



UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
PRÓ-REITORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA
MESTRADO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

VERALÚCIA SEVERINA DA SILVA

**PROPOSIÇÃO E EXPLORAÇÃO DE PROBLEMAS
NO COTIDIANO DA SALA DE AULA DE
MATEMÁTICA**

CAMPINA GRANDE – PB

2015

VERALÚCIA SEVERINA DA SILVA

**PROPOSIÇÃO E EXPLORAÇÃO DE NO COTIDIANO DA SALA
DE AULA DE MATEMÁTICA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, área de concentração em Educação Matemática, linha de pesquisa em metodologia e didática, como requisito para obtenção do Título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Campina Grande - PB

2015

É expressamente proibida a comercialização deste documento, tanto na forma impressa como eletrônica. Sua reprodução total ou parcial é permitida exclusivamente para fins acadêmicos e científicos, desde que na reprodução figure a identificação do autor, título, instituição e ano da dissertação.

S586p Silva, Veralúcia Severina da.
Proposição e exploração de problemas no cotidiano da sala de aula de matemática [manuscrito] / Veralúcia Severina da Silva. - 2015.
132 p. : il. color.

Digitado.
Dissertação (Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2015.
"Orientação: Prof. Dr. Silvanio de Andrade, Departamento de Matemática".

1. Problemas matemáticos. 2. Resolução de problemas. 3. Tecnologias na educação. 4. Software educacional. I. Título.
21. ed. CDD 372.7

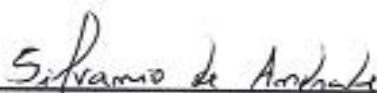
VERALÚCIA SEVERINA DA SILVA

**PROPOSIÇÃO E EXPLORAÇÃO DE PROBLEMAS NO
COTIDIANO DA SALA DE AULA DE MATEMÁTICA.**


Dissertação a ser apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual da Paraíba, área de concentração em Educação Matemática, linha de pesquisa em metodologia e didática, como requisito para obtenção do Título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Aprovada em: 20/04/2015.

Banca Examinadora:



Prof. Dr. Silvanio de Andrade
Orientador



Prof. Dra. Rosana Marques da Silva
Avaliador Externo



Prof. Dra. Cibelle de Fátima C. Assis
Avaliador Interno



Prof. Dr. José Lamartine da C. Barbosa
Avaliador Interno

*Aos meus familiares, em especial, ao meu
voinho José Paulino (in memorian), que é minha
inspiração familiar, em nome de toda a minha
família, que soube respeitar minha escolha e me
incentivou na realização desse sonho.*

*Ao meu “ANJO”, pelo incentivo, apoio,
confiança, amor, conselhos e compreensão que me
deu/dá forças para realizar este e outros
trabalhos. És minha vida!*

Vendéia S. da Silva.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, **a Deus** acima de tudo e de todos, por sempre estar presente, dando-me forças para vencer os desafios e me abençoando em cada fase da vida.

Em especial, ao professor **Silvanio de Andrade** meus sinceros agradecimentos, toda minha admiração e eterna gratidão, não apenas pela orientação, mas pela amizade, pela confiança, pela constante dedicação, paciência, incentivo e pelos ensinamentos dignos de um verdadeiro orientador.

Aos professores **Cibelle de Fátima C. Assis**, **Rosana Marques da Silva** e **José Lamartine da C. Barbosa**, por aceitarem o convite de compor a banca examinadora, enriquecendo o trabalho com as considerações pessoais.

Ao professor **Antonio Gilson Barbosa de Lima**, pela amizade, companheirismo, compreensão, apoio e atenção, fazendo-se presente em todos os momentos e pelos sábios conselhos.

Ao professor **Juscelino de Farias Maribondo**, pelos conselhos, confiança, amizade e atenção, fazendo-se presente em todos os momentos.

A todos os amigos e companheiros do IFPE (Instituto Federal de Pernambuco – campus Caruaru) pela amizade, companheirismo, apoio e atenção, em especial **George Alberto Gaudêncio de Melo** e **Niédson José da Silva**, pela amizade sincera, confiança, conselhos, companheirismo, ombro amigo, compreensão, apoio e atenção, fazendo-se presente em todos os momentos.

Aos professores do curso de pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, pela dedicação em transmitir seus conhecimentos dentro e fora da sala de aula.

Aos **alunos participantes da pesquisa Turma 2013.F**, pela disponibilidade demonstrada e pela participação/colaboração na pesquisa.

Aos que fazem parte do **Grupo de Pesquisa** pelo apoio, incentivo e opiniões nos debates relativos à pesquisa.

Aos amigos e companheiros de todos os momentos **Tiêgo Freitas, Miguel Brito, Sheila Valéria, Lucimara Freitas e Maurício Nascimento**, pelo apoio, incentivo, compreensão, tempo dedicado, companheirismo, participação na pesquisa e parceria nos projetos.

Enfim, a todos que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

Muito Obrigada!

RESUMO

SILVA, V. S. **PROPOSIÇÃO E EXPLORAÇÃO DE PROBLEMAS NO COTIDIANO DA SALA DE AULA DE MATEMÁTICA**. 2015. 132 p. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual da Paraíba – UEPB.

O processo ensino-aprendizagem de Matemática constitui uma preocupação constante de pesquisadores em Educação Matemática. Surge daí a necessidade de se desenvolverem metodologias alternativas que facilitem a aquisição dos conhecimentos matemáticos para os alunos. Não existe um único procedimento a ser considerado para o ensino de Matemática, pois são vários os recursos e propostas dos quais o educador pode se apropriar para sua prática, embasando sua experiência didática nos conhecimentos dos seus alunos para que a aprendizagem de fato ocorra. Uma das metodologias adotadas em tal processo é a de resolução de problemas. No ensino de matemática da escola, observa-se uma forte presença da resolução de problemas e uma preocupação para que os alunos sejam bons resolvedores de problemas matemáticos. Sendo assim, o objetivo deste trabalho é analisar e aperfeiçoar uma metodologia problematizadora baseada na resolução, exploração e proposição de problemas, associada ao uso de um software educacional para o desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas pelos alunos no estudo de funções. A pesquisa se desenvolveu numa turma de alunos repetentes do primeiro ano do ensino médio numa escola estadual de Pernambuco, visando a responder questões do tipo: Uma metodologia problematizadora para o ensino de matemática associada à utilização de um software educacional colabora no desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas? A problematização das situações-problema através da exploração e proposição influencia a compreensão do aluno? As descrições e análises das aulas apontam diferentes estratégias adotadas pelos alunos. Dentre os resultados detectados, podemos destacar o trabalho com diferentes formas de representações de uma mesma função e a criatividade apresentada na proposição dos problemas.

Palavras-chave: Proposição de problemas. Exploração de problemas. Resolução de problemas. Tecnologias. Software.

ABSTRACT

SILVA, V. S. PROPOSAL AND PROBLEMS EXPLORATION IN EVERYDAY MATH CLASSROOM. 2015. 132 p. Dissertation (Masrer's degree) – State University of Paraíba – UEPB.

Mathematics teaching learning process is a constant concern of researchers in mathematics education. This raises the need in order to develop alternative methodologies which facilitate mathematical knowledge acquisition for students. There is not a single procedure to be considered for Math teaching, as are several resources and proposals of which the educator can appropriate for his/her practice, basing his/her teaching experience in the students' skills, so that learning does occur. One of the methodologies used in this process is problem-solving. In basic Math education, there has been a strong presence of problem solving. There is a concern for students to be good Math problem solvers. Thus, this study aims to analyze and improve a questionable methodology based on problems solving, exploration and proposition associated with educational software use to develop solving strategies problems by students in the functions learning. Research develops a class of first-year repeating students from a public high school in Pernambuco (Brazil), in order to answer questions such as: A questionable methodology for Math teaching linked to educational software use collaborates for developing problem-solving strategies? Questioning problem situations through exploration and proposition influence on student's understanding? Lessons descriptions and analyzes indicate different strategies adopted by students. Among the results, we can highlight the work with different representations forms of the same function and creativity presented in problems proposal.

Keywords: Proposition problems. Problems exploration. Troubleshooting. Technologies. Software.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1:	Esquema básico para resolução de problemas	24
Figura 2:	Fluxograma estrutural dos recursos para resolução de problemas conforme o (NCTM)	25
Figura 3:	Modelo das cinco grandes ideias de função que foram idealizadas por Conney, Beckmann e Lloyd (2010), inspirado nos modelos das cinco representações de funções de Van de Walle	45
Figura 4:	Modelos de representações de funções	46
Figura 5:	Resposta do aluno 9 apresentada para o problema “d” do pré-questionário	57
Figura 6:	Resposta do aluno 20 apresentada para um dos problemas do pré-questionário	57
Figura 7:	Resolução do problema 1 mais o complemento formulado pela equipe 2 apresentada pela equipe 2	61
Figura 8:	Resolução do problema 1 mais o complemento formulado pela equipe 2 apresentada pela equipe 5	61
Figura 9:	Resolução do problema 1 mais o complemento formulado pela equipe 2 apresentada pela equipe 3	62
Figura 10:	Resolução do problema 1 mais o complemento formulado pela equipe 2 apresentada pela equipe 10	62
Figura 11:	Solução do problema apresentada usando o Wolfram	64
Figura 12:	Solução do problema apresentada usando o Wolfram (continuação da imagem anterior)	64
Figura 13:	Solução do problema apresentada usando o Wolfram (continuação da imagem anterior)	65
Figura 14:	Forma algébrica e gráfica do problema 2	72
Figura 15:	Forma algébrica e solução do problema 3 no programa Wolfram Alpha	73
Figura 16:	Solução do problema apresentada pelo software Wolfram Alpha para o problema 4	76
Figura 17:	Solução do problema apresentada pelo software Wolfram Alpha para o problema 5	77
Figura 18:	Representação gráfica da função quadrática pelo software Wolfram	82
Figura 19:	Determinação das raízes e do determinante da função usando o Wolfram	82
Figura 20:	Resolução da função quadrática usando o Wolfram (continuação da imagem anterior)	83
Figura 21:	Resolução da função quadrática usando o Wolfram (continuação da imagem anterior)	83
Figura 22:	Representação gráfica da função quadrática pelo software Wolfram	85
Figura 23:	Representação gráfica do problema 6 apresentado pelo software Wolfram	89
Figura 24:	Representação gráfica do problema 6 apresentado pelo software Wolfram	92
Figura 25:	Representação do problema 7 apresentado pelo software Wolfram	93

	para o dia 1	
Figura 26:	Representação do problema 7 apresentado pelo software Wolfram para o dia 5	93
Figura 27:	Solução apresentada pelos alunos da equipe 8	96
Figura 28:	Solução apresentada pelos alunos da equipe 10	97
Figura 29:	Representação gráfica do problema 8 apresentado pelo software Wolfram	99
Figura 30:	Representação gráfica do problema 10 apresentado pelo software Wolfram	105
Figura 31:	Resposta do problema 12 apresentada pela equipe 2	106
Figura 32:	Resposta do problema 12 apresentada pela equipe 1	107
Figura 33:	Representação gráfica do problema 13 apresentado pelo software Wolfram	109
Figura 34:	Resposta do problema 14 apresentada pela equipe 9	112
Figura 35:	Resposta da questão 1 apresentada pela equipe 4	113
Figura 36:	Resposta da questão 1 apresentada pela equipe 7	114
Figura 37:	Solução apresentada pela equipe 12 para o problema 1	116
Figura 38:	Resolução gráfica apresentada pela equipe 12 para o problema 1	117
Figura 39:	Solução apresentada pela equipe 09 para o problema 1	117
Figura 40:	Resolução gráfica apresentada pela equipe 09 para o problema 1	118

LISTA DE TABELAS

Tabela 1:	Pesquisa correlatas relativas a Resolução de Problemas	20
Tabela 2:	Distribuição dos conteúdos programáticos e carga horária	53

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

COMPESA	Companhia Pernambucana de Saneamento
EUA	Estados Unidos da América
IFPE	Instituto Federal de Pernambuco
INSS	Instituto Nacional de Seguro Social
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
NCTM	National Council of Teachers of Mathematics
R.P.	Resolução de Problemas
TIC's	Tecnologias da Informação e Comunicação
UNESP	Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
UEPB	Universidade Estadual da Paraíba

SUMÁRIO

1 –	UM CONVITE PARA AVENTURAR-SE	14
2 -	RECONHECENDO O CAMINHO	19
2.1	Resolução de problemas na Matemática	19
2.2	A tecnologia como suporte didático nas aulas de Matemática	27
2.3	A importância do uso das tecnologias em sala de aula	39
3 -	ENSINO DE FUNÇÃO: uma realidade em cena	41
4 -	RELATOS E ANÁLISE DA EXPERIÊNCIA	49
4.1	Unidade didática I: Conceituando funções	53
4.2	Unidade didática II: Funções polinomiais de 1º grau	69
4.3	Unidade didática III: Funções polinomiais do 2º grau	78
4.4	Unidade didática IV: Funções modulares	86
4.5	Unidade didática V: Funções exponenciais	101
4.6	Unidade didática VI: Funções logarítmicas	109
5 -	AVALIANDO O PROCESSO – EM BUSCA DE NOVOS CAMINHOS	122
	REFERÊNCIAS	125
	APÊNDICES	130
A -	Pré-questionário	130
B -	Desafio geral	131
C -	Questionário	132

1 – UM CONVITE PARA AVENTURAR-SE

Durante toda sua existência, o homem contemporâneo se depara com várias situações e/ou problemas a serem resolvidos. Por exemplo: o orçamento para a construção de uma casa, em que tem de verificar qual situação é mais vantajosa, se compra à vista ou a prazo; a compra de alimentos do mês; quanto de combustível precisa colocar no veículo para realizar determinado trajeto etc.

No Ensino de Matemática da escola, observa-se uma forte presença da resolução de problemas, havendo uma preocupação para que os alunos sejam bons resolvedores de problemas matemáticos. Entretanto, o que há é um fracasso generalizado dos alunos, atribuído a vários fatores; dentre eles, a falta de interesse dos alunos, a disparidade entre a matemática do cotidiano do aluno e a escolar, a falta de qualificação profissional, estrutura escolar precária etc.

Tais fatores ocorrem principalmente nas esferas públicas estaduais e municipais, em que, na maioria dos casos, a maneira como é abordado o conteúdo permite que as atividades trabalhadas pouco contribuam para o aprendizado do aluno.

Na prática escolar, de modo geral, o professor se baseia numa concepção tradicional de ensino, na qual a aprendizagem matemática é caracterizada pela repetição de um modelo, pela memorização de uma técnica ou mecanização dos cálculos. Por sua vez, ensina o conteúdo por meio de definições, regras e fórmulas e os problemas são apenas trabalhados ao final de tudo isso, como uma aplicação do conteúdo estudado, cuja prioridade são as repostas corretas. Cabe ao aluno apenas memorizar regras e fazer uma série de exercícios para fixar os modos de resolver as operações a ele solicitadas. Tais problemas, na maioria das vezes, são rotineiros, com foco na repetição de regras e fórmulas, deixando, portanto pouco espaço para o pensar.

A resolução de problemas, do ponto de vista curricular, é recente. Mas, problemas envolvendo matemática existem desde a Antiguidade.

Conforme Andrade (1998), os “Problemas de Matemática têm ocupado um lugar central no currículo escolar desde a antiguidade... entretanto, a importância dada à Resolução de Problemas é recente”. A exploração de problemas é mais recente ainda e visa a desenvolver a aprendizagem do aluno construindo seu próprio conhecimento, a compreensão dos conceitos e ideias que ocorrem de forma mais profunda. Quando, nesse processo, tem-se uma motivação que seja interessante e desafiadora para os

alunos, o aprendizado ocorrerá de forma mais intensa e duradoura. Nesse processo, a proposição de problemas torna-se uma ferramenta essencial para a aquisição e compreensão do conhecimento matemático.

Em pleno século XXI, com a tecnologia da informação disponível, a maioria das escolas e professores ainda resiste à utilização dos recursos tecnológicos em sala de aula, pois ainda prioriza os cálculos básico e manual (padrão contas numéricas e respostas diretas obtidas com a aplicação de uma operação matemática), deixando de lado a oportunidade que os alunos têm de avaliar e refletir o seu próprio fazer matemática, suas estratégias, seus procedimentos. Porém, não se sabe se o receio/rejeição dos professores é por insegurança na utilização dos recursos tecnológicos ou por não acreditar na aprendizagem através do seu uso.

Mediante uma democratização do acesso às Tecnologias da Informação, com a proposta federal de Inclusão Digital¹, que permite a inserção de todos na sociedade da informação, a utilização dos computadores, internet e alguns softwares específicos em determinadas áreas do conhecimento vem ganhando cada dia mais espaço e adeptos, tanto na prática escolar como na pesquisa educacional. No entanto, infelizmente, tais recursos ainda não atendem/abrangem todas as instituições de ensino.

A utilização desses novos recursos tecnológicos permite aos estudantes não apenas estudar temas/conteúdos de maneira inovadora e interessante, mas também explorar novas maneiras de resolvê-los.

Logo, com o avanço da ciência e da tecnologia, o processo de ensino-aprendizagem adquiriu novos recursos didáticos para o desenvolvimento e aprimoramento do conhecimento. O uso do computador em sala de aula tornou-se uma exigência da atualidade, pois, atualmente, a informática é uma realidade na vida social de praticamente todos os indivíduos. No entanto, busca-se analisar se a utilização de softwares educacionais como recurso para os cálculos no processo de resolução de problemas matemáticos em turmas do ensino médio influencia a compreensão dos alunos e se permite a eles mais tempo livre para analisar, interpretar e compreender as etapas utilizadas na resolução do problema.

A utilização destes softwares na sala de aula tem por propósito/objetivo auxiliar o professor no processo de ensino-aprendizagem, fazendo com que o mesmo tenha a seu dispor valiosos recursos para auxiliá-lo no ensino de sua disciplina, bem como aos

¹ Processo de democratização do acesso às tecnologias da Informação (BRASIL, 2011).

alunos para realizar os cálculos, permitindo autonomia e liberdade para analisar o procedimento adotado na busca pela resposta do problema proposto. No ensino de Matemática, por exemplo, alguns softwares permitem que visualizemos graficamente a situação, detalham o processo de resolução e associam-no a outros conteúdos já estudados ou ainda por estudar.

Tais fatos objetivam favorecer, cada vez mais, a compreensão do processo de construção do conhecimento e gera condições favoráveis para o seu desenvolvimento. O motivo que embasa essa pesquisa é que o processo de resolução de situações-problema é visto como um momento que envolve criação, tanto por parte do aluno como também do professor.

Logo, nessa pesquisa, pretendemos discutir, analisar e aperfeiçoar a metodologia da resolução, proposição e exploração de problemas, utilizando os softwares educacionais como recurso para o ensino e aprendizagem Matemática. A motivação é levantar informações do ponto de vista acadêmico que comprovem o avanço no processo ensino-aprendizagem de Matemática quando utilizados meios tecnológicos associados a situações-problema na abordagem dos conteúdos.

Os conhecimentos necessários para o desenvolvimento desta pesquisa baseiam-se na literatura especializada em Educação Matemática, em Didática de Ensino, em Metodologia de Ensino e em Tecnologias de Informação, juntamente com os dados confrontados com a pesquisa de campo, obtidos com alunos do primeiro ano do ensino médio de uma escola estadual do município de Timbaúba, em Pernambuco.

Trata-se de uma pesquisa descritiva procedente de um estudo de caso, com base numa pesquisa de campo de natureza qualitativa do tipo pesquisa pedagógica. Conforme Fishman e McCarthy (2000 apud LANKSHEAR; KNOBEL, 2008), “pesquisa pedagógica significa, no mínimo, professores pesquisando suas próprias salas de aula”. Portanto, pesquisar a sala de aula significa observar e descrever o cotidiano do aluno, ou seja, suas atividades cotidianas escolares.

Sendo assim,

Buscar entender, as atividades dos cotidianos escolares ou dos cotidianos comuns, exige que esteja disposta a ver além daquilo que outros já viram e muito mais: que seja capaz de mergulhar inteiramente em uma determinada realidade buscando referências de sons, sendo capaz de engolir sentindo a variedade de gostos, caminhar tocando coisas e pessoas e me deixando tocar por elas, cheirando os

odores que a realidade coloca a cada ponto do caminho diário (ALVES, 2008, p. 18-19).

Percebe-se que, quando o professor e/ou pesquisador está envolvido numa pesquisa, tudo isso causa inquietações, perguntas, desafios e o desejo de buscar soluções para o que o incomoda enquanto professor e/ou pesquisador. Nascimento (2014) diz que esse incômodo

muitas vezes nos impulsiona ao deserto, em busca do desconhecido. Momento em que precisamos nos distanciar um pouco, para que possamos escutar/ver/olhar o que acontece nas tramas que o cotidiano nos proporciona, fazendo com que nossa sensibilidade mergulhe nos dois mundos opostos nos quais nos prendemos nas tentações absolutistas que todo o momento vem nos seduzir e a fuga sem rumo em propostas didático-metodológicas que mais estimulam o tecnicismo do que um processo ensino aprendizagem reflexivo (NASCIMENTO, 2014, p. 54).

Mas, para isso, é preciso ter bem definido o problema da pesquisa. Uma vez identificado, podemos começar a tentar torná-lo o mais claro e específico possível (LANKSHEAR; KNOBEL, 2008, p. 09), ou seja, enfrentar o problema com o propósito de encontrar para ele uma solução ou uma resposta.

Seguindo essa metodologia, percebemos que os resultados apontam para os principais avanços no processo de ensino-aprendizagem utilizando proposição, exploração e resolução de situações-problema na abordagem do conteúdo de função, tendo como recurso para o processo de resolução o software educacional Wolfram Alpha.

Por fim, com a aplicação prática da pesquisa, buscamos responder a pergunta do tipo: Quanto e como uma metodologia problematizadora para o ensino de Matemática baseada na resolução, exploração e proposição de problemas associada à utilização de um software educacional colabora no desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas? Quanto e como a problematização das situações-problema através da exploração e proposição influencia a compreensão do aluno?

Temos por objetivo geral:

- Analisar e aperfeiçoar uma metodologia problematizadora baseada na resolução, exploração e proposição de problemas, associada ao uso de um software educacional para o desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas pelos alunos no estudo de funções.

Foram elencados os seguintes objetivos específicos:

- Incentivar os alunos a elaborar situações-problemas envolvendo funções de forma livre e também direcionada pelo professor.
- Explorar e resolver, junto com os alunos, situações-problema utilizando o software educacional Wolfram Alpha como recurso didático para a realização dos cálculos em sala de aula.

Baseado na proposta, o trabalho se apresenta estruturado em quatro capítulos, a saber:

O Capítulo I, além da Introdução, apresenta o problema da pesquisa, seus objetivos e a estrutura do trabalho e tem por objetivo esclarecer, em linhas gerais, as bases em que ele está sendo desenvolvido.

No Capítulo II, é apresentado um breve estudo sobre proposição, resolução, exploração de problemas e o uso de softwares educacionais na sala de aula, com o propósito de propor um convite para uma aventura no processo de ensino-aprendizagem de Matemática.

No Capítulo III, uma realidade em cena, apresenta-se uma breve justificativa sobre o conteúdo e a descrição da experiência prática.

No capítulo IV, apresentam-se as considerações finais e as perspectivas de continuidade do trabalho em sala de aula.

Por fim, apresentam-se os elementos pós-textuais: referências e anexos.

2 - RECONHECENDO O CAMINHO

2.1 - Resolução de problemas na Matemática

Não existe um procedimento único a ser considerado para o ensino de Matemática, pois são vários os recursos e propostas de que o educador pode se apropriar para sua prática, embasando na sua experiência didática e nos conhecimentos dos seus alunos, para que a aprendizagem de fato ocorra.

O ensino deve estar adaptado ao alcance e à capacidade intelectual do aluno. Sendo assim, é importante verificar sempre o nível de compreensão do aluno, partir do conhecimento já adquirido por ele; respeitar o seu ritmo de aprendizagem, considerar todas as respostas emitidas e analisar os procedimentos adotados na obtenção das respostas. Assim, poder-se-á compreender como o raciocínio está sendo elaborado.

Ensinar não é algo fácil. Porém, a motivação é importante para que a aprendizagem aconteça de fato. Para tanto, dentre vários outros, existem alguns recursos que facilitam o processo de aprendizagem. Para aprender, é preciso ter curiosidade, vontade de saber e ser capaz de envolver-se numa experiência. A prática diária permite-nos dizer que fica evidente que, quando o aluno sente-se seguro, confiante e motivado diante da situação-problema proposta, ele se sente capaz de

- desenvolver confiança e convicção em suas habilidades;
- estar disposto a correr riscos e perseverar;
- gostar de fazer Matemática (VAN DE WALLE, 2009. p. 78).

Fazer Matemática requer do professor algumas habilidades para que ele consiga despertar nos alunos o interesse pela disciplina e principalmente pelos conteúdos. Tais habilidades levam o professor a vários questionamentos, indagações e inquietações de como ocorre tudo isso e de como realizá-lo de forma prazerosa, instigante e compreensível para todos os envolvidos nesse processo.

Embora muitos professores sintam-se capazes e preparados ao elaborar um “excelente” plano de aula, pô-lo em prática não é tão fácil assim. Apenas o desenvolvimento do plano por si só não garante um bom desempenho da sua função nem o alcance dos seus objetivos. Dentre as várias estratégias de ensino que podem ser

utilizadas, uma delas, bastante recorrente para colaborar nesse processo, é a resolução de problemas. No entanto, esta estratégia nem sempre é aplicada na sua forma mais adequada, buscando-se questionar os alunos e induzi-los a sentirem-se motivados na busca pela resposta.

Quando se visa a desenvolver a aprendizagem do aluno, de modo que ele também colabore nesse processo, construindo seu próprio conhecimento, a compreensão dos conceitos e significados ocorre de forma mais rápida. Ademais, quando nesse processo há uma motivação que seja interessante e desafiadora para os aprendizes, esse processo ocorre de forma mais rápida ainda.

Para verificarmos essa premissa, realizamos um levantamento sobre as pesquisas anteriormente empreendidas, relacionadas à resolução de problemas nos mais diversificados conteúdos estudados. Detemo-nos a verificar como essa metodologia resolução de problemas foi aplicada com o propósito de obter embasamento para nossa pesquisa.

Tabela 1 – Pesquisas correlatas relativas à resolução de problemas.

AUTOR - TÍTULO	INTITUIÇÃO - ANO	OBJETIVO	PERSPECTIVAS EM R.P.	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA
Mariângela PEREIRA – O ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas no 3º ciclo do ensino fundamental	UNESP - 2004	Verificar qual é a contribuição da metodologia de ensino aprendizagem de matemática através da resolução de problemas geradores de novas ideias matemáticas.	Ensino de matemática <i>através</i> da resolução de problemas.	Romberg (1992); Onuchic (1999); Mendonça (1999); Stávale (1956); Sangiorgi (1964); Azevedo (2002); Torquato (2002); Pereira (2002); Standards (2000); Viktor (2002); Van de Walle (2001); Polya (1994); Pironel (2002); Sierpinska (1994); Dante (1999).
Adeilson PEREIRA DA SILVA – Ensino-aprendizagem de análise combinatória através da resolução de problemas: um olhar para a sala de aula	UEPB - 2013	Traçar um mapeamento do ensino-aprendizagem de análise combinatória, através da prática em sala de aula, utilizando como metodologia a resolução e exploração de problemas, fruto	Ensino-aprendizagem de análise combinatória <i>através</i> da resolução e exploração.	Gardner (1991); Brasil (2006); Ludke (2009).

		de um olhar reflexivo para a nossa própria prática como professor – pesquisador.		
Jefferson Dagmar Pessoa BRANDÃO – Ensino-aprendizagem de função através da resolução de problemas e representações múltiplas	UEPB - 2014	Analisar as dificuldades e possibilidades da metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática através de resolução de problemas, aliada ao trabalho com as representações múltiplas, visando à formação do conceito de funções em sala de aula.	Ensino-aprendizagem de funções <i>através</i> da resolução de problemas.	Ardenghi (2008); Oliveira (1997); Pelho (2003); Rossini (2006); Zatti (2010); Silva (2013).
Ledevande Martins da SILVA – Compreensão de ideias essenciais ao ensino-aprendizagem de funções via resolução, proposição e exploração de problemas	UEPB - 2013	Investigar as compreensões de ideias essenciais de funções por alunos e analisar as contribuições da metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática via resolução, proposição e exploração de problemas.	Ensino-aprendizagem de funções <i>via</i> resolução, proposição e exploração de problemas.	Markovits, Eylon e Buckheimer (1995); Cooney et al. (2002); Sessa (2009); Usiskin (1995); Caraça (1951, 1984); Fonseca (2004); Cooney, Beckemann. Lloyd (2010); Pelho (2003); Dominoni (2005); Rossini (2006); Bonetto (2008); Botta (2010); Fonseca (2011).
Norma Suely Gomes ALLEVATO – Associando o computador à resolução de problemas fechados: análise de uma experiência	UNESP - 2005	Analisar de que forma os alunos relacionam o que fazem na sala de aula, quando utilizam lápis e papel, com o que fazem no laboratório de informática quando fechados sobre funções.	Ensino de Matemática <i>através</i> da resolução de problemas utilizando os computadores.	Ponte (2000); Shimada (1997); Contreras e Carrilho (1998); Hashimoto e Becker (1999); Dante (2000); Van de Walle (2001); Pehkonen (2003); Hchoroeder e Lester (1989); Campbell (1996); Onuchic (1999); Diezmann, Watters, English (2001); Bizelli e Borba (1999); Pierce e Stacey (2002); Pollak (1986); Waits e Demana (2000);

				Borba e Penteadó (2001); Benedetti (2003); Machado (2000); Villarreal (1999); Willoughby (2000); Ponte (1994); Polya (1980); Stanic, Kilpatrick (1989).
Maria Aparecida Vilela Mendonça Pinto COELHO – A resolução de problemas: da dimensão técnica a uma dimensão problematizadora	UNICAMP - 2005	Compreender as significações sobre a resolução de problemas como prática pedagógica, produzidas pelos professores nas reuniões da área de Matemática. Estudar as condições de produção dessas significações quando elas extrapolam o próprio problema e dão origem a significações em dimensões mais amplas.	Problematização do ensino <i>sobre</i> a resolução de problemas como prática pedagógica.	Baktin (1988, 2000, 2004); González (2000); Fiorentini (1994); Onuchic (1999); Charles e Lester (1982); Borase (1986); Smolka (2000); Miorin (1998); Dewey (2002); Polya (1978, 1981); Kline (1976); Becker (2002); Vygotsky (2002); Pinto (2001); Poppovic (1981); Carraher (1995); D'Ambrosio (2001); Gerdes (1992); Freire (2002); Shoenfeld (1987); Silver (1987); Wheeler (1981); Kilpatrick (1987); Norman (1981); Lester e Garofalo (1985); Mendonça (1993); Diniz (2001); Vergnoud (1988, 1990); Franchi (1999); Caraça (1989); Moisés (1999); Lakatos (1978); Carvalho (1994); Pino (2000); Rossetti, Amorim, Silva e Carvalho (2004).
Celio SORMANI JUNIOR – Um estudo exploratório sobre o uso da informática na resolução de problemas	UNESP - 2006	Obter informações sobre como o uso de recursos tecnológicos poderia influenciar este processo e fornecer	Ensino <i>sobre</i> a resolução de problemas.	Klausmeier e Goodwin (1977); Sternber (2000); Ausubel (1980).

trigonométricos		subsídios para a elaboração de estratégias educacionais que contemplassem o uso de tecnologia.		
-----------------	--	--	--	--

Fonte: Tabela elaborada pela pesquisadora.

