UNIVERSIDADE ESTADUAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

GILMARA GOMES MEIRA

COMUNICAÇÃO E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS UTILIZANDO O MODELO VAN HIELE PARA A EXPLORAÇÃO GEOMÉTRICA EM SALA DE AULA

Campina Grande – PB
2015

GILMARA GOMES MEIRA

COMUNICAÇÃO E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS UTILIZANDO O MODELO VAN HIELE PARA A EXPLORAÇÃO GEOMÉTRICA EM SALA DE AULA

Dissertação de Mestrado apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, do Centro e Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba.

Área de Concentração: Educação Matemática

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Kátia Maria de Medeiros

Campina Grande-PB
2015

M514c Meira, Gilmara Gomes.

Comunicação e resolução de problemas utilizando o modelo Van Hiele para a exploração geométrica em sala de aula [manuscrito] / Gilmara Gomes Meira. - 2015.

164 p. : il. color.

Digitado.

Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, 2015.

"Orientação: Profa. Dra. Kátia Maria de Medeiros, Departamento de Matemática".

1. Ensino de geometria. 2. Aprendizagem de geometria. 3. Resolução de problemas geométricos. 4. Modelo Van Hiele. I. Título.

21. ed. CDD 516

GILMARA GOMES MEIRA

COMUNICAÇÃO E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS UTILIZANDO O MODELO VAN HIELE PARA A EXPLORAÇÃO GEOMÉTRICA EM SALA DE AULA

Dissertação de Mestrado apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, do Centro e Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual da Paraíba.

Área de Concentração: Educação Matemática

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Kátia Maria de Medeiros

Banca Examinadora

Kátia Maria de Medeiros
Prof.ª Dr.ª Kátia Maria de Medeiros (UEPB)

Lilian Nasser
Prof.ª Dr.ª Lilian Nasser (UFRJ)

Rogéria Gaudêncio do Rêgo
Prof.ª Dr.ª Rogéria Gaudêncio do Rego (UFPB)

"A realização humana é possível em todas as etapas da vida. O importante é saber viver bem o específico de cada tempo, pois esta é uma forma interessante de construir os alicerces da próxima etapa."
(Pe. Fábio de Melo)

Este trabalho é dedicado àqueles que acreditaram em mim e sempre me estimularam a ir além, em buscar novos horizontes e novas conquistas no trilhar para vitória profissional.

AGRADECIMENTOS

Mesmo em meio à estima profissional e desejos de ir além, sabia que não seria fácil a caminhada em busca dessa nova conquista acadêmica. Foram três anos de ações, oportunidades e conhecimentos que me rendeu uma gratidão abissal. Assim, seria inviável caminhar sozinha e, por tudo isso, não poderia deixar de agradecer àqueles que estiveram ao meu lado. Minha gratidão, sobretudo, à força soberana que me trouxe até aqui, e sempre tenho comigo, advinda daquele que é Dono de toda sabedoria e digno de todas as conquistas – o nosso DEUS de bondade. Agradeço a ELE que me sustenta e orientada a caminhar diariamente no percurso da vida.

Sou grata a todos aqueles que me deram a mão ou me auxiliaram nesse caminhar. Meus pais, meus irmãos e toda minha família que sempre está ao meu lado me apoiando e ajudando. Agradeço de forma especial à minha tia Salete, por estar sempre ao meu lado, me ajudando e dando forças em tudo, inclusive nos maiores desafios. Agradeço à minha prima Tayse que tão generosamente me acolheu em sua residência, em Campina Grande, quando mais precisei, e muito me ajudou, viabilizando, com isso, meus estudos. Pelo mesmo motivo, de igual forma, agradeço à minha tia Mariete.

Minha gratidão ao Professor Joelson Pimentel por ter sido o grande incentivador dessa conquista, ainda quando estava na graduação, incentivando, apoiando e acreditando no meu desenvolvimento acadêmico. Também agradeço ao Professor José Luiz, com quem muito aprendi, por ter dado amplo apoio, desde o processo de seleção. Agradeço aos Professores do MECM que acreditaram em mim e muito significativamente contribuíram para esse título, em especial, à minha Ilustre e competente orientadora Kátia Medeiros, pelos ensinamentos, compreensão e responsabilidade, que sempre apresentou no decorrer das orientações para realização dessa pesquisa, sobretudo agradeço por ter confiado em mim, enquanto orientanda e por todos os trabalhos que desenvolvemos juntas gerando grandes oportunidades e aprendizagem. Muito Obrigada por cada ensinamento! Também sou grata às ilustres Professoras, membros da banca de avaliação, que tão favoravelmente apresentaram grandes contribuições para esta pesquisa.

Agradeço à Universidade Estadual da Paraíba, responsável por minha formação acadêmica, por todo incentivo e preparo. De igual forma, agradeço também à CAPES, pela bolsa concedida no âmbito do Projeto *Investigando a Formulação e a Resolução de Problemas Matemáticos na Sala de Aula: Explorando Conexões entre Escola e Universidade,* desenvolvido a partir do Programa Observatório de Educação, que nos proporcionou apoio financeiro para viagens a eventos nacionais e internacionais, contribuindo, significativamente, para nosso crescimento profissional e pessoal.

Não posso deixar de agradecer à escola, à Professora e alunos que contribuíram com essa pesquisa, pois sem eles não teria o mesmo sentido. Muito Obrigada a todos!

Agradeço aos colegas de trabalho do IFPB/CG que sempre estiveram ao meu lado me apoiando através de pequenos gestos, que para mim foram grandiosos. Não posso esquecer os colegas queridos do MECM que conquistaram meu carinho, admiração e reconhecimento com suas atitudes, gestos e palavras. Minha gratidão a todos, em especial, Mirian, Alex e Doriedson – Amigos queridos. Sem esquecer as três "companheiras de guerra" - Mirian, Janaina e Samilly, sempre dispostas a batalhar juntas.

Enfim, expresso toda minha gratidão às pessoas que DEUS me deu a graça de conhecer. Os nomes estão gravados na mente e transferidos ao coração, pelo muito que me acrescentou enquanto pessoa e profissional, sobretudo Dorielson Maciel. Jamais esquecerei e diante disto expresso toda minha gratidão, apreço e consideração inigualável! E... de tudo, ficaram muitas lições!!!

"Aprendi com o Mestre dos Mestres que a arte de pensar é o tesouro dos sábios. Aprendi um pouco mais a pensar antes de reagir, a expor e não impor minhas ideias e a entender que cada pessoa é um ser único no palco da existência.

Aprendi com o Mestre da Sensibilidade a navegar nas águas da emoção, a não ter medo da dor, a procurar um profundo significado para a vida e a perceber que nas coisas mais simples e anônimas se escondem os segredos da felicidade.

Aprendi com o Mestre da Vida que viver é uma experiência única, belíssima, mas brevíssima. E, por saber que a vida passa tão rápido, sinto necessidade de compreender minhas limitações e aproveitar cada lágrima, sorriso, sucesso e fracasso como uma oportunidade preciosa de crescer.

*Aprendi com o Mestre do Amor que a vida sem amor é um livro sem letras, uma primavera sem flores, uma pintura sem cores. Aprendi que o amor acalma a emoção, tranquiliza o pensamento, incendeia a motivação, rompe obstáculos intransponíveis e faz da vida uma agradável aventura, sem tédio, angústia ou solidão. Por tudo isso Jesus Cristo se tornou, para mim, um Mestre Inesquecível." (**Augusto Cury**)*

RESUMO

MEIRA, G. G. Comunicação e Resolução de Problemas Utilizando o Modelo van Hiele para a Exploração Geométrica em Sala de Aula. 2015. 164f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual da Paraíba – UEPB, Campina Grande, 2015.

A presente pesquisa analisa limites e possibilidades a partir da resolução de problemas que levam em consideração o Nível de compreensão segundo o Modelo van Hiele. Dessa forma, queremos saber como os alunos se comunicam quando desenvolvem atividades com resolução de problemas geométricos, na perspectiva do referido Modelo. O público alvo para desenvolvimento da pesquisa foi uma turma do 3º Ano do Ensino Médio de uma escola pública estadual da cidade de Cabaceiras - PB. O quadro teórico enfatiza a Resolução de Problemas, a relevância do ensino e aprendizagem da Geometria, o Modelo van Hiele, o uso de Materiais Manipuláveis e aspectos da interação social tendo em vista, particularmente, a comunicação oral e escrita dos alunos. Essa pesquisa desenvolvida em conjunto com a proposta do Programa Observatório de Educação/CAPES, do qual fazemos parte, aconteceu em três etapas - com a turma toda trabalhando em Díades; com a turma toda trabalhando individualmente e; com as Díades selecionadas a partir do seu desenvolvimento nos testes van Hiele. Esse estudo é de natureza qualitativa, aconteceu a partir do desenvolvimento da turma em atividades selecionadas que, posteriormente, resultou em três estudos de caso nos quais se analisa o respectivo desenvolvimento na resolução dos problemas subsidiados com o uso do Tangram, bem como o modo como as Díades interagem e se comunicam. Os dados foram recolhidos por meio da observação participante, áudio-gravações e registros da comunicação oral e escrita das Díades. Algumas das principais referências que utilizamos como sustentação teórica foram Boavida et al (2008), Nasser e Sant'anna (2010), Rêgo, Rêgo e Vieira (2012), Van de Walle (2009), Fonseca (2009), Carvalho (2009), entre outros. Os resultados analisados apontam para a fragilidade que há no conhecimento de Geometria por parte dos alunos que concluem o Ensino Médio, refletindo em limitações ao resolver problemas. Além disso, revela as potencialidades que há no trabalho desenvolvido a partir da interação social, suscitando em uma comunicação progressiva que leva os alunos a refletirem por meio do desenvolvimento específico na resolução dos problemas.

Palavras-chave: Comunicação. Resolução de Problemas Geométricos. Modelo van Hiele. Ensino Médio. Observatório da Educação/CAPES.

ABSTRACT

MEIRA, G. G. Communication and Problems Solving Using van Hiele Model for Geometric Exploration in Classroom. 2015. 164f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual da Paraíba – UEPB, Campina Grande, 2015.

This research analyzes limits and possibilities from problems solving that consider the level of comprehension of van Hiele Model. Therefore, we want to know how students communicate with each other when they develop activities with geometric problems solving in the referred Model perspective. The target audience for the research development was a third year class of high school from a public school in Cabaceiras city – PB. The theoretical framework emphasizes the Problem Solving, the Geometric teaching and learning relevance, van Hiele Model, the use of manipulable materials and the aspects of social interaction taking into consideration particularly the written and oral students' communication. This research, developed together with the Program Observatório de Educação/CAPES proposal, from which we are part of, happenned in three steps – with all the class working on Duo; with all the class working individually and; with the Duo selected from its development on van Hiele tests. Such study is of qualitative nature, it happened from the class development on selected activities that after it resulted in three case studies where it is analyzed the respective development on problems solving subsidized by the use of Tangram and the manner in which the double interact and communicate. The data were collected by participant observation, audio-recordings and recordings of oral and written communication from the Duo. Some of the main references used as theoretical support were Boavida et al (2008), Nasser and Sant'Anna (2010), Rego, Rego and Vieira (2012), Van de Walle (2009), Fonseca (2009), Carvalho (2009), among others. The results indicate there is fragility in Geometry knowledge from the students who finish High School, reflecting in limitations to solve problems. Also it reveals the potentialities that exist in the work developed from social interaction, raising a progressive communication that leads the students on reflecting by specific development in problems solving.

Keywords: Communication. Geometric Problems Solving. Van Hiele Model. High School. Observatório da Educação/CAPES.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Vivendo a experiência de atuar em sala de aula durante a formação inicial, foi possível perceber que apenas as aulas tradicionais não mais dão conta das demandas formativas. Observando os alunos percebemos que, em maior parte, tratam a disciplina não com sentimento de uma ciência importante e indispensável no seu cotidiano, mas como algo frustrante que só serve para lhes trazer problemas na escola. Mediante práticas e leituras acerca do ensino e aprendizagem de Matemática, sobretudo de Geometria que, em muitas realidades, encontra-se numa situação preocupante em relação às concepções e, por vezes, às práticas, organizamos nossa proposta de pesquisa. Sabemos, no entanto, que o problema em relação à concepção sobre a Matemática não é de origem atual, na verdade trata-se de algo histórico e social.

Grande parte da sociedade vê a Matemática com um sentimento de medo, enxergando-a como fonte de problemas quando, na verdade, trata-se do uma ciência rica em padrões que geram, muitas vezes, soluções. Essa concepção agravou-se de forma a hoje estarmos permeados numa realidade delicada, pois observamos a desmotivação em relação à aprendizagem e a dificuldade em trabalhar quando, na maior parte das vezes, os alunos abominam a disciplina, substituindo a criticidade e reflexões por reclamações e sentimentos de incapacidade.

Nossa principal hipótese é de que a partir de um trabalho que envolva Geometria por meio de materiais manipuláveis e resoluções de problemas, os alunos podem desenvolver a visualização e a habilidade de resolver problemas por meio da interação e comunicação. O público alvo no desenvolvimento da nossa pesquisa foram alunos do 3° Ano do Ensino Médio de uma escola pública estadual localizada no cariri paraibano.

Diante de algumas experiências em que participamos – a exemplos de Programas de Extensão e Estágio Supervisionado, temos notado que muitas dificuldades dos alunos são manifestadas, sobretudo, em relação a conceitos de Geometria. Desde então, passamos a refletir sobre como melhorar a qualidade desse ensino. Outro fator que também nos fez refletir para seguir trabalhos nessa direção e dar continuidade a estudos dessa natureza, foi a experiência que gerou o Trabalho de Conclusão de Curso (MEIRA, 2011). Nele, ao trabalharmos com elementos que fogem dos padrões convencionais, existe a possibilidade de despertar um maior grau de incentivo nos alunos que, na maioria das vezes, carecem de uma dinâmica estimuladora frente aos “desafios” que lhes são postos em sala de aula.

Muitas vezes, os alunos, mesmo em níveis de escolaridade mais elevados apresentam sérias fragilidades nos conceitos da Geometria, não conseguindo identificar pelo menos a nomenclatura ou propriedades dos elementos considerados básicos na Geometria Plana. Curiosamente, uma das motivações para o desenvolvimento do Modelo de aprendizagem, chamado Modelo van Hiele foram aspectos desse tipo.

É importante levar em consideração a forma como os alunos reagem quando trabalhamos de um modo diferenciado ao que constantemente estão adaptados, pois a disciplina, na opinião da maioria, é algo extremamente complexo e pouco motivante para ser estudada. Por isso, o nosso dever, enquanto educadores matemáticos, é, tentar suprir algumas das necessidades que são apresentadas, bem como buscar amenizar as angústias pela disciplina, que é fruto, certamente, de um estudo insatisfatório.

Frente à situação em que se encontra essa aprendizagem, é de uma necessidade suprema a busca de métodos que, possivelmente, venham desenvolver mais o empenho dos alunos para resultados mais significativos. Para tal, precisamos atribuir um novo significado frente ao que é desenvolvido. Conforme dizem Rabelo e Gomes (2012) o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) publicou alguns princípios muito importantes para a Matemática escolar do século XXI, nos quais a ênfase maior é em relação ao currículo, o qual deve ser efetivo e coerente, permitindo que as ideias matemáticas sejam interligadas umas com as outras. Com isso, os alunos poderão adiantar seus estudos e poderão vir a dar respostas a situações diversas em seu dia-a-dia. Assim, os autores argumentam que o foco deve ser experiências a partir das quais os alunos possam ser capazes de construir o conhecimento com maior compreensão.

Portanto, no processo de ensino é crucial ir de encontro aos interesses dos alunos e não apresentar respostas prontas, mas mostrar-lhes caminhos para refletirem acerca de possíveis respostas e, dessa forma, poderão tornar-se seres mais autônomos. A melhor forma, talvez, seja fazendo questionamentos, pois, assim, os alunos podem adaptar-se de forma mais reflexiva frente ao que está sendo desenvolvido.

Ao tentar solucionar problemas, os alunos precisam criar estratégias, mobilizando conhecimentos adquiridos e a criticidade, pois é um momento em que raciocinam, dialogam, argumentam, mostram sua opinião e/ou entusiasmo frente ao que está sendo desenvolvido, sobretudo, quando há a interação social. Dessa forma, quando se depara com um ensino exploratório, possivelmente desenvolverá competências matemáticas. Acreditando na Geometria como parte indispensável do estudo da

Matemática, a qual oportuniza o desenvolvimento de pesquisas, favorece o entendimento de conceitos e prioriza outros caminhos de interpretação, é que a consideramos como tópico primordial para o desenvolvimento de nossa pesquisa.

Os desafios que a educação brasileira enfrenta, atualmente, exigem dos pesquisadores e educadores a busca de metodologias que possam despertar o interesse do aluno no processo de aprendizagem. Para tanto, é importante que o ensino esteja interligado com as necessidades do aluno. Nesse sentido, é fundamental utilizar tarefas que possam contribuir para o desenvolvimento, criatividade e reflexão, levando em consideração o nível de compreensão do aluno. Em nosso estudo, focamos no nível de de desenvolvimento do pensamento geométrico, de acordo com o Modelo van Hiele.

Com essa concepção, nosso estudo enfatiza a comunicação e resolução de problemas, com apoio de materiais concretos manipuláveis, utilizando o Modelo van Hiele para exploração da Geometria em sala de aula. Para tal, formulamos a seguinte indagação: *Como os alunos se comunicam ao desenvolverem atividades com resolução de problemas geométricos, segundo o Modelo van Hiele?* Com base nesse questionamento, elencamos alguns dos principais objetivos, visando, de modo geral, analisar através da comunicação entre os alunos, as possibilidades de resolução de problemas que levam em consideração o Nível de compreensão do Modelo van Hiele, com alunos do 3º Ano do Ensino Médio.

Com este intuito, elencamos os seguintes objetivos específicos:

- Analisar a concepção da professora regente da disciplina em relação ao ensino e aprendizagem da Geometria e possíveis procedimentos didáticos utilizados em suas aulas;
- Identificar o Nível, segundo o Modelo van Hiele, em que a turma se encontra com relação à Geometria com base em seu desenvolvimento e comunicação nas tarefas propostas;
- Analisar o desenvolvimento nos testes de van Hiele por cada aluno;
- Propor atividades com a resolução de problemas geométricos utilizando o Tangram, para a verificação do desenvolvimento de estratégias das Díades;
- Avaliar a forma como as Díades interagem e se comunicam na resolução dos problemas, de acordo com seu Nível de pensamento geométrico.

No Capítulo 1, nossa atenção é voltada para a resolução de problemas, apresentando um aporte teórico sobre essa rica metodologia. No Capítulo 2 enfatizamos a relevância crucial que há no ensino e aprendizagem da Geometria, vista como uma ciência rica em conceitos e potencialmente explorada em diferentes metodologias.Nesse Capítulo, também damos ênfase ao Modelo van Hiele. O Capítulo 3 apresenta argumentos teóricos relacionados à interação social, comunicação matemática no decorrer das tarefas e uso de materiais manipuláveis nas aulas de Matemática. No Capítulo 4, apresentamos a metodologia preponderante do nosso trabalho. Nesse capítulo, mostramos os caminhos trilhados para obtenção dos dados da nossa pesquisa, bem como apresentamos, previamente, as etapas da pesquisa empírica, os instrumentos e as categorias de análise dos dados bem como os problemas que formulamos. O Capítulo 5 apresenta os primeiros resultados obtidos a partir da pesquisa empírica, enquanto que, nos Capítulo 6, 7 e 8 trazemos os resultados em três estudos de caso das Díades identificadas pelos pseudônimos: Ana e Cecília; Vitória e Alice; Júlia e Amanda. Finalizamos trazendo algumas conclusões a partir dos dados coletados e análises realizadas.

1. A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS NA SALA DE AULA

A resolução de problemas é de uma riqueza peculiar quando trabalhada de forma coerente em suas diversas instâncias. Essa afirmação pode ser mais bem compreendida quando observamos, no decorrer desse capítulo, as muitas teorias que apontam a necessidade de sua inserção em sala de aula, assim como as possíveis vantagens e particularidades.

1.1 Resolução de Problemas: características e possibilidades

Ao tratar sobre a resolução de problemas, sabemos que embora seja de um valor supremo para o trabalho com conteúdos matemáticos e desenvolvimento intelectual, muitos são os desafios para inseri-los nas aulas de Matemática, em consequência de muitos fatores. Entre estes se encontra o baixo nível de conhecimento por grande parte dos alunos da escola pública brasileira, particularmente as da rede estadual e municipal. Na maior parte da vida escolar desses alunos a atividade mais frequente ou a única foi, e possivelmente continua sendo, a resolução de exercícios, o que é insuficiente mediante as cobranças sociais atuais.

Na resolução de problemas, é muito importante a compreensão de texto, isto é, saber interpretar e considerar possíveis estratégias para resolução, o que demanda um leque de conhecimentos prévios. Conforme salientam os Princípios e Normas para Matemática Escolar do NCTM (2008, p. 394), "*a predisposição para a resolução de problemas inclui confiança e vontade de empreender novas e difíceis tarefas*". Esse fator é justificado pela necessidade de inovação, tendo em vista que, na maior parte das vezes, o ritmo e metodologia em algumas aulas de Matemática têm causado acomodação e rejeição com relação ao estudo da disciplina.

A ideia de que o professor explica o conteúdo e o aluno exercita a aplicação do mesmo, data desde o século XIX. D'Ambrósio (2008) salienta que, embora haja tantos fundamentos para o legítimo uso da resolução de problemas, essa ideia equivocada permeia há mais de 150 anos o ensino da Matemática. Sabemos que a influência de George Pólya[1] foi fundamental para o desenvolvimento da resolução de problemas na

[1] Geoge Pólya (1887 - 1985), grande Matemático do século XX, se destacou na Resolução de Problemas matemáticos. Um dos seus principais objetivos, ao desenvolver esse trabalho, é enfatizar como a maioria das pessoas resolvem problemas de Matemática e descrever como é possível ensinar *a arte de resolver problemas.*

sala de aula, pois sua proposta era de um ensino que criasse oportunidades para que os alunos refletissem, pensassem matematicamente e construíssem conhecimento.

> Pólya estudava o trabalho de investigação dos matemáticos e propunha um ensino que criasse oportunidades para que os alunos se comportassem como matemáticos, investigando problemas abertos e desafiantes para todos. Esse aspecto da proposta pedagógica de Pólya se perdeu na tentativa de inseri-lo em livros texto. (D'AMBROSIO, 2008, p. 1).

Era também uma recomendação de Pólya e Dewey, que os professores trabalhassem a resolução de problemas ao invés de manter um ritmo curricular, cheio de procedimentos e conceitos, o que na realidade pouco ou insuficientemente se concretiza. Na verdade, a resolução de problemas é possível desde as séries iniciais, quando surgem na literatura infantil situações-problema de investigação para as crianças. Dessa forma, em qualquer nível é possível que o professor proponha atividades de resolução de problemas para envolver as capacidades cognitivas dos alunos. De acordo com D'Ambrosio (2008), há pesquisas que apontam que alunos que resolvem problemas, conseguem ser bem sucedidos em avaliações de nível Nacional e Internacional.

Como em qualquer atividade, na resolução de problemas, o planejamento é fundamental, pois no envolvimento da proposta os alunos podem fazer conjecturas que levem a novos problemas, por isso, é necessário que o docente esteja bem preparado. Com base nos Princípios e Normas para Matemática Escolar do NCTM (2008), para que aconteça a resolução de problemas com sucesso, é indispensável o conhecimento de conteúdos matemáticos, de estratégias de resolução de problemas, a capacidade de auto regulação, e uma predisposição para a colocação e resolução de problema. Nesse sentido, os professores são muito exigidos, por serem os responsáveis em desenvolver meios que influenciem no desenvolvimento do conhecimento e estratégias matemáticas, assim podendo praticar uma variedade de heurísticas.

Pólya (1995), como sendo o grande expoente no campo da resolução de problemas, descreveu um plano, em quatro fases, para facilitar na resolução do problema. São eles: compreender o problema; delinear um plano; desenvolver esse plano e, por fim, avaliar os resultados. De acordo com Medeiros (2001), um problema para receber essa denominação precisa, de fato, ser desafiador para o aluno, levando-o a pensar, argumentar, buscar caminhos de solução o que, com certeza, não é uma tarefa imediata.

Na Resolução de Problemas, as regras do contrato didático[2], sem dúvida, influenciam nas atitudes dos alunos, que querem resolver tudo de forma rápida através de um procedimento explícito, importando, muitas vezes, somente encontrar uma resposta. Segundo Medeiros (2001), os exercícios, considerados problemas fechados, são muito tradicionais nas aulas de Matemática sendo inserido no processo de ensino e aprendizagem de forma que limita a criatividade dos alunos, pelo modo como são apresentados, ou seja, apresentam um contexto muito limitado, palavras que dizem de imediato a operação a ser utilizada e quase sempre são propostos a partir de um conteúdo exposto. Schoenfeld (1996) considera como bons problemas aqueles que são relativamente acessíveis e que possam ser resolvidos, ou pelo menos abordados, por vários caminhos. Assim, ele argumenta que os problemas e as suas soluções devem servir como introduções a importantes ideias matemáticas e de forma particular, os problemas abertos, é uma maneira de fazer matemática.

Devido à grande atenção que hoje se dá a metodologia de resolução de problemas, em virtude do seu rico potencial para o ensino e aprendizagem, muitas pesquisas têm avançado nessa área e mostrado a eficácia de explorar atividades com resolução de problemas em sala de aula. Um exemplo disto é o trabalho desenvolvido em um grupo da UNESP – Rio Claro/SP sob a coordenação da Profª Drª Lourdes de la Rosa Onuchic, onde o trabalho acontece segundo as orientações oficiais e é denominado por Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas.

Ainda de acordo com Allevato (2008), a expressão composta pelas palavras ensino-aprendizagem-avaliação, tem o objetivo de expressar uma concepção em que ensino e aprendizagem devem ocorrer de forma simultânea no processo de construção do conhecimento, tendo o professor por guia e os alunos por co-construtores desse conhecimento. Nessa perspectiva, o ensino aprendizagem de um determinado tópico matemático se inicia com um problema que expressa aspectos chave desse tópico e, assim, técnicas matemáticas devem ser desenvolvidas na busca de respostas razoáveis ao problema proposto, enquanto que a avaliação em relação ao desenvolvimento dos alunos é feita de forma contínua (ALLEVATO, 2008).

---

[2] Refere-se ao estudo das regras e condições que condicionam o funcionamento da educação escolar, seja no contexto de uma sala de aula, no espaço intermediário da instituição escolar ou mesmo na dimensão mais ampla do sistema educativo (BROUSSEAU (1986) *apud* PAIS, 2011). Nas palavras de Brousseau (1980) citado por D’AMORE (2007) contrato didático pode ainda ser entendido como conjunto de hábitos do professor esperados pelos alunos e os comportamentos do aluno esperados pelo professor.

De acordo com Matos e Serrazina (1996, p. 167) "*os alunos têm ideias preconcebidas sobre muitos fenômenos matemáticos e estão mais aptos a aprender quando são capazes de encaixar as novas ideias nas suas estruturas já existentes*." A resolução de problemas remete justamente a este fato, uma vez que o aluno se vê diante de uma situação até então desconhecida, mas que exige uma base de conhecimentos prévios que serão somados às novas estruturas intelectuais desenvolvidas. Nesse sentido, a base de conhecimentos prévios dará embasamento às novas estruturas cognitivas.

1.2. Resolução de Problemas: Motivação para aprendizagem

Foi a partir dos anos de 1990 que a indicação da resolução de problemas começou a ganhar força nas aulas de Matemática, viabilizada pela proposta curricular que também envolvia outras propostas como a Modelagem e o trabalho com Investigações. Com isso, foi possível influenciar na criação de uma dinâmica inovadora nas aulas de Matemática. Na metodologia de resolução de problemas os alunos não se envolvem apenas em um processo de regras e procedimentos, mas são inseridos em um meio que provoca reflexão, desenvolvimento autônomo e interação, sendo, portanto, uma forma de os alunos apresentarem características do seu pensar matemático.

De acordo com D'Ambrósio (2008), pesquisas com o projeto Quasar nos EUA, têm apontado que alunos que resolvem problemas conseguem melhores resultados em avaliações de porte nacional e até mesmo internacional. Para tal, é importante propor problemas que levem os alunos a pensarem e por em prática o pensar matemático, despertando inclusive a criatividade. Entretanto, é necessário um cuidado especial por parte do professor, que deve ter amplo conhecimento sobre como trabalhar a resolução de problemas, do contrário, toda a essência da proposta pode ser invalidada e o que é posto como problema pode tornar-se exercício, com pouco significado para os alunos.

Quando o ensino é centrado apenas em sua característica tradicional, as atitudes dos alunos são apresentadas de forma passiva perante a aprendizagem. De acordo com Medeiros e Santos (2007), o ensino tradicional inibe o espírito criativo do aluno. Para reverter isso, é necessário que haja uma reflexão mais crítica em relação ao modelo que está sendo desenvolvido em sala de aula. Dessa forma, possivelmente ocorrerão mudanças nas concepções e/ou atitudes tanto do professor, quanto dos alunos, que se sentirão autores de sua história.

Sabemos que os exercícios ou problemas fechados exigem um grau de criatividade irrelevante, pois levam o aluno a uma aplicação direta, pouco motivante, não despertando o suficiente, para um pensamento mais criterioso. Isto significa que o aluno nessa situação, não passa de um mero reprodutor de procedimentos, o que pouco ou nada desperta para criatividade em Matemática.

Problemas mais elaborados, que envolvem a realidade do aluno, que o façam pensar mais criteriosamente, possivelmente despertam um maior interesse, o que, por sua vez, gera maior entusiasmo, despertando, com isso, a criatividade e, provavelmente, contribuindo para uma aprendizagem mais dinâmica e significativa. Gontijo (2006) ressalta que os problemas que motivam para criatividade são aqueles que levam os alunos a raciocinar.

> Os problemas, para que possam motivar o aluno e despertar sua criatividade, não podem se caracterizar como aplicação direta de algum algoritmo ou fórmula, mas devem envolver invenção e/ou criação de alguma estratégia particular de resolução, pois, essa competência [matemática] não se desenvolve quando propomos apenas exercícios de aplicação dos conceitos e técnicas matemáticas, pois, neste caso, o que está em ação é uma simples transposição analógica (GONTIJO, 2006, p. 6).

O fato de propor problemas pertinentes, segundo o interesse dos alunos, pode deixar o ensino de Matemática mais interessante, uma vez que o aluno sente-se mais envolvido e desafiado a resolver a situação proposta. Entretanto, isto não é uma tarefa simples, precisa de interesse e conhecimento por parte do professor para que ele possa motivar e orientar os alunos no desenvolvimento da tarefa. Assim, conhecer o aluno, bem como sua realidade, é muito positivo no sentido da elaboração das propostas a serem desenvolvidas em sala de aula, pois, para isso, o interesse do aluno é primordial.

Dessa forma, ao propor atividades de resolução de problemas em sala de aula, é essencial que a proposta seja bem formulada e que o professor tenha domínio do que está realizando. De acordo com Brown e Walter (2005) uma pequena mudança de frase ou contextualização na situação, pode extrair o brilho do problema. No processo de resolução de problemas, os autores dizem ser necessário não apenas conhecimento, mas também coragem para que todos possam encontrar desafios significativos. Assim, no processo de resolução de problemas em sala de aula de Matemática, se faz necessário acreditar na construção do conhecimento, no empenho dos alunos e na proposta de interação e partilha de saberes.

Um fator que merece atenção é o modo como o professor deve executar sua prática, pois o padrão rotineiro por si só, já não dá mais conta. Dessa forma, a reflexão sobre a prática pode permitir uma nova visão em relação à Matemática. De acordo com César, Oliveira e Teles (2004), o fato de o docente oferecer novas oportunidades aos alunos, bem como acreditar em seu potencial, pode resultar em avanços bem significativos.

> A conexão professores-alunos-conhecimento é, assim, reforçada por um novo contrato didático que valoriza a persistência na busca de novas soluções para a situação, bem como capacidade argumentativa e crítica dos estudantes e do raciocínio que eles usam. Assim, torna-se fundamental que o professor tenha uma melhor compreensão das potencialidades dos alunos, permitindo estas surgir através de tarefas com marcas sociais que promovam conflitos sócio-cognitivos mais rapidamente (CÉSAR, OLIVEIRA & TELES, 2004, p. 61).

Os alunos podem ser criativos, entretanto, necessita-se de um favorecimento de oportunidades para que essa criatividade seja despertada. D'Ambrósio (2008) nos diz que a modernidade em termos tecnológicos, favoreceu muito as oportunidades de aprendizagem, que vão muito além das que podem ser obtidas através do tradicional papel e lápis.

Portanto, a concepção de problemas é relativa em relação ao nível de escolaridade e de pensamento. De acordo com Dante (2010), o que é problema para alguns, pode não ser para outros e o mais importante é fazer o aluno pensar, desenvolver-se e adaptar-se a enfrentar situações novas, buscando sempre caminhos de interpretação e ação. As Orientações Curriculares Nacionais, por exemplo, argumentam que ao término do Ensino Médio se espera que alunos tenham conhecimento necessário para usar a Matemática a fim de compreender e resolver problemas diversos da área, além de problemas oriundos de outras áreas do conhecimento (BRASIL, 2006). Defendemos em nosso trabalho que a resolução de problemas é uma alternativa viável e possível de ser desenvolvida, tanto individualmente, quanto em pequenos grupos, importando, sobretudo, que os alunos trabalhem de forma ativa.

1.3 Estratégias de Resolução de Problemas

Em meio às cobranças sociais, torna-se cada vez mais necessária a habilidade de resolver problemas, sejam eles internos ou externos à Matemática. O uso de exercícios não é um meio eficiente de levar o aluno a compreendê-la, portanto, é extremamente importante propor situações em os alunos sejam instigados a pensar, desenvolver suas estratégias por meio de sua criatividade e refletir sobre a situação colocada, uma vez que, ao resolver problemas, o aluno depara-se com situações não rotineiras e que permite múltiplos caminhos de resolução.

De acordo com Boavida et al (2008), em meio à atual situação é necessário que sejam propostas experiências diversas que possam permitir o desenvolvimento das capacidades de resolução de problemas e, assim, construir o conhecimento matemático ao longo da vida.

> Embora a aprendizagem da Matemática e, consequentemente, o trabalho na sala de aula, envolva necessariamente exercícios e atividades de memória e treino, ficaria, no entanto, incompleto, em todos os níveis, sem a resolução de problemas. (BOAVIDA et al, 2008, p. 33).

De acordo com Van de Walle (2009), quando os alunos estão frente a uma situação de solucionar problemas, a ideia não é de aplicar Matemática, mas de aprender Matemática com base em seus métodos de resolução. E isso se dá quando os alunos deparam-se com tarefas bem escolhidas. O autor salienta que, enquanto os alunos estão procurando relações, analisando padrões, descobrindo quais métodos funcionam e quais não funcionam, justificando resultados ou avaliando e desafiando os raciocínios dos outros, eles estão necessária e favoravelmente se engajando em um pensamento reflexivo sobre as ideias envolvidas.

O autor afirma que os problemas que são voltados para a aprendizagem matemática também devem possuir as seguintes características:

- Deve começar por onde os alunos estão, ou seja, eles devem ter as ideias apropriadas para solucionar o problema de tal forma que ainda continue desafiante e interessante;
- O aspecto problemático ou envolvente do problema deve estar relacionado à Matemática que os alunos ainda vão aprender, o que significa dar maior significado à Matemática envolvida e os métodos;
- A aprendizagem matemática deve requerer justificativas e explicações para as respostas e os métodos, uma vez que as justificativas devem ser uma parte integrante de suas soluções.

Quando se propõe um problema, o aluno é desafiado a pensar e raciocinar matematicamente e a busca de soluções muitas vezes leva a outros problemas, o que proporciona a comunicação, a interação e a interligação de ideias viabilizadas pelo diálogo. Segundo Boavida et al (2008), a resolução de problemas incentiva a comunicação; fomenta o raciocínio e a justificação; permite estabelecer conexões entre vários temas matemáticos e até interligados a outras áreas curriculares; e apresenta a Matemática com um sentido mais útil na vida quotidiana. Dessa forma, o aluno passa por um processo no qual é levado a organizar suas ideias com base na situação proposta e no conhecimento prévio, seja este de natureza matemática ou prática. Contudo, é importante que os problemas sejam compreensíveis pelo aluno, apesar da solução não ser imediata; sejam estimulantes e interessantes; possam ter mais do que um processo de resolução e possam atingir vários temas (BOAVIDA et al, 2008).

Em relação ao plano organizado em quatro fases, descrito por Pólya (1995), os autores supracitados argumentam que nem sempre é simples distinguir a segunda da terceira fase, pois ao estabelecer o plano, este já começa a ser desenvolvido. Para tanto, consideram um modelo mais simplificado que apresenta as seguintes fases: ler e compreender o problema; fazer e executar um plano; e verificar a resposta. O processo de resolução de problemas não é algo específico de uma determinada fase ou ciclo, mas algo que deve fazer parte de toda aprendizagem matemática.

Em relação ao Ensino Básico, Boavida et al (2008) apresentam algumas estratégias que podem ser utilizadas, permitindo que o aluno saia de uma situação fechada para uma mais aberta sem se sentir perdido, que são: fazer uma simulação/dramatização; fazer tentativas; reduzir a um problema mais simples; descobrir um padrão; fazer uma lista organizada e; trabalhar do fim para o princípio. Os autores argumentam que, muitas vezes, na tentativa de combinar com estas fases recorre-se a diferentes representações na resolução, tais como, desenhos, tabelas, etc.

Segundo Van de Walle (2009), a resolução de problemas no ensino tem grande valor em sala de aula, pois concentra a atenção dos alunos sobre as ideias e em dar sentido às mesmas; desenvolve nos alunos a convicção de que eles são capazes de fazer Matemática e de que a Matemática faz sentido; possibilita um ponto de partida para uma ampla gama de alunos; desenvolve o potencial-matemático. No entanto, não há uma receita para se resolver um problema, um dos meios mais propícios é a persistência, motivação, organização e estruturação das ideias para apresentar de maneira clara o que se pensou a partir dos conhecimentos prévios.

2. A GEOMETRIA E O MODELO VAN HIELE NA APREENSÃO DE CONCEITOS GEOMÉTRICOS

Nesse capítulo, enfatizamos o ensino e aprendizagem de Geometria, sua importância e especificidades no desenvolvimento do estudo de Matemática, bem como possíveis desafios em seu ensino. Enfatizamos também o Modelo van Hiele, que apresenta relevância em relação ao Nível de abstração particular dos alunos e possibilita um caminho de orientação para o planejamento didático. Além disso, trataremos sobre artefatos nas aulas de Matemática e sobre a relevância da interação social atrelada às explicações dos alunos nas aulas de Matemática.

2.1. Contextualizando os caminhos da Geometria

Infelizmente a problemática em relação ao ensino e aprendizagem de Matemática já é algo que persiste há muito tempo em âmbito mundial e se agrava em países como o Brasil, no qual a educação ainda não foi plenamente democratizada. Os maus resultados em avaliações da disciplina, embora lamentáveis, já não são nenhuma novidade.

De acordo com Rabelo e Gomes (2012), nesse aspecto a situação é ainda mais drástica quando o assunto é Geometria, mais especificamente, nos itens de resolução de problemas. Um dos pontos em relação ao ensino e aprendizagem da Matemática, elencado no Relatório Nacional (DGIDC 2005), segundo abordagem dos autores, é o de que é necessário "*focalizar esse processo de ensino/aprendizagem na resolução de problemas não rotineiros que permitam utilizar todas as competências adquiridas* (RABELO & GOMES 2012, p. 7)." De acordo com esses autores, todos os anos letivos, escolas ou professores podem desenvolver o mesmo currículo de forma diferente, uma vez que o professor é que é o artífice daquilo que será posto em prática.

A Geometria, entretanto, representa uma parte muito importante do conhecimento matemático e foi uma ciência construída culturalmente desde os primórdios da civilização humana, tendo conexões e aplicações estreitas com a nossa realidade. Notamos que quando ela é trabalhada, normalmente é utilizada como pré-requisito para assuntos posteriores vistos na escola, porém a ênfase em trabalhá-la a partir da realidade dos estudantes é pouco explorada.

Essa realidade, por sua vez, pode ser modificada visto que nos dias atuais há uma viabilidade maior de explorar o conhecimento geométrico, seja por meio de materiais didáticos manipuláveis, recursos tecnológicos, entre outras metodologias.

A decadência do ensino de Geometria no Brasil ainda é fruto do Movimento da Matemática Moderna (MMM) nas décadas de 1960 e 1970. Com esse movimento, os elementos geométricos passaram a ser inseridos na linguagem da teoria dos conjuntos. De acordo com Rêgo, Rêgo e Vieira (2012), apenas ao término da década de 1970 começaram a surgir projetos baseados nas experiências dos alunos, nos quais estavam inseridos a exploração de figuras planas e espaciais com uma perspectiva mais dinâmica. Com isso, outras experiências começaram a ser impulsionadas, inclusive baseado no Modelo van Hiele e com uso de materiais manipuláveis em sala de aula, no intuito de resgatar o ensino de Geometria.

