



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UEPB



Uma Proposta para o Ensino das Cônicas
com o Auxílio do Software Maple

Edison Fernando da Silva Lima

Trabalho de Conclusão de Curso

Orientador: Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo

Campina Grande - PB

Maio/2015

Uma Proposta para o Ensino das Cônicas
com o Auxílio do Software Maple

por

Edison Fernando da Silva Lima †

Trabalho Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UEPB, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

† Bolsista CAPES

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano da dissertação.

L732p Lima, Edison Fernando da Silva.

Uma proposta para o ensino das cônicas com o auxílio do software Maple [manuscrito] / Edison Fernando da Silva Lima. - 2015.

57 p. : il. color.

Digitado.

Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2015.

“Orientação: Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo, Departamento de Matemática”.

1. Cônicas. 2. Geometria analítica. 3. Software Maple. 4. Ensino de Geometria. I. Título.

21. ed. CDD 516

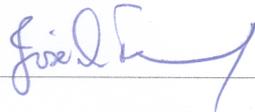
Uma Proposta para o Ensino das Cônicas com o Auxílio do Software Maple

por

Edison Fernando da Silva Lima

Trabalho de Conclusão de curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UEPB, modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Aprovado por:



Prof. Dr. José de Arimatéia Fernandes - UFCG



Prof. Dr. Davis Matias de Oliveira - UEPB



Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo - UEPB
Orientador

**Universidade Estadual da Paraíba
Centro de Ciências e Tecnologia**

Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Maio/2015

É exatamente disso que a vida é feita: de momentos! Momentos os quais temos que passar, sendo bons ou não, para o nosso próprio aprendizado, por algum motivo. Nunca esquecendo do mais importante: nada na vida é por acaso.

Chico Xavier

Embora ninguém possa voltar
atrás e fazer um novo começo,
qualquer um pode começar agora
e fazer um novo fim.

Chico Xavier

Dedicatória

Dedico tudo que sou, que vivi e os momentos de alegrias, a DEUS Pai e JESUS Mestre Maior, também a meus pais, irmãos, filho, esposa, familiares e amigos, pelo constante apoio e incentivo nesta caminhada.

Agradecimentos

Antes de tudo, agradeço a **DEUS** por minha vida, por mais essa conquista, vivenciando este momento de conclusão de curso. Agradeço à Universidade Estadual da Paraíba **UEPB** por promover este Mestrado Profissionalizante junto ao **PROFMAT SBM**, em rede Nacional.

Agradeço ao meu orientador, Dr. Aldo Trajano Lourêdo, pelo incentivo à realização deste Mestrado e por acreditar na minha capacidade de concluir esse trabalho com sua orientação, pelo profissionalismo exemplar de quem orienta, incentiva e encaminha firmes no objetivo.

Os agradecimentos especiais vão para minha família: minha mãe Maria José; ao meu pai Edilson Lima; minha vó Lourdes; meus irmãos Rodrigo, Bruno e Nayara; meu filho Mateus; minha esposa Kalina, que foram, inesgotavelmente, minhas fontes de energia para que pudesse prosseguir, dia após dia, enfrentando as diversas dificuldades no caminho.

Ao meu irmão Rodrigo, um apreço especial, pois, foi meu aluno no passado e hoje Doutor em Física, me sinto muito feliz por ter feito parte de sua conquista e, durante todo o desenrolar do curso, me deu um apoio ímpar. Meu muito obrigado!

Agradeço aos professores do programa do Mestrado, que com suas colocações e posicionamentos produziram uma imagem admirável e inspiradora.

Agradeço à todos os alunos da minha turma do **PROFMAT 2013.1** da **UEPB**, meus nobres amigos, dádivas de **DEUS**, por fazerem parte da minha formação. Percebi que, por mais que tenhamos capacidade de desempenhar nossas tarefas, nunca estamos sozinhos e precisamos muito de uma cooperação mútua.

Agradeço aos membros da banca, Professor Dr. José de Arimatéia Fernandes da

Universidade Federal de Campina Grande - **UFCG** e o Professor Dr. Davis Matias de Oliveira da Universidade Estadual da Paraíba - **UEPB**, pelas suas valiosas contribuições.

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (**CAPES**), pela bolsa de estudos de Mestrado.

Muitas pessoas me ajudaram de forma direta e indireta nessa trajetória, fazem parte da minha vida e muito contribuíram para minha evolução. Tantas que, com certeza, minha memória não tem a capacidade de registrar conscientemente todas elas. Por isso, peço a **DEUS** que abençoe todas elas, desejando muita luz, saúde e sabedoria em suas vidas.

Resumo

Neste trabalho de conclusão de curso faremos uma abordagem das cônicas no estudo da Geometria Analítica e trataremos de procedimentos com a finalidade de se reconhecer a natureza da equação geral de uma curva do segundo grau a duas variáveis, realizando a análise dos coeficientes de sua equação por um processo algébrico. Na simplificação dos cálculos envolvidos, bem como no esboço de gráficos, será usado o aplicativo matemático Maple 18. Nosso intuito é desenvolver a habilidade dos alunos em relacionar e melhor fixar os conteúdos matemáticos abordados, visto que, tal abordagem não é trabalhada nos livros didáticos a nível de ensino médio.

Palavras-chaves: Cônica, Geometria Analítica, Software Maple.

Abstract

In this course conclusion work we will of conic approach in the study of analytic geometry and treat procedures in order to recognize the nature of the general equation of a curve of the second degree two variables, performing the analysis of the coefficients of your equation by an algebraic process. Simplification of calculations involved as well as the graphics sketch, the mathematical application Maple 18 will be used. Our aim is to develop students' ability to relate and better secure the maths contents, since such an approach is not worked in textbooks the high school level.

Keyword: Conical, Analytical Geometry, Maple Software.

Sumário

Sumário	i
Lista de ilustrações	ii
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Histórico	4
2 SIMPLIFICAÇÃO DA EQUAÇÃO GERAL DE UMA CURVA DO SEGUNDO GRAU A DUAS VARIÁVEIS	10
3 RESULTADOS BÁSICOS	25
4 APLICAÇÕES USANDO O SOFTWARE MAPLE	30
5 CONCLUSÕES	42
A EXEMPLO $5x^2 + 8y^2 - 4xy - 18x + 9 = 0$	44
B EXEMPLO $7x^2 - 48xy - 7y^2 - 30x - 40y + 75 = 0$	47
C EXEMPLO $x^2 + 2\sqrt{2}xy + 2y^2 + 6\sqrt{3}x + 3 = 0$	51
D EXEMPLO $2x^2 - 3xy - 2y^2 + 5x + 5y - 3 = 0$	55
E EXEMPLO $3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x - 4y + 20 = 0$	56

REFERÊNCIAS 57

Lista de ilustrações

Figura 1 – Cônicas determinadas pela interseção de dois cones com um plano que não passa pela origem	1
Figura 2 – Gráficos da elipse, hipérbole e parábola e disposição dos eixos coordenados em relações aos quais suas equações são reduzidas.	3
Figura 3 – Pierre de Fermat	4
Figura 4 – René Descartes	7
Figura 5 – a) reta e b) circunferência	9
Figura 6 – Novo sistema de eixos	12
Figura 7 – Elípses: originária, degenerada ou imaginária	20
Figura 8 – Hipérbolas: originária ou degenerada	20
Figura 9 – Apresentação do Maple 18	30
Figura 10 – Tela de apresentação dos recursos do Maple 18	31
Figura 11 – Mathematics - Geometry	31
Figura 12 – Conic Sections	32
Figura 13 – Conic Sections - Main Concept I	32
Figura 14 – Obtenção de cônicas a partir dos cones	33
Figura 15 – Conic Sections - Main Concept II	33
Figura 16 – Círculo ou elipse ou parábola ou hipérbole	34
Figura 17 – Duas retas paralelas e simétricas em relação ao eixo OX	34
Figura 18 – Elipse cujo eixo transversal é o OX	35
Figura 19 – Elipse cujo eixo transversal é o OY	35
Figura 20 – Hipérbole cujo eixo transversal é o OY	36

Figura 21 – Um ponto na origem do sistema	36
Figura 22 – Variação da distância focal da elipse cujo eixo transversal é o OX	37
Figura 23 – Variação da distância focal da elipse cujo eixo transversal é o OY	37
Figura 24 – Duas retas concorrentes na origem do sistema	38
Figura 25 – Variação da distância entre as retas paralelas e simétricas ao eixo OX	38
Figura 26 – Variação da distância focal da hipérbole cujo eixo transversal é o OY	39
Figura 27 – Variação da distância focal da hipérbole cujo eixo transversal é o OX	39
Figura 28 – Um conjunto vazio I	40
Figura 29 – Um conjunto vazio II	40
Figura 30 – Resolução de $2x^2 - 3xy - 5y^2 - 4x - 6y + 8 = 0$ - parte I	41
Figura 31 – Resolução de $2x^2 - 3xy - 5y^2 - 4x - 6y + 8 = 0$ - parte II	41
Figura 32 – Resolução do exemplo 1 - Parte I	44
Figura 33 – Resolução do exemplo 1 - Parte II	44
Figura 34 – Resolução do exemplo 1 - Parte III	45
Figura 35 – Resolução do exemplo 1 - Parte IV	45
Figura 36 – Resolução do exemplo 1 - Parte V	45
Figura 37 – Resolução do exemplo 1 - Parte VI	46
Figura 38 – Resolução do exemplo 1 - Parte VII	46
Figura 39 – Resolução do exemplo 1 - Parte VIII	46
Figura 40 – Resolução do exemplo 2 - Parte I	47
Figura 41 – Resolução do exemplo 2 - Parte II	48
Figura 42 – Resolução do exemplo 2 - Parte III	48
Figura 43 – Resolução do exemplo 2 - Parte IV	48
Figura 44 – Resolução do exemplo 2 - Parte V	49
Figura 45 – Resolução do exemplo 2 - Parte VI	49
Figura 46 – Resolução do exemplo 2 - Parte VII	49
Figura 47 – Resolução do exemplo 2 - Parte VIII	50
Figura 48 – Resolução do exemplo 2 - Parte IX	50

Figura 49 – Resolução do exemplo 3 - Parte I	51
Figura 50 – Resolução do exemplo 3 - Parte II	52
Figura 51 – Resolução do exemplo 3 - Parte III	52
Figura 52 – Resolução do exemplo 3 - Parte IV	52
Figura 53 – Resolução do exemplo 3 - Parte V	53
Figura 54 – Resolução do exemplo 3 - Parte VI	53
Figura 55 – Resolução do exemplo 3 - Parte VII	54
Figura 56 – Resolução do exemplo 3 - Parte VIII	54
Figura 57 – Resolução do exemplo 4 - Parte I	55
Figura 58 – Resolução do exemplo 4 - Parte II	55
Figura 59 – Resolução do exemplo 5 - Parte I	56

1 Introdução

O estudo das cônicas é geralmente trabalhado na 3ª série do ensino médio, mas na maioria dos livros didáticos não encontramos as classificações das cônicas na equação geral do segundo grau, pois, não são cobrados em exames de acesso de algumas Instituições de Ensino Superior, a exemplo do ENEM. Caberia ao Professor de Matemática, introduzir, aos poucos, tal conteúdo de forma a facilitar o entendimento do aluno ao ingressar em cursos a nível de graduação, nas disciplinas de Cálculo e Álgebra Linear, na área de ciências exatas.

O intuito deste trabalho é enunciar e demonstrar um teorema que classifica as cônicas na sua forma geral, sem o uso da Álgebra Linear.

Em seguida, utilizaremos o software Maple, conforme Lenimar [1] para facilitar a representação dessas cônicas, visto que o programa facilita a visualização e conseqüentemente um melhor entendimento do assunto e também entender o que acontece com a equação do segundo grau quando variamos os seus coeficientes.

As curvas obtidas seccionando-se um cone com um plano que não passa pelo vértice, chamam-se seções cônicas ou simplesmente cônicas e os três tipos de curvas que podem ocorrer são: elipse, parábola ou hipérbole, conforme figura (1) e, referência do artigo das Aplicações das Cônicas [2].

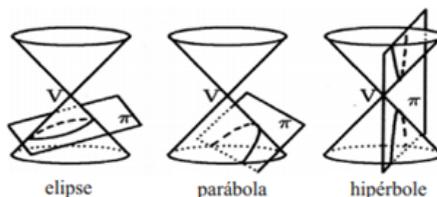


Figura 1 – Cônicas determinadas pela interseção de dois cones com um plano que não passa pela origem

O matemático Apolônio estudou originalmente as seções cônicas em termos de geometria, usando este conceito. Muitos anos depois passou-se a analisá-las como curvas planas o que possibilitou estudar as suas propriedades com os instrumentos da Álgebra. Para esse propósito, utilizou-se definições equivalentes que se referem somente ao plano π em que as curvas estão e dependem de pontos especiais desses planos chamados focos, a saber:

Definição 1. 1 *Dados no plano π dois pontos F_1 e F_2 , seja c a metade da distância entre eles de modo que $d(F_1, F_2) = 2c$ e seja a um número maior que c . A elipse de focos F_1 e F_2 é o conjunto de todos os pontos $P \in \pi$ tal que $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$.*

Definição 1. 2 *Dado $0 < a < c$ e dados no plano π dois pontos F_1 e F_2 com $d(F_1, F_2) = 2c$, a hipérbole de focos F_1 e F_2 é o conjunto dos pontos $P \in \pi$ tais que $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$.*

Definição 1. 3 *Dados em π um ponto F e uma reta r não contendo F , a parábola de foco F e diretriz r é o conjunto dos pontos P tais que $d(P, F) = d(P, r)$.*

Considerando um sistema de coordenadas cartesianas ortogonal OXY de tal forma que o eixo OX contenha os focos F_1 e F_2 e o eixo OY seja a mediatriz do segmento F_1F_2 no caso da elipse e da hipérbole e, no caso da parábola, o eixo OX passando pelos focos, sendo perpendicular à diretriz e o eixo OY sendo paralelo à diretriz, pelo vértice da parábola, conforme a Figura (2), de fácil demonstração, que a elipse, a hipérbole e a parábola têm como equações cartesianas, respectivamente,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1 \quad e \quad y^2 = 2px \quad (1.1)$$

em que na terceira equação, p representa a distância entre o foco e a diretriz, conforme figura (2).

De um modo geral, fixado um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais S , o conjunto dos pontos P do plano cujas coordenadas (x, y) em relação ao sistema S verificam uma equação do segundo grau do tipo:

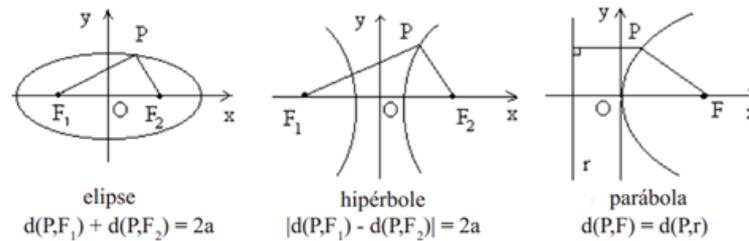


Figura 2 – Gráficos da elipse, hipérbole e parábola e disposição dos eixos coordenados em relações aos quais suas equações são reduzidas.

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (1.2)$$

onde A , B , C , D , E e F são constantes reais e A , B , C não são simultaneamente nulas é chamada **equação quadrática** ou **equação de segundo grau**. As elipses, parábolas e hipérbolas são curvas cujas equações são casos particulares da equação (1.2). Além destas cônicas, a equação quadrática pode representar vários tipos de curvas degeneradas: duas retas, um ponto ou o conjunto vazio.

Neste trabalho são sistematizados procedimentos com a finalidade de se reconhecer a natureza de uma equação do tipo (1.2) através de sua redução a uma forma mais simples, movendo os eixos por rotação ou translação, levando o leitor ao entendimento de que toda curva, a menos de uma rotação e/ou uma translação é a mesma, como também, de esboçar o seu gráfico através da análise dos coeficientes de sua equação, segundo teorema da Simplificação da Equação Geral de uma Curva do segundo grau (2), proposto no livro de AREF [6], que será exposto e demonstrado conforme EFIMOV [3] a seguir.

1.1 Histórico

A Aritmética e a Geometria tiveram origens independentes e somente com o tempo foi sendo percebida a existência de relações entre as formas e os números. Os triângulos retângulos constituíram uma das primeiras fontes onde os matemáticos puderam pesquisar correlações numéricas entre grandezas geométricas, o mais clássico exemplo disso sendo a equação $a^2 = b^2 + c^2$, expressão algébrica do Teorema de Pitágoras.

Matemáticos posteriores aproximaram ainda mais a Aritmética à Geometria, tendo o grande geômetra *Apolônio, de Perga* (262-190 a.C.) demonstrado vários de seus teoremas sobre as secções cônicas empregando a ideia de localizar pontos sobre elipses e hipérbolas por meio de suas distâncias a eixos conjugados daquelas curvas, tomados como referência. *Hiparco, de Nicéia* (180-125 a.C.), matemático de Alexandria, considerado *o criador da Trigonometria*, já definiu as posições de pontos sobre a superfície da Terra utilizando latitudes e longitudes, ou seja, distâncias a um par de linhas de referência. A confecção de gráficos para ilustrar o relacionamento entre grandezas variáveis, em especial na Física e na Astronomia, apareceu no século X, se não antes. Tiveram, portanto, origem bastante antiga os conceitos que levaram, na primeira metade do século XVII, dois geniais franceses, *Pierre de Fermat* e *René Descartes* a inventar, independente e quase simultaneamente, aquilo que hoje é denominado *Geometria Analítica* e que consiste no estudo da Geometria por meio de equações.



Figura 3 – Pierre de Fermat

A vida e a obra de *Pierre de Fermat* (1601-1665), Figura (3), segundo o livro Romance

das Equações Algébricas [4], constituem um dos mais belos capítulos da História da Matemática. Somente os insondáveis desígnios do destino podem explicar como um dos talentos matemáticos mais criativos, inovadores e inspirados de todos os tempos veio a surgir na pessoa de um homem como Pierre de Fermat, sem qualquer estudo formal em Ciências Exatas, versado em línguas clássicas, jurista por formação acadêmica e magistrado por profissão. Fermat nasceu em Beaumont de Lomagne e viveu na cidade de Toulouse, no Sul da França, onde levou uma vida razoavelmente monótona e sem problemas financeiros, já que suas funções pouco exigiam dele e lhe proporcionavam uma existência tranquila. Assim, com tempo disponível e sem jamais haver se afastado muito de onde morava, a ponto de nunca ter visitado Paris, Fermat dedicou longos anos ao estudo autônomo da Matemática e nela realizou descobertas notáveis, em especial no campo da Teoria dos Números.