Diante da pesquisa, percebemos que é comum encontrar, na literatura, relatos dizendo que, na Matemática, a aprendizagem torna-se mais significativa quando trabalhada e discutida através de uma situação de resolução de problemas. Com a constante busca em analisar a importância da resolução de problemas como método de ensino e suas contribuições para a aprendizagem, o processo de ensino-aprendizagem passa a ser um paradigma que coloca o aluno como foco central dessa interação, como ser participante, tornando-o capaz de construir seu conhecimento a partir da solução de problemas.

Para alguns pesquisadores e/ou professores, a resolução de problemas consiste no uso de métodos, de maneira ordenada, para encontrar soluções de problemas específicos. Contudo, não se trata apenas de buscar a solução do problema, mas entender a finalidade e utilidade da situação questionada, possibilitando questionamentos diante da situação e o desenvolvimento do raciocínio mediante a tomada das decisões.

Schroeder e Lester (1989) abordam três maneiras de trabalhar com a metodologia Resolução de Problemas. São elas: [1] ensino sobre a resolução de problemas, [2] ensino para a resolução de problemas e [3] ensino via resolução de problemas.

[1] Essa abordagem faz alusão ao trabalho de Polya dando ênfase às quatro fases de resolução de problema. [...].

[2] Essa abordagem faz alusão à aplicação do que se aprender na resolução de problemas rotineiros [...].

[3] Essa abordagem faz alusão e prioriza a valorização dos problemas, não só como um propósito para a aprendizagem da matemática, mas também como o principal meio para realizá-lo (SCHROEDER; LESTER, 1989, p. 32-33).

Como procedimento para nossa pesquisa, escolhemos a terceira abordagem para nosso trabalho em sala de aula.

Tal processo consiste em uma atitude de construção do conhecimento de forma criativa, produtiva, proveitosa e prazerosa, em que todas as etapas utilizadas são fundamentais e não apenas o resultado final obtido.

Vários estudos têm mostrado que o uso de resolução de problemas favorece esse processo. Nessa perspectiva, segundo Hiebert et al (1996 apud VAN DE WALLE, 2009, p. 57),

permitir que o sujeito seja problematizador significa possibilitar que os estudantes desejem saber por que as coisas são como são, questionar, procurar soluções e solucionar incongruências. Significa que tanto o currículo quanto o ensino devem começar propondo problemas, dilemas e questões – desafios – para os estudantes.

Sendo assim, dentre outros aspectos, os alunos devem identificar, a partir da situação problema dada, quais são os objetivos de estudo, os dados fornecidos, além de ter que elaborar um plano para obter a resposta, executar uma ação e validar sua resposta para a solução da situação-problema em questão, como ilustra o esquema apresentado na Figura 1.

Figura 1: Esquema básico para resolução de problemas.



Fonte: Disponível em: <<http://www.google.com.br/search?q=resolu%C3%...>>. Acesso em: 07 jul. 2013.

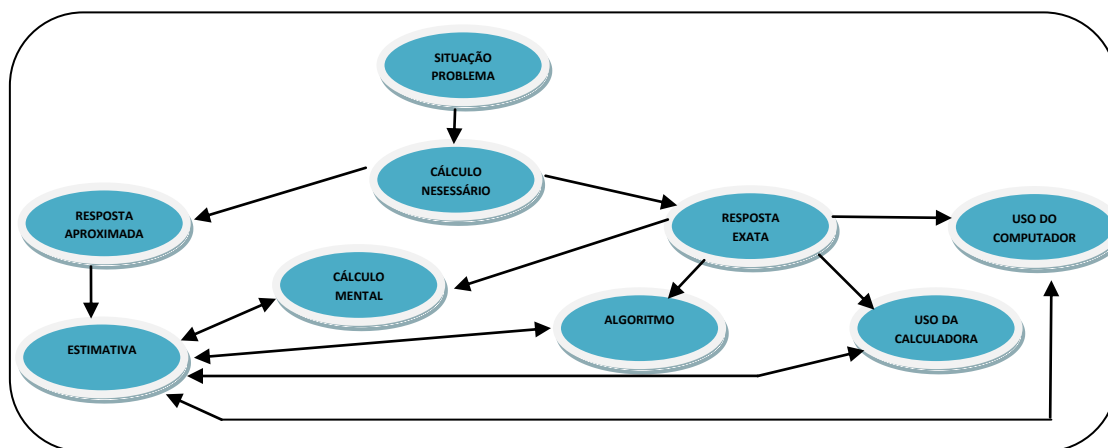
Fazem-se necessários uma descrição clara do problema, o estabelecimento das metas esperadas, o controle e ajuste do tempo (quando for o caso) e a identificação da importância ou significância da tarefa em relação aos objetivos que se pretende alcançar. Sendo assim, percebe-se a existência de uma maior possibilidade do problema a ser resolvido, permitindo que os alunos reconheçam os aspectos da situação, analisem as principais causas, eliminando as desnecessárias, executem as ações cabíveis e, enfim, que ocorra o tão esperado processo de aprendizagem.

Portanto, quando se buscar ensinar pela resolução de problemas o processo de assimilação torna-se mais fácil, ágil e prático. De acordo com Van de Walle (2009), isto permite que os alunos aprendam a monitorar e a regular os seus próprios comportamentos diante de tais situações e apresentem melhorias na resolução.

Com o avanço da ciência e da tecnologia o processo ensino aprendizagem adquiriu novos recursos didáticos para o desenvolvimento e aprimoramento do conhecimento. No entanto, por incentivo e interesse do sistema as tecnologias foram incorporadas e rapidamente se tornaram parte da nova cultura, porém como auxílio ou mesmo para promover a aprendizagem, estão sujeitos à lacuna cultural e á resistência por parte das comunidades de ensino (ALLEVATO, 2005). Uma característica comum da atual sociedade é a rapidez na mudança das informações e a frequência com que ficam desatualizadas.

Já em 1996, o NCTM (*National Council of Teachers of Mathematics*), em um dos seus documentos, destaca que, diante de um problema, podemos usar vários recursos, além do tradicional processo de lápis e papel, como cálculo necessário, resposta aproximada, resposta exata, algoritmo, cálculo mental, estimativa, uso da calculadora, uso de computadores, entre outros. Deve-se recorrer àquele recurso ou conjunto deles na sequência que for mais adequada para cada situação-problema, conforme a Figura 2.

Figura 2 – Fluxograma estrutural dos recursos para resolução de problemas conforme o NCTM.



Fonte: NCTM (1992).

Vários estudos já foram realizados no intuito de verificar as vantagens, desvantagens e implicações do uso dos programas computacionais em sala de aula como recurso didático. Entre eles, destacam-se o de Allevato (2005), Sormani Junior

(2006) e Oliveira (2007). Em suma, tais estudos mostraram que ocorreu uma mudança no comportamento dos estudantes quando usavam tecnologia em relação àquilo a que não tiveram contato, pois a tecnologia transforma a maneira de pensar do aluno quando bem direcionada. A construção do conhecimento se faz, agora, com a forte presença de processos como, por exemplo, a simulação, experimentação e visualização (ALLEVATO, 2005).

O autor assevera ainda que

tais pesquisas trazem evidências de que a utilização dos computadores nos ambientes de ensino de Matemática conduz os estudantes a modos de pensar e de construir conhecimento que são típicos do ambiente informático e, por vezes, favoráveis à aprendizagem de conteúdos ou à compreensão de conceitos matemáticos (ALLEVATO, 2005, p. 73).

Nessa perspectiva, o uso dos programas computacionais, com o passar do tempo, vem modificando a vida e o aprendizado dos alunos. Tal fator influencia diretamente o saber e o fazer matemático. Fazer cálculo, com lápis e papel, não é mais tão importante. As calculadoras e os computadores desempenham a tarefa com muito mais eficácia, mas ter uma compreensão crítica daquilo que se está fazendo é muito importante (ANDRADE, 1998). Isto porque se supõe que esses recursos permitem aos alunos uma maior concentração sobre o que devem realizar, para que argumentem e resolvam problemas de uma maneira que seria quase impossível sem essas ferramentas, desde que a situação-problema seja bem elaborada e que ocorra em paralelo à exploração, não desviando ou excluindo nenhuma das etapas.

Sendo assim, a função dos programas computacionais utilizados nas aulas é auxiliar o desenvolvimento dos cálculos na resolução do problema, permitindo um maior tempo livre ao aluno para compreender, repensar, elaborar novas estratégias de resolução e analisar o processo. Além disso, exerce a função mediadora, de um processo de ensino-aprendizagem que valoriza a compreensão crítica e o fazer matemático como um todo (ANDRADE, 1998). Logo, para

utilizar eficientemente o computador para aprender (ou ensinar) Matemática, os alunos (ou o professor) precisam ter conhecimento do que estão fazendo ou pretendem que o computador faça. Eles precisam saber Matemática embora, muitas vezes, uma Matemática diferente da que era necessária quando da ausência dos computadores nos ambientes de ensino (ALLEVATO, 2005, p. 79).

No entanto, para muitos professores, ainda persiste a dúvida se tais processos geram compreensão/aprendizado ou se apenas tratam-se de uma simples motivação. Nessa perspectiva, com o uso de programas computacionais, parece evidente que o aluno se sentirá mais seguro, confiante e motivado diante da situação e lhe sobrarão mais tempo livre para analisar o processo de resolução e exploração.

Sendo assim, a resolução e a exploração de problemas admitem várias perspectivas. Uma delas é o constante processo de ação/reflexão. Silva (2013) cita três modalidades encontradas durante a exploração de problemas:

- 1 – **Ir além do problema** – no momento em que o professor faz uso do problema, mas extrapola os limites curriculares dele;
- 2 – **Construindo novos problemas** – na exploração de uma determinada situação problema o professor lança mão de novas situações derivadas da primeira;
- 3 – **Buscando padrões e mediando a aprendizagem** – ao trazer situações mediadoras para situações mais complexas, intensificando a aprendizagem do aluno (SILVA, 2013).

Percebe-se, com isso, que, quando se ensina através da resolução de problemas, o foco não é apenas a resposta, e sim o caminho/processo percorrido até se chegar à resposta. No entanto, outro elemento passa a ser fundamental e indispensável nesse processo, como já mencionamos: a fala do aluno, os seus argumentos de como chegou à resposta, seja de forma oral, escrita ou em ambas as formas, pois suas estratégias também são importantes no processo e precisam ser destacadas e discutidas. Tais características serão atendidas com o uso dos softwares no processo de ensino-aprendizagem de forma efetiva.

2.2 A tecnologia como suporte didático nas aulas de Matemática

No dia-a-dia, o ser humano se depara com várias situações a serem resolvidas. Entre elas, pode-se citar: fazer as compras do mês; verificar qual situação é mais vantajosa, se a compra à vista ou a prazo; quanto de combustível é preciso para o veículo realizar determinada trajetória; a escala dos horários para tomar um medicamento etc. Isto mostra que a resolução de problemas não é um fato exclusivo da escola, menos ainda do ensino de Matemática. Nessa perspectiva, de acordo com

Boavida (1993), “os conhecimentos repassados aos alunos na escola de pouco lhes servirão no futuro enquanto profissionais e cidadãos”.

Thomaz Neto (2003), enfatiza que

o que se evidencia é que este ensino tem priorizado a mera utilização de fórmulas, equações e algoritmos como única estratégia de resolução e isso pouco tem contribuído no sentido de promover a superação das dificuldades apresentadas pelos estudantes.

Percebe-se que, nesse tipo de processo de ensino, é comum dar-se mais relevância aos aspectos numéricos e algébricos, impossibilitando os alunos possuidores de outras habilidades de obter sucesso escolar e impedindo o seu desenvolvimento de maneira equilibrada. Vale salientar que isso só acontece quando se trabalha de maneira distanciada da realidade do aluno.

Van de Walle (2009, p. 32) afirma que

a Matemática é a ciência de padrões e ordem... Ela começa com situações baseadas em problemas. [...] ela é uma ciência de coisas que possuem um padrão de regularidade e de ordem lógica. Descobrir e explorar esta regularidade ou ordem e então, dar sentido a esta ordem é do que realmente se trata o fazer Matemática.

Complementando Boavida (1993), Domite (2000, p. 25) defende que

a tarefa dos professores e professoras, por sua vez, tem sido a de preparar um ambiente que pode oferecer ao grupo de educandos condições para questionar situações, em especial, aquelas de fora do terreno da matemática e incentivar a formulação de tais situações enquanto problemas (matemáticos).

Boavida (1993) também salienta que

a resolução de problemas é considerada como um método de investigação e aplicação no contexto do qual os alunos têm oportunidades de investigar e compreender temas matemáticos, formular problemas a partir de situações internas e externas à matemática, desenvolver uma diversidade de estratégias de resolução, analisar e questionar resultados encontrados e adquirir confiança na utilização significativa da matemática (BOAVIDA, 1993).

De acordo com Van de Walle (2009) e Boavida (1993), isto permite que os alunos aprendam a monitorar e a regular os seus próprios comportamentos, decidindo o que é problemático diante de tais situações e apresentando melhorias na resolução.

Além disso, fica evidente que, quando o aluno sente-se seguro, confiante e motivado diante da situação, segundo Van de Walle (2009), ele se sente capaz de “desenvolver confiança e convicção em suas habilidades, estar disposto a correr riscos, perseverar e vai gostar de fazer Matemática”.

Sendo assim,

na exploração de problemas procuramos resoluções alternativas, além da tradicional. Portanto, para formarmos exploradores de problemas e não somente solucionadores de problemas, devemos propor que o mesmo problema seja analisado sob diferentes aspectos tanto do ponto de vista matemático como fora dele. É claro que isso nem sempre será possível com qualquer problema. Por isso é que, nas situações-problema propostas, ora a resolução de problemas encerra o processo de investigação matemática e ora o problema pode ser resolvido por vários caminhos e estratégias diversificadas. Além disso, depois que o aluno compreender realmente o problema explorado no desenvolvimento do trabalho em grupos, ele deve ser incentivado a explorar extensões – problemas ampliados e variações do mesmo problema, por exemplo, a partir de um tema político-social, ou outro contexto que possa fazer sentido (SILVA, 2013, p. 104).

Visado a melhorias, Thomaz Neto (2003) orienta que, em prol de se empreender um ensino através da resolução de problema bem sucedido, é preciso que haja

uma interação entre o sujeito que os aborda e as informações veiculadas no contexto verbal que são apresentadas em linguagem materna. Estas informações necessitam ser decodificadas em uma outra forma de linguagem, ou seja, a linguagem matemática. Exige, também, todo um arcabouço de conhecimentos já disponíveis na estrutura cognitiva do sujeito cognoscente, a fim de que ele possa lançar mão sempre que fora necessário.

Para que o aluno possa apresentar de forma apropriada seus argumentos e raciocínios para chegar à resposta do problema, segundo Van de Walle (2009), “um elemento chave para o ensino de problemas é a seleção de problemas ou tarefas apropriadas”. Ele ainda acrescenta que

uma tarefa é eficaz quando ajuda os alunos a aprender as ideias que você quer que eles aprendam. Deve ser a matemática na tarefa que a torna problemática para os estudantes de modo que as ideias matemáticas sejam as suas preocupações básicas. Então, o primeiro e mais importante a considerar ao selecionar qualquer tarefa para sua turma deve ser a matemática (VAN DE WALLE, 2009, p. 68).

Uma tarefa passa a ser interessante e importante quando se busca desenvolver nos alunos a capacidade de aprender a aprender com vistas a implementar melhorias no aprendizado e generalizações. Sendo assim, conforme Soares e Pinto (s/d), quando se trabalha com resolução de situações-problema, espera-se desenvolver

uma sociedade mais justa, capaz de intervir no desenvolvimento da humanidade crítica e criativamente, buscando uma melhoria na qualidade de vida do cidadão... É preciso fazer com que os alunos tornem-se pessoas capazes de enfrentar situações diferentes dentro de contextos diversificados, que façam com que eles busquem aprender novos conhecimentos e habilidades. Só assim estarão melhores preparados para adaptar-se às mudanças culturais, tecnológicas e profissionais do novo milênio (SOARES; PINTO, s/d, p. 01).

No entanto, para que tudo isso seja possível, é preciso escolher bem as questões a serem trabalhadas, ou seja, em quais situações o aluno vai se envolver para que ele se torne um verdadeiro cidadão atuante socialmente.

Conforme Smole, Diniz e Cândido (2000), é preciso envolver os alunos em situações interessantes e desafiadoras que os levem a investigar e a questionar, permitindo-lhes vivenciar experiências intensas, prazerosas e compreensíveis. Este processo, conforme Andrade (1998), é favorável “quando o aluno busca compreender o problema que lhe é dado e procura representá-lo em um código possível de operacionalização, está fazendo, quase que simultaneamente, um trabalho de descodificação e de codificação”. Smole, Diniz e Cândido (2000), acrescentam ainda que

essas situações problema podem ser atividades planejadas, jogos, busca e seleção de informações, resolução de problemas não convencionais e, até mesmo, convencionais, desde que permitam o desafio, ou seja, desencadeiem na criança a necessidade de buscar uma solução com os recursos de que ela dispõe no momento (SMOLE; DINIZ; CÂNDIDO, 2000).

Caso essas situações envolvam fatos relacionados ao cotidiano do aluno, esse processo pode se tornar mais fácil de ser assimilado. Tal fato permitirá, segundo Soares e Pinto (s/d), que o aluno torne-se habituado a “determinar por si próprios às respostas das questões que os inquietam, sejam elas questões escolares ou da vida cotidiana, ao invés de esperar uma resposta já pronta dada pelo professor ou pelo livro-texto”. E, ainda, para Boavida (1992 apud ANDRADE, 1998, p. 14),

considerar a resolução de problema como uma abordagem de ensino de Matemática envolve muito mais do que conceitos e processos matemáticos; conduz a considerar objetivos relativos à educação em geral e à educação matemática em particular. A sala de aula precisa ser enfocada sob uma perspectiva global.

Quando se busca ensinar Matemática através da proposição, resolução e exploração de problemas, acredita-se que o processo de assimilação torna-se mais compreensível e duradouro. Sabe-se que qualquer situação que venha a causar desafio e interesse pode vir a se constituir em um problema, ou seja, a simples mudança na maneira de obter o resultado de uma questão pode representar para muitos indivíduos um grande problema (SILVA, 2013). Sendo assim, o que é problema para um indivíduo poderá não o ser para outro. No entanto, para que ocorra ou se tenha interesse em buscar a solução do problema, fazem-se necessários uma descrição clara da situação, o estabelecimento das metas esperadas, o controle e ajuste do tempo e a identificação da importância ou significância da tarefa em relação aos objetivos que se pretende alcançar. Afinal,

resolver problemas é um processo de reorganização e possíveis reformulações de conceitos e habilidades, procurando-se sempre novas ideias e situações, tendo em vista atender alguns objetivos sugeridos nos enunciados (THOMAZ NETO, 2003).

Exploração de Problemas é um processo inacabado, vai além da busca da solução do problema e refere-se a tudo que se faz nele a partir da relação problemas, trabalho, reflexões e síntese. [...] Há um prazer e uma alegria de ir cada vez mais longe, um ir cada vez mais profundo, um ir cada vez mais curioso, há um ir que chega e nunca chega, um ir que pode sempre ir, um ir que sempre se limita ao contexto do aluno, do professor, da Matemática, da escola... E por isso pode ir outra vez e mais outra vez... (ANDRADE, 1998, p. 24).

A proposição de um problema ou situação problema seria uma atividade que possibilitaria realizar um trabalho não repetitivo e

reflexivo sobre elementos que fazem parte do mundo, da realidade, das experiências e das vivências dos alunos... Há a intenção de envolver os alunos, emocional e intelectualmente, na situação proposta (SILVA, 2013, p. 103).

A formulação de problemas é um processo de articulação, com base na ação e no diálogo, na relação do indivíduo com o meio e consigo mesmo. Neste processo de articulação/organização, o pensamento criativo dialoga com as experiências anteriormente acumuladas pelo sujeito da formulação em andamento, articulando o antigo e o novo por meio da combinação que respeita a especialidade do sujeito e do objeto a ser conhecido. Resultados mais elaborados vão-se construindo neste processo [...]. Até que se constituam verdadeiros problemas (DOMITE, 2000, p. 28-29).

Percebe-se que perguntar é o grande impulso para desenvolver o conhecimento e realizar uma verdadeira transformação social. Para Domite (2000), “perguntar, problematizar e formular problemas são hoje, para mim, processos similares, ou seja, significam palavras de ordem semelhantes”.

Para formarmos verdadeiros exploradores de problemas e não somente solucionadores de problemas, Silva (2013) acredita que

devemos propor que o mesmo problema seja analisado sob diferentes aspectos tanto do ponto de vista matemático como fora dele... Além disso, depois que o aluno compreender realmente o problema explorado no desenvolvimento do trabalho em grupos, ele deve ser incentivado a explorar extensões – problemas ampliados e variações do mesmo problema, por exemplo, a partir de um tema político-social, ou outro contexto que possa fazer sentido (SILVA, 2013).

Uma situação-problema ganha destaque na vida do aluno e passa a ser interessante e importante quando se busca desenvolver nos alunos a capacidade de aprender com autonomia e quando se lhe permite que busque melhorias no aprendizado e para sua vida. No entanto, vale ressaltar que para que tudo isso seja possível, é preciso escolher bem as questões a serem trabalhadas - em quais situações o aluno vai se envolver para que ele se torne um verdadeiro cidadão atuante.

Para Domite (2000), a problematização, como a entendemos – um caminho composto de formas de comunicação – implica uma força crescente; ela se realimenta nos próprios processos argumentativos por meio dos quais se realiza. Segundo Andrade (1998, p 15),

considerar a resolução de problema como uma abordagem de ensino de Matemática envolve muito mais do que conceitos e processos matemáticos; conduz a considerar objetivos relativos à educação em geral e à educação matemática em particular. A sala de aula precisa ser enfocada sob uma perspectiva global.

Logo, deve-se olhar a resolução de problemas na prática educativa das aulas de Matemática como uma metodologia de ensino que merece uma atenção especial por parte dos professores, pois, a partir dela, podem-se associar situações do cotidiano do aluno com questões da aula e desenvolver o seu conhecimento crítico, de modo a facilitar o seu aprendizado, juntamente com o seu saber matemático, adaptando-o à sua realidade atual.

Nos últimos anos, pesquisadores de vários países têm se dedicado à pesquisa sobre o uso de novas tecnologias no processo de ensino-aprendizagem de Matemática. Percebe-se que não têm sido investigadas apenas as vantagens, mas também as desvantagens decorrentes do uso de tais tecnologias.

Vários estudos vêm mostrando que algumas pesquisas realizadas em diversos países têm apontado a existência de concepções distintas acerca da tecnologia e suas aplicações na educação escolar. Como exemplos, temos aquelas realizadas por Van de Walle (2009), Peressini e Knuth (2005), Frota e Borges (s/d), Oliveira (2008), Heid e Blume (2008), Knuth e Hartmann (2005), Ritter et al. (2008), entre outros. Tais concepções têm servido de base para a política educacional dos países e transformadas em documentos contendo um amplo conjunto de orientações curriculares, cuja leitura pode permitir inferências acerca das crenças, das concepções de educação e dos valores que cada comunidade atribui à tecnologia e à educação tecnológica.

No Brasil, por exemplo, essas orientações curriculares são encontradas nos PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais), que são as diretrizes curriculares formuladas com o propósito de nortear o ensino em seus diversos níveis (infantil, fundamental e médio), resultantes de várias pesquisas. Tais orientações também podem ser encontradas em publicações específicas, pois se trata um tema bastante debatido na formação dos professores. Entre essas diretrizes, encontra-se uma direcionada exclusivamente ao ensino de Matemática. Já nos EUA, tem-se o NCTM, que são as diretrizes elaboradas pelo Conselho Nacional dos Professores de Matemática para orientar os professores no processo do ensino em Matemática.

Em ambos os casos, existe o enfoque que aborda o incentivo ao uso de tecnologias no processo de ensino-aprendizagem de Matemática desde as séries iniciais. No entanto, quase sempre os resultados das pesquisas e suas sugestões ficam apenas documentados nos papéis.

Van de Walle (2009) cita um trecho do NCTM segundo o qual a tecnologia é essencial ao ensino-aprendizagem de Matemática. Ela influencia a Matemática que é ensinada e amplia a aprendizagem dos alunos (NCTM, 2000, p. 24). O documento acrescenta ainda que tanto as calculadoras como os computadores

devem ser vistos como ferramentas essenciais para fazer e aprender Matemática em sala de aula. A tecnologia permite que os estudantes se concentrem sobre as ideias Matemáticas, argumentem e resolvam problemas de forma que normalmente seriam impossíveis sem essas ferramentas. [...] o uso dessas tecnologias ampliam a aprendizagem Matemática permitindo um aumento das explorações e um enriquecimento das representações de ideias; estende o alcance de problemas que podem ser avaliados e permite que os estudantes com necessidades especiais superem procedimentos menos importantes de modo que a Matemática realmente significativa possa ser considerada (NCTM, 2000, p. 24).

De acordo com essa colocação, Frota e Borges (s/d) acrescentam que o uso da tecnologia na educação básica está fortemente presente no discurso educacional oficial e já deve ter sido incorporado ao discurso de professores da educação básica, mesmo quando uma das principais lamentações dos professores brasileiros era a dificuldade de acesso à tecnologia nas escolas.

Ainda conforme Frota e Borges (s/d),

os Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino médio ao apresentarem as novas diretrizes para o ensino de Matemática salientam o seu papel para a discussão e argumentação de temas de interesse de ciência e tecnologia.

Destarte, percebe-se que o uso de softwares educativos são recomendados pelas diretrizes que conduzem as estratégias adotadas no processo de ensino de Matemática no Brasil. Além disso, conforme o NCTM, estas estratégias têm de ser bem conhecidas, de modo que guiem e facilitem o ensino de Matemática utilizando recursos tecnológicos, quer sob a forma de uma calculadora ou de um computador.

Inicialmente, recordamos que, há pouco mais de uma década atrás, uma das principais queixas dos professores brasileiros era a dificuldade de acesso à tecnologia

nas escolas. Atualmente, é muito fácil encontrar pessoas computacionalmente alfabetizadas. Todavia, quando se trata da aplicação dessas tecnologias na sala de aula, o que se verifica ainda é bem diferente. A realidade didática/escolar brasileira mudou, porém apenas no aspecto quantitativo/material, pois é fácil perceber a facilidade no contato com o computador tanto por parte dos alunos como também dos professores. Entretanto, o uso para fins educativos ainda é baixo. E quando se trata da utilização do recurso para as aulas de Matemática, esse processo só ocorre no ensino superior, com maior frequência nas áreas de Exatas e, em sua maioria, apenas para realizar os cálculos, sem nenhuma contextualização.

Conforme Frota e Borges (s/d), tal questionamento não é novo nem exclusivo do Brasil, pois já foi abordado no resultado de uma pesquisa elaborada por Becker em 2001 no EUA. Percebe-se, com isso, que a tecnologia tem causado um grande impacto na vida de cada indivíduo, exigindo competências que vão além do simples lidar com as máquinas.

De acordo com os PCN de Matemática (BRASIL, 1998, p. 45),

no mundo atual saber fazer cálculos com lápis e papel é uma competência de importância relativa e que deve conviver com outras modalidades de cálculo, como o cálculo mental, as estimativas e o cálculo produzido pelas calculadoras, portanto, não se pode privar as pessoas de um conhecimento que é útil em suas vidas.

O interesse em incorporar e utilizar novas tecnologias em sala de aula pode ter vários fins e interesses por parte do sistema educacional e do professor. No entanto, há todo um interesse por trás do uso da tecnologia. Existe uma indústria e um mercado cujo interesse vem em perpendicular aos interesses das escolas, ou seja, há a intenção de criar e fornecer produtos bons, que sejam úteis às escolas, e estas, por sua vez, buscam produtos que sejam bons e que facilitem o aprendizado dos seus alunos.

Frota e Borges (s/d) dizem que industriais e comerciantes educacionais são movidos pelo interesse de criar mercados e consumidores para seus produtos e serviços. E acrescentam que, mediante tais ocorrências e deslumbrados com a possibilidade de a tecnologia tornar mais eficiente e colaborativa a prática pedagógica, as autoridades educacionais são principalmente movidas pelo desejo de atingir seus objetivos, que são conseguir, ao mesmo tempo, ampliar a quantidade de recursos educativos nas escolas, melhorar a qualidade do ensino e diminuir os custos dos serviços educacionais

prestados pelo governo, adquirindo apenas os bens materiais e não priorizando o social. Em outras palavras, deixa-se em segundo plano o professor e o aluno que vão utilizar o recurso no dia-a-dia.

Nessa perspectiva, o que realmente acontece por trás de toda essa trajetória, segundo Frota e Borges (s/d), é que o professor sente-se forçado a utilizar tais recursos e passa a fazer a mesma tarefa antiga apenas com novas tecnologias: fazer a Matemática de sempre, utilizando apenas os novos recursos.

A presença do computador na sala de aula requer das instituições e dos docentes novas posturas frente ao processo de ensino-aprendizagem, nas quais sejam aceitas novas práticas docentes que busquem proporcionar novas e significativas experiências de aprendizagem aos alunos.

Fazer Matemática utilizando o computador de forma eficiente implica mudanças que tornem a Matemática interessante, atrativa, de forma que desperte o interesse pela investigação e que possa gerenciar obstáculos epistemológicos ao entendimento de determinados conceitos matemáticos.

Sendo assim, é essencial investir na formação dos professores, uma vez que, ao utilizar novos recursos em suas aulas, faz-se necessário que ocorram mudanças também na seleção e no tratamento dos conteúdos, bem como na forma de avaliação. O que se deseja a partir daí é que os estudantes desenvolvam competências básicas que lhes permitam desenvolver a capacidade de continuar aprendendo, ou seja, condições básicas para prosseguir aperfeiçoando-se ao longo da vida, desenvolvendo a sua autonomia na busca da solução dos problemas, a capacidade de pesquisar e a confiança em seu próprio conhecimento.

Conforme os PCN de Matemática (BRASIL, 1998, p. 45),

A utilização de recursos como o computador e a calculadora pode contribuir para que o processo de ensino e aprendizagem de Matemática se torne uma atividade experimental mais rica, sem riscos de impedir o desenvolvimento do pensamento, desde que os alunos sejam encorajados a desenvolver seus processos metacognitivos e sua capacidade crítica e o professor seja reconhecido e valorizado o papel fundamental que só ele pode desempenhar na criação, condução e aperfeiçoamento das situações de aprendizagem.

O uso do computador de maneira consciente e planejada pelo professor nas atividades propostas, além de permitir o ganho de tempo na execução dos cálculos,

favorece também a busca e percepção de regularidades matemáticas e o desenvolvimento de estratégias de resolução da situação-problema, pois a sua utilização estimula o hábito de testar estratégias já conhecidas inicialmente, provoca a descoberta de novas estratégias e, dessa forma, gera a investigação de todas as hipóteses testadas.