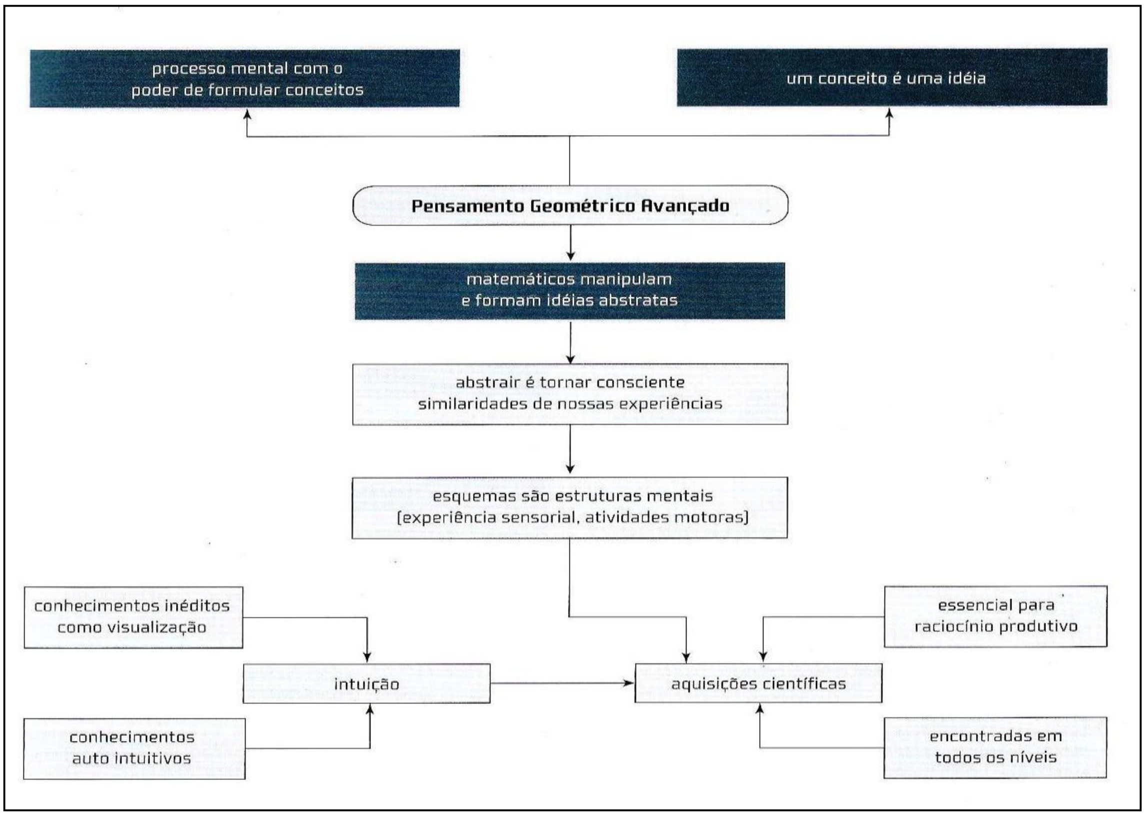
De acordo com Crowe e Thompson (1994), no século XIX, poucas pessoas chegaram à escola secundária ou mesmo tinham contato com a Geometria Euclidiana. Assim, a Geometria euclidiana foi sendo excluída do ensino regular, bem como dos cursos de formação de professores, trazendo consequências sofridas até hoje.

A forma como a Geometria vem sendo desenvolvida há muitos anos, tem gerado muitos impasses, por ser rotineiramente trabalhada de modo muito linear, convencional e, consequentemente, pouco significante. Mediante isso, os alunos apresentam sérias dificuldades de visualizar, reconhecer e demonstrar. Assim, ensino e aprendizagem têm acontecido de forma descompactada, estando os aprendizes, muitas vezes, a generalizar casos particulares. Conforme Dreyfus e Hadas (1994), os alunos devem ser levados a considerar diferentes casos para, posteriormente, decidir se a afirmação é verdadeira ou falsa. Os autores asseguram que o sucesso do aluno frente ao que estuda permite reforçar a motivação para aprender de forma mais significativa. Segundo Leivas (2012), é necessário que a aprendizagem de Geometria esteja centrada em um processo que envolva visualização e manuseio de materiais manipuláveis.

O desenvolvimento do pensamento geométrico precisa ser trabalhado desde as séries iniciais para que o aluno possa evoluir de forma mais efetiva. De acordo com Leivas (2012, p. 28) "*o conceito deve ser formado de forma reflexiva e consciente, produzindo sentimento de certeza a partir da auto evidência*". Com isso, percebemos a necessidade que há no desenvolvimento de atividades exploratórias e questionamentos que levem ao conceito, não descartando o posicionamento individual dos alunos.

A ideia central para modificar o quadro em que se encontra o trabalho com a Geometria não é criar uma sequência de algoritmos para que eles possam “ganhar” habilidades para resolver questões, e sim buscar meios nos quais possam se sentir mais motivados para a aprendizagem, dessa forma, criando o hábito de pesquisar, questionar, refletir e investigar mediante sua prática. Por essa razão, é muito importante valorizar o que o aluno é capaz de fazer e incentivá-los a progredir, sem interferir diretamente em suas realizações. Conforme podemos notar na figura 01, o pensamento geométrico envolve muitas particularidades relevantes e fundamentais para o desenvolvimento intelectual.

Figura 01 - Mapa conceitual de pensamento geométrico avançado.



Fonte: LEIVAS (2012, p. 29).

Dentre os objetivos educacionais se faz necessário a inserção de aspectos que favoreçam o processo criativo. A Matemática, por exemplo, é fruto de uma construção que requer, sobretudo, criatividade, estratégias e habilidades que surgem a partir de um processo. Gontijo (2007) diz que cabe à escola, de modo especial, a função de estimular o desenvolvimento da criatividade. O autor salienta ainda, que a ausência de uma visão crítica a partir de um planejamento estratégico pode comprometer uma das finalidades da Lei Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB, Lei nº 9394/96 (BRASIL, 1996)

Art. 2º), que estabelece para a educação brasileira, favorecer o pleno desenvolvido do educando seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho.

2.2 A relevância de se estudar Geometria

Os programas de ensino, desde as séries iniciais até o fim do Ensino Médio, voltados para a Geometria, deveriam capacitar todos os alunos a analisar características e propriedades de formas geométricas bidimensionais e tridimensionais e desenvolver argumentos matemáticos sobre relações geométricas.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) sugerem a inclusão de alternativas relativas a metodologias para o ensino de Geometria, mas não apontam muitas possibilidades para que isto ocorra. Então, na busca de opções, encontramos nas recreações geométricas, quando convenientemente planejadas, recursos pedagógicos enriquecedores e eficazes na construção do conhecimento. Três aspectos podem justificar seu uso em sala de aula: o caráter lúdico, o desenvolvimento de técnicas intelectuais e a formação de relações sociais, que é de extrema importância para o desenvolvimento do aluno.

De acordo com Matos e Serrazina (1996), parece essencial que a Geometria seja uma das formas privilegiadas de adquirir uma intuição e orientação espacial crucial para o mundo moderno. No entanto, é de grande necessidade a existência de caminhos metodológicos que proporcione meios para que os próprios alunos possam desenvolver seu conhecimento.

Considerando a relevância que há no ensino e aprendizagem de Geometria Matos e Serrazina (1996) apontam que esse ensino e aprendizagem deve desenvolver nos alunos a utilização de múltiplas capacidades, tais como:

- Capacidade de visualização;
- Capacidade de verbalização;
- Organização lógica do pensamento matemático;
- Aplicar os conhecimentos geométricos noutras situações.

Portanto, as ideias geométricas são úteis para representar e resolver problemas em outras áreas da Matemática e até mesmo em situações do mundo real. Assim, seu ensino deveria estar integrado, sempre que possível, com outras áreas, pois as representações geométricas podem ajudar os alunos a dar sentido à área, às frações, aos histogramas e aos dados colhidos.

De acordo com Rêgo, Rêgo e Vieira (2012), nos conhecimentos de Geometria, se faz necessário que o professor efetue a abordagem de cada conteúdo de forma mais próxima aos alunos, proporcionando meios nos quais desenvolvam o conhecimento de forma não rotineira, não linear ou convencional. Com isso, os autores também consideram importante a realização de tarefas de caráter inovador, possibilitando uma concepção mais positiva com relação aos conceitos geométricos.

> A aprendizagem da Geometria demanda o domínio de uma série de procedimentos, principalmente os associados à representação de figuras e sólidos, que envolvem, por exemplo, o uso de instrumentos de desenho, o conhecimento dos processos de medição e de resolução de problemas por meio de construções geométricas (RÊGO, RÊGO e VIEIRA, 2012, p. 7).

Os autores reforçam a ideia de que a Geometria, com sua eficácia no desenvolvimento da forma de pensar dos alunos, do ponto de vista cognitivo, possibilita o desenvolvimento de atitudes positivas, uma vez que é um elo que permite a associação entre o conhecimento e a realidade, compreendendo-a melhor, permitindo a visualização em duas ou três dimensões.

As formas de representação apresentadas pelos alunos expressam parte do conhecimento que têm com relação à Geometria. Muitas das limitações apresentadas por eles ao término do Ensino Médio são reflexos de ineficácias no Ensino Fundamental. Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 1997) apontam que no Ensino Fundamental os alunos devem dominar formas e figuras geométricas, representações gráficas e representações espaciais. Porém, essa não é uma realidade efetiva na maioria das escolas públicas do nosso país. Em nossa pesquisa, notamos essa carência, pois muitas das limitações originam-se da ineficácia dos conhecimentos prévios (conceitos básicos da Geometria).

2.3 O desafio e as possibilidades de ensinar Geometria

Sabemos que não é tão simples envolver a maioria dos alunos nas aulas de Matemática, isto porque eles criam um conceito mal elaborado em relação à disciplina, achando-a, em sua maioria, difícil e pouco motivante. Isto acarreta uma sequência de problemas que se agravam no decorrer dos anos de escolaridade e os alunos criam bloqueios que interferem no seu desenvolvimento intelectual em relação ao conhecimento matemático.

De acordo com Dreyfus e Hadas (1994), a maior parte das dificuldades observadas nos alunos está relacionada com a forma como é organizado o raciocínio e construídas argumentações lógicas. Argumentar, trocar ideias e refletir, são necessidades fundamentais no ensino, porém é mais uma problemática, porque na maioria dos casos o tempo de aulas é insuficiente. A maioria dos professores está preocupada em cumprir o programa e os alunos em serem aprovados, mesmo que não tenham aprendido muita coisa. Esta é uma realidade "comum", em grande parte das escolas públicas do nosso país.

Entretanto, as dificuldades não são um caso particular apenas da maioria das escolas públicas do Brasil, mas até mesmo alunos mais adiantados da *hight school*, nos EUA, apresentavam dificuldades no que se refere à argumentação ou demonstração. Partindo disto, Dreyfus e Hadas (1994) formularam seis princípios, que embora pareçam claros para os matemáticos, são de difícil compreensão para a maior parte dos alunos. Segundo os autores, esses princípios serviram de base para considerações pedagógicas que orientaram um curso de Geometria Euclidiana, desenvolvido com alunos da nona série da *hight school*.

Os princípios formulados pelos autores e que estamos denominando por P1, P2, P3, P4, P5, P6 foram os seguintes:

> P1. Um teorema não tem exceções. Diz-se que uma afirmação matemática é correta somente quando é correta em qualquer circunstância concebível. P2. Mesmo afirmações "óbvias" têm de ser provadas. Em particular, uma demonstração não pode ser construída com base nos aspectos aparentes da figura. P3. Uma demonstração deve ser geral. Porém, um contra-exemplo é suficiente para refutá-la. P4. As suposições de um teorema devem ser claramente identificadas e distinguidas das conclusões. P5. A recíproca de uma afirmação correta não é necessariamente correta. P6. Figuras complexas são constituídas por componentes básicos cuja identificação pode ser indispensável numa demonstração. (DREYFUS & HADAS, 1994, p. 61).

Portanto, temos nossos deveres enquanto educadores, e entre tais está a responsabilidade de seguirmos em busca de meios que possam favorecer o andamento das aulas, possibilitando a diminuição das dificuldades apresentadas pelos alunos em diversos conteúdos da Matemática.

É natural que nem todos tenham graus de abstração similar, uma vez que cada um aprende no seu próprio ritmo, podendo se identificar ou não com os conteúdos ou tarefas propostas, o que depende muito da forma como é abordada cada situação em sala de aula. Entretanto, é importante, sobretudo, o preparo perante o que deve ser proposto, pois estímulo e entusiasmo podem ser fatores valiosos para o rendimento em sala de aula.

Pensando no ensino de Matemática, particularmente de Geometria, percebemos que, apesar de tantos trabalhos desenvolvidos com essa temática, o problema permanece e grande parte dos alunos ainda apresentam muitas dificuldades de raciocínio e visualização, sobretudo, quando pensamos na resolução de problemas. Portanto, é muito importante que aos alunos, desde as séries iniciais, seja dada oportunidades de pensarem a partir da visualização e manipulação.

De acordo com os Princípios e Normas para a Matemática Escolar do NCTM (2008), por meio das representações de formas tridimensionais em duas dimensões e construção de formas tridimensionais, a partir de representações a duas dimensões, os alunos poderão compreender as características das formas. Nesse sentido, a variedade de representações, de formas e de recursos pode ser muito útil no enriquecimento de sua aprendizagem, pois poderão reconhecer semelhanças e diferenças através de um trabalho investigativo.

Mesmo em meio à crucial importância do estudo da Geometria, sabemos que pouca coisa mudou no passar dos anos no Brasil, apesar de tantos recursos que favorece para acontecer um ensino mais produtivo. Muitas são as formas de produzir conhecimento geométrico em sala de aula e para a sala de aula, o que Andrade e Nacarato (2004) chamam de tendências didático-pedagógicas, as quais devem ser aproveitadas na tentativa de suprir as carências de tal ensino.

Conforme pesquisa dos autores, os Encontros Nacionais de Educação Matemática (ENEM) dos períodos de 1987 a 2001 apontaram um considerável número de trabalhos que apresentam essa natureza de possibilidades. Muitos desses trabalhos trazem as seguintes características: atividades de experimentações por meio de manipulações de objetos concretos; representações a partir de desenhos e construção de modelos; resolução de problemas; construção de conceitos pelo aluno através da produção e negociação de significados; contextos de provas e argumentações, além de trabalhos que visam discutir o pensamento geométrico num enfoque teórico ou epistemológico (ANDRADE e NACARATO 2004. Dentre os sete primeiros encontros, cujos Anais foram analisados, o que mais se destacou no que se refere ao desenvolvimento da Geometria foi o V ENEM, pois foi a partir dele que se identificou a emergência de novas abordagens didático-metodológica. Atualmente, também eventos ligados a Educação Matemática têm oferecido muitas discussões e trabalhos relevantes que tratam sobre diversas possibilidades para o ensino da Geometria.

Portanto, é necessário que as atividades geométricas sejam criativas, motivando os alunos a refletir, buscar, criar e, consequentemente, construir o conhecimento de modo mais autônomo a partir de um processo dinâmico.

2.4 O Modelo van Hiele: Do que estamos falando?

Dina van Hiele Geldof e Pierre Marie van Hiele, preocupados com a frequência na qual os alunos se confundiam nas interpretações geométricas, como por exemplo, no reconhecimento de que um quadrado é um retângulo, criaram o Modelo conhecido mundialmente por *Modelo van Hiele.* Este Modelo além de orientar a formação também nos permite compreender as habilidades do aluno. Em Geometria, o Modelo é composto por cinco níveis de compreensão, os quais, segundo Crowley (1994) descrevem características do processo de pensamento.

Lorenzato (1995) destacava que ainda era pouco conhecido o Modelo van Hiele aqui no Brasil. E com o passar dos anos, observamos, através de diálogo com professores de diversas regiões, que pouca coisa mudou, pois muitos deles não sabem de que trata o referido Modelo nem suas aplicações. As ideias preliminares desse Modelo estabelecem que os alunos avancem a partir de uma sequência de níveis de interpretações dos conceitos. Assim, os avanços de um Nível para outro deverão ocorrer por meio de um desenvolvimento planejado de atividades, uma vez que o progresso dos níveis de compreensão geométrica depende, mais especificamente, de uma aprendizagem adequada à experiência do aluno.

O *Nível 0* (zero) ou 1º Nível, denominado “Visualização” é o mais elementar. Nesse Nível os alunos simplesmente percebem o espaço como algo em torno deles. Aqui muitos alunos já são capazes de comparar e nomear figuras geométricas, apenas por sua aparência. Já o *Nível 1* (um), chamado Análise, começa com uma análise dos conceitos geométricos, o reconhecimento das propriedades e o uso dessas propriedades para resolver problemas. Por exemplo, a descrição de um paralelogramo a partir de suas propriedades. Os alunos nesse estágio ainda não têm maturidade suficiente para estabelecer relações entre propriedades e não entendem definições.

No *Nível 2* (dois), chamado de Dedução Informal, os alunos iniciam um maior grau de abstração, pois já conseguirão estabelecer inter-relações de propriedades de figuras e reconhecer as classes. No entanto, formulam argumentos informais, mesmo não compreendendo o significado das definições ou axiomas. O *Nível 3* (três) denominado Dedução, é compreendido como o momento no qual os alunos começam a compreender o processo dedutivo das demonstrações, sendo a dedução uma maneira de estabelecer a teoria geométrica no contexto de um sistema axiomático. Enquanto o *Nível 4* (quatro), do Rigor, é o momento no qual os sujeitos apresentam maior capacidade de compreender demonstrações formais, como por exemplo, das Geometrias não euclidiana. Para Pierre van Hiele os três primeiros níveis merecem maior atenção.

Segundo Crowley (1994), os van Hiele propuseram cinco fases sequenciais de aprendizado, que são: 1. *Interrogação/informação,* na qual existe diálogo entre professor e alunos, na proposta de desenvolverem atividades envolvendo os objetos de estudo do respectivo Nível. Nesse sentido, leva-se em consideração o conhecimento prévio dos alunos, e o professor os orienta na direção dos estudos; 2. *Orientação dirigida,* nessa fase eles exploram conteúdos através do material sugerido pelo professor. Então, com a realização das atividades, os alunos compreenderão as estruturas características do Nível.

Na fase 3 (três), chamada *Explicação,* os estudantes tomam por base as explicações anteriores e expressam trocando suas visões sobre o que observaram. Nessa fase, o papel do professor é orientá-los no uso de uma linguagem precisa e adequada; A fase 4 (quatro) *Orientação livre***,** é a fase de tarefas mais complexas, que poderão ser organizadas com muitas pessoas, ou que podem ser concluídas de diversas maneiras ou não, como o trabalho com tarefas abertas. Na fase 5 (cinco), *Integração,* os alunos reveem e sumarizam o que aprenderam com o objetivo de formar uma visão geral da nova rede de objetos e relações (CROWLEY, 1994). Assim, ao término dessa fase, os alunos adquirem um maior grau de abstração.

De acordo com Nasser e Sant'anna (2010), a melhor forma de reconhecer em que Nível o discente está raciocinando é através da observação direta do seu modo de agir e de suas estratégias ao resolver os problemas. Para tanto, recomendam atividades que levem os estudantes a pensar, desenvolver estratégias e mostrar suas respostas como melhor alternativa na identificação do Nível van Hiele, sob o qual eles estão raciocinando. Com isso, o professor deve estar atentamente observando tudo que eles falam e desenvolvem. No quadro 01, podemos observar algumas características e exemplos de cada Nível, apresentado por Nasser e Sant'anna (2010, p. 7).

Quadro 01 - Quadro ilustrativo dos Níveis segundo van Hiele.

Nível de van Hiele	Características	Exemplos
1º Nível (Básico) Reconhecimento	Reconhecimento, comparação e nomenclatura das figuras geométricas por sua aparência global.	Classificação de recortes de quadriláteros em grupos de quadrados, retângulos, paralelogramos, losangos e trapézios
2º Nível Análise	Análise das figuras em termos de seus componentes, reconhecimento de suas propriedades e uso dessas propriedades para resolver problemas.	Descrição de um quadrado através de propriedades: 4 lados iguais, 4 ângulos retos, lados opostos iguais e paralelos.
3º Nível Abstração	Percepção da necessidade de uma definição precisa, e de que uma propriedade pode decorrer de outra. Argumentação lógica informal e ordenação de classes de figuras geométricas.	Descrição de um quadrado através de suas propriedades mínimas: 4 lados iguais, 4 ângulos retos. Reconhecimento de que o quadrado é também um retângulo.
4º Nível Dedução	Domínio do processo dedutivo e das demonstrações; reconhecimento de condições necessárias e suficientes	Demonstração de propriedades dos triângulos e quadriláteros usando a congruência de triângulos.
5º Nível Rigor	Capacidade de compreender demonstrações formais. Estabelecimento de teoremas em diversos sistemas e comparação dos mesmos.	Estabelecimento e demonstração de teoremas em uma geometria finita.

Fonte: Nasser e Sant'anna (2010, p. 7).

De acordo com o que caracteriza cada Nível de pensamento geométrico, precisamos criar situações nas quais os alunos possam refletir e desenvolver suas estratégias através da visualização e do manuseio. Dessa forma, quando pensamos em recursos para as aulas de Matemática, existem muitas opções frente ao mundo tecnologicamente moderno em que vivemos. Veloso, Bastos e Figueirinhas (2009) apontam a real importância de proporcionar experiências com o uso de materiais manipuláveis, os quais, assim como qualquer outro recurso, precisam estar de acordo com o nível de escolaridade dos alunos.

3. INTERAÇÃO SOCIAL, COMUNICAÇÃO E MATERIAIS MANIPULÁVEIS NAS AULAS DE MATEMÁTICA

Neste capítulo, o nosso objetivo é apresentar fundamentos que asseguram a importância da interação social em sala de aula, comunicação e explicação dos alunos. Ressaltamos ainda, aspectos referentes a aparatos didáticos nas aulas de Matemática, abordando relevância, limites e possibilidades com relação à exploração de conceitos matemáticos.

3.1 A interação social e argumentação no processo cognitivo

A interação social e cultural tem uma importância primordial quando se refere ao desenvolvimento cognitivo humano. Concomitante a isto, Bussi e Máriotti (2010) enlaçados à definição de Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) dada por Vygtsky, argumentam que o desenvolvimento é possível, em virtude de uma colaboração entre um indivíduo, cuja atitude cognitiva apresenta um potencial em relação à mudança, e outro indivíduo (ou uma coletividade) que intencionalmente coopera para realizar uma tarefa ou para perseguir um objetivo comum.

A partilha de significados com a interação no processo contínuo de aprendizagem tem um destaque singular, uma vez que professor e alunos aprendem de forma simultânea, a partir de trocas, diálogo, opiniões, etc. E de fato, isto precisa ocorrer para que se tenha uma clareza mais original do modo de compreensão dos estudantes.

A interação é inevitavelmente percebida em sala de aula, seja quando o professor indaga um aluno e esta indagação passa a ser dirigida a toda turma, seja quando o aluno não consegue resolver determinada situação e pergunta ao seu colega ou ao professor, enfim, são marcos permanentes da presença de interação social em sala de aula, que, diga-se de passagem, é positiva, desde que o professor saiba administrar bem, isto é, fazendo os alunos refletirem sobre seus questionamentos e/ou afirmações (MATOS & SERRAZINA, 1996).

De acordo com Smole & Diniz (2001), é necessário que o professor apresente atividades inovadoras que estimulem os alunos, afirmando que a prática das atividades em grupos é de extrema importância, pois no momento em que há a interação social o aluno sente-se na obrigação de ser coerente e a discussão entre o próprio grupo é motivo de aprendizagem.

As argumentações, frente ao que se trabalha, merecem uma observação apurada, pois o ideal para a Educação Básica não é especificamente demonstrações formais e sim uma construção conjunta com base nos argumentos dos alunos e na formalização adequada do professor. Desta forma, não se trata de um formalismo ou não, mas das diferentes formas de argumentações postas na sala de aula, o que deve gerar argumentos para, por meio da negociação, se chegar a um consenso. Afinal de contas, são as demonstrações que dão subsidio à teoria geométrica.

Sabemos que os indivíduos têm em sua essência uma espécie de "instinto social", uma vez que ele sempre está aprendendo e interagindo socialmente, por isso, o ato de compartilhar experiências pode proporcionar maior aprendizagem. Bussi e Mariotti (2010) fundamentando-se em abordagem vygotskiana, explicitam que a relação entre o interno (ou psíquico) e processos externos (relacionados à interação social externa) é uma questão de longa data em Psicologia, onde modelos diferentes foram desenvolvidos.

> Numa perspectiva vygotskyana, o uso de palavras e formas de discurso pode ser interpretado de acordo com a suposição geral de que o desenvolvimento da criança é uma apropriação progressiva e um uso reflexivo de modos de comportamento que outros utilizados com relação a ela. (BUSSI & MARIOTTI, 2010).

Portanto, é sempre importante levar em consideração o nível de abstração e o que se espera dos alunos frente às atividades. Os atos de ensinar e aprender Matemática não são tarefas definitivas, pronta e acabada, e sim um processo em contínua construção que requer preparação, esforço e vontade para bem realizar, pois é um processo de mediação entre professor e aluno. Condizente a isto, Pessoa (2010) aponta baseado no Novo Programa de Matemática do Ensino Básico, em Portugal, que no processo de ensino e aprendizagem de Matemática, aluno e professor têm papéis cruciais, sendo que o primeiro assume uma participação mais ativa na construção do saber, enquanto o professor se constitui como organizador e dinamizador da aprendizagem.

No ponto de vista da autora supracitada, o desenvolvimento e valorização de tarefas exploratórias e investigativas são capazes de possibilitar o entrecruzar de dimensões importantes no que se refere às aprendizagens matemáticas, bem como criação de dinâmicas comunicacionais, mediante discussão e reflexão da atividade desenvolvida.

A justificação e reflexão diante das construções são indispensáveis, pois pensamento e críticas perante o que é desenvolvido podem ser de grande eficácia para o desenvolvimento mais adequado das realizações humanas. O pluralismo de ideias e a troca de saberes, fruto das interações sociais, são bem sugestivos para a ampliação e o desenvolvimento do ato contínuo de refletir e justificar os procedimentos desenvolvidos nas tarefas.

A teoria de Vygotsky é centrada na formação social da mente que, por sua vez, enfatiza a mediação cultural por meio de indivíduos. Essa formação social baseia-se na linguagem, na fala e na relação entre o indivíduo e o meio. Assim, considera-se que a aprendizagem acontece pela interação entre esses indivíduos e o meio social ou cultural.

Baseado na concepção de Pessoa (2010), o processo de interação social entre os alunos é de uma importância singular, pois amplia a possibilidade da construção colaborativa dos saberes em organizar e clarificar o pensamento matemático dos estudantes. O professor, portanto, precisa ser um observador e orientador do processo de realização dos estudantes, uma vez que a aprendizagem matemática está intimamente relacionada ao tipo de tarefa proposta e ao modo de mediação do professor e seu acompanhamento no decorrer das atividades desenvolvidas pelos alunos. De acordo com a autora, quando o professor se apresenta dessa forma, a tendência é incentivá-los a prosseguir e a ultrapassar possíveis dificuldades, sem que interfira em seu raciocínio, dessa forma promovendo o confronto de estratégias e argumentações perante os entes envolvidos.

Prender a atenção dos alunos nas aulas de Matemática na Educação Básica é um desafio constante, pois a maior parte dos alunos apresenta um sentimento de desinteresse por diversos motivos. Segundo Nasser (2007), não é uma tarefa fácil fazer com que os alunos raciocinem nas aulas. Uma das possíveis estratégias para despertar o raciocínio é a cobrança de justificativas das respostas, pois muitas vezes os alunos respondem às questões sem muito compromisso, sendo isso, insuficiente para avaliar seu nível de conhecimento ou pensamento matemático.

É de extrema valia a legítima expressão daquilo que se pratica, uma vez que as respostas justificadas poderão sustentar um modo de avaliação mais adequado e até mesmo reflexão sobre a prática de forma mais propícia. A referida autora destaca que "*a habilidade de argumentação deve ser construída, por meio de atividades constantes e específicas (p. 2)*". A ação repetitiva de resolução de exercícios deixa uma grande lacuna em relação à reflexão, pois o que mais importa no verídico processo de ensino e aprendizagem não é apenas o fato de resolver as tarefas, mas, sobretudo o modo como aconteceu a resolução.

Quando pensamos no Ensino Fundamental e Médio, o poder argumentativo do alunado ainda carece muito de uma visão crítica frente ao estabelecido, pois poucos conseguem argumentar e, mesmo assim, quando apresentam algum argumento, nota-se que está aquém do esperado para o nível de escolaridade, conforme analisamos nesse estudo. Esse fator é muito preocupante, pois a sociedade apresenta muitas cobranças frente à constante modernidade e requer seres críticos, que pensam e argumentam, frente aos avanços ou retrocessos.

A interação social tornou-se uma alternativa de relevante valia, visto que pode favorecer para um compartilhamento de saberes, e assim, a natureza das tarefas é determinante para uma integração mais propícia. O trabalho em Díades, citado por César, Oliveira e Teles (2004), torna-se de extrema importância, porque viabiliza uma mudança nas práticas pedagógicas, valorizando assim, uma participação mais ativa dos alunos no processo de apropriação do conhecimento.

Souza et al (1995), defendem que o trabalho em grupo proporciona melhor aprendizagem, uma vez que há trocas de informação favorecendo a busca de interpretações na atividade, melhorando o desenvolvimento da linguagem e, consequentemente, proporcionando melhor reflexão acerca do seu desenvolvimento. Assim, o desenvolvimento da compreensão dos alunos se justifica a partir de suas ações e da forma como se expressam e escrevem sobre as ideias matemáticas na resolução de problemas.

Existem quatro tipos de co-elaboração quando dois alunos trabalham em conjunto na busca de uma solução para determinada tarefa, mencionados por Gilly, Fraisse e Roux (1988): *co-elaboração por consentimento:* é quando a resposta é proposta por um dos integrantes, mas aceita pelos dois. *Colaboração por co-construção:* é quando os dois alunos se empenham de igual maneira no intuito de resolver a tarefa. *Co-elaboração por confronto com desacordo:* é quando um dos alunos exprime seu desacordo, porém não argumenta ou sugere algo novo. *Co-elaboração por confrontos contraditórios:* é quando um dos alunos discorda da ideia emitida pelo seu par, porém apresenta argumentos, o que pode levar para elaboração de uma nova ideia.

De acordo com Carvalho (2009), escolher a melhor forma de organizar as duplas para que trabalhem de forma interativa, não é uma tarefa simples ou que tenha um caminho definitivo. Na verdade, o mais importante é que o professor oriente e estabeleça que as duplas precisam discutir entre si, argumentar, colaborar, se possível, buscar mais de uma resposta e chegarem a uma solução contundente.

3.2 O poder da Comunicação no desenvolvimento das tarefas

De acordo com Fonseca (2009), a comunicação é um meio no qual há uma articulação, organização e consolidação do pensamento. Com base nisso, a autora esclarece que o compartilhar de ideias se dá de vários modos e pode ser oralmente ou por escrito, a partir de gestos, desenhos, objetos, e símbolos. Assim, numa aula de Matemática os alunos estão em constante comunicação, mesmo que essa não se dê de modo formal. Todas as experiências são válidas e, por essa razão, devem ser muito bem aproveitadas para, a partir dos processos de interação e ação, os alunos se adequarem a uma linguagem mais precisa do ponto de vista matemático. Para tanto, é muito importante que seja dada a oportunidade desta experiência ser desenvolvida desde as séries iniciais, já que é o início de tudo, onde a criança começa a abstrair e desenvolver seu poder cognitivo.

É uma alternativa interessante que o professor, em seu planejamento, possa pensar em caminhos nos quais sejam dadas maiores oportunidades para a comunicação fluir em sala de aula, pois na maior parte das vezes essa atitude cabe quase que de forma específica ao professor, enquanto o alunado é basicamente passivo. Um meio que possivelmente ameniza essa situação é o desenvolvimento de novas metodologias, nas quais os alunos participem ativamente das atividades, podendo assim expressar seu pensamento por meio da comunicação.

De acordo com Fonseca (2009), o partilhar de ideias em pequenos ou grandes grupos é muito importante dentro do processo de ensino e aprendizagem, pois todos ganham, seja a partir da apresentação de ideias adequadas e fundamentadas ou mesmo incipientes ou incorretas. Segundo a autora, isso acontece porque com a sua participação ativa na discussão, os alunos têm a oportunidade de melhorar, adequar, refinar e desenvolver a compreensão do seu próprio pensamento, integrando aspectos diferenciados que outros apresentaram.

Esse argumento fortalece o que aponta o National Council of Teachers of Mathematics (NCTM 2000) ao defender que a comunicação em sala de aula deve incluir vários aspectos, tais como: *partilhar o pensamento e as ideias, ouvir os outros, colocar questões, pedir esclarecimentos, explicar e justificar* (NCTM, 2000 *apud*

FONSECA 2009, p. 3). De fato, esses fatores podem surgir por meio da interação social, comunicação e resolução de problemas na sala de aula de Matemática, levando os alunos a refletirem sobre seu desenvolvimento e argumentação, e o professor a avaliar de forma mais propícia por meio da observação direta, da comunicação, criatividade e diálogo dos alunos e entre os alunos.

Portanto, se faz necessário criar um ambiente em que os alunos em todos os níveis de escolaridade, sejam desafiados a pôr em prática seus argumentos, desenvolvendo a criticidade e seu poder de comunicar-se matematicamente.

Com o objetivo de realizar um bom trabalho, onde a meta seja a aprendizagem, a comunicação entre o professor e os alunos é de grande valia. Esta comunicação, seja oral ou escrita, revela muito sobre cada um deles e, conforme Pessoa (2010, p. 28), "*a partir da comunicação o aluno explicita suas ideias matemáticas envolvidas nas experiências geométricas que são realizadas*". Isto pode ser primordial até no modo de avaliar, pois aquilo que o aluno expressa é o que ele pode abstrair durante o trabalho que desenvolveu.

No momento da exploração de uma tarefa em sala de aula é possível fazer muitos questionamentos, provocando o diálogo dos alunos envolvidos, a experimentação e a manipulação podem dar lugar para o envolvimento dos alunos e percepção de propriedades e conceitos diversos nas figuras geométricas.

Matos e Serrazina (1996 p. 171) argumentam que "*comunicação com sucesso exige a negociação de intenções e depende de todos os elementos da turma expressarem respeito e apoio pelas ideias dos outros*." Dessa forma, o modo como a tarefa é proposta em sala de aula, especificamente ao ser desenvolvida em duplas, deve acontecer de maneira organizada e orientada pelo professor para, assim, fazer da sala de aula um ambiente de real aprendizagem e investigações.

Segundo Bishop e Goffree (1986, p. 18), "*possivelmente, os professores de Matemática deveriam considerar mais deliberadamente o uso e a exploração de atividades em pequenos grupos*". Quando o assunto é a discussão em sala, os autores sublinham que a melhor forma para a ação, não são cadeiras separadas em filas e sim em uma forma na qual o professor e todos os alunos interajam conjuntamente. A comunicação entre todos os participantes, certamente é muito eficiente para esclarecimentos e uma partilha de significados matemáticos mais propícios. Sendo assim, a comunicação é um fator de relevância em sala de aula, no entanto, é preciso cuidado para que essa comunicação seja múltipla, isto é, por parte de todos os integrantes da turma (alunos e professor). Latas (2012) também defende a ideia de interação em sala de aula, uma vez que essa dinâmica pode possibilitar o desenvolvimento da comunicação e consequentemente mais autonomia e confiança por parte dos alunos.

> A interação, partilha de ideias e negociação de significados entre os alunos, inerentes às atividades geométricas em causa, podem constituir também um excelente meio para desenvolver a comunicação matemática, podendo assim desenvolver nos alunos capacidades de autonomia e confiança (LATAS, 2012, p. 9).

A comunicação entre os alunos e sua forma de linguagem no momento de desenvolvimento das tarefas ajuda a analisar mais positivamente sua interpretação e aprendizagem e consequentemente no processo de avaliação.

A apresentação de explicações por parte dos alunos não é trivial na realidade escolar que temos. Na maioria das vezes, os alunos apenas “dizem”, apresentam o procedimento ou mesmo tentam explicar a partir da prática cotidiana ou de objetos. De acordo com Bishop e Goffree (1986), é um erro associar o “explicar” com o “dizer”, pois deve haver justificativas pertinentes na resolução de problemas, com as quais os alunos possam se comunicar expressando o conhecimento matemático a partir de suas estratégias.

O diálogo que é, na maioria das vezes, o processo de comunicação mais comum pelos alunos quando estão envolvidos em um trabalho em grupo, se caracteriza pelo desejo de investigar e mesmo quando não há respostas corretas para o que se investiga. Dessa forma, o diálogo proporciona a reflexão que é, muitas vezes, viabilizada pelos questionamentos ou mesmo incertezas. O fato de construir novas perspectivas frente à determinada situação é parte integrante do diálogo. Com isso o diálogo é um processo onde permeia a aprendizagem.

William Isaac (1994) *apud* Alro e Skovsmose (2010), afirma que o fato de dialogar leva as pessoas a aprender pensar juntas. Dessa forma, interagem a partir de uma relação de confiança mútua, pois pensam juntos, compartilham ideias e criam possivelmente, situações novas. Esse processo se dá apenas na condição de duas ou mais pessoas discutirem determinada situação. Assim, essas relações interpessoais são relações pessoais e de construção de conhecimento.

De acordo com Alro e Skovsmose (2010), o diálogo é uma conversação de investigação em que os participantes desejam descobrir algo querendo obter conhecimentos e novas experiências, assim havendo um desejo compartilhado de investigar. Por essa razão, no diálogo os participantes estão em busca de descoberta e não de tomar decisões porque elas não fazem parte do diálogo.

3.3 As Explicações dos alunos nas aulas de Matemática

As explicações dos alunos, de acordo com Levenson, Tsamir e Tirosh (2004), podem ser classificadas por Matematicamente baseadas ou Praticamente baseadas. As explicações matematicamente baseadas expostas por alunos do Ensino Básico, embora nem sempre apresentem a formalidade e o rigor matemático, são baseadas em aspectos puros da Matemática, ou seja, argumentações baseadas em definições ou propriedades matemáticas aprendidas anteriormente. Já as explicações praticamente baseadas, como o próprio nome indica, remete a explicações de cunho voltado para o contexto cotidiano, ou seja, são aquelas explicações informais e baseadas em recursos visuais ou manipuláveis.

De acordo com as autoras, as explicações praticamente baseadas, podem acontecer quando os alunos fazem referência ao cotidiano ou mesmo, materiais manipuláveis para dar significados às expressões matemáticas. No entanto, quando se fundamentam apenas em definições, propriedades e raciocínios matemáticos, a autora defende que suas explicações são matematicamente baseadas.

Yackel e Cobb (1996) salientam que a explicação, interpretada como um ato comunicativo, tem o propósito de esclarecer aspectos do pensamento matemático que podem não estar claros para outras pessoas. De acordo com os autores, quando os alunos buscam dar sentido às explicações dadas pelos colegas, comparam soluções e fazem julgamentos sobre semelhanças e diferenças, há maiores oportunidades para aprendizagem. Dessa forma, segundos os autores, há explicações que descrevem procedimentos, outras que descrevem ações com objetos matemáticos e explicações como objetos de reflexão.

Nas explicações procedimentais os alunos conhecem o procedimento, entretanto, não compreendem as particularidades específicas advindas do rigor matemático. Para Yackel e Cobb (1996), à medida que os alunos se preocupam com a forma como o outro vai dar sentido à sua explicação, significa que eles compreendem o que é uma explicação aceitável. Quando isso acontece, suas explicações passam a serem objetos de reflexão. Nesse sentido, refletem acerca da sua explicação para torná-la adequada para seus colegas.

Em muitas situações, os alunos para compreender as explicações do outro ou resolver determinadas tarefas, precisam fazer o uso de materiais manipuláveis ou visuais. A partir disso, passam a descrever ações sobre os objetos.

Van de Walle (2009) defende que, independentemente de série, há muitas vantagens na escrita das explicações dos alunos, pois é um processo reflexivo, no qual poderão refletir acerca do seu desenvolvimento para a solução. Dessa forma, é importante que eles façam seus registros sempre, pois a escrita é tão importante quanto a comunicação oral, uma vez que o diálogo entre ambos se cruzam para, possivelmente, formar estruturas cognitivas mais amplas a fim de solucionar o problema. Quando propomos situações desse tipo em sala de aula, os alunos é que são os protagonistas. Eles formarão um campo de conhecimento matemático, além de apresentar o nível de conhecimento prévio.

Pesquisas apontam que muitos professores preferem usar muitas vezes explicações praticamente baseadas (LEVENSON, TSAMIR & TIROSH, 2004), no entanto, é necessário muito cuidado com relação a isso, pois ao se comunicar com seus alunos, as explicações usadas podem refletir fortemente na forma de comunicação por parte deles, podendo assim, se dispersar do mínimo de formalismo necessário. Mediante isso, é de extrema valia que o professor incentive seus alunos a se comunicarem através de explicações matematicamente baseadas. Para tanto, se faz necessário, sobretudo, o preparo docente, uma vez que ninguém consegue ensinar aquilo que não sabe.

O trabalho em pequenos grupos, certamente favorece para a comunicação e questionamentos que geram as explicações, sejam praticamente baseadas ou matematicamente baseadas. Trabalhando constantemente dessa forma, o aluno terá uma maior tendência a ser crítico, questionar-se e até buscar novas estratégias quando se deparar com uma situação na qual realize o trabalho sozinho. Em relação a isto, Carvalho (2009) faz apresenta o seguinte argumento:

> É o fato de permitirem romper muitos aspectos do contrato didático tradicional existente na sala de aula, que torna as tarefas facilitadoras e dinâmicas interativas responsáveis por situações em que se desenvolvem capacidades de argumentar e comunicar matematicamente; e, mais tarde, quando o aluno realiza sozinho as tarefas, consegue utilizar as competências adquiridas ao longo do processo interativo como, por exemplo, o questionar-se acerca das

> suas próprias estratégias ou acerca do processo que o levou até elas. Esses são aspectos fundamentais para detectar respostas incorretas ou para encontrar alternativas às resoluções descobertas (CARVALHO, 2009, p. 22).

O fato não é que as explicações praticamente baseadas sejam descartadas, mas que não se pode deixar de lado a importância formal da Matemática e o amadurecimento de seus conceitos por parte dos alunos. Levenson, Tsamir e Tirosh (2009) argumentam que um dos nossos deveres enquanto educador matemático é ajudar nossos alunos a moverem-se das explicações praticamente baseadas para as explicações matematicamente baseadas, especificamente a partir ensino fundamental.

Souza et al (1995) defendem que a conexão entre Matemática e Linguagem permite que os alunos desenvolvam a capacidade de explicar melhor, uma vez que, interpretam, sintetizam, analisam e fazem justificativas a partir de sua compreensão e conhecimento matemático.

Ao trabalharmos com a resolução de problemas os alunos não estão centrados apenas na solução a ser atingida, mas, sobretudo, nos procedimentos que levam a ela. De acordo com Van de Walle (2009), é importante fazer os alunos escreverem o processo de resolução e suas explicações. Para tanto, é necessário que aos alunos seja dada a oportunidade de se expressarem e, ao mesmo tempo, cabe ao professor ouvir suas explicações, orientá-los de forma cuidadosa, sem que seja antecipada a solução. Portanto, o mais pertinente não é apontar caminhos de solução e sim, fazer questionamentos com base na dúvida apresentada pelo aluno, fazendo-o compreender melhor o problema.

