UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UEPB

Uma Proposta para o Ensino de Noções de Cálculo no Ensino Médio Utilizando o Winplot

Cícero dos Santos

Trabalho de Conclusão de Curso

Orientador: Prof. Dr. Manuel Antolino Milla Miranda

Campina Grande - PB
Agosto/2014

UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional - PROFMAT/CCT/UEPB

Uma Proposta para o Ensino de Noções de Cálculo no Ensino Médio Utilizando o Winplot

por

Cícero dos Santos †

Trabalho Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UEPB, na modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

†Bolsista CAPES

S237p Santos, Cícero dos.

Uma proposta para o ensino de noções de cálculo no Ensino Médio utilizando o Winplot [manuscrito] / Cícero dos Santos. – 2014.

102 p. : il. color.

Digitado.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2014.

"Orientação: Prof. Dr. Manuel Antolino Milla Miranda, Departamento de Matemática".

1. Noções de Cálculo. 2. Ensino Médio. 3. Software Winplot. I. Título.

21. ed. CDD 515

UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE NOÇÕES DE CÁLCULO NO ENSINO MÉDIO UTILIZANDO O WINPLOT

por

Cícero dos Santos

Trabalho de Conclusão de curso apresentado ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCT - UEPB, modalidade Mestrado Profissional, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovado por:

Aldo trajano lourêdo

Prof. Dr. Aldo Trajano Lourêdo - UEPB

Profa. Dra. Valdenilza Ferreira da Silva - UFPB

Prof. Dr. Manuel Antolino Milla Miranda - UEPB
Orientador

Universidade Estadual da Paraíba

Centro de Ciências e Tecnologia

Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Agosto/2014

Dedicatória

A todos aqueles que, orientados por DEUS, contribuíram para a realização desse trabalho em especial a minha Mãe, Maria Rilza dos Santos, que tanto me incentivou a estudar.

Agradecimentos

Existem situações na vida em que é fundamental poder contar com o apoio e a ajuda de algumas pessoas. Para a realização deste trabalho de conclusão, pude contar com várias. E a essas pessoas prestarei, através de poucas palavras, os meus sinceros agradecimentos:

Ao Criador do Universo (DEUS), por ter me dado, além da vida e de tantas outras coisas pelas quais às vezes nem sou grato, a oportunidade de concluir mais uma etapa de minha vida.

Ao Professor Dr. Manuel Antolino Milla Miranda, orientador deste trabalho, por sua atenção, boa vontade, empenho e responsabilidade acima de tudo.

Aos professores Aldo Trajano Lourêdo e Vandenberg Lopes Vieira pelas palavras de incentivo e apoio, direcionadas a mim e aos meus colegas em momentos difíceis do curso.

Aos meus pais, minha esposa e minhas irmãs, pelo constante incentivo.

Aos meus colegas de sala, Felipe, Herede, Stanley, Jonh, Josimar, Loana, Maxsuel, Raimundo, Ronaldo, Uelder, Weskley e Wilson que, durante todo o curso, me influenciaram na persistência diária.

Por fim, agradeço à Sociedade Brasileira da Matemática - SBM pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional e à CAPES pela concessão da bolsa.

Resumo

É notória a importância de uma boa visão geométrica no estudo de certos conteúdos, sobretudo, quando estes estão relacionados à Matemática. Na área de exatas, dentre os conteúdos que mais exigem tal visão, está o Cálculo. Este importante ramo da Matemática é tão temido por universitários que se tornou objeto de estudo de alguns pesquisadores. Não é à toa que o Cálculo é uma das principais disciplinas responsáveis pelos altos índices de reprovações. Diante dessa realidade, este trabalho propõe a inserção de Noções de Cálculo no Ensino Médio com uma abordagem feita através do software Winplot, pois acreditamos que, ao relacionarmos o ensino-aprendizagem à utilização de um software adequado, podemos obter uma melhor compreensão e, por conseguinte, uma redução nos índices de reprovação. Na intenção de verificar a eficácia da proposta, trabalhamos com uma turma da 3º série do Ensino Médio, entre abril e maio de 2014. Por fim, fizemos uma análise dessa experiência e constatamos a eficácia de nossa proposta no que diz respeito à inclusão de noções de Cálculo no Ensino Médio.

Palavras Chaves: Noções de Cálculo. Ensino Médio. Software Winplot.

Abstract

It is notorious the importance of a good geometric vision in the study of certain contents, especially when they are related to Mathematics. In the exact sciences, among the contents that most demanding such vision is the Calculus. This important branch of mathematics is so feared by university students who became the object of study by some researchers. It is not for nothing that the Calculus is a major disciplines responsible for the high levels of disapprovals. Against this reality, this work propose the insertion of notions of Calculus in high school with an approach taken by Winplot software, because we believe that to relate the teaching learning to the use of a appropriate software, we can obtain a better comprehension and, therefore, a reduction in the indices of disapproval of this matter. In the intention to verify the effectiveness of the proposal, we work with a class of 3rd grade of high school, between April and May 2014. Finally we analyzed this experience and found the effectiveness of our proposal, with regard to the inclusion of notions Calculus in high school.

Keywords: Notions of calculation. High school. Software Winplot.

Lista de Figuras

2.1 Cilindro. 6

2.2 Curva: Volume do Cilindro. 7

2.3 Curva secante ao círculo. 9

2.4 Curva tangente ao círculo. 9

2.5 Fermat e o cálculo de máximos e mínimos. 9

2.6 Aquiles e a tartaruga. 11

3.1 Janela inicial do Winplot. 23

3.2 Submenu da janela principal. 24

3.3 Janela para gráficos em duas dimensões. 24

3.4 Submenu do menu equação. 25

3.5 Janela para inserção da função. 25

3.6 Inventário. 25

3.7 Pontos interiores a elipse. 27

3.8 Sombreamento entre curvas. 27

3.9 Janela de integração. 28

3.10 Visão geométrica da integral. 29

3.11 Janela de integração. 29

3.12 Visão geométrica da integral. 30

3.13 Arco gerador do sólido. 30

3.14 Caixa de diálogo. 30

3.15 Sólidos de revolução. 31

3.16 Interface do GeoGebra. 32

3.17 Interface do Graphmática. 33

3.18 Interface do Cabri 3D. 35

3.19 Interface do Poly. 36

4.1 Boliche e a ideia intuitiva de limite 40
4.2 Gráfico da distância percorrida pela bola. 41
4.3 Gráfico da função $f(x) = x + 2$. 42
4.4 Definição de Limite. 42
4.5 Gráfico de f com $k = 4$. 44
4.6 Gráfico de f com $k = 6$. 44
4.7 Limite fundamental. 46
4.8 Estudo dos limites laterais. 48
4.9 Gráfico de f com k =1, 2, 3, 4, 5. 49
4.10 Limite envolvendo $-\infty$ e $+\infty$. 49
4.11 Gráfico da função $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$. 50
4.12 Gráficos das funções $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ e $g(x) = e$. 51
4.13 Incrementos. 52
4.14 Interpretação geométrica da derivada. 57
4.15 Reta tangente a curva f no ponto $x = 3$. 59
4.16 Reta tangente com coeficiente angular nulo. 59
4.17 Incrementos e razão incremental. 60
4.18 Significado geométrico da derivada. 61
4.19 Reta tangente ao gráfico de f no ponto $x = 1$. 63
4.20 Reta tangente ao gráfico de f no ponto $x = -1$. 63
4.21 Gráficos das funções $y = \frac{x^3}{3} + 2x$, y' e y''. 68
4.22 Posição, velocidade e aceleração ($t = 0$ s). 69
4.23 Posição, velocidade e aceleração ($t = 2$ s). 69
4.24 Função crescente. 70
4.25 Função decrescente. 70
4.26 Sinal da derivada e crescimento. 71
4.27 Função constante. 72
4.28 Função crescente (à esquerda) e função decrescente (à direita). 72
4.29 Gráficos de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$, $f'(x)$ e $f''(x)$. 75
4.30 Relacionando crescimento e decrescimento com derivada. 76
4.31 Ferramenta Traço. 76
4.32 Reta tangente horizontal. 77

4.33 Variação dos coeficientes a e b. 78
4.34 Análise do gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c, a > 0$. 78
4.35 Análise do gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c, a < 0$. 79
4.36 Análise do gráfico de $f(x) = -3x^2 + x - 8$. 80
4.37 Análise do gráfico de $g(x) = 2x^2 + 5x - 8$. 80
4.38 Gráfico da função $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$. 81
4.39 Gráficos das funções $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ e $f'(x)$. 82
4.40 Gráficos das funções $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$, $f'(x)$ e $f''(x)$. 82
4.41 Reta tangente ao gráficos de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$. 83
4.42 Reta horizontal tangente a curva $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$. 83

5.1 Acertos e erros da Turma A. 86
5.2 Erros e acertos da Turma B. 87
5.3 Acertos das Turmas A e B. 87
5.4 Erros das Turmas A e B. 88

Lista de Tabelas

4.1 Distância percorrida pela bola. 41
4.2 Taxa de variação instantânea 53
4.3 Aceleração média dos carros. 65

5.1 Acertos e erros da Turma *A*. 85
5.2 Acertos e erros da Turma *B*. 86

Lista de Símbolos

$\mathbb{N}$ .... Conjunto dos números naturais

e .... Número de Euler

$\mathbb{R}$ .... Conjunto dos números reais

$\mathbb{R}^*$ .... Conjunto dos números reais não nulos

Sumário

1 Introdução **1**

1.1 Objetivos 3

1.1.1 Objetivo geral 3

1.1.2 Objetivos específicos 3

1.2 Organização 3

2 Revisão de literatura **5**

2.1 Fatos históricos a respeito do Cálculo 5

2.2 O Cálculo no Ensino Médio 13

2.3 Cálculo e os softwares 19

3 Winplot **22**

3.1 Conhecendo o Winplot 22

3.2 Usando o Winplot 23

3.3 Algumas peculiaridades 27

3.4 Outros softwares úteis para o ensino de Matemática 31

3.4.1 GeoGebra 31

3.4.2 Graphmática 32

3.4.3 Geometricks 33

3.4.4 Cabri 3D 34

3.4.5 Poly 36

4 Descrição das Aulas **39**

4.1 Primeira aula 40

4.2 Segunda aula 47

4.3 Terceira aula 51

4.4 Quarta aula 59
4.5 Quinta aula 64
4.6 Sexta aula 69
4.7 Sétima aula 75
4.8 Oitava aula 83

5 Descrição do teste e análise dos resultados **84**
5.1 Descrição 84
5.2 Desempenho das Turmas 85
5.3 Comparação do desempenho das Turmas A e B 87

6 Conclusões **89**

Referências Bibliográficas **92**

A Teste **94**

B Biografias **97**
B.1 Isaac Newton 97
B.2 Gottfried W. Leibniz 100

Capítulo 1

Introdução

Sabemos que conceitos relacionados às Noções de Cálculo são extremamente importantes na Matemática, no entanto sabemos também que, em se tratando da assimilação de tais conceitos, boa parte dos alunos apresenta sérias dificuldades. Alunos que não percebem a relação geométrica existente entre o gráfico de uma função e os gráficos de suas derivadas primeira e segunda; não conseguem compreender as ideias que estão por trás de Limites e Derivadas; não conseguem estabelecer relações entre o Cálculo e suas aplicações; sentem dificuldades na compreensão e análise de gráficos; apresentam complicações na generalização de situações; entre outras. Esses são apenas alguns dos fatores que complicam a evolução dos alunos de Cálculo. Essas lacunas precisam ser preenchidas.

Acreditamos que se o aluno tiver contato com o Cálculo logo no Ensino Médio, o mesmo ingressará na universidade mais preparado, uma vez que ele já vai estar familiarizado com algumas notações e conceitos que envolvem esta temida parte da Matemática. Além disso, o Cálculo ainda o ajudará a solucionar de forma mais fácil e rápida problemas presentes no Ensino Médio, não somente na Matemática, como na Física.

E para facilitar o entendimento dos conceitos de Cálculo, apostamos no software Winplot, que além de ser gratuito e de fácil utilização, possui inúmeras outras vantagens. O software é capaz de fazer com que o aluno perceba mais facilmente as relações existentes entre os conteúdos estudados e o seu significado geométrico.

Essa pesquisa é de grande relevância para o ensino e a aprendizagem de Matemática, pois, além de fomentar o uso das TIC – Tecnologias de Informação e

Comunicação – em sala de aula, visa ainda facilitar a compreensão de ideias referentes ao Cálculo por intermédio de uma forma dinâmica que faz uso de computadores e do software Winplot. Isso, sem dúvidas, ocasionará uma considerável redução nos índices de reprovação nas disciplinas de Cálculo.

A nossa pesquisa possui um caráter qualitativo e quantitativo e foi realizada na Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Cícero dos Anjos da rede pública de ensino, situada na Rua Tiradentes, nº 200, na cidade de São Vicente do Seridó no estado da Paraíba.

Para a realização desse trabalho foi escolhida uma turma da 3ª série do Ensino Médio composta por 30 alunos. Quanto à metodologia utilizada, lançamos mão de uma Sequência Didática, planejada para ser desenvolvida em dois momentos. O primeiro momento engloba oito encontros nos quais desenvolvemos as aulas. O segundo momento envolve a aplicação do teste, através do qual comprovamos a eficácia de nossa pesquisa.

Dividimos os trinta alunos em duas turmas de quinze: uma composta por pessoas que tinham acesso frequente a computador (Turma A) e a outra composta pelas pessoas que nunca fizeram uso de um computador, ou até mesmo, não tem tanta habilidade com a máquina (Turma B). As aulas ministradas com o auxílio do software Winplot foram direcionadas apenas para a Turma A, enquanto que nas aulas das quais os recursos computacionais não fizeram parte, também estava presente a Turma B. Nossa oitava e última aula foi direcionada apenas a Turma B e nesta, procuramos suprimir todas as dúvidas em uma espécie de revisão de todo o conteúdo.

Em nosso segundo encontro (primeira aula com o Winplot), foram apresentados aos alunos, como o auxílio de um Datashow, os principais comandos do programa demonstrando detalhadamente sua utilização. Ensinei-os a fazer o download do software e dei o endereço para o download do seu manual. Para os que não tinham internet, pedimos que trouxessem pen drive e compartilhassem com os demais. Assim, eles também puderam explorar as atividades trabalhadas em sala. Mesmo nas aulas com Winplot, a lousa foi útil para formalizarmos alguns conceitos durante o desenvolvimento das atividades.

Finalmente, em nosso nono encontro, aplicamos o teste, que era a ferramenta que tínhamos a nosso dispor para compararmos o desempenho apresentado pelas

Turmas A e B, e assim, tirarmos conclusões atinentes à eficácia propiciada pelo trabalho desenvolvido durante a realização de nossa pesquisa. Vale ressaltar que todo o conteúdo visto, toda atividade trabalhada, assim como tudo que foi exposto em sala, foram iguais para as duas turmas. A única diferença é que em uma das turmas usamos o Winplot, enquanto na outra não foi usado nenhum recursos tecnológicos.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo geral

Verificar a eficácia de introduzir Noções de Cálculo no Ensino Médio através do software Winplot e incentivar o uso de recursos computacionais para melhorar o processo de ensino e aprendizagem do conteúdo Cálculo.

1.1.2 Objetivos específicos

- Expor alguns fatos históricos a respeito do Cálculo;
- Apresentar um breve histórico do ensino de Cálculo no Ensino Médio no Brasil;
- Realizar um estudo bibliográfico comparativo dos diversos softwares educacionais voltados para o ensino de Cálculo;
- Identificar fragilidades e potencialidades na utilização do Winplot;
- Mostrar as vantagens da utilização do software Winplot no estudo de Noções de Cálculo.
- Descrever e analisar uma experiência envolvendo Noções de Cálculo e utilização do Winplot em uma turma da 3ª série do Ensino Médio.

1.2 Organização

Este trabalho está organizado da seguinte forma: além desta Introdução (Capítulo 1), no Capítulo 2 apresentamos alguns fatos históricos a respeito do Cálculo e fazemos algumas colocações sobre à inserção do mesmo no Ensino Médio e o seu estudo através de softwares. O Capítulo 3 traz algumas informações respeitantes ao Winplot e mostra algumas peculiaridades deste software. Ainda citamos outros softwares que podem ser úteis no ensino de Matemática. No Capítulo 4 descrevemos e analisamos as aulas. No Capítulo 5 se encontra a descrição do teste (Anexo A) e a análise dos resultados. No capítulo 6 apresentamos as conclusões do trabalho. Por fim, as Referências Bibliográficas e os Apêndices.

Capítulo 2

Revisão de literatura

2.1 Fatos históricos a respeito do Cálculo

Assim como qualquer outra área da Matemática, o Cálculo surgiu junto à necessidade de solucionar problemas ainda sem solução, ou até mesmo facilitar os procedimentos resolutivos de problemas que já possuíam soluções, no entanto, bastante complexas. O cálculo de áreas de regiões irregulares no plano é apenas um exemplo dos inúmeros problemas para os quais o cálculo viabilizou soluções. Além disso, o cálculo encontra-se intrinsecamente ligado à situações que envolvem movimentos e variações, e isso faz com que ele se torne um conteúdo extremamente útil e abrangente. Com o intuito de corroborar a afirmação de que o Cálculo facilitou a resolução de alguns problemas, vamos recorrer a uma situação que os professores Eduardo Wagner e José Paulo Carneiro apresentam em um de seus artigos, e para a qual mostraram mais de uma maneira de resolvê-la, em uma das quais é feito uso do Cálculo Diferencial e na outra não.

O artigo, intitulado *Vale a Pena Estudar Cálculo?*, encontra-se na Revista do Professor de Matemática de número 53 e traz o seguinte problema:

Dentre todos os cilindros circulares retos de área total constante, qual é o de maior volume?

Sem fazer uso do Cálculo os autores apresentam a primeira solução do modo que se encontra a seguir.

Solução I

Sendo x o raio da base e y a altura do cilindro, o que se deseja é encontrar o maior valor de $V = \pi x^2 y$, para $x > 0$ e $y > 0$, satisfazendo a condição: $2\pi x^2 + 2\pi xy = C$. Sem perda de generalidade, podemos colocar $C = 2\pi a^2$, onde $a = \sqrt{C/2\pi}$, ficando a condição na forma: $x^2 + xy = a^2$. Tirando o valor de $y = a^2/x - x$ e substituindo, queremos maximizar $V/\pi = a^2x - x^3 = f(x)$, para $0 < x < a$, que é condição para que $y > 0$.

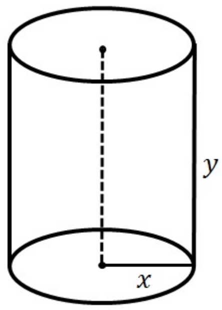


Figura 2.1: Cilindro.

Como $f(0) = f(a) = 0$ e $f(x) = x(a^2 - x^2) > 0$ para $0 < x < a$, o problema recai em achar o máximo de $f(x)$ no intervalo fechado e limitado $I = [0, a]$. É intuitivo que esse máximo existirá, e de fato sua existência está garantida por ser f contínua em I (Teorema do Valor Extremo[1]).

Seja então b um valor de x para o qual f assume seu valor máximo em I, ou seja: $f(b) - f(x) \geq 0$, para todo $x \in I$. Essa condição traduz-se em: $a^2b - b^3 - (a^2x - x^3) \geq 0$, ou seja:

$$a^2(b - x) + (x - b)(x^2 + bx + b^2) \geq 0, \text{ ou ainda}$$

$$(x - b)(x^2 + bx + b^2 - a^2) \geq 0. \qquad (1)$$

Como $b < a$, o trinômio $x^2+bx+b^2-a^2$ tem discriminante $\Delta = 4a^2-3b^2 > 4a^2-3a^2 = a^2 > 0$. Portanto, ele tem duas raízes reais x_1 e x_2, de sinais contrários, pois $x_1\, x_2 = b^2 - a^2 < 0$. Então, a condição (1) fica: $(x - b)(x - x_1)(x - x_2) \geq 0$, onde

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2} \qquad \text{e} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2}.$$

[1]Seja f uma função contínua definida em um intervalo fechado $[a, b]$. Então existem números c e d no intervalo $[a, b]$, tais que, $f(c)$ é o valor máximo e $f(d)$ é o valor mínimo de f em $[a, b]$.

Como $x - x_2$ é sempre positivo, a condição fica reduzida a: $(x - b)(x - x_1) \geq 0$. Porém:

$$0 < b < a \Rightarrow 0 < b^2 < a^2 \Rightarrow -3a^2 < -3b^2 \Rightarrow a^2 < 4a^2 - 3b^2 < 4a^2 \Rightarrow$$

$$a < \sqrt{\Delta} < 2a \Rightarrow a - b < -b + \sqrt{\Delta} < 2a - b \Rightarrow$$

$$0 < \frac{a-b}{2} < \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2} < a - \frac{b}{2} < a$$

Ou seja: $x_1 \in I$. Mas, então, a única maneira de satisfazer $(x - b)(x - x_1) \geq 0$ para todo $x \in I$ é ter $x_1 = b$, pois, caso contrário, $f(x)$ seria negativo para x entre b e x_1. Logo: $b = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2}$, ou seja, $3b = \sqrt{4a^2 - 3b^2}$, implicando $b = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$. Calcula-se então o correspondente valor de $y = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$. Conclui-se portanto, que o volume máximo ocorre quando a altura do cilindro tem o mesmo comprimento que o diâmetro da base. Esse tipo de cilindro é conhecido como "cilindro equilátero", e sua seção por um plano que contém o eixo é um quadrado de lado $\dfrac{2a}{\sqrt{3}}$.

Solução II

Diferentemente da solução anterior, nessa Wagner e Carneiro usam conhecimentos de Cálculo Diferencial. Calculando a derivada de

$$f(x) = a^2x - x^3$$

obtemos:

$$f'(x) = a^2 - 3x^2 = (a - x\sqrt{3})(a + x\sqrt{3}) \qquad \text{e} \qquad f''(x) = -6x < 0,$$

O gráfico de f é o da Figura 2.2, sendo $b = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$ a única raiz de $f'(x)$ em I.

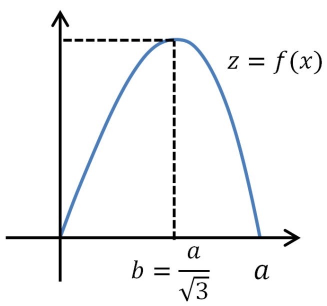


Figura 2.2: Curva: Volume do Cilindro.

Ao compararmos os dois procedimentos resolutivos mostrados acima, não são necessários muitos esforços para percebermos que o uso de uma ferramenta de Cálculo facilita bastante a resolução de determinados problemas. Ainda segundo Wagner e Carneiro (2004):

> [...] a tremenda simplicidade da solução pelo Cálculo Diferencial deve servir de estímulo aos leitores para se convencerem que vale a pena dedicar-se a essa disciplina. Para isso é que se aprendem as técnicas do Cálculo Diferencial. "Gasta-se"um tempo para adquiri-las, mas esse tempo é plenamente recuperado mais adiante na simplicidade com que se resolvem as aplicações.

Um fato bastante curioso diz respeito à ordem na qual os conceitos foram descobertos e à ordem que os mesmos são abordados em sala de aula. A história conta que o cálculo integral surgiu primeiro quando, por processos somatórios, tentava-se calcular algumas áreas, volumes e comprimentos. Tempos depois, problemas envolvendo reta tangente a uma curva em determinado ponto e problemas sobre máximos e mínimos, deram origem ao que hoje conhecemos por diferenciação. Chega a impressionar o fato de que, até então, ninguém sabia da relação existente entre a Integração e a Diferenciação e, portanto, foi necessário certo tempo para se perceber que, com algumas restrições, uma é o processo inverso da outra.

Foram muitos os matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento do cálculo, no entanto, Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)[2] foram quem desenvolveram as principais ideias a respeito do assunto. As ideias desses dois grandes matemáticos se complementavam, e isso foi de suma importância para o encadeamento dos conceitos. Conta-se que Newton foi o responsável por grande parte do avanço obtido pelo Cálculo na época, ao passo que Leibniz ligou essas descobertas usando uma notação bem mais simples e eficaz.

Foram necessários muitos estudos e anos de dedicação para o aperfeiçoamento dos conceitos que permeiam o cálculo. Há exatos 349 anos atrás, em seu período de intenso trabalho dedicado ao Cálculo, Newton já dominava e procurava melhorar os métodos para encontrar tangentes, desenvolvidos por René Descartes (1596-1650) e Johann Hudde (1628-1704). Para encontrar a tangente a uma curva em um ponto P,

[2]Para saber um pouco mais da história desses dois ilustres matemáticos veja o Apêndice B na página 97.

procurava-se círculos com centro na coordenada x passando por P. A maioria dos círculos cruza a curva em dois pontos (Figura 2.3), no entanto, há um círculo que toca a curva somente em P (Figura 2.4). A reta que contém P e é normal ao segmento PC é tangente ao círculo e à curva.

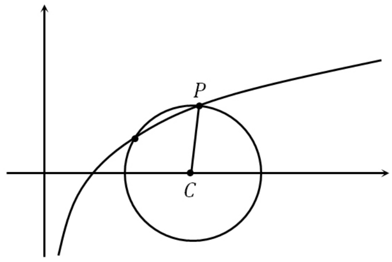


Figura 2.3: Curva secante ao círculo.

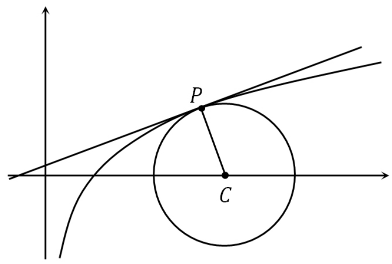


Figura 2.4: Curva tangente ao círculo.

O problema agora consistia em determinar o centro do círculo. Para isso Hudde, fazendo uso de um truque inventado por Pierre de Fermat (1601-1665), desenvolveu uma maneira confiável, no entanto, complicada de aplicar. Pouco tempo se passou até Newton desenvolver um método bem mais fácil de usar e que resolveria esse problema.

Fermat contribuiu muito com a Matemática. Em 1629 aplicou a Geometria Analítica, desenvolvida por Descartes, para encontrar pontos máximos e mínimos de curvas e para isso usou um procedimento mecânico e sem nenhuma justificativa. Vamos entender melhor a ideia de Fermat através de um exemplo. Imagine que se queira determinar os pontos de máximo ou de mínimo da curva $f(x) = 2x^2 - x^3$. Ele supôs que a curva tivesse um máximo (ou mínimo) no ponto de coordenada x e, sendo $x + A$ um valor próximo de x, os valores que $y = f(x)$ assume em x e $x + A$ são quase iguais, conforme a Figura 2.5.

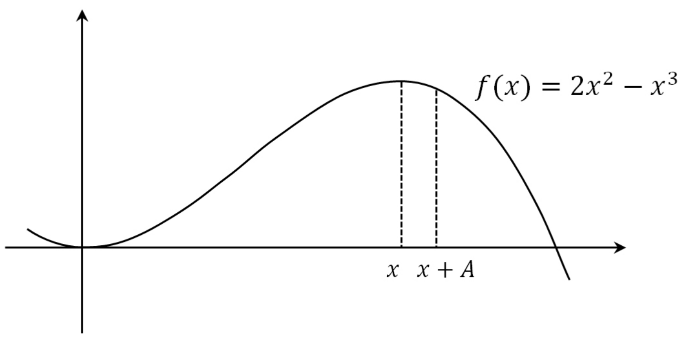


Figura 2.5: Fermat e o cálculo de máximos e mínimos.

Sabendo disso, ele iguala as imagens de x e $x + A$ por f e despreza os termos em A, pois esse é infinitamente pequeno. Veja:

$$f(x + A) = f(x) \Rightarrow$$

$$2(x + A)^2 - (x + A)^3 = 2x^2 - x^3 \Rightarrow$$

$$2(x^2 + 2Ax + A^2) - (x^3 + 3x^2A + 3xA^2 + A^3) = 2x^2 - x^3 \Rightarrow$$

$$2x^2 + 4Ax + 2A^2 - x^3 - 3x^2A - 3xA^2 - A^3 = 2x^2 - x^3 \Rightarrow$$

$$4xA + 2A^2 - 3x^2A - 3xA^2 - A^3 = 0 \Rightarrow$$

$$A(4x + 2A - 3x^2 - 3xA - A^2) = 0 \Rightarrow$$

$$4x + 2A - 3x^2 - 3xA - A^2 = 0 \Rightarrow$$

$$4x - 3x^2 = 0 \Rightarrow$$

$$x(4 - 3x) = 0 \Rightarrow$$

$$x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{4}{3}$$

Resta agora determinar se os pontos encontrados são de máximo ou de mínimo. Para isso Fermat comparava as imagens de $x = 0$ e $x = \frac{4}{3}$ com as imagens de pontos vizinhos. Com isso ele concluía que $x = 0$ é ponto de mínimo local e $x = \frac{4}{3}$ é ponto de máximo local da função $f(x) = 2x^2 - x^3$.