Logo, o que se propõe hoje é que tanto as instituições de ensino quanto os docentes possam aproveitar ao máximo os recursos tecnológicos no ensino de Matemática, tanto pela sua receptividade social como para melhorar a linguagem expressiva e comunicativa dos seus alunos.

Utilizar os recursos tecnológicos de forma prudente em sala de aula é mais do que importante para o professor, mas, principalmente, para o aluno. Para tanto, é preciso que o aluno não se detenha apenas na realização dos cálculos na máquina, mas reflita sobre o processo de busca da resposta, além de utilizar os softwares de forma exploratória, sugerir hipóteses e testá-las, sempre descartando as desnecessárias. Para Ball e Stacey (2005), este seria o “aluno ideal”.

Essas habilidades são extremamente relevantes em sala de aula, conforme Ball e Stacey (2005), principalmente mediante o uso de tecnologia, pois o aluno não precisa apenas responder o problema proposto, mas interpretar o(s) resultado(s) encontrado(s) através do(s) cálculo(s) realizado(s) no computador.

Nesse contexto, existe uma preocupação com o uso da tecnologia nas aulas de Matemática acerca de como o aluno vai regular, controlar e desenvolver o seu aprendizado.

Sabe-se que o processo de aprendizagem ocorre pela compreensão e interpretação da situação proposta, sua resolução, a interpretação do(s) resultado(s) e também pela discussão com a turma. Todo esse processo desperta no aluno a capacidade de pensar e refletir sobre a(s) sua(s) estratégia(s).

Para Bakker e Frederckson (2005), quando o aprendizado se desenvolve dessa maneira, tem-se um aluno mais entusiasmado e envolvido no processo ensino-aprendizagem, capaz de se interessar e desenvolver novas observações e que sente a necessidade de partilhar as novas descobertas através das discussões orientadas ou não pelo professor, não as detendo apenas para si.

Como reforço Knuth e Hartmann (2005) dizem que a tecnologia pode ser utilizada pelo professor para desenvolver nos alunos a compreensão e a intuição dos conceitos e dos conhecimentos necessários preconcebidos, como também para envolvê-los numa discussão.

Com base no artigo de Peressini e Knuth (2005), as reformas propostas pelo NCTM para as aulas de Matemática utilizando tecnologias representam desafios semelhantes tanto para os alunos quanto para os professores, uma vez que tais desafios implicam mudanças no processo ensino-aprendizagem mediante:

- o papel do professor:

Uma vez que para obter êxito nesse processo os professores precisam rever a sua prática e inovar no seu processo de ensino, em especial no processo avaliativo com base no uso da tecnologia de forma significativa, afim, não apenas de familiarizar os alunos com o uso da tecnologia nas aulas de Matemática, mas também poder facilitar a aprendizagem das competências básicas da disciplina e o seu procedimento algorítmico, além da coleta e análise dos dados com base no seu conhecimento conceitual de forma significativa (PERESSINI; KNUTH, 2005).

- o papel da escola: “É necessário que também mude, visando estar apta a nível intelectual e material a fim de preparar os alunos para obterem sucesso diante da atual solicitação da sociedade altamente informatizada” (PERESSINI; KNUTH, 2005). E, por, fim,

- o papel do aluno:

Como já mencionado por outros autores é preciso que eles estejam interessados, envolvidos e disponíveis mediante as novas mudanças, pois só assim estarão abertos a refletir sobre o seu processo realizado, ou seja, sobre o seu próprio pensar (PERESSINI; KNUTH, 2005).

Percebe-se, com isso, que alguns conteúdos são mais facilmente contemplados com o uso dos softwares educacionais nas aulas de Matemática. Todavia, seja qual for o conteúdo trabalhado, os softwares não agirão sozinhos no desenvolvimento da aprendizagem. Tal desenvolvimento é resultado da interação mútua entre a instituição, o professor, o aluno, o currículo, os recursos tecnológicos adotados, as atividades propostas de forma bem elaborada, entre outros aspectos.

2.3 A importância do uso das tecnologias em sala de aula

Há um consenso entre os pesquisadores de Educação Matemática de que o aprendizado fica mais compreensível quando se dá a partir da resolução de problemas. Existem problemas que são puramente matemáticos e outros que podem ser contextualizados. Nessa perspectiva, as diretrizes do NCTM defendem que a resolução de problema não deve ocorrer utilizando apenas uma única estratégia. Sendo assim, o uso dos softwares educativos facilitaria o aprendizado e permitiria ao aluno mais tempo livre para pensar no processo de resolução e realizar outras estratégias na resolução do problema, pois o uso da tecnologia permite novas formas de o homem ver e estar no mundo.

No entanto, de acordo os PCN de Matemática (BRASIL, 1998, p. 37),

as necessidades cotidianas fazem com que os alunos desenvolvam capacidades de natureza prática para lidar com a atividade matemática, o que lhes permite reconhecer problemas, buscar e selecionar informações, tomar decisões. Quando essa capacidade é potencializada pela escola, a aprendizagem apresenta melhor resultado.

Logo, a escola não tendo tido a opção de decidir se usa ou não as tecnologias nas salas de aulas, pois o mundo tecnológico torna-se cada vez mais familiar ao alunado de hoje. Mas a escola pode pensar em como utilizar essa tecnologia de modo que favoreça o aprendizado dos alunos e que a expansão da tecnologia aconteça mais equitativamente para todos, ou seja, em todas as regiões do país.

Para Oliveira (2008), tudo isso é possível quando se visa a

buscar caminhos para que os estudantes consigam trabalhar com a transposição de uma noção intuitiva de padrão em direção à manipulação algébrica das propostas de solução para determinado problema é um desafio importante, com o qual se deve lidar através de estratégias didático-pedagógica adequadas, considerando as interfaces e mediações disponíveis. Nesse aspecto, o emprego de tecnologias de informação e comunicação (TICs) pode ser adequado, quando se consideram abordagens interativas e colaborativas de ensino-aprendizagem (OLIVEIRA, 2008, p. 297-298).

Mais uma vez, percebe-se que o foco deve ser posto nas estratégias e nos trabalhos didáticos adotados pelos envolvidos no processo de resolução a não apenas no

uso das tecnologias por si só, posto que este não determine as soluções desejadas. Dito de outro modo, a sua ligação com o processo que está em desenvolvimento, bem como com outros processos de ensino-aprendizagem, não constitui soluções prontas ou melhorias automáticas (OLIVEIRA, 2008).

Vale salientar ainda que

não se pode pretender a inserção de quaisquer tecnologias em espaços de ensino aprendizagem sem a crítica do uso, ela mesma permeando um projeto pedagógico e uma estratégia que contemplem a participação de alunos e professores como figuras principais do processo, a partir da proposta de que o foco deve ser posto nas pessoas, de modo a promover nas mesmas novas possibilidades de interação, de aprendizado compartilhado e colaborativo, com vistas à ampliação da autonomia (OLIVEIRA, 2007 apud OLIVEIRA, 2008, p. 298).

Não obstante, estes softwares têm o objetivo de auxiliar o professor no processo de ensino-aprendizagem, disponibilizando valiosos recursos para subsidiá-lo no ensino de sua disciplina em paralelo com as estratégias adotadas. Conforme assevera Oliveira (2008), esses recursos sozinhos “[...] não realizam o papel do professor, não ensinam, não resolvem todos os problemas das diversas dimensões da escola, mas podem oportunizar, no contexto da sala de aula e para além dele, a dinâmica da experimentação” (OLIVEIRA, 2008). Porém, auxiliam ao aluno durante a realização dos cálculos, permitindo mais tempo livre para analisar o procedimento adotado na busca pela resposta.

Sendo assim, a nossa proposta é analisar, aplicar e aperfeiçoar a metodologia resolução, proposição e exploração de problemas com a utilização de um software educacional livre como recurso para a realização dos cálculos algébricos no ensino médio em situações-problema. Como recurso didático, visa-se à facilitação da aprendizagem no ensino de Matemática.

Tal metodologia e recurso visam melhorias no processo ensino aprendizagem e um ensino promissor, mediado pelo uso da tecnologia, que possa alterar de forma prazerosa e significativa na estrutura vertical professor – aluno – conhecimento, permitindo assim um maior tempo disponível para o uso de estratégias de resolução por parte dos alunos além de lhes permitirem pensar sobre as estratégias adotadas durante o processo de resolução.

3 – ENSINO DE FUNÇÃO: UMA REALIDADE EM CENA

É comum encontrar, em várias reportagens, seja em jornais, revistas e telejornais, a utilização de gráficos envolvendo os mais variados assuntos em suas diversas páginas de notícias (economia, futebol, política, polícia) que estão associados ao objeto matemático função. Trata-se de um recurso matemático que permite a apresentação de forma sintetizada das informações, devido à facilidade de visualização e compreensão das informações. Para Brandão (2014, p. 12), “o conceito de função é considerado um dos mais importantes da Matemática e apresenta grande aplicabilidade; desta forma, sua compreensão e formação pelo aluno são, portanto, fundamentais”.

Num outro contexto, também nos deparamos com muitas grandezas presentes no nosso cotidiano que se relacionam. Por exemplo:

- A quantidade de um mesmo produto que compro com o preço correspondente a ser pago;
- Número de acertos numa prova com a nota obtida;
- Desconto do INSS (Instituto Nacional de Seguro Social) com o salário de cada pessoa;
- Velocidade média de um veículo com o tempo de viagem etc.

Tanto os gráficos como os exemplos de situações cotidianas nada mais são que relações, comparações de duas grandezas ou até mesmo funções representadas de diferentes formas. Algumas expressam funções matemáticas aplicadas a diversas áreas, como, por exemplo: economia, esportes, culinária, entre outros. Isso comprova que a importância do estudo de funções não é restrita apenas aos interesses da sala de aula, menos ainda das aulas de Matemática, e que o conceito de função pode ser aplicado a diferentes situações cotidianas, assim como em diversas áreas de estudos.

Em vários momentos, deparamo-nos com situações que envolvem funções. Mas, afinal, o que é função?

As funções são relações ou regras que associam unicamente elementos de um conjunto a elementos de outro conjunto e que, numa relação funcional, uma variável (dependente) é definida em termos da outra variável (independente). Mas isto é um pouco formal para alunos que estão iniciando seu estudo de funções. Para esse autor, as funções são mais bem compreendidas em contextos de fenômenos reais que

passam a fazer sentido para os alunos da educação básica (SILVA, 2013, p. 49).

No entanto, tal compreensão não se dá de forma tão simples. Como embasamento para este estudo, tomamos como base as grandes ideias essenciais para a aquisição do conceito de função, destacadas por Cooney, Beckmann e Lloyd (2010 apud BRANDÃO, 2014, p. 12), as quais apresentam cinco grandes focos, a saber: o conceito de função; covariação e taxa de variação; família de funções; combinação e transformação de funções; representações de funções.

Conforme a opinião de muitos professores,

As maiores dificuldades encontradas pelos alunos para a compreensão do conceito de função, são: a transposição do problema para a expressão; transferi-las para a realidade; o domínio da função; análise de gráficos; representação gráfica; associarem grandeza variável; a abstração, com rigores matemáticos dos conceitos; a simbologia; a lei de correspondência; a definição abstrata e as diversas representações de função (BRANDÃO, 2014, p. 17).

No entanto, com a prática docente, percebemos que os alunos costumam, geralmente, trocar a variável dependente pela independente, entre outras confusões na aprendizagem apresentadas por eles. Fato também observado pelo autor. Brandão (2014, p. 18)

identifica que os alunos costumam fazer confusão entre variável dependente e independente; confundem função com equação; incluem a noção de continuidade a este conceito; não compreendem função dada por mais de uma expressão algébrica; fazem confusão entre função constante e contínua; entendem que a existência de uma expressão algébrica ou gráfica é suficiente para afirmar que estas representam uma função.

Como solução, Oliveira (1997 apud BRANDÃO, 2014, p. 18) sugere que,

para minimizar as dificuldades dos alunos, seja trabalhada na apresentação do conceito, a passagem da linguagem escrita para tabelas e gráficos e vice-versa; que sejam propostas situações problemas nas quais haja a necessidade de distinguir domínio de contradomínio; propor gráficos e tabelas que representem

função; propor a mudança do quadro algébrico para o geométrico e vice-versa.

Uma das formas de representar uma função envolvendo conjuntos numéricos é através da representação algébrica. Contudo, não é a única forma de representação nem a mais viável para as séries iniciais. Porém, para as séries mais avançadas, é a que se torna mais comum a ser utilizada durante o processo de resolução.

Muitas das dificuldades encontradas pelos alunos na aquisição do conceito de função são devidas ao formalismo existente, o que se faz necessário emergir o caráter dinâmico do conceito e, para ele isto se torna possível através de uma abordagem que permita ao aluno compreender o conceito de variável, expressar a dependência de uma variável em relação à outra e identificar variável dependente e independente (BRANDÃO, 2014, p. 19).

Tais intempéries na compreensão se dão pela falta de domínio do conteúdo e aquisição de conhecimentos relativos ao conceito de função e suas particularidades, como a identificação do domínio, determinação do conjunto imagem, da regra de associação, representação gráfica. Entretanto, percebe-se que a maior dificuldade ocorre devido à existência de diferentes tipos de representação de funções.

Para Silva (2013, p. 46),

o uso de representações verbais, numéricas, gráficas e algébricas tem o potencial de fazer com que o processo de aprendizagem da Álgebra, no caso particular das funções, seja significativo e eficaz. A fim de que este potencial seja utilizado na prática, devemos estar cientes das vantagens e desvantagens de cada representação (p. 46).

Cooney, Beckmann e Lloyd (2010 apud BRANDÃO, 2014, p. 30-38) consideram cinco ideias como sendo essenciais para o desenvolvimento do conceito de função. São elas:

1. O conceito de função:

O conceito de funções é amplo, permitindo que seja aplicável a uma variedade de situações. A noção de função abrange muitos tipos de entidades matemática além das funções clássicas que descrevem quantidades que variam continuamente (COONEY; BECKMANN; LLOYD, 2010).

2. Covariação e taxa de variação:

Funções que fornecem um meio para descrever como relacionam quantidades que variam juntas. Podemos classificar, prever e caracterizar vários tipos de relações, compreendendo como a taxa de variação varia com respeito a outra (COONEY; BECKMANN; LLOYD, 2010).

3. Famílias de funções: “As funções podem ser classificadas em diferentes famílias de funções, cada uma com suas próprias características únicas. Famílias diferentes podem ser usadas para modelar diferentes fenômenos do mundo real²”.

4. Combinação e transformação de funções:

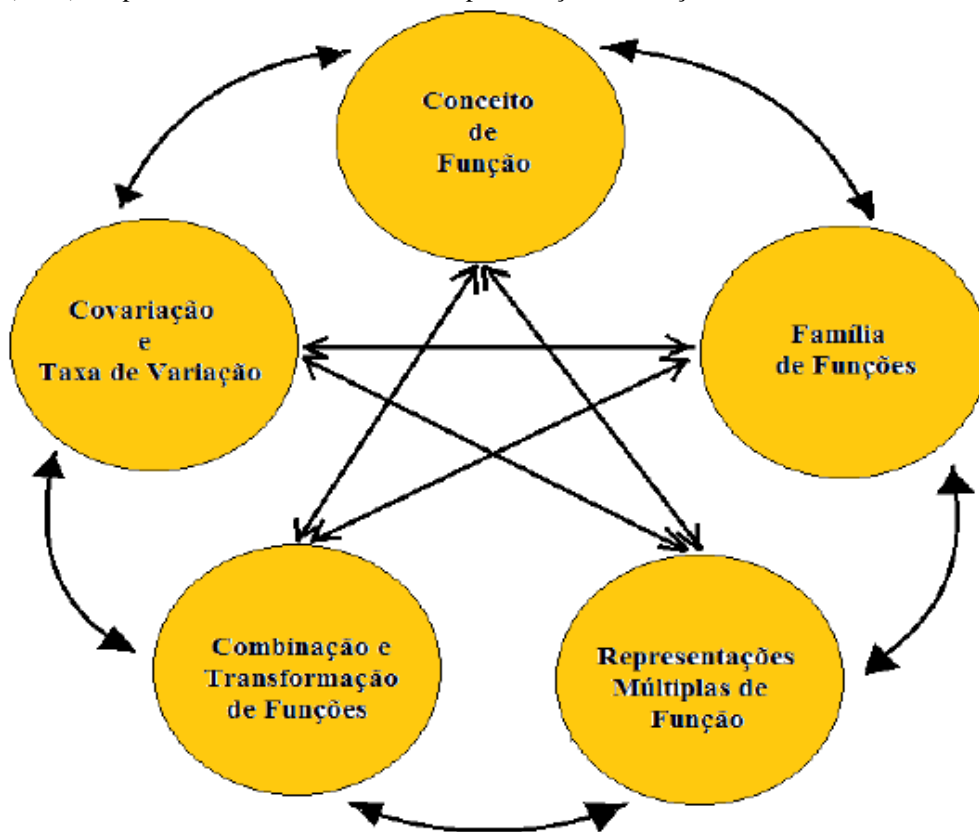
As funções podem ser combinadas através da adição, subtração, multiplicação, divisão, e de sua composição. Funções há, vezes tem inversas. As funções podem ser analisadas muitas vezes visualizando-as como sendo feitas a partir de outras funções³.

5. As representações múltiplas de funções

Funções podem ser representadas de várias formas, incluindo a forma algébrica (simbólico), representações gráficas, verbais e tabulares. Ligações entre essas diferentes representações são importantes para estudar as relações e mudanças⁴.

De forma simplificada, têm-se as seguintes representações das grandes ideias:

Figura 3: Modelo das cinco grandes ideias de função que foram idealizadas por Conney, Beckmann e Lloyd (2010), inspirado nos modelos das cinco representações de funções de Van de Walle.



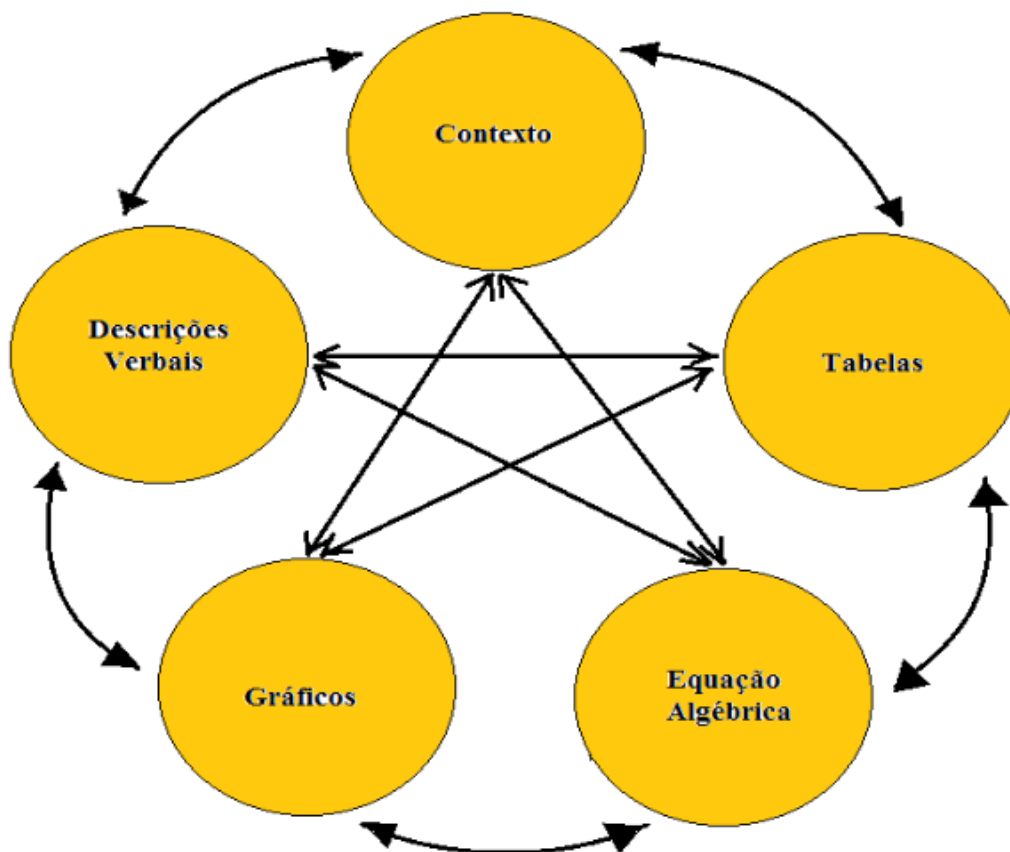
Fonte: Figura concebida pela pesquisadora.

Diante desse contexto,

o estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria Matemática (BRASIL, 2006, p. 121).

Dentre as várias ideias de funções apresentadas, focamos nas representações múltiplas, combinação e transformação de função, pois, dada uma situação-problema envolvendo funções, é preciso que o aluno represente a função da forma que melhor lhe convier (conforme figura 4) e desenvolva algumas ou todas as etapas de procedimento para a resolução da função diante de seus modelos de representações básicas.

Figura 4: Modelos de representações de funções.



Fonte: Silva (2013 apud VAN DE WALLE, 2006).

As seguintes considerações de Silva (2013) merecem ser elencadas:

- 1 - A *representação verbal* é geralmente usada apresentando um problema e é necessária na interpretação final dos resultados obtidos no processo de resolução de um problema. Um problema apresentado verbalmente cria um ambiente natural para a sua compreensão no contexto no qual está inserido e para a comunicação de sua solução.
- 2 - A *representação numérica* é comum para os alunos no estágio inicial de estudo de Álgebra. Abordagens numéricas oferecem uma ponte conveniente e eficaz para a aquisição da Álgebra e frequentemente precede qualquer outra representação.
- 3 - A *representação gráfica* é eficaz em proporcionar uma imagem clara de uma função de variáveis reais. Gráficos são intuitivos e particularmente apelativos para os alunos que gostam de uma abordagem visual.
- 4 - A *representação algébrica* é concisa, geral e efetiva na apresentação de padrões e modelos matemáticos. A manipulação de objetos algébricos é, por vezes, o único método de justificar ou provar declarações gerais (SILVA, 2013, p. 47-48).

Diante do contexto, percebe-se que é necessário trabalhar com várias representações, pois limitar o aluno a apenas um modo de representação de funções recai sobre uma desvantagem, tolhendo seu raciocínio, inibindo seu conhecimento e causando desvantagem ao seu aprendizado. Vale dizer que as funções compõem uma área principal da Matemática, crucial para os alunos aprenderem, mas desafiante para os professores ensinarem (SILVA, 2013, p. 49).

Para a evolução das etapas de resolução de um problema envolvendo funções, é necessário que previamente se tenha conhecimento sobre estudo dos números reais, de conjuntos e suas operações. Conseqüentemente, é preciso saber definir relações e, a partir daí, identificar as funções como particulares relações. Define-se função por: dois conjuntos não vazios A e B , uma relação (ou correspondência) que associa a cada elemento $x \in A$ um único elemento $y \in B$ recebe o nome de função de A em B (IEZZI, 2010).

Todos os procedimentos tornam-se desnecessário assim que a definição de função é estabelecida, pois, para a análise dos diferentes tipos de funções, todo o estudo relativo a conjuntos e relações passa a ser desnecessário. Sendo assim, Zavala (2007) defende que o ensino pode ser iniciado diretamente pela noção de função para descrever situações de dependência entre duas grandezas, o que permite o estudo a partir de situações contextualizadas, descritas algébrica e graficamente. Porém, nem toda função tem representação num contexto do mundo real. Entretanto o padrão de uma sequência pode ser visto como o contexto concreto de uma representação de uma relação funcional (SILVA, 2013).

Os problemas de aplicação não devem ser deixados para o final desse estudo, mas devem ser motivo e contexto para o aluno aprender funções. A riqueza de situações envolvendo funções permite que o ensino se estruture permeado de exemplos do cotidiano, das formas gráficas que a mídia e outras áreas do conhecimento utilizam para descrever fenômenos de dependência entre grandezas. O ensino, ao deter-se no estudo de casos especiais de funções, não deve descuidar de mostrar que o que está sendo aprendido permite um olhar mais crítico e analítico sobre as situações descritas (ZAVALA, 2007, p. 08).

Esse contexto, mais uma vez, contradiz a ideia de uma linearidade muito rígida dos conteúdos como ainda é trabalhada na maioria das escolas. Deixa evidente que devemos trabalhar os conteúdos em espiral, mostrando que todos estão interligados,

mesmo que algumas etapas só sejam exploradas num outro momento. Não obstante, os alunos irão perceber que não se trata de um conteúdo novo, mas de uma continuidade do que eles já sabem.

4 - RELATOS DA EXPERIÊNCIA

Neste capítulo, fazemos uma apresentação sobre a escola onde ocorreu a pesquisa e a turma que colaborou com ela. Apresentamos como ocorreram as aulas durante esse período, os conteúdos trabalhados e, por fim, as descrições, discussões e comentários dessa experiência em sala de aula, trazendo uma síntese resultante das descrições e análises que foram feitas durante a execução da pesquisa de campo.

As descrições a seguir referem-se às aulas ministradas na disciplina de Matemática, na turma de 1º ano do ensino médio do turno da tarde de uma escola estadual da cidade de Timbaúba-PE.

A escola fica situada numa área central da cidade, próxima a outras instituições de ensino. Voltada exclusivamente para o ensino médio, atende tanto aos alunos da zona rural como os da zona urbana nos seus três turnos de funcionamento. Foi recentemente reformada; apresenta ampla estrutura e conforto para atender aos seus quase 3.000 (três mil) alunos. Possui quadra esportiva, laboratórios de informática e ciências físicas e biológicas, auditório, biblioteca, área de lazer e convivência, copa, sala de troféus, salas climatizadas, rampa de acesso ao 1º andar e salas de aula numa quantidade suficiente para a demanda.

A maioria dos professores está a mais de 15 anos na instituição e vêm trabalhando de forma tradicional, (um ensino voltado apenas para a exposição dos conteúdos) com os alunos. Os demais professores, que chamaremos de novatos, são mais motivados, empreendidos e buscam mudanças, tentando inovar no processo de ensino-aprendizagem.

Na maior parte dos casos, o ensino é da forma tradicional, ou seja, voltado para a repetição. O professor anota o resumo, explica com exemplos as situações e, por fim, exercita questões semelhantes às dos exemplos dados anteriormente. Uma pequena minoria trabalha com o ensino voltado para a compreensão, tentando construir o conhecimento com a ajuda dos alunos envolvidos. Um empecilho para este trabalho está na descontinuidade, pois nada garante que, no ano seguinte, esses alunos continuem com os mesmos professores ou mudem de professores e, conseqüentemente, mudem a metodologia de ensino. Tal fato deixa os alunos um tanto acomodados, pois temos poucos professores envolvidos no processo de mudança e comprometidos com ensino no qual o aluno não é mero receptor, mas atuante em todas as etapas, com vez e voz.

A escola dispõe de bons recursos didáticos, principalmente voltados para as disciplinas de Português, Ciências, Física e Matemática.

O laboratório fica numa área considerada calma pela instituição, ou seja, menos barulhenta por ser distante das salas de aula. Ele fica próximo à biblioteca, à sala dos professores, à secretaria e à diretoria. É bem equipado; todas as máquinas estão distribuídas em forma de U na sala, que tem formato retangular, sendo bem arejada e bem iluminada. Possui lousa, data show no teto, TV de LED de 42 polegadas, dois aparelhos de ar condicionado e computador central conectado ao data show e à TV para aulas expositivas, além de duas câmeras de vigilância. Um detalhe importante é que a distribuição dos computadores permite que os alunos fiquem de frente para os colegas de classe e não de costas, como comumente costumamos encontrar.

O laboratório dispõe de 26 máquinas, todas conectadas à internet. No entanto, alguns aparelhos não se encontram em perfeito funcionamento no momento. Tal fato não influenciou a realização nem o ritmo das aulas, pois todos os alunos possuem notebooks. Porém, inicialmente, optamos pelo trabalho em equipe, pois, pela quantidade de alunos, os computadores disponíveis na sala e em perfeito funcionamento atendiam às expectativas, mas, principalmente por acreditarmos que tal situação favorece a interação. Para maior conforto dos usuários, o laboratório possui dois sanitários (um masculino e o outro feminino) e um bebedouro. Toda essa estrutura extra já fazia parte do espaço escolar, pois antes era um auditório.

O recurso didático (software) utilizado no auxílio dos cálculos matemáticos é uma versão *free* do Wolfram Alpha, programa computacional online desenvolvido pela Wolfram Research, que auxilia os cálculos matemáticos e é capaz de computar dados das mais diversas áreas. Sua linguagem encontra-se em inglês, mas isto não foi dificuldade para os alunos envolvidos, pois a curiosidade falou mais alto para os não habituados e alguns já participavam do cursinho de inglês oferecido pela própria instituição de ensino. Tal recurso complementar foi bastante útil apenas para a visualização gráfica e os cálculos numéricos.

Na escola, no início do ano letivo, houve algumas mudanças relativas à distribuição de turmas e horários, além de uma preocupação extra da equipe gestora referente aos últimos conceitos de desempenho nas avaliações aplicadas pelo sistema de avaliação governamental. Participamos das reuniões, tomamos conhecimento da ementa proposta e agendamos os primeiros contatos.

As aulas ministradas durante a pesquisa obedeceram ao planejamento escolar do início do ano letivo para a disciplina de Matemática, de modo que parecessem o mais natural possível para os alunos e não prejudicassem o desenvolvimento curricular.

No entanto, diante do resultado geral das últimas notas apresentadas, tivemos de adiar os primeiros contatos, pois todas as turmas consideradas em estado crítico no processo de aprendizagem iriam passar por um teste de “nivelamento do conhecimento educacional”. Mas, antes, seriam submetidas ao processo de revisão geral na área de conhecimento matemático e a que escolhemos para aplicar a nossa pesquisa era uma dessas turmas.

Após tais procedimentos, diante dos resultados, foi-nos sugerido mudar de turma, tendo em vista que a escolhida era considerada uma turma “fraca”, ou seja, com baixo rendimento escolar diante das notas obtidas. Isto se dava por se tratar de uma turma de alunos que aparentavam ter mais dificuldades com o aprendizado da Matemática quando em comparação com outras turmas da instituição, pois alguns já estavam repetindo tal série escolar pelo 4º ano consecutivo e se mostravam desmotivados e desinteressados pela aprendizagem em Matemática.

Ficamos atraídas com a situação. Optamos por não acatar a sugestão da direção de ensino e decidimos aceitar o desafio de trabalhar com a turma considerada “problemática” e “fraca em Matemática” para a instituição de ensino justamente por serem alunos que, mesmo com dificuldades, já tinham tais noções, mas algo não permitia que eles evoluíssem.

A nossa decisão foi aceita pela equipe gestora. Porém, ela tinha receio de que fracassássemos e/ou ficássemos desmotivadas no decorrer do processo, vindo a “sujar” a imagem da instituição. Assim, deixamos claro que, em nenhum momento, a escola seria identificada, independentemente dos resultados.

O conteúdo escolhido foi introdução à função, funções do 1º e 2º grau, função modular, função exponencial e função logarítmica. Conteúdo que alguns alunos não gostavam por natureza. Por termos sido funcionárias da instituição e conhecermos o histórico escolar da maioria dos alunos, ficou fácil dialogar com eles e lançar a nossa proposta para os alunos envolvidos.