3.4 Os Materiais Didáticos Manipuláveis: relevância de sua utilização nas aulas de Geometria

Os materiais manipuláveis entendidos como instrumentos que despertam atitudes mais positivas nos alunos, favorecem a aprendizagem por meio da visualização e proporciona a participação ativa dos alunos nas aulas de Matemática. Ao ser propostas atividades com materiais manipuláveis é importante levar em consideração o tipo de material que deve estar adequado à idade e as necessidades do aluno, com intuito de minimizar suas dificuldades e despertar o interesse frente ao que estuda e desenvolve, evitando possíveis resultados negativos.

É importante ressaltar que cada aluno ou pequenos grupos de alunos em sala de aula deve ter seu próprio material que, possivelmente, poderá ser usados em situações diversas, caracterizado a eficácia do material. Contudo, a eficácia no uso dos materiais manipuláveis depende ainda do nível de conhecimentos prévios que os alunos trazem, uma vez que o material por si só não supre nenhuma das necessidades intelectuais.

De acordo com Matos e Serrazina (1996), diferentemente do material ser manuseado apenas pelo professor para se comunicar com os alunos, ao ser usado pelos alunos possibilita interpretações, resolver problemas e até formular problemas com apoio do professor. Os autores também argumentam que os conceitos que a criança deve construir ao trabalhar com os materiais manipuláveis não são abstraídos deles empiricamente, mas acontecerão a partir da ação interiorizada por meio dos significados advindos de suas ações.

De acordo com Lorenzato (2006), ao propor atividades com material manipulável, precisamos entender que a realização em si de atividades manipulativas ou visuais não garante a aprendizagem. É necessário, portanto, a atividade mental feita pelo aluno. Com isso, o material é apenas o meio que pode favorecer e mudar a dinâmica da aula. Quando adequadamente são exploradas atividades subsidiadas por materiais manipuláveis, os alunos tendem a reagir mais positivamente, pois mais motivados se veem numa situação, na qual pode construir o seu próprio conhecimento, ao invés de repetir o que os livros didáticos propõem, muitas vezes.

Segundo Rêgo et al (2006), através da utilização adequada de materiais manipuláveis, os alunos ampliam suas concepções sobre o que é, como, e para que aprender Matemática, consequentemente, amenizando os medos e vencendo os mitos, o que, de acordo com os autores, favorece a aprendizagem pela formação de ideias e modelos.

Não é algo de grande complexidade propor atividades que sejam subsidiadas por materiais manipuláveis. O principal ponto de partida é o planejamento e a habilidade do professor frente à proposta. Quando falamos em planejamento e preparo, estamos nos referindo a aspectos primordiais que o professor precisa levar em consideração, como, por exemplo, reflexão e questionamentos: Que material vou usar? Como vou proceder? O que espero? Quais os possíveis desafios ou limitações? Qual o Nível da turma?. Reflexões desenvolvidas a partir de questionamentos podem fazer o trabalho ocorrer de forma mais propícia e adequada, favorecendo os resultados. O trabalho com materiais manipuláveis também requer criatividade, pois além de sua eficácia, precisa ser motivador e interessante para os alunos.

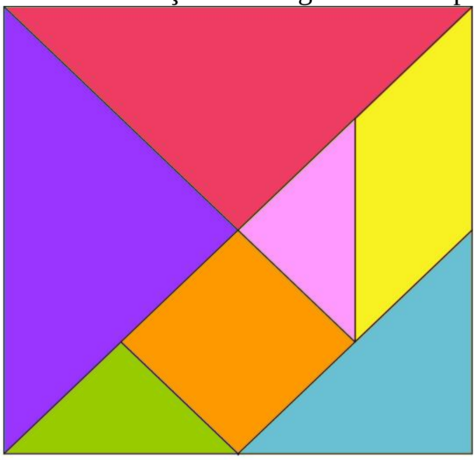
Para Rêgo e Rêgo (2006), a utilização de todo e qualquer material exige alguns cuidados por parte do professor, alguns desses cuidados são:

> Dar tempo para que o aluno conheça o material; Incentivar a comunicação e troca de ideias, além de discutir com a turma os diferentes processos, resultados e estratégias envolvidas; Mediar, sempre que necessário, o desenvolvimento das atividades por meio de perguntas ou da indicação de materiais de apoio, solicitando o registro individual ou coletivo das ações realizadas, conclusões e dúvidas; Realizar uma escolha responsável e criteriosa do material; e Planejar com antecedência as atividades, procurando conhecer bem os recursos a serem utilizados, para que possam ser explorados de forma eficiente, usando o bom senso para adequá-los às necessidades da turma, estando aberto a sugestões e modificações ao longo do processo (RÊGO & RÊGO, 2006, p. 5).

Ao planejar atividade a serem exploradas por meio de materiais manipuláveis, é preciso entender que a curiosidade e observação são atributos relevantes que farão, certamente, com que o aluno desperte interesse de conhecer e a partir disso construir o seu conhecimento com atividades bem planejadas. Por essa razão, Lorenzato (2010) defende que desde as séries iniciais de escolaridade se faz necessário o uso de materiais didáticos manipuláveis. De acordo com isso, o autor afirma que "*não começar o ensino pelo concreto é ir contra a natureza humana*", pois quando trabalham com auxílio de materiais dessa natureza os alunos também usam o tato e a visão, e o fato de visualizar e manusear são ponto de partida para que os alunos possam formar conceitos, apontar hipóteses e entender propriedades.

Quando pensamos no uso do Tangram especificamente, entendemos que este é um meio que se destina a conteúdos e anos de escolaridade diversos, desde a formação de figuras livres, reconhecimento das peças, até a resolução ou formulação de problemas e, por isso, ao ser usado adequadamente passa a ser um material rico e motivante. Segundo os critérios estabelecidos por Reys (1971) *apud* Matos e Serrazina (1996), podemos considerá-lo um bom material por ser motivante e ser uma base para abstração e em diferentes anos de escolaridade e níveis da formação de conceitos. Na figura 02, está ilustrada a formação do quadrado formado com a junção das sete peças do Tangram.

Figura 02 - Ilustração do Tangram de sete peças.



Fonte: https://chiarola.wordpress.com/tangram

O Tangram foi o material manipulável que escolhemos para resolução dos problemas, uma vez que consideramos esse quebra-cabeça de origem chinesa um facilitador no desenvolvimento de atividades diversas, sobretudo nos conteúdos voltados para Geometria, quando utilizado de forma adequada pelo professor. O Tangram mesmo sendo um material didático muito antigo e de fácil construção não é utilizado com frequência nas escolas públicas estaduais da Paraíba, sobretudo em resolução de problemas.

De acordo com Souza et al (1995), as formas geométricas que compõem o Tangram permitem que os professores vejam a possibilidade de explorar mais atividades, tanto para auxiliar no desenvolvimento e compreensão de certos conteúdos de Matemática quanto como forma de propiciar o desenvolvimento do raciocínio geométrico.

> Quando o trabalho é estruturado com a preocupação de que o aluno perceba, represente, construa e conceba formas geométricas, ele tem chance de desenvolver habilidades de visualização, percepção espacial, análise e criatividade (SOUZA et al, 1995, p. 4).

Quando pensamos no ensino de Matemática a partir de meios que fujam dos padrões puramente convencionais, possivelmente as interações serão mais produtivas, uma vez que eles se veem numa ação diferente e que requer outras formas de questionar, de visualizar e de interpretar. O fato de propor a resolução de problemas com auxílio do Tangram, por exemplo, se dá em virtude desse material favorecer algumas habilidades de raciocínio geométrico, como memória visual, percepção e conservação de formas e relações; classificação de figuras; percepção viso-motora e;

discriminação visual. De acordo com Souza et al (1995), esses pontos são parte essencial do ensino de Geometria.

As atitudes do professor em sala de aula são muito relevantes no processo de desenvolvimento dos alunos, pois o professor, muitas vezes, é uma forte referência nas ações dos alunos. E estas podem ser positivas ou negativas, dependendo da forma como o professor se impõe e desenvolve suas aulas.

Portanto, a comunicação oral ou escrita a partir da expressão de ideias referentes ao uso do material manipulável é muito importante, pois propicia um melhor entendimento por parte do professor sobre o desenvolvimento dos seus alunos. Assim, poderá avaliar e orientar mais eficientemente nos procedimentos e interpretações apresentadas pelos alunos. Contudo, o uso de materiais manipuláveis deve acontecer adequadamente desde o início de escolaridade, proporcionando que o aluno comece a manusear esses materiais, conhecendo-os, fazendo relações de cunho matemático, a fim de que tenha desde o início, uma formação criteriosa com compreensão, evitando rotineiras reproduções pouco significativas.

Dentre os artefatos[3] que os seres humanos têm o poder de criar e utilizar, a língua, seja oral ou escrita, tem uma grande valor, pois exprime as formas de pensamentos. O ato de escrever uma expressão oral é mais propiciadora ao desenvolvimento e ampliação de pesquisas, isto porque a expressão escrita pode ser reformulada e, ao mesmo tempo, pode também ser mais compreensível para quem lê e observa.

De acordo com Bussi e Máriotti (2010), o que se pode concluir da discussão complexa sobre a implicação do desenvolvimento da escrita e do seu uso, é o que se refere ao papel desempenhado por tal artefato no surgimento do chamado pensamento racional, ou seja, o pensar com base em ideias abstratas, e raciocínio dedutivo. Dessa forma, se concretiza a distinção entre a expressão escrita e a oral.

A Matemática em meio à sua dinâmica cumpre esse papel de possibilitar a reflexão sobre as representações que são possíveis. Os artefatos podem ser entendidos e utilizados na Educação Matemática também como artefatos concretos, a exemplo dos materiais didáticos estruturados (Tangram, Material Dourado, Blocos Lógicos, Ábaco,

[3] Abrange vários tipos de objetos produzidos por seres humanos através dos tempos: sons e gestos, utensílios e implementos; orais e escritas formas de linguagem natural; textos e livros, instrumentos musicais; ferramentas das tecnologias de informação e comunicação. (BUSSI & MÁRIOTTI, 2010).

etc.), materiais de desenho geométrico, de medidas, jogos e desafios matemáticos, entre outros.

Nos dias atuais um dos tipos de artefatos mais comuns e úteis à atuação humana são os recursos da tecnologia, que abrangem significativamente as possibilidades de trabalho dentro da própria ciência. Na Educação, sobretudo, destacam-se as Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC), que podem favorecer o trabalho dos professores e a aprendizagem dos alunos. Noss e Hoyles (1996, *apud* BUSSI e MARIOTTI, 2010) ressaltam que ao enfatizar a perspectiva da comunicação, a função de mediação do computador está relacionada com a possibilidade de criar um canal de comunicação entre o professor e o aluno baseado em uma linguagem compartilhada.

Os jovens, em sua maioria, apresentam grande familiaridade frente a esses recursos, o que pode ser aproveitado de forma bastante positiva na sala de aula, a exemplo de aplicativos para explorar conteúdos de Geometria, que podem facilitar a compreensão, representação e visualização.

Na orientação das tarefas o apoio do professor é primordial, entretanto, é necessário cuidado em relação à forma de mediar e observar a disposição dos alunos na atividade e, para isso, torna-se importante conhecer bem algumas possibilidades, tais como: público alvo, a realidade dos alunos, o tempo e os recursos disponíveis. Do contrário, a situação proposta pode perder sua eficácia, evidenciando um descontrole em sala de aula. Nesse sentido, o planejamento é primordial, uma vez que a partir dele o professor pode organizar e prever limites e possibilidades para o desenvolvimento da tarefa, por meio do conhecimento em relação à realidade de atuação. Em relação a esse aspecto Bishop e Goffree (1986), afirmam que:

> Qualquer professor tem de aprender a lidar com os vários constrangimentos, que reduzem as possibilidades dentro da sala de aula, tais como o tempo, o espaço, o livro de texto, o programa, mas dentro destes constrangimentos, o aspecto mais importante para o professor é conhecer bem os alunos, para que seja capaz de imaginar e avaliar os potenciais valores de qualquer tarefa para eles (BISHOP & GOFFREE, 1986, p. 15).

Os autores defendem a proposta da realização de trabalhos em grupos, no qual haja engajamento e interação para formar uma rede de partilha de conhecimentos. Para agregar valor, qualquer atividade humana precisa de planejamento e objetivos. Para tal, deve-se deixar muito clara a proposta aos alunos e organizar, segundo as possibilidades, para que sejam alcançados os objetivos pretendidos.

4. METODOLOGIA

Neste capítulo apresentamos os caminhos metodológicos que foram seguidos em nossa pesquisa. O roteiro da entrevista semiestruturada[4] e planejamento das tarefas que aqui nos referimos, encontram-se nos Apêndices.

4.1 Síntese

Com os alunos de uma turma do 3° Ano do Ensino Médio de uma escola pública estadual, desenvolvemos a pesquisa que é de natureza qualitativa, pois o nosso principal foco não são apenas os resultados, mas principalmente o desenvolvimento no decorrer das atividades propostas. A pesquisa empírica foi desenvolvida em três etapas: com a professora através de uma entrevista, com todos os alunos da turma desenvolvendo atividades na perspectiva do Modelo van Hiele e com três Díades específicas trabalhando a resolução de problemas geométricos com auxílio do Tangram, em quatro Episódios, que são destacados em três estudos de caso. A comunicação oral e escrita das Díades, as observações e registros que fizemos, frente às interações e desenvolvimento, nos deram subsídio para analisar os dados e refletir sobre o estudo desenvolvido, o que gerou outras indagações e ideias para pesquisas futuras.

4.2 Caminhos metodológicos

Com o desenvolvimento da Educação Matemática, nos últimos anos, são apontadas uma série de contribuições favoráveis ao ensino e aprendizagem valorizando atitudes mobilizadoras em sala de aula de Matemática, nas quais o professor tem a função de mediador enquanto os alunos devem ser os agentes das ações. Com base nisto, nossa pesquisa se constitui em três estudos de caso, o que é muito comum em pesquisas dessa natureza e que, de acordo com Ponte (2006), acrescenta conhecimento ao conhecimento já existente, na busca de compreender em profundidade o como e os porquês dos fatos. Ao mesmo tempo, o autor salienta que o estudo de caso é de uma eficiência singular para investigar questões de práticas e aprendizagem dos alunos. De acordo com Esteban (2010, p. 181) "*o estudo de caso também foi utilizado a partir de metodologias sob um enfoque nomotético, porém, em relação à pesquisa qualitativa, se enfatiza sua adequação e pertinência ao estudo da realidade socioeducativa*".

---

[4] Uma entrevista feita a partir de um guia de perguntas estruturadas, que devem ser respondidas na íntegra e, possivelmente, gravadas para posteriormente ser analisada.

Nosso estudo enfatiza a comunicação e resolução de problemas, por meio de materiais concretos manipuláveis utilizando o Modelo van Hiele para exploração da Geometria em sala de aula. Utilizamos como material de apoio no desenvolvimento das tarefas alguns materiais concretos manipuláveis (sólidos geométricos e Tangram - Figura 03). Dessa forma, as estratégias metodológicas que usamos foram guiadas pelo referido Modelo, o qual nos auxiliou na metodologia de ensino e planejamento das tarefas.

Figura 03 – Díades desenvolvendo as atividades com auxílio de sólidos geométricos e Tangram.

Fonte: Registros nossos.

Nosso campo de pesquisa foi uma escola pública estadual, localizada na cidade de Cabaceiras no cariri paraibano, e os participantes foram alunos de uma turma de 3º Ano do Ensino Médio. Nossa pesquisa tem essência qualitativa, que é uma das mais eficientes formas de capturar a realidade empírica, exigindo critérios no que se observa e em como observar. Esse tipo de pesquisa assume diversas formas e é conduzida em múltiplos contextos. De acordo com Bogdan e Biklen (1994), as investigações qualitativas privilegiam, essencialmente, a compreensão dos comportamentos a partir da perspectiva dos sujeitos de investigação. Além disso, nosso principal interesse não são apenas os resultados, mas, sobretudo, os processos de desenvolvimento, o que segundo os autores, é uma característica forte da pesquisa qualitativa. Concomitante a isto, o desenvolvimento de todos os processos que envolvem a pesquisa assumirá uma ordem descritiva para demonstração dos fatos.

De acordo com Borba e Araújo (2012), quando priorizamos a compreensão e não apenas os resultados corretos, é importante que se busquem procedimentos como entrevistas, observação participante, e possíveis análises de vídeos, para auxiliar na compreensão a um dado fenômeno. O intuito principal na realização de uma pesquisa é buscar resposta para algo que traz inquietação. Essas respostas nem sempre são simples de serem encontradas, entretanto, os detalhes precisam ser precisos e bem fundamentados na garantia de um resultado mais satisfatório.

Antes do planejamento formal das tarefas para identificação do Nível segundo o Modelo de van Hiele em que a turma se encontra, realizamos uma entrevista semiestruturada com a professora regente identificada pelo pseudônimo Rita, na intenção de compreender experiências e concepções, bem como, para termos conhecimento acerca do perfil dos alunos para o planejamento das tarefas. Rita falou sobre a turma, algumas potencialidades e limitações e do trabalho que desenvolve continuamente com a mesma. Foi um momento muito rico, pois essa professora já acompanhava os alunos desde o Ensino Fundamental, consequentemente apresentou um conhecimento relevante em relação ao perfil dos alunos, facilitando nosso planejamento para o início da nossa pesquisa empírica.

No decorrer da entrevista (Apêndice 2) identificamos a professora por Rita[5] enquanto que a letra G nos identifica na função de entrevistador. Para coleta de dados da entrevista usamos aparelhos de gravação, e para transcrição das falas usamos as normas estabelecidas por Marcuschi (2007). É muito importante essa aproximação, pois gera um conhecimento mais aprofundado em relação aos alunos – perfil da turma, o que facilita o trabalho a ser desenvolvido. De acordo como Latas (2012), a Matemática acessível a uma turma implica, por um lado, que o professor conheça seus alunos, saiba em que Nível de compreensão se encontram, podendo, assim, proporcionar o desenvolvimento de estratégias próprias e, por vezes, informais de raciocínio. Em virtude disto, se evidencia a necessidade do conhecimento cultural e histórico da Matemática.

Tendo nossa pesquisa esta dinâmica, apenas perguntas diretas não dariam conta da análise profunda para o desmembramento e a coleta satisfatória dos dados. Uma das formas de conhecermos em maior profundidade o aluno é proporcionar tarefas nas quais eles sejam levados a participarem sem receio. Um caminho possivelmente viável para isso é a proposta de trabalho em pequenos grupos, pois havendo planejamento as

[5] A professora, além de ser uma pessoa muito acessível, estava sempre disposta a contribuir. Assim, a identificamos pelo pseudônimo Rita, pois pessoas que tem esse nome, as quais conhecemos, costumam apresentar essas características.

atividades podem ao seu término, apresentar resultados mais satisfatórios, uma vez que um aluno ajuda o outro e assim ambos interagem, dialogam e certamente refletem.

Pensando nisso, na primeira parte da pesquisa empírica com a turma, planejamos um conjunto de atividades (Apêndices 4 e 5) para serem desenvolvidas em Díades e ganharmos subsídios para identificarmos o Nível de pensamento geométrico, segundo o Modelo van Hiele, no qual a turma se encontrava. Para tal, levamos todos os materiais necessários para o trabalho dos alunos, tais como sólidos geométricos, figuras planas e folhas de papel A4.

Para organização de atividades, nos apoiamos em Nasser e Sant'anna (2010), com suas propostas de trabalho do Projeto Fundão da UFRJ, e na proposta de Oliveira e Gazire (2012), que apresentam módulos de atividades que têm como referência o trabalho de alguns dos mais importantes pesquisadores da teoria de van Hiele.

De acordo com Oliveira e Gazire (2012), Pierre van Hiele argumentava que mesmo usando recursos diversos, a dificuldade dos seus alunos em aprender Geometria era grandiosa e, por vezes, tinha o sentimento de estar falando outra língua que os alunos não tinham conhecimento. Percebemos, porém, que nos dias atuais, apesar de tantos recursos que subsidiam as aulas e os estudos, essa realidade ainda persiste em virtude de muitos fatores, entre tais, se destaca o Nível de pensamento dos alunos que, na maioria das vezes, está muito aquém daquilo que estamos desenvolvendo nas aulas.

As autoras supracitadas também salientam que certos estudos sobre a aquisição da compreensão, fundamentados na psicologia de aprendizagem e de pensamento, também influenciaram no desenvolvimento desse Modelo e Pierre van Hiele passou a dar mais atenção à existência de diferentes níveis de pensamento em relação aos conceitos de Geometria. Portanto, nessa teoria, consideram-se os níveis pelos quais passam os alunos, desde o reconhecimento de formas até a construção de provas geométricas formais.

No decorrer de toda a pesquisa fizemos uma análise global das tarefas desenvolvidas em sala de aula, tendo os alunos como participantes centrais, que são observados em sua totalidade, dado que o objetivo central da nossa proposta foi analisar os limites e as possibilidades de resolução de problemas que levam em consideração o Nível de compreensão do Modelo van Hiele, com alunos do 3º Ano de uma turma do Ensino Médio. Dessa forma, a comunicação oral e escrita, desempenho, interação e criatividade, são fatores preponderantes na nossa análise.

A turma em pesquisa estudava no turno matutino e era composta por 21 alunos, numa faixa etária que variava entre 16 e 19 anos de idade, residindo 11 na zona urbana e 10 na zona rural do município. A maior parte da turma era composta pelo público feminino e era um campo produtivo de trabalho, uma vez que havia uma boa interação entre os alunos. Para a primeira parte de nossa pesquisa empírica, nos fizemos presentes na turma durante dois dias consecutivos, desenvolvendo todas as atividades planejadas (Apêndice 3) em Díades.

O andamento específico de nossa pesquisa ocorreu em três etapas: a princípio com a professora, que identificamos pelo pseudônimo - Rita, que apresentou seus argumentos e informações a partir de uma entrevista que realizamos, além disso, estivemos em contato direto com a turma em sala de aula para desenvolvimento das primeiras atividades. Nessa etapa, levamos tarefas com base no Modelo van Hiele incrementadas com materiais manipuláveis, mais especificamente sólidos geométricos e figuras planas, cujo objetivo foi verificar como estava a turma em termos de conhecimento geométrico. Conforme elencamos, nessa etapa, a dinâmica foi trabalhar com a turma distribuída em Díades aleatórias, cujos resultados foram positivos no quesito de interação, porém frágil em termos de conhecimentos geométricos.

Conhecendo a forma como a turma trabalhava e se comunicava, mantivemos nosso objetivo de trabalhar com Díades, porém precisávamos selecioná-las de acordo com os nossos objetivos. Pensando nisso, planejamos uma nova etapa, no intuito de trabalhar de forma individual com aqueles alunos na perspectiva de saber como estava o pensamento e compreensão geométrica de cada um deles, para, posteriormente, planejarmos a forma de trabalhar com as Díades. Com isso, aplicamos os testes van Hiele na proposta de Nasser e Sant'anna (2010), consequentemente identificando o Nível de pensamento geométrico individual dos alunos a partir do percentual elencado pelas autoras.

Tendo conhecimento desses níveis, organizamos a última etapa de contato direto com a turma para obtenção dos dados na nossa pesquisa. Essa foi também a etapa mais complexa, pois propusemos as tarefas com todos os alunos, distribuídos em Díades, porém nos detemos especificamente nas três Díades formadas pelas alunas que conseguiram apresentar melhor desempenho nos testes van Hiele.

Trabalhamos, nessa etapa, com quatro problemas geométricos e com o Tangram para o desenvolvimento das atividades trabalhadas em quatro Episódios, pois sabemos da relevância de trabalhar com resolução de problemas e material manipulável na construção do conhecimento matemático, por meio das interações e comunicação, que são essenciais para o desenvolvimento do pensamento, conforme argumenta Boavida et al (2008).

> O professor que proporciona aos alunos tarefas desafiantes e apropriadas ao seu conhecimento, está a proporcionar o estabelecimento de conexões entre vários tópicos dentro e fora da Matemática e a estimular a argumentação e a comunicação recorrendo a diferentes representações. Em suma, está a contribuir para o desenvolvimento do pensamento independente e crítico, tão essencial a várias facetas da vida (BOAVIDA et al, 2008, p. 33).

Para acompanhar de uma forma mais adequada a comunicação oral das três Díades, usamos aparelho de áudio para as gravações, e observação direta. Mesmo em meio às constantes dificuldades, essas Díades apresentaram, desde o início, um comprometimento considerável diante do que era proposto, o que é um significativo avanço quando assumimos essa dinâmica de trabalho.

Nos capítulos seguintes, apresentamos de forma detalhada o desenvolvimento específico das três Díades, organizadas em três estudos de caso, já que queremos analisar a forma como cada uma interage e se comunica na resolução dos problemas. Em cada caso, as Díades estão identificadas pelos pseudônimos: **Ana e Cecília, Vitória e Alice**, **Júlia e Amanda.**

4.3 Etapas da pesquisa empírica

A princípio conhecemos o perfil da turma, a partir de uma entrevista semiestruturada prestada pela professora regente, o que nos serviu de base para organizarmos as tarefas propostas. Nos primeiros contatos com a turma, trabalhamos com Díades aleatórias em sala, onde os próprios alunos escolhiam seus pares. Nessa etapa, conforme nossos objetivos, propomos tarefas com base na teoria de van Hiele (NASSER & SANT'ANNA, 2010; OLIVEIRA & GAZIRE, 2012) incrementada com o uso de alguns materiais manipuláveis (sólidos geométricos e figuras planas).

Com base na teoria de van Hiele a partir das atividades desenvolvidas nessa etapa, analisamos que todos os alunos apresentavam um Nível muito semelhante e, em virtude disto, organizamos outra etapa a ser desenvolvida com aqueles alunos, porém de forma individual, com objetivo de identificar o Nível de desenvolvimento do pensamento geométrico de cada um deles. Assim, em três encontros com a turma, aplicamos os Testes van Hiele, que é um conjunto de alternativas e questões propostas por Nasser e Sant'anna (2010) (Anexo 3) que permite a identificação do Nível de pensamento geométrico dos alunos, mais especificamente, dos três primeiros níveis. Ao analisarmos o resultado dos testes, organizamos a última etapa da pesquisa com resolução de problemas subsidiados com o uso do Tangram, que aconteceram em quatro Episódios.

Sabemos da relevância da resolução de problemas, porém, para que ela aconteça positivamente, isto é, com compreensão, diversidade de estratégias para resolução e formalismo, é necessário ter o mínimo de conhecimento prévio e interpretação. Como a nossa proposta de pesquisa envolve particularmente, a resolução de problemas, o uso de materiais manipuláveis e a comunicação entre os alunos, consideramos mais pertinente, baseado em nossos objetivos, analisar o desenvolvimento das alunas que apresentaram melhor desempenho nos testes, pois entendemos que a comunicação entre ambas, na formação de Díades, seria mais relevante para responder nossa questão diretriz: *Como os alunos se comunicam ao desenvolverem atividades com resolução de problemas geométricos, segundo o Modelo van Hiele?*

De acordo com Matos e Serrazina (1996) cada Nível apontado pelo Modelo van Hiele, possui seus próprios símbolos linguísticos, a sua própria linguagem, consequentemente dificultando a comunicação entre pessoas que estão em níveis diferentes. Certamente, por esta razão é que a aprendizagem de Geometria é tão problemática no Ensino Básico, reflexo de um ensino descentralizado dos níveis dos alunos, que muitas vezes, mesmo ao término do Ensino Médio, está muito aquém do que o professor espera. Segundo os autores, a aprendizagem é possível, desde que o professor faça a escolha de uma abordagem didática adaptada ao Nível dos alunos. É fato que o avanço de Nível não se dá de uma hora para outra, porém a qualidade do ensino aliada à forma de comunicação por meio das fases sequenciais pode garantir esse progresso.

Conforme o planejamento prévio para o desenvolvimento da pesquisa, realizamos entre os meses de fevereiro e abril de 2013 a primeira etapa da pesquisa empírica – entrevista semiestruturada com a professora regente e propostas de tarefas geométricas com toda a turma do 3º Ano do Ensino Médio organizada em Díades.

Ao pesquisar por meio da observação todo processo desenvolvido, fomos também participantes, uma vez que assumimos a turma para propor e orientar todas as tarefas que foram desenvolvidas.

Após a realização da entrevista, com a permissão da professora, passamos a desenvolver as tarefas com a turma, que sempre era indagada sobre conceitos geométricos atrelados às propostas baseadas no Modelo van Hiele. Nessa etapa, tivemos um momento de questionamentos e discussão com a turma, a fim de conhecê-la melhor. A cada encontro, levamos para sala de aula roteiros de atividades e questões a serem resolvidas a partir do conhecimento prévio de Geometria e o uso de sólidos geométricos baseados nas propostas de Nasser e Sant'anna (2010) e Oliveira e Gazire (2012).

Em cada encontro, observamos de forma direta os diálogos e questionamentos dos alunos e a forma de comunicação entre eles frente às atividades, por meio de áudio-gravação, notas de campo e fotografias.

Partindo desse ponto, realizamos as últimas etapas da pesquisa empírica entre os meses de agosto e outubro de 2013 – Testes de van Hiele para identificação do Nível individual de compreensão geométrica dos alunos e proposta de resolução de problemas com as Díades formadas pelas alunas que apresentaram melhor desempenho nos testes.

Foram propostos quatro problemas por nós formulados, sendo desenvolvido um a cada encontro. Em todos os encontros citados, gravamos em áudio, toda a comunicação e observamos suas estratégias na resolução dos problemas que também foram apresentadas de forma escrita, deixando registrado na folha de resolução.

4.4 Instrumentos e Categorias de Análise de Dados

Nos momentos em que as Díades apresentavam as estratégias para resolver os problemas, fazíamos a observação direta e registros com fotografias e anotações da forma como interagiam, como demonstravam compreender o problema, como dialogavam e reagiam à nossa proposta. No quadro 02, apresentamos a organização dos instrumentos de análise de dados e suas respectivas descrições.

Quadro 02 - Descrição dos Instrumentos de Análise de Dados.

Instrumentos de Análise de Dados	Descrição
Entrevista semiestruturada	Gravação em áudio com transcrição de forma íntegra.
Tarefas Propostas	Roteiros de atividades com materiais manipuláveis e problemas com registros das estratégias utilizadas pelas alunas nas atividades desenvolvidas.
Documentos	Gravação em áudio com as transcrições mais relevantes para pesquisa, anotações de fatos relevantes frente à comunicação

	dos alunos nas tarefas e fotografias no momento das atividades.

Fonte: Registros nossos.

Pensando na forma como, muitas vezes, acontece o ensino de Geometria em escolas públicas do nosso país, e as consequências refletidas na aprendizagem, tivemos como Categoria de Análise a Priori *o Nível de pensamento geométrico de alunos ao terminar o Ensino Médio.* No princípio da pesquisa empírica, o registro mais efetivo que tivemos foi o posicionamento posto pela professora regente na entrevista sobre a turma e metodologias utilizadas. Com isso, fizemos uma reflexão sobre sua prática com a turma e, a partir dessa reflexão, passamos a fazer o Planejamento das Atividades a serem desenvolvidas. Entretanto, ao darmos continuidade à nossa proposta foram emergindo outras categorias de análise, portanto, Categorias a Posteriori, que nomeamos por *Interação e diálogo*, *Comunicação por meio do pensamento geométrico* e *Estratégias na resolução dos problemas geométricos.* No quadro abaixo apresentamos de forma detalhada cada uma dessas categorias.

Quadro 03 - Descrição das Categorias de Análise.

Categorias de Análise	Descrição
Interação e diálogo	Nessa categoria enfatizamos como as Díades interagem entre si, e os diálogos apresentados com seu desenvolvimento na resolução dos problemas.
Comunicação a partir do Pensamento Geométrico	A partir das atividades planejadas com base no Modelo van Hiele (1ª etapa), e observações acerca do desenvolvimento das Díades, enfatizamos, nessa categoria, a forma como apresentaram o pensamento geométrico, por meio de suas expressões promulgada através da comunicação oral (Explicações e Diálogos) e escrita (Registros apresentados na folha de respostas).

Estratégias na resolução dos problemas geométricos	Aqui enfatizamos a forma como as Díades apresentaram suas estratégias para resolver os problemas propostos com base no Modelo van Hiele, através da comunicação escrita e oral (Explicações e Diálogos e Registros apresentados na folha de respostas). Dessa forma, destacamos: - O Nível de pensamento geométrico expresso a partir das estratégias utilizadas; - As expressões orais e escritas apresentadas por cada Díade na resolução dos problemas, seus diálogos ou explicações; - A resolução de problemas por meio de materiais manipuláveis, especificamente fazendo uso do Tangram.

Fonte: Registros nossos.

4.5 Problemas propostos em quatro Episódios

Os problemas que propomos nos quatro Episódios especificados e desenvolvidos no mês de setembro de 2013, foram os seguintes:

Episódio 1: “As peças do Tangram: o que disse Mário?”

A professora de Matemática levou para sua aula um Tangram feito em madeira, sem explicar o nome de cada peça que o formava. Mônica já tinha visto e estudado um pouco com o material manipulável em sua antiga escola. Assim, ela propôs que seu colega Mário falasse o nome dos polígonos que formam o Tangram. Mário, se sentindo desafiado, insistiu em responder detalhadamente. Se Mário respondeu corretamente, quais foram suas respostas? Que peças Mário apontou como congruentes, por quê?

Com esse problema, o nosso principal objetivo foi identificar como as alunas compreendiam a respectiva definição e conceito de polígono e congruência. Começamos com esse problema, que consideramos mais básico e as Díades podiam relacionar o contexto do que era pedido, ao material (Tangram), respondendo numa folha de papel A4.

No segundo Episódio que chamamos de Episódio 2: *"Desvendando as curiosidades de Catarina"*, a proposta se deu com objetivo de compreender como as alunas faziam representações geométricas de polígonos usando apenas três peças do Tangram e com isso, como elas apresentam suas justificativas por meio da comunicação oral e escrita. O problema proposto foi o seguinte:

Depois que a professora de Matemática apresentou o Tangram para a turma, contextualizando sua história e alguns conceitos específicos deste quebra-cabeça, Catarina, por curiosidade, quis construir, usando apenas o quadrado e dois triângulos pequenos, alguns polígonos usuais. Quais são as possibilidades de construção de Catarina? Como é possível essas construções?

No terceiro Episódio – Episódio 3 "*Cálculo de áreas: os cálculos de Pedrinho",* o nosso objetivo foi identificar como as Díades desenvolviam seu raciocínio baseando-se na ideia de área de figuras planas e relações entre figuras. Assim, propomos problema seguinte:

Se Pedrinho tomou como unidade de medida no cálculo das áreas das demais figuras, apenas o triângulo pequeno e o quadrado (peças juntas), como ele denotou a área do triângulo médio, do paralelogramo e do quadrado original (quadrado formato pelas sete peças do Tangram)?

Por último, no Episódio 4 "*Competição Geométrica"* nosso principal objetivo foi analisar se as alunas conseguiam compreender e distinguir algumas propriedades de figuras geométricas, o que está diretamente ligado com o segundo Nível do Modelo van Hiele. O problema trabalhado foi o seguinte:

Marina e Isabela entraram numa disputa para ver quem acertaria mais questões numa competição geométrica. Ricardo era o responsável em marcar os pontos da disputa. Sabendo que as perguntas eram: ***Se ABCD é um quadrado, então as suas diagonais são perpendiculares? Se as suas diagonais são perpendiculares, então ABCD é um quadrado? Em todo paralelogramo as diagonais se cortam ao meio?*** *E que Isabela contabilizou dez pontos por ter acertado as três, quais foram suas possíveis respostas?*

Os resultados frente ao desenvolvimento das Díades em cada Episódio, estão explicitados nos estudos de caso apresentados nos Capítulos 6, 7 e 8 dessa pesquisa.

5. A TURMA EM PESQUISA: COMO OS ALUNOS DESENVOLVEM ATIVIDADES GEOMÉTRICAS?

Neste capítulo, apresentamos o desenvolvimento da turma na segunda etapa da pesquisa e resultados obtidos. Apresentamos alguns extratos da entrevista realizada com a professora regente que identificamos pelo pseudônimo Rita e algumas das atividades realizadas pelas Díades aleatórias que nomeamos por Díade 1, Díade 2, Díade 3, etc. O desenvolvimento específico, encontra-se no Apêndice 5. Além disso, nesta seção mencionamos um pouco do desenvolvimento específico nos testes van Hiele, realizado de forma individual com os alunos.

5.1 A Professora regente, a Escola e a Turma do 3ª Ano

A professora Rita, é Especialista em Matemática e exerce o ofício docente há 10 anos nas escolas públicas do município de Cabaceiras, onde realizamos a pesquisa. Atualmente, Rita é professora efetiva da Rede Estadual. Na entrevista (Apêndice 2) ela apresenta parte de suas concepções em relação ao exercício docente, e destaca a importância que há em trabalhar com recursos didáticos - concretos e tecnológicos. Entretanto, ressalta os desafios que existem para inseri-los nas aulas e também das limitações dos alunos. Rita destacou sobre algumas de suas experiências com trabalhos desenvolvidos com os materiais manipuláveis que, segundo ela, apresentou grande relevância para o desenvolvimento da disciplina e empenho dos alunos.

Com o posicionamento da professora Rita, frente aos nossos questionamentos durante a entrevista semiestruturada, conseguimos planejar, mais adequadamente, as propostas que foram desenvolvidas com a turma. A escola que fazemos referência apresenta uma estrutura pequena e condições pouco favoráveis para o desenvolvimento de algumas atividades, mesmo se tratando de uma turma pequena. Nessa escola, biblioteca e sala multimídia estão acopladas em um mesmo espaço, o que, por vezes, limita o uso de recursos como Datashow e outros.

A turma é consideravelmente pequena, participativa, com público predominantemente feminino. No início da pesquisa nos reunimos com eles para conhecer o sentimento que tinham com relação à Matemática (Figura 04). Os comentários foram muitos e variados, alguns alunos disseram considerar *a "pior coisa do mundo"*, outros falaram "*que é bom, mas é muito difícil"*, e outros disseram gostar, pois “*Matemática, Química e Física são disciplinas boas que nos faz pensar*!”. Depois perguntamos, especificamente sobre a Geometria, com a seguinte diretriz: *“GEOMETRIA: O que vocês entendem por ela?”* uma das alunas foi bem objetiva dizendo espontaneamente “*é o estudo das formas*”, outros disseram “*é onde estudamos ângulos, áreas, triângulos e etc*.” e outros disseram ainda, que nunca haviam estudado. Conforme apresentavam seu posicionamento frente às nossas perguntas insistíamos no surgimento de mais argumentos na tentativa de perceber um pouco de sua familiarização com a Matemática.

É um grande desafio o ensino de Matemática, pois além da aversão à disciplina, muitos alunos, mesmo em níveis de escolaridade avançados, carecem de domínio de conceitos fundamentais para seu desenvolvimento. Muitos alunos veem cada conteúdo como algo isolado e não conseguem fazer uma interligação com outros conceitos já estudados, sendo assim prejudicial para o ensino da disciplina ou mesmo da aprendizagem.

É importante buscar meios pelos quais os alunos possam compreender que estudar Geometria está além da compreensão das formas. Mas é uma experiência que envolve aprendizagem em múltiplos campos: a visualização, a linguagem, as aplicações da Matemática, entre outras coisas (MATOS e SERRAZINA, 1996, p. 266).

Figura 04 - Primeiro encontro com a turma.

Fonte: Registros nossos.

5.2 O desenvolvimento da Turma em atividades ligadas ao Modelo van Hiele

Sendo nossa proposta desenvolver o trabalho em Díades, perguntamos *“O que vocês pensam do trabalho desenvolvido em pequenos grupos?”.* Nesse momento surgiram muitos comentários, pois a maior parte considerava muito positivo o trabalho em grupo. De acordo com alguns alunos, trabalhos dessa natureza são melhores, pois os colegas algumas vezes, esclarecem de forma mais específica e simples do que o professor. Esse fato certamente se dá em virtude da aproximação de diálogos e níveis.

Após ouvir os alunos, falamos sobre a importância que há na interação social, desde que o trabalho aconteça de modo autêntico. Assim, laçamos a proposta: *"Que tal fazermos um trabalho em que haja essa interação?"* E todos, demonstrando grande empolgação, concordaram.

Orientamos a turma a se organizarem em Díades, pois a partir daquele momento, tínhamos algumas tarefas a cumprir. Entretanto, estando presentes dezessete alunos, houve a necessidade de formar um grupo constituído por três integrantes, ficando assim, organizado sete Díades e um grupo com três alunos (Figura 05).

Figura 05 - Díades em desenvolvimento.

Fonte: registros nossos.

Distribuímos o material e roteiro de atividades para toda turma assim organizada. Com a atividade denominada *Distinguindo o universo Plano do Tridimensional*. O nosso objetivo foi compreender como os alunos reagiam frente às atividades, como apresentavam seu raciocínio geométrico e sua comunicação oral e escrita.

A princípio, distribuímos variados sólidos geométricos, deixamo-los à vontade para manipular e levantar argumentos relacionados, em seguida, distribuímos o primeiro Roteiro de Atividades (Apêndice 4.2) e orientamos que as Díades se comunicassem entre si e refletissem respondendo de forma escrita aos questionamentos, o que, de acordo com Van de Walle (2009) é importante para reflexão sobre suas respostas.

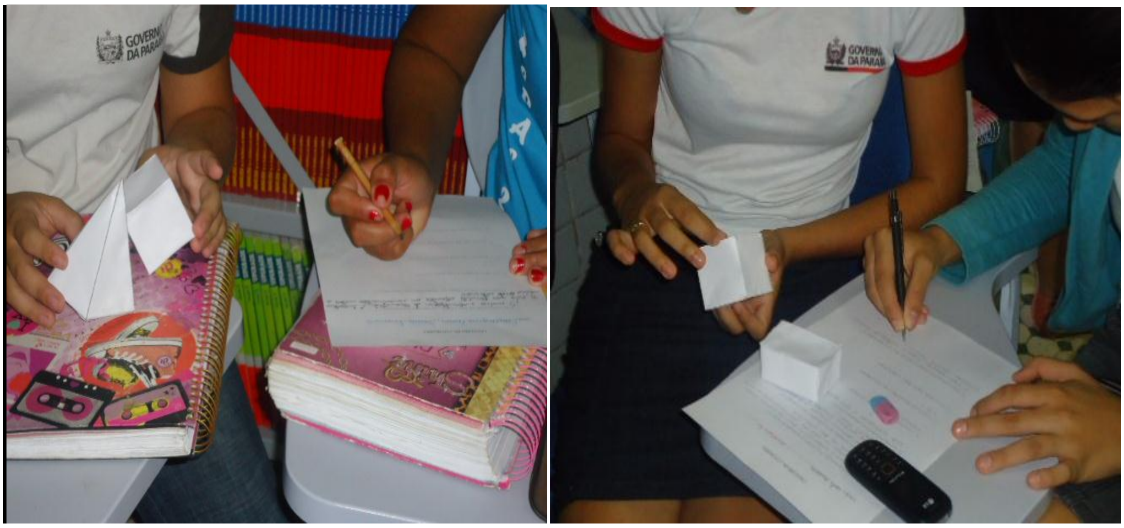
Uma das questões propostas foi: *"O que vocês consideram sobre o ensino e aprendizagem de Geometria?"* Uma das Díades que identificamos por Díade 1, afirmou: "*o ensino e aprendizagem de Geometria é importante, pois nos permite expandir os conhecimentos sobre o espaço onde estamos e assim propiciar modificações*". Analisamos que a Díade relacionou o conceito à prática cotidiana, fato que os leva, muitas vezes, a apresentar explicações praticamente baseadas como refere Levenson, Tsamir e Tirosh (2004) e Medeiros (2010).