Calcular tangentes era uma especialidade de Newton e em outubro de 1665 ele foi além das curvas polinomiais e voltou sua atenção às curvas mecânicas, isto é, curvas definidas por movimentos. A Cicloide é a mais famosa delas e trata-se da trajetória descrita por um ponto de uma circunferência, quando esta rola ao longo de uma superfície. Newton descreveu a tangente a esta curva como sendo a direção instantânea do ponto enquanto traça a curva. Vale salientar que a ideia de "direção instantânea" já havia sido estudada por outros matemáticos como Kepler, Galileu, Torricelli e Roberval, entretanto, nenhum desses compreendeu tanto a respeito do assunto quanto Newton.

Por séculos, a noção de limite foi confundida com ideias vagas, às vezes filosóficas relativas ao infinito – números infinitamente grandes ou infinitamente pequenos – e com intuições geométricas subjetivas, nem sempre rigorosas. O termo limite no sentido moderno é produto dos séculos XVIII e XIX, originário da Europa. Os primeiros indícios da ideia de limite data de 450 a.C. quando se discutia a respeito dos quatro paradoxos de Zenão. Por exemplo, no segundo paradoxo, Zenão considera a questão do movimento relativo de dois corpos e expressa isso através de uma corrida envolvendo Aquiles e uma tartaruga:

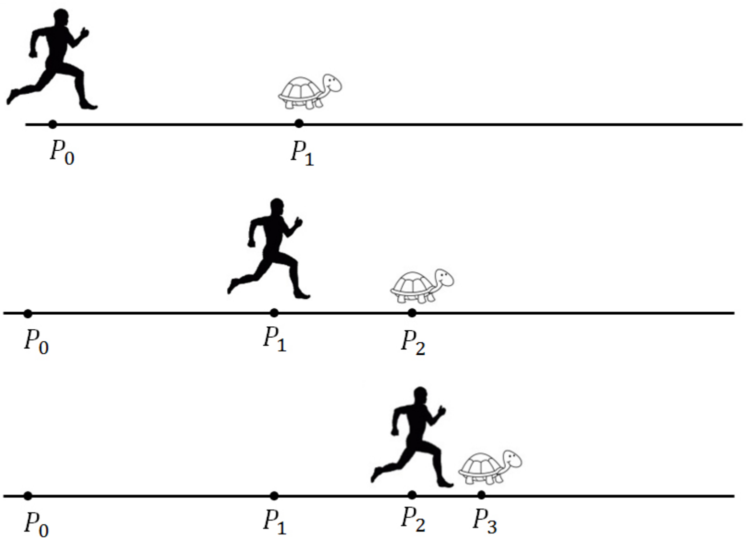


Figura 2.6: Aquiles e a tartaruga.

Se a tartaruga começa a corrida com certa vantagem sobre Aquiles, quando este alcança a sua posição inicial P_1, a tartaruga já terá se movido para a posição P_2. Quando Aquiles atinge a posição P_2, a tartaruga já se encontra em P_3, e assim sucessivamente, dando a entender que a tartaruga nunca será alcançada por Aquiles. É evidente que na prática isso não funciona, e ao supormos que a velocidade da tartaruga é um décimo da velocidade de Aquiles e que este precisa de um segundo para chegar a P_1, então o mesmo precisaria de um décimo de segundos para atingir P_2, um centésimo de segundo para atingir P_3, e assim por diante. Observe que

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{10^n} = 1 + \frac{1}{9}.$$

O que mostra que em $\left(1 + \dfrac{1}{9}\right)$ segundos a tartaruga será alcançada e em $\left(1 + \dfrac{2}{10}\right)$ segundos ela já terá sido ultrapassada.

A princípio, a ideia que Newton tinha de limites era apenas intuitiva. Ele usava a palavra limite para se referir a quantidades que diminuía tanto, a ponto de desaparecerem. Isso chegou a intrigar Newton e à medida que o tempo passava ele aprimorava cada vez mais seus conceitos a respeito do assunto. Para Newton, afirmar que um limite é igual a L, significava que tal quantidade se aproxima de L tanto o quanto queiramos. Isso mostra que, o conhecimento de Newton a respeito de limites, apesar de primitivo e intuitivo, era útil e ia além do que muitos imaginavam. Os cadernos de anotações de Newton mostram que ele tentou por várias vezes definir limites, pois o mesmo sabia que muitos conceitos descobertos por ele ao lidar com problemas sobre tangentes e áreas, estavam intrinsecamente ligados a essa importante ferramenta matemática. A definição rigorosa de limite foi dada por A. L. Cauchy (1789–1857) em seu livro *Cours d'Analyse* publicado em 1821. Mas antes disso, o fato de ainda não haver uma definição rigorosa não tirou a veracidade dos resultados encontrados pelos matemáticos da época.

É interessante comparar os pensamentos de Newton e Leibniz, em 1670, a respeito do Cálculo, quando seus escritos ainda não tinham sido publicados. Ao fazermos tal comparação várias semelhanças emergem, assim como algumas diferenças. No que diz respeito às semelhanças, ambos os Cálculos são sobre propriedades geométricas de figuras, áreas e tangentes. Os dois percorreram um longo caminho para concluir suas descobertas e definir suas regras.

Mas também há diferenças interessantes. Newton falava de fluxões[3] e usava aumento infinitesimal de uma variável para encontrá-las. Ele sempre foi atraído pela ideia de movimento de mudança no tempo para expressar suas ideias sobre Matemática. Embora tenha aprofundado o assunto sobre o tempo, sempre usou a linguagem do movimento. Leibniz falava de diferenciais, entre pontos infinitos de curvas feitas de polígonos com lados infinitamente pequenos. Nenhum movimento. Entretanto, ambos fizeram analogias geométricas que forneceram regras válidas para diferenciação e integração. De fato, as regras de Leibniz são mais básicas no raciocínio matemático que as equivalentes de Newton.

Além de útil e abrangente, o cálculo Diferencial e Integral é indispensável,

[3]O Método das Fluxões, como ele o denominou, foi baseado na ideia crucial de que a integração de uma função era meramente o procedimento inverso da diferenciação. Tomando a diferenciação como operação básica, Newton criou métodos analíticos simples, que unificaram diversas técnicas anteriormente desenvolvidas para resolver problemas aparentemente não relacionados, como achar áreas, tangentes, comprimentos de curvas e máximos e mínimos de funções.

seja pelo estudo do Cálculo propriamente dito, seja pelo fato do Cálculo ser a base para o desenvolvimento das tecnologias de informática e, consequentemente, ser crucial num mundo cada vez mais digitalizado. O grau de importância alcançado pelo Cálculo não é à toa, isso se deve ao fato dele lidar com problemas de várias áreas do conhecimento como Matemática, Física, Química, Estatística, Economia, entre outras. É ampla a quantidade de problemas para os quais o Cálculo proporciona soluções, a saber: determinação de órbitas de astros, satélites e mísseis; na análise do crescimento de populações, seja de seres humanos ou bactérias; no cálculo de comprimentos, áreas e volumes; em problemas de otimização, entre outros.

Percebe-se que o Cálculo é uma das mais tradicionais disciplinas e a que mais tem preservado sua estrutura original. Vale ressaltar que, apesar do surgimento de calculadoras e computadores, a estrutura do Cálculo é essencialmente a mesma desde o seu surgimento no final do século XVII, ou seja, há mais de 300 anos, quando Newton e Leibniz desenvolveram, independentemente, as ideias básicas do Cálculo.

Newton realmente descobriu o Cálculo primeiro em 1665 ou 1666. Leibniz fez sua descoberta independente cerca de 10 anos depois. Porém, Newton só publicou sua descoberta anos depois disso. O fascinante é que os registros originais das descobertas de ambos estão preservados. Na Biblioteca da Universidade de Cambridge está os cadernos de Newton e, em Hanôver, as anotações de Leibniz. Eles fornecem uma visão fascinante do processo de descoberta matemática que ambos utilizaram. Apesar de tudo, devemos reconhecer que, com as publicações de suas descobertas no fim de 1670, a Matemática recebeu o maior aumento de poder desde os Gregos.

2.2 O Cálculo no Ensino Médio

O ensino de Matemática nos três últimos anos da educação básica, não somente no Brasil, já passou por várias mudanças ao longo de sua história. Todas essas mudanças foram realizadas sempre na intenção de melhorar o currículo. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's), o currículo do Ensino Médio deve ser estruturado de modo a assegurar ao aluno a possibilidade de ampliar e aprofundar os conhecimentos matemáticos adquiridos no Ensino Fundamental de forma integrada com outras áreas do conhecimento e orientada pela perspectiva histórico-cultural na qual estão ligados os temas em estudo. Isto é proposto visando a preparação do aluno para o trabalho e exercício da cidadania e também a continuação de seus estudos em níveis superiores.

Na prática não é bem isso que ocorre. Como professor atuante também no Ensino Médio, percebo que um dos fatores que levam a grande maioria dos alunos a não gostar de Matemática, é o fato de eles não entenderem a essência intrínseca a cada conteúdo ministrado, ou seja, eles não compreendem a real importância dos conteúdos matemáticos para a sociedade. De acordo com Santos (2011):

> É impressionante o número de alunos que ojerizam à Matemática. São inúmeros os fatores que ocasionam essa realidade dentre os quais é importante frisarmos uma falha apresentada pelo professor, quando não consegue estabelecer relações entre os conteúdos abordados em sala de aula e situações cotidianas vivenciadas pelos alunos, contribuindo assim, para a falsa impressão causada nos alunos, de que a Matemática não passa de uma repetição de fórmulas desconectadas do mundo real.

Um exemplo que podemos citar diz respeito ao conteúdo Função, visto, não pela primeira vez, no primeiro ano do Ensino Médio. A maioria dos professores o aborda de forma mecânica e distante da realidade vivida pelo aluno, fazendo com que o aluno não tenha, ao menos, ciência do que está fazendo ao calcular a imagem de um número por uma dada função. Segundo Carvalho (2005, p.13):

> Isso se deve ao fato de o material teórico ser memorizado pelos alunos, por meio de exercícios repetitivos, ser apresentado como simples lista de fatos e fórmulas. Além disso, as aplicações, em grande maioria, não são relacionadas à realidade dos alunos. Assim, os alunos aplicam mecanicamente os procedimentos rotineiros, o que exige dos mesmos muito pouco raciocínio.

Tudo isso reflete nas dificuldades apresentadas pelos alunos nos primeiros contatos com o cálculo já no ensino superior. Portanto, no intuito de sanarmos as consequências de tais dificuldades, estamos aqui com a finalidade de provocar uma discussão a respeito da inserção de algumas noções de cálculo na grade curricular do Ensino Médio.

Cálculo no ensino médio ainda é um assunto delicado e que traz a tona algumas divergências nas opiniões dos professores. Em um artigo publicado na Revista do Professor de Matemática, escrito pelo professor Geraldo Ávila, são levantadas algumas questões importantes a respeito da inserção do cálculo no Ensino Médio:

> Por que não ensinamos cálculo na escola de segundo grau? Será que é um assunto muito difícil? Foi sempre assim no passado, ou já houve época em que o cálculo era ensinado na escola secundária? E nos outros países, como é a situação? É ou não conveniente introduzir o cálculo no ensino? Por que? Como fazer isso? (ÁVILA, 1991, p.1).

Aqui no Brasil o Cálculo Diferencial e Integral já esteve presente nas escolas da educação básica, mas nas décadas de 50 e 60 o movimento Matemática Moderna influenciou o ensino de Matemática em alguns países dentre os quais se encontra o Brasil. Isso acarretou na exclusão do Cálculo, juntamente com outros conteúdos que compunham as grades curriculares.

Em 2006, ano que cursei a última série do Ensino Médio, utilizamos o livro didático *Matemática: Ciência e Aplicações* de Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo e Nilza de Almeida (2004). Este livro aborda algumas noções de Cálculo, como Derivada, Regras de Derivação e o Estudo de Máximos e Mínimos de funções. O estudo de derivada é precedido de exemplos acerca de funções contínuas em todo o seu domínio e funções descontínuas, isto é, funções que apresentam algum tipo de "anomalia", como: furo, degrau ou salto. Em seguida, é definida a derivada de uma dada função em um ponto específico. O tópico seguinte versa sobre a equação da reta tangente ao gráfico da função relacionada à derivada no ponto em questão. Logo em seguida é apresentada a função derivada e através de alguns exemplos é calculado, usando a definição, a derivada das funções constante, potência, seno, cosseno, e exponencial. Finalizando o capítulo 9, o livro ainda aborda de forma sucinta algumas aplicações das derivadas à Cinemática.

O capítulo 10 trata das derivadas da soma, do produto, do quociente e das funções tangente, logarítmica e inversa. Ainda neste capítulo é dada ênfase à derivada de uma função composta, fazendo uso da Regra da Cadeia, e às derivadas sucessivas. No último capítulo os autores relacionam a derivada com o crescimento e decrescimento de funções, além de fazerem uso da mesma na identificação dos máximos e mínimos locais e absolutos. Para isso também se faz uso do famoso Teorema de Fermat que recebe esse nome em homenagem ao francês Pierre de Fermat (1601-1665).

Se $f : D \to R$ é uma função derivável no ponto $x_0 \in D$ e x_0 é ponto extremo local interior de f, então $f'(0) = 0$.

Por fim, o autor ainda lança mão do estudo da derivada segunda para determinar se uma raiz x_0 da equação $f'(x) = 0$ é extremante da função f.

O livro que estou trabalhando com os meus alunos da terceira série do Ensino Médio, *Matemática: Contexto e Aplicações* (DANTE, 2010), também aborda noções básicas de cálculo. O ultimo capítulo do livro é, exclusivamente, reservado para as noções intuitivas sobre derivada. O autor inicia deixando claro os conceitos de incremento de uma variável, incremento de uma função e taxa média de variação, ou seja, razão entre os incrementos. Em seguida é introduzido o conceito de derivada e, através de alguns exemplos, é mostrado como se calcula a derivada de algumas funções elementares.

E claro, não poderia faltar algumas aplicações de derivada, dentre as quais se encontram, velocidades e acelerações, ambas médias e instantâneas. Mas antes o autor apresenta as propriedades operatórias das derivadas. Também é feito uma interpretação geométrica da derivada, relacionando-a ao coeficiente angular de uma reta, à reta tangente a uma curva em um ponto, e à declividade de uma curva. Por fim, faz-se uma análise a respeito do comportamento da função afim $y = f(x) = ax + b$ e da função quadrática $y = f(x) = ax^2 + bx + c$.

Dentre os vários autores que optam por colocarem o cálculo em seus livros do Ensino Médio estão Giovani, J. R. e Bonjorno, J. R. (2005), que também o fazem na última série. O sexto capítulo deste livro é todo a respeito de limites. No início, além da ideia intuitiva, é feita a definição sem fazer uso de elementos abstratos. As propriedades como limite da soma, da diferença, do produto e do quociente, são apresentadas logo depois. O autor ainda fala a respeito de limites de funções constante, polinomial, contínua, composta, exponencial e logarítmica. Tudo isso é feito de forma palpável, isto é, de modo que um aluno de nível médio possa compreender.

O último capítulo, Giovani e Bonjorno, o reservam exclusivamente para o estudo da derivada que é iniciado relacionando taxa de variação média, coeficiente angular e razão incremental. Depois da definição de derivada e de exemplos de como calcular a derivada de algumas funções através da definição, o livro mostra como se calcula algumas derivadas fundamentais e que a derivada da soma e da diferença são, respectivamente, a soma e a diferença das derivadas. Antes de falar a respeito da derivada de um produto e de um quociente de funções, o autor mostra o que a derivada tem a ver com a velocidade e a aceleração, ambas escalares e instantâneas. Por fim, é feito o estudo da variação das funções, dando ênfase a problemas envolvendo crescimento e decrescimento, assim como, problemas respeitantes a máximos e mínimos de funções.

Benigno Barreto Filho e Cláudio Xavier da Silva, no último livro da coleção *Matemática Aula por Aula*, 2003, reservam os capítulos 4 e 5 para o estudo de limites e derivadas, respectivamente. O modo como os conceitos são abordados nesse livro é bastante semelhante a como Giovani e Bonjorno o fazem no livro supracitado.

Apesar de tudo, o fato de todos esses conteúdos estarem presentes no livro didático não implica que o professor os tenha abordados em sala de aula. Alguns professores do Ensino Médio alegam que o principal motivo dessa não abordagem é que tais conteúdos são complexos, estando assim, além do nível de compreensão portado pelos alunos e, portanto, devem ser ministrados somente no ensino superior. Isso nos permite concluir que, em alguns casos, o cálculo faz parte do livro didático do Ensino Médio, entretanto, o mesmo não é ministrado em sala.

Fora do Brasil algumas escolas básicas ensinam o Cálculo, muitas vezes, indo além de simples noções. Como exemplo, podemos citar os Estados Unidos. Lá, o aluno do *sênior high-school*, ao que aqui corresponde ao Ensino Médio, caso queira estudar Matemática, dispõe de cursos como: Álgebra, Geometria e Cálculo. Tais cursos são substanciais a ponto de dar ao aluno, caso ele ingresse na universidade, a opção de ser dispensado do componente curricular Cálculo. Sendo assim, ao ingressar na universidade o aluno já cursa disciplinas mais avançadas.

Ao questionar de modo informal alguns colegas professores de Matemática sobre a inserção de algumas noções de cálculo no Ensino Médio, ouvi como resposta de um deles o seguinte argumento: "Os livros didáticos de Matemática já trazem uma grande quantidade de conteúdos, os quais não são vistos por completo durante o ano letivo, então, na minha opinião, não acho viável um acréscimo em tais conteúdos, ainda mais, sendo de alta complexidade como é o caso do cálculo!". Sobre isso, Ávila (1991 p. 1-9) comenta:

> [...] não é que falte espaço para o Cálculo nos programas. É preciso, isto sim, reestruturar esses programas, eliminar o que neles há de arcaico, introduzir novos tópicos e modernizar as apresentações, tudo isto feito de maneira que as diferentes partes fiquem bem articuladas entre si e o conjunto apresente organicidade. [...] A ideia de que os programas de Matemática são extensos e não comportariam a inclusão do Cálculo é um equívoco. Os atuais programas estão, isto sim, mal estruturados.

A respeito da derivada, Ávila (2006), afirma que essa deve ser apresentada aos alunos logo na primeira série do Ensino Médio, pois, além de ajudar no tratamento de inúmeras propriedades das funções, ainda se integra harmoniosamente com a Física no estudo do movimento. Alguns livros, repito, já a inclui de maneira sensata, breve e equilibrada, mas pecam ao trazerem esse conteúdo somente na última série do Ensino Médio, quando pouco se pode aproveitar desse estudo. Vista em um curso de Cálculo, a derivada vem precedida de uma gama de formalismos e abstrações sobre Limite, mas no Ensino Médio pode ser feito diferente, uma vez que, para se estudar derivadas não é necessário abordar conceitos de limites, até porque, os conceitos sobre derivada surgiram antes mesmo de se falar em limites, ficando portanto, a critério do professor, abordar ou não o conteúdo Limite. Segundo Ávila 2006:

> Os blocos de limites e derivadas, como ainda aparecem em vários livros da terceira série, devem ser reduzidos substancialmente. [...] um tratamento separado e prévio de limites é totalmente desnecessário. As apresentações em alguns livros ainda são feitas num estilo que está mais para o ensino universitário que Ensino Médio. Portanto, além da redução da matéria tratada, é necessário fazer uma devida adequação dessa matéria ao Ensino Médio.

Esse ponto de vista a respeito da inserção do cálculo no Ensino Médio não é apenas do professor Geraldo Ávila. O professor Robert Costallat Duclos, no artigo *Cálculo no Segundo Grau*, e a professora Maria Alice Gravina, no artigo *Um Estudo de Funções*, ambos publicados na Revista do Professor de Matemática, concordam em todos os aspectos com a ideia de Ávila, afirmando que, se ministrado adequadamente, o Cálculo traz a tona ideias novas tornando o processo de ensino e aprendizagem bem mais profícuo e interessante.

É claro que não devemos apresentar o Cálculo a um aluno da escola básica com o mesmo rigor que ele deve ser apresentando em uma universidade. O que estamos defendendo é que o cálculo seja abordado de uma maneira simples, direta e acessível, pois a principal intenção é deixar o aluno a par das primeiras noções para que ele já tenha uma base sobre o conteúdo ao ingressar na educação superior, reduzindo assim, o índice de reprovações nas disciplinas de Cálculo.

2.3 Cálculo e os softwares

Como sabemos, o cálculo aparece na vida do estudante de uma maneira densa, ou seja, são muitos conceitos para serem assimilados em tão pouco tempo fazendo com que o aluno julgue essa disciplina como sendo altamente complexa. Acreditamos que esse pode ser um dos motivos causadores do alto índice de reprovação e evasão nas primeiras disciplinas de cálculo na universidade. Conceitos que, somados, levaram seus descobridores a dispenderem séculos de estudos, são abordados em poucos meses, sobrecarregando, junto às demais disciplinas, todo o ano letivo. Às vezes a metodologia usada pela maioria dos professores desta disciplina prioriza a aula expositiva, é centrada na fala do professor, e os conceitos são apresentados como verdades inquestionáveis, como algo pronto e acabado, sem a preocupação de torná-los significativos. Sobre isso, Gravina (1999) afirma:

> [...] a aprendizagem nesta perspectiva depende de ações que caracterizam o 'fazer matemática': experimentar, interpretar, visualizar, induzir, conjeturar, abstrair, generalizar e enfim demonstrar. É o aluno agindo, diferentemente de seu papel passivo frente a uma apresentação formal do conhecimento, baseada essencialmente na transmissão ordenada de 'fatos', geralmente na forma de definições e propriedades. Numa tal apresentação formal e discursiva, os alunos não se engajam em ações que desafiem suas capacidades cognitivas, sendo-lhes exigido no máximo memorização e repetição, e consequentemente não são autores das construções que dão sentido ao conhecimento matemático.

Sabemos que, para uma melhor compreensão das ideias que envolvem o cálculo, é de suma importância que o aluno possua uma visão geométrica apurada, ou seja, que ele entenda geometricamente o que está sendo feito. Esse é o contexto ideal para se falar do papel de alguns programas computacionais desenvolvidos com o intuito de proporcionar um suporte melhor na abordagem de conteúdos matemáticos. Mas até onde um programa de computador pode ser útil no ensino de cálculo? Quais as vantagens que um software pode proporcionar à compreensão de conceitos matemáticos? Quando deve ser usado?

É inegável que a tecnologia tem se tornado indispensável quando o propósito é facilitar a vida do ser humano. Hoje o avanço tecnológico nos remete à necessidade diária de aprendermos a lidar com novos conhecimentos, caso contrário, não usufruímos das facilidades que temos à disposição, que vão desde uma simples transação bancária até uma comunicação remota. Dificilmente a ciência obteria grandes avanços sem fazer usos de recursos tecnológicos, e essa é uma combinação perfeita que vem dando certo há anos. Na sala de aula não é diferente; é enorme a variedade de conteúdos que, quando trabalhados com auxílio da tecnologia, proporcionam melhores condições de aprendizagem, tornando a aula mais produtiva e envolvente, despertando assim, um maior interesse no aluno.

É importante frisarmos que o computador não faz, como também nunca fará, o papel do professor. Este é insubstituível, pois, para que haja a construção do conhecimento é necessário questionamento, coleta de informações, exploração de problemas condizentes com a realidade do alunado; coisas que não podem ser expressas através de um algoritmo e, portanto, são ininteligíveis para uma máquina. De acordo com Barufi e Lauro (2001, p. 124):

> A sensibilidade do professor, enquanto ser humano, não pode ser substituída. É ela que o torna tolerante e disponível, aberto para as necessidades e dificuldades de seus alunos, buscando sempre novas maneiras de concretizar seus objetivos. A sensibilidade possibilita ao professor observar o brilho nos olhos de seu aluno quando esse conseguir construir o significado.

O professor não pode simplesmente levar recursos tecnológicos para a sala de aula sem que haja um planejamento de qual e como será a abordagem dos conteúdos, assim como as situações que serão discutidas em sala para aguçar a curiosidade do aluno. O que estamos querendo dizer é que o professor, além de ter de aprender a usar novos equipamentos e programas computacionais, terá também de mudar a metodologia usada e procurar maneiras produtivas e viáveis de integrar o uso de softwares no processo de ensino e aprendizagem. Isso exigirá do professor uma maior participação e empenho, caso contrário, não obterá êxito no desenvolvimento das atividades.

São inúmeras as vantagens que tais recursos nos conferem e, quando combinado aos problemas abordados em sala, pode, se feito de maneira adequada, trazer ótimos e importantes resultados no processo de ensino e aprendizagem. Uma dessas vantagens diz respeito ao dinamismo que esses aplicativos nos proporcionam, por exemplo, no estudo de geometria, é possível dar movimento a objetos como, ponto, retas, planos, vértices de polígonos, retas tangentes e gráficos de funções.

Não há dúvidas quando se trata do quanto é lucrativo a utilização de programas de computador no ensino de Matemática, uma vez que tais ferramentas, não só ajudam na superação dos obstáculos inerentes ao próprio processo de construção do conhecimento matemático, mas também podem acelerar o processo de apropriação do mesmo. O dinamismo nas cores e animações, ainda despertam no aluno, o interesse e a curiosidade. É importante ressaltarmos que a presença dos computadores em sala de aula não pode desviar a atenção que deve ser dada aos alunos e à interação entre esses, caso contrário, o computador produzirá resultados contraproducentes.

Observe que não é complexo colocar essa metodologia em prática, pois é suficiente que o professor esteja preparado e disponha de um ambiente informatizado. Sabemos que tal ambiente ainda não faz parte da realidade de muitas escolas do nosso país[4], mesmo assim, o professor pode fazer uso de um Datashow para ministrar sua aula. É importante salientarmos que o papel do computador nas aulas de Matemática não se resume à velocidade com a qual o mesmo apresenta as respostas. Cabe ao professor propiciar situações desafiadoras que incite os alunos a buscarem tais respostas. É durante essa busca que os alunos desenvolvem a capacidade de tentar, supor, testar e provar as respostas encontradas para o problema.

[4]É uma realidade vivenciada também pela Escola Estadual Cícero dos Anjos. Esta não dispõe de um Laboratório de Informática e para a realização dessa pesquisa utilizamos um Datashow emprestado, pois o da escola encontra-se quebrado.

Capítulo 3

Winplot

3.1 Conhecendo o Winplot

Este é um software *freeware*[1], desenvolvido pelo professor Richard Parris, da Phillips Exeter Academy. São várias as funcionalidades deste aplicativo, dentre as quais está o esboço e animação de gráficos de funções em duas e três dimensões. Ademais, o Winplot apresenta várias outras vantagens, algumas das quais citaremos mais adiante. O download da versão mais recente (v. 1.55 – 13 de setembro de 2012) pode ser feito no endereço http://math.exeter.edu/rparris. A versão em português foi disponibilizada em 2001 pelo professor Adelmo Ribeiro de Jesus.

Dentre os fatores que nos levaram a optar por trabalhar com esse software na realização dessa pesquisa, se encontram: é um software que não requer pagamento por sua licença; é de fácil utilização; também está disponível em português; não necessita de instalação; é pequeno (1.86 MB); roda nas plataformas Linux e Windows (95/98/ME/2K/XP/Vista/7/8); possibilita, através de variação de parâmetros, a animação de pontos, gráficos, retas tangentes, dentre outros elementos matemáticos.

Desde a sua invenção, em 1985, esta ferramenta computacional vem sendo submetida a constantes atualizações. A primeira versão deste software rodava no DOS e tinha por nome Plot. A origem do nome Winplot deu-se pelo fato do Plot ter sido aprimorado para ser executado no, até então recente, Windows, uma vez que o DOS estava se tornando obsoleto em virtude, principalmente, da reduzida capacidade de

[1]Programa de computador oferecido gratuitamente pelo seu autor, em geral disponível na Internet para download.

executar mais de uma tarefa simultaneamente. Portanto, o nome Winplot é uma fusão dos nomes Windows e Plot. A versão que utilizamos na realização de nossa pesquisa foi compilada em 13 de setembro de 2012.

Este programa apresenta uma quantidade grande de ferramentas para se trabalhar com funções em duas dimensões, com a possibilidade de encontrar raízes, interseções e extremos, combinar funções, calcular áreas, volumes e comprimentos de arcos, efetuar translações, rotações e animações. Diferentemente da opção bidimensional, onde só é possível criar gráficos de equações explícitas, paramétricas, implícitas e polar, na opção tridimensional, é possível também, lidar com curvas escritas com equações cilíndricas e esféricas. No modo 3D também é possível trabalhar com integrais, animações, divisões, combinações e intersecções de superfícies.