A Teoria dos Números é o ramo da Aritmética que estuda as propriedades dos Números Inteiros, como divisibilidade, decomposições em fatores, decomposições em somas, etc. Por exemplo, constitui um teorema da Teoria dos Números a afirmação, já aprendida na infância, segundo a qual um número é divisível por 3 quando e apenas quando a soma de seus algarismos (quando escritos na base 10) é divisível por 3. As pesquisas neste campo são inesgotáveis e os resultados costumam maravilhar os estudiosos, por sua beleza e imprevisibilidade. Entretanto, trata-se de um tema bastante difícil porque cada problema quase sempre exige uma abordagem especial, coisa que apenas alguns espíritos livres, inventivos e descompromissados são capazes de vislumbrar. Quem trabalha em Teoria dos Números certamente faz por amor, já que são pouquíssimas, se é que existem, as aplicações práticas das descobertas. E foi assim, por puro prazer, que Fermat entrou no Reino da Rainha das Ciências pelo portal dos números, inspirado pela obra de um antigo matemático grego, *Diofanto* (cerca de 250 d.C.), autor de um belíssimo livro chamado *Aritmética*, que caiu nas mãos de Fermat treze séculos mais tarde, depois que o livro foi descoberto no século XV pelo matemático alemão *Johann Muller* (1436-1476) e editado em Francês por *Bachet Méziriac*, em 1621.

Mas Fermat não restringiu suas pesquisas à Teoria dos Números. Em uma troca de correspondências com o grande filósofo e matemático francês *Blaise Pascal* (1623-1662), onde foram discutidas questões referentes a certos jogos de azar, ambos formularam os princípios básicos da Teoria das Probabilidades, ramo da Matemática que teve grande florescimento posterior, em razão de seu emprego na vida prática e nos estudos da Física Teórica.

De carta escrita a *Gilles Personne de Roberval* (1602-1675), pode-se depreender que, já fazia alguns anos, Fermat havia desenvolvido uma técnica de associar equações a linhas geométricas para estudá-las, como se faz modernamente em Geometria Analítica. Tal técnica era realmente revolucionária, mas Fermat não se preocupou em divulgá-la, embora tenha exposto suas idéias no livro *Ad Locos Planos et Solidos Isagogue (Introdução aos lugares geométricos retilíneos e cônicos)*, segundo o livro da COLEÇÃO PROFMAT [5], que somente foi publicado após sua morte, quando um trabalho da mesma natureza, escrito por *René Descartes*, já se impusera na comunidade matemática e consagrara seu autor. Por que motivos não tivera ele interesse em anunciar ao mundo a glória de sua invenção? Certamente não foram os mesmos que levaram *Tartaglia* a esconder as fórmulas das equações do 3º grau. Tudo se deveu à própria natureza de Fermat, pessoa pacata, modesta, despreocupada com a fama e que pesquisava somente para sua satisfação interior.

Com os instrumentos de sua Geometria Analítica, Fermat incursionou ao território das funções, encontrando métodos rigorosos de se traçar tangentes à curvas e de se determinar máximos e mínimos, exatamente os temas do Cálculo Diferencial, inventado algumas décadas depois por *Newton* e *Leibniz*. Realmente, a genialidade de Fermat parecia não ter limites.

René Descartes (1596-1650), Figura (4), segundo o livro Romance das Equações Algébricas [4], co-inventor da Geometria Analítica e o primeiro a anunciá-la ao mundo, foi uma espécie de antítese de Fermat: vaidoso, irrequieto e polêmico, adorava a fama e o contato com a nobreza. Nascido em La Haye, foi inicialmente educado pelos jesuítas e



Figura 4 – René Descartes

mais tarde cursou a Universidade de Poitiers, logo após ingressou no exército do príncipe Maurício de Nassau, o mesmo que invadiu Pernambuco em 1630 e ali permaneceu até ser expulso em 1654.

Homem de excepcional cultura e inteligência, Descartes realizou trabalhos notáveis em campos tão diversos quanto a Óptica, a Filosofia, a Psicologia e a Matemática. Nesta, escreveu um único livro, como apêndice do célebre *Discurso sobre o Método para bem conduzir a Razão e encontrar a Verdade nas Ciências*, publicado em 1637, um ano depois da carta de Fermat a Roberval sobre sua técnica analítica. O mencionado apêndice do *discurso do Método* chamava-se *La Géométrie* e é considerado a pedra fundamental da Geometria Analítica.

Ao contrário do que se costuma pensar, *La Géométrie* não apresentava a Geometria Analítica tal como a conhecemos hoje. Nem mesmo os chamados eixos cartesianos aparecem explicitamente naquela obra, muito menos as equações das linhas geométricas mais conhecidas. O que Descartes fez foi mostrar, através da solução de vários problemas geométricos, que a Álgebra já havia alcançado tal nível de desenvolvimento que poderia ser empregada no estudo da Geometria, o oposto do que ocorrera na Antiguidade Clássica, quando as figuras geométricas eram utilizadas para esclarecer as questões da Aritmética e da Álgebra. Foram matemáticos posteriores, em especial Newton, que deram à Geometria Analítica o formato ao qual estamos habituados.

Da mesma maneira que Fermat, Descartes descobriu uma técnica algébrica, exposta na *Géométrie*, para o traçado de tangentes a curvas, mas seu sistema era bastante mais

complicado e trabalhoso do que de Fermat. Isto gerou certa rivalidade entre ambos, evidentemente não provocada pelo pacífico Fermat mais sim pelo temperamento vaidoso de Descartes que, não satisfeito em ser o gênio que era, parecia não aceitar que outros também o fossem. Durante certo tempo, Descartes insistiu em afirmar que sua técnica era melhor, mas teve que render-se às evidências. Em gesto de rara humildade, escreveu em uma de suas cartas a Fermat, esta frase: *Jamais conheci alguém que me parecesse conhecer tão bem a Geometria como o senhor.*

Curvava-se diante de Fermat o homem que, em um arroubo de extrema confiança em seu próprio gênio escrevera em uma carta a *Mersenne* estas palavras pouco modestas: *Nada omiti, a não ser propositadamente. Previ que certas pessoas, que se vangloriam de tudo saber, certamente não deixariam de afirmar que eu nada teria escrito além daquilo que já lhes era de antemão conhecido, se para elas eu me houvesse tornado suficientemente compreensível.* Mas, na *Géométrie*, ele havia sido mais afável, encerrando-a com esta frase: *E eu espero que a posteridade me seja grata, não apenas pelas coisas que eu aqui expliquei mas também por aquelas que omiti voluntariamente, a fim de deixar-lhe o prazer de inventá-las.*

O brilho cultural e científico de Descartes pode ter sido a causa de seu falecimento quando tinha apenas 54 anos. Encantada com os conhecimentos e com a fama de Descartes, a jovem rainha Cristina, da Suécia, levou-o a sua corte em 1649, para com ele aprender Filosofia. Descartes, que sempre mantivera o hábito de permanecer na cama até tarde, foi forçado levantar muito cedo para dar as primeiras aulas à rainha nas primeiras horas das manhãs gélidas de Estocolmo. Em quatro meses contraiu pneumonia e morreu.

Com todos os méritos, a obra de Descartes é considerada um marco na história do pensamento científico e filosófico mundial, pela duradoura influência que exerceu em gerações de sábios que o sucederam.

A ideia básica da Geometria Analítica é fazer com que cada ponto do plano (o raciocínio pode ser generalizado para o espaço) seja caracterizado por suas distâncias x e y quando o

ponto se encontra sobre diferentes tipos de linhas geométricas. Por exemplo, quando um ponto P de coordenadas x e y encontra-se sobre uma linha reta, conforme a Figura (5) a), pode-se demonstrar que x e y estão relacionados pela equação

$$Ax + By + C = 0 \quad (1.3)$$

onde A , B e C são constantes características de cada reta em partícula.

Quando o ponto $P(x, y)$ se situa sobre uma circunferência, como na Figura (5) b), a equação que relaciona x e y é

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad (1.4)$$

onde a e b são as coordenadas do centro e r o raio da circunferência.

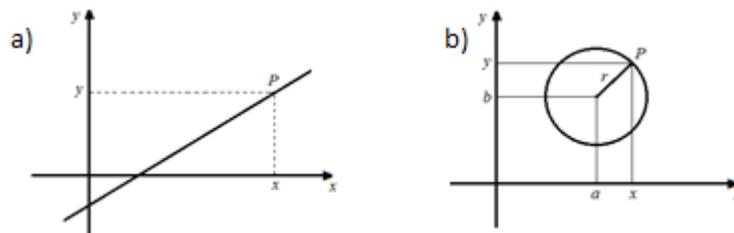


Figura 5 – a) reta e b) circunferência

E assim, elipses, parábolas, hipérboles, enfim, curvas das mais diversas naturezas, passaram a ser tratadas através de equações, o que abriu um horizonte inesgotável para as pesquisas matemáticas, inclusive para o próprio conhecimento e solução de equações algébricas.

2 Simplificação da Equação Geral de uma Curva do segundo grau a duas variáveis

Nosso objetivo será a simplificação da equação do segundo grau

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (2.1)$$

e a definição de todas as variedades de curvas do segundo grau. A simplificação da equação geral do segundo grau será dada pela transformação adequada do sistema de coordenadas.

Mostraremos que, adotando-se novas coordenadas, reduziremos toda equação do segundo grau a uma forma que não contém mais de três monômios no membro esquerdo.

Na maioria das fórmulas da teoria das curvas do segundo grau, os coeficientes B , D e E aparecem divididos por 2. Assim, será mais conveniente escrever,

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \quad (2.2)$$

Por exemplo, se temos a equação

$$x^2 + 3xy + 2y^2 + 5x + 4y + 1 = 0 \quad (2.3)$$

entenderemos que

$$A = 1, B = \frac{3}{2}, C = 2, D = \frac{5}{2}, E = 2 \text{ e } F = 1. \quad (2.4)$$

Simplificação da equação de uma curva do segundo grau por transferência da origem das coordenadas ao centro, conforme AREF [6].

Teorema 2. 1 *Seja a equação de uma curva do segundo grau*

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (2.5)$$

onde A, B, C, D, E e F são números reais. Consideremos os números G, H e I dados por:

$$G = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}, H = AC - B^2 \text{ e } I = A + C \quad (2.6)$$

Note que, G é o determinante de uma matriz simétrica.

Dependendo dos valores de G, H e I , a equação (2.5) pode representar uma circunferência, uma elipse, uma hipérbole, uma parábola, duas retas, um ponto ou ainda, um conjunto vazio.

Os casos possíveis são:

1. $G \neq 0$ e $H > 0$ e $G \cdot I < 0$

Neste caso, teremos uma elipse. Porém, se $A = C$ e $B = 0$ teremos uma circunferência.

2. $G \neq 0$ e $H < 0$

Neste caso, a equação representa uma hipérbole.

3. $G \neq 0$ e $H > 0$ e $G \cdot I > 0$

Neste caso, a equação representa o conjunto vazio.

4. $G \neq 0$ e $H = 0$

Neste caso, a equação representa uma parábola.

5. $G = 0$ e $H \neq 0$

Neste caso a equação representa duas retas ou um ponto ou um conjunto vazio.

Demonstração 2.1 Inicialmente, vejamos como se transforma a equação (2.5) pela translação paralela dos eixos como no livro do Efimov [3]. Suponhamos que os eixos das coordenadas sejam deslocados paralelamente a eles próprios de modo que a origem das coordenadas se ache em \bar{O} e o ponto $S(x_0, y_0)$ seja o centro da curva nesse sistema. Sendo x e y as coordenadas do sistema antigo OXY de um ponto qualquer do plano e, sendo \bar{x} e \bar{y} as novas coordenadas do mesmo ponto, agora no sistema $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$, como mostra a Figura (6),

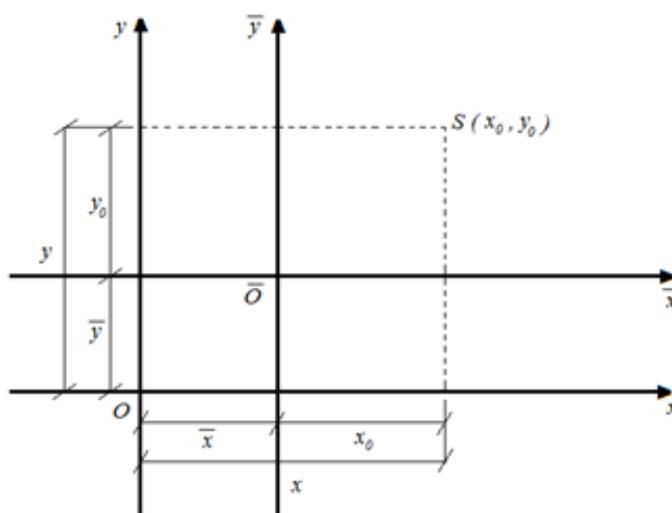


Figura 6 – Novo sistema de eixos

teremos então:

$$x = \bar{x} + x_0 \text{ e } y = \bar{y} + y_0 \quad (2.7)$$

Substituindo as equações (2.7) na equação (2.5), teremos

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

$$\Rightarrow A(\bar{x} + x_0)^2 + 2B(\bar{x} + x_0)(\bar{y} + y_0) + C(\bar{y} + y_0)^2 + 2D(\bar{x} + x_0) + 2E(\bar{y} + y_0) + F = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A\bar{x}^2 + 2B\bar{x}\bar{y} + C\bar{y}^2 + 2(Ax_0 + By_0 + D)\bar{x} + \\ + 2(Bx_0 + Cy_0 + E)\bar{y} + (Ax_0^2 + 2Bx_0y_0 + Cy_0^2 + 2Dx_0 + 2Ey_0 + F) = 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Note que, no sistema $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$, os coeficientes dos termos do segundo grau permanecem inalterados, enquanto que, os coeficientes dos termos do primeiro grau e do termo independente mudam. Faremos então as seguintes convenções:

$$\bar{D} = Ax_0 + By_0 + D; \quad (2.9)$$

$$\bar{E} = Bx_0 + Cy_0 + E; \quad (2.10)$$

$$\bar{F} = Ax_0^2 + 2Bx_0y_0 + Cy_0^2 + 2Dx_0 + 2Ey_0 + F. \quad (2.11)$$

Com isso, a equação da curva terá a seguinte forma:

$$A\bar{x}^2 + 2B\bar{x}\bar{y} + C\bar{y}^2 + 2\bar{D}\bar{x} + 2\bar{E}\bar{y} + \bar{F} = 0; \quad (2.12)$$

Observe que, o ponto $S(x_0, y_0)$ poderá ser obtido quando $\bar{D} = 0$ e $\bar{E} = 0$, ou seja, quando o sistema abaixo tiver solução,

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + D = 0 \\ Bx_0 + Cy_0 + E = 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

Assim, as soluções (x_0, y_0) de (2.13) determinam o centro da curva dada, no sistema $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$. Chamaremos de H o determinante de (2.13)

$$H = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \quad (2.14)$$

Daí, $H = AC - B^2$ é determinado pelos coeficientes dos termos do segundo grau da equação (2.5).

- Se $H \neq 0$, o sistema (2.13) é possível e determinado;
- Se $H = 0$, o sistema (2.13) ou terá infinitas soluções ou não terá solução.

Uma curva de segundo grau que só tem um centro chama-se *curva centralizada*.

$H \neq 0$ é o índice de uma cônica centralizada e, os coeficientes do centro podem ser expressas por

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} B & D \\ C & E \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}} \text{ e } y_0 = \frac{\begin{vmatrix} D & A \\ E & B \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}}. \quad (2.15)$$

Onde x_0 e y_0 são obtidos utilizando a Regra de Cramer.

Com isso, a equação (2.12), para $\bar{D} = 0$ e $\bar{E} = 0$ toma a forma

$$A\bar{x}^2 + 2B\bar{x}\bar{y} + C\bar{y}^2 + \bar{F} = 0. \quad (2.16)$$

Da equação (2.11), reagrupando os termos do segundo membro, nos dá

$$\bar{F} = (Ax_0 + By_0 + D)x_0 + (Bx_0 + Cy_0 + E)y_0 + (Dx_0 + Ey_0 + F) \quad (2.17)$$

Note que, em virtude de (2.13),

$$\bar{F} = Dx_0 + Ey_0 + F \quad (2.18)$$

Substituindo (2.15) em (2.18), obtemos

$$\bar{F} = \frac{D \begin{vmatrix} B & D \\ C & E \end{vmatrix} + E \begin{vmatrix} D & A \\ E & B \end{vmatrix} + F \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}} \quad (2.19)$$

Aplicando a inversa do *Teorema de Laplace* ao numerador de (2.19), obtemos

$$D \begin{vmatrix} B & D \\ C & E \end{vmatrix} + E \begin{vmatrix} D & A \\ E & B \end{vmatrix} + F \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}. \quad (2.20)$$

Designaremos (2.20) por G , assim

$$G = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}. \quad (2.21)$$

Em virtude das igualdades (2.21) e (2.14), (2.19) será escrita como

$$\bar{F} = \frac{G}{H} \quad (2.22)$$

Assim, a equação (2.16) será escrita como

$$A\bar{x}^2 + 2B\bar{x}\bar{y} + C\bar{y}^2 + \frac{G}{H} = 0 \quad (2.23)$$

Na igualdade (2.14), tomemos

$$I = A + C \quad (2.24)$$

que é o traço da matriz de H .

Mostraremos a seguir, a relação dos casos possíveis para a equação (2.22).