No momento da resposta a essas questões, todas as Díades estavam com sólidos geométricos em mãos. Então ao perguntarmos *"Quais as figuras geométricas que observam?"*, a mesma Díade afirmou que eram "*pirâmide e cubo"*, reconhecendo que eram "*sólidos e consequentemente figuras espaciais"*. Outras Díades disseram ser um "*quadrado, retângulo, etc"*, olhando apenas para as faces que formavam os sólidos que tinham em mãos (cubos e paralelepípedos). Entretanto, não mencionaram os nomes dos sólidos.

Muitos alunos, mesmo ao término do Ensino Médio, identificam as figuras geométricas a partir apenas do aspecto visual, não mencionando conceitos e propriedades, fato que caracteriza o primeiro Nível do Modelo van Hiele - Nível de Reconhecimento ou Visualização.

As imagens da figura 06 apresentam as Díades desenvolvendo as atividades com o material manipulável (sólidos geométricos) a partir da comunicação oral e escrita.

Figura 06 - Alunos em ação: atividade *"Distinguindo o universo Plano do Tridimensional"*.



Fonte: Registros nossos.

Ao questionarmos: *"Existe relação entre os sólidos e as figuras planas?"*, mais uma vez a Díade 1, afirma: "*sim, pois é a partir das figuras planas que se originam os sólidos*". E a Díade 2 disse: "*sim, pois todas as figuras possuem bases planas*".

Observamos, a partir da comunicação oral das Díades, que ambas entenderam o sentido da questão e compreendem que a formação dos sólidos depende das figuras bidimensionais.

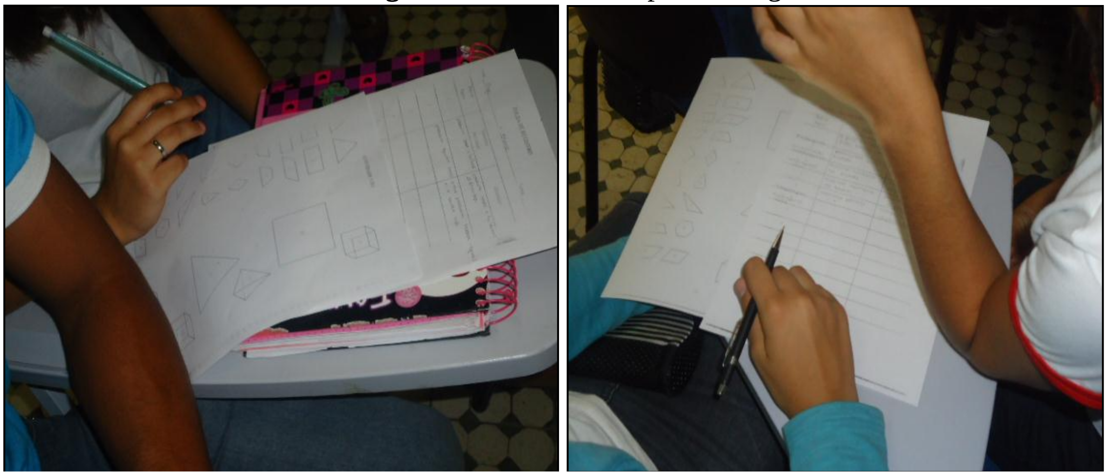
Após essas atividades iniciais, propomos uma nova atividade denominada atividade VH (van Hiele) cujo objetivo era compreender como a turma, a partir da visualização e comparação das figuras, fazia relações entre figuras bidimensionais e tridimensionais e como apresentavam seu pensamento geométrico. O Roteiro dessa Atividade (Anexo 2) é composto por uma sequência com a ilustração de doze pares de figuras planas e espaciais e também por uma folha de registro (NASSER & SANT'ANNA, 2010), na qual orientamos que as Díades observassem as figuras identificando elementos em comum e diferenças entre as figuras planas e espaciais, conforme registros apresentados na figura 07.

Nessa atividade, o maior desafio para a turma foi nomear as figuras tanto espaciais quanto planas que, por vezes, não conseguiam diferenciar. Uma aluna gesticulava, apontando a forma do losango e perguntava: "*professora, como é o nome daquela figura assim, (*gesticulando*) que parece o balãozinho de São João*?" E insistíamos para que eles refletissem e pensassem com base nos conceitos conhecidos, em relação às figuras, fazendo perguntas do tipo: *o que você estudou sobre essa figura e o que entende sobre ela?* Com isso, mesmo algumas vezes não chegando à classificação correta, eram instigados a pensar mais criteriosamente.

O fato de trabalhar com o material manipulável é algo de grande importância, uma vez que o pensamento entendido como uma prática mediada e social na perspectiva de Vygotsky, acontece também a partir do concreto. Assim, para o primeiro par de figuras (dois triângulos), a maioria, depois de algumas observações, afirmou que ambos são triângulos e a diferença está em relação ao tamanho. A Díade 1, fazendo maiores observações, conseguiu relacionar também ao conceito de área, dizendo: "*ambas são triangulares e a diferença está em relação à área e altura*".

Sobre o segundo par de figuras (quadrado e retângulo), a Díade 3 disse: "*as figuras são quadrado e retângulo e são de faces diferentes*". Entretanto, não reconheceram que o quadrado é também retângulo, por não reconhecer suas propriedades. Aspectos como esses, sublinhado por Crowley (1994), dão indícios de que o Nível de pensamento geométrico da Díade está de acordo com o primeiro Nível do Modelo van Hiele (Reconhecimento ou Visualização).

Figura 07 - Alunos comparando figuras.



Fonte: registros nossos.

Em relação ao terceiro par de figuras (um retângulo e um paralelogramo), todas as Díades só conseguiram relacionar como elemento comum o número de lados e, por diferença, só o tamanho, levando em consideração apenas a forma das figuras, sendo essa mais uma característica do primeiro Nível do Modelo van Hiele. A Díade 3 disse que ambas "*não tem nada em comum*" e a diferença é que "*um é mais em pé e o outro tem uma forma mais inclinada*". Nos pares de figuras 10 (quadrado e cubo) e 11 (triângulo e pirâmide) havia a necessidade de reconhecimento do sentido bidimensional e tridimensional, entretanto, a maioria dos alunos não conseguiu diferenciar.

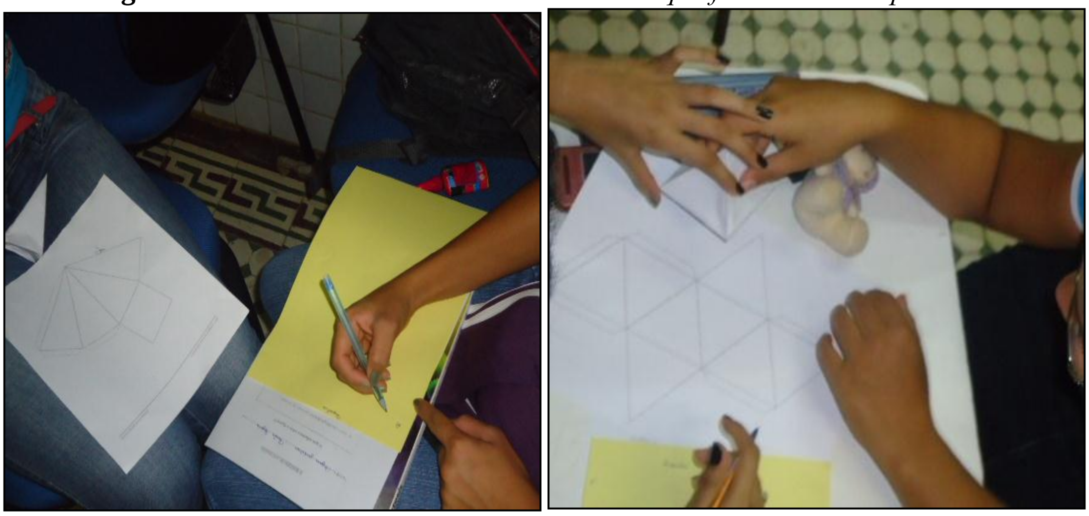
Vimos que, de acordo com os PCN (BRASIL, 1997), o reconhecimento de formas e representações espaciais é uma competência que deve ser efetiva, mesmo no Ensino Fundamental. Entretanto, ao concluir o Ensino Médio, grande parte dos alunos ainda apresentam grandes dificuldades para relacionar ou mesmo diferenciar o plano do espaço, certamente revelando a fragilidade que ainda há com relação ao ensino de Geometria no Brasil.

Em mais um encontro com a turma propomos a atividade que tinha por título *"De que forma estamos pensando?"* (Apêndice 3). Nosso principal objetivo foi analisar se os alunos conseguiam compreender que as figuras geométricas tridimensionais são formadas por elementos já conhecidos do universo bidimensional. Para tanto, levamos os sólidos geométricos e suas respectivas planificações. Distribuímo-los junto ao Roteiro de Atividades e os demais materiais necessários para todas as Díades formadas, conforme registros apresentados na figura 08. Foi uma experiência também significativa, pois os alunos a todo tempo manipulavam, observavam, comparavam e faziam questionamentos a partir de sua comunicação.

Por exemplo, a Díade 3 estava com uma pirâmide de base pentagonal e sua planificação em mãos. Ao perguntarmos no Roteiro qual era a classificação do sólido, eles responderam que era "*um prisma*". Nessa mesma atividade, a Díade também não conseguiu identificar o número de faces, vértices e arestas de forma correta. A Díade identificou que a figura plana que corresponde às faces laterais é um triângulo, calcularam sua área, entretanto, não conseguiram calcular o perímetro. Ao perguntarmos, também no roteiro, qual era a figura plana que correspondia à base, disseram ser "*um trapézio*", quando na verdade, era um pentágono.

Com o desenvolvimento da turma nessa atividade, consideramos que é necessário um investimento maior no trabalho com Geometria, pois embora seja uma ciência tão importante no desenvolvimento intelectual, muitos alunos ainda carecem demasiadamente de conhecimentos básicos e fundamentais e apresentam dificuldades em justificar, nomear e explicar, principalmente de forma escrita.

Figura 08 - Desenvolvimento da atividade *"De que forma estamos pensando?".*



Fonte: registros nossos.

Essa atividade levou os alunos a interagirem e dialogar mais, pois foi necessário relacionar o plano e o espaço, ao mesmo tempo pensar em conceitos como área e perímetro, embora os alunos estivessem mais limitados em observar apenas a formação do sólido geométrico a partir da respectiva planificação.

Em outro momento, com o objetivo de compreender melhor qual o Nível do Modelo van Hiele, em que a turma se encontrava, apresentamos outra proposta que envolvia boa parte dos conceitos já explorados pelas Díades. A atividade tinha por título: *"Do que estamos falando?"* Nessa proposta, distribuímos aos alunos uma folha A4 com as seguintes figuras *quadrado, losango e retângulo.* Propusemos que identificassem classificação, propriedades, conceitos ou relações compreendidas sobre ou entre aquelas figuras, conforme registros na figura 09.

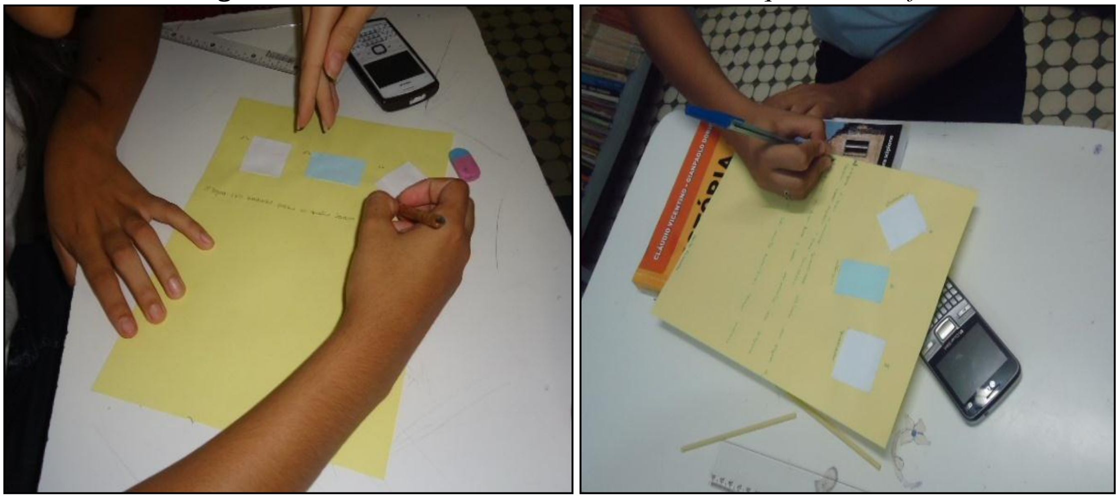
No desenvolvimento dessa atividade, a turma continuando a trabalhar em Díades, apresentou-se bem envolvida e os alunos conseguiram expressar o que entendiam baseado em nossa proposta. A Díade 4, por exemplo, classificou cada uma das figuras, reconhecendo que são quadriláteros. Entretanto, não conseguiu relacioná-las, pois só as reconhecia por sua forma. E assim disse: "*são quadriláteros porque todos possuem 4 lados, mas com formas diferentes. O quadrado tem seus 4 lados iguais, o losango também, mas por sua forma inclinada se diferencia do quadrado. O retângulo também com 4 lados, mas tem 2 maiores e dois menores entre si*".

Analisamos que a Díade parece entender o sentido de quadrilátero. Entretanto, não compreende as propriedades, pois não relaciona as figuras, baseando-se apenas em sua forma ao dizer que o losango se diferencia do quadrado por apresentar uma "forma inclinada" e o retângulo, por possuir lados com tamanhos diferentes. Aspectos como esses justificam o Nível de pensamento geométrico que, de acordo com o Modelo van Hiele, é apenas de reconhecimento.

Nessa mesma atividade a Díade 5 disse: "*1ª figura: é um quadrado, possui os quatro lados iguais, e um exemplo de um quadrado nós temos a cerâmica de uma casa. 2ª figura: é um retângulo, tem lados paralelos e se parece com uma geladeira. 3ª figura: é um losango, possui duas diagonais e se parece com uma pipa.*" Analisamos que a Díade, para dar sentido à sua explicação, sente a necessidade de fazer relação com objetos concretos, característica destacada por Yackel e Cobb (1996). Percebemos que essa alunas quiseram relacionar o conceito abstrato a exemplos concretos, inclusive desenharam os exemplos citados. Embora a Díade ressalte conceitos que parecem compreensíveis, como lados paralelos e diagonais, analisamos que não compreende as propriedades das figuras. Com isso, mais uma vez, parece não entender a distinção plano e espaço, bem como o rigor matemático.

A Díade 1 classificou as figuras de forma correta, porém também não compreendeu a questão plano espaço, ao fazer relações com objetos concretos dizendo que um losango é um balão de São João e que um quadrado é um dado. Para o retângulo escreveram: "*área=b.h, formado por dois quadrados, exemplo de retângulo: um quadro*". Em relação ao losango, expressou: "*formado por 4 triângulos. No meio da figura, forma-se um ângulo de 90° (*traçaram as diagonais da figura e marcaram o ângulo*), exemplo de losango: um balão*". Para o quadrado escreveram: "*calcula-se a* *área da seguinte forma: A=L² ou A=L.L, possui os 4 lados iguais. Exemplo de quadrado: um dado*".

Figura 09 - Desenvolvimento da atividade *"Do que estamos falando?"*.



Fonte: registros nossos.

A comunicação oral e escrita dessas Díades favoreceu a compreensão de aspectos frágeis do ponto de vista do pensamento geométrico. Muitos desses alunos concluem o Ensino Médio com um nível de desenvolvimento muito aquém do que propõe as Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 2006). Quase sempre conseguem fazer relações baseadas apenas no aspecto visual da figura, sem muita criticidade ou rigor matemático.

Para reforçar a proposta de atividade anterior, no último encontro dessa primeira parte da pesquisa empírica com a turma, apresentamos alguns exemplos de figuras em slides, (quadrado ou losango, retângulo, paralelogramo e trapézio) com o objetivo de ouvir a turma, suas interpretações, explicações e diálogos a partir da comunicação oral com os seguintes questionamentos: Quais das figuras são retângulos? Quadrados? Quais dos segmentos são paralelos? Perpendiculares? Por quê? Quais dos ângulos são retos? Agudos? Obtusos? Por quê?

Os alunos apontaram para a segunda figura (retângulo), pois reconheciam como retângulo a partir da sua forma e lados. Outros alunos disseram que o paralelogramo era um retângulo e outros discordavam. Uma aluna disse: "*é sim, se deitá-lo fica do mesmo jeito do retângulo*", outros diziam: "*é não, é não! Olha a diferença*!", e perguntamos: qual a diferença? Mas não conseguiram responder. Então perguntamos: o que é um retângulo? Alguns responderam: "*é o que tem dois lados iguais e dois diferentes*". Apontando para o retângulo outra aluna disse: "*esse aqui é um retângulo, aquele outro é* *aquele nominho, como é? Como é? Paralelepípedo!*". Na verdade, a aluna estava querendo dizer paralelogramo, entretanto, não lembrava a nomenclatura.

Ao perguntarmos quais seriam quadrados, disseram, a princípio, que não havia quadrados, pois a primeira figura era um losango, depois afirmaram que seria um "*quadrado inclinado*". Em relação aos segmentos paralelos e perpendiculares, conseguiram identificar facilmente. Entretanto, com relação aos ângulos apresentaram maiores dificuldades, pois muitos não lembravam a definição de ângulos agudos ou obtusos.

5.3 O Pensamento Geométrico da Turma baseado no Modelo van Hiele

Com base nessas atividades com a turma, analisamos que ainda há muito o que fazer em busca de ampliar a aprendizagem de Geometria. Entretanto, essa experiência nos mostrou que é possível, com planejamento e interesse, mobilizar de forma mais significativa a sala de aula, onde os alunos, efetivamente participam, interagem e apresentam seu nível de conhecimento de modo mais legítimo, por meio de suas ações, comunicação e justificativas.

A partir de atividades planejadas, é possível que a turma inteira crie situações em que os alunos deixem de participar individualmente e passem a socializar suas ideais. Assim, é necessária uma atenção especial do professor em situações dessa natureza. Conforme afirmam Bishop e Goffree (1986), ao envolver os alunos numa situação desta, os professores podem tentar criar um ambiente descontraído no qual os alunos possam exteriorizar os seus raciocínios, mesmo quando estes não estão corretos.

Todos os alunos que compõem a turma apresentaram um Nível de pensamento geométrico muito semelhante, alguns apresentaram mais facilidade em comunicar-se de forma oral ou escrita, outros têm maiores dificuldades ou se mostram timidamente em relação a essa prática. Em relação ao bidimensional e tridimensional notamos muitas carências na diferenciação, pois a maioria trata essas dimensões de igual maneira.

A nomenclatura ou classificação foi também motivo de dificuldade para a maioria, mas o fato de estarem entusiasmados em todas as tarefas propostas foi muito positivo e a interação e comunicação entre as Díades favoreceu de forma significativa nas análises. Bishop e Gofree (1986) já salientavam essa eficácia, uma vez que o trabalho em pequenos grupos evidencia favoravelmente a interação, as explicações e, consequentemente o diálogo.

Em relação ao Nível com base no Modelo van Hiele, analisamos que a turma apresentou em todas as atividades características que indicam o Nível de Reconhecimento ou Visualização, estando, assim, no primeiro Nível, pois reconhecem ou compreendem a nomenclatura das figuras, apenas por sua aparência global, o que de acordo com Nasser e Sant'anna (2010) e Crowley (1994) são características que marcam esse Nível de pensamento geométrico, de acordo com o referido Modelo.

5.4 Os testes van Hiele na identificação do Nível de pensamento Geométrico de cada aluno

Após o desenvolvimento da turma nas atividades apresentadas na seção anterior, aplicamos alguns testes van Hiele (Anexo 3) a serem desenvolvidos de forma individual, pois o nosso objetivo era também analisar o Nível de pensamento geométrico individual desses alunos.

Os referidos testes na proposta de Nasser e Sant'Anna (2010) revelam que, uma vez que o aluno consiga acertar 60% do teste, significa que ele atingiu o Nível especificado no teste. As autoras sugerem os testes para identificação dos três primeiros níveis. Com base nessa proposta, os alunos desenvolveram um teste a cada encontro no total de três encontros.

Ao fazermos as análises percebemos que a maioria dos alunos, ao trabalhar individualmente, não conseguiram atingir nem o primeiro Nível, apresentando muitas dúvidas ao responder. Em relação ao primeiro teste (Nível Básico), a maior parte da turma não conseguiu responder corretamente nem 50% do total e seis alunas atingiram 100% do teste (Apêndice 12). No segundo teste (Nível 1), as dificuldades foram ainda maiores e as referidas alunas também conseguiram obter um desenvolvimento mais satisfatório em relação aos demais, se aproximando do percentual mínimo que revela o Nível especificado (Apêndice 12).

Essas alunas, embora apresentando algumas dificuldades, demostraram uma segurança maior em relação aos demais colegas no momento do desenvolvimento de todos os testes. No terceiro encontro, ao ser proposto o último teste (Nível 2), nenhum dos alunos conseguiu, no mínimo, se aproximar dos 60% de acertos esperados para atingir o Nível de Abstração. Ao término, analisamos que apenas as seis alunas citadas se aproximavam, de acordo com o desenvolvimento nos testes, do Nível 1 e foi o resultado máximo em relação aos demais alunos da turma.

Conforme Boavida et al (2008), mesmo com o desenvolvimento de diversas tarefas com os alunos, o ensino ficaria incompleto sem a inserção da resolução de problemas. Com base nisso, ao analisarmos o resultado nos testes, passamos para última etapa da pesquisa empírica, na qual propormos problemas em quatro Episódios com o uso do Tangram à turma. Porém, de acordo com nossa proposta e objetivos nos detemos em analisar especificamente o desenvolvimento das seis alunas citadas, organizadas em três Díades, sendo assim mais favorável para responder à nossa questão de pesquisa atendendo aos objetivos.

Entendemos que a proposta de resolução de problemas exige uma boa base de conhecimentos prévios, uma vez que é necessário interpretar as relações envolvidas e traduzir as informações em linguagem matemática, para efetuar as estratégias planejadas e, ao término, verificar a solução. A partir disso, desenvolvemos a última etapa da pesquisa com as alunas citadas.

6. O CASO ANA E CECÍLIA

6.1 Apresentação

Ana e Cecília são duas alunas que têm 17 e 18 anos, de idade, respectivamente, e cursam o 3º Ano do Ensino Médio na Escola Estadual Alcides Bezerra, no município de Cabaceiras - PB. Ambas habitam nesta cidade e afirmam gostar de Matemática, inclusive Ana pretende ingressar no curso de Licenciatura em Matemática, ao concluir o Ensino Médio. Ambas, sempre estudaram em escolas públicas deste município e, em seu discurso, apresentam o gosto de se trabalhar Matemática de uma forma menos convencional. Ao trazermos os problemas para serem solucionados com o uso do Tangram, elas consideram interessante, porém dizem conhecer o material manipulável, mas nunca haver explorado em atividades. *"Já conhecia o Tangram quando vimos na feira de ciência aqui da escola, mas não chegamos a trabalhar com ele. Apenas vimos as figuras" (*Ana*).* Tanto Ana quanto Cecília, apesar de apresentarem algumas dificuldades, demonstraram entusiasmo em todos os problemas propostos.

Foram propostos quatro problemas geométricos[6], sendo três deles solucionados a partir do uso do Tangram. O desenvolvimento aconteceu em quatro encontros, que chamamos de Episódio. No Episódio 1 nomeado *As peças do Tangram: o que disse Mário?* em (02/09/2013), nosso objetivo, foi identificar se as Díades conseguiam compreender o que é um polígono e se reconheciam quando duas figuras são congruentes. No Episódio 2 *Desvendando as curiosidades de Catarina,* em (09/09/2013) o objetivo foi analisar como cada Díade desenvolvia sua compreensão geométrica de polígonos na atividade. Já o Episódio 3 *Cálculo de áreas: os cálculos de Pedrinho,* em (16/09/2013) o nosso objetivo foi identificar como as Díades desenvolviam seu raciocínio baseando-se na ideia de áreas de figuras planas e relações entre figuras. Por fim, no Episódio 4, *Competição Geométrica,* em (25/09/2013), o principal objetivo foi analisar se as Díades conseguiam compreender e distinguir algumas propriedades de figuras geométricas, o que está diretamente ligado ao segundo Nível do Modelo van Hiele.

---

[6] Problemas que formulamos a partir das propostas de Nasser e Sant'anna (2010).

6.2 Apresentação de conhecimentos prévios da Geometria com auxílio do Tangram na Resolução de Problemas

Neste primeiro Episódio: “As peças do Tangram: o que disse Mário?”, a Díade leu individualmente o problema e Ana dialogou com Cecília sobre a situação, em busca de soluções. Elas apresentavam muitas dúvidas e se comunicam oralmente, como podemos verificar abaixo, e a partir disso apresentaram seu desenvolvimento de forma escrita (Apêndice 6):

Ana: *Porque assim, a professora de Mônica levou o Tangram e não disse o nome das peças, aí nisso ela pede o nome das peças, que a única que eu não sei é essa (apontando para o paralelogramo)!*

Cecília: *Ah, é um trapézio!*

Ana: *É um triângulo, dois, três... São cinco triângulos!*

Cecília: *Então as peças são cinco triângulos isósceles, quadrado e trapézio. Formando então um quadrado grande!*

Durante este Episódio, Ana buscou explicar o contexto da pergunta. Entretanto, pareceu não lembrar alguns conceitos que são primordiais para resolução. Tanto Ana quanto Cecília se viram frente a uma situação curiosa e questionadora. Algumas vezes, se perguntaram, em outros momentos levantaram hipóteses, entretanto, não se sentiram seguras em virtude do desconhecimento de conceitos prévios da Geometria. Nesse sentido, em relação ao conceito de congruência, as alunas pareciam lembrar que era “algo” relacionado a lados e ângulos, porém por não lembrar a definição, não conseguiram responder de forma consistente.

Ana: *Aí ele quer saber quais são os nomes das peças e quais são congruentes e por que são congruentes. Tu lembra o que é congruente?*

Cecília: *Congruente é aquela que não forma um ângulo de 90°?* .

Ana: *Pensa! O que é côngruo?*

Cecília: *Ou tem a ver com os ângulos ou com as linhas!*

Ana: *Que peças Mário apontou como congruentes? Pode ser o trapézio e os triângulos!*

Cecília: *Agora por quê?*

Ana: *Acho que tem que olhar para os lados, será que tem a ver com lados?*

Cecília: *Não, acho que não!*

Ana: *Não sei o sentido de congruentes*

Cecília: *Eu acho que é porque um ângulo, o ângulo de uma peça é igual ao ângulo oposto, esse é igual a essa, esse igual a esse (apontando para os ângulos dos triângulos)... Eu acho que é isso!*

Nesse problema, observamos que as alunas se esforçavam em busca de soluções, mas o maior obstáculo de encontrá-las estava na fragilidade de conhecimentos prévios sobre Geometria que eram primordiais para a resolução. Nesse sentido, elas dialogaram sobre a solução do problema, porém não conseguiram o êxito desejado.

Conforme destacam Bishop e Goffree (1986), quando duas pessoas concordam com a validade de um conceito, resolução ou conexões é porque partilham o significado desse conhecimento. Assim, entendemos que as alunas não conseguiram responder eficazmente o problema, pois não compreendiam o significado de congruência e passaram por uma situação de conversação e comunicação, ou seja, um diálogo na perspectiva de Alro e Skovsmose (2010).

6.3 Interpretação geométrica com algumas peças do Tangram

No Episódio 2 *"Desvendando as curiosidades de Catarina"* Ana e Cecília começaram separando as peças. Elas pareciam compreender melhor, pois neste Episódio apresentavam maior segurança em relação às estratégias e resolução. A principal estratégia utilizada pelas alunas foi representações por meio de tentativas de formação de figuras. Elas se comunicavam, muitas vezes, sobre as respectivas possibilidades, ao mesmo tempo fazendo essas representações a partir de desenhos na folha de resposta.

Ana: *Temos que usar apenas um quadrado e dois triângulos pequenos.*

Cecília: *Vamos ver!*

Ana: *Podemos montar as figuras!*

Ana: *Com os dois triângulos e o quadrado, podemos formar o trapézio, assim! (montando a figura na folha de resolução).*

Cecília: *Ah, sim! Também podemos construir um retângulo (montando a figura na folha de resolução).*

Ana: *O que mais?*

Cecília: *Acho que tem mais possibilidades, vamos ver? (manipulando as peças na busca de formar figuras).*

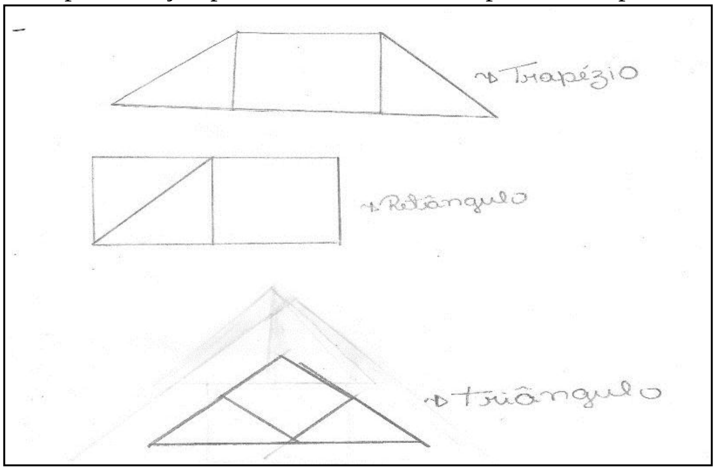
Ana: *Aqui ó. Um triângulo também.*

Cecília: *Verdade!*

Ana: *Então vamos colocar: as possibilidades são trapézio, retângulo e triângulo.*
Cecília: *E pra segunda pergunta, já desenhamos, né?*
Ana: *Isso! Terminamos!*

A partir desse diálogo, as alunas fizeram os desenhos na folha de resposta, que representavam as figuras formadas com as peças do Tangram, conforme a figura 10.

Figura 10 - Representação por meio de desenhos apresentada por Ana e Cecília.



Fonte: nota das alunas.

Nesta atividade Ana e Cecília aparentaram reconhecer o conceito de polígono, entretanto, esse reconhecimento era limitado ao aspecto visual. Suas tentativas e constantes representações eram de triângulo, retângulo e trapézio. Em nenhum momento, elas mencionaram alguma de suas propriedades, e se convenceram da resposta ao problema apenas por meio do desenho e formação de algumas figuras de polígonos regulares.

A partir das comunicações orais descritas, as alunas na tentativa de responder à pergunta apontam como possibilidades o trapézio, triângulo e retângulo, porém não apresentaram como possibilidade o paralelogramo. Para o trapézio, Ana conseguiu fazer uma explicação praticamente baseada. Contudo, para as outras possibilidades apresentadas elas apenas mencionaram, ou seja, disseram sem explicar o procedimento matemático.

6.4 Contextualização do cálculo de áreas usando duas peças do Tangram

No terceiro Episódio *"Cálculos de áreas: os cálculos de Pedrinho"* Ana e Cecília, lendo o problema, perceberam que este apresentava um grau de dificuldade superior ao do Episódio anterior, pois, além de peças específicas, envolvia também o conceito de área. Para solucionar, elas começam separando as peças, e estavam com o Tangram industrializado, folhas de papel A4, e lápis.

Elas começaram buscando interpretar o problema, afirmando:

Ana: *Nesse caso será usado apenas o triângulo pequeno e o quadrado!*

Cecília: *Precisamos saber a área do triângulo médio, do paralelogramo e também do quadrado grande.*

Ana: *Aqui a gente ver que os dois triângulos pequenos formam o paralelogramo. Eh, então a área do paralelogramo vai ser duas vezes a área do triângulo, né assim?!*

Observamos que, antes de solucionar, as alunas utilizaram uma estratégia que advém da proposta de Pólya (1995), quando especifica que para resolver um problema é necessário fazer a interpretação e depois elaborar um plano para, posteriormente, executá-lo e validá-lo. Nesse sentido, as alunas passaram a usar o conhecimento que tinham sobre áreas, buscando pôr em prática na solução do problema proposto. Dessa forma, elas buscaram resolver a situação, a partir das fórmulas para o cálculo de área das figuras especificadas (quadrado e triângulo). Para isso, elas fizeram explicações praticamente baseadas, uma vez se voltam para o material manipulável especificado.

Ao mesmo tempo em que elas se comunicavam explicando o desenvolvimento, iam escrevendo o procedimento utilizado.

Cecília: *Base vezes altura dividido por dois.*

Ana: *Eh, então a gente tem que colocar assim: duas vezes a base vezes a altura e dividido por dois (escrevendo 2 . (b . h)/2). Certo?*

Cecília: *Eh! Do mesmo jeito a área do triângulo médio que se a gente olhar, é o mesmo que a área do triângulo pequeno mais a metade da área do quadrado. Então assim, como a gente já sabe que a área do triângulo é base vezes altura dividido por dois e a área do quadrado é lado vezes lado ou* L^2*. Logo, a área do triângulo médio vai ser base vezes altura dividido por dois mais* L^2 *dividido por dois. Tu entendeu?*

Ana: *Entendi, vou escrever assim: (b . h) dividido por dois mais* L^2 *dividido por dois* $[(b \cdot h)/2] + [L^2/2]$.

Considerando esse problema mais complexo em relação aos trabalhados nos Episódios anteriores, Ana e Cecília apresentaram maior comunicação oral, fazendo relação entre áreas e peças e interligando as informações na busca de soluções. A partir das áreas específicas, Cecília fez o cálculo da área total do quadrado formado pelas sete peças do Tangram, compreendendo que é a junção de todas as áreas dos polígonos que o compõe. A maior dificuldade apresentada pela Díade, consistiu em organizar os cálculos.

Cecília: *Já o quadrado original é composto por dois triângulos grandes que, como podemos ver, a área dele é a mesma coisa que duas vezes a área do triângulo pequeno mais a área do quadrado que são as peças que forma. Também do paralelogramo, que a área é a mesma de dois triângulos pequenos. Do triângulo médio com a área igual do triângulo pequeno mais a metade da do quadrado. Vai anotando aí! Também do quadrado com área igual a* L^2 *e dos dois triângulos pequenos. Agora vamos organizar...*

Ana: *Então, dizemos que o quadrado é formado por essas áreas juntas!*

Cecília: *Tá! Então podemos anotar que a área do quadrado original é a soma da área dos dois triângulos grandes com a do triângulo médio, do quadrado e também dos dois triângulos pequenos e do paralelogramo.*

Ana e Cecília discutiram, interagiram e questionaram, porém chegaram ao mesmo consenso, tentando compreender as áreas de cada um dos polígonos, usando apenas o quadrado e o triângulo menor como referência para o cálculo dos demais. Elas apresentaram as fórmulas específicas para o cálculo dessas áreas e as relacionaram para encontrar soluções, apresentando esse desenvolvimento também de forma escrita (Apêndice 9). Identificamos que as alunas, neste Episódio, usaram explicações praticamente baseadas, quando relacionam as peças do Tangram e comparam as respectivas áreas, mas também apresentaram explicações matematicamente baseadas, quando usaram raciocínio matemático para o cálculo das áreas específicas. Conforme Levenson, Tsamir e Tirosh (2004), embora nem sempre tenham apresentado a formalidade e o rigor matemático, as explicações matematicamente baseadas foram baseadas em aspectos puros da Matemática, conforme identificamos nesse Episódio.

6.5 A compreensão de propriedades geométricas e relação com o Modelo van Hiele

No Episódio 4 *Competição Geométrica*, Ana e Cecília leram o problema e, posteriormente, utilizaram como estratégia de resolução, desenhos específicos para representar a situação. Elas usaram apenas lápis e folhas de papel A4, onde desenhavam as figuras, na tentativa de fazer algumas relações para solucionar o problema. Inicialmente, Ana desenhou um quadrado. Cecília observou a posição específica das diagonais, aparentemente compreendendo o sentido de perpendicularidade.

Ao interagir com Cecília, Ana buscou explicar a partir do quadrado desenhado, que o fato das diagonais serem perpendiculares já justificaria, para qualquer caso, que a figura seria sempre um quadrado.

Ana: *Vamos desenhar... As diagonais acha que são essas, né? (apontando para o desenho).*

Cecília: *Olha, é perpendicular.*

Ana: *Ah, então se elas são perpendiculares, ABCD é um quadrado. Porque se, oh se ABCD é um quadrado e, por acaso, eu responder sim pra essas diagonais perpendiculares, então já respondo a segunda, porque se as diagonais são perpendiculares ele vai ser um quadrado.*

Cecília pareceu pensar diferente de Ana, quando ressaltou que o fato de as diagonais serem perpendiculares pode também remeter a outras figuras que ela diz ser, por exemplo, um retângulo. Porém, ela não justificou o fato de que todo quadrado é um retângulo. No entanto, o contrário não é verdadeiro. Elas pareceram estar satisfeitas com as representações das figuras desenhadas.

Cecília: *Oh, então agora eu entendi, oh "Se as suas diagonais são perpendiculares, então ABCD é um quadrado?" a resposta é não, porque poderia ser também um retângulo.*

De forma sucinta, Ana e Cecília se comunicaram, tentando explicar que em todo paralelogramo as diagonais se cortam ao meio. Para isso, elas usaram mais uma vez, representações de figuras específicas, como quadrado, retângulo e losango.

Ana: *Em todo paralelogramo as diagonais se cortam ao meio? Acho que sim, vamos ver nas figuras, desenha aí.*

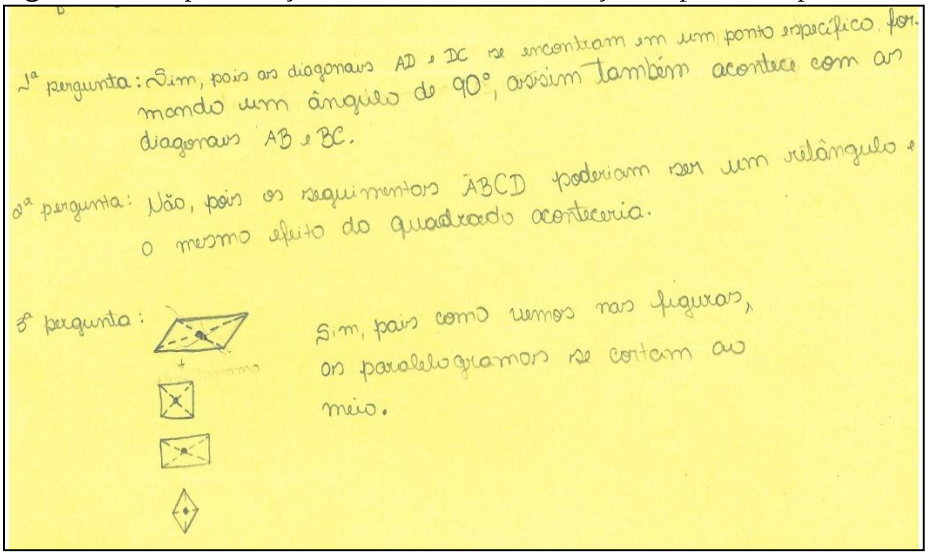
Cecília: *Assim? (desenhando o quadrado, retângulo e losango).*

Ana: *Olha! No paralelogramo, no quadrado, no retângulo e no losango acontece sempre a mesma coisa com as diagonais se cortando ao meio.*

Cecília: *É mesmo!.*

De acordo com o diálogo, as alunas apresentaram a seguinte representação escrita:

Figura 11 - Representação em desenhos na resolução do problema pela Díade.



Fonte: nota das alunas.

Assim, o apelo visual é por elas utilizado como a estratégia mais convincente no momento de suas justificativas para resolução.

Identificamos que tanto Ana quanto Cecília não demostraram certezas nas respostas e baseavam-se apenas na visualização de seus desenhos, o que revela que ainda estão muito mais centradas no primeiro Nível de pensamento geométrico, segundo o Modelo van Hiele.

6.6 Síntese

Ana e Cecília que sempre estudaram em escolas municipais e estadual da cidade de Cabaceiras, ressaltaram o gosto pela Matemática, embora encontre algumas dificuldades na disciplina. Elas dizem gostar de trabalhar Matemática com uso de materiais manipuláveis, pois consideram essa forma mais atrativa para aprender e Ana pretende ingressar no curso de Licenciatura em Matemática ao concluir o Ensino Médio.

No Episódio 1 observamos que Ana e Cecília, mesmo sem obter a resolução correta do problema, conseguem se comunicar de forma oral na busca de solução. Um fato que certamente limita na obtenção de respostas é a falta de conhecimento prévio evidenciada em seus diálogos. Observamos que as alunas confundem o paralelogramo com o trapézio levando a entender que desconhecem propriedades e definições das figuras. Em relação ao conceito de congruência, analisamos que a Díade fez algumas relações com lados e ângulos das figuras, entretanto, não consegiram interligar as ideias e, por consequência, evidenciaram o desconhecimento do conceito.

No Episódio 2, em que objetivamos analisar as representações geométricas de polígonos apresentadas pelas alunas a partir de suas representações e justificativas, notamos que as estratégias de resolução se deram por meio de tentativas na montagem das figuras ao manusear as peças específicas do Tangram (quadrado e dois triângulos pequenos) e explicações baseadas em seus procedimentos. Nesse Episódio, Ana e Cecília apontaram como possibilidade de construção de polígonos usando apenas o quadrado e dois triângulos, *trapézio, retângulo e triângulo*, entretanto, para o triângulo elas usaram apenas duas peças (dois triângulos pequenos). Em meio à comunicação entre as alunas, observamos que em nenhum momento elas mencionam alguma definição para polígonos. Contudo, conseguiram fazer algumas representações evidenciando o entendimento por meio da representação visual.