3.2 Usando o Winplot

Ao abrirmos o programa nos deparamos com as seguintes janelas.

Figura 3.1: Janela inicial do Winplot.

A janela à direita mostra dicas sobre a utilização do programa, isto é, mostra informações sobre o que é possível fazer tanto em duas como em três dimensões. São dicas bastante úteis e abordam os mais variados aspectos, como por exemplo, traçar gráficos de funções trigonométricas usando valores em graus, usar algumas teclas do teclado para melhorar a visualização do gráfico, limitar o domínio de uma função, entre outras.

Na janela à esquerda observamos dois menus que dão acesso as opções mostradas da Figura 3.2.

A partir de agora daremos destaque à opção 2-dim, pois foi essa que utilizamos durante a realização de nossa pesquisa. Clicando em 2-dim temos acesso a uma nova

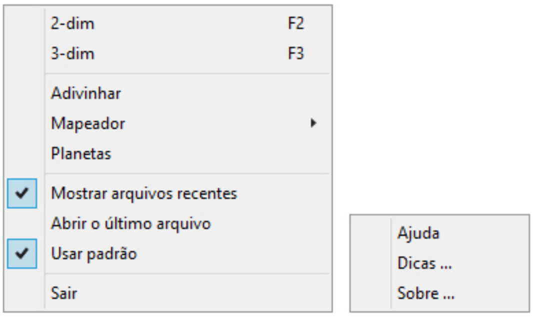


Figura 3.2: Submenu da janela principal.

janela para o esboço de gráficos em duas dimensões, como mostra a Figura 3.3.

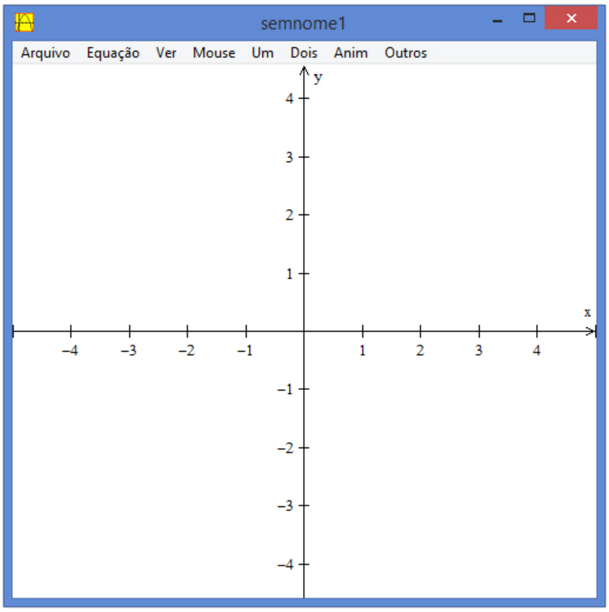


Figura 3.3: Janela para gráficos em duas dimensões.

O menu **Arquivo** traz opções comuns à maioria dos programas computacionais, são elas: Abrir, Novo, Salvar, Imprimir e ainda exportar arquivos nos formatos EPS, SVG, PiCTeX, EMF e BMP. Ao optarmos pelo menu **Equação** encontramos várias opções como mostra a Figura 3.4.

Podemos traçar gráficos de funções escritas nas formas explícita, paramétrica, implícita ou polar. Este menu ainda nos dá acesso à Biblioteca do programa, onde encontramos o modo como cada função deve ser escrita para que o programa a interprete. Ao optarmos pela opção Explícita, é aberta uma janela onde devemos digitar a função da qual desejamos ver o gráfico. Ver Figura 3.5.

Esta janela nos dá algumas opções como, delimitar o intervalo no qual queremos que o gráfico seja traçado, mudar a espessura do gráfico, assim como a densidade

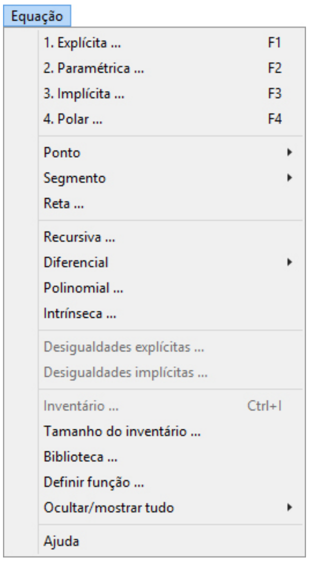


Figura 3.4: Submenu do menu equação.

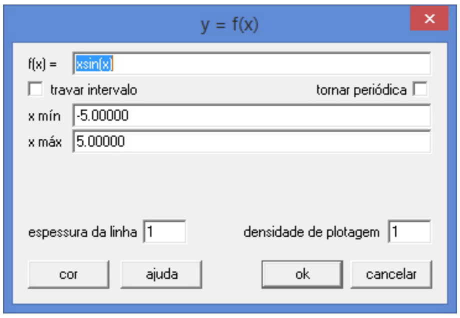


Figura 3.5: Janela para inserção da função.

da plotagem e a cor. A opção Ajuda abre um leque de dicas e sugestões respeitantes a todas as ferramentas presentes no menu Equações.

Ao clicarmos em OK para visualizarmos o gráfico da função escolhida, aparece na tela a janela Inventário mostrada na Figura 3.6.

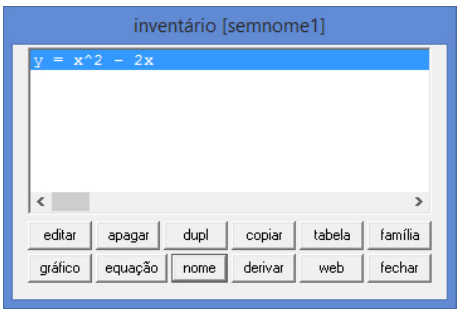


Figura 3.6: Inventário.

Por meio dos comandos presentes nesta janela podemos:

- **Editar**: permite fazer mudanças nos exemplos através de uma caixa de diálogo.
- **Apagar**: apaga o que estiver selecionado e tudo que dele depender. Não existe a função "Desfazer" e isso pode ser considerado um ponto negativo do Winplot.
- **Dupl**: duplica o elemento selecionado e abre uma caixa de diálogo que possibilita a criação de um exemplo similar sem mudar o original.
- **Copiar**: copia a descrição do item e a coloca na área de transferência.
- **Tabela**: possibilita a visualização de valores da função selecionada através de uma janela de texto. Podemos ainda alterar o conteúdo da tabela clicando em Parâmetros na sua barra de menu, e também ver tabelas para um exemplo diferente clicando em Arquivo/Próximo na mesma barra de menu.
- **Família**: viabiliza gerar uma família de curvas ou pontos que estão na dependência de um parâmetro. Ao clicarmos nesta opção é aberta uma caixa de diálogo onde devemos digitar o parâmetro, os valores mínimos e máximos do intervalo onde o parâmetro escolhido deve variar e a quantidade de passos, ou seja, a quantidade de curvas ou pontos que devem compor a família. Clicando em Definir concluímos o processo e a família de gráficos é plotada na tela. Para desfazer esta construção basta selecionarmos o exemplo e clicarmos em Desfazer.
- **Gráfico**: ao clicarmos nesta opção o objeto selecionado é removido da tela sem, no entanto, removê-lo do inventário. Ao clicarmos novamente o objeto selecionado é novamente exibido na tela.
- **Equação**: mostra ou oculta a equação na janela dos gráficos.
- **Nome**: admite dar nome as equações, precedendo-as por uma pequena descrição.
- **Derivar**: esta opção permite que o gráfico da derivada da função selecionada seja gerado. O item é adicionado ao inventário nos permitindo selecionar e editar atributos como cor, espessura, densidade da plotagem, intervalo de plotagem e cor do gráfico. Esta foi uma das ferramentas bastante usadas durante os estudos realizados em sala.
- **Web**: em exemplos do tipo $y = f(x)$, é traçado um diagrama em rede.
- **Fechar**: fecha a janela do inventário.

3.3 Algumas peculiaridades

O Winplot possui várias outras peculiaridades importantes dentre as quais se encontra, por exemplo, o estudo de Desigualdades Explícitas e Desigualdades Implícitas. Na Figura 3.7 se encontra a região formada pelos pontos que satisfazem a inequação

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} < 1.$$

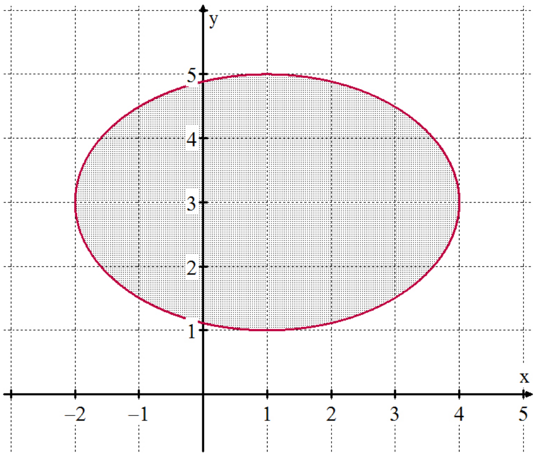


Figura 3.7: Pontos interiores a elipse.

Quanto às desigualdades explícitas também é possível usar a ferramenta Sombreamento para auxiliar na visualização de determinadas regiões no plano definidas explicitamente. Ainda podemos escolher dentre três opções, a saber: sombrear acima da curva, sombrear abaixo da curva e sombrear entre duas curvas. A Figura 3.8 mostra um sombreamento limitado no intervalo $[0, 1]$ feito entre as curvas $f(x) = x^2$ e $f(x) = x$.

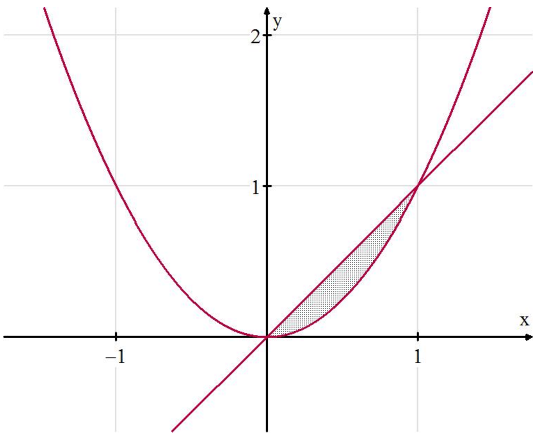


Figura 3.8: Sombreamento entre curvas.

O programa ainda nos permite calcular integrais de funções definidas explicitamente. A título de exemplo, vamos calcular, usando o Winplot, a integral definida

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\operatorname{sen} x - \cos x)dx.$$

Há duas maneiras de resolver esse problema usando o Winplot. A primeira é traçar os gráficos das funções $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $f(x) = \cos x$ e clicar na opção **Dois/Integrar (f(x)-g(x)) dx**, que permite calcular a integral definida da diferença de duas funções, fazendo aparecer a janela da Figura 3.9.

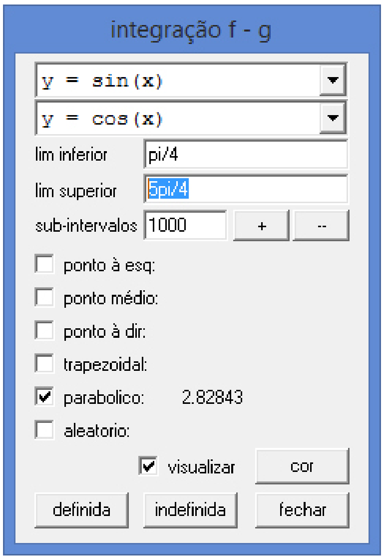


Figura 3.9: Janela de integração.

Nesta janela é possível escolhermos as funções das quais desejamos calcular a integral definida da diferença, assim como os limites de integração, o número de subintervalos, a forma das regiões nas quais a área de integração é dividida e a cor. Veja a Figura 3.10 para visualizar geometricamente.

A segunda maneira consiste em traçar o gráfico da função $f(x) = \operatorname{sen} x - \cos x$ e clicar na opção **Um/Medidas/Integrar f(x) dx**. Isso fará com que a janela da Figura 3.11 surja na tela.

Semelhantemente a primeira solução, podemos selecionar elementos do modo que melhor convier. Diferentemente do outro modo de integração, onde se calcula a área compreendida entre o gráfico de duas funções, este modo calcula a área compreendida entre o gráfico da função e o eixo Ox. Veja a Figura 3.12.

Além de o Winplot calcular área e volume de sólidos de revolução ele ainda nos proporciona a vantagem de vermos e manipularmos essas superfícies em três

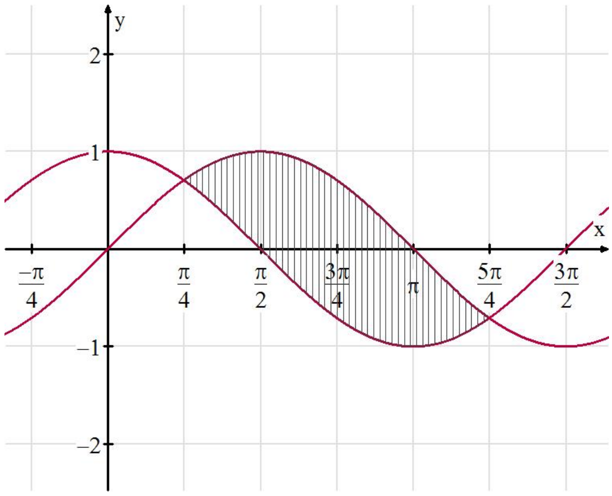


Figura 3.10: Visão geométrica da integral.

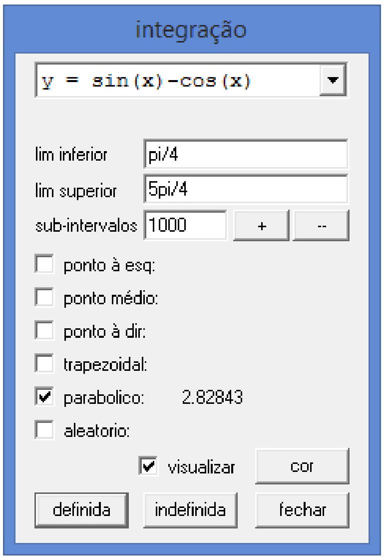


Figura 3.11: Janela de integração.

dimensões. Vamos observar a superfície de revolução do arco $f(x) = \operatorname{sen} x$, com $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ (arco em destaque na Figura 3.13).

Ao clicarmos em **Um/Superfíce de revolução** temos acesso a caixa de diálogo da Figura 3.14.

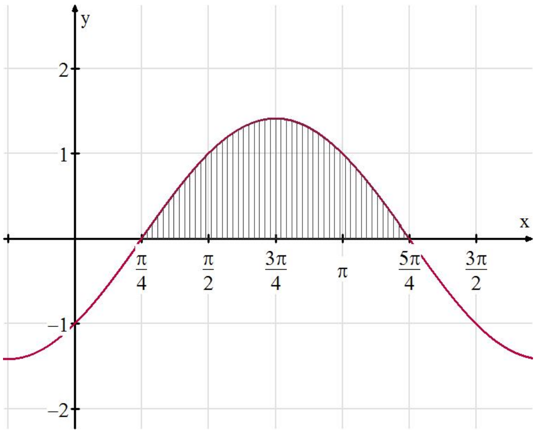


Figura 3.12: Visão geométrica da integral.

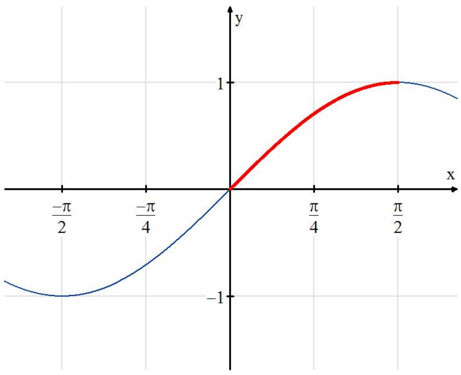


Figura 3.13: Arco gerador do sólido.

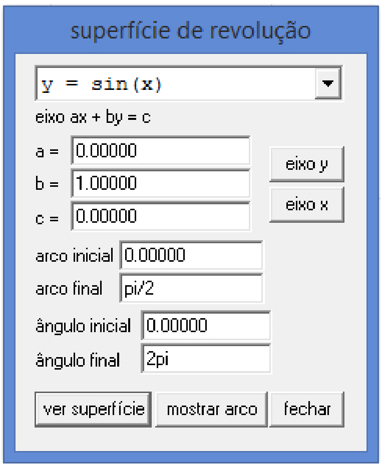


Figura 3.14: Caixa de diálogo.

Nesta podemos definir o eixo de revolução, os pontos iniciais e finais do arco e os ângulos iniciais e finais de revolução. Na Figura 3.15 encontramos as superfícies geradas pela revolução do arco $f(x) = \operatorname{sen} x$, com $0 \leq x \leq 1$, em tordo do eixo Ox (à esquerda) e em torno do eixo Oy (à direita).

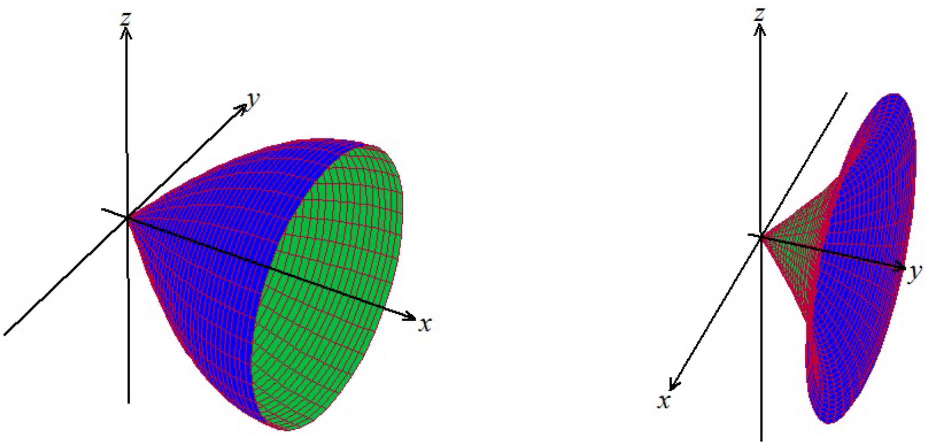


Figura 3.15: Sólidos de revolução.

Vale ressaltar que não tratamos, em nossas aulas, dos conceitos referentes à integração, desigualdades, sólidos e superfícies de revolução. Essa rápida abordagem que aqui fizemos foi apenas para mostrar algumas funcionalidades do software utilizado na realização dessa pesquisa e mostrar também que se trata de um programa completo, totalmente em português que, se usado da maneira adequada, pode facilitar muito a vida dos alunos, visto que é uma ferramenta educacional simples de utilizar.

3.4 Outros softwares úteis para o ensino de Matemática

Atualmente temos à nossa disposição inúmeros softwares que foram desenvolvidos para trabalhar com temas relacionados à Matemática e abordam conteúdos presentes nos mais diversos graus de conhecimento, indo desde as primeiras séries do Ensino Fundamental até o Ensino Superior. Além disso, boa parte desses aplicativos é oferecida gratuitamente pelos seus autores e, em geral, estão disponíveis na Internet para download. A seguir apresentaremos de forma sucinta alguns desses softwares.

3.4.1 GeoGebra

É um software de Matemática dinâmica, idealizado na intenção de ser utilizado em sala de aula. Ele é uma espécie de elo entre a Geometria e a Álgebra, daí a origem do seu nome. Além de ser compatível com diversas plataformas como Windows, Mac OS, Ubuntu, Android, iOS e Windows Phone, ele abrange todos os níveis de ensino, fazendo dele, um programa voltado para diversos públicos, combinando geometria, álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo. A Figura 3.16 mostra a interface desse software.

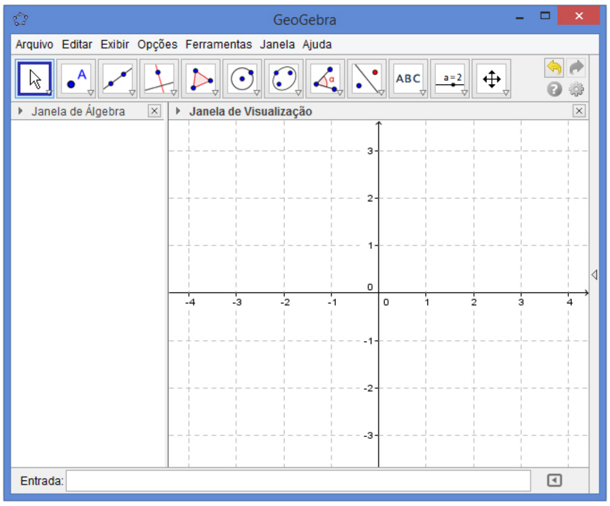


Figura 3.16: Interface do GeoGebra.

As primeiras ideias a respeito do GeoGebra tiveram início em 2001 na Universidade de Salzburg, na Áustria, com o professor Markus Hohenwarter e vêm sendo continuamente aperfeiçoadas. Apesar de ser um software ganhador de diversos prêmios na Europa, é gratuito e encontra-se disponível para download em www.geogebra.org. São inúmeras suas funcionalidades, possibilitando a inserção de equações e coordenadas diretamente nos gráficos, além de trabalhar com vetores, derivadas, integrais, dentre outros.

Dentre as várias vantagens de se utilizar o GeoGebra estão: os gráficos, a álgebra e as tabelas estão interconectados e possuem características dinâmicas; a interface é amigável e com inúmeros recursos sofisticados; é uma ferramenta de produção de aplicativos interativos em páginas da WEB; e por último, o fato de ser gratuito e estar disponível em vários idiomas, faz com que ele possua uma aceitação mundial.

3.4.2 Graphmática

Este aplicativo foi criado por Keith Hertzer, um bacharel em Engenharia Elétrica e Ciência da Computação. O download de versões atualizadas pode ser feito gratuitamente no endereço www.graphmatica.com. O usuário tem a sua disposição mais de dez idiomas, inclusive o português.

Esse software tem funcionalidades semelhantes ao GeoGebra, este porém, considero bem mais completo. Também é um programa que permite a plotagem de gráficos de funções de qualquer grau, funções exponenciais, logarítmicas, trigonométricas, hiperbólicas, dentre outras. Aborda conteúdos relacionados ao Cálculo Diferencial e Integral e também desenha gráficos de equações diferenciais ordinárias. Veja a interface do Graphmática na Figura 3.17.

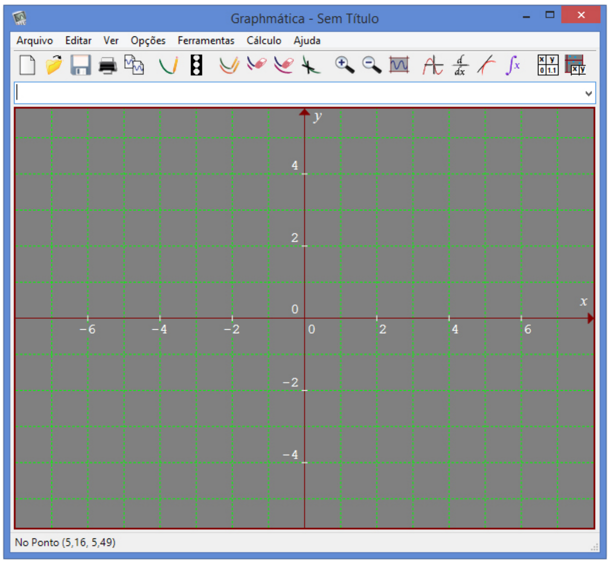


Figura 3.17: Interface do Graphmática.

O Grahpmática memoriza as últimas 25 equações que foram digitadas e, assim como a maioria dos programas computacionais direcionados à Matemática, é possível salvar o arquivo para visualização numa sessão posterior ou para a utilização em qualquer editor de texto.

A Barra de Botões do programa proporciona acesso rápido aos comandos mais usados. Apresenta o menu principal onde você poderá visualizar as informações mais relevantes e mensagens de ajuda, além de uma caixa com a Lista de Equações, que permite selecionar qualquer equação, que estiver armazenada na memória, para desenhar o respectivo gráfico, apagar, ou editar para formar uma nova equação.

3.4.3 Geometricks

Este é um software voltado para o estudo de geometria, pois possibilita a construção de objetos geométricos, tais como: pontos, retas, segmentos de retas, ponto médio de segmentos, circunferências, retas perpendiculares e paralelas, bissetrizes, mediatrizes.

Desenvolvido pelo dinamarquês Viggo Sadolin e representado no Brasil pelo professor Marcelo de Carvalho Borba e pela professora Miriam Godoy Penteado, o Geometricks possibilita o cálculo de distâncias entre pontos, medidas de ângulos, áreas de polígonos e circunferências e determina lugares geométricos de pontos e retas.

Além disso, os objetos construídos neste programa podem ser livremente movimentados pela tela mantendo os vínculos estabelecidos na construção, isto é, um objeto, ao ser movimentado na área de trabalho, tem as medidas de seus ângulos e lados simultaneamente atualizados na caixa de saída de dados, assim como as medidas das distâncias entre os pontos e das áreas.

Outro recurso importante deste software está vinculado ao estudo da Geometria Fractal, que permite definir elementos sobre os quais são aplicadas determinadas transformações que, por meio de processos repetitivos, geram os fractais. Podemos citar alguns pontos que consideramos positivos respeitantes a este software, são eles: facilidade na utilização, interface agradável, auxilia a construção do conhecimento, estimula o senso crítico e a associação de ideias e é pequeno podendo ser facilmente transportado. Por outro lado, este programa, além de não ser gratuito, não possibilita a inserção de dados junto a uma construção. Não obstante, o Geometricks é considerado um bom software educacional.

3.4.4 Cabri 3D

A tecnologia Cabri nasceu nos laboratórios do Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS) na França e na Universidade Joseph Fourier em Grenoble. As ideias primordiais referentes ao Cabri surgiram em 1985 e o principal objetivo do idealizador desse projeto, Jean-Marie Laborde, era tornar a geometria bidimensional mais fácil de aprender e mais agradável de ensinar. A Figura 3.18 mostra a interface do programa e uma construção geométrica que facilita a visualização e, consequentemente, o estudo das secções cônicas.

Um detalhe importante é que este software possibilita a medição de elementos matemáticos como segmentos de retas, ângulos, arcos, entre outros, assim como o cálculo de relações entres os mesmos. Outra vantagem é a associação de elementos

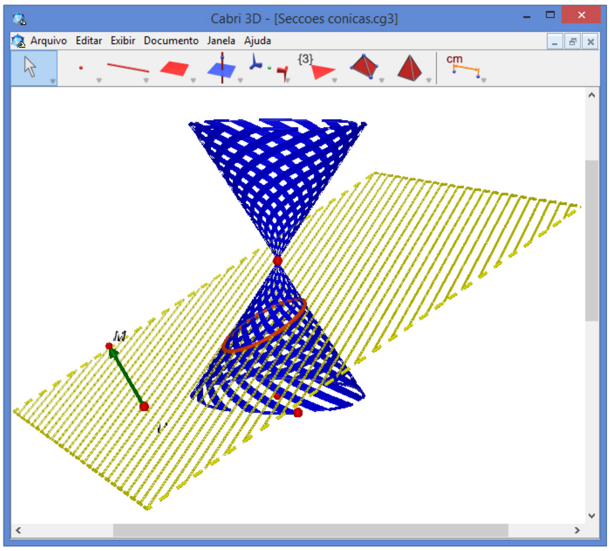


Figura 3.18: Interface do Cabri 3D.

de geometria analítica às construções, onde são feitas atualizações automáticas nos parâmetros das equações ao modificar-se interativamente os elementos gráficos na tela.

Além de o Cabri trabalhar com figuras em duas e três dimensões, combinando objetos geométricos fundamentais, tais como pontos, ângulos, segmentos, círculos, planos, sólidos e transformações, ele ainda mede comprimentos, ângulos, áreas, volumes e anexa esses valores numéricos diretamente à figura possibilitando o uso desses em cálculos ou expressões algébricas. Com apenas alguns cliques, é possível conhecer as propriedades de uma figura manipulando seus elementos e observando os efeitos de transformações dinâmicas como redução e ampliação. Isso nos permite conjecturar sobre propriedades algébricas e geométricas, verificando assim, as relações entre as várias partes de uma figura.

Um ponto negativo é que este aplicativo não é livre, no entanto o download da versão trial (disponível para uso durante 31 dias) pode ser realizado no site www.cabri.com.br. Nesse mesmo endereço encontra-se disponível o manual do usuário cujos capítulos devem ser lidos na ordem em que se encontram, uma vez que cada exemplo é geralmente baseado nas funções e operações definidas anteriormente.