Suponhamos que da equação (2.5), $H = AC - B^2 \neq 0$, o sistema (2.13) tem, então uma única solução bem definida (x_0, y_0) . Como feito anteriormente, substituindo (2.7) em (2.5), encontramos a equação (2.16), que é

$$A\bar{x}^2 + 2B\bar{x}\bar{y} + C\bar{y}^2 + \bar{F} = 0 \quad (2.25)$$

onde \bar{F} é obtido pela fórmula (2.18) ou pela fórmula (2.22). Giremos agora, os eixos de coordenadas em torno da nova origem de um ângulo qualquer α . As coordenadas de um ponto qualquer do plano transformam-se, então, de acordo com as fórmulas

$$\bar{x} = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \quad e \quad \bar{y} = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \quad (2.26)$$

em que x' e y' são as coordenadas do mesmo ponto em relação aos eixos depois da rotação. Substituindo as equações (2.26) na equação (2.16), tem-se,

$$A(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha)^2 + 2B(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha)(x' \sin \alpha + y' \cos \alpha) +$$

$$+C(x'\text{sen}\alpha + y'\text{cos}\alpha)^2 + \bar{F} = 0. \quad (2.27)$$

Desenvolvendo a expressão nas novas variáveis x' e y' , obtemos

$$A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2 + \bar{F} = 0 \quad (2.28)$$

onde

$$A' = A\text{cos}^2\alpha + 2B\text{sen}\alpha\text{cos}\alpha + C\text{sen}^2\alpha; \quad (2.29)$$

$$B' = B\text{sen}^2\alpha + (A - C)\text{sen}\alpha\text{cos}\alpha - B\text{cos}^2\alpha; \quad (2.30)$$

$$C' = A\text{sen}^2\alpha - 2B\text{sen}\alpha\text{cos}\alpha + C\text{cos}^2\alpha. \quad (2.31)$$

A fim de simplificarmos esta equação, devemos escolher o ângulo α , convenientemente, de maneira a eliminar o termo misto, ou seja, $B' = 0$. A equação (2.28) terá a forma

$$A'x'^2 + C'y'^2 + F' = 0. \quad (2.32)$$

Procuremos, então, esse ângulo α . Fazendo $B' = 0$ em (2.30), teremos

$$B\text{sen}^2\alpha + (A - C)\text{sen}\alpha\text{cos}\alpha - B\text{cos}^2\alpha = 0 \quad (2.33)$$

Supondo $B \neq 0$ (pois, se $B = 0$, na equação (2.16) já teria a forma procurada), resulta que $\text{cos}\alpha \neq 0$.

Dividindo todos os termos da equação (2.33) por $\text{cos}^2\alpha$, obtemos

$$\begin{aligned} B\text{tg}^2\alpha + (A - C)\text{tg}\alpha - B &= 0 \implies \\ \implies \text{tg}\alpha &= \frac{C - A \pm \sqrt{(C - A)^2 + 4B^2}}{2B} \end{aligned} \quad (2.34)$$

Tendo em vista que $(C - A)^2 + 4B^2 \geq 0$, $\text{tg}\alpha$ é um número real. Com isso, α existe e, toda equação da forma (2.16) pode ser conduzida à forma (2.32).

Observação 2.1 Se soubermos o valor de $\operatorname{tg}\alpha$ e necessitarmos obter os valores de $\operatorname{sen}\alpha$ e $\operatorname{cos}\alpha$, para as relações (2.26), usamos da trigonometria às fórmulas conhecidas

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} \text{ e } \operatorname{cos}\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} \quad (2.35)$$

tendo cuidado com os sinais. Por exemplo, se tivermos escolhido $\operatorname{tg}\alpha < 0$, $\operatorname{sen}\alpha$ e $\operatorname{cos}\alpha$ devem, evidentemente, ter sinais contrários e, $\operatorname{tg}\alpha > 0$, $\operatorname{sen}\alpha$ e $\operatorname{cos}\alpha$ devem ter o mesmo sinal.

Nossa finalidade imediata é de estabelecer quais das figuras geométricas podem ser determinadas pela equação (2.32), onde A' , C' e F' podem ser obtidos diretamente pelas fórmulas (2.29), (2.31) e (2.22), respectivamente.

Sendo $G \neq 0$, chamamos de **elíptica** a equação de segundo grau se $H > 0$, **hiperbólica** se $H < 0$ e **parabólica** se $H = 0$.

Para a equação reduzida (2.32), temos $H = A'C'$. Assim sendo, (2.32) é **elíptica** para $A'C' > 0$ e **hiperbólica** para $A'C' < 0$.

Modifiquemos, antes de tudo, a forma da equação (2.32),

$$A'x'^2 + C'y'^2 + F' = 0 \implies A'x'^2 + C'y'^2 = -F' \quad (2.36)$$

Fazendo, $-F' = J$ e, deixando, por enquanto, de lado a origem da equação (2.32), vamos suprimir os índices das letras e teremos

$$Ax^2 + Cy^2 = J \quad (2.37)$$

Supondo a equação (2.37) elíptica, então, $AC > 0$, ou seja, A e C têm o mesmo sinal.

Quanto a J , há três casos a apresentar: $J > 0$, $J < 0$ e $J = 0$. Vejamos cada um desses casos.

1. Se $J > 0$, a equação (2.37) define uma elipse, pois, dividindo ambos os membros de (2.37) por J , teremos

$$\frac{x^2}{\frac{J}{A}} + \frac{y^2}{\frac{J}{C}} = 1 \quad (2.38)$$

Note que, $\frac{J}{A} > 0$ e $\frac{J}{C} > 0$ e, $\sqrt{\frac{J}{A}}, \sqrt{\frac{J}{C}} \in \mathbb{R}$. Assim, designaremos

$$a = \sqrt{\frac{J}{A}} \text{ e } b = \sqrt{\frac{J}{C}}; \quad (2.39)$$

Donde,

$$a^2 = \frac{J}{A} \text{ e } b^2 = \frac{J}{C} \quad (2.40)$$

Substituindo (2.40) em (2.38), chegaremos a equação canônica da *ellipse*,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (2.41)$$

2. Se $J = 0$, somente o par de números reais $x = 0$ e $y = 0$, satisfaz à equação (2.37), ou seja, está define a origem do sistema de coordenadas. Com isso, a equação $Ax^2 + Cy^2 = 0$ é a equação da *ellipse degenerada*.
3. Se $J < 0$, a equação (2.37) é habitualmente chamada equação de uma *ellipse imaginária*, ou seja, representa um *conjunto vazio*.

Supondo agora que a equação (2.37) seja parabólica, então, $AC < 0$, ou seja, A e C têm sinais contrários.

Quanto a J , há três casos a apresentar: $J > 0$, $J < 0$ e $J = 0$. Vejamos cada um desses casos.

1. Se $J > 0$ ou se $J < 0$, a equação (2.37) define uma hipérbole. Para demonstrar, basta dividir ambos os membros de (2.37) por J e, teremos

$$\frac{x^2}{\frac{J}{A}} + \frac{y^2}{\frac{J}{C}} = 1. \quad (2.42)$$

Tendo em conta que, $A > 0$ e $C < 0$, teremos no caso em que $J > 0$, que $\frac{J}{A} > 0$ e $\frac{J}{C} < 0$ e, $\sqrt{(\frac{J}{A})}, \sqrt{(\frac{J}{C})} \in \mathbb{R}$. Assim, designaremos

$$a^2 = \frac{J}{A} \text{ e } -b^2 = \frac{J}{C}. \quad (2.43)$$

Substituindo (2.43) em (2.42), chegaremos a equação canônica da *hipérbole*, cujo eixo transversal é OX , isto é:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (2.44)$$

Se $J < 0$, teremos

$$\frac{J}{A} < 0 \text{ e } \frac{J}{C} > 0. \quad (2.45)$$

Com isso,

$$-a^2 = \frac{J}{A} \text{ e } b^2 = \frac{J}{C}. \quad (2.46)$$

Substituindo (2.46) em (2.42), chegaremos a equação canônica da *hipérbole*, cujo eixo transversal é OY , isto é:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1; \quad (2.47)$$

2. Se $J = 0$, a equação (2.37) tem a forma

$$Ax^2 + Cy^2 = 0 \quad (2.48)$$

ou

$$(\sqrt{Ax} + \sqrt{-Cy})(\sqrt{Ax} - \sqrt{-Cy}) = 0. \quad (2.49)$$

Tendo em conta que, $A > 0$ e $C < 0$, $\sqrt{A} \sqrt{-C} \in \mathbb{R}$.

Em virtude de (2.49), as equações $\sqrt{Ax} + \sqrt{-Cy} = 0$ e $\sqrt{Ax} - \sqrt{-Cy} = 0$, definem *duas retas* que passam pela origem. Com isso, para $J = 0$, obtemos a equação de uma *hipérbole degenerada*. Assim, toda equação cônica (ou equação geral do 2º grau) de centro ($H \neq 0$) é *elíptica* ($H > 0$) ou *hiperbólica* ($H < 0$).

Nota:

- Toda equação *elíptica* é a equação de uma *elipse originária* ou a equação de uma *elipse degenerada* ou a equação de uma *elipse imaginária*, como mostra a Figura (7);

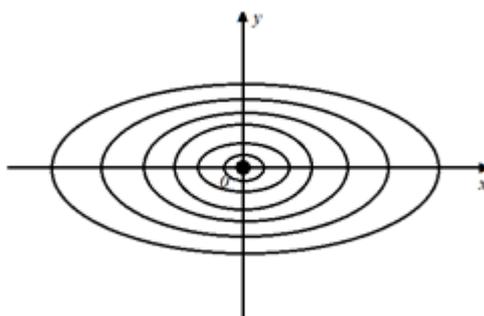


Figura 7 – Elipses: originária, degenerada ou imaginária

- Toda equação *hiperbólica* é a equação de uma *hipérbole originária* ou a equação de uma *hipérbole degenerada*, como mostra a Figura (8);

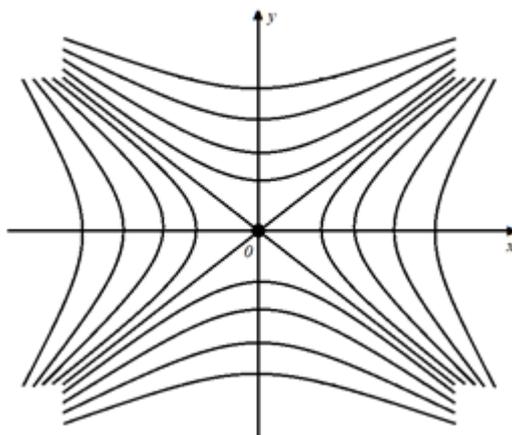


Figura 8 – Hipérboles: originária ou degenerada

Agora, sendo $H = 0$, obteremos uma equação *parabólica*.

Substituindo as relações (2.26) na equação (2.5) e desenvolvendo processo análogo à obtenção das relações (2.29), (2.30) e (2.31), obtemos

$$D' = D\cos\alpha + E\sin\alpha; \quad (2.50)$$

$$E' = -D\sin\alpha + E\cos\alpha; \quad (2.51)$$

$$F' = F. \quad (2.52)$$

Utilizando o mesmo raciocínio para encontrarmos o ângulo α de maneira que, depois da rotação dos eixos de um ângulo α , teremos $B' = 0$ em (2.34).

Com isso, $H = A'C' - B'^2 = 0$, de onde teremos $A' = 0$ ou $C' = 0$. Daí, obteremos as duas relações abaixo:

$$A'x'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0 ; A' \neq 0 \quad (2.53)$$

$$C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0 ; C' \neq 0. \quad (2.54)$$

Do ponto de vista algébrico, as equações (2.53) e (2.54) não se distinguem substancialmente uma da outra (uma se reduz à outra por substituição das denominações coordenadas e das letras que designam os coeficientes).

Começemos, antes de mais nada, por apresentarmos a equação (2.54) da seguinte maneira

$$C' \left(y'^2 + 2\frac{E'}{C'}y' \right) + 2D'x' = -F' \quad (2.55)$$

Completando quadrados na expressão entre parênteses, na relação acima, obtemos

$$C' \left(y'^2 + 2\frac{E'}{C'}y' + \frac{E'^2}{C'^2} \right) + 2D'x' = -F' + \frac{E'^2}{C'^2}. \quad (2.56)$$

Fazendo $-F' + \frac{E'^2}{C'^2} = L'$, teremos

$$C' \left(y' + \frac{E'}{C'} \right)^2 + 2D'x' = L' \quad (2.57)$$

Podemos apresentar dois casos:

1. Sendo $D' \neq 0$, a equação (2.57) poderá ser escrita como

$$C' \left(y' + \frac{E'}{C'} \right)^2 + 2D' \left(x' - \frac{L'}{2D'} \right) = 0. \quad (2.58)$$

Desloquemos paralelamente em (2.58), os eixos em $\frac{L'}{2D'}$ na direção do eixo $O'X'$ e de $-\frac{E'}{C'}$, para o eixo $O'Y'$. As coordenadas de todos os pontos do plano mudarão, então, teremos

$$x' = x'' + \frac{L'}{2D'} \text{ e } y' = y'' - \frac{E'}{C'}. \quad (2.59)$$

Substituindo, (2.59) em (2.58), obtemos

$$C'y''^2 + 2D'x'' = 0; \quad (2.60)$$

ou ainda

$$y''^2 = -2\frac{D'}{C'}x''. \quad (2.61)$$

Fazendo, $-\frac{D'}{C'} = \pm p$, obtemos

$$y''^2 = -2px'' \text{ ou } y''^2 = 2px'', \quad (2.62)$$

que são as equações canônicas da *parábola*.

2. Sendo $D' = 0$, a equação (2.57), terá a forma

$$C' \left(y' + \frac{E'}{C'} \right)^2 = L'. \quad (2.63)$$

Desloquemos os eixos de coordenadas por translação paralela para $O'Y'$ de $-\frac{E'}{C'}$. As coordenadas de todos os pontos do plano modificam-se, então, teremos

$$x' = x'' \text{ e } y' = y'' - \frac{E'}{C'}. \quad (2.64)$$

Substituindo, (2.64) em (2.63), obtemos

$$C' y''^2 = L', \quad (2.65)$$

ou ainda,

$$y'' = \pm \sqrt{\frac{L'}{C'}}. \quad (2.66)$$

Supondo que $C' > 0$, analisaremos três casos para L' :

1. Se $L' > 0$, a equação (2.66) define um par de retas paralelas (dispostos de uma parte e de outra do novo eixo das abscissas a uma distância de $\sqrt{\frac{L'}{C'}}$ cada uma);
2. Se $L' = 0$, a equação (2.66) define *uma só reta*, no novo sistema das abscissas;
3. Se $L' < 0$, a equação (2.66) define uma *parábola degenerada*.

Com isso, toda *equação parabólica do segundo grau* ($H = 0$), é a equação de uma *parábola ordinária* (ou curva não central) ou a equação de uma *parábola degenerada* (ou curva com uma infinidade de centros).

Por fim, se $G = 0$ e $H \neq 0$, a equação (2.23) se apresenta como

$$A\bar{x}^2 + 2B\bar{x}\bar{y} + C\bar{y}^2 = 0 \quad (2.67)$$

Suponhamos a equação (2.67) elíptica, então $AC > 0$, ou seja, os coeficientes A e C tem o mesmo sinal, onde tomaremos o sinal positivo.

Fazendo

i) $B = \sqrt{AC}$, teremos

$$(\sqrt{A}\bar{x} + \sqrt{C}\bar{y})^2 = 0 \Rightarrow \sqrt{A}\bar{x} + \sqrt{C}\bar{y} \Rightarrow \bar{y} = -\sqrt{\frac{A}{C}}\bar{x} \quad (2.68)$$

ii) $B = -\sqrt{AC}$, teremos

$$(\sqrt{A}\bar{x} - \sqrt{C}\bar{y})^2 = 0 \Rightarrow \sqrt{A}\bar{x} - \sqrt{C}\bar{y} \Rightarrow \bar{y} = \sqrt{\frac{A}{C}}\bar{x} \quad (2.69)$$

Com isso, (2.68) e (2.69) representam as equações de **duas retas**;

Note que, B poderá ser nulo, para isto teríamos $A = 0$ ou $C = 0$, daí encontraremos apenas **um ponto**;

Por outro lado, se $B < 0, \sqrt{AC} < 0$, que é um absurdo, logo, teremos o **conjunto vazio**.

■

3 Resultados Básicos

Apresentaremos aqui algumas aplicações do Teorema demonstrado, utilizando o processo algébrico.

Para cada uma das equações abaixo, identifique a cônica que ela representa:

1) $5x^2 + 8y^2 - 4xy - 18x + 9 = 0$

Resolução: Sabendo que a equação do segundo grau é dada por

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

temos aqui,

$$A = 5; B = -2; C = 8; D = -9; E = 0; F = 9.$$

Assim,

$$G = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 9 \\ -2 & 8 & 0 \\ -9 & 0 & 9 \end{vmatrix} = -324 < 0; \quad (3.1)$$

$$H = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} = 36 > 0; \quad (3.2)$$

e

$$I = A + C = 5 + 8 = 13 > 0.$$

Com isso,

$$G \neq 0 \text{ e } H > 0, \quad G \cdot I < 0, \quad A \neq C \text{ e } B \neq 0.$$

Portanto, trata-se de uma *elipse*.

$$2) \quad 7x^2 - 48xy - 7y^2 - 30x - 40y + 75 = 0$$

Resolução: Temos aqui,

$$A = 7; \quad B = -24; \quad C = -7; \quad D = -15; \quad E = -20; \quad F = 75.$$

Assim,

$$G = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -24 & -15 \\ -24 & -7 & -20 \\ -15 & -20 & 75 \end{vmatrix} = -62500 < 0; \quad (3.3)$$

$$H = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & -24 \\ -24 & -7 \end{vmatrix} = -625 < 0; \quad (3.4)$$

e

$$I = A + C = 7 - 7 = 0.$$

Com isso,

$$G \neq 0 \text{ e } H < 0.$$

Portanto, trata-se de uma *hipérbole*.

$$3) x^2 + 2\sqrt{2}xy + 2y^2 + 6\sqrt{3}x + 3 = 0$$

Resolução: Temos aqui,

$$A = 1; B = \sqrt{2}; C = 2; D = 3\sqrt{3}; E = 0; F = 3.$$

Assim,

$$G = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{2} & 3\sqrt{3} \\ \sqrt{2} & 2 & 0 \\ 3\sqrt{3} & 0 & 3 \end{vmatrix} = -54 < 0; \quad (3.5)$$

$$H = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad (3.6)$$

e

$$I = A + C = 1 + 2 = 3.$$

Com isso,

$$G \neq 0 \text{ e } H = 0.$$

Portanto, trata-se de uma *parábola*.

$$4) 2x^2 - 3xy - 2y^2 + 5x + 5y - 3 = 0$$

Resolução: Temos aqui,

$$A = 2; B = -\frac{3}{2}; C = -2; D = \frac{5}{2}; E = \frac{5}{2}; F = -3.$$

Assim,

$$G = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ -\frac{3}{2} & -2 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & -3 \end{vmatrix} = 0; \quad (3.7)$$

$$H = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -2 \end{vmatrix} = -\frac{25}{4} < 0; \quad (3.8)$$

e

$$I = A + C = 2 - 2 = 0.$$

Com isso,

$$G = 0 \text{ e } H < 0 \text{ e, } G \cdot I = 0.$$

Nessas condições, a equação dada representa *duas retas* ou *um ponto*, já que $G \cdot I = 0$.

Agrupando os termos da equação dada, transformando-a numa equação do 2º grau, teremos

$$2x^2 + (5 - 3y)x + (5y - 2y^2 - 3) = 0$$

daí,

$$\Delta = (5 - 3y)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (5y - 2y^2 - 3) = 25y^2 - 70y + 49 = (5y - 7)^2. \quad (3.9)$$

Então,

$$x = \frac{-5 + 3y \pm (5y - 7)}{4} \Rightarrow x_1 = 2y - 3 \text{ e } x_2 = (-y + 1)/2;$$

isto é, $x - 2y + 3 = 0$ e $2x + y - 1 = 0$ são as equações obtidas.