Inicialmente, ao lançarmos a nossa proposta para os alunos, alguns ficaram bem desconfiados, não acreditando muito na situação. Mas não se opuseram, sendo este um percentual muito pequeno diante da maioria, que se propôs trabalhar com afinco em nome do aprendizado. Tal euforia nos causava um misto de entusiasmo e medo diante

do novo a ser enfrentado. O professor regente, que já estava com eles pelo segundo ano consecutivo, não se opôs e decidiu nos ajudar no que precisássemos.

Como se tratava de uma turma extra e tínhamos que agendar o horário de utilização do laboratório de informática, nas sextas-feiras a aula acontecia no turno da manhã, pois à tarde o local se encontrava indisponível. No entanto, pela mudança de horário por causa do uso do laboratório, e ajustes nos horários disponíveis dos alunos envolvidos, ficamos o tempo todo ministrando nossas aulas sem a presença do professor.

Inicialmente, eram ao todo 18 alunos de turmas regulares, porém quatro alunos do turno da noite se mostraram interessados pela proposta e pediram para que os mudassem de turno e pudessem participar da equipe. A turma foi formada por alunos com baixo percentual na avaliação do Sistema Escolar. Sugeriram-nos uma outra; porém, diante do desafio de trabalharmos com alunos repetentes, isto nos estimulou. Aceitamos a turma e, ao todo, trabalhamos com 22 alunos, sendo 12 do sexo feminino e 10 do sexo masculino, com faixa etária entre 16 e 24 anos. Apenas cinco deles não trabalhavam. Os demais eram funcionários do comércio local ou contratados da prefeitura. Identificamos os alunos como Aluno 01, ... ao Aluno 22. De forma simplificada, adotamos A01, A02, A03, A04, ..., A21 e A22 conforme a distribuição na caderneta por ordem alfabética.

As equipes foram identificadas como:

Equipe 1 - formada pelos alunos ***A02*** e ***A11***;

Equipe 2 - formada pelos alunos ***A01*** e ***A07***;

Equipe 3 - formada pelos alunos ***A15*** e ***A18***;

Equipe 4 - formada pelos alunos ***A03*** e ***A04***;

Equipe 5 - formada pelos alunos ***A06*** e ***A09***;

Equipe 6 - formada pelos alunos ***A16*** e ***A22***;

Equipe 7 - formada pelos alunos ***A17*** e ***A21***;

Equipe 8 - formada pelos alunos ***A19*** e ***A20***;

Equipe 9 - formada pelos alunos ***A05*** e ***A13***;

Equipe 10 - formada pelos alunos ***A08*** e ***A14***;

Equipe 11 - formada pelos alunos ***A10*** e ***A12***.

Ao todo, foram 60 horas/aulas, sendo as duas primeiras para a exposição da proposta e pré-teste (aplicação de um questionário prévio), 56 de aulas propriamente ditas e as duas últimas um desafio geral para a turma, além de uma pequena confraternização. As 60 h/a foram assim distribuídas:

TABELA 2: Distribuição dos conteúdos programáticos e carga horária.

UNIDADE DIDÁTICA	CONTEÚDOS PROGRAMÁTICOS	CARGA HORÁRIA	ENCONTROS
I	Exposição da proposta e pré-teste / Análise de gráficos e funções.	10	04
II	Funções polinomiais de 1º grau.	08	03
III	Funções polinomiais de 2º grau.	08	03
IV	Funções modulares	12	04
V	Funções exponenciais	12	04
VI	Funções logarítmicas / Desafio geral	10	04
TOTAL	-	60	22

Fonte: Tabela elaborada pela pesquisadora.

Apesar de estarmos acompanhando a turma desde o início do ano letivo, em fevereiro, a nossa pesquisa teve início em 07/03/2014, com término em 18/06/2014. Atendeu, assim, a aproximadamente um semestre letivo, num total de 60 aulas e 22 encontros, cujo conteúdo foi distribuído em seis unidades didáticas.

4.1 Unidade Didática I: conceituando funções

Nessa unidade didática, totalizamos 10 horas-aulas, distribuídas em quatro encontros. Apresentamos nossa metodologia de trabalho com os alunos, discutimos o conceito de função e complementamos com a análise de gráficos de funções. No entanto, nosso foco foi a proposição, resolução e exploração de problemas junto à utilização do programa computacional no processo de resolução como recurso didático e as demais informações complementares que ele fornece.

Objetivos:

- Apresentar e discutir com os alunos a metodologia de trabalho da pesquisadora com os alunos, aplicada ao conteúdo de função.
- Introduzir o conceito de função usando a relação de dependência entre duas grandezas e estabelecer, quando possível, uma lei que forneça a relação entre elas.
- Reconhecer exemplos e resolver exercícios em que as funções estejam contextualizadas em situações do cotidiano ou aplicadas a outras áreas do conhecimento.
- Elaborar seu próprio problema através da exploração de uma situação-problema inicial.
- Utilizar os recursos tecnológicos para solucionar as situações-problema propostas.
- Explorar os dados fornecidos pelo software Wolfram Alpha na solução do problema.

Recursos:

- livro didático;
- computador;
- internet;
- software Wolfram Alpha (versão *free*);
- papel ofício;
- quadro,
- pincel,
- retroprojektor.

Encontro 1 - 07/03/2014

Inicialmente, apresentamos aos alunos a proposta de trabalho por completo, focando sobre o uso das tecnologias como uma ferramenta auxiliar ao trabalho de resolução e proposição de problemas e a importância da proposta como um todo. Solicitamos a colaboração deles, principalmente no período de adaptação, pois muitos

utilizavam os computadores e a internet para outros fins pessoais e não os viam como um possível recurso didático, a não ser para fazer trabalhos escolares, no sentido de copiarem o que aparece na internet, embora sem um pensar e uma compreensão daquilo que copiavam.

***Comentário.** Há tempos, quando um professor de história, geografia ou de qualquer outra disciplina solicitava trabalhos escolares aos alunos sobre um determinado tema, como “Independência do Brasil”, os alunos simplesmente consultavam livros impressos, copiavam mecanicamente o conteúdo do livro, sem qualquer compreensão, e entregavam ao professor. Hoje, esse mesmo procedimento é feito com a internet, através de ferramentas como ctrl+c e ctrl+v, reproduzindo, dessa forma, com nova “roupagem”, porém com maior defasagem, pois antes, mesmo copiando, ainda lia-se o conteúdo, mesmo sem compreendê-lo, e atualmente nem isso se faz. É o mesmo ensino mecânico de outrora, que tem sido criticado veemente pelas pesquisas.*

Durante a exposição, falamos do software Wolfram Alpha, visto que os alunos desconheciam o programa utilizado. Eles também não tinham conhecimento de outros programas com a mesma funcionalidade. Percebemos que, no dia-a-dia, os alunos faziam uso de calculadoras. Assim, permitimos seu uso livremente durante as aulas.

Por tratar-se de uma turma de alunos repetentes, como já mencionado, e para uma melhor compreensão do nível prévio de conhecimento sobre o conteúdo de função e suas experiências com o ensino de Matemática, aplicamos o questionário abaixo, com algumas questões referentes à relação entre grandezas, procurando discutir e relembrar o que os alunos entendiam por relação entre grandezas. Quais as regras básicas para a existência da relação entre as grandezas? Quais as formas de representá-las?

Com a aplicação do pré-questionário, interessava-nos obter algumas informações sobre esses alunos, do tipo: disciplina de que mais gosta, quantidade de vezes que repetiu essa série, com qual conteúdo teve mais dificuldade durante o primeiro ano e de qual mais gostou.

Além dessas informações básicas que queríamos saber, outras relacionadas a conhecimentos específicos nos eram necessárias. Para obtê-las, aplicamos dois problemas para que o alunos resolvessem individualmente na sala. Foram estes:

1 - Um cabeleireiro cobra R\$ 12,00 pelo corte para clientes com hora marcada e R\$ 10,00 sem hora marcada. Ele atende por dia um número fixo de 6 clientes com hora marcada e um número variável X de clientes sem hora marcada.

- Qual foi a quantia arrecadada num dia em que foram atendidos 16 clientes?
- Qual foi o número de clientes atendidos num dia em que foram arrecadados R\$ 212,00?

2 - Suponha que um grilo, ao saltar do solo, tenha sua posição no espaço descrita em função do tempo (em segundos) pela expressão:

$$h(t) = 3t - 3t^2,$$

onde h é a altura atingida em metros.

- Em que instante t o grilo retorna ao solo?
- Qual a altura máxima em metros atingida pelo grilo?

Após a devolução do questionário respondido, discutimos sobre o par ordenado que se forma com a existência da relação; o sistema cartesiano; os conceitos de domínio e imagem, exemplificando-os e, por fim, elencando suas propriedades.

Os resultados do pré-questionário foram surpreendentes na medida do possível e inesperados ao mesmo tempo, pois alguns alunos distorceram as respostas. Outros inovaram na forma de responder, mas, infelizmente, dentro do esperado, encontramos uma boa parte das repostas como não sendo a resposta satisfatória para os problemas apresentados, pois, apesar da revisão dos conteúdos trabalhada/discutida no início do ano letivo fornecida pela instituição de ensino, os alunos não assimilaram o necessário para se sobressaírem nas questões propostas para verificação durante a pesquisa.

Comentário: Apesar desse impasse, surpreendeu-nos o fato de que o conteúdo com o qual mais tiveram dificuldade não foi de Matemática e sim de Física, com aproximadamente 40,9%, seguido de Biologia, com 22,72%. Outro fator surpresa foi que aproximadamente 36,36% declaram gostar de Matemática, apesar de já estarem repetindo a mesma série em média duas vezes no mínimo. Quanto aos conhecimentos prévios utilizados, a maioria declarou aplicar apenas as operações básicas, pois, de todos os conteúdos já estudados até então, foram os mais discutidos e lembrados em qualquer situação.

Figura 5: Resposta do aluno 9 apresentada para o problema “d” do pré-questionário.

Um cabeleireiro cobra R\$ 12,00 pelo corte para clientes com horas marcada e R\$ 10,00 sem hora marcada. Ele atende por dia um número fixo de 6 clientes com hora marcada e um número variável X de clientes sem hora marcada.

- Qual foi a quantia arrecadada num dia em que foram atendidos 16 clientes? $6 \cdot 12 = 72$ R\$ $10 \cdot 10 = 100 + 72 = 172$
- Qual foi o número de clientes atendidos num dia em que foram arrecadados R\$ 212,00? $72 - 212 = 140$ $6 + 14 = 20$

Quais conhecimentos prévios você utilizou?

Fonte: Acervo particular da pesquisadora.

Figura 6: Resposta do aluno 20 apresentada para um dos problemas do pré-questionário.

$$\begin{array}{r}
 d) \ 12 \cdot 6 = 72 \\
 10 \cdot 10 = 100 \\
 \hline
 72 + 100 = 172 \\
 \hline
 212 - 72 = 140 \\
 140 \div 10 = 14 \\
 14 + 6 = 20 \\
 \hline
 172 \\
 - 72 \\
 \hline
 100
 \end{array}$$

Fonte: Acervo particular da pesquisadora.

Comentário: Fica visível que ambos os alunos compreenderam a situação, porém tiveram dificuldade em apresentá-la numa linguagem algébrica. No entanto, tal procedimento não se distanciou da resposta esperada, mas evidencia-se a representação e resolução numérica do problema apresentado, pois é o processo mais discutido e enfatizado nas séries iniciais do ensino fundamental.

Todas as aulas ministradas foram gravadas em áudio para podermos detalhar com mais precisão todo o processo ocorrido. Também foram filmadas (sem áudio), pois há câmeras de segurança instaladas nas salas de aula da escola, embora isso não fizesse parte do projeto. Ao final, usamos as filmagens para uma melhor percepção da ação professor-aluno-aluno durante as aulas.

Neste encontro 1, apresentamos essencialmente nossa metodologia de trabalho com os alunos. Este contato possibilitou uma melhor direção ao andamento das aulas e,

como consequência, percebemos que houve uma melhor aceitação e empatia por parte dos alunos.

No encontro 2, iniciamos propriamente o conteúdo de função. A seguir, descreveremos e analisaremos as aulas, que correspondem ao recorte do trabalho de campo, mostrando um contínuo de uma sala de aula, explorando os conteúdos programáticos e visando a desenvolver a compreensão do conceito essencial de funções.

Encontro 2 - 12/03/2014

Conteúdo desenvolvido: Conceito de relação entre grandezas, elaboração e exploração de problemas.

A aula começou com a solicitação para que os alunos se organizassem em equipes de duas pessoas. Logo após, foi distribuído parte de um problema básico impresso, extraído do livro didático utilizado pelos alunos (IEZZI, 2010). Porém, elaborado de forma simples e direta. Buscávamos e pretendíamos uma aula interativa, atrativa, participativa e colaborativa. Sendo assim, a participação dos alunos seria indispensável e fundamental, até porque vários desses problemas ou problemas semelhantes já haviam sido trabalhados com eles nos anos anteriores.

O problema distribuído foi:

Problema 1: Um motorista de táxi cobra R\$ 3,50 de bandeirada (valor fixo) mais R\$ 0,70 por quilômetro rodado (valor variável).

Ao receberem o problema e realizarem a leitura, várias indagações surgiram⁵:

A05: Qual é a pergunta?

A13: O que vamos resolver?

A08: Assim não consigo resolver.

A11: Qual é a questão aqui?

A03: Tá incompleta? Cadê o restante da questão?

A20: É verdade. Como vamos encontrar a resposta assim?

⁵ Todas as transcrições de trechos de aula ao longo do presente capítulo são informações verbais. Para não comprometer a dinâmica do diálogo original, optamos por citá-los na forma dialógica, e não de citação convencional.

Professora: *Calma! Vamos pensar um pouco. O que vocês acham que falta na situação problema? Como ela ficaria completa para vocês?*

Comentário: *Todos os questionamentos gerados se devem à insegurança em pensar um pouco mais sobre as situações-problema e por fornecerem sempre situações prontas e acabadas para que resolvam. É comum vivenciar essa insegurança nas atividades que se comprovam na obtenção das respostas diante da confirmação do professor.*

Toda a inquietação amenizou-se quando solicitamos que eles completassem o problema do seu jeito. Demos um tempo à turma e observamos que os complementos elaborados com algumas duplas eram bem óbvios e imitavam as propostas pela maioria dos autores dos livros didáticos conhecidos e utilizados por eles. Foi então que intervimos e solicitamos que fossem criativos nas sugestões de complementos, pois os autores agora eram eles e podiam elaborar o complemento que quisessem desde que tivesse lógica e fizesse sentido perante a situação inicial. No entanto, ao se depararem com mais uma solicitação, toda a inquietação voltou. Porém para um pequeno grupo, que persistiu com situações complementares simples, pois a maioria das equipes foi bem criativa nas suas elaborações e propôs os seguintes complementos:

Equipe 1 - *Jennifer gostaria de conhecer a cidade, mas possui apenas R\$ 58,80 na carteira. Quantos quilômetros ela poderá percorrer, sabendo que deve guardar R\$ 12,80 para o almoço?*

Equipe 2 - *Um cliente pagou R\$ 72,00. Quantos km ele percorreu?*

Equipe 3 - *Quanto pagará por 174 km percorridos?*

Equipe 4 - *Durante os finais de semanas e feriados, o valor da bandeirada reduz em 50% e a quilometragem tem um acréscimo de R\$ 0,30. Quatro amigos pegam um táxi e percorrem 10 km. Qual o valor pago por cada?*

Equipe 5 - *Durante uma corrida, o taxista apresenta para um cliente as seguintes opções de trajetória:*

- *Perímetro urbano (12 km) com trânsito lento;*
- *Perímetro residencial (19 km), trânsito livre.*

Como estava apressado, o cliente optou pela 2ª opção. Quanto pagou pelo percurso?

Comentário: *Todas as questões anteriormente citadas e desenvolvidas pelas duplas atendem aos objetivos de estabelecer/explicitar relações entre grandezas dentro do contexto, além de participar da elaboração dos próprios problemas. Tal processo favorece a metacognição – ato de rever/refazer e analisar todas as etapas elaboradas pelo aluno no processo de resolução do problema – dos envolvidos no processo de aprendizagem.*

Concluimos a aula recolhendo o material elaborado por eles para análise, com vistas a darmos continuidade na aula seguinte.

Encontro 3 - 14/03/2014

Conteúdos desenvolvidos na aula: relação entre grandezas, resolução e exploração de problemas.

Iniciamos a aula pedindo que retomassem as mesmas equipes formadas na aula anterior para darmos continuidade à questão. Redistribuímos alguns complementos elaborados por eles. Entre os selecionados inicialmente, foram escolhidos os da equipe 1 e 3, que eram semelhantes aos propostos pela equipe 6 e 7. Tais complementos foram escolhidos devido a seu baixo grau de complexidade comparado aos outros elaborados pelas demais equipes e pela semelhança com as questões propostas pelos livros didáticos.

Professora: *Com esse complemento elaborado por vocês, fica fácil resolver o problema?*

Alunos: *Sim.*

Professora: *Então, só assim vocês conseguem resolver o problema?*

Alunos: *(a maioria apenas confirma que sim balançando a cabeça; outros falam): Sim.*

Em seguida, pedimos que determinassem a solução de cada questão. Passou-se um tempo e poucas equipes conseguiram resolvê-las. Uns tiveram dificuldade em

transformar o problema numa linguagem matemática e os poucos que conseguiram evoluir nessa etapa tiveram dificuldade na resolução, atrapalhando-se na sequência das operações matemáticas. Então, escolhemos a questão da equipe 1 e começamos a resolvê-la juntos. Fizemos a leitura da situação, separamos os dados fornecidos, montamos a questão com a ajuda dos que haviam conseguido e solucionamos o problema.

Problema proposto inicialmente mais complemento formulado pela equipe 2:

Problema 1: Um motorista de táxi cobra R\$ 3,50 de bandeirada (valor fixo) mais R\$ 0,70 por quilômetro rodado (valor variável). *Um cliente pagou R\$ 72,00. Quantos km ele percorreu?*

Figura 7: Resolução do problema 1 mais o complemento formulado pela equipe 2 apresentada pela equipe 2.

$$\begin{array}{r} 72,00 \\ - 3,50 \\ \hline 68,50 \end{array}$$

$$68,50 \div 0,70 = 97 \text{ Km}$$

Fonte: Acervo particular da pesquisadora.

Figura 8: Resolução do problema 1 mais o complemento formulado pela equipe 2 apresentada pela equipe 5.

$$\begin{array}{r} 72,00 \\ - 3,50 \\ \hline 68,50 \end{array}$$

$68,50$ → $\boxed{\text{aproximadamente } 98 \text{ Km}}$

$$\begin{array}{r} 598 \\ \times 17 \\ \hline 686 \end{array}$$

Fonte: Acervo particular da pesquisadora.

Figura 9: Resolução do problema 1 mais o complemento formulado pela equipe 2 apresentada pela equipe 3.

Handwritten work on lined paper showing calculations:

- $10 \text{ km} = 7,00$
- $100 \text{ km} = 70,00$
- $2 \text{ km} = 1,40$
- $800 \text{ m} = 0,56$
- $R = 100 \text{ km} + 2 \text{ km} + 800 \text{ m} = 102,8$
- $R = 97 \text{ km}$
- Note: $\text{km} - \text{a bandeirada}^*$

Fonte: Acervo particular da pesquisadora.

Figura 10: Resolução do problema 1 mais o complemento formulado pela equipe 2 apresentada pela equipe 10.

Handwritten work on lined paper showing calculations:

- Cliente 72 - Bandeirada = 68,50
- $0,70 \times 97 = 67,90$
- Dinheiro gasto
- $\text{km} = 97$
- $\text{metro} = 0,60$
- 28,0
- 56
- 40, km
- 80, km

Fonte: Acervo particular da pesquisadora.

Comentário: Os procedimentos adotados pelas equipes para obterem a resposta foram o mais variados possíveis. Optamos por apresentar apenas algumas respostas, pois muitas delas se repetiam sistematicamente, e escolhemos apenas as mais diversificadas. Os alunos aplicaram seus conhecimentos prévios para a situação, mas as repostas foram as mesmas. Mesmo assim alguns não conseguiram resolver o problema. No entanto, por trabalharem em equipe e precisarem da confirmação do professor ou da resposta final de um autor num livro didático, o parceiro da equipe 10, com dúvida, cancelou a resposta apresentada pelo companheiro (vide figura 7) por desconhecer e discordar do procedimento adotado pelo companheiro.

Após solucionarmos a questão anteriormente apresentada, começamos a propor outros valores que poderiam ter sido pagos no lugar dos R\$ 72,00 e, na parte esquerda

da lousa, montamos uma tabela associando tais valores encontrados e construímos um gráfico relacionando tais resultados. Este item demonstrou de forma clara e prática a relação entre as grandezas envolvidas nas questões. Podemos discutir e responder questões do tipo:

A09: Assim fica fácil perceber que quanto mais longe for, mais caro sairá o passeio.

A01: Porque quando a senhora explica fica fácil e quando tentamos sozinhos é tão difícil de fazer?

A18: A01 tem razão, resolvendo junto é mais fácil, mas não consigo resolver essa outra sozinho.

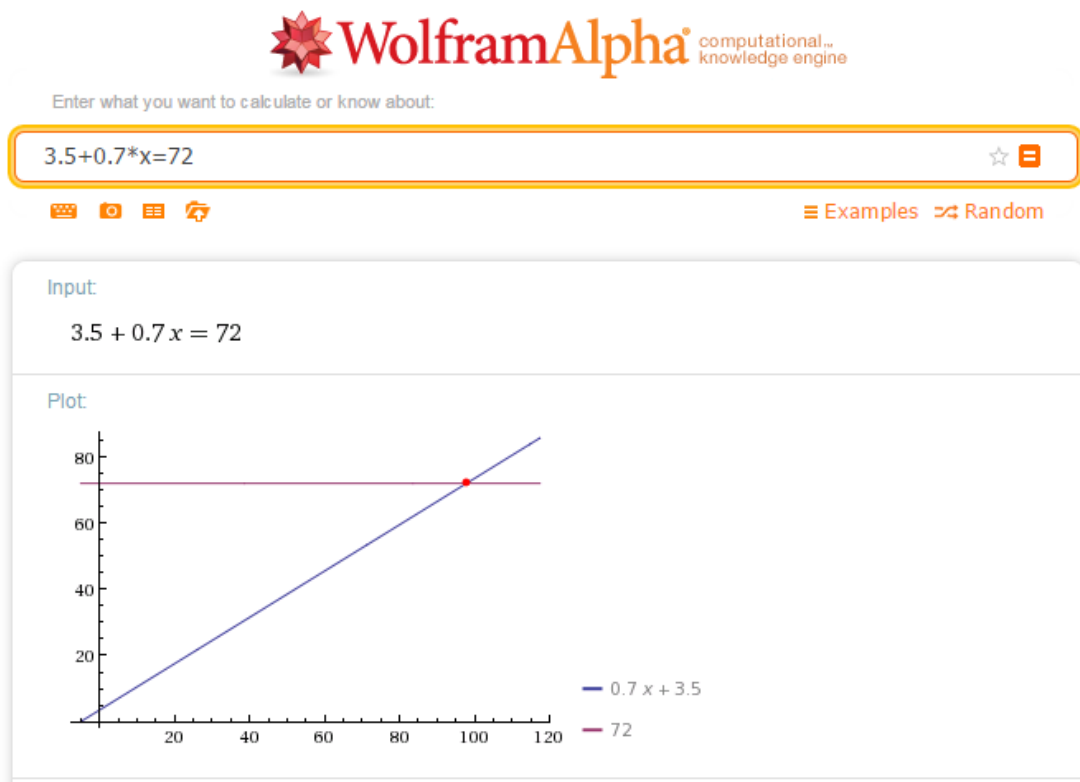
Professora: (apontando para o slide da outra questão, diz:) Presta bem atenção, vamos ver quais informações o problema nos fornece e separá-las para quando precisarmos. Feito isso, verifica se existe semelhança entre a situação a ser resolvida e a que já resolvemos. Agora é com vocês.

Surgiu um despertar em mais algumas equipes e conseguiram resolver a situação. Só então foi apresentado o software para solucionar as mesmas situações e outras semelhantes. No primeiro contato, utilizamos apenas um computador para resolver a situação coletivamente e depois cada equipe utilizou suas máquinas para resolver a situação individualmente. Algumas equipes que foram terminando foram resolvendo outras questões utilizando o software, dessa vez retiradas dos seus livros didáticos.

Dado o problema proposto inicialmente, juntamente com o complemento formulado pela equipe 2:

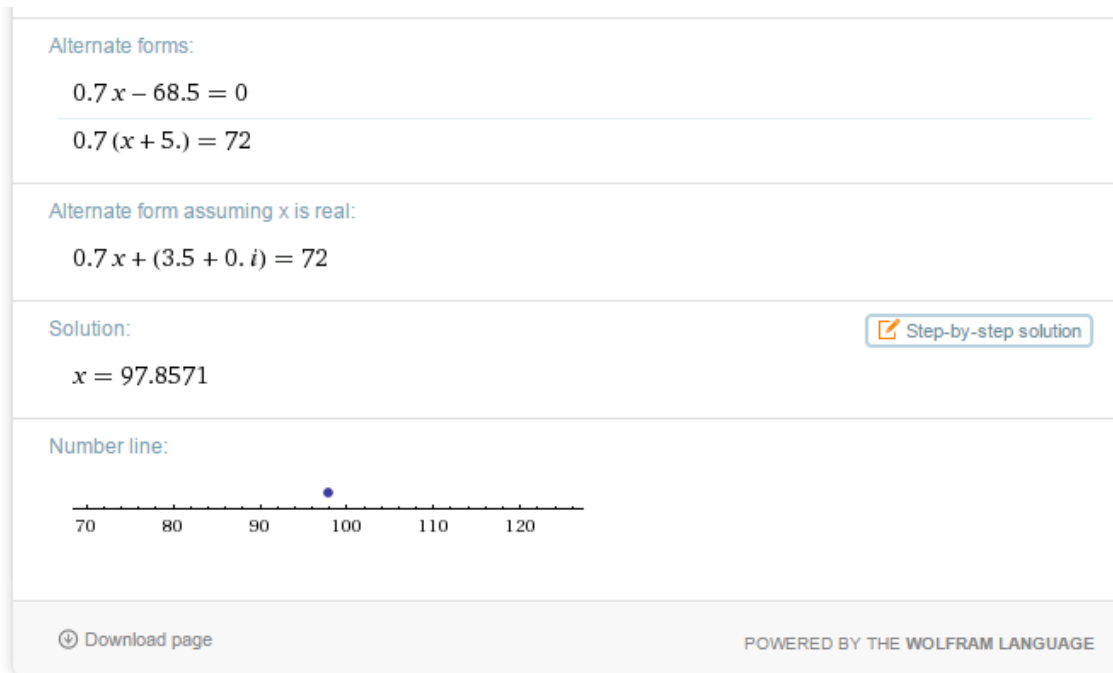
Problema 1: Um motorista de táxi cobra R\$ 3,50 de bandeirada (valor fixo) mais R\$ 0,70 por quilômetro rodado (valor variável). *Um cliente pagou R\$ 72,00. Quantos km ele percorreu?*

Figura 11: Solução do problema apresentada usando o Wolfram.



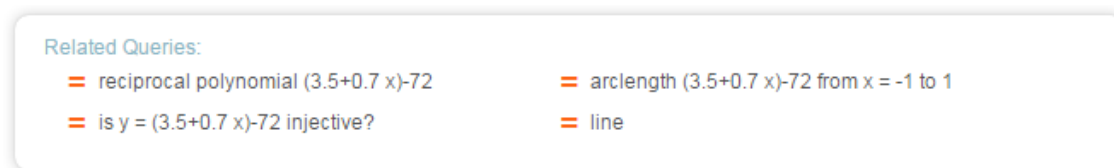
Fonte: *Printscreen* feito pela pesquisadora.

Figura 12: Solução do problema apresentada usando o Wolfram (continuação da imagem anterior).



Fonte: *Printscreen* feito pela pesquisadora.

Figura 13: Solução do problema apresentada usando o Wolfram (continuação da imagem anterior).



Fonte: *Printscreen* feito pela pesquisadora.

Comentário: A figura 11 permitiu visualizar a reta que demonstra o deslocamento em relação ao valor de x procurado. Diante da situação apresentada, a reta azul representa esse deslocamento e a lilás o valor pago pela corrida, R\$ 72,00. O ponto em vermelho indica o exato valor desconhecido, o “ x ” da questão. Durante a resolução coletiva, não manuseamos o mouse do computador para movimentarmos a posição do ponto encontrado, o valor do “ x ”, mas, durante a resolução das equipes, eles começaram a deslocar o ponto ao longo da reta, buscando as respostas para suas perguntas e formulando novas questões. Um dos questionamentos da equipe 6 foi:

Equipe 6: O que representa/significa essas novas retas sobre o gráfico quando passo o mouse sobre o gráfico?

A equipe 11 se encarregou de responder imediatamente:

Equipe 11: Você não vê que é o valor e a quilometragem diminuindo, assim encontramos novos valores para o “ x ”.

Essa resposta nos deixou felizes e realizadas, pois, ao utilizarem o programa, reduzimos parte das nossas ações no processo de resolução momentaneamente, mas, numa outra atividade, durante a revisão ofertada pela instituição no início do ano letivo, vimos que esses mesmos alunos tinham dificuldade em realizar o processo de construção das tabelas e gráficos mediante uma expressão algébrica estruturada na forma de função.

Na figura 8, que é continuação da imagem anterior, eles visualizaram outras maneiras de apresentar a mesma função e a exata solução procurada, em conjunto com sua representação na reta numérica.

Essa atividade está relacionada à contextualização/exploração e busca facilitar a compreensão da situação proposta e permitir uma saída estratégica e perceptível em situações cotidianas, nas quais é possível a utilização de algum recurso extra para a obtenção de um resultado.

Percebemos que a maior dificuldade encontrada na turma eram os cálculos matemáticos e as etapas a serem seguidas.

Comentário: *Durante a visualização da figura 11, percebemos que a imagem obtida não satisfaz ao domínio da função, pois, diante da situação-problema apresentada, tais resultados apresentariam valores discretos e não contínuos como se apresenta no gráfico da questão.*

Finalizamos a aula apresentando a solução das questões, mas, até o momento, em apenas um computador para visualização, sem maiores cobranças para os que se dispuseram a realizar as etapas do processo nos seus computadores.

Encontro 4 - 19/03/2014

Conteúdos desenvolvidos na aula: Conceito de função, resolução e exploração de problemas.

Retomamos as mesmas equipes e distribuimos novas questões, dentre as elaboradas pelos alunos. Dessa vez, os acréscimos escolhidos foram os das equipes 1 e 4.

Problema 1 – parte proposta, junto com o complemento da equipe 1.

Problema 1: Um motorista de táxi cobra R\$ 3,50 de bandeirada (valor fixo) mais R\$ 0,70 por quilômetro rodado (valor variável). *Jennifer gostaria de conhecer a cidade, mas possui apenas R\$ 58,80 na carteira. Quantos quilômetros ela poderá percorrer, sabendo que deve guardar R\$ 12,80 para o almoço?*

Problema 1: Um motorista de táxi cobra R\$ 3,50 de bandeirada (valor fixo) mais R\$ 0,70 por quilômetro rodado (valor variável). *Durante os finais de semanas e feriados, o valor da bandeirada reduz em 50% e a quilometragem tem um acréscimo de R\$ 0,30. Quatro amigos pegam um táxi e percorrem 10 km. Qual o valor pago por cada?*

Pedimos apenas para escreverem a situação numa linguagem matemática sem que fosse preciso resolvê-la, pois iríamos utilizar o software para tal processo.