3.4.5 Poly

Poly é um programa *shareware*[2] para explorar e construir poliedros. Pode ser encontrado no site www.peda.com/poly. Ainda não possui versão em português, mas mesmo assim é bem simples de usar, pois seus comandos e menus são bem intuitivos. Com ele é possível ver uma classe de poliedros fazendo com eles algumas operações, tais como, planificar, girar, salvar como gif animado e ainda imprimir o desenho tanto em 3D quanto planificado. Portanto, é um ótimo programa para o ensino e aprendizagem da Geometria Espacial, uma vez que ele facilita a visualização e construção das figuras em 3D.

Na Figura 3.19 podemos observar o quinto sólido de Platão. À direita da figura temos a planificação do icosaedro.

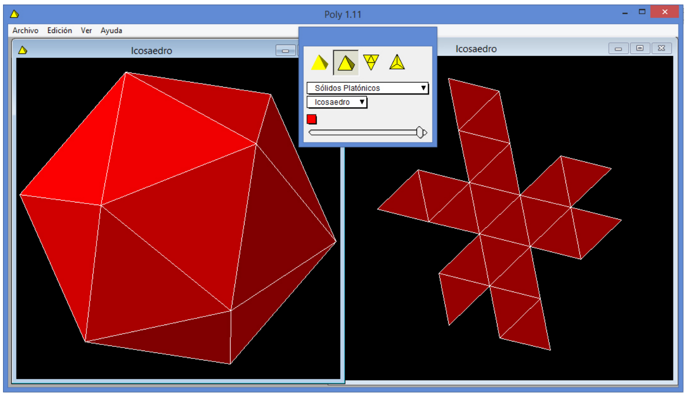


Figura 3.19: Interface do Poly.

Este software nos permite explorar os seguintes sólidos:

- Sólidos Platônicos: são construídos utilizando um único polígono regular e todos os vértices tem o mesmo número de faces em volta. Um polígono é regular quando todos seus lados são congruentes e todos os ângulos internos são iguais.

- Sólidos de Arquimedes: também conhecidos como poliedros semirregulares, são poliedros convexos cujas faces são polígonos regulares de mais de um tipo. Todos os seus vértices são congruentes, isto é, existe o mesmo arranjo de polígonos em torno de cada vértice. Além disso, todo vértice pode ser transformado num

[2]Software distribuído livremente, mas que ao ser usado com regularidade, é cobrada uma taxa pela qual se obtém acesso irrestrito ao programa.

outro vértice por uma simetria do poliedro. Existem apenas treze poliedros arquimedianos, dos quais, são onze obtidos por truncação de sólidos platónicos.

- Prismas e Antiprismas: os prismas são poliedros com duas faces congruentes e paralelas (as bases) e cujas faces restantes (as faces laterais) são paralelogramos. São nomeados de acordo com a natureza de suas bases. Dizemos que são retos se suas faces laterais forem perpendiculares às bases, ou oblíquos, caso contrário. Além disso, um prisma regular é um prisma reto cujas bases são polígonos regulares. Um antiprisma é um poliedro que consiste de dois polígonos regulares de n lados (as bases) situados em planos paralelos, de modo que o segmento h que liga seus centros seja perpendicular aos planos das bases e, de forma que cada vértice da base superior seja equidistante de dois vértices da base inferior.

- Sólidos de Johnson: depois de considerar as três categorias anteriores, ficamos com um número limitado de poliedros convexos com faces regulares. A enumeração desses poliedros foi realizada por Norman W. Johnson, que em 1966, apresentou uma listagem de poliedros convexos, com faces regulares, que não eram platônicos, arquimedianos ou prismas e antiprismas. Sua listagem continha 92 poliedros. Johnson nomeou e numerou esses 92 sólidos e sugeriu que não haveria outros. Em 1969, Vitor Zalgaller provou que realmente não existem outros. Portanto, todo sólido de Johnson é convexo e possui faces regulares. Muitos destes são derivados dos platônicos, dos arquimedianos, dos prismas e antiprismas, por adição ou remoção de partes.

- Deltaedros: poliedros cujas faces são triângulos equiláteros.

- Sólidos de Catalan: Os sólidos de Catalan são poliedros duais dos sólidos arquimedianos. Como há 13 sólidos arquimedianos, existem 13 sólidos de Catalan. Nessa categoria, as faces dos poliedros não são polígonos regulares, mas são todas congruentes entre si. Estes sólidos possuem dois ou mais tipos de vértices. Isso é coerente com os critérios de dualidade, pois nos sólidos arquimedianos todos os vértices são congruentes (é possível identificar o mesmo arranjo de polígonos em torno de cada vértice), mas as faces são de dois ou mais tipos. O nome "Sólidos de Catalan" deve-se ao matemático belga Eugène Charles Catalan que apresentou a lista dos duais dos poliedros arquimedianos em um texto publicado em 1865.

- Dipirâmides e Deltoedros: As Dipirâmides são sólidos duais[3] dos prismas e os Deltoedros são duais dos antiprismas.

- Esferas Geodésicas e Domos Geodésicos: uma esfera geodésica é uma estrutura composta de uma rede de triângulos que dá forma a uma superfície aproximadamente esférica. Quanto maior o número de triângulos na rede, mais próxima a esfera geodésica estará de uma esfera. Domos geodésicos são partes fracionadas da esfera geodésica. Por exemplo, o hemisfério geodésico é um domo em particular, obtido por um corte que divide a esfera geodésica em duas partes iguais.

Existem inúmeros outros programas computacionais aos quais não faremos menção aqui e que, se utilizados de forma adequada em sala, podem facilitar o processo de ensino e aprendizagem. É claro que o professor deve, previamente, selecionar as atividades que serão trabalhadas em sala e aplicá-las convenientemente para que discussões sejam geradas, focando nos objetivos instrucionais, sempre balanceando o papel do computador no desenvolvimento de tais atividades.

[3]O Dual de um sólido é um outro sólido que se obtém unindo os pontos centrais das faces adjacentes do sólido original.

Capítulo 4

Descrição das Aulas

Neste capítulo, descreveremos as oito aulas nas quais buscamos alcançar os seguintes objetivos.

- Facilitar o raciocínio e, por conseguinte, facultar a absorção dos conhecimentos respeitantes às noções de Limite e Derivada no Ensino Médio.
- Compreender as noções básicas que envolvem limite e usar algumas propriedades para encontrar o valor de determinados limites.
- Determinar o valor do limite de uma função a partir do seu gráfico.
- Calcular derivadas sucessivas e determinar seus valores em determinados pontos.
- Calcular derivadas de primeira e segunda ordem de uma função em pontos específicos e interpretá-las geometricamente.
- Determinar a equação da reta tangente a uma curva em um ponto.
- Calcular a posição, a velocidade e a aceleração de um móvel em determinados instantes de tempo, a partir da equação da posição desse móvel.
- Perceber geometricamente a relação existente entre o gráfico de uma função e os gráficos de suas derivadas primeira e segunda.
- Julgar a autenticidade de afirmações a respeito de uma função observando apenas o gráfico da sua derivada primeira ou de sua derivada segunda.
- Utilizar o Winplot para verificar a veracidade das respostas encontradas para os exercícios.

4.1 Primeira aula

A turma na qual essa pesquisa foi desenvolvida era composta por 30 alunos dos quais, coincidentemente, 15 dispunham de computadores em casa. O fato da escola não dispor de um ambiente informatizado nos levou a dividirmos os 30 alunos em duas turmas, uma das quais era composta pelos alunos que dispunham de computador em casa, e a outra formada pelos alunos que não tinham acesso a computadores, às quais, doravante, chamaremos de Turma A e Turma B, respectivamente.

Essa nossa primeira aula foi ministrada para as Turmas A e B, e para introduzi-la falamos do tema a ser estudado e do modo que o faríamos. Vale destacar que não separamos a Turma A da B, porque nesse primeiro encontro tratamos de noções intuitivas de limite e, a princípio, para isso não usamos o Winplot. É importante ressaltar que os alunos com os quais esse trabalho foi desenvolvido haviam estudado, na série em que se encontram, apenas os conceitos referentes à Estatística, isto é, eles ainda não tinham estudado a Geometria Analítica – Inclinação, Coeficiente Angular e Equações de uma reta – comum na terceira série do Ensino Médio e importante no estudo de derivadas.

Começamos com a ideia intuitiva de limite e para introduzir esta, tomamos como base a situação descrita a seguir, que se encontra no último livro da coleção *Matemática Aula por Aula* dos autores Benigno Barreto e Cláudio Xavier.

Uma bola de boliche foi jogada na direção de um pino que se encontra a 8 metros, sendo que, em cada segundo, percorre metade da distância que a separa do pino.

Considere a função $d(t)$ que faz corresponder a cada valor t de tempo ($t \in \mathbb{N}$), em segundos, um único valor d, em metros, da distância percorrida por essa bola, como mostra a Figura 4.1.

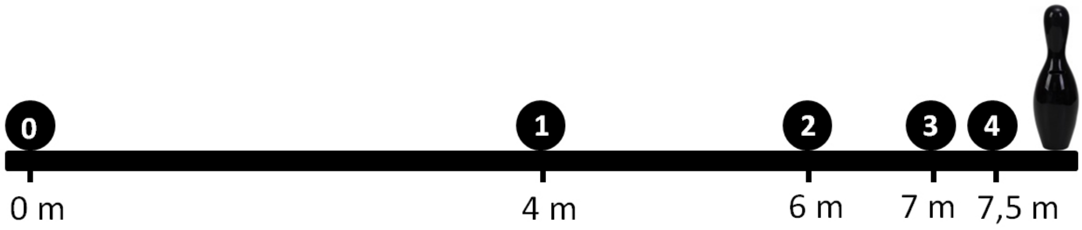


Figura 4.1: Boliche e a ideia intuitiva de limite.

Pedimos para que os alunos atentassem para o fato de que, a cada instante, a bola se aproxima mais e mais do pino, assim como a distância percorrida se aproxima de 8 metros. Para um melhor entendimento, mostramos a Tabela 4.1 e o gráfico da Figura 4.2, relacionando o tempo decorrido em segundos com a distância percorrida em metros.

$t(s)$	$d(m)$
0	0
1	4
2	6
3	7
4	7,5
5	7,75
6	7,875

Tabela 4.1: Distância percorrida pela bola.

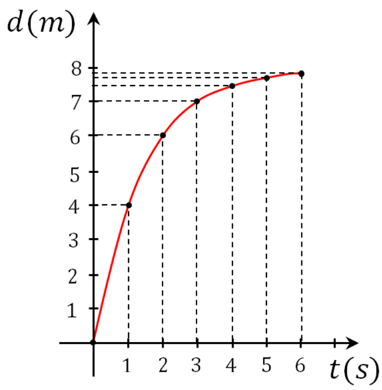


Figura 4.2: Gráfico da distância percorrida pela bola.

O gráfico (Figura 4.2) foi útil e suficiente para eles perceberem que, quanto t tende a assumir um valor cada vez maior, isto é, t tende ao infinito, então d tende a 8. Em símbolo, temos:

$$\lim_{t\to\infty} d(t) = 8.$$

Para que a ideia fosse fixada melhor, fizemos uso de um exemplo simples que será mostrado a seguir. Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x + 2$ e o gráfico cartesiano correspondente (Figura 4.3).

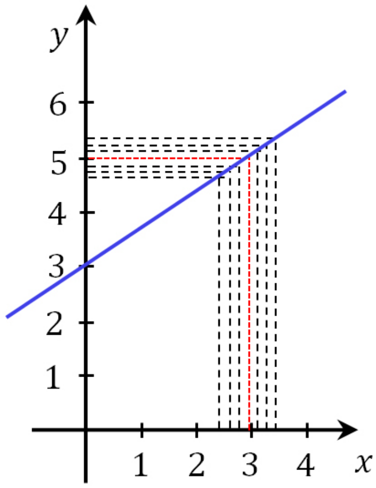


Figura 4.3: Gráfico da função $f(x) = x + 2$.

Todos os alunos perceberam com facilidade que, para valores de x cada vez mais próximos de 3, temos valores de $f(x)$ cada vez mais próximo de 5. Isso acontece tanto quando x tende a 3 pela esquerda, isto é, se aproxima por valores menores que 3, como quando x tende a 3 pela direita, isto é, se aproxima por valores maiores que 3. Em símbolos,

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = 5 = \lim_{x \to 3^+} f(x).$$

Em seguida foi apresentada a definição de limite, do modo que se encontra a seguir.

Considerando uma função $f(x)$, definida num intervalo I, temos que o limite de $f(x)$, quando x tende a a, é o número b, se, para todo $\varepsilon > 0$, existir, em correspondência, um número $\delta > 0$, de modo que $x \neq a$ e $a - \delta < x < a + \delta \Rightarrow b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$. Assim:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$

Graficamente, temos:

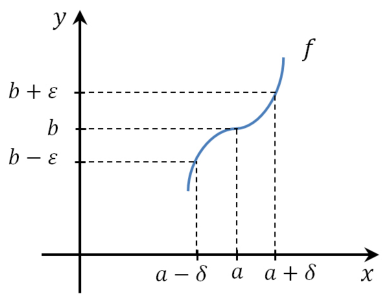


Figura 4.4: Definição de Limite.

Após a exploração de alguns exemplos no quadro, pedimos que os alunos resolvessem exercícios semelhantes ao que se encontra abaixo.

Dada a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & \text{se } x \leq 1 \\ 2x^2, & \text{se } x > 1 \end{cases}$, esboce o gráfico de $f(x)$, e determine $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

A maioria dos alunos sentiu dificuldade na interpretação do gráfico. Posteriormente, falamos, de forma rápida, sobre as propriedades dos limites.

Sejam as funções $f(x)$ e $g(x)$, definidas num certo domínio D, tais que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = M$ e $k \in \mathbb{R}$, temos:

- $\lim\limits_{x \to a} [k \cdot f(x)] = k \cdot \lim\limits_{x \to a} [f(x)] = k \cdot L$
- $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x) = L + M$
- $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \dfrac{L}{M}$
- $\lim\limits_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x) = L \cdot M$

E consequentemente,

- $\lim\limits_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) - \lim\limits_{x \to a} g(x) = L - M$
- $\lim\limits_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x \to a} f(x)\right]^n = L^n$
- $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$

Depois de apresentarmos as propriedades acima e explorarmos alguns exemplos, pedimos aos alunos que calculassem os limites que seguem.

(i) $\lim\limits_{x \to -1} x^3 - x^2 + x - 1$

(ii) $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{2x^2 + 1}$

(iii) $\lim\limits_{x \to 0} \left[(3x - 1) \cdot \left(x^2 - 1\right)\right]$

(iv) $\lim\limits_{x \to \pi/2} (\operatorname{sen} x - \cos x)$

(v) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{1 - \operatorname{sen} x}{\operatorname{tg} x - 2\cos x}$

Aproveitamos também para, de forma breve, falar sobre funções contínuas. Mostramos a definição de função contínua em um ponto do modo que o livro aborda.

Uma função $f(x)$ é contínua no ponto $x = a$ se, e somente se, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, ou seja, o limite da função para x tendendo a a é igual ao valor da função nesse ponto. Para que uma função $f(x)$ seja contínua em $x = a$, é necessário verificar:

- A existência de $f(a)$, definida num ponto $x = a$;
- A existência do $\lim\limits_{x\to a} f(x)$;
- Se o $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Para exploração do conteúdo fizemos uso de um exemplo estudado em uma das disciplinas do PROFMAT (MA22 – Fundamentos de Cálculo), o qual descreveremos a seguir.

Trata-se de uma função cuja definição usa mais de uma sentença. O objetivo aqui é determinar os valores de k para os quais a função

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & \text{se } x \leq 1 \\ k - x, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

seja contínua em 1. É claro que isso também determinará os valores de k para os quais a função não é contínua em $x = 1$.

Como $f(1) = 1^2 + 2 \cdot 1 = 3$, basta que analisemos os limites laterais.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2 + 2x = 3 = f(1).$$

Agora,

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} k - x = k - 1.$$

Portanto, para que f seja contínua em 1, é preciso que 3 seja igual a $k - 1$. Ou seja, f é contínua em 1 se, e somente se, $k = 4$. É evidente que para qualquer valor de $k \neq 4$, a função apresenta uma descontinuidade em $x = 1$. Para uma melhor compreensão geométrica deste fato, observemos os gráficos a seguir.

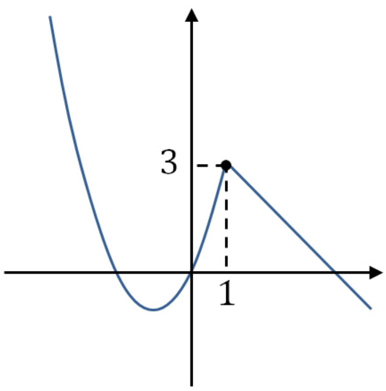


Figura 4.5: Gráfico de f com $k = 4$.

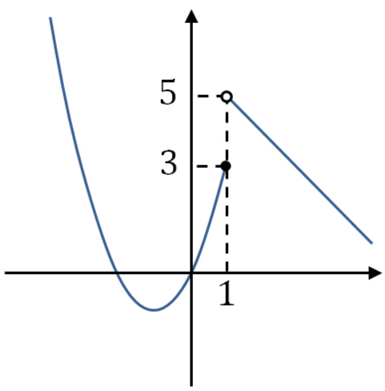


Figura 4.6: Gráfico de f com $k = 6$.

Mesmo observando os gráficos das Figuras 4.5 e 4.6, não houve unanimidade por parte dos alunos quanto ao entendimento desse fato.

Dando continuidade a aula, exploramos mais alguns exemplos envolvendo indeterminações. A princípio, os alunos acharam complexas as fatorações de trinômios do 2º grau, mas depois da exploração de exemplos, os mesmos se familiarizaram. Veja a seguir um dos limites resolvidos na lousa.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -1} \frac{x^4 - 3x^3 - 4x^2}{x+1} &= \lim_{x\to -1} \frac{x^2\left(x^2 - 3x - 4\right)}{x+1} \\
&= \lim_{x\to -1} \frac{x^2\left(x-4\right)\left(x+1\right)}{x+1} \\
&= \lim_{x\to -1} x^2\left(x-4\right) \\
&= (-1)^2(-1-4) \\
&= 1\cdot(-5) \\
&= -5
\end{aligned}$$

Após isso, podemos afirmar com segurança que a maioria dos alunos encontrava-se apta a resolver exercícios como os que seguem.

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 5} \frac{x^2 - 25}{x-5}$

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{2x^2 - 3x - 5}{x^2 + 3x + 2}$

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 2x + 1}$

(iv) $\displaystyle\lim_{x\to \pi} \frac{1 - 2\operatorname{sen} x}{1 - \cos 2x}$

Em se tratando de limites envolvendo $+\infty$ e $-\infty$, a grande maioria dos alunos sentiram complicações na compreensão. A título de exemplo podemos citar o limite da função $f(x) = \frac{1}{x}$, quando x se aproxima de zero. Falar que quando x tende a zero pela esquerda, $f(x)$ assume valores cada vez menores e, quando x tende a zero pela direita, $f(x)$ assume valores cada vez maiores, não foi suficiente para eles entenderem que $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ e $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$. Assim como também não ficou claro o simples fato de $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0$ e $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$. Mesmo depois do gráfico desenhado na lousa as dúvidas persistiram.

Falamos ainda a respeito do limite trigonométrico fundamental $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$ e o demonstramos usando figuras.

Observe na Figura 4.7 que $\overset{\frown}{AM} = x$, $\operatorname{sen} x = \overline{BM}$ e $\operatorname{tg} x = \overline{AT}$.

Sendo $0 < x < \frac{\pi}{2}$, temos $\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$.

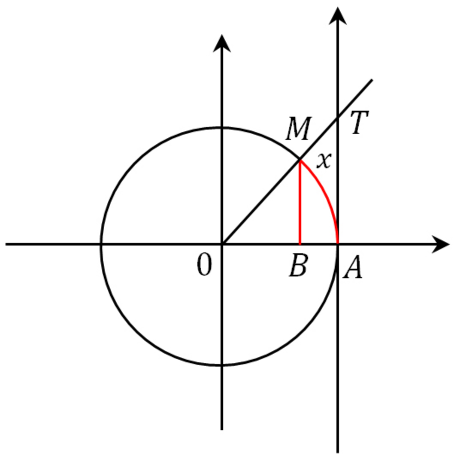


Figura 4.7: Limite fundamental.

Dividindo por $\operatorname{sen} x \quad (\operatorname{sen} x > 0)$:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x} \Rightarrow 1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x}$$

Se $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, temos $\operatorname{sen} x > x > \operatorname{tg} x$.
Dividindo por $\operatorname{sen} x \quad (\operatorname{sen} x < 0)$:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x} \Rightarrow 1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x}$$

Então, para $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $x \neq 0$, conclui-se que

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Invertendo, obtemos $1 > \frac{\operatorname{sen} x}{x} > \cos x$. Como $\lim_{x \to 0} 1 = 1$ e $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$, temos $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

Sem apresentar nenhuma demonstração, escrevemos na lousa as seguintes identidades, as quais, na aula seguinte, exploraríamos usando gráficos plotados no Winplot[1].

$$\lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Ao final dessa aula foi fácil perceber que algumas coisas deixaram de ser compreendidas, mas mesmo diante de algumas lacunas a serem preenchidas, encerramos nossa primeira aula, a qual consideramos proveitosa.

[1]Falamos para os alunos que o número e é aproximadamente igual a 2,718. Não entramos em maiores detalhes a respeito do número de Euler, pois os alunos não haviam estudado logaritmos.

4.2 Segunda aula

Esta segunda aula foi direcionada à Turma A, isto é, às pessoas que dispunham de computadores para uma possível exploração do software Winplot.

Não foi necessário fazer esclarecimentos a respeito do computador e seus acessórios, tais como, mouse, teclado, software e comandos, pois, apesar de estarmos diante de uma realidade onde a exclusão digital ainda se faz presente, percebemos que todos ali já tinham noções básicas de informática, as quais julgamos necessárias e suficientes para a realização de nossa pesquisa.

Iniciamos a aula mostrando a vasta utilidade do Winplot, priorizando suas principais ferramentas, no que diz respeito ao desenvolvimento do nosso trabalho e para isso fizemos uso de um Datashow. O ideal seria que os alunos dispusessem de um espaço informatizado para o desenvolvimento das atividades, no entanto, o fato da escola não dispor de um Laboratório de Informática nos obrigou a pedir que os alunos desenvolvessem algumas atividades práticas em casa, usando os próprios computadores.

Dando continuidade à apresentação do software, mostramos na prática como traçar gráficos de funções, assim como pontos e segmentos de reta. Chamamos a atenção também, para a notação que devemos utilizar para que o programa nos entenda e faça o que queremos. Por exemplo, para que o programa entenda a expressão $-(x-2)^2 - \frac{\sqrt{3}}{\pi}$, devemos escrever `-(x-2)^2 - sqrt(3)/pi`.

Ou ainda, devemos escrever `joinx(x|0, 2x - 1|1, 1|2, -x^2 + 5)` para que ele entenda

$$\begin{cases} x, & \text{se } x \leq 0 \\ 2x-1, & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 1, & \text{se } 1 < x \leq 2 \\ -x^2+5 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Contrário às minhas expectativas, os alunos compreenderam com certa facilidade todas as notações apresentadas. Aproveitei para falar do submenu Biblioteca que pode ser consultado sempre que surgirem dúvidas a respeito da notação a ser utilizada. Sempre atentos às imagens projetadas pelo Datashow, os alunos faziam anotações em seus cadernos. Questionados sobre o motivo de tais anotações os mesmos responderam que não queriam correr o risco de esquecer os detalhes na hora de explorar as atividades em casa. Isso mostrou o interesse dos mesmos para a aquisição de conhecimentos respeitantes ao software.

Nessa aula, buscamos suprimir algumas dificuldades sentidas na aula anterior, às quais, a partir de agora, daremos enfoque. Por exemplo, quando foi pedido aos alunos que esboçassem o gráfico da função f e que calculassem $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, sendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & \text{se } x \leq 1 \\ 2x^2, & \text{se } x > 1 \end{cases}$.

Fizemos o gráfico no Winplot como mostra a Figura 4.8.

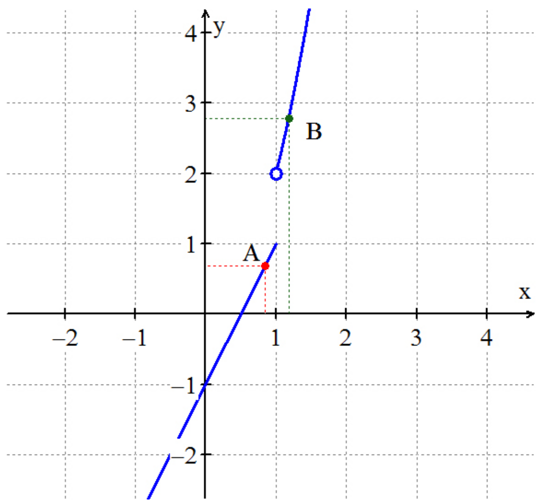


Figura 4.8: Estudo dos limites laterais.

Os pontos A e B na Figura 4.8 são móveis, isto é, é possível, através da variação de parâmetros, fazer com que as abscissas dos pontos A e B se aproximem de 1 pela esquerda e pela direita, respectivamente. Essa vantagem, sem dúvida, propiciou aos alunos uma facilidade maior na compreensão de que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 2$ e, consequentemente, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ não existe.

Vimos também na aula anterior que alguns alunos não compreenderam quando afirmamos que k deve assumir valor igual a 4 para que a função $f(x) = \begin{cases} x^2+2x, & \text{se } x \leq 1 \\ k-x, & \text{se } x > 1 \end{cases}$ seja contínua em $x = 1$. Preparamos um arquivo no Winplot com a seguinte função

```
joinx( x^2+2x|1,k-x ).
```

Onde k é um parâmetro que podemos variar a vontade e ao mesmo tempo acompanhar as mudanças que isso causa no gráfico.

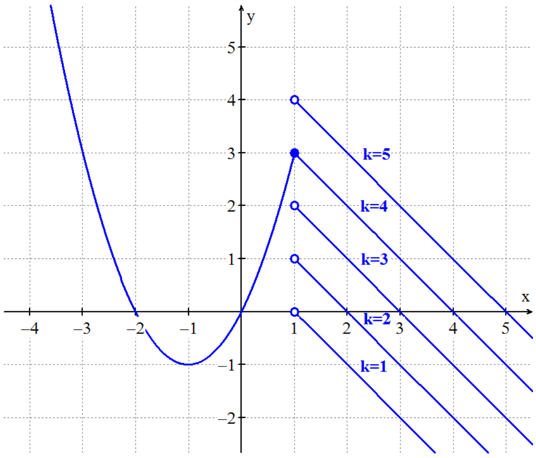


Figura 4.9: Gráfico de f com k =1, 2, 3, 4, 5.

Ao variarmos o valor do parâmetro k percebemos que exatamente em $k = 4$ o segmento de reta que é o gráfico de f à direita de 1 dá continuidade ao trecho de parábola, gráfico de f à esquerda de 1. Eles também perceberam com facilidade que para qualquer outro valor de $k \neq 4$ haverá sempre uma interrupção no gráfico de f, ou seja, que $k = 4$ é o único valor de k para o qual $f(x)$ é contínua em $x = 1$.

Outra dificuldade a qual demos importância está relacionada à compreensão de ideias intuitivas de limites envolvendo os símbolos $+\infty$ e $-\infty$. Mais uma vez transpomos esse obstáculo com o auxílio do Winplot. Para tanto, traçamos o gráfico da função $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$ e criamos um ponto $A\left(a, \frac{1}{a}\right)$ que se encontra sobre a curva para qualquer valor de $a \neq 0$ (Figura 4.10).

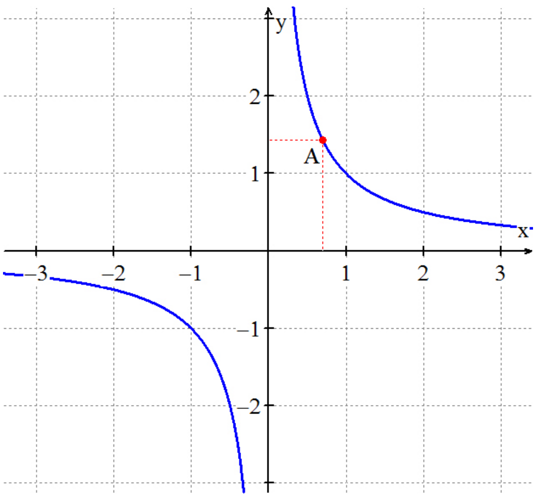


Figura 4.10: Limite envolvendo $-\infty$ e $+\infty$.

Ao movimentarmos o ponto A aproximando de zero o valor de a, por valores positivos, isto é, pela direita de zero, os alunos sentiram facilidade em perceber que o valor de $f(x)$ aumentava cada vez mais, deste modo, tendia ao infinito. O mesmo aconteceu ao aproximarmos de zero o valor de a, por valores negativos, isto é, pela esquerda de zero. Equivalentemente,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Bastou aumentarmos o valor do parâmetro a, para logo ficar claro que o valor de $f(x)$ fica tão próximo de zero quanto queiramos. O mesmo acontece quando diminuímos, consideravelmente, o valor de a. Mais uma vez ficou fácil e todos perceberam que

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Também analisamos o gráfico de $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ e comprovamos graficamente que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$. Veja a Figura 4.11.