No Episódio 3 Ana e Cecília, interagiram e se comunicaram melhor, relacionando áreas e reconhecendo conceitos específicos, o que as fez apresentar algumas explicações praticamente baseadas. Ana fez relações entre as áreas das figuras e Cecília explicou como encontrar a área do triângulo. Nesse Episódio, as alunas, mesmo não apresentando nenhuma definição, propriedade ou conceito referente, reconheceram o paralelogramo e disseram que sua área era equivalente à área de dois triângulos menores. Ana e Cecília, ao mesmo tempo em que fizeram as relações entre as áreas das figuras, também apresentaram suas estratégias de resolução de forma escrita. Assim, sua comunicação na solução do problema na apresentação e desenvolvimento das estratégias aconteceu de forma oral e escrita.

Ana e Cecília no Episódio 4 pareceram desconhecer as propriedades e buscaram fazer generalizações. Ana entendeu que se existe uma figura ABCD que é um quadrado e suas diagonais são perpendiculares, então significa dizer que sempre que uma figura tiver as diagonais perpendiculares será um quadrado, ou seja, houve uma generalização, evidenciando fragilidade no reconhecimento de propriedades geométricas. Para essa mesma afirmação apresentada por Ana, Cecília disse que a resposta era *não,* uma vez que *também poderia ser um retângulo*. Com essa afirmação, Cecília mostrou desconhecer o conceito de perpendicularidade e propriedades do retângulo, não conseguindo identificar que um quadrado é um retângulo e que o contrário não é verdadeiro.

Ana e Cecília apresentaram muito interesse em buscar soluções corretas, interagiram bem por meio de sua comunicação oral e escrita, dialogaram na busca de estratégias de resolução, mesmo que focadas nas figuras que desenhavam. Entretanto, não demonstraram conhecimento de propriedades geométricas, remetendo ao primeiro Nível do Modelo van Hiele.

7. O CASO VITÓRIA E ALICE

7.1 Apresentação

Vitória e Alice são duas alunas dedicadas quando trabalham em grupo. Dizem gostar de Matemática, sobretudo Alice, que pretende fazer o curso de Licenciatura em Matemática ao concluir o Ensino Médio. Ambas têm 17 anos de idade e habitam na zona rural do município de Cabaceiras. Elas consideram essa forma de trabalhar Matemática mais interessante por sair dos métodos rotineiros que, por vezes, lhes incomodam. Mesmo com limitações no desenvolvimento dos problemas, elas se comunicam durante todo o trabalho, apresentando de fato, o que sabem do ponto de vista matemático.

7.2 Apresentação de conhecimentos prévios da Geometria com auxílio do Tangram na Resolução de Problemas

Noprimeiro Episódio, Alice e Vitória começaram lendo o problema e Alice logo respondeu que as peças que formavam o Tangram eram *"quadrado, triângulo, losango e retângulo*". Vitória parecendo aceitar a resposta dada por Alice como verdadeira, perguntou sobre congruentes, ela sem questionar-se respondeu que seria o *triângulo* e *losango* porque "*as linhas ficavam paralelas e se encontravam no vértice*". Nesse Episódio Vitória e Alice se comunicam oralmente de forma sucinta, pois pouco se questionaram, buscando, de imediato, respostas sem grandes justificativas. De igual forma, apresentaram a solução de forma escrita (Apêndice 7).

Vitória e Alice dialogam sobre os questionamentos do problema, porém não conseguem solucioná-lo, por desconhecerem os conceitos específicos (polígonos e congruência).

Vitória: *Bem, o problema diz: "A professora de Matemática levou para sua aula um Tangram feito em madeira, sem explicar o nome de cada peça que o formava. Mônica já tinha visto e estudado um pouco com o material manipulável em sua antiga escola. Assim, ela propôs que seu colega Mário falasse o nome dos polígonos que formam o Tangram. Mário, se sentindo desafiado, insistiu em responder detalhadamente. Se Mário respondeu corretamente, quais foram suas respostas? Que peças Mário apontou como congruentes, por quê?"*

Alice: *As peças são quadrado, triângulo e losango. Coloca aí (escrever na folha da resolução do problema).*

Vitória: *E congruentes?*

Alice: *É o triângulo e o losango!*

Vitória: *E por quê?*

Alice: *Porque suas linhas ficam paralelas e se encontram aqui (apontando para o vértice). Acho que é melhor colocar suas retas.*

Vitória: *Então coloco: triângulo e losango, porque em certo ponto as retas irão se encontrar, né assim?*

Alice: *Sim, terminamos!*

Notamos, a partir do diálogo, que as alunas confundem o paralelogramo com losango e desconhecem a definição de congruência, ao dizer que o triângulo e o losango são congruentes por suas linhas ficarem paralelas, conforme observamos na fala de Alice. Nesse Episódio, as respostas dadas tanto por Vitória, quanto por Alice, eram também aceitas como verdadeiras para ambas, o que é considerado por Gilly, Fraisse e Roux (1988) como co-elaboração por consentimento.

7.3 Interpretação geométrica com algumas peças do Tangram

No segundo Episódio, as alunas pareceram identificar a formação de algumas figuras apenas pelo apelo visual o que, na perspectiva de Crowley (1994), dá indícios de que os alunos estão no primeiro Nível do Modelo van Hiele. As alunas fazem relações das figuras com objetos reais, sobretudo, quando Alice diz que a figura formada é um trapézio comparando sua forma à de uma "*sainha*", como podemos observar em seu diálogo, ao tentar explicar para Vitória, a qual dizia que a figura formada era um losango. Ao mesmo tempo, elas chamam o paralelogramo de quadrilátero, entretanto, pareceram não compreender a respectiva definição ao citar retângulo e quadrilátero como entes distintos, aspectos como esses, também remete ao primeiro Nível do pensamento geométrico de acordo com o Modelo van Hiele, ou seja, Nível no qual as alunas conseguem nomear algumas figuras apenas por sua aparência global (CROWLEY, 1994; NASSER & SANT'ANNA, 2010).

Em relação ao problema as alunas referem:

Vitória: *Como diz o problema, precisamos saber a possibilidade de construir o quadrado grande, só usando um quadrado e dois triângulos pequenos.*

Vitória: *Podemos formar o retângulo, o losango...*

Alice: *Não, isso é um trapézio (apontando para a figura formada).*

Vitória: *Isso não é um losango não?*

Alice: *Não, isso é um trapézio. Trapézio é assim, tipo uma sainha.*

Vitória: *E esse assim, é um quadrilátero (apontando para o paralelogramo formado), pronto!*

Alice: *Então vamos desenhar e colocar o nome!*

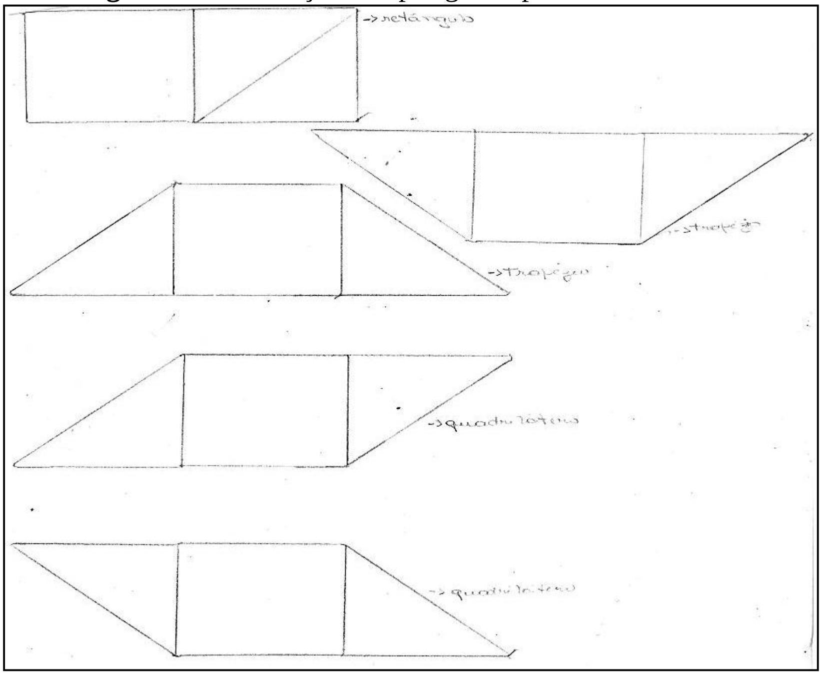
Vitória: *Calma, tem um monte de possibilidade aqui (formando desenhos livres).*

Alice: *Mas então, não é retângulo, trapézio e quadrilátero?!*

Vitória: *Então vamos escrever.*

A princípio as alunas buscaram interpretar o problema e, ao mesmo tempo, em que se comunicam oralmente, apresentaram suas estratégias de forma escrita, por meio de desenhos dos polígonos formados, conforme a figura 12. Identificamos no diálogo entre Alice e Vitória que aconteceu co-elaboração por confrontos contraditórios, quando Alice tenta explicar para Vitória que o polígono formado não é um losango, conforme ela falou, e sim um trapézio e remete à explicação a partir da sua prática cotidiana.

Figura 12 - Formação dos polígonos por Vitória e Alice



Fonte: nota das alunas.

Observamos que as alunas, mesmo tendo algumas limitações para compreender certos polígonos, insistiram em buscar possibilidades de formação com o quadrado e os triângulos, mas não viram como possibilidade a formação do triângulo. Analisamos que

Vitória e Alice se empenharam, de igual forma, na busca por soluções, o que mais uma vez se acentua na perspectiva de Gilly, Fraisse e Roux (1988), quando chamam esse tipo de interação de colaboração por co-construção.

7.4 Contextualização do cálculo de áreas usando duas peças do Tangram

No terceiro Episódio *"Cálculos de áreas: os cálculos de Pedrinho"*, analisamos que as alunas fizeram suas explicações praticamente baseadas usando as peças do Tangram. Elas explicaram o método de resolução e relacionaram, pertinentemente, ao conceito de área, apresentando fórmulas e procedimentos. As alunas começaram fazendo a interpretação do problema e apresentaram a comunicação de forma oral e escrita com base em seus procedimentos, como podemos observar para o seguinte problema.

A princípio, Vitória e Alice mostraram como denotar a área do triângulo médio e do paralelogramo, afirmando:

Vitória: *Como ele denotou a área do triângulo médio?*

Alice: *Ele só quer saber somente dessas três, no caso!*

Vitória: É! *Do triângulo médio, do paralelogramo e do quadrado original.*

Alice: *Para descobrir a área do triângulo é base vezes altura divido por 2.*

Vitória: *Não dá dois triângulos?*

Alice: *Eh, aí a gente coloca duas vezes base vezes altura dividido por dois. Porque foi dois triângulos, não foi só um, foram dois.*

Vitória: *Ai a gente vai medir o paralelogramo, coloca ai na folha: para denotar a área do paralelogramo, deve-se usar 2 triângulos.*

As alunas não enfatizaram que a área do quadrado menor era equivalente a duas vezes a área do triângulo pequeno, entretanto, elas compreenderam que a área do paralelogramo era o dobro da área do triângulo pequeno. Analisamos as explicações praticamente baseadas na fala de Alice, quando disse que, para descobrir a área do triângulo, era necessário fazer base vezes altura divido por dois e complementou ao dizer que, por ter usado a área de dois triângulos, se fazia necessário contar duas vezes, com base nas peças indicadas do Tangram.

Para encontrar a área do quadrado formado por todas as peças (quadrado original) Alice começou separando as peças e, semelhantemente ao processo anterior, sobrepôs o triângulo pequeno e o quadrado às demais peças do Tangram, na tentativa de solucionar o problema.

Alice: *Oh, mas a gente tem que separar as figuras.*

Vitória: *Como assim? Não é para saber a área do quadrado todo, o quadrado original?!*

Alice: *Num tá separado as figuras, então a gente pode saber!*

Alice: *Aqui deu um quadrado e dois triângulos (sobrepondo no triângulo maior).*

Vitória: *Então a gente tem que botar (escrever): Para denotar o quadrado original usa um quadrado e dois triângulos pequenos para descobrir o triângulo grande. Depois, para denotar a área do paralelogramo e do triângulo deve-se usar 2 vezes b (base) vezes h (altura) dividido por dois, porque se eu juntar dois triângulos pequenos dá um quadrado.*

Alice: *Então a gente escreve: para denotar a área do quadrilátero foram usados também dois triângulos resultando na mesma coisa e para denotar a área do quadrado original que é o quadrado grande foram usados a área dos dois triângulos grandes, do quadrado, do paralelogramo, do triângulo médio e dos pequenos, né assim?*

Vitória: *acho que é assim!*

Nesse processo, a Díade se comunicou oralmente de forma demasiada e, ao mesmo tempo, mostrou as estratégias de resolução também por meio da sua comunicação escrita (Apêndice 10). As alunas desenvolveram o raciocínio demonstrando compreender o conceito de área a partir das suas explicações de cunho praticamente baseadas, como analisamos na fala de Vitória - "*Para denotar o quadrado original usa um quadrado e dois triângulos pequenos para descobrir o triângulo grande. Depois, para denotar a área do paralelogramo e do triângulo deve-se usar 2 vezes b (base) vezes h (altura) dividido por dois, porque se eu juntar dois triângulos pequenos dá um quadrado*". Observamos que as alunas, para apresentar suas explicações, se baseavam no material concreto manipulável e, a partir dele, demonstravam o que compreendiam. Dessa forma, a comunicação entre as alunas serviu para articular o pensamento, estando de acordo com o que Fonseca (2009) destaca acerca da relevância da comunicação.

7.5 A compreensão de propriedades geométricas e relação com o Modelo van Hiele

No quarto e último Episódio, quando propomos o problema *Competição Geométrica,* Alice começou lendo a primeira pergunta do problema e sobre ela apontou que *achava ser verdadeira* e quando Vitória questionou "*Por quê?*", ela apontou uma explicação matematicamente baseada (LEVENSON, TSAMIR & TIROSH, 2004), apresentando indícios de que compreendeu o conceito de perpendicularidade, como podemos observar:

Alice: *Nessa primeira "Se ABCD é um quadrado, então as suas diagonais são perpendiculares?" acho que sim.*

Vitória: *Por quê?*

Alice: *Porque as retas vão se cruzar formando um ângulo de 90º.*

Vitória: *Então a gente escreve dessa forma?*

Alice: *É!*

Notamos que Alice parecia compreender o conceito de perpendicularidade e, a partir disso, fez a generalização de que se ABCD é um quadrado então as suas diagonais são perpendiculares. Vitória não demonstrou compreensão do conceito quando perguntou a Alice o por quê e não acrescentou argumentos.

Para a segunda pergunta, Vitória fez a leitura, porém, não apresentou nenhum resultado para ela. Já Alice apresentou um posicionamento crítico ao afirmar que sendo as diagonais perpendiculares, então ABCD pode ser um quadrado. Além disso, afirmou a possibilidade de haver outras opções de figuras com diagonais perpendiculares, contudo não citou nenhum exemplo, como é possível observar em seus diálogos:

Vitória: *A segunda é: "Se as suas diagonais são perpendiculares, então ABCD é um quadrado?" o que é que tu acha?*

Alice: *Acho que sim, mas também pode ter outras figuras que tenha diagonais perpendiculares.*

Vitória: *Então a gente coloca (escreve na folha de resolução) dessa forma.*

Na última pergunta do problema, Vitória pareceu compreender a propriedade que diz que em todo paralelogramo os pares de lados são paralelos. Entretanto, não respondeu à questão. A aluna concordou que, em todo paralelogramo, as diagonais se cortam ao meio. No entanto, usou como justificativa a propriedade relacionada aos lados do paralelogramo, como é possível notar. Alice apenas concordou com a justificativa de Vitória, destacando-se, mais uma vez, a co-elaboração por consentimento entre as alunas (GILLY, FRAISSE & ROUX, 1988) conforme podemos notar.

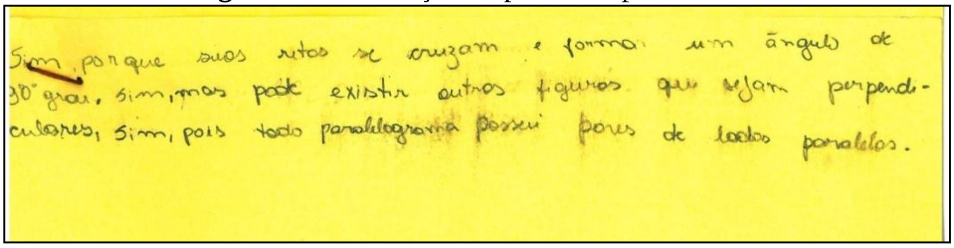
Alice: *E por último "Em todo paralelogramo as diagonais se cortam ao meio?"*

Vitória: *Sim, porque em todo paralelogramo os pares de lados são paralelos, né?*

Alice: *Paralelogramos? É... concordo!*

Identificamos que, tanto Alice quanto Vitória, ao se depararam com o problema, nesse, e em outros Episódios, não apresentaram muita criticidade e conhecimentos de propriedades geométricas, o que afetou diretamente em suas resoluções. Entretanto, ao se depararem com os problemas, as alunas interpretaram, refletiram e, com base no Nível de compreensão geométrica que tinham, tentaram solucionar. Conforme podemos ver na figura 13, as alunas não usaram desenhos para expressar seu desenvolvimento, mas apresentaram o raciocínio de forma escrita.

Figura 13 - Resolução do problema por Vitória e Alice.


Sim, porque suas retas se cruzam e forma um ângulo de 90° graus. Sim, mas pode existir outras figuras que sejam perpendiculares, Sim, pois todo paralelograma possui pares de lados paralelos.

Fonte: nota das alunas.

O fato de buscar soluções, refletir sobre seus procedimentos e conhecimentos prévios, por meio da comunicação em busca de estratégias que levam à solução do problema é, sem dúvida, uma forma de trabalhar significativamente a Matemática, o que está de acordo com Van de Walle (2009), quando afirma que ao propor problemas, o grande objetivo não é aplicar a Matemática e sim aprendê-la por meio dos procedimentos envolvidos.

Embora as alunas tenham tentado responder a cada uma das questões, tenham reconhecido o conceito de perpendicularidade e uma propriedade dos paralelogramos, apresentaram muitas limitações e pouca criticidade na resolução e justificativas. Com isso, não reconheceram as propriedades necessárias para resolver o problema, dando indícios que se encontram no Nível de Visualização ou Reconhecimento de acordo com o Modelo van Hiele.

7.6 Síntese

Vitória e Alice afirmaram que gostam de trabalhar em grupos e consideram importante que a Matemática seja trabalhada com recursos que possam facilitar a compreensão referindo-se ao uso de materiais manipuláveis. Alice pretende ingressar no curso de Licenciatura em Matemática.

Analisamos que no Episódio 1 Vitória e Alice não demonstraram compreender a nomenclatura de todos os polígonos que formam o Tangram quando chamam o paralelogramo de losango. Esse fato dá indícios de que não conseguem compreender as propriedades das figuras ou mesmo lembrar das características que as diferenciam. Em relação ao conceito de congruência, em meio a uma comunicação oral sucinta, as alunas disseram que o *triângulo* e o *losango* são congruentes devido às *retas serem paralelas e se encontrar em um determinado ponto*. Identificamos, no decorrer desse Episódio, que as respostas apresentadas pela Díade não foram suficientes para resolver o problema, em virtude da limitação de conhecimentos prévios.

No Episódio 2, Vitória e Alice, separando as peças, viram como possibilidade de polígonos formados o *retângulo e trapézio* que, a princípio, Vitória chamava de losango e Alice dizia ser um trapézio por parecer uma "*sainha*". A aluna fez uma relação com algo real (roupa) para explicar informalmente o que seria o polígono formado. Essas relações com coisas ou objetos reais para nomear ou explicar algum ente geométrico é, na maioria das vezes, o procedimento mais comum ou mais utilizado por parte das alunas. Nesse Episódio, as alunas parecem não compreender a definição de quadrilátero quando consideram retângulo e quadrilátero como algo distinto. A comunicação oral e escrita foi, mais uma vez, o meio utilizado no desenvolvimento do problema. Esse desenvolvimento das alunas foi marcado pelo manuseio aleatório das peças sem destacar qualquer propriedade dos polígonos formados.

Em relação ao Episódio 3, com o problema *Cálculos de áreas: os cálculos de Pedrinho*, analisamos que Vitória e Alice fizeram a interpretação do problema, e com isso, buscaram fazer também algumas relações a partir da fórmula da área do triângulo e da sobreposição das peças. Nesse sentido, usaram da comunicação escrita para descrever como era possível fazer os cálculos das áreas das demais figuras - paralelogramo, triângulos grandes e triângulo médio. Com esse procedimento, elas chegaram à conclusão de que para denotar a área do paralelogramo eram necessários dois triângulos pequenos e que, para denotar o área do quadrado formado pelas sete peças, foram usadas as áreas dos triângulos grandes, médio, pequenos, do quadrado pequeno e do paralelogramo. Dessa forma, a Díade desenvolveu seu raciocínio baseado na ideia de área a partir da sobreposição de peças, além da fórmula para o cálculo da área do triângulo que relaciona para o cálculo da área do paralelogramo e do quadrado.

No último Episódio, denominado Episódio 4 - *Competição Geométrica,* Vitória e Alice se comunicaram de uma forma muito concisa e, por algumas vezes, fizeram algumas generalizações. Nesse problema, Alice demonstrou compreender o conceito de perpendicularidade, o que pareceu ser aceito como verdade também por Vitória. Além disso, quando Vitória questionou Alice sobre a segunda pergunta do problema, ela apontou a possibilidade de existirem outras figuras que também tenham diagonais perpendiculares, entretanto, não apresentou nenhum exemplo que sustentasse sua afirmação. Vitória, para a última pergunta do problema, disse que é verdade o fato de que em todo paralelogramo as diagonais se cortarem ao meio, pois, segundo ela, em todo paralelogramo, os pares de lados são paralelos. Podemos analisar que Vitória compreendeu o fato de que em todo paralelogramo os pares de lados são paralelos, entretanto, atribuem generalizações remetendo a uma ausência de criticidade em relação aos conceitos geométricos.

8. O CASO JÚLIA E AMANDA

8.1 Apresentação

As alunas Júlia e Amanda, têm 17 anos de idade, sempre estudaram em escolas públicas do município de Cabaceiras, onde habitam. Elas dizem considerar a Matemática "*um pouco difícil*", porém se envolveram de forma significativa em cada uma das atividades desenvolvidas. Júlia e Amanda se comunicaram demasiadamente de acordo com o grau de conhecimento que tinham.

8.2 Apresentação de conhecimentos prévios da Geometria com auxílio do Tangram na Resolução de Problemas

No Episódio 1, Júlia e Amanda começaram interpretando, dando indícios de que conseguiam resolver com facilidade, como podemos observar com base em suas afirmações:

Júlia: *A pergunta diz assim: A professora de Matemática levou para sua aula um Tangram feito em madeira, sem explicar o nome de cada peça que o formava. Mônica já tinha visto e estudado um pouco com o material manipulável em sua antiga escola. Assim, ela propôs que seu colega Mário falasse o nome dos polígonos que formam o Tangram. Mário, se sentindo desafiado, insistiu em responder detalhadamente. Se Mário respondeu corretamente, quais foram suas respostas? Que peças Mário apontou como congruentes, por quê?*
Amanda: *Então para a primeira pergunta, podemos colocar que são 5 triângulos, 1 quadrado e 1 paralelogramos. Não é?*
Júlia: *É, essa é fácil! Eu coloco (escrever na folha de resolução) se Mário respondeu corretamente ele afirmou que o Tangram é formado por essas peças, né?*
Amanda: *Isso!*

A partir da interpretação do problema pelas alunas, elas dialogaram parecendo compreender a ideia de polígonos quando nomearam corretamente as peças do Tangram a partir de sua forma. Em relação à segunda pergunta do problema, Júlia apresentou de imediato sua resposta, dizendo ser *"os triângulos grandes e os pequenos"* e, a partir de tal resposta, Amanda questionou se são congruentes por apresentarem a mesma medida, e Júlia confirmou que *sim*, como podemos observar nesse diálogo:

Júlia: *E a segunda? Que peças Mário apontou como congruentes, por quê?... Os triângulos grandes e os pequenos!*

Amanda: *É porque tem a mesma medida?!*

Júlia: *Sim. A gente coloca: dois triângulos grandes com a mesma medida e dois triângulos pequenos também com a mesma medida.*

Amanda: *Só isso, né?*

Júlia: *É, acho que é!*

Observamos que as alunas apresentaram as respostas de uma forma bem objetiva. No entanto, reconheceram os polígonos que formam o Tangram, ao mesmo tempo, parecendo ter noções do conceito de congruência, ao dizer que os triângulos são congruentes por terem a mesma medida (forma e medidas). Nesse sentido, Júlia e Amanda, ao se comunicarem oralmente, comparavam as peças e, com base no conhecimento prévio que tinham sobre congruência, expuseram suas respostas também de forma escrita (Apêndice 8).

8.3 Interpretação geométrica com algumas peças do Tangram

No Episódio 2, notamos que as alunas partiram de tentativas para encontrar possíveis possibilidades de formar polígonos. Observamos que Júlia e Amanda, após separarem as peças, se comunicaram oralmente na tentativa de formar as figuras e, com isso, fizeram as representações também de forma escrita, desenhando os polígonos formados.

Júlia: *O problema pede as possibilidades e como podemos fazer, né isso?*

Amanda: *Sim, vamos ver!*

Júlia: *Só podemos usar o quadrado e dois triângulos.*

Amanda: *Aqui eu posso formar um trapézio, olha!*

Júlia: *Tem mais possibilidades, peraí!*

Júlia: *Um paralelogramo também. Vai notando!*

Amanda: *Olha, colocando desse jeito dá pra formar um retângulo e assim, um triângulo (Usando apenas duas peças).*

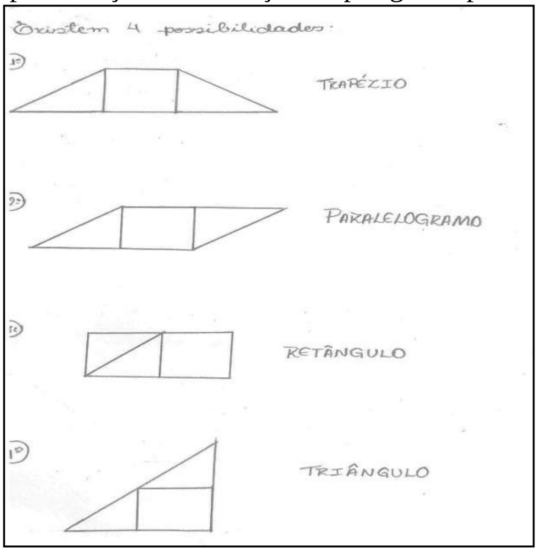
Júlia: *Vamos desenhar as formas então!*

Amanda: *Colocamos junto das formas: trapézio, paralelogramo, retângulo e triângulo.*

Na tentativa de solucionar o problema, Amanda usou o quadrado e dois triângulos, conforme indicado e, a partir de tais peças, apontou como possibilidade a formação do trapézio. Também manuseando as peças, Júlia encontrou outras possibilidades como *paralelogramo, retângulo e triângulo,* porém não apresentou nenhuma propriedade referente ou justificativa e se baseou apenas no apelo visual, representado em forma de desenho, na folha resposta, como apresentado na figura 14.

O processo de resolução e explicação do desenvolvimento das estratégias na resolução de problemas, seja oral ou escrita, é muito importante, pois é uma forma de o professor compreender o modo como o aluno interpreta e soluciona, bem como, entender seu Nível de compreensão geométrica. Nesse aspecto, o Modelo van Hiele nos faz compreender esse Nível de pensamento geométrico, desde o reconhecimento de formas até a construção de provas geométricas formais.

Figura 14 - Representação da formação de polígonos por Júlia e Amanda.



Fonte: nota das alunas.

Nessa proposta de resolução de problemas subsidiada pelo uso de materiais manipuláveis, concordamos com Matos e Serrazina (1996), quando asseguram a ideia de que o uso de materiais manipuláveis se faz muito importante, uma vez que possibilita uma interpretação mais significativa.

8.4 Contextualização do cálculo de áreas usando duas peças do Tangram

No Episódio 3 "*Cálculo de áreas: os cálculos de Pedrinho*", Júlia e Amanda, após lerem e fazerem interpretações, a partir de sua comunicação oral e escrita, iniciaram fazendo referência à área do paralelogramo e apresentando a fórmula para o cálculo da área do triângulo e do quadrado:

Júlia: *Nesse caso, a gente precisa saber de início que a área do triângulo é base vezes altura dividido por dois e que a área do quadrado é lado vezes lado.*

Amanda: *então vamos ver como faz!*

Júlia: *Ó, vê aqui: no paralelogramo podemos usar o triângulo pequeno e a metade da área do quadrado que é a mesma coisa que a medida do triângulo pequeno.*

Amanda: *Eh, então a gente pode botar assim: para calcular a área do paralelogramo usamos o triângulo pequeno e a metade da área do quadrado que corresponde à mesma medida do triângulo pequeno, e colocamos duas vezes b vezes h dividido por dois.*

Com a comunicação oral das alunas, pudemos perceber que elas apresentavam certo domínio do conceito de área, quando Júlia fez a interpretação e elaborou o plano de resolução por meio do conhecimento prévio, que é necessário na resolução – áreas do triângulo e do quadrado, com isso elas apresentaram suas explicações a partir do raciocínio matemático, ou seja, usaram explicações matematicamente baseadas. Além disso, Júlia e Amanda fizeram relações entre as áreas e, sobrepondo as peças, chegaram à conclusão de que, para calcular a área do paralelogramo, se faz necessário usar o triângulo pequeno e a metade da área do quadrado que corresponde à mesma medida do triângulo pequeno. Nesse sentido, identificamos, por meio da comunicação oral entre as alunas, que, elas também usaram explicações praticamente baseadas (LEVENSON, TSAMIR & TIROSH, 2004) no desenvolvimento do problema.

Para mostrar a área do triângulo médio e, posteriormente, a área completa do quadrado formado pelas sete peças do Tangram, elas usaram o mesmo procedimento, apresentando também suas explicações de forma escrita:

Júlia: *Agora para calcular a área do triângulo médio usamos o mesmo raciocínio.*

Amanda: *Também duas vezes base vezes altura dividido por dois. Assim!*

Amanda: *Por fim, pra gente saber a área do quadrado original, olhamos pras peças e vemos que usamos a área do quadrado quatro vezes e a área do triângulo pequeno oito vezes.*

Amanda: *Então, vamos colocar aqui a fórmula: 4 vezes L vezes L mais 8 vezes b vezes h dividido por 2. Né assim?*

Júlia: *Isso!*

Atrelado à comunicação oral, subsidiada pela manipulação das peças do Tangram, Júlia e Amanda, apresentaram suas explicações de forma praticamente baseadas e matematicamente baseadas na discussão de como resolver o problema, por meio do cálculo das áreas das figuras indicadas (quadrado e triângulos) e sobrepondo-as às demais peças que formam o Tangram. As alunas concluíram que essas relações levaram ao uso da área do quadrado quatro vezes e da área do triângulo pequeno oito vezes, o que equivale à área total do Tangram (quadrado formado pelas sete peças), expresso também a partir da comunicação escrita (Apêndice 11). Observamos que as alunas se empenhavam de igual forma na tentativa de resolver o problema, nesse sentido, acontece entre a Díade a colaboração por co-construção (GILLY, FRAISSE & ROUX, 1988).

8.5 A compreensão de propriedades geométricas e relação com o Modelo van Hiele

Para solucionar o problema, no último Episódio, Júlia e Amanda usaram como estratégias inicial desenhos de figuras específicas, como observamos no diálogo entre as alunas:

Júlia: *Primeiro vamos desenhar algumas figura para ver, por exemplo, o quadrado!*

Amanda: *É Olhando para o quadrado, aqui, a gente percebe que as diagonais se encontram no centro e formam um ângulo de 90°.*

Júlia: *Então para a primeira pergunta podemos responder que sim, pois as diagonais se encontram no centro do quadrado formando um ângulo de 90°.*

Observamos que Júlia e Amanda se baseavam, especificamente no desenho para responder à questão e não citaram, em nenhum momento, a existência de uma propriedade que pudesse justificar sua afirmação, ou usam um contraexemplo. Para a segunda pergunta do problema, Júlia pareceu não compreender como fazer e Amanda disse achar que sim e justifica que ABCD pode ser outro paralelogramo em que as diagonais se cruzam, mas não formavam um ângulo de 90°. Entretanto, não apresentou nenhum exemplo, posteriormente, generalizando a ideia de que apenas no quadrado as diagonais são perpendiculares.

Júlia: *E na segunda "Se as suas diagonais são perpendiculares, então ABCD é um quadrado?" como fazemos?*

Amanda: *Eu acho que sim, porque ABCD pode ser outro paralelogramo em que as diagonais se cruzam, mas não formam um ângulo de 90°.*

Júlia: *Assim, apenas no quadrado as diagonais são perpendiculares?*

Amanda: *Sim, só no quadrado!*

Em relação à última questão do problema, Júlia disse que não e tentou explicar para Amanda o porquê, conforme analisamos no diálogo seguinte:

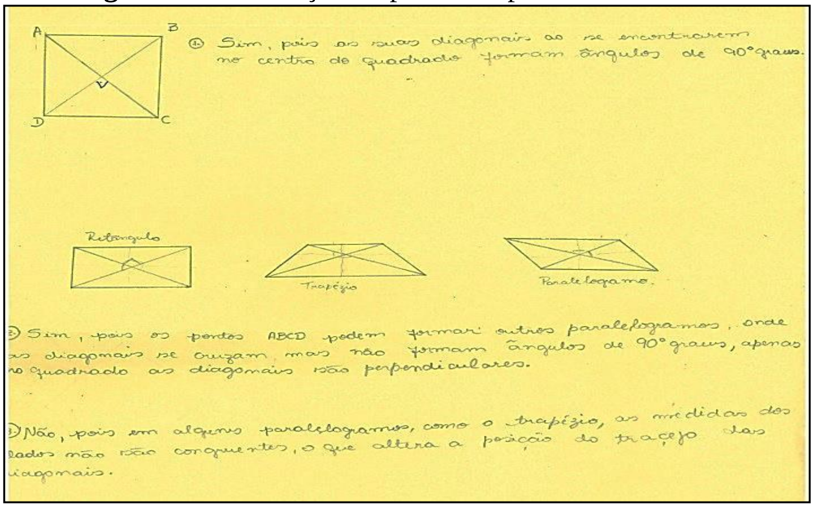
Júlia: *Nessa última "Em todo paralelogramo as diagonais se cortam ao meio?" eu acho que não.*

Amanda: *Por que não?*

Júlia: *Porque em alguns paralelogramos, como o trapézio, as medidas dos lados não são iguais e isso altera o tracejado das diagonais e elas não obrigatoriamente se cortam ao meio.*

Identificamos, com base nessa comunicação oral entre as alunas, que o trapézio era entendido como um paralelogramo, na fala de Júlia, revelando fragilidades com relação à definição de paralelogramo. A figura 15, expressa a comunicação escrita das alunas no referido Episódio.

Figura 15 - Resolução do problema por Júlia e Amanda



Fonte: nota das alunas.

Nesse Episódio, notamos que, para nenhuma das perguntas, a Díade apresentou respostas baseadas em alguma das propriedades geométricas. A generalização das respostas evidencia fragilidades no conhecimento geométrico e a falta de compreensão das propriedades geométricas, o que, muitas vezes, bloqueia as possibilidades de solucionar problemas de forma coerente e corrobora o fato de que, alunos com essas características ainda estão no Nível de Visualização – primeiro Nível de acordo com o Modelo van Hiele.

8.6 Síntese

Júlia e Amanda consideram que a Matemática é um pouco difícil, mas gostam de trabalhar em equipe, pois, segundo elas, é uma forma de amenizar as dificuldades, porque um colega ajuda ao outro. As alunas, durante todos os anos de escolaridade, estudaram em escolas públicas.

Conforme nossa proposta no Episódio 1, analisamos que Júlia e Amanda conseguiram compreender a ideia de polígonos, quando disseram que os polígonos são "*triângulos, quadrado e paralelogramo*". Em relação ao conceito de congruência, as alunas entenderam que os polígonos congruentes são os triângulos (grandes e pequenos) por ter a mesma medida. Analisamos que as alunas, mesmo não apresentando uma definição detalhada e formal em relação ao conceito de congruência, compreendem a ideia, apresentando uma resposta coerente.

No Episódio 2 – *Desvendando as curiosidades de Catarina*, analisamos a forma como Júlia e Amanda apresentaram sua compreensão geométrica acerca dos polígonos. Para o desenvolvimento da resolução do problema, as alunas usaram as três peças juntas (quadrado e os 2 triângulos pequenos) e, posteriormente, usaram apenas os dois triângulos para formação de outros polígonos, conforme citaram, o quadrado e o triângulo. Nesse Episódio, as alunas buscaram as possibilidades a partir do manuseio das peças e apresentaram uma comunicação oral de forma sucinta. Conforme analisamos, as alunas buscavam apresentar respostas imediatas.

Com o objetivo de identificar a forma como as alunas compreendiam a ideia de área, apresentada por meio do seu desenvolvimento da resolução do problema no Episódio 3, observamos, com base no desenvolvimento e comunicação oral entre Júlia e Amanda que, ao interpretar o problema, consideraram a necessidade do cálculo de algumas áreas específicas e, para isso, apresentaram como alternativas a fórmula do cálculo das áreas do quadrado e do triângulo.

A relação por meio da comparação entre as áreas foi uma estratégia por elas utilizada nesse Episódio, com isso, associaram a área do quadrado à metade da área do triângulo por meio da sobreposição de figuras e esse mesmo procedimento se repetiu para os demais cálculos, concluindo que o quadrado formado pelas sete peças tem área equivalente a quatro quadrados e oito triângulos pequenos.

No último Episódio, intitulado Episódio 4 - *Competição Geométrica,* Júlia e Amanda se detiveram, mais especificamente, no desenho de figuras específicas, não citando propriedades relacionadas, mesmo assim pareceram compreender o conceito de perpendicularidade, ao mesmo tempo apontam como exemplo possível para as diagonais perpendiculares apenas o quadrado. Nesse Episódio, ao citar o trapézio como sendo um paralelogramo as alunas, mais uma vez, evidenciaram o desconhecimento das respectivas propriedades geométricas.

9. CONCLUSÕES

Neste capítulo, apresentamos algumas conclusões mediante as análises realizadas em cada etapa da pesquisa. Também tratamos sobre algumas possibilidades para o trabalho nas aulas de Matemática, a exemplo, do trabalho em pequenos grupos que propicia a interação e comunicação entre os alunos. Referimos ainda sobre a atual situação do conhecimento de Geometria no Brasil, e provocamos algumas reflexões acerca de tal ensino e de suas implicações na formação do aluno, bem como apontamos questões para futuras pesquisas.

9.1. Síntese da Pesquisa

Pensando nos desafios enfrentados pela educação pública brasileira e da necessidade de metodologias favoráveis para um melhor desenvolvimento dos alunos, nosso estudo, que se desenvolveu no âmbito de um Projeto do Programa Observatório de Educação (OBEDUC)[7], da CAPES, evidencia a comunicação e a resolução de problemas, através de materiais manipuláveis utilizando o Modelo van Hiele para exploração da Geometria em sala de aula.

O nosso objetivo geral foi analisar através da comunicação entre os alunos, as possibilidades de resolução de problemas que levam em consideração o Nível de compreensão do Modelo van Hiele, com alunos do 3º Ano do Ensino Médio. A partir disso, obedecendo nossos objetivos específicos, realizamos uma entrevista com a professora regente da turma, onde analisamos seu ponto de vista em relação à Geometria e procedimentos metodológicos utilizados em suas aulas.

Com a pesquisa empírica, identificamos o Nível de compreensão geométrica da turma trabalhando em Díades e individualmente. Os resultados dos testes trabalhados individualmente e os dados obtidos no decorrer das etapas da pesquisa, resultaram, ao

---

[7] O Programa OBEDUC da CAPES com o Projeto intitulado *Investigando a Formulação e a Resolução de Problemas Matemáticos na Sala de Aula: Explorando Conexões entre Escola e Universidade*, tratou-se de um estudo sobre a formulação e a resolução de problemas matemáticos na sala de aula, cujo objetivo foi analisar como os alunos do Ensino Fundamental, Médio e Superior, formulam e resolvem problemas matemáticos a partir de diferentes tipos de texto, diferentes materiais manipuláveis e diferentes materiais tecnológicos. Nesse Projeto foram desenvolvidas atividades de formulação e resolução de problemas matemáticos a partir de diferentes tipos de texto, diferentes materiais manipuláveis e diferentes materiais tecnológicos.

término, em três estudos de caso com as alunas Ana, Cecília, Vitória, Alice, Júlia e Amanda que, organizadas em Díades, desenvolveram os problemas geométricos, fazendo o uso do Tangram, conforme nossa proposta.

Nesses problemas propostos, nosso objetivo foi analisar de que forma as Díades compreendiam conceitos básicos da Geometria, bem como as respectivas propriedades geométricas a partir de seu comunicação e estratégias apresentadas. A partir disso, as análises aconteceram de acordo com os níveis do Modelo van Hiele. Com essa proposta, analisamos a interação e, consequentemente, a forma como essas Díades se comunicavam na resolução dos problemas geométricos, de acordo com o Nível de pensamento geométrico que apresentavam, segundo o Modelo van Hiele.

Ao término identificamos que, quando se deparam com resolução de problemas, as dificuldades são maiores em relação à proposta de testes, uma vez que, para resolver problemas, além de ter uma boa base de conhecimentos prévios, é também necessário fazer uma interpretação mais detalhada e buscar estratégias de resolução. Portanto, para que haja um ensino que acompanhe as mudanças sociais, pois já não faz tanto sentido o aluno estar limitado em atividades rotineiras e repetitivas, o que mais importa, é a capacidade de resolver problemas.

9.2 O que Concluímos?

Ao entrevistarmos a Professora Rita, analisamos que ela observa as mesmas dificuldades em relação à Matemática que identificamos ao desenvolver o trabalho com a turma. Rita afirma que o ensino de Geometria é de grande importância, porém fala das dificuldades em trabalhar, sobretudo a Geometria Plana, em virtude da insuficiência de tempo. Contudo, ela destacou que, quando trabalha a parte de Geometria Plana, é através de seminários, nos quais os alunos em grupos poderão estudar sobre áreas e volumes na construção de sólidos geométricos para apresentar aos demais colegas da turma, dando embasamento ao estudo da Geometria Espacial. Ao mesmo tempo, ela ressaltou que no 3° Ano, suas aulas de Geometria Analítica acontecem de forma tradicional.