Portanto, trata-se de *duas retas*.

$$5) 3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x - 4y + 20 = 0$$

Resolução: Temos aqui,

$$A = 3; B = -1; C = 3; D = 2; E = -2; F = 203.$$

Assim,

$$G = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 203 \end{vmatrix} = 144 > 0; \quad (3.10)$$

$$H = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 8 > 0; \quad (3.11)$$

e

$$I = A + C = 3 + 3 = 6 > 0.$$

Com isso,

$$G \neq 0 \text{ e } H > 0 \text{ e, } G \cdot I > 0.$$

Portanto, trata-se de um *conjunto vazio*.

4 Aplicações usando o software Maple

O Maple é um programa de Computação Algébrica de uso geral que possui inúmeros recursos numéricos e gráficos, além de também funcionar como uma linguagem de programação. Ele vem sendo desenvolvido desde 1981 pela *Waterloo Maple Inc Canadá*, para vários sistemas operacionais. Com ele, é possível encontrar soluções exatas para problemas práticos que envolvam resolução de equações, derivadas, integrais, cálculo matricial e, em nosso caso, o reconhecimento das cônicas em Geometria Analítica, tudo isso integrado a recursos que permitem visualização de dados ou objetos planos ou tridimensionais.

Na versão 18 para Windows, quando ele é inicializado, aparece uma tela como da figura (9).

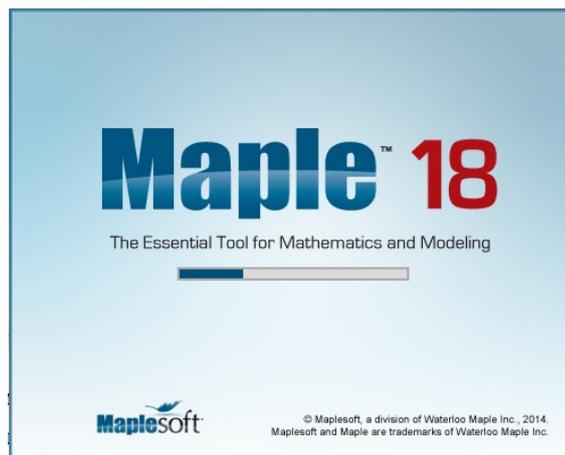


Figura 9 – Apresentação do Maple 18

Funcionando de modo interativo, o usuário vai digitando comandos ao lado de um aviso (*prompt*) cujo formato padrão é o símbolo $>$. Assim que um comando digitado sem erros é encerrado, o núcleo do programa o executa.

Podemos utilizar comandos de ajuda, para estudarmos as cônicas a partir de dois cones, vendo o aparecimento de elipse, hipérbole, parábola, circunferência e ponto, que seria ao abrir o programa escolher a função *Mathematics - Geometry - Conic Sections*, figuras (10), (11), (12), (13), (14).

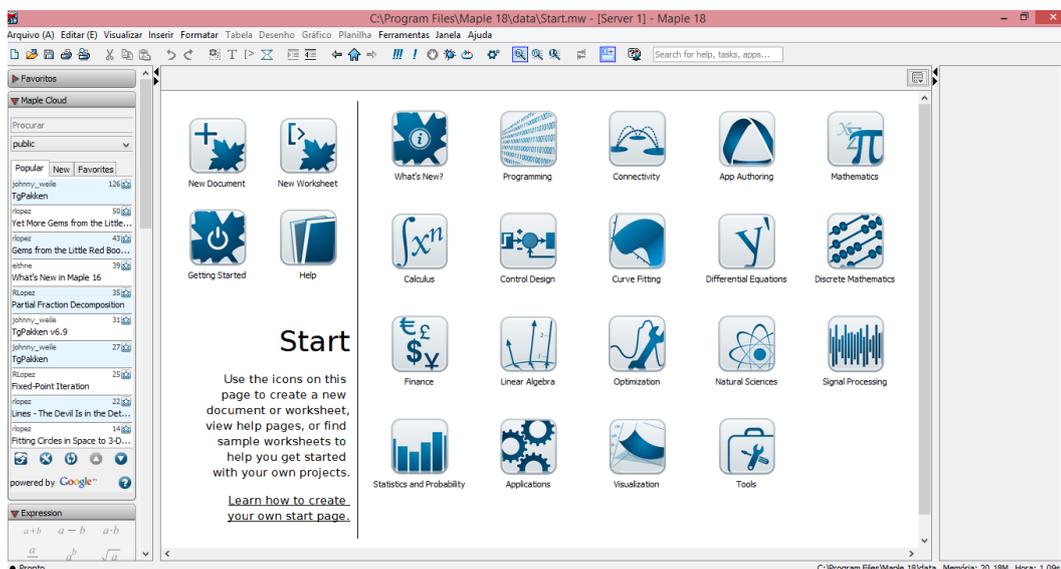


Figura 10 – Tela de apresentação dos recursos do Maple 18

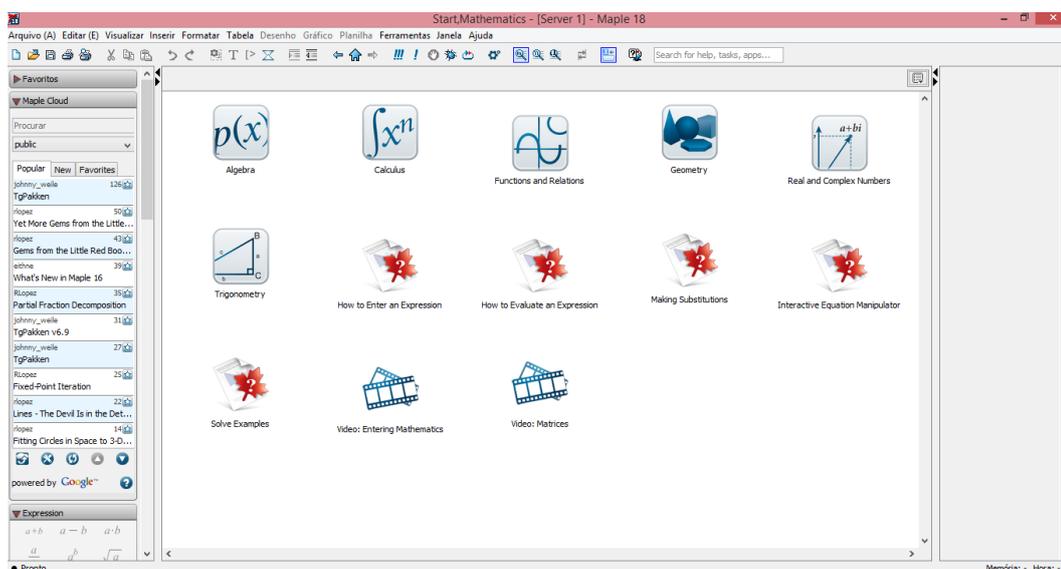


Figura 11 – Mathematics - Geometry

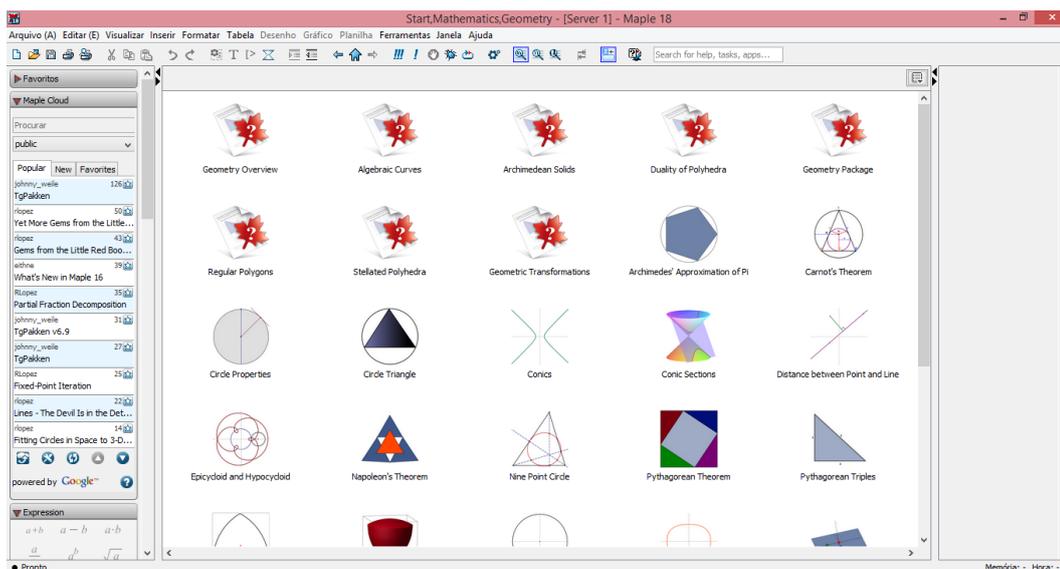


Figura 12 – Conic Sections

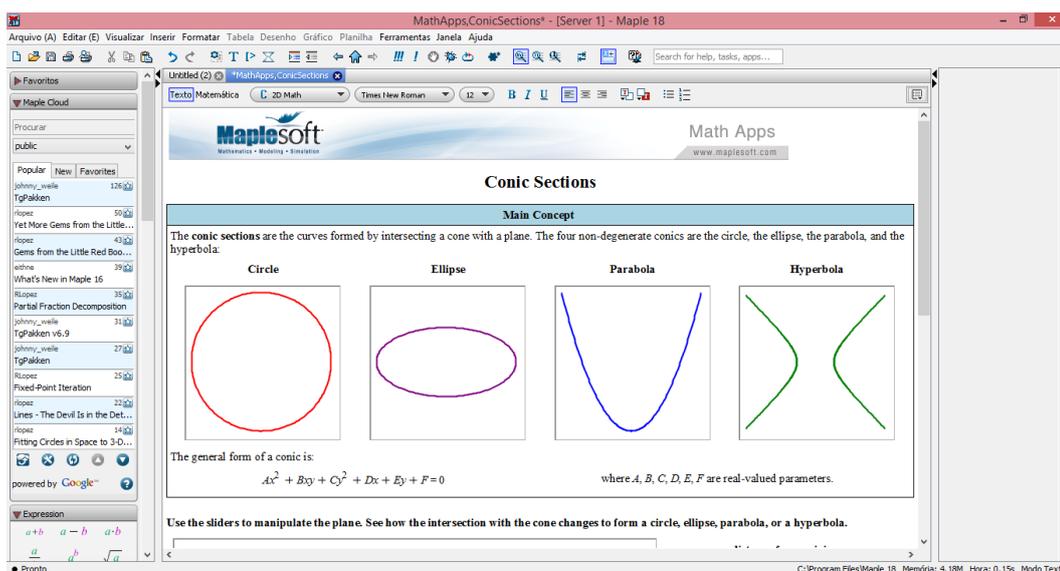


Figura 13 – Conic Sections - Main Concept I

Nesta tela, observações são feitas, deslizando os botões de *distance from origin* para direita e para esquerda e, *angle* de -90° a 90° , obtemos uma *elipse* ou um *círculo* (quando o ângulo é de 90°), uma *hipérbole*, uma *parábola*, ou um *ponto* (quando a distância está no início e o ângulo for 90°).

Considerando-se uma cônica de equação:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (4.1)$$

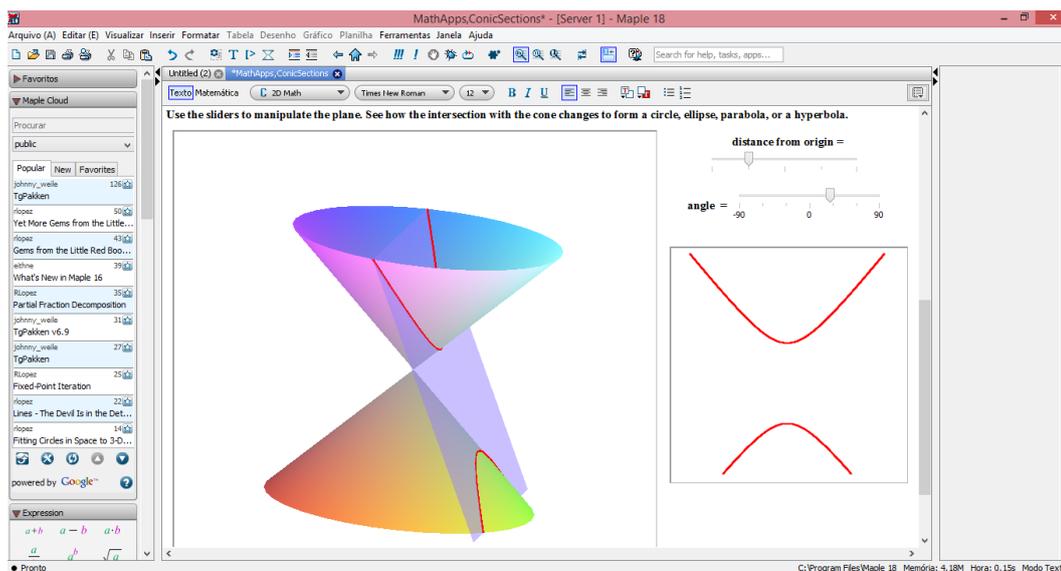


Figura 14 – Obtenção de cônicas a partir dos cones

apresentam-se nesta seção, alguns procedimentos que permitem o estudo das variações dos coeficientes da equação geral de uma curva do 2º grau, que seria ao abrir o programa e escolher a função *Mathematics - Geometry - Conic*, figuras (15), (16).

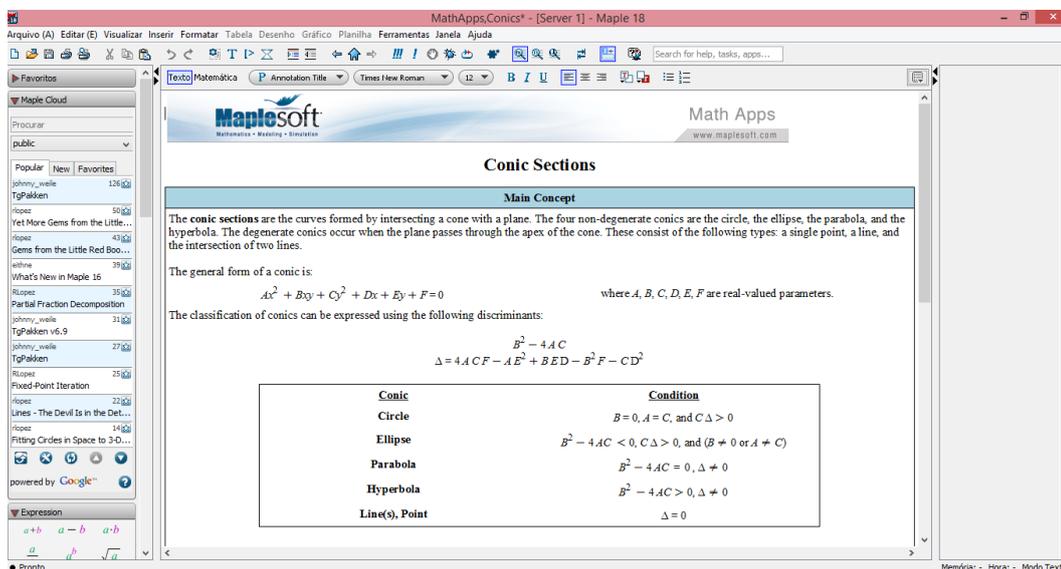


Figura 15 – Conic Sections - Main Concept II

Nesta tela obtemos *círculo* ou *elipse* ou *parábola* ou *hipérbole*.

No *círculo*, os coeficientes A e C são iguais positivos e quem determina a medida do comprimento do raio é o coeficiente F , onde $-5, 0 < F \leq 0, 0$ temos um círculo e, $F = 0$,

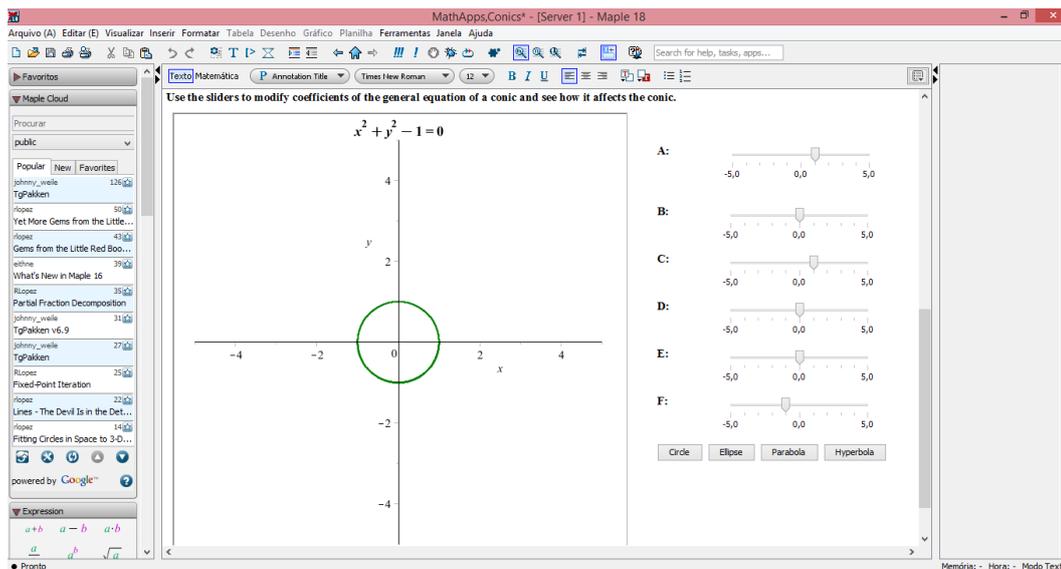


Figura 16 – Círculo ou elipse ou parábola ou hipérbole

um ponto na origem.

Na *ellipse*, os coeficientes A e C são distintos e ambos são positivos e F segue o mesmo comportamento para o círculo e, também F dá o comprimento do eixo maior, sendo ele no eixo OX ou OY , determinados pelos coeficientes A e C .