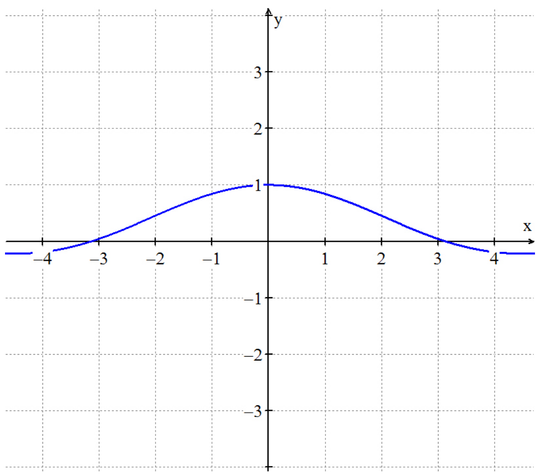


Figura 4.11: Gráfico da função $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

Como havíamos prometido na aula anterior, traçamos os gráficos das funções $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ e $g(x) = e$ (Figura 4.12). Com este gráfico ficou intuitivamente claro para todos os alunos que:

$$\lim_{x\to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Ao final dessa aula percebemos com clareza que a animação propiciada pelo Winplot aos elementos matemáticos através da variação de parâmetros, foi muito importante na concepção e esclarecimento dos conceitos estudados.

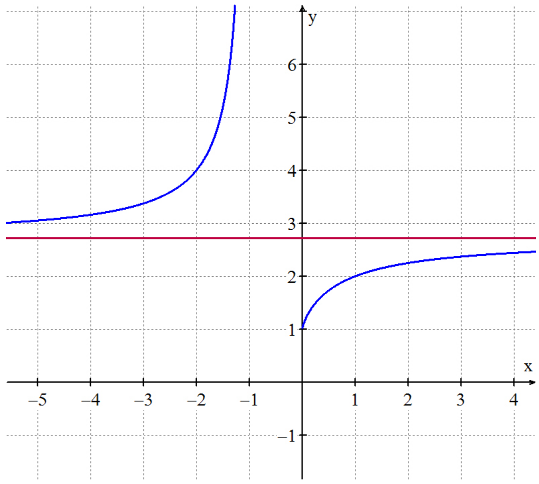


Figura 4.12: Gráficos das funções $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ e $g(x) = e$.

Para encerrarmos nossa segunda aula, ensinamos onde e como fazer o download do programa e pedimos que eles o explorassem em casa com o intuito de, paulatinamente, se familiarizarem com o software.

4.3 Terceira aula

Nesse nosso terceiro encontro não usamos recursos computacionais e estiveram presentes as Turmas A e B. De início, falamos do conteúdo a ser abordado, nesse caso, derivadas, assim como de sua importância, não somente na Matemática, mas nas diversas ciências.

Começamos considerando uma função f dada por $y = f(x)$, contínua e definida num intervalo I, e x_0 um elemento desse intervalo, representados no gráfico da Figura 4.13.

Vimos que qualquer acréscimo ou variação de uma variável x é chamado de incremento e este pode ser positivo, negativo ou nulo. Observe que, na figura 4.13, o incremento $x_0 + \Delta x - x_0 = \Delta x$ adicionado à variável x ocasiona um incremento $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ na função.

Em seguida falamos que razão incremental, ou simplesmente, taxa média de variação da função $f(x)$, relativamente do ponto x_0, é a razão entre esses acréscimos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Como exemplo, calculamos a taxa média de variação da função $y = f(x) =$

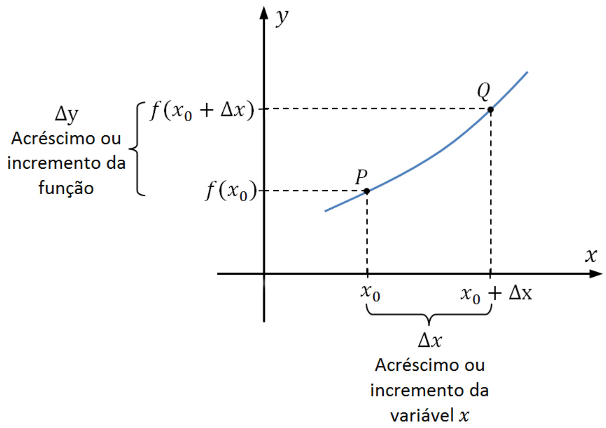


Figura 4.13: Incrementos.

$x^2 + 2x$, quando x varia de 3 para 7. Observe que o fato de x variar de 3 para 7 faz com que a função varie de $f(3) = 15$ para $f(7) = 63$. Assim $\Delta x = 7 - 3 = 4$ e $\Delta y = f(3+4) - f(3) = 63 - 15 = 48$. Daí, temos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3+4) - f(3)}{4} = \frac{48}{4} = 12.$$

Concluímos, portanto, que o número 12 representa a taxa média de variação da função y quando x varia de 3 para 7.

Para ganharmos tempo pedimos aos alunos que, em casa, determinassem a taxa média de variação de cada uma das seguintes funções.

(i) $f(x) = x^2$; de $x = 5$ a $x = 8$

(ii) $i(t) = t^2 + 2t$; de $t = 2$ a $t = 2,5$

(iii) $v(t) = t^2 - t$; de $t = 2,6$ a $t = 3,2$

(iv) $P(i) = 15i^2$; de $i = 5$ a $i = 6,5$

Às vezes necessitamos de informações que a taxa média de variação não pode nos oferecer. Por exemplo, no caso da colisão de um carro com um poste, o estrago causado depende da velocidade instantânea no momento do impacto e não da velocidade média da viagem. Esse e outros exemplos motivaram o estudo do cálculo da taxa de variação instantânea.

Para isso, consideramos a função $y = f(x) = x^2$. Iniciando com o valor $x_0 = 4$, fizemos a variável x sofrer incrementos Δx cujos valores sejam cada vez menores, isto é, fizemos Δx tender a zero e vimos o que ocorreu com Δy e com a razão incremental. Posteriormente, pedimos para que os alunos observassem a Tabela 4.2 e tirassem suas conclusões:

Δx	$x_0 + \Delta x$	$y + \Delta y$	Δy	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
3	7	49	33	11
2	6	36	20	10
1	5	25	9	9
0,5	4,5	20,05	4,25	8,5
0,1	4,1	16,81	0,81	8,1
$0,01$ $\downarrow$ 0	$4,01$ $\downarrow$ 4	$16,0801$ $\downarrow$ 16	$0,0801$ $\downarrow$ 0	$8,01$ $\downarrow$ $?$

Tabela 4.2: Taxa de variação instantânea

Não foi difícil para eles perceberem que, quando Δx tende a zero, Δy também tende a zero, e a razão incremental $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, nesse caso, tende a uma constante igual a 8, a qual é chamada de taxa de variação instantânea da função $y = f(x) = x^2$ no ponto $x_0 = 4$, ou simplesmente, derivada da função $y = f(x) = x^2$ no ponto $x_0 = 4$. Usando limites temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - (x_0)^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(4 + \Delta x)^2 - 4^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{8 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} 8 + \Delta x \\
&= 8
\end{aligned}$$

Dando continuidade, definimos derivada do modo que Dante o faz no terceiro livro da coleção *Matemática Contexto e Aplicações*.

Consideremos uma função $f : I \to \mathbb{R}$, definida num intervalo I, e x_0 um ponto desse intervalo. Vimos que a razão incremental em x_0 é dada por:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

A derivada da função $y = f(x)$, em x_0, é o limite, se existir, da razão incremental quando Δx tende a zero:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Esse limite é chamado derivada de f em x_0 e é representado por $f'(x_0)$. Então:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Para facilitar a notação vamos substituir Δx por h, ou seja:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Deixamos claro também que, quando falamos em derivada de uma função $y = f(x)$ em um ponto genérico x do domínio da função, referimo-nos a ela simplesmente como derivada da função f.

Feito isso, mostramos como calcular a derivada da função $f(x) = x^2$ num ponto genérico x usando a definição.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2hx + h^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{2hx + h^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} 2x + h \\ &= 2x \end{aligned}$$

Portanto, $f'(x) = 2x$.

Pedimos para que eles calculassem a derivada da função $f(x) = x^3$ num ponto genérico x, com a intenção de eles generalizarem e, de forma intuitiva, determinarem a derivada da função potência $f(x) = x^n$. Vendo que eles estavam com dúvida em desenvolver o cubo da soma, relembrei que $(x + a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$ e isso foi suficiente para eles conseguirem desenvolver e calcular o limite.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3hx^2 + 3h^2x + h^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{3hx^2 + 3h^2x + h^3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 3x^2 + 3hx + h^2 \\ &= 3x^2 \end{aligned}$$

Portanto, $f'(x) = 3x^2$.

Até então, nenhum aluno conseguiu concluir o que queríamos. Resolvemos fazer o cálculo acima para a função $f(x) = x^4$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^4 - x^4}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x^4 + 4hx^3 + 6h^2x^2 + 4h^3x + h^4 - x^4}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{4hx^3 + 6h^2x^2 + 4h^3x + h^4}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 4x^3 + 6hx^2 + 4h^2x + h^3 \\ &= 4x^3 \end{aligned}$$

Portanto, $f'(x) = 4x^3$.

Após vermos que

$$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$$

$$f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$$

$$f(x) = x^4 \Rightarrow f'(x) = 4x^3$$

alguns alunos perceberam que para $n \in \mathbb{N}$,

$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

Exploramos alguns exemplos e aproveitamos a oportunidade para começar a generalizar as derivadas mais comuns e mostrar algumas propriedades operatórias, dessa forma, a obtenção das derivadas será mais ágil e prática, evidenciando ainda mais o enorme potencial dessa importante ferramenta matemática.

Primeiramente, calculamos na lousa a derivada da função afim $f(x) = ax + b$.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{a(x+h) + b - (ax+b)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{ax + ah + b - ax - b}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{ah}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} a \\
&= a
\end{aligned}
$$

Portanto, se $f(x) = ax + b$, então $f'(x) = a$. E consequentemente:

Se $f(x) = x$, então $f'(x) = 1$;

Se $f(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$, então $f'(x) = 0$.

Além disso, admitimos sem demonstração que:

Se $g(x) = c \cdot f(x)$, então $g'(x) = c \cdot f'(x)$, $c \in \mathbb{R}$;

$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$;

$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$.

Após resolvermos exemplos na lousa envolvendo as propriedades acima, pedimos para que os alunos calculassem as seguintes derivadas em seus respectivos pontos:

(i) $f(x) = x^5$; no ponto $x = 2$

(ii) $f(x) = 3x^6 + 3x$; no ponto $x = -1$

(iii) $f(x) = x^2 - 3x + 4$; no ponto $x = \frac{1}{2}$

(iv) $f(x) = ax^2 + bx + c$; no ponto $x = a$

(iv) $f(x) = \sqrt{3}x^3 - x$; no ponto $x = 3$

Antes de falarmos no significado geométrico da derivada, julgamos necessário fazer alguns esclarecimentos a respeito da declividade de uma reta que passa por dois pontos de coordenadas conhecidas, uma vez que tal conhecimento será de suma importância para o estudo da reta tangente a uma curva. Também falamos que a equação da reta de declividade m que passa pelo ponto (x_0, y_0) é dada por $m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$, ou seja,

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

Dando segmento à aula fizemos uso do gráfico a seguir (Figura 4.14) com o intuito de facilitar a interpretação do significado geométrico da derivada.

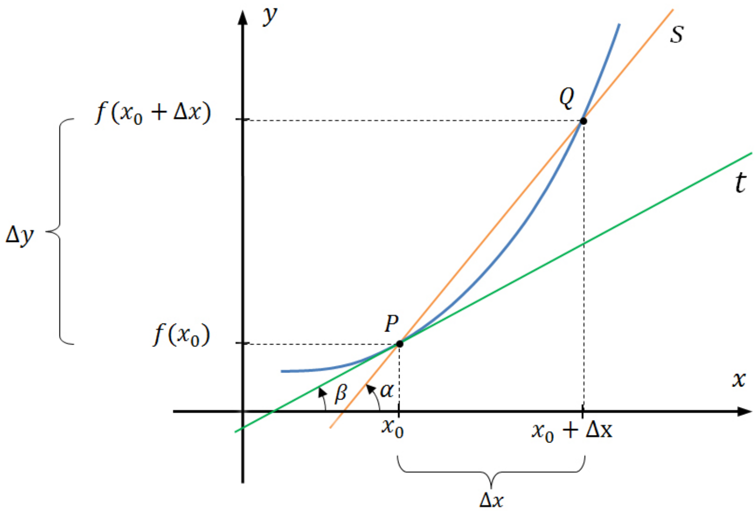


Figura 4.14: Interpretação geométrica da derivada.

Observe que a reta s que contém os pontos P e Q é secante ao gráfico de f e possui coeficiente angular (ou declive) igual a

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Pedimos para que os alunos, olhando para o gráfico da Figura 4.14 desenhado na lousa, fixassem o ponto P e imaginassem o ponto Q se deslocando sobre o gráfico de f e se aproximando de P. Não é difícil perceber que, quanto mais Q se aproxima de P, mais o incremento Δx vai ficando próximo de zero. Dizemos então que Δx está tendendo a zero e, como visto nas aulas anteriores, representamos isso assim:

$$\Delta x \to 0.$$

Se, à medida que Δx tende a zero, a razão incremental $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ se aproxima de um valor finito m, dizemos que "m é o limite da razão incremental com Δx tendendo a zero", e representamos isso com o símbolo:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = m = f'(x_0).$$

Ressaltamos também que, à medida que o ponto Q se desloca sobre o gráfico de f se aproximando de P, a reta secante se desloca, ocupando posições cada vez mais próximas da reta tangente ao gráfico de f no ponto x_0 e, consequentemente, o coeficiente angular α da reta secante se aproxima do coeficiente β da reta tangente t. Percebemos que isso não ficou claro para toda a classe. Continuamos a aula afirmando que:

A derivada de uma função f no ponto x_0 é igual ao coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa x_0.

Assim, existindo a derivada da função f no ponto x_0, existirá a reta tangente no ponto $(x_0, f(x_0))$ e:

$$f'(x_0) = m = \operatorname{tg}\beta.$$

Dizemos que f é derivável no ponto x_0 quando existe $f'(x_0)$. Dizemos também que f é derivável no intervalo aberto I quando existe $f'(x)$ para todo $x \in I$.

Vimos, portanto que, a equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ em um ponto $(x_0, f(x_0))$ é dada por

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

E para fixarmos a aprendizagem determinamos, na lousa, a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^2 - 4x - 5$ no ponto P de abscissa $x = 3$.

Observe que, sendo $f(x) = x^2 - 4x - 5$, temos: $f(3) = -8$, $f'(x) = 2x - 4$ e portanto, $f'(3) = 2$. Daí,

$$\begin{aligned}
&y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)\\
&y - f(3) = f'(3)(x - 3)\\
&y - (-8) = 2(x - 3)\\
&y = 2x - 6 - 8\\
&y = 2x - 14
\end{aligned}$$

Essa reta tem declividade $m = 2$, corta o eixo Ox no ponto de abscissa $x = 7$ e o eixo Oy no ponto de ordenada $y = -14$, como mostra o gráfico da Figura 4.15.

Aproveitamos a oportunidade para fazer o seguinte questionamento: em que ponto a curva $f(x) = x^2 - 4x - 5$ tem uma tangente horizontal? Depois de esperar, sem êxito, uma resposta plausível, respondemos a pergunta.

Para que haja tangente horizontal, $m = f'(x)$ tem de ser zero, isto é:

$$2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2,$$

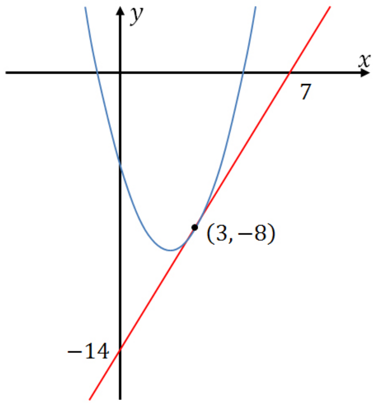


Figura 4.15: Reta tangente a curva f no ponto $x = 3$.

então, a curva tem declividade zero, ou seja, a tangente é horizontal no ponto $(2, f(2)) = (2, -9)$, como mostra a Figura 4.16.

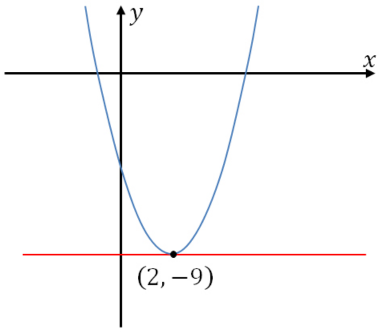


Figura 4.16: Reta tangente com coeficiente angular nulo.

Após isso, pedimos para que os alunos resolvessem em casa alguns exercícios semelhantes ao exemplo supracitado e me entregassem na aula seguinte.

4.4 Quarta aula

Esta foi mais uma aula ministrada com o auxílio do software Winplot e direcionada apenas à Turma A. Começamos dando ênfase ao cálculo da taxa de variação instantânea da função $f(x) = x^2$. É fato que já havíamos visto isso na aula passada, mas o diferencial aqui seria uma abordagem usando uma ferramenta computacional.

Para tanto, começamos traçando o gráfico da função $f(x) = x^2$. Como o objetivo era determinarmos a taxa de variação dessa função no ponto $x = 4$, criamos então, o ponto $P(4, 16)$ de coordenadas fixas e, fazendo uso de um parâmetro a, criamos o ponto

$Q(a, a^2)$, ao qual era possível darmos movimento variando o parâmetro a através de uma barra de rolagem horizontal.

Usando o submenu **Texto Avaliativo** criamos os seguintes itens cujos valores seriam mostrados na tela:

- Incremento de x, dado por $\Delta x = a - 4$
- Incremento de y, dado por $\Delta y = a^2 - 16$
- Razão incremental, dada por $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^2-16}{a-4} = a + 4$

Observe a figura 4.17.

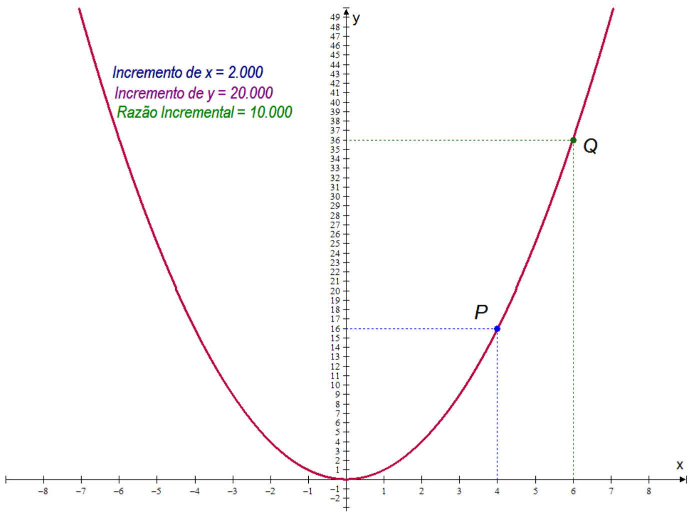


Figura 4.17: Incrementos e razão incremental.

À medida que variávamos o valor do parâmetro a, os alunos acompanhavam, simultaneamente, as variações sofridas pelos incrementos Δx e Δy, assim como as variações sofridas pela razão incremental $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. E ao aproximarmos o ponto Q do ponto P, isto é, ao reduzirmos cada vez mais o incremento Δx, vimos que Δy também tende a zero, enquanto que a razão incremental tende a 8.

Alguns alunos admitiram que esse modo de ver o problema facilitou bastante o entendimento do mesmo. Outros afirmaram que, explicado através do Winplot, foi bem mais fácil de entender do que quando, na aula anterior, a tabela de valores foi mostrada.

Usamos o Winplot também para compreendermos melhor o significado geométrico da derivada. Para isso, traçamos o gráfico da função $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$ e da reta tangente a f no ponto $P(1, f(1)) = \left(1, \frac{1}{4} + 1\right)$, como mostra a Figura 4.18.

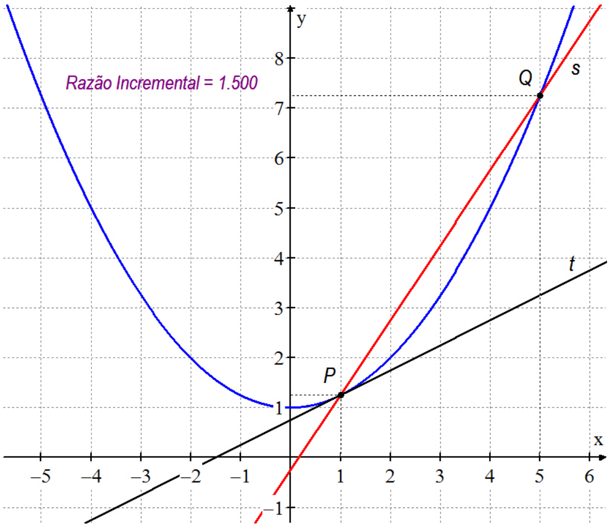


Figura 4.18: Significado geométrico da derivada.

Fazendo uso de um parâmetro c, criamos o ponto $Q\left(c, \frac{1}{4}c^2 + 1\right)$, o qual se encontra sobre a curva f para qualquer $c \in \mathbb{R}$. Após isso, traçamos o gráfico da reta s secante a f passando pelos pontos P e Q. O coeficiente angular de s é dado por:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\frac{1}{4}c^2 + 1 - \left(1 + \frac{1}{4}\right)}{c - 1} \\
&= \frac{\frac{1}{4}c^2 - \frac{1}{4}}{c - 1} \\
&= \frac{c^2 - 1}{4(c-1)} \\
&= \frac{(c+1)(c-1)}{4(c-1)} \\
&= \frac{c+1}{4}
\end{aligned}$$

Daí, a equação da reta s é:

$$y - \left(\frac{1}{4} + 1\right) = \frac{c+1}{4}(x-1).$$

Colocando-a na forma reduzida obtemos:

$$y = \frac{c+1}{4}(x-1) + \frac{5}{4}.$$

Por meio de um Texto Avaliativo, colocamos na tela o valor da razão incremental em função do parâmetro c para que os alunos pudessem observar o valor da mesma sendo modificado ao mesmo tempo em que diferentes valores fossem atribuídos a c.

Na aula passada, pedimos para que os alunos imaginassem o ponto Q se deslocando sobre o gráfico de f e se aproximando de P. Agora eles só não imaginaram, como também puderam ver isso acontecendo. Usando a barra de rolagem horizontal, atribuímos a c valores cada vez mais próximos de 1, isto é, fizemos Δx tender a zero ($\Delta x \to 0$).

Com isso, eles observaram que, à medida que o incremento na variável x tende a zero, a razão incremental, cujo valor era mostrado na tela, tende a $0,5 = \frac{1}{2}$, ou seja,

$$\Delta x \to 0 \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} \to \frac{1}{2}.$$

Ficando claro, portanto que, a derivada da função $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$ no ponto $x = 1$ é $\frac{1}{2}$, ou seja, $f'(1) = \frac{1}{2}$. De fato,

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{4} \cdot 2x = \frac{x}{2} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2}.$$

Como havíamos visto na aula anterior, não houve unanimidade por parte dos alunos em compreender o fato de, quando o ponto Q se desloca sobre o gráfico de f se aproximando de P, o coeficiente angular α da reta secante se aproxima do coeficiente β da reta tangente t. Mais uma vez, indiscutivelmente, o dinamismo que o Winplot proporciona aos elementos matemáticos foi fundamental na compreensão dos conceitos estudados.

Antes de finalizarmos pedimos que os alunos resolvessem o seguinte exercício: Escreva a equação da reta tangente ao gráfico da função no ponto especificado.

(i) $f(x) = x^2 - x - 2$ para $x = 1$

(ii) $f(x) = 4 - 2x - x^2$ para $x = -1$

Solução (i) Observe que, sendo $f(x) = x^2 - x - 2$, temos: $f(1) = -2$, $f'(x) = 2x - 1$ e portanto, $f'(1) = 1$. Logo, a equação da reta tangente em questão é dada por:

$$\begin{aligned} &y - f(1) = f'(1)(x - 1) \\ &y - (-2) = 1(x - 1) \\ &y = x - 3 \end{aligned}$$

Comprovamos por meio do Winplot se a resposta encontrada está correta. Para isso, esboçamos os gráficos de f e da reta encontrada, como mostra a Figura 4.19.

Solução (ii) Procedemos de forma semelhante ao item anterior. Sendo, $f(x) = 4-2x-x^2$, temos: $f(-1) = 5$, $f'(x) = -2-2x$, logo, $f'(-1) = 0$. Portanto, a equação da reta tangente a f no ponto de abscissa $x = -1$ é dada por:

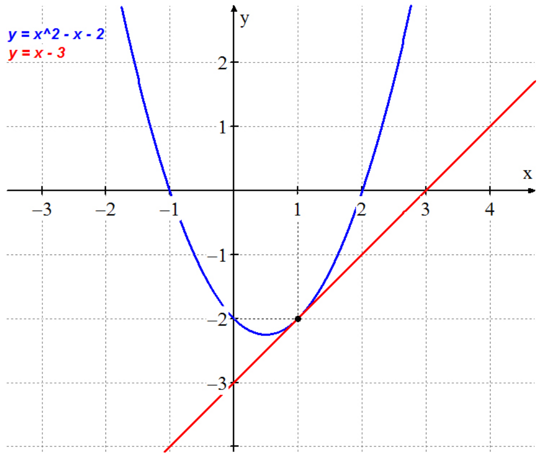


Figura 4.19: Reta tangente ao gráfico de f no ponto $x = 1$.

$$y - f(-1) = f'(-1)\,(x - (-1))$$
$$y - 5 = 0(x - 1)$$
$$y = 5$$

Novamente, traçamos os gráficos das funções $f(x) = 4 - 2x - x^2$ e $y = 5$ para comprovar a veracidade da resposta encontrada.

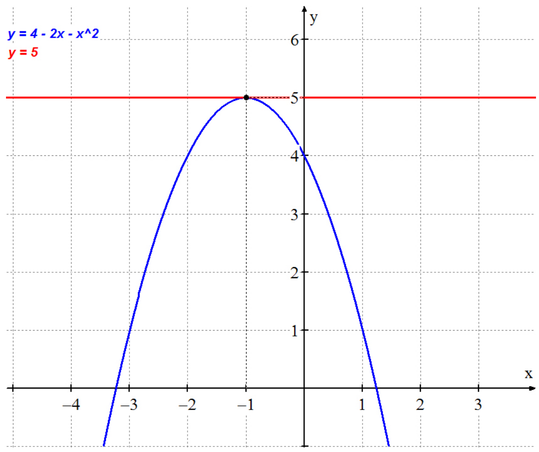
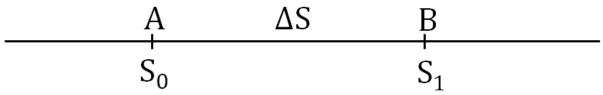


Figura 4.20: Reta tangente ao gráfico de f no ponto $x = -1$.

Ao final de tudo perguntamos aos alunos o que eles tinham a dizer sobre a aula ministrada com o Winplot. Como resposta, ouvimos de um aluno a seguinte afirmação: sem dúvidas, além de ser de fácil utilização, o Winplot me traz bastante segurança nos cálculos, uma vez que ele me permite comprovar se estou certo ou errado.

4.5 Quinta aula

Essa aula foi ministrada para as Turmas A e B e iniciamos mostrando algumas aplicações de derivada. Já havíamos visto na terceira aula que a velocidade média é dada pela taxa média de variação da distância em relação ao tempo. Portanto, suponhamos que um veículo passe pelo ponto A num determinado instante e, 5 segundos mais tarde, passe pelo ponto B, sendo a distância entre A e B de 200 metros.



Sendo $S = S(t)$ a distância percorria pelo veículo no tempo t, a velocidade média é dada por:

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S_1 - S_0}{t_1 - t_0} = \frac{200 \text{ m}}{5 \text{ s}} = 40 \text{ m/s}.$$

Para obtermos a velocidade instantânea no ponto A, fazemos Δt tender a zero. Consequentemente, ΔS também tende a zero.

Afirmamos que a velocidade instantânea v no ponto A será o limite da razão $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ quando Δt tende a zero, isto é:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Então, a velocidade instantânea num ponto é a derivada de S em relação a t nesse ponto. Em símbolos:

$$v(t) = S'(t).$$

Feito isso, exploramos alguns exemplos semelhantes ao que se encontra a seguir.