De acordo com Rita, a comunicação matemática dos alunos acontece de modo informal, pois, muitas vezes, eles não recordam os conceitos. Ela cita alguns exemplos que costumeiramente acontecem em suas aulas, como, por exemplo, quando fala de *“uma elipse”*. Os alunos se referem a um círculo ou quando falam de *“uma secção”*, eles usam, muitas vezes, a palavra corte, entre outros termos. Esse fato evidencia o Nível de pensamento geométrico da turma que, conforme identificamos, ainda é o de Reconhecimento ou Visualização, de acordo com o Modelo van Hiele.

Rita considera essencial o uso de materiais manipuláveis em sala de aula, pois, segundo ela, é uma forma de os alunos entenderem Matemática com uma facilidade muito maior e, consequentemente, expressar em uma comunicação matemática melhor. Ela considerou que a turma favorece para desenvolver um bom trabalho, mas que os alunos ainda apresentam muitas dificuldades em relação ao conhecimento matemático, o que foi também evidenciado a partir do desenvolvimento desse nosso estudo.

Conforme identificamos no desenvolvimento da primeira etapa da pesquisa toda a turma apresentou muitas limitações no desenvolvimento das atividades e, consequentemente, apresentou um Nível de pensamento geométrico muito aquém do esperado para alunos que concluem o Ensino Médio. É comum em todo âmbito escolar alguns apresentaram mais facilidade em comunicar-se em relação a outros, conforme ressaltou a Professora Rita referindo-se à turma em pesquisa. No entanto, notamos que todos apresentaram muitas fragilidades em relação ao conhecimento das propriedades de figuras geométricas. O reconhecimento ou compreensão da nomenclatura ou classificação das figuras geométricas só aconteceu a partir da aparência global dessas figuras, o que nos fez compreender, baseado em Nasser e Sant'anna (2010) e Crowley (1994), que não conseguiram ir além do primeiro Nível de compreensão geométrica (Reconhecimento ou Visualização), de acordo com o Modelo van Hiele.

Permeados em uma realidade que se moderniza a passos largos, se faz necessária uma reflexão sobre a prática e uma possível renovação da mesma, na tentativa de suprir algumas necessidades. Dessa forma, nos alunos é preciso despertar uma nova visão em relação ao papel da Matemática e de suas especificidades de modo formal e criterioso, proporcionando a reflexão sobre seu desenvolvimento em sala de aula. Esse fato é, sobretudo, importante para os exames de avaliação que acontecem a cada ano e que requerem uma boa base de interpretação matemática para solucioná-los, a exemplo do ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio), OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática em Escola Pública), OBM (Olimpíada Brasileira de Matemática), Prova Brasil, entre outros.

Contudo, é evidente a necessidade do posicionamento crítico e reflexivo mediante o desenvolvimento do problema, pois concordando com Souza et al (1995), são os momentos de questionamentos e reflexão que propiciam trocas de informação e interpretações, influenciando positivamente a aprendizagem.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) apontam a necessidade de domínio de muitas competências matemáticas no Ensino Básico, como, por exemplo, o reconhecimento de formas e representações espaciais, entre outros domínios. Porém, notamos um distanciamento dessa expectativa com relação à prática que se evidencia, de forma muito aquém ao que também defendem as Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 2006). Dessa forma, os alunos estão concluindo o Ensino Médio com um Nível de compreensão geométrica pouco favorável em relação ao esperado para ingressar no Ensino Superior.

Analisamos de acordo com os testes de van Hiele, propostos por Nasser e Sant'Anna (2010), que, ao trabalhar de forma individual, os alunos revelaram dificuldades ainda maiores, pois em toda a turma composta por 21 alunos, apenas seis alunas conseguiram um desenvolvimento mais satisfatório. Esse fator é muito preocupante, pois os alunos ao término do Ensino Básico deveriam estar no mínimo no Nível de Análise (Nível 1) o que não se evidencia quando desconhecem conceitos básicos da Geometria, como reconhecimento de figuras ou de retas paralelas (proposta do teste referente ao Nível Básico) e o desconhecimento de propriedades básicas (proposta do teste referente ao Nível 1). Nesse sentido, o desenvolvimento dos alunos da turma revela que seu conhecimento geométrico está muito aquém do que se espera, de acordo com os documentos oficiais da Educação no Brasil para alunos que concluem o Ensino Médio.

Pensando na relevância de propor problemas em sala de aula e apoiados nos argumentos de Matos e Serrazina (1996), quando apontam que o ensino e aprendizagem de Geometria devem desenvolver nos alunos capacidades de visualizar, verbalizar e organizar o pensamento matemático, é que propomos a resolução de problemas geométricos subsidiados com o uso do Tangram, resultando, assim, nos três Casos especificados com as seis alunas que apresentaram melhor desempenho nos testes. Os problemas, por nós formulados, foram organizados em quatro Episódios e desenvolvidos pelas Díades Ana e Cecília, Vitória e Alice, Júlia e Amanda.

De acordo com dados coletados, as duas primeiras Díades dizem gostar de Matemática, enquanto Júlia e Amanda a consideram "um pouco difícil". Ana e Alice pretendem cursar Licenciatura em Matemática ao concluírem o Ensino Médio.

No desenvolvimento em cada Episódio, identificamos que as Díades interagiram de forma satisfatória, se envolveram no desenvolvimento, se comunicaram oralmente expressando seu desenvolvimento também de forma escrita, buscaram estratégias mediante o conhecimento prévio que tinham, porém deram indícios de que ainda estão no primeiro Nível do Modelo van Hiele (Visualização ou Reconhecimento), apresentando dificuldades superiores em relação ao desenvolvimento nos testes. Enquanto nos testes elas se aproximaram do segundo Nível (Análise), nos problemas trabalhados elas apresentaram muitas limitações e desconhecimento de alguns conceitos e propriedades geométricas.

Conforme Crowley (1994), os alunos que estão no segundo Nível além de reconhecer as propriedades, faz uso delas para resolver problemas. Enquanto o teste é um conjunto de alternativas que requer apenas uma resposta objetiva, a resolução de problemas tem um grau de exigência superior, pois requer interpretações, conhecimentos prévios e criatividade para o desenvolvimento de estratégias matemáticas.

Com este trabalho, percebemos que as explicações praticamente baseadas, foram usadas com uma frequência maior pelas alunas, pois suas explicações centravam-se, na maioria das vezes, naquilo que elas podiam relacionar a algo impregnado ao contexto cotidiano que vivenciam. As explicações matematicamente baseadas só foram identificadas no Episódio 3. Identificamos esse tipo de explicação, quando as Díades Ana e Cecília, Júlia e Amanda se basearam no conhecimento matemático que tinham, em relação ao cálculo de áreas, para explicar seu desenvolvimento. Também, nos três Casos, analisamos, por meio da comunicação oral entre as alunas, que a co-elaboração por consentimento (GILLY, FRAISSE & ROUX, 1988) foi o tipo de co-elaboração mais utilizado, pois, na maioria das vezes, as respostas apresentadas por uma delas era aceita como verdade para as duas.

Identificamos ainda, que os alunos interagiram de forma muito positiva, se interessaram pelas tarefas propostas e, consequentemente, se comunicaram oralmente em busca de solução para cada uma delas, sendo estes, fatores muito pertinentes no processo de ensino e aprendizagem. Porém, o maior desafio encontrado pelos alunos em cada etapa, foi a estruturação das ideias que remetiam às estratégias de resolução, uma vez que se evidenciava a carência de conhecimentos prévios de Geometria. Nesse sentido, a motivação dos alunos, desde o início da pesquisa, foi crucial para vencer os medos e apresentarem o desenvolvimento perante suas possibilidades e limitações relacionadas ao conhecimento geométrico. Mediante isso, concordamos com os argumentos de Brown e Walter (2005), quando afirmam que além de conhecimento é também necessário coragem para que todos possam encontrar desafios significativos.

Em cada caso, analisamos que as alunas se esforçavam em buscar soluções coerentes, mas o maior obstáculo para encontrá-las estava na fragilidade de conhecimentos prévios. Aspectos como esses, nos fizeram refletir ainda mais acerca da qualidade do ensino de Geometria no Brasil, que deveria acontecer de forma adequada, propiciando a criticidade dos alunos, de modo que possam argumentar, levantar hipóteses e, a partir disso, construir o conhecimento ao qual deve estar agregado com as diversas áreas da própria Matemática, sobretudo, na resolução de problemas, o que também está de acordo com os argumentos de Rêgo, Rêgo e Vieira (2012) ao tratar sobre a forma como deve acontecer o ensino da Geometria.

A fragilidade no ensino e aprendizagem de Geometria ainda é algo preocupante em nosso país, pois muitos alunos estão chegando ao término de Ensino Básico com noções muito fragilizadas em relação ao conhecimento geométrico. Observamos, a partir dessa pesquisa, que, ao se comunicar oralmente, algumas vezes, as alunas não conseguem diferenciar o paralelogramo do trapézio, ou mesmo não reconhecem que o quadrado é um quadrilátero ou o conceito de congruência. Aspectos como esses, certamente, são reflexos da pouca criticidade como muitas vezes a Geometria é trabalhada ou em virtude da falta de conhecimento das propriedades geométricas, que devem ser bem exploradas e discutidas criteriosamente, desde o Ensino Fundamental, para que os alunos consigam estabelecer relações diversas ao estudar Geometria.

O desconhecimento das propriedades geométricas se evidenciaram quando, na resolução dos problemas, Ana e Cecília, no primeiro Episódio, chamaram o paralelogramo de trapézio, da mesma forma que a Díade Vitória e Alice o chamaram de losango. Ambas as Díades também apresentaram o desconhecimento acerca do conceito de congruência e que identificamos a partir dos seus diálogos e comunicação escrita. Ao reconhecer os polígonos, conceito de congruência e desenvolvimento de cálculos de áreas, Júlia e Amanda apresentaram um desenvolvimento mais satisfatório no decorrer dos Episódios, entretanto, não apresentam o conhecimento formal das propriedades.

No segundo Episódio, a aluna Alice formou um trapézio que Vitória chamou de retângulo e, com isso, ela usou como referência para dizer a Vitória que não era um retângulo e sim um trapézio, a relação com o formato de um objeto de seu cotidiano que ela chama de “sainha” (peça de roupa). Alice se baseou no aspecto visual, que a fez reconhecer o polígono. Entretanto, não enfatizou nenhuma das propriedades geométricas que diferenciam as respectivas figuras. Aspectos como esses evidenciam o desconhecimento formal em relação à Geometria.

Comparado aos dois primeiros Episódios, identificamos que, no terceiro Episódio – *Cálculos de áreas: os cálculos de Pedrinho,* houve um desenvolvimento maior, notado a partir da comunicação oral, pois, embora com algumas limitações na resolução, sobretudo na estrutura de alguns cálculos apresentados, as Díades deram indícios, a partir de seu desenvolvimento e comunicação oral, de compreender o conceito de área e relembraram as respectivas fórmulas para cálculo de área do triângulo e do quadrado.

Observamos que nos demais Episódios, as alunas apresentaram algumas dificuldades em classificar figuras geométricas e desconhecem as propriedades. Entretanto, conseguem compreender e relacionar áreas. Esse aspecto nos fez refletir acerca de como a Geometria vem sendo desenvolvida com os alunos, pois eles ainda apresentam-se muito centrados na memorização de fórmulas, o que pode acentuar a falta de criticidade matemática.

Especialmente no último Episódio – *Competição geométrica*, cujo objetivo foi analisar se as alunas conseguiam compreender e distinguir algumas propriedades geométricas, identificamos nos três casos, que as Díades apresentaram muitas limitações e, ao mesmo tempo, pouca criticidade, resultando em muitas generalizações inadequadas em relação às figuras geométricas e respectivas propriedades.

Vitória e Alice, durante os Episódios, apresentaram pouca criticidade e focaram principalmente na busca imediata de respostas, com justificativas superficiais. Sabemos, com base em Nasser e Sant'anna (2010), que se faz necessária a cobrança de justificativas desde as séries iniciais, para que, possivelmente, os alunos possam raciocinar e apontar um posicionamento mais crítico diante das questões postas. Além disso, vimos que o uso de materiais manipuláveis pode ser relevante na resolução dos problemas, pois estimula o desenvolvimento de estratégias, uma vez que o processo de visualização e manuseio é consideravelmente útil na compreensão geométrica de acordo com Leivas (2012).

Portanto, é importante colocar os alunos em situações desafiadoras nas aulas de Matemática, desde as séries iniciais, com o intuito de proporcionar uma formação mais contundente, aluno mais crítico e criterioso a fim de ganharem maturidade para, ao término do Ensino Médio, chegar, pelo menos, no terceiro Nível do Modelo van Hiele

(Dedução Informal ou Abstração), pois muitos dos alunos ainda estão raciocinando no primeiro Nível (Visualização ou Reconhecimento), o que é muito preocupante, uma vez que se encontram numa situação muito aquém das necessidades cobradas pelo Ano de escolaridade, sobretudo aqueles que estão concluindo o Ensino Médio e vislumbrando o alcance do Ensino Superior, como duas das integrantes das Díades desta pesquisa.

Dessa forma, devemos instigar os alunos na descoberta de conceitos no decorrer das aulas de Matemática, na tentativa de torná-los mais reflexivos, dentro de um padrão menos descritivo e muito mais construtivo e interpretativo.

Nessa pesquisa, a turma afirmou que já conhecia o Tangram, porém nunca haviam trabalhado problemas fazendo uso dele. Considerando essa situação como "nova", pudemos perceber que apresentaram um relevante grau de empolgação, o que, sem dúvida, é primordial para o sucesso do que é desenvolvido.

Em cada Caso, a partir da comunicação e desenvolvimento na resolução dos problemas, verificamos que as Díades interagiam de forma satisfatória, se comunicando oralmente na discussão da tarefa proposta e na busca da solução, porém, muitas vezes, apenas dialogavam e não conseguiam explicar, em virtude de desconhecer alguns dos conceitos geométricos envolvidos nos problemas.

Quando conseguiam explicar, na maioria das vezes, era de uma forma praticamente baseada, pois relacionavam figuras ou formas geométricas a objetos do cotidiano e explicavam com base apenas no material manipulável. Desse modo, raramente emergiram explicações matematicamente baseadas, o que também seria interessante e desejável em termos de aprendizagem matemática.

O fato de as Díades apresentarem muitas fragilidades em relação a conhecimentos geométricos não reconhecendo nomenclatura, propriedades de algumas figuras geométricas ou conceitos que já deveriam estar bem formalizados, de acordo com o nível de escolaridade em que se encontram, foi um aspecto que, de certa forma, limitou o desenvolvimento dos problemas, pois a resolução de problema exige uma demanda de conhecimentos prévios relacionados para que haja eficácia na interpretação e no desenvolvimento das estratégias de resolução a partir da tradução para linguagem matemática.

Tendo em vista os avanços tecnológicos existentes e as constantes cobranças sociais, se faz cada vez mais necessária a formação contínua. Conforme destacou a professora Rita, que sente a necessidade de trabalhar com coisas que fogem dos padrões convencionais, como recursos tecnológicos que auxiliem no ensino. Entretanto, não tem domínio das ferramentas, pois o que viu sobre o trabalho com essas ferramentas durante a sua formação inicial não foi suficiente. Há algumas vezes o desejo de inovar e/ou acrescentar às práticas, porém se fazem também necessárias oportunidades e estímulos pertinentes, pois, dessa forma, o docente ganhará subsídios que, possivelmente, amenizarão algumas carências no ensino e a fragilidade na aprendizagem.

Portanto, se faz necessário pensar em alternativas que ampliem a aprendizagem matemática dos alunos fazendo-os desenvolver seu senso crítico e, possivelmente, refletindo acerca da dinâmica dessa ciência, que não deve ser entendida como uma sequência de fórmulas a serem memorizadas. Nesse sentido, é necessário ir além, traçando novas metas para o ensino, na tentativa de favorecer uma aprendizagem concreta, na qual o aluno possa construir seu conhecimento.

A sala de aula é um campo muito rico para investigações, por ser o centro das observações, fatos e acontecimentos, por essa razão, deve ser muito bem aproveitado para um desabrochar de pesquisas pertinentes no campo da Educação Matemática. Nessa pesquisa, identificamos uma série de questões acerca do conhecimento geométrico dos alunos que concluem o Ensino Médio, o que nos trouxe muitas reflexões. Contudo, não faz parte dos nossos objetivos e nem seria propício responder cada indagação advinda dessas reflexões em uma só pesquisa, mas que poderão ser respondidas futuramente em outros estudos.

Alguns desses questionamentos foram: Que alternativas são viáveis para modificar o fato de os alunos estarem concluindo o Ensino Médio ainda no Nível de Reconhecimento? Essa é uma realidade constante em outras regiões e instituições de Ensino Público no Brasil? Será que a aproximação de diálogos entre Universidade e Escola, com cursos de formação continuada para os professores e Projetos de Pesquisa que envolvam os alunos, seria uma alternativa que os fizesse evoluir em relação ao conhecimento da Geometria?

Entendemos que propor atividades matemáticas que despertem o interesse e a curiosidade dos alunos, bem como o trabalho em pequenos grupos, é de grande valia, pois, dessa forma, eles são provocados a pensar mais, refletir e se comunicar, o que sem dúvidas, é muito positivo dentro do processo de ensino e aprendizagem. Com essa pesquisa, identificamos que a resolução de problemas proporciona maior interação, pois os alunos trabalhando em Díades ou mesmo em pequenos grupos, se deparam com uma situação na qual interpretam, buscam estratégias e desenvolvem de acordo com o conhecimento prévio que apresentam. No entanto, a falta desses conhecimentos prévios limita o respectivo desenvolvimento.

A proposta de trabalhos organizados em grupos com a orientação do professor em sala de aula, certamente pode ocasionar relevantes resultados, uma vez que os alunos compartilham o que sabem ou discutem diferentes opiniões estando o professor na função de orientador para direcionar, esclarecer dúvidas, estimular na busca de estratégias e avaliar mais significativamente, uma vez que observa o desenvolvimento ativo dos alunos.

De acordo com Carvalho (2009), no momento em que se propõem atividades em sala de aula, proporcionando o trabalho colaborativo, desperta para argumentações, explicações, avaliação e refutação de ideias, enriquecendo assim, o poder matemático dos alunos. Dessa forma, a autonomia, a aproximação de níveis de conhecimento e a aproximação de diálogos são fatores pertinentes que podem ser de grande relevância para construção do conhecimento.

Ao propor tarefas em grupos, os alunos tendem a debater ideias e opiniões para se chegar à determinada solução, que podem convergir em uma mesma direção ou não, uma vez que cada aluno tem sua experiência e saber pessoal. Carvalho (2009) ainda frisa que a exposição de argumentos e justificativas entre os parceiros do grupo acerca da resolução que resulta em uma situação que foge dos padrões hierárquicos, isto é, o trabalho se caracteriza em uma dinâmica colaborativa, na qual não há líder e sim colaboradores que, juntos, agregam conhecimentos.

Entendemos que o cruzamento de ideias e pontos de vista no trabalho desenvolvido em pequenos grupos leva o aluno a refletir sobre seus argumentos e interpretações relacionados ao contexto em questão, podendo, assim, ampliar os conhecimentos, desenvolvendo novas estratégias e maiores significados, pois ambos estão, a partir do diálogo, ativamente envolvidos na tarefa. Por esta razão, torna-se muito relevante que nós, professores, possamos incentivar os alunos no desenvolvimento adequado das tarefas, fazendo-os entender quão interessante pode ser a Matemática a fim de terminarem com um sentimento de satisfação.

Concordando com Pessoa (2010), é necessário que os alunos estejam envolvidos em uma situação na qual assumam uma participação ativa na construção do saber. Sendo assim, analisamos que o processo de interação é bastante favorável neste aspecto. Ao mesmo tempo é também muito pertinente a afirmação de Fonseca (2009) quando ressalta que a comunicação é de grande valia para a articulação e organização do pensamento.

Portanto, atualmente é indispensável a proposta de resolução de problemas em sala de aula, pois além de incentivar a comunicação (BOAVIDA et al, 2008), proporciona maior reflexão matemática viabilizada pela troca de informação e interpretação. Concordamos com César, Oliveira e Teles (2004) quando ressaltam que pode o decente promover avanços bem significativos aos alunos, quando oferece novas oportunidades. Por essa razão, é que se faz tão importante a prática de propor problemas significativos nas aulas de Matemática (SCHOENFELD, 1996), desde as séries iniciais, o que pode favorecer na construção do conhecimento matemático ao longo da vida.

Dessa forma, atrelado à dinâmica do Mestrado Profissional, pretendemos estender essa proposta a escolas públicas e, principalmente, à escola campo dessa pesquisa, com o objetivo de provocar reflexões acerca do ensino de Geometria e da resolução de problemas nos docentes. Ao mesmo tempo, os problemas trabalhados em cada Episódio poderão ser utilizados para o trabalho docente e ampliados para uma nova proposta de acordo com a criatividade dos docentes de Matemática.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, N. S. G. O Computador e a Aprendizagem Matemática: reflexões sob a perspectiva da Resolução de Problemas. In: SEMINÁRIO EM RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS, I., 2008, São Paulo. *Anais*... São Paulo: UNESP, 2008.

ALRO, H.; SKOVSMOSE, O. *Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática*. Tradução de Orlando Figueiredo. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

ANDRADE, J. A.; NACARATO, A. M. Tendências Didático-Pedagógicas no Ensino de Geometria: Um olhar sobre os trabalhos apresentados nos ENEMs. *Educação Matemática em Revista*, n. 17, ano 11, p. 61-69, 2004.

BASTOS, R. Transformações Geométricas. *Educação e Matemática: Revista da Associação de Professores de Matemática*, ed. 94, 2007.

BISHOP, A. J.; GOFFREE, F. *Perspectives on Mathematics Education (Cap. 8). Org.* B. Christiansen, A. G. Howson e M. Otte e publicado pela editora D. Reidel, em 1986.Tradução: José Manuel Varandas, Hélia Oliveira e João Pedro da Ponte. [S.l.:s.n.].

BOAVIDA, A.; PAIVA, A. L.; CEBOLA, G.; PIMENTEL T. *Resolução de Problemas em Matemática*. In: A experiência matemática no ensino básico. Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular. Lisboa: [s.n.], 2008.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. *Investigação qualitativa em educação:* uma introdução à teoria e aos métodos. Tradução Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Porto, Portugal: Porto, 1994.

BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org). *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2012.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais:* Matemática. Brasília, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Orientações Curriculares Nacionais Para o Ensino Médio*: Ciência da Natureza e suas Tecnologias. Brasília, 2006.

BROWN, S.; WALTER. M. *The art of problem posing.* 3ª ed. New York: Routledge, 2005.

BUSSI, M.G. B.; MARIOTTI, M. A. *Semiotic mediation in the mathematics classroom:* Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. [S.l.:s.n.], 2010. p. 746-783.

CANDEIAS, N.; PONTE, J. P. *Geometry learning:* The role of tasks, working models, and dynamic geometry software. In B. Czarnocha (Ed.), Handbook of mathematics teaching research. [S.l.:s.n.], 2008. p. 387-396.

CARVALHO, C. *Comunicação e interações sociais nas aulas de Matemática*. In: LOPES, A.E.; NACARATO, A. M. Escritas e Leituras na Educação Matemática. 1 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

CÉSAR, M.; OLIVEIRA, A.; TELES, L. *Sharing learning about geometry:* peer work in maths classes. In J. Giménez, G.E. FitzSimons, & C. Hahn (Eds.), *A challenge for mathematics education: toreconcilecommonlities and differences - CIEAEM54* (pp. 339-343). Barcelona: Graó, 2004.

CROWE, D. W.; THOMPSON, T. M. *Alguns usos modernos da Geometria.* In: LINDQUIST, M. M. e SHULTE, A. P. (org) Ensinando e Aprendendo Geometria. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

CROWLEY, M. L. *O Modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico.* In: LINDQUIST, M. M. e SHULTE, A. P. (org) Ensinando e Aprendendo Geometria. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994. p. 1-19.

D' AMBRÓSIO, B. A Evolução da Resolução de Problemas no Currículo Matemático. In: SEMINÁRIO EM RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS, I., 2008, São Paulo. *Anais*... São Paulo: UNESP, 2008.

D'AMORE, B. *Elementos da didática da Matemática*. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

DANTE, L.R. *Formulação e resolução de problemas de matemática:* teoria e prática. São Paulo: Ática, 2010.

DREYFUS, T.; HADAS, N. *Euclides deve permanecer – e até ser ensinado.* In: LINDQUIST, M. M. e SHULTE, A. P. (org) Ensinando e Aprendendo Geometria. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

ESTEBAN, M. P. S. *Pesquisa qualitativa em educação:* fundamentos e tradições. Tradução Miguel Cabrera. Porto Alegre: Artmed, 2010. p. 145-209.

FONSECA, L. Comunicação Matemática na sala de aula - Episódios do 1º ciclo do Ensino Básico. *Educação e Matemática*, nº 103, ESE/IP de Viana do Castelo. Portugal: [s.n.], 2009.

GILLY, M.; FRAISSE, J.; ROUX, J. *Resolucion de problemes en dyades et progrescognitifs chez des enfants de 11 à 13 ans*: dynamiques interactives et socio-cognitives. In: A.-N. PERRET-CLERMONT & NICOLET (Eds.), Interagir et connaître: Enjeux et régulations sociales dans le développement cognitif. Friboug: Del Val, 1988. p. 73-92.

GONTIJO, C.H. Resolução e Formulação de Problemas: caminhos para o desenvolvimento da criatividade em Matemática. In: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**.** 2006, Recife, *Anais*... Recife: Universidade Federal de Pernambuco, Programa de Pós-Graduação em Educação, 2006, p. 1-11.

GONTIJO, C. H. *Relações entre criatividade, criatividade em matemática e motivação em matemática de alunos do ensino médio.* 2007. 194 p. Tese (Doutorado em Psicologia) - Instituto de Psicologia, Universidade de Brasília, Brasília.

LATAS, J. Despertar o pensamento geométrico com a hierarquização de quadriláteros. *Educação e Matemática: Revista da Associação de Professores de Matemática*. Lisboa, 2012. p. 7-11.

LEIVAS, J. C. P. Percepção e coordenação visual e motora no desenvolvimento do pensamento geométrico. *Educação e Matemática: Revista da Associação de Professores de Matemática*. Lisboa, p. 27-32, 2012.

LEVENSON, E. TIROSH, D. TSAMIR, P. Elementary school teachers' preference for mathematically-based and practically-based explanations. In J. Novotna and H. Morava (Eds.), Proceedings of the 28 rd Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education, v. 3, p. 241-248, Bergen, Norway: PME, 2004.

LEVENSON, Esther. TIROSH, Dina. TSAMIR, Pessia. Mathematically-based and practically-based explanation: which do students preffer? In Tzekaki, M. Kaldrimidou,M. &Sakonids, H. (Eds.), Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education,Thessaloniki, Greece: PME, v. 2, p. 305-312, 2009.

LORENZATO, Sérgio. *Por que não ensinar Geometria?* A Educação matemática em revista. *SBEM*, n. 4, 1º semestre, 1995.

LORENZATO, S. *Para aprender Matemática*. (Coleção Formação de Professores) 3 ed. Campinas, SP: Autores Associados, 2010.

LORENZATO, S. *Laboratório de ensino de Matemática e materiais didáticos manipuláveis*. In: O laboratório de ensino de matemática na formação de professores. Org. Sergio Lorenzato (Coleção Formação de Professores) – Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

MARCUSCHI, L. A; *Análise da conversação*. 6. Ed. São Paulo: Ática, 2007.

MATOS, J. M., & SERRAZINA, M. L. *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta, 1996.

MEDEIROS, K.M. O contrato didático e a resolução de problemas matemáticos em sala de aula. *Educação Matemática em Revista*, nº 9/10, São Paulo, 2001.

MEDEIROS, K. M.; SANTOS, J. B. Uma Experiência Didática com a Formulação de Problemas Matemáticos. *ZETETIKE*: Cempem – FE – Unicamp, v. 15, n. 28, jul./dez. 2007.

MEDEIROS, K. M. *A comunicação na formação inicial de professores de Matemática: concepções e práticas de explicação na sala de aula*. 2010. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade de Lisboa.

MEDEIROS, K. M. Utilizando o Geogebra para explorar a criatividade na formulação e na resolução de problemas geométricos. In: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3. 2012, Fortaleza. *Anais*... Fortaleza, 2012.

MEIRA, G. G. *Transformações no plano: do cotidiano à sala de aula*. 2011. Trabalho Acadêmico Orientado (Graduação em Licenciatura Plena em Matemática) – Universidade Estadual da Paraíba.

MOREIRA, M. A. *A Teoria da Mediação de Vygotsky*. In: Teorias de Aprendizagem São Paulo: EPU, 1999. p. 109-122.

NASSER, L. *Argumentação nas aulas de matemática. Boletim Educação Matemática em Foco*, UEPB - CCT– DME SBEM/PB Área: Edu. Matemática Ano II – N° 008 set./out. 2007.

NASSER, L.; SANT'ANNA, N. *Geometria Segundo a Teoria de Van Hiele*. 2 ed. Rev. Rio de Janeiro: IM/UFRJ, 2010.

OLIVEIRA, M. C.; GAZIRE, E. S. *Ressignificando a Geometria plana no Ensino Médio, com auxílio de van Hiele*. Belo Horizonte, 2012. Disponível em: http://www.pucminas.br/imagedb/documento/DOC_DSC_NOME_ARQUI20121128150635.pdf?PHPSESSID=fdb6d12870c8aaf4688b74f0ad0dd734
Acessado em: 14 de maio de 2013.

PAIS, L. C. Didática da Matemática; uma análise da influência francesa. 3. Ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

PESSOA, Paula. *Novo Programa de Matemática – Inovações de práticas e aprendizagens. Educação e Matemática: Revista da Associação de Professores de Matemática*, Ed. 109, 2010.

POLYA, G. *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PONTE, J. P. *Estudos de caso em educação matemática*. *Bolema*, n. 25, p. 105-132, 2006.

PRINCÍPIOS E NORMAS PARA MATEMÁTICA ESCOLAR DO NCTM. Associação dos Professores de Matemática - APM. Tradução: Madga Melo. Lisboa, 2008.

RABELO, P. C.; GOMES, A. Reorganização Curricular da Geometria: Uma Experiência no 6° ano de escolaridade. *Quadrante Revista de Investigação em Educação Matemática*, v. XXI, n. 1, p. 3-27, 2012.

RÊGO, R. G.; RÊGO, R. M.; FOSSA, J. A.; PAIVA, J. P. A. *Padrões de Simetria do Cotidiano à sala de Aula*. João Pessoa: EDUFPB, 2006.

RÊGO, R. G. do; RÊGO, R. M. do; VIEIRA, K. M. *Laboratório de ensino de Geometria*. Campinas, SP: Autores associados, 2012.

RÊGO, R. M.; RÊGO, R. G. *Desenvolvimento e uso de materiais didáticos no ensino de matemática*. In: O laboratório de ensino de matemática na formação de professores. Org. Sergio Lorenzato. Campinas, SP: Autores Associados, 2006.

SCHOENFELD, A. *Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas?* In: P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Eds.), *Investigar para aprender matemática* (pp. 61-72). Lisboa: APM e Projecto MPT, 1996. (Artigo originalmente publicado em 1991 na revista ZDM).

SMOLE, K.S.; DINIZ, M.I. *Ler, Escrever e Resolver Problemas*. São Paulo: Artmed, 2001.

SOUZA, E. R.; DINIZ, M. I. S. V.; PAULO, R. M.; OCHI, F. H. *A Matemática das sete peças do Tangram*. IME-USP. São Paulo: [s.n.], 1995

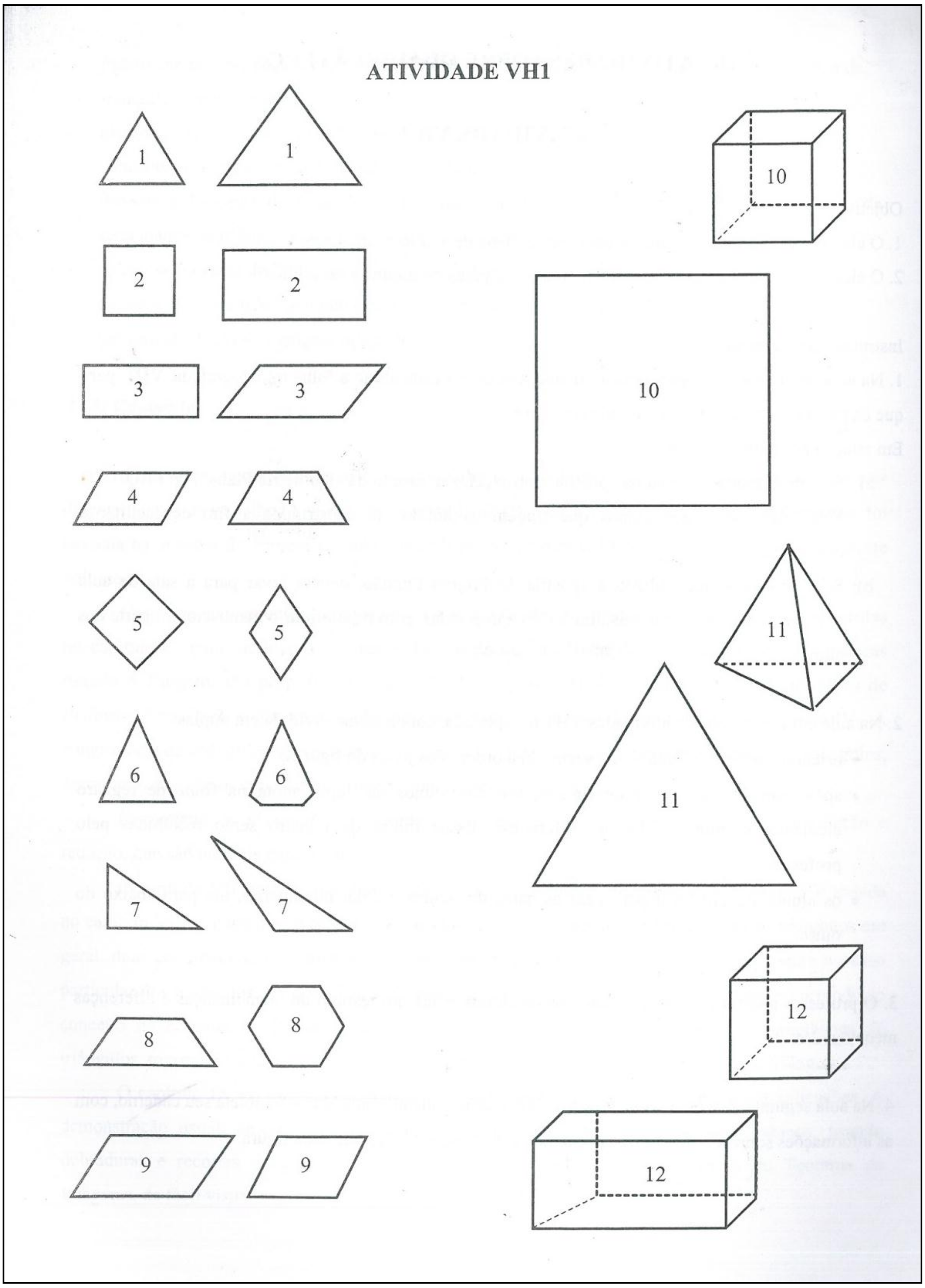
VAN de WALLE, J. A. *Matemática no Ensino Fundamenta:* formação de professores e aplicação em sala de aula. Tradução: Paulo Henrique Colonese. 6. Ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

VELOSO, E.; BASTOS, R.; FIGUEIRINHAS, S. Isometrias e Simetrias com materiais manipuláveis. *Educação e Matemática – Revista da Associação de Professores de Matemática*, ed. 101, 2009.

YACKEL, E.; COBB, P. *Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics*. Journal for Research in Mathematics Education, 27(4), 458-477, (Traduzido em português de Portugal), 1996.

ANEXOS

Anexo 1: Atividade van Hiele (VH)



Anexo 2: Folha de Registro

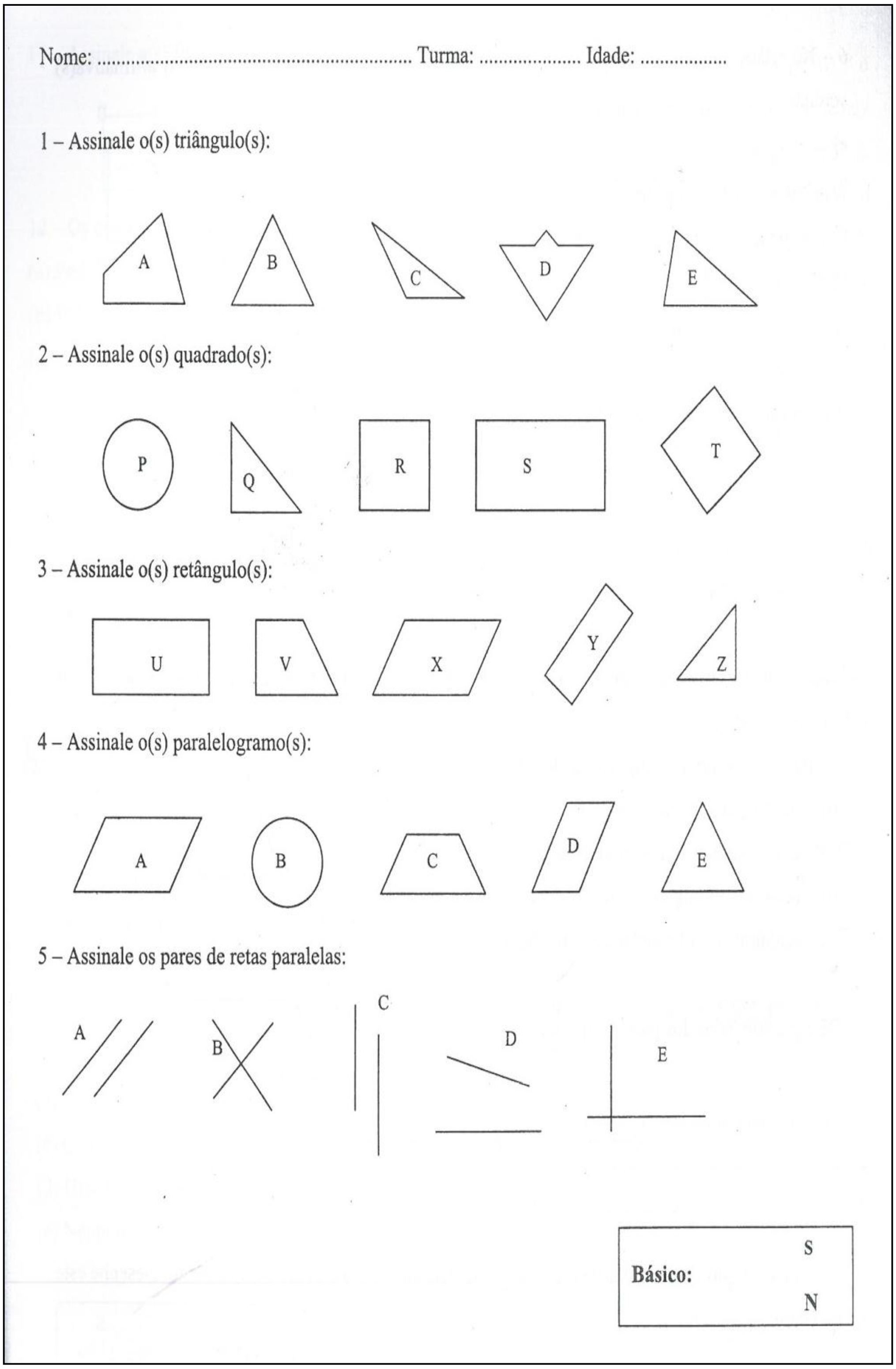
FOLHA DE REGISTRO

Nomes: ______________________ e ______________________ Turma: ________

Pares de Figuras	Elementos em Comum	Diferenças
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		

Anexo 3: Testes van Hiele

Anexo 3.1 - teste 01



Nome: .... Turma: .... Idade: ....

1 – Assinale o(s) triângulo(s):

A B C D E

2 – Assinale o(s) quadrado(s):

P Q R S T

3 – Assinale o(s) retângulo(s):

U V X Y Z

4 – Assinale o(s) paralelogramo(s):

A B C D E

5 – Assinale os pares de retas paralelas:

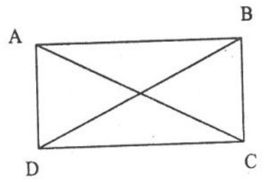
A B C D E

Básico:	**S**
	N

Anexo 3.2 – teste 02

Nome: .... Turma: .... Idade: ....

6 – No retângulo ABCD, as linhas AC e BD são chamadas de diagonais. Assinale a(s) afirmativa(s) verdadeira(s) para todos os retângulos:



a) Têm 4 ângulos retos.

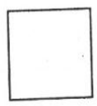
b) Têm lados opostos paralelos.

c) Têm diagonais de mesmo comprimento.

d) Têm os lados iguais.

e) Todas são verdadeiras.

7 – Dê 3 propriedades dos quadrados:



1 - ....

2 - ....

3 - ....

8 – Todo triângulo isósceles têm dois lados iguais. Assinale a afirmativa verdadeira sobre os ângulos do triângulo isósceles:

(a) Pelo menos um dos ângulos mede 60°.

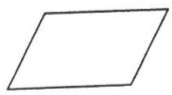
(b) Um dos ângulos mede 90°.

(c) Dois ângulos têm a mesma medida.

(d) Todos os três ângulos têm a mesma medida.

(e) Nenhuma das afirmativas é verdadeira.

9 – Dê 3 propriedades dos paralelogramos:



1 - ....

2 - ....

3 - ....

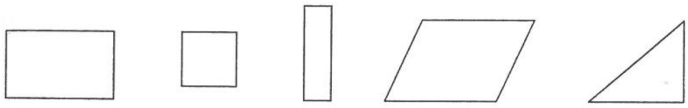
10 – Dê um exemplo de um quadrilátero cujas diagonais não têm o mesmo comprimento. Desenhe este quadrilátero.

Nível 1:	**S**
	N

Anexo 3.3 - teste 03

Nome: .... Turma: .... Idade: ....

11 – Assinale a(s) figura(s) que pode(m) se considerada(s) retângulos:



12 – Os quatro ângulos A, B, C e D de um quadrilátero ABCD são todos iguais.