Professora: *Será que o problema do jeito que foi proposto na primeira aula estava realmente incompleto?*

A14: *Dá pra ver que não, professora. A gente é que não entendeu.*

Professora: *Será que se ele fosse aplicado agora vocês iriam questionar daquele jeito?*

A19: *Acho que não, porque dá pra ver que talvez ele tivesse completo, mas dependia apenas do que se pedia.*

Professora: *Vocês concordam com A19?*

Alunos: *(maioria) Sim.*

Professora: *Vocês nem esperaram sentir o problema, é preciso compreender a situação e apenas uma leitura inicial nem sempre nos permite isso.*

Demos um tempo para que resolvessem o problema. E, para a nossa surpresa, dessa vez as dificuldades foram menores para a questão 1 (proposta pela equipe 1) e os alunos apresentaram maior dificuldade com a questão 2 (proposta pela equipe 3). O mais interessante é que a própria equipe que a elaborou a questão teve dificuldade em adotar uma linguagem matemática para a situação proposta. Com uma pequena ajuda, foi possível que tivéssemos a expressão matemática da questão e pedimos para convertê-la para uma linguagem matemática computacional. Pensávamos que, diante de tantas dificuldades apresentadas inicialmente, os alunos fossem apresentar maior dificuldade nessa etapa, mas percebemos que eles conseguiram compreender as dicas e realizaram as adaptações com grande maestria.

Comentário: *O acesso ao mundo digital está a todo instante batendo à nossa porta e os jovens têm vivenciado e participado cada vez mais desse mundo tecnológico que encanta, atrai, abre as portas para muitos e exclui quem não se adapta às novas situações.*

Digitamos a expressão proposta pela equipe 1 no programa computacional e demos o comando para solucionar. Ao observarem que podiam resolver tais questões com menos trabalho, ficaram contentes e, por conta própria, algumas duplas começaram a praticar com as questões já resolvidas anteriormente. Aproveitamos a ocasião e comparamos as etapas das soluções. Percebemos que, na resposta proposta pelo programa computacional, falta parte do passo a passo, pulando rapidamente para a resposta final. No entanto, eram fornecidos alguns dados a mais que os solicitados.

Pedimos que retomassem à questão proposta e, como já dispunham do resultado final e de algumas outras etapas do processo de solução, tentassem solucionar a questão por completo sem utilizar o programa. Como podemos observar nos diálogos a seguir:

A19: Professora, posso resolver do jeito que eu quiser?

Professora: Sim, pode sim. Fiquem à vontade.

A22: E posso olhar no programa para acompanhar as etapas e ver a resposta?

Professora: Sim. Pode fazer isso.

Passados alguns minutos, uma equipe nos chama e mostra uma tabela com alguns valores que seriam soluções da questão. Perguntamos de onde saíram aqueles valores, pois não apresentaram as soluções e a equipe foi bem enfática ao dizer:

Equipe 8: Se o que buscamos é uma resposta e quando A22 perguntou se podíamos olhar no programa, pensamos em montar a tabela olhando o gráfico já que temos os valores no programa e podemos movimentá-lo reduzindo ou aumentando os valores e também temos a expressão.

Professora: Mas, pedimos a solução da questão para obter tais respostas.

Equipe 8: Ah, tá. Entendi agora. Então vou refazer.

Assim, passados alguns minutos, a equipe apresentou a resposta e ainda despertou a curiosidade das outras equipes falando do termo em inglês no programa que detalha o passo a passo da solução da questão.

Comentário: *O uso dos recursos tecnológicos favorece o aprendizado quando se permite a compreensão da situação trabalhada e também quando se sabe o que está fazendo, pois, caso contrário, sem tais recursos, o aluno poderá sentir-se perdido e não conseguir resolver a situação proposta.*

Logo após, mostramos aos alunos que o programa tem como detalhar toda a solução da questão. Porém, não adianta fazer isso se não soubermos resolvê-lo sem o programa e não tivermos ideia do que estamos fazendo.

Comentário: *Se agirmos assim, será apenas cópia sem compreensão. As etapas seguintes vivenciadas estão relacionadas aos objetivos propostos, mediante os*

quais foi possível a utilização dos recursos tecnológicos para solucionar os problemas e a exploração dos dados obtidos.

Finalizamos a aula com a revisão das etapas apresentadas por eles. Comparando as respostas elaboradas manualmente com a fornecida pelo programa, conseguimos ver que as respostas estavam corretas. Algumas equipes apresentaram etapas diferentes na resolução, fornecendo mais detalhes em alguns casos e omitindo, em outros, quando comparadas às fornecidas pelo programa computacional.

4.2 Unidade Didática II: funções polinomiais de 1º grau

Nessa unidade didática, totalizamos oito horas aulas, distribuídas em três encontros com descrições e análises de cada aula. Discutimos e resolvemos funções polinomiais do 1º grau. No entanto, demos maior ênfase ao processo de proposição, resolução e exploração de problemas perante a utilização do programa computacional no processo de resolução e as demais informações complementares que ele fornece.

Objetivos:

- Solidificar os conhecimentos construídos no ensino fundamental II.
- Identificar funções polinomiais de 1º grau em situações contextualizadas ao cotidiano ou aplicadas a outras áreas do conhecimento.
- Construir, ler e analisar os gráficos que representam funções polinomiais do 1º grau.
- Elaborar os próprios problemas de investigação através de situações-problema do cotidiano.
- Utilizar os recursos tecnológicos para solucionar as situações-problema propostas.
- Explorar os dados fornecidos na solução do problema.

Recursos:

- livro didático;
- computador;

- internet;
- software Wolfram Alpha (versão *free*);
- papel ofício;
- quadro,
- pincel,
- retroprojektor.

Encontro 5 - 21/03/2014

Conteúdos desenvolvidos na aula: Resolução de problema com funções do 1º grau.

Começamos a aula dando continuidade à anterior e escolhendo o complemento do problema proposto pela equipe 5 para discutirmos funções polinomiais do 1º grau.

Problema 1: Um motorista de táxi cobra R\$ 3,50 de bandeirada (valor fixo) mais R\$ 0,70 por quilômetro rodado (valor variável). *Durante uma corrida, o taxista apresenta para um cliente as seguintes opções de trajetória:*

- *Perímetro urbano (12 km) com trânsito lento;*
- *Perímetro residencial (19 km), trânsito livre.*

Como estava apressado, o cliente optou pela 2ª opção. Quanto pagou pelo percurso?

Comentário: *Optamos por continuar com os problemas já elaborados pelos alunos por ser o assunto uma continuidade das aulas anteriores. Não vimos necessidade de novas elaborações, apenas de explorações.*

Lançamos a situação a ser resolvida e discutida e, após um período de discussão entre as equipes, perguntamos se eles conheciam outros problemas que se assemelhassem a este que foram apresentados em outras disciplinas.

A04: *Parece com os de Física.*

Professora: *Isso mesmo. E tem mais algum outro?*

A turma ficou em silêncio, mas dessa fala é possível observar um avanço da turma, que estudava todos os conteúdos separadamente.

Comentário: *Diante disso, percebe-se que eles começam a relacionar os conhecimentos, mesmo que a disciplina de Física esteja sendo trabalhada pelo mesmo professor pelo 2º ano consecutivo e ainda não tenha sido feito algum tipo de relação. Durante o intervalo, tivemos a curiosidade de conversar com o professor regente sobre isso e ele disse que os alunos estavam bem, que melhoraram suas notas na disciplina de Física e que ouviu elogios de outros professores. Porém vale salientar que eles só utilizam o programa computacional nas aulas de Matemática.*

Por se tratar de questões semelhantes às já trabalhadas, não houve dificuldades em redigir a expressão matemática para o problema e buscar a resposta via programa computacional.

Comentário: *A utilização do software Wolfram Alpha nesse momento já foi mais tranquila, pois, de certo modo, os alunos já estavam mais familiarizados com o programa, o que deixou visível a praticidade empregada na busca da solução da questão. No entanto, infelizmente, esse fato não ocorreu com todas as equipes.*

Como acréscimo, sugerimos mais dois problemas para que as equipes pudessem escolher e resolver apenas um deles. Mas, antes, comentamos que agora poderiam trocar de equipes caso quisessem e apenas duas equipes demonstraram interesse em fazer essa troca, pois uma delas é de irmãos e a outra de namorados. Aceitamos tais mudanças, permitindo que os irmãos e o casal ficassem juntos. Entretanto, para a nossa surpresa, no decorrer do processo de resolução, preferiram retornar às equipes anteriores. Os problemas sugeridos foram:

Problema 2: A COMPESA detectou uma certa companhia jogando ácido sulfúrico num rio da cidade, multou-a em R\$ 125.000,00 mais R\$ 1.000,00 por dia até que a companhia se ajustasse às normas legais que regulamentam os índices de poluição. Expresse o total de multa como função do número de dias em que a companhia continuou violando as normas (IEZZI, 2010).

Figura 14: Forma algébrica e gráfica do problema 2.

Input

$$M(d) = 125 + 1 d$$

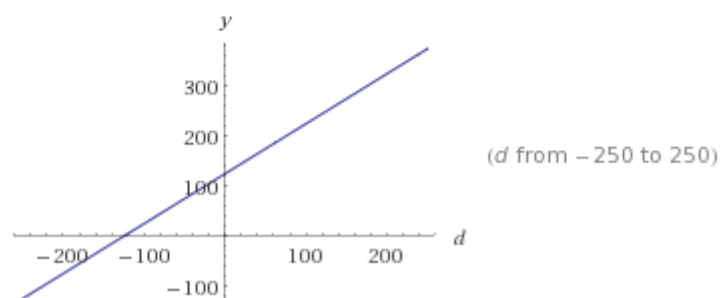
Result

$$M(d) = d + 125$$

Geometric figure:

line

Plot



Fonte: *Printscreen* elaborado pela pesquisadora.

Comentário: *Um dos pontos negativos do trabalho com o programa computacional foi que o domínio e a imagem do gráfico apresentado pelo programa não condiz com o domínio e a imagem do problema quando trabalhado em sala de aula, pois, em sala, foi resolvido de forma discreta, e utilizando o programa computacional, o gráfico apresentou-se de forma contínua.*

Problema 3: Em algumas cidades, você pode alugar um carro por R\$ 154,00 por dia mais adicional de R\$ 16,00 por km. Determine a função por um dia e esboce-a no gráfico. Calcule o preço para se alugar o carro por um dia e dirigi-lo por 200 km.

Figura 15: Forma algébrica e solução do problema no programa Wolfram Alpha.

The image shows the Wolfram Alpha interface. At the top, the logo reads "WolframAlpha computational knowledge engine". Below the logo is a search bar containing the equation $P(d) = 154 + 16*d$. To the right of the search bar are icons for input methods and a "Examples" button. Below the search bar is a light blue box with the text "Assuming 'P' is a math function | Use as referring to geometry instead". The main content area is divided into two sections: "Input" showing $P(d) = 154 + 16 \times 200$ and "Result" showing $P(d) = 3354$.

Fonte: *Printscreen* elaborado pela pesquisadora.

Demos um tempo para a leitura e identificação dos dados fornecidos quanto ao problema proposto. Finalizamos a aula apenas com a obtenção dos dados e o processo de escolha da solução.

Encontro 6 - 26/03/2014

Conteúdos desenvolvidos na aula: Resolução de problema com funções do 1º grau.

Começamos a aula retomando os problemas anteriores. Pedimos para que escolhessem apenas um dos problemas apresentados para resolvê-lo. Quatro equipes escolheram o primeiro problema e as demais o segundo problema.

Comentário: *Acreditamos que tal escolha se deva ao fato de que, no segundo problema, já é possível determinar uma resposta imediata diante da estrutura visivelmente clara apresentada por ele, enquanto no primeiro problema proposto isso não fica tão evidente para os alunos que ainda apresentam um pouco de dificuldade em visualizar e buscam apenas uma resposta para o problema dado. Além disso, foi solicitado o gráfico no primeiro problema.*

Em seguida, solicitamos que se redigisse a expressão matemática do problema escolhido pela equipe, escrevesse sua versão na linguagem computacional, lançasse-a no programa e encontrasse a solução. Começamos a discutir o resultado para determinado valor solicitado e sobre a variação desses valores na representação do gráfico. Mesmo tratando-se de problemas diferentes, ambos tinham algo em comum: seus gráficos eram bastante semelhantes por se tratar de função afim crescente.

Comentário: *Essa atividade atende aos objetivos propostos e o programa computacional favorece visualizar o gráfico e suas mudanças para determinados pontos sugeridos durante a exploração do problema. Pudemos observar que, para o valor atribuído na situação, por exemplo, no segundo problema, o programa computacional o localiza numa reta numérica.*

Demos o tempo necessário para os alunos solucionarem o problema escolhido inicialmente, mas sugerimos que o outro problema apresentado também fosse resolvido. Mais uma vez, finalizamos a aula resolvendo o problema não escolhido inicialmente pela equipe sem a ajuda do programa computacional, mas detalhando o máximo possível as etapas e a construção do gráfico. Além disso, pedimos que trouxessem problemas ou recortes de reportagem para que pudéssemos transformá-los em problemas envolvendo funções polinomiais do 1º grau.

Encontro 7 - 28/03/2014

Conteúdos desenvolvidos na aula: Resolução de problema com funções do 1º grau.

Iniciamos a aula revendo o problema anterior. Escolhemos o primeiro problema proposto.

Problema 2: A COMPESA detectou uma certa companhia jogando ácido sulfúrico num rio da cidade, multou-a em R\$ 125.000,00 mais R\$ 1.000,00 por dia até que a companhia se ajustasse às normas legais que regulamentam os índices de poluição. Expresse o total de multa como função do número de dias em que a companhia continuou violando as normas (IEZZI, 2010).

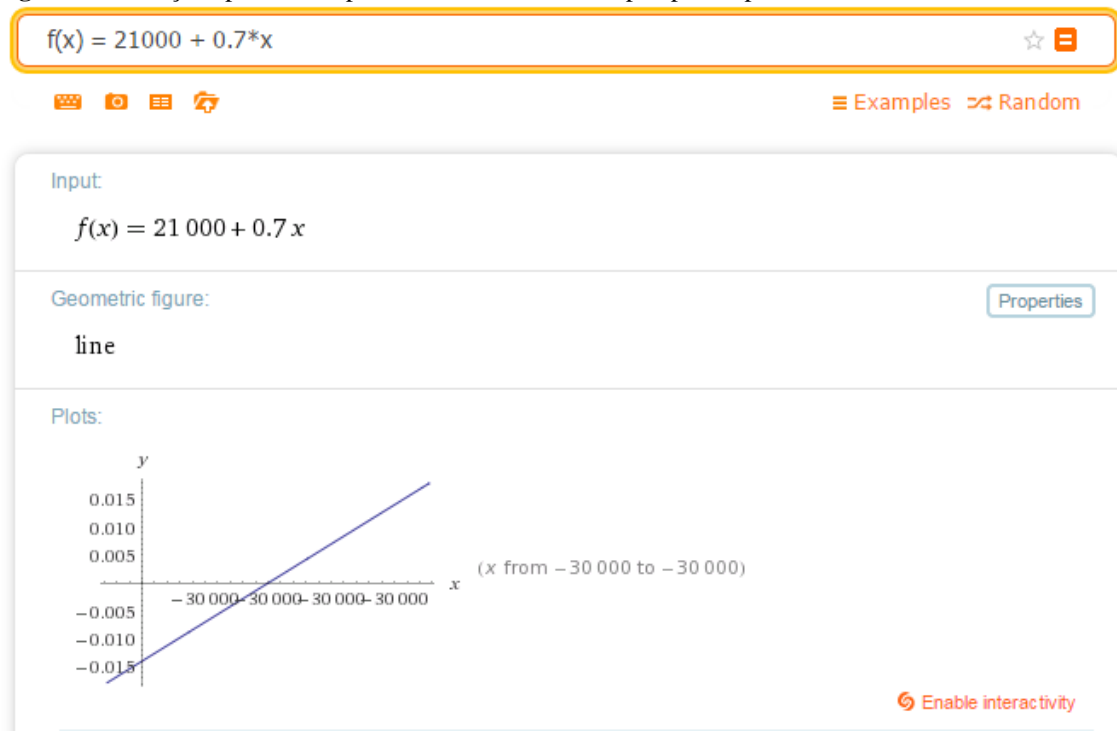
Começamos a atribuir valores à função, construímos uma tabela com tais resultados e elaboramos novas problemáticas oralmente para complementar o problema inicial. Todas as equipes tiveram a oportunidade de elaborá-los oralmente. Algumas problemáticas apresentadas se assemelharam muito às aquelas propostas/encontradas nos livros. Aproveitamos para resolver coletivamente cada situação nova proposta pelas equipes via programa computacional. Dentre as discussões, exploramos domínio, contradomínio, imagem e raízes da função. Eles perceberam que a situação era semelhante às apresentadas nos livros didáticos e também no questionário prévio aplicado antes do início das aulas e começamos a propor mudanças para essas situações. Todavia, essa etapa fugiu do planejado e, depois de um tempo de discussão, retornamos ao que havíamos planejado.

***Comentário:** Aproveitamos as etapas da resolução do problema pelo programa computacional para compararmos seus resultados com os já realizados manualmente na aula anterior por algumas equipes e vimos que o programa fornece bem mais detalhes do passo a passo da resolução que os solicitados na questão. Não obstante, nas etapas resolvidas manualmente, também pudemos encontrar informações não disponibilizadas no programa durante a resolução do problema.*

Em seguida, iniciamos a leitura dos problemas e reportagens propostas pelos alunos e sugerimos que escolhêssemos apenas duas situações para serem trabalhadas. As situações escolhidas pelo grande grupo foram:

Problema 4: Uma companhia de gás irá pagar para um proprietário de terra R\$ 21.000,00 pelo direito de perfurar a terra para encontrar gás natural e R\$ 0,70 para cada mil pés cúbicos de gás extraído. Expresse o total que o proprietário irá receber como função da quantidade de gás extraído. Esboçar o gráfico.

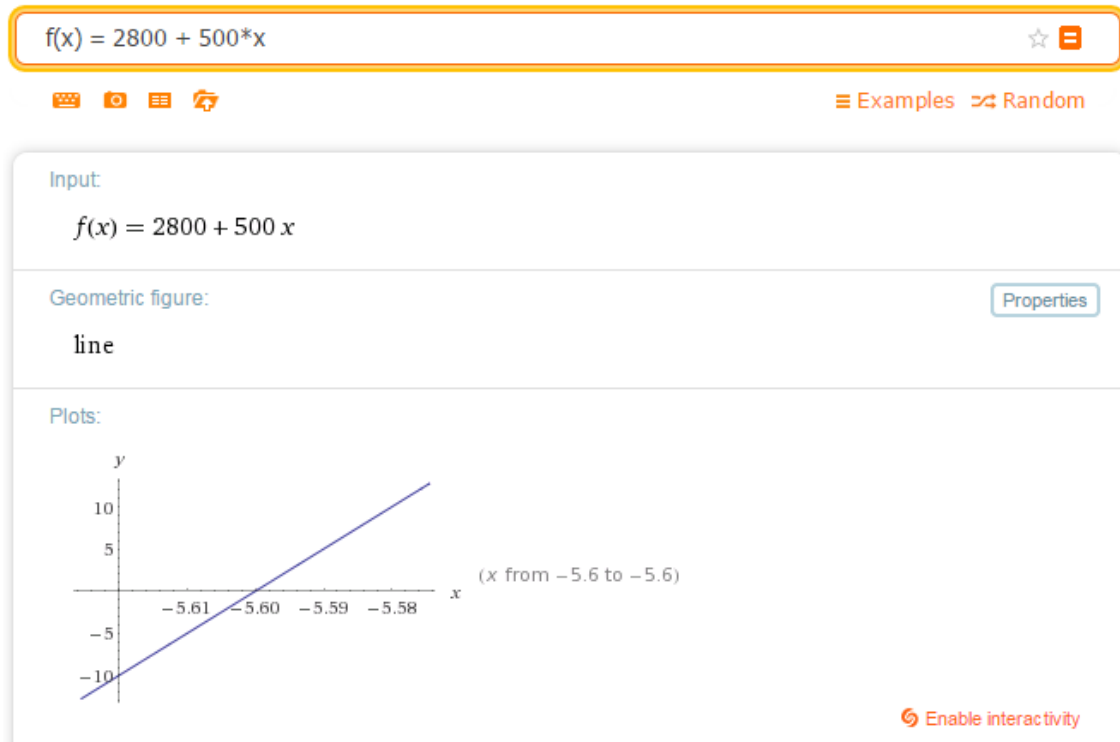
Figura 16: Solução apresentada pelo software Wolfram Alpha para o problema 4.



Fonte: *Printscreen* elaborado pela pesquisadora.

Problema 5: Em 2013, um paciente pagava R\$ 500,00 por um dia em um quarto de hospital semiprivativo e R\$ 2.800,00 por uma operação de apêndice. Expresse o total pago pela cirurgia como função do número de dias em que o paciente ficou internado.

Figura 17: Solução apresentada pelo software Wolfram Alpha para o problema 5.



Fonte: *Printscreen* elaborado pela pesquisadora.

Comentário: apesar de mostrarem os recortes dos jornais, tais situações-problema elaboradas pelos alunos ficaram bem semelhantes a algumas encontradas nos livros didáticos. Acreditamos que tais semelhanças não são mera coincidência, pois parte dessa atividade foi realizada em casa e eles tiveram toda a liberdade para proporem seus novos problemas. Diante de tal situação, mesmo estando participando ativamente de toda a pesquisa, acreditamos que ainda exista uma certa resistência por parte dos alunos em aceitar situações novas, pois a prática de propor situações já prontas está arraigada no seu dia-a-dia escolar.

Retomamos o processo de discussão dos problemas e os alunos demonstraram mais habilidade em solucionar as questões, tanto via programa computacional como manualmente. Finalizamos a aula discutindo possíveis questões complementares para as situações em análise e buscando resolver cada nova proposição.

4.3 Unidade Didática III: funções polinomiais de 2º grau

Nessa unidade didática, totalizamos oito horas-aula, distribuídas em três encontros. Discutimos o conceito de funções quadráticas, destacando seus elementos (eixo de simetria, direção da concavidade, ponto de máximo e ponto de mínimo, coordenadas do vértice), gráfico e conjunto imagem da função. Para tanto, recorreremos ao recurso didático para nos auxiliar nos cálculos matemáticos, o software Wolfram Alpha. A utilização do programa computacional no processo de resolução como recurso auxiliar foi de grande contribuição nessa etapa do processo, além de poder usufruir das demais informações complementares que ele fornece.

Objetivos:

- Identificar funções polinomiais do 2º grau.
- Construir, ler e analisar os gráficos que representam funções quadráticas.
- Relacionar o conceito de funções quadráticas a situações do cotidiano ou aplicado a outras áreas do conhecimento e contextualizá-las.
- Resolver problemas envolvendo máximos (ou mínimos) de função quadrática, relacionando-os também à Geometria.
- Utilizar os recursos tecnológicos para solucionar as situações-problema propostas.
- Explorar os dados fornecidos na solução do problema com os recursos computacionais.

Recursos:

- livro didático;
- computador;
- internet;
- software Wolfram Alpha (versão *free*);
- papel ofício;
- quadro,
- pincel,
- retroprojektor.

Encontro 8 - 09/04/2014

Conteúdos desenvolvidos na aula: Introduzindo função quadrática e discussão das coordenadas do vértice.

Começamos a aula lançando um problema para a turma, que mais uma vez manteve as mesmas equipes iniciais. As equipes se encontravam distribuídas em semicírculo na sala de informática. Andamos pela sala com uma caixa de presente que aguçava a curiosidade deles cada vez mais. Dentro da caixa, estava a nova atividade que eles tinham de resolver: eram recortes contendo um problema matemático e um membro da equipe tinha que pôr a mão na caixa, pegar o papel contendo o problema a ser solucionado.

O problema era o seguinte:

Problema 5: Uma bola é largada do alto de um edifício e cai em direção ao solo. Sua altura h em relação ao solo, t segundos após o lançamento é dada pela expressão $h = -25t^2 + 625$. Após quantos segundos do lançamento a bola atingirá o solo?

Os questionamentos mais uma vez voltaram a surgir. Dentre eles, alguns seguiram a seguinte direção:

A06: Professora, é aula de Matemática ou de Física?

A22: É mesmo. Já fizemos essas contas em Física.

Professora: Vocês têm razão, porque se trata do mesmo assunto em questão – função quadrática.

Comentário: Tais indagações atendem ao solicitado pelo objetivo da unidade, permitindo relacionar o conceito de função quadrática aplicado a outras áreas do conhecimento.

A10: Mas essa é diferente das que fizemos. Resolve-se do mesmo jeito que em Física, professora?

Professora: Sim, mostre-me como vocês resolvem em Física e veremos se precisa de algum complemento.

A10: Tá bem.

A04: Mas ainda podemos usar o computador com as desse tipo?

Professora: Sim, mas antes quero ver o que vocês já sabem, afinal reconheceram a expressão por ser semelhante a outras já estudadas em Física.

Comentário: *Diante da última fala do A04, entendemos que realizar cálculos com calculadora ou computador era algo proibido na sua rotina. No entanto, com tais indagações, percebemos o interesse dos alunos pelo programa computacional. Mesmo assim, pedimos que resolvessem de forma manual para aperfeiçoarem o aprendizado e compreenderem a situação vivenciada, não permitindo que utilizassem o programa apenas para suprir uma falha na sua aprendizagem matemática.*

Assim, começamos a introduzir as funções quadráticas na turma. Demos um tempo para observar os possíveis resultados e começamos a andar na sala analisando as respostas. Algumas equipes se desenvolveram muito bem no processo. Entretanto, outras sentiram um pouco de dificuldade, mesmo admitindo se tratar de um assunto conhecido por eles. Alguns pediram para usar o computador; outros perguntaram como ficaria o termo elevado ao quadrado na linguagem computacional, já tentando transcrever tal processo para que, quando fosse liberado o uso do programa, garantissem a resposta ou comparassem com a obtida de forma manual, analisando os pontos encontrados e reconhecendo-os como coordenadas do vértice. No entanto, a nossa aula finalizou com a resposta manual das equipes. Depois de algumas orientações, foi possível todos concluírem a tarefa.

Encontro 9 - 11/04/2014

Conteúdos desenvolvidos na aula: Gráfico de função quadrática.

A aula começou retomando o problema da aula anterior. Redistribuímos os problemas e começamos a discutir oralmente os dados oferecidos pela questão. Construímos o gráfico com alguns valores, fizemos a leitura e analisamos os dados fornecidos.

O problema era o seguinte:

Problema 5: Uma bola é largada do alto de um edifício e cai em direção ao solo. Sua altura h em relação ao solo, t segundos após o lançamento é dada pela expressão $h = -25t^2 + 625$. Após quantos segundos do lançamento a bola atingirá o solo?

Comentário: *Vimos que, com os dados obtidos, só teríamos parte de uma parábola, mas que, ao fazermos no programa a parábola, esta se apresentava completa.*

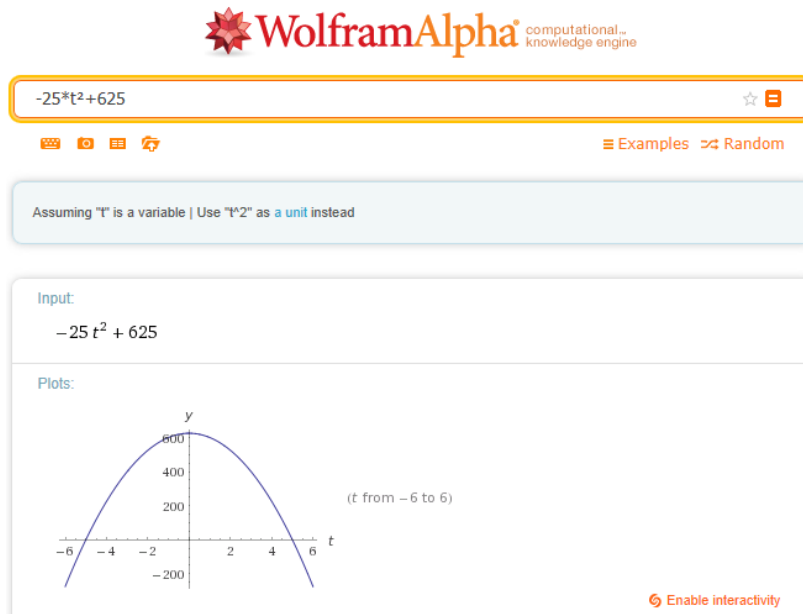
Observação respondida por um dos alunos.

A12: *O problema fala de tempo e não existe tempo negativo.*

Comentário: *A observação do aluno A12 foi perfeita, pois, quando utilizamos programas computacionais, a variável para qualquer situação é a mesma, sem necessidade de diferenciar a situação independentemente do contexto abordado. Com isso, vimos que apenas o programa não serve se não estiver associado à compreensão da situação proposta. Nesse caso, o programa contribuiu para a resolução dos cálculos, mas a compreensão e interpretação da situação-problema se deu de forma independente do programa.*

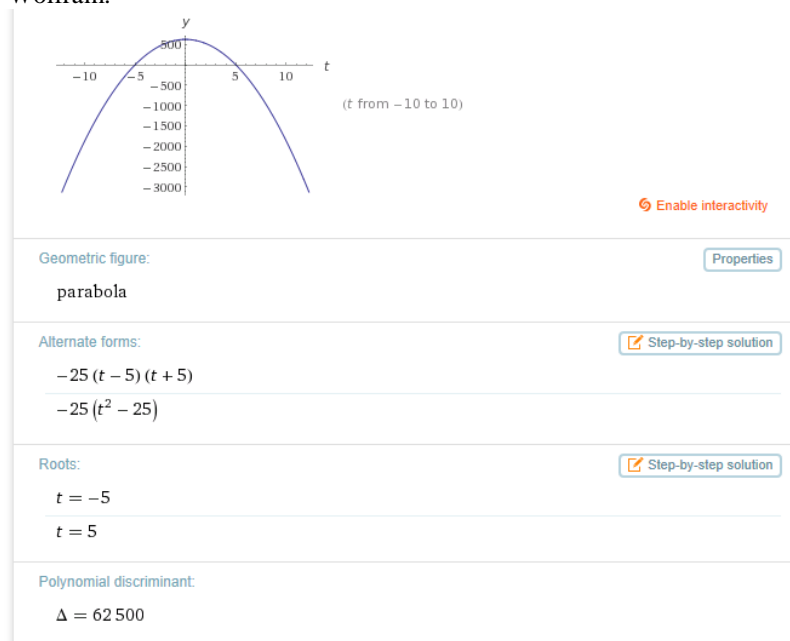
Ao analisar o gráfico, puderam-se localizar as coordenadas do vértice e associá-las às fórmulas existentes para seus cálculos, além de ter facilitado e deixado visível sua localização através do gráfico. Ao visualizar o gráfico no programa, desprezando a parte negativa, ficou possível descrever a sua trajetória e os alunos começaram a associá-la às situações descritas na Física. Com essas discussões, finalizamos a aula.