Exemplo: Um partícula se move sobre uma trajetória qualquer segundo a função horária $S(t) = t^2 - 2t + 5$, onde S é dado em metros e t é dado em segundos. Determine:

a) A velocidade instantânea da partícula no instante $t = 3$ s;

b) Quando e onde a partícula para.

Solução a) A velocidade instantânea é dada pela derivada da função $S(t)$ no instante $t = 3$ s.

$$S'(t) = v(t) = 2t - 2.$$

Para $t = 3$ segundos, temos:

$$v(3) = 2 \cdot 3 - 2 = 4 \text{ m/s}.$$

Ou seja, a velocidade instantânea da partícula no instante $t = 3$ s é de 4 m/s.

Solução b) A partícula para quando sua velocidade é nula, ou seja,

$$v(t) = 0 \Rightarrow 2t - 2 = 0 \Rightarrow t = 1 \text{ s}.$$

Observe que quando $t = 1$ s, a posição da partícula é $S(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 + 5 = 4$ m. Logo, a partícula para quando $t = 1$ s, na posição $S = 4$ m.

Para darmos continuidade a aula, falamos um pouco de aceleração. Vimos que o conceito de aceleração está relacionado com a variação de velocidade. Antes de falar sobre aceleração instantânea consideramos a aceleração média. Para isso, estudamos a seguinte situação.

Suponha dois carros em movimento, cada um com velocidade de 5 metros por segundo. Algum tempo mais tarde cada um está viajando a 30 metros por segundo. Entretanto, um carro requer 20 segundos para fazer essa mudança e o outro necessita de 5 segundos. Indicamos Δv como sendo a mudança na velocidade e Δt a mudança no tempo. Então, a aceleração média é dada por $\frac{\Delta v}{\Delta t}$. Para facilitarmos o entendimento da situação estudada, pedimos para que os alunos observassem a seguinte tabela.

	v_1	v_2	Δv	Δt	$\frac{\Delta v}{\Delta t}$
1º carro	5	30	25 m/s	20 s	1,25 m/s^2
2º carro	5	30	25 m/s	5 s	5 m/s^2

Tabela 4.3: Aceleração média dos carros.

Sem muitos esforços os alunos compreenderam bem a tabela, percebendo que a aceleração do segundo carro foi quatro vezes a do primeiro, e esse foi o motivo pelo qual o segundo carro precisou apenas de um quarto do tempo dispendido pelo primeiro carro.

Falamos para os alunos que, o que estudamos acima foi a aceleração média e perguntei o que deveríamos fazer se quiséssemos determinar a aceleração instantânea. Como resposta, obtivemos a seguinte afirmação: "essa aceleração que vimos na tabela é média, pois a mesma leva em consideração um intervalo de tempo, e para calcularmos a aceleração instantânea devemos considerar apenas um instante, ou seja, devemos fazer Δt assumir valores cada vez menores, em outras palavras, devemos fazer com que Δt tenda a zero". Foi muito prazeroso para nós ouvirmos essas palavras, pois isso significava que eles estavam, de fato, compreendendo o conteúdo.

Então, fazendo Δt tender a zero, obtemos a aceleração instantânea. Observe que Δv também tende a zero, e ao limite da razão $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ denominamos aceleração instantânea e indicamos por:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Então, a aceleração instantânea num ponto é a derivada de v em relação a t nesse ponto. Em símbolos:

$$a(t) = v'(t).$$

Concluímos, portanto, que:

- A derivada da posição S é a velocidade v, ou seja, $S'(t) = v(t)$.
- A derivada da velocidade v é a aceleração a, ou seja, $v'(t) = a(t)$.

Depois disso exploramos dois exemplos adaptados do livro didático.

Exemplo 1 (UEL-PR) A equação horária de um móvel é $y = \frac{t^3}{3} + 2t$, sendo y sua altura em relação ao solo, medida em metros, e t o número de segundos transcorridos após sua partida. Determine:

a) A altura desse móvel em relação ao solo, no instante $t = 3$ s;

b) A velocidade do móvel no instante $t = 3$ s;

c) A aceleração desse móvel no instante $t = 3$ s;

Solução a) A altura do móvel no ponto $t = 3$ s é dada por:

$$y(3) = \frac{3^3}{3} + 2 \cdot 3 = 9 + 6 = 15 \text{ m}.$$

Logo, no instante $t = 3$ s o móvel encontra-se a uma altura de 15 metros.

Solução b) A velocidade no instante t é dada por $y'(t) = v(t) = t^2 + 2$, e para $t = 3$ s, temos:

$$y'(3) = 3^2 + 2 = 11 \text{ m/s}.$$

Ou seja, a velocidade do móvel no instante $t = 3$ s é 11 m/s.

Solução c) Como vimos, a derivada da velocidade é a aceleração, então, a aceleração do móvel no instante t é dada por $a(t) = v'(t) = 2t$, e para $t = 3$ s:

$$a(3) = 2 \cdot 3 = 6 \text{ m/s}^2.$$

Por fim, a aceleração do móvel no instante $t = 3$ s é 6 m/s^2.

Exemplo 2 Uma partícula se move de acordo com a função $S(t) = t^3 - 6t^2 + 9t - 5$ (S em metros e t em segundos). Vamos determinar:

a) A posição, a velocidade e a aceleração para $t = 0$ s e $t = 2$ s.

b) Quando e onde a partícula para.

Solução a) A posição da partícula é dada por $S(t) = t^3 - 6t^2 + 9t - 5$, a velocidade instantânea é dada por $S'(t) = v(t) = 3t^2 - 12t + 9$ e a aceleração instantânea é dada por $S''(t) = v'(t) = a(t) = 6t - 12$. Para encontrar a posição, a velocidade e a aceleração quanto $t = 0$ s, basta substituir t por zero nas respectivas equações obtendo:

$$S(0) = 0^3 - 6 \cdot 0^2 + 9 \cdot 0 - 5 = -5 \text{ m}$$
$$v(0) = 3 \cdot 0^2 - 12 \cdot 0 + 9 = 9 \text{ m/s}$$
$$a(0) = 6 \cdot 0 - 12 = -12 \text{ m/s}^2$$

De forma análoga, para encontrar a posição, a velocidade e a aceleração quanto $t = 2$ s, basta substituir t por 2 nas respectivas equações obtendo:

$$S(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 - 5 = -3 \text{ m}$$
$$v(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 9 = -3 \text{ m/s}$$
$$a(2) = 6 \cdot 2 - 12 = 0 \text{ m/s}^2$$

Solução b) A partícula para quando $v(t) = 0$, isto é, $3t^2 - 12t + 9 = 0$. Resolvendo essa equação encontramos $t = 1$ e $t = 3$. Calculando a posição da partícula nos instantes $t = 1$ s e $t = 3$ s obtemos

$$S(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 - 5 = -1 \text{ m}$$
$$S(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 - 5 = -5 \text{ m}$$

Portanto, concluímos que a partícula para em dois momentos: o primeiro quando $t = 1$ s, na posição $S = -1$ m e o segundo quanto $t = 3$ s, na posição $S = -5$ m.

Não foi difícil para toda a turma compreender os conceitos abordados até aqui envolvendo posição, velocidade e aceleração de um objeto. Creio que essa facilidade se deve ao fato de formulações dessas ideias já terem sido estudadas nas aulas de Física.

Ao final dessa aula pudemos verificar com o auxílio do Winplot se as respostas encontradas estavam, de fato, corretas. Primeiramente verificamos o Exemplo 1 e para isso, traçamos o gráfico da função $y = \frac{x^3}{3} + 2x$ (em azul), como mostra a Figura 4.21. Abrimos o Inventário do programa e clicamos em Derivar fazendo com que o gráfico

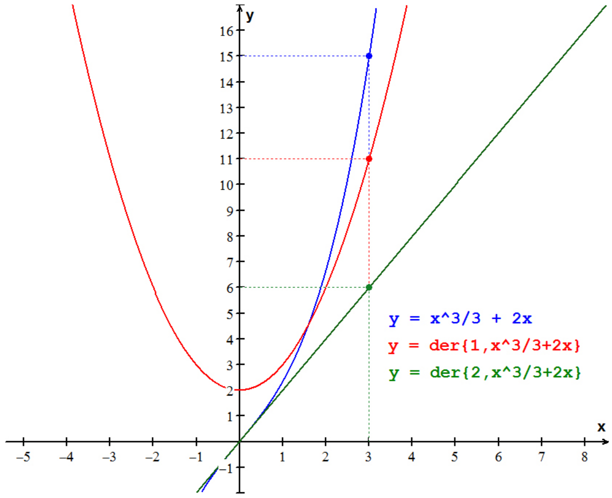


Figura 4.21: Gráficos das funções $y = \frac{x^3}{3} + 2x$, y' e y''.

de $y' = x^2 + 2$ aparecesse na tela. Repetindo o último procedimento clicamos mais uma vez em Derivar na intenção de obter a derivada segunda de da função y. De imediato o gráfico da função $y'' = 2x$ foi traçado na tela e todos puderam observar.

Logo em seguida traçamos os pontos $(3, y(3))$, $(3, y'(3))$ e $(3, y''(3))$. Assim todos perceberam que $y(3) = 15$, $y'(3) = 11$, $y''(3) = 6$, comprovando que a solução apresentada pelos mesmos estava correta. Essa é apenas uma das maneiras de obter a imagem de um ponto por uma função dada, através do Winplot. Apresentaremos outra maneira na verificação do Exemplo 2 que será feita em seguida.

Procedemos de forma semelhante ao Exemplo 1 e criamos os gráficos da função $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 5$ assim como de suas derivadas primeira e segunda. Fazendo uso de um parâmetro a, traçamos os pontos:

$$
\begin{aligned}
(a, f(a)) &= (a, a^3 - 6a^2 + 9a - 5) \\
(a, f'(a)) &= (a, 3a^2 - 12a + 9) \\
(a, f''(a)) &= (a, 6a - 12)
\end{aligned}
$$

Com a ferramenta Texto Avaliativo colocamos na tela os valores das ordenadas $f(a)$, $f'(a)$ e $f''(a)$ dos pontos acima, relacionando-as com a posição, a velocidade e a aceleração, respectivamente, como mostra a Figura 4.22.

Para determinar a posição, a velocidade e a aceleração da partícula num ponto específico basta alterarmos o valor de a convenientemente. Na Figura 4.22 os valores referentes à posição, à velocidade e à aceleração estão determinados para $a = 0$, ou seja, para $t = 0$ s. Para $t = 2$ s, devemos observar a Figura 4.23.

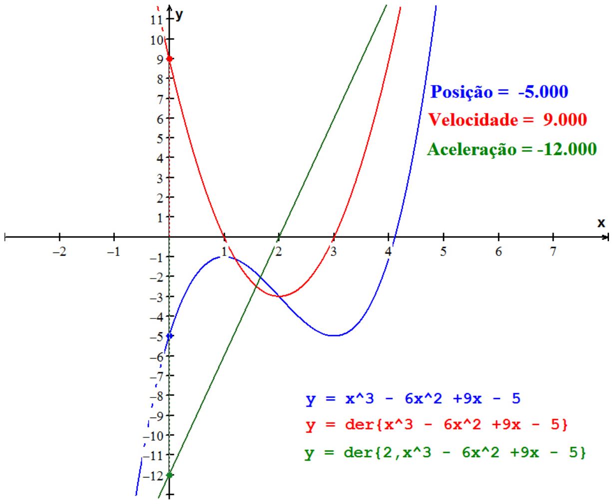


Figura 4.22: Posição, velocidade e aceleração ($t = 0$ s).

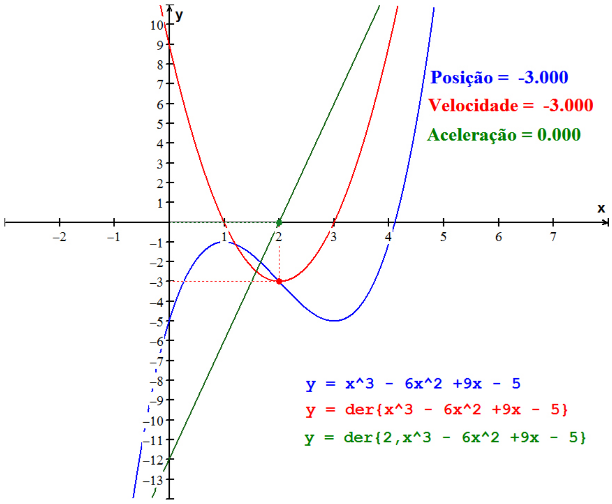


Figura 4.23: Posição, velocidade e aceleração ($t = 2$ s).

Pudemos observar que isso proporcionou aos alunos um melhoramento na autoconfiança no que diz respeito às resoluções das questões envolvendo derivadas, uma vez que eles têm um meio de comprovar a veracidade das respostas encontradas.

4.6 Sexta aula

Nesta aula mostramos para as Turmas A e B outras aplicações das derivadas. Vimos que, a partir da derivada de uma função, muitas conclusões podem ser tiradas sobre a variação da função e, portanto, sobre seu gráfico.

Começamos recordando que, se f é uma função definida no conjunto dos números reais ou em um intervalo, dizemos que f é crescente se ela varia no mesmo sentido que x, isto é, $f(x)$ cresce à medida que x cresce, e decresce à medida que x decresce. Equivalentemente, $x_1 < x_2$, então $f(x_1) < f(x_2)$.

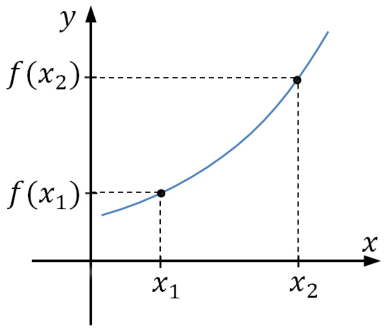


Figura 4.24: Função crescente.

Vimos também que, se f é crescente, então $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0$, com $x_1 \neq x_2$, pois o numerador e o denominador têm necessariamente sinais iguais.

De modo análogo vimos que f é decrescente se x e $f(x)$ variam em sentidos contrários, ou seja, se x cresce, então $f(x)$ decresce e, se x decresce, então $f(x)$ cresce. Indicamos assim, $x_1 < x_2$, então $f(x_1) > f(x_2)$.

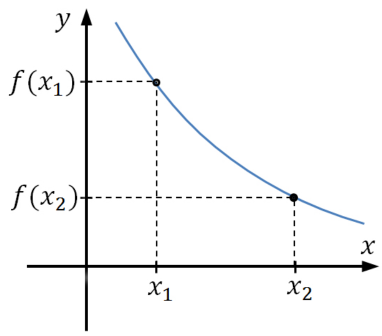


Figura 4.25: Função decrescente.

Notamos ainda que, se f é decrescente, então $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < 0$, com $x_1 \neq x_2$, pois o numerador e o denominador têm necessariamente sinais contrários.

Em seguida pedimos para os alunos observarem os gráficos da Figura 4.26, desenhados na lousa.

Desses gráficos (Figura 4.26) chegamos, intuitivamente e sem apresentar nenhuma demonstração, às seguintes deduções:

1. Se a derivada da função é positiva em um intervalo, a função é crescente nesse mesmo intervalo. Basta ver no gráfico à esquerda que a declividade da reta

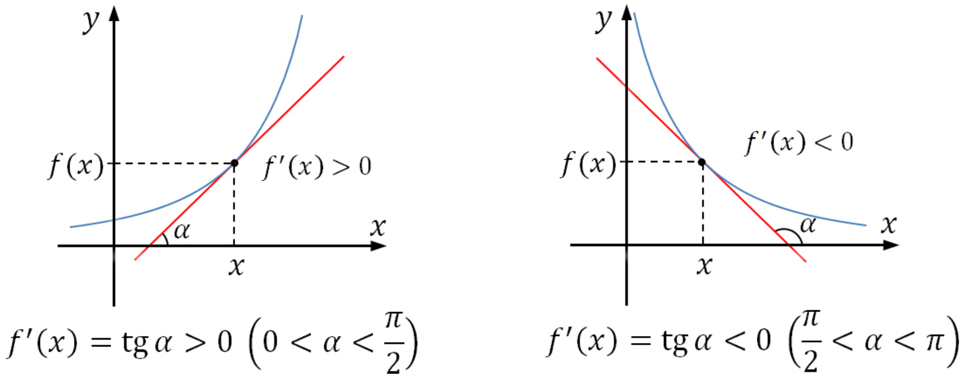


Figura 4.26: Sinal da derivada e crescimento.

tangente no ponto $(x, f(x))$ é positiva e, nas vizinhanças desse ponto, o gráfico de f é ascendente. Assim:

Se $f'(x) > 0$, então f é crescente.

2. Se a derivada da função é negativa em um intervalo, a função é decrescente nesse mesmo intervalo. Basta ver no gráfico à direita que a declividade da reta tangente no ponto $(x, f(x))$ é negativa e, nas vizinhanças desse ponto, o gráfico de f é descendente. Assim:

Se $f'(x) < 0$, então f é decrescente.

3. Intuitivamente também concluímos que se a derivada da função é zero em um intervalo, então a função é constante nesse mesmo intervalo. Assim:

Se $f'(x) = 0$ para qualquer $x \in [a, b]$, então $f(x) = k, x \in [a, b]$.

Essa relação entre a derivada de uma função e o crescimento ou decrescimento da mesma não ficou muito claro para a maioria ali presente, mesmo assim, demos continuidade estudando o comportamento de algumas funções do modo que veremos a seguir.

Primeiramente estudamos o comportamento da função afim $y = f(x) = ax + b$. Os alunos já haviam feito isso na primeira série do Ensino Médio, no entanto, sem o uso de derivada. Vimos que no caso em que $a = 0$, o valor de $f(x)$ permanece constante e o gráfico de f é a reta paralela ao eixo x que passa pelo ponto $(0, b)$. Ver Figura 4.27.

Por outro lado, derivando a função $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, obtemos $f'(x) = a$, isto é, o fato da função ser crescente ou decrescente depende unicamente do coeficiente a. Mais especificamente, a função $f(x) = ax + b$ é crescente se $f'(x) = a > 0$, e decrescente

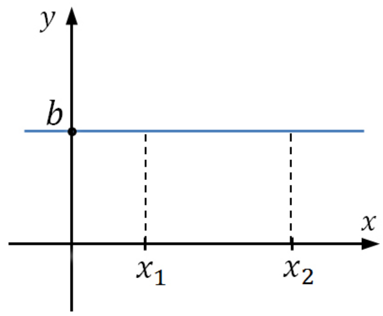


Figura 4.27: Função constante.

se $f'(x) = a < 0$, comprovando o que havia sido estudado na primeira série do Ensino Médio.

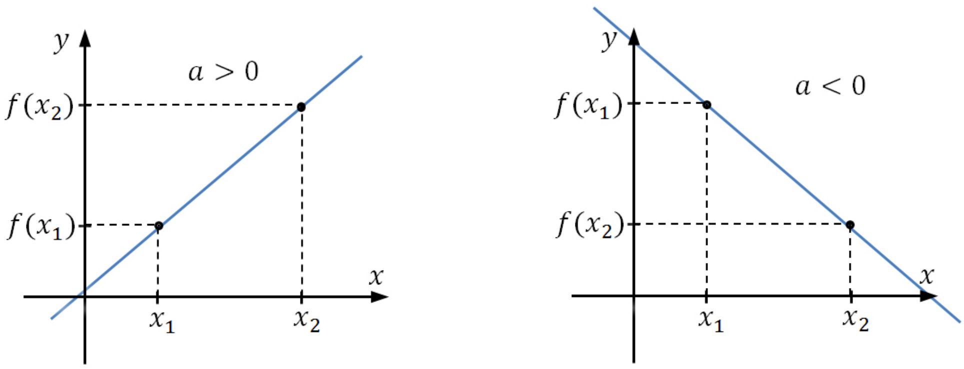


Figura 4.28: Função crescente (à esquerda) e função decrescente (à direita).

Também na primeira série do Ensino Médio os alunos já haviam estudado o sinal da função $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ analisando o coeficiente a e o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$. Nessa aula estudamos o comportamento de uma função quadrática usando derivada e para isso analisamos dois casos.

Caso $a > 0$ Derivando a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, obtemos $f'(x) = 2ax + b$. Facilmente percebemos que

$$f'(x) > 0 \Rightarrow 2ax + b > 0 \Rightarrow x > -\frac{b}{2a}$$

e

$$f'(x) < 0 \Rightarrow 2ax + b < 0 \Rightarrow x < -\frac{b}{2a}.$$

Portanto, f é crescente para $x > -\frac{b}{2a}$ e decrescente para $x < -\frac{b}{2a}$, ou seja, a função decresce quando x varia de $-\infty$ até $x = -\frac{b}{2a}$ e cresce quando x varia de $x = -\frac{b}{2a}$

até $+\infty$. Logo ela atinge seu valor mínimo em $x = -\frac{b}{2a}$, que é dado por

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{b}{2a}\right) &= a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c \\ &= a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{2a} + c \\ &= \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c \\ &= \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} \\ &= \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} \\ &= -\frac{\Delta}{4a} \end{aligned}$$

No ponto $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$, a reta tangente é horizontal, pois o coeficiente angular da mesma é $0 = f'\left(-\frac{b}{2a}\right)$ e sua equação é dada por $y = -\frac{\Delta}{4a}$.

Caso $a < 0$ Derivando a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, obtemos $f'(x) = 2ax + b$. Sendo $a < 0$, temos:

$$f'(x) > 0 \Rightarrow 2ax + b > 0 \Rightarrow x < -\frac{b}{2a}$$

e

$$f'(x) < 0 \Rightarrow 2ax + b < 0 \Rightarrow x > -\frac{b}{2a}.$$

Portanto, f é crescente para $x < -\frac{b}{2a}$ e decrescente para $x > -\frac{b}{2a}$, ou seja, a função cresce quando x varia de $-\infty$ até $x = -\frac{b}{2a}$ e decresce quando x varia de $x = -\frac{b}{2a}$ até $+\infty$. Logo ela atinge seu valor máximo em $x = -\frac{b}{2a}$ que, como vimos, é dado por

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}.$$

O fato do coeficiente angular da reta tangente no ponto $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ ser $f'\left(-\frac{b}{2a}\right) = 0$ nos garante que essa reta é horizontal e sua equação é dada por $y = -\frac{\Delta}{4a}$.

Aproveitamos a oportunidade para falar a respeito da relação existente entre a derivada segunda e a concavidade do gráfico de uma função quadrática. Afirmamos para os presentes que a derivada segunda nos traz informações a respeito da concavidade da parábola. Um dos alunos ali presentes pediu que déssemos um exemplo para que a turma entendesse melhor. Assim o fizemos.

Consideramos a função $f(x) = -3x^2 + x - 8$ e calculamos as derivadas primeira e segunda:

$$f'(x) = -6x + 1$$
$$f''(x) = -6$$

Como $f''(x) = -6 < 0$ a concavidade da parábola é voltada para baixo. Em seguida fizemos a mesma análise para a função $g(x) = 2x^2+5x-8$ cuja derivada segunda é $g''(x) = 4 > 0$, concluindo que o gráfico de g tem concavidade voltada para cima.

De forma geral calculamos a derivada segunda da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, obtendo $f''(x) = 2a$ cujo sinal depende unicamente de a, isto é, $f''(x) > 0$ quando $a > 0$ e $f''(x) < 0$ quando $a < 0$, ou seja, o gráfico possui concavidade voltada para cima se $a > 0$ e concavidade voltada para baixo se $a < 0$. Comprovando o que havia sido estudado em séries anteriores.

Logo em seguida um aluno fez a seguinte pergunta: "A derivada segunda de uma função está relacionada à concavidade do seu gráfico somente para a função do 2º grau ou isso vale também para outras funções?" Devolvemos a pergunta para a sala e outro aluno se propôs a respondê-la argumentando o seguinte: "acho que isso vale somente para funções do 2º grau, pois só o gráfico desta tem concavidade, uma vez que o gráfico da função afim é uma reta, isto é, não possui concavidade". Percebemos que o erro dessa resposta deve-se ao fato de, até então, o aluno ter tido contato apenas com funções polinomiais do 1º e 2º grau. Respondemos oralmente o questionamento do aluno e em seguida exploramos na lousa o exemplo que segue.

Para tanto, consideramos a função $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$. Derivando f obtemos $f'(x) = 3x^2 - 12x + 12 = 3 \cdot (x^2 - 4x + 4) = 3 \cdot (x - 2)^2 \geq 0$ para todo x real, pois o produto de fatores não negativos é positivo ou nulo, sendo nulo quando pelo menos um dos fatores for zero. Daí, concluímos que f é crescente em todo o seu domínio.

Derivando f pela segunda vez obtemos $f''(x) = 6x - 12$, donde segue que:

$$f''(x) > 0 \Rightarrow 6x - 12 > 0 \Rightarrow x > 2$$

e

$$f''(x) < 0 \Rightarrow 6x - 12 < 0 \Rightarrow x < 2.$$

Isso nos permite concluir que o gráfico de f possui concavidade voltada para baixo no intervalo $]-\infty, 2]$ e concavidade voltada para cima no intervalo $[2, +\infty[$. Fizemos um esboço rápido dos gráficos de f, f' e f'' na lousa para que os alunos visualizassem geometricamente o que havíamos feito. Esse e outros exemplos foram melhores explorados geometricamente com o auxílio do Winplot.

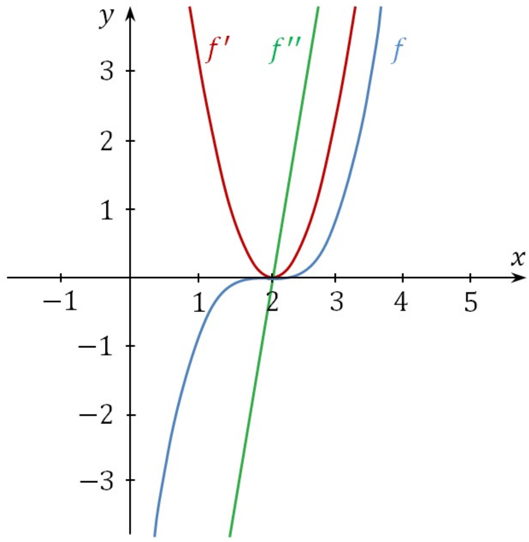


Figura 4.29: Gráficos de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$, $f'(x)$ e $f''(x)$.

Encerramos essa aula entregando aos alunos uma pequena lista de exercícios semelhantes aos exemplos explorados em sala e pedindo que a resolvessem em casa para que, na próxima aula, trouxessem as dúvidas que por ventura viessem a surtir.

4.7 Sétima aula

Nessa aula fizemos uso do Winplot e estavam presentes somente os alunos da Turma A, ou seja, os alunos que vêm fazendo uso do software para auxiliar a compreensão dos conceitos vistos em sala.

Para iniciarmos a aula plotamos o gráfico da função $f(x) = x^3 - 9x^2 + 23x - 15$ e todos puderam acompanhar a imagem projetada pelo Datashow na parede da sala. Utilizando a ferramenta **Traço**, marcamos a opção **Demo Reta Tangente** para visualizarmos a reta tangente à curva num ponto específico (Figura 4.30). O objetivo era melhorar a compreensão dos seguintes fatos:

- Se $f'(x) > 0$, então f é crescente;
- Se $f'(x) < 0$, então f é decrescente;
- Se $f'(x_0) = 0$, então x_0 é ponto crítico de f (ponto onde a primeira derivada é nula).

O Winplot nos permite variarmos esse ponto de tangência através de uma barra de rolagem horizontal como mostra a Figura 4.31.

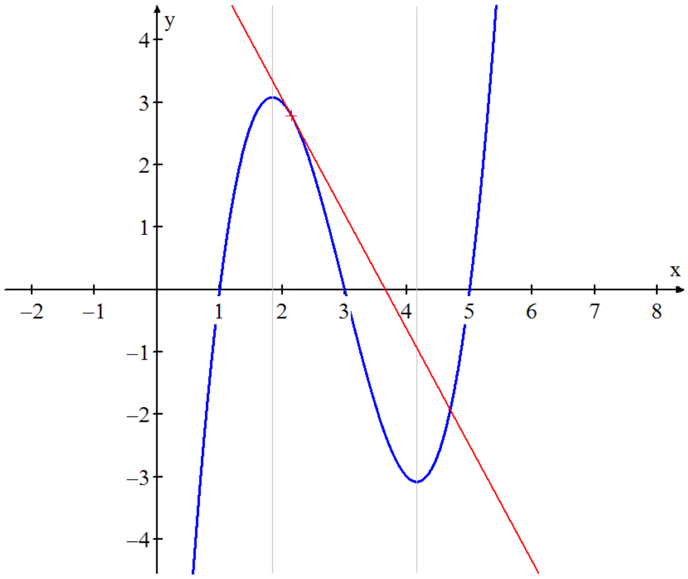


Figura 4.30: Relacionando crescimento e decrescimento com derivada.