(a) Pode-se afirmar que ABCD é um quadrado? ....

(b) Por que? ....

(c) Que tipo de quadrilátero é ABCD? ....

13 – Pode-se afirmar que todo retângulo é também um paralelogramo?........................... Por que? ....

14 – Considere as afirmativas:

(I) A figura X é um retângulo.

(H) A figura X é m triângulo.

Assinale a afirmativa verdadeira:

(a) Se 1 é verdadeira, então II é verdadeira.

(b) Se I é falsa, então II é verdadeira.

(c) I e II não podem ser ambas verdadeiras.

(d) I e II não podem ser ambas falsas.

(f) Se II é falsa, então I é verdadeira.

15 – Assinale a afirmativa que relaciona corretamente as propriedades dos retângulos e dos quadrados;

(a) qualquer propriedade dos quadrados é também válida para os retângulos.

(b) Uma propriedade dos quadrados nunca, é propriedade dos retângulos.

(c) Qualquer propriedade dos retângulos é também válida para os quadrados.

(d) Uma propriedade dos retângulos nunca é propriedade dos quadrados.

(e) Nenhuma das afirmativas anteriores.

Nível 2:	**S**
	N

APÊNDICES

Apêndice 1: Roteiro de Entrevista semi-estruturada com a Professora

I. Aspectos de identificação de Experiência docente

1. Há quanto tempo você leciona? Tomando como referência a turma em pesquisa, como avalia sua relação com a mesma?

II. Concepções acerca da Geometria

2. Em relação à Geometria, o que você considera sobre o ensino? Você costuma ensiná-la ou a prática se volta mais para Álgebra?

3. Quando você trabalha com Geometria nesta turma, como acontecem as aulas? O que os alunos argumentam? Como acontece a comunicação matemática entre eles?

III. Concepções relacionadas ao uso de materiais concretos e materiais tecnológicos

4. O que você pensa sobre as atividades com materiais manipuláveis nas aulas de matemática? Estas atividades podem contribuir para o desenvolvimento das ideias matemáticas nos alunos? Você pode falar um pouco sobre algumas das que conhece? Quais desses tipos você costuma utilizar em sua prática letiva?

5. E com relação aos materiais tecnológicos, o que você pensa sobre trazê-los para a sala de aula de Matemática? Você os utiliza em sua prática letiva? Se sim, quais são os mais utilizados? Por quê? Você já utilizou algum objeto virtual de aprendizagem ou aplicativos em suas aulas? De que forma esses alunos reagem quando são propostas tarefas com estes recursos tecnológicos?

IV. O desafio do exercício docente em Matemática

6. Para finalizar, sabemos que a educação e, sobretudo o ensino e aprendizagem de Matemática é mesmo um desafio no nosso país. Mas você, enquanto docente com certa experiência, como idealiza uma sala de aula de Matemática?

Apêndice 2: Transcrição e roteiro da Entrevista

Entrevista Semi-estruturada com a Professora Regente

Essa Entrevista foi realizada em 02 de maio de 2013 as 15 horas e 37 minutos na cidade de Cabaceiras – PB com a professora regente da turma em que estamos desenvolvendo a pesquisa. A professora é identificado pelo pseudônimo **Rita** enquanto que a letra **G** nos identifica na função de entrevistador.

G: Professora Rita, há quanto tempo você leciona?

Rita:*Dez anos! Comecei em 2003.*

G: Tomando como referência a turma em pesquisa, como avalia sua relação com a mesma?

Rita: *Tenho uma, uma relação m::ito boa, até porque eu comec:ei com eles já no 9° ano, então não é uma turma nova pra mim. Comecei com eles já no 9° ano, aí no 1° ano não ensinei a eles, aí no 2° ano ensinei novamente e agora no 3° ano. Então eu já conheço eles já faz algum tempo e a gente tem um relacionamento muito bom!*

G: Essa relação tem lhe ajudado, com relação à metodologia?

Rita: *Em relação à metodologia COM CERTEZA, porque eu já conheço há algum tempo aí dá pra saber aqueles alunos que têm certa dificulda::de, aqueles que são melhores em Matemá::tica, onde avançar, onde ter mais cuidado pra ir mais devagar, com mais detalhes.*

G: Sim, compreendo. Mas com relação à Matemática no geral, como a turma reage, ou pelo menos a maior parte?

Rita: *Essa tu::rma, não é diferente das outras turmas, o que acontece com a maioria das turmas", a maioria dos alunos têm dificulda::de em Matemática. É a realidade! Alguns se destacam, aqueles se destacam normalmente são muito bons (+), poucos sã::o mais ou menos, tiram umas notas boas, outras não se dão tão bem e a maioria INFELIZMENTE, a maioria não se dão bem.*

G: Mas em relação à Geometria, o que você considera sobre o ensino?

Rita: A*h, muito importante! O ensino da Geometria é muito importante. Quando a gente fala do ensino da Geometria no Ensino Médio, aí é, é bem mais aprofundado né' do que no Ensino Fundamental, tem aquela parte de Geometria plana, espacial (+) que:: no caso, o 2° ano os alunos trabalham mais* *com aquelas coisas que tão na realidade deles, que eles convivem, aqueles objetos e tudo mais e Geometria analítica, que é o que eu tava trabalhando com eles agora no 3° ano, é mais abstrato. Mas ela é MUITO IMPORTANTE para o conhecimento da Matemática de uma forma geral.*

G: Mas você costuma ensiná-la ou a prática se volta mais para Álgebra?

Rita: *Agora no 3° ano, eu iniciei justamente com Geometria Analítica, entã::o (+) a gente sabe que a parte de Geometria Analítica tem mu::ita álgebra também, muitas equaçõ::es e tudo mais. Mas eu costumo ensinar sim. Agora quando a gente fala em Geometria Plana, a realida::de é que:: o tempo não dá pra ver detalhadamente. Então eu trabalhei a Geometria Espacial mais como trabalhos que os meninos desenvolveram, os meus alunos dessa turma desenvolve::u e fize::ram apresentações, construíram os sólidos geométricos. Eles mesmos, é que explicavam pra os outros alunos todos esses conceitos de Geometria. Eu trabalhei (+) nesse sentido, com seminários, não foi aulas expositivas que eu ia lá na frente e explicava pra eles não, foi nesse sentido que eu trabalhei a Geometria. E foi muito proveitoso, foi muito proveitoso porque ele::s (+) uma turma boa de trabalhar, muito boa! Eles deram muito de si nesses trabalhos e:: nos seminários a gente sabe que dá pra aprender mais porque eles estão mesmo de cabeça estudando pra aprender aquilo ali e passar pros (= para os) outros. Então foi bem proveitoso!*

G: Embora em sua fala já dê para entender um pouco como o trabalho é desenvolvido, gostaria que você reforçasse a forma como acontecem as aulas de Geometria nessa turma (3° Ano)?

Rita: *Éh:: Geometria analítica, acontece da forma tradicional mesmo, com aulas expositi:::vas, exercícios que eles resolvem em sala, eu to pegando muitas questões da Geometria que ca::i nos vestibulares, é o que eu to mais usando na sala, porque é um ano de vestibular. Agora, já a Geometria Plana eu costumo trabalhar assim mesmo, com seminário, pra que eles possam (+) trabalhar tanto a parte da::, aquelas coisas de á:rea, volu::me, como também o abstrato, construindo os sólidos/ a Geometria espacial aliás!construindo os só::lidos e tudo. Então, eu trabalho mais os seminários na Geometria Espacial e, na Geometria Analítica trabalho mais com aulas tradicionais mesmo.*

G: Ok! Mas, como você avalia que acontece a comunicação matemática entre eles?

Rita: *Olha (+), sinceramente eu vejo que essa comunicação se dá melhor pra aqueles alunos que têm, vamos dizer assim, mais habilidade com a Matemática, sabe aqueles alunos que GOSTAM mais de Matemática, que se identificam mais com a Matemática e essa comunicação acontece mais, de uma forma mais simples. Praqueles (=para aqueles) que não têm ta::nto, não gostam tanto da Matemática, não tem tanta habilidade, aí não acontece de forma tão simples, porque essa linguagem matemática é um pouco mais complicado. Só quem* *gosta mais de Matemática, mais habituado com isso é que consegue ter, é:: fluir melhor na comunicação matemática.*

G: Assim, você percebe que eles, em maior parte, só conseguem se comunicar de modo informal com relação à Matemática?

Rita: *Mais informal mesmo!. Mesmo que a gente esteja falando, por exemplo, de uma elipse, aí eles não costumam muito dizer "ah, isso aqui é uma elipse" eles usam mais a linguagem deles. É como se fosse o que::", um círculo! eles usam até a expressão uma bola achatada ((risos)). Então essa comunicação mesmo, com essa linguagem toda (+), quando falava em secção, usavam muito a palavra corte, sabe" essas coisas assim!*

G: O que você pensa sobre as atividades com materiais concretos nas aulas de Matemática?

Rita: *MUITO IMPORTANTE, nas aulas de Geometria INDISPENSÁVEL! Porque:: ensinar Geometria Espacial no abstra::to fica muito mais complicado dos meninos, dos alunos entender (++). Por exemplo, falar de tronco de pirâmide, um exemplo apenas!quando a gente mostra realmente, constrói, mostra como é o tronco de pirâmide é completamente diferente de falar o que é. Eles, basta mostrar uma figura, que eles já conseguem entender na hora! Sobre secção, quando a gente mostra no concreto, eles entendem na hora, agora fale o que é secção apenas uma definição, eles não ente::ndem nada! Fica muito pouco! Então, é importante DEMAIS, é indispensável, são indispensáveis os materiais concretos.*

G: Estas atividades podem contribuir para o desenvolvimento das ideias matemáticas nos alunos?

Rita: *MUITO, muito! Aí nesse sentido quando eles davam a aula usando o que eles tinham construído, aí sim eles conseguiam falar o que era (+) como os exemplo que eu dei o que era secção aí conseguiam explicar pra os outros alunos direitinho. Mostrando assim no material concreto eles conseguiam explicar, como os exemplos que eu dei, do tronco de pirâmide, aí eles mostravam. Teve até uma equipe que construiu a pirâmide, achei muito interessante esse trabalho! construiu a pirâmide, aí construiu o tronco da pirâmide e colocou um imã, então eles colocavam, faziam a pirâmide completa com o imã que segurava as duas partes depois retiravam a parte de cima e explicavam pros outros (=para os outros) o que seria o tronco, eu gostei muito. Então aí a comunicação matemática sim se desenvolve melhor quando eles pegam o concreto vê o que é realmente e vai explicar para os outros do que se trata. Mas se for só no abstrato não é muito fácil não!*

G: Você pode falar um pouco sobre algumas das que conhece?

Rita: *Os que eu conheço ma::is são, no caso da Geometria Espacial mesmo, os sólidos que, que eles, eles mesmos constroem e:: a gente já ta habituado com eles. São os que eu mais conheço na Geometria e também são o que eu mais uso.*

G: E você trabalhou a maior parte do tempo no Ensino Médio?

Rita: *Não! Na verdade eu trabalhei a maior parte do tempo no Fundamental, depois do concurso é que eu to trabalhando mais no Médio. E no Fundamental eu sempre dei mais aula de Álgebra e pouca Geometria nesse período. Então eu trabalhei pouco com material concreto em Geometria, porque eu dei poucas aulas de Geometria.*

G: Quais os materiais que você mais costuma utilizar em sua prática letiva?

Rita: *O que a gente usa mais é os sólidos ou então, eu também posso usar assim um jogo, jogos que usam Geometria, mas são menos. Eu uso, assim como material concreto mesmo os sólidos geométricos.*

G: E quando você trabalha Álgebra, costuma usar algum material concreto?

Rita: *Eu uso, não com ta:::ntafreqüência, não é tão fácil e mesmo é algo que exige um tempo que a gente muitas vezes não tem, porque eles cobram que seja cumprido um cronograma ne' a gente tem que cumprir todo o programa e tudo mais. Quando a gente pára um pouco pra trabalhar com material concreto, querendo ou não acaba atrasando bastante, mas os materiais que eu mais uso são os (+), a matemática nos jogos mesmo, é o que eu mais uso na Álgebra e na Geometria os sólidos mesmo.*

G: E com relação aos materiais tecnológicos, o que você pensa sobre trazê-los para a sala de aula de Matemática?

Rita: *Eu acho importante, desde que a pessoa tenha o domínio, ele saiba de fato utilizar esses materiais.*

G: Você os utiliza em sua prática letiva?

Rita: */Não!*

G: Por quê? A escola não dispõe de tantos quanto necessário?

Rita: *Isso! Não disponibiliza o:::, disponibiliza até pouco. Na verdade, assi::m dentre esses materiais tecnológicos, se pode, aí eu creio que ta falando também de data show, vídeo, e tudo mais né" é mais os meninos (eu costumo falar os meninos (risos)), os alunos eles usam bastante nos seminários, é impressionante dizer isso, eles usam mu::ito! Eu não costumo utilizar tanto, porque eu confesso que eu tenho uma certa dificuldade ainda e quanto aos softwares que são interessantíssimos (+) aqueles grá::ficos (+) a gente consegue visualizar* *principalmente essa parte de Geometria também, equações, tudo na Matemática consegue visualizar muito bem com os softwares, mas eu não tenho domínio (+) eu não utilizo porque eu não tenho domínio.*

G: Mas mesmo que não sejam softwares, você costuma levar outros recursos? Por exemplo, o Datashow?

Rita: */Pouco.*

G: Calculadora?

Rita: *Aí é interessante até, porque a calculadora deveria ser o principal, vamos dizer assim, objeto tecnológico, mesmo não sendo uma tecnologia tão avançada como outras. Mas eu confesso que uso pouco, por que" os próprios alunos reclamam disso, eles querem usar mais, mas o que é que acontece" a gente vê, infelizmente, que muitos alunos, eles não têm um domínio completo das operações fundamentais, aí eles querem usar a calculadora pra fugir das contas, mas o que acontece" quando eles forem fazer vestibular, outras provas aí, concurso e tudo mais, eles não podem usar nenhum aparelho! Aí vão se deparar com contas que se atrapalham pra fazer o cálculo de cabeça, à mão (++), por esse motivo eu uso pouco a calculadora pra incentivá-los a trabalharem mesmo, fazerem pra se habituarem com os cálculos. Quando eu vejo que:: a turma está bem habituada, ela já consegue desenvolver uma prova, um exercício sem a máquina, conseguem tranquilamente fluir tranquilamente, aí sim eu coloco, porque eu sei que quando não tiver, eles vão conseguir do mesmo jeito. Eu coloco como recurso que vai ajudá-los a diminuir o trabalho.*

G: É que tudo vai depender do objetivo da aula, não é verdade?

Rita: *Isso! E mais nesse início de ano, eu sempre faço essa sondagem com eles e a princípio eu nem trabalho tanto a calculadora por isso.*

G: Em outros momentos em sala de aula, você utilizou algum aplicativo tecnológico?

Rita: *Não! Não utilizei ai::nda não, mas eu espero aprender e utilizar porque eu estudei, eu fiz uma especialização e tinha umas disciplinas sobre essa parte de tecnologia que é muito interessante, só que o tempo é muito curto pra gente aprender e ter o domínio. O Winplot, Geogebra, co:::mo ajudaria se:: no meu caso, se eu tivesse o domínio pra levar pra sala de aula. Mas eu não tenho o domínio, se chegar a algum conteúdo, alguma questão que eu mesma ficar com dúvida na sala de aula, como é que vai ser" terrível! se os alunos vêm a mim e eu também não to sabendo utilizar direito, por isso eu prefiro nem usar.*

G*:* De que forma esses alunos reagem quando são propostas tarefas com estes recursos tecnológicos?

Rita: *Por incrível que pareça eles agem de forma até natural, não é algo que eles fiquem assi::m, como alguns anos atrás boquiabertos, "no::ssa que algo* *interessante!" Eles já estão tão acostumados que quando a gente leva, mesmo alguma coisa voltada pra Matemática, eles acham até mais natural do que eu mesma, porque eu não tenho tanto, não conheço tanto e eles têm uma facilidade de rapidinho, já estão habituados com aquilo ali. Assimilar, de trabalhar com aquilo eles reagiriam, eu vejo que reagiriam de forma bem positiva.*

G: Para finalizar, sabemos que a educação e, sobretudo o ensino e aprendizagem de Matemática é mesmo um desafio no nosso país. Mas você, enquanto docente com certa experiência, como idealiza uma sala de aula de Matemática?

Rita: *Ahh... ((risos)) Olha, (+) é um pouco utópico até, ma::s eu idealizaria uma sala de aula, (+) a sala dos meus sonhos a que os alunos já tem o domínio, já que a gente ta falando do 3° Ano, eles tivessem domínio mesmo com aquela Matemática que foi os pré-requisitos, vamos dizer assim! Então eles dominam as operações, equação (+) porque um problema que eu vejo, a gente vai dá um determinado assunto, tu sabes, tu és professora de Matemática, (+) agente vai dá um determinado assunto de matemática que precisa de muito conhecimento anterior e:: a gente perde muito tempo explicando coisas assim relacionadas, relações de sinais... Pode acreditar que isso acontece em pleno 3º Ano! Equações do 1° grau, equações fracionárias, então são MUITOS...e as quatro operações de conta nem se fala! Então, são muitos conhecimentos anterior que precisavam saber, mas que ainda existe uma deficiência mu:::ito grande. A minha sala, a sala ideal na minha opinião é aquela que os alunos chegassem lá e que realmente tivessem um domínio, pelo menos, das principais coisas que são pré-requisitos e que os alunos gosta::ssem, sentissem motivados a estudar Matemática, seria a sala ideal. Mesmo que (+) ali alguns alunos tivessem dificuldades de aprender, mesmo assim eu não acharia isso um problema, porque no decorrer do tempo as dificuldades iam sendo:: diminuídas, mas que pelo me::nos não tivessem tanta dificuldade em conteúdos anteriores e tivessem estímulo pra estudar, quisessem de fato aprender da mesma forma que a gente quer ensinar, no mesmo nível, aí seria uma sala de aula de Matemática ideal pra mim seria essa ((risos)).*

G: Como você falou de nível, como avalia o nível de conhecimento deles?

Rita: *Olha (++) de uma forma geral, a gente tem que analisar assim ne" existem alunos mu::ito bons e existem alunos com muita dificuldade que a gente (+) as vezes dá até vontade de dizer, isso não é nem certo, não é nem certo pensar assim! Mas dá vontade de dizer: você estar no lugar errado, era pra voltar umas duas ou três séries ((risos)). E existem os alunos intermediários, mas e::u analiso assim de uma forma geral que é uma turma boa, não é ótima, mas também, não é ruim. É uma turma boa!*

Apêndice 3: Roteiro de Planejamento das Atividades Iniciais com os alunos para Identificação de Níveis segundo o Modelo van Hiele.

As atividades aqui explicitadas foram desenvolvidas em uma turma de 3° Ano do Ensino Médio em uma escola pública estadual localizada na cidade de Cabaceiras no cariri paraibano. Essas atividades têm por objetivos a obtenção de dados que auxiliarão no desenvolvimento da pesquisa, uma vez que consideramos ser auto-suficiente conhecermos o nível da turma para planejarmos as demais tarefas.

PROPOSTA DE ATIVIDADE 1: Distinguindo o Universo Plano e o Tridimensional.

VISÃO GERAL/OBJETIVO: Nessa proposta, o nosso objetivo é compreender como os alunos reagem frente às atividades, seu raciocínio e sua comunicação, para previamente analisar o nível de pensamento geométrico deles. Sabemos que nenhuma sala é homogênea, os alunos nem sempre abstraem num mesmo nível, por isso, julgamos de eficaz relevância a identificação dos níveis através dos trabalhos desenvolvidos em Díades.

Como acontecerá?

Inicialmente nossa proposta é dialogar e provocar questionamentos que levem a uma comunicação matemática relacionadas às concepções pessoais acerca da Matemática, sobretudo da Geometria, falar da importância e como deve acontecer o trabalho, ao mesmo tempo propor a organização em Díades, para desenvolverem as tarefas que iremos recomendar. Iremos apresentar as diretrizes necessárias ao trabalho. Entretanto, eles serão os autores da história, uma vez que trabalharão de forma autônoma.

Levaremos para sala de aula, materiais concretos manipuláveis – sólidos geométricos, e figuras planas além de um roteiro de atividades. Com isso, distribuiremos com todos os grupos o material, diversificando as formas o máximo possível. Nossa proposta, a princípio, é deixá-los livres para manipular o material e, a partir disto, observarmos comentários que possivelmente farão com relação ao material exposto (a aparência; a classificação ou propriedade analisada; as partes que formam os sólidos; a linguagem utilizada, etc.), tanto em relação aos sólidos quanto em relação às figuras planas na Atividade VH, relacionando, sobretudo, diferenças e características comuns. Apresentaremos roteiros com algumas questões relacionadas a esses materiais. Deixaremos os alunos livres para se comunicarem, e observaremos cuidadosamente as discussões e argumentos por eles apresentadas, usando gravador para auxílio na coleta dos dados e com esses elementos – comunicação oral e escrita -possivelmente começaremos a identificar o nível de raciocínio dos alunos em relação ao conhecimento geométrico.

Materiais necessários:

- ✓ Slides para introduzir;
- ✓ Roteiros das atividades a serem desenvolvidas;
- ✓ Atividade VH;
- ✓ Folha de Registro;
- ✓ Sólidos geométricos;
- ✓ Lápis e borracha.

PROPOSTA DE ATIVIDADE 2: De que forma estamos pensando?

VISÃO GERAL/OBJETIVO: Com essa atividade a nossa proposta é planificar alguns sólidos no objetivo de perceber a reação e percepções dos alunos frente à planificação, sobretudo se conseguem identificar que as figuras geométricas tridimensionais são formadas por elementos já conhecidos do universo bidimensional.

Como acontecerá?

Analogamente à atividade anterior, a turma continuará a desenvolver os trabalhos nos mesmos grupos com os quais provocaremos alguns questionamentos, propondo que manipulem e nomeiem o material apresentado e distribuído para cada uma. Em seguida, daremos a planificação do material e, posteriormente, responderem um quadro de questões complementares (abaixo), adaptado de Oliveira e Gazire (2012), que muito nos ajudará a compreender o desenvolvimento dos grupos.

Materiais necessários:

- ✓ Sólidos geométricos;
- ✓ Planificação dos Sólidos;
- ✓ Roteiro de atividades;
- ✓ Folhas A4;
- ✓ Lápis e borracha;
- ✓ Régua.

Questões:

a) Qual a classificação do sólido?

b) Quantas faces tem? Quantas arestas tem? Quantos vértices tem?

c) A qual figura plana corresponde cada uma das suas faces laterais?

d) Identifique todas as características observáveis nessas figuras planas.

e) Calcule o perímetro e a área dessas faces.

f) A qual figura plana corresponde(m) a(s) sua(s) base(s)?

g) Enumere todas as características (propriedades) observáveis ou dedutíveis nessa figura plana.

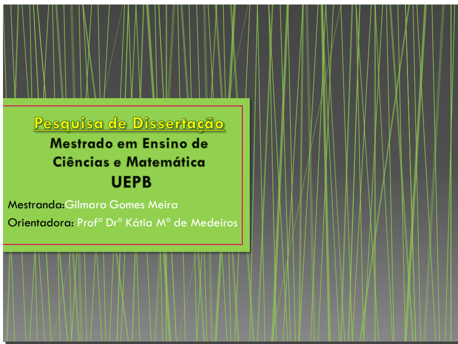
h) Calcule o perímetro e a área dessa(s) base(s).

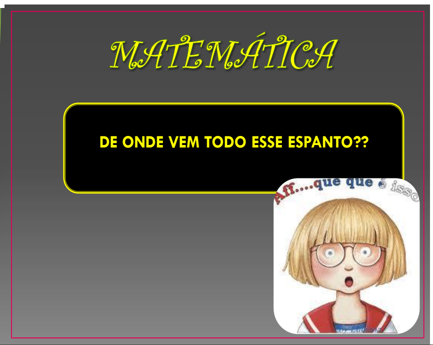
i) As faces laterais e as bases do seu sólido apresentam alguma característica comum? Quais?

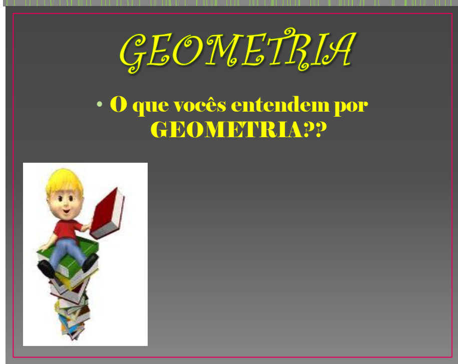
j) Elabore uma ficha resumo que contenha todas as informações que o grupo conseguiu identificar, destacando conceitos e exemplificando sempre que possível.

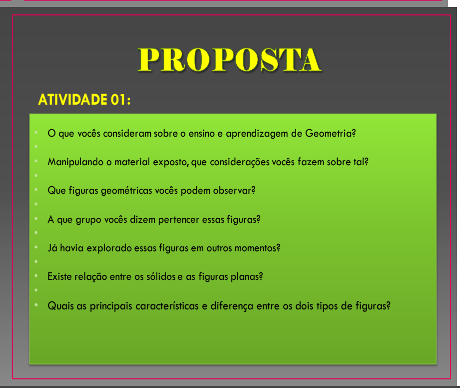
Apêndice 4: Atividades e Roteiros

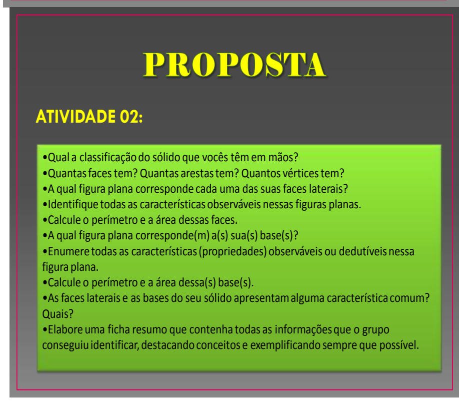
Apêndice 4.1 Slides auxiliares

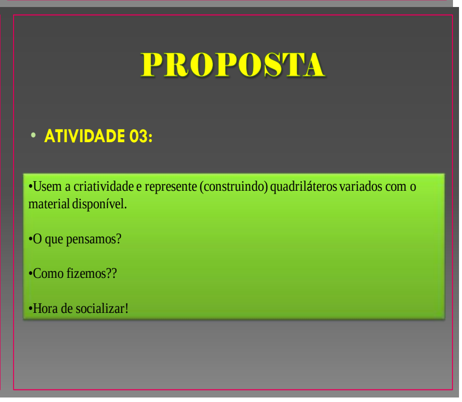


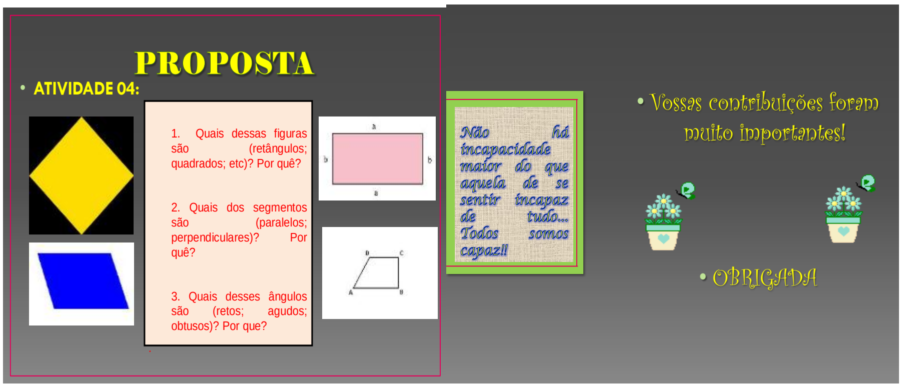












Apêndice 4.2 I Roteiro de atividades

NOMES:--- e ------------------------------

1. O que vocês consideram sobre o ensino e aprendizagem de Geometria?
2. Manipulando o material exposto, que considerações vocês fazem sobre tal?
3. Que figuras geométricas vocês podem observar?
4. A que grupo vocês dizem pertencer essas figuras?

Apêndice 4.3 II Roteiro de atividades

NOMES:-- e --

O que sabemos sobre a figura??

k) Qual a classificação do sólido que vocês têm em mãos?

l) Quantas faces tem? Quantas arestas tem? Quantos vértices tem?

m) A qual figura plana corresponde cada uma das suas faces laterais?

n) Identifique todas as características observáveis nessas figuras planas.

o) Calcule o perímetro e a área dessas faces.

p) A qual figura plana corresponde(m) a(s) sua(s) base(s)?

q) Enumere todas as características (propriedades) observáveis ou dedutíveis nessa figura plana.

r) Calcule o perímetro e a área dessa(s) base(s).

s) As faces laterais e as bases do seu sólido apresentam alguma característica comum? Quais?

t) Elabore uma ficha resumo que contenha todas as informações que o grupo conseguiu identificar, destacando conceitos e exemplificando sempre que possível.

Apêndice 4.4 III Roteiro de atividades

NOMES:-- e --

1. Usem a criatividade e represente (construindo) quadriláteros variados com o material disponível.
2. O que pensamos?
3. Como fizemos??
4. Hora de socializar!

Apêndice 5: Atividades desenvolvidas por algumas Díades

Apêndice 5.1: Atividade 1

1. O que vocês consideram sobre o ensino e aprendizagem de Geometria?

O ensino e aprendizagem de Geometria é importante, pois nos permite expandir os conhecimentos sobre o espaço onde estamos e assim propiciar modificações.

2. Manipulando o material exposto, que considerações vocês fazem sobre tal?

A pirâmide é uma figura geométrica interessante, pois tem formas com utilização de triângulos, originados em um mesmo ponto.

3. Que figuras geométricas vocês podem observar?

Pirâmide e cubo.

4. A que grupo vocês dizem pertencer essas figuras?

São figuras pertencentes ao espaço.

5. Já havia explorado essas figuras em outros momentos?

Sim.

6. Existe relação entre os sólidos e as figuras planas?

Sim, pois é a partir das figuras planas que se originam os sólidos.

7. Quais as principais características e diferença entre os dois tipos de figuras?

São sólidos.

Apêndice 5.2: Atividade VH

Pares de Figuras	Elementos em Comum	Diferenças
1	São triangulares.	Área, altura
2	São formadas por quadrados	Área, lados
3	têm a mesma base	São formadas por quadrados e triângulos e têm um pouco de inclinação
4	São figuras formadas por quadrado e triângulo.	As peças estão inversas.
5	São losangos	As dimensões são diferente.
6	São triangulares	A base
7	São triângulos	Os ângulos
8	São figuras formadas por trapézios	forma, lados
9	São figuras com formato de quadrado	Altura
10	São figuras com formato de cubo	figura plana e figura sólida
11	São figuras com formato de triângulo	figura plana e figura sólida
12	São figuras sólidas	comprimento

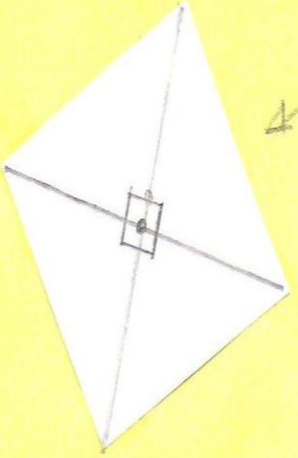
Apêndice 5.3: Atividade - Do que estamos falando?

RETÂNGULO

Área = $b \cdot h$

Formado por 2 quadrados.

Exemplo de retângulo: um quadro.



LOSANGO

Formado por 4 triângulos.

No meio da figura, forma-se um ângulo de 90°.

Exemplo de losango: um balão.

Quadrado

Calcula-se a área da seguinte forma

$A = l^2$ ou $A = l \cdot l$

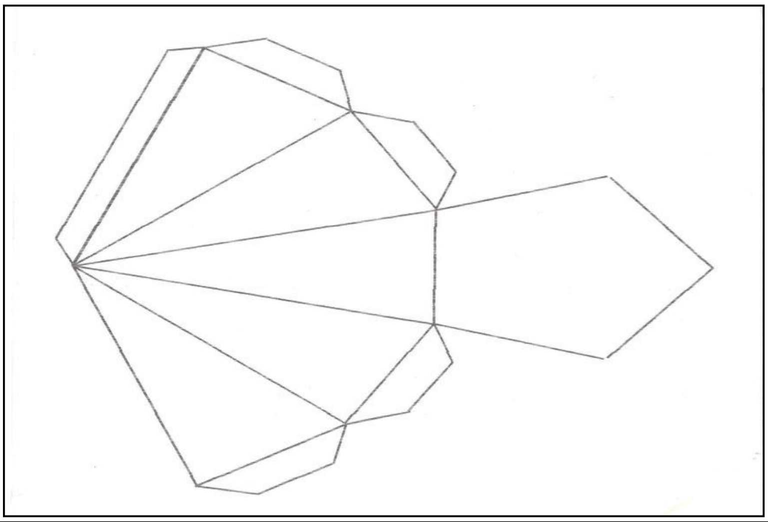
Possui os 4 lados iguais.

Exemplo de quadrado: um dado.

Apêndice 5.4: Atividade VH

Pares de Figuras	Elementos em Comum	Diferenças
1	ambos são triangulos	a diferença é entre os tamanhos.
2	ambos são quadrado e retângulo.	São de faces diferentes
3	não tem nada em comum.	um é mais em pé e o outro tem uma forma mais inclinad
4	eles são de segmentos diferentes.	tem medidas diferentes.
5	os seus lados tem algo em comum.	um é mais aberto e o outro é mais fechado
6	em comum eles tem o mesmo tamanho	a diferença é que um mais aberto e o outro mais fechado.
7	São em comum os lados.	São de tamanhos diferentes.
8	tratam-se de trápezio e paralelogramo.	São de faces diferentes.
9	são de faces iguais.	possuem tamanhos diferentes.
10	ambos são um quadrado e um cubo.	São diferentes as formas geométricas e de tamanhos.
11	Suas faces diferentes.	Possuem tamanhos diferentes é um é um é um prisma outro retangu
12	trata-se de um cubo e um retângulo.	Suas diferenças é que suas faces não são iguais.

Apêndice 5.5: Atividade - De que forma estamos pensando?



› É um prisma.

2-> tem 5 faces, 5 arestas e 5 vértices.

3-> um triangulo.

4-> São todos de lados iguais.

5-> $\frac{\overset{4}{B} \times \overset{11}{h}}{2}$ $A = \frac{44}{2}$ $A = 22$

6-> um trapézio.

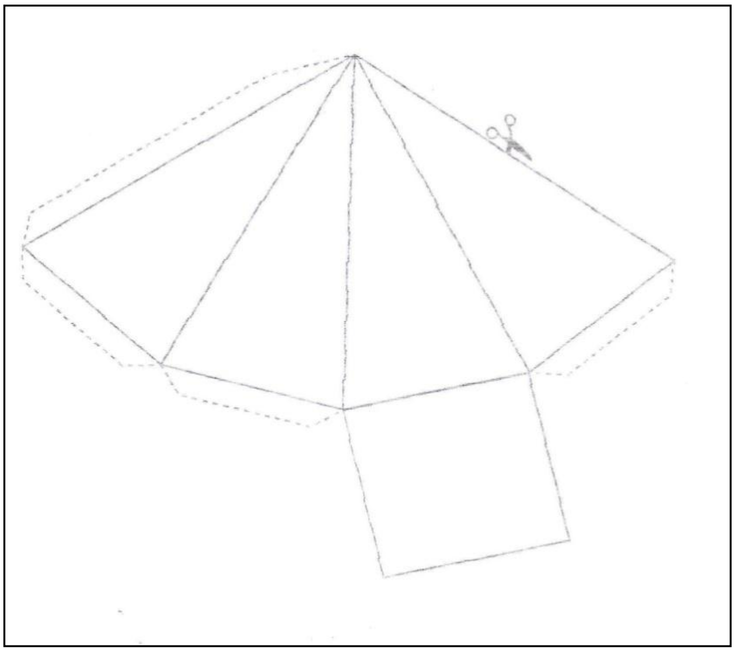
7-> São de 5 faces, de lados iguais e trata-se de uma figura plana.

8->

9-> Sim, possuem o mesmo périmetro e suas faces são iguais.

10-> Nós conseguimos identificar, que as figuras por mais possuam tamanhos diferentes elas possuem algo em comum. EX: Faces, dimensões, bases entre outros.

Apêndice 5.6: Atividade 3



Respostas

...liédros (Pirâmedes)

2º) 4 facis, 4 arestas e 5 vértices.

3-) Triângulo

4º) triângulo e um quadrado.

5º) H=11 cm $P=11+11+11+11=44$
b=6cm $A=\frac{b.h}{2} \rightarrow A=\frac{11.6}{2} \rightarrow A=\frac{66}{2} \rightarrow \boxed{A=33\ cm^2}$

6º) Quadrado.

7º) Que suas arestas forma triângulo e sua base forma um quadrado.

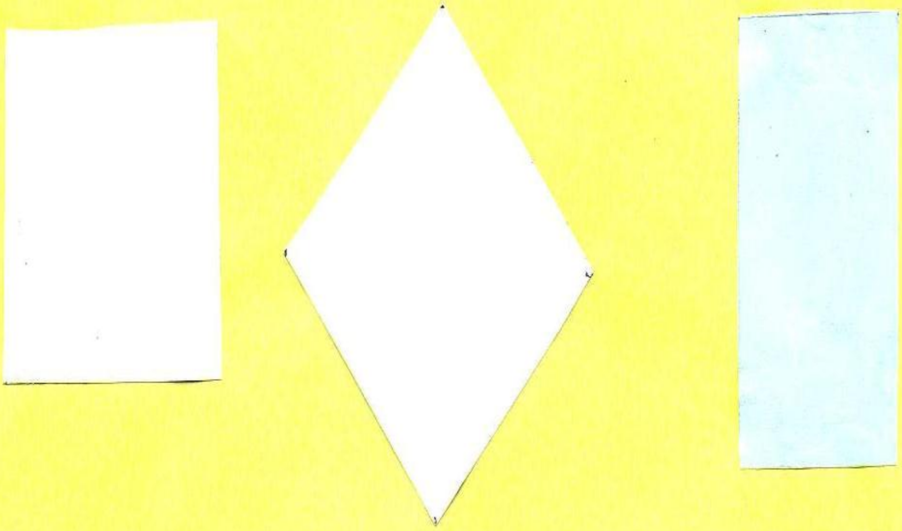
9º) Nenhuma

10) Nós entendemos que essa figura plana é um poliédros com 4 faces, 4 arestas e cinco vértices, onde seus lados forma triângulos e sua base um quadrado, se pegarmos a sua altura e multiplicarmos com sua base dividindo por dois encontraremos a sua área e a soma dos lados das arestas, vamos descobrir o seu perímetro.

Apêndice 5.7: Atividades VH

Pares de Figuras	Elementos em Comum	Diferenças
1	São triangulos	Tamanhos diferentes
2	Tem 4 lados	Uma figura quadrada outra retângular.
3	Tem 4 lados	Um retângulo, e um paralelepípedo.
4	4 lados	paralelepípedo, e um trapézio, ~~possui~~
5	São losangos	Tamanhos diferentes
6	Nada em comum	Um forma um triângulo, outro um pentagonos
7	3 lados	Tamanho, e posição: um reto, outro inclinado.
8	Nada em comum	Um com 4 lados, trapézio. Um com 6 lados, hexagono.
9	São paralelepipedos	Tamanho
10	São formados por quadrados.	Um é quadrado, outro é cubo.
11	Aparentam ser triângulos	Um é triângulo, outro uma piramede.
12	São cubos	Cubo retângular cubo

Apêndice 5.8: Atividade - Do que estamos falando?



1- - Quadrado - Retângulo

- Losango

Porque todos possuem 4 lados, ou seja são quadriláteros, mas com for-
2 mas diferentes. O quadrado tem seus 4 lados iguais, o losango
também, mas por sua forma inclinada se diferencia do quadrado.
O retângulo também com 4 lados, mas tem 2 maiores e dois menores,
paralelos entre si.

Apêndice 5.9: Atividades 1

1. O que vocês consideram sobre o ensino e aprendizagem de Geometria?

A geometria tem importância nos nossos dias, pois, como a geometria estuda as formas, por onde vamos, vemos formas também

2. Manipulando o material exposto, que considerações vocês fazem sobre tal?

O material exposto é um cubo, composto por 6 faces e 8 vértices. A vários exemplos de objetos com essa forma, e um exemplo muito comum é o dado.

3. Que figuras geométricas vocês podem observar?

Um quadrado.

4. A que grupo vocês dizem pertencer essas figuras?

Espaço.