Figura 18: Representação gráfica da função quadrática pelo Software Wolfram.



Fonte: *Printscreen* elaborado pela pesquisadora.

Figura 19: Determinação das raízes e do determinante da função quadrática usando o Wolfram.



Fonte: *Printscreen* elaborado pela pesquisadora.

Figura 20: Resolução da função quadrática usando o Wolfram (continuação da imagem anterior).

Properties as a real function:

Domain:
 \mathbb{R} (all real numbers)

Range:
 $\{y \in \mathbb{R} : y \leq 625\}$

Parity:
 even

\mathbb{R} is the set of real numbers

Derivative: Step-by-step solution

$$\frac{d}{dt}(-25t^2 + 625) = -50t$$

Indefinite integral: Approximate form Step-by-step solution

$$\int (625 - 25t^2) dt = -25 \left(\frac{t^3}{3} - 25t \right) + \text{constant}$$

Global maximum:
 $\max\{-25t^2 + 625\} = 625$ at $t = 0$

Fonte: *Printscreen* elaborado pela pesquisadora.

Figura 21: Resolução da função quadrática usando Wolfram (continuação da imagem anterior).

More digits

$$\int_{-5}^5 (625 - 25t^2) dt = \frac{12500}{3} \approx 4166.67$$

Definite integral area above the axis between the smallest and largest real roots:

More digits

$$\int_{-5}^5 (625 - 25t^2) \theta(625 - 25t^2) dt = \frac{12500}{3} \approx 4166.67$$

$\theta(x)$ is the Heaviside step function

Differential geometric curves:
(requires interactivity) Enable Interactivity

Differential equation solution curve families:
(requires interactivity) Enable Interactivity

Inverse iterations:
(requires interactivity) Enable Interactivity

Download page POWERED BY THE WOLFRAM LANGUAGE

Related Queries:

- = polar plot $r^2 = -25 \theta^2 + 625$
- = sign(-25 t^2+625)
- = Nest[Power[#, #]&, -25 t^2+625, 4]
- = Fold[x #1 + #2&, 0, {a,b,c,d,e,f,g,h}]

Fonte: *Printscreen* elaborado pela pesquisadora.

Comentário: Na figura 18, encontramos a representação algébrica da função e sua representação gráfica, sendo possível movimentar o mouse e localizar alguns valores em determinadas posições. Isto possibilitou uma maior

interatividade. Na figura 19, encontra-se visível alguma forma alternativa de representação gráfica da função quadrática e seus respectivos resultados para quando a altura da bola fosse zero. Exploramos todas, mas, diante da problemática, consideramos apenas o valor positivo. Ainda nessa figura encontramos um link que dá acesso ao passo a passo da solução. Como todas as equipes já haviam resolvido o problema manualmente, algumas equipes decidiram verificar apenas por curiosidade e confrontar etapas e respostas com as suas. Não adotamos isto imediatamente, pois apenas três equipes concluíram seus trabalhos e assim procederam. As Figuras 20 e 21 fornecem dados que não são oportunos aos alunos do ensino médio, mas nada os impede de ter consciência da existência desses dados, mesmo sem explorá-los, até porque tais informações encontram-se visíveis na página imediatamente quando damos o comando de resposta. Diante dos dados apresentados na tela, foi possível explorar com a turma as raízes da função, o domínio, a imagem, direção da concavidade, ponto de máximo e mínimo para a questão trabalhada e para uma situação qualquer representada pelo gráfico. Adotando uma situação qualquer, também discutimos o eixo de simetria do gráfico e as coordenadas do vértice.

Encontro 10 - 23/04/2014

Conteúdos desenvolvidos na aula: Elementos da função quadrática.

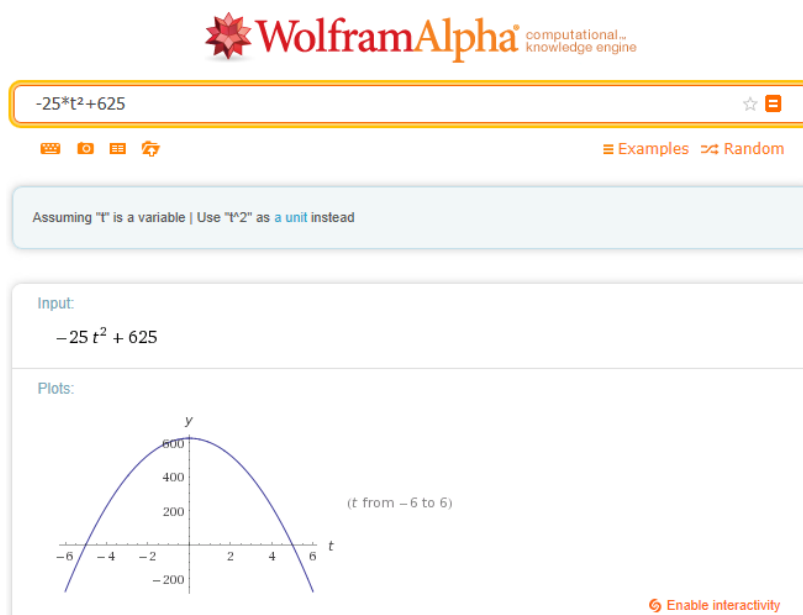
A aula começou fazendo uma retrospectiva das discussões da situação trabalhada na aula anterior.

Eis o problema:

Problema 5: Uma bola é largada do alto de um edifício e cai em direção ao solo. Sua altura h em relação ao solo, t segundos após o lançamento é dada pela expressão $h = -25t^2 + 625$. Após quantos segundos do lançamento a bola atingirá o solo?

Tendo como representação gráfica:

Figura 22: Representação gráfica da função quadrática pelo Software Wolfram.



Fonte: *Printscreen* elaborado pela pesquisadora.

Comentário: *Mais uma vez, assim como aconteceu no gráfico produzido para as funções do primeiro grau, as imagens obtidas para as do segundo grau, também não condiziam com os problemas propostos. Logo, a figura não condiz com o domínio da função, pois, diante da situação-problema apresentada, tais resultados apresentariam valores discretos e não contínuos, como se apresenta no gráfico da questão. Além disso, não teríamos representação para o tempo negativo.*

Voltamos a visualizar o gráfico descrito pelo programa computacional para a situação problema trabalhada. Começamos a explorar a situação-problema e seus elementos propostos pelo programa computacional; entre eles, a classificação da figura geométrica, o foco, o vértice, o comprimento do semieixo, o parâmetro focal, a excentricidade e a diretriz da figura.

Comentário: *Buscamos associar cada parâmetro discutido às fórmulas estudadas anteriormente e por eles já conhecidas. Os alunos também mostraram interesse por outros dados fornecidos pelo programa, mas que não seriam estudados naquela ocasião. Abrimos um espaço para falarmos sobre as derivadas e integrais apresentadas no programa, sem muitos detalhes por não*

ser nosso foco, apenas por ter despertado a curiosidade deles e para que pudessem relacioná-las a conteúdos futuros. Tentamos intervir o mínimo possível na resolução das questões e vimos o deslumbramento das equipes diante do manuseio do programa ao resolverem exercícios já resolvidos por eles na disciplina de Física e alguns outros escolhidos pelos alunos do próprio livro utilizado pela instituição de ensino.

Finalizamos a aula analisando todos os problemas já discutidos e resolvidos anteriormente pelos alunos.

4.4 Unidade Didática IV: funções modulares

Nessa unidade didática, totalizamos 12 horas-aula, distribuídas em 4 encontros com descrições e análises de cada aula. Discutimos o conceito de função modular, diferenciando-o das demais já estudadas. Nosso foco foi a proposição, resolução e exploração de problemas, reconhecendo a grande contribuição da utilização do programa computacional como recurso didático para auxiliar a compreensão do conteúdo e o processo de resolução, bem como as demais informações complementares que ele fornece.

Objetivos:

- Compreender a noção de módulo de um número real, relacionando as equações modulares, tendo a capacidade de interpretá-lo geometricamente.
- Identificar as propriedades que possibilitam o entendimento sobre caracterização de uma função descrita por uma equação modular, sendo capaz de interpretar e construir gráficos relacionados.
- Resolver equações e inequações modulares, utilizando, para tanto, as técnicas identificadas quando do estudo das funções modulares.
- Reconhecer exemplos e resolver exercícios em que as funções estejam contextualizadas em situações do cotidiano.
- Elaborar os próprios problemas de investigação através da exploração de uma situação inicial.

- Utilizar os recursos tecnológicos para solucionar as situações-problema propostas.
- Explorar os dados fornecidos na solução do problema.

Recursos:

- livro didático;
- computador;
- internet;
- software Wolfram Alpha (versão free);
- papel ofício;
- quadro,
- pincel,
- retroprojetor.

Encontro 11 - 25/04/2014

Conteúdos desenvolvidos na aula: Introduzindo função modular e elaboração de problemas.

A aula começou com uma discussão do que vem a ser uma função modular, revisando o conceito de módulo a partir dos conhecimentos prévios dos alunos e citando exemplos para facilitar a compreensão.

A13: Por que a gente não elabora problemas com esse tipo de função, como fizemos no começo?

A20: É mesmo, pois a gente quase não vê problemas com esse assunto.

A03: A20 tem razão. Eu nunca vi problema e nunca estudei com situação-problema para função modular. Podemos, professora?

Professora: Se é o que vocês querem assim, então, vamos lá, mas esse tipo exige um pouco mais de atenção na elaboração dos problemas. Antes vamos rever alguns conceitos que irão facilitar e colaborar na elaboração dos problemas.

Comentário: *Consideramos o momento interessante, pois os alunos começaram a comentar que sempre que viam esse conteúdo, o professor só lhes apresentava exercícios diretos e objetivos para resolverem e surgiu a ideia de elaborarmos algumas situações-problema como no início do curso.*

Essa proposta nos pegou de surpresa, pois tínhamos planejado outra estratégia. Mas, diante da proposta dos alunos, resolvemos adaptar. Começamos a elaboração dos problemas para as funções modulares e vimos que não seriam tão fáceis assim.

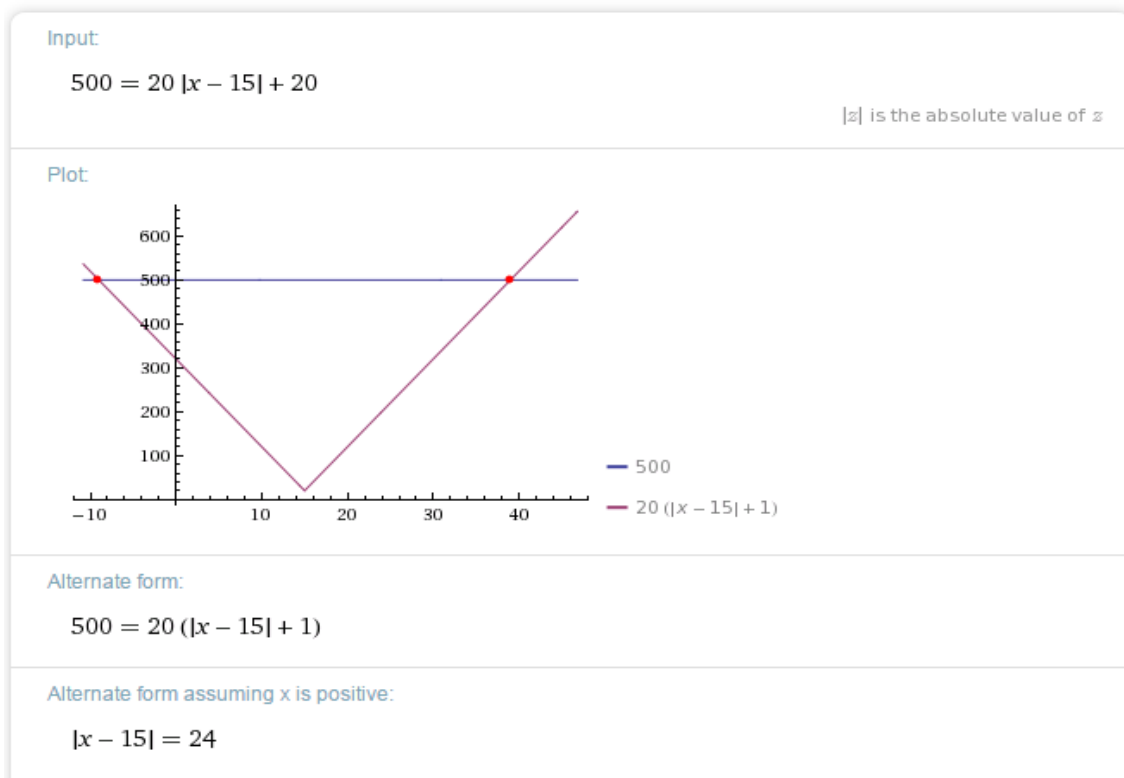
Comentário: *Diante do que era exposto pelas duplas, vimos que a maioria das situações apresentadas pelas equipes resultava quase sempre em outro tipo de expressão matemática e não no que esperávamos para uma função ou equação modular.*

Mesmo assim, após algum tempo, começamos a ver alguns problemas ganhando forma, com um pouco de ousadia, fugindo das funções modulares básicas e simples. O primeiro a surgir que atendia à solicitação foi este:

Problema 6: Em determinado mês, foi verificado que o número n de clientes que compravam na casa de bolo Bom Sucesso era dado pela lei: $n(x) = 20|x - 15| + 20$, onde $x = 1, 2, 3, \dots, 30$ representa cada dia do mês.

- a) Quantos clientes compraram bolo no 5º dia?
- b) Em qual dia o número de clientes foi 500?
- c) Em qual dia o número de clientes foi o mínimo?
- d) Em qual dia foi o máximo?

Figura 23: Representação gráfica do problema 6 apresentado pelo Software Wolfram.



Fonte: *Printscreen* elaborado pela pesquisadora.

Comentário: *No entanto, como já mencionado, nem todos os problemas elaborados se encontravam claros, concisos, precisando de uma revisão/reformulação, pois alguns trocaram as funções modulares por funções quadráticas, embora outros precisassem apenas de um complemento para a situação-problema apresentada. Um detalhe importante é que o domínio para a situação apresentada são os números naturais, e não os reais, como apresentado na figura.*

Finalizamos a aula tentando modificar as situações-problema que não se encontravam no formato esperado.

Encontro 12 - 30/04/2014

Conteúdos desenvolvidos na aula: elaboração e resolução de problemas com função modular.

A aula começou com a revisão e reelaboração dos problemas formulados pelas equipes na aula anterior, pois, como já mencionado, algumas equipes confundiram os tipos de funções modulares e quadráticas durante a elaboração dos problemas. Fizemos a leitura de todos com sugestões dos problemas coletivamente para os ajustes finais e escolhemos alguns para trabalharmos em sala de aula. Um dos reformulados foi o problema 7.

Dentre os escolhidos, estão:

Problema 7: Interessada em saber a quantidade de peças vendidas por mês (30 – trinta dias) em sua loja Samantha's Boutique, a proprietária solicitou uma pesquisa e, como resultado, obteve a expressão $q(x) = 2|x - 10| + 20$, que determina a quantidade de peças vendidas por dia.

a) Quantas foram vendidas no dia 1? E no dia 5?

Problema 8: Rebeca é economista e está orientando um dos seus clientes para equilibrar suas finanças. Viu que ele recebe por comissão, tem despesa mensal de R\$ 340,00 com supermercado, mas recebe R\$ 30,00 extra da sua mãe. Diante da situação definida por $f(x) = |x - 340| + 30$, Rebeca sugeriu que ele tentasse economizar e fizesse uma poupança pensando no futuro, guardando pelo menos o que recebia de sua mãe.

- a) Qual o valor mínimo que o cliente deve receber para quitar suas despesas e poupar pelo menos o que recebe da mãe?
- b) Qual foi a comissão do cliente se ele poupou R\$ 800,00?

Problema 9: Durante dois meses, Maria participou de um curso de espanhol em que toda semana era submetida a uma avaliação. Como sua matéria preferida é Matemática, e vendo seus resultados, criou uma lei para representar, semanalmente, seu desempenho nas avaliações. $r(x) = 2 + \frac{|x-4|}{2}$, onde $r(x)$ representa a nota obtida por Maria no exame realizado na semana e x corresponde à semana.

- a) Em qual(ais) semana(s) a sua nota foi acima de 3?
- b) Em qual semana Maria teve seu pior desempenho? Qual foi sua nota?

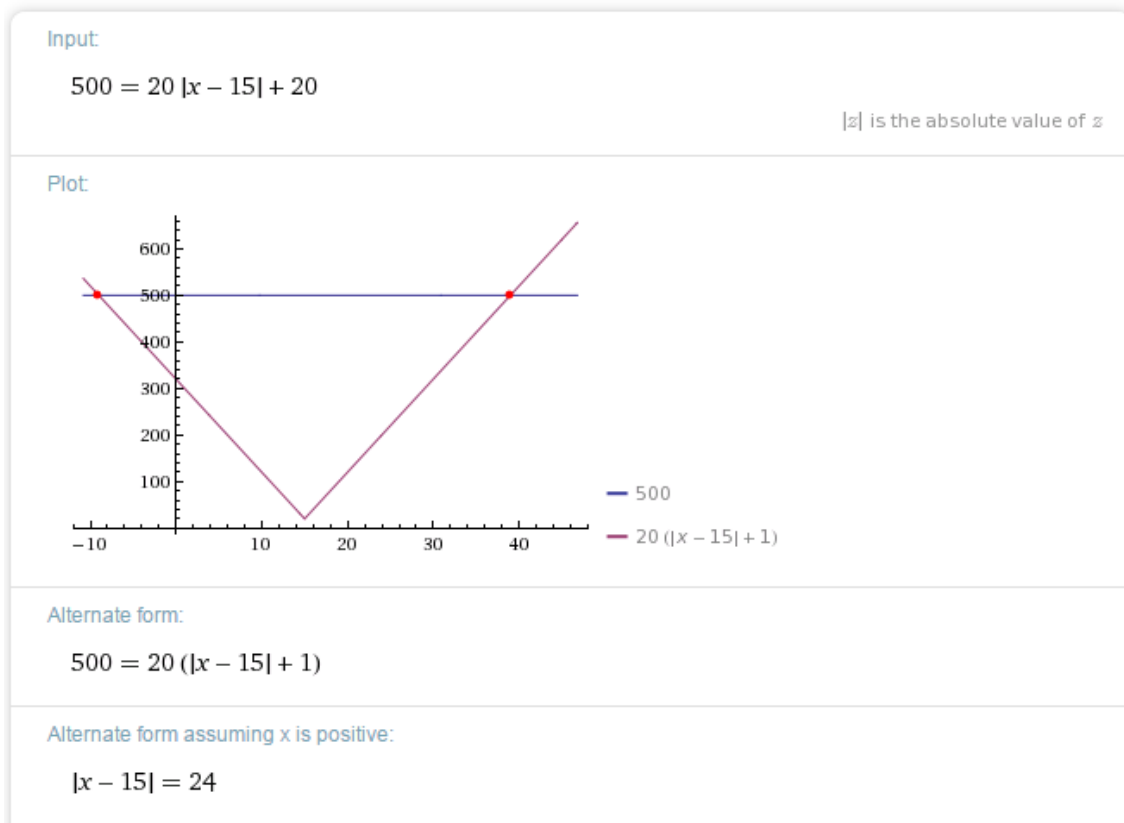
Comentário: *Percebemos que todos os problemas elaborados apresentavam uma expressão já pronta para ser utilizada dentro de um contexto abordado. Supomos que esse fato ocorra devido à frequência como se apresentam a maioria das questões sobre funções modulares trabalhadas na sala de aula e também porque o conteúdo apresenta uma certa dificuldade de interação com situações práticas. Mesmo assim, houve empenho por parte dos envolvidos em tornar clara a situação apresentada. Eles não desistiram do problema, mesmo diante das dificuldades apresentadas nas etapas de elaboração.*

Inicialmente, propomos que os alunos escolhessem apenas um problema entre os problemas 6 e 7 para resolverem.

Problema 6: Em determinado mês, foi verificado que o número n de clientes que compravam na casa de bolo Bom Sucesso era dado pela lei: $n(x) = 20|x - 15| + 20$, onde $x = 1, 2, 3, \dots, 30$ representa cada dia do mês.

- e) Quantos clientes compraram bolo no 5º dia?
- f) Em qual dia o número de clientes foi 500?
- g) Em qual dia o número de clientes foi o mínimo?
- h) Em qual dia foi o máximo?

Figura 24: Representação gráfica do problema 6 apresentado pelo Software Wolfram.



Fonte: *Printscreen* elaborado pela pesquisadora.

Problema 7: Interessada em saber a quantidade de peças vendidas por mês (30 – trinta dias) em sua loja Samantha’s Boutique, a proprietária solicitou uma pesquisa e, como resultado, obteve a expressão $q(x) = 2|x - 10| + 20$, que determina a quantidade de peças vendidas por dia.

b) Quantas foram vendidas no dia 1? E no dia 5?

Figura 25: Representação do problema 7 apresentado pelo Software Wolfram para o dia 1.

The screenshot shows the WolframAlpha interface. At the top is the logo "WolframAlpha computational... knowledge engine". Below it is a search bar containing the equation $q(x) = 2 * |x - 10| + 20$. Below the search bar are icons for keyboard, camera, list, and share, and links for "Examples" and "Random". The main content area is divided into three sections: "Input" showing the equation $q(x) = 2 |1 - 10| + 20$ and a note " $|z|$ is the absolute value of z "; "Result" showing $q(x) = 38$; and "Geometric figure:" showing "line" with a "Properties" button.

Fonte: *Printscreen* elaborado pela pesquisadora.

Figura 26: Representação do problema 7 apresentado pelo Software Wolfram para o dia 5.

The screenshot shows the WolframAlpha interface. At the top is the logo "WolframAlpha computational... knowledge engine". Below it is a search bar containing the equation $q(x) = 2 * |x - 10| + 20$. Below the search bar are icons for keyboard, camera, list, and share, and links for "Examples" and "Random". The main content area is divided into three sections: "Input" showing the equation $q(x) = 2 |5 - 10| + 20$ and a note " $|z|$ is the absolute value of z "; "Result" showing $q(x) = 30$; and "Geometric figure:" showing "line" with a "Properties" button.

Fonte: *Printscreen* elaborado pela pesquisadora.

Era preciso converter a situação para uma linguagem computacional e aplicar o programa, buscando uma solução. Finalizamos a aula com a visualização das tentativas das soluções obtidas com o programa utilizado.

Encontro 13 - 07/05/2014

Conteúdos desenvolvidos na aula: resolução de problema com função modular e construção de gráfico.

Começamos a aula retomando os problemas discutidos e solucionados na aula anterior, buscando analisar as soluções dos problemas das funções modulares propostas.

A02: Com a expressão já pronta, fica mais fácil resolver.

A14: É mesmo. É só aplicar o programa e tudo fica pronto.

Professora: Simples assim? É só isso que temos que fazer? Muito bem. Preciso então que vocês reflitam sobre o que quer dizer essa expressão para nós diante do contexto? O que representa seu gráfico? Por que ele só se desenvolve nos quadrantes das ordenadas positivas? O que significa seu resultado? Perceberam os extremos? Se apenas valorizarmos o resultado, para que serve e onde fica a interpretação e a compreensão do que estamos fazendo?

***Comentário:** O fato de trabalharmos nessa ocasião com situações que apresentam expressões já prontas permitiu que aqueles alunos que não estão aptos a refletir um pouco mais sobre o problema ficassem mais à vontade e o defendessem. Mesmo assim, deparamo-nos com uma defesa de uma aluna que representa bem o que almejávamos com essa pesquisa.*

***A21:** Engraçado vocês falarem assim. Eu também já pensei assim, mas esses dias aqui eu pude ver que essa Matemática que estou aprendendo, eu utilizo na minha vida e na minha vida as conta não vem montadinha não. Na de vocês vem? Porque na minha, não. E eu tenho que me virar sozinha, faço as contas na calculadora, mas, se não tiver noção do que estou fazendo, eu vou me perder no caminho e agora tô vendo isso bem claro aqui. Faço com a calculadora porque não sei fazer contas bobas, mas, além disso, essas aulas me mostrou que eu também não sabia o que eu tava fazendo. O problema não tava só em mim. Eu não tive culpa por não saber, eu não sabia porque não entendia o que tinha que fazer. Por isso que eu gosto quando o problema vem para eu montar a conta, porque eu vou poder pensar um pouco mais e, quando precisar na minha vida, eu vou saber responder. É por pensar assim que temos tanta gente se perdendo*

nas dívidas e sem saber sair, só se afundando cada vez mais e mais. É uma pena vocês ainda pensarem assim. Pena que nessa aqui eu também não consegui fazer uma diferente, mas eu tentei. A gente ficou tentando muito tempo, mas não saiu do jeito que era pra ser. Aí acabamos fazendo assim. Mas, em casa, agora, eu pego qualquer notícia e faço um problema porque na minha vida eu tenho que resolver problema com tudo.

Comentário: *Após alguns minutos de total silêncio na turma, apenas observamos as trocas de olhares entre eles, a expressão facial e o gesticular com a cabeça de alguns concordando com o que acabavam de ouvir. Vimos que a mensagem estava sendo transmitida, que eles tinham realmente entendido o nosso propósito.*

A19: *Concordo com você, A21. Depois dessas aulas, comecei a ver as situações da minha vida com outros olhos e me sinto mais motivada a vir pra cá porque sei que algumas coisas eu não consigo mais aprender, mas isso não me impede que eu aprenda outras.*

Retomamos os problemas e após verificarmos as respostas de cada um. Construímos seus gráficos manualmente, buscando analisar seus gráficos com todos os dados fornecidos pelo programa computacional e fizemos a comparação com os gráficos fornecidos por outros tipos de funções. Após a discussão, começamos a trabalhar os problemas 8 e 9 elaborados pelos alunos.

Problema 8: Rebeca é economista e está orientando um dos seus clientes para equilibrar suas finanças. Viu que ele recebe por comissão, tem despesa mensal de R\$ 340,00 com supermercado, mas recebe R\$ 30,00 extra de sua mãe. Diante da situação definida por $f(x) = |x - 340| + 30$, Rebeca sugeriu que ele tentasse economizar e fizesse uma poupança pensando no futuro, guardando pelo menos o que recebe de sua mãe.

- a) Qual o valor mínimo que o cliente deve receber para quitar suas despesas e poupar pelo menos o que recebe da mãe?
- b) Qual foi a comissão do cliente se ele poupou R\$ 800,00?

Figura 27: Solução apresentada pelos alunos da equipe 8.

$$\begin{aligned}
 F(x) &= |x - 340| + 30 \\
 |x - 340| &= -30 & |x - 340| &= \\
 x &= -30 + 340 & x &= 30 + 340 \\
 x &= 310 & \text{ou} & \\
 \text{resp.} & \uparrow & & \\
 & & x &= 370
 \end{aligned}$$

Fonte: Acervo particular da pesquisadora.

Problema 9: Durante dois meses, Maria participou de um curso de espanhol em que toda semana era submetida a uma avaliação. Como sua matéria preferida é Matemática, e vendo seus resultados, criou uma lei para representar, semanalmente, seu desempenho nas avaliações. $r(x) = 2 + \frac{|x-4|}{2}$, onde $r(x)$ representa a nota obtida por Maria no exame realizado na semana e x corresponde à semana.

- Em qual(ais) semana(s) a sua nota foi acima de 3?
- Em qual semana Maria teve seu pior desempenho? Qual foi sua nota?

Figura 28: Solução apresentada pelos alunos da equipe 10.

$$r(x) = 2 + \frac{|x-4|}{2}$$

$$\Rightarrow r(1) = 2 + \frac{|1-4|}{2} = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$$

$$r(2) = 2 + \frac{|2-4|}{2} = 2 + \frac{2}{2} = 3$$

$$r(3) = 2 + \frac{|3-4|}{2} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$r(4) = 2 + \frac{|4-4|}{2} = 2 + 0 = 2$$

$$r(5) = 2 + \frac{|5-4|}{2} = \frac{5}{2}$$

$$r(6) = 2 + \frac{|6-4|}{2} = 3$$

$$\Rightarrow r(7) = 2 + \frac{|7-4|}{2} = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow r(8) = 2 + \frac{|8-4|}{2} = 2 + \frac{4}{2} = 4$$

Fonte: Acervo particular da pesquisadora.

Finalizamos a aula analisando e separando os dados fornecidos pelos novos problemas propostos.

Encontro 14 - 14/05/2014

Conteúdos desenvolvidos na aula: Construção e análise do gráfico de funções modulares.

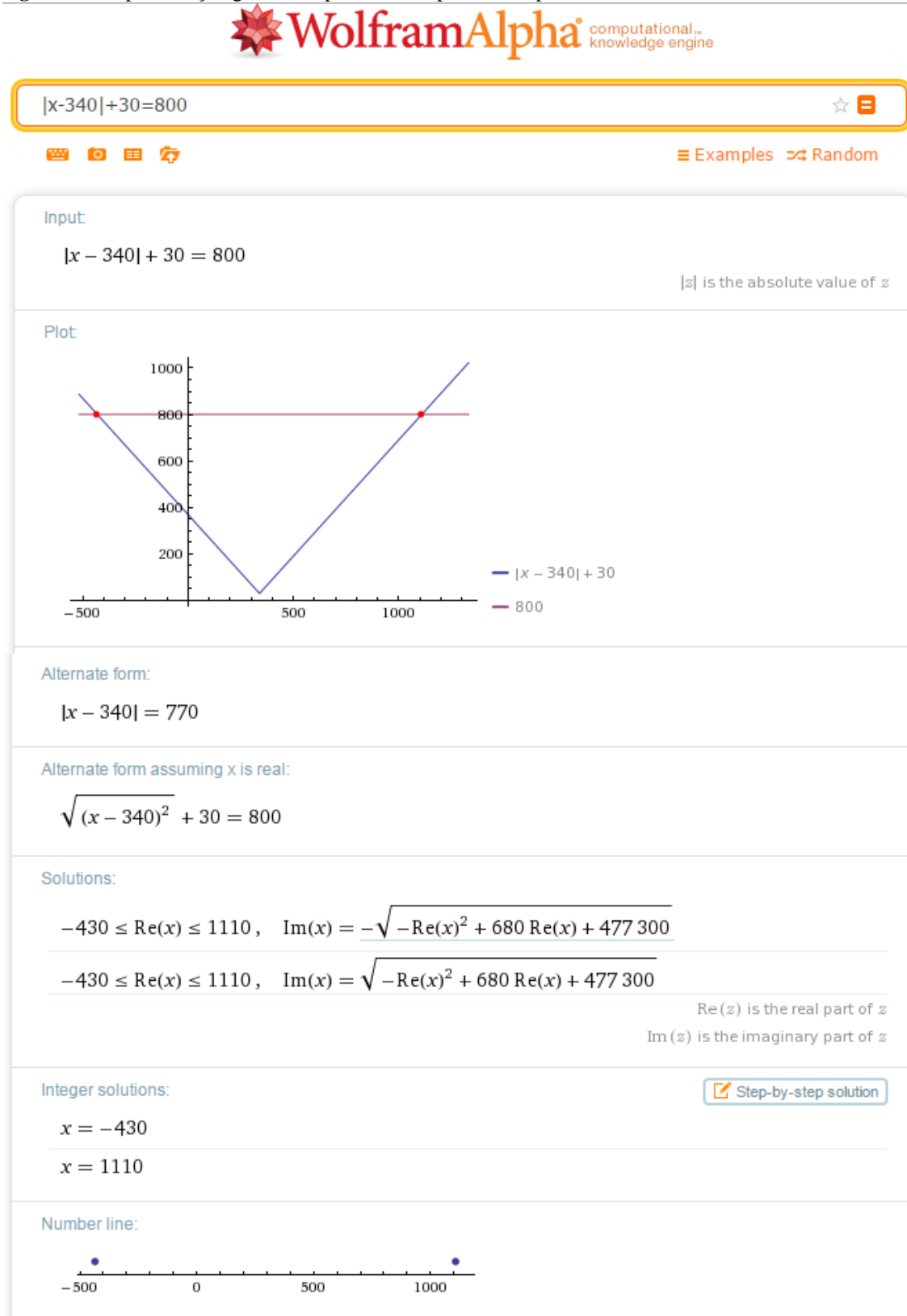
Iniciamos a aula retomando os problemas 8 e 9 elaborados pelos alunos e suas respectivas soluções apresentadas na aula anterior, solicitando que eles construíssem os gráficos das questões apresentadas, pois o tempo não havia sido suficiente para concluir na aula anterior.