Quando fazemos variar o coeficiente A , obtemos outras formas:

- $A = 0$, obtemos duas retas paralelas e simétricas em relação ao eixo OX . Figura (17);

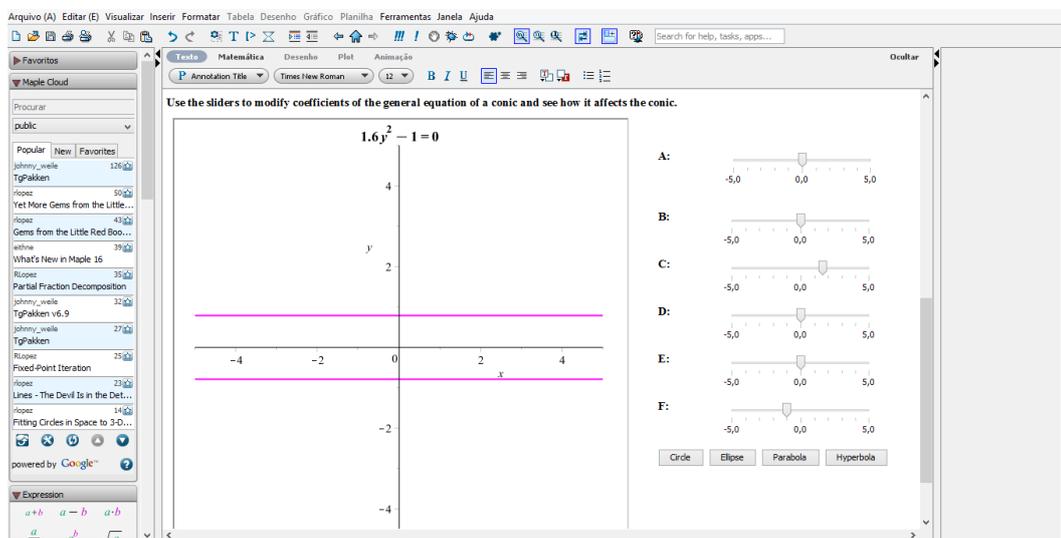


Figura 17 – Duas retas paralelas e simétricas em relação ao eixo OX

- $0 < A < C$, obtemos uma elipse cujo eixo transverso é o OX . Figura (18);

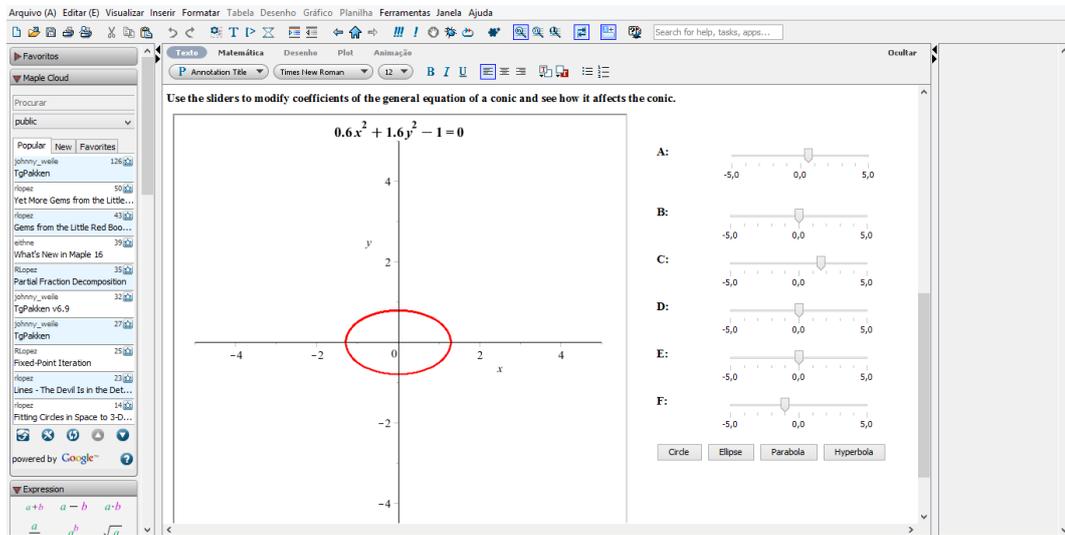


Figura 18 – Elipse cujo eixo transverso é o OX

- $A > C$, obtemos uma elipse cujo eixo transverso é o OY . Figura (19);

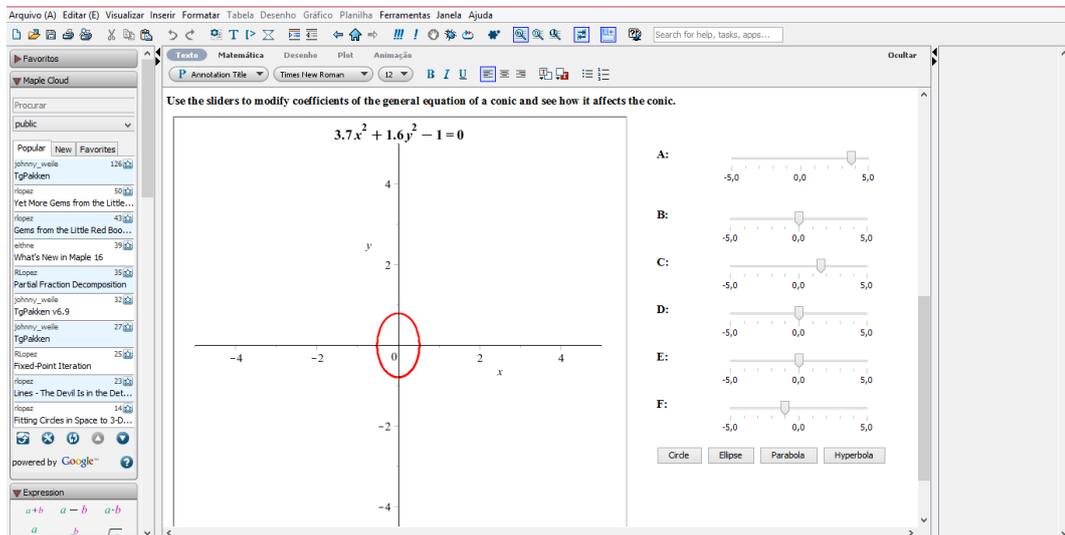


Figura 19 – Elipse cujo eixo transverso é o OY

- $A < 0$, obtemos uma hipérbole cujo eixo transverso é o OY . Figura (20);

Deve-se observar que nos casos acima, $B = D = E = 0$.

Quando fazemos variar o coeficiente F:

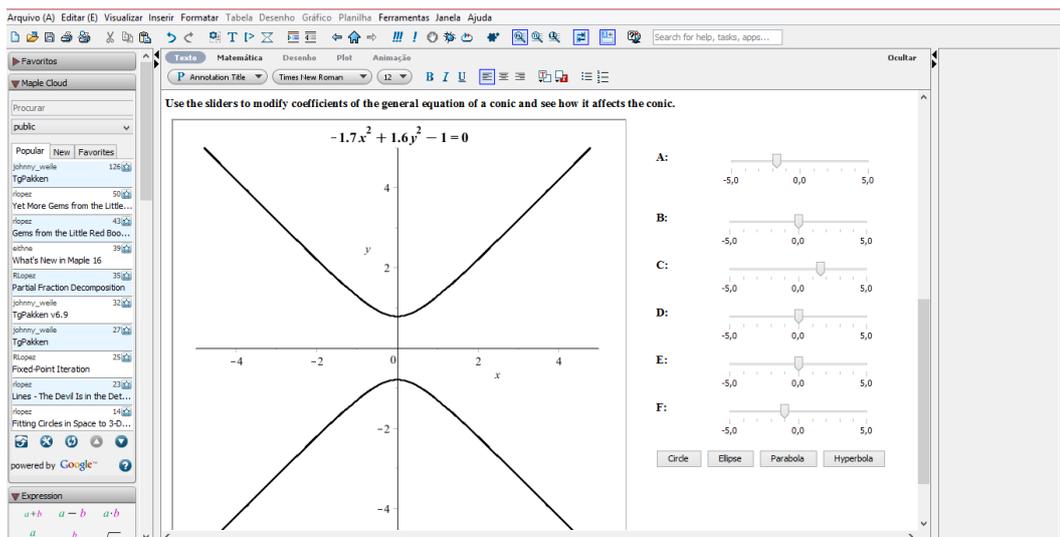


Figura 20 – Hipérbole cujo eixo transversal é o OY

- $F = 0$, quando $0 < A < C$ ou $A > C$, obtemos um ponto na origem do sistema.

Figura (21);

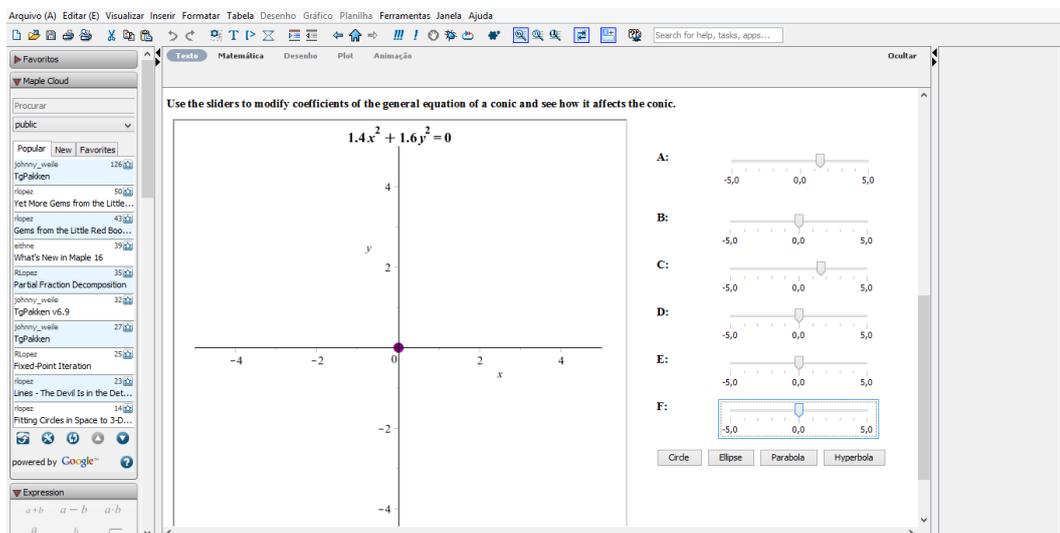


Figura 21 – Um ponto na origem do sistema

- $F < 0$, quando $0 < A < C$ ou $A > C$, variamos a distância focal da elipse. Figuras (22), (23);

- $F = 0$ e $A < 0$, obtemos duas retas concorrentes na origem do sistema. Figura (24);

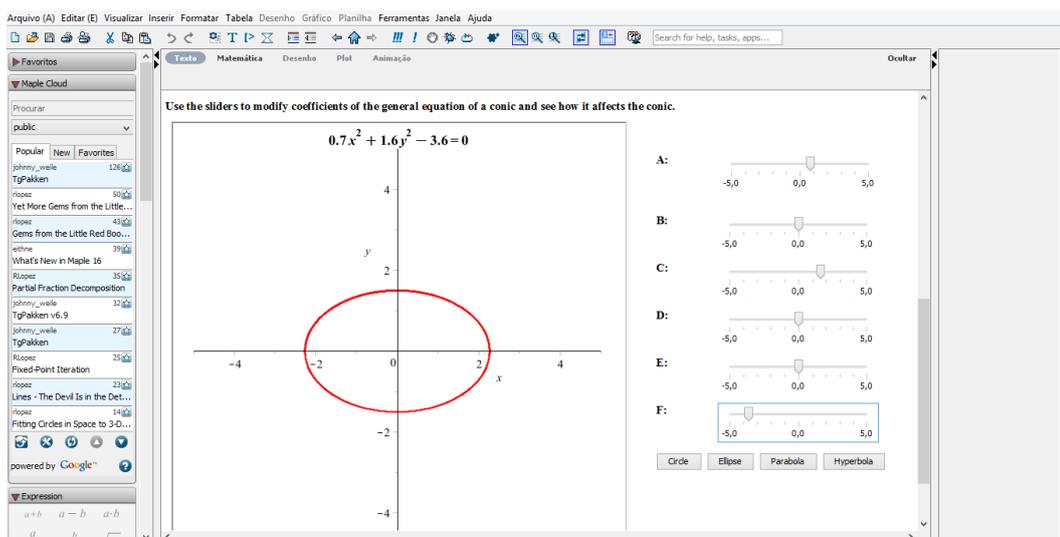


Figura 22 – Variação da distância focal da elipse cujo eixo transversal é o OX

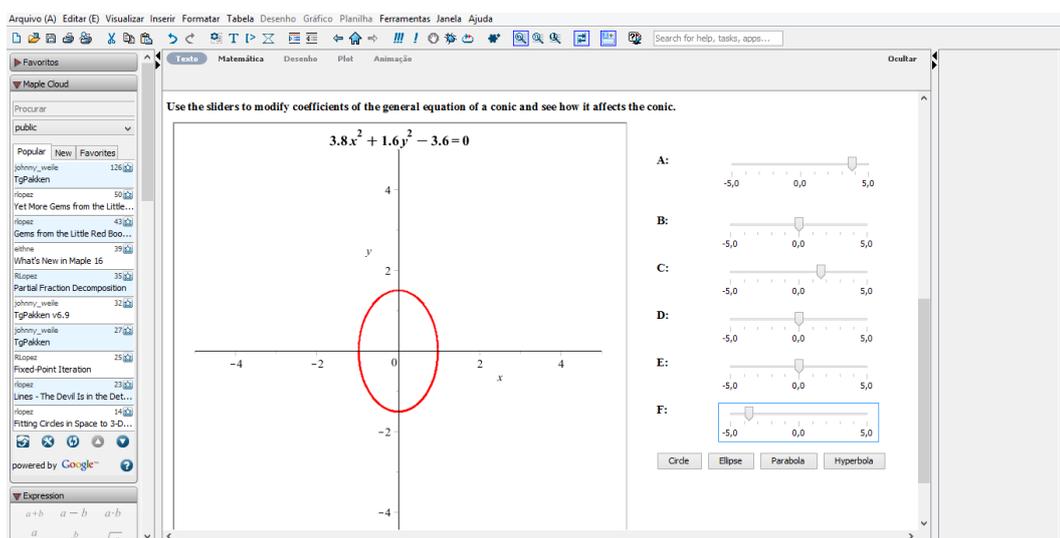


Figura 23 – Variação da distância focal da elipse cujo eixo transversal é o OY

- $F < 0$ e $A = 0$, variamos a distância entre as retas paralelas e simétricas ao eixo OX . Figura (25);
- $F < 0$ e $A < 0$, variamos a distância focal da hipérbole cujo eixo transversal é o OY . Figura (26);
- $F > 0$ e $A < 0$, variamos a distância focal da hipérbole cujo eixo transversal é o OX . Figura (27);

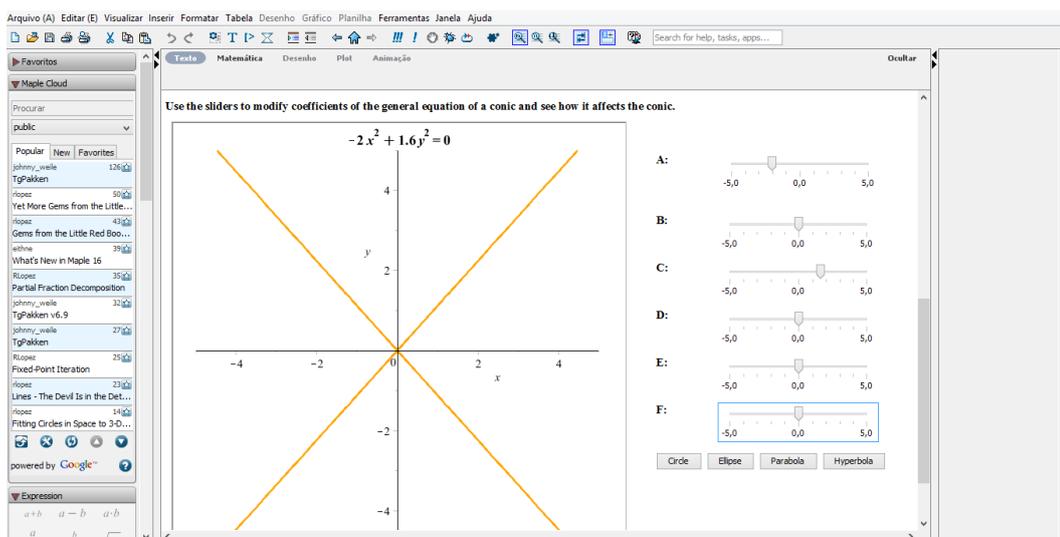
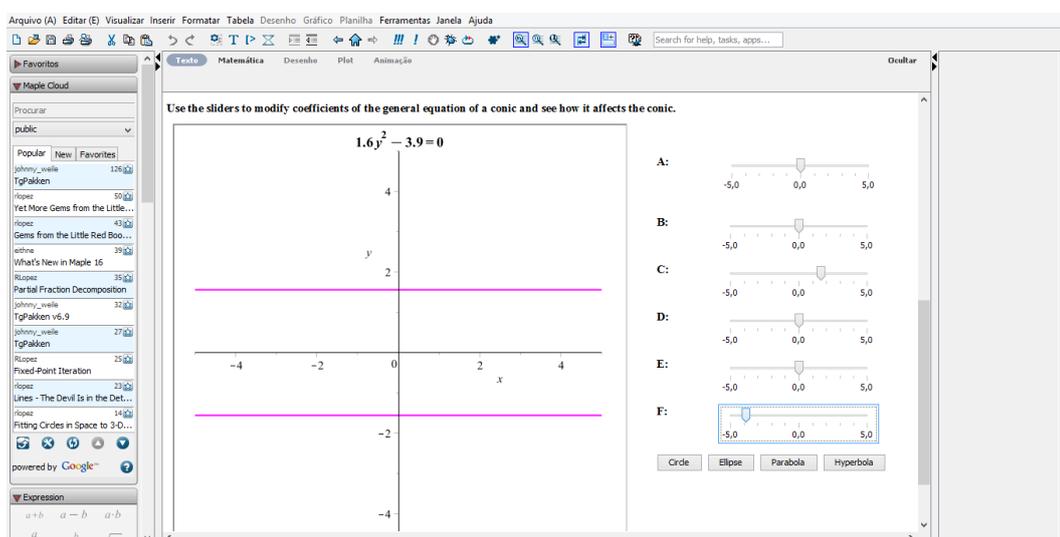


Figura 24 – Duas retas concorrentes na origem do sistema

Figura 25 – Variação da distância entre as retas paralelas e simétricas ao eixo OX

- $F > 0$ e $A \geq 0$ e $C \geq 0$, obtemos um conjunto vazio. Figuras (28), (29);

Em todos os casos acima, o coeficiente B se encarrega da rotação da cônica. Se $B > 0$, a rotação é no sentido anti-horário e, se $B < 0$, sentido horário.

