-fisica-kleber-daum-machado-pdf-a21851.html*

MATHEUS, T. A. M. *et al*. A resolução de situações problemáticas experimentais em Física Geral à luz da Teoria dos Campos Conceituais. Anais... XVI Simpósio Nacional de Ensino de Física. Porto Alegre, 2005.

MOREIRA, M. A A teoria da aprendizagem significativa e sua implementação em sala de aula. Brasília: Editora: Universidade de Brasília, 2006.

MOREIRA, M. A. Teorias de aprendizagem. São Paulo: EPU, 1999.

MOREIRA, M. A.; GRECA, I. M. Cambio conceptual: analysis crítico propuestas a la luz de lateoríadelaprendizaje significativo. Ciência & Educação, v. 9, n. 2, 2003, p. 301-315.

MOREIRA, M. A.; MASINI, E. F. S. Aprendizagem significativa: Teoria de David Ausubel. São Paulo: Centauro, 2001.

MUNDIM, K. C.; MUNDIM, M. S. P. Álgebra de Grassmann e a Teoria Quântica. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 19, n.2, 1997.

NOVAK, J.D.; GOWIN, D.B. Aprender a aprender. Lisboa, Plátano Edições Técnicas, 1996.

ORTIZ , O.; SASSE, F. D. Contração de Lorentz, Lei de Gauss e Lei de Ampère. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 25, n. 3, 2003.

SILVA, Antônio de Andrade e. Introdução à Álgebra Linear. João Pessoa: Editora Universitária/UFPB, 2007.

SOUSA, C. M. S. G. A resolução de problemas e o Ensino de Física: uma análise psicológica. Tese de doutorado. Instituto de Psicologia, Universidade de Brasília, 2001.

TIPLER, Paul A.; LLEWELLYN, Raph A. Física Moderna. 5ª Edição, Rio de Janeiro: LTC, 2010.

VAZ Júnior H. A álgebra geométrica do espaço-tempo e a teoria da relatividade.Revista Brasileira de Ensino de Física, São Paulo, v. 22, n. 1, Março, 2000.

VAZ Júnior, H. A álgebra geométrica do espaço euclidiano e a teoria de Pauli.Revista Brasileira de Ensino de Física, Campinas, vol. 19, n. 2, p.234-259, 1997.

VIEIRA, R.S. Tópicos de Álgebra Geométrica. 2005. Disponível *http://www.br geocities.com/rickrsv/arquivo/tópicos.htm*, 2005.

VIEIRA, W. S. Concebendo Ergonomias cognitivas para o ensino da cinemática em mecânica newtoniana. Dissertação de Mestrado. Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física. Centro de Ciências e Tecnologia. Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2010.

YOUNG, D. Hugh. FREEDMAN, Roger A. Física IV: ótica e física moderna. Tradução: Cláudia Martins; revisão técnica: Adir Moysés Luiz. 12ª Edição, São Paulo: Addison Wesley, 2009.