Problema 8: Rebeca é economista e está orientando um dos seus clientes para equilibrar suas finanças. Viu que ele recebe por comissão, tem despesa mensal de R\$ 340,00 com supermercado, mas recebe R\$ 30,00 extra de sua mãe. Diante

da situação definida por $f(x) = |x - 340| + 30$, Rebeca sugeriu que ele tentasse economizar e fizesse uma poupança pensando no futuro, guardando pelo menos o que recebe de sua mãe.

- a) Qual o valor mínimo que o cliente deve receber para quitar suas despesas e poupar pelo menos o que recebe da mãe?
- b) Qual foi a comissão do cliente se ele poupou R\$ 800,00?

Figura 29: Representação gráfica do problema 8 apresentado pelo Software Wolfram.



Fonte: *Printscreen* elaborado pela pesquisadora.

Problema 9: Durante dois meses, Maria participou de um curso de espanhol em que toda semana era submetida a uma avaliação. Como sua matéria preferida é Matemática, e vendo seus resultados, criou uma lei para representar, semanalmente, seu desempenho nas avaliações. $r(x) = 2 + \frac{|x-4|}{2}$, onde $r(x)$ representa a nota obtida por Maria no exame realizado na semana e x corresponde à semana.

- a) Em qual(ais) semana(s) a sua nota foi acima de 3?
- b) Em qual semana Maria teve seu pior desempenho? Qual foi sua nota?

Comentário: Para o problema 9 optamos pela construção do gráfico manualmente. Por apresentarem semelhanças na estrutura e contexto da problematização, as novas questões apresentadas não apresentaram dificuldades na compreensão nem na resolução. No entanto, paramos um pouco para lançar um olhar especial aos gráficos fornecidos pelo programa computacional.

Buscamos solucionar os problemas e analisar seus gráficos, retomando e comparando-os com os dos outros problemas de função modular já solucionados, em busca de analisar as divergências e semelhanças para funções representadas pela mesma expressão sem o módulo.

A16: Poxa! Nunca tinha percebido isso desse jeito. É interessante como fica o gráfico de uma função quadrática quando a transformamos em função modular.

A18: É mesmo. Assim, fica fácil compreender tudo que acontece na questão e também, quando fazemos alguma mudança, não precisamos resolver tudo até encontrar a resposta, quase sempre incompleta, para vermos todas essas etapas.

Comentário: a fala dos alunos 16 e 18 mostra que eles observaram apenas a parte algébrica da função modular, desprezando a simbologia da função modular que a faz diferente das outras funções. Inicialmente, não nos detivemos a essa fala e não conseguimos identificar se ela se deve ao fato de termos trabalhado a função quadrática anteriormente, uma falta de conhecimento ou apenas uma observação comparando ambos os tipos de funções. Só durante as descrições essa fala nos chamou a devida atenção.

A13: Vejam isso, eu insisti quando tava fazendo o problema que o meu tava certo e agora, conhecendo o gráfico, vejo que não. Olha aqui, eu fiz do jeito que eu pensava tá certo e deu um (gráfico) igual ao outro (função quadrática) que já estamos antes, mas quando coloco essas barras, tudo muda.

A05: Também fiz com os exemplos da função do 1º grau e vejam só, encontrei resultados diferentes quando coloca as barras e para quando se tira as barras.

A06: Então o segredo tá no gráfico, professora?

Professora: Se conhecermos bem o gráfico de uma função, podemos identificar a sua expressão geradora e, conseqüentemente, classificar sua função.

Apresentamos mais algumas expressões simplificadas do livro utilizado por eles e finalizamos a aula analisando os gráficos das novas questões propostas.

Comentário: *Vale salientar que as funções modulares no contexto criado pelos alunos não expressam uma situação de modelagem real, nem as figuras propostas pelo programa computacional atendem ao domínio apresentado no contexto. Trata-se apenas de uma expressão criativa dos alunos durante as aulas quando solicitados à proposição de problemas.*

4.5 Unidade Didática V: funções exponenciais

Nessa unidade didática, totalizamos 12 horas-aula, distribuídas em quatro encontros com descrições e análises de cada aula. Discutimos o conceito de funções exponenciais, suas aplicações e seus gráficos. No entanto, nosso foco foi a proposição, resolução e exploração de problemas com funções exponenciais, tendo a utilização do programa computacional como recurso didático auxiliar no processo de resolução e as demais informações complementares que ele fornece.

Objetivos:

- Identificar uma potência, bem como suas propriedades, a fim de resolvê-las, inclusive quando no uso de notação científica.
- Identificar as características principais das funções exponenciais.
- Resolver problemas envolvendo equações exponenciais.

- Identificar, analisar, definir e interpretar o gráfico de uma função exponencial para extrair informações significativas a seu respeito.
- Reconhecer exemplos e resolver exercícios em que as funções exponenciais estejam contextualizadas em situações do cotidiano ou aplicadas a outras áreas do conhecimento.
- Utilizar os recursos tecnológicos para solucionar as situações.
- Explorar os dados fornecidos na solução do problema.

Recursos:

- livro didático;
- computador;
- internet;
- software Wolfram Alpha (versão free);
- papel ofício;
- quadro,
- pincel,
- retroprojektor.

Encontro 15 - 16/05/2014

Conteúdos desenvolvidos na aula: Revisando potência, introduzindo o conceito de função exponencial e resolução de problemas.

Começamos a aula revisando as propriedades da potenciação para introduzirmos o conceito de função exponencial. Para tanto, propomos o seguinte problema:

Problema 10: Em uma cultura de bactérias, a população dobra a cada hora. Se há 1000 bactérias no início da experiência, quantas bactérias existirão depois de:

- a) 3 horas;
- b) 10 horas.

Pedimos que os alunos fizessem a leitura da situação proposta e que tentassem resolvê-la. Demos um tempo para que as duplas obtivessem a resposta e, durante esse período, andamos pela sala acompanhando o desenvolver da questão.

A14: Mas esse problema é diferente dos outros que fizemos até aqui.

A17: Como vamos fazer agora?

A01: Assim fica difícil.

Professora: Calma. Releiam a situação, separem os dados fornecidos e observem o que se pede.

A08: Ajuda aqui, professora.

Professora: O que vamos discutir aqui já é do conhecimento de todos vocês.

Recordamos situações que relembassem as propriedades e aplicações da potenciação, citando outros exemplos simplificados de aplicação das propriedades. Nesse momento, surgiu a pergunta para o problema 10.

Professora: Já que agora vocês lembraram das propriedades da potenciação, imaginem se tivesse para o problema 10 a letra c da questão com a seguinte pergunta: E para x horas? Como vocês resolveriam o problema? O que diferencia nessa expressão e como solucionar situações como essa?

Demorou certo tempo, mas resolveram a questão. Logo após resolverem o problema 10, lançamos mais um problema semelhante à situação trabalhada.

Problema 11: Um remédio contém uma substância radioativa que apresenta meia vida de 2 horas. Se uma pessoa tomar 50mg desse remédio, qual a quantidade restante em seu organismo depois de 12 horas?

Mais uma vez, acrescentamos outra pergunta ao problema 11:

Professora: E para x horas? Qual seria a resposta? O que diferencia uma situação como essa e como solucioná-la?

Finalizamos a aula refletindo e buscando solucionar essas perguntas.

Encontro 16 - 21/05/2014

Conteúdos desenvolvidos na aula: Funções exponenciais – gráfico e o número e .

A aula começou lembrando a pergunta sobre o problema 11 da aula anterior.

Problema 11: Um remédio contém uma substância radioativa que apresenta meia vida de 2 horas. Se uma pessoa tomar 50mg desse remédio, qual a quantidade restante em seu organismo depois de 12 horas?

Mais uma vez, acrescentamos outra pergunta ao problema 11:

Professora: *E para x horas? Qual seria a resposta? O que diferencia uma situação como essa e como solucioná-la?*

Professora: *Como resolver essa situação?*

A09: *Sei que já estudamos isso, mas não sei como resolver com o programa.*

Professora: *Calma, turma, não precisa todo esse alvoroço. Inicialmente, procurem descrever a situação com uma linguagem matemática. E depois vamos tentar resolver manualmente. Sei que vocês sabem.*

Após algum tempo, vimos surgir algumas possíveis expressões matemáticas para a situação proposta, mas apenas as de duas das equipes expressavam a situação. Voltamos a discutir a situação, pois quatro equipes conseguiram descrever a situação. Após recordarmos o que solicitava inicialmente o problema e revisarmos o que estava sendo solicitado, então, mais quatro equipes evoluíram na descrição da situação em linguagem matemática.

Comentário: *Tal situação pode ter sido causada por uma falta de uma visão ampla do conhecimento onde é possível relacionar um conteúdo com outros vivenciados e também associá-lo a outras situações já estudadas. Tal dificuldade/defasagem de conhecimento é comum nessa fase e nas fases iniciais, pois os alunos tem em mente que todo assunto discutido/trabalhado nas aulas são sempre assuntos novos e não se associam aos demais estudados anteriormente.*

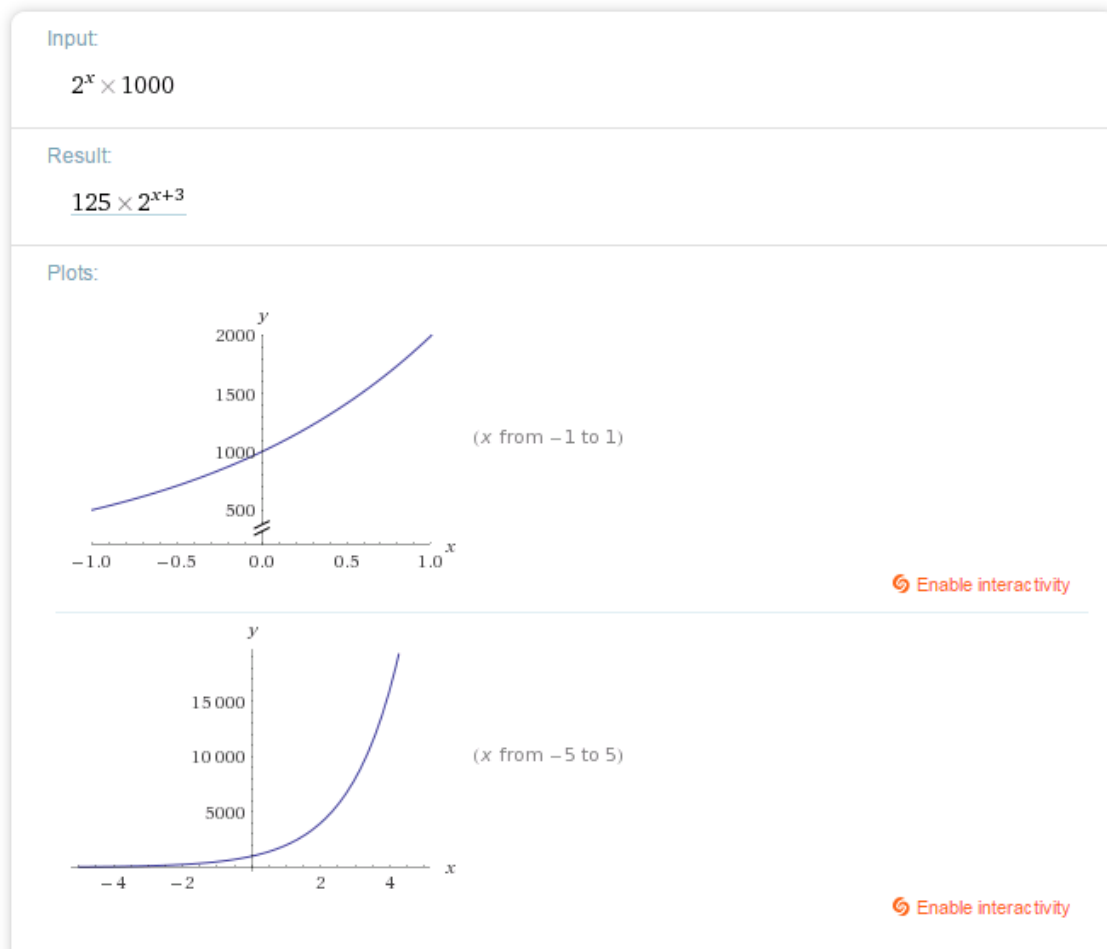
Aproveitamos a situação para apresentarmos o número e , que está presente em várias situações que representam fenômenos naturais. Finalizamos a aula com o esboço do gráfico da função trabalhada no problema 10.

Problema 10: Em uma cultura de bactérias, a população dobra a cada hora. Se há 1000 bactérias no início da experiência, quantas bactérias existirão depois de:

a) 3 horas;

b) 10 horas.

Figura 30: Representação gráfica do problema 10 apresentado pelo Software Wolfram.



Fonte: *Printscreen* elaborado pela pesquisadora.

Recolhemos o material para analisarmos e retomarmos o assunto na aula seguinte.

Encontro 17 - 28/05/2014

Conteúdos desenvolvidos na aula: Elementos da função exponencial – propriedades e análise dos gráficos.

A aula começou com a proposição de um problema para análise:

Problema12: A expressão $P(t) = k \cdot 2^{0,05t}$ fornece o número **P** de milhares de habitantes de uma cidade, em função do tempo **t**, em tempos. Se, em 1990, essa

cidade tinha 300.000 habitantes, quantos habitantes, aproximadamente, espera-se que ela tenha no ano de 2000?

A05: Nesse caso, temos a expressão pronta, mas com três variáveis. O que é pra fazer? Como resolver?

Professora: Primeiro, é preciso ler o problema. Procurem compreendê-lo. Separe o que é dado pelo problema e o que se pede.

Demos um tempo para que as duplas refletissem sobre a situação, mas ficamos acompanhando o planejamento da solução e sua execução. Buscamos antes interpretar e entender o que tratava a questão antes de aplicá-la no programa. No entanto, no decorrer do processo, decidimos resolvê-la apenas de forma manual, pois, nesse caso, a expressão já havia sido dada de forma clara e direta, sem a necessidade de intervenções para encontrá-la.

Comentário: Buscamos resolver parte do problema inicialmente de forma manual para entender os passos do problema juntamente, com as propriedades da função exponencial para permitir uma maior compreensão da situação trabalhada.

Figura 31: Resposta do problema 12 apresentada pela equipe 2.

$$P(t) = K \cdot 2^{0,005t}$$

$$t_1 = 1990$$

$$t_2 = 2000$$

$$P(t_1) = 300000$$

$$300000 = K \cdot 2^{0,005 \cdot 1990}$$

$$300000 = K \cdot 2^{99,5}$$

$$K = \frac{300000}{2^{99,5}}$$

$$P(t) = \frac{300000}{2^{99,5}} \cdot 2^{0,005 \cdot t}$$

$$P(2000) = \frac{300000}{2^{99,5}} \cdot 2^{0,005 \cdot 2000}$$

$$= \frac{300000}{2^{99,5}} \cdot 2^{100}$$

$$= 300000 \cdot 2^{0,5}$$

$$= 300000 \cdot \sqrt{2}$$

$$= 300000 \cdot 1,41$$

$$= 423000 \text{ hab.}$$

$$\frac{2^{100}}{2^{99,5}} = 2^{0,5}$$

$$2^{0,5} = 2^{1/2} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} = 1,41$$

Figura 32: Resposta do problema 12 apresentada pela equipe 1.

$$\begin{aligned}
 \bullet P(1990) &= K \cdot 2^{0,05 \cdot 1990} = K \cdot 2^{99,5} \\
 \bullet P(2000) &= K \cdot 2^{0,05 \cdot 2000} = K \cdot 2^{100} \\
 \frac{P(2000)}{P(1990)} &= \frac{K \cdot 2^{100}}{K \cdot 2^{99,5}} = \frac{2^{100}}{2^{99,5}} = 2^{100 - 99,5} \\
 &= 2^{0,5} = \sqrt{2} = 1,41 \\
 P(2000) &= P(1990) \cdot 1,41 \\
 &= 300000 \cdot 1,41 \\
 &= 423000 \text{ hab.}
 \end{aligned}$$

Fonte: Acervo particular da pesquisadora.

Finalizamos a aula analisando as respostas obtidas de forma manual, comparamos os resultados e buscando explorar as informações contidas no problema, associando-as às outras situações apresentadas pelos alunos.

Encontro 18 - 30/05/2014

Conteúdos desenvolvidos na aula: Função exponencial – análise de gráficos, aplicações e resolução de problemas.

Começamos a aula retomando o problema 12 trabalhado na aula anterior.

Problema 12: A expressão $P(t) = k \cdot 2^{0,05t}$ fornece o número **P** de milhares de habitantes de uma cidade, em função do tempo **t**, em tempos. Se, em 1990, essa cidade tinha 300.000 habitantes, quantos habitantes, aproximadamente, espera-se que ela tenha no ano de 2000?

Sugerimos algumas modificações na situação dada para analisarmos o comportamento, buscando analisar a questão social supondo, diante da expressão, a população esperada para os anos de 2010, 2030.

Professora: *Quais vantagens e desvantagens tal fenômeno causaria à cidade? Analisamos o gráfico composto para tal situação e vimos que podemos obter uma função para representar um determinado crescimento populacional.*

A03: *Mas isso pode afetar a qualidade de vida, né, professora?*

Professora: *Sim.*

E antes que complementássemos a resposta:

A22: *Essa cidade poderia ser a nossa e isso pioraria os serviços públicos, se comparamos à nossa cidade hoje.*

A12: *Tens razão. Aqui o crescimento populacional foi bem menor e os serviços só pioram com o passar do tempo.*

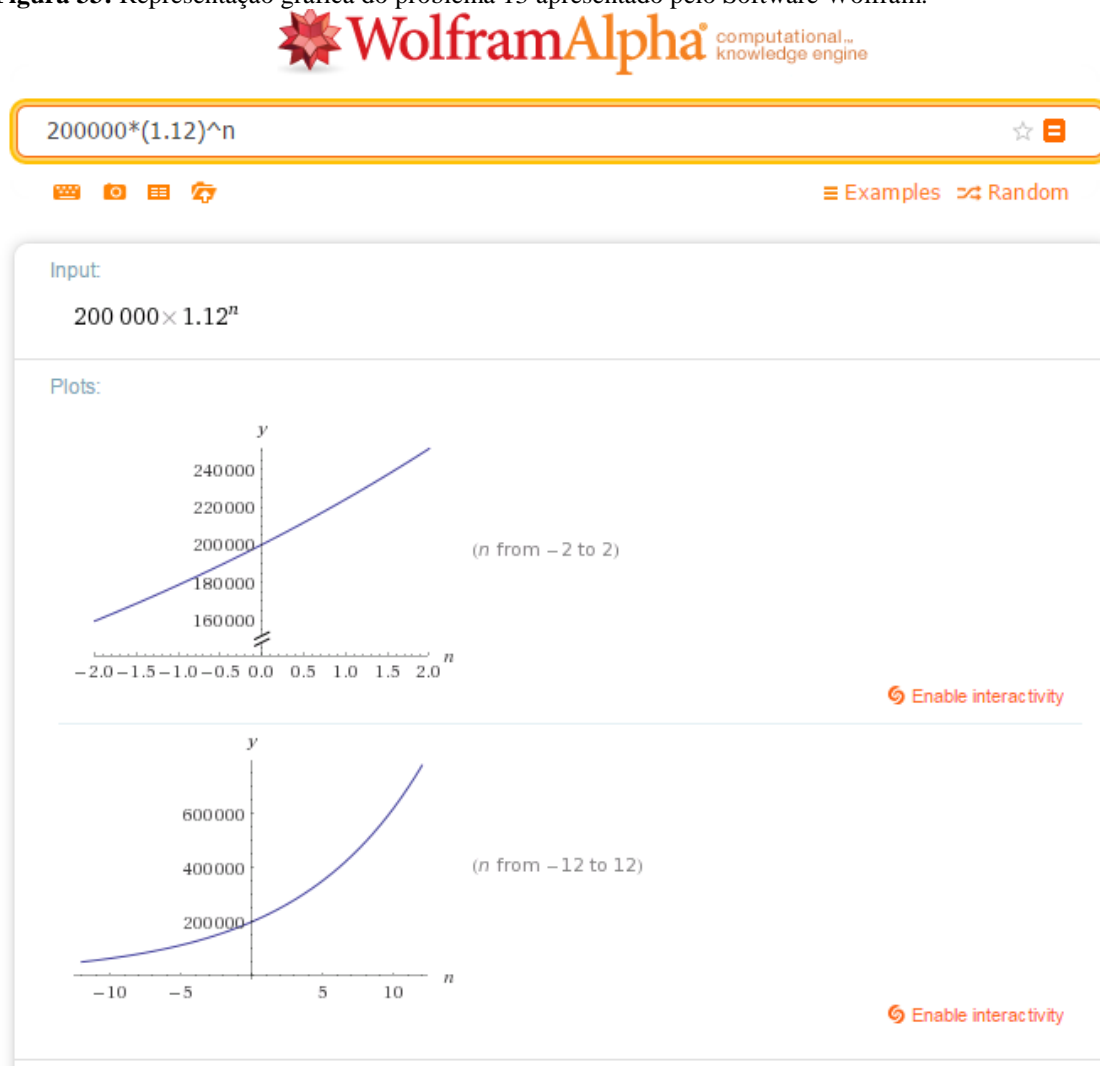
Comentário: *Tais situações permitem refletir sobre as questões sociais. O diálogo foi muito proveitoso, por se tratar de uma turma adulta e com experiência de vida. Alguns atuam como agentes comunitários de saúde e viram que existe uma má distribuição nos bairros. Perceberam, com isso, que o crescimento populacional da cidade, seja por vias naturais ou migração, não se podia impedir, mas, se houvesse uma melhor distribuição populacional para atendimento na área da saúde, o serviço prestado melhoraria e todos sairiam ganhando.*

A18: *Se isso for possível, todos nós sairemos ganhando.*

Continuando a aula, lançamos mais um problema para a turma, com o propósito de discutir e analisar os gráficos na função exponencial.

Problema 13: Chama-se montante (M) a quantia que uma pessoa deve receber após aplicar um capital C, a juros compostos, a uma taxa i durante um tempo t. O montante pode ser calculado pela fórmula $M = C(1 + i)^t$. Supondo que o capital aplicado é de R\$ 200.000,00, a uma taxa de 12% ao ano durante 3 anos, qual o montante no final da aplicação? Represente graficamente a situação para n meses.

Figura 33: Representação gráfica do problema 13 apresentado pelo Software Wolfram.



Fonte: *Printscreen* elaborado pela pesquisadora.

Continuamos a aula com mais algumas observações sociais e finalizamos com a reflexão de um aluno que disse:

A14: Nunca pensei que um dia fosse gostar das aulas de Matemática e que ela iria me ajudar a resolver problemas do meu bairro.

4.6 Unidade Didática VI: funções logarítmicas

Nessa unidade didática, totalizamos oito horas-aula, distribuídas em três encontros com descrições e análises de cada aula. Discutimos o conceito de funções logarítmicas e seus elementos, relacionando-o à função exponencial. No entanto, nosso foco foi a proposição, resolução e exploração de problemas sobre funções logarítmicas,

recorrendo à utilização do programa computacional, quando necessário, como recurso didático complementar no processo de resolução, aproveitando as demais informações complementares que ele fornece.

Objetivos:

- Reconhecer a definição sobre logaritmos, bem como suas propriedades (produto, quociente, potência e mudança de base) para, a partir daí, ser capaz de aplicá-los em diversas situações problemas a serem propostos.
- Identificar as principais características das funções logarítmicas, possibilitando o reconhecimento e construção de gráficos referentes a estas funções.
- Relacionar funções logarítmicas com funções exponenciais.
- Identificar e resolver equações e inequações logarítmicas.
- Reconhecer exemplos e resolver exercícios em que as funções logarítmicas estejam contextualizadas em situações do cotidiano ou aplicadas a outras áreas do conhecimento.
- Utilizar os recursos tecnológicos para solucionar as situações.
- Explorar os dados fornecidos na solução do problema.

Recursos:

- livro didático;
- computador;
- internet;
- software Wolfram Alpha (versão free);
- papel ofício;
- quadro,
- pincel,
- retroprojektor.

Conteúdos desenvolvidos na aula: Função logarítmica – definição, propriedades e resolução de problemas.

Começamos a aula com um novo problema.

Problema 14: Segundo o Banco Mundial, a previsão do crescimento demográfico na América Latina, no período de 2004 a 2020, é de 1,2% ao ano, aproximadamente. Em quantos anos a população da América Latina vai dobrar se a taxa de crescimento continuar a mesma?

Inicialmente, eles tiveram um pouco de dificuldade de formular a expressão matemática que representa a situação, mas, ao comparar o problema trabalhado anteriormente, encontraram uma semelhança e começaram as tentativas para a obtenção da expressão. Foram várias até se chegar a uma fórmula. Porém, os alunos viram que não era possível resolver por exponencial como haviam planejado e novamente voltou a problemática.

A05: *Quando a gente pensa que tá sabendo, vem sempre algo novo.*

Professora: *E vocês têm medo do que é novo?*

A16: *Às vezes, sim.*

Professora: *Não deveriam. Já viram que todas essas situações têm um propósito e podem solucionar problemas do dia-a-dia.*

A05: *Mas, até chegar lá, é um problemão.*

Professora: *Então, vamos pensar um pouco todos juntos.*

Procuramos separar os dados, coisa que alguns já haviam feito. Montar a expressão, também alguns já haviam conseguido e, com isso, vimos que os que já se encontravam um pouco mais à frente no processo de resolução tiveram dificuldade quando pensaram que se tratava de uma função exponencial. Foi então que começamos a discutir sobre a função inversa da exponencial e apresentamos a função logarítmica para solucionar a expressão encontrada. Foram vários questionamentos e dúvidas quanto ao problema apresentado. Para um maior esclarecimento, apresentamos questões simples para que relembassem as funções logarítmicas e suas propriedades.

Figura 34: Resposta do problema 14 apresentada pela equipe 9.

$$\begin{aligned}
 \textcircled{A} \text{ POPULAÇÃO DO ANO BASE} &= P_0 \\
 \text{POPULAÇÃO APÓS UM ANO} &= P_0 (1,012) = P_1 \\
 \text{POPULAÇÃO APÓS DOIS ANOS} &= P_0 (1,012)^2 = P_2 \\
 &\vdots \\
 \text{POPULAÇÃO APÓS } x \text{ ANOS} &= P_0 (1,012)^x = P_x \\
 \\
 P_x = 2P_0 &\Rightarrow P_0 (1,012)^x = 2P_0 \Rightarrow (1,012)^x = 2 \\
 \log (1,012)^x &= \log 2 \Rightarrow x \cdot \log 1,012 = \log 2 \\
 \Rightarrow \frac{\log 2}{\log 1,012} &\cong \frac{0,30103}{0,00518} \cong 58 \text{ anos}
 \end{aligned}$$

Finalizamos a aula com os questionamentos sobre o processo de resolução do problema.

Encontro 20 - 06/06/2014

Conteúdos desenvolvidos na aula: Função logarítmica – estudo e construção de gráficos.

Iniciamos a aula retomando o problema 14, abordado na aula anterior.

Problema 14: Segundo o Banco Mundial, a previsão do crescimento demográfico na América Latina, no período de 2004 a 2020, é de 1,2% ao ano, aproximadamente. Em quantos anos a população da América Latina vai dobrar se a taxa de crescimento continuar a mesma?

Recordamos algumas etapas, fizemos novos questionamentos. Optamos pela resolução manual para as questões complementares do problema e nos deparamos com os resultados dos complementos apresentados para análise, a qual nos forneceu dados para a construção do gráfico.

Como nosso foco era, nesse momento, a construção e análise do gráfico da função logarítmica com o propósito de compará-lo com os obtidos na função exponencial, apresentamos algumas expressões às equipes, para que as solucionassem.

Questão 1: Construa os gráficos das funções logarítmicas e confirme neles as conclusões obtidas.

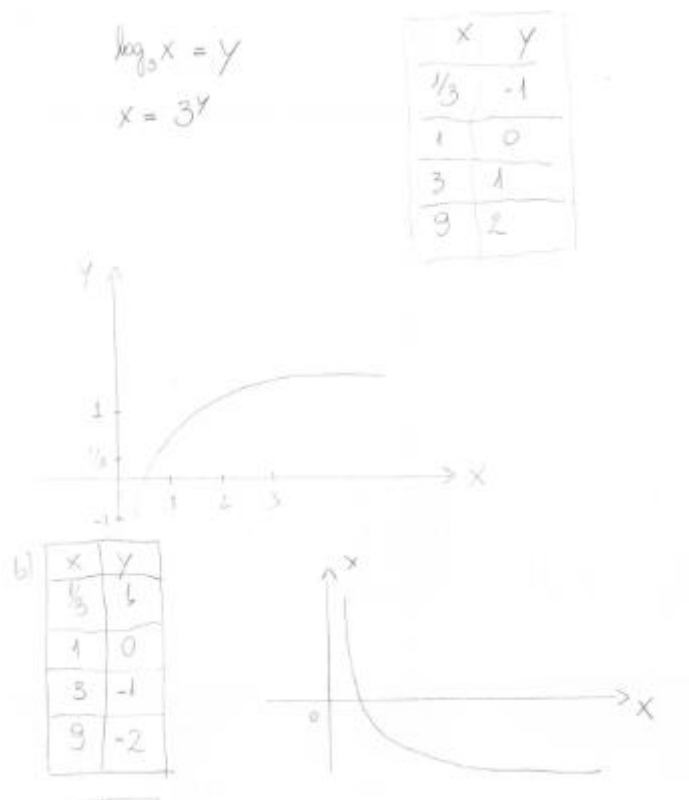
a) $f(x) = \log_3 x$

b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

c) $f(x) = \log_2 \left(\frac{x}{2}\right)$

d) $f(x) = \log_2(x - 1)$

Figura 35: Resposta a questão 1 apresentada pela equipe 4.



Fonte: Acervo particular da pesquisadora.

Finalizamos a aula com a construção dos gráficos pelas equipes. No entanto, foram resolvidas apenas as letras a e b da questão.