Seguindo o mesmo raciocínio, obtemos resultados semelhantes para parábolas e hipérbolas.

Para a simplificação da equação de uma cônica, bem como, para a construção de seu gráfico, utilizaremos os seguintes comandos:

> *with(geometry)* :

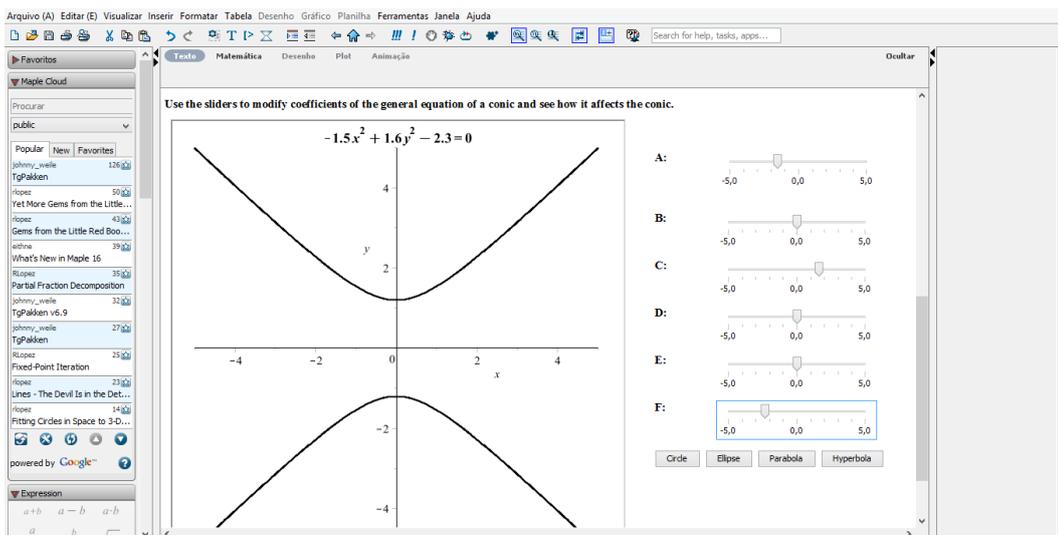


Figura 26 – Variação da distância focal da hipérbole cujo eixo transverso é o OY

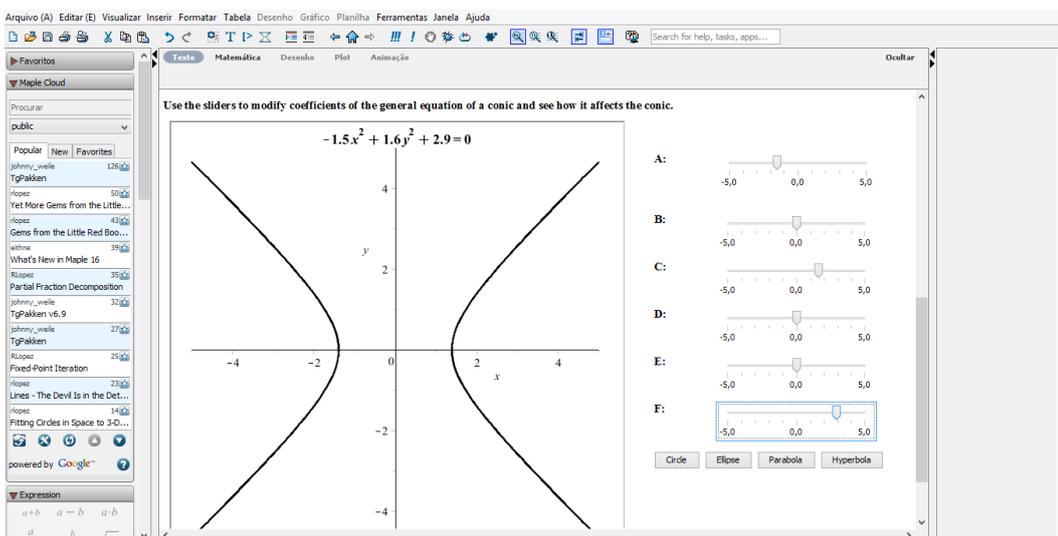


Figura 27 – Variação da distância focal da hipérbole cujo eixo transverso é o OX

- > $conic(ci, A * x^2 + B * x * y + C * y^2 + D * x + E * y + F = 0, [x, y]) :$
- > $form(ci);$
- > $draw(ci);$
- > $detail(ci);$

Como exemplo, vamos realizar o estudo da cônica de equação $2x^2 - 3xy - 5y^2 - 4x - 6y + 8 = 0$, figuras (30), (31);

Faremos a identificação das cônicas apresentadas no Capítulo 2 (procedimento algébrico), com o auxílio do *software Maple 18* no apêndices A, B, C, D e E.

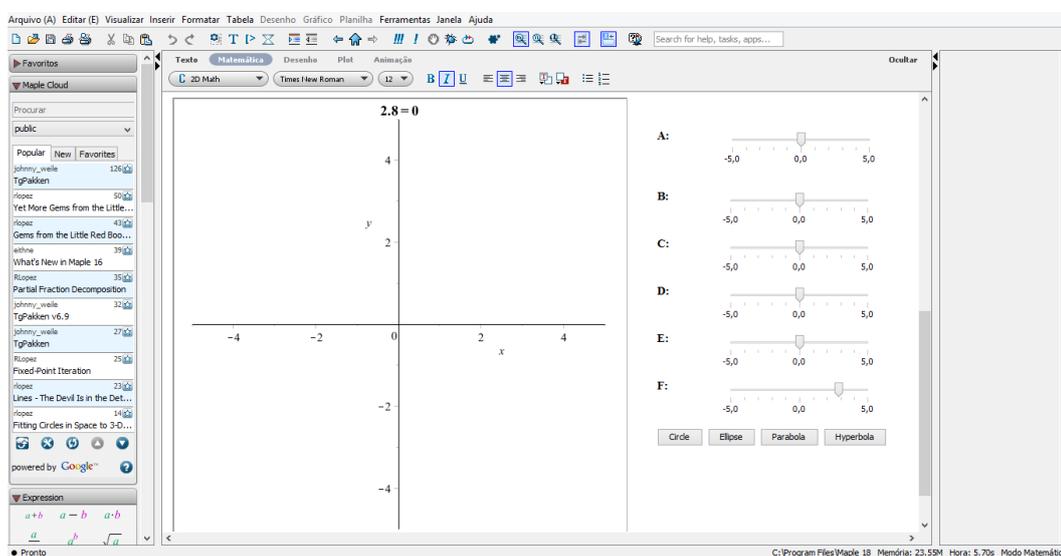


Figura 28 – Um conjunto vazio I

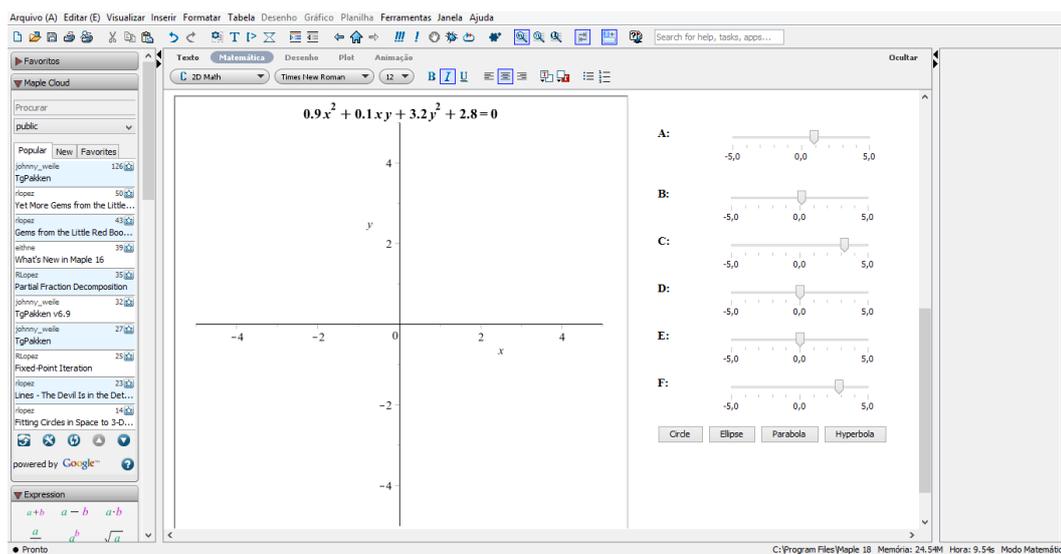


Figura 29 – Um conjunto vazio II

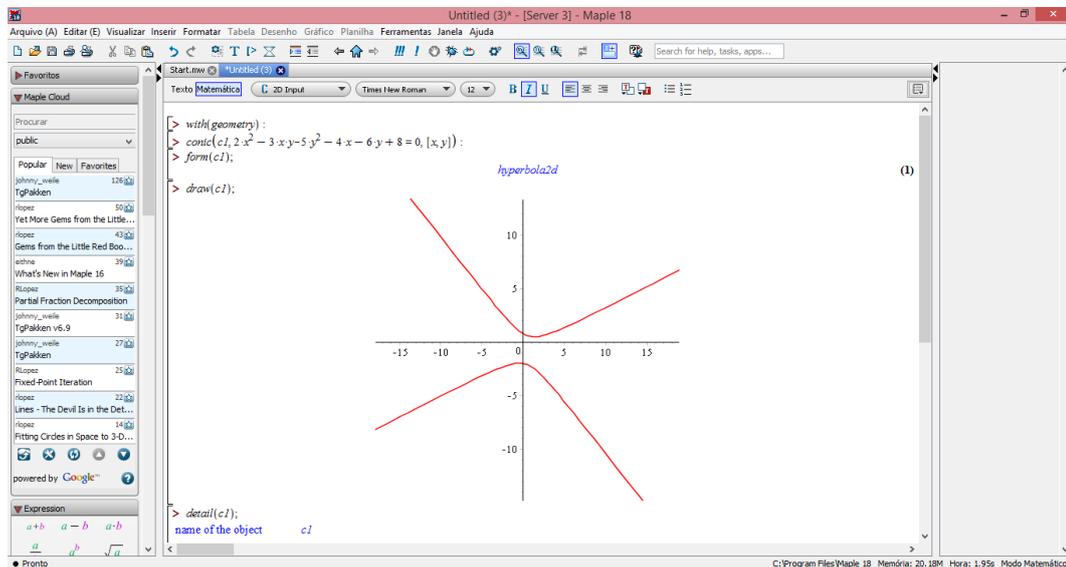


Figura 30 – Resolução de $2x^2 - 3xy - 5y^2 - 4x - 6y + 8 = 0$ - parte I

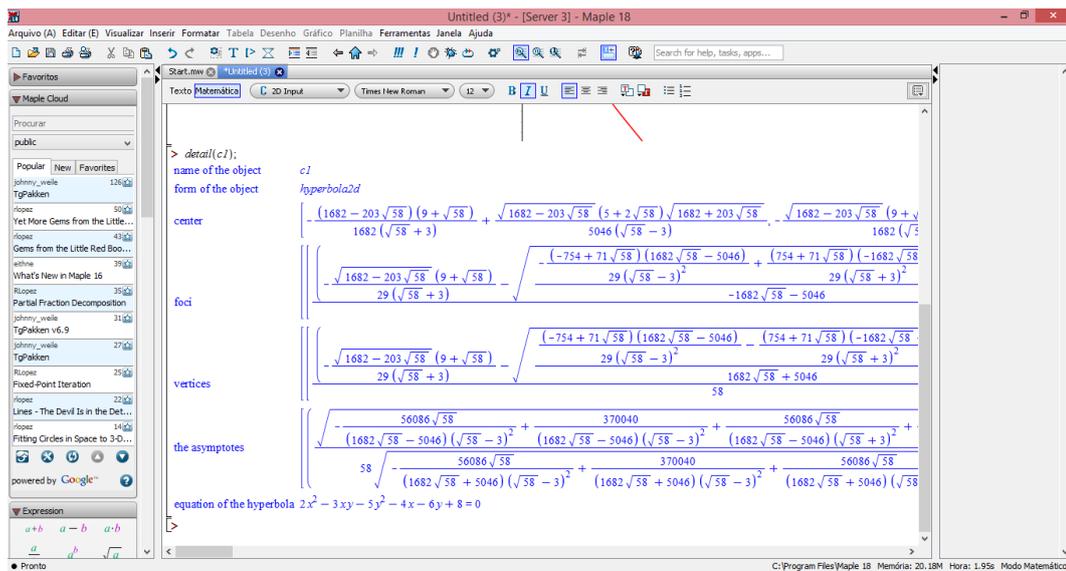


Figura 31 – Resolução de $2x^2 - 3xy - 5y^2 - 4x - 6y + 8 = 0$ - parte II

5 Conclusões

Neste trabalho de conclusão de curso trabalhamos com a simplificação da equação geral de uma curva do segundo grau a duas variáveis, envolvendo um tratamento algébrico, com a aplicação de um teorema, analisando os coeficientes da cônica e, depois a utilização de um aplicativo matemático para melhor visualização e construção de gráficos dessas cônicas. Buscou-se com isso, lançar uma proposta para o ensino da Geometria Analítica a partir do uso do *software Maple 18*, como um recurso facilitador para o processo de ensino e aprendizagem das cônicas, na perspectiva de ampliar ideias e oferecer mais um subsídio para as aulas de Geometria Analítica.

Percebe-se que o ensino da matemática é cheio de pontos e contra pontos, para o qual não existem recursos prontos e acabados e, o aprimoramento de práticas e recursos educativos, capazes de chamar a atenção dos alunos e despertar seus interesses, na busca da compreensão e da construção de novos conceitos matemáticos cabe ao professor refletir sobre a importância do seu papel na formação dos educandos, complementando conteúdos relevantes que serão usados por eles em instantes posteriores.

Dessa forma, espera-se que diante dos resultados apresentados neste trabalho, o tema abordado possa ser exposto de uma forma que facilite o processo de ensino e aprendizagem e sempre que possível fazendo uso de recursos tecnológicos, que sejam capazes de despertar o interesse por parte dos alunos e aguçar suas curiosidades com o intuito de desenvolver habilidades muitas vezes não despertadas quando os conteúdos são abordados sem o uso destes recursos.

Portanto, a relevância deste trabalho contribui de alguma forma para uma reflexão sobre a prática pedagógica nas aulas de Geometria Analítica, no sentido de melhorar o

ensino dos conteúdos relacionados a este eixo da matemática (uma vez que estes conteúdos abordados não são vistos nos programas de ensino médio e só algumas poucas instituições como o **IME** e o **ITA**, cobram esses conteúdos em seus exames de acesso, através da constante busca por novos recursos), apresentando novas ferramentas que sejam capazes de despertar um interesse maior por parte dos estudantes de ensino médio, pelos conteúdos em questão, para que estes sejam trabalhados de forma eficiente e prazerosa e, que possa contribuir de forma positiva para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem.

A Exemplo $5x^2 + 8y^2 - 4xy - 18x + 9 = 0$

A resolução se apresenta em oito partes (32), (33), (34), (35), (36), (37), (38), (39)

```

> with(geometry) :
> conic(c1, 5·x2 + 8·y2 - 4·x·y - 18·x + 9 = 0, [x,y]) :
> form(c1);
                                     ellipse2d
(1)

> point(P, 2, 1/2);
                                     P
(2)

> line(r1, [point(A, 1, 0), point(B, 3, 1)], [x,y]);
                                     r1
(3)

> Equation(r1);
                                     1 - x + 2y = 0
(4)

> slope(r1);
                                     1/2
(5)

> PerpendicularLine(r2, P, r1)
                                     r2
(6)

> slope(r2);
                                     -2
(7)

> Equation(r2);
                                     -9/2 + 2x + y = 0
(8)

> line(l1, [P, point(Q, 4, 1/2)], [x,y]);
                                     l1
(9)

> Equation(l1);
                                     -1 + 2y = 0
(10)

```

Figura 32 – Resolução do exemplo 1 - Parte I

```

> slope(l1);
                                     0
(11)

> PerpendicularLine(l2, P, l1);
                                     l2
(12)

> Equation(l2);
                                     -4 + 2x = 0
(13)

> with(plots) :
> implicitplot(5·x2 + 8·y2 - 4·x·y - 18·x + 9 = 0, x=-5..5, y=-5..5, color = red, grid[refine] = 5, crossing[refine] = 5);