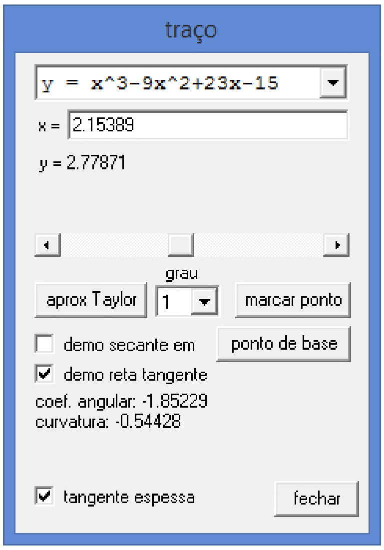


Figura 4.31: Ferramenta Traço.

Observe que, à medida que variamos o valor da abscissa do ponto de tangência, podemos acompanhar o valor do coeficiente angular da reta tangente naquele ponto, assim como a curvatura do gráfico, que será positiva quando a concavidade for voltada para cima e negativa quando a concavidade for voltada para baixo.

Pedimos aos alunos que, ao passo que fôssemos movendo o ponto de tangência, e consequentemente, a reta, eles observassem que nos intervalos em que a função é crescente, o coeficiente angular da tangente, que é a derivada de f no ponto, é positivo e nos intervalos em que a função é decrescente, o coeficiente angular da tangente é negativo.

Em seguida, fizemos o ponto de tangência coincidir com um dos extremos locais da função, como mostra Figura 4.32, e perguntamos qual o valor da derivada nesse ponto. Uma aluna respondeu: "é zero". Ao perguntarmos como ela chegou a essa conclusão, a mesma falou: "nesse ponto a reta tangente é horizontal, ou seja, seu coeficiente angular é zero, então a derivada também é zero". Ouvir isso foi muito gratificante para nós, pois percebemos que o conteúdo estudado estava sendo compreendido.

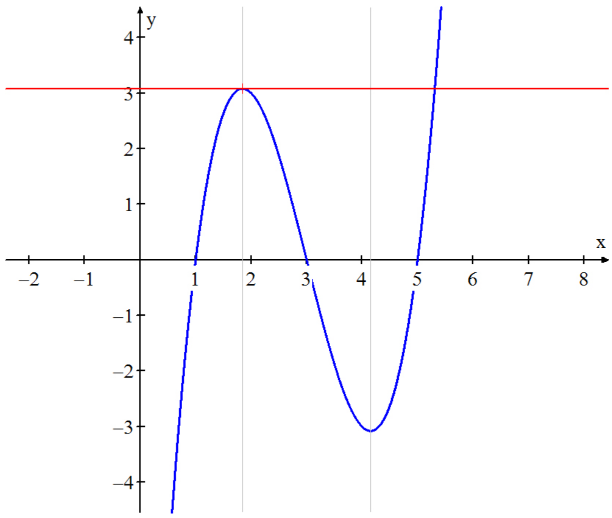


Figura 4.32: Reta tangente horizontal.

Na aula anterior vimos que a derivada da função afim $f(x) = ax+b$ é $f'(x) = a$, ou seja, o crescimento ou decrescimento da função afim depende unicamente do coeficiente angular a. Criamos um arquivo no Winplot para visualizarmos isso geometricamente. Traçamos o gráfico da função $f(x) = ax + b$ e variamos os parâmetros a e b na intenção de saber por quais mudanças no gráfico cada coeficiente é responsável, pois segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (2002, p. 72), "É importante destacar o significado da representação gráfica das funções, quando alteramos seus parâmetros, ou seja, identificar os movimentos realizados pelo gráfico de uma função quando alteramos seus coeficientes". Observe a Figura 4.33.

Os coeficientes da função apresentada na imagem variavam de acordo com os valores que atribuíssemos a a e b. Simultâneo a isso, as mudanças no gráfico iam ocorrendo. Com isso, todos os alunos puderam comprovar que o coeficiente b é responsável pela translação vertical do gráfico enquanto que o coeficiente a é responsável pela inclinação da reta, sendo f crescente se a positivo e f decrescente se a negativo.

Para estudarmos o comportamento da função quadrática criamos o gráfico da

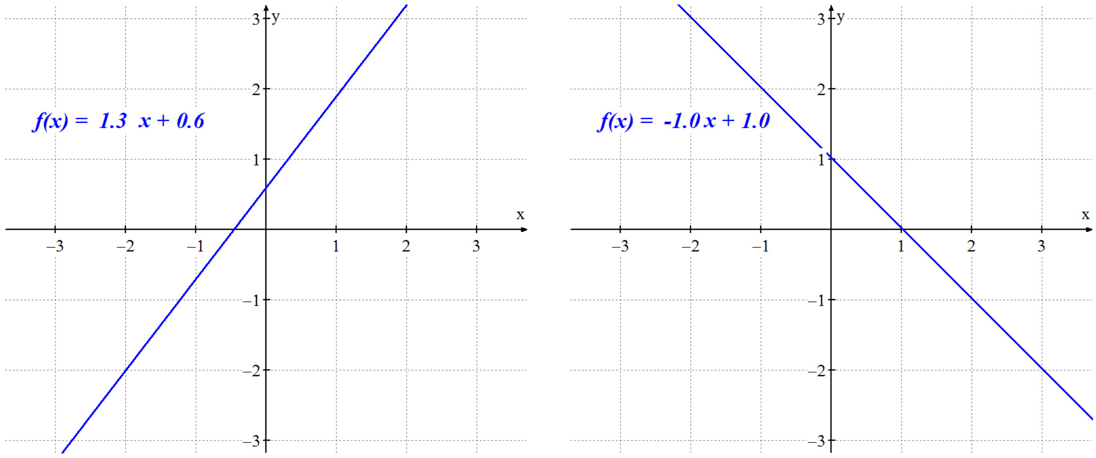


Figura 4.33: Variação dos coeficientes a e b.

função $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a, b e c são parâmetros cujos valores podemos variar (Figura 4.34). Traçamos a reta vertical $x = -\frac{b}{2a}$ que contém o vértice da parábola e começamos a variar os coeficientes para que os alunos tirassem suas próprias conclusões.

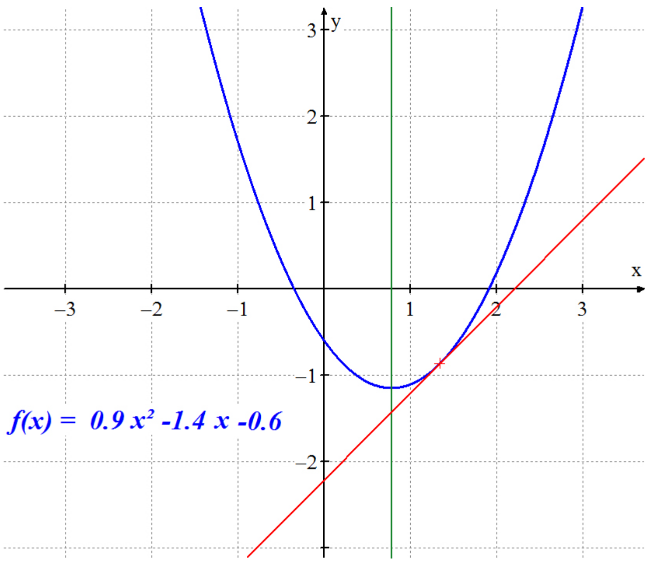


Figura 4.34: Análise do gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a > 0$.

Inicialmente, com o parâmetro a positivo (Figura 4.34) os alunos perceberam que a reta tangente é crescente à direita do vértice, decrescente à esquerda do vértice e horizontal exatamente no vértice da parábola. Ou seja, sendo a positivo, a derivada de f é positiva (f crescente) para valores de $x > -\frac{b}{2a}$, negativa (f decrescente) para valores de $x < -\frac{b}{2a}$ e nula para $x = -\frac{b}{2a}$ (ponto de mínimo).

Logo em seguida, atribuímos a a um valor negativo como mostra a Figura 4.35.

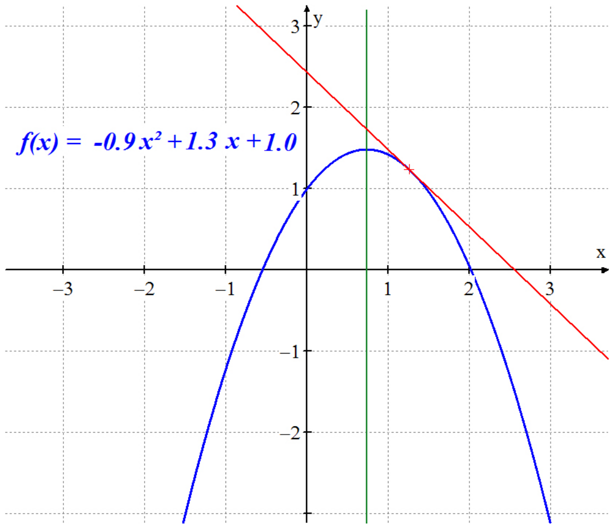


Figura 4.35: Análise do gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a < 0$.

Satisfatoriamente, os alunos perceberam que, com o parâmetro a negativo, a reta tangente é crescente à esquerda do vértice, decrescente à direita do vértice e horizontal exatamente no vértice da parábola. Ou seja, sendo a negativo, a derivada de f é negativa (f decrescente) para valores de $x > -\frac{b}{2a}$, positiva (f crescente) para valores de $x < -\frac{b}{2a}$ e nula para $x = -\frac{b}{2a}$ (ponto de máximo).

Aproveitamos também para, usando o Winplot, explorarmos exemplos vistos na aula passada onde, em um dos quais, consideramos a função $f(x) = -3x^2 + x - 8$. Traçamos o gráfico dessa função, abrimos o Inventário do programa e clicamos duas vezes em Derivar fazendo com que os gráficos da primeira derivada (na cor vermelha) e da segunda derivada (na cor verde) fossem plotados na tela como mostra a Figura 4.36.

Pedimos para que os alunos atentassem para o fato de que o gráfico de f' toca o eixo Ox no ponto de abscissa $x = \frac{1}{6}$, pois:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -6x + 1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{6}.$$

Para valores à esquerda de $x = \frac{1}{6}$, o gráfico de f' está acima do eixo Ox, isto é, f' é positiva, e é nesse intervalo que f é crescente. Enquanto que, para valores à direita de $x = \frac{1}{6}$, o gráfico de f' encontra-se abaixo do eixo Ox, isto é, f' é negativa, e é nesse intervalo que f é decrescente. Olhando agora para o gráfico da segunda derivada (na cor verde) percebemos que f'' é menor do que zero para todo x real, denunciando que f possui concavidade voltada para baixo em todo o seu domínio, como podemos

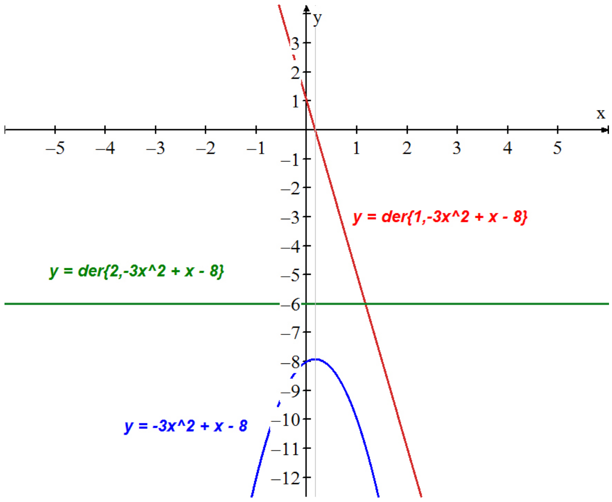


Figura 4.36: Análise do gráfico de $f(x) = -3x^2 + x - 8$.

observar no gráfico da Figura 4.36.

A mesma análise foi feita para a função $g(x) = 2x^2 + 5x - 8$, analiticamente estudada na aula anterior.

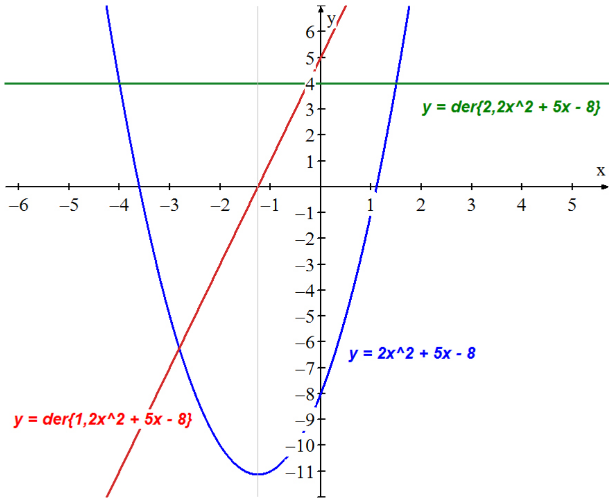


Figura 4.37: Análise do gráfico de $g(x) = 2x^2 + 5x - 8$.

Após projetarmos a Figura 4.37 na parede da sala, fizemos a seguinte pergunta: qual é a abscissa do ponto onde a reta vermelha toca o eixo Ox? Os alunos não tiveram dificuldade em responder, uma vez que já havíamos feito isso no exemplo anterior. Eles sabiam que a resposta para essa pergunta era o valor de x para o qual $g'(x) = 0$.

$$g'(x) = 0 \Rightarrow 4x + 5 = 0 \Rightarrow x = -\frac{5}{4}.$$

A turma não sentiu dificuldade em entender que para $x < -\frac{5}{4}$, g' está abaixo do eixo Ox, isto é, $g'(x) < 0$, e nesse intervalo g é decrescente. Além disso, para $x > -\frac{5}{4}$,

g' está acima do eixo Ox, isto é, $g'(x) > 0$, e nesse intervalo g é crescente. Atentos ao gráfico da segunda derivada (na cor verde) todos viram que g'' é maior do que zero para todo x real, denunciando que g possui concavidade voltada para cima em todo o seu domínio como podemos observar no gráfico.

No final da aula anterior estudamos, analiticamente, o comportamento da função $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ e fizemos um esboço rápido dos gráficos de f, f' e f''. Nesta aula, com o auxílio do Winplot, traçamos o gráfico da função f (Figura 4.38).

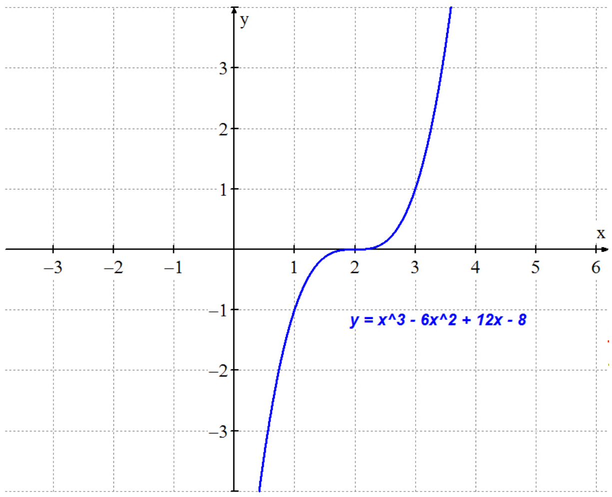


Figura 4.38: Gráfico da função $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$.

Visualizando apenas o gráfico os alunos perceberam que a função é crescente em todo o seu domínio e que o gráfico possui concavidade voltada para baixo no intervalo $]-\infty, 2]$ e concavidade voltada para cima no intervalo $[2, +\infty[$. Após abrirmos o Inventário do Winplot clicamos em Derivar e pudemos visualizar, não somente o gráfico de f, como também o gráfico de f' (Figura 4.39).

Com isso os alunos puderam constatar, através da derivada de f, que a função é crescente em todo o seu domínio, pois $f'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R} - \{2\}$. Clicamos em Derivar pela segunda vez e o gráfico de f'' apareceu imediatamente na tela.

Todos puderam comprovar que para $x < 2$ o gráfico de f'' encontra-se abaixo do eixo Ox, isto é, neste intervalo a derivada segunda é negativa e, consequentemente, a concavidade é voltada para baixo. Observamos também que para $x > 2$ o gráfico de f'' encontra-se acima do eixo Ox, isto é, neste intervalo a derivada segunda é positiva e, consequentemente, a concavidade é voltada para cima, como podemos verificar na Figura 4.40.

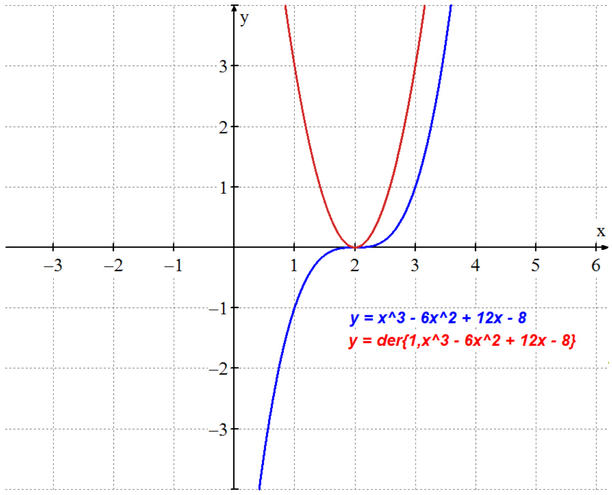


Figura 4.39: Gráficos das funções $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ e $f'(x)$.

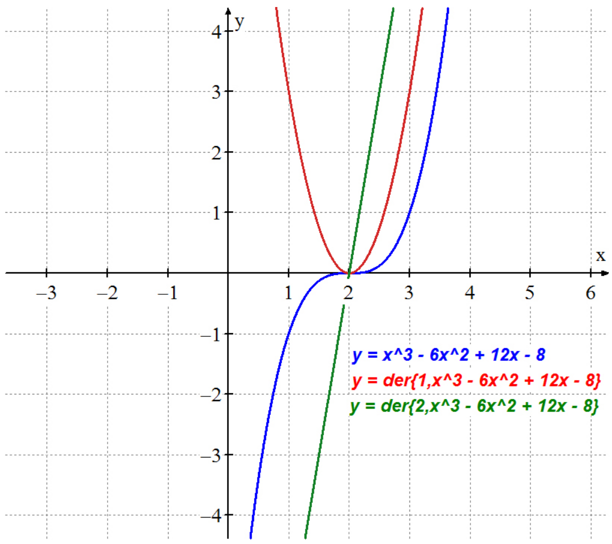


Figura 4.40: Gráficos das funções $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$, $f'(x)$ e $f''(x)$.

Indo um pouco mais além, usamos a ferramenta Traço e plotamos o gráfico da reta tangente ao gráfico de f cujo ponto de tangência podíamos variar a vontade (Figura 4.41). Deslizamos o ponto de tangência fazendo com que a reta assumisse diversas posições na intenção de fazer com que os alunos percebessem que f é crescente para todo $x \in \mathbb{R}$.

Fazendo a abscissa do ponto de tangência coincidir com $x = 2$, todos puderam ver que a reta tangente ao gráfico nesse ponto é horizontal e coincide com o eixo Ox como mostra a Figura 4.42.

Isso nos permitiu concluir que a derivada da função f no ponto de abscissa $x = 2$ é zero, isto é, $f'(2) = 0$. Antes de encerrarmos esse nosso encontro, no qual, pela

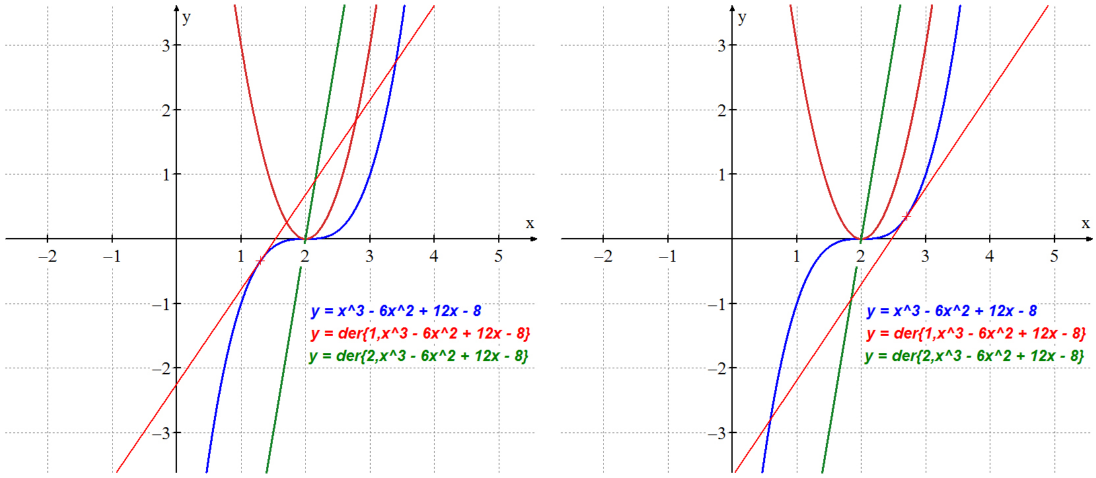


Figura 4.41: Reta tangente ao gráficos de $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$.

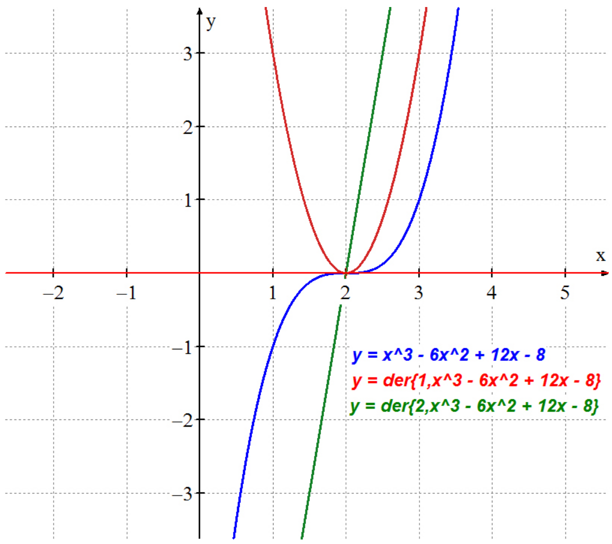


Figura 4.42: Reta horizontal tangente a curva $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$.

última vez, fizemos uso do software Winplot, pedimos aos alunos que explorassem o software em casa, analisando exemplos como os estudados em sala.

4.8 Oitava aula

Nossa oitava e última aula antes da aplicação do teste teve como público alvo apenas os alunos da Turma B, isto é, os alunos que não utilizaram o Winplot durante a realização do nosso estudo sobre limite e derivada. Nela fizemos uma revisão de todo o conteúdo estudado nas sete primeiras aulas com o objetivo de suprimir as dúvidas apresentadas pelos alunos.

Capítulo 5

Descrição do teste e análise dos resultados

5.1 Descrição

Os 30 alunos que participaram de nossa pesquisa dispuseram de noventa minutos para resolver o teste que era composto por nove questões todas de múltipla escolha e com quatro alternativas, as quais, de forma sucinta, apresentaremos a seguir.

A primeira questão trazia quatro limites e exigia que o aluno calculasse seus respectivos valores. O primeiro limite envolvia uma indeterminação e para efetuar o cálculo era necessário decompor um trinômio do segundo grau. O segundo tratava-se de uma fração de numerador positivo e constante e denominador tendendo a mais infinito. O terceiro também envolvia uma fração, no entanto, diferentemente da fração do segundo limite, o numerador desta tendia a uma constante enquanto o denominador tendia a zero. O quarto e último limite podia ser resolvido por uma simples substituição.

Na segunda questão era dado o gráfico de uma função e quatro limites com seus respectivos valores, onde apenas um desses limites estava correto, cabendo ao aluno, a partir do gráfico, descobrir qual. Na terceira questão era dada uma função polinomial do terceiro grau e pedia que o aluno calculasse a terceira derivada desta. A quarta questão exigia que o aluno calculasse a derivada de uma função polinomial do quarto grau em um ponto específico.

A quinta questão pedia a equação da reta tangente ao gráfico de uma função polinomial do terceiro grau no ponto de abscissa especificada. A sexta questão mostrava o gráfico da derivada de uma função e fazia afirmações sobre o crescimento e o decrescimento da função em determinados intervalos, cabendo ao aluno encontrar a afirmação correta. A sétima questão mostrava o gráfico da derivada segunda de uma função e fazia afirmações a respeito dos intervalos onde a função possui concavidade voltada para baixo e os intervalos onde a concavidade do gráfico é voltada para cima, cabendo ao aluno analisar a veracidade das informações.

A penúltima questão exibia o gráfico de uma função e fazia afirmações referentes à imagem de um ponto, ao valor da derivada em uma abscissa especificada e aos sinais da segunda derivada aplicada em pontos específicos. A nona e última questão se relacionava com a física. Nesta, era dada a equação da posição de uma partícula e exigia do aluno que o mesmo calculasse a posição, a velocidade e a aceleração em dados instantes.

5.2 Desempenho das Turmas

A Tabela 5.1 mostra os acertos e erros da Turma A, que é composta pelos alunos que fizeram uso do Winplot.

Questões	Acertos	Erros
1ª	12	3
2ª	9	6
3ª	11	4
4ª	10	5
5ª	8	7
6ª	9	6
7ª	9	6
8ª	6	9
9ª	9	6

Tabela 5.1: Acertos e erros da Turma A.

Observe o gráfico da Figura 5.1 para facilitar a análise dos dados dispostos na Tabela 5.1.

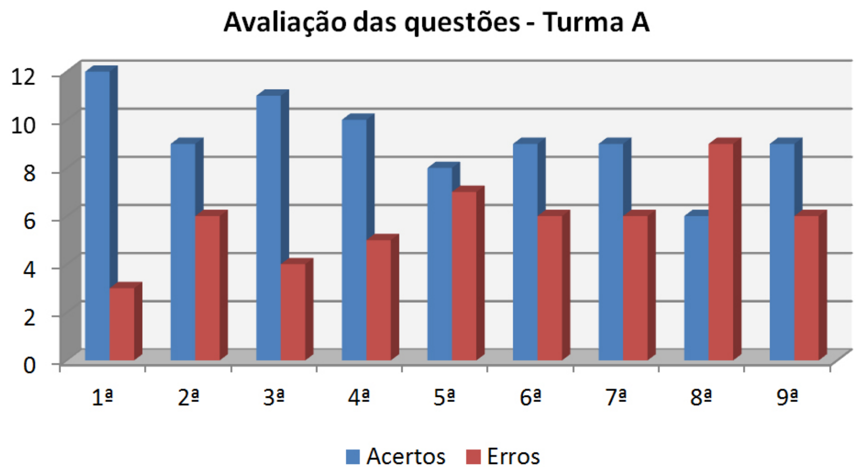


Figura 5.1: Acertos e erros da Turma A.

A Tabela 5.2 mostra os acertos e erros da Turma B, que é composta pelos alunos que não fizeram uso do Winplot.

Questões	**Acertos**	**Erros**
1ª	5	10
2ª	2	13
3ª	4	11
4ª	8	7
5ª	3	12
6ª	9	6
7ª	3	12
8ª	2	13
9ª	7	8

Tabela 5.2: Acertos e erros da Turma B.

Para facilitar a leitura dos dados encontrados na tabela acima observe o gráfico da Figura 5.2.

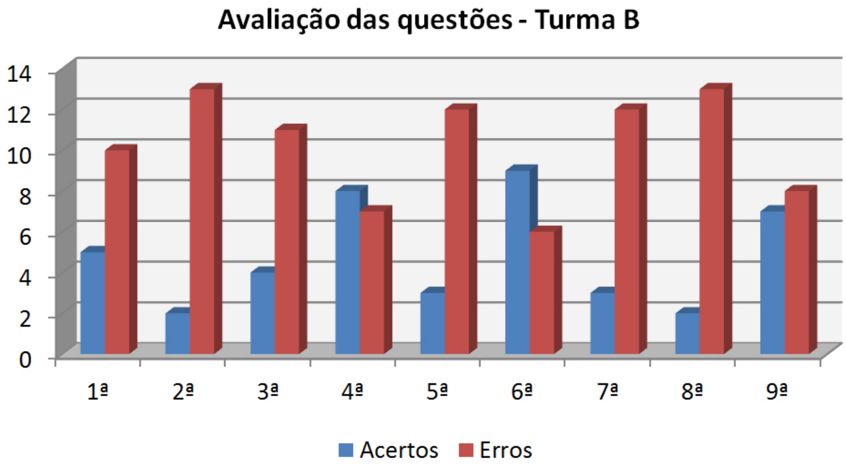


Figura 5.2: Erros e acertos da Turma *B*.

5.3 Comparação do desempenho das Turmas A e B

Observe abaixo dois gráficos referentes aos Acertos (Figura 5.3) e aos Erros (Figura 5.4), que viabilizam uma melhor comparação entre os desempenhos das Turmas *A* e *B*.