5. Já havia explorado essas figuras em outros momentos?

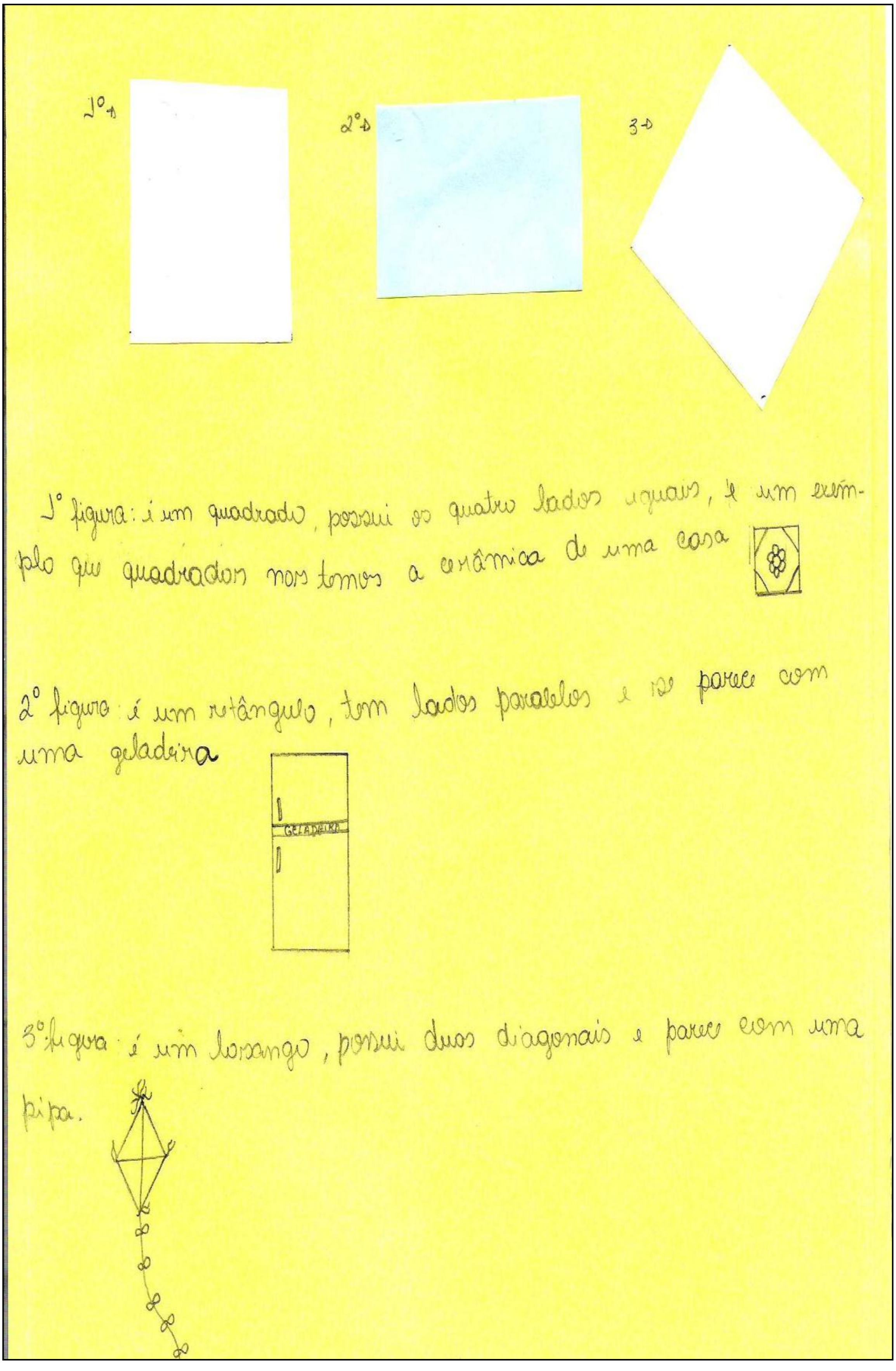
Sim, em um trabalho escolar.

6. Existe relação entre os sólidos e as figuras planas?

Sim.

7. Quais as principais características e diferença entre os dois tipos de figuras?

Apêndice 5.10: Atividade - Do que estamos falando?

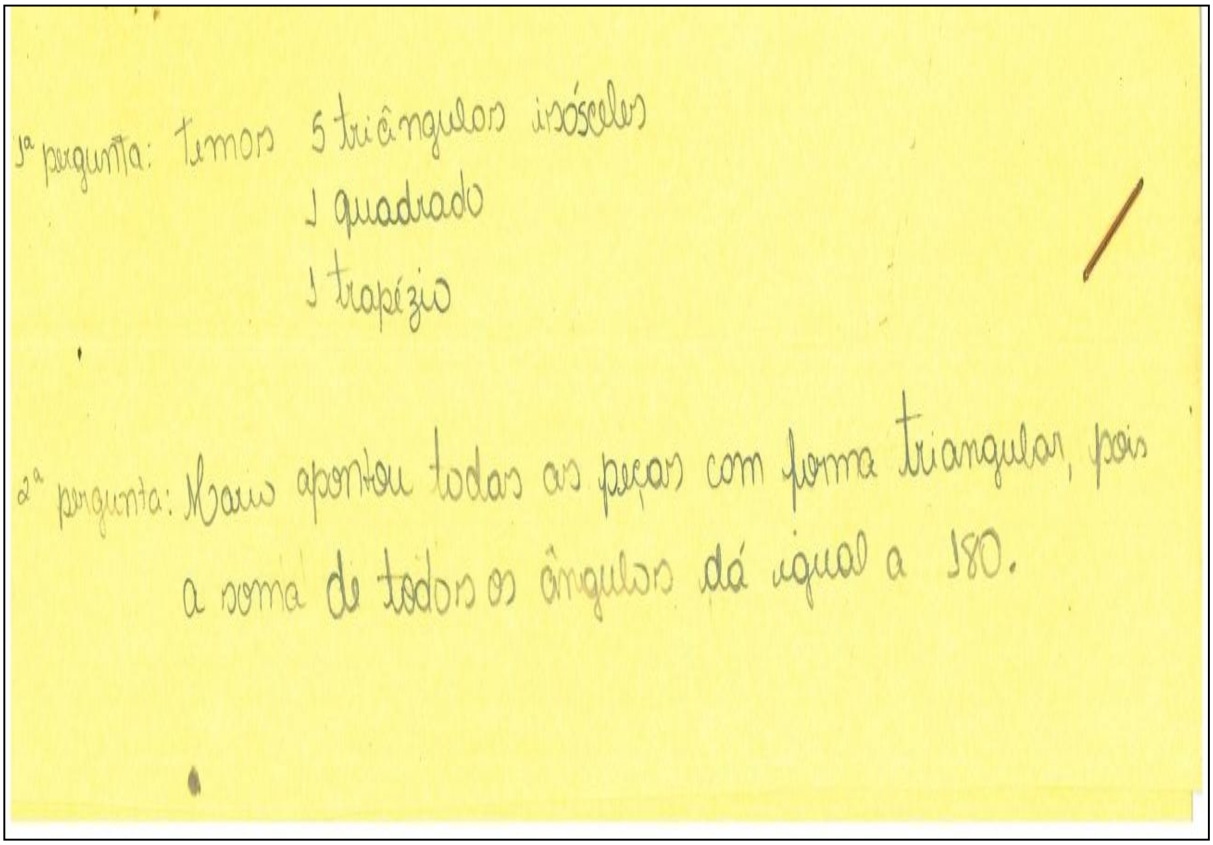


1° figura: é um quadrado, possui os quatro lados iguais, e um exemplo que quadrados nos temos a cerâmica de uma casa

2° figura: é um retângulo, tem lados paralelos e se parece com uma geladeira

3° figura: é um losango, possui duas diagonais e parece com uma pipa.

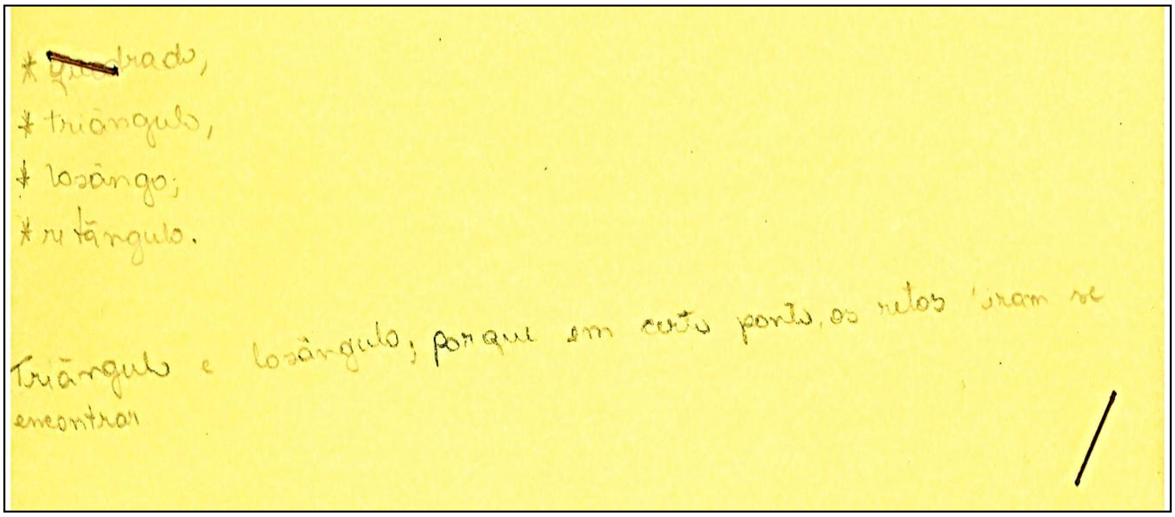
Apêndice 6: Desenvolvimento da Díade Ana e Cecília no Episódio 1.



1ª pergunta: temos 5 triângulos isósceles
1 quadrado
1 trapézio

2ª pergunta: Mario apontou todas as peças com forma triangular, pois a soma de todos os ângulos dá igual a 180.

Apêndice 7: Desenvolvimento da Díade Vitória e Alice no Episódio 1.


* ~~qua~~drado,
* triângulo,
* losângo;
* retângulo.

Triângulo e losângulo, porque em certo ponto, os retos iram se encontrar

Apêndice 8: Desenvolvimento da Díade Júlia e Amanda no Episódio 1.

Se Mario respondeu corretamente ele afirmou que o Tangran é formado por
5 triângulos, 1 quadrado e 1 paralelogramo.

Dois triângulos grandes, com mesma medida; e dois triâgulos pequenos, tam-
bem com mesma medida.

Apêndice 9: Desenvolvimento da Díade Ana e Cecília no Episódio 3.

A área do paralelogramo é o mesmo que duas vezes a área do triângulo pequeno. Área do triângulo: $\frac{b.h}{2}$ b= base h= altura Triângulo: h b

Logo a área do paralelogramo é = $2.\left(\frac{b.h}{2}\right)$

paralelogramo Logo: → dois triângulos

A área do triângulo médio é o mesmo que a área do triângulo pequeno mais a metade da área do quadrado.

• Área do triângulo: $\frac{b.h}{2}$ → h b

• Área do quadrado: $l.l$ ou l^2 → l l l

• Logo a área do triângulo médio é: $\left(\frac{b.h}{2}\right) + \left(\frac{l^2}{2}\right)$

ou

$\left(\frac{b.h}{2}\right) + \left(\frac{l.l}{2}\right)$

• O quadrado original é composto de:

→ dois triângulos grande (a área deles é o mesmo que duas vezes a área do triângulo pequeno mais a área do quadrado: $2.\left(\frac{b.h}{2}\right) + l^2$ ou $2.\left(\frac{b.h}{2}\right) + l.l$)

→ um paralelogramo (a área dele é o mesmo que a área de dois triângulos pequenos: $2.\left(\frac{b.h}{2}\right)$)

→ um triângulo médio a área dele é o mesmo que a área do triângulo pequeno mais a metade do quadrado: $\left(\frac{b.h}{2}\right) + \left(\frac{l^2}{2}\right)$ ou $\left(\frac{b.h}{2}\right) + \left(\frac{l.l}{2}\right)$

Apêndice 10: Desenvolvimento da Díade Vitória e Alice no Episódio 3.

Para denotar o area do paralelogramo foram usado dois triângulo Pequenas resultando em $2.\frac{b.h}{2}$.
e Para denotar o triângulo médio foram usados dois triângulo Pequenas resultando em $2.\frac{b.h}{2}$.

Para denotar um dos lados do quadrado original foram usados dois triângulos Pequenas e um quadrado que resultou que cada lado tem 2b e como a área do quadrado é lado vezes lado resulta em $4b^2$.

Apêndice 11: Desenvolvimento da Díade Júlia e Amanda no Episódio 3.

Área do triângulo = $\frac{b \cdot h}{2}$ Área do quadrado = $l \cdot l$

Para calcular a área do paralelogramo usamos o triângulo pequeno e a metade da área do quadrado que corresponde a mesma medida da área do triângulo pequeno.
Então a fórmula deve ser: $2 \times \frac{b \cdot h}{2}$

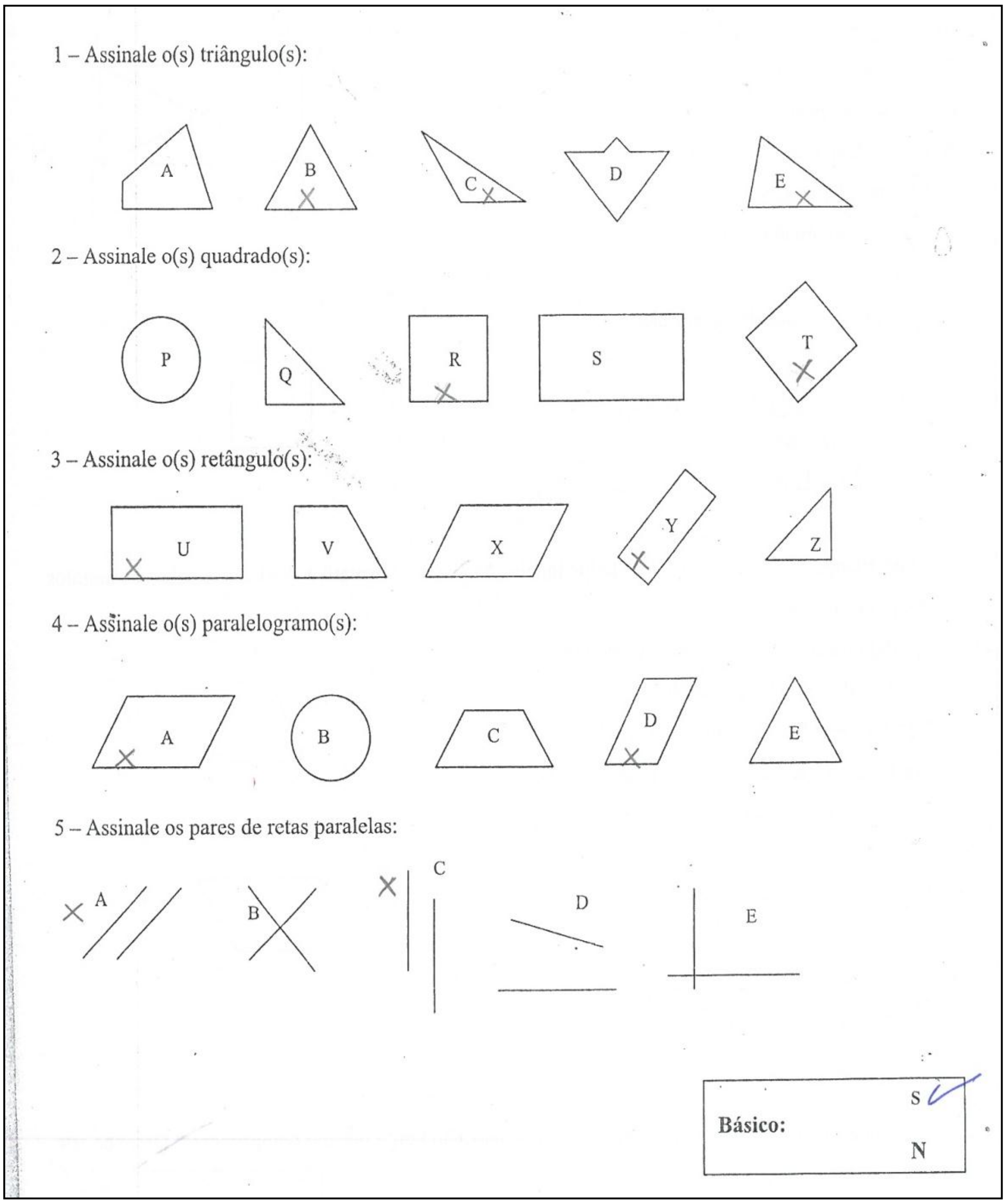
Para calcular a área do triâgulo médio usamos o mesmo raciocínio do calculo da área do paralelogramo, onde devemos usar $2 \times \frac{b \cdot h}{2}$.

Para calcular a área do quadrado original usamos a área do quadrado quatro vezes, e a área do triângulo oito vezes, representando assim a seguinte fórmula:

$$AQO = 4 \times l \cdot l + 8 \times \frac{b \cdot h}{2}$$

Apêndice 12: Desenvolvimento das alunas nos testes

Apêndice 12.1: Desenvolvimento nos testes 1 e 2 – Amanda


1 – Assinale o(s) triângulo(s):

A B C D E

2 – Assinale o(s) quadrado(s):

P Q R S T

3 – Assinale o(s) retângulo(s):

U V X Y Z

4 – Assinale o(s) paralelogramo(s):

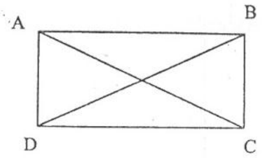
A B C D E

5 – Assinale os pares de retas paralelas:

A B C D E

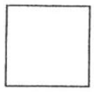
Básico: S N

6 – No retângulo ABCD, as linhas AC e BD são chamadas de diagonais. Assinale a(s) afirmativa(s) verdadeira(s) para todos os retângulos:



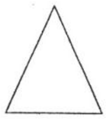
~~a)~~ Têm 4 ângulos retos.
~~b)~~ Têm lados opostos paralelos.
~~c)~~ Têm diagonais de mesmo comprimento.
d) Têm os lados iguais.
( ) Todas são verdadeiras.

7 – Dê 3 propriedades dos quadrados:



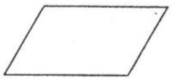
1 - Têm os lados iguais.
2 - Têm 4 ângulos retos.
3 - Têm os lados opostos paralelos.

8 – Todo triângulo isósceles têm dois lados iguais. Assinale a afirmativa verdadeira sobre os ângulos do triângulo isósceles:



(a) Pelo menos um dos ângulos mede 60°.
(b) Um dos ângulos mede 90°.
~~(c)~~ Dois ângulos têm a mesma medida.
(d) Todos os três ângulos têm a mesma medida.
(e) Nenhuma das afirmativas é verdadeira.

9 – Dê 3 propriedades dos paralelogramos:



1 - Têm lados opostos paralelos.
2 - São quadriláteros.
3 - Possuem os laterais inclinadas.

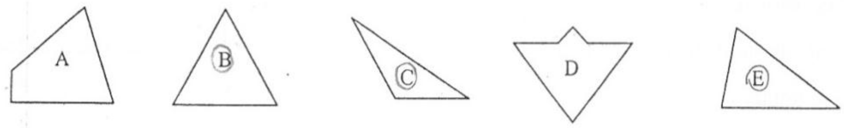
10 – Dê um exemplo de um quadrilátero cujas diagonais não têm o mesmo comprimento. Desenhe este quadrilátero.

Nível 1:	S ✓
	N

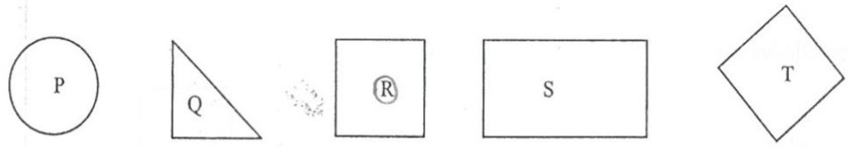
Paralelogramo

Apêndice 12.2: Desenvolvimento nos testes 1 e 2 – Júlia

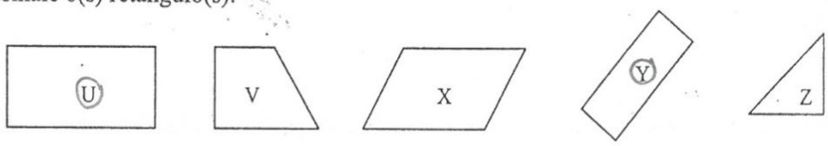
1 – Assinale o(s) triângulo(s):



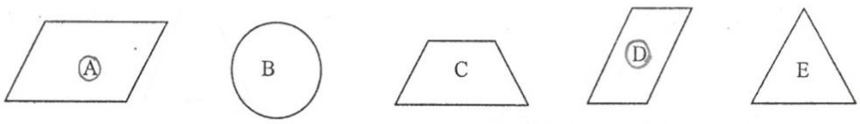
2 – Assinale o(s) quadrado(s):



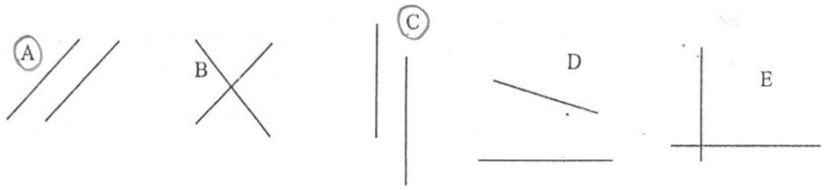
3 – Assinale o(s) retângulo(s):



4 – Assinale o(s) paralelogramo(s):

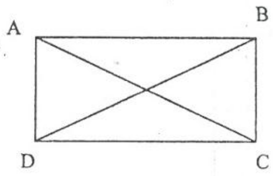


5 – Assinale os pares de retas paralelas:



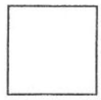
Básico: S N

6 – No retângulo ABCD, as linhas AC e BD são chamadas de diagonais. Assinale a(s) afirmativa(s) verdadeira(s) para todos os retângulos:



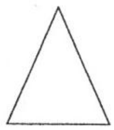
a) Têm 4 ângulos retos.
b) Têm lados opostos paralelos.
c) Têm diagonais de mesmo comprimento.
d) Têm os lados iguais.
e) Todas são verdadeiras.

7 – Dê 3 propriedades dos quadrados:



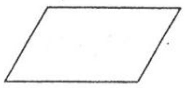
1 - Possui quatro lados.
2 - Possui quatro ângulos retos.
3 - Tem os lados iguais.

8 – Todo triângulo isósceles têm dois lados iguais. Assinale a afirmativa verdadeira sobre os ângulos do triângulo isósceles:



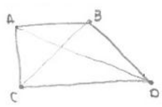
(a) Pelo menos um dos ângulos mede 60°.
(b) Um dos ângulos mede 90°.
(c) Dois ângulos têm a mesma medida.
(d) Todos os três ângulos têm a mesma medida.
(e) Nenhuma das afirmativas é verdadeira.

9 – Dê 3 propriedades dos paralelogramos:



1 - Tem quatro lados
2 - Tem lados opostos paralelos.
3 - Tem os lados inclinados.

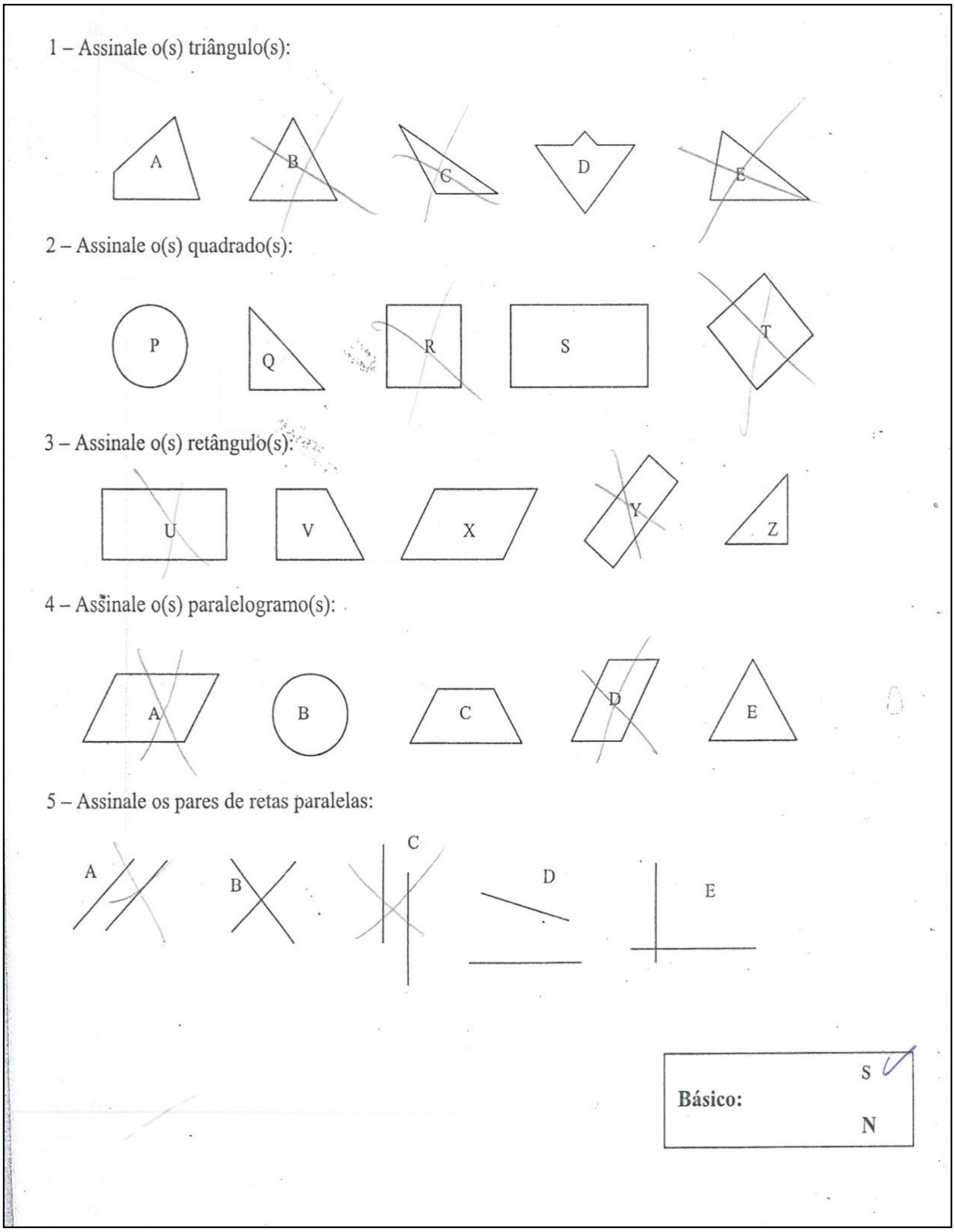
10 – Dê um exemplo de um quadrilátero cujas diagonais não têm o mesmo comprimento. Desenhe este quadrilátero.



Trapézio.

Nível 1: S ✓ N

Apêndice 12.3: Desenvolvimento nos testes 1 e 2 – Ana


1 – Assinale o(s) triângulo(s):

2 – Assinale o(s) quadrado(s):

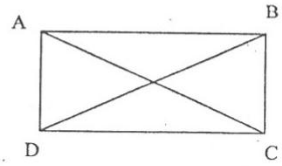
3 – Assinale o(s) retângulo(s):

4 – Assinale o(s) paralelogramo(s):

5 – Assinale os pares de retas paralelas:

Básico: S N

6 – No retângulo ABCD, as linhas AC e BD são chamadas de diagonais. Assinale a(s) afirmativa(s) verdadeira(s) para todos os retângulos:



~~a)~~ Têm 4 ângulos retos.

~~b)~~ Têm lados opostos paralelos.

~~c)~~ Têm diagonais de mesmo comprimento.

d) Têm os lados iguais.

e) Todas são verdadeiras.

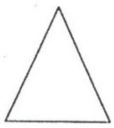
7 – Dê 3 propriedades dos quadrados:

1 - 4 lados iguais

2 - 4 ângulos retos

3 - diagonais de tamanhos iguais

8 – Todo triângulo isósceles têm dois lados iguais. Assinale a afirmativa verdadeira sobre os ângulos do triângulo isósceles:



(a) Pelo menos um dos ângulos mede 60°.

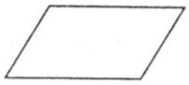
(b) Um dos ângulos mede 90°.

~~(c)~~ Dois ângulos têm a mesma medida.

(d) Todos os três ângulos têm a mesma medida.

(e) Nenhuma das afirmativas é verdadeira.

9 – Dê 3 propriedades dos paralelogramos:



1 - os lados opostos são paralelos

2 - as diagonais não possuem o mesmo tamanho

3 - ....

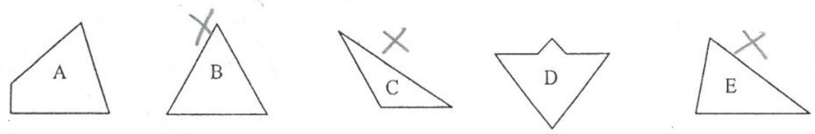
10 – Dê um exemplo de um quadrilátero cujas diagonais não têm o mesmo comprimento. Desenhe este quadrilátero.

Nível 1:	S ✓ N

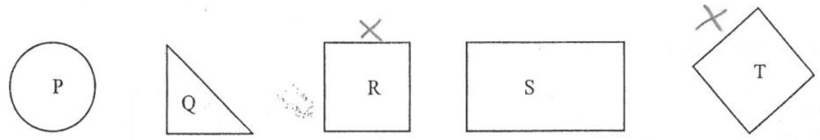
paralelogramo

Apêndice 12.4: Desenvolvimento nos testes 1 e 2 – Cecília

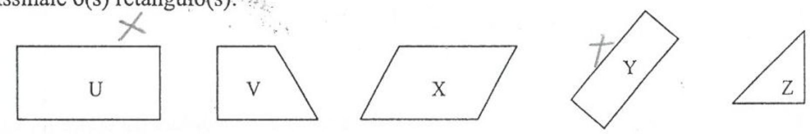
1 – Assinale o(s) triângulo(s):



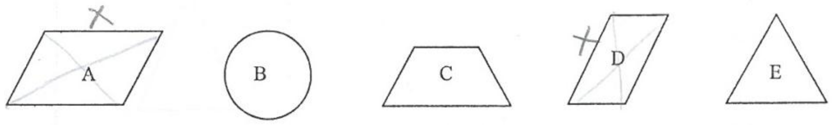
2 – Assinale o(s) quadrado(s):



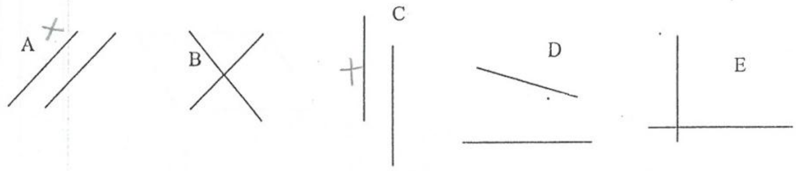
3 – Assinale o(s) retângulo(s):



4 – Assinale o(s) paralelogramo(s):

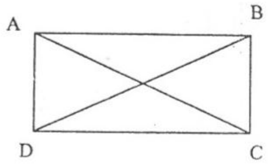


5 – Assinale os pares de retas paralelas:



Básico: S N

6 – No retângulo ABCD, as linhas AC e BD são chamadas de diagonais. Assinale a(s) afirmativa(s) verdadeira(s) para todos os retângulos:



a) Têm 4 ângulos retos.

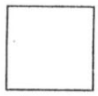
b) Têm lados opostos paralelos.

c) Têm diagonais de mesmo comprimento.

d) Têm os lados iguais.

e) Todas são verdadeiras.

7 – Dê 3 propriedades dos quadrados:

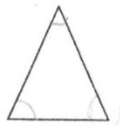


1 - Têm lados iguais;

2 - Têm 4 ângulos retos;

3 - Têm lados opostos paralelos;

8 – Todo triângulo isósceles têm dois lados iguais. Assinale a afirmativa verdadeira sobre os ângulos do triângulo isósceles:



(a) Pelo menos um dos ângulos mede 60°.

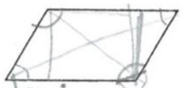
(b) Um dos ângulos mede 90°.

(c) Dois ângulos têm a mesma medida.

(d) Todos os três ângulos têm a mesma medida.

(e) Nenhuma das afirmativas é verdadeira.

9 – Dê 3 propriedades dos paralelogramos:



1 - Formado por 2 triângulos e um quadrado;

2 - Têm lados opostos com a mesma medida;

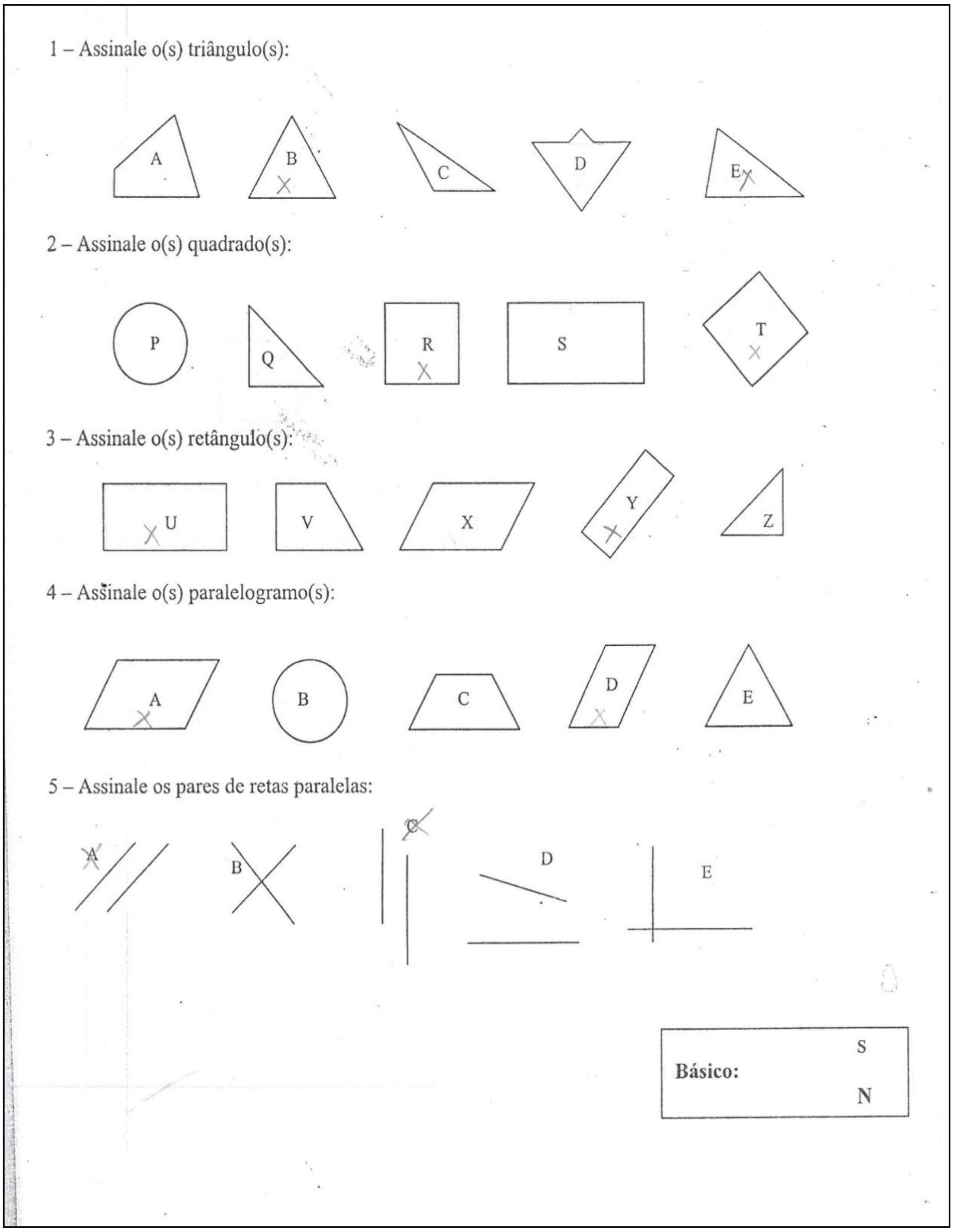
3 - Têm diagonais de diferentes comprimentos.

10 – Dê um exemplo de um quadrilátero cujas diagonais não têm o mesmo comprimento. Desenhe este quadrilátero.

Paralelogramo

Nível 1: S ✓ N

Apêndice 12.4: Desenvolvimento nos testes 1 e 2 – Alice



1 – Assinale o(s) triângulo(s):

A B C D E

2 – Assinale o(s) quadrado(s):

P Q R S T

3 – Assinale o(s) retângulo(s):

U V X Y Z

4 – Assinale o(s) paralelogramo(s):

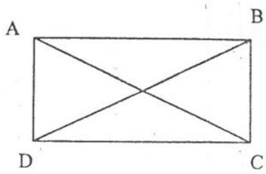
A B C D E

5 – Assinale os pares de retas paralelas:

A B C D E

Básico: S **N**

6 – No retângulo ABCD, as linhas AC e BD são chamadas de diagonais. Assinale a(s) afirmativa(s) verdadeira(s) para todos os retângulos:



a) Têm 4 ângulos retos.

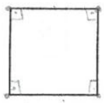
b) Têm lados opostos paralelos.

c) Têm diagonais de mesmo comprimento.

d) Têm os lados iguais.

e) Todas são verdadeiras.

7 – Dê 3 propriedades dos quadrados:



1 - Têm 4 lados iguais

2 - Possui 4 vertices.

3 - Possui 4 ângulos de 90° (graus)

8 – Todo triângulo isósceles têm dois lados iguais. Assinale a afirmativa verdadeira sobre os ângulos do triângulo isósceles:

(a) Pelo menos um dos ângulos mede 60°.

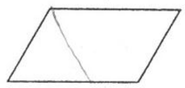
(b) Um dos ângulos mede 90°.

(c) Dois ângulos têm a mesma medida.

(d) Todos os três ângulos têm a mesma medida.

(e) Nenhuma das afirmativas é verdadeira.

9 – Dê 3 propriedades dos paralelogramos:

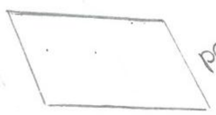


1 - Possui 4 lados

2 - Contém base com medida diferente do lado.

3 - Essa figura pode formar um triângulo e um trapézio.

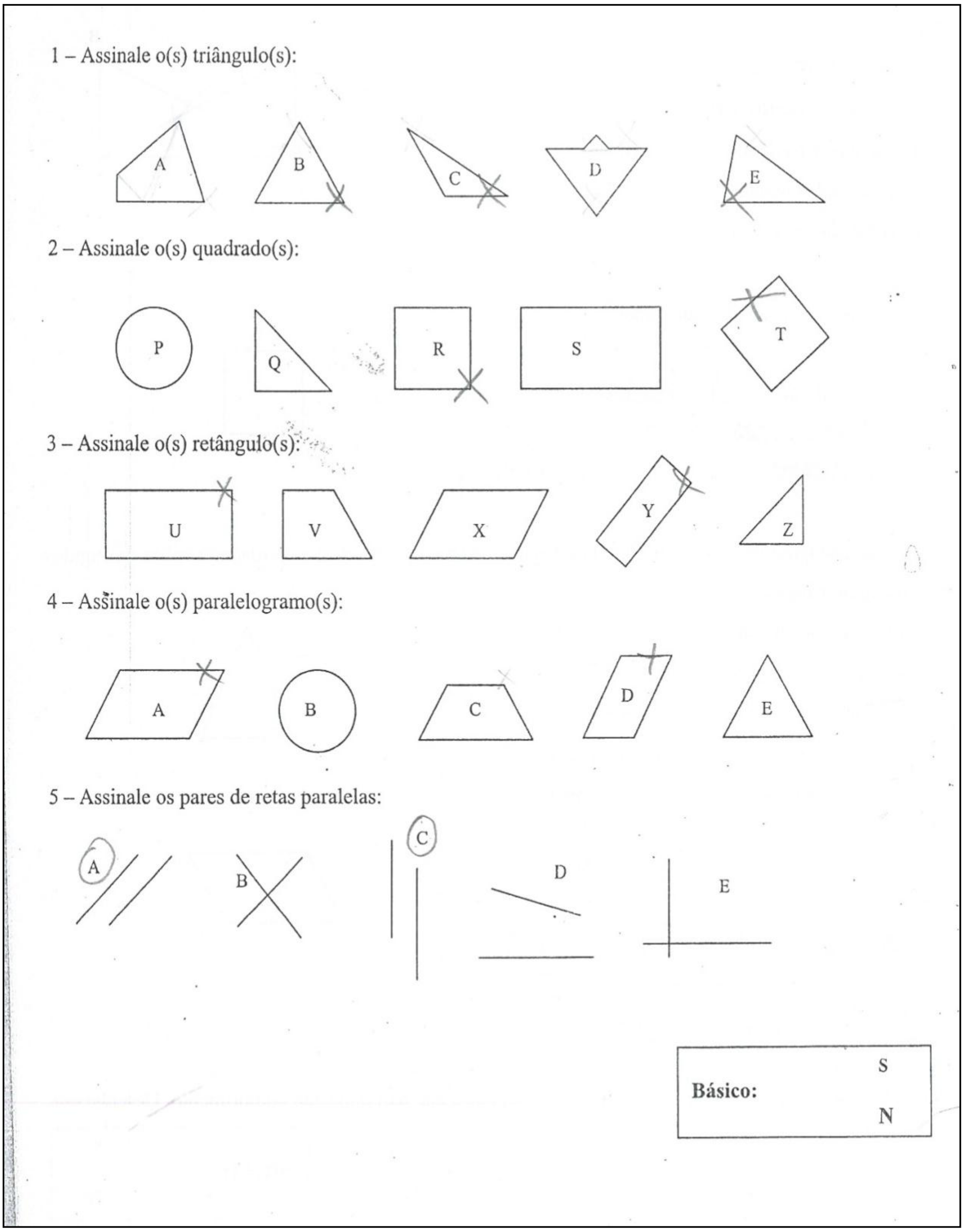
10 – Dê um exemplo de um quadrilátero cujas diagonais não têm o mesmo comprimento. Desenhe este quadrilátero.



paralelogramo

Nível 1: S N

Apêndice 12.4: Desenvolvimento nos testes 1 e 2 – Vitória



1 – Assinale o(s) triângulo(s):

A B C D E

2 – Assinale o(s) quadrado(s):

P Q R S T

3 – Assinale o(s) retângulo(s):

U V X Y Z

4 – Assinale o(s) paralelogramo(s):

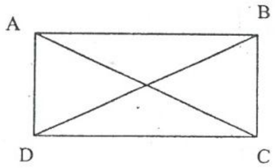
A B C D E

5 – Assinale os pares de retas paralelas:

A B C D E

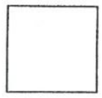
Básico:	S N

6 – No retângulo ABCD, as linhas AC e BD são chamadas de diagonais. Assinale a(s) afirmativa(s) verdadeira(s) para todos os retângulos:



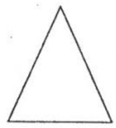
a) Têm 4 ângulos retos.
b) Têm lados opostos paralelos.
c) Têm diagonais de mesmo comprimento.
d) Têm os lados iguais.
e) Todas são verdadeiras.

7 – Dê 3 propriedades dos quadrados:



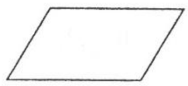
1 - Possuem 4 lados.
2 - todos os lados iguais.
3 - a com a mesma medida.

8 – Todo triângulo isósceles têm dois lados iguais. Assinale a afirmativa verdadeira sobre os ângulos do triângulo isósceles:



(a) Pelo menos um dos ângulos mede 60°.
(b) Um dos ângulos mede 90°.
(c) Dois ângulos têm a mesma medida.
(d) Todos os três ângulos têm a mesma medida.
(e) Nenhuma das afirmativas é verdadeira.

9 – Dê 3 propriedades dos paralelogramos:



1 - possuem quatro lados.
2 - com medidas diferentes.
3 - com lados diferentes.

10 – Dê um exemplo de um quadrilátero cujas diagonais não têm o mesmo comprimento. Desenhe este quadrilátero.

→ Paralelograma

Nível 1:	S N