```

Figura 33 – Resolução do exemplo 1 - Parte II

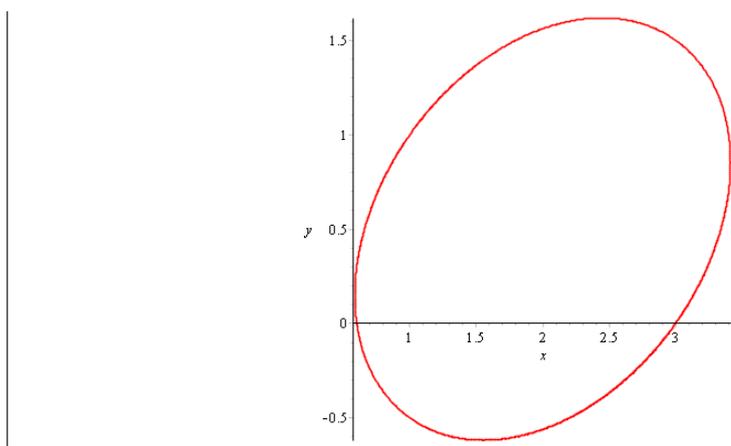


Figura 34 – Resolução do exemplo 1 - Parte III

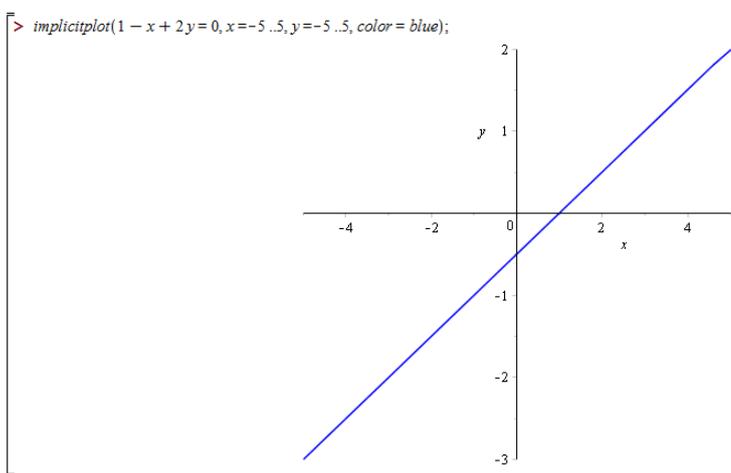


Figura 35 – Resolução do exemplo 1 - Parte IV

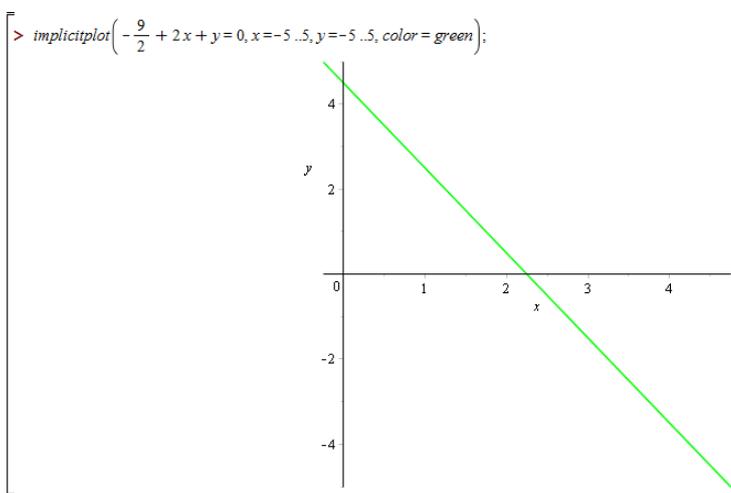


Figura 36 – Resolução do exemplo 1 - Parte V

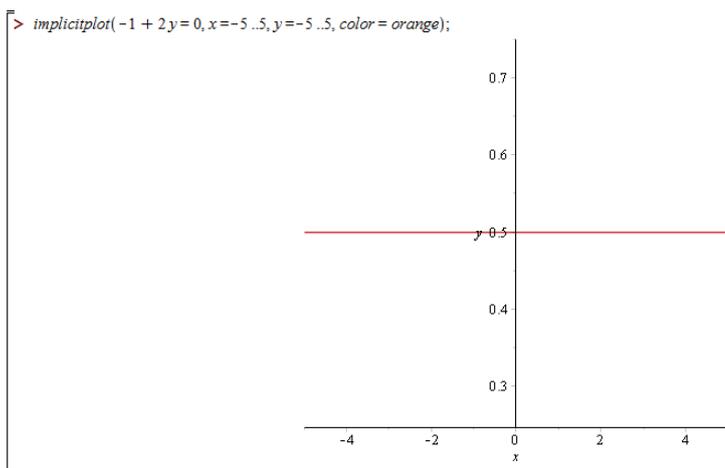


Figura 37 – Resolução do exemplo 1 - Parte VI

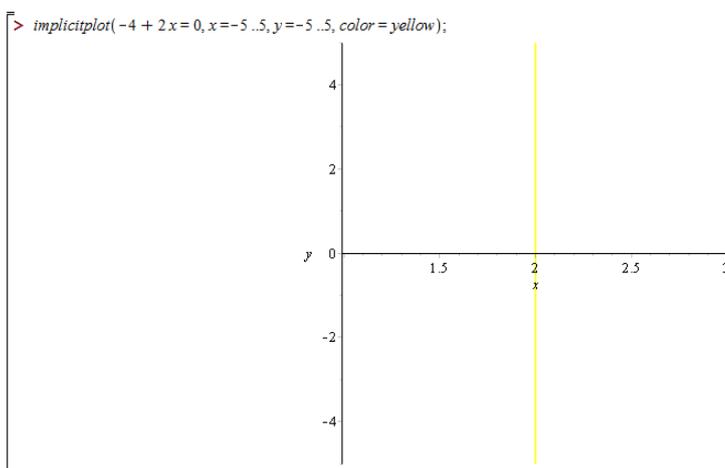


Figura 38 – Resolução do exemplo 1 - Parte VII

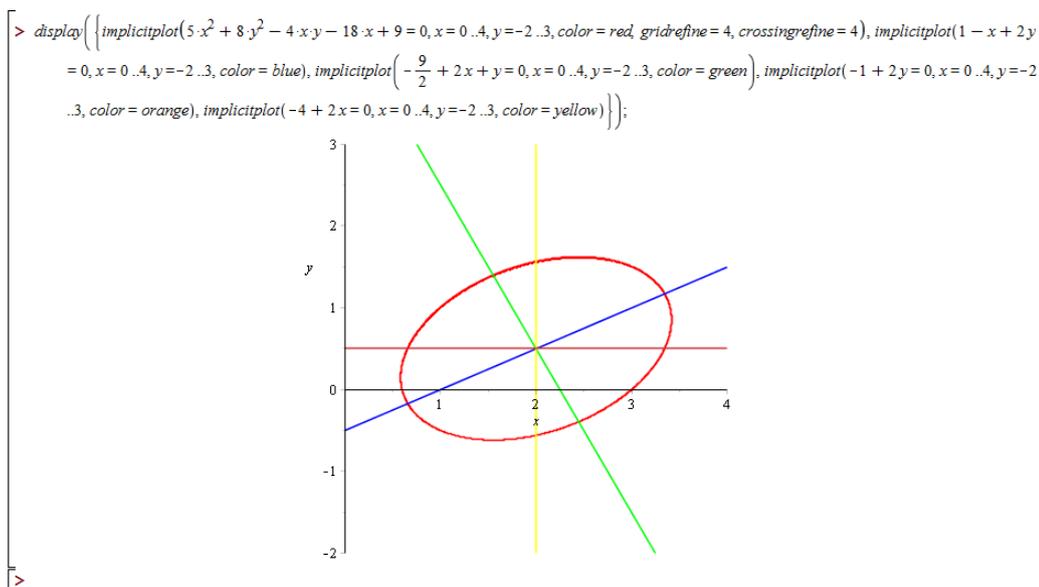


Figura 39 – Resolução do exemplo 1 - Parte VIII

B Exemplo

$$7x^2 - 48xy - 7y^2 - 30x - 40y + 75 = 0$$

A resolução se apresenta em nove partes (40), (41), (42), (43), (44), (45), (46), (47), (48)

```

> with(geometry):
> conic(c2, 7*x^2 - 48*x*y - 7*y^2 - 30*x - 40*y + 75 = 0, [x,y]):
> form(c2);
                                     hyperbola2d
(1)
> detail(c2);
name of the object      c2
form of the object      hyperbola2d
center                  [-3/5, -4/5]
foci                    [[-3/5 - 6*sqrt(2)/5, -4/5 - 8*sqrt(2)/5], [-3/5 + 6*sqrt(2)/5, -4/5 + 8*sqrt(2)/5]]
(2)
vertices                [[-9/5, -12/5], [3/5, 4/5]]
the asymptotes          [-x/5 + 7y/5 + 1 = 0, -7x/5 - y/5 - 1 = 0]
equation of the hyperbola 7*x^2 - 48*x*y - 7*y^2 - 30*x - 40*y + 75 = 0
> point(P, -3/5, -4/5);
                                     P
(3)
> line(r1, [point(A, -9/5, -12/5), point(B, 3/5, 4/5)], [x,y]);
                                     r1
(4)
> Equation(r1);
                                     -16/5*x + 12/5*y = 0
(5)

```

Figura 40 – Resolução do exemplo 2 - Parte I

```

> slope(r1);
                                     4
                                     3
(6)
> PerpendicularLine(r2, P, r1);
                                     r2
(7)
> slope(r2);
                                     -3
                                     4
(8)
> Equation(r2);
                                     4 + 12
                                     5 x + 16
                                     5 y = 0
(9)
> line(l1, [P, point(Q, -8/5, -4/5)], [x, y]);
                                     l1
(10)
> Equation(l1);
                                     -4
                                     5 y = 0
(11)
> slope(l1);
                                     0
(12)
> PerpendicularLine(l2, P, l1);
                                     l2
(13)
> Equation(l2);
                                     -3
                                     5 x = 0
(14)

```

Figura 41 – Resolução do exemplo 2 - Parte II

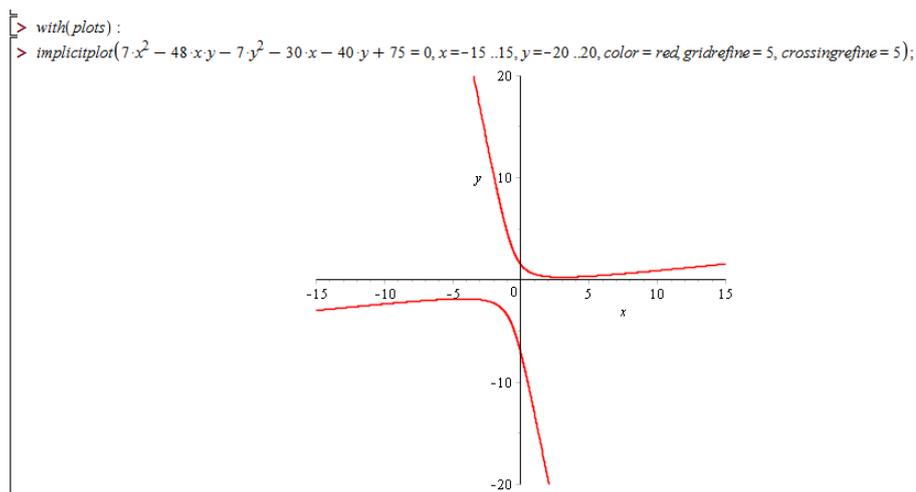


Figura 42 – Resolução do exemplo 2 - Parte III

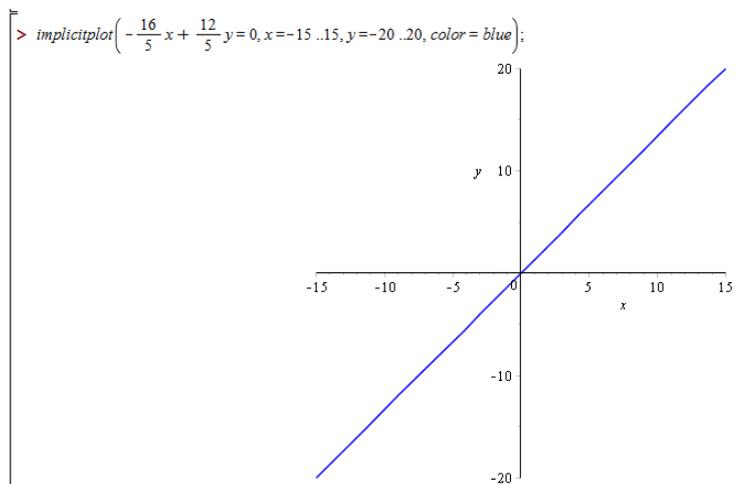


Figura 43 – Resolução do exemplo 2 - Parte IV

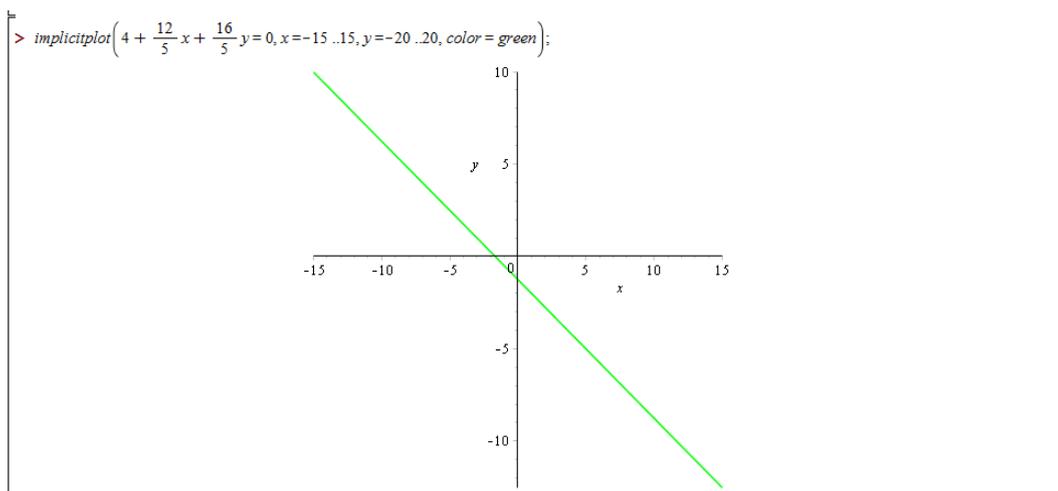


Figura 44 – Resolução do exemplo 2 - Parte V

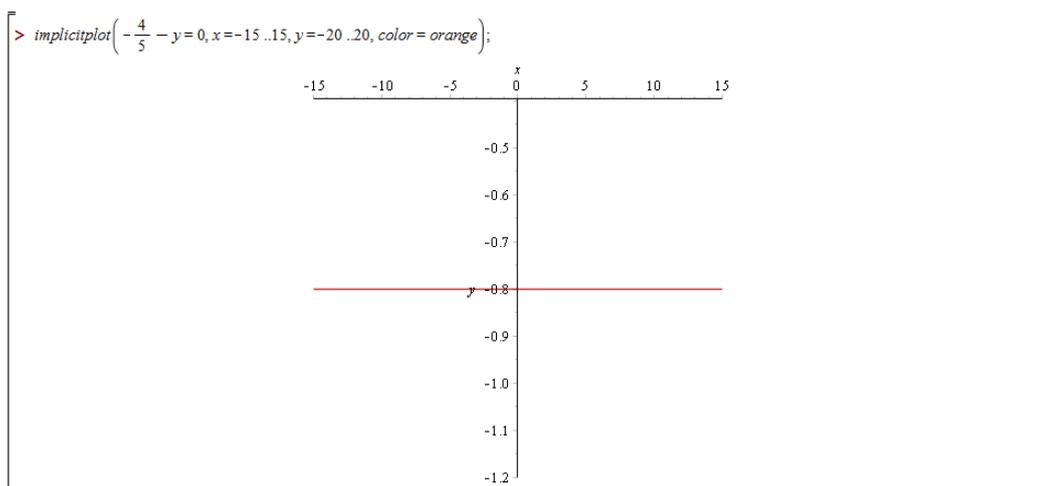


Figura 45 – Resolução do exemplo 2 - Parte VI

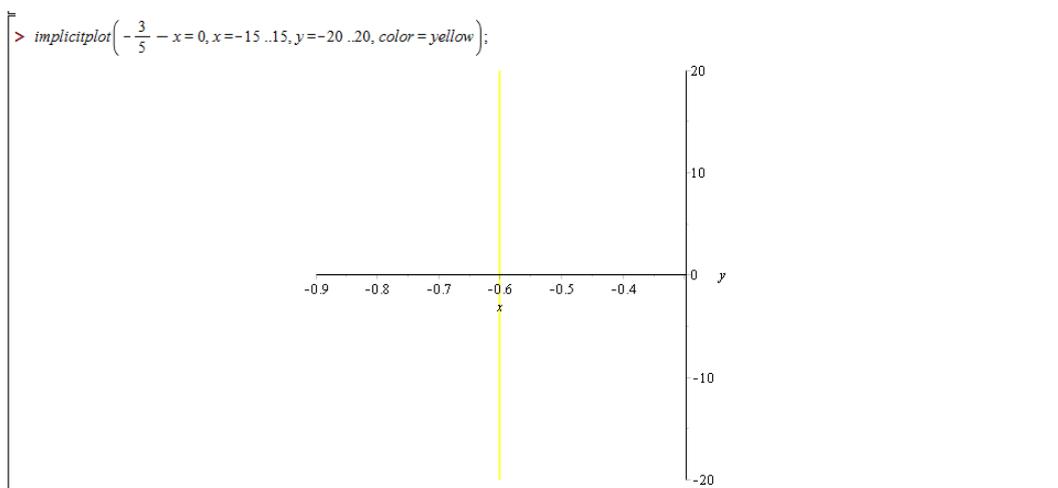


Figura 46 – Resolução do exemplo 2 - Parte VII

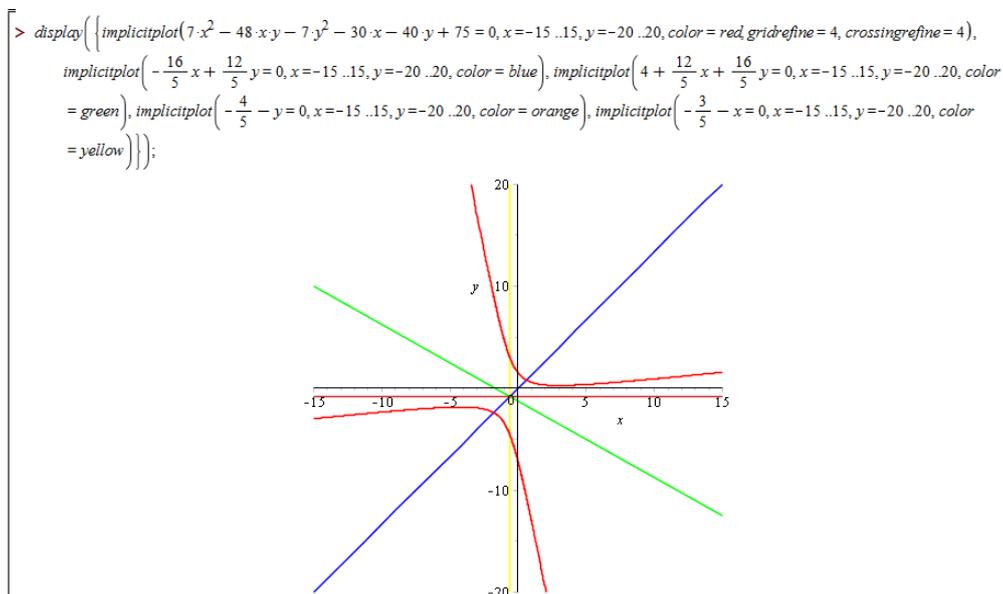


Figura 47 – Resolução do exemplo 2 - Parte VIII

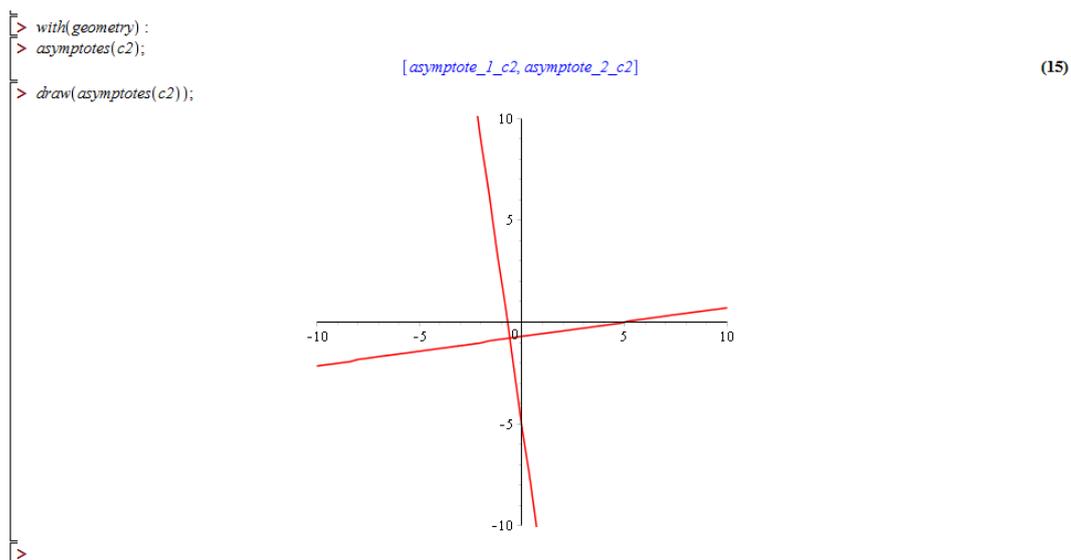


Figura 48 – Resolução do exemplo 2 - Parte IX

C Exemplo

$$x^2 + 2\sqrt{2}xy + 2y^2 + 6\sqrt{3}x + 3 = 0$$

A resolução se apresenta em oito partes (49), (50), (51), (52), (53), (54), (55), (56)

```

> with(geometry):
> conic(c3, x^2 + 2*sqrt(2)*x*y + 2*y^2 + 6*sqrt(3)*x + 3 = 0, [x, y]):
> form(c3);
                                     parabola2d
(1)
> detail(c3);
name of the object      c3
form of the object      parabola2d
vertex                  [-sqrt(3)/3, -sqrt(6)/3]
focus                  [-sqrt(3)/3 - sqrt(2)*sqrt(6)/6, -sqrt(6)/3 + sqrt(2)*sqrt(3)/6]
directrix               -x*sqrt(6)/3 + y*sqrt(3)/3 + sqrt(2)/2 = 0
equation of the parabola x^2 + 2*sqrt(2)*x*y + 2*y^2 + 6*sqrt(3)*x + 3 = 0
(2)
> point(P, -sqrt(3)/3, -sqrt(6)/3);
(3)
> line(r1, [point(A, -sqrt(3)/3, -sqrt(6)/3), point(B, -sqrt(3)/3 - sqrt(2)*sqrt(6)/6, -sqrt(6)/3 + sqrt(2)*sqrt(3)/6)], [x, y]);
(4)
> Equation(r1);
(5)
(6)
> slope(r1);
-1/2*sqrt(2)