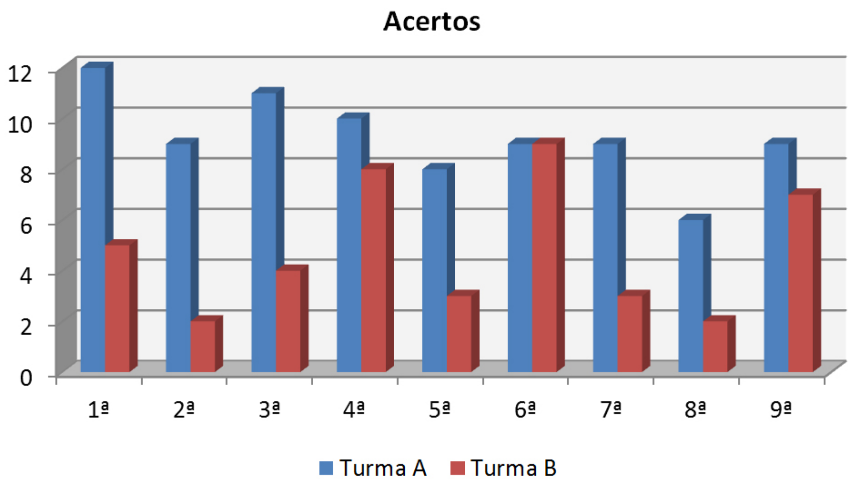


Figura 5.3: Acertos das Turmas *A* e *B*.

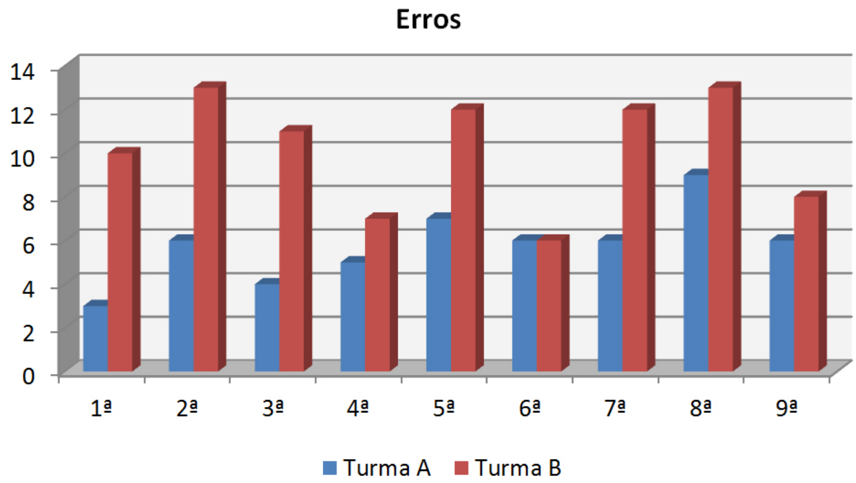


Figura 5.4: Erros das Turmas A e B.

Basta voltarmos nossa atenção para os gráficos Acertos e Erros para percebermos que o índice de acertos, referente a cada questão, foi maior na Turma A, exceto no que diz respeito à 6ª questão, onde computamos 6 acertos na Turma A assim como na Turma B. A partir disso pudemos tirar algumas conclusões, as quais mencionaremos no capítulo seguinte.

Capítulo 6

Conclusões

A partir de uma comparação, sem muitas minúcias, entre as análises realizadas no teste da Turma A e no teste da Turma B podemos fazer alguns comentários concludentes a respeito de nossa pesquisa os quais relataremos mais adiante.

Não são necessários muitos esforços para percebermos que o uso do Winplot proporcionou aos alunos da Turma A um progresso cognitivo maior, quando comparado aos alunos da Turma B, nos que diz respeito às noções de Cálculo estudadas e, com isso, conseguimos atingir, pelo menos de forma parcial, nossos objetivos.

Dentre os fatores que colaboraram para que o índice de acerto da Turma A fosse superior ao da Turma B está o modo como as aulas foram ministradas. Perante as imagens emitidas pelo Datashow, os alunos demonstraram grande interesse, curiosidade e empenho, prestando atenção nos mínimos detalhes ali apresentados. Isso, sem dúvida, contribuiu em larga escala para uma melhor interpretação dos conceitos referentes às noções de Cálculo estudadas em sala.

O objetivo geral desse trabalho de conclusão de curso é mostrar que o uso de recursos computacionais nas aulas de Matemática pode melhorar o ensino e a aprendizagem do Cálculo. Fica evidente, portanto, que um software, apesar de não ser imprescindível, é importante para proporcionar aos alunos uma melhor compreensão. Além do mais, o aluno demonstra maior interesse, que, indubitavelmente, é de fundamental importância para a absorção do conhecimento.

Quando nossa intenção foi mostrar as relações entre o gráfico de uma função e os gráficos de suas derivadas primeira e segunda, o computador, juntamente com o Winplot, deixou claro mais uma vez o alto grau de sua importância ao alcançarmos mais um de nossos objetivos específicos. Ao que diz respeito ao cálculo da equação da reta tangente a uma curva em determinado ponto, o Winplot também se mostrou útil auxiliando na verificação da veracidade das respostas encontradas, cooperando assim, para alcançarmos mais um dos nossos objetivos.

É notório que, para um aluno compreender bem os conceitos referentes ao Cálculo, o mesmo deve possuir uma boa visão geométrica. Essa é mais uma vantagem que o Winplot nos proporcionou, pois os alunos compreenderam geometricamente o que, de fato, estavam calculando. Podemos afirmar sem nenhuma dúvida que o software utilizado facilitou e muito o alcance de nossos objetivos específicos.

É importante ressaltarmos que o tempo que estivemos em contato com os alunos foi extremamente escasso, levando em consideração a quantidade de conteúdos que abordamos. Isso nos impediu de ir mais longe no que concerne ao desenvolvimento, pelos alunos, de habilidades como explorar, refletir, supor, tentar, discutir e testar, para que, apoiando-se no professor quando necessário, o aluno aprenda a construir o seu próprio conhecimento.

Faz-se necessário destacar que a inserção de tecnologias nas práticas de ensino de Matemática não suprime a possibilidade de um mau êxito. São vários os obstáculos com os quais podemos nos deparar quando decidimos por trabalhar com computadores. Um desses empecilhos é a infraestrutura da escola. Em nosso caso a escola não dispõe de um Laboratório de Informática, e a grande maioria das escolas que o possuem, não é um laboratório espaçoso e o número de alunos por turma, geralmente, excede o de computadores.

Basta compararmos o número de acertos das Turmas A e B para percebermos que a utilização do Winplot é o fator responsável pelo melhor desempenho apresentado pela Turma A. Fica manifesto, portanto, que fazendo uso dessa metodologia inovadora, conseguimos, além de esclarecer algumas ideias, facilitar a absorção de conhecimentos referentes às noções de Cálculos abordadas. Por essa e por outras razões podemos afirmar que nossa pesquisa foi bastante profícua, uma vez que os resultados expressam com clareza a eficácia do Winplot na compreensão de algumas noções de Cálculo.

Por outro lado, o ideal é que essa "nova" metodologia seja implantada paulatinamente, para não causar "assombros", pois a verdade é que alguns alunos assim como alguns docentes, optam por práticas tradicionais e desconhecem a eficácia de metodologias diferentes. Para extinguirmos essa relutância imposta por esses professores, é necessário, portanto, que esses procurem se atualizar através de leituras e pesquisas, para que assim, percebam a relevância desse método em suas práticas docentes.

Referências Bibliográficas

[1] ÁVILA, Geraldo; *O ensino de Cálculo no 2º grau*. In: Revista do Professor de Matemática, nº **18**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1991, p. 1–9.

[2] ÁVILA, Geraldo. *O ensino de Matemática*. In: Revista do Professor de Matemática, nº **23**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1993, p. 1–7.

[3] ÁVILA, Geraldo. *Limites e Derivadas no Ensino Médio?* In: Revista do Professor de Matemática, nº **60**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2006, p. 30–38.

[4] BARUFI, Maria Cristina Bonomi; LAURO, Maria Mendias. *Funções elementares, equações e inequações: uma abordagem utilizando microcomputador*. 2001. CAEM — IME/USP.

[5] CARVALHO, P. C. P. *Fazer Matemática e usar Matemática*. Salto para o futuro. Série Matemática não é problema. Disponível em: http://www.tvbrasil.org.br/fotos/salto/series/150311Matematicaproblema.pdf. Acesso em 20/02/2014.

[6] CARNEIRO, J. P.; WAGNER, E. *Vale a pena estudar Cálculo?* In: Revista do Professor de Matemática, nº **53**, São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2004, p. 18–21.

[7] DANTE, L. R. *Matemática: contexto e aplicações*. 1 ed. São Paulo: Ática, 2010.

[8] DUGAC, Pierre. Histoire de l'Analyse. Paris: Vuibert, 2003, p. 44–54.

[9] DUCLOS, R. C. *Cálculo no Segundo Grau*. In: Revista do Professor de Matemática, nº **20**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1992, p. 26–30.

[10] FERRARO, Giovanni. *Some mathematical aspects of Newton's Principia*. Universidade de Molise. Itália: 2011, p. 1–8.

[11] FILHO, Benigno Barreto; SILVA, Claudio Xavier da. *Matemática, Aula por Aula*. São Paulo: FTD,2005.

[12] GIOVANNI, José Ruy. BONJORNO, José Roberto. *Matemática Completa*. Vol. 3. 2 ed. São Paulo: FTD, 2005.

[13] GRAVINA, M. Alice. *Um Estudo de Funções*. In: Revista do Professor de Matemática, nº **20**, Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1991, p. 33–38.

[14] GRAVINA, M. A; SANTAROSA L. M. *A Aprendizagem de Matemática em Ambientes Informatizados*. In: Revista Informática e Educação: Teoria e Prática, 1999, UFRGS.

[15] IEZZI, G; DOLCE, O; DEGENSZAJN, D; PÉRIGO, R; ALMEIDA, N. *Matemática: ciência e aplicações*. V. 3. 2 ed. São Páulo: Atual, 2004.

[16] MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCN-EM)*. Brasil. MEC/SEMTEC – Secretaria de Educação Média e Tecnológica, Brasília, 2002.

[17] NÉRI, Izaías Cordeiro. *POLY: Guia do Usuário*. São Paulo, 2007. Disponível em <www.geometriadinamica.com.br>. Acesso em: 30 de maio de 2014.

[18] PCN + ENSINO MÉDIO. *Orientações Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais*. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Secretaria de Educação Tecnológica – Brasília: MEC; SEMTEC, 2002.

[19] REZENDE, Wanderley Moura. *O ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica*. In: MACHADO, N.; CUNHA, M. (org). Linguagem, Conhecimento, Ação — ensaios epistemologia e didática. Escrituras: São Paulo, 2003.

[20] SANTOS, Cícero dos. *O estudo do gráfico da função afim com o software winplot através da resolução de problemas*. 2011. Monografia. UEPB, Campina Grande, 2011.

[21] SBM. *Fundamentos de Cálculo*. Material disponibilizado ao PROFMAT, 2013.

Apêndice A

Teste

Escola Estadual De Ensino Fundamental e Médio Cícero Dos Anjos

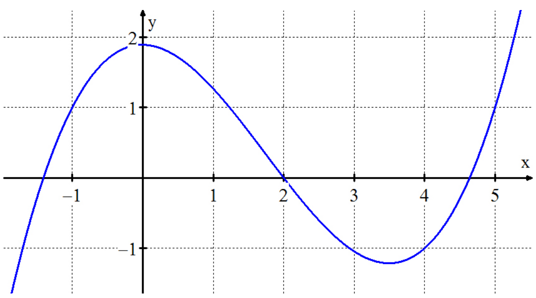
Professor: Cícero dos Santos **Disciplina**: Matemática **Turma**: 3ºC

Aluno(a): ____

Q u e s t õ e s

1. Os valores dos limites abaixo na ordem em que aparecem são:
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x-2}; \qquad \lim_{x\to +\infty}\frac{5}{x^2}; \qquad \lim_{x\to 1}\frac{2x-1}{(x-1)^2}; \qquad \lim_{x\to 0}\frac{2x-10}{x-5}.$$
(a) $1, 0, +\infty$ e 2 (b) $0, 1, +\infty$ e 2 (c) $1, 0, -\infty$ e 1 (d) $1, 0, 2$ e $+\infty$

2. Sabendo que na figura abaixo se encontra o gráfico da função f, então:



(a) $\lim_{x\to -1} f(x) = 0$ (c) $\lim_{x\to 4} f(x) = -1$

(b) $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$ (d) $\lim_{x\to 5} f(x) = 2$

3. Se $f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 2x - 2$, então $f'''(x)$ é:

(a) $f'''(x) = 6$ (b) $f'''(x) = 12x$ (c) $f'''(x) = 12$ (d) $f'''(x) = 24$

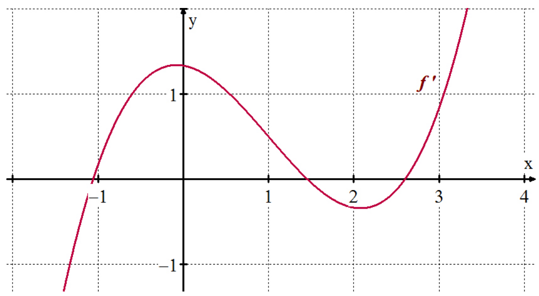
4. A derivada da função $f(x) = 2x^4 - 5x^3 + 20$ no ponto de abscissa $x = 1$ vale:

(a) 8 (b) -7 (c) -15 (d) 23

5. A equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 3$ no ponto $x = 2$ é:

(a) $y = 2x - 1$ (b) $y = x - 2$ (c) $y = \frac{1}{3}x - 5$ (d) $y = x - 1$

6. Sabendo que o gráfico abaixo é da derivada da função f, podemos afirmar que:



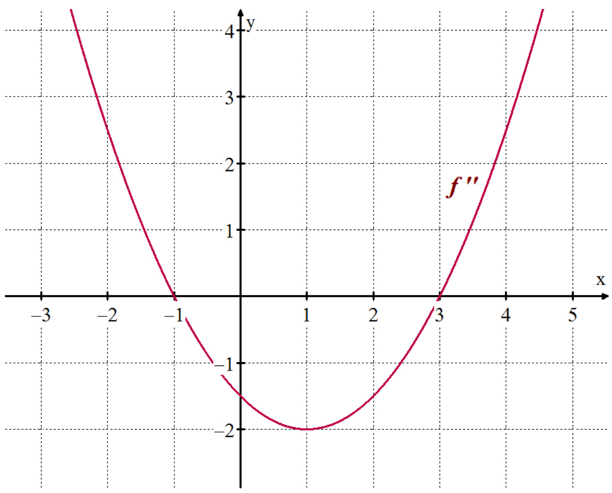
(a) f é crescente em todo o seu domínio;

(b) No intervalo $[-1, 1]$ a função f é crescente;

(c) No intervalo $[-1, 1]$ a função f é decrescente;

(d) No intervalo $[2, 3]$ a função f é decrescente.

7. Sabendo que o gráfico abaixo é da derivada segunda da função f, o que podemos afirmar a respeito do gráfico de f?



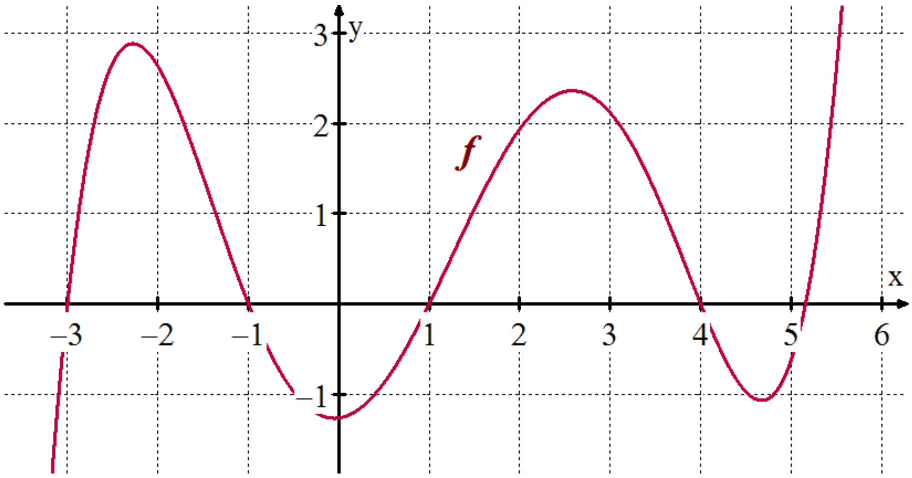
(a) f não possui concavidade voltada para cima;

(b) f não possui concavidade voltada para baixo;

(c) No intervalo $]-1,3[$ a concavidade é voltada para cima e nos intervalos $]-\infty,-1[$ e $]3,+\infty[$ a concavidade é voltada para baixo;

(d) No intervalo $]-1,3[$ a concavidade é voltada para baixo e nos intervalos $]-\infty,-1[$ e $]3,+\infty[$ a concavidade é voltada para cima.

8. Olhando para o gráfico da função f, é verdade que:



(a) $f(0) = -1$ (b) $f'(2) = 0$ (c) $f''(2) < 0$ (d) $f''(0) < 0$

9. Uma partícula se movimenta de acordo com a função $S(t) = t^3 - 6t^2 + 24t - 1$, sendo S dado em metros e t dado em segundos. A posição da partícula no instante $t = 0$ s, a velocidade no instante $t = 1$ s e a aceleração no instante $t = 2$ s, valem respectivamente:

(a) 1 m, − 15 m/s e 0 m/s^2

(b) −1 m, 10 m/s e 0 m/s^2

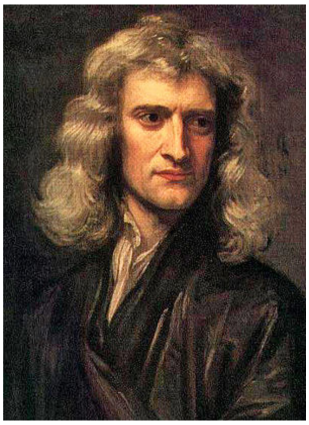
(c) −1 m, 15 m/s e 3 m/s^2

(d) −1 m, 15 m/s e 0 m/s^2

Apêndice B

Biografias

B.1 Isaac Newton



Isaac Newton nasceu em 4 de janeiro de 1643 em Woolsthorpe , mas foi registrado como se tivesse nascido em 25 de dezembro de 1642, ano do falecimento de Galileu Galilei. Acredita-se que essa discordância de datas se deve ao fato de naquela época a Grã-Bretanha usar o calendário juliano. Seu pai, também de nome Isaac Newton, havia falecido três meses antes do seu nascimento e sua mãe, Hannah Ayscough Newton, casou pela segunda vez quando ele tinha três anos. Sem concordar com essa união Newton chegou a ameaçar tocar fogo na casa com a mãe e o padrasto, o pastor Barnabas Smith, dentro.

Sempre introspectivo e de temperamento difícil, Newton não demonstrou interesse em cuidar dos negócios da família, e passava a maioria do tempo compenetrado nos livros e construído objetos, como o moinho de vento em miniatura, um relógio de água e um quadrante solar de pedra. Vendo que Newton possuía uma inteligência e uma habilidade acima do considerado normal, seu tio pediu a mãe do garoto talentoso que o matriculasse em Cambridge, e assim ela fez. Apesar do romance vivido por Newton com a senhorita Anne Store, filha do farmacêutico William Clarke, acredita-se que Newton nunca se casou e tenha falecido virgem.

O contato que Newton teve com professores e estudiosos da época influenciou, sem dúvidas, o seu desenvolvimento intelectual, assim como o direcionamento de suas pesquisas. Ele estudou obras como *Os Elementos*, de Euclides, *Clavis Mathematicae*, de Oughtred, *Lá Géométrie*, de Descartes, *Exercitationum mathematicarum*, de Schooten, *Opera Mathematica*, de Viète, *Arithmetica infinitorum e Tractatus duo*, de Wallis. A grande maioria do conhecimento obtido por ele veio dos livros enquanto estudava sozinho, por isso, podemos afirmar que Newton era autodidata.

Com 18 anos é aceito no Trinity College, da Universidade de Cambridge. Passou quatro anos em Cambridge e recebeu seu grau de Bacharel em Artes, em 1665. Tornou-se amigo do Professor Isaac Barrow, que o estimulou a desenvolver suas aptidões matemáticas. Durante dezoito meses a universidade fica fechada, em consequência de uma epidemia de peste bubônica, que assolou a Inglaterra e matou um décimo da população.

Isaac Newton voltou para casa de sua mãe e durante esse tempo desenvolveu as leis básicas da Mecânica, estudou os corpos celestiais, descobriu a lei fundamental da gravitação, inventou os métodos de cálculo diferencial e integral, e estabeleceu os alicerces de suas grandes descobertas ópticas. Ele ainda desenvolveu o método de Newton para a aproximação das raízes de uma função e passou o resto da vida científica ampliando suas descobertas. Em 1669, com 27 anos, volta para a universidade, torna-se professor de Matemática, sucedendo o professor Isaac Barrow.

O teorema intitulado Binômio de Newton, que ganhou o nome do seu formulador, data de 1663. Newton ainda desenvolveu conceitos respeitantes às séries infinitas e ao que ele nomeou de teoria ou métodos das fluxões que pode ser considerado o primeiro passo de uma caminhada rumo ao Cálculo Diferencial e Integral.

A principal obra de Newton data de 1687 e tem por título *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (Princípios matemáticos da filosofia natural). Dividida em três volumes no último dos quais ele enuncia a lei da gravitação universal generalizando e ampliando as constatações de Kepler. A mesma ainda aborda conceitos relacionados a física, astronomia e mecânica, como leis dos movimentos, movimentos de corpos em meios resistentes, vibrações isotérmicas, velocidade do som, densidade do ar, queda dos corpos na atmosfera, pressão atmosférica, dentre outros.

Além de professor Newton foi membro do parlamento britânico de 1687 a 1690, *Warden of the Mint*, em 1696, *Master of the Mint*, em 1701, que são dois cargos burocráticos da Casa da Moeda britânica, sócio estrangeiro da Académie des Sciences em 1699 e presidente da Royal Society em 1703, na qual congregava os mais célebres pensadores da época.

Newton é autor de algumas obras dentre as quais estão:

- Method of Fluxions, 1671
- Philosophiae Naturalis Principia Mathhematica, 1687
- Opticks, 1704
- Arithmetica Universalis, 1707
- The Chronology of Ancient Kingdoms Amended, 1728

Alguns historiadores costumam dividir a vida de Newton em três períodos. O primeiro vai de 1643 a 1669 que compreende desde o seu nascimento até a graduação. O segundo vai de 1669 a 1687 e foi onde fez suas mais importantes descobertas. Neste período Newton foi professor Lucasiano em Cambridge. O terceiro período viu Newton como um funcionário do governo bem pago em Londres, com muito pouco interesse pela matemática.

Newton imortalizou algumas frases como:

- ”Se vi mais longe foi por estar de pé sobre ombros de gigantes.”
- ”O que sabemos é uma gota, o que ignoramos é um oceano.”
- “Eu consigo calcular o movimento dos corpos celestiais, mas não a loucura das pessoas.”
- ”Nenhuma grande descoberta foi feita jamais sem um palpite ousado.”

Em 20 de Março de 1727, durante o sono, Newton veio a falecer em Londres aos oitenta e cinco anos. Seu funeral foi grandioso e o secretário da academia pronunciou o elogio fúnebre oficial. Seis nobres membros do Parlamento inglês carregaram seu ataúde, até a Abadia de Westminster, onde repousa até hoje seus restos mortais. Em sua homenagem foi erguida em Cambridge, uma estátua com os dizeres: ”Ultrapassou os humanos pelo poder de seu pensamento”.

B.2 Gottfried W. Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz nasceu em 1 de julho de 1646, em Leipzig. Durante sua vida estudou filosofia, matemática, teologia e diplomacia. Foi bibliotecário alemão e também demonstrou genialidade nos campos da lei, religião, política, história, literatura, lógica e metafísica.

Leibniz perdeu o pai, um professor de filosofia moral em Leipzig, aos seis anos e foi criado pela mãe, que lhe transmitiu rígidos valores religiosos. Entrou na escola Nicolau com apenas sete anos. Estudou latim e grego e adquiriu conhecimento de forma autodidata. Aos 14 anos, entrou precocemente na Universidade de Leipzig e graduou-se em filosofia com a tese "Meditação sobre o princípio da individuação", onde apresentou o conceito de "mônadas", unidades primárias o universo. Em 1663, recebeu o grau de mestre em filosofia. Em 1666, publicou sua tese "Dissertação sobre a arte combinatória". Na Universidade de Altdorf, recebeu o doutorado em Direito.

Foi Leibniz o grande responsável por desenvolver, em 1705, o sistema de numeração binário moderno tão importante para o estabelecimento dos programas de computadores utilizado nos dias de hoje. Também contribuiu de forma generosa para o desenvolvimento do cálculo moderno, em particular o desenvolvimento da integral e da regra do produto.

Em uma de suas obras ele afirmou que "todo raciocínio, toda descoberta, verbal ou não, é redutível a uma combinação ordenada de elementos tais como números, palavras, sons ou cores". Este modelo é o precursor teórico de computação moderna.

Leibniz frequentou a universidade dos 14 aos 21 anos, inicialmente na Universidade de Leipzig (1661-1666) e, depois, na Universidade de Altdorf (1666-1667). Nos anos seguintes, dedicou-se à jurisprudência e à filosofia. Aparentemente, teve seu doutorado em Direito recusado em Leipzig em virtude de sua pouca idade, embora outra versão afirme que o doutorado lhe tenha sido negado pelo Deão da faculdade sob influência de sua esposa, a qual demonstrava certa hostilidade por Leibniz. Finalmente em 1667 ele obteve o título de doutorado em Altdorf.

Concebeu, em 1673, e construiu, em 1694, uma máquina de calcular que efetuava operações básicas e se destacava por possuir três elementos significativos: a porção aditiva não se diferenciava da criada por Pascal, no entanto, um componente móvel e uma manivela manual que funcionavam em conjunto para acelerar as adições repetitivas envolvidas nas operações de multiplicação e divisão, não estavam presentes na pascalina. Foi a primeira calculadora capaz de executar todas as operações aritméticas por meios puramente mecânicos. Tal invenção ainda pode ser vista no Museu Kastner em Hannôver, a cidade onde Leibniz passou os seus últimos anos. Leibniz foi além de Pascal e abriu as portas ao desenvolvimento do cálculo mecânico.

Ainda nos dias atuais há discussões a respeito dos escritos de Leibniz, não apenas por estes anteciparem descobertas que, em algumas vezes, nem foram reconhecidas, mas também por alavancar a ciência moderna. Ele contribuiu grandemente para o avanço da estática, assim como da dinâmica, embora muitas vezes Descartes e Newton discordassem de suas afirmações. Em se tratando de dinâmica, ele desenvolveu uma nova teoria do movimento baseada na energia cinética e potencial, tratando o espaço como sendo relativo, ao passo que para Newton o espaço era algo absoluto. Leibniz escreveu, em 1695, um admirável texto intitulado Specimen Dynamicum e com isso ele deixou claro que possuía um pensamento altamente maduro no que diz respeito à Física.

Leibniz publicou outras obras importantes como "*Novos Ensaios sobre o Entendimento Humano*" redigidos em 1714 e publicados em 1765 e "*Monadologia e Princípios da Natureza Humana*" (1714).

Leibniz é autor de algumas obras dentre as quais estão:

- De Arte Combinatória, 1666;
- Novos Ensaios Sobre o Entendimento Humano, 1704;
- Ensaios de Teodiceia, 1710;
- Novo Sistema da Natureza e da Comunicação das Substâncias;
- A Monadologia 1714;
- Princípios da Natureza e da Graça;

- Discurso da Metafísica;
- Meditações sobre o Conhecimento;
- A Verdade e as Ideias;
- Da Reforma da Filosofia Primeira;
- Da Origem Radical das Coisas.

Pertence a Leibniz a autoria das frases a seguir:

- "Amar, é encontrar a própria felicidade na felicidade alheia."
- "Há dois labirintos do espírito humano: um respeita à composição do contínuo, o outro à natureza da liberdade; e ambos têm origem no mesmo infinito."
- "Entendo por razão, não a faculdade de raciocinar, que pode ser bem ou mal utilizada, mas o encadeamento das verdades que só pode produzir verdades, e uma verdade não pode ser contrária a outra."
- "A educação pode tudo: ela faz dançar os ursos."
- "No reino do espírito, busque clareza; no mundo material, busque utilidade."

Em junho de 1716 adoeceu e próximo de sua morte já não possuía o mesmo prestígio de antes. Ficou de cama esquecido até o dia em que veio a óbito, 14 de novembro de 1716, em Hannover, Alemanha. A única testemunha de seu enterro fora seu secretário.