Encontro 21 - 11/06/2014

Conteúdos desenvolvidos na aula: Relações entre funções exponenciais e funções logarítmicas.

Iniciamos a aula retomando a questão 1, apresentada na última aula.

Questão 1: Construa os gráficos das funções logarítmicas e confirme neles as conclusões obtidas.

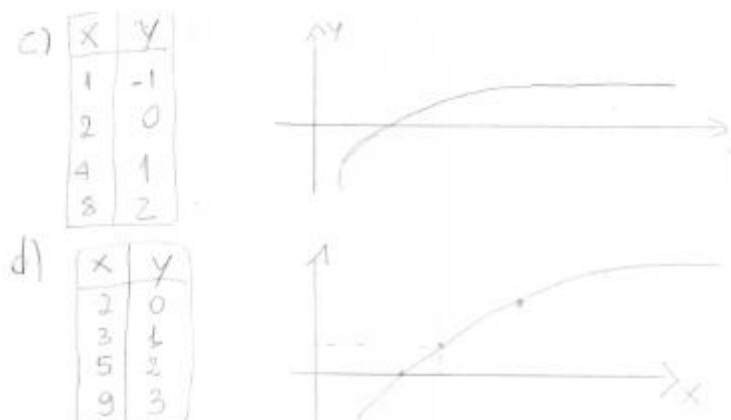
a) $f(x) = \log_3 x$

b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

c) $f(x) = \log_2 \left(\frac{x}{2}\right)$

d) $f(x) = \log_2(x - 1)$

Figura 36: Resposta a questão 1 apresentada pela equipe 7.



Fonte: Acervo particular da pesquisadora.

Nosso foco, nesse momento, era observar as diferenças existentes entre as funções logarítmicas e as exponenciais. Além de observá-las, cada equipe deveria entregar por escrito essas diferenças.

Logo após, lançamos um novo problema:

Problema 15: Um cartão de crédito cobra juros de 9% a.m. sobre o saldo devedor. Um usuário desse cartão tem um saldo devedor de R\$ 505,00. Em quanto tempo essa dívida chegará a R\$ 600,00 se não for paga?

Observação: considere $\log 2 = 0,3$; $\log 3 = 0,48$; $\log 1,01 = 0,004$; $\log 1,09 = 0,038$.

Inicialmente, foi dada a questão sem a observação e, mais uma vez, vários trocaram a questão pensando resolvê-la por função exponencial. Contudo, depois de algum tempo, algumas equipes conseguiram descrever a expressão. Só então apresentamos a observação do problema e as demais equipes focaram na função logarítmica para resolver o problema proposto.

Como já sabiam o passo a passo, ficou mais fácil, após descreverem a expressão, aplicarem o programa computacional para obterem a resposta. Analisamos as respostas sugeridas e as etapas descritas no programa verificando o perfil do gráfico.

Finalizamos a aula modificando alguns termos do problema para averiguarmos o comportamento do gráfico diante das proposições com questionamentos orais.

Encontro 22 - 18/06/2014

No dia 18/06/2014, lançamos um desafio geral⁶ para a turma com os conteúdos trabalhados. Primeiramente, optamos para que os alunos o resolvessem sem usar o programa. Em seguida, foram autorizados a utilizar o programa computacional e um questionário⁷, no qual poderiam opinar sobre as aulas.

No desafio proposto, nosso propósito foi verificar se os alunos compreenderam e se sabiam utilizar os conhecimentos discutidos durante as aulas para resolver os problemas propostos.

Com o primeiro problema, buscamos resgatar seu aprendizado sobre função do primeiro grau:

1º) *Em um reservatório, havia 50 l de água quando foi aberta uma torneira que despeja 20 l de água por minuto. A quantidade de água no tanque é dada em função do número x de minutos em que a torneira fica aberta. Determine a lei de formação e construa o gráfico da situação dada.*

⁶ Ver Apêndice.

⁷ Idem.

Com o segundo problema, priorizamos seu aprendizado sobre função quadrática:

2º) *Um corpo está em queda livre.*

- Determine a lei de formação que representa a situação.*
- Qual é o espaço, em metros, que ele percorre após 3 s?*
- Em quanto tempo ele percorre 122,5 m?*
- Construa o gráfico que representa a situação proposta.*

Com vistas a resgatar seu aprendizado sobre função modular, propusemos um terceiro problema:

3º) *O volume de água em um tanque varia com o tempo de acordo com a equação $v = 10 - |4 - 2t| - |2t - 6|$, $t \in \mathbb{R}_+$. Nela, v é o volume medido em m^3 após t horas, contadas a partir de 8 h de uma manhã. Determine os horários inicial e final dessa manhã em que o volume permanece constante.*

Figura 37: Solução apresentada pela equipe 12 para o problema 1.

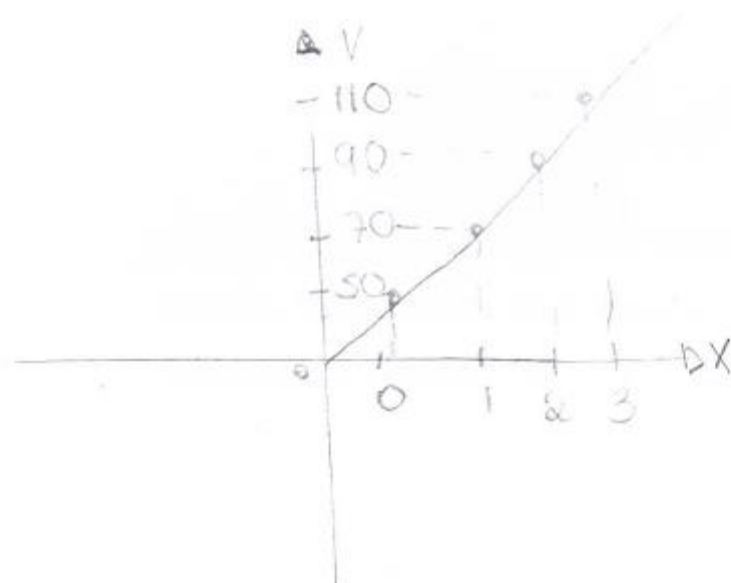
$$\textcircled{+} V = 50 + 20x$$

Volume inicial = 50L
 Quantidade de água despeja no tanque 20 multi-
 plicado pelo tempo x em min.

Para 0 min. = $V = 50 + 20 \cdot 0 = 50 + 0 = 50L$
 1 min. = $V = 50 + 20 \cdot 1 = 50 + 20 = 70L$
 2 min. = $V = 50 + 20 \cdot 2 = 50 + 40 = 90L$
 3 min. = $V = 50 + 20 \cdot 3 = 50 + 60 = 110L$

Fonte: Acervo particular da pesquisadora.

Figura 38: Representação gráfica apresentada pela equipe 12 para o problema 1.



Fonte: Acervo particular da pesquisadora.

Figura 39: Solução apresentada pela equipe 09 para o problema 1.

$$\textcircled{1} F(x) = 50 + 20x$$

$$F(0) = 50 + 20 \cdot 0 = 50$$

$$F(1) = 50 + 20 \cdot 1 = 70$$

$$F(2) = 50 + 20 \cdot 2 = 50 + 40 = 90$$

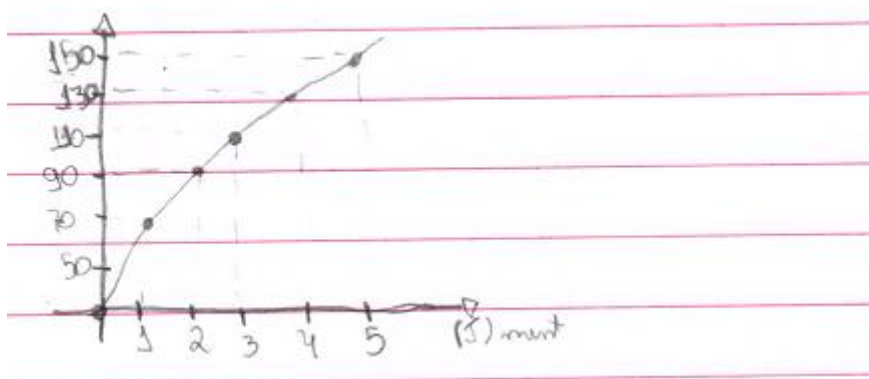
$$F(3) = 50 + 20 \cdot 3 = 50 + 60 = 110$$

$$F(4) = 50 + 20 \cdot 4 = 50 + 80 = 130$$

$$F(5) = 50 + 20 \cdot 5 = 50 + 100 = 150$$

Fonte: Acervo particular da pesquisadora.

Figura 40: Representação gráfica apresentada pela equipe 09 para o problema 1.



Fonte: Acervo particular da pesquisadora.

Comentário: Observamos que a equipe 12 entendeu o enunciado e conseguiu representar algebricamente a situação apresentada e resolvê-la. Porém, ao representar graficamente a situação, insistiram em passar o gráfico pela origem, fato que, com o uso do programa Wolfram Alpha, não aconteceria, tendo em vista que o recurso realizaria esse processo. Cometeram a mesma falha apresentada com o programa, pois representaram a figura de forma contínua e não discreta, como deveria ser. Já a equipe 9 imaginou que a função fosse uma função modular. Resolveram-na como função do 1º grau, mas cometeu o mesmo deslize da equipe 12 ao representar a função graficamente. Vale lembrar que essas equipes utilizaram muito bem o programa durante as aulas e apresentaram questionamentos complementares na representação gráfica das funções utilizando o recurso didático Wolfram Alpha. Por possuir uma ampla gama de informações, o gráfico permite a capacidade de visualizar funções ou conjuntos de dados, muitas vezes favorecendo um maior conhecimento sobre a sua estrutura e propriedades.

A aplicação do questionário teve o propósito de saber a opinião dos alunos envolvidos na pesquisa. As perguntas foram direcionadas para saber se eles compreenderam as aulas, se gostaram delas. Ademais, pedimos algumas sugestões. Os alunos responderam questões do tipo:

O que você achou das aulas?

Excelentes	Ótimas	Regulares	Ruins

Você sentiu dificuldade em algum tópico discutido?

Sim	Não

Em quais? _____

Você mudaria alguma coisa nas aulas?

Sim	Não

O que mudaria? _____

Quais sugestões daria para o professor para as aulas futuras?

Comentário: *Uma sugestão que nos deixou agradecidas foi citada pela maioria dos alunos, que insistiu em pedir para ter continuidade com a sistemática de aula da pesquisa, além de pedir que outros professores de outras disciplinas fizessem o mesmo procedimento adotado em nossas aulas.*

O resultado do tal desafio ficou com a professora da turma por solicitação da escola como registro dos conteúdos trabalhados.

Por fim, fizemos uma confraternização em clima junino e agradecemos pela participação de todos e a sua colaboração na pesquisa.

Finalizando este capítulo, percebemos que os resultados obtidos, no que diz respeito ao aprendizado dos alunos, foram, em grande parte, satisfatórios, mesmo que na etapa final alguns alunos ainda apresentassem dificuldade em representar a expressão algébrica dos problemas apresentados. Houve também um grande interesse pelas aulas e uma melhor expectativa quanto ao desenvolvimento do seu aprendizado, ao contrário do que ocorria no início da intervenção.

Ao iniciarmos a pesquisa, nossos alunos (participante da pesquisa) apresentavam-se desmotivados. Mesmo assim, apresentaram entusiasmo e interesse em

participar da pesquisa. A cada dia que passava, eles mostravam-se mais interessados e com melhores habilidades no trabalho com a proposição e a exploração de problemas.

O desafio da resolução dos problemas para eles já era, na medida do possível, algo conhecido, pois, mesmo que de maneira corriqueira, isto acontecia nas aulas com os problemas propostos pelos autores dos livros didáticos adotados pela instituição de ensino. Na verdade, podemos chamá-los mais adequadamente de exercícios do que de problemas.

Em nossa pesquisa, a proposição de problema foi o ponto máximo da nossa experiência. Foi nesta etapa que os alunos conseguiram entender e externar o que já conheciam sobre o conteúdo trabalhado, criar novos problemas, interagir entre eles. O uso do software favoreceu os procedimentos de resolução adotados nesta etapa, sem se restringir a um mero executor dos cálculos matemáticos das questões. Houve vantagens e desvantagens em sua utilização.

Dentre as vantagens, pôde-se criar e manusear o gráfico da função, partir da resposta em busca do problema, visualizar outras etapas da solução do problema, associar a solução numérica e a solução algébrica à solução gráfica, entre outros. Como desvantagens, podemos apontar que nem sempre a figura apresentada graficamente condizia com a questão apresentada. O gráfico não representava o domínio nem a imagem do problema. Não obstante, tudo isso favorece, reforça e contribui para o enriquecimento das estratégias de soluções adotadas pelos alunos durante todo o processo de elaboração e resolução do problema.

Com a proposição de problemas, percebemos que os alunos se sentiram livres para utilizar e explorar as atividades de diferentes formas, surgindo entre eles modos de resolução originais, o que favoreceu sua criatividade e possibilitou a cada um apresentar sua visão sobre determinados conteúdos.

Na escola onde a pesquisa foi realizada, surgiram, por parte de alguns colegas docentes, dúvidas e questionamentos. Eles indagavam a respeito de toda essa criatividade na elaboração dos novos problemas por parte dos alunos. Questionamentos do tipo: - Escrever é fácil, mas e a resolução (interesse por meros cálculos matemáticos) desses novos problemas é possível? - Existem soluções? - Esses alunos conseguem resolvê-los sozinhos?

Nesse interim, observamos que foram poucas as equipes que se detiveram a reproduzir algo semelhante ao proposto pelos livros por eles conhecidos, pois a maior parte das equipes conseguiu realizar problemas instigantes apesar de nunca ter sido

submetida a tais procedimentos. O mais gratificante foi vivenciar o processo de resolução e compartilhamento do saber entre os envolvidos, pois mesmo as equipes que se restringiram a reproduzir cópias fiéis dos problemas apresentados pelos livros, em suas propostas, sentiram-se motivadas e entusiasmadas para resolver as novas situações propostas pelos colegas de sala e afirmaram que, apesar de não terem visto o problema daquela forma, os dos colegas da sala eram mais reais, ou seja, condiziam melhor com a realidade vivenciada por eles no seu dia-a-dia.

Outro fator que merece atenção é que as equipes menos criativas em suas propostas iniciais em outras ocasiões se dedicaram à elaboração dos problemas de forma mais interessada, criativa, desafiadora e mais bem enquadrassem melhor à sua realidade cotidiana.

Diante disso, percebemos que a escolha pelo conteúdo trabalhado na perspectiva da resolução, proposição e exploração de problemas foi bastante útil, pois as relações de ordem e de equivalência precisam ser ensinadas desde o ensino fundamental, ou seja, os estudos de funções acontecem ou deveriam acontecer desde as séries iniciais. Só assim, ser-lhes-ia familiar relacionar e codificar tais processos que embasam a construção dos conjuntos numéricos e demais significados matemáticos.

5 – AVALIANDO O PROCESSO: EM BUSCA DE NOVOS CAMINHOS

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Partindo do princípio de que uma determinada situação se torna um problema não apenas quando não se sabe a resposta, mas também durante todo o processo de exploração, possibilita-se, assim, que a situação proposta se torne um desafio e que provoque no aluno a possibilidade de dar encaminhamento a várias estratégias que o estimulem a um envolvimento efetivo durante toda a resolução, causando provocações e inquietações para resolver o problema de maneiras diferentes. Mesmo quando a situação proposta se apresentar aparentemente familiar, é possível despertar um olhar novo para ela. Deve-se propor a solução de um problema de mais de uma maneira, pois a exploração é inacabável, além do que é necessário prezar pela observação do diálogo entre os envolvidos.

Em alguns momentos, percebemos que ficou visível a dependência dos alunos participantes de trabalhar com problemas semelhantes, pois, para eles, os problemas são vistos como mera aplicação de regras. A exploração tem que acontecer tanto por parte do aluno como também do professor, porquanto a matemática deve ser vista como uma construção humana, quando, de maneira interdisciplinar, ajuda a fomentar uma melhor compreensão do mundo ao seu redor. Sendo assim, percebemos que a essência do processo torna a compreensão mais refinada e que é preciso elaborar e/ou propor questões que desenvolvam o raciocínio e que levem à mediação do pensamento matemático. E isto é facilitado com o uso de programas computacionais na sala de aula.

Com a experiência, durante a pesquisa, pudemos detectar um avanço na realização de outras atividades em outras disciplinas. Por se tratar de uma turma de alunos repetentes, deduzimos que parte dos conteúdos a serem trabalhados já fosse conhecida por eles. Até mesmo os conteúdos em que apresentaram dificuldades, também já eram do conhecimento deles. Todavia, o receio de responder e participar do processo de resposta os deixava inibidos. Mais um desafio para nós: fazer com que os alunos se sentissem seguros e confiantes durante a resolução do problema. Era de nosso conhecimento que o maior problema não se encontrava apenas nesse nível de conhecimento, mas já vinha de outras etapas.

Com o uso do programa computacional, foi possível mostrar aos alunos que era possível, que eles também eram capazes de responder as questões propostas, mesmo com o déficit de conhecimento prévio, sem ter de voltar muito no tempo para rever o conhecimento que lhes faltava. Uma passagem, dentre várias, que vale a pena ressaltar é que alguns alunos (cinco deles) que apresentavam muitas dificuldades na resolução dos problemas, por falta de noções básicas, resolveram procurar ajuda e formaram grupos de estudo para suprirem a falta do conhecimento prévio que os incomodava. Tal grupo é formado pelos cinco alunos da turma e três amigos deles: dois que já estão no 2º ano e um que está no 3º ano, que se dispuseram a ajudá-los num horário extra sala de aula. O grupo de estudo perdura até hoje, mesmo após o fim da pesquisa, e já serviu de incentivo para outros alunos que têm dificuldade na aprendizagem. Hoje, temos dois grupos que estudam Língua Portuguesa, três de Matemática e um de História.

Esses alunos ganharam o apoio da direção da instituição. Quando não conseguem agendar os encontros para os dias letivos da instituição (segunda a sexta-feira), eles os marcam aos sábados. Alguns companheiros se dispuseram a ajudá-los, ao verem o interesse dos envolvidos: quando não de forma presencial, utilizam a internet com o recurso da câmera para tirar as dúvidas dos alunos interessados.

Nas aulas de Matemática, espera-se, diante das vantagens apresentadas, que, gradativamente, sejam propostos outros trabalhos envolvendo a proposição, exploração e resolução de problemas juntamente com o uso de recursos tecnológicos priorizando outros conteúdos como, por exemplo, geometria plana, espacial e analítica, sequências e progressões, matemática financeira, entre outros conteúdos abordados no ensino médio, a fim de que tais conhecimentos não fiquem estagnados com o estudo de funções.

Tal experiência mostrou que as dificuldades existem para serem superadas. Apenas ficar reproduzindo o que os alunos já viram repetidas vezes não vai ajudá-los na evolução do seu conhecimento. Acreditar no potencial dos nossos alunos e transmitir essa confiança também para eles fará com que essa empolgação os motive a superar obstáculos e buscar ajuda ou a se dedicarem um pouco mais àquilo que necessitam. Sendo realistas, sabemos que não se trata de uma regra nem vamos conseguir fazer com que todos se sintam motivados, obtendo 100% de aproveitamento. Mas, para alunos considerados um fardo para alguns, independentemente do total que conseguirmos alcançar, já terá sido válido, pois será menos um aluno para os índices de reprovação. A expressão de alegria, o entusiasmo, o despertar da curiosidade e, o mais importante, a elevação no desempenho de conhecimento é a maior recompensa que podemos receber,

uma sensação de dever “parcialmente cumprido”, pois o processo de ensino-aprendizagem é contínuo.

Como perspectiva futura, a pesquisa aponta que, com relação à proposição e exploração de problemas, podem ser realizados estudos similares em outras áreas de conhecimento, tanto no nível de sala de aula como na formação do professor ou em outras pesquisas de campo, fato que mostra a necessidade e a importância ir a campo no desenvolvimento da pesquisa para ter subsídio e poder argumentar com mais embasamento seus dados, não se detendo apenas nas pesquisas bibliográficas.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, Norma Suely Gomes. **Associando o Computador a Resolução de Problemas Fechados**: análise de uma experiência. 2005. 370f. Tese (Doutorado em Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro/SP, 2005.

ALVES, Nilda. Decifrando o pergaminho: os cotidianos das escolas nas lógicas das redes cotidianas. In: OLIVEIRA, I. B. de. **Pesquisa nos/dos/ com os cotidianos das escolas**: sobre redes de fazeres. Petrópolis/RJ: DP&A, 2008. p. 15-38.

ANDRADE, Silvanio de. **Ensino-aprendizagem de matemática via resolução, exploração, codificação e descodificação de problemas e a multicontextualidade da sala de aula**. 1998. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – UNESP, Rio Claro/SP, 1998.

ARAUJO SEGUNDO, Salvino Izidri de. **Do ensino-aprendizagem da Álgebra ao ensino de equações polinomiais do 1º grau (manuscrito)**: representações múltiplas. 2012. 116f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual da Paraíba, 2012.

BAKKER, Arthur; FREDERICKSON, Ann. Comparing Distributions and Growing Samples by Hand and with a Computer Tool. In: MASALSKI, Willian J. **Technology – Supported Mathematics Learning Environments: sixty – seventh yearbook**. EUA: Portia C. Elliott, general yearbook editor, 2005.

BALL, Lynda; STACEY, Kaye. Teaching Strategies for Developing Judicious Technology Use. In: MASALSKI, Willian J. **Technology – Supported Mathematics Learning Environments: sixty – seventh yearbook**. EUA: Portia C. Elliott, general yearbook editor, 2005.

BLUME, Glendon W; HEID, M. Kathleen. The Role of Research and Theory in the Integration of Technology in Mathematics Teaching and Learning. In: HEID, M. Kathleen; BLUME, Glendon W. **Cases and Perspectives**. V. 2. EUA: NCTM, LAP, 2008.

BOAVIDA, Ana Maria Dias Roque de Lemos. **Resolução de problemas em Educação Matemática**: contributo para uma análise epistemológica e educativa das representações pessoais dos professores. 1993. 296f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Programa Ciências de Educação. Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade de Lisboa. Lisboa: Associação de Professores de Matemática, 1993.

BRANDÃO, Jefferson Dagmar Pessoa. **Ensino aprendizagem de função através da resolução de problemas e representações múltiplas**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande/PB: UEPB, 2014.

BRASIL. Ministério da Educação. **Portal de Inclusão Digital**. Disponível em: <<http://www.inclusaodigital.gov.br/inclusao/>>. Acesso em: 22 jun. 2010.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: 3º e 4º ciclos do ensino fundamental – Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998a. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>>. Acesso em: 30 abr. 2013.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio): Parte I – Bases Legais**. Brasília: MEC/SEB, 1998b. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf>>. Acesso em: 30 abr. 2013.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio): Parte III – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC/SEB, 1998c. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>>. Acesso em: 30 abr. 2013.

COELHO, Maria Aparecida Vilela Mendonça Pinto. **A resolução de problemas: da dimensão técnica a uma dimensão problematizadora**. 2005. 167f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – UNICAMO, Campinas/SP. 2005.

DOMITE, Maria do Carmo S. **Formulação de problemas em Educação Matemática: a quem compete? Movimento**: Revista da Faculdade de Educação da Universidade Federal Fluminense, n. 1 (mai. 2000). Niterói: EdUFF, 2009.

DULLIUS, Maria Madalena et al. **Professores de Matemática e o uso de tecnologias**. Lajeado/RS: Centro III, Centro Universitário UNIVATES, s/d. Disponível em: <<http://ensino.univates.br/~chaet/Materiais/EURE09.pdf>>. Acesso em: 02 abr. 2013.

FROTA, Maria Clara Rezende; BORGES, Oto. **Perfis de entendimento sobre o uso de tecnologias na Educação Matemática**. Disponível em: <http://www.ufrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_27/perfis.pdf>. Acesso em: 02 abr. 2013.

HEID, M. Kathleen.; BLUME, Glendon W. **Cases and Perspectives**. V. 2. EUA: NCTM, LAP, 2008.

_____. **Research Syntheses**. Vol. 1. EUA: NCTM, LAP, 2008.

_____. Technology and the Teaching and Learning of Mathematics. In: **Research Syntheses**. V. 1. EUA: NCTM, LAP, 2008.

IEZZI, Gelson. et al. **Matemática: ciências e aplicações**, 1: ensino médio. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

KNUTH, Eric J; HARTMANN, Christopher E. Using Technology to Foster Students' Mathematical Understandings and Intuitions. In: MASALSKI, Willian J. **Technology – Supported Mathematics Learning Environments: sixty – seventh yearbook**. EUA: Portia C. Elliott, general yearbook editor, 2005.

LANKSHEAR, C.; KNOBEL, M. **Pesquisa Pedagógica: do projeto à implementação**. Porto Alegre: Artmed, 2008.

MASALSKI, Willian J. **Technology – Supported Mathematics Learning Environments: sixty – seventh yearbook**. EUA: Portia C. Elliott, general yearbook editor, 2005.

NASCIMENTO, Maurício Alves. **Ensino-aprendizagem de trigonometria através da resolução e exploração de problemas e cotidiano escolar**. 2014. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande/PB: UEPB, 2014.

NCTM. **Princípios e normas para a matemática escolar**. Reston: NCTM, 2000.

OLIVEIRA, Gerson Pastre de. **Avaliação em cursos online colaborativos: uma abordagem multidimensional**. 2007. 330f. Tese de Doutorado - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.

_____. **Generalização de padrões, pensamento algébrico e notações: o papel das estratégias didáticas com interfaces computacionais**. 2008. Disponível em: <<http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/1743/1134>>. Acesso em: 10 abr. 2013.

PEREIRA, Mariângela. **O ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas no 3º ciclo de ensino fundamental**. 2004. 263f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – UNESP, Rio Claro, 2004.

PERESSINI, Dominic D; KNUTH, Eric J. The Role of Technology in Representing Mathematical Problem Situations and Concepts. In: MASALSKI, Willian J. **Technology – Supported Mathematics Learning Environments: sixty – seventh yearbook**. EUA: Portia C. Elliott, general yearbook editor, 2005.

RITTER, Steven. et al. Integrating Intelligent Software Tutors with the Mathematics Classroom. In: HEID, M. Kathleen; BLUME, Glendon W. **Cases and Perspectives**. V. 2. EUA: NCTM, LAP, 2008.

SORMANI JUNIOR, Celio. **Um estudo exploratório sobre o uso de informática na resolução de problemas trigonométricos**. 2006. 227f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – UNESP, Bauru/SP, 2006.

SHROEDER, T. L.; LESTER JR., F. K. Developing understanding in mathematics via problem solving. In: TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Ed.). **New directions for elementary school mathematics**. Reston: NCTM, 1989. p. 31-32.

SILVA, Adeilson Pereira da. **Ensino-aprendizagem de análise combinatória através da resolução de problemas: um olhar para a sala de aula**. 2013. 91f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual da Paraíba, 2013.

SILVA, Ledevande Martins da. **Compreensão de ideias ao ensino-aprendizagem de funções via resolução, proposição e exploração de problemas**. 2013. 306f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Centro de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande/PB, 2013.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez; CÂNDIDO, Patrícia. **Resolução de problemas**. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2000.

SOARES, Maria Teresa Carneiro; PINTO, Neuza Bertoni. **Metodologia da resolução de problemas**. Disponível em:
<http://www.ufrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_24/metodologia.pdf>. Acesso em: 07 jul. 2013.

SORMANI JUNIOR, Celio. **Um estudo exploratório sobre o uso da informática na resolução de problemas trigonométricos**. 2006. 226f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Bauru/SP, 2006.

THOMAZ NETO, Mario Jose de Oliveira. **Uma investigação sobre erros em tentativas de resoluções de problemas matemáticos verbais.** 2003. 246f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Programa de Educação em Ciências, Universidade Federal Rural de Pernambuco, 2003.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental:** formação de professores e aplicação em sala de aula. Tradução de Paulo Henrique Colonese. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

ZAVALA, Alessandra Beatriz Pachas. **O estudo de funções exponenciais e logarítmicas motivado pela geometria fractal.** 2007. 60f. Monografia (Especialização em Matemática) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2007. Disponível em: <<http://people.ufpr.br/~ewkaras/especializa/zavala.pdf>>. Acesso em: 30 jul. 2014.

APÊNDICES**APÊNDICE A: PRÉ-QUESTIONÁRIO****1 – PRÉ QUESTIONÁRIO**

- a) De qual disciplina mais gosta?
- b) Quantas vezes já repetiu essa série?
- c) No primeiro ano, com qual conteúdo teve mais dificuldade? E de qual mais gostou?
- d) Como você resolveria essa situação?

Um cabeleireiro cobra R\$ 12,00 pelo corte para clientes com hora marcada e R\$ 10,00 sem hora marcada. Ele atende por dia um número fixo de 6 clientes com hora marcada e um número variável X de clientes sem hora marcada.

- Qual foi a quantia arrecadada num dia em que foram atendidos 16 clientes?
 - Qual foi o número de clientes atendidos num dia em que foram arrecadados R\$ 212,00?
- e) Quais conhecimentos prévios você utilizou?
 - f) Como você resolveria essa situação?

Suponha que um grilo, ao saltar do solo, tenha sua posição no espaço descrita em função do tempo (em segundos) pela expressão:

$$h(t) = 3t - 3t^2,$$

onde h é a altura atingida em metros.

- Em que instante t o grilo retorna ao solo?
 - Qual a altura máxima em metros atingida pelo grilo?
- g) Quais conhecimentos prévios você utilizou?
 - h) Como você resolveria essas expressões?
 - $|-2x + 1| = \frac{1}{2}$
 - $|9x + 8| = -5$
 - $|-6x + 2| = 16$
 - i) Quais conhecimentos prévios você utilizou?

APÊNDICE B: DESAFIO GERAL

2 – DESAFIO GERAL

1º) Em um reservatório, havia 50 l de água quando foi aberta uma torneira que despeja 20 l de água por minuto. A quantidade de água no tanque é dada em função do número x de minutos em que a torneira fica aberta. Determine a lei de formação e construa o gráfico da situação dada.

2º) Um corpo está em queda livre.

- e) Determine a lei de formação que representa a situação.
- f) Qual é o espaço, em metros, que ele percorre após 3 s?
- g) Em quanto tempo ele percorre 122,5 m?
- h) Construa o gráfico que representa a situação proposta.

3º) O volume de água em um tanque varia com o tempo de acordo com a equação $v = 10 - |4 - 2t| - |2t - 6|$, $t \in IR_+$. Nela, v é o volume medido em m^3 após t horas, contadas a partir de 8 h de uma manhã. Determine os horários inicial e final dessa manhã em que o volume permanece constante.

APÊNDICE C: QUESTIONÁRIO

3 – QUESTIONÁRIO

1º) O que você achou das aulas?

Excelentes	Ótimas	Regulares	Ruins

2º) Foram válidas?

Sim	Não

3º) Atenderam as suas expectativas?

Sim	Não

4º) Você conseguiu aprender/compreender da forma trabalhada?

Sim	Não

5º) Você sentiu dificuldade em algum tópico discutido?

Sim	Não

Em quais? _____

6º) Você mudaria alguma coisa nas aulas?

Sim	Não

O que mudaria? _____

7º) Quais sugestões daria para o professor para as aulas futuras?