```

Figura 49 – Resolução do exemplo 3 - Parte I

```

> PerpendicularLine(r2, P, r1);
r2
(7)
> slope(r2);
1/3*sqrt(3)*sqrt(6)
(8)
> Equation(r2);
-1/6*sqrt(2)*x*sqrt(6) + 1/6*sqrt(2)*y*sqrt(3) = 0
(9)
> line(l1, [P, point(Q, 3*sqrt(3)/3, -sqrt(6)/3)], [x, y]);
l1
(10)
> Equation(l1);
4/3*y*sqrt(3) + 4/9*sqrt(3)*sqrt(6) = 0
(11)
> slope(l1);
0
(12)
> PerpendicularLine(l2, P, l1);
l2
(13)
> Equation(l2);
4/3 + 4/3*sqrt(3)*x = 0
(14)

```

Figura 50 – Resolução do exemplo 3 - Parte II

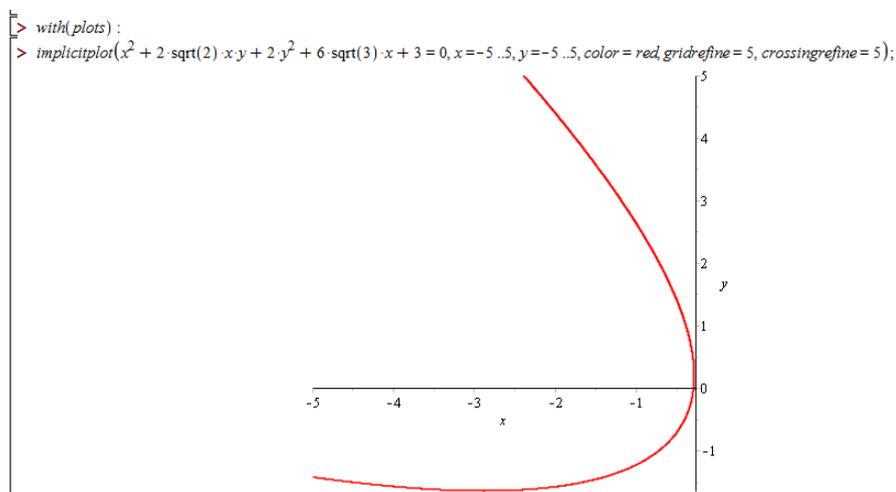


Figura 51 – Resolução do exemplo 3 - Parte III

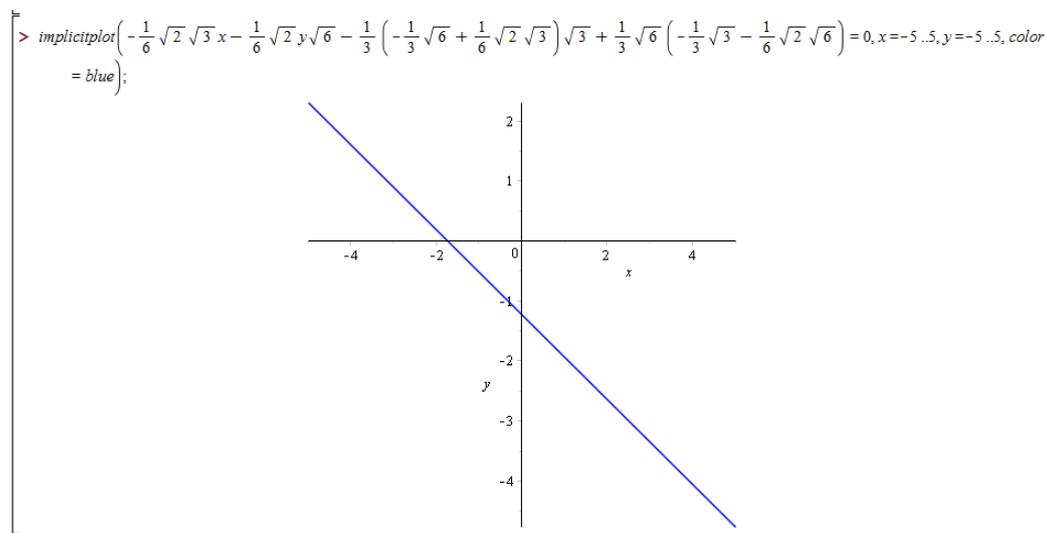


Figura 52 – Resolução do exemplo 3 - Parte IV

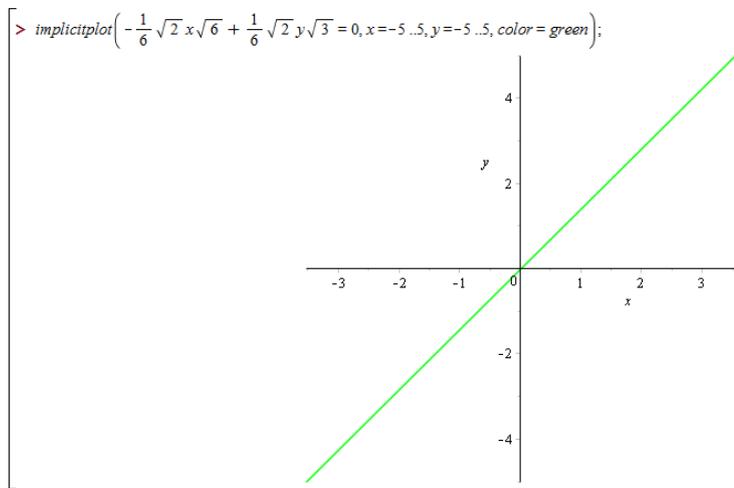
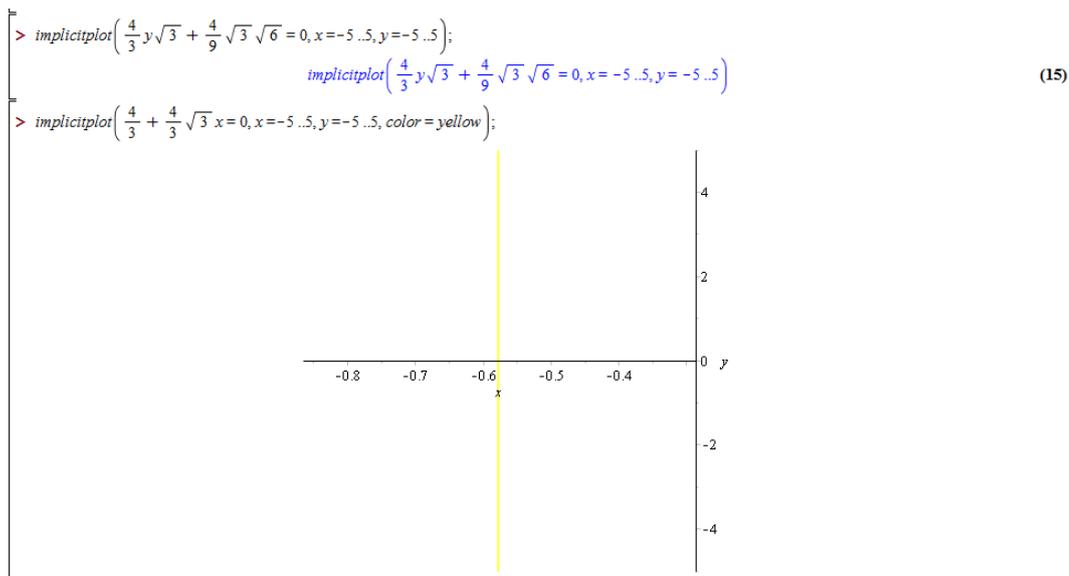


Figura 53 – Resolução do exemplo 3 - Parte V



(15)

Figura 54 – Resolução do exemplo 3 - Parte VI

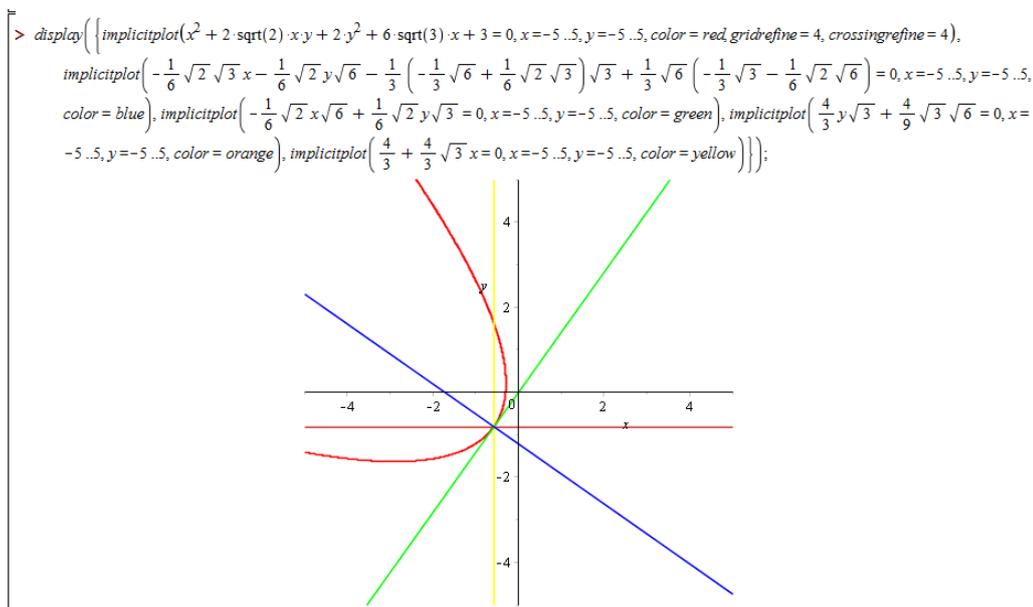


Figura 55 – Resolução do exemplo 3 - Parte VII

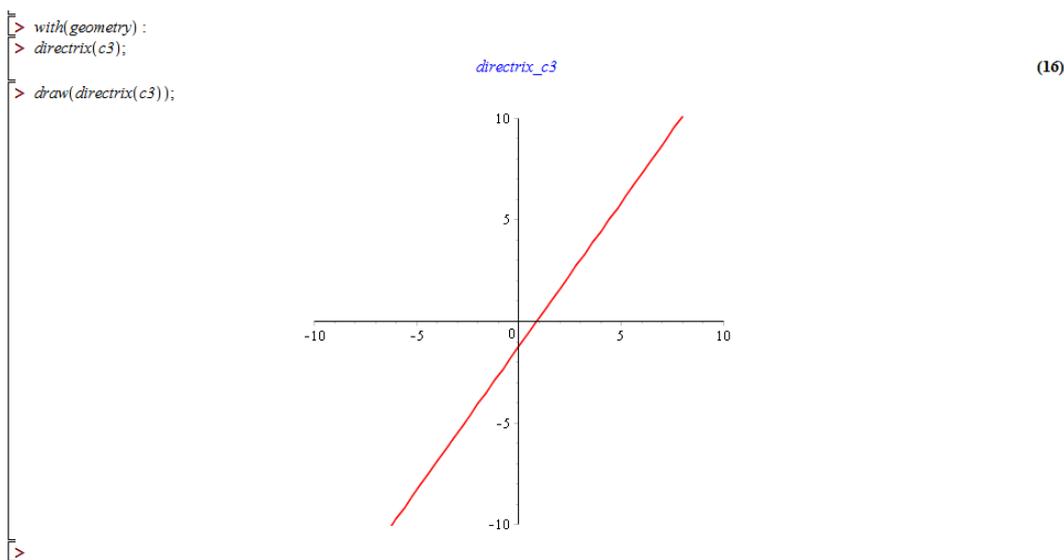


Figura 56 – Resolução do exemplo 3 - Parte VIII

D Exemplo

$$2x^2 - 3xy - 2y^2 + 5x + 5y - 3 = 0$$

A resolução se apresenta em duas partes (57), (58)

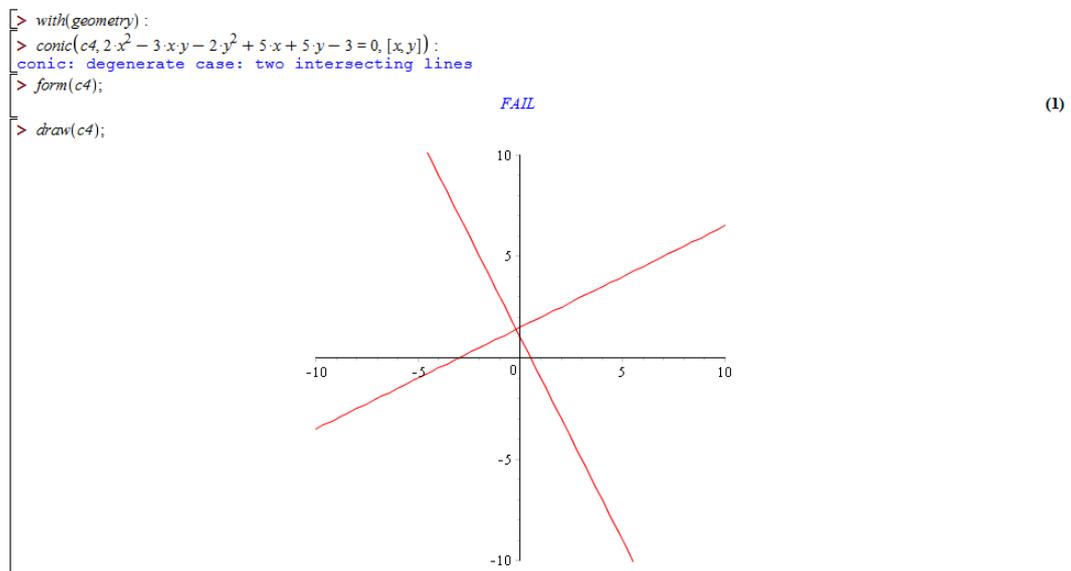


Figura 57 – Resolução do exemplo 4 - Parte I

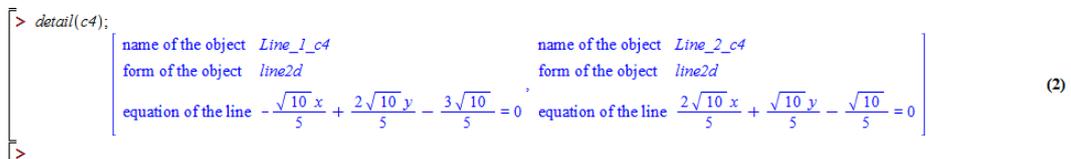


Figura 58 – Resolução do exemplo 4 - Parte II

E Exemplo

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x - 4y + 20 = 0$$

A resolução se apresenta em uma parte (59)

```
[> with(geometry):
> conic(c5, 3*x^2 - 2*x*y + 3*y^2 + 4*x - 4*y + 20 = 0, [x, y]):
conic: there is no locus
> form(c5);
                                     FAIL
> draw(c5);
Error, (in geometry:-draw) unknown geometric object c5
> detail(c5);
Error, (in geometry:-detail) unknown object: c5
>
```

(1)

Figura 59 – Resolução do exemplo 5 - Parte I

Referências

- [1] Lenimar Nunes de Andrade. *Introdução à Computação Algébrica com o MAPLE*. Sociedade Brasileira de Matemática, Coleção Textos Matemáticos, Rio de Janeiro -RJ, 2004.
- [2] Edson de Oliveira and Carlos Edmar Carvalho de Paula. Aplicações das cônicas na demanda e oferta de produtos. *Publicatio UEPG-Ciências Exatas e da Terra, Agrárias e Engenharias*, 9(03), 2009.
- [3] Nikolai EFIMOV. *Elementos de geometria analítica*. Livraria Cultura Brasileira Editora, Belo Horizonte (MG), 1972.
- [4] Gilberto Geraldo Garbi. *O romance das equações algébricas*. Editora Livraria da Física, 1997.
- [5] Jorge Joaquín Delgado Gómez, Katia Rosenvald Frensel, and Lhaylla dos Santos Crissaff. *Geometria Analítica*. Sociedade Brasileira de Matemática, Coleção Profmat; Rio de Janeiro - RJ, 2013.
- [6] Aref Neto Antar, José Luiz Pereira Sampaio, Nilton Lapa, and Sidney Luiz Cavalcante. *Noções de Matemática à Geometria Analítica*, volume 6. Editora Moderna, 